

УДК 519.2
К47
ББК 22.171

К л я ц к и н В. И. Динамика стохастических систем: Курс лекций. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 240 с. — ISBN 5-9221-0248-6.

В книге на основе функционального подхода формулируются общие методы статистического описания и анализа стохастических динамических систем с флуктуирующими параметрами, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, уравнениями в частных производных, краевыми задачами и интегральными уравнениями. Рассматриваются также асимптотические методы анализа стохастических динамических систем (приближение дельта-коррелированного случайного поля и диффузионное приближение). Общие идеи иллюстрируются на примерах таких когерентных явлений в стохастических динамических системах, как кластеризация частиц и пассивной примеси в случайном поле скоростей и динамическая локализация плоских волн в слоистых случайных средах.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
-----------------------	---

I. Динамическое описание стохастических систем

Глава 1. Примеры динамических систем, формулировка задач и особенности поведения их решений в отдельных реализациях	12
---	----

1.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения (задачи с начальными условиями)	12
1.2. Краевые задачи для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (плоские волны в слоистых средах)	19
1.3. Уравнения в частных производных	23

Глава 2. Зависимость решения задачи от коэффициентов уравнений, начальных условий и параметров	36
--	----

2.1. Функциональная зависимость решения задачи	36
2.2. Зависимость решения от параметров задачи	40
Задачи	45

Глава 3. Индикаторная функция и уравнение Лиувилля	48
--	----

3.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения	48
3.2. Уравнения в частных производных первого порядка	49
3.3. Уравнения в частных производных высшего порядка	53
Задачи	56

II. Статистическое описание стохастических систем

Глава 4. Случайные величины, процессы и поля	58
--	----

4.1. Случайные величины и их характеристики	58
4.2. Случайные процессы, поля и их характеристики	63
4.3. Марковские процессы	77
Задачи	81

Глава 5. Расщепление корреляций	82
5.1. Общие соотношения	82
5.2. Гауссов процесс	84
5.3. Пуассоновский процесс	85
5.4. Телеграфный случайный процесс	87
5.5. Дельта-коррелированные случайные процессы	89
Задачи	95
Глава 6. Общие подходы к стохастическим динамическим системам	100
6.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения	100
6.2. Динамические системы, допускающие полный статистический анализ	103
6.3. Дельта-коррелированные процессы и поля	117
Задачи	122
Глава 7. Стохастические уравнения с марковскими флуктуациями параметров	133
7.1. Телеграфный случайный процесс	134
7.2. Гауссов марковский процесс	137
Задачи	138
Глава 8. Приближение дельта-коррелированного во времени гауссового случайного поля (обыкновенные дифференциальные уравнения)	140
8.1. Уравнение Фоккера–Планка	140
8.2. Плотность вероятностей перехода	143
8.3. Об условиях применимости уравнения Фоккера–Планка	145
Задачи	151
Глава 9. О методах решения уравнения Фоккера–Планка	159
9.1. Винеровский случайный процесс	159
9.2. Логарифмически нормальный процесс	162
9.3. Интегральные преобразования	166
9.4. Стационарные решения уравнения Фоккера–Планка	167
9.5. Краевые задачи для уравнения Фоккера–Планка (статистическое описание явления переброса)	170
9.6. Метод усреднения по быстрым осцилляциям	174
Задачи	176

Глава 10. Приближение дельта-коррелированного во времени гауссового случайного поля (интегральные причинные уравнения)	181
Задачи	184

III. Примеры когерентных явлений в стохастических динамических системах

Глава 11. Кластеризация и диффузия частиц и пассивной примеси в случайных гидродинамических потоках . .	186
11.1. Диффузия частиц в случайном поле скоростей	189
11.2. Диффузия пассивной примеси в случайном поле скоростей .	195
11.3. Учет молекулярной диффузии	203
Задачи	205
Глава 12. Локализация плоских волн в слоистых случайно-неоднородных средах	209
12.1. Статистическое описание волнового поля на границах слоя среды	214
12.2. Статистическая теория переноса излучения	222
12.3. Численное моделирование	232
Задачи	234
Список литературы	237

Предисловие

Статистические задачи занимают значительное место в различных областях физики. Если даже не говорить о задачах, традиционно относящихся к статистической физике, то имеется множество вопросов, в которых мы сталкиваемся с необходимостью учета флуктуационных эффектов. Хотя причины, вызывающие флуктуации, совершенно различны в различных задачах (это могут быть тепловые шумы, неустойчивости, турбулентность и т. д.), методы их теоретического рассмотрения часто очень схожи. При этом в ряде случаев статистическую природу самих флуктуаций можно считать известной (либо из физических соображений, либо из модельной постановки задачи), а сами физические процессы можно описывать дифференциальными, интегро-дифференциальными или интегральными уравнениями.

Мы будем рассматривать статистическую теорию динамических и волновых систем с флуктуирующими параметрами, описываемых как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями в частных производных, интегро-дифференциальными и интегральными уравнениями. Основная задача заключается в получении замкнутых уравнений для статистических характеристик таких систем и исследовании их решений с максимально возможной полнотой.

Отметим, что волновые задачи зачастую являются краевыми задачами. В этих случаях, используя метод погружения, можно переформулировать их в задачи с начальными условиями, что существенно упрощает анализ статистических проблем [1, 2].

Цель настоящей книги — показать, как различные физические задачи, описываемые стохастическими уравнениями, могут быть решены на основе общего подхода.

В стохастических задачах с флуктуирующими параметрами переменными являются функции. Поэтому естественно для их анализа использовать функциональные методы. Мы будем использовать *функциональный метод*, впервые предложенный Е. А. Новиковым для гауссовых флуктуаций параметров в теории турбулентности [3] и развитый автором в монографиях [1], [4]–[6] для общего случая динамических систем и произвольной природы флуктуирующих параметров.

Однако лишь для небольшого числа конкретных динамических систем удастся получить конечные результаты в общем виде. Более продуктивным оказывается использование асимптотического метода, основанного на разложении статистических характеристик решений динамических задач по малому параметру, являющемуся отношением времени корреляции случайного воздействия ко времени наблюдения

или другим характерным временным масштабам задачи (в ряде случаев это будут не временные, а пространственные масштабы). Этот метод по своей сути является обобщением теории броуновского движения. Это так называемое *приближение дельта-коррелированного случайного процесса (поля)*.

Применительно к задачам о динамических системах, движение которых подчиняется обыкновенным дифференциальным стохастическим уравнениям с гауссовыми флуктуациями параметров, используемый метод приводит к марковскому характеру решения задачи, а соответствующее уравнение для плотности вероятностей перехода имеет вид *уравнения Фоккера–Планка*. В более сложных задачах, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, этот метод приводит к обобщенному уравнению типа Фоккера–Планка в вариационных производных для характеристического функционала решения задачи. Для динамических систем с негауссовыми флуктуациями параметров предлагаемый метод также приводит к марковскому характеру решения. Плотность вероятностей решения соответствующих динамических стохастических уравнений удовлетворяет при этом замкнутому операторному уравнению.

В физических работах, в которых используются уравнения Фоккера–Планка и подобные ему, они обычно выписываются на основе интуитивных соображений, а динамические уравнения привлекаются лишь для подсчета входящих в них коэффициентов. Такой подход, вообще говоря, непоследователен. Действительно, статистическая задача полностью определена динамическими уравнениями и предположениями о статистике случайных воздействий. При этом, например, уравнение Фоккера–Планка должно являться логическим следствием динамических уравнений и тех или иных предположений о характере случайных воздействий. Ясно, что далеко не во всех случаях решение задачи будет сводиться к уравнению Фоккера–Планка. Функциональный подход позволяет получить как уравнение Фоккера–Планка, исходя непосредственно из динамического уравнения задачи, так и условия его применимости.

Развитый функциональный подход позволяет также для определенного класса случайных процессов (марковские процессы телеграфного типа, гауссов марковский процесс и т. п.) получать замкнутые уравнения для плотности вероятностей решения задач и с учетом конечности времени корреляции случайных воздействий.

Для гауссовых флуктуаций параметров можно построить и более физичное приближение, чем приближение дельта-коррелированного случайного процесса (поля), так называемое *диффузионное приближение*, учитывающее конечность временного радиуса корреляции. В этом приближении решение задачи является марковским, а условие его применимости имеет прозрачный физический смысл — малость статистических эффектов на масштабах порядка временного радиуса

корреляции флуктуирующих параметров. Все эти вопросы подробно обсуждаются в книге как с общих позиций, так и на примерах конкретных физических проблем.

В последнее время внимание как теоретиков, так и экспериментаторов привлекает вопрос о связи динамики усредненных статистических характеристик решения задачи с поведением решения в отдельных реализациях. Это особенно актуально для геофизических проблем, связанных с атмосферой и океаном, где, вообще говоря, отсутствует соответствующий ансамбль усреднения и экспериментаторы, как правило, имеют дело с отдельными реализациями.

Решение динамических задач для этих конкретных реализаций параметров среды практически безнадежно из-за чрезвычайной математической сложности задач. В то же время исследователей интересуют основные особенности протекающих явлений, без отвлечения на частности. Поэтому очень привлекательной оказалась идея вместо отдельных реализаций исследуемых процессов рассматривать статистические средние по всему ансамблю возможных реализаций. В настоящее время, например, практически все задачи физики атмосферы и океана в той или иной степени основываются на статистическом анализе.

Введение случайности в параметрах среды порождает стохастичность в самих физических полях. Индивидуальные реализации, например скалярных двумерных полей $\rho(\mathbf{R}, t)$, $\mathbf{R} = (x, y)$, напоминают сложный горный ландшафт со случайно распределенными пиками, провалами, хребтами и перевалами. Обычно используемые методы статистического усреднения (т.е. вычисления средних типа среднего значения — $\langle \rho(\mathbf{R}, t) \rangle$, пространственно-временной корреляционной функции — $\langle \rho(\mathbf{R}, t) \rho(\mathbf{R}', t') \rangle$ и т.п., где через $\langle \dots \rangle$ обозначено усреднение по ансамблю реализаций случайных параметров) сглаживают качественные особенности отдельных реализаций, и, зачастую, полученные статистические характеристики не только не имеют ничего общего с поведением отдельных реализаций, но даже на первый взгляд, им противоречат. Так, например, статистическое усреднение по всем реализациям делает поле средней концентрации пассивной примеси в случайном поле скоростей все более гладким, в то время как каждая его отдельная реализация, за счет перемешивания областей с существенно разной концентрацией, стремится стать все более изрезанной в пространстве.

Таким образом, статистические средние указанного типа обычно характеризуют «глобальные» пространственно-временные масштабы области, где осуществляются стохастические процессы, и ничего не говорят о деталях развития процессов внутри нее. А такие детали для данного примера существенно зависят от характера поля скоростей — является оно дивергентным или бездивергентным. Так, в первом случае, с вероятностью, равной единице, в отдельных реализациях образуются *кластеры* — компактные области повышенной концентрации

примеси, окруженные обширными областями плотности низкой концентрации. Однако при этом все статистические моменты расстояния между частицами экспоненциально растут во времени, т. е. имеет место статистическое разбегание частиц в среднем [7].

Аналогично этому имеет место экспоненциальное разбегание и лучей в среднем при распространении волн в случайных средах, и в то же время с вероятностью единица происходит образование *каустик* на конечных расстояниях. Другим примером, иллюстрирующим вышесказанное, является *динамическая локализация* плоских волн в слоистых случайно-неоднородных средах, заключающаяся в том, что реализации интенсивности волнового поля экспоненциально убывают вглубь среды с вероятностью, равной единице, при падении волны на полупространство такой среды, и в то же время все её статистические моменты экспоненциально растут с расстоянием от границы среды [1, 8].

Такие физические процессы и явления, происходящие с вероятностью единица, будем называть *когерентными* процессами и явлениями [9]. Подобную статистическую когерентность можно рассматривать как некую организацию сложной динамической системы и выделение ее *статистически устойчивых характеристик* аналогично понятию *когерентности* как *самоорганизации* многокомпонентных систем, возникающих из хаотических взаимодействий их элементов (см., например, [10]). Получить же ответ на вопрос о том, происходит ли явление с вероятностью единица, вообще говоря, достаточно сложно. Однако для ряда задач в рамках простейших моделей флуктуирующих параметров это удастся сделать аналитическим анализом. В других случаях убедиться в этом можно с помощью численного моделирования или из анализа экспериментальных данных.

Полная статистика (например, полная совокупность всех n -точечных пространственно-временных моментных функций), безусловно, содержит всю информацию о динамической системе. Однако на практике удастся исследовать лишь некоторые простейшие статистические характеристики, связанные, главным образом, с одновременными и одноточечными распределениями вероятностей. Поэтому возникает вопрос: как, зная такого рода статистические характеристики и особенности системы, получить основные количественные и качественные особенности поведения отдельных ее реализаций?

Ответ на этот вопрос дают *методы статистической топографии* (см., например, [11]). Методы статистической топографии позволяют переосмыслить «философию» статистического анализа динамических стохастических систем, что может быть полезно и для экспериментаторов, планирующих статистическую обработку экспериментального материала. Все эти вопросы подробно обсуждаются в книге.

Книга написана по материалам курса лекций, прочитанных для научных сотрудников в Институте вычислительной математике РАН. Однако она может быть полезна также студентам старших курсов

и аспирантам математических и физических специальностей, имеющим дело со стохастическими динамическими системами. Книга состоит из трёх частей.

Первую часть книги можно рассматривать как вводную. В ней рассмотрено несколько примеров типичных физических задач и обсуждаются особенности их решений в присутствии случайных возмущений параметров, определяющих их динамику. Более подробная постановка этих задач и их статистический анализ приведены в других частях книги.

Вторая часть книги посвящена общей теории статистического анализа динамических систем с флуктуирующими параметрами, описываемых как дифференциальными, так и интегральными уравнениями. Эта общая теория иллюстрируется конкретными примерами динамических систем. Здесь также рассматриваются такие асимптотические методы статистического анализа динамических систем, как приближение дельта-коррелированного случайного процесса (поля) и диффузионное приближение.

Третья часть книги посвящена анализу таких конкретных физических проблем, связанных с когерентными явлениями, как кластеризация и диффузия частиц и пассивной примеси в случайном поле скоростей и динамическая локализация при распространении плоских волн в слоистых случайных средах. Эти проблемы описываются как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями в частных производных.

Каждая глава дополнена задачами для самостоятельного решения, что должно помочь читателю быстрее «набить руку» для самостоятельной работы.

Более подробную информацию по существу излагаемого материала и библиографическим ссылкам можно найти в упомянутых выше монографиях [1], [4]–[6], обзорных работах последнего времени [2, 9, 12, 13] и недавно вышедшей монографии автора [14].

Часть I
ДИНАМИЧЕСКОЕ
ОПИСАНИЕ
СТОХАСТИЧЕСКИХ
СИСТЕМ

Глава 1

ПРИМЕРЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧ И ОСОБЕННОСТИ ПОВЕДЕНИЯ ИХ РЕШЕНИЙ В ОТДЕЛЬНЫХ РЕАЛИЗАЦИЯХ

Рассмотрим несколько примеров динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями различного типа, и обсудим особенности поведения их решения в присутствии случайных возмущений параметров системы. Здесь мы ограничимся простейшими постановками задач. Более полные постановки задач будут даны далее в соответствующих параграфах книги, посвященных их статистическому анализу.

1.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения (задачи с начальными условиями)

1.1.1. Частицы в поле случайных скоростей. Частица в поле случайных скоростей в простейшем случае описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t)$ — детерминированная составляющая поля скоростей (средний поток), а $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — случайная составляющая. В общем случае поле $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ может иметь как бездивергентную (соленоидальную, для которой $\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$), так и дивергентную (для которой $\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \neq 0$) составляющие.

Остановимся на стохастических особенностях решения задачи (1.1) для системы частиц в отсутствие среднего потока ($\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) = 0$). С формальной точки зрения, исходя из уравнения (1.1), каждая частица движется независимым образом. Однако если случайное поле $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ имеет конечный пространственный радиус корреляции l_{cor} , то частицы, расстояние между которыми меньше l_{cor} , находятся в общей зоне влияния случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и могут появиться новые коллективные особенности в динамике такой системы частиц.

Для стационарного поля скоростей, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{u}(\mathbf{r})$, уравнение (1.1) упрощается и принимает вид

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0. \quad (1.2)$$

Отсюда ясно, что стационарные точки $\tilde{\mathbf{r}}$, в которых $\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{r}}) = 0$, остаются неподвижными точками. При этом, в зависимости от того, являются они устойчивыми или неустойчивыми, они будут притягивать или отталкивать частицы, находящиеся в их окрестности. В силу случайности функции $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ положение точек $\tilde{\mathbf{r}}$ также случайно.

Аналогичная ситуация должна иметь место и в общем случае пространственно-временного случайного поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$.

Если какие-то точки $\tilde{\mathbf{r}}$ в течении достаточно большого времени остаются устойчивыми, то в отдельных реализациях случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ в их окрестностях должны образовываться кластерные области частиц (т.е. компактные области повышенной концентрации частиц, расположенные большей частью в разреженных зонах). Если же смена устойчивости этих точек на неустойчивость происходит достаточно быстро и частицы не успевают значительно перестроиться, то кластерных областей образовываться не будет.

Численное моделирование [15, 16] показывает, что динамика системы частиц существенно различается в зависимости от того, является ли случайное поле скоростей бездивергентным или дивергентным. Так, на рис. 1.1, *а* для конкретной реализации бездивергентного стационарного во времени поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ схематически изображена эволюция системы частиц (двумерный случай), равномерно расположенных в круге, в безразмерном времени, связанном со статистическими параметрами поля $\mathbf{u}(\mathbf{r})$. В этом случае площадь, ограниченная контуром, сохраняется и частицы относительно равномерно заполняют область, ограниченную деформированным контуром. Возникает лишь сильная изрезанность фрактального характера этого контура. Для случая же дивергентного поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ частицы, равномерно расположенные в квадрате в начальный момент времени, в процессе временной эволюции образуют кластерные области. Результаты численного моделирования для этого случая приведены на рис. 1.1, *б*. Подчеркнем, что образование кластеров — чисто кинематический эффект. Очевидно, что при усреднении по ансамблю реализаций случайного поля скоростей такая особенность динамики частиц исчезает.

Увидеть, как происходит кластеризация частиц, можно на простейшем примере [13], в котором случайное поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ имеет структуру

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(t)f(\mathbf{r}), \quad (1.3)$$

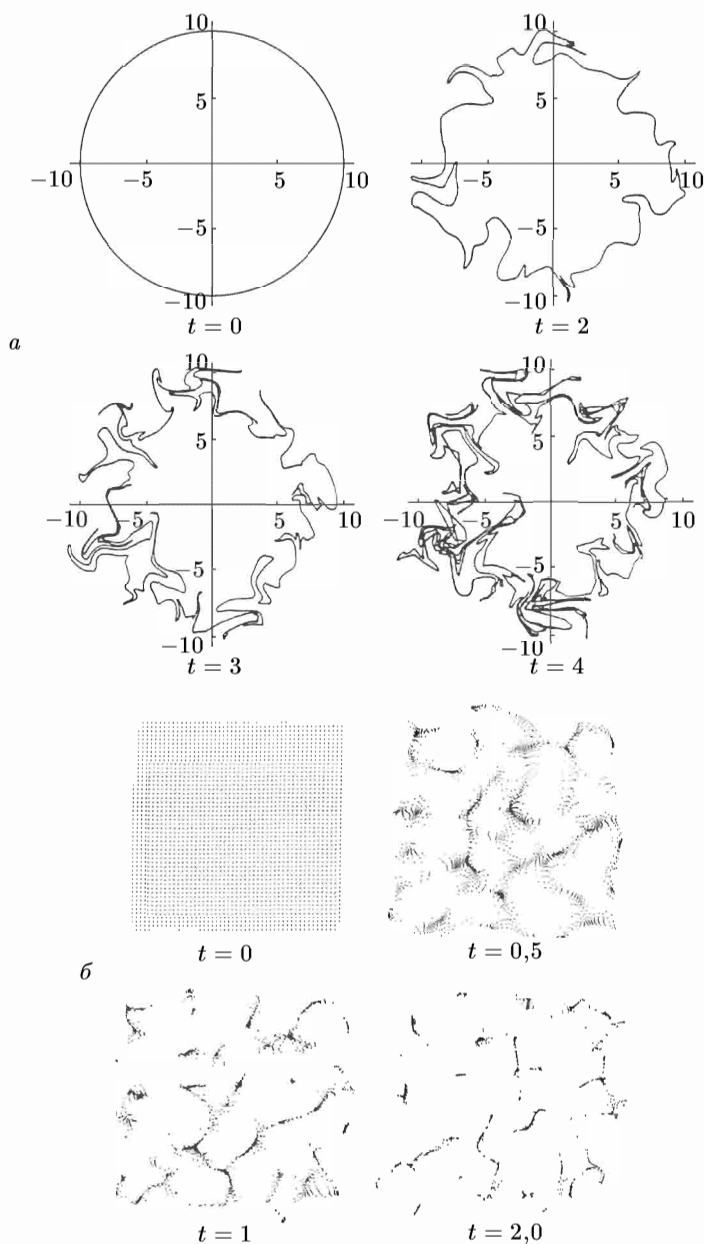


Рис. 1.1. Результаты численного моделирования диффузии системы частиц, описываемых уравнениями (1.2) в соленоидальном (*a*) и дивергентном (*б*) случайных полях скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r})$

где $\mathbf{v}(t)$ — случайный векторный процесс, а детерминированная функция

$$f(\mathbf{r}) = \sin 2(\mathbf{k}\mathbf{r}) \quad (1.4)$$

является функцией одной переменной. Отметим, что такой вид функции $f(\mathbf{r})$ соответствует первому члену ряда разложения функции $f(\mathbf{r})$ по гармоническим составляющим и обычно используется при численном моделировании задачи.

В этом случае уравнение (1.1) запишется в виде

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t) \sin 2(\mathbf{k}\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0.$$

Для такой модели движение частицы по направлениям вектора $\mathbf{k}$ и перпендикулярном ему расщепляется, и если выбрать ось x в направлении вектора $\mathbf{k}$, то уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= v_x(t) \sin(2kx), \quad x(0) = x_0, \\ \frac{d}{dt}\mathbf{R}(t) &= \mathbf{v}_\mathbf{R}(t) \sin(2kx), \quad \mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Решение первого уравнения (1.5) имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{k} \arctan \left[e^{T(t)} \tan(kx_0) \right], \quad (1.6)$$

где

$$T(t) = 2k \int_0^t d\tau v_x(\tau), \quad (1.7)$$

а последнее уравнение (1.5) можно переписать в виде

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + \sin(2kx_0) \int_0^t d\tau \frac{\mathbf{v}_\mathbf{R}(\tau)}{e^{-T(\tau)} \cos^2(kx_0) + e^{T(\tau)} \sin^2(kx_0)}. \quad (1.8)$$

Таким образом, если начальное положение частицы x_0 такое, что

$$kx_0 = n \frac{\pi}{2}, \quad (1.9)$$

где $n = 0, \pm 1, \dots$, то частица будет неподвижной и $\mathbf{r}(t) \equiv \mathbf{r}_0$.

Равенства (1.9) определяют в общем случае плоскости или в одномерном случае — точки. Они соответствуют нулям поля скоростей. Устойчивость этих точек, однако, зависит от знака функции $\mathbf{v}(t)$, который изменяется в процессе эволюции. В результате можно ожидать, что частицы будут сгущаться в окрестностях этих точек, если $v_x(t) \neq 0$, что и должно соответствовать кластеризации частиц.

Для бездивергентного поля скорости, когда $v_x(t) = 0$, и, следовательно, $T(t) \equiv 0$,

$$x(t) \equiv x_0, \quad \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + \sin 2(kx_0) \int_0^t d\tau \mathbf{v}_R(\tau),$$

т. е. никакой кластеризации не наблюдается.

На рис. 1.2, *a* представлен фрагмент реализации случайного процесса $T(t)$, полученный путем численного интегрирования равенства (1.7) для одной реализации случайного процесса $v_x(t)$, используемый для

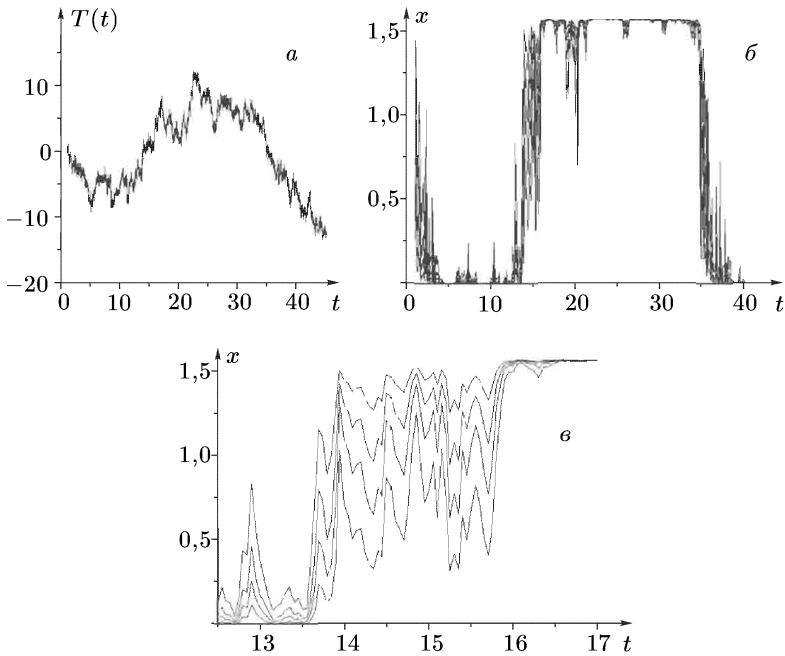


Рис. 1.2. Кусок реализации случайного процесса $T(t)$ (*a*), полученный путем численного интегрирования равенства (1.7) для одной реализации случайного процесса $v_x(t)$ и используемый для расчета временной эволюции x координат четырех частиц (*б, в*)

численного моделирования временной эволюции координат четырех частиц $x(t)$ ($x \in (0, \pi/2)$) с начальными координатами $x_0(i) = \frac{\pi}{2} \frac{i}{5}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) (рис. 1.2, *б*). Из рис. 1.2, *б* видно, что частицы в безразмерный момент времени $t \approx 4$ образуют кластер в окрестности точки $x = 0$. Далее в момент времени $t \approx 16$ первоначальный кластер исчезает и образуется новый кластер в окрестности точки $x = \pi/2$. В момент

времени $t \approx 40$ снова образуется кластер в окрестности точки $x = 0$ и т. д. При этом частицы в кластерах помнят свою предысторию и расходятся на значительные расстояния в переходных временных областях (рис. 1.2, в).

Таким образом, видим, что в рассматриваемом примере кластер, как цельное образование, не переходит из одной области пространства в другую, а разрушается с последующим образованием нового. При этом время существования кластеров значительно больше, чем переходное время. По видимому, это свойство конкретной рассматриваемой модели поля скоростей и возникает оно из-за стационарности точек (1.9).

Что касается диффузии частиц по оси y , то в этом направлении образования кластеров не наблюдается.

Отметим, что впервые, по-видимому, такого рода кластеризация для системы частиц была обнаружена в работах [17, 18], где в рамках простейших уравнений динамики атмосферы проводилось численное моделирование так называемого Eole эксперимента. В рамках этого глобального эксперимента в 1970–1971 гг. было запущено в Аргентине 500 баллонов постоянной плотности, которые распространялись по всему южному полушарию на высоте примерно в 12 км. На рис. 1.3 представлено распределение баллонов по южному полушарию на 105 сутки после начала численного моделирования этого процесса [17], из которого ясно видно, что баллоны концентрируются в группы, что и соответствует кластеризации.

Остановимся теперь на другом стохастическом аспекте, связанном с динамическими уравнениями типа (1.1), а именно на явлении *переброса*, обусловленном случайными флуктуациями.

Рассмотрим одномерное нелинейное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= x(1 - x^2) + f(t), \\ x(0) &= x_0; \quad \lambda > 0, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где $f(t)$ — случайная функция времени.

При отсутствии случайности ($f(t) \equiv 0$) решение уравнения (1.10) имеет два устойчивых стационарных состояния $x = \pm 1$ и одно неустойчивое состояние $x = 0$. В зависимости от начального условия решение уравнения (1.10) придет в одно из устойчивых состояний. Однако в присутствии малых случайных возмущений $f(t)$ динамическая система (1.10) сперва придет в окрестность одного из устойчивых состояний, а затем,

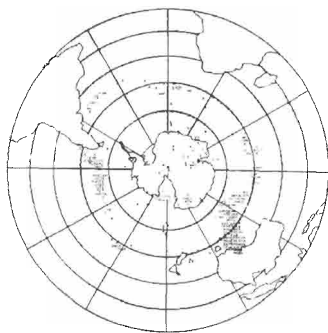


Рис. 1.3. Распределение баллонов в атмосфере через 105 суток после начала численного эксперимента

по прошествии некоторого времени, будет переброшена в окрестность другого устойчивого состояния. Очевидно, что подобная ситуация может осуществляться и в более сложных случаях.

Система уравнений типа (1.1) также описывает динамику частицы в поле случайных внешних сил $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$. В простейшем случае динамика частицы при наличии линейного трения описывается системой дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) &= \mathbf{v}(t), & \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) &= -\lambda\mathbf{v}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{r}(0) &= \mathbf{r}_0, & \mathbf{v}(0) &= \mathbf{v}_0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

В детерминированном потенциальном поле динамика частицы при наличии линейного трения и случайных сил описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) &= \mathbf{v}(t), & \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) &= -\lambda\mathbf{v}(t) - \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{r}(0) &= \mathbf{r}_0, & \mathbf{v}(0) &= \mathbf{v}_0, \end{aligned} \quad (1.12)$$

которая является простейшим частным случаем *гамильтоновых систем*. В статистических задачах уравнения типа (1.11), (1.12) широко используются для описания *броуновского движения* частиц.

1.1.2. Системы с сингулярным поведением. Рассмотрим простейший пример стохастической системы, возникающей в статистической теории волн и имеющей сингулярное поведение во времени:

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\lambda x^2(t) + f(t), \quad x(0) = x_0, \quad \lambda > 0, \quad (1.13)$$

где $f(t)$ — случайная функция времени.

В отсутствие случайностей ($f(t) = 0$) решение уравнения (1.7) имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{\lambda(t - t_0)}, \quad t_0 = -\frac{1}{\lambda x_0}.$$

Если $x_0 > 0$, то $t_0 < 0$ и решение задачи $x(t)$ монотонно стремится к нулю с ростом времени. Если же $x_0 < 0$, то решение $x(t)$ обращается в $\{-\infty\}$ в течение конечного времени $t_0 = -1/\lambda x_0$, т. е. становится *сингулярным* и имеет *взрывной характер*. В этом случае влияние случайной силы $f(t)$ на динамику системы не существенно. Оно становится важным только в случае положительного значения x_0 . В этом случае решение задачи, слегка флуктуируя, уменьшается с ростом времени, оставаясь положительным. При достижении достаточно малого значения $x(t)$ оно будет «переброшено» под действием силы $f(t)$ в область отрицательных значений x и по прошествии некоторого конечного времени обратится в $\{-\infty\}$.

Таким образом, в стохастическом случае для любых значений величины x_0 решение задачи (1.13) имеет взрывной характер и обращается в $\{-\infty\}$ в течение конечного времени t_0 . Примерная реализация поведения решения задачи (1.13) $x(t)$ во времени для $t > t_0$ имеет как бы *квази-периодическую* структуру и схематически изображена на рис. 1.4.

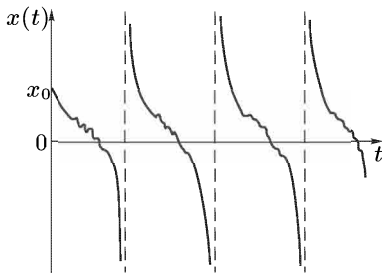


Рис. 1.4. Примерная реализация решения уравнения (1.13)

1.1.3. Осциллятор с переменной случайной частотой (стохастический параметрический резонанс).

Рассмотренные выше стохастические примеры соответствовали аддитивному включению случайных воздействий на динамику систем. Простейший нетривиальный пример мультипликативного воздействия (параметрического) можно проиллюстрировать на примере *стохастического параметрического резонанса*, описываемого уравнением второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} x(t) + \omega_0^2 [1 + z(t)] x(t) &= 0, \\ x(0) &= x_0, \quad \frac{d}{dt} x(0) = y_0, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где $z(t)$ — случайная функция времени. Это уравнение возникает практически во всех областях физики. С физической точки зрения очевидно, что динамическая система (1.14) подвержена параметрическому возбуждению, так как случайный процесс $z(t)$ содержит гармонические компоненты всех частот, включая значения $2\omega_0/n$ ($n = 1, 2, \dots$), которые в точности соответствуют параметрическому резонансу в системе с периодической функцией $z(t)$ (например, *уравнение Матье*).

1.2. Краевые задачи для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (плоские волны в слоистых средах)

В предыдущем параграфе мы рассмотрели несколько примеров динамических систем, описываемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями. Рассмотрим теперь простейшую линейную краевую задачу, а именно стационарную одномерную волновую задачу.

Пусть слой неоднородной среды занимает часть пространства $L_0 < x < L$. Плоская волна с единичной амплитудой $u_0(x) = e^{-ik(x-L)}$ падает на него из области $x > L$ (рис. 1.5, а). Волновое поле в слое

неоднородной среды описывается уравнением Гельмгольца

$$\frac{d^2}{dx^2} u(x) + k^2(x)u(x) = 0, \quad (1.15)$$

где

$$k^2(x) = k^2[1 + \varepsilon(x)],$$

а функция $\varepsilon(x)$ описывает неоднородности среды. Вне слоя считаем, что $k(x) = k$, т.е. $\varepsilon(x) = 0$; внутри же слоя предполагаем, что $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + i\gamma$, где $\varepsilon_1(x)$ — действительная часть, ответственная за процессы рассеяния волны в среде, а мнимая часть $\gamma \ll 1$ описывает поглощение волны в среде.

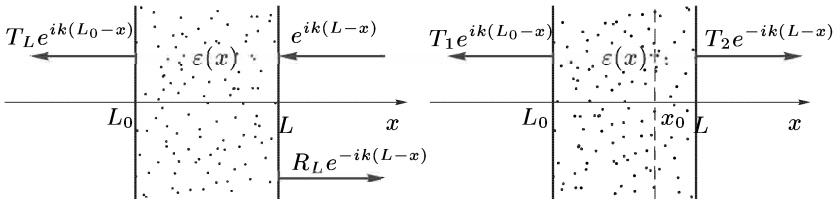


Рис. 1.5. Падение плоской волны на слой среды (а) и источник внутри среды (б)

В области $x > L$ волновое поле имеет структуру

$$u(x) = e^{-ik(x-L)} + R_L e^{ik(x-L)},$$

где R_L — комплексный коэффициент отражения. В области $x < L_0$ волновое поле имеет структуру

$$u(x) = T_L e^{ik(L_0-x)},$$

где T_L — комплексный коэффициент прохождения. Краевыми условиями для уравнения (1.15) являются условия непрерывности функции и ее производной на границах слоя, которые можно записать в виде

$$u(L) + \frac{i}{k} \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=L} = 2, \quad u(L_0) - \frac{i}{k} \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=L_0} = 0. \quad (1.16)$$

Таким образом, волновое поле в слое неоднородной среды описывается краевой задачей (1.15), (1.16). Само же динамическое уравнение (1.15) по внешнему виду совпадает с уравнением (1.14). Отметим, что в этом случае функция $\varepsilon(x)$ разрывна на границах слоя и мы будем называть краевую задачу (1.15), (1.16) краевой задачей с несогласованными границами. Для таких задач рассеяние волны происходит не только на неоднородностях среды, но и на скачках функции $\varepsilon(x)$ на границах слоя.

Если параметры среды $\varepsilon_1(x)$ заданы статистически, то решение стохастической задачи (1.15), (1.16) состоит в нахождении статистических характеристик величин

$$R_L = u(L) - 1, \quad T_L = u(L_0),$$

связанных со значением поля на границах слоя, и интенсивности волнового поля

$$I(x) = |u(x)|^2$$

внутри неоднородной среды, что составляет предмет изучения *статистической теории переноса излучения*.

Остановимся на некоторых особенностях решения стохастической краевой задачи (1.15), (1.16). При отсутствии неоднородностей среды ($\varepsilon_1(x) = 0$) и для достаточно малого затухания γ интенсивность волнового поля слабо, экспоненциальным образом, затухает в глубь среды по закону

$$I(x) = |u(x)|^2 = e^{-k\gamma(L-x)}. \quad (1.17)$$

На рис. 1.6 приведены две реализации интенсивности волнового поля в достаточно толстом слое среды, соответствующие двум реализациям неоднородностей среды [19], полученные численные моделированием. Не останавливаясь на детальном описании параметров задачи, отметим только, что на этом рисунке явно просматривается тенденция резкого экспоненциального спада (с большими выбросами как в сторону увеличения величины интенсивности, так и к значениям, близким

к нулю), обусловленная многократным переотражением волны в хаотически неоднородной среде (*динамическая локализация*). При этом параметр $\gamma \ll 1$ и, следовательно, влияние малого поглощения на динамическую локализацию не существенно.

Краевую задачу (1.15), (1.16) с помощью *метода погружения* (см. следующий параграф) можно переформулировать в виде динамической задачи с начальными условиями по параметру L — геометрическому положению правой границы слоя, рассматривая решение краевой задачи как функцию этого параметра. Так коэффициент отражения R_L

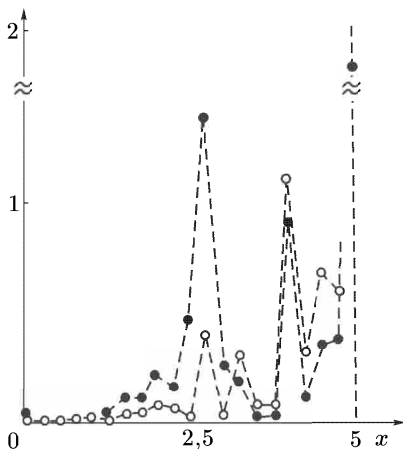


Рис. 1.6. Численное моделирование динамической локализации для двух реализаций неоднородностей среды

удовлетворяет при этом уравнению Риккати:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} R_L &= 2ikR_L + \frac{ik}{2} \varepsilon(L) (1 + R_L)^2, \\ R_{L_0} &= 0, \end{aligned} \quad (1.18)$$

а волновое поле в слое среды $u(x) \equiv u(x; L)$ описывается линейным уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} u(x; L) &= ik u(x; L) + \frac{ik}{2} \varepsilon(L) (1 + R_L) u(x; L), \\ u(x; x) &= 1 + R_x. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Из уравнения (1.18) при отсутствии затухания (т.е. при $\gamma = 0$) вытекает уравнение для квадрата модуля коэффициента отражения $W_L = |R_L|^2$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} W_L &= -\frac{ik}{2} \varepsilon_1(L) (R_L - R_L^*) (1 - W_L), \\ W_{L_0} &= 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Отметим, что если граница слоя L_0 является полностью отражающей границей, то начальным условием для уравнения (1.20) будет условие $W_{L_0} = 1$. В этом случае падающая на слой волна полностью отражается этим слоем, т.е. $W_L = 1$.

В общем случае произвольной границы L_0 для полупространства случайно-неоднородной среды ($L_0 \rightarrow -\infty$) при отсутствии затухания формально также имеется «стационарное», не зависящее от L решение $W_L = 1$, соответствующее полному отражению падающей волны. Это решение, как будет показано далее, действительно осуществляется в статистической задаче с вероятностью, равной единице.

Если, в отличие от рассмотренной задачи, функция $k(x)$ непрерывна на границе $x = L$, т.е. волновое число в свободном полупространстве $x > L$ равно $k(L)$, то краевыми условиями для задачи (1.15), вместо условий (1.16), будут условия

$$u(L) + \frac{i}{k(L)} \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=L} = 2, \quad u(L_0) - \frac{i}{k(L_0)} \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=L_0} = 0. \quad (1.21)$$

Краевую задачу (1.15), (1.21) будем называть задачей с *согласованной границей*.

Аналогичным образом поле точечного источника, расположенного в слое случайно-неоднородной среды, описывается краевой задачей для

функции Грина уравнения Гельмгольца:

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x; x_0) + k^2[1 + \varepsilon(x)]G(x; x_0) = 2ik\delta(x - x_0),$$

$$G(L; x_0) + \frac{i}{k} \left. \frac{dG(x; x_0)}{dx} \right|_{x=L} = 0, \quad G(L_0; x_0) - \frac{i}{k} \left. \frac{dG(x; x_0)}{dx} \right|_{x=L_0} = 0.$$

Вне слоя среды решение в этом случае имеет вид уходящих волн (рис. 1.5, б)

$$G(x; x_0) = T_1 e^{ik(x-L)} \quad (x \geq L),$$

$$G(x; x_0) = T_2 e^{-ik(x-L_0)} \quad (x \leq L_0).$$

Положение источника на границе слоя $x_0 = L$ соответствует краевой задаче (1.15), (1.16) о падении волны на слой среды, т. е.

$$G(x; L) = u(x; L).$$

1.3. Уравнения в частных производных

Обратимся теперь к примерам динамических систем (динамических полей), описываемых уравнениями в частных производных.

1.3.1. Пассивная примесь в случайном поле скоростей. Простейшими задачами, описываемыми линейными уравнениями в частных производных первого порядка, являются уравнения непрерывности для плотности консервативной примеси $\rho(\mathbf{r}, t)$ и перенос неконсервативной пассивной примеси $q(\mathbf{r}, t)$ случайным полем скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \right) \rho(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}), \quad (1.22)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) q(\mathbf{r}, t) = 0, \quad q(\mathbf{r}, 0) = q_0(\mathbf{r}). \quad (1.23)$$

Для консервативной примеси сохраняется общая масса примеси

$$M_0 = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r} \rho_0(\mathbf{r}). \quad (1.24)$$

Уравнения в частных производных первого порядка (1.22), (1.23) могут быть решены методом характеристик. Вводя *характеристические кривые* (в данном случае — частицы)

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad (1.25)$$

эти уравнения можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho(t) &= -\frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \rho(t), \quad \rho(0) = \rho_0(\mathbf{r}_0), \\ \frac{d}{dt} q(t) &= 0, \quad q(0) = q_0(\mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Такая формулировка задачи соответствует *лагранжеву описанию*, в то время как исходные динамические уравнения (1.22), (1.23) соответствуют *эйлерову описанию*.

Характеристический векторный параметр $\mathbf{r}_0$ введен в систему уравнений (1.25), (1.26). Уравнение (1.25) совпадает при этом с уравнением (1.1), описывающим динамику частицы в поле случайных скоростей.

Решение системы уравнений (1.25), (1.26) зависит от начального значения $\mathbf{r}_0$, т. е.

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t \mid \mathbf{r}_0), \quad \rho(t) = \rho(t \mid \mathbf{r}_0), \quad (1.27)$$

что будем отмечать вертикальной чертой.

Первое из равенств (1.27) можно рассматривать как алгебраическое уравнение для характеристического параметра $\mathbf{r}_0$, решение которого

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t)$$

существует, так как *расходимость* $j(t \mid \mathbf{r}_0) = \det \|j_{ik}(t \mid \mathbf{r}_0)\|$ отлична от нуля, где матрица $j_{ik}(t \mid \mathbf{r}_0) = \partial r_i(t \mid \mathbf{r}_0) / \partial r_{0k}$. Следовательно, решение исходного уравнения (1.22) можно записать в виде

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(t \mid \mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t)) = \int d\mathbf{r}_0 \rho(t \mid \mathbf{r}_0) j(t \mid \mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}(t \mid \mathbf{r}_0) - \mathbf{r}).$$

Интегрируя это выражение по $\mathbf{r}$, получаем, в силу (1.24), связь функций $\rho(t \mid \mathbf{r}_0)$ и $j(t \mid \mathbf{r}_0)$ в виде

$$\rho(t \mid \mathbf{r}_0) = \frac{\rho_0(\mathbf{r}_0)}{j(t \mid \mathbf{r}_0)}, \quad (1.28)$$

и, следовательно, поле плотности можно переписать в виде равенства

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}_0 \rho_0(\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}(t \mid \mathbf{r}_0) - \mathbf{r}), \quad (1.29)$$

устанавливающего связь между лагранжевыми и эйлеровыми характеристиками. Отметим, что дельта функция в правой части этого равенства называется *индикаторной функцией* для положения лагранжевой частицы (см. следующую главу).

Для бездивергентного поля скоростей ($\operatorname{div} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = 0$) расходимость частицы, также, как и ее плотность, сохраняется, т. е.

$$j(t \mid \mathbf{r}_0) = 1, \quad \rho(t \mid \mathbf{r}_0) = \rho_0(\mathbf{r}_0), \quad q(t \mid \mathbf{r}_0) = q_0(\mathbf{r}_0).$$

Остановимся теперь на стохастических особенностях решения задачи (1.22). Удобно анализировать динамику случайных полей в *топографических* понятиях. Так, для бездивергентного поля скоростей эволюция во времени контура постоянных значений концентрации $\rho = \text{const}$ совпадает с динамикой частиц в этом поле скоростей и совпадает, следовательно, с динамикой, приведенной на рис. 1.1, *a*. В этом случае площадь, ограниченная контуром, сохраняется и, как видно из рисунка, возникает сильная изрезанность картины, т. е. происходит как обострение градиентов, так и возникновение динамики контура на все меньших и меньших масштабах. В другом предельном случае (дивергентного поля скоростей) площадь, ограниченная контуром, стремится к нулю и поле плотности сжимается, образуя кластеры. Примеры численного моделирования для этого случая приведены в работах [15, 16]. При усреднении по ансамблю реализаций эти особенности динамики исчезают. Проследить образование кластеров в эйлеровом описании можно на примере случайного поля скоростей вида (1.3), (1.4) [13].

Для бездивергентного поля скорости, когда $v_x(t) = 0$, $T(t) \equiv 0$,

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0 \left(\mathbf{r} - \sin(2kx) \int_0^t d\tau \mathbf{v}(\tau) \right)$$

и кластеризации не наблюдается.

При $v_x(t) \neq 0$, в частном случае, когда начальное распределение плотности не зависит от $\mathbf{r}$, т. е. $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0$, поле плотности $\rho(\mathbf{r}, t)$ описывается выражением

$$\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\rho_0} = \frac{1}{e^{T(t)} \cos^2(kx) + e^{-T(t)} \sin^2(kx)}, \quad (1.30)$$

где функция $T(t)$ описывается формулой (1.7).

На рис. 1.7, *a–г* представлена пространственно-временная эволюция эйлерова поля плотности $1 + \rho(\mathbf{r}, t)/\rho_0$, рассчитанная по формуле (1.30) в безразмерных пространственно-временных переменных (единица добавлена, чтобы не иметь проблем с близкими к нулю значениями плотности в логарифмическом масштабе). Из этих рисунков наглядно видно последовательное перетекание поля плотности к узким окрестностям точек $x \approx 0$ и $x \approx \pi/2$, т. е. образование кластеров. Так, на рис. 1.7, *a, б* изображена временная последовательность ($t = 1 \div 10$) образования кластера в окрестности точки $x \approx 0$. На рис. 1.7, *в, г* изображена временная последовательность ($t = 16 \div 25$) перетекания поля плотности из окрестности точки $x \approx 0$ в окрестность точки $x \approx \pi/2$, т. е. ликвидация кластера в окрестности $x \approx 0$ и рождение нового кластера в окрестности $x \approx \pi/2$. Далее этот процесс повторяется во времени. «Время жизни» таких кластеров, как видно из рисунков,

имеет для рассматриваемой модели порядок «времени их формирования».

Рассмотренная модель позволяет понять основное отличие диффузии в дивергентных и бездивергентных полях скоростей. В бездивергентных (несжимаемых) полях скорости частицы (и, следовательно, по-

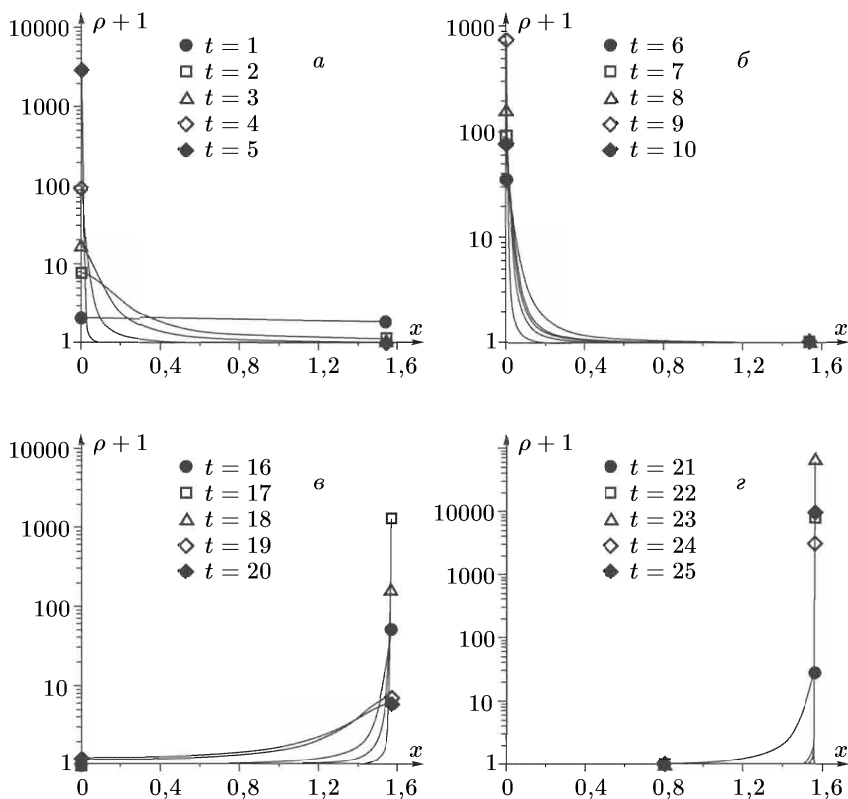


Рис. 1.7. Пространственно-временная эволюция эйлерового поля плотности, описываемая формулой (1.30)

ле плотности) не успевают притягиваться к устойчивым центрам притяжения за время их существования и частицы слегка флуктуируют относительно своего первоначального местонахождения. В дивергентном же (сжимаемом) поле скоростей за то же время существования устойчивых центров притяжения частицы успевают притянуться к ним, так как этот процесс притяжения убыстряется экспоненциальным образом, что наглядно проявляется в формуле (1.30).

Из описанной картины ясно, что динамическое уравнение (1.22) в качестве модельного уравнения, описывающего физическую реаль-

ность, может использоваться только на ограниченном интервале времени. Для более полного анализа необходимо включить в рассмотрение поле градиента концентрации примеси $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \nabla \rho(\mathbf{r}, t)$, которое описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \right) p_i(\mathbf{r}, t) = -p_k(\mathbf{r}, t) \frac{\partial U_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} - \rho(\mathbf{r}, t) \frac{\partial^2 \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i \partial \mathbf{r}},$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{p}_0(\mathbf{r}) = \nabla \rho_0(\mathbf{r}). \quad (1.31)$$

Кроме того, следует учесть также эффект молекулярной диффузии (с коэффициентом молекулярной диффузии μ), сглаживающий упомянутое обострение градиентов, который описывается линейным уравнением в частных производных второго порядка:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \right) \rho(\mathbf{r}, t) = \mu \Delta \rho(\mathbf{r}, t),$$

$$\rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}). \quad (1.32)$$

1.3.2. Квазилинейные и нелинейные уравнения с производными первого порядка. Рассмотрим теперь простейшее квазилинейное уравнение для скалярной величины $q(\mathbf{r}, t)$, которое запишем в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(t, q) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) q(\mathbf{r}, t) = Q(t, q),$$

$$q(\mathbf{r}, 0) = q_0(\mathbf{r}), \quad (1.33)$$

где, для простоты изложения, считаем функции $\mathbf{U}(t, q)$ и $Q(t, q)$ явно не зависящими от пространственной переменной $\mathbf{r}$.

Дополним уравнение (1.33) уравнением для поля градиента $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \nabla q(\mathbf{r}, t)$, вытекающим из (1.33), и уравнением непрерывности для сохраняющейся величины $I(\mathbf{r}, t)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(t, q) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \{ \mathbf{U}(t, q) \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) \}}{\partial q} \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial Q(t, q)}{\partial q} \mathbf{p}(\mathbf{r}, t),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} I(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \{ \mathbf{U}(t, q) I(\mathbf{r}, t) \} = 0, \quad I(\mathbf{r}, 0) = I_0(\mathbf{r}). \quad (1.34)$$

Из (1.34) следует, что

$$\int d\mathbf{r} I(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r} I_0(\mathbf{r}). \quad (1.35)$$

С помощью характеристических кривых, определяемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнения (1.33) и

(1.34) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{U}(t, q), \quad \frac{d}{dt} q(t) = Q(t, q), \\ \frac{d}{dt} \mathbf{p}(t) &= -\frac{\partial \{\mathbf{U}(t, q) \mathbf{p}(t)\}}{\partial q} \mathbf{p}(t) + \frac{\partial Q(t, q)}{\partial q} \mathbf{p}(t), \\ \frac{d}{dt} I(t) &= -\frac{\partial \{\mathbf{U}(t, q) \mathbf{p}(t)\}}{\partial q} I(t), \\ \mathbf{r}(0) &= \mathbf{r}_0, \quad q(0) = q_0(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{p}(0) = \frac{\partial q_0(\mathbf{r}_0)}{\partial \mathbf{r}_0}, \quad I(0) = I_0(\mathbf{r}_0).\end{aligned}\tag{1.36}$$

Таким образом, в лагранжевом описании мы имеем в качестве исходной задачи систему уравнений (1.36). При этом первые два уравнения, определяющие характеристические кривые, являются замкнутой системой уравнений.

Выражая теперь характеристический параметр $\mathbf{r}_0$ через t и $\mathbf{r}$, можно в эйлеровом описании записать решение уравнений (1.33) и (1.34) в виде

$$\begin{aligned}q(\mathbf{r}, t) &= \int d\mathbf{r}_0 q(t | \mathbf{r}_0) j(t | \mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0) - \mathbf{r}), \\ I(\mathbf{r}, t) &= \int d\mathbf{r}_0 I(t | \mathbf{r}_0) j(t | \mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0) - \mathbf{r}).\end{aligned}\tag{1.37}$$

Особенностью перехода от лагранжевого описания (1.36) к эйлеровому (1.37) является то обстоятельство, что теперь возникают, как правило, неоднозначности, что приводит к разрывности решения (1.37). Это связано с тем, что теперь расходимость, определитель Якобиевой матрицы,

$$j(t | \mathbf{r}_0) = \det \left\| \frac{\partial}{\partial r_{0k}} r_i(t | \mathbf{r}_0) \right\|$$

может обращаться в нуль в некоторые моменты времени.

Величины $I(t | \mathbf{r}_0)$ и $j(t | \mathbf{r}_0)$ не являются независимыми. В самом деле, интегрируя $I(\mathbf{r}, t)$ в (1.37) по $\mathbf{r}$ и учитывая равенство (1.35), видим, что имеется интеграл эволюции

$$j(t | \mathbf{r}_0) = \frac{I_0(\mathbf{r}_0)}{I(t | \mathbf{r}_0)},\tag{1.38}$$

откуда следует, что обращение в нуль расходимости $j(t | \mathbf{r}_0)$ сопровождается обращением консервативной величины $I(t | \mathbf{r}_0)$ в бесконечность.

Все эти результаты, очевидно, легко обобщаются на случай, когда функции $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t, q)$ и $Q(\mathbf{r}, t, q)$ в (1.33) явно зависят от пространственной переменной $\mathbf{r}$, а также когда само уравнение (1.33) является векторным уравнением. В качестве конкретного физического примера приведем уравнение для поля скорости малоинерционных частиц

$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ в гидродинамическом потоке, описываемом полем скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ (см. например, [20]):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = -\lambda [\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)]. \quad (1.39)$$

Параметр $\tau = 1/\lambda$ есть известное время Стокса, зависящее от размера частиц и молекулярной вязкости. Из уравнения (1.39) вытекает, что поле скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ является дивергентным полем ($\operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \neq 0$) даже для бездивергентного гидродинамического потока $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ ($\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$), и, как следствие, возникает кластеризация поля плотности числа частиц $n(\mathbf{r}, t)$ в бездивергентных гидродинамических потоках [21], описываемого линейным уравнением непрерывности

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \right) n(\mathbf{r}, t) = 0, \quad n(\mathbf{r}, 0) = n_0(\mathbf{r}) \quad (1.40)$$

типа уравнения (1.22).

Для большого значения параметра $\lambda \rightarrow \infty$ (безинерционные частицы)

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \quad (1.41)$$

и кластеризация поля плотности числа частиц $n(\mathbf{r}, t)$ в бездивергентных гидродинамических потоках отсутствует.

Уравнение в частных производных первого порядка (1.39) (эйлерово описание) эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных характеристических уравнений (лагранжево описание):

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{V}(\mathbf{r}(t), t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad (1.42)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{V}(t) = -\lambda [\mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}(t), t)], \quad \mathbf{V}(0) = \mathbf{V}_0(\mathbf{r}_0),$$

которые описывают диффузию частицы под действием случайной внешней силы с линейным трением и совпадают с уравнением (1.11). В простейшем случае случайной силы, не зависящей от пространственной координаты, имеем систему уравнений:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t), \quad \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) = -\lambda [\mathbf{v}(t) - \mathbf{f}(t)], \quad (1.43)$$

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0.$$

Рассмотрим теперь общий случай нелинейного скалярного уравнения в частных производных первого порядка, которое запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} q(\mathbf{r}, t) + H(\mathbf{r}, t, q, \mathbf{p}) = 0, \quad q(\mathbf{r}, 0) = q_0(\mathbf{r}), \quad (1.44)$$

где $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \nabla q(\mathbf{r}, t)$.

Это уравнение можно записать в рамках лагранжевого описания в виде системы характеристических уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} H(\mathbf{r}, t, q, \mathbf{p}), \quad \mathbf{r}(0 | \mathbf{r}_0) = \mathbf{r}_0; \\ \frac{d}{dt} \mathbf{p}(t | \mathbf{r}_0) &= - \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{p} \frac{\partial}{\partial q} \right) H(\mathbf{r}, t, q, \mathbf{p}), \quad \mathbf{p}(0 | \mathbf{r}_0) = \mathbf{p}_0(\mathbf{r}_0); \\ \frac{d}{dt} q(t | \mathbf{r}_0) &= \left(\mathbf{p} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} - 1 \right) H(\mathbf{r}, t, q, \mathbf{p}), \quad q(0 | \mathbf{r}_0) = q_0(\mathbf{r}_0).\end{aligned}\quad (1.45)$$

Дополним теперь уравнение (1.44) уравнением для консервативной величины $I(\mathbf{r}, t)$, описываемой уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} I(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left\{ \frac{\partial H(\mathbf{r}, t, q, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} I(\mathbf{r}, t) \right\} = 0, \quad I(\mathbf{r}, 0) = I_0(\mathbf{r}). \quad (1.46)$$

Из (1.46) следует, что

$$\int d\mathbf{r} I(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r} I_0(\mathbf{r}). \quad (1.47)$$

Тогда соответствующая величина в лагранжевом описании удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} I(t | \mathbf{r}_0) = - \frac{\partial H^2(\mathbf{r}, t, q, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{p}} I(\mathbf{r}, t), \quad I(0 | \mathbf{r}_0) = I_0(\mathbf{r}_0),$$

и, следовательно, решение уравнения (1.46) имеет вид

$$I(\mathbf{r}, t) = I(t | \mathbf{r}_0(t, \mathbf{r})) = \int d\mathbf{r}_0 I(t | \mathbf{r}_0) j(t | \mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0) - \mathbf{r}), \quad (1.48)$$

где $j(t | \mathbf{r}_0)$ — расходимость (определитель якобиевой матрицы).

Величины $I(t | \mathbf{r}_0)$ и $j(t | \mathbf{r}_0)$ связаны между собой. Действительно, подставляя выражение для $I(\mathbf{r}, t)$ (1.48) в (1.47), видим, что имеется интеграл эволюции

$$j(t | \mathbf{r}_0) = \frac{I_0(\mathbf{r}_0)}{I(t | \mathbf{r}_0)}$$

и выражение (1.48) принимает вид

$$I(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}_0 I_0(\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0) - \mathbf{r}).$$

Рассмотрим теперь примеры уравнений в частных производных старшего порядка.

1.3.3. Параболическое уравнение квазиоптики (волны в случайно-неоднородных средах). Распространение волн в среде с крупномасштабными трехмерными случайными неоднородностями будем описывать на основе *параболического уравнения квазиоптики*, справедливого для описания рассеяния волны в среде на малые углы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} u(x, \mathbf{R}) &= \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} u(x, \mathbf{R}) + \frac{ik}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) u(x, \mathbf{R}), \\ u(0, \mathbf{R}) &= u_0(\mathbf{R}), \end{aligned} \quad (1.49)$$

где k — волновое число, $\Delta_{\mathbf{R}} = \partial^2 / \partial \mathbf{R}^2$, а $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ — отклонение показателя преломления (или диэлектрической проницаемости) от единицы. Это уравнение нашло успешное применение во многих задачах распространения волн в атмосфере Земли и океане [22, 23].

Если ввести амплитуду и фазу волнового поля в уравнении (1.49) по формуле

$$u(x, \mathbf{R}) = A(x, \mathbf{R}) e^{iS(x, \mathbf{R})},$$

то уравнение для интенсивности волнового поля $I(x, \mathbf{R}) = u(x, \mathbf{R}) \times u^*(x, \mathbf{R})$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} I(x, \mathbf{R}) + \frac{1}{k} \nabla_{\mathbf{R}} \{ \nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R}) I(x, \mathbf{R}) \} &= 0, \\ I(0, \mathbf{R}) &= I_0(\mathbf{R}). \end{aligned} \quad (1.50)$$

Отсюда следует, что в общем случае произвольного падающего волнового пучка сохраняется мощность волны в плоскости $x = \text{const}$:

$$E_0 = \int I(x, \mathbf{R}) d\mathbf{R} = \int I_0(\mathbf{R}) d\mathbf{R}.$$

Уравнение (1.50) по форме совпадает с уравнением (1.22) и, следовательно, его можно трактовать как уравнение переноса консервативной примеси в потенциальном поле скоростей. Однако только в *приближении геометрической оптики*, когда фаза волны, ее поперечный градиент $\mathbf{p}(x, \mathbf{R}) = (1/k) \nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R})$, а также матрица ее вторых производных, характеризующая *кривизну фазового фронта* $S(x, \mathbf{R}) = \text{const}$, $u_{ij}(x, \mathbf{R}) = \frac{1}{k} \frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j} S(x, \mathbf{R})$, описываются замкнутыми уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} S(x, \mathbf{R}) + \frac{k}{2} \mathbf{p}^2(x, \mathbf{R}) &= \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}), \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p}(x, \mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{R}} \right) \mathbf{p}(x, \mathbf{R}) &= \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{R}} \varepsilon(x, \mathbf{R}), \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p}(x, \mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{R}} \right) u_{ij}(x, \mathbf{R}) + u_{ik}(x, \mathbf{R}) u_{kj}(x, \mathbf{R}) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j} \varepsilon(x, \mathbf{R}), \quad (1.51)$$

эту примесь можно считать пассивной. В общем же случае, при учете дифракционных эффектов, она является активной.

Реализации поля интенсивности, согласно выводам предыдущего параграфа, должны иметь кластерный характер, который проявляется

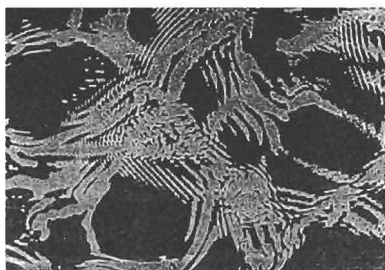


Рис. 1.8. Поперечное сечение лазерного пучка в турбулентной среде

в виде *каустических* структур. Так, на обороте обложки — форзаце — книги [22] приведена фотография поперечного сечения лазерного пучка, распространяющегося в турбулентной среде в лабораторных условиях. Фрагмент этой фотографии воспроизведен на рис. 1.8. На рисунке видно возникновение каустической структуры волнового поля. На рис. 1.9 приведена фотография бассейна также с четко выраженной каустической структурой волнового поля на его дне. Подобные струк-

туры возникают при преломлении и отражении света взволнованной водной поверхностью, что соответствует рассеянию на так называемом *фазовом экране*.

Остановимся теперь подробнее на приближении геометрической оптики (1.51) для параболического уравнения (1.49). В этом приближении уравнение для фазы волны является уравнением Гамильтона–Якоби, а уравнение для поперечного градиента фазы волны (1.51) является замкнутым *квазилинейным* уравнением в частных производных первого порядка, и, следовательно, его можно решать методом характеристик. Уравнения для характеристических кривых (*лучей*) имеют вид

$$\frac{d}{dx} \mathbf{R}(x) = \mathbf{p}(x), \quad \frac{d}{dx} \mathbf{p}(x) = \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{R}} \varepsilon(x, \mathbf{R}), \quad (1.52)$$

а интенсивность волнового поля и матрица вторых производных фазы волны вдоль характеристик будут описываться уравнениями

$$\frac{d}{dx} I(x) = -I(x) u_{ii}(x), \quad (1.53)$$

$$\frac{d}{dx} u_{ij}(x) + u_{ik}(x) u_{kj}(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j} \varepsilon(x, \mathbf{R}).$$

Уравнения (1.52) совпадают по внешнему виду с уравнениями для частицы в поле случайных внешних сил в отсутствие трения (1.11) и соответствуют гамильтоновой системе уравнений.



Рис. 1.9. Каустики в бассейне

Уравнения (1.52), (1.53) существенно упрощаются в двумерном случае ($R = y$) и принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} y(x) &= p(x), & \frac{d}{dx} p(x) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \varepsilon(x, y), \\ \frac{d}{dx} I(x) &= -I(x)u(x), & \frac{d}{dx} u(x) + u^2(x) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varepsilon(x, y). \end{aligned} \quad (1.54)$$

Уравнение (1.54) для величины $u(x)$ подобно уравнению (1.13), решение которого имеет сингулярный характер. Оно отличается только более сложной структурой случайного члена. Однако очевидно, что и в этом случае решение стохастической задачи (1.54) имеет взрывной характер, т. е. на конечном расстоянии функция $u(x)$ обратится в минус бесконечность, а интенсивность — в бесконечность. Это соответствует *случайной фокусировке* волнового поля в случайно-неоднородной среде, т. е. возникновению каустик, и соответствует возникновению неоднозначностей (и разрывов) в квазилинейном уравнении (1.51) для поперечного градиента фазы волнового поля.

1.3.4. Уравнение Навье–Стокса (случайные силы в гидродинамической теории турбулентности). Рассмотрим теперь модель турбулентного движения, при котором жидкость находится в поле внешних сил $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$. Такая модель, конечно, является фиктивной, так как подобные

силы не имеют реальных аналогов. Однако если считать, что силы $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ обеспечивают заметный средний приток энергии лишь к крупномасштабным компонентам скорости, то вследствие представлений теории локально-изотропной турбулентности можно ожидать, что фиктивный характер поля $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ не скажется на статистических свойствах мелкомасштабных компонент турбулентности [24]. Поэтому мелкомасштабные свойства турбулентности могут быть правильно описаны на основе такой модели.

Движение несжимаемой жидкости под действием внешних сил описывается уравнением Навье–Стокса

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} p(\mathbf{r}, t) + \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \quad (1.55)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = 0,$$

здесь ρ_0 — плотность жидкости, ν — кинематическая вязкость жидкости, а поле давления $p(\mathbf{x}, t)$ выражается через поле скоростей в тот же момент времени с помощью соотношения

$$p(\mathbf{r}, t) = -\rho_0 \int \Delta^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial^2 (u_i(\mathbf{r}', t) u_j(\mathbf{r}', t))}{\partial r'_i \partial r'_j} d\mathbf{r}', \quad (1.56)$$

где $\Delta^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — интегральный оператор, обратный оператору Лапласа (по повторяющимся индексам производится суммирование).

Фурье-образ поля скорости по пространственным координатам в трехмерном случае ($\hat{\mathbf{u}}^*(\mathbf{k}, t) = \hat{\mathbf{u}}(-\mathbf{k}, t)$),

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) = \int d\mathbf{r} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

в присутствии поля внешних сил после исключения давления с помощью формулы (1.56) удовлетворяет нелинейному интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) + \frac{i}{2} \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \hat{u}_\alpha(\mathbf{k}_1, t) \hat{u}_\beta(\mathbf{k}_2, t) -$$

$$- \nu k^2 \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) = \hat{f}_i(\mathbf{k}, t), \quad (1.57)$$

где

$$\Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \{k_\alpha \Delta_{i\beta}(\mathbf{k}) + k_\beta \Delta_{i\alpha}(\mathbf{k})\} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}),$$

$$\Delta_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} \quad (i, \alpha, \beta = 1, 2, 3), \quad (1.58)$$

а $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t)$ — пространственная фурье-гармоника внешних сил:

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t) = \int d\mathbf{r} \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}.$$

Спецификой трехмерных гидродинамических движений является существование закона сохранения энергии при отсутствии внешних сил и эффектов, связанных с вязкостью.

Для описания стационарной во времени турбулентности удобно рассматривать пространственно-временные фурье-гармоники поля скорости:

$$\hat{u}_i(\mathbf{K}) = \int d\mathbf{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt u_i(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} + \omega t)},$$

$$u_i(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{u}_i(\mathbf{K}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} + \omega t)},$$

где через $\mathbf{K}$ обозначен четырехмерный волновой вектор с координатами $\{\mathbf{k}, \omega\}$ и поле $\hat{u}_i^*(\mathbf{K}) = \hat{u}_i(-\mathbf{K})$ в силу вещественности поля $u_i(\mathbf{r}, t)$. Уравнение для компоненты $\hat{u}_i(\mathbf{K})$ в этом случае получаем из уравнения (1.57) после выполнения преобразования Фурье по времени:

$$(i\omega + \nu \mathbf{k}^2) \hat{u}_i(\mathbf{K}) + \frac{i}{2} \int d^4 \mathbf{K}_1 \int d^4 \mathbf{K}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}) \hat{u}_\alpha(\mathbf{K}_1) \hat{u}_\beta(\mathbf{K}) = \hat{f}_i(\mathbf{K}), \quad (1.59)$$

где

$$\Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}) = \frac{1}{2\pi} \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega),$$

а $\hat{f}_i(\mathbf{K})$ — пространственно-временные фурье-гармоники внешних сил. Уравнение (1.59) теперь — чисто интегральное нелинейное уравнение.

Глава 2

ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОТ КОЭФФИЦИЕНТОВ УРАВНЕНИЙ, НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ И ПАРАМЕТРОВ

Выше мы рассмотрели ряд примеров динамических систем, описываемых как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями в частных производных. Для многих приложений, связанных с изучением статистических характеристик их решений, требуется знание зависимости решений этих задач от коэффициентов уравнения (вообще говоря, функциональной) и начальных условий. Эти зависимости обладают некоторыми общими свойствами, из которых два особенно важны для статистического описания. Проиллюстрируем их на примере простейшей задачи, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1). Эта задача соответствует динамике частиц в поле случайных скоростей и ее можно переписать в виде нелинейного интегрального уравнения

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{U}(\mathbf{r}(\tau), \tau) d\tau. \quad (2.1)$$

Решение уравнения (2.1) функционально зависит от векторного поля $\mathbf{U}(\mathbf{r}', \tau)$ и начальных условий $\{\mathbf{r}_0, t_0\}$.

2.1. Функциональная зависимость решения задачи

2.1.1. Вариационные (функциональные) производные. Прежде всего напомним общее определение функционала. Мы говорим, что задан некоторый функционал, если установлено правило, по которому каждой функции из некоторой совокупности поставлено в соответствие число. Примеры функционалов:

$$\text{а) } F[\varphi(\tau)] = \int_{t_1}^{t_2} d\tau a(\tau) \varphi(\tau),$$

где $a(t)$ — заданная (фиксированная) функция, а пределы t_1, t_2 могут быть как конечными, так и бесконечными. Это линейный функционал.

$$\text{б)} \quad F[\varphi(\tau)] = \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2) \varphi(\tau_1) \varphi(\tau_2),$$

где $B(t_1, t_2)$ — фиксированная заданная функция. Это квадратичный функционал.

$$\text{в)} \quad F[\varphi(\tau)] = f(\Phi[\varphi(\tau)]),$$

где $f(x)$ — заданная функция, а величина $\Phi[\varphi(\tau)]$ — сама является функционалом.

Оценим разность значений одного и того же функционала, взятого для двух функций $\varphi(\tau)$ и $\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)$, где $\delta\varphi(\tau) \neq 0$ при $t - \Delta t/2 < \tau < t + \Delta t/2$ (см. рис. 1.10). *Вариацией функционала* называется линейная по $\delta\varphi(\tau)$ часть разности

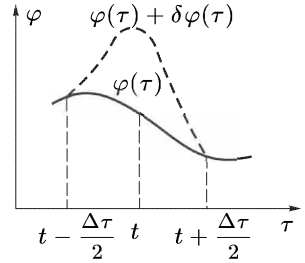


Рис. 1.10. К определению вариационной производной

$$\delta F[\varphi(\tau)] = \{F[\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)] - F[\varphi(\tau)]\},$$

а *вариационной (или функциональной) производной* называется предел

$$\frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t)dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\int_{\Delta t} d\tau \delta\varphi(\tau)}. \quad (2.2)$$

С целью сокращения записи вместо обозначения $\delta F[\varphi(\tau)]/\delta\varphi(t)dt$ будем использовать $\delta F[\varphi(\tau)]/\delta\varphi(t)$.

Отметим, что если в (2.2) взять функцию $\alpha\delta(\tau)$ в качестве функции $\delta\varphi(\tau)$, где $\delta(\tau)$ — обычная дельта-функция Дирака, то формулу (2.2) можно записать в виде, имеющем вид обычной производной:

$$\frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{d}{d\alpha} F[\varphi(\tau) + \alpha\delta(\tau - t)].$$

Вариационная производная от функционала $F[\varphi(\tau)]$ является снова функционалом от $\varphi(\tau)$, зависящим еще от точки t (как от параметра).

Можно определить формальное выражение для вариационной производной функционала $\varphi(\tau_0)$ по функции $\varphi(t)$ соотношением

$$\frac{\delta\varphi(\tau_0)}{\delta\varphi(t)} = \delta(\tau_0 - t). \quad (2.3)$$

С помощью формулы (2.3) очень удобно производить функциональное дифференцирование функционалов, явно зависящих от $\varphi(\tau)$. В качестве примера рассмотрим функционал

$$F[\varphi(\tau)] = \int_{t_1}^{t_2} d\tau L \left(\tau, \varphi(\tau), \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} \right).$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\varphi(t)} F[\varphi(\tau)] &= \\ &= \int_{t_1}^{t_2} d\tau \left[\frac{\delta L \left(\tau, \varphi(\tau), \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} \right)}{\delta\varphi(t)} + \frac{\delta L \left(\tau, \varphi(\tau), \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} \right)}{\delta\dot{\varphi}(t)} \frac{d}{d\tau} \right] \frac{\delta\varphi(\tau)}{\delta\varphi(t)} = \\ &= \left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}(t)} + \frac{\partial}{\partial\varphi(t)} \right) L \left(t, \varphi(t), \frac{d\varphi(t)}{dt} \right), \end{aligned}$$

где $\dot{\varphi}(t) = \frac{d}{dt} \varphi(t)$, если точка t принадлежит интервалу (t_1, t_2) .

Подобно тому как функция может быть разложена в ряд Тейлора, функционал $F[\varphi(\tau) + \eta(\tau)]$ можно разложить в функциональный ряд Тейлора по функции $\eta(\tau)$ в окрестности $\eta(\tau) \sim 0$:

$$\begin{aligned} F[\varphi(\tau) + \eta(\tau)] &= F[\varphi(\tau)] + \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t)} \eta(t) + \\ &+ \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \frac{\delta^2 F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t_1) \delta\varphi(t_2)} \eta(t_1) \eta(t_2) + \dots \quad (2.4) \end{aligned}$$

Отметим, что операторное выражение типа

$$\begin{aligned} 1 + \int_{-\infty}^{\infty} dt \eta(t) \frac{\delta}{\delta\varphi(t)} + \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \eta(t_1) \eta(t_2) \frac{\delta^2}{\delta\varphi(t_1) \delta\varphi(t_2)} + \dots = \\ = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} dt \eta(t) \frac{\delta}{\delta\varphi(t)} + \frac{1}{2!} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt \eta(t) \frac{\delta}{\delta\varphi(t)} \right]^2 + \dots \quad (2.5) \end{aligned}$$

можно сокращенно записать в виде оператора

$$\exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dt \eta(t) \frac{\delta}{\delta\varphi(t)} \right\}, \quad (2.6)$$

действие которого надо понимать именно в смысле разложения (2.5). С помощью этого оператора формулу (2.4) можно переписать в виде

$$F[\varphi(\tau) + \eta(\tau)] = \exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dt \eta(t) \frac{\delta}{\delta \varphi(t)} \right\} F[\varphi(\tau)], \quad (2.7)$$

что позволяет нам интерпретировать оператор (2.6) как оператор функционального сдвига.

Рассмотрим теперь функционал $F[t; \varphi(\tau)]$, зависящий от параметра t . Этот функционал можно дифференцировать по t , а также найти его вариационную производную по $\varphi(t')$. Легко видеть, что эти операции перестановочны, т. е. имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta F[t; \varphi(\tau)]}{\delta \varphi(t')} = \frac{\delta}{\delta \varphi(t')} \frac{\partial F[t; \varphi(\tau)]}{\partial t}. \quad (2.8)$$

Если область изменения τ не зависит от t , то равенство (2.8) очевидно. В противном случае, например для функционалов $F[t; \varphi(\tau)]$, у которых $0 \leq \tau \leq t$, равенство (2.8) проверяется путем разложения функционала $F[t; \varphi(\tau)]$ в функциональный ряд Тейлора.

2.1.2. Принцип динамической причинности. Проварьируем уравнение (2.1) по полю $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$. Считая, что начальное условие $\mathbf{r}_0$ не зависит от поля $\mathbf{U}$, получаем линейное уравнение для вариационной производной:

$$\frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')) \theta(t' - t_0) \theta(t - t') + \int_{t_0}^t \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(\tau), \tau)}{\partial r_k} \frac{\delta r_k(\tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} d\tau, \quad (2.9)$$

где $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ — дельта функция Дирака, а $\theta(z)$ — ступенчатая функция Хевисайда. Из уравнения (2.9) следует, что

$$\frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} = 0, \text{ если } t' > t \text{ или } t' < t_0, \quad (2.10)$$

т. е. решение $\mathbf{r}(t)$ динамической задачи (2.1), как функционал поля $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t')$, зависит только от значений $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t')$ при $t_0 < t' < t$. Следовательно, функция $\mathbf{r}(t)$ не меняется, если поле $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t')$ изменяется вне интервала (t_0, t') , т. е. для $t' < t_0$ или $t' > t$. Условие (2.10) будем называть *условием динамической причинности*.

Принимая во внимание это условие, уравнение (2.9) можно переписать в виде

$$\frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')) \theta(t' - t_0) \theta(t - t') + \\ + \int_{t'}^t \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(\tau), \tau)}{\partial r_k} \frac{\delta r_k(\tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} d\tau, \quad (2.11)$$

и, следовательно, переходя к пределу $t \rightarrow t' + 0$, получаем равенство

$$\left. \frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} \right|_{t=t'+0} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')). \quad (2.12)$$

Интегральное уравнение (2.11) для вариационной производной, очевидно, эквивалентно линейному дифференциальному уравнению с начальным условием

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} \right) = \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(t), t)}{\partial r_k} \left(\frac{\delta r_k(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} \right), \quad (2.13) \\ \left. \frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} \right|_{t=t'} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')).$$

Условие динамической причинности является общим свойством задач, описываемых дифференциальными уравнениями с начальными условиями. Краевые же задачи этим свойством не обладают. Так, для задачи (1.15), (1.16), описывающей распространение плоской волны в слое неоднородной среды, волновое поле в точке $x = u(x)$, так же как и коэффициенты отражения и прохождения, зависят функционально от значения функции $\varepsilon(x)$ во всем слое среды (L_0, L) . Переформулировка же этой задачи с помощью метода погружения в задачу с начальными условиями по вспомогательному параметру L позволяет использовать свойство причинности для уравнений метода погружения.

2.2. Зависимость решения от параметров задачи

2.2.1. Зависимость решения задачи от начального условия. Обозначим теперь зависимость решения уравнения (2.1) $\mathbf{r}(t)$ от параметров $\mathbf{r}_0, t_0$ вертикальной чертой:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t \mid \mathbf{r}_0, t_0), \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0 \mid \mathbf{r}_0, t_0).$$

Продифференцируем уравнение (2.1) по параметрам r_{0k} и t_0 . В результате для Якобиевой матрицы $\frac{\partial}{\partial r_{0k}} r_i(t \mid \mathbf{r}_0, t_0)$ и величины

$\frac{\partial}{\partial t_0} r_i(t | \mathbf{r}_0, t_0)$ получаем линейные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_i(t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial r_{0k}} &= \delta_{ik} + \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(\tau), \tau)}{\partial r_j} \frac{\partial r_j(\tau | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial r_{0k}}, \\ \frac{\partial r_i(t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial t_0} &= -U_i(\mathbf{r}_0(t_0), t_0) + \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(\tau), \tau)}{\partial r_j} \frac{\partial r_j(\tau | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial t_0}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Умножая теперь первое из этих уравнений на $U_k(\mathbf{r}_0(t), t)$, суммируя по индексу k и складывая его со вторым уравнением, получаем для векторной функции

$$F_i(t | \mathbf{r}_0, t_0) = \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \right) r_i(t | \mathbf{r}_0, t_0)$$

линейное однородное уравнение

$$F_i(t | \mathbf{r}_0, t_0) = \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(\tau), \tau)}{\partial r_k} F_k(\tau | \mathbf{r}_0, t_0),$$

решение которого, очевидно, $F_i(t | \mathbf{r}_0, t_0) = 0$. Таким образом, получаем равенство

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \right) r_i(t | \mathbf{r}_0, t_0) = 0, \quad (2.15)$$

которое можно рассматривать как линейное уравнение в частных производных по переменным $\mathbf{r}_0, t_0$ с начальным условием при $t_0 = t$

$$\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0, t) = \mathbf{r}_0. \quad (2.16)$$

Теперь переменная t входит в задачу (2.15), (2.16) как параметр.

Уравнение (2.15) решается в направлении времени, обратном по отношению к задаче (1.1), и может быть названо *обратным уравнением*.

Уравнение (2.15) с начальным условием (2.16), очевидно, также обладает свойством динамической причинности по параметру t_0 , т. е.

$$\frac{\delta \mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\delta U_j(\mathbf{y}, t')} = 0, \quad \text{если } t' > t \text{ или } t' < t_0,$$

и при этом, как следует из уравнения (2.15), имеет место равенство

$$\left. \frac{\delta \mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} \right|_{t'=t_0+0} = \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial r_{0j}}. \quad (2.17)$$

2.2.2. Метод погружения для краевых задач. Рассмотрим теперь краевые задачи, описываемые обыкновенными дифференциальными

уравнениями. Использование *метода погружения* (обычно называемого в математической литературе *методом инвариантного погружения*) позволяет свести рассматриваемые краевые задачи к задачам эволюционного типа с начальными условиями, обладающими свойством динамической причинности по вспомогательному параметру.

Идея метода впервые была предложена в работах В. А. Амбарцумяна (так называемый *принцип инвариантности Амбарцумяна*) [25–27] для решения уравнений линейной теории переноса излучения. В дальнейшем эта идея была взята на вооружение математиками для сведения краевых (вообще говоря, нелинейных задач) к задачам эволюционного типа с начальными данными, более удобным для численных расчетов. По этой тематике опубликовано несколько монографий (см., например, [28–30]), в которых рассматриваются как физические аспекты метода, так и его вычислительные возможности.

Рассмотрим динамическую систему, описываемую системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t)), \quad (2.18)$$

определенных на отрезке $t \in [0, T]$ с краевыми условиями

$$g\mathbf{x}(0) + h\mathbf{x}(T) = \mathbf{v}, \quad (2.19)$$

где g и h постоянные матрицы.

Для динамической задачи (2.18), (2.19) не выполняется условие динамической причинности, т. е. решение этой задачи $\mathbf{x}(t)$ в момент времени t функционально зависит от внешних сил $\mathbf{F}(\tau, \mathbf{x}(\tau))$ для всех $0 \leq \tau \leq T$. Более того, даже краевые значения $\mathbf{x}(0)$, $\mathbf{x}(T)$ являются функционалами поля $\mathbf{F}(\tau, \mathbf{x}(\tau))$.

Решение задачи (2.18), (2.19) параметрически зависит от параметров T и $\mathbf{v}$, т. е. $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; T, \mathbf{v})$. Введем функции

$$\mathbf{R}(T, \mathbf{v}) = \mathbf{x}(T; T, \mathbf{v}), \quad \mathbf{S}(T, \mathbf{v}) = \mathbf{x}(0; T, \mathbf{v}),$$

описывающие краевые значения решения уравнения (2.18).

Продифференцируем теперь уравнение (2.18) по T и $\mathbf{v}$. Получаем два линейных уравнения для соответствующих производных:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i(t; T, \mathbf{v})}{\partial T} &= \frac{\partial F_i(t, \mathbf{x})}{\partial x_l} \frac{\partial x_l(t; T, \mathbf{v})}{\partial T}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i(t; T, \mathbf{v})}{\partial v_k} &= \frac{\partial F_i(t, \mathbf{x})}{\partial x_l} \frac{\partial x_l(t; T, \mathbf{v})}{\partial v_k}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Эти уравнения имеют одинаковую структуру и, следовательно, можно ожидать, что их решения связаны линейным равенством

$$\frac{\partial x_i(t; T, \mathbf{v})}{\partial T} = \lambda_k(T, \mathbf{v}) \frac{\partial x_i(t; T, \mathbf{v})}{\partial v_k}, \quad (2.21)$$

если векторная величина $\lambda(T, \mathbf{v})$ такова, что выполняются краевые условия (2.19) и решение задачи единственное. Для нахождения $\lambda(T, \mathbf{v})$ положим сперва в (2.21) $t = 0$ и умножим на матрицу g ; положим затем $t = T$ и умножим на матрицу h ; сложим получившиеся равенства. С учетом (2.19) получаем

$$g \frac{\partial \mathbf{x}(0; T, \mathbf{v})}{\partial T} + h \left. \frac{\partial \mathbf{x}(t; T, \mathbf{v})}{\partial T} \right|_{t=T} = \lambda(T, \mathbf{v}).$$

Ввиду того что (с учетом уравнения (2.18))

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathbf{x}(t; T, \mathbf{v})}{\partial T} \right|_{t=T} &= \frac{\partial \mathbf{x}(T; T, \mathbf{v})}{\partial T} - \left. \frac{\partial \mathbf{x}(t; T, \mathbf{v})}{\partial t} \right|_{t=T} = \\ &= \frac{\partial \mathbf{R}(T, \mathbf{v})}{\partial T} - \mathbf{F}(T, \mathbf{R}(T, \mathbf{v})), \end{aligned}$$

для величины $\lambda(T, \mathbf{v})$ получаем окончательное выражение

$$\lambda(T, \mathbf{v}) = -h\mathbf{F}(T, \mathbf{R}(T, \mathbf{v})). \quad (2.22)$$

Равенство (2.21) с параметром $\lambda(T, \mathbf{v})$, определенным согласно (2.22), т. е.

$$\frac{\partial x_i(t; T, \mathbf{v})}{\partial T} = -h_{kl} F_l(T, \mathbf{R}(T, \mathbf{v})) \frac{\partial x_i(t; T, \mathbf{v})}{\partial v_k}, \quad (2.23)$$

можно рассматривать как линейное дифференциальное уравнение, если дополнить его соответствующим начальным условием

$$\mathbf{x}(t; T, \mathbf{v})|_{T=t} = \mathbf{R}(t, \mathbf{v})$$

и считать функцию $\mathbf{R}(T, \mathbf{v})$ известной.

Уравнение для нее можно получить, используя равенство

$$\frac{\partial \mathbf{R}(T, \mathbf{v})}{\partial T} = \left. \frac{\partial \mathbf{x}(t; T, \mathbf{v})}{\partial t} \right|_{t=T} + \left. \frac{\partial \mathbf{x}(t; T, \mathbf{v})}{\partial T} \right|_{t=T}. \quad (2.24)$$

Правая часть (2.24) при этом определяется правыми частями (2.18) и (2.21) при $t = T$. В результате получаем замкнутое нелинейное (квазилинейное) уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{R}(T, \mathbf{v})}{\partial T} = -h_{kl} F_l(T, \mathbf{R}(T, \mathbf{v})) \frac{\partial \mathbf{R}(T, \mathbf{v})}{\partial v_k} + \mathbf{F}(T, \mathbf{R}(T, \mathbf{v})). \quad (2.25)$$

Начальное условие для (2.25) вытекает из (2.19) при $T \rightarrow 0$:

$$\mathbf{R}(T, \mathbf{v})|_{T=0} = \frac{\mathbf{v}}{g + h}. \quad (2.26)$$

Полагая теперь в (2.20) $t = 0$, получаем уравнение для второй краевой величины $\mathbf{S}(T, \mathbf{v}) = \mathbf{x}(0; T, \mathbf{v})$ вида

$$\frac{\partial \mathbf{S}(T, \mathbf{v})}{\partial T} = -h_{kl} F_l(T, \mathbf{R}(T, \mathbf{v})) \frac{\partial \mathbf{S}(T, \mathbf{v})}{\partial v_k} \quad (2.27)$$

с начальным условием, вытекающим из (2.26):

$$\mathbf{S}(T, \mathbf{v})|_{T=0} = \frac{\mathbf{v}}{g + h}.$$

Таким образом, наша задача свелась к замкнутому квазилинейному уравнению (2.25) с начальным условием (2.26) и к линейному уравнению (2.21), начальное условие и коэффициенты которого определяются решением уравнения (2.25) [31].

Для рассматриваемой задачи «вход» и «выход», 0 и T , симметричны. Поэтому к решению краевой задачи можно подходить не только со стороны $T \rightarrow 0$, но и наоборот, со стороны $0 \rightarrow T$. При этом функции $\mathbf{R}(T, \mathbf{v})$ и $\mathbf{S}(T, \mathbf{v})$ как бы меняются местами.

Отметим еще одно важное обстоятельство. Уравнение (2.21) является линейным в силу того, что это, по сути дела, уравнение для вариаций, несмотря на то, что исходная задача (2.18) нелинейная. За нелинейность задачи отвечает уравнение (2.25).

Если функция $\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ линейна по $\mathbf{x}$, т.е. $F_i(t, \mathbf{x}) = A_{ij}(t)x_j(t)$, то краевая задача (2.18), (2.19)

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = A(t) \mathbf{x}(t), \quad g\mathbf{x}(0) + h\mathbf{x}(T) = \mathbf{v},$$

упрощается и решения уравнений (2.21), (2.25) и (2.27) также будут линейными функциями по $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{x}(t; T, \mathbf{v}) = X(t; T)\mathbf{v}.$$

В результате приходим к замкнутому матричному уравнению Риккати для матрицы $R(T) = X(T; T)$:

$$\frac{d}{dT} R(T) = A(T)R(T) - R(T)hA(T)R(T), \quad R(0) = \frac{1}{g + h}.$$

Для матрицы же $X(t, T)$ получаем линейное матричное уравнение с начальным условием

$$\frac{\partial}{\partial T} X(t; T) = -X(t; T)hA(T)R(T), \quad X(t; T)_{T=t} = R(t).$$

Отметим, что для конкретных линейных краевых волновых задач практически удобнее получать уравнения погружения непосредственно, исходя из конкретной постановки задачи.

Задачи

Задача 1. Уравнение Гельмгольца с несогласованной границей. Получить уравнения погружения для краевой стационарной волновой задачи

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2(x) \right) u(x) = 0,$$

$$\left(\frac{d}{dx} + ik_1 \right) u(x) \Big|_{x=L_0} = 0, \quad \left(\frac{d}{dx} - ik_0 \right) u(x) \Big|_{x=L} = -2ik_0.$$

Указание. Переписать эту краевую задачу для функций $u(x) = u(x; L)$, $v(x; L) = \frac{\partial}{\partial x} u(x; L)$ в виде краевой системы уравнений

$$\frac{d}{dx} u(x; L) = v(x; L), \quad \frac{d}{dx} v(x; L) = -k^2(x)u(x; L),$$

$$v(L_0; L) + ik_1 u(L_0; L) = 0, \quad v(L; L) - ik_0 u(L; L) = -2ik_0.$$

Решение.

$$\frac{\partial}{\partial L} u(x; L) = \left\{ ik_0 + \frac{i}{2k_0} [k^2(L) - k_0^2] u(L; L) \right\} u(x; L),$$

$$u(x; L)|_{L=x} = u(x; x),$$

$$\frac{d}{dL} u(L; L) = 2ik_0 [u(L; L) - 1] + \frac{i}{2k_0} [k^2(L) - k_0^2] u(L; L)^2,$$

$$u(L_0; L_0) = \frac{2k_0}{k_0 + k_1}.$$

Задача 2. Уравнение Гельмгольца с согласованной границей. Получить уравнения погружения для краевой стационарной волновой задачи

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2(x) \right) u(x; L) = 0,$$

$$\left(\frac{d}{dx} + ik_1 \right) u(x; L) \Big|_{x=L_0} = 0,$$

$$\left(\frac{d}{dx} - ik(L) \right) u(x; L) \Big|_{x=L} = -2ik(L).$$

Решение.

$$\frac{\partial}{\partial L} u(x; L) = \left\{ ik(L) + \frac{1}{2} \frac{k'(L)}{k(L)} [2 - u(L; L)] \right\} u(x; L),$$

$$u(x; L)|_{L=x} = u(x; x),$$

$$\frac{d}{dL} u(L; L) = ik(L) [u(L; L) - 1] + \frac{1}{2} \frac{k'(L)}{k(L)} [2 - u(L; L)] u(L; L),$$

$$u(L_0; L_0) = \frac{2k(L_0)}{k(L_0) + k_1}.$$

Задача 3. Получить уравнения погружения для краевой задачи

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} - \frac{\rho'(x)}{\rho(x)} \frac{d}{dx} + p^2 [1 + \varepsilon(x)] \right\} u(x; L) = 0,$$

$$\left(\frac{1}{\rho(x)} \frac{d}{dx} + ip \right) u(x; L) \Big|_{x=L_0} = 0,$$

$$\left(\frac{1}{\rho(x)} \frac{d}{dx} - ip \right) u(x; L) \Big|_{x=L} = -2ip,$$

$$\text{где } \rho'(x) = \frac{d\rho(x)}{dx}.$$

Решение.

Уравнения погружения по параметру L имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial L} u(x; L) = \{ip\rho(L) + \varphi(L)u(L; L)\} u(x; L),$$

$$u(x; L)|_{L=x} = u(x; x);$$

$$\frac{d}{dL} u(L; L) = 2ip\rho(L) [u(L; L) - 1] + \varphi(L)u^2(L; L),$$

$$u(L; L)|_{L=L_0} = 1,$$

где функция

$$\varphi(x) = \frac{ip}{2\rho(x)} [1 + \varepsilon(x) - \rho^2(x)].$$

Замечание. Приведенная краевая задача описывает разнообразные физические процессы, такие, например, как акустические волны в среде с переменной плотностью и некоторые типы электромагнитных волн. В этом случае величина $\varepsilon(x)$ описывает неоднородности скорости распространения волны (показатель преломления или диэлектрическую проницаемость), а функция $\rho(x)$ — плотность среды (для акустических волн).

Задача 4. Получить уравнения погружения для матричного уравнения Гельмгольца

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \gamma(x) \frac{d}{dx} + K(x) \right) U(x; L) = 0,$$

$$\left(\frac{d}{dx} + B\right) U(x; L) \Big|_{x=L} = D, \quad \left(\frac{d}{dx} + C\right) U(x; L) \Big|_{x=0} = 0,$$

где $\gamma(x)$, $K(x)$ и $U(x)$ переменные, а B , C и D постоянные матрицы.

Решение. Уравнения погружения имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial L} U(x; L) = U(x; L) \Lambda(L), \quad U(x; L)|_{L=x} = U(x; x),$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} U(L; L) = D - \{BU(L; L) + U(L; L)D^{-1}BD\} + \\ + U(L; L)D^{-1}\gamma(L)D + U(L; L)D^{-1}\{K(L) - \gamma(L)B + B^2\}U(L; L), \end{aligned}$$

$$U(0; 0) = (B - C)^{-1}D,$$

где матрица $\Lambda(L)$:

$$\Lambda(L) = D^{-1}[\gamma(L) - B]D + D^{-1}[K(L) + B^2 - \gamma(L)B]U(L; L).$$

Глава 3

ИНДИКАТОРНАЯ ФУНКЦИЯ И УРАВНЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ

Современный аппарат теории случайных процессов позволяет построить замкнутое описание динамических систем, если эти системы удовлетворяют принципу динамической причинности и описываются линейными дифференциальными уравнениями в частных производных или интегральными уравнениями определенного типа. Переход от описания исходной, вообще говоря нелинейной, системы к эквивалентному описанию с помощью линейных уравнений в частных производных можно осуществить с использованием индикаторных функций. Однако размерность пространства переменных при этом увеличивается. Рассмотрим такой переход на примере динамических систем, описанных в предыдущей главе.

3.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Пусть стохастическая задача описывается системой уравнений (1.1)

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t), \quad \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0. \quad (3.1)$$

Введем скалярную функцию

$$\Phi(t; \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}), \quad (3.2)$$

сосредоточенную на сечении случайного процесса $\mathbf{r}(t)$ заданной плоскостью $\mathbf{r}(t) = \text{const}$ и обычно называемую *индикаторной функцией*.

Дифференцируя (3.2) по времени t , с помощью уравнения (3.1) получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t; \mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) \mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t).$$

Используя далее «выкалывающее» свойство дельта-функции,

$$\delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) \mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t) = \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) \mathbf{U}(\mathbf{r}, t),$$

получаем линейное уравнение в частных производных:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \right) \Phi(t; \mathbf{r}) = 0, \quad \Phi(t_0; \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}), \quad (3.3)$$

которое эквивалентно исходной системе и называется *уравнением Лиувилля*.

Переход от системы (3.1) к уравнению Лиувилля (3.3) сопровождается расширением фазового пространства $(t, \mathbf{r})$, которое, однако, имеет конечную размерность. Отметим, что уравнение (3.3) по своей форме совпадает с уравнением переноса примеси полем скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ (1.22) и отличается от него только начальным условием.

Решение уравнения (3.1) и, следовательно, функция (3.2) зависят от начальных условий $t_0, \mathbf{r}_0$. Так функция $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0, t_0)$, как функция переменных $\mathbf{r}_0, t_0$, описывается линейным уравнением в частных производных первого порядка (1.59):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \right) r_i(t | \mathbf{r}_0, t_0) = 0, \quad \mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0, t_0) = \mathbf{r}_0.$$

Для таких уравнений также можно перейти к уравнению для индикаторной функции (см. следующий параграф) $\Phi(t; \mathbf{r} | t_0, \mathbf{r}_0)$, которое в данном случае также имеет вид линейного уравнения по переменным $\mathbf{r}_0, t_0$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \right) \Phi(t; \mathbf{r} | t_0, \mathbf{r}_0) = 0, \quad \Phi(t; \mathbf{r} | t, \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}), \quad (3.4)$$

которое может быть названо *обратным уравнением Лиувилля*.

3.2. Уравнения в частных производных первого порядка

Если же мы имеем исходную задачу, описываемую дифференциальными уравнениями в частных производных, то также всегда можно перейти к эквивалентному описанию с помощью линейного уравнения в вариационных производных в бесконечномерном пространстве (*уравнение Хопфа*). Для конкретного типа задач такой переход может быть упрощен. Так, если исходная динамическая система описывается уравнением в частных производных первого порядка (*линейным*, типа уравнения (1.22), *квазилинейным*, типа уравнения (1.33), или, в общем случае, *нелинейным* уравнением (1.44)), то фазовое пространство для соответствующей индикаторной функции имеет конечную размерность. Это связано с эквивалентностью уравнений в частных производных первого порядка и характеристических обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим эти случаи подробнее.

3.2.1. Случай линейного уравнения. Рассмотрим подробнее задачу о переносе примеси случайным полем скоростей, описываемым уравнением (1.22), которое запишем в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \rho(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}). \quad (3.5)$$

Для описания поля плотности в эйлеровом представлении введем индикаторную функцию, аналогичную (3.2):

$$\Phi(t, \mathbf{r}; \rho) = \delta(\rho(t, \mathbf{r}) - \rho), \quad (3.6)$$

сосредоточенную на поверхности $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const}$ в трехмерном случае или на контуре — в двумерном случае. Уравнение для нее легко получить как непосредственно из уравнения (3.5), так и исходя из уравнения Лиувилля в лагранжевом описании. В самом деле, дифференцируя (3.6) по времени и используя «выкалывающее» свойство дельта-функции, получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \mathbf{r}; \rho) &= -\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \Phi(t, \mathbf{r}; \rho) = \\ &= \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \Phi(t, \mathbf{r}; \rho) + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \rho} \Phi(t, \mathbf{r}; \rho), \end{aligned} \quad (3.7)$$

которое, однако, незамкнуто из-за наличия в правой части величины $\partial \rho(\mathbf{r}, t) / \partial \mathbf{r}$, которая не выражается в явной форме через $\rho(\mathbf{r}, t)$.

С другой стороны, дифференцируя функцию (3.6) по $\mathbf{r}$, получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi(t, \mathbf{r}; \rho) = -\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \rho} \Phi(t, \mathbf{r}; \rho). \quad (3.8)$$

Исключая теперь последний член в равенстве (3.7) с помощью (3.8), получаем замкнутое уравнение Лиувилля в эйлеровом описании:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \Phi(t, \mathbf{r}; \rho) = \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho \Phi(t, \mathbf{r}; \rho)], \quad (3.9)$$

$$\Phi(0, \mathbf{r}; \rho) = \delta(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho).$$

Более полное описание можно получить, рассматривая расширенную индикаторную функцию для поля плотности $\rho(\mathbf{r}, t)$ и его пространственного градиента $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \nabla \rho(\mathbf{r}, t) = \partial \rho(\mathbf{r}, t) / \partial \mathbf{r}$:

$$\Phi(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) = \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho) \delta(\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{p}). \quad (3.10)$$

Дифференцируя (3.10) по времени с помощью уравнения (3.1) для плотности и уравнение (1.31) для его пространственного градиента для

бездивергентного поля скорости получаем уравнение Лиувилля вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \Phi(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) = \frac{\partial U_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial p_i} p_k \Phi(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}), \quad (3.11)$$

$$\Phi(0, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) = \delta(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho) \delta(\mathbf{p}_0(\mathbf{r}) - \mathbf{p}).$$

3.2.2. Случай квазилинейного уравнения. Рассмотрим теперь простейшее квазилинейное уравнение для скалярной величины $q(\mathbf{r}, t)$ (1.33):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(t, q) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) q(\mathbf{r}, t) = Q(t, q), \quad q(\mathbf{r}, 0) = q_0(\mathbf{r}), \quad (3.12)$$

Если теперь попытаться, по аналогии с линейной задачей, получить замкнутое уравнение для индикаторной функции $\Phi(t, \mathbf{r}; q) = \delta(q(\mathbf{r}, t) - q)$, то этого сделать не удастся. Теперь необходимо дополнить уравнение (3.12) уравнением (1.34) для поля градиента $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \nabla q(\mathbf{r}, t)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(t, q) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \{ \mathbf{U}(t, q) \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) \}}{\partial q} \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial Q(t, q)}{\partial q} \mathbf{p}(\mathbf{r}, t),$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, 0) = \nabla q_0(\mathbf{r}), \quad (3.13)$$

и рассматривать расширенную индикаторную функцию

$$\Phi(t, \mathbf{r}; q, \mathbf{p}) = \delta(q(\mathbf{r}, t) - q) \delta(\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{p}). \quad (3.14)$$

Дифференцируя (3.14) по времени, с помощью уравнений (3.12) и (3.13) получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \mathbf{r}; q, \mathbf{p}) &= - \left[\frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial q(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{\partial p_k(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] \Phi(t, \mathbf{r}; q, \mathbf{p}) = \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial q} [\mathbf{p} \mathbf{U}(t, q) - Q(t, q)] + \frac{\partial}{\partial p_k} \mathbf{U}(t, q) \frac{\partial p_k(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right\} \Phi(t, \mathbf{r}; q, \mathbf{p}) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial p_k} \left[p_k \left(\mathbf{p} \frac{\partial \mathbf{U}(t, q)}{\partial q} - \frac{\partial Q(t, q)}{\partial q} \right) \right] \Phi(t, \mathbf{r}; q, \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (3.15)$$

которое, однако, не замкнуто из-за наличия в правой части члена $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} p_k(\mathbf{r}, t)$.

Продифференцируем теперь функцию (3.14) по $\mathbf{r}$, в результате получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi(t, \mathbf{r}; q, \mathbf{p}) = - \left[\mathbf{p} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial p_k(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial p_k} \right] \Phi(t, \mathbf{r}; q, \mathbf{p}). \quad (3.16)$$

Из (3.16) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial p_k} \frac{\partial p_k(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \Phi(t, \mathbf{r}; q, \mathbf{p}) = - \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{p} \frac{\partial}{\partial q} \right] \Phi(t, \mathbf{r}; q, \mathbf{p}),$$

и, следовательно, уравнение (3.15) можно записать в виде замкнутого уравнения

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(t, q) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \Phi(t, \mathbf{r}; q, \mathbf{p}) &= \frac{\partial}{\partial q} \{ [\mathbf{p} \mathbf{U}(t, q) - Q(t, q)] \Phi(t, \mathbf{r}; q, \mathbf{p}) \} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left\{ \mathbf{p} \left(\frac{\partial \mathbf{p} \mathbf{U}(t, q)}{\partial q} - \frac{\partial Q(t, q)}{\partial q} \right) \Phi(t, \mathbf{r}; q, \mathbf{p}) \right\}, \end{aligned}$$

которое и является искомым уравнением Лиувилля для квазилинейного уравнения (3.12) в расширенном пространстве $\{q, \mathbf{r}\}$.

Отметим, что возможно подключить к уравнениям (3.12), (3.13) и уравнение неразрывности для сохраняющейся величины $I(\mathbf{r}, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} I(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \{ \mathbf{U}(t, q) I(\mathbf{r}, t) \} = 0, \quad I(\mathbf{r}, 0) = I_0(\mathbf{r}). \quad (3.17)$$

При этом для индикаторной функции

$$\Phi(t, \mathbf{r}; q, \mathbf{p}, I) = \delta(q(\mathbf{r}, t) - q) \delta(\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{p}) \delta(I(\mathbf{r}, t) - I)$$

также получается замкнутое уравнение в пространстве $\{q, \mathbf{r}, I\}$. Это связано с тем обстоятельством, что величина, обратная к $I(\mathbf{r}, t)$, в лагранжевом описании соответствует расходимости.

3.2.3. Общий случай нелинейного уравнения. Рассмотрим теперь общий случай нелинейного скалярного уравнения в частных производных первого порядка (1.44):

$$\frac{\partial}{\partial t} q(\mathbf{r}, t) + H(\mathbf{r}, t, q, \mathbf{p}) = 0, \quad q(\mathbf{r}, 0) = q_0(\mathbf{r}), \quad (3.18)$$

где $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \partial q(\mathbf{r}, t) / \partial \mathbf{r}$. Для получения замкнутого уравнения Лиувилля теперь необходимо дополнить уравнение (3.18) уравнениями для векторной величины $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \nabla q(\mathbf{r}, t)$ и матрицы вторых производных $U_{ik}(\mathbf{r}, t) = \partial^2 q(\mathbf{r}, t) / \partial r_i \partial r_k$.

Введем теперь расширенную индикаторную функцию

$$\Phi(t, \mathbf{r}; q, \mathbf{p}, U, I) = \delta(q(\mathbf{r}, t) - q) \delta(\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{p}) \delta(U(\mathbf{r}, t) - U) \delta(I(\mathbf{r}, t) - I),$$

где для общности картины мы включили также новую консервативную переменную $I(\mathbf{r}, t)$, удовлетворяющую уравнению неразрывности (1.46):

$$\frac{\partial}{\partial t} I(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left\{ \frac{\partial H(\mathbf{r}, t, q, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} I(\mathbf{r}, t) \right\} = 0, \quad I(\mathbf{r}, 0) = I_0(\mathbf{r}). \quad (3.19)$$

Уравнения (3.18), (3.19) описывают, например, распространение волн в неоднородных средах в геометрикооптическом приближении параболического уравнения квазиоптики (уравнения (1.51)). Дифференцируя индикаторную функцию по времени и используя динамические уравнения для функций $q(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t)$, $U(\mathbf{r}, t)$ и $I(\mathbf{r}, t)$, мы, вообще говоря, придем к незамкнутому уравнению, содержащему производные функции $q(\mathbf{r}, t)$ третьего порядка по пространственной переменной $\mathbf{r}$. Однако комбинация

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H(\mathbf{r}, t, q, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \Phi(t, \mathbf{r}; q, \mathbf{p}, U, I)$$

уже не содержит третьих производных, в результате чего мы и приходим к замкнутому уравнению Лиувилля в пространстве $\{q, \mathbf{r}, U, I\}$.

3.3. Уравнения в частных производных высшего порядка

Если исходная динамическая система содержит производные порядка выше первого (например, оператор Лапласа), то уже невозможно получить замкнутое уравнение для соответствующей индикаторной функции. В этом случае можно получить только замкнутое уравнение в вариационных производных (уравнение Хопфа) для функционала, среднее значение по ансамблю реализации которого определяет характеристический функционал решения соответствующего стохастического динамического уравнения. Рассмотрим такой переход на примерах уравнений в частных производных, рассмотренных в гл. 1.

3.3.1. Параболическое уравнение квазиоптики. В качестве первого примера рассмотрим распространение волн в случайно-неоднородной среде в рамках линейного параболического уравнения (1.49):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} u(x, \mathbf{R}) &= \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} u(x, \mathbf{R}) + \frac{ik}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) u(x, \mathbf{R}), \\ u(0, \mathbf{R}) &= u_0(\mathbf{R}). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Введем в рассмотрение функционал

$$\begin{aligned} \varphi[x; v(\mathbf{R}'), v^*(\mathbf{R}')] = \\ = \exp \left\{ i \int d\mathbf{R}' [u(x, \mathbf{R}')v(\mathbf{R}') + u^*(x, \mathbf{R}')v^*(\mathbf{R}')] \right\}, \quad (3.21) \end{aligned}$$

где волновое поле $u(x, \mathbf{R})$ — решение уравнения (3.20), а $u^*(x, \mathbf{R})$ — комплексно сопряженная функция. Дифференцируя (3.21) по x и используя динамическое уравнение (3.20) и комплексно сопряженное к нему, получаем равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \varphi[x; v(\mathbf{R}'), v^*(\mathbf{R}')] = \\ = -\frac{1}{2k} \int d\mathbf{R} [v(\mathbf{R})\Delta_{\mathbf{R}}u(x, \mathbf{R}) - v^*(\mathbf{R})\Delta_{\mathbf{R}}u^*(x, \mathbf{R})] \times \\ \times \varphi[x; v(\mathbf{R}'), v^*(\mathbf{R}')] - \\ - \frac{k}{2} \int d\mathbf{R} \varepsilon(x, \mathbf{R}) [v(\mathbf{R})u(x, \mathbf{R}) - v^*(\mathbf{R})u^*(x, \mathbf{R})] \varphi[x; v(\mathbf{R}'), v^*(\mathbf{R}')], \end{aligned}$$

которое можно записать в виде уравнения в вариационных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \varphi[x; v(\mathbf{R}'), v^*(\mathbf{R}')] = \frac{ik}{2} \int d\mathbf{R} \varepsilon(x, \mathbf{R}) \widehat{M}(\mathbf{R}) \varphi[x; v(\mathbf{R}'), v^*(\mathbf{R}')] + \\ + \frac{i}{2k} \int d\mathbf{R} \left[v(\mathbf{R})\Delta_{\mathbf{R}} \frac{\delta}{\delta v(\mathbf{R})} - v^*(\mathbf{R})\Delta_{\mathbf{R}} \frac{\delta}{\delta v^*(\mathbf{R})} \right] \varphi[x; v(\mathbf{R}'), v^*(\mathbf{R}')], \quad (3.22) \end{aligned}$$

с эрмитовым оператором

$$\widehat{M}(\mathbf{R}) = v(\mathbf{R}) \frac{\delta}{\delta v(\mathbf{R})} - v^*(\mathbf{R}) \frac{\delta}{\delta v^*(\mathbf{R})}.$$

Это уравнение эквивалентно исходному уравнению (3.20). Следствием уравнения (3.22) является равенство

$$\frac{\delta}{\delta \varepsilon(x-0, \mathbf{R})} \varphi[x; v(\mathbf{R}'), v^*(\mathbf{R}')] = \frac{ik}{2} \widehat{M}(\mathbf{R}) \varphi[x; v(\mathbf{R}'), v^*(\mathbf{R}')]. \quad (3.23)$$

3.3.2. Случайные силы в гидродинамической теории турбулентности. Рассмотрим теперь интегро-дифференциальное уравнение

(1.57) для фурье-гармоник $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$ решения уравнения Навье–Стокса (1.55):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) + \frac{i}{2} \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \hat{u}_\alpha(\mathbf{k}_1, t) \hat{u}_\beta(\mathbf{k}_2, t) - \\ - \nu k^2 \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) = \hat{f}_i(\mathbf{k}, t), \\ \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, 0) = \hat{\mathbf{u}}_0(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (3.24)$$

где комплексно сопряженное поле $\hat{\mathbf{u}}^*(\mathbf{k}, t) = \hat{\mathbf{u}}(-\mathbf{k}, t)$ и

$$\begin{aligned} \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \{k_\alpha \Delta_{i\beta}(\mathbf{k}) + k_\beta \Delta_{i\alpha}(\mathbf{k})\} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}), \\ \Delta_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \quad (i, \alpha, \beta = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (3.25)$$

а $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t)$ — пространственная фурье-гармоника внешних сил.

Введем функционал

$$\varphi[t; \mathbf{z}(\mathbf{k}')] = \exp \left\{ i \int d\mathbf{k}' \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}', t) \mathbf{z}(\mathbf{k}') \right\}. \quad (3.26)$$

Дифференцируя функционал (3.26) по времени t и используя динамическое уравнение (3.24), получаем равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi[t; \mathbf{z}(\mathbf{k}')] = i \int d\mathbf{k} \mathbf{z}(\mathbf{k}) \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} \varphi[t; \mathbf{z}(\mathbf{k}')] = \\ = \frac{1}{2} \int d\mathbf{k} z_i(\mathbf{k}) \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \hat{u}_\alpha(\mathbf{k}_1, t) \hat{u}_\beta(\mathbf{k}_2, t) \varphi[t; \mathbf{z}(\mathbf{k}')] - \\ - i \int d\mathbf{k} z_i(\mathbf{k}) \left\{ \nu k^2 \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) - \hat{f}_i(\mathbf{k}, t) \right\} \varphi[t; \mathbf{z}(\mathbf{k}')], \end{aligned}$$

которое можно записать в виде линейного уравнения Хопфа в функциональном пространстве с вариационными производными:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi[t; \mathbf{z}(\mathbf{k}')] = - \int d\mathbf{k} z_i(\mathbf{k}) \left\{ \nu k^2 \frac{\delta}{\delta z_i(\mathbf{k})} - i \hat{f}_i(\mathbf{k}, t) \right\} \varphi[t; \mathbf{z}(\mathbf{k}')] - \\ - \frac{1}{2} \int d\mathbf{k} z_i(\mathbf{k}) \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \frac{\delta^2 \varphi[t; \mathbf{z}(\mathbf{k}')] }{\delta z_\alpha(\mathbf{k}_1) \delta z_\beta(\mathbf{k}_2)}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

При этом следствием уравнения (3.27) является равенство

$$\frac{\delta}{\delta \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t-0)} \varphi[t; \mathbf{z}(\mathbf{k}')] = i \mathbf{z}(\mathbf{k}) \varphi[t; \mathbf{z}(\mathbf{k}')]. \quad (3.28)$$

Задачи

Задача 5. Установить связь между эйлеровой и лагранжевой индикаторными функциями для линейной задачи (3.5).

Решение.

$$\Phi(t, \mathbf{r}; \rho) = \int d\mathbf{r}_0 \int_0^\infty \Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{r}, \rho, j \mid \mathbf{r}_0) j dj.$$

Задача 6. Получить уравнение (3.9) исходя из лагранжеевого описания динамической системы (2.5).

Задача 7. Получить уравнение Хопфа для функционала

$$\varphi[\mathbf{z}(\mathbf{K}')] = \exp \left\{ i \int d^4 \mathbf{K}' \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{K}') \mathbf{z}(\mathbf{K}') \right\}, \quad (3.29)$$

описывающего решение интегрального уравнения (1.59).

Решение.

$$\begin{aligned} (i\omega + \nu \mathbf{k}^2) \frac{\delta \varphi[\mathbf{z}(\mathbf{K}')] }{\delta z_i(\mathbf{K})} &= i \hat{f}_i(\mathbf{K}) \varphi[\mathbf{z}(\mathbf{K}')] - \\ &- \frac{1}{2} \int d^4 \mathbf{K}_1 \int d^4 \mathbf{K}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}) \frac{\delta \varphi[\mathbf{z}(\mathbf{K}')] }{\delta z_\alpha(\mathbf{K}_1) \delta z_\beta(\mathbf{K}_2)}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Часть II
СТАТИСТИЧЕСКОЕ
ОПИСАНИЕ
СТОХАСТИЧЕСКИХ
СИСТЕМ

Глава 4

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ПРОЦЕССЫ И ПОЛЯ

Прежде чем перейти к статистическому описанию динамических систем, обсудим основные понятия теории случайных величин, процессов и полей.

4.1. Случайные величины и их характеристики

Вероятность нахождения случайной величины ξ находиться в интервале $-\infty < \xi < z$ описывается монотонной функцией

$$F(z) = P(-\infty < \xi < z) = \langle \Theta(z - \xi) \rangle_{\xi}, \quad F(\infty) = 1, \quad (4.1)$$

где

$$\Theta(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } z > 0, \\ 0, & \text{если } z < 0, \end{cases}$$

— ступенчатая функция Хевисайда, а через $\langle \dots \rangle_{\xi}$ обозначена операция усреднения по ансамблю реализаций случайной величины ξ . Функция $F(z)$ называется *функцией распределения вероятностей* или *интегральной функцией распределения*. Определение (4.1) отражает практический метод нахождения вероятности как предела отношения:

$$P(-\infty < \xi < z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N},$$

где n — целое число выпадания события $\xi < z$ в N независимых испытаниях. Следовательно, вероятность случайной величины ξ находиться в интервале $z < \xi < z + dz$, где dz — бесконечно малая величина, можно записать в виде

$$P(z < \xi < z + dz) = p(z)dz.$$

Функция $p(z)$ называется *плотностью вероятностей* и описывается формулой

$$p(z) = \frac{d}{dz} P(-\infty < \xi < z) = \langle \delta(z - \xi) \rangle_{\xi}, \quad (4.2)$$

где $\delta(z)$ — дельта функция Дирака. Через плотность вероятностей $p(z)$ сама интегральная функция распределения вероятностей описывается

формулой

$$F(z) = P(-\infty < \xi < z) = \int_{-\infty}^z d\xi p(\xi), \quad (4.3)$$

и, следовательно,

$$p(z) > 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dz p(z) = 1.$$

Умножая теперь равенство (4.2) на произвольную функцию $f(z)$ и интегрируя по всем значениям z , получаем выражение для среднего значения произвольной функции от случайной величины ξ в виде равенства

$$\langle f(\xi) \rangle_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} dz f(z) p(z). \quad (4.4)$$

Важной величиной, полностью описывающей все статистические характеристики случайной величины ξ , является ее *характеристическая функция*, определяемая равенством

$$\Phi(v) = \langle e^{iv\xi} \rangle_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{ivz} p(z).$$

Зная характеристическую функцию, можно получить как плотность вероятностей (преобразование Фурье)

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv \Phi(v) e^{-ivx},$$

так и моменты

$$M_n = \langle \xi^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz z^n p(z) = \left(\frac{d}{idv} \right)^n \Phi(v) \Big|_{v=0},$$

кумулянты (или семиинварианты)

$$K_n = \left(\frac{d}{idv} \right)^n \Theta(v) \Big|_{v=0},$$

где $\Theta(v) = \ln \Phi(v)$, и другие статистические характеристики. Через моменты и кумулянты случайной величины ξ функции $\Theta(v)$ и $\Phi(v)$

выражаются с помощью рядов Тейлора:

$$\Phi(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} M_n v^n, \quad \Theta(v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} K_n v^n. \quad (4.5)$$

Для многомерных случайных величин $\xi = \{z_1, \dots, z_n\}$ полное статистическое описание содержится в характеристической функции

$$\Phi(\mathbf{v}) = \langle e^{i\mathbf{v}\xi} \rangle_{\xi}, \quad \mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}. \quad (4.6)$$

Соответствующая совместная плотность вероятностей для величин $\xi_1, \dots, \xi_n$ является преобразованием Фурье от $\Phi(\mathbf{v})$, т. е.

$$P(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d\mathbf{v} \Phi(\mathbf{v}) e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}. \quad (4.7)$$

Подставляя функцию $\Phi(\mathbf{v})$ из (4.6) в (4.7) и выполняя интегрирование по $\mathbf{v}$, получаем очевидное равенство

$$P(\mathbf{x}) = \langle \delta(\xi - \mathbf{x}) \rangle_{\xi} = \langle \delta(\xi_1 - x_1) \dots \delta(\xi_n - x_n) \rangle, \quad (4.8)$$

которое можно принять за определение плотности вероятностей случайной векторной величины ξ .

Моменты и кумулянты случайной величины ξ при этом определяются равенствами

$$M_{i_1, \dots, i_n} = \frac{\partial^n}{i^n \partial v_{i_1} \dots \partial v_{i_n}} \Phi(\mathbf{v}) \Big|_{\mathbf{v}=0},$$

$$K_{i_1, \dots, i_n} = \frac{\partial^n}{i^n \partial v_{i_1} \dots \partial v_{i_n}} \Theta(\mathbf{v}) \Big|_{\mathbf{v}=0},$$

где $\Theta(\mathbf{v}) = \ln \Phi(\mathbf{v})$, а сами функции $\Theta(\mathbf{v})$ и $\Phi(\mathbf{v})$ выражаются через $M_{i_1, \dots, i_n}$ и $K_{i_1, \dots, i_n}$ с помощью рядов Тейлора:

$$\Phi(\mathbf{v}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} M_{i_1, \dots, i_n} v_{i_1} \dots v_{i_n}, \quad \Theta(\mathbf{v}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} K_{i_1, \dots, i_n} v_{i_1} \dots v_{i_n}. \quad (4.9)$$

Отметим, что если случайная величина ξ может принимать лишь дискретные значения ξ_i ($i = 1, 2, \dots$) с вероятностями p_i , то в этом случае аналогом формулы (4.8) является формула

$$p_k = \langle \delta_{z, \xi_k} \rangle,$$

где $\delta_{i,k} = 1$, если $i = k$, и 0 — в противном случае (символ Кронекера).

Рассмотрим теперь статистическое среднее $\langle \xi f(\xi) \rangle_{\xi}$, где $f(z)$ — произвольная детерминированная функция, такая, что рассматриваемая средняя величина существует. Для ее вычисления воспользуемся приемом, который далее будет широко использоваться. Вместо $f(\xi)$

введем функцию $f(\xi + \eta)$, где η — произвольная детерминированная величина. Разложим $f(\xi + \eta)$ в ряд Тейлора по ξ , т.е. представим ее в виде

$$f(\xi + \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(\eta) \xi^n = e^{\xi \frac{d}{d\eta}} f(\eta),$$

где введен оператор сдвига по η . Далее можно написать равенство

$$\begin{aligned} \langle \xi f(\xi + \eta) \rangle_{\xi} &= \left\langle \xi e^{\xi \frac{d}{d\eta}} \right\rangle_{\xi} f(\eta) = \\ &= \frac{\left\langle \xi e^{\xi \frac{d}{d\eta}} \right\rangle_{\xi}}{\left\langle e^{\xi \frac{d}{d\eta}} \right\rangle_{\xi}} \left\langle e^{\xi \frac{d}{d\eta}} \right\rangle_{\xi} f(\eta) = \Omega \left(\frac{d}{id\eta} \right) \langle f(\xi + \eta) \rangle_{\xi}, \quad (4.10) \end{aligned}$$

где функция

$$\Omega(v) = \frac{\left\langle \xi e^{i\xi v} \right\rangle_{\xi}}{\left\langle e^{i\xi v} \right\rangle_{\xi}} = \frac{d}{idv} \ln \Phi(v) = \frac{d}{idv} \Theta(v),$$

а $\Phi(v)$ — характеристическая функция случайной величины ξ . Используя теперь для функции $\Theta(v)$ разложение в ряд Тейлора (4.5), для функции $\Omega(v)$ получаем разложение в виде ряда:

$$\Omega(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} K_{n+1} v^n. \quad (4.11)$$

Учитывая, что переменная η в правой части (4.10) входит только в комбинации $\xi + \eta$, можно дифференцирование по η заменить на дифференцирование по ξ (при этом оператор $\Omega(d/id\xi)$ следует занести под знак усреднения) и положить $\eta = 0$. В результате получаем равенство

$$\langle \xi f(\xi) \rangle_{\xi} = \left\langle \Omega \left(\frac{d}{id\xi} \right) f(\xi) \right\rangle_{\xi},$$

которое, используя разложение (4.11) для $\Omega(v)$, можно переписать в виде ряда по кумулянтам K_n :

$$\langle \xi f(\xi) \rangle_{\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} K_{n+1} \left\langle \frac{d^n f(\xi)}{d\xi^n} \right\rangle_{\xi}. \quad (4.12)$$

Отметим, что если в формуле (4.12) положить $f(\xi) = \xi^{n-1}$, то мы получим рекуррентную связь между моментами и кумулянтами

случайной величины ξ в виде

$$M_n = \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} K_k M_{n-k} \quad (M_0 = 1, \quad n = 1, 2, \dots). \quad (4.13)$$

В качестве примеров использования полученных выше формул рассмотрим случайные величины ξ двух типов.

1. Величина ξ — гауссова случайная величина с нулевым средним значением и с плотностью вероятностей

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{z^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Для нее имеем

$$\Phi(v) = \exp \left\{ -\frac{v^2 \sigma^2}{2} \right\}, \quad \Theta(v) = -\frac{v^2 \sigma^2}{2},$$

и, следовательно,

$$M_1 = K_1 = \langle \xi \rangle = 0, \quad M_2 = K_2 = \langle z^2 \rangle = \sigma^2, \quad K_{n>2} = 0.$$

Рекуррентное равенство (4.13) в этом случае принимает вид

$$M_n = (n-1)\sigma^2 M_{n-2}, \quad n = 2, \dots,$$

откуда следует, что

$$M_{2n+1} = 0, \quad M_{2n} = (2n-1)!! \sigma^{2n}.$$

Для среднего значения (4.12) в этом случае получаем выражение

$$\langle \xi f(\xi) \rangle_\xi = \sigma^2 \left\langle \frac{df(\xi)}{d\xi} \right\rangle_\xi. \quad (4.14)$$

Если же величина является случайным гауссовым вектором с компонентами ξ_i ($\langle \xi_i \rangle_\xi = 0$, $i = 1, \dots, n$), то характеристическая функция описывается равенством

$$\Phi(\mathbf{v}) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} B_{ij} v_i v_j \right\}, \quad \Theta(\mathbf{v}) = -\frac{1}{2} B_{ij} v_i v_j,$$

где матрица $B_{ij} = \langle \xi_i \xi_j \rangle$, и по повторяющимся индексам предполагается суммирование. В этом случае вместо (4.14) легко получить равенство

$$\langle \xi_i f(\xi) \rangle_\xi = B_{ij} \left\langle \frac{df(\xi)}{d\xi_j} \right\rangle_\xi. \quad (4.15)$$

2. Величина $\xi \equiv n$ — целочисленная случайная величина, распределенная по закону Пуассона:

$$p_n = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}},$$

где $\bar{n}$ — среднее значение величины n . Для нее имеем

$$\Phi(v) = \exp \{ \bar{n} (e^{iv} - 1) \}, \quad \Theta(v) = \bar{n} (e^{iv} - 1),$$

и, следовательно, для нее все кумулянты одинаковы, т. е.

$$K_n = \bar{n}.$$

Для такой случайной величины рекуррентное равенство (4.13) и равенство (4.12) принимают вид

$$M_l = \bar{n} \sum_{k=0}^{l-1} \frac{(l-1)!}{k!(l-1-k)!} M_k \equiv \bar{n} \langle (n+1)^{l-1} \rangle, \quad (4.16)$$

$$\langle n f(n) \rangle = \bar{n} \langle f(n+1) \rangle.$$

4.2. Случайные процессы, поля и их характеристики

4.2.1. Общие замечания. Если мы имеем случайную функцию $z(t)$ (случайный процесс), то все ее статистические характеристики в фиксированный момент времени t описываются одновременной плотностью вероятностей

$$P(t; z) = \langle \delta(z(t) - z) \rangle, \quad (4.17)$$

параметрически зависящей от времени, с помощью равенства

$$\langle f(z(t)) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz f(z) P(t; z).$$

Интегральная функция распределения для этого процесса, определяющая вероятность того, что в момент времени t процесс $z(t) < Z$ вычисляется по формуле

$$F(t, Z) = P(z(t) < Z) = \int_{-\infty}^Z dz P(t; z),$$

и, следовательно,

$$F(t, Z) = \langle \theta(Z - z(t)) \rangle, \quad F(t, \infty) = 1, \quad (4.18)$$

где $\theta(z)$ — функция Хевисайда, равная нулю при $z < 0$ и единице при $z > 0$.

Отметим, что сингулярная дельта-функция Дирака, стоящая под знаком усреднения в (4.17) и параметрически зависящая от времени,

$$\varphi(t; z) = \delta(z(t) - z),$$

называется *индикаторной функцией*.

Аналогичным образом определяются двухвременная плотность вероятностей

$$P(t_1, t_2; z_1, z_2) = \langle \varphi(t_1, t_2; z_1, z_2) \rangle$$

и, вообще, n -точечная плотность вероятностей

$$P(t_1, \dots, t_n; z_1, \dots, z_n) = \langle \varphi(t_1, \dots, t_n; z_1, \dots, z_n) \rangle,$$

где n -точечная индикаторная функция

$$\varphi(t_1, \dots, t_n; z_1, \dots, z_n) = \delta(z(t_1) - z_1) \dots \delta(z(t_n) - z_n).$$

Процесс $z(t)$ называется *стационарным во времени*, если все его статистические характеристики инвариантны относительно сдвига во времени на произвольную величину τ , т. е.

$$P(t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau; z_1, \dots, z_n) = P(t_1, \dots, t_n; z_1, \dots, z_n).$$

В частности, одновременная плотность вероятностей вообще не зависит от времени, а корреляционная функция зависит только от разности времен:

$$B_z(t_1, t_2) = \langle z(t_1)z(t_2) \rangle = B_z(t_1 - t_2).$$

Временной масштаб τ_0 , характеризующий корреляционную функцию $B_z(t)$, называется *временным радиусом корреляции* процесса $z(t)$. Этот масштаб можно определить, например, с помощью равенства

$$\int_0^\infty \langle z(t + \tau)z(t) \rangle d\tau = \tau_0 \langle z^2(t) \rangle. \quad (4.19)$$

Отметим, что для стационарного процесса фурье-образ корреляционной функции называется *временной спектральной функцией* (или просто *временным спектром*):

$$\Phi_z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt B_z(t) e^{i\omega t}.$$

Аналогичным образом определяются как одноточечная плотность вероятностей для случайного поля $f(\mathbf{x}, t)$,

$$P(t, \mathbf{x}; f) = \langle \varphi(t, \mathbf{x}; f) \rangle, \quad (4.20)$$

параметрически зависящая от пространственно-временной точки $(t, \mathbf{x})$, так и многоточечная плотность вероятностей

$$\begin{aligned} P(t_1, \dots, t_n, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; f_1, \dots, f_n) = \\ = \langle \varphi(t_1, \dots, t_n, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; f_1, \dots, f_n) \rangle, \end{aligned} \quad (4.21)$$

где индикаторные функции

$$\varphi(t, \mathbf{x}; f) = \delta(f(\mathbf{x}, t) - f),$$

$$\begin{aligned} \varphi(t_1, \dots, t_n, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; f_1, \dots, f_n) = \\ = \delta(f(\mathbf{x}_1, t_1) - f_1) \dots \delta(f(\mathbf{x}_n, t_n) - f_n). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Здесь для определенности через $\mathbf{x}$ и t обозначены пространственные и временная координаты, хотя в физических задачах роль временной координаты в ряде случаев может играть и одна выделенная пространственная координата.

Случайное поле $f(\mathbf{x}, t)$ называется пространственно однородным, если все его статистические характеристики инвариантны относительно сдвига в пространстве на произвольный вектор $\mathbf{a}$, т. е.

$$\begin{aligned} P(t_1, \dots, t_n, \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}, \dots, \mathbf{x}_n + \mathbf{a}; f_1, \dots, f_n) = \\ = P(t_1, \dots, t_n, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; f_1, \dots, f_n). \end{aligned}$$

В этом случае одноточечная плотность вероятностей $P(t, \mathbf{x}; f) = P(t; f)$ не зависит от $\mathbf{x}$, а пространственная корреляционная функция зависит от разности векторов $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, т. е.

$$B_f(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2) = \langle f(\mathbf{x}_1, t_1) f(\mathbf{x}_2, t_2) \rangle = B_f(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2; t_1, t_2).$$

Если, к тому же, случайное поле $f(\mathbf{x}, t)$ инвариантно и относительно поворота всех векторов $\mathbf{x}_i$ на произвольный угол, т. е. относительно поворота системы координат, то случайное поле $f(\mathbf{x}, t)$ называется однородным и изотропным случайным полем. В этом случае корреляционная функция зависит только от расстояния между точкой $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$, т. е.

$$B_f(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2) = \langle f(\mathbf{x}_1, t_1) f(\mathbf{x}_2, t_2) \rangle = B_f(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|; t_1, t_2).$$

Соответствующее преобразование Фурье от корреляционной функции по пространственной переменной определяет пространственную спектральную функцию

$$\Phi_f(\mathbf{k}, t) = \int d\mathbf{x} B_f(\mathbf{x}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}},$$

а преобразование Фурье от корреляционной функции стационарного во времени и однородного в пространстве случайного поля $f(\mathbf{x}, t)$ определяет пространственно-временную спектральную функцию поля $f(\mathbf{x}, t)$:

$$\Phi_f(\mathbf{k}, \omega) = \int d\mathbf{x} \int_{-\infty}^{\infty} dt B_f(\mathbf{x}, t) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} + \omega t)}.$$

Для изотропного случайного поля $f(\mathbf{x}, t)$ пространственная спектральная функция также изотропна в $\mathbf{k}$ -пространстве, т. е.

$$\Phi_f(\mathbf{k}, \omega) = \Phi_f(k, \omega).$$

Для полного статистического описания случайной функции $z(t)$ достаточно знать ее характеристический функционал

$$\Phi[v(\tau)] = \left\langle \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau v(\tau) z(\tau) \right\} \right\rangle,$$

где функция $v(t)$ — произвольная (достаточно «хорошая») функция. Зная функционал $\Phi[v(\tau)]$ можно найти такие характеристики случайной функции $z(t)$, как ее *среднее значение* $\langle z(t) \rangle$, *корреляционную функцию* $\langle z(t_1)z(t_2) \rangle$, *n-точечную моментную функцию* $\langle z(t_1) \dots z(t_n) \rangle$ и т. д.

В самом деле, раскладывая характеристический функционал $\Phi[v(\tau)]$ в функциональный ряд Тейлора, получаем для него выражение через моментные функции процесса $z(t)$:

$$\Phi[v(\tau)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n M_n(t_1, \dots, t_n) v(t_1) \dots v(t_n),$$

где

$$M_n(t_1, \dots, t_n) = \langle z(t_1) \dots z(t_n) \rangle = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n}{\delta v(t_1) \dots \delta v(t_n)} \Phi[v(\tau)] \Big|_{v=0}.$$

Таким образом, моментные функции случайного процесса $z(t)$ определяются через вариационные производные характеристического функционала.

Представим теперь $\Phi[v(\tau)]$ в виде $\Phi[v(\tau)] = \exp \{ \Theta[v(\tau)] \}$. Функционал $\Theta[v(\tau)]$ также можно разложить в функциональный ряд Тейлора:

$$\Theta[v(\tau)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n K_n(t_1, \dots, t_n) v(t_1) \dots v(t_n),$$

где функция

$$K_n(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n}{\delta v(t_1) \dots \delta v(t_n)} \Theta[v(\tau)] \Big|_{v=0}$$

называется *кумулянтной функцией* n -го порядка случайного процесса $z(t)$.

Аналогичным образом определяется и характеристический функционал случайного скалярного поля $f(\mathbf{x}, t)$:

$$\Phi[v(\mathbf{x}', \tau)] = \left\langle \exp \left\{ i \int d\mathbf{x} \int_{-\infty}^{\infty} dt v(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}, t) \right\} \right\rangle = \exp \{ \Theta[v(\mathbf{x}', \tau)] \}.$$

Если $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ — векторное случайное поле, то следует считать $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ векторной функцией.

Как отмечалось выше, полное описание случайных процессов и полей содержится в их характеристических функционалах. Однако даже знание одноточечных плотностей вероятностей случайных процессов и полей дает определенную информацию об эволюции случайных процессов во всем интервале времен и структуре случайных полей в пространстве. Эту информацию можно получить на основе идей статистической топографии случайных процессов и полей.

4.2.2. Статистическая топография случайных процессов и полей.

Случайные процессы.

Прежде всего обсудим понятие типичной реализации случайного процесса $z(t)$, которое характеризует основные особенности поведения отдельной реализации процесса в целом на всем интервале времен.

Типичная реализация случайного процесса. Назовем типичной реализацией случайного процесса $z(t)$ детерминированную кривую $z^*(t)$, которая является *медианой интегральной функции распределения* (4.18) и определяется как решение алгебраического уравнения

$$F(t, z^*(t)) = 1/2, \quad (4.23)$$

где $F(t, Z)$ — интегральная функция распределения (4.18). Основанием для этого является свойство медианы, заключающееся в том, что для любого интервала времени (t_1, t_2) случайный процесс $z(t)$ как бы «обвивает» кривую $z^*(t)$ таким образом, что среднее время, в течение которого выполняется неравенство $z(t) > z^*(t)$, совпадает со средним временем, в течение которого выполняется обратное неравенство $z(t) < z^*(t)$ (рис. 2.1), т. е.

$$\langle T_{z(t) > z^*(t)} \rangle = \langle T_{z(t) < z^*(t)} \rangle = \frac{1}{2} (t_2 - t_1). \quad (4.24)$$

В самом деле, интегрируя равенство (4.23) по времени в интервале (t_1, t_2) , получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} dt F(t, z^*(t)) = \frac{1}{2} (t_2 - t_1). \quad (4.25)$$

С другой стороны, в силу определения интегральной функции распределения (4.18), интеграл в левой части (4.25) равен

$$\int_{t_1}^{t_2} dt F(t, z^*(t)) = \langle T(t_1, t_2) \rangle, \quad (4.26)$$

где

$$T(t_1, t_2) = \sum_1^N \Delta t_k$$

— общее время из интервала (t_1, t_2) , в течение которого реализация процесса $z(t)$ лежит выше кривой $z^*(t)$. Сопоставляя (4.25) с (4.26) и получаем равенство (4.24).

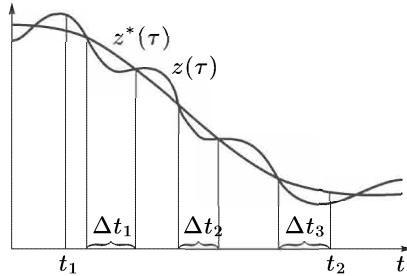


Рис. 2.1. К определению типичной реализации случайного процесса

Кривая $z^*(t)$ может, естественно, существенно отличаться от любой конкретной реализации процесса $z(t)$ и не описывает величину возможных выбросов. Таким образом, кривая типичной реализации $z^*(t)$ случайного процесса $z(t)$, полученная с помощью одновременной плотности вероятностей, определена, тем не менее, на всем интервале времени $t \in (0, \infty)$.

Для конкретных типов случайных процессов можно получить дополнительную информацию, характеризующую уже выбросы относительно этой кривой.

Статистика числа точек пересечения процесса с прямой. Одноточечная плотность вероятностей (4.17) для случайного процесса $z(t)$ является результатом усреднения сингулярной индикаторной функции по ансамблю реализаций случайного процесса $z(t)$. Эта функция сосредоточена на точках пересечения процесса $z(t)$ прямой $z = \text{const}$, определяемых как корни алгебраического уравнения

$$z(t_n) = z \quad (n = 0, 1, \dots, \infty),$$

и, следовательно, ее можно переписать в виде

$$\varphi(t; z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{|p(t_k)|} \delta(t - t_k),$$

где $p(t) = \frac{d}{dt} z(t)$.

Число таких точек само является случайной величиной, которая, очевидно, описывается формулой

$$n(t, z) = \int_{-\infty}^t d\tau |p(\tau)| \varphi(\tau; z). \quad (4.27)$$

Следовательно, среднее значение числа точек пересечения процесса $z(t)$ прямой $z = \text{const}$ описывается корреляцией временной производной процесса $z(t)$ с ее индикаторной функцией или совместной одновременной плотностью вероятностей процесса $z(t)$ и ее временной производной $\frac{d}{dt} z(t)$:

$$\langle n(t, z) \rangle = \int_{-\infty}^t d\tau \langle |p(\tau)| \varphi(\tau; z) \rangle.$$

Аналогичным образом легко определить и некоторые элементы статистики, связанной с точками максимума (минимума) случайного процесса $z(t)$.

Случайные поля.

В статистической топографии случайных полей основным объектом изучения, как и в обычной топографии горных массивов, является система контуров — линий уровня (в двумерном случае) или поверхностей (в трехмерном случае) постоянных значений, определяемых равенством $f(\mathbf{r}, t) = f = \text{const}$.

Для анализа системы контуров (для простоты в данном параграфе будем говорить о двумерном случае ($\mathbf{r} = \mathbf{R}$)) удобно ввести сингулярную индикаторную функцию (4.22), сосредоточенную на них.

Через функцию (4.22) выражаются, например, такие величины, как общая площадь областей, ограниченных линиями уровня, где $f(\mathbf{R}, t) > f$,

$$S(t; f) = \int \theta(f(\mathbf{R}, t) - f) d\mathbf{R} = \int_f^\infty df' \int d\mathbf{R} \varphi(t, \mathbf{R}; f'),$$

и общая «масса» поля, заключенная в этих областях:

$$M(t; f) = \int f(\mathbf{R}, t) \theta(f(\mathbf{R}, t) - f) d\mathbf{R} = \int_f^\infty f' df' \int d\mathbf{R} \varphi(t, \mathbf{R}; f').$$

Как указывалось выше, среднее значение индикаторной функции (4.22) по ансамблю реализаций определяет одновременную во времени и одноточечную в пространстве плотность вероятностей

$$P(t, \mathbf{R}; f) = \langle \varphi(t, \mathbf{R}; f) \rangle = \langle \delta(f(\mathbf{R}, t) - f) \rangle,$$

и, следовательно, средние по ансамблю реализаций значения всех выражений непосредственно определяются этой плотностью вероятностей.

Дополнительную информацию о детальной структуре поля $f(\mathbf{R}, t)$ можно получить, включив в рассмотрение его пространственный градиент $\mathbf{p}(\mathbf{R}, t) = \nabla f(\mathbf{R}, t)$. Так, например, величина

$$l(t; f) = \int d\mathbf{R} |\mathbf{p}(\mathbf{R}, t)| \delta(f(\mathbf{R}, t) - f) = \oint dl \quad (4.28)$$

описывает общую длину контуров и является обобщением формулы (4.27) на случайные поля.

Подынтегральное выражение в (4.28) описывается расширенной индикаторной функцией

$$\varphi(t, \mathbf{R}; f, \mathbf{p}) = \delta(f(\mathbf{R}, t) - f) \delta(\mathbf{p}(\mathbf{R}, t) - \mathbf{p}), \quad (4.29)$$

и среднее значение формулы (4.28) связано с совместной одновременной плотностью вероятностей полей $f(\mathbf{R}, t)$ и градиента $\mathbf{p}(\mathbf{R}, t)$, определяемой путем усреднения индикаторной функции (4.29) по ансамблю реализаций, т. е. функцией

$$P(t, \mathbf{R}; f, \mathbf{p}) = \langle \delta(f(\mathbf{R}, t) - f) \delta(\mathbf{p}(\mathbf{R}, t) - \mathbf{p}) \rangle.$$

Включение в рассмотрение пространственных производных второго порядка позволяет оценить общее число контуров $f(\mathbf{R}, t) = f = \text{const}$ с помощью приближенной (с точностью до незамкнутых линий) формулы

$$N(t; f) = N_{\text{in}}(t; f) - N_{\text{out}}(t; f) = \frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{R} \kappa(t, \mathbf{R}; f) |\mathbf{p}(\mathbf{R}, t)| \delta(f(\mathbf{R}, t) - f),$$

где $N_{\text{in}}(t; f)$, $N_{\text{out}}(t; f)$ — число контуров, для которых вектор $\mathbf{p}$ направлен по внутренней и внешней нормали соответственно, а $\kappa(t, \mathbf{R}; f)$ — кривизна линии уровня.

Отметим, что для пространственно однородного поля $f(\mathbf{R}, t)$, когда соответствующие одноточечные плотности вероятностей $P(t, \mathbf{R}; f)$ и $P(t, \mathbf{R}; f, \mathbf{p})$ не зависят от $\mathbf{R}$, статистические средние всех выражений

(без интегрирования по $\mathbf{R}$) будут описывать соответствующие удельные (приходящиеся на единицу площади) значения этих величин, если они, конечно, существуют.

Рассмотрим теперь несколько примеров случайных процессов.

4.2.3. Гауссов случайный процесс. Прежде всего обсудим случай непрерывного процесса — гауссового случайного процесса $z(t)$ со средним значением, равным нулю ($\langle z(t) \rangle = 0$), и корреляционной функцией $B(t_1, t_2) = \langle z(t_1)z(t_2) \rangle$. Его характеристический функционал имеет вид

$$\Phi[v(\tau)] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 B(\tau_1, \tau_2) v(\tau_1) v(\tau_2) \right\}.$$

Для этого процесса

$$\Theta[v(\tau)] = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 B(\tau_1, \tau_2) v(\tau_1) v(\tau_2) \quad (4.30)$$

и единственной отличной от нуля кумулянтной функцией является его корреляционная функция

$$K_2(t_1, t_2) = B(t_1, t_2).$$

Рассматривая n -ю вариационную производную от $\Phi[v(\tau)]$ легко получить для моментных функций гауссового процесса $z(t)$ рекуррентное равенство

$$M_n(t_1, \dots, t_n) = \sum_{k=2}^n B(t_1, t_2) M_{n-2}(t_2, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_n). \quad (4.31)$$

Отсюда следует, что для гауссового процесса со средним значением, равным нулю, все моментные функции нечетного порядка равны нулю, а моментные функции четного порядка определяются суммой, в которой процессы $z(t_i)z(t_k)$ усредняются попарно всевозможными способами.

Если функция $v(\tau)$ в формуле (4.30) отлична от нуля только в интервале $0 < \tau < t$, то характеристический функционал

$$\begin{aligned} \Phi[t; v(\tau)] &= \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle = \\ &= \exp \left\{ - \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2) v(\tau_1) v(\tau_2) \right\} \quad (4.32) \end{aligned}$$

зависит также и от времени t , и в этом случае функционал $\Phi[t; v(\tau)]$, как функция параметра t , удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} \ln \Phi[t; v(\tau)] = -v(t) \int_0^t d\tau B(t, \tau) v(\tau), \quad \Phi[0; v(\tau)] = 1. \quad (4.33)$$

4.2.4. Разрывные случайные процессы. Перейдем теперь к примерам разрывных процессов. Разрывные процессы — это такие случайные функции, у которых изменение поведения во времени происходит в дискретные моменты времени $t_1, t_2, \dots$, заданные статистическим образом. Прежде всего для описания разрывных процессов требуется

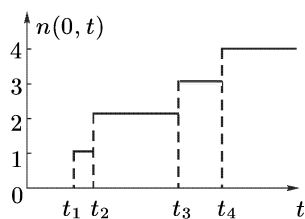


Рис. 2.2. Одна из возможных реализаций процесса $n(0, t)$

знание статистики этих моментов времени или знание статистики числа $n(0, t)$ попадания точек t_i на интервал времени $(0, t)$. При этом имеет место равенство

$$n(0, t) = n(0, t') + n(t', t), \quad 0 \leq t' \leq t.$$

Сама величина $n(0, t)$ является случайным процессом, возможная реализация которого изображена на рис. 2.2.

Совокупность точек разрыва $t_1, t_2, \dots$ процесса $z(t)$ называется *потокоточек*. Ниже мы будем рассматривать *пуассоновский стационарный поток точек*, у которого вероятность выпадения n точек на интервале (t_1, t_2) определяется формулой Пуассона

$$P_{n(t_1, t_2)=n} = \frac{\left[\overline{n(t_1, t_2)} \right]^n}{n!} \exp \left\{ -\overline{n(t_1, t_2)} \right\} \quad (4.34)$$

со средним значением числа точек на (t_1, t_2)

$$\overline{n(t_1, t_2)} = \nu |t_1 - t_2|,$$

где ν — среднее число точек, приходящихся на единицу времени. При этом число точек, выпадающих на неперекрывающихся интервалах, статистически независимо, а моменты времени выпадения точек на интервале (t_1, t_2) при условии, что их выпало n штук, также статистически независимы и равномерно распределены на интервале (t_1, t_2) . Длина интервала между соседними скачками имеет экспоненциальное распределение.

Пуассоновский поток точек — марковский процесс.

Рассмотрим теперь случайные процессы, точки разрыва которых являются пуассоновскими потоками точек. В физических модельных задачах в настоящее время в основном используются процессы трех

типов: пуассоновский процесс, телеграфный процесс и обобщенный телеграфный процесс.

Пуассоновский (импульсный) случайный процесс.

Пуассоновским (импульсным) случайным процессом $z(t)$ называется процесс, описываемый формулой

$$z(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i g(t - t_i), \quad (4.35)$$

где случайные величины ξ_i статистически независимы с плотностью вероятностей $p(\xi)$, а случайные точки t_k равномерно распределены на интервале $(0, T)$, так что их число n распределено по закону Пуассона с параметром $\bar{n} = \nu T$. Функция $g(t)$, описывающая форму импульса, — детерминированная функция ($g(t) = 0$ при $t < 0$).

Для пуассоновского случайного процесса $z(t)$ характеристический функционал имеет вид

$$\Phi[t; v(\tau)] = \exp \left\{ \nu \int_0^t dt' \left[W \left(\int_{t'}^t d\tau v(\tau) g(t - t') \right) - 1 \right] \right\},$$

где

$$W(v) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi) e^{i\xi v}$$

— характеристическая функция случайной величины ξ . Следовательно, функционал

$$\Theta[t; v(\tau)] = \nu \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi) \left\{ \exp \left[i\xi \int_{t'}^t d\tau v(\tau) g(t - t') \right] - 1 \right\}, \quad (4.36)$$

и кумулянтные функции имеют вид

$$K_n(t_1, \dots, t_n) = \nu \langle \xi^n \rangle \int_0^{\min\{t_1, \dots, t_n\}} dt' g(t - t') \dots g(t_n - t').$$

Рассмотрим два важных для приложений случая пуассоновского процесса.

1. Пусть

$$g(t) = \theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

т. е.

$$z(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i \theta(t - t_i).$$

В этом случае

$$K_n(t_1, \dots, t_n) = \nu \langle \xi^n \rangle \min \{t_1, \dots, t_n\}.$$

Если при этом $\xi \equiv 1$, то процесс $z(t) \equiv n(0, t)$ и для него

$$K_n(t_1, \dots, t_n) = \nu \min \{t_1, \dots, t_n\},$$

$$\Theta[t; v(\tau)] = \nu \int_0^t dt' \left\{ \exp \left[i \int_{t'}^t d\tau v(\tau) \right] - 1 \right\}. \quad (4.37)$$

2. Пусть теперь $g(t) = \delta(t)$. В этом случае процесс

$$z(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i \delta(t - t_i)$$

называется обычно *процессом дробового шума*. Этот процесс является частным случаем *дельта-коррелированных процессов*. Для такого процесса

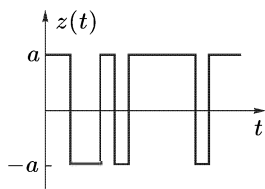
$$\Theta[t; v(\tau)] = \nu \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi) \left\{ e^{i\xi v(\tau)} - 1 \right\} \quad (4.38)$$

и кумулянтные функции имеют вид

$$K_n(t_1, \dots, t_n) = \nu \langle \xi^n \rangle \delta(t_1 - t_2) \delta(t_2 - t_3) \dots \delta(t_{n-1} - t_n).$$

Телеграфный случайный процесс.

Рассмотрим теперь статистические характеристики телеграфного случайного процесса, определяемого формулой (рис. 2.3)



$$\begin{aligned} z(t) &= a(-1)^{n(0,t)} \\ (z(0) &= a, \quad z^2(t) \equiv a^2), \end{aligned} \quad (4.39)$$

где $n(t_1, t_2)$ — случайная последовательность целых чисел, описывающая количество скачков на интервале (t_1, t_2) .

Рис. 2.3. Одна из возможных реализаций телеграфного случайного процесса

Рассмотрим два случая.

1. Будем считать вначале, что a — детерминированная величина.

Для первых двух моментных функций процесса $z(t)$ имеем выражения

$$\langle z(t) \rangle = a \sum_{n(0,t)=0}^{\infty} (-1)^{n(0,t)} P_{n(0,t)} = a e^{-2\overline{n(0,t)}} = a e^{-2\nu t},$$

$$\begin{aligned} \langle z(t_1) z(t_2) \rangle &= a^2 \langle (-1)^{n(0,t_1)+n(0,t_2)} \rangle = a^2 \langle (-1)^{n(t_2,t_1)} \rangle = \\ &= a^2 e^{-2\overline{n(t_2,t_1)}} = a^2 e^{-2\nu(t_1-t_2)}, \quad (t_1 \geq t_2) \end{aligned} \quad (4.40)$$

и рекуррентное соотношение для моментных функций более высокого порядка при $(t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n)$:

$$\begin{aligned} M_n(t_1, \dots, t_n) &= \langle z(t_1) \dots z(t_n) \rangle = a^2 \langle (-1)^{n(0,t_1)+n(0,t_2)+\dots+n(0,t_n)} \rangle = \\ &= a^2 \langle (-1)^{n(t_2,t_1)} \rangle \langle (-1)^{n(0,t_3)+\dots+n(0,t_n)} \rangle = \\ &= \langle z(t_1) z(t_2) \rangle M_{n-2}(t_3, \dots, t_n). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Рекуррентное равенство (4.41) очень похоже на соотношение (4.31) для гауссового процесса с экспоненциальной корреляционной функцией. Отличие состоит в том, что правая часть (4.41) соответствует только одному из слагаемых в (4.31), отвечающему определенному упорядочиванию во времени.

Рассмотрим теперь характеристический функционал для этого процесса:

$$\Phi_a[t; v(\tau)] = \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle,$$

где индексом a отмечен тот факт, что a — детерминированная величина. Используя разложение характеристического функционала в функциональный ряд Тейлора и рекуррентное равенство (4.41), получаем интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \Phi_a[t; v(\tau)] &= 1 + i a \int_0^t dt_1 e^{-2\nu t_1} v(t_1) - \\ &- a^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{-2\nu(t_1-t_2)} v(t_1) v(t_2) \Phi_a[t_2; v(\tau)], \end{aligned} \quad (4.42)$$

которое можно переписать в виде интегро-дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi_a[t; v(\tau)] = \\ = i a e^{-2\nu t} v(t) - a^2 v(t) \int_0^t dt_1 e^{-2\nu(t-t_1)} v(t_1) \Phi_a[t_1; v(\tau)]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

2. Пусть теперь величина a будет случайной величиной с плотностью вероятностей $p(a)$. Для получения характеристического функционала процесса $z(t)$ в этом случае требуется усреднить уравнение (4.43) по случайной величине a . Это в общем случае также не удастся осуществить. И только для случайной величины a с плотностью вероятностей

$$p(a) = \frac{1}{2} [\delta(a - a_0) + \delta(a + a_0)],$$

для которой $\langle a \rangle = 0$, $a^2 = a_0^2$ (собственно, именно этот случай и называется обычно телеграфным процессом), можно усреднить уравнение (4.43). В результате получаем уравнение

$$\frac{d}{dt} \Phi[t; v(\tau)] = -a_0^2 v(t) \int_0^t dt_1 e^{-2\nu(t-t_1)} v(t_1) \Phi[t_1; v(\tau)]. \quad (4.44)$$

Остановимся теперь на одной важной предельной теореме, связанной с телеграфными случайными процессами.

Рассмотрим случайный процесс

$$\xi_N(t) = z_1(t) + \dots + z_N(t),$$

где все $z_k(t)$ — статистически независимые телеграфные процессы со средним значением, равным нулю, и корреляционной функцией, равной

$$\langle z(t) z(t + \tau) \rangle = \frac{\sigma^2}{N} e^{-\alpha|\tau|}.$$

Тогда предельный процесс $\xi(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \xi_N(t)$ — гауссов случайный процесс с экспоненциальной корреляционной функцией

$$\langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|},$$

т. е. гауссовый марковский процесс. Таким образом, процесс $\xi_N(t)$ для конечного числа N является аппроксимирующим процессом с конечным числом состояний для гауссового марковского процесса.

Обобщенный телеграфный процесс.

Рассмотрим теперь обобщенный телеграфный процесс, описываемый формулой

$$z(t) = a_{n(o,t)}. \quad (4.45)$$

Здесь $n(0, t)$ — случайная последовательность целых чисел, описанная выше, а величины a_k считаются статистически независимыми с распределением вероятностей $p(a)$. На рис. 2.4 представлена одна из возможных реализаций этого процесса. Для процесса $z(t)$ имеем

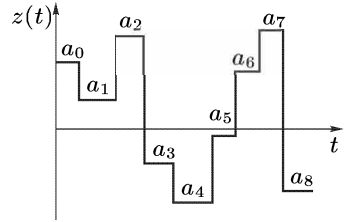


Рис. 2.4. Одна из возможных реализаций обобщенного телеграфного случайного процесса

$$\langle z(t) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle a_k \delta_{k,n(0,t)} \rangle = \langle a \rangle,$$

$$\begin{aligned} \langle z(t_1) z(t_2) \rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \langle a_k a_l \rangle \langle \delta_{k,n(0,t_1)} \delta_{l,n(0,t_2)} \rangle = \\ &= \langle a^2 \rangle \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \langle \delta_{k,n(0,t_1)} \rangle \langle \delta_{0,n(t_2,t_1)} \rangle + 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \langle \delta_{k,n(0,t_2)} \rangle \langle \delta_{0,n(t_2,t_1)} \rangle \right\} = \\ &= \langle a^2 \rangle e^{-\nu(t_1-t_2)} + \langle a \rangle^2 (1 - e^{-\nu(t_1-t_2)}) \quad (t_1 \geq t_2), \end{aligned}$$

и т. д. При этом вероятность отсутствия скачков на интервале (t_2, t_1) равна

$$P_{n(t_2,t_1)=0} = \langle \delta_{0,n(t_2,t_1)} \rangle = e^{-\nu|t_1-t_2|}.$$

Выше мы отмечали, что пуассоновский поток точек и процессы, построенные на таких точках, — марковские процессы. Остановимся теперь на этом важном классе случайных процессов более подробно.

4.3. Марковские процессы

4.3.1. Общие свойства. В предыдущем параграфе мы рассмотрели характеристический функционал процесса $z(t)$, который описывает все его статистические характеристики. Если теперь в нем положить

$$v(t) = \sum_{k=1}^n v_k \delta(t - t_k),$$

то характеристический функционал переходит в совместную характеристическую функцию случайных величин $z_k = z(t_k)$:

$$\Phi_n(v_1, \dots, v_n) = \left\langle \exp \left\{ i \sum_{k=1}^n v_k z(t_k) \right\} \right\rangle,$$

преобразование Фурье которой определяет совместную плотность вероятностей для значений процесса $z(t)$ в дискретные моменты времени:

$$P_n(z_1, t_1; \dots; z_n, t_n) = \langle \delta(z(t_1) - z_1) \dots \delta(z(t_n) - z_n) \rangle. \quad (4.46)$$

Пусть выбранные моменты времени упорядочены следующим образом:

$$t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n.$$

Тогда, по определению условной вероятности,

$$\begin{aligned} P_n(z_1, t_1; \dots; z_n, t_n) &= \\ &= p_n(z_1, t_1 \mid z_2, t_2; \dots; z_n, t_n) P_{n-1}(z_2, t_2; \dots; z_n, t_n), \end{aligned} \quad (4.47)$$

где p_n — условная плотность вероятностей для значения процесса $z(t)$ в момент времени t_1 при условии, что в моменты времени t_k ($k = 2, \dots, n$) функция $z(t)$ принимала значения, равные $z(t_k) = z_k$. Если процесс $z(t)$ таков, что для всех $t_1 > t_2$ условная плотность вероятностей однозначно определяется значением z_2 , принятым в момент времени t_2 , и совсем не зависит от предшествующей истории, т. е.

$$p_n(z_1, t_1 \mid z_2, t_2; \dots; z_n, t_n) = p(z_1, t_1 \mid z_2, t_2), \quad (4.48)$$

то этот процесс называется марковским процессом или процессом без последствия. Функция

$$p(z, t \mid z_0, t_0) = \langle \delta(z(t) - z) \mid z(t_0) = z_0 \rangle \quad (t > t_0) \quad (4.49)$$

при этом называется *плотностью вероятностей перехода*. Полагая в (4.49) $t = t_0$, получаем равенство

$$p(z, t_0 \mid z_0, t_0) = \delta(z - z_0).$$

Подставим выражение (4.47) в формулу (4.46). Получается рекуррентное равенство для n -точечной по времени плотности вероятностей процесса $z(t)$. Итерируя это равенство, находим связь $P_n(z_1, t_1; \dots; z_n, t_n)$ с одноточечным распределением вероятностей ($t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$):

$$\begin{aligned} P_n(z_1, t_1; \dots; z_n, t_n) &= \\ &= p(z_1, t_1 \mid z_2, t_2) \cdot \dots \cdot p(z_{n-1}, t_{n-1} \mid z_n, t_n) P(t_n, z_n). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Таким образом, все статистические характеристики марковского процесса $z(t)$ описываются всего двумя функциями — плотностью

вероятностей перехода $p(z, t \mid z_0, t_0)$ и одноточечной плотностью вероятностей $P(t, z)$.

Очевидно, что все остается без изменения и в случае многомерных процессов, т. е. если $\mathbf{z}(t)$ является случайной векторной функцией.

Выше мы говорили о том, что все статистические характеристики марковского процесса $z(t)$ описываются только двумя функциями — плотностью вероятностей перехода $p(z, t \mid z_0, t_0)$ и одноточечной плотностью вероятностей $P(t, z)$. Однако для статистического анализа стохастических уравнений требуется всетаки знание характеристического функционала случайного процесса $z(t)$.

4.3.2. Характеристический функционал марковского процесса.

В общем случае произвольного марковского процесса $z(t)$ не удается получить замкнутое уравнение для его характеристического функционала $\Phi[t; v(\tau)] = \langle \varphi[t; v(\tau)] \rangle$, где

$$\varphi[t; v(\tau)] = \exp \left\{ i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right\}.$$

Можно, однако, получить замкнутое уравнение для функционала

$$\Psi[z, t; v(\tau)] = \langle \delta(z(t) - z) \varphi[t; v(\tau)] \rangle, \quad (4.51)$$

описывающего статистические корреляции процесса $z(t)$ с его предысторией. Характеристический функционал $\Phi[t; v(\tau)]$ связан с функционалом $\Psi[z, t; v(\tau)]$ формулой

$$\Phi[t; v(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} dz \Psi[z, t; v(\tau)]. \quad (4.52)$$

Чтобы вывести уравнение для $\Psi[z, t; v(\tau)]$, заметим, что имеет место равенство

$$\varphi[t; v(\tau)] = 1 + i \int_0^t dt_1 z(t_1) v(t_1) \varphi[t_1; v(\tau)]. \quad (4.53)$$

Подставляя (4.53) в (4.51), получаем выражение

$$\Psi[t, z; v(\tau)] = P(t, z) + i \int_0^t dt_1 v(t_1) \langle \delta(z(t) - z) z(t_1) \varphi[t_1; v(\tau)] \rangle, \quad (4.54)$$

где $P(t, z) = \langle \delta(z(t) - z) \rangle$ — одновременная плотность вероятностей случайной величины $z(t)$.

Перепишем (4.54) в виде

$$\begin{aligned} \Psi[t, z; v(\tau)] &= P(t, z) + \\ &+ i \int_0^t dt_1 v(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 z_1 \langle \delta(z(t) - z) \delta(z(t_1) - z_1) \varphi[t_1; v(\tau)] \rangle. \end{aligned} \quad (4.55)$$

В уравнении (4.55) можно выполнить усреднение, учитывая марковость процесса $z(t)$, и мы получаем замкнутое интегральное уравнение для функционала $\Psi[t, z; v(\tau)]$:

$$\Psi[t, z; v(\tau)] = P(t, z) + i \int_0^t dt_1 v(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 z_1 p(z, t | z_1, t_1) \Psi[t_1, z_1; v(\tau)], \quad (4.56)$$

где $p(z, t; z_0, t_0) = \langle \delta(z(t) - z) | z(t_0) = z_0 \rangle$ — плотность вероятностей перехода.

Интегрируя (4.56) по z , получаем дополнительную связь характеристического функционала $\Phi[t; v(\tau)]$ с функционалом $\Psi[z, t; v(\tau)]$:

$$\Phi[t; v(\tau)] = 1 + i \int_0^t dt_1 v(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 z_1 \Psi[t_1, z_1; v(\tau)], \quad (4.57)$$

которую можно записать в виде

$$\frac{1}{iv(t)} \frac{d}{dt} \Phi[t; v(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 z_1 \Psi[t, z_1; v(\tau)]. \quad (4.58)$$

Умножая (4.56) на z и интегрируя по z , получаем связь функционала

$$\Psi[t; v(\tau)] = \langle z(t) \varphi[t; v(\tau)] \rangle = \frac{1}{iv(t)} \frac{d}{dt} \Phi[t; v(\tau)]$$

с функционалом $\Psi[t, z; v(\tau)]$:

$$\Psi[t; v(\tau)] = \langle z(t) \rangle + i \int_0^t dt_1 v(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \langle z(t) | z_1, t_1 \rangle \Psi[t_1, z_1; v(\tau)]. \quad (4.59)$$

В общем случае уравнение (4.56) представляет собой сложное интегральное уравнение, конкретный вид которого определяется функциями $P(t, z)$ и $p(z, t; z_0, t_0)$, т. е. характеристиками марковского процесса.

В ряде случаев ситуация упрощается. Так, например, для телеграфного процесса из (4.40) следует, что

$$\langle z(t) \mid z_1, t_1 \rangle = z_1 e^{-2\nu(t-t_1)}, \quad \langle z(t) \rangle = 0,$$

и мы получаем уравнение (4.15).

Задачи

Задача 8. Показать, что случайный процесс

$$\xi_N(t) = z_1(t) + \dots + z_N(t),$$

где все $z_k(t)$ — статистически независимые телеграфные процессы со средним значением, равным нулю, и корреляционной функцией

$$\langle z(t)z(t+\tau) \rangle = \frac{\sigma^2}{N} e^{-\alpha|\tau|},$$

при $N \rightarrow \infty$ переходит в гауссов марковский случайный процесс с экспоненциальной корреляционной функцией

$$\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}.$$

Указание. Рассмотреть дифференциальное уравнение для характеристического функционала процесса $\xi_N(t)$:

$$\Phi_N[t; v(\tau)] = \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau \xi_N(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle.$$

Глава 5

РАСПЩЕПЛЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИЙ

5.1. Общие соотношения

Ограничимся для простоты одномерными случайными процессами (обобщения на многомерные случаи не вызывают затруднений). При статистическом анализе динамических систем необходимо уметь вычислять корреляцию $\langle z(t)R[z(\tau)] \rangle$, где $R[z(\tau)]$ — функционал, который может зависеть от процесса $z(t)$ как явным, так и неявным образом.

Для вычисления этого среднего значения рассмотрим вспомогательный функционал $R[z(\tau) + \eta(\tau)]$, где $\eta(t)$ — произвольная детерминированная функция, и вычислим величину $\langle z(t)R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle$. Интересующую нас корреляцию получим, положив в окончательном результате $\eta(\tau) = 0$.

Функционал $R[z(\tau) + \eta(\tau)]$ можно разложить в функциональный ряд Тейлора по $z(\tau)$ и представить его в виде

$$R[z(\tau) + \eta(\tau)] = e^{-\int d\tau z(\tau) \frac{\delta}{\delta \eta(\tau)}} R[\eta(\tau)],$$

вводя оператор функционального сдвига.

Для корреляции $\langle z(t)R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle$ тогда получаем выражение

$$\langle z(t)R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle = \Omega \left[t; \frac{\delta}{i\delta \eta(\tau)} \right] \langle R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle,$$

где функционал $\Omega[t; v(\tau)]$ определяется в виде

$$\begin{aligned} \Omega[t; v(\tau)] &= \frac{\left\langle z(t) \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle}{\left\langle \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle} = \\ &= \frac{1}{\Phi[v(\tau)]} \frac{\delta}{i\delta v(t)} \Phi[v(\tau)] \equiv \frac{\delta}{i\delta v(t)} \Theta[v(\tau)]. \quad (5.1) \end{aligned}$$

Здесь $\Theta[v(\tau)] = \ln \Phi[v(\tau)]$, а $\Phi[v(\tau)]$ — характеристический функционал случайного процесса $z(t)$.

Учитывая, что вариационное дифференцирование по $\eta(\tau)$ можно заменить дифференцированием по $z(\tau)$ и положить затем $\eta(\tau) = 0$,

получаем для интересующей нас корреляции окончательное выражение

$$\langle z(t)R[z(\tau)] \rangle = \left\langle \Omega \left[\frac{\delta}{i\delta z(\tau)} \right] R[z(\tau)] \right\rangle. \quad (5.2)$$

Если воспользоваться разложением функционала $\Theta[v(\tau)]$ в функциональный ряд Тейлора (4.29), то функционал

$$\Omega[t; v(\tau)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n K_{n+1}(t, t_1, \dots, t_n) v(t_1) \dots v(t_n),$$

и, следовательно, выражение (5.2) принимает вид

$$\begin{aligned} \langle z(t)R[z(\tau)] \rangle &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n K_{n+1}(t, t_1, \dots, t_n) \left\langle \frac{\delta^n R[z(\tau)]}{\delta z(t_1) \dots \delta z(t_n)} \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.3)$$

В физических задачах, удовлетворяющих условию динамической причинности по времени t , статистические характеристики решения в момент времени t определяются статистическими характеристиками случайного процесса $z(\tau)$ при $0 \leq \tau \leq t$, которые полностью описываются характеристическим функционалом

$$\Phi[t; v(\tau)] = e^{\Theta[t; v(\tau)]} = \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle.$$

В этом случае все полученные выше формулы остаются в силе для вычисления статистических средних $\langle z(t')R[t; z(\tau)] \rangle$ при $t' < t$, $\tau \leq t$, т. е. имеет место равенство

$$\langle z(t')R[t; z(\tau)] \rangle = \left\langle \Omega \left[t', t; \frac{\delta}{i\delta z(\tau)} \right] R[t; z(\tau)] \right\rangle \quad (0 < t' < t), \quad (5.4)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega[t', t; v(\tau)] &= \frac{\delta}{i\delta v(t')} \Theta[t; v(\tau)] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_0^t dt_1 \dots \int_0^t dt_n K_{n+1}(t', t_1, \dots, t_n) v(t_1) \dots v(t_n). \end{aligned} \quad (5.5)$$

В случае, когда $t' = t - 0$, формула в (5.4) по-прежнему имеет место, т. е.

$$\langle z(t)R[t; z(\tau)] \rangle = \left\langle \Omega \left[t, t; \frac{\delta}{i\delta z(\tau)} \right] R[t; z(\tau)] \right\rangle. \quad (5.6)$$

Однако разложение (5.5) не всегда дает правильный предельный переход при $t' \rightarrow t - 0$ (т. е. операции предельного перехода и разложения в функциональный ряд Тейлора могут быть и не перестановочны). В этом случае

$$\Omega[t, t; v(\tau)] = \frac{1}{\Phi[t; v(\tau)]} \frac{d}{idv(t)} \Phi[t; v(\tau)] = \frac{d}{idv(t)} \Theta[t; v(\tau)] \quad (5.7)$$

и статистические средние в (5.4) и (5.6) могут быть разрывны при $t' = t - 0$.

Рассмотрим несколько примеров случайных процессов.

5.2. Гауссов процесс

Для гауссового случайного процесса $z(t)$ все формулы, полученные выше, существенно упрощаются. В этом случае логарифм характеристического функционала $\Phi[v(\tau)]$ имеет вид (среднее значение процесса $z(t)$ считаем равным нулю) (4.30) и, следовательно, функционал $\Omega[t; v(\tau)]$ (5.1) принимает вид линейного функционала

$$\Omega[t; v(\tau)] = i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 B(t, \tau_1) v(\tau_1), \quad (5.8)$$

а формула (5.2) принимает вид

$$\langle z(t)R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 B(t, \tau_1) \frac{\delta}{\delta \eta(\tau_1)} \langle R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle. \quad (5.9)$$

Заменяя теперь дифференцирование по $\eta(\tau)$ на дифференцирование по $z(\tau)$ и полагая $\eta(\tau) = 0$, получаем равенство

$$\langle z(t)R[z(\tau)] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 B(t, \tau_1) \left\langle \frac{\delta}{\delta z(\tau_1)} R[z(\tau)] \right\rangle, \quad (5.10)$$

которое в физической литературе принято называть *формулой Фурутуцу–Новикова* по имени авторов, впервые ее получивших [3, 32].

Легко написать и многомерное обобщение формулы (5.10), которое можно записать в виде

$$\langle z_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{r}) R[\mathbf{z}] \rangle = \int d\mathbf{r}' \langle z_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{r}) z_{j_1, \dots, j_n}(\mathbf{r}') \rangle \left\langle \frac{\delta R[\mathbf{z}]}{\delta z_{j_1, \dots, j_n}(\mathbf{r}')} \right\rangle, \quad (5.11)$$

где через $\mathbf{r}$ обозначены все непрерывные аргументы случайного поля векторного поля $\mathbf{z}(\mathbf{r})$, а через $i_1, \dots, i_n$ — индексные аргументы. По повторяющимся индексным аргументам в правой части (5.11) предполагается суммирование.

Формулы (5.10) и (5.11) представляют собой обобщение формулы (4.15) на случайные гауссовы процессы.

Если случайный процесс $z(\tau)$ определен только на отрезке времени $[0, t]$, то функционал $\Theta[t, v(\tau)]$ будет определяться выражением

$$\Theta[t, v(\tau)] = -\frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t d\tau_1 d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2) v(\tau_1) v(\tau_2), \quad (5.12)$$

а функционалы $\Omega[t', t; v(\tau)]$, $\Omega[t, t; v(\tau)]$ будут линейными функционалами:

$$\begin{aligned} \Omega[t', t; v(\tau)] &= \frac{\delta}{i \delta v(t')} \Theta[t, v(\tau)] = i \int_0^{t'} d\tau B(t', \tau) v(\tau), \\ \Omega[t, t; v(\tau)] &= \frac{d}{i v(t) dt} \Theta[t, v(\tau)] = i \int_0^t d\tau B(t, \tau) v(\tau), \end{aligned} \quad (5.13)$$

и, следовательно, формулы (5.4), (5.6) будут иметь вид

$$\langle z(t') R[t, z(\tau)] \rangle = \int_0^t d\tau B(t', \tau) \left\langle \frac{\delta R[z(\tau)]}{\delta z(\tau)} \right\rangle \quad (t' \leq t), \quad (5.14)$$

совпадающий с равенством (5.10) при выполнении условия

$$\frac{\delta R[t; z(\tau)]}{\delta z(\tau)} = 0 \quad \text{при} \quad \tau < 0, \quad \tau > t. \quad (5.15)$$

5.3. Пуассоновский процесс

Пуассоновский процесс определен выражением (4.35), и логарифм его характеристического функционала описывается формулой (4.36). Формулы (5.5), (5.7) для функционалов $\Omega[t', t; v(\tau)]$, $\Omega[t, t; v(\tau)]$ теперь

принимают вид

$$\begin{aligned}\Omega[t', t; v(\tau)] &= \frac{\delta}{i\delta v(t')} \Theta[t, v(\tau)] = \\ &= -i \int_0^{t'} d\tau g(t' - \tau) \dot{W} \left(\int_{\tau}^t d\tau_1 v(\tau_1) g(\tau_1 - \tau) \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega[t, t; v(\tau)] &= \frac{d}{iv(t)dt} \Theta[t, v(\tau)] = \\ &= -i \int_0^t d\tau g(t - \tau) \dot{W} \left(\int_{\tau}^t d\tau_1 v(\tau_1) g(\tau_1 - \tau) \right), \quad (5.16)\end{aligned}$$

где $\dot{W}(v) = \frac{dW(v)}{dv} = i \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi p(\xi) e^{i\xi v}$.

Равенства (5.16) можно, сменив порядок интегрирования, переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}\Omega[t', t; v(\tau)] &= \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi p(\xi) \int_0^{t'} d\tau g(t' - \tau) \exp \left\{ i\xi \int_{\tau}^t d\tau_1 v(\tau_1) g(\tau_1 - \tau) \right\} \quad (t' \leq t),\end{aligned} \quad (5.17)$$

и для корреляции пуассоновского случайного процесса $z(t)$ с функциями от него получаем выражение

$$\begin{aligned}\langle z(t') R[t; z(\tau)] \rangle &= \\ &= \nu \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi p(\xi) \int_0^{t'} d\tau' g(t' - \tau') \left\langle R[t; z(\tau) + \xi g(\tau - \tau')] \right\rangle \quad (t' \leq t).\end{aligned} \quad (5.18)$$

Частным случаем пуассоновского процесса, как говорилось ранее, является случайный процесс $n(0, t)$, описывающий число скачков на интервале времени $(0, t)$. Для этого процесса $p(\xi) = \delta(\xi - 1)$ и $g(t) = \theta(t)$. Следовательно для пуассоновского процесса формула (5.18)

принимает особенно простой вид

$$\langle n(0, t) R[t; n(0, \tau)] \rangle = \nu \int_0^{t'} d\tau \langle R[t; n(0, \tau) + \theta(t' - \tau)] \rangle \quad (t' \leq t). \quad (5.19)$$

Равенство (5.19) является обобщением на пуассоновские процессы формулы (4.21) для пуассоновских случайных величин.

5.4. Телеграфный случайный процесс

Обратимся теперь к случаю телеграфного процесса, определяемого формулой (4.39)

$$z(t) = a(-1)^{n(0, t)}, \quad (5.20)$$

где a — детерминированная величина.

Для вычисления же корреляции $\langle z(t) R[t; z(\tau)] \rangle$, где $\tau \leq t$, как указывалось выше, надо знать характеристический функционал процесса $z(t)$, который в данном случае неизвестен. Мы имеем только уравнения (4.43) и (4.44), которые описывают связь между функционалом

$$\Psi[t; v(\tau)] = \frac{1}{i v(t)} \frac{d}{dt} \Phi[t; v(\tau)] = \left\langle z(t) e^{i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau)} \right\rangle$$

и характеристическим функционалом. Этой связи вполне достаточно для расщепления корреляции $\langle z(t) R[t; z(\tau)] \rangle$, т. е. представления этой величины непосредственно через среднее значение $\langle R[t; z(\tau)] \rangle$.

В самом деле, для любого функционала $R[t; z(\tau)]$, где $\tau \leq t$, имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned} \langle z(t) R[t; z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle &= \left\langle z(t) \exp \left\{ \int_0^t d\tau z(\tau) \frac{\delta}{\delta \eta(\tau)} \right\} \right\rangle R[t; \eta(\tau)] = \\ &= \left\{ a e^{-2\nu t} + a^2 \int_0^t dt_1 e^{-2\nu(t-t_1)} \frac{\delta}{\delta \eta(t_1)} \left\langle \exp \left\{ \int_0^{t_1} d\tau z(\tau) \frac{\delta}{\delta \eta(\tau)} \right\} \right\rangle \right\} \times \\ &\quad \times R[t; \eta(\tau)] = a R[t; \eta(\tau)] e^{-2\nu t} + \\ &\quad + a^2 \int_0^t dt_1 e^{-2\nu(t-t_1)} \frac{\delta}{\delta \eta(t_1)} \langle R[t; \eta(\tau) + z(\tau) \theta(t_1 - \tau)] \rangle. \quad (5.21) \end{aligned}$$

Здесь $\eta(t)$ — произвольная детерминированная функция. Переходя к пределу $\eta \rightarrow 0$, получаем окончательный результат:

$$\begin{aligned} \langle z(t) R[t; z(\tau)] \rangle &= \\ &= a R[t; 0] e^{-2\nu t} + a^2 \int_0^t dt_1 e^{-2\nu(t-t_1)} \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t_1)} \tilde{R}[t, t_1; z(\tau)] \right\rangle, \end{aligned} \quad (5.22)$$

где функционал $\tilde{R}[t, t_1; z(\tau)]$ определяется формулой

$$\tilde{R}[t, t_1; z(\tau)] = R[t; z(\tau) \theta(t_1 - \tau + 0)]. \quad (5.23)$$

Если случайная величина a имеет распределение вероятностей с плотностью вероятностей $p(a) = \frac{1}{2} [\delta(a - a_0) + \delta(a + a_0)]$, то дополнительное усреднение по a приводит к равенству

$$\langle z(t) R[t; z(\tau)] \rangle = a_0^2 \int_0^t dt_1 e^{-2\nu(t-t_1)} \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t_1)} \tilde{R}[t, t_1; z(\tau)] \right\rangle. \quad (5.24)$$

Формула (5.24) по внешнему виду очень напоминает равенство для расщепления корреляции гауссового процесса $z(t)$, имеющего экспоненциальную корреляционную функцию (т.е. гауссового марковского процесса), с функционалом от него $R[t; z(\tau)]$. Отличие состоит в том, что в правой части (5.24) стоит не сам функционал $R[t; z(\tau)]$, а «обрезанный» по процессу $z(\tau)$ функционал $\tilde{R}[t, t_1; z(\tau)]$.

Продифференцируем формулу (5.22) по времени t . Учитывая, что при этом не надо дифференцировать по верхнему пределу интеграла в правой части (5.22), получаем выражение

$$\left(\frac{d}{dt} + 2\nu \right) \langle z(t) R[t; z(\tau)] \rangle = \left\langle z(t) \frac{d}{dt} R[t; z(\tau)] \right\rangle, \quad (5.25)$$

которое называется *формулой дифференцирования* [33, 34].

Следует обратить внимание на одно существенное обстоятельство. В формуле дифференцирования (5.25) функционал $R[t; z(\tau)]$ является произвольным функционалом и, в частности, может быть равен просто процессу $z(t - 0)$. Вообще говоря, реализация случайного телеграфного процесса является обобщенной функцией. Производная по времени от этого процесса также является обобщенной функцией (последовательностью дельта-функций) и при этом, вообще говоря,

$$z(t) \frac{d}{dt} z(t) \neq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} z^2(t) \equiv 0.$$

Эти обобщенные функции, как и любые обобщенные функции, определяются только функционалами, построенными на них. Такими функционалами в интересующем нас случае являются усредненные величины, обозначенные $\langle \dots \rangle$, и формула дифференцирования, приведенная выше, описывает дифференциальную связь между различными функционалами, связанными со случайным процессом $z(t)$ и его односторонними производными при $t \rightarrow t-0$ dz/dt , d^2z/dt^2 и т. д. Так, например, из формулы (5.25) вытекают равенства

$$\left\langle z(t) \frac{d}{d\tau} z(\tau) \right\rangle \Big|_{\tau=t-0} = 2\nu \langle z^2 \rangle, \quad \left\langle z(t) \frac{d^2}{d\tau^2} z(\tau) \right\rangle \Big|_{\tau=t-0} = 4\nu^2 \langle z^2 \rangle$$

и т. д., которые, разумеется, можно получить и непосредственно, дифференцируя, например, корреляционную функцию $\langle z(t)z(t') \rangle$ по t' ($t' < t$) при $t' \rightarrow t-0$.

Остановимся теперь на некоторых обобщениях формул, полученных выше на случай векторного марковского процесса $\mathbf{z}(t) = \{z_1(t), \dots, z_N(t)\}$. Так, например, для процессов $z_i(t)$ с корреляционной функцией

$$\langle z_i(t)z_j(t+\tau) \rangle = \langle z^2 \rangle \delta_{ij} e^{-\alpha|\tau|} \quad (5.26)$$

имеет место равенство

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha k \right) \langle z_1(t) \dots z_k(t) R[t; \mathbf{z}(\tau)] \rangle = \left\langle z_1(t) \dots z_k(t) \frac{\partial}{\partial t} R[t; \mathbf{z}(\tau)] \right\rangle. \quad (5.27)$$

Формула (5.27) определяет правило вынесения операции дифференцирования по времени из под знака среднего. Так, из (5.27) получаем соотношение

$$\begin{aligned} \left\langle z_1(t) \dots z_k(t) \frac{\partial^n}{\partial t^n} R[t; \mathbf{z}(\tau)] \right\rangle = \\ = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha k \right)^n \langle z_1(t) \dots z_k(t) R[t; \mathbf{z}(\tau)] \rangle, \end{aligned} \quad (5.28)$$

где $k = 1, \dots, N$.

5.5. Дельта-коррелированные случайные процессы

Особое место в физических задачах занимает случай, когда случайный процесс $z(t)$ можно рассматривать как дельта-коррелированный процесс. Важность этого случая обусловлена прежде всего тем, что во многих физических задачах такая аппроксимация флуктуаций параметров имеет ясную физическую природу и при этом для плотности вероятностей решений соответствующих динамических систем может быть получено замкнутое уравнение.

Для гауссового дельта-коррелированного во времени процесса корреляционная функция имеет вид

$$B(t_1, t_2) = \langle z(t_1)z(t_2) \rangle = B(t_1)\delta(t_1 - t_2) \quad (\langle z(t) \rangle = 0).$$

В этом случае функционалы (5.12), (5.13), введенные ранее, $\Theta[t; v(\tau)]$, $\Omega[t', t; v(\tau)]$ и $\Omega[t, t; v(\tau)]$ равны

$$\Theta[t; v(\tau)] = -\frac{1}{2} \int_0^t d\tau B(\tau) v^2(\tau),$$

$$\Omega[t', t; v(\tau)] = iB(t')v(t'), \quad \Omega[t, t; v(\tau)] = \frac{i}{2} B(t)v(t),$$

а формулы (5.14), существенно упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} \langle z(t')R[t; v(\tau)] \rangle &= B(t') \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t')} R[t; v(\tau)] \right\rangle \quad (0 < t' < t), \\ \langle z(t)R[t; v(\tau)] \rangle &= \frac{1}{2} B(t) \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t)} R[t; v(\tau)] \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Выражения (5.29) описывают скачок статистических средних при $t' = t$ для рассматриваемого гауссового дельта-коррелированного процесса. Существование этого скачка обусловлено сугубо дельта-коррелированностью процесса, если процесс не дельта-коррелирован, то никакого скачка нет (см. формулу (5.14)).

Дельта-коррелированный пуассоновский случайный процесс соответствует предельному переходу

$$g(t) \rightarrow \delta(t).$$

В этом случае логарифм характеристического функционала имеет простой вид (4.38) и, следовательно, формулы (5.17) для функционалов $\Omega[t', t; v(\tau)]$ и $\Omega[t, t; v(\tau)]$ принимают вид

$$\Omega[t', t; v(\tau)] = i \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi p(\xi) e^{i\xi v(t')} \quad (t' < t),$$

$$\Omega[t, t; v(\tau)] = \frac{\nu}{iv(t)} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi p(\xi) \left[e^{i\xi v(t)} - 1 \right] = \nu \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi) \int_0^{\xi} d\eta e^{i\eta v(t)},$$

а для корреляции пуассоновского случайного процесса $z(t)$ с функцио-
налами от него получаем выражения

$$\langle z(t') R[t; z(\tau)] \rangle = \nu \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi p(\xi) \langle R[t; z(\tau) + \xi \delta(\tau - \tau')] \rangle \quad (t' \leq t),$$

$$\langle z(t) R[t; z(\tau)] \rangle = \nu \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi) \int_0^{\xi} d\eta \langle R[t; z(\tau) + \eta \delta(t - \tau)] \rangle. \quad (5.30)$$

Эти выражения также описывают скачок статистических средних при $t' = t$. Так же как и для гауссового процесса, этот скачок обусловлен дельта-коррелированностью пуассоновского процесса.

В общем случае дельта-коррелированного процесса $z(t)$ разложение логарифма характеристического функционала в функциональный ряд Тейлора имеет вид

$$\Theta[t; v(\tau)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_0^t d\tau K_n(\tau) v^n(\tau), \quad (5.31)$$

а все кумулянтные функции при этом определяются выражениями

$$K_n(t_1, \dots, t_n) = K_n(t_1) \delta(t_1 - t_2) \dots \delta(t_{n-1} - t_n).$$

Характерной чертой этих процессов, как видно из (5.31), является справедливость равенства

$$\dot{\Theta}[t; v(\tau)] = \dot{\Theta}[t; v(t)] \quad \left(\dot{\Theta}[t; v(\tau)] = \frac{d}{dt} \Theta[t; v(\tau)] \right), \quad (5.32)$$

играющего принципиальную роль. Оно показывает, что величина $\Theta[t; v(\tau)]$ для дельта-коррелированного процесса является не функционалом, а просто функцией времени t . В этом случае функционалы $\Omega[t', t; v(\tau)]$ и $\Omega[t, t; v(\tau)]$ равны

$$\Omega[t', t; v(\tau)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} K_{n+1}(t') v^n(t') \quad (t' < t),$$

$$\Omega[t, t; v(\tau)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{(n+1)!} K_{n+1}(t) v^n(t),$$

а формулы для расщепления корреляций принимают вид

$$\begin{aligned}\langle z(t')R[t; z(\tau)] \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} K_{n+1}(t') \left\langle \frac{\delta^n R[t; z(\tau)]}{\delta z^n(t')} \right\rangle \quad (t' < t), \\ \langle z(t)R[t; z(\tau)] \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{(n+1)!} K_{n+1}(t) \left\langle \frac{\delta^n R[t; z(\tau)]}{\delta z^n(t)} \right\rangle.\end{aligned}\quad (5.33)$$

Эти формулы описывают скачок при $t' = t$ статистических средних в общем случае дельта-коррелированных процессов.

Отметим, что при $t' > t$ для дельта-коррелированных процессов имеет место очевидное равенство

$$\langle z(t')R[t; z(\tau)] \rangle = \langle z(t') \rangle \langle R[t; z(\tau)] \rangle. \quad (5.34)$$

Остановимся теперь на понятии дельта-коррелированных во времени случайных полей.

Пусть имеется векторное поле $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, где $\mathbf{x}$ — пространственные координаты, а t — временная координата. В этом случае разложение логарифма характеристического функционала в ряд Тейлора определяют кумулянтные функции случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$. В частном случае, когда

$$\begin{aligned}K_n^{i_1, \dots, i_m}(\mathbf{x}_1, t_1; \dots, \mathbf{x}_n, t_n) &= \\ &= K_n^{i_1, \dots, i_m}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; t_1) \delta(t_1 - t_2) \dots \delta(t_{n-1} - t_n),\end{aligned}\quad (5.35)$$

будем называть поле $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ дельта-коррелированным случайным полем по времени t . Тогда функционал $\Theta[t; \psi(\mathbf{x}', \tau)]$ принимает вид

$$\begin{aligned}\Theta[t; \psi(\mathbf{x}', \tau)] &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_0^t d\tau \int \dots \int d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_n K_n^{i_1, \dots, i_m}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; \tau) \times \\ &\times \psi_{i_1}(\mathbf{x}_1, \tau) \dots \psi_{i_m}(\mathbf{x}_n, \tau),\end{aligned}\quad (5.36)$$

важной особенностью структуры которого является равенство, аналогичное (5.32):

$$\dot{\Theta}[t; \psi(\mathbf{x}', \tau)] = \dot{\Theta}[t; \psi(\mathbf{x}', t)] \quad (5.37)$$

5.5.1. Асимптотический смысл дельта-коррелированных процессов и полей. Дельта-коррелированных процессов и полей в природе не бывает. Все реальные процессы и поля имеют конечный временной радиус корреляции, а дельта-коррелированные процессы и поля — результат асимптотического разложения, связанного с их временными радиусами корреляции.

Поясним переход к дельта-коррелированному процессу на примере гауссового стационарного процесса с радиусом корреляции τ_0 . Логарифм характеристического функционала при этом описывается выражением

$$\Theta[t; v(\tau)] = - \int_0^t d\tau_1 v(\tau_1) \int_0^{\tau_1} d\tau_2 B\left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_0}\right) v(\tau_2). \quad (5.38)$$

Положим $\tau_1 - \tau_2 = \xi\tau_0$, тогда выражение (5.38) примет вид

$$\Theta[t; v(\tau)] = -\tau_0 \int_0^t d\tau_1 v(\tau_1) \int_0^{\tau_1/\tau_0} d\xi B(\xi) v(\tau_1 - \xi\tau_0).$$

Пусть теперь $\tau_0 \rightarrow 0$. В этом случае главный член асимптотического разложения по τ_0 будет определяться формулой

$$\Theta[t; v(\tau)] = -\tau_0 \int_0^\infty d\xi B(\xi) \int_0^t d\tau_1 v^2(\tau_1),$$

которую можно записать в виде

$$\Theta[t; v(\tau)] = -B^{\text{eff}} \int_0^t d\tau_1 v^2(\tau_1), \quad (5.39)$$

где

$$B^{\text{eff}} = \int_0^\infty d\tau B\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty d\tau B\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right). \quad (5.40)$$

Конечно, асимптотическое разложение (5.39) справедливо не для любых функций $v(t)$, а только для таких, которые мало меняются за времена порядка τ_0 . Так, если $v(t) = v\delta(t - t_0)$, то асимптотическое разложение (5.39) не справедливо и в этом случае формула (5.38) заменяется выражением

$$\Theta[t; v(\tau)] = -\frac{1}{2} B(0)v^2 \quad (t > t_0),$$

соответствующим характеристической функции процесса $z(t)$ для фиксированного момента времени $t = t_0$.

Рассмотрим теперь корреляцию $\langle z(t)R[t; z(\tau)] \rangle$, которая в данном случае, согласно формуле Фурутцу–Новикова (5.14), описывается соотношением

$$\langle z(t)R[t; z(\tau)] \rangle = \int_0^t dt_1 B\left(\frac{t-t_1}{\tau_0}\right) \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t_1)} R[t; z(\tau)] \right\rangle.$$

Выполняя замену переменных $t - t_1 \rightarrow \xi\tau_0$, получаем выражение

$$\langle z(t)R[t; z(\tau)] \rangle = \tau_0 \int_0^{t/\tau_0} d\xi B(\xi) \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t - \xi\tau_0)} R[t; z(\tau)] \right\rangle, \quad (5.41)$$

которое при $\tau_0 \rightarrow 0$ переходит в равенство, соответствующее гауссовому дельта-коррелированному процессу

$$\langle z(t)R[t; z(\tau)] \rangle = B^{\text{ef}} \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t)} R[t; z(\tau)] \right\rangle,$$

если, конечно, вариационная производная в равенстве (5.41) мало меняется на временах порядка τ_0 .

Таким образом, аппроксимация процесса $z(t)$ дельта-коррелированным процессом обусловлена малостью изменения функционалов от этого процесса на временах порядка его временного радиуса корреляции.

Рассмотрим теперь телеграфный процесс. Для этого процесса характеристический функционал описывается уравнением (4.44). Время корреляции для этого процесса $\tau_0 = 1/2\nu$, и при $\nu \rightarrow \infty$ ($\tau_0 \rightarrow 0$) это уравнение для достаточно гладких функций $v(t)$ переходит в уравнение

$$\frac{d}{dt} \Phi[t; v(\tau)] = -\frac{a_0^2}{2\nu} v^2(t) \Phi[t; v(\tau)], \quad (5.42)$$

соответствующее гауссовому дельта-коррелированному процессу. Если при этом считать еще, что $a_0^2 \rightarrow \infty$, причем

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_0^2/2\nu = \sigma_0^2,$$

то уравнение (5.42) не будет содержать параметра ν . Конечно, это не означает, что при $\nu \rightarrow \infty$ телеграфный процесс перестает быть телеграфным. Так, при $\nu \rightarrow \infty$ одноточечное распределение вероятностей $z(t)$ будет по-прежнему соответствовать телеграфному процессу, т. е. процессу с двумя возможными состояниями. Что касается корреляционной функции и моментных функций более высокого порядка, то они при $\nu \rightarrow \infty$ обладают всеми свойствами дельта функций, так как

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left\{ 2\nu e^{-2\nu|\tau|} \right\} = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau \neq 0, \\ 1 & \text{при } \tau = 0. \end{cases}$$

Такие функции следует считать обобщенными функциями, и их дельта-образный характер будет проявляться в связанных с ними интегралах. При этом уравнение (5.42) показывает, что предельный переход при $\nu \rightarrow \infty$ для таких величин эквивалентен замене процесса $z(t)$ на гауссов дельта-коррелированный процесс. Эта ситуация совершенно аналогична аппроксимации гауссового случайного процесса с конечным радиусом корреляции τ_0 дельта-коррелированным процессом при $\tau_0 \rightarrow 0$.

Задачи

Задача 9. Вычислить статистическое среднее $\langle g(\xi)f(\xi) \rangle_\xi$, где ξ — случайная величина.

Ответ.

$$\begin{aligned} \langle g(\xi + \eta_1)f(\xi + \eta_2) \rangle_\xi = \\ = \exp \left\{ \Theta \left(\frac{d}{id\eta_1} + \frac{d}{id\eta_2} \right) - \Theta \left(\frac{d}{id\eta_1} \right) - \Theta \left(\frac{d}{id\eta_2} \right) \right\} \times \\ \times \langle g(\xi + \eta_1) \rangle \langle f(\xi + \eta_2) \rangle. \end{aligned}$$

Задача 10. Вычислить статистическое среднее $\langle e^{\omega\xi}f(\xi) \rangle_\xi$, где величина ω может быть и комплексной.

Ответ.

$$\langle e^{\omega\xi}f(\xi + \eta) \rangle_\xi = \exp \left\{ \Theta \left(\frac{1}{i} \left(\omega + \frac{d}{d\eta} \right) \right) - \Theta \left(\frac{d}{id\eta} \right) \right\} \langle f(\xi + \eta) \rangle_\xi.$$

Задача 11. Вычислить статистические средние $\langle e^{\omega\xi} \rangle_\xi$, $\langle \xi e^{\omega\xi} \rangle_\xi$ для гауссовой случайной величины с нулевым средним значением.

Ответ.

$$\langle e^{\omega\xi} \rangle_\xi = \exp \left\{ \frac{\omega^2 \sigma^2}{2} \right\}, \quad \langle \xi e^{\omega\xi} \rangle_\xi = \omega \sigma^2 \exp \left\{ \frac{\omega^2 \sigma^2}{2} \right\}.$$

Задача 12. Вычислить статистическое среднее $\langle e^{\omega\xi}f(\xi) \rangle_\xi$ для гауссовой случайной величины с нулевым средним значением.

Ответ.

$$\langle e^{\omega\xi}f(\xi) \rangle_\xi = \exp \left\{ \frac{\omega^2 \sigma^2}{2} \right\} \langle f(z + \omega\sigma^2) \rangle.$$

Задача 13. Расщепить корреляцию $\langle F[z(\tau)]R[z(\tau)] \rangle$.

Ответ.

$$\begin{aligned} \langle F[z(\tau) + \eta_1(\tau)]R[z(\tau) + \eta_2(\tau)] \rangle = \\ = \left\langle \exp \left\{ \Theta \left[\frac{1}{i} \left(\frac{\delta}{\delta \eta_1(\tau)} + \frac{\delta}{\delta \eta_2(\tau)} \right) \right] - \Theta \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta_1(\tau)} \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - \Theta \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta_2(\tau)} \right] \right\} \right\rangle \langle F[z(\tau) + \eta_1(\tau)] \rangle \langle R[z(\tau) + \eta_2(\tau)] \rangle, \end{aligned}$$

где $\eta_1(\tau)$ и $\eta_2(\tau)$ — произвольные детерминированные функции.

Задача 14. Расщепить корреляцию $\langle F[z(\tau)]R[z(\tau)] \rangle$ для гауссово-случайного процесса $z(t)$.

Ответ.

$$\begin{aligned} \langle F[z(\tau) + \eta_1(\tau)]R[z(\tau) + \eta_2(\tau)] \rangle = \\ = \exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2) \frac{\delta}{\delta \eta_1(\tau_1)} \frac{\delta}{\delta \eta_2(\tau_2)} \right\} \times \\ \times \langle F[z(\tau) + \eta_1(\tau)] \rangle \langle R[z(\tau) + \eta_2(\tau)] \rangle, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \langle F[z(\tau)]R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle = \\ = F \left[z(\tau) + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 B(\tau, \tau_1) \frac{\delta}{\delta \eta(\tau_1)} \right] \langle R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle. \end{aligned}$$

Задача 15. Расщепить корреляцию $\left\langle e^{i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau z(\tau)v(\tau)} R[z(\tau)] \right\rangle$ для гауссового случайного процесса $z(t)$.

Ответ.

$$\begin{aligned} \left\langle e^{i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau z(\tau)v(\tau)} R[z(\tau)] \right\rangle = \\ = \Phi[v(\tau)] \left\langle R \left[z(\tau) + i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 B(\tau, \tau_1)v(\tau_1) \right] \right\rangle. \end{aligned}$$

Задача 16. *Расщепить корреляцию $\left\langle e^{i \int_0^t d\tau z(\tau)v(\tau)} R[z(\tau)] \right\rangle$ для гауссового случайного процесса $z(t)$.*

Ответ.

$$\left\langle e^{i \int_0^t d\tau z(\tau)v(\tau)} R[z(\tau)] \right\rangle = \\ = \Phi[t; v(\tau)] \left\langle R \left[t; z(\tau) + i \int_0^t d\tau_1 B(\tau, \tau_1) v(\tau_1) \right] \right\rangle,$$

где $\Phi[t; v(\tau)]$ — характеристический функционал гауссового случайного процесса $z(t)$.

Задача 17. *Показать, что для телеграфного случайного процесса имеет место выражение*

$$\langle z(t_1)z(t_2)R[z(\tau)] \rangle = \langle z(t_1)z(t_2) \rangle \langle R[z(\tau)] \rangle,$$

справедливое для произвольного функционала $R[z(\tau)]$ при условии $\tau \leq t_2 \leq t_1$ [35].

Указание. Разложить функционал $R[z(\tau)]$ в ряд Тейлора по $z(\tau)$ и использовать формулы (4.41).

Задача 18. *Показать, что для телеграфного случайного процесса имеет место равенство*

$$\langle F[z(\tau_1)]z(t_1)z(t_2)R[z(\tau_2)] \rangle = \\ = \langle F[z(\tau_1)] \rangle \langle z(t_1)z(t_2) \rangle \langle R[z(\tau_2)] \rangle + \langle F[z(\tau_1)]z(t_1) \rangle \langle z(t_2)R[z(\tau_2)] \rangle,$$

справедливое для любых $\tau_1 \leq t_1 \leq t_2 \leq \tau_2$ и произвольных функционалов $F[z(\tau_1)]$ и $R[z(\tau_2)]$ [35], если величина a — случайна с плотностью распределения вероятностей

$$p(a) = \frac{1}{2} [\delta(a - a_0) + \delta(a + a_0)].$$

Указание. Представить функционал $R[z(\tau_2)]$ в виде ряда Тейлора по $z(\tau)$

$$R[z(\tau_2)] = \sum_{2k} + \sum_{2k+1},$$

где первая сумма содержит четное число сомножителей $z(\tau)$, а вторая — нечетное, и учесть, что

$$\langle R[z(\tau_2)] \rangle = \left\langle \sum_{2k} \right\rangle, \quad \langle z(t_2)R[z(\tau_2)] \rangle = \left\langle z(t_2) \sum_{2k} \right\rangle.$$

Задача 19. Показать, что для телеграфного процесса имеет место равенство

$$\langle z(t')R[t; z(\tau)] \rangle = e^{-2\nu(t'-t)} \langle z(t)R[t; z(\tau)] \rangle \quad (t' \geq t).$$

Указание. Переписать корреляцию $\langle z(t')R[t; z(\tau)] \rangle$, где $t' \geq t$, $\tau < t$ в виде

$$\langle z(t)R[t; z(\tau)] \rangle = \frac{1}{a_0^2} \langle z(t')z(t)z(t)R[t; z(\tau)] \rangle.$$

Задача 20. Вычислить характеристический функционал процесса $z(t) = \xi^2(t)$, где $\xi(t)$ — гауссов процесс с параметрами

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle = B(t_1 - t_2).$$

Указание. Характеристический функционал

$$\Phi[t; v(\tau)] = \langle \varphi[t; \xi(\tau)] \rangle, \quad \text{где} \quad \varphi[t; \xi(\tau)] = \exp \left\{ i \int_0^t d\tau v(\tau) \xi^2(\tau) \right\},$$

удовлетворяет стохастическому уравнению

$$\frac{d}{dt} \Phi[t; v(\tau)] = i v(t) \langle \xi^2(t) \varphi[t; \xi(\tau)] \rangle.$$

Далее следует получить интегральное уравнение для величины $\Psi(t_1, t) = \langle \xi(t_1)\xi(t)\varphi[t; \xi(\tau)] \rangle$:

$$\Psi(t_1, t) = B(t_1 - t)\Phi[t; v(\tau)] + 2i \int_0^t d\tau B(t_1 - \tau)v(\tau)\Psi(\tau, t),$$

и представить функцию $\Psi(t_1, t)$ в виде

$$\Psi(t_1, t) = S(t_1, t)\Phi[t; v(\tau)].$$

Ответ. Характеристический функционал $\Phi[t; v(\tau)]$ имеет структуру

$$\Phi[t; v(\tau)] = \exp \left\{ i \int_0^t d\tau v(\tau) S(\tau, \tau) \right\},$$

где

$$S(t, t) = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)}(t, t),$$

$$S^{(n)}(t, t) = \\ = (2i)^n \int_0^t \dots \int_0^t d\tau_1 \dots d\tau_n v(\tau_1) \dots v(\tau_n) B(t - \tau_1) B(\tau_1 - \tau_2) \dots B(\tau_n - t).$$

Следовательно, n -й кумулянт процесса $z(t) = \xi^2(t)$ определяется величиной $S^{(n-1)}(t, t)$.

Задача 21. Вычислить характеристический функционал процесса $z(t) = \xi^2(t)$, где $\xi(t)$ — гауссов марковский процесс с параметрами

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle = B(t_1 - t_2) = \sigma^2 \exp \{-\alpha |t_1 - t_2|\}.$$

Ответ. Характеристический функционал $\Phi[t; v(\tau)]$ имеет структуру

$$\Phi[t; v(\tau)] = \exp \left\{ i \int_0^t d\tau v(\tau) S(\tau, \tau) \right\},$$

где функция $S(t, t)$ описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt} S(t, t) = -2\alpha [S(t, t) - \sigma^2] + 2iv(t)S^2(t, t), \quad S(t, t)|_{t=0} = \sigma^2.$$

Глава 6

ОБЩИЕ ПОДХОДЫ К СТОХАСТИЧЕСКИМ ДИНАМИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ

В этой главе мы рассмотрим основные методы нахождения статистических характеристик решений стохастических уравнений.

Рассмотрим линейное (дифференциальное, интегро-дифференциальное или интегральное) стохастическое уравнение. В общем случае усреднение его по ансамблю реализаций флуктуирующих параметров не дает замкнутого уравнения для соответствующего среднего значения. Замкнутое уравнение можно получить с помощью перехода к дополнительному расширенному пространству, которое в большинстве случаев является бесконечномерным. Таким образом, можно перейти к линейному уравнению для средней величины, содержащему вариационные производные.

Рассмотрим конкретные типы динамических систем.

6.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Пусть динамика векторной функции $\mathbf{x}(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (6.1)$$

Здесь через функцию $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ обозначена детерминированная функция, а через $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ — случайная функция.

Решение уравнения (6.1) является функционалом от $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau) + \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)$ при $\tau \in (t_0, t)$, т. е.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau) + \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)].$$

Отсюда вытекает равенство

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{y}, \tau)} F(\mathbf{x}(t)) = \frac{\delta}{\delta v_j(\mathbf{y}, \tau)} F(\mathbf{x}(t)) = \frac{\partial F(\mathbf{x}(t))}{\partial x_i} \frac{\delta x_i(t)}{\delta f_j(\mathbf{y}, \tau)},$$

справедливое для произвольной функции $F(\mathbf{x})$. Кроме того,

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{y}, t-0)} x_i(t) = \frac{\delta}{\delta v_j(\mathbf{y}, t-0)} x_i(t) = \delta_{ij} \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}). \quad (6.2)$$

Соответствующее уравнение Лиувилля для индикаторной функции $\varphi(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x})$, вытекающее из уравнения (6.1), имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}, t) &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\varphi(\mathbf{x}, t)] - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)\varphi(\mathbf{x}, t)], \\ \varphi(\mathbf{x}, t_0) &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Следовательно, имеет место равенство

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{f}(\mathbf{y}, t-0)} \varphi(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta}{\delta \mathbf{v}(\mathbf{y}, t-0)} \varphi(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \{ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}, t) \}, \quad (6.4)$$

с помощью которого можно переписать уравнение (6.3) в более сложном, на первый взгляд, виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}, t) &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\varphi(\mathbf{x}, t)] + \int d\mathbf{y} \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \frac{\delta}{\delta \mathbf{v}(\mathbf{y}, t)} \varphi(\mathbf{x}, t), \\ \varphi(\mathbf{x}, t_0) &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Рассмотрим теперь одновременную плотность вероятностей для решения $\mathbf{x}(t)$ уравнения (6.1):

$$P(\mathbf{x}, t) = \langle \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \rangle.$$

Здесь $\mathbf{x}(t)$ — решение уравнения (6.1), соответствующее конкретной реализации случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, а через скобки $\langle \dots \rangle$ обозначено усреднение по ансамблю всех реализаций поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$.

Усредним уравнение (6.5) по ансамблю реализаций поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$. В результате получаем выражение

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)P(\mathbf{x}, t)] + \int d\mathbf{y} \left\langle \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \frac{\delta}{\delta \mathbf{v}(\mathbf{y}, t)} \varphi(\mathbf{x}, t) \right\rangle. \quad (6.6)$$

Величина $\langle \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)\varphi(\mathbf{x}, t) \rangle$ в правой части (6.6) описывает корреляцию между случайным полем $\mathbf{f}(\mathbf{y}, t)$ и функцией $\varphi(\mathbf{x}, t)$, являющуюся функционалом случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)$ и описывающуюся уравнениями (6.3) или (6.5).

Статистические характеристики случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)$ при $\tau \in (t_0, t)$ полностью описываются его характеристическим функционалом

$$\begin{aligned} \Phi[t, t_0; \mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau)] &= \left\langle \exp \left\{ i \int_{t_0}^t d\tau \int d\mathbf{y} \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau) \mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau) \right\} \right\rangle = \\ &= \exp \left\{ \Theta[t, t_0; \mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau)] \right\}. \end{aligned}$$

Для расщепления корреляции $\langle \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle$ воспользуемся функциональной методикой. Вводя оператор функционального сдвига по полю $\mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)$, функционал $\varphi[t, \mathbf{x}; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau) + \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)]$ можно переписать в операторном виде:

$$\varphi[t, \mathbf{x}; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau) + \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)] = e^{\int_{t_0}^t d\tau \int d\mathbf{y} \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau) \frac{\delta}{\delta \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)}} \varphi[t, \mathbf{x}; \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)].$$

Следовательно, последний член в правой части (6.6) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\int d\mathbf{y} \left\langle f_j(\mathbf{y}, t) \frac{\delta}{\delta v_j(\mathbf{y}, t)} e^{\int_{t_0}^t d\tau \int d\mathbf{y}' \mathbf{f}(\mathbf{y}', \tau) \frac{\delta}{\delta \mathbf{v}(\mathbf{y}', \tau)}} \right\rangle}{\left\langle \exp \left\{ \int_{t_0}^t d\tau \int d\mathbf{y}' \mathbf{f}(\mathbf{y}', \tau) \frac{\delta}{\delta \mathbf{v}(\mathbf{y}', \tau)} \right\} \right\rangle} P(\mathbf{x}, t) = \\ & = \dot{\Theta}_t \left[t, t_0; \frac{\delta}{i\delta \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)} \right] P(\mathbf{x}, t), \end{aligned}$$

где введен функционал

$$\dot{\Theta}_t[t, t_0; \mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau)] = \frac{d}{dt} \ln \Phi[t, t_0; \mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau)].$$

Следовательно, уравнение (6.6) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t) &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) P(\mathbf{x}, t)] + \dot{\Theta}_t \left[t, t_0; \frac{\delta}{i\delta \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)} \right] P(\mathbf{x}, t), \\ P(\mathbf{x}, t_0) &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Уравнение (6.7) является замкнутым уравнением с вариационными производными в функциональном пространстве всех возможных функций $\{\mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)\}$. Для фиксированной же функции $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ мы приходим уже к незамкнутому уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t) &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) P(\mathbf{x}, t)] + \left\langle \dot{\Theta}_t \left[t, t_0; \frac{\delta}{i\delta \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)} \right] \varphi[t, \mathbf{x}; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)] \right\rangle, \\ P(\mathbf{x}, t_0) &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Уравнение (6.8) является точным следствием исходного динамического уравнения (6.1). Статистические характеристики случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ входят в него только через функционал $\dot{\Theta}_t[t, t_0; \mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau)]$, разложение которого в функциональный степенной ряд Фурье по $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)$ определяется всеми пространственно-временными кумулянтными функциями случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$.

Существует, однако, ряд случаев, когда вариационная производная в (6.8) выражается через обычные дифференциальные операторы.

В этих случаях уравнения типа (6.8) будут уже замкнутыми уравнениями для соответствующих плотностей вероятностей.

Аналогичным образом можно получить уравнение типа (6.8) и для m -временной плотности вероятностей

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = \langle \varphi_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) \rangle, \quad (6.9)$$

относящейся к m различным моментам времени $t_1 < t_2 < \dots < t_m$, где индикаторная функция определяется равенством

$$\varphi_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = \delta(\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_1) \dots \delta(\mathbf{x}(t_m) - \mathbf{x}_m).$$

Дифференцируя (6.9) по времени t_m и используя затем динамическое уравнение (6.2), можно получить уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_m} P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_m} [\mathbf{v}(\mathbf{x}_m, t_m) P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m)] = \\ = \left\langle \dot{\Theta}_{t_m} \left[t_m, t_0; \frac{\delta}{i \delta \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)} \right] \varphi_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) \right\rangle. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Здесь суммирование по индексу m не производится. Начальное условие к (6.10) можно найти из формулы (6.9). Полагая $t_m = t_{m-1}$ в (6.9), получаем равенство

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_{m-1}) = \delta(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{m-1}) P_{m-1}(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}),$$

которое и определяет начальное условие для уравнения (6.10).

6.2. Динамические системы, допускающие полный статистический анализ

Рассмотрим теперь несколько примеров динамических систем, допускающих достаточно полный статистический анализ для произвольных случайных параметров.

6.2.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Пример мультипликативного воздействия.

В качестве первого примера рассмотрим векторное стохастическое уравнение с начальным условием

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = z(t) g(t) \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (6.11)$$

где $g(t)$ и $F_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, N$, — детерминированные функции, а $z(t)$ — случайный процесс, статистические характеристики которого описываются характеристическим функционалом

$$\Phi[t; v(\tau)] = \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle = \exp \{ \Theta[t; v(\tau)] \}.$$

Уравнения (6.11) обладают особенностью, позволяющей решить задачу о нахождении статистических характеристик их решений в общем случае произвольной статистики процесса $z(t)$. Дело в том, что если ввести новое «случайное» время

$$T = \int_0^t d\tau z(\tau) g(\tau),$$

то уравнения (6.11) примут форму «детерминированных» уравнений:

$$\frac{d}{dT} \mathbf{x}(T) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

и, следовательно, решение уравнения (6.11) имеет структуру

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} \left(\int_0^t d\tau z(\tau) g(\tau) \right). \quad (6.12)$$

Варьируя (6.12) по $z(\tau)$ и используя (6.11), получаем равенство

$$\frac{\delta}{\delta z(\tau)} \mathbf{x}(t) = g(\tau) \frac{d}{dT} \mathbf{x}(T) = g(\tau) \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)). \quad (6.13)$$

Таким образом, вариационные производные решения $\mathbf{x}(t)$ выражаются через само же решение в тот же момент времени. Это позволяет сразу написать замкнутые уравнения для статистических характеристик задачи (6.11).

Получим уравнение для одноточечной плотности вероятностей $P(\mathbf{x}, t) = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \rangle$. Оно имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t) = \left\langle \dot{\Theta}_t \left[t; \frac{\delta}{i \delta z(\tau)} \right] \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \right\rangle. \quad (6.14)$$

Рассмотрим теперь действие оператора $\delta/\delta z(\tau)$ на индикаторную функцию $\varphi(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x})$. Используя формулу (6.13), получаем выражение

$$\frac{\delta}{\delta z(\tau)} \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) = -g(\tau) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \{ \mathbf{F}(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}, t) \}.$$

Следовательно, уравнение (6.14) можно переписать в виде замкнутого операторного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t) = \dot{\Theta}_t \left[t; i g(\tau) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \right] P(\mathbf{x}, t), \quad P(\mathbf{x}, 0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (6.15)$$

конкретный вид которого определяется характером процесса $z(t)$.

Для двухвременной плотности вероятностей

$$P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1) = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_1) \rangle,$$

аналогичным образом получаем уравнение (при $t > t_1$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1) = \\ = \dot{\Theta}_t \left[t; i g(\tau) \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \theta(t_1 - \tau) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{F}(\mathbf{x}_1) \right\} \right] P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1) \end{aligned} \quad (6.16)$$

с начальным условием

$$P(\mathbf{x}, t_1; \mathbf{x}_1, t_1) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) P(\mathbf{x}_1, t_1),$$

где функция $P(\mathbf{x}_1, t_1)$ удовлетворяет уравнению (6.15).

Из уравнения (6.16) видно, что многовременная плотность вероятностей не допускает факторизации через плотность вероятностей перехода и, следовательно, процесс $\mathbf{x}(t)$ не является марковским. Конкретный вид уравнений (6.15) и (6.16) определяется выбором статистики процесса $z(t)$.

Так, если процесс $z(t)$ гауссов с характеристиками

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad B(t, t') = \langle z(t) z(t') \rangle,$$

то функционал

$$\Theta[t; v(\tau)] = -\frac{1}{2} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 B(t_1, t_2) v(t_1) v(t_2)$$

и уравнение (6.15) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t) = g(t) \int_0^t d\tau B(t, \tau) g(\tau) \frac{\partial}{\partial x_j} F_j(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_k} F_k(\mathbf{x}) P(\mathbf{x}, t), \\ P(\mathbf{x}, 0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Это уравнение можно рассматривать как *обобщенное уравнение Фоккера-Планка*.

К задачам типа (6.11) приводит класс задач, описываемых системой уравнений

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = z(t) \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \lambda \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (6.18)$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ — однородные полиномы степени k . Вводя новые функции $\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t)e^{-\lambda t}$, мы придем к задаче (6.11) с функцией $g(t) = e^{-\lambda(k-1)t}$.

Отметим, что в частном случае одномерного линейного уравнения типа (6.18) для гауссового процесса $z(t)$, определяющего *логарифмически нормальный случайный процесс* простейшего вида,

$$\frac{d}{dt} x(t) = -\lambda x(t) + z(t)x(t), \quad x(0) = 1,$$

вместо (6.17) получаем обобщенное уравнение Фоккера–Планка

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, t) &= \lambda \frac{\partial}{\partial x} x P(x, t) + \int_0^t d\tau B(t, \tau) \frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial}{\partial x} x P(x, t), \\ P(x, 0) &= \delta(x - 1). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Пример аддитивного воздействия.

Рассмотрим теперь класс линейных уравнений

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = A(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (6.20)$$

где $A(t)$ — детерминированная матрица, а $\mathbf{f}(t)$ — случайная вектор-функция с заданным характеристическим функционалом $\Phi[t; \mathbf{v}(\tau)]$.

Для плотности вероятностей решения уравнения (6.20) $P(\mathbf{x}, t) = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \rangle$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} (A_{ik}(t) x_k P(\mathbf{x}, t)) + \left\langle \dot{\Theta}_t \left[t; \frac{\delta}{i \delta \mathbf{f}(\tau)} \right] \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \right\rangle. \quad (6.21)$$

В рассматриваемой задаче вариационная производная $\delta x_i(t)/\delta f_i(\tau)$ удовлетворяет также линейному уравнению ($\tau < t$) с начальным условием:

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta x_i(t)}{\delta f_i(\tau)} = A_{ik}(t) \frac{\delta x_k(t)}{\delta f_i(\tau)}, \quad \left. \frac{\delta x_i(t)}{\delta f_i(\tau)} \right|_{t=\tau} = \delta_{il}. \quad (6.22)$$

Уравнение (6.22) уже не содержит случайностей и определяет функцию Грина $G_{il}(t, \tau)$ для однородной системы (6.20), т. е.

$$\frac{\delta}{\delta f_i(\tau)} x_i(t) = G_{il}(t, \tau).$$

Следовательно,

$$\frac{\delta}{\delta f_i(\tau)} \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) = -\frac{\partial}{\partial x_k} G_{kl}(t, \tau) \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}),$$

и уравнение (6.21) превращается в замкнутое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} (A_{ik}(t)x_k P(\mathbf{x}, t)) + \dot{\Theta}_t \left[t; i G_{kl}(t, \tau) \frac{\partial}{\partial x_k} \right] P(\mathbf{x}, t). \quad (6.23)$$

Из уравнения (6.23) следует, что уравнение для любого момента величины $\mathbf{x}(t)$ будет замкнутым линейным уравнением, содержащим только конечное число кумулянтных функций, порядок которых не превосходит порядка рассматриваемого момента.

Аналогичным образом для двухвременной плотности вероятностей

$$P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1) = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_1) \rangle$$

получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1) = & -\frac{\partial}{\partial x_i} (A_{ik}(t)x_k P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1)) + \\ & + \dot{\Theta}_t \left[t; i \{G_{kl}(t, \tau) + G_{kl}(t_1, \tau)\} \frac{\partial}{\partial x_l} \right] P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1) \quad (t > t_1) \end{aligned} \quad (6.24)$$

с начальным условием

$$P(\mathbf{x}, t_1; \mathbf{x}_1, t_1) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) P(\mathbf{x}_1, t_1),$$

где $P(\mathbf{x}_1, t_1)$ — одноточечная плотность вероятностей, описываемая уравнением (6.23). Из уравнения (6.24) следует, что процесс $\mathbf{x}(t)$ не является марковским. Конкретная форма уравнений (6.23) и (6.24) определяется структурой функционала $\Phi[t; v(\tau)]$, т. е. случайным характером функции $\mathbf{f}(t)$.

Так, для гауссового векторного процесса $\mathbf{f}(t)$ с параметрами

$$\langle \mathbf{f}(t) \rangle = 0, \quad B_{ij}(t, t') = \langle f_i(t) f_j(t') \rangle$$

уравнение (6.23) принимает вид обобщенного уравнения Фоккера–Планка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t) = & -\frac{\partial}{\partial x_i} (A_{ik}(t)x_k P(\mathbf{x}, t)) + \\ & + \int_0^t d\tau B_{jl}(t, \tau) G_{kj}(t, \tau) G_{ml}(t, \tau) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_m} P(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (6.25)$$

В качестве конкретной задачи рассмотрим динамику частицы с трением под действием случайных сил [36].

Инерционная частица под действием случайных сил. Простейший пример диффузии частицы под действием случайной внешней

силы $\mathbf{f}(t)$ с линейным трением описывается линейной системой уравнений (1.43):

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t), \quad \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = -\lambda[\mathbf{v}(t) - \mathbf{f}(t)], \quad \mathbf{r}(0) = 0, \quad \mathbf{v}(0) = 0. \quad (6.26)$$

Решение стохастических уравнений (6.26) имеет вид

$$\mathbf{v}(t) = \lambda \int_0^t d\tau e^{-\lambda(t-\tau)} \mathbf{f}(\tau), \quad \mathbf{r}(t) = \int_0^t d\tau [1 - e^{-\lambda(t-\tau)}] \mathbf{f}(\tau), \quad (6.27)$$

и для стационарного случайного процесса $\mathbf{f}(t)$ с корреляционным тензором $\langle f_i(t)f_j(t') \rangle = B_{ij}(t - t')$ и временным радиусом корреляции τ_0 , определяемым соотношением

$$\int_0^\infty d\tau B_{ii}(\tau) = \tau_0 B_{ii}(0),$$

получаем аналитические выражения для корреляционных функций скорости и координаты частицы:

$$\begin{aligned} \langle v_i(t)v_j(t) \rangle &= \lambda \int_0^t d\tau B_{ij}(\tau) [e^{-\lambda\tau} - e^{-\lambda(2t-\tau)}], \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle r_i(t)r_j(t) \rangle &= \langle r_i(t)v_j(t) \rangle = \int_0^t d\tau B_{ij}(\tau) [1 - e^{-\lambda t}] [1 - e^{-\lambda(t-\tau)}]. \end{aligned} \quad (6.28)$$

В стационарном режиме, когда $\lambda t \gg 1$ и $t/\tau_0 \gg 1$, но параметр $\lambda\tau_0$ произволен, скорость частицы является стационарным процессом с корреляционным тензором

$$\langle v_i(t)v_j(t) \rangle = \lambda \int_0^\infty d\tau B_{ij}(\tau) e^{-\lambda\tau}, \quad (6.29)$$

а величины

$$\langle r_i(t)v_j(t) \rangle = \int_0^\infty d\tau B_{ij}(\tau), \quad \langle r_i(t)r_j(t) \rangle = 2t \int_0^\infty d\tau B_{ij}(\tau). \quad (6.30)$$

Если к тому же $\lambda\tau_0 \gg 1$, то корреляционный тензор скорости переходит в

$$\langle v_i(t)v_j(t) \rangle = B_{ij}(0) \quad (6.31)$$

в согласии с уравнением (6.26), так как в этом пределе $\mathbf{v}(t) \equiv \mathbf{f}(t)$.

Если же выполнено условие $\lambda\tau_0 \ll 1$, то

$$\langle v_i(t)v_j(t) \rangle = \lambda \int_0^\infty d\tau B_{ij}(\tau)$$

и этот результат соответствует дельта-коррелированному приближению случайного процесса $\mathbf{f}(t)$.

Введем теперь индикаторную функцию для решения уравнения (6.26):

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) \delta(\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}),$$

которая описывается уравнением Лиувилля

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} \right) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = -\lambda \mathbf{f}(t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t), \quad (6.32)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}; 0) = \delta(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{v}).$$

Среднее значение индикаторной функции $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t)$ по ансамблю реализаций случайного процесса $\mathbf{f}(t)$ описывает совместную одновременную плотность вероятностей положения частицы и ее скорости:

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = \langle \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) \rangle = \langle \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) \delta(\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}) \rangle_{\mathbf{f}}.$$

Усредним уравнение (6.32) по ансамблю реализаций случайного процесса $\mathbf{f}(t)$. В результате получаем незамкнутое уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} \right) P(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = -\lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \langle \mathbf{f}(t) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) \rangle, \quad (6.33)$$

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{v}; 0) = \delta(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{v}),$$

содержащее корреляцию $\langle \mathbf{f}(t) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) \rangle$, которое можно записать в виде равенства

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} \right) P(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = \left\langle \dot{\Theta} \left[t; \frac{\delta}{i\delta \mathbf{f}(\tau)} \right] \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) \right\rangle, \quad (6.34)$$

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{v}; 0) = \delta(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{v}),$$

где функционал $\dot{\Theta}[t; \mathbf{v}(\tau)]$ связан с характеристическим функционалом случайного процесса $\mathbf{f}(t)$

$$\Phi[t; \psi(\tau)] = \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau \psi(\tau) \mathbf{f}(\tau) \right\} \right\rangle = e^{\Theta[t; \psi(\tau)]}$$

соотношением

$$\dot{\Theta}[t; \psi(\tau)] = \frac{d}{dt} \ln \Phi[t; \psi(\tau)] = \frac{d}{dt} \Theta[t; \psi(\tau)].$$

Функционал $\Theta[t; \psi(\tau)]$ можно разложить в функциональный степенной ряд

$$\Theta[t; \psi(\tau)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_0^t dt_1 \dots \int_0^t dt_n K_{i_1, \dots, i_n}^{(n)}(t_1, \dots, t_n) \psi_{i_1}(t_1) \dots \psi_{i_n}(t_n),$$

где функции

$$K_{i_1, \dots, i_n}^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n}{\delta \psi_{i_1}(t_1) \dots \delta \psi_{i_n}(t_n)} \Theta[v(\tau)] \Big|_{v=0}$$

являются кумулянтными функциями случайного процесса $\mathbf{f}(t)$ порядка n .

Рассмотрим вариационную производную

$$\frac{\delta}{\delta f_j(t')} \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = - \left[\frac{\partial}{\partial r_k} \frac{\delta r_k(t)}{\delta f_j(t')} + \frac{\partial}{\partial v_k} \frac{\delta v_k(t)}{\delta f_j(t')} \right] \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t). \quad (6.35)$$

Для динамической задачи (6.26) вариационные производные функций $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$ в равенстве (6.35) вычисляются из выражений (6.27) и имеют вид

$$\frac{\delta v_k(t)}{\delta f_j(t')} = \lambda \delta_{kj} e^{-\lambda(t-t')}, \quad \frac{\delta r_k(t)}{\delta f_j(t')} = \delta_{kj} \left[1 - e^{-\lambda(t-t')} \right]. \quad (6.36)$$

Используя равенства (6.36), можно теперь выражение (6.35) записать в виде

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{f}(t')} \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = - \left\{ \left[1 - e^{-\lambda(t-t')} \right] \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \lambda e^{-\lambda(t-t')} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t)$$

и, следовательно, переписать уравнение (6.34) в замкнутом виде:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) P(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = \\ = \dot{\Theta} \left[t; i \left\{ \left[1 - e^{-\lambda(t-t')} \right] \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \lambda e^{-\lambda(t-t')} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} \right] P(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t), \\ P(\mathbf{r}, \mathbf{v}; 0) = \delta(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (6.37)$$

Отметим, что уравнения для моментных функций порядка n , вытекающие из уравнения (6.37), содержат кумулянтные функции порядка не выше чем n .

Предположим теперь, что процесс $\mathbf{f}(t)$ — гауссов стационарный процесс с нулевым средним значением и корреляционным тензором

$$B_{ij}(t - t') = \langle f_i(t) f_j(t') \rangle.$$

В этом случае характеристический функционал процесса $\mathbf{f}(t)$ есть

$$\Phi [t; \psi(\tau)] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t dt_1 dt_2 B_{ij}(t_1 - t_2) \psi_i(t_1) \psi_j(t_2) \right\}.$$

Для функционала $\dot{\Theta} [t; \psi(\tau)]$ получаем выражение

$$\dot{\Theta} [t; \psi(\tau)] = -\psi_i(t) \int_0^t dt' B_{ij}(t - t') \psi_j(t'),$$

и мы приходим к обобщению уравнения Фоккера–Планка:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} \right) P(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) &= \lambda^2 \int_0^t d\tau B_{ij}(\tau) e^{-\lambda \tau} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} P(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) + \\ &+ \lambda \int_0^t d\tau B_{ij}(\tau) [1 - e^{-\lambda \tau}] \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial r_j} P(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t), \\ P(\mathbf{r}, \mathbf{v}; 0) &= \delta(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (6.38)$$

Уравнение (6.38) — точное уравнение и справедливо для всех моментов времени. Как следует из него, функции $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$ являются гауссовыми. Для моментных функций процессов $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$ обычным путем получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle r_i(t) r_j(t) \rangle &= 2 \langle r_i(t) v_j(t) \rangle, \\ \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right) \langle r_i(t) v_j(t) \rangle &= \langle v_i(t) v_j(t) \rangle + \lambda \int_0^t d\tau B_{ij}(\tau) [1 - e^{-\lambda \tau}], \\ \left(\frac{d}{dt} + 2\lambda \right) \langle v_i(t) v_j(t) \rangle &= 2\lambda^2 \int_0^t d\tau B_{ij}(\tau) e^{-\lambda \tau}. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Из системы (6.39) следует, что стационарные значения всех одновременных корреляций при $\lambda t \gg 1$ and $t/\tau_0 \gg 1$ описываются выражениями

$$\begin{aligned} \langle v_i(t) v_j(t) \rangle &= \lambda \int_0^\infty d\tau B_{ij}(\tau) e^{-\lambda \tau}, \quad \langle r_i(t) v_j(t) \rangle = D_{ij}, \\ \langle r_i(t) r_j(t) \rangle &= 2t D_{ij}, \end{aligned} \quad (6.40)$$

где пространственный диффузионный тензор

$$D_{ij} = \int_0^{\infty} d\tau B_{ij}(\tau), \quad (6.41)$$

в согласии с выражениями (6.29) и (6.30).

Мы можем также вычислить временной радиус корреляции скорости $\mathbf{v}(t)$ т.е. величину $\langle v_i(t)v_j(t_1) \rangle$. Для нее получаем уравнение для времен $t_1 < t$ с помощью равенств (6.36):

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right) \langle v_i(t)v_j(t_1) \rangle &= \lambda^2 \int_0^{t_1} dt' B_{ij}(t-t') e^{-\lambda(t_1-t')} = \\ &= \lambda^2 e^{\lambda(t-t_1)} \int_{t-t_1}^t d\tau B_{ij}(\tau) e^{-\lambda\tau}, \end{aligned} \quad (6.42)$$

с начальным условием

$$\langle v_i(t)v_j(t_1) \rangle|_{t=t_1} = \langle v_i(t_1)v_j(t_1) \rangle. \quad (6.43)$$

Для стационарного режима при $\lambda t \gg 1$, $\lambda t_1 \gg 1$, но фиксированной величине $(t - t_1)$, получаем уравнение с начальным условием $(\tau = t - t_1)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{d\tau} + \lambda \right) \langle v_i(t+\tau)v_j(t) \rangle &= \lambda^2 e^{\lambda\tau} \int_0^{\infty} d\tau_1 B_{ij}(\tau_1) e^{-\lambda\tau_1}, \\ \langle v_i(t+\tau)v_j(t) \rangle_{\tau=0} &= \langle v_i(t)v_j(t) \rangle. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Легко написать решение уравнения (6.44), однако нас интересует временной радиус корреляции случайного процесса $\mathbf{v}(t) - \tau_{\mathbf{v}}$. Для получения этой величины проинтегрируем уравнение (6.44) по параметру τ на интервале $(0, \infty)$. В результате получаем выражение

$$\lambda \int_0^{\infty} d\tau \langle v_i(t+\tau)v_j(t) \rangle \langle v_i(t)v_j(t) \rangle + \lambda \int_0^{\infty} d\tau_1 B_{ij}(\tau_1) [1 - e^{-\lambda\tau_1}],$$

и, следовательно, с помощью определения (4.19) и равенства (6.40) приходим к выражению

$$\tau_{\mathbf{v}} \langle \mathbf{v}^2(t) \rangle = D_{ii} = \tau_0 B_{ii}(0), \quad (6.45)$$

т. е.

$$\tau_{\mathbf{v}} = \frac{\tau_0 B_{ii}(0)}{\langle \mathbf{v}^2(t) \rangle} = \frac{\tau_0 B_{ii}(0)}{\lambda \int_0^\infty d\tau B_{ii}(\tau) e^{-\lambda\tau}} = \begin{cases} \tau_0, & \text{если } \lambda\tau_0 \gg 1, \\ 1/\lambda, & \text{если } \lambda\tau_0 \ll 1. \end{cases} \quad (6.46)$$

Интегрируя уравнение (6.38) по $\mathbf{r}$, получаем замкнутое уравнение для плотности вероятностей скорости частицы:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} \right) P(\mathbf{v}; t) = \lambda^2 \int_0^t d\tau B_{ij}(\tau) e^{-\lambda\tau} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} P(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t),$$

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{v}; 0) = \delta(\mathbf{v}).$$

Решение этого уравнения соответствует гауссовому процессу $\mathbf{v}(t)$ с корреляционным тензором (6.28). Это связано с тем, что второе уравнение системы (6.26) замкнуто. При выполнении условия $\lambda t \gg 1$ следует, что существует стационарная плотность вероятностей, описываемая уравнением

$$-\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} P(\mathbf{v}; t) = \lambda \int_0^\infty d\tau B_{ij}(\tau) e^{-\lambda\tau} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} P(\mathbf{v}; t)$$

и скорость установления этого распределения зависит от параметра λ .

Написать уравнение для плотности вероятностей координаты частицы $P(\mathbf{r}; t)$ непосредственно из уравнения (6.38) не удастся. Действительно, интегрируя уравнение (6.38) по $\mathbf{v}$, получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int \mathbf{v} P(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) d\mathbf{v}, \quad P(\mathbf{r}, 0) = \delta(\mathbf{r}). \quad (6.47)$$

Для функции $\int v_k P(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) d\mathbf{v}$ имеем равенство

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda \right) \int v_k P(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) d\mathbf{v} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int v_k \mathbf{v} P(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) d\mathbf{v} -$$

$$-\lambda \int_0^t d\tau B_{kj}(\tau) [1 - e^{-\lambda\tau}] \frac{\partial}{\partial r_j} P(\mathbf{r}, t) \quad (6.48)$$

и т. д. Таким образом, мы получаем бесконечную систему уравнений.

Случайная функция $\mathbf{r}(t)$ описывается первым уравнением в системе (6.26) и если бы мы знали полную статистику функции $\mathbf{v}(t)$ (т. е. многовременную статистику), то могли бы вычислить все статистические характеристики функции $\mathbf{r}(t)$. Однако уравнение (6.38) описывает только одновременные статистические величины и только бесконечная

система величин, подобных (6.47), (6.48) и т. д. эквивалентна многовременной статистике для $\mathbf{v}(t)$. Действительно, функция

$$\mathbf{r}(t) = \int_0^t dt_1 \mathbf{v}(t_1),$$

и пространственный коэффициент диффузии в стационарном режиме, как мы видели в выражении (6.45), имеет вид

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{r}^2(t) \rangle = \int_0^\infty d\tau \langle \mathbf{v}(t+\tau) \mathbf{v}(t) \rangle = \tau_{\mathbf{v}} \langle \mathbf{v}^2(t) \rangle = D_{ii} = \tau_0 B_{ii}(0), \quad (6.49)$$

и зависит от временного радиуса корреляции $\tau_{\mathbf{v}}$ случайной функции $\mathbf{v}(t)$ и ее дисперсии, но не от параметра λ .

Однако для этой простейшей задачи мы непосредственно знаем дисперсии всех величин и корреляции функций $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{r}(t)$ (см. выражения (6.28)) и, следовательно, мы можем написать уравнение для плотности вероятностей координаты частицы $P(\mathbf{r}; t)$, которое есть диффузионное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}; t) = D_{ij}(t) \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} P(\mathbf{r}, t), \quad P(\mathbf{r}, 0) = \delta(\mathbf{r}),$$

с диффузионным тензором (6.28)

$$\begin{aligned} D_{ij}(t) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle r_i(t) r_j(t) \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle r_i(t) v_j(t) \rangle + \langle r_j(t) v_i(t) \rangle \} = \\ &= \int_0^t d\tau B_{ij}(\tau) [1 - e^{-\lambda t}] [1 - e^{-\lambda(t-\tau)}]. \end{aligned}$$

При условии $\lambda t \gg 1$ получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}; t) = D_{ij} \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} P(\mathbf{r}, t), \quad P(\mathbf{r}, 0) = \delta(\mathbf{r}), \quad (6.50)$$

с диффузионным тензором (6.41).

Отметим, что переход от уравнения (6.38) к уравнению для плотности вероятностей координаты частицы (6.50) с коэффициентом диффузии (6.49) соответствует так называемой *проблеме Крамерса*.

Если выполнено условие $\lambda \tau_0 \ll 1$, где τ_0 — временной радиус корреляции процесса $\mathbf{f}(t)$, то уравнение (6.38) упрощается:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} \right) P(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = \lambda^2 \int_0^t d\tau B_{ij}(\tau) \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} P(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t),$$

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{v}; 0) = \delta(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{v}),$$

и соответствует так называемому приближению дельта-коррелированного процесса для случайной функции $\mathbf{f}(t)$. Если время $t \gg \tau_0$, то мы можем заменить верхний предел в интеграле на бесконечность и перейти к обычному диффузионному уравнению Фоккера–Планка

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} \right) P(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = \lambda^2 D_{ij} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} P(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t), \quad (6.51)$$

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{v}; 0) = \delta(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{v}),$$

с диффузионным тензором (6.49). В этом приближении объединенный случайный процесс $\{\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)\}$ есть марковский процесс.

При выполнении условия $\lambda t \gg 1$ имеется стационарное уравнение для плотности вероятностей скорости частицы:

$$-\lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} P(\mathbf{v}) = \lambda^2 D_{ij} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} P(\mathbf{v}),$$

и нестационарное уравнение для плотности вероятностей координаты частицы:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}; t) = D_{ij} \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} P(\mathbf{r}, t), \quad P(\mathbf{r}, 0) = \delta(\mathbf{r}).$$

Рассмотрим теперь другой предельный случай $\lambda \tau_0 \gg 1$. В этом случае уравнение (6.38) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} \right) P(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) \lambda B_{ij}(0) [1 - e^{-\lambda t}] \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} P(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) - \\ & - B_{ij}(0) [1 - e^{-\lambda t}] \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial r_j} P(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) + \lambda \int_0^t d\tau B_{ij}(\tau) \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial r_j} P(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t), \end{aligned}$$

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{v}; 0) = \delta(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{v}).$$

Интегрируя это уравнение по $\mathbf{r}$, получаем уравнение для плотности вероятностей скорости частицы:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} \right) P(\mathbf{v}; t) = \lambda B_{ij}(0) [1 - e^{-\lambda t}] \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} P(\mathbf{v}; t),$$

$$P(\mathbf{v}; 0) = \delta(\mathbf{v}),$$

и при условии $\lambda t \gg 1$ получаем стационарную гауссову плотность вероятностей с дисперсией:

$$\langle v_i(t) v_j(t) \rangle = B_{ij}(0).$$

Что касается плотности вероятностей положения частицы, то при выполнении условия $\lambda t \gg 1$ получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}; t) = D_{ij} \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} P(\mathbf{r}, t), \quad P(\mathbf{r}, 0) = \delta(\mathbf{r}) \quad (6.52)$$

с тем же коэффициентом диффузии, как и ранее. Это связано с равенством (6.45), которое не зависит от параметра λ . Отметим, что это уравнение соответствует предельному переходу $\lambda \rightarrow \infty$ в уравнении (6.26)

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t), \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{r}(0) = 0.$$

В этом предельном случае $\lambda \rightarrow \infty$ ($\lambda \tau_0 \gg 1$) мы имеем равенство

$$\mathbf{v}(t) \approx \mathbf{f}(t) \quad (6.53)$$

и вся многовременная статистика случайных функций $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{r}(t)$ будет описываться статистическими характеристиками процесса $\mathbf{f}(t)$. В частности, одновременная плотность вероятностей скорости частицы $\mathbf{v}(t)$ — гауссова с дисперсией $\langle v_i(t) v_j(t) \rangle = B_{ij}(0)$, а пространственный тензор диффузии определяется выражением

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle r_i(t) r_j(t) \rangle = \int_0^\infty d\tau B_{ij}(\tau).$$

В случае справедливости дельта-коррелированного приближения процесса $\mathbf{f}(t)$ ($\lambda \tau_0 \ll 1$), как мы видели ранее, приближенное равенство (6.53) уже несправедливо для нахождения статистических характеристик процесса $\mathbf{v}(t)$. Однако для одновременных статистических характеристик процесса $\mathbf{r}(t)$ мы по-прежнему имеем уравнение (6.52) с тем же пространственным диффузионным тензором. Это связано с равенством (6.45), справедливым для любого параметра λ и произвольной плотности вероятностей случайного процесса $\mathbf{f}(t)$.

Выше мы рассмотрели несколько типов стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих замкнутое статистическое описание в общем виде. Ясно, что аналогичные ситуации могут иметь место и в динамических системах, описываемых уравнениями в частных производных.

6.2.2. Примеры уравнений в частных производных. Прежде всего отметим, что уравнение в частных производных первого порядка

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + z(t) g(t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \right) \rho(\mathbf{r}, t) = 0$$

эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений (6.11) и, следовательно, также допускает полное статистическое описание для произвольного случайного процесса $z(t)$.

Рассмотрим теперь класс нелинейных уравнений в частных производных, не содержащих явной зависимости от пространственной переменной $\mathbf{x}$, а именно

$$\frac{\partial}{\partial t} q(t, \mathbf{x}) + \mathbf{z}(t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} q(t, \mathbf{x}) = F \left(t, q, \frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} q, \dots \right),$$

где $\mathbf{z}(t)$ — векторный случайный процесс, а F — детерминированная функция. Решение этого уравнения можно представить в виде

$$q(t, \mathbf{x}) = Q \left(t, \mathbf{x} - \int_0^t d\tau \mathbf{z}(\tau) \right),$$

где функция $Q(t, \mathbf{x})$ удовлетворяет детерминированному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} Q(t, \mathbf{x}) = F \left(t, Q, \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} Q, \dots \right)$$

и, следовательно,

$$\frac{\delta q(t, \mathbf{x})}{\delta z_i(\tau)} = -\theta(t - \tau) \frac{\partial}{\partial x_i} q(t, \mathbf{x}).$$

Для таких задач различные статистические характеристики решения можно определить непосредственно путем усреднения соответствующих выражений, построенных по решению последнего уравнения.

К сожалению, число уравнений, допускающих достаточно полный анализ, ограничено. В общем случае для анализа динамических систем приходится прибегать к различным асимптотическим и приближенным методам. В физических исследованиях часто используются и дают хорошие результаты методы, основанные на аппроксимации реальных случайных процессов и полей дельта-коррелированными во времени процессами и полями.

6.3. Дельта-коррелированные процессы и поля

Для дельта-коррелированного во времени случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ выполняется равенство

$$\dot{\Theta}_t[t, t_0; \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)] \equiv \dot{\Theta}_t[t, t_0; \mathbf{v}(\mathbf{y}, t)],$$

и ситуация существенно упрощается.

Уравнения (6.8) и (6.10) принимают в этом случае вид замкнутых операторных уравнений для функций $P(\mathbf{x}, t)$, $P(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)$ и $P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m)$ в силу равенства (6.4). Так, вместо (6.8),

получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = \dot{\Theta}_t \left[t, t_0; i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right] P(\mathbf{x}, t), \quad (6.54)$$

$$P(\mathbf{x}, 0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

конкретный вид которого определяется видом функционала $\Theta[t, t_0; \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)]$, т.е. статистическим характером случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$. Соответственно, вместо (6.10), для m -временной плотности вероятностей получаем операторное уравнение ($t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_m$)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_m} \mathbf{v}(\mathbf{x}_m, t_m) \right) P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = \\ = \dot{\Theta}_{t_m} \left[t_m, t_0; i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_m} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}_m) \right] P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m), \\ P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_{m-1}) \delta(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{m-1}) P_{m-1}(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}). \end{aligned} \quad (6.55)$$

Решение уравнения (6.55) можно искать в виде

$$\begin{aligned} P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = \\ = p(\mathbf{x}_m, t_m \mid \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}) P_{m-1}(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}). \end{aligned} \quad (6.56)$$

Так как все дифференциальные операции в (6.55) относятся к t_m , $\mathbf{x}_m$, то подставляя (6.56) в (6.55), находим следующее уравнение для плотности вероятностей перехода:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) p(\mathbf{x}, t \mid \mathbf{x}_0, t_0) = \\ = \dot{\Theta}_t \left[t, t_0; i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right] p(\mathbf{x}, t \mid \mathbf{x}_0, t_0), \\ p(\mathbf{x}, t \mid \mathbf{x}_0, t_0)|_{t \rightarrow t_0} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \end{aligned} \quad (6.57)$$

Здесь мы обозначили переменные $\mathbf{x}_m$, t_m через $\mathbf{x}$, t и переменные $\mathbf{x}_{m-1}$, t_{m-1} через $\mathbf{x}_0$, t_0 .

Применяя формулу (6.56) $(m-1)$ раз, получаем соотношение

$$\begin{aligned} P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = \\ = p(\mathbf{x}_m, t_m \mid \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}) \dots p(\mathbf{x}_2, t_2 \mid \mathbf{x}_1, t_1) P(\mathbf{x}_1, t_1), \end{aligned} \quad (6.58)$$

где $P(\mathbf{x}_1, t_1)$ — плотность вероятностей, определяемая уравнением (6.54) и относящаяся к одному моменту времени t_1 . Равенство (6.58) выражает многовременную плотность вероятностей через произведение плотностей вероятностей перехода и означает, что случайный процесс

$\mathbf{x}(t)$ является марковским. Плотность вероятностей перехода при этом

$$p(\mathbf{x}, t \mid \mathbf{x}_0, t_0) = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \mid \mathbf{x}_0, t_0 \rangle.$$

Конкретная модель флуктуаций параметров может существенно упростить полученные уравнения.

Так, например, для гауссового дельта-коррелированного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ корреляционный тензор имеет следующую структуру ($\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \rangle = 0$):

$$B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = 2\delta(t - t') F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t).$$

Функционал $\Theta[t, t_0; \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)]$ в этом случае принимает вид

$$\Theta[t, t_0; \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)] = - \int_{t_0}^t d\tau \int d\mathbf{y}_1 \int d\mathbf{y}_2 F_{ij}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2; \tau) v_i(\mathbf{y}_1, \tau) v_j(\mathbf{y}_2, \tau)$$

и уравнение (6.54) переходит в уравнение Фоккера–Планка

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t) = & - \frac{\partial}{\partial x_k} [(v_k(\mathbf{x}, t) + A_k(\mathbf{x}, t)) P(\mathbf{x}, t)] + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} [F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) P(\mathbf{x}, t)], \\ P(\mathbf{x}, t_0) = & \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \end{aligned} \quad (6.59)$$

где

$$A_k(\mathbf{x}, t) = \left. \frac{\partial}{\partial x'_l} F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) \right|_{\mathbf{x}' = \mathbf{x}}.$$

В виду особой важности случая гауссового дельта-коррелированного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ для физических приложений, это приближение, обычно называемое *приближением гауссового дельта-коррелированного поля* $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, с других позиций будет более подробно рассмотрено в гл. 8. Рассмотрим несколько примеров конкретных стохастических уравнений.

6.3.1. Одномерное нелинейное дифференциальное уравнение.

Рассмотрим одномерное стохастическое уравнение

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x, t) + z(t)g(x, t), \quad x(0) = x_0, \quad (6.60)$$

где $f(x, t)$ и $g(x, t)$ — детерминированные функции, а $z(t)$ — случайная функция времени. Для индикаторной функции $\varphi(x, t) = \delta(x(t) - x)$ имеем уравнение Лиувилля

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t) = - \frac{\partial}{\partial x} \{f(x, t)\varphi(x, t)\} - z(t) \frac{\partial}{\partial x} \{g(x, t)\varphi(x, t)\},$$

и, следовательно, уравнение для одновременной плотности вероятностей $P(x, t)$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \{f(x, t)P(x, t)\} + \left\langle \dot{\Theta}_t \left[t, \frac{\delta}{i\delta z(t)} \right] \varphi(x, t) \right\rangle.$$

Учитывая теперь равенство

$$\frac{\delta}{\delta z(t-0)} \varphi(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \{g(x, t)\varphi(x, t)\},$$

получаем замкнутое операторное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \{f(x, t)P(x, t)\} + \dot{\Theta}_t \left[t, i \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) \right] P(x, t). \quad (6.61)$$

Для гауссового дельта-коррелированного процесса

$$\Theta[t, v(\tau)] = -\frac{1}{2} \int_0^t d\tau B(\tau) v^2(\tau),$$

и уравнение (6.61) принимает вид уравнения Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \{f(x, t)P(x, t)\} + \frac{1}{2} B(t) \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) P(x, t). \quad (6.62)$$

Для пуассоновского дельта-коррелированного случайного процесса $z(t)$

$$\Theta[t, v(\tau)] = \nu \int_0^t d\tau \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi) e^{i\xi v(\tau)} - 1 \right\},$$

и уравнение (6.61) становится таковым:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = & -\frac{\partial}{\partial x} \{f(x, t)P(x, t)\} + \\ & + \nu \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi) \exp \left(-\xi \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) \right) - 1 \right\} P(x, t). \end{aligned} \quad (6.63)$$

Пусть, например, $g(x, t) = 1$, т.е. уравнение (6.60) выглядит следующим образом:

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x, t) + z(t), \quad x(0) = x_0.$$

В этом случае оператор в правой части (6.63) является оператором сдвига и уравнение (6.63) принимает вид *уравнения Колмогорова–Феллера*:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \{f(x, t)P(x, t)\} + \nu \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi) P(x - \xi, t) - \nu P(x, t).$$

Пусть теперь $g(x, t) = x$, т. е. уравнение (6.60) записывается в следующей форме:

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x, t) + z(t)x(t), \quad x(0) = x_0.$$

Тогда уравнение (6.63) выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \{f(x, t)P(x, t)\} + \nu \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi) e^{-\xi \frac{\partial}{\partial x}} x - 1 \right\} P(x, t),$$

и его можно представить в виде интегро-дифференциального уравнения типа Колмогорова–Феллера:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, t) &= \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \{f(x, t)P(x, t)\} + \nu \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi) e^{-\xi} P(xe^{-\xi}, t) - \nu P(x, t). \end{aligned}$$

6.3.2. Линейное операторное уравнение. Рассмотрим теперь в качестве примера случай линейных операторных стохастических уравнений

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \hat{A}(t)\mathbf{x}(t) + z(t)\hat{B}(t)\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (6.64)$$

где $\hat{A}(t)$ и $\hat{B}(t)$ — детерминированные операторы, которые могут быть, например, операторами дифференцирования по вспомогательным переменным или обычными матрицами. Функцию $z(t)$ будем считать случайной дельта-коррелированной функцией.

Усредним систему (6.64). Согласно общим формулам,

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x}(t) \rangle = \hat{A}(t) \langle \mathbf{x}(t) \rangle + \left\langle \dot{\Theta}_t \left[t, \frac{\delta}{i\delta z(t)} \right] \mathbf{x}(t) \right\rangle. \quad (6.65)$$

Учитывая теперь равенство

$$\frac{\delta}{\delta z(t-0)} \mathbf{x}(t) = \hat{B}(t)\mathbf{x}(t),$$

которое следует непосредственно из (6.64), уравнение (6.65) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x}(t) \rangle = \hat{A}(t) \langle \mathbf{x}(t) \rangle + \dot{\Theta}_t [t, -i\hat{B}] \langle \mathbf{x}(t) \rangle. \quad (6.66)$$

Таким образом, для линейной системы (6.64) уравнения для средних значений также являются линейными.

Логарифм характеристического функционала $\Theta[t; v(\tau)]$ для дельта-коррелированных процессов можно разложить в функциональный ряд Тейлора:

$$\Theta[t; v(\tau)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_0^t d\tau K_n(\tau) v^n(\tau), \quad (6.67)$$

где $K_n(t)$ определяют кумулянтные функции процесса $z(t)$. Подставляя выражение (6.67) в (6.66), получаем уравнение

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x}(t) \rangle = \hat{A}(t) \langle \mathbf{x}(t) \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} K_n(t) [\hat{B}(t)]^n \langle \mathbf{x}(t) \rangle. \quad (6.68)$$

Если теперь существует такая степень оператора $\hat{B}^l(t)$, что $\hat{B}^l(t) = 0$, то уравнение (6.68) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x}(t) \rangle = \hat{A}(t) \langle \mathbf{x}(t) \rangle + \sum_{n=1}^{l-1} \frac{1}{n!} K_n(t) [\hat{B}(t)]^n \langle \mathbf{x}(t) \rangle. \quad (6.69)$$

В этом случае в уравнение для среднего значения входит только часть кумулянтов процесса $z(t)$. Это означает, что если интересоваться только уравнением для среднего значения, то совсем не обязательно знать распределение вероятностей для функции $z(t)$; достаточно знать только определенные кумулянты процесса $z(t)$ и то обстоятельство, что процесс $z(t)$ можно рассматривать как дельта-коррелированный случайный процесс. Примером такой физической системы является задача статистического описания осциллятора с флуктуирующей частотой.

Задачи

Задача 22. *Получить обратное уравнение для плотности вероятностей $P(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \langle \delta(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) \rangle$ исходя из обратного уравнения Лиувилля (3.4), описывающего эволюцию динамической системы (6.1) в зависимости от начальных условий $t_0, \mathbf{x}_0$.*

Решение.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \right) P(\mathbf{x}, t \mid \mathbf{x}_0, t_0) = \\ = \left\langle \dot{\Phi}_{t_0} \left[t, t_0; \frac{\delta}{i \delta \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)} \right] \delta(\mathbf{x}(t \mid \mathbf{x}_0, t_0) - \mathbf{x}) \right\rangle, \end{aligned}$$

где

$$\dot{\Phi}_{t_0}[t, t_0; \mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau)] = \frac{d}{dt_0} \ln \Phi[t, t_0; \mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau)],$$

а $\Phi[t, t_0; \mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau)]$ — характеристический функционал для случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t_0)$.

Задача 23. *Получить уравнение для плотности вероятностей решения задачи, описывающей одномерную задачу о диффузии пассивной примеси,*

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x) + v(t) \frac{\partial}{\partial x} f(x) \rho(t, x) = 0,$$

где $v(t)$ — гауссов случайный стационарный процесс с параметрами

$$\langle v(t) \rangle = 0, \quad B(t - t') = \langle v(t) v(t') \rangle \quad (B_v(0) = \langle v^2(t) \rangle),$$

а $f(x)$ — детерминированная функция.

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t, x; \rho) &= \int_0^t dt' B(t - t') \left\{ \frac{\partial}{\partial x} f(x) - \frac{df(x)}{dx} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) \right\} \times \\ &\times \left\{ \frac{\partial}{\partial x} f(x) - \frac{df(x)}{dx} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) \right\} P(t, x; \rho), \\ P(0, x; \rho) &= \delta(\rho_0(x) - \rho). \end{aligned}$$

Задача 24. *Получить уравнение для среднего поля, описываемого уравнением Бюргера со случайным сносом:*

$$\frac{\partial}{\partial t} q(t, x) + (q + z(t)) \frac{\partial}{\partial x} q(t, x) = \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} q(t, x),$$

где $z(t)$ — гауссов стационарный во времени процесс с корреляционной функцией $B(t - t') = \langle z(t) z(t') \rangle$.

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle q(t, x) \rangle + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \left[\int_0^t d\tau (t - \tau) B(\tau) \right]^n \left[\frac{\partial^n}{\partial x^n} \langle q(t, x) \rangle \right]^2 = \\ = \left(\nu + \int_0^t d\tau B(\tau) \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle q(t, x) \rangle. \end{aligned}$$

Задача 25. Получить уравнение для плотности вероятностей решения стохастического уравнения (1.14), описывающего стохастический параметрический резонанс, для дельта-коррелированного случайного процесса $z(t)$.

Указание. Переписать уравнение (1.14) в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) = y(t), \quad \frac{d}{dt} y(t) = -\omega_0^2 [1 + z(t)] x(t), \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t; x, y) = \\ = \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + \omega_0^2 x \frac{\partial}{\partial y} \right) P(t; x, y) + \dot{\Theta}_t \left[t; -i\omega_0^2 x \frac{\partial}{\partial y} \right] P(t; x, y), \\ P(0; x, y) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0), \end{aligned} \quad (6.71)$$

где $\dot{\Theta}_t [t; v(\tau)] = \frac{d}{dt} \Theta [t; v(\tau)]$, а $\Theta [t; v(\tau)] = \ln \Phi [t; v(\tau)]$ — логарифм характеристического функционала процесса $z(t)$.

Задача 26. Исходя из системы уравнений (6.70) получить уравнение для среднего значения величины

$$A_k(t) = x^k(t) y^{N-k}(t) \quad (k = 0, \dots, N)$$

для дельта-коррелированного случайного процесса $z(t)$.

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle A_k(t) \rangle = k \langle A_{k-1}(t) \rangle - \omega_0^2 (N - k) \langle A_{k+1}(t) \rangle + \\ + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} K_n [B^n]_{kl} \langle A_l(t) \rangle \quad (k = 0, \dots, N), \end{aligned}$$

где K_n — кумулянты случайного процесса $z(t)$, а матрица $B_{ij} = -\omega_0^2 (N - i) \delta_{i,j-1}$. Для нее $\hat{B}_{ij}^2 = -\omega_0^4 (N - i)(N - j + i) \delta_{i,j-2}$ и т. д., и, следовательно, $\hat{B}^{N+1} \equiv 0$.

Задача 27. Получить уравнение Фоккера–Планка для системы уравнений (6.70) для гауссового стационарного дельта-коррелированного процесса $z(t)$ с параметрами

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad \langle z(t)z(t') \rangle = 2\sigma^2\tau_0\delta(t-t').$$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t; x, y) &= \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + \omega_0^2 x \frac{\partial}{\partial y} \right) P(t; x, y) + D\omega_0^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} P(t; x, y), \\ P(0; x, y) &= \delta(x - x_0) \delta(y - y_0), \end{aligned} \quad (6.72)$$

где $D = \sigma^2\tau_0\omega_0^2$ — коэффициент диффузии в пространстве $\{x, y/\omega_0\}$.

Задача 28. Получить решение для моментов первого и второго порядка, вытекающие из (6.72) при $D/\omega_0 \ll 1$ и $x(0) = 0, \quad y(0) = \omega_0$.

Решение.

$$\langle x(t) \rangle = \sin \omega_0 t, \quad \langle y(t) \rangle = \omega_0 \cos \omega_0 t,$$

что совпадает с решением системы (6.70) в случае отсутствия флуктуаций, а

$$\begin{aligned} \langle x^2(t) \rangle &= \frac{1}{2} \left\{ e^{Dt} - e^{-Dt/2} \left[\cos(2\omega_0 t) + \frac{3D}{4\omega_0} \sin(2\omega_0 t) \right] \right\}, \\ \langle x(t)y(t) \rangle &= \frac{\omega_0}{4} \left\{ 2e^{-Dt/2} \sin(2\omega_0 t) + \frac{D}{\omega_0} [e^{Dt} - e^{-Dt/2} \cos(2\omega_0 t)] \right\}, \\ \langle y^2(t) \rangle &= \frac{\omega_0^2}{2} \left\{ e^{Dt} + e^{-Dt/2} \left[\cos(2\omega_0 t) - \frac{D}{4\omega_0} \sin(2\omega_0 t) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.73)$$

Замечание. Решение (6.73) содержит растущие со временем члены, что соответствует статистической параметрической раскачке динамической системы (6.70) за счет флуктуации частоты. Решение статистической задачи (6.70) имеет два характерных масштаба изменения времени $t_1 \sim 1/\omega_0$ и $t_2 \sim 1/D$. Первый временной масштаб соответствует периоду колебаний системы (6.70) в случае отсутствия флуктуаций («быстрые процессы»), а второй связан с появлением медленных изменений статистических характеристик, обусловленных наличием флуктуаций («медленные процессы»). Для получения медленных изменений статистических характеристик процессов $x(t)$ и $y(t)$ можно исключить быстрые движения, усредняя соответствующие величины по времени, связанному с периодом быстрых движений ($T = 2\pi/\omega_0$). Обозначая такое усреднение горизонтальной чертой, имеем, например,

$$\overline{\langle x^2(t) \rangle} = \frac{1}{2} \exp\{Dt\}, \quad \overline{\langle x(t)y(t) \rangle} = 0, \quad \overline{\langle y^2(t) \rangle} = \frac{\omega_0^2}{2} \exp\{Dt\}.$$

Задача 29. Исходя из (6.72) получить уравнение третьего порядка для величины $\langle U(t) \rangle = \langle x^2(t) \rangle$, описывающей среднюю потенциальную энергию осциллятора.

Решение.

$$\frac{d^3}{dt^3} \langle U(t) \rangle + 4\omega_0^2 \frac{d}{dt} \langle U(t) \rangle - 4D\omega_0^2 \langle U(t) \rangle = 0. \quad (6.74)$$

Задача 30. Получить уравнение Фоккера–Планка для стохастического осциллятора с линейным трением, т. е. для стохастической системы вида

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= y(t), \quad \frac{d}{dt} y(t) = -2\gamma y(t) - \omega_0^2[1 + z(t)]x(t), \\ x(0) &= x_0, \quad y(0) = y_0, \end{aligned} \quad (6.75)$$

и условие стохастического возбуждения для вторых моментов.

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t; x, y) &= \left(2\gamma \frac{\partial}{\partial y} y - y \frac{\partial}{\partial x} + \omega_0^2 x \frac{\partial}{\partial y} \right) P(t; x, y) + \\ &+ D\omega_0^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} P(t; x, y), \quad P(0; x, y) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0), \end{aligned}$$

где $D = \sigma^2 \tau_0 \omega_0^2$ — коэффициент диффузии. Если искать решение системы уравнений для вторых моментов в виде, пропорциональном $\exp\{\lambda t\}$, то характеристическое уравнение для λ имеет вид

$$\lambda^3 + 6\gamma\lambda^2 + 4(\omega_0^2 + 2\gamma^2)\lambda + 4\omega_0^2(2\gamma - D) = 0$$

и при условии

$$2\gamma < D \quad (6.76)$$

вторые моменты экспоненциально растут во времени, т. е. имеет место статистическое параметрическое возбуждение вторых моментов.

Задача 31. Получить стационарные значения вторых моментов для стохастического параметрического осциллятора с трением, устанавливающиеся под действием случайных сил:

$$\frac{d}{dt} x(t) = y(t), \quad x(0) = x_0, \quad (6.77)$$

$$\frac{d}{dt} y(t) = -2\gamma y(t) - \omega_0^2[1 + z(t)]x(t) + f(t), \quad y(0) = y_0.$$

Здесь $f(t)$ — гауссов, статистически независимый от процесса $z(t)$, дельта-коррелированный процесс с параметрами

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad \langle f(t)f(t') \rangle = 2\sigma_f^2 \tau_f \delta(t - t'),$$

где σ_f^2 — дисперсия, а τ_f — его временной радиус корреляции.

Решение. Для стохастической системы уравнений (6.77) одновременная плотность вероятностей описывается уравнением Фоккера–Планка

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t; x, y) = & \left(2\gamma \frac{\partial}{\partial y} y - y \frac{\partial}{\partial x} + \omega_0^2 x \frac{\partial}{\partial y} \right) P(t; x, y) + \\ & + D \omega_0^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} P(t; x, y) + \sigma_f^2 \tau_f \frac{\partial^2}{\partial y^2} P(t; x, y), \end{aligned}$$

$$P(0; x, y) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0),$$

и, следовательно, стационарное решение для вторых моментов при $t \rightarrow \infty$ существует при выполнении неравенства (6.76)

$$\langle x(t) \rangle = 0, \quad \langle y(t) \rangle = 0,$$

$$\langle x(t)y(t) \rangle = 0, \quad \langle x^2(t) \rangle = \frac{\sigma_f^2 \tau_f}{\omega_0^2 (D - 2\gamma)}, \quad \langle y^2(t) \rangle = \frac{\sigma_f^2 \tau_f}{D - 2\gamma}.$$

Задача 32. Из уравнения (6.71) получить уравнение Колмогорова–Феллера для пуассоновского дельта-коррелированного случайного процесса $z(t)$.

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t; x, y) = & \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + \omega_0^2 x \frac{\partial}{\partial y} \right) P(t; x, y) + \\ & + \nu \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi) P(t; x, y + \xi \omega_0^2 x) - \nu P(t; x, y). \quad (6.78) \end{aligned}$$

Замечание. Для достаточно малых значений параметра ξ уравнение (6.78) переходит в уравнение Фоккера–Планка (6.72) с коэффициентом диффузии

$$D = \frac{1}{2} \nu \langle \xi^2 \rangle \omega_0^2 x.$$

Задача 33. Получить уравнение для характеристического функционала решения линейного параболического уравнения (1.49).

Решение. Характеристический функционал решения задачи

$$\Phi[x; v, v^*] = \langle \varphi[x; v, v^*] \rangle,$$

где

$$\varphi[x; v, v^*] = \exp \left\{ i \int d\mathbf{R}' [u(x, \mathbf{R}') v(\mathbf{R}') + u^*(x, \mathbf{R}') v^*(\mathbf{R}')] \right\},$$

описывается уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Phi[x; v, v^*] = & \left\langle \dot{\Theta}_x \left[x; \frac{\delta}{i\delta\varepsilon(\xi, \mathbf{R}')} \right] \varphi[x; v, v^*] \right\rangle + \\ & + \frac{i}{2k} \left\{ \int d\mathbf{R}' \left[v(\mathbf{R}') \Delta_{\mathbf{R}'} \frac{\delta}{\delta v(\mathbf{R}')} - v^*(\mathbf{R}') \Delta_{\mathbf{R}'} \frac{\delta}{\delta v^*(\mathbf{R}')} \right] \right\} \Phi[x; v, v^*], \end{aligned} \quad (6.79)$$

где

$$\dot{\Theta}_x [x; \psi(\xi, \mathbf{R}')] = \frac{d}{dx} \ln \left\langle \exp \left\{ i \int_0^x d\xi \int d\mathbf{R}' \varepsilon(\xi, \mathbf{R}') \psi(\xi, \mathbf{R}') \right\} \right\rangle$$

— производная от логарифма характеристического функционала случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$.

Задача 34. *Получить уравнение для характеристического функционала решения линейного параболического уравнения (1.49) для однородного дельта-коррелированного по x случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$.*

Решение. Характеристический функционал решения задачи $\Phi[x; v, v^*]$ описывается уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Phi[x; v, v^*] = & \dot{\Theta}_x \left[x, \frac{k}{2} \widehat{M}(\mathbf{R}') \right] \Phi[x; v, v^*] + \\ & + \frac{i}{2k} \left\{ \int d\mathbf{R}' \left[v(\mathbf{R}') \Delta_{\mathbf{R}'} \frac{\delta}{\delta v(\mathbf{R}')} - v^*(\mathbf{R}') \Delta_{\mathbf{R}'} \frac{\delta}{\delta v^*(\mathbf{R}')} \right] \right\} \Phi[x; v, v^*] \end{aligned} \quad (6.80)$$

с эрмитовым оператором

$$\widehat{M}(\mathbf{R}') = v(\mathbf{R}') \frac{\delta}{\delta v(\mathbf{R}')} - v^*(\mathbf{R}') \frac{\delta}{\delta v^*(\mathbf{R}')},$$

а функционал

$$\dot{\Theta}_x [x; \psi(\xi, \mathbf{R}')] = \frac{d}{dx} \ln \left\langle \exp \left\{ i \int_0^x d\xi \int d\mathbf{R}' \varepsilon(\xi, \mathbf{R}') \psi(\xi, \mathbf{R}') \right\} \right\rangle$$

— производная от логарифма характеристического функционала поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$.

Замечание. Из уравнения (6.80) следуют уравнения для моментных функций поля $u(x, \mathbf{R})$:

$$\begin{aligned} M_{m,n}(x; \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_n) = \\ = \langle u(x, \mathbf{R}_1) \dots u(x, \mathbf{R}_m) u^*(x, \mathbf{R}'_1) \dots u^*(x, \mathbf{R}'_n) \rangle, \end{aligned}$$

которые для $m = n$ обычно называются *функциями когерентности* порядка $2n$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} M_{m,n} = & \frac{i}{2k} \left(\sum_{p=1}^m \Delta_{\mathbf{R}_p} - \sum_{q=1}^n \Delta_{\mathbf{R}'_q} \right) M_{m,n} + \\ & + \dot{\Theta}_x \left[x, \frac{1}{k} \left(\sum_{p=1}^m \delta(\mathbf{R}' - \mathbf{R}_p) - \sum_{q=1}^n \delta(\mathbf{R}' - \mathbf{R}'_q) \right) \right] M_{m,n}. \end{aligned} \quad (6.81)$$

Задача 35. Получить уравнение для характеристического функционала волнового поля $u(x, \mathbf{R})$ и моментных функций решения линейного параболического уравнения (1.49) для однородного гауссового дельта-коррелированного по x случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ [37] с корреляционной функцией

$$B_\varepsilon(x, \mathbf{R}) = A(\mathbf{R})\delta(x), \quad A(\mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx B_\varepsilon(x, \mathbf{R}).$$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Phi[x; v, v^*] = & -\frac{k^2}{8} \int d\mathbf{R}' \int d\mathbf{R} A(\mathbf{R}' - \mathbf{R}) \widehat{M}(\mathbf{R}') \widehat{M}(\mathbf{R}) \Phi[x; v, v^*] + \\ & + \frac{i}{2k} \left\{ \int d\mathbf{R}' \left[v(\mathbf{R}') \Delta_{\mathbf{R}'} \frac{\delta}{\delta v(\mathbf{R}')} - v^*(\mathbf{R}') \Delta_{\mathbf{R}'} \frac{\delta}{\delta v^*(\mathbf{R}')} \right] \right\} \Phi[x; v, v^*], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} M_{m,n} = & \frac{i}{2k} \left(\sum_{p=1}^m \Delta_{\mathbf{R}_p} - \sum_{q=1}^n \Delta_{\mathbf{R}'_q} \right) M_{m,n} - \\ & - \frac{k^2}{8} Q(\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_m) M_{m,n}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_m) = \\ = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j) - 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}'_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A(\mathbf{R}'_i - \mathbf{R}'_j). \end{aligned}$$

Задача 36. Получить уравнение для одновременного характеристического функционала решения стохастического нелинейного интегро-дифференциального уравнения (1.57).

Решение. Для характеристического функционала поля скорости

$$\Phi[t; \mathbf{z}(\mathbf{k}')] = \Phi[t; \mathbf{z}] = \langle \varphi[t; \mathbf{z}(\mathbf{k}')] \rangle,$$

где

$$\varphi[t; \mathbf{z}(\mathbf{k}')] = \exp \left\{ i \int d\mathbf{k}' \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}', t) \mathbf{z}(\mathbf{k}') \right\},$$

имеем незамкнутое уравнение с вариационными производными

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi[t; \mathbf{z}] = & \int d\mathbf{k} z_i(\mathbf{k}) \left\{ -\frac{1}{2} \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \Lambda_{i, \alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \frac{\delta^2}{\delta z_\alpha(\mathbf{k}_1) \delta z_\beta(\mathbf{k}_2)} - \right. \\ & \left. - \nu k^2 \frac{\delta}{\delta z_i(\mathbf{k})} \Phi[t; \mathbf{z}] \right\} + \left\langle \dot{\Theta}_t \left[t; \frac{\delta}{i \delta \mathbf{f}(\kappa, \tau)} \right] \varphi[t; \mathbf{z}] \right\rangle, \end{aligned}$$

где

$$\dot{\Theta}_t[t; \psi(\kappa, \tau)] = \frac{d}{dt} \ln \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau \int d\kappa \mathbf{f}(\kappa, \tau) \psi(\kappa, \tau) \right\} \right\rangle$$

— производная от логарифма характеристического функционала случайного поля внешних сил $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t)$.

Задача 37. *Получить уравнение для одновременного характеристического функционала решения стохастического нелинейного интегро-дифференциального уравнения (1.57) в предположении однородности, стационарности и дельта-коррелированности случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ по времени. Рассмотреть случай гауссового поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ [3].*

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi[t; \mathbf{z}] = & \int d\mathbf{k} z_i(\mathbf{k}) \left\{ -\frac{1}{2} \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \Lambda_{i, \alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \frac{\delta^2}{\delta z_\alpha(\mathbf{k}_1) \delta z_\beta(\mathbf{k}_2)} - \right. \\ & \left. - \nu k^2 \frac{\delta}{\delta z_i(\mathbf{k})} \right\} \Phi[t; \mathbf{z}] + \dot{\Theta}_t[t; \mathbf{z}(\mathbf{k})] \Phi[t; \mathbf{z}], \quad (6.82) \end{aligned}$$

где

$$\dot{\Theta}_t[t; \psi(\kappa, \tau)] = \frac{d}{dt} \ln \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau \int d\kappa \hat{\mathbf{f}}(\kappa, \tau) \psi(\kappa, \tau) \right\} \right\rangle$$

— производная от логарифма характеристического функционала случайного поля внешних сил $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t)$.

Если теперь считать случайное поле $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ гауссовым, однородным, изотропным и стационарным во времени случайным полем с корреляционным тензором $B_{ij}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, t_1 - t_2) = \langle f_i(\mathbf{x}_1, t_1) f_j(\mathbf{x}_2, t_2) \rangle$, то поле $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t)$ — также гауссово стационарное случайное поле с корреляционным тензором

$$\left\langle \hat{f}_i(\mathbf{k}, t + \tau) \hat{f}_j(\mathbf{k}', t) \right\rangle = \frac{1}{2} F_{ij}(\mathbf{k}, \tau) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'),$$

где $F_{ij}(\mathbf{k}, \tau) = 2(2\pi)^3 \int d\mathbf{x} B_{ij}(\mathbf{x}, \tau) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}$. При этом, в силу пространственной изотропности,

$$F_{ij}(\mathbf{k}, \tau) = F(k, \tau) \Delta_{ij}(\mathbf{k}).$$

Для дельта-коррелированного во времени случайного поля $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t)$ функция $F(k, \tau) = F(k) \delta(\tau)$, и, следовательно, функционал

$$\Theta[t; \psi(\kappa, \tau)] = -\frac{1}{4} \int_0^t d\tau \int d\kappa F(\kappa) \Delta_{ij}(\kappa) \psi_i(\kappa, \tau) \psi_j(-\kappa, \tau),$$

а уравнение (6.82), принимает вид замкнутого уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi[t; \mathbf{z}] = & \int d\mathbf{k} z_i(\mathbf{k}) \left\{ -\frac{1}{2} \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \Lambda_{i, \alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \frac{\delta^2}{\delta z_\alpha(\mathbf{k}_1) \delta z_\beta(\mathbf{k}_2)} - \right. \\ & \left. - \nu k^2 \frac{\delta}{\delta z_i(\mathbf{k})} \right\} \Phi[t; \mathbf{z}] - \frac{1}{4} \int d\mathbf{k} F(k) \Delta_{ij}(\mathbf{k}) z_i(\mathbf{k}) z_j(-\mathbf{k}) \Phi[t; \mathbf{z}]. \end{aligned}$$

Задача 38. Усреднить линейное стохастическое интегральное уравнение

$$\begin{aligned} S(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = & S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \\ & + \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \int d\mathbf{r}_3 S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) [\eta(\mathbf{r}_2) + f(\mathbf{r}_2)] S(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}'). \end{aligned}$$

Решение.

$$\begin{aligned} G[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \eta(\mathbf{r})] = & S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \\ & + \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \int d\mathbf{r}_3 S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \eta(\mathbf{r}_2) G[\mathbf{r}_3, \mathbf{r}'; \eta(\mathbf{r})] + \\ & + \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \int d\mathbf{r}_3 S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \Omega_{\mathbf{r}_2} \left[\frac{\delta}{i\delta\eta(\mathbf{r})} \right] G[\mathbf{r}_3, \mathbf{r}'; \eta(\mathbf{r})]. \end{aligned}$$

Здесь через функционал $G[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \eta(\mathbf{r})]$ обозначена величина

$$G[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \eta(\mathbf{r})] = \langle S[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; f(\mathbf{r}) + \eta(\mathbf{r})] \rangle,$$

а функционал

$$\Omega_{\mathbf{r}}[v(\mathbf{r})] = \frac{\delta}{i\delta v(\mathbf{r})} \Theta[v(\mathbf{r})], \quad \Theta[v(\mathbf{r})] = \ln \left\langle \exp \left\{ i \int d\mathbf{r} f(\mathbf{r}) v(\mathbf{r}) \right\} \right\rangle.$$

Задача 39. Получить уравнение для характеристического функционала пространственно-временной гармоник турбулентного поля скоростей (1.59) в предположении гауссовости, однородности в пространстве и стационарности во времени поля случайных внешних сил $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ [38].

Решение. Для характеристического функционала поля скоростей

$$\Phi[\mathbf{z}] = \left\langle \exp \left\{ i \int d^4 \mathbf{K}' \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{K}') \mathbf{z}(\mathbf{K}') \right\} \right\rangle$$

и функционала

$$G_{ij}[\mathbf{K}, \mathbf{K}'; \mathbf{z}] = \left\langle \frac{\delta u_i(\mathbf{K})}{\delta \hat{f}_j(\mathbf{K}')} \varphi[\mathbf{z}] \right\rangle$$

имеем замкнутую систему функциональных уравнений

$$(i\omega + \nu \mathbf{k}^2) \frac{\delta}{\delta z_i(\mathbf{K})} \Phi[\mathbf{z}] = -\frac{1}{2} F_{ij}(\mathbf{K}) \int d^4 \mathbf{K}_1 z_\alpha(\mathbf{K}_1) G_{\alpha j}[\mathbf{K}_1, -\mathbf{K}; \mathbf{z}] - \\ - \frac{1}{2} \int d^4 \mathbf{K}_1 \int d^4 \mathbf{K}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}) \frac{\delta^2 \Phi[\mathbf{z}]}{\delta z_\alpha(\mathbf{K}_1) \delta z_\beta(\mathbf{K}_2)},$$

$$(i\omega + \nu \mathbf{k}^2) G_{ij}[\mathbf{K}, \mathbf{K}'; \mathbf{z}] + \\ + \int d^4 \mathbf{K}_1 \int d^4 \mathbf{K}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}) \frac{\delta}{\delta z_\alpha(\mathbf{K}_1)} G_{\beta j}[\mathbf{K}_2, \mathbf{K}'; \mathbf{z}] = \\ = \delta_{ij} \delta^4(\mathbf{K} - \mathbf{K}') \Phi[\mathbf{z}],$$

где $\langle \hat{f}_i(\mathbf{K}_1) \hat{f}_j(\mathbf{K}_2) \rangle = \frac{1}{2} \delta^4(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) F_{ij}(\mathbf{K}_1)$, а $F_{ij}(\mathbf{K})$ — пространственно-временной спектр внешних сил.

Замечание. Разложение по $\mathbf{z}(\mathbf{K})$ в функциональные ряды Тейлора функционалов $\Phi[\mathbf{z}]$ и $G_{ij}[\mathbf{K}, \mathbf{K}'; \mathbf{z}]$ определяют соответственно кумулянты поля скорости и корреляции аналога функции Грина $S_{ij}(\mathbf{K}, \mathbf{K}') = \delta u_i(\mathbf{K}) / \delta f_j(\mathbf{K}')$ с полем скорости.

Глава 7

СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С МАРКОВСКИМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ ПАРАМЕТРОВ

Выше мы рассмотрели общие методы статистического описания динамических систем, основанные на знании характеристического функционала флуктуирующих параметров. Однако в большинстве случаев мы можем и не знать его, и тогда приходится прибегать как к различным моделям флуктуирующих параметров, так и к различным асимптотическим приближениям.

Широко распространен метод, основанный на аппроксимации флуктуирующих параметров марковскими случайными процессами и полями с конечным временным радиусом корреляции. Они могут быть получены, например, как решения динамических уравнений с дельта-коррелированными флуктуациями параметров (см. предыдущую главу). Рассмотрим такие методы описания более подробно на примере марковских случайных процессов.

Рассмотрим стохастические уравнения вида

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}(t)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (7.1)$$

где $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}(t))$ — детерминированная функция своих аргументов, а $\mathbf{z}(t) = \{z_1(t), \dots, z_n(t)\}$ — векторный марковский процесс.

Наша задача заключается в нахождении статистических характеристик решения уравнения (7.1), если мы знаем статистические характеристики процесса $\mathbf{z}(t)$.

В общем случае произвольного марковского процесса $\mathbf{z}(t)$ сказать что-либо о самом процессе $\mathbf{x}(t)$ не представляется возможным. Можно лишь утверждать, что совокупность двух процессов $\{\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t)\}$ является марковской. Если бы нам удалось найти совместную плотность вероятностей для $\{\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t)\}$, то, интегрируя её по $\mathbf{z}$, мы бы получили плотность вероятностей решения уравнения (7.1), т. е. функцию $P(\mathbf{x}, t)$. В этом случае процесс $\mathbf{x}(t)$ уже не будет марковским.

Существует, однако, несколько типов процессов $\mathbf{z}(t)$, для которых удастся перейти непосредственно к уравнению для $P(\mathbf{x}, t)$. Это прежде всего процессы телеграфного типа (телеграфный и обобщенный телеграфный процессы), марковские процессы с конечным числом состояний и гауссовый марковский процесс. В качестве примеров мы рассмот-

рим применение телеграфного и гауссового марковского процессов, как наиболее часто используемых, в различных приложениях.

7.1. Телеграфный случайный процесс

Напомним, что телеграфный случайный процесс $z(t)$ (процесс с двумя состояниями) определяется с помощью равенства

$$z(t) = a(-1)^{n(0,t)},$$

где случайная величина a с вероятностями $1/2$ принимает значения $a = \pm a_0$.

Телеграфный процесс $z(t)$ стационарен во времени и его корреляционная функция

$$\langle z(t)z(t') \rangle = a_0^2 \exp \{-2\nu|t - t'|\}$$

имеет временной корреляционный радиус $\tau_0 = 1/(2\nu)$.

В гл.3 для расщепления корреляции телеграфного процесса $z(t)$ с произвольным функционалом от него $R[t; z(\tau)]$, где $\tau \leq t$, было получено соотношение (5.24)

$$\langle z(t)R[t; z(\tau)] \rangle = a_0^2 \int_0^t dt_1 e^{-2\nu(t-t_1)} \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t_1)} \tilde{R}[t; z(\tau)] \right\rangle, \quad (7.2)$$

где функционал $\tilde{R}[t; z(\tau)]$ определяется формулой

$$\tilde{R}[t, t_1; z(\tau)] = R[t; z(\tau)\theta(t_1 - \tau + 0)] \quad (t_1 < t). \quad (7.3)$$

Формулу (7.2) можно использовать для анализа стохастических уравнений, в которые процесс $z(t)$ входит линейным образом. Пусть функционал $R[t; z(\tau)]$ — решение некой системы дифференциальных уравнений первого порядка по времени с начальными условиями при $t = 0$. Тогда функционал $\tilde{R}[t, t_1; z(\tau)]$ будет описываться той же системой уравнений, где вместо процесса $z(t)$ будет стоять величина $z(t)\theta(t_1 - t)$. Следовательно, для времени $t > t_1$ функционал $\tilde{R}[t, t_1; z(\tau)] = R[t, 0]$ и описывается этой же системой уравнений при отсутствии флуктуаций, т.е. при $z(t) = 0$, с начальным условием $\tilde{R}[t_1, t_1; z(\tau)] = R[t_1; z(\tau)]$.

Для стохастических уравнений, содержащих случайный телеграфный процесс $z(t)$ линейным образом, удобно использовать также формулу дифференцирования для корреляции его с произвольным функционалом (5.25) ($\tau \leq t$):

$$\frac{d}{dt} \langle z(t)R[t; z(\tau)] \rangle = -2\nu \langle z(t)R[t; z(\tau)] \rangle + \left\langle z(t) \frac{d}{dt} R[t; z(\tau)] \right\rangle. \quad (7.4)$$

Формула (7.4) также определяет правило вынесения операции дифференцирования из под знака усреднения:

$$\left\langle z(t) \frac{d^n}{dt^n} R[t; z(\tau)] \right\rangle = \left(\frac{d}{dt} + 2\nu \right)^n \langle z(t) R[t; z(\tau)] \rangle. \quad (7.5)$$

Продemonстрируем на конкретном примере, как эти соотношения можно практически использовать. При этом оба указанных метода приводят, естественно, к одному и тому же результату. Однако метод, основанный на формуле дифференцирования, оказывается практически более удобным.

Рассмотрим систему линейных операторных уравнений

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \hat{A}(t) \mathbf{x}(t) + z(t) \hat{B}(t) \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (7.6)$$

где $\hat{A}(t)$ и $\hat{B}(t)$ — некие детерминированные операторы, которые могут быть и операторами дифференцирования по вспомогательным переменным. Если операторы $\hat{A}(t)$ и $\hat{B}(t)$ — просто матрицы, то (7.6) описывают простейший случай линейных динамических систем.

Усредним уравнение (7.6) по ансамблю случайных функций $z(t)$. В результате получим уравнение

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x}(t) \rangle = \hat{A}(t) \langle \mathbf{x}(t) \rangle + \hat{B}(t) \psi(t), \quad \langle \mathbf{x}(0) \rangle = \mathbf{x}_0, \quad (7.7)$$

где введены новые функции $\psi(t) = \langle z(t) \mathbf{x}(t) \rangle$. Для этих функций, в силу формулы (7.4), получаем равенство

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = -2\nu \psi(t) + \left\langle z(t) \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) \right\rangle. \quad (7.8)$$

Подставляя теперь $d\mathbf{x}/dt$ из (7.6) в (7.8) получаем уравнение для функций $\psi(t)$:

$$\left(\frac{d}{dt} + 2\nu \right) \psi(t) = \hat{A}(t) \psi(t) + \hat{B} \langle z^2(t) \mathbf{x}(t) \rangle. \quad (7.9)$$

Далее учтем, что для телеграфного процесса $z^2(t) \equiv a_0^2$, и, следовательно, окончательно приходим к замкнутой системе линейных уравнений для векторов $\langle \mathbf{x}(t) \rangle$ и $\psi(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{x}(t) \rangle &= \hat{A}(t) \langle \mathbf{x}(t) \rangle + \hat{B}(t) \psi(t), \quad \langle \mathbf{x}(0) \rangle = \mathbf{x}_0, \\ \left(\frac{d}{dt} + 2\nu \right) \psi(t) &= \hat{A}(t) \psi(t) + a_0^2 \hat{B}(t) \langle \mathbf{x}(t) \rangle, \quad \psi(0) = 0. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Если операторы $\hat{A}(t)$ и $\hat{B}(t)$ — матрицы A и B , не зависящие от времени, то система (7.10) может быть решена с помощью преобразования Лапласа и преобразованная по Лапласу система (7.10) является

алгебраической системой уравнений:

$$\begin{aligned} (pE - A) \langle \mathbf{x}(p) \rangle - B\psi(p) &= \mathbf{x}_0, \\ [(p + 2\nu)E - A]\psi(p) - a_0^2 B \langle \mathbf{x}(p) \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (7.11)$$

где E — единичная матрица. Отсюда получаем решение $\langle \mathbf{x}(p) \rangle$ в виде

$$\langle \mathbf{x}(p) \rangle = \left[(pE - A) - a_0^2 B \frac{1}{(p + 2\nu)E - A} B \right]^{-1} \mathbf{x}_0. \quad (7.12)$$

Отметим, что если интересоваться только одной компонентой уравнения (7.6), то для нее можно получить операторное уравнение

$$\hat{L} \left(\frac{d}{dt} \right) x(t) + \sum_{i+j=0}^{n-1} b_{ij}(t) \frac{d^i}{dt^i} z(t) \frac{d^j}{dt^j} x(t) = f(t), \quad (7.13)$$

где оператор $\hat{L} \left(\frac{d}{dt} \right) = \sum_{i=0}^n a_i(t) \frac{d^i}{dt^i}$, n — порядок матриц A и B в (7.6). Начальные условия для величины $\mathbf{x}$ включены с помощью соответствующих производных дельта-функции в функцию $f(t)$. Отметим, что при этом функция $f(t)$ может зависеть и от значений производных случайного процесса $z(t)$ при $t = 0$, т. е. $f(t)$ — тоже случайная функция, статистически связанная с процессом $z(t)$.

Усредняя уравнение (7.13) по ансамблю реализаций процесса $z(t)$ с использованием формулы (7.5), получаем уравнение

$$\hat{L} \left(\frac{d}{dt} \right) \langle x(t) \rangle + M \left[\frac{d}{dt}, \frac{d}{dt} + 2\nu \right] \langle z(t)x(t) \rangle = \langle f(t) \rangle, \quad (7.14)$$

где введено обозначение $M[p, q] = \sum_{i+j=0}^{n-1} b_{ij}(t) p^i q^j$.

Уравнение (7.14), однако, не замкнуто из-за наличия в нем функции $\langle z(t)x(t) \rangle$. Далее умножим уравнение (7.13) на $z(t)$ и опять усредним. В результате для функции $\langle z(t)x(t) \rangle$ получаем уравнение

$$\hat{L} \left(\frac{d}{dt} + 2\nu \right) \langle z(t)x(t) \rangle + a_0^2 M \left[\frac{d}{dt} + 2\nu, \frac{d}{dt} \right] \langle x(t) \rangle = \langle z(t)f(t) \rangle. \quad (7.15)$$

Система уравнений (7.14), (7.15) — уже замкнутая система уравнений и, для не зависящих от времени функций $a_i(t)$, $b_{ij}(t)$, может быть решена с помощью преобразования Лапласа. В результате получаем выражение [39]

$$\langle x(p) \rangle = \frac{\hat{L}(p + 2\nu) \langle f(p) \rangle - M[p, p + 2\nu] \langle z(t)f(t) \rangle_p}{\hat{L}(p) \hat{L}(p + 2\nu) - a_0^2 M[p + 2\nu, p] M[p, p + 2\nu]}. \quad (7.16)$$

7.2. Гауссов марковский процесс

Рассмотрим теперь пример, связанных с гауссовым марковским процессом.

Определим случайный процесс $z(t)$ по формуле

$$z(t) = z_1(t) + \dots + z_N(t), \quad (7.17)$$

где $z_i(t)$ — статистически независимые телеграфные процессы с корреляционными функциями

$$\langle z_i(t) z_j(t') \rangle = \delta_{ij} \langle z^2 \rangle \exp \{-\alpha |t - t'| \} \quad (\alpha = 2\nu).$$

Если теперь положить $\langle z^2 \rangle = \sigma^2/N$, то при $N \rightarrow \infty$ этот процесс переходит в гауссов марковский процесс с корреляционной функцией

$$\langle z(t) z(t') \rangle = \sigma^2 \exp \{-\alpha |t - t'| \}.$$

Таким образом, процесс $z(t)$ (7.17) является аппроксимацией гауссового марковского процесса марковским процессом с конечным числом состояний.

Для процесса $z(t)$ формула дифференцирования и правило вынесения производной из под знака усреднения, очевидно, принимают вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} + \alpha k \right) \langle z_1(t) \dots z_k(t) R[t; z(\tau)] \rangle &= \left\langle z_1(t) \dots z_k(t) \frac{\partial}{\partial t} R[t; z(\tau)] \right\rangle, \\ \left\langle z_1(t) \dots z_k(t) \frac{\partial^n}{\partial t^n} R[t; z(\tau)] \right\rangle &= \left(\frac{d}{dt} + \alpha k \right)^n \langle z_1(t) \dots z_k(t) R[t; z(\tau)] \rangle, \end{aligned} \quad (7.18)$$

где через $R[t; z(\tau)]$ обозначен произвольный функционал процесса $z(t)$ ($\tau \leq t$).

В качестве конкретного примера рассмотрим опять уравнение (7.6), которое перепишем в виде

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \hat{A}(t) \mathbf{x}(t) + [z_1(t) + \dots + z_N(t)] \hat{B}(t) \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (7.19)$$

Введем вектор-функцию

$$\mathbf{x}_k(t) = \langle z_1(t) \dots z_k(t) \mathbf{x}(t) \rangle, \quad k = 1, \dots, N; \quad \mathbf{x}_0(t) = \langle \mathbf{x}(t) \rangle. \quad (7.20)$$

Используя формулу (7.18) для дифференцирования корреляций (7.20) и само уравнение (7.19), получаем рекуррентное уравнение для $\mathbf{x}_k(t)$ вида ($k = 0, 1, \dots, N$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{x}_k(t) &= \hat{A}(t) \mathbf{x}_k(t) + \left\langle z_1(t) \dots z_k(t) [z_1(t) + \dots + z_N(t)] \hat{B}(t) \mathbf{x}(t) \right\rangle = \\ &= \hat{A}(t) \mathbf{x}_k(t) + k \langle z^2 \rangle \hat{B}(t) \mathbf{x}_{k-1}(t) + (N - k) \hat{B}(t) \mathbf{x}_{k+1}(t) \end{aligned} \quad (7.21)$$

с начальным условием $\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_0 \delta_{k,0}$.

Таким образом, среднее значение решения системы (7.19) удовлетворяет замкнутой системе $(N + 1)$ векторного уравнения. Если операторы $\hat{A}(t)$, $\hat{B}(t)$ — матрицы, не зависящие от времени, то система уравнений (7.21) может быть легко решена с помощью преобразования Лапласа. Очевидно, что ее решение имеет вид конечного отрезка цепной дроби. Если теперь принять значение $\langle z^2 \rangle = \sigma^2/N$ и перейти к пределу $N \rightarrow \infty$, то, как говорилось выше, случайный процесс $z(t) = z_1(t) + \dots + z_N(t)$ перейдет в гауссов марковский процесс, а решение системы уравнений (7.21) запишется в виде бесконечной цепной дроби.

Задачи

Задача 40. *Получить среднее значение потенциальной энергии стохастического осциллятора, описываемой стохастическим уравнением*

$$\frac{d^3}{dt^3} U(t) + 4\omega_0^2 \frac{d}{dt} U(t) + 2\omega_0^2 \left(z(t) \frac{d}{dt} U(t) + \frac{d}{dt} z(t) U(t) \right) = 0,$$

$$x(0) = 0, \quad \left. \frac{d}{dt} U(t) \right|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2}{dt^2} U(t) \right|_{t=0} = 2y_0^2,$$

для телеграфного случайного процесса $z(t)$.

Решение.

$$\frac{d^3}{dt^3} \langle U(t) \rangle + 4\omega_0^2 \frac{d}{dt} \langle U(t) \rangle + 4\omega_0^2 \left(\frac{d}{dt} + 2\nu \right) \langle z(t) U(t) \rangle = 0,$$

$$\left(\frac{d}{dt} + 2\nu \right)^3 \langle z(t) U(t) \rangle + 4\omega_0^2 \left(\frac{d}{dt} + 2\nu \right) \langle z(t) U(t) \rangle +$$

$$+ 4\omega_0^2 a_0^2 \left(\frac{d}{dt} + 2\nu \right) \langle U(t) \rangle = 0. \quad (7.22)$$

Эту систему уравнений можно решить с помощью преобразования Лапласа и, следовательно, получаем решение в виде

$$\langle U \rangle_p = 2y_0^2 \frac{L(p + 2\nu)}{L(p)L(p + 2\nu) - a_0^2 M^2(p)}, \quad (7.23)$$

$$L(p) = p(p^2 + 4\omega_0^2), \quad M(p) = 4\omega_0^2(p^2 + \nu).$$

Замечание. В предельном случае больших значений ν и a_0^2 , но конечности отношения $a_0^2/2\nu = \sigma^2\tau_0$, получаем из второго уравнения в (7.22):

$$\langle z(t) U(t) \rangle = -\frac{\omega_0^2 \sigma^2 \tau_0}{\nu} \langle U(t) \rangle,$$

и в этом пределе величина $\langle U(t) \rangle$ описывается замкнутым уравнением

$$\frac{d^3}{dt^3} \langle U(t) \rangle + 4\omega_0^2 \frac{d}{dt} \langle U(t) \rangle - 4\omega_0^4 \sigma^2 \tau_0 \langle U(t) \rangle = 0,$$

которое совпадает с уравнением (6.74), соответствующим гауссовому дельта-коррелированному процессу $z(t)$.

Задача 41. *Получить стационарное распределение вероятностей для стохастического уравнения в случае телеграфного случайного процесса $z(t)$:*

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x) + z(t)g(x), \quad x(0) = x_0.$$

Решение. Если $|f(x)| < a_0|g(x)|$, то

$$P(x) = \frac{C|g(x)|}{a_0^2 g^2(x) - f^2(x)} \exp \left\{ \frac{2\nu}{a_0^2} \int dx \frac{f(x)}{a_0^2 g^2(x) - f^2(x)} \right\},$$

где положительная постоянная C определяется из условия нормировки.

Замечание. При предельном переходе $\nu \rightarrow \infty$ и $a_0^2 \rightarrow \infty$, так что $a_0^2 \tau_0 = \text{const}$ ($\tau_0 = 1/(2\nu)$), это распределение вероятностей переходит в выражение

$$P(x) = \frac{C}{|g(x)|} \exp \left\{ \frac{2\nu}{a_0^2} \int dx \frac{f(x)}{g^2(x)} \right\},$$

соответствующее гауссовому дельта-коррелированному процессу $z(t)$.

Задача 42. *Получить стационарное распределение вероятностей для стохастического уравнения в случае телеграфного случайного процесса $z(t)$*

$$\frac{d}{dt} x(t) = -x + z(t), \quad x(0) = x_0.$$

Решение.

$$P(x) = \frac{1}{B(\nu, 1/2)} (1 - x^2)^{\nu-1} \quad (|x| < 1),$$

где $B(\nu, 1/2)$ — бета-функция. Это распределение вероятностей существенно различается в случаях $\nu > 1$, $\nu = 1$ и $\nu < 1$. Из вида распределения следует, что в случае $\nu > 1$ система проводит основное время вблизи состояния $x = 0$, а в случае $\nu < 1$ система находится в окрестностях точек $x = \pm 1$. В случае же $\nu = 1$ получаем равномерное распределение вероятностей на отрезке $[-1, 1]$.

Глава 8

ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЕЛЬТА- КОРРЕЛИРОВАННОГО ВО ВРЕМЕНИ ГАУССОВОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ (ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ)

В предыдущих главах подробно рассматривались общие случаи анализа стохастических уравнений. Здесь же мы более подробно с других позиций рассмотрим приближение дельта-коррелированного во времени гауссового случайного поля в стохастических уравнениях и обсудим физический смысл этого приближения, которое наиболее широко используется при решении практических задач.

8.1. Уравнение Фоккера–Планка

Пусть векторная функция $\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ удовлетворяет динамическому уравнению

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (8.1)$$

где $v_i(\mathbf{x}, t)$ ($i = 1, \dots, n$) — детерминированные функции, а $f_i(\mathbf{x}, t)$ — случайные функции $(n + 1)$ переменной, обладающие следующими свойствами

а) $f_i(\mathbf{x}, t)$ — гауссово случайное поле в $(n + 1)$ -мерном пространстве $(\mathbf{x}, t)$;

б) $\langle f_i(\mathbf{x}, t) \rangle = 0$.

Будем для определенности считать, что t — временная координата, а $\mathbf{x}$ — пространственная.

Статистические характеристики поля $f_i(\mathbf{x}, t)$ полностью описываются заданием его корреляционного тензора

$$B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \langle f_i(\mathbf{x}, t) f_j(\mathbf{x}', t') \rangle.$$

Так как уравнение (8.1) является уравнением первого порядка с начальным условием, то для него выполняется условие динамической причинности:

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{x}', t')} x_i(t) = 0 \quad \text{при} \quad t' < t_0 \quad \text{и} \quad t' > t, \quad (8.2)$$

т. е. его решение $\mathbf{x}(t)$ функционально зависит лишь от предшествующих по t значений $f_j(\mathbf{x}, t')$ из интервала $t_0 \leq t' \leq t$. При этом для вариационной производной имеем равенство

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{x}', t-0)} x_i(t) = \delta_{ij} \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}'). \quad (8.3)$$

Однако может существовать статистическая связь между $\mathbf{x}(t)$ и последующими значениями $f_j(\mathbf{x}, t'')$, где $t'' > t$, так как такие значения $f_j(\mathbf{x}, t'')$ коррелированы со значениями $f_j(\mathbf{x}, t')$ при $t' \leq t$. Ясно, что корреляция функции $\mathbf{x}(t)$ с последующими значениями $f_j(\mathbf{x}, t'')$ заметна лишь при $t'' - t \leq \tau_0$, где τ_0 — радиус корреляции поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ по переменной t .

Для достаточно большого класса реальных физических процессов характерный временной масштаб изменения функции $\mathbf{x}(t)$ имеет величину порядка $T \gg \tau_0$, и в этом случае существует малый параметр τ_0/T , который может быть использован для построения приближенного решения.

В первом приближении по этому параметру малости можно рассматривать асимптотику при $\tau_0 \rightarrow 0$. При этом значения $\mathbf{x}(t')$ при $t' < t$ будут не только функционально, но и статистически независимы от значений $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t'')$ при $t'' > t$. Это приближение эквивалентно замене корреляционного тензора B_{ij} на некоторый эффективный тензор, определяемый равенством

$$B_{ij}^{eff}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = 2\delta(t - t') F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t). \quad (8.4)$$

Величина $F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t)$ при этом определяется из условия равенства интегралов от $B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ и $B_{ij}^{eff}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ по t' :

$$F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt' B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t'),$$

что и соответствует переходу к гауссовому дельта-коррелированному по времени t случайному полю.

Введем индикаторную функцию

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}),$$

где $\mathbf{x}(t)$ — решение уравнения (8.1), удовлетворяющую уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)] \varphi(\mathbf{x}, t). \quad (8.5)$$

При этом

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{x}', t-0)} \varphi(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_j} \{ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \varphi(\mathbf{x}, t) \}. \quad (8.6)$$

Уравнение для плотности вероятностей решения уравнения (8.1),

$$P(\mathbf{x}, t) = \langle \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \rangle,$$

получим, усредняя уравнение (8.5) по ансамблю реализаций поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) P(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle. \quad (8.7)$$

Уравнение (8.7) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = \\ = -\frac{\partial}{\partial x_i} \int d\mathbf{x}' \int_{t_0}^t dt' B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \left\langle \frac{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_j(\mathbf{x}', t')} \right\rangle, \end{aligned} \quad (8.8)$$

Здесь мы воспользовались формулой Фурутцу–Новикова

$$\langle f_k(\mathbf{x}, t) R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)] \rangle = \int d\mathbf{x}' \int dt' B_{kl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \left\langle \frac{\delta R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)]}{\delta f_l(\mathbf{x}', t')} \right\rangle, \quad (8.9)$$

справедливой для корреляции гауссового случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ с произвольным функционалом $R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)]$ от него и условием динамической причинности (8.2).

Уравнение (8.8) показывает, что одновременная плотность вероятностей решения $\mathbf{x}(t)$ в момент времени t определяется функциональной зависимостью решения $\mathbf{x}(t)$ от поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}', t)$ для всех значений времени в интервале (t_0, t) .

В общем случае плотность вероятностей $P(\mathbf{x}, t)$ не описывается замкнутым уравнением. Если же для корреляционной функции поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ воспользоваться приближением (8.4), то возникнут члены, связанные со значениями $\delta \varphi[\mathbf{x}, t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)] / \delta f_j(\mathbf{x}', t')$ при совпадающих временных аргументах $t' = t - 0$, которые, согласно равенству (8.6), выражаются непосредственно через саму величину $\varphi[\mathbf{x}, t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)]$. Таким образом, мы приходим к замкнутому уравнению Фоккера–Планка

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial x_k} [v_k(\mathbf{x}, t) + A_k(\mathbf{x}, t)] P(\mathbf{x}, t) = \\ = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} [F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; t) P(\mathbf{x}, t)], \end{aligned} \quad (8.10)$$

где

$$A_k(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial x'} F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) \Big|_{\mathbf{x}' = \mathbf{x}}.$$

Уравнение (8.10) следует решать с начальным условием $P(\mathbf{x}, t_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ или же с начальным условием более общего вида $P(\mathbf{x}, t_0) = W_0(\mathbf{x})$, если начальные условия так же случайны, но статистически независимы от поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$.

Уравнение Фоккера–Планка (8.10) — уравнение в частных производных и его дальнейший анализ существенно зависит от формулировки краевых условий по $\mathbf{x}$, которые формулируются для анализа конкретных задач.

Рассмотрим величины, входящие в уравнение (8.10). Члены этого уравнения с $A_k(\mathbf{x}, t)$ и $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t)$ обусловлены флуктуациями поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$. Если поле $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ стационарно во времени, то величины $A_k(\mathbf{x})$ и $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ не зависят от времени. Если к тому же поле $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ однородно и изотропно по всем пространственным координатам, то величина $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) = \text{const}$, что соответствует постоянному тензору коэффициентов диффузии, а величина $A_k(\mathbf{x}, t) = 0$ (заметим, однако, что зависимость $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t)$ и $A_k(\mathbf{x}, t)$ от $\mathbf{x}$ может быть связана и с использованием криволинейных координат).

8.2. Плотность вероятностей перехода

Вернемся теперь к динамической системе (8.1) и рассмотрим m -временную плотность вероятностей

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = \langle \delta(\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_1) \dots \delta(\mathbf{x}(t_m) - \mathbf{x}_m) \rangle, \quad (8.11)$$

относящуюся к m различным моментам времени $t_1 < t_2 < \dots < t_m$. Дифференцируя (8.11) по времени t_m и используя затем динамическое уравнение (8.1), условие динамической причинности (8.2), определение функции $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t)$ и формулу Фурутцу–Новикова (8.9), можно получить уравнение, аналогичное уравнению Фоккера–Планка (8.10):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t_m} P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) + \\ & + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{mk}} [v_k(\mathbf{x}_m, t_m) + A_k(\mathbf{x}_m, t_m)] P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = \\ & = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_{mk} \partial x_{ml}} [F_{kl}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_m; t_m) P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m)]. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Здесь суммирование по индексу m не производится. Начальное условие к (8.12) можно найти из формулы (8.11). Полагая $t_m = t_{m-1}$ в (8.11), получаем

$$\begin{aligned} P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_{m-1}) &= \\ &= \delta(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{m-1}) P_{m-1}(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}). \end{aligned} \quad (8.13)$$

Решение уравнения (8.12) можно искать в виде

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = p(\mathbf{x}_m, t_m | \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}) P_{m-1}(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}). \quad (8.14)$$

Так как все дифференциальные операции в (8.12) относятся к t_m и $\mathbf{x}_m$, то подставляя (8.14) в (8.12) и (8.13), находим следующее уравнение для плотности вероятностей перехода $p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) | \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \rangle$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) + \frac{\partial}{\partial x_k} [v_k(\mathbf{x}, t) + A_k(\mathbf{x}, t)] p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \\ = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} [F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; t) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)], \\ p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)|_{t \rightarrow t_0} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \end{aligned} \quad (8.15)$$

В уравнении (8.15) мы обозначили переменные $\mathbf{x}_m, t_m$ через $\mathbf{x}, t$, а переменные $\mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}$ — через $\mathbf{x}_0, t_0$.

Применяя формулу (8.14) $(m-1)$ раз, получаем соотношение

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = p(\mathbf{x}_m, t_m | \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}) \dots p(\mathbf{x}_2, t_2 | \mathbf{x}_1, t_1) P(\mathbf{x}_1, t_1), \quad (8.16)$$

где $P(\mathbf{x}_1, t_1)$ — плотность вероятностей, определяемая уравнением (8.10) и относящаяся к одному моменту времени t_1 . Равенство (8.16) выражает многовременную плотность вероятностей через произведение плотностей вероятностей перехода и означает, что случайный процесс $\mathbf{x}(t)$ является марковским.

Уравнение (8.10) обычно называется *прямым уравнением Фоккера–Планка*. Легко получить и *обратное уравнение Фоккера–Планка*, которое описывает эволюцию плотности вероятностей перехода по отношению к начальным параметрам $t_0, \mathbf{x}_0$.

Действительно, во второй главе первой части книги было получено обратное уравнение Лиувилля (3.4) для индикаторной функции, которое описывает эволюцию динамической системы в зависимости от начальных условий $t_0, \mathbf{x}_0$, имеющее вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \right) \varphi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = 0 \quad (8.17)$$

с начальным условием

$$\varphi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Из уравнения (8.17) вытекает равенство, аналогичное (8.6):

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{x}', t_0 + 0)} \varphi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial x_{0j}} \varphi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0). \quad (8.18)$$

Усредняя теперь обратное уравнение Лиувилля (8.17) по ансамблю реализаций случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ с эффективным корреляционным тензором (8.4), используя формулу Фурутцу–Новикова (8.9) и соотношение (8.18) для вариационной производной, мы придем к обратному уравнению Фоккера–Планка

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_0} p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) + [v_k(\mathbf{x}_0, t_0) + A_k(\mathbf{x}_0, t_0)] \frac{\partial}{\partial x_{0k}} p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \\ = -F_{kl}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0; t_0) \frac{\partial^2}{\partial x_{0k} \partial x_{0l}} p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) \quad (8.19) \end{aligned}$$

с начальным условием

$$p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Прямое и обратное уравнения Фоккера–Планка эквивалентны. Первое более удобно для анализа эволюции во времени статистических характеристик решения задачи (8.1). Второе же более удобно для изучения статистических характеристик, связанных с начальными условиями, таких, например, как время пребывания процесса $\mathbf{x}(t)$ в какой-либо области пространства, время достижения ее границ и т. п. В этом случае вероятность пребывания случайного процесса $\mathbf{x}(t)$ в области пространства V определяется интегралом

$$G(t; \mathbf{x}_0, t_0) = \int_V d\mathbf{x} p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0),$$

который, согласно уравнению (8.19), описывается замкнутым уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_0} G(t; \mathbf{x}_0, t_0) + [v_k(\mathbf{x}_0, t_0) + A_k(\mathbf{x}_0, t_0)] \frac{\partial}{\partial x_{0k}} G(t; \mathbf{x}_0, t_0) = \\ = -F_{kl}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0; t_0) \frac{\partial^2}{\partial x_{0k} \partial x_{0l}} G(t; \mathbf{x}_0, t_0), \\ G(t; \mathbf{x}_0, t_0) = \{1, \text{ если } \mathbf{x}_0 \in V, \text{ и } 0, \text{ если } \mathbf{x}_0 \notin V\}. \quad (8.20) \end{aligned}$$

Необходимо также сформулировать дополнительные краевые условия для уравнения (8.20), которые определяются характером как самой области V , так и ее границ.

8.3. Об условиях применимости уравнения Фоккера–Планка

Для оценки границ применимости уравнения Фоккера–Планка необходимо учитывать конечность радиуса корреляции τ_0 поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ по временной координате. При этом условие малости параметра

τ_0/T является необходимым, но, вообще говоря, недостаточным для возможности описывать статистические характеристики решения уравнения (8.1) на основе приближения дельта-коррелированного случайного поля, которому соответствует уравнение Фоккера–Планка. Для каждой конкретной задачи необходимо проводить более детальные исследования. Далее мы приведем физически более наглядный метод, называемый *диффузионным приближением*, также приводящий к марковости решения уравнения (8.1), но учитывающий, в определенной мере, конечность временного радиуса корреляции.

Здесь же подчеркнем, что приближение дельта-коррелированного случайного поля не означает формальной замены случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ в (8.1) на случайное поле с корреляционной функцией (8.4). Это приближение соответствует построению асимптотического разложения при стремлении временного радиуса корреляции τ_0 поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ к нулю. И при таком предельном переходе точные средние величины типа $\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) R[t; \mathbf{f}(\mathbf{x}', \tau)] \rangle$ переходят в выражения, полученные с помощью формальной замены корреляционного тензора поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ на эффективный тензор (8.4).

8.3.1. Уравнение Ланжевена. Проиллюстрируем вышесказанное на примере *уравнения Ланжевена*, допускающего полный статистический анализ:

$$\frac{d}{dt} x(t) = -\lambda x(t) + f(t), \quad x(t_0) = 0, \quad (8.21)$$

где предполагается, что достаточно «хорошая» гладкая функция $f(t)$ — стационарный гауссов случайный процесс с нулевым средним значением и корреляционной функцией

$$\langle f(t)f(t') \rangle = B_f(t - t').$$

Для конкретной реализации случайной силы $f(t)$ решение уравнения (8.21) имеет вид

$$x(t) = \int_{t_0}^t d\tau f(\tau) e^{-\lambda(t-\tau)}.$$

Следовательно, это решение $x(t)$ — также гауссов процесс с нулевым средним значением и корреляционной функцией

$$\langle x(t)x(t') \rangle = \int_{t_0}^t d\tau_1 \int_{t_0}^{t'} d\tau_2 B_f(\tau_1 - \tau_2) \exp \{ -\lambda(t + t' - \tau_1 - \tau_2) \}.$$

И при этом, например,

$$\langle f(t)x(t) \rangle = \int_0^{t-t_0} d\tau B_f(\tau) e^{-\lambda\tau}.$$

Отметим, что одноточечная плотность вероятностей $P(x, t) = \langle \delta(x(t) - x) \rangle$ для уравнения (8.21) описывается точным уравнением, вытекающем из уравнения (6.25):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, t) &= \lambda \frac{\partial}{\partial x} x P(x, t) + \int_0^{t-t_0} d\tau B_f(\tau) e^{-\lambda\tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t), \\ P(x, t_0) &= \delta(x), \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{dt} \langle x^2(t) \rangle = -2\lambda \langle x^2(t) \rangle + 2 \int_0^{t-t_0} d\tau B_f(\tau) e^{-\lambda\tau}.$$

При $t_0 \rightarrow -\infty$ процесс $x(t)$ переходит в стационарный гауссов процесс с одновременными статистическими параметрами

$$\langle x(t) \rangle = 0, \quad \sigma_x^2 = \langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} d\tau B_f(\tau) e^{-\lambda\tau},$$

$$\langle f(t)x(t) \rangle = \int_0^{\infty} d\tau B_f(\tau) e^{-\lambda\tau}.$$

В частности, для корреляционной функции $B_f(t)$ вида

$$B_f(t) = \sigma_f^2 e^{-|t|/\tau_0}$$

получаем выражения

$$\langle x(t) \rangle = 0, \quad \langle x^2(t) \rangle = \frac{\sigma_f^2 \tau_0}{\lambda(1 + \lambda\tau_0)}, \quad \langle f(t)x(t) \rangle = \frac{\sigma_f^2 \tau_0}{1 + \lambda\tau_0}, \quad (8.22)$$

которые при $\tau_0 \rightarrow 0$ переходят в асимптотические выражения

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{\sigma_f^2 \tau_0}{\lambda}, \quad \langle f(t)x(t) \rangle = \sigma_f^2 \tau_0. \quad (8.23)$$

Умножим теперь уравнение (8.21) на $x(t)$. Считая функцию $x(t)$ достаточно «хорошей» функцией, получаем равенство

$$x(t) \frac{d}{dt} x(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} x^2(t) = -\lambda x^2(t) + f(t)x(t).$$

Усредняя его по ансамблю реализаций функции $f(t)$, получаем уравнение

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle x^2(t) \rangle = -\lambda \langle x^2(t) \rangle + \langle f(t)x(t) \rangle, \quad (8.24)$$

стационарное решение которого

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle f(t)x(t) \rangle,$$

соответствующее предельному переходу $t_0 \rightarrow -\infty$ и $\tau_0 \rightarrow 0$, совпадает с равенствами (8.22), (8.23).

Учитывая, что $\delta x(t)/\delta f(t-0) = 1$, тот же результат получается для корреляции $\langle f(t)x(t) \rangle$, если использовать формулу

$$\langle f(t)x(t) \rangle = \int_{-\infty}^t d\tau B_f(t-\tau) \left\langle \frac{\delta}{\delta f(\tau)} x(t) \right\rangle \quad (8.25)$$

с «эффективной» корреляционной функцией

$$B_f^{eff}(t) = 2\sigma_f^2 \tau_0 \delta(t).$$

Как упоминалось выше, статистические характеристики решения динамических задач в приближении дельта-коррелированного случайного процесса (поля) совпадают со статистическими характеристиками марковских процессов. Однако должно быть ясно понято, что это справедливо только для статистических средних величин и уравнений для них. В частности, для уравнения Ланжевена (8.21) реализации процесса $x(t)$ и соответствующего марковского процесса совершенно различные. Последний описывается уравнением (8.21) с идеальным процессом «белого шума» $f(t)$ в правой части с корреляционной функцией $B_f(t) = 2\sigma_f^2 \tau_0 \delta(t)$, и это уравнение должно пониматься в обобщенном смысле, так как марковские процессы, в обычном смысле, не дифференцируемы. В то же время процесс $x(t)$, статистические характеристики которого совпадают с характеристиками марковского процесса, — достаточно хорошая функция и дифференцируем в обычном смысле. Например,

$$x(t) \frac{d}{dt} x(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} x^2(t),$$

и, в частности, при $t_0 \rightarrow -\infty$

$$\left\langle x(t) \frac{d}{dt} x(t) \right\rangle = 0. \quad (8.26)$$

С другой стороны, для идеального марковского процесса $x(t)$, удовлетворяющего уравнению Ланжевена (8.21) в обобщенном смысле с «белым шумом» в правой части, равенство (8.26) вообще не имеет

смысла и соотношение

$$\left\langle x(t) \frac{d}{dt} x(t) \right\rangle = -\lambda \langle x^2(t) \rangle + \langle f(t)x(t) \rangle \quad (8.27)$$

зависит от того, как понимаются средние значения. В самом деле, если мы определим равенство (8.27) как предел равенства

$$\left\langle x(t + \Delta) \frac{d}{dt} x(t) \right\rangle = -\lambda \langle x(t)x(t + \Delta) \rangle + \langle f(t)x(t + \Delta) \rangle \quad (8.28)$$

при $\Delta \rightarrow 0$, то результат будет существенно различаться в зависимости от предельных переходов $\Delta \rightarrow +0$ или $\Delta \rightarrow -0$. Так, для $\Delta \rightarrow +0$ имеем

$$\lim_{\Delta \rightarrow +0} \langle f(t)x(t + \Delta) \rangle = 2\sigma_f^2 \tau_0,$$

и, принимая во внимание равенство (8.25), выражение (8.28) можно переписать в виде

$$\left\langle x(t + 0) \frac{d}{dt} x(t) \right\rangle = \sigma_f^2 \tau_0. \quad (8.29)$$

Если же $\Delta \rightarrow -0$, то $\langle f(t)x(t - 0) \rangle = 0$ из-за условия динамической причинности, и равенство (8.28) принимает вид

$$\left\langle x(t - 0) \frac{d}{dt} x(t) \right\rangle = -\sigma_f^2 \tau_0. \quad (8.30)$$

Сравнивая (8.26) с (8.29) и (8.30), видим, что для идеального марковского процесса, описываемого решением уравнением Ланжевена с «белым шумом» и обычно называемого *процессом Орнштейна–Уленбека*, имеет место

$$\left\langle x(t + 0) \frac{d}{dt} x(t) \right\rangle \neq \left\langle x(t - 0) \frac{d}{dt} x(t) \right\rangle \neq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle x^2(t) \rangle.$$

Отметим, что равенства (8.29) и (8.30) можно также получить из корреляционной функции

$$\langle x(t)x(t + \tau) \rangle = \frac{\sigma_f^2 \tau_0}{\lambda} e^{-\lambda|\tau|}$$

процесса $x(t)$.

В заключение обсуждения приближения дельта-коррелированного случайного процесса (поля) подчеркнем, что во всех дальнейших примерах под фразой типа «динамическая система (уравнение) с дельта-коррелированными флуктуациями параметров» подразумевается асимптотический случай, в котором временные радиусы корреляции для этих параметров малы по сравнению со всеми характерными временами, возникающими в рассматриваемой задаче.

8.3.2. Диффузионное приближение. Условием применимости приближения дельта-коррелированности случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ (т. е. уравнения Фоккера–Планка) является условие малости временного радиуса корреляции случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ — τ_0 — по сравнению со всеми временными масштабами, имеющимися в рассматриваемой задаче. Учет конечности временного радиуса корреляции случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ можно провести в рамках диффузионного приближения. Это приближение более наглядно и физично, чем формальное математическое приближение дельта-коррелированного случайного поля. Это приближение справедливо также для достаточно малых флуктуаций параметров стохастической динамической системы и позволяет получить не только условия применимости дельта-коррелированного приближения, но и описать новые физические эффекты, порожденные конечностью временного радиуса корреляции случайных параметров. В рамках диффузионного приближения предполагается, что влияние случайных воздействий на временных масштабах порядка τ_0 не существенно, т. е. система на этих масштабах эволюционирует как свободная.

Пусть опять векторная функция $\mathbf{x}(t)$ удовлетворяет динамическому уравнению (8.1)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (8.31)$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ — векторная детерминированная функция, а $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ — случайное статистически однородное в пространстве и стационарное во времени гауссово векторное поле со статистическими характеристиками

$$\langle f(\mathbf{x}, t) \rangle = 0, \quad B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = B_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; t - t') = \langle f_i(\mathbf{x}, t) f_j(\mathbf{x}', t') \rangle.$$

Введем индикаторную функцию

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}), \quad (8.32)$$

где $\mathbf{x}(t)$ — решение уравнения (8.31), удовлетворяющую уравнению Лиувилля (8.5)

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)] \varphi(\mathbf{x}, t). \quad (8.33)$$

Уравнение для плотности вероятностей решения уравнения (8.31) $P(\mathbf{x}(t) = \langle \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle$ получим, как и ранее, усредняя уравнение (8.33)

по ансамблю реализаций поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$. Используя формулу Фурутцу–Новикова (8.9) получаем в результате уравнение (8.8)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial x_i} \int d\mathbf{x}' \int_{t_0}^t dt' B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \left\langle \frac{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_j(\mathbf{x}', t')} \right\rangle. \quad (8.34)$$

В диффузионном приближении уравнение (8.34) является точным, а вариационная производная и индикаторная функция на временных масштабах порядка временного радиуса корреляции случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \tau_0$ описываются системой динамических уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_i(\mathbf{x}', t')} &= - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left\{ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \frac{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_i(\mathbf{x}', t')} \right\}, \\ \frac{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_i(\mathbf{x}', t')} \Big|_{t=t'} &= - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \varphi(\mathbf{x}, t') \right\}, \end{aligned} \quad (8.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \{ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) \}, \quad \varphi(\mathbf{x}, t)|_{t=t'} = \varphi(\mathbf{x}, t').$$

Решение задачи (8.34), (8.35) справедливо для всех значений времени t . Однако в этом случае решение задачи (8.31) $\mathbf{x}(t)$ не является векторным марковским случайным процессом, так как ее многовременная плотность вероятностей не допускает факторизации с помощью плотности вероятностей перехода. В асимптотическом случае $t \gg \gg \tau_0$ решение исходной динамической системы (8.31) в диффузионном приближении уже будет марковским случайным процессом и условием применимости его является малость всех статистических эффектов на временных масштабах порядка временного радиуса корреляции τ_0 .

Таким образом, диффузионное приближение позволяет снять основное ограничение, связанное с малостью временного радиуса корреляции τ_0 , оставаясь при этом в рамках марковского процесса.

Задачи

Задача 43. Получить уравнение Фоккера–Планка для диффузии лучей, описываемых системой уравнений (1.52)

$$\frac{d}{dx} \mathbf{R}(x) = \mathbf{p}(x), \quad \frac{d}{dx} \mathbf{p}(x) = \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{R}} \varepsilon(x, \mathbf{R}) \quad (8.36)$$

для однородного, изотропного гауссового дельта-коррелированного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ с нулевым средним и корреляционной функцией

$$B_{\varepsilon}(x - x', \mathbf{R} - \mathbf{R}') = \langle \varepsilon(x, \mathbf{R}) \varepsilon(x', \mathbf{R}') \rangle = A(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \delta(x - x').$$

Решение. Функция $P(x; \mathbf{R}, \mathbf{p}) = \langle \delta(\mathbf{R}(x) - \mathbf{R}) \delta(\mathbf{p}(x) - \mathbf{p}) \rangle$ описывается уравнением Фоккера–Планка

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \right) P(x; \mathbf{R}, \mathbf{p}) = D \Delta_{\mathbf{R}} P(x; \mathbf{R}, \mathbf{p}),$$

где коэффициент диффузии

$$D = -\frac{1}{8} \Delta_{\mathbf{R}} A(\mathbf{R})|_{\mathbf{R}=0} = \pi^2 \int_0^{\infty} d\kappa \kappa^3 \Phi_{\varepsilon}(0, \kappa).$$

Здесь через функцию

$$\Phi_{\varepsilon}(q, \kappa) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int d\mathbf{R} B_{\varepsilon}(x, \mathbf{R}) e^{-iqx - i\kappa \mathbf{R}}$$

обозначена трехмерная спектральная плотность случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$.

Решение, соответствующее начальному условию $P(0; \mathbf{R}, \mathbf{p}) = \delta(\mathbf{R})\delta(\mathbf{p})$, является гауссовой плотностью вероятностей с параметрами

$$\langle R_j(x) R_k(x) \rangle = \frac{2}{3} D \delta_{jk} x^3, \quad \langle R_j(x) p_k(x) \rangle = D \delta_{jk} x^2,$$

$$\langle p_j(x) p_k(x) \rangle = 2D \delta_{jk} x.$$

Задача 44. Рассмотреть диффузию двух лучей, описываемых системой уравнений

$$\frac{d}{dx} \mathbf{R}_{\nu}(x) = \mathbf{p}_{\nu}(x), \quad \frac{d}{dx} \mathbf{p}_{\nu}(x) = \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{R}_{\nu}} \varepsilon(x, \mathbf{R}_{\nu}),$$

где индексом $\nu = 1, 2$ обозначены номера соответствующих лучей.

Решение. Для совместной плотности вероятностей получаем уравнение Фоккера–Планка

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}_1} + \mathbf{p}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}_2} \right) P(x; \mathbf{R}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{p}) = \\ = \hat{L} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right) P(x; \mathbf{R}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{p}), \end{aligned}$$

где оператор

$$\hat{L} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right) = \frac{\pi}{4} \int d\kappa \Phi_\varepsilon(0, \kappa) \left[\left(\kappa \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \right)^2 + \left(\kappa \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right)^2 + 2 \cos [\kappa(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)] \left(\kappa \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \right) \left(\kappa \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right) \right].$$

Задача 45. Рассмотреть относительную диффузию двух лучей.

Решение. Плотность вероятностей для относительной диффузии двух лучей,

$$P(x; \mathbf{R}, \mathbf{p}) = \langle \delta(\mathbf{R}_1(x) - \mathbf{R}_2(x) - \mathbf{R}) \delta(\mathbf{p}_1(x) - \mathbf{p}_2(x) - \mathbf{p}) \rangle,$$

описывается уравнением Фоккера–Планка

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \right) P(x; \mathbf{R}, \mathbf{p}) = D_{\alpha\beta}(\mathbf{R}) \frac{\partial^2}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} P(x; \mathbf{R}, \mathbf{p}), \quad (8.37)$$

где через матрицу $D_{\alpha\beta}(\mathbf{R})$ обозначена величина

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{R}) = 2\pi \int d\kappa [1 - \cos(\kappa \mathbf{R})] \kappa_\alpha \kappa_\beta \Phi_\varepsilon(0, \kappa).$$

Замечание. Если обозначить через l_0 корреляционный радиус случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, то при условии $R \ll l_0$ функцию $\{1 - \cos(\kappa \mathbf{R})\}$ можно разложить в ряд Тейлора, и диффузионная матрица примет вид

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{R}) = \pi B (\mathbf{R}^2 \delta_{\alpha\beta} + 2R_\alpha R_\beta), \quad (8.38)$$

где параметр

$$B = \frac{\pi}{4} \int_0^\infty d\kappa \kappa^5 \Phi_\varepsilon(0, \kappa).$$

Из уравнения (8.37) с коэффициентами (8.38) следуют уравнения для моментных функций:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \langle \mathbf{p}^2(x) \rangle &= 8\pi B \langle \mathbf{R}^2(x) \rangle, & \frac{d}{dx} \langle \mathbf{R}^2(x) \rangle &= 2 \langle \mathbf{R}(x) \mathbf{p}(x) \rangle, \\ \frac{d}{dx} \langle \mathbf{R}(x) \mathbf{p}(x) \rangle &= \langle \mathbf{p}^2(x) \rangle, \end{aligned}$$

которые легко решить. Из решения этой системы следует, что если существует такой интервал значений x , на котором $\alpha x \gg 1$ ($\alpha = (16\pi B)^{1/3}$), но все еще $R_0^2 \exp\{\alpha x\} \ll l_0^2$ (он всегда существует для достаточно малых значений R_0 — начальных расстояний между лучами), то в этой области происходит экспоненциальный рост величин $\langle \mathbf{R}^2(x) \rangle$, $\langle \mathbf{R}(x) \mathbf{p}(x) \rangle$ и $\langle \mathbf{p}^2(x) \rangle$.

Задача 46. Исходя из параболического уравнения (1.49)

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} u(x, \mathbf{R}) + i \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) u(x, \mathbf{R}), \quad u(0, \mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R}), \quad (8.39)$$

получить уравнения для среднего поля $\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle$ и функции когерентности второго порядка $\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho) = \left\langle u\left(x, \mathbf{R} + \frac{1}{2}\rho\right) u^*\left(x, \mathbf{R} - \frac{1}{2}\rho\right) \right\rangle$ в приближении гауссового однородного, изотропного и дельта-коррелированного по x случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ с параметрами

$$\langle \varepsilon(x, \mathbf{R}) \rangle = 0, \quad B_\varepsilon(x, \mathbf{R}) = B_\varepsilon^{\text{eff}}(x, \mathbf{R}) = \delta(x) A(\mathbf{R}).$$

Решение.

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle - \frac{k^2}{8} A(0) \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle, \quad (8.40)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{k} \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\rho} \right) \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho) = -\frac{k^2}{4} D(\rho) \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho), \quad (8.41)$$

$$\Gamma_2(0, \mathbf{R}, \rho) = u_0 \left(\mathbf{R} + \frac{1}{2}\rho \right) u_0^* \left(\mathbf{R}' - \frac{1}{2}\rho \right),$$

где $D(\mathbf{R}) = A(0) - A(\mathbf{R})$.

Замечание. Решение уравнения (8.40) имеет вид

$$\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = u_0(x, \mathbf{R}) \exp \left\{ -\frac{\gamma}{2} x \right\}, \quad (8.42)$$

где $u_0(x, \mathbf{R})$ — решение задачи в отсутствие флуктуаций параметров среды, а величина $\gamma = (k^2/4) A(0)$ называется *коэффициентом экстинкции*. Соответственно решение для функции когерентности второго порядка имеет вид

$$\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho) = \int d\mathbf{q} \gamma_2 \left(\mathbf{q}, \rho - \mathbf{q} \frac{x}{k} \right) \exp \left\{ i\mathbf{q}\mathbf{R} - \frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi D \left(\rho - \mathbf{q} \frac{\xi}{k} \right) \right\}, \quad (8.43)$$

где

$$\gamma_0(\mathbf{q}, \rho) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{R} \Gamma_2(0, \mathbf{R}, \rho) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}}.$$

Для плоской падающей волны, когда

$$u_0(\mathbf{R}) = u_0 = \text{const}, \quad \Gamma(0, \mathbf{R}, \rho) = |u_0|^2, \quad \gamma_0(\mathbf{q}, \rho) = |u_0|^2 \delta(\mathbf{q}),$$

выражения (8.42) и (8.43) существенно упрощаются и принимают вид

$$\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = u_0 \exp \left\{ -\frac{\gamma}{2} x \right\}, \quad \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho) = |u_0|^2 \exp \left\{ -\frac{k^2 x}{4} D(\rho) \right\},$$

не зависящий от эффекта дифракции плоской волны в случайно-неоднородной среде.

Задача 47. Получить функцию когерентности второго порядка и среднюю интенсивность на оси параболического волновода в задаче, описываемой динамическим уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} u(x, \mathbf{R}) + \frac{ik}{2} [-\alpha^2 \mathbf{R}^2 + \varepsilon(x, \mathbf{R})] u(x, \mathbf{R}),$$

в приближении гауссового однородного, изотропного и дельта-коррелированного по x случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$.

Решение.

$$\begin{aligned} \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho) &= \frac{e^{-i\alpha \mathbf{R} \rho \tan(\alpha x)}}{\cos^2(\alpha x)} \int d\mathbf{q} \gamma_0 \left(\mathbf{q}, \frac{1}{\cos(\alpha x)} \rho - \frac{\mathbf{q}}{\alpha k} \tan(\alpha x) \right) \times \\ &\times \exp \left\{ i \frac{1}{\cos(\alpha x)} \mathbf{q} \mathbf{R} - \frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi D \left(\frac{\cos(\alpha \xi)}{\cos(\alpha x)} \rho - \frac{1}{\alpha k} \frac{\sin[\alpha(x-\xi)]}{\cos(\alpha x)} \mathbf{q} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Полагая $\mathbf{R} = 0$ и $\rho = 0$, получаем изменение средней интенсивности вдоль оси волновода:

$$\begin{aligned} \langle I(x, 0) \rangle &= \frac{1}{\cos^2(\alpha x)} \int d\mathbf{q} \gamma_0 \left(\mathbf{q}, -\frac{\mathbf{q}}{\alpha k} \tan(\alpha x) \right) \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi D \left(\frac{1}{\alpha k} \frac{\sin(\alpha \xi)}{\cos(\alpha x)} \mathbf{q} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Задача 48. Построить диффузионное приближение для задачи о динамике частицы в поле случайных сил, описываемой стохастической системой (1.11)

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t), \quad \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) = -\lambda \mathbf{v}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0.$$

Решение. Совместная плотность вероятностей положения частицы и ее скорости описывается уравнением Фоккера–Планка

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \\ = \frac{\partial}{\partial v_i} \left\{ D_{ij}^{(1)}(\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial v_j} + D_{ij}^{(2)}(\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial r_j} \right\} P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (8.44) \end{aligned}$$

с коэффициентами диффузии

$$\begin{aligned} D_{ij}^{(1)}(\mathbf{v}) &= \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} B_{ij} \left(\frac{1}{\lambda} [e^{\lambda\tau} - 1] \mathbf{v}, \tau \right), \\ D_{ij}^{(2)}(\mathbf{v}) &= \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty d\tau [1 - e^{-\lambda\tau}] B_{ij} \left(\frac{1}{\lambda} [e^{\lambda\tau} - 1] \mathbf{v}, \tau \right). \end{aligned} \quad (8.45)$$

Задача 49. Получить в диффузионном приближении стационарное распределение вероятностей для скорости частицы для динамической системы (1.11) в одномерном случае для корреляционной функции

$$B(x, t) = \sigma_f^2 \exp \left\{ -\frac{|x|}{l_0} - \frac{|t|}{\tau_0} \right\}.$$

Решение. Стационарная плотность вероятностей описывается уравнением, вытекающим из (8.44):

$$-\lambda v P(v) = D(v) \frac{\partial}{\partial v} P(v), \quad (8.46)$$

где, согласно (8.45),

$$D(v) = \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} B \left(\frac{1}{\lambda} [e^{\lambda\tau} - 1] v, \tau \right).$$

Для достаточно малого трения ($\lambda\tau_0 \ll 1$) решение уравнения (8.46) имеет вид

$$P(v) = C \exp \left\{ -\frac{\lambda v^2}{2\sigma_f^2\tau_0} \left[1 + \frac{2}{3} \frac{|v|\tau_0}{l_0} \right] \right\}. \quad (8.47)$$

Для малых значений скорости частицы $|v|\tau_0 \ll l_0$ распределение вероятностей (8.47) переходит в гауссово распределение, соответствующее приближению дельта-коррелированности во времени случайного поля $f(x, t)$. Однако в обратном предельном случае $|v|\tau_0 \gg l_0$ распределение вероятностей (8.47) убывает значительно быстрее, а именно

$$P(v) = C \exp \left\{ -\frac{\lambda v^2 |v|}{3\sigma_f^2 l_0} \right\},$$

что соответствует убыванию коэффициента диффузии по закону $D(v) \sim 1/|v|$.

Задача 50. Исходя из параболического уравнения (8.39) получить уравнения для среднего поля $\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle$ и функции когерентности второго порядка $\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho) = \left\langle u \left(x, \mathbf{R} + \frac{1}{2}\rho \right) u^* \left(x, \mathbf{R} - \frac{1}{2}\rho \right) \right\rangle$ в рамках диффузионного приближения [40, 41].

Решение.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}}\right) \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = -\frac{k^2}{4} \int_0^x dx' \int d\mathbf{R}' B_{\varepsilon}(x', \mathbf{R} - \mathbf{R}') \times \\ \times e^{\frac{ix'}{2k} \Delta_{\mathbf{R}}} \left[\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') e^{-\frac{ix'}{2k} \Delta_{\mathbf{R}}} \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle \right],$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{k} \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\rho}\right) \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho) = \\ = -\frac{k^2}{4} \int_0^x dx_1 \int \mathbf{R}_1 \left[B_{\varepsilon}\left(x_1, \mathbf{R} - \mathbf{R}_1 + \frac{1}{2}\rho\right) - B_{\varepsilon}\left(x_1, \mathbf{R} - \mathbf{R}_1 - \frac{1}{2}\rho\right) \right] \times \\ \times e^{\frac{i}{k} x_1 \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\rho}} \left\{ \left[\delta\left(\mathbf{R} - \mathbf{R}_1 + \frac{1}{2}\rho\right) - \delta\left(\mathbf{R} - \mathbf{R}_1 - \frac{1}{2}\rho\right) \right] \times \right. \\ \left. \times e^{-\frac{i}{k} x_1 \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\rho}} \Gamma_2(x - x_1, \mathbf{R}, \rho) \right\}.$$

Если теперь ввести двумерную спектральную плотность неоднородностей по поперечным координатам:

$$B_{\varepsilon}(x, \mathbf{R}) = \int d\mathbf{q} \Phi_{\varepsilon}^{(2)}(x, \mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}},$$

$$\Phi_{\varepsilon}^{(2)}(x, \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{R} B_{\varepsilon}(x, \mathbf{R}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}}$$

и Фурье-образ волнового поля $u(x, \mathbf{R})$ и функции $\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho)$ по поперечным координатам,

$$\tilde{u}(x, \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{R} u(x, \mathbf{R}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}},$$

$$\tilde{\Gamma}_2(x, \mathbf{q}, \rho) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{R} \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}},$$

то

$$\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} \int d\mathbf{R}' u_0(\mathbf{R}') \times \\ \times \exp \left\{ i\mathbf{q}(\mathbf{R} - \mathbf{R}') - i\frac{\mathbf{q}^2 x}{2} - \frac{k^2}{2} \int_0^x dx' D(x', \mathbf{q}) \right\},$$

где

$$D(x, \mathbf{q}) = \int_0^x d\xi \int d\mathbf{q}' \Phi_\varepsilon^{(2)}(\xi, \mathbf{q}') \exp \left\{ -\frac{i\xi}{2k} (\mathbf{q}'^2 - 2\mathbf{q}'\mathbf{q}) \right\},$$

а для функции $\tilde{\Gamma}_2(x, \mathbf{q}, \rho)$ получаем интегро-дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{k} \mathbf{q} \nabla_\rho \right) \tilde{\Gamma}_2(x, \mathbf{q}, \rho) = \\ = -\frac{k^2}{4} \int_0^x dx_1 \int d\mathbf{q}_1 \Phi_\varepsilon^{(2)}(x_1, \mathbf{q}_1) \left\{ \cos \left[\frac{x_1}{2k} \mathbf{q}_1 (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}) \right] - \right. \\ \left. - \cos \left[\mathbf{q}_1 \rho - \frac{x_1}{2k} \mathbf{q}_1 (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}) \right] \right\} \tilde{\Gamma}_2(x, \mathbf{q}_1, \rho). \end{aligned}$$

При расстояниях, проходимых волной $x \gg l_\parallel$, где $l_\parallel$ — продольный радиус корреляции поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, получаем

$$\begin{aligned} \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} \int d\mathbf{R}' u_0(\mathbf{R}') \times \\ \times \exp \left\{ i\mathbf{q}(\mathbf{R} - \mathbf{R}') - i\frac{\mathbf{q}^2 x}{2} - \frac{k^2}{2} x D(\mathbf{q}) \right\}, \end{aligned}$$

где

$$D(\mathbf{q}) = \int_0^\infty d\xi \int d\mathbf{q}' \Phi_\varepsilon^{(2)}(\xi, \mathbf{q}') \exp \left\{ -\frac{i\xi}{2k} (\mathbf{q}'^2 - 2\mathbf{q}'\mathbf{q}) \right\}.$$

Для плоской падающей волны $u_0(\mathbf{R}) = 1$, и, следовательно, получаем не зависящее от $\mathbf{R}$ выражение

$$\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = \exp \left\{ -\frac{k^2 x}{2} D(0) \right\}.$$

Глава 9

О МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА–ПЛАНКА

Уравнение Фоккера–Планка для одноточечной плотности вероятностей (8.10) и для плотности вероятностей перехода (8.14) относятся к параболическому типу уравнений в частных производных, и для их решения можно использовать методы теории уравнений математической физики. Основными методами при этом являются метод разделения переменных, преобразование Фурье по пространственным координатам и другие интегральные преобразования.

Однако существует лишь небольшое число уравнений Фоккера–Планка, допускающих точное решение. Это, прежде всего, уравнения Фоккера–Планка, соответствующие таким стохастическим уравнениям, которые сами допускают отыскание решения в аналитическом виде. Для таких задач зачастую удается определить не только одноточечную плотность вероятностей и переходную плотность вероятностей, но и характеристический функционал, а также другие важные для приложений статистические характеристики. Самым простым примером является уравнение, определяющее *винеровский случайный процесс*. Учитывая особую важность в физике таких процессов (например, они описывают *броуновское движение частиц*), рассмотрим его более подробно.

9.1. Винеровский случайный процесс

Винеровский случайный процесс определяется как решение стохастического уравнения

$$\frac{d}{dt} w(t) = z(t), \quad w(0) = 0,$$

где $z(t)$ — гауссов дельта-коррелированный во времени процесс с параметрами

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad \langle z(t)z(t') \rangle = 2\sigma^2\tau_0\delta(t - t').$$

Решение этого уравнения

$$w(t) = \int_0^t d\tau z(\tau)$$

— непрерывный гауссовый нестационарный случайный процесс с параметрами

$$\langle w(t) \rangle = 0, \quad \langle w(t)w(t') \rangle = 2\sigma^2\tau_0 \min(t, t').$$

Рассмотрим более общий процесс со сносом, зависящим от параметра α по формуле

$$w(t; \alpha) = -\alpha t + w(t), \quad \alpha > 0.$$

Процесс $w(t; \alpha)$ — марковский процесс, и его плотность вероятностей

$$P(w, t; \alpha) = \langle \delta(w(t; \alpha) - w) \rangle$$

описывается уравнением Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(w, t; \alpha) = \alpha \frac{\partial}{\partial w} P(w, t; \alpha) + D \frac{\partial^2}{\partial w^2} P(w, t; \alpha), \quad (9.1)$$

$$P(w, 0; \alpha) = \delta(w),$$

где через коэффициент диффузии обозначена величина $D = \sigma^2\tau_0$. Его решение имеет вид гауссового распределения:

$$P(w, t; \alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp \left\{ -\frac{(w + \alpha t)^2}{4Dt} \right\}. \quad (9.2)$$

Соответствующая интегральная функция распределения, равная вероятности того, что $w(t; \alpha) < w$, имеет вид

$$\begin{aligned} F(w, t; \alpha) = P(w(t; \alpha) < w) &= \int_{-\infty}^w dw P(w, t; \alpha) = \\ &= \Phi \left(\frac{w}{\sqrt{2Dt}} + \alpha \sqrt{\frac{t}{2D}} \right), \end{aligned} \quad (9.3)$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z dy \exp \left\{ -\frac{y^2}{2} \right\} \quad (9.4)$$

— интеграл вероятностей.

Рассмотрим теперь простейшую краевую задачу для винеровского процесса. Дополним уравнение (9.1), помимо начального, еще и граничным условием

$$P(w, t; \alpha)|_{w=h} = 0 \quad (t > 0), \quad (9.5)$$

обрывающим реализации процесса $w(t; \alpha)$ в момент достижения ими границы h . Решение краевой задачи (9.1), (9.5), которое обозначим

через $P(w, t; \alpha, h)$, описывает при $w < h$ вероятностное распределение тех реализаций процесса $w(t; \alpha)$, которые «выжили» к моменту t , т. е. за весь интервал времени ни разу не достигли границы h . Соответственно, плотность вероятностей нормирована не на единицу, а на вероятность того, что $t < t^*$, где t^* — момент первого достижения процессом $w(t; \alpha)$ границы h :

$$\int_{-\infty}^h dw P(w, t; \alpha, h) = P(t < t^*). \quad (9.6)$$

Введем интегральную функцию распределения и плотность вероятностей случайного момента первого достижения границы h :

$$\begin{aligned} F(t; \alpha, h) &= P(t^* < t) = 1 - P(t < t^*) = 1 - \int_{-\infty}^h dw P(w, t; \alpha, h), \\ P(t; \alpha, h) &= \frac{\partial}{\partial t} F(t; \alpha, h) = -\frac{\partial}{\partial w} P(w, t; \alpha, h)|_{w=h}. \end{aligned} \quad (9.7)$$

При $\alpha > 0$, когда процесс $w(t; \alpha)$ с ростом t в среднем сносится от границы h , и при $t \rightarrow \infty$ вероятность $P(t < t^*)$ (9.6) стремится к вероятности того, что процесс $w(t; \alpha)$ никогда не достигнет границы h . Другими словами, предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^h dw P(w, t; \alpha, h) = P(w_{\max}(\alpha) < h) \quad (9.8)$$

равен вероятности того, что абсолютный максимум процесса

$$w_{\max}(\alpha) = \max_{t \in (0, \infty)} w(t; \alpha)$$

меньше h . Таким образом, из (9.8) следует, что интегральная функция распределения значений абсолютного максимума $w_{\max}(\alpha)$ равна

$$F(h; \alpha) = P(w_{\max}(\alpha) < h) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^h dw P(w, t; \alpha, h). \quad (9.9)$$

Решив краевую задачу (9.1), (9.5), например методом отражения, получим

$$\begin{aligned} P(w, t; \alpha, h) &= \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \left\{ \exp \left[-\frac{(w + \alpha t)^2}{4Dt} \right] - \exp \left[-\frac{h\alpha}{D} - \frac{(w - 2h + \alpha t)^2}{4Dt} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Подставив это выражение в (9.7), найдем плотность вероятностей момента t^* первого достижения процессом $w(t; \alpha)$ границы h :

$$P(t; \alpha, h) = \frac{1}{2Dt\sqrt{\pi Dt}} \exp \left\{ -\frac{(h + \alpha t)^2}{4Dt} \right\}.$$

Наконец, интегрируя (9.10) по w и устремив $t \rightarrow \infty$, получим, согласно (9.9), интегральную функцию распределения значений абсолютного максимума $w_{\max}(\alpha)$ процесса $w(t; \alpha)$ в виде

$$F(h; \alpha) = P(w_{\max}(\alpha) < h) = 1 - e^{-h\alpha/D}. \quad (9.11)$$

Следовательно, абсолютный максимум винеровского процесса имеет экспоненциальную плотность вероятностей

$$P(h; \alpha) = \langle \delta(w_{\max}(\alpha) - h) \rangle = \frac{\alpha}{D} e^{-h\alpha/D}.$$

С помощью винеровского случайного процесса можно конструировать различные другие процессы, удобные для моделирования различных физических явлений. Для положительных величин такой простейшей аппроксимацией является логарифмически нормальный (логнормальный) процесс, который мы и рассмотрим более подробно.

9.2. Логарифмически нормальный процесс

Определим логнормальный случайный процесс по формуле

$$y(t; \alpha) = e^{w(t; \alpha)} = \exp \left\{ -\alpha t + \int_0^t d\tau z(\tau) \right\}, \quad (9.12)$$

где $z(t)$ — гауссов процесс «белого шума» с параметрами

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad \langle z(t)z(t') \rangle = 2\sigma^2\tau_0\delta(t - t').$$

Он описывается стохастическим уравнением

$$\frac{d}{dt} y(t; \alpha) = \{-\alpha + z(t)\} y(t; \alpha), \quad y(0; \alpha) = 1.$$

Одновременная плотность вероятностей логнормального процесса

$$\begin{aligned} P(y, t; \alpha) &= \langle \delta(y(t; \alpha) - y) \rangle = \left\langle \delta \left(e^{w(t; \alpha)} - y \right) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{y} \langle \delta(w(t; \alpha) - \ln y) \rangle = \frac{1}{y} P(w, t; \alpha)|_{w=\ln y}, \end{aligned}$$

где $P(w, t; \alpha)$ — одновременная плотность вероятностей винеровского процесса со сносом, описываемая равенством (9.2), и, следовательно,

$$P(y, t; \alpha) = \frac{1}{2y\sqrt{\pi Dt}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2(ye^{\alpha t})}{4Dt} \right\}, \quad (9.13)$$

где параметр $D = \sigma^2 \tau_0$. Графики логарифмически нормальной плотности вероятностей (9.13) для значения параметра $\alpha/D = 1$ и безразмерного времени $\tau = Dt = 0,1$ и 1 приведены на рис. 2.5. Характерной особенностью этого распределения является появление длинного пологого «хвоста» при $\tau = 1$, означающего усиление роли больших выбросов процесса $y(t; \alpha)$ в формировании одновременной статистики. Соответственно, интегральная функция распределения, согласно (9.3), (9.4) определяется выражением

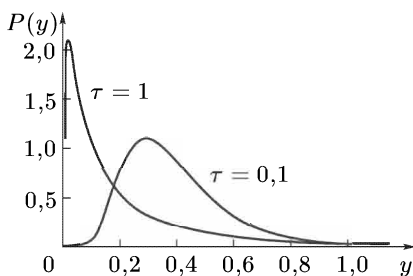


Рис. 2.5. Логарифмически нормальная плотность вероятностей (9.13) для значения параметра $\alpha/D = 1$ и безразмерного времени $\tau = 0,1$ и 1

$$F(y, t; \alpha) = P(y(t; \alpha) < y) = P(w(t; \alpha) < \ln y) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\ln y} dw P(w, t; \alpha) = \Phi \left(\frac{1}{\sqrt{2Dt}} \ln(ye^{\alpha t}) \right). \quad (9.14)$$

Зная только одноточечные статистические характеристики процесса $y(t; \alpha)$ можно получить важную информацию о поведении реализации процесса $y(t; \alpha)$ на всем интервале времен $(0, \infty)$. В частности:

1. Зная интегральную функцию распределения, можно вычислить типичную реализацию логнормального процесса $y(t; \alpha)$ (см. гл. 3), которая оказывается экспоненциально спадающей кривой

$$y^*(t; \alpha) = e^{-\alpha t}. \quad (9.15)$$

2. Логнормальный процесс $y(t; \alpha)$ является марковским процессом и его одновременная плотность вероятностей (9.13) описывается уравнением Фоккера–Планка

$$\frac{\partial}{\partial t} P(y, t; \alpha) = \alpha \frac{\partial}{\partial y} y P(y, t; \alpha) + D \frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial}{\partial y} y P(y, t; \alpha), \quad (9.16)$$

$$P(y, 0; \alpha) = \delta(y - 1).$$

Исходя из уравнения (9.16) легко написать уравнения для моментных функций процесса $y(t; \alpha)$, решение которых определяются равенствами

$$\langle y^n(t; \alpha) \rangle = e^{n(n-\alpha/D)Dt}, \quad \langle y^{-n}(t; \alpha) \rangle = e^{n(n+\alpha/D)Dt}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (9.17)$$

и экспоненциально растут во времени. Следовательно, экспоненциальный рост моментов обусловлен выбросами процесса $y(t; \alpha)$ относительно кривой типичной реализации $y^*(t; \alpha)$ как в сторону больших, так и в сторону малых значений y .

Для значения параметра $\alpha/D = 1$ среднее значение процесса $y(t; D)$ не зависит от времени и равно единице. При этом, однако, вероятность выполнения неравенства $y < 1$ при $Dt \gg 1$, согласно (9.14), быстро стремится к единице по закону

$$P(y(t; D) < 1) = \Phi\left(\sqrt{\frac{Dt}{2}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi Dt}} e^{-Dt/4},$$

т. е. подавляющее время графики реализаций процесса лежат ниже уровня его среднего значения $\langle y(t; D) \rangle = 1$, хотя статистические моменты процесса $y(t; D)$ в основном и определяются его большими выбросами.

Таким образом, мы имеем явное противоречие между характером поведения статистических характеристик процесса $y(t; \alpha)$ и его реализаций.

3. Поведение реализаций процесса $y(t; \alpha)$ на всем интервале времени можно также оценить с помощью *p-мажорантных кривых* $M_p(t, \alpha)$, которые определим следующим образом. Назовем мажорантной кривой такую кривую $M_p(t, \alpha)$, для которой при любых значениях времени t с вероятностью p выполняется неравенство

$$y(t; \alpha) < M_p(t, \alpha),$$

т. е.

$$P\{y(t; \alpha) < M_p(t, \alpha) \text{ для всех } t \in (0, \infty)\} = p.$$

Полученная выше статистика абсолютного максимума (9.11) винеровского процесса со сносом $w(t; \alpha)$ позволяет указать достаточно богатый класс мажорантных кривых. В самом деле, пусть вероятность того, что абсолютный максимум $w_{\max}(\beta)$ вспомогательного процесса $w(t; \beta)$ удовлетворяет неравенству

$$w(t; \beta) < h = \ln A$$

(с произвольным значением параметра β , лежащим в пределах $0 < \beta < \alpha$) равна p . Тогда, очевидно, с той же вероятностью p вся реализация

процесса $y(t; \alpha)$ будет лежать ниже мажорантной кривой

$$M_p(t, \alpha, \beta) = A e^{(\beta - \alpha)t}. \quad (9.18)$$

Как видно из (9.11), вероятность, с которой процесс $y(t; \alpha)$ нигде не превышает мажорантной кривой (9.18), следующим образом зависит от ее параметров:

$$p = 1 - A^{-\beta/D}$$

и, следовательно, мы получаем однопараметрический класс экспоненциально спадающих мажорантных кривых:

$$M_p(t, \alpha, \beta) = \frac{1}{(1-p)^{D/\beta}} e^{(\beta - \alpha)t}. \quad (9.19)$$

Обратим внимание на тот замечательный факт, что, несмотря на постоянство статистического среднего $\langle y(t; D) \rangle = 1$ и экспоненциальный рост высших моментов процесса $y(t; D)$, всегда можно указать экспоненциально спадающую мажорантную кривую (9.19), ниже которой будут лежать реализации процесса $y(t; D)$ с любой наперед заданной вероятностью $p < 1$. В частности, например, с вероятностью $p = 1/2$ выполняется неравенство

$$y(t; D) < M_{1/2}(t, D, D/2) = 4e^{-Dt/2} \quad (9.20)$$

для любого момента времени t из интервала $(0, \infty)$. Это еще раз подтверждает сделанный ранее вывод о том, что экспоненциальный рост моментов процесса $y(t; D)$ во времени — эффект чисто статистический, обусловленный усреднением по всему ансамблю реализаций.

Отметим, что площадь под экспоненциально убывающими мажорантными кривыми конечна. Следовательно, большие выбросы процесса $y(t; \alpha)$, вызывая экспоненциальный рост высших моментов, не вносят существенного вклада в площадь под реализациями, которая практически для всех реализаций также конечна, т. е. выбросы логнормального процесса $y(t; \alpha)$ достаточно узки.

4. В связи со сказанным представляется интересным исследовать непосредственно статистику случайной площади под реализациями процесса $y(t; \alpha)$:

$$S_n(t; \alpha) = \int_0^t d\tau y^n(\tau; \alpha). \quad (9.21)$$

Легко показать, что при $t \rightarrow \infty$ существует стационарная плотность вероятностей для случайных интегралов $S_n(\alpha) = \int_0^\infty d\tau y^n(\tau; \alpha)$:

$$P(S_n; \alpha) = \frac{1}{(n^2 D)^{\alpha/nD} \Gamma\left(\frac{\alpha}{D}\right) S_n^{1+\alpha/D}} \exp\left\{-\frac{1}{n^2 D S_n}\right\},$$

где $\Gamma(z)$ — *гамма-функция*. В частности, при $n = 1$ для величины

$$S(\alpha) = S_1(\alpha) = \int_0^\infty d\tau y(\tau; \alpha)$$

имеем

$$P(S; \alpha) = \frac{1}{D^{\alpha/D} \Gamma\left(\frac{\alpha}{D}\right) S^{1+\alpha/D}} \exp\left\{-\frac{1}{DS}\right\}. \quad (9.22)$$

Если теперь и параметр $\alpha = D$, то стационарная плотность вероятностей и соответствующая ей интегральная функция распределения имеют вид

$$P(S; D) = \frac{1}{DS^2} \exp\left\{-\frac{1}{DS}\right\}, \quad F(S; D) = \exp\left\{-\frac{1}{DS}\right\}. \quad (9.23)$$

Все эти свойства логнормального процесса проявляются в динамике конкретных физических систем в виде когерентных явлений — *локализации* и *кластеризации*.

9.3. Интегральные преобразования

Весьма мощным методом решения уравнения Фоккера–Планка является метод, основанный на использовании интегральных преобразований. Так, как указывалось ранее, если тензор коэффициентов диффузии $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; t)$ в (8.10) не зависит от $\mathbf{x}$, то можно использовать интегральное преобразование Фурье. В других случаях используются интегральные преобразования, связанные с собственными функциями диффузионного оператора

$$\hat{L} = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; t).$$

Например, для оператора Лежандра

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - 1) \frac{\partial}{\partial x}$$

естественно воспользоваться интегральным преобразованием, связанным с функциями Лежандра. Это преобразование называется *преобразованием Меллера–Фока* и определяется посредством интеграла

$$F(\mu) = \int_1^{\infty} dx f(x) P_{-1/2+i\mu}(x) \quad (\mu > 0), \quad (9.24)$$

где $P_{-1/2+i\mu}(x)$ — функция Лежандра первого рода, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d}{dx} (x^2 - 1) \frac{d}{dx} P_{-1/2+i\mu}(x) = - \left(\mu^2 + \frac{1}{4} \right) P_{-1/2+i\mu}(x). \quad (9.25)$$

Формула обращения для преобразования (9.24) имеет вид

$$f(x) = \int_0^{\infty} d\mu \mu \tanh(\pi\mu) F(\mu) P_{-1/2+i\mu}(x). \quad (9.26)$$

Другое интегральное преобразование, называемое интегральным *преобразованием Канторовича–Лебедева*, связано с диффузионным оператором

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial x} x^2 \frac{\partial}{\partial x}$$

и имеет вид

$$F(\tau) = \int_0^{\infty} dx f(x) K_{i\tau}(x) \quad (\tau > 0),$$

где $K_{i\tau}(x)$ — функция Макдональда первого рода, удовлетворяющая уравнению

$$\left(\frac{d}{dx} x^2 \frac{d}{dx} - x \frac{d}{dx} \right) K_{i\tau}(x) = (x^2 - \tau^2) K_{i\tau}(x). \quad (9.27)$$

Формула обращения при этом имеет вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2 x} \int_0^{\infty} d\tau \sinh(\pi\tau) F(\tau) K_{i\tau}(x). \quad (9.28)$$

9.4. Стационарные решения уравнения Фоккера–Планка

Выше мы говорили об общих методах решения уравнения Фоккера–Планка как для плотности вероятностей перехода, так и для одноточечной плотности вероятностей. Задача о нахождении одноточечной

плотности вероятностей, однако, может иметь и специфические черты, связанные с возможностью существования стационарного решения, которое в ряде случаев удается найти непосредственно. Это стационарное решение, если оно существует, не зависит от начальных условий и представляет собой предельное при $t \rightarrow \infty$ решение уравнения Фоккера–Планка.

Существуют два класса задач, для которых стационарное решение уравнения Фоккера–Планка находится легко. Это, во-первых, случай одномерных нелинейных уравнений и, во-вторых, случай гамильтоновых систем уравнений. Рассмотрим эти случаи более подробно.

9.4.1. Одномерное нелинейное уравнение. Одномерные нелинейные системы с флуктуирующими параметрами описываются стохастическим уравнением

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x) + z(t)g(x), \quad x(0) = x_0,$$

где, как и ранее, $z(t)$ — гауссов дельта-коррелированный процесс с параметрами

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad \langle z(t)z(t') \rangle = 2D\delta(t - t') \quad (D = \sigma_z^2 \tau_0).$$

Соответствующее уравнение Фоккера–Планка имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \{f(x)P(x, t)\} + D \frac{\partial}{\partial x} g(x) \frac{\partial}{\partial x} g(x) P(x, t).$$

Стационарное распределение вероятностей $P(x)$, если оно существует, удовлетворяет уравнению

$$f(x)P(x) = Dg(x) \frac{d}{dx} g(x)P(x)$$

(мы считаем, что $P(x)$ сосредоточено во всей области пространства, т. е. $-\infty < x < \infty$), решение которого таково:

$$P(x) = \frac{C}{|g(x)|} \exp \left\{ \frac{1}{D} \int dx \frac{f(x)}{g^2(x)} \right\}, \quad (9.29)$$

где постоянная C определяется из условия нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} dx P(x) = 1$.

В частном случае уравнения Ланжевена (8.21) ($f(x) = -\lambda x$, $g(x) = 1$) выражение (9.29) принимает вид гауссового распределения вероятностей

$$P(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi D}} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2D} x^2 \right\}. \quad (9.30)$$

9.4.2. Гамильтоновы системы. Другой тип уравнений, позволяющий получать стационарное распределение вероятностей, описывается

гамильтоновой системой с линейным трением:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \mathbf{r}_i(t) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} H(\{\mathbf{r}_i\}, \{\mathbf{p}_i\}), \\ \frac{d}{dt} \mathbf{p}_i(t) &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} H(\{\mathbf{r}_i\}, \{\mathbf{p}_i\}) - \lambda \mathbf{p}_i + \mathbf{f}_i(t),\end{aligned}\quad (9.31)$$

где $i = 1, 2, \dots, N$, а функция Гамильтона

$$H(\{\mathbf{r}_i\}, \{\mathbf{p}_i\}) = \frac{\mathbf{p}_i^2}{2} + U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N),$$

λ — постоянный коэффициент (трение), а случайные силы $\mathbf{f}_i(t)$ — гауссовы дельта-коррелированные случайные векторные функции с тензором корреляций

$$\langle f_i^\alpha(t) f_j^\beta(t') \rangle = 2D \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} \delta(t - t'), \quad D = \sigma_f^2 \tau_0. \quad (9.32)$$

Здесь α и β — векторные индексы.

Система уравнений (9.31) описывает броуновское движение системы N взаимодействующих частиц. Уравнение Фоккера–Планка для совместной плотности вероятностей решения системы (9.31) имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} P(\{\mathbf{r}_i\}, \{\mathbf{p}_i\}, t) + \sum_{k=1}^N \{H, P\}_{(k)} - \lambda \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_k} \{\mathbf{p}_k P\} = \\ = D \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}_k^2} P(\{\mathbf{r}_i\}, \{\mathbf{p}_i\}, t),\end{aligned}\quad (9.33)$$

где

$$\{\varphi, \psi\}_{(k)} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{p}_k} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}_k} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{p}_k} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_k}$$

— скобка Пуассона для k -й частицы.

Легко проверить, что стационарное решение уравнения (9.33) имеет вид *канонического распределения Гиббса*:

$$P(\{\mathbf{r}_i\}, \{\mathbf{p}_i\}) = C \exp \left\{ -\frac{\lambda}{D} H(\{\mathbf{r}_i\}, \{\mathbf{p}_i\}) \right\}. \quad (9.34)$$

Характерной чертой этого распределения является гауссовость по импульсным переменным и статистическая независимость координат и импульсов частиц.

Проинтегрировав (9.34) по всем $\mathbf{r}$, можно получить *максвелловское распределение* по скоростям, описывающее флуктуации скорости броуновских частиц. Случай $U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = 0$ соответствует описанию броуновского движения свободных частиц (9.30).

Если проинтегрировать распределение вероятностей (9.34) по импульсам (скоростям), то получаем *больцмановское распределение* по

координатам частицы

$$P(\{\mathbf{r}_i\}) = C \exp \left\{ -\frac{\lambda}{D} U(\{\mathbf{r}_i\}) \right\}. \quad (9.35)$$

При этом, при достаточно большом коэффициенте трения, равновесное распределение (9.34) устанавливается в две стадии. Сперва достаточно быстро устанавливается гауссово распределение по импульсам (максвелловское распределение), а затем уже значительно медленнее устанавливается распределение по пространственной координате (больцмановское распределение). Последняя стадия описывается при этом уравнением Фоккера–Планка

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\{\mathbf{r}_i\}, t) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_k} \left(\frac{\partial U(\{\mathbf{r}_i\})}{\partial \mathbf{r}_k} P(\{\mathbf{r}_i\}, t) \right) + \frac{D}{\lambda^2} \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}_k^2} P(\{\mathbf{r}_i\}, t), \quad (9.36)$$

которое обычно называется *уравнением Эйнштейна–Смолуховского*. Переход от уравнения Фоккера–Планка (9.33) к уравнению (9.36) также называется *проблемой Крамерса*. Отметим, что уравнению (9.36) статистически эквивалентно стохастическое уравнение

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}_i(t) = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} U(\{\mathbf{r}_i\}) + \frac{1}{\lambda} \mathbf{f}_i(t),$$

которое, однако, нельзя рассматривать как предел уравнения (9.31) при $\lambda \rightarrow \infty$.

В одномерном случае уравнения (9.31) упрощаются и принимают вид системы уравнений

$$\frac{d}{dt} x(t) = y(t), \quad \frac{d}{dt} y(t) = -\frac{\partial}{\partial x} U(x) - \lambda y(t) + f(t), \quad (9.37)$$

стационарное распределение вероятностей для которой имеет вид

$$P(x, y) = C \exp \left\{ -\frac{\lambda}{D} H(x, y) \right\}, \quad H(x, y) = \frac{y^2}{2} + U(x). \quad (9.38)$$

9.5. Краевые задачи для уравнения Фоккера–Планка (статистическое описание явления переброса)

Уравнения Фоккера–Планка являются уравнениями в частных производных, и для них, вообще говоря, необходимо ставить краевые условия в зависимости от того, какие задачи рассматриваются. При этом можно исходить как из прямого уравнения Фоккера–Планка, так и из обратного, которое ему эквивалентно. Рассмотрим один типичный пример.

Рассмотрим нелинейный осциллятор с трением, описываемый уравнением

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + \lambda \frac{d}{dt} x(t) + \omega_0^2 x(t) + \beta x^3(t) = f(t) \quad (\beta, \lambda > 0), \quad (9.39)$$

где случайную силу $f(t)$ считаем гауссовой дельта-коррелированной случайной функцией с параметрами

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad \langle f(t)f(t') \rangle = 2D\delta(t-t') \quad (D = \sigma_f^2 \tau_0).$$

При $\lambda = 0$ и $f(t) = 0$ это уравнение называется *уравнением Дюффинга*.

Уравнение (9.39) можно переписать в стандартной форме гамильтоновой системы для функций $x(t)$ и $v(t) = \frac{d}{dt} x(t)$:

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{\partial}{\partial v} H(x, v), \quad \frac{d}{dt} v(t) = -\frac{\partial}{\partial x} H(x, v) - \lambda v + f(t),$$

где функция Гамильтона

$$H(x, v) = \frac{v^2}{2} + U(x), \quad U(x) = \frac{\omega_0^2 x^2}{2} + \beta \frac{x^4}{4}.$$

Стационарное решение соответствующего уравнения Фоккера–Планка, согласно (9.38), имеет вид

$$P(x, v) = C \exp \left\{ -\frac{\lambda}{D} H(x, v) \right\}. \quad (9.40)$$

Из вида этого распределения ясно, что стационарное распределение вероятностей для $v(t)$ является гауссовым, а распределение вероятностей для величины $x(t)$ негауссово, и они не коррелируют между собой. Интегрируя (9.40) по v , получаем стационарное распределение вероятностей для $x(t)$:

$$P(x, v) = C \exp \left\{ -\frac{\lambda}{D} \left(\frac{\omega_0^2 x^2}{2} + \beta \frac{x^4}{4} \right) \right\}.$$

Это распределение имеет максимум в точке $x = 0$, соответствующей положению устойчивого равновесия.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + \lambda \frac{d}{dt} x(t) - \omega_0^2 x(t) + \beta x^3(t) = f(t) \quad (\beta, \lambda > 0). \quad (9.41)$$

В этом случае стационарное распределение вероятностей имеет тот же вид (9.40), где теперь

$$H(x, v) = \frac{v^2}{2} + U(x), \quad U(x) = -\frac{\omega_0^2 x^2}{2} + \beta \frac{x^4}{4}.$$

Стационарное распределение вероятностей для величины $x(t)$ принимает теперь вид

$$P(x, v) = C \exp \left\{ -\frac{\lambda}{D} \left(-\frac{\omega_0^2 x^2}{2} + \beta \frac{x^4}{4} \right) \right\} \quad (9.42)$$

и имеет максимумы в точках $x = \pm \sqrt{\omega_0^2/\beta}$ и минимум в точке $x = 0$, соответствующие устойчивым и неустойчивой точкам равновесия задачи (9.41) при $f(t) = 0$. При этом, как указывалось ранее, установление распределения (9.42) описывается уравнением Эйнштейна–Смолуховского (9.36), которое в нашем случае имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U(x)}{\partial x} P(x, t) \right) + \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t), \quad (9.43)$$

которому статистически эквивалентно динамическое уравнение

$$\frac{d}{dt} x(t) = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial U(x)}{\partial x} + \frac{1}{\lambda} f(t). \quad (9.44)$$

Распределение вероятностей (9.42) соответствует усреднению по ансамблю реализаций случайного процесса $f(t)$. Если же имеется одна реализация, то система с вероятностью $1/2$ придет в одно из положений, соответствующих максимуму распределения. В этом случае будет формироваться распределение вероятностей (усреднение по времени) в окрестности положения максимума. Однако благодаря существованию достаточно больших значений функции $f(t)$ система будет переброшена из окрестности одного максимума в окрестность другого максимума по прошествии некоторого времени T (тем большего, чем меньше D). Таким образом, распределение вероятностей (9.43) будет формироваться только за время $t \gg T$.

Вводя безразмерные координату $x \rightarrow \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\beta}} x$ и время $t \rightarrow \frac{\lambda}{\omega_0^2} t$ уравнение (9.43) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U(x)}{\partial x} P(x, t) \right) + \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t), \quad (9.45)$$

где

$$\mu = \frac{\beta D}{\lambda \omega_0^4}, \quad U(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}.$$

При этом эквивалентное стохастическое уравнение (9.44) принимает вид уравнения (1.10) первой главы книги:

$$\frac{d}{dt} x(t) = -x(1 - x^2) + f(t). \quad (9.46)$$

Оценим время, за которое система перейдет из одного наиболее вероятного состояния ($x = -1$) в другое ($x = 1$).

Пусть в момент времени t_0 система, описываемая стохастическим уравнением (9.46), находилась в точке внутри интервала (a, b) . Соответствующая вероятность выхода из этого интервала

$$\tilde{G}(t; x_0, t_0) = 1 - \int_a^b dx p(x, t | x_0, t_0)$$

описывается уравнением (8.20), вытекающим из обратного уравнения Фоккера–Планка (8.19), т. е. уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \tilde{G}(t; x_0, t_0) = \frac{\partial U(x_0)}{\partial x_0} \frac{\partial}{\partial x_0} \tilde{G}(t; x_0, t_0) - \mu \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \tilde{G}(t; x_0, t_0)$$

с краевыми условиями

$$\tilde{G}(t; x_0, t) = 0, \quad \tilde{G}(t; a, t_0) = \tilde{G}(t; b, t_0) = 1.$$

Учитывая, что в нашей задаче $\tilde{G}(t; x_0, t_0) = \tilde{G}(t - t_0; x_0)$, эту краевую задачу можно переписать в виде краевой задачи $(t - t_0) = \tau$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{G}(\tau; x_0) &= \frac{\partial U(x_0)}{\partial x_0} \frac{\partial}{\partial x_0} \tilde{G}(\tau; x_0) - \mu \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \tilde{G}(\tau; x_0), \\ \tilde{G}(0; x_0) &= 0, \quad \tilde{G}(\tau; a) = \tilde{G}(\tau; b) = 1 \quad \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tilde{G}(\tau; x_0) = 0 \right). \end{aligned} \quad (9.47)$$

Из (9.47) легко видеть, что среднее время выхода системы из интервала (a, b) ,

$$T(x_0) = \int_0^\infty d\tau \tau \frac{\partial \tilde{G}(\tau; x_0)}{\partial \tau},$$

удовлетворяет краевой задаче

$$\mu \frac{d^2 T(x_0)}{dx_0^2} - \frac{dU(x_0)}{dx_0} \frac{dT(x_0)}{dx_0} = -1, \quad T(a) = T(b) = 0. \quad (9.48)$$

Уравнение (9.48) легко решается, и мы получаем для среднего времени перехода системы под действием случайных сил из состояния $x_0 = -1$ в состояние $x_0 = 1$, которое обычно называется *временем Крамерса*, выражение

$$T = \frac{1}{\mu} \int_{-1}^1 d\xi \int_{-\infty}^{\xi} d\eta \exp \left\{ \frac{1}{\mu} [U(\xi) - U(\eta)] \right\} = \frac{C(\mu)}{\mu} \int_0^1 d\xi \exp \left\{ \frac{1}{\mu} U(\xi) \right\}, \quad (9.49)$$

где

$$C(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp \left\{ \frac{1}{\mu} U(\xi) \right\}.$$

При $\mu \ll 1$

$$T \approx \sqrt{2\pi} \exp \left\{ \frac{1}{4\mu} \right\},$$

т. е. среднее время перехода растет экспоненциально с уменьшением интенсивности флуктуаций силы.

9.6. Метод усреднения по быстрым осцилляциям

Если флуктуации параметров динамической системы достаточно малы, то возможно использовать различные асимптотические и приближенные методы анализа уравнения Фоккера–Планка. Остановимся подробнее на одном из таких методов, наиболее часто используемом в статистическом анализе.

Пусть, например, стохастическая система описывается динамическими уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= A(x, \tilde{\varphi}) + z(t)B(x, \tilde{\varphi}), \\ \frac{d}{dt} \varphi(t) &= C(x, \tilde{\varphi}) + z(t)D(x, \tilde{\varphi}), \end{aligned} \quad (9.50)$$

где $\tilde{\varphi}(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$, функции $A(x, \tilde{\varphi})$, $B(x, \tilde{\varphi})$, $C(x, \tilde{\varphi})$, и $D(x, \tilde{\varphi})$ — периодические функции по переменной $\tilde{\varphi}$, а $z(t)$ — гауссов дельта-коррелированный процесс с параметрами

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad \langle z(t)z(t') \rangle = 2D\delta(t - t'), \quad D = \sigma^2\tau_0.$$

Переменная $x(t)$ может, например, быть модулем вектора, а $\varphi(t)$ — его фазой.

Для системы уравнений (9.50) соответствующее уравнение Фоккера–Планка имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, \varphi, t) &= -\frac{\partial}{\partial x} A(x, \tilde{\varphi})P(x, \varphi, t) - \frac{\partial}{\partial \varphi} C(x, \tilde{\varphi})P(x, \varphi, t) + \\ &+ D \left[\frac{\partial}{\partial x} B(x, \tilde{\varphi}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} D(x, \tilde{\varphi}) \right]^2 P(x, \varphi, t). \end{aligned} \quad (9.51)$$

Перепишем его в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} P(x, \varphi, t) = & -\frac{\partial}{\partial x} A(x, \tilde{\varphi}) P(x, \varphi, t) - \frac{\partial}{\partial \varphi} C(x, \tilde{\varphi}) P(x, \varphi, t) - \\
 & - D \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial B^2(x, \tilde{\varphi})}{2\partial x} + \frac{\partial B(x, \tilde{\varphi})}{\partial \tilde{\varphi}} D(x, \tilde{\varphi}) \right) \right\} P(x, \varphi, t) - \\
 & - D \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial D(x, \tilde{\varphi})}{\partial x} B(x, \tilde{\varphi}) + \frac{\partial D^2(x, \tilde{\varphi})}{2\partial \tilde{\varphi}} \right) \right\} P(x, \varphi, t) + \\
 & + D \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} B^2(x, \tilde{\varphi}) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi} B(x, \tilde{\varphi}) D(x, \tilde{\varphi}) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} D^2(x, \tilde{\varphi}) \right\} P(x, \varphi, t).
 \end{aligned} \tag{9.52}$$

Пусть теперь функции $A(x, \tilde{\varphi})$ и $C(x, \tilde{\varphi})$ достаточно малы, а также мала интенсивность флуктуаций $z(t)$. В этом случае статистические характеристики системы уравнений (9.50) мало меняются на временах $\sim 1/\omega_0$. И для изучения таких малых изменений (накапливающихся эффектов) можно усреднить уравнение (9.52) по периоду колебаний всех функций. Считая, что сама функция $P(x, \varphi, t)$ при этом не меняется, получаем уравнение

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \overline{P(x, \varphi, t)} = & -\frac{\partial}{\partial x} \overline{A(x, \tilde{\varphi}) P(x, \varphi, t)} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \overline{C(x, \tilde{\varphi}) P(x, \varphi, t)} - \\
 & - D \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\overline{\frac{\partial B^2(x, \tilde{\varphi})}{2\partial x} + \frac{\partial B(x, \tilde{\varphi})}{\partial \tilde{\varphi}} D(x, \tilde{\varphi})} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \overline{\frac{\partial D(x, \tilde{\varphi})}{\partial x} B(x, \tilde{\varphi})} \right\} \times \\
 & \times \overline{P(x, \varphi, t)} + \\
 & + D \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \overline{B^2(x, \tilde{\varphi})} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi} \overline{B(x, \tilde{\varphi}) D(x, \tilde{\varphi})} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \overline{D^2(x, \tilde{\varphi})} \right\} \times \\
 & \times \overline{P(x, \varphi, t)}, \tag{9.53}
 \end{aligned}$$

где чертой обозначены величины, усредненные по периоду колебаний.

Интегрируя уравнение (9.53) по φ , получаем для функции $\overline{P(x, t)}$ уравнение Фоккера–Планка

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \overline{P(x, \varphi, t)} = & -\frac{\partial}{\partial x} \overline{A(x, \tilde{\varphi}) P(x, \varphi, t)} + \\
 & + D \frac{\partial}{\partial x} \left(\overline{\frac{\partial B^2(x, \tilde{\varphi})}{2\partial x} + \frac{\partial B(x, \tilde{\varphi})}{\partial \tilde{\varphi}} D(x, \tilde{\varphi})} \right) \overline{P(x, \varphi, t)} + \\
 & + D \frac{\partial}{\partial x} \overline{B^2(x, \tilde{\varphi})} \frac{\partial}{\partial x} \overline{P(x, \varphi, t)}. \tag{9.54}
 \end{aligned}$$

Отметим, что в этом приближении величина $x(t)$ является марковским одномерным случайным процессом.

Если же в уравнении (9.53)

$$\overline{B(x, \tilde{\varphi}) D(x, \tilde{\varphi})} = \overline{\frac{\partial D(x, \tilde{\varphi})}{\partial x}} B(x, \tilde{\varphi}) = 0,$$

а $\overline{C(x, \tilde{\varphi})} = \text{const}$, $\overline{D^2(x, \tilde{\varphi})} = \text{const}$, то процессы $x(t)$ и $\varphi(t)$ статистически независимы и процесс $\varphi(t)$ является марковским гауссовым процессом, дисперсия которого линейно растет с ростом времени t . Это означает, что при больших t (при $\overline{C(x, \tilde{\varphi})} = 0$) распределение вероятностей для величины $\varphi(t)$ становится равномерным на отрезке $[0, 2\pi]$.

Задачи

Задача 51. Получить уравнение для одновременной плотности вероятностей, описывающей статистику случайной площади под реализациями логнормального процесса $y(t; \alpha)$ (9.12):

$$S_n(t; \alpha) = \int_0^t d\tau y^n(\tau; \alpha).$$

Указание. Показать, что для одновременной статистики величина $S_n(t; \alpha)$ статистически эквивалентна величине

$$S_n(t; \alpha) = \int_0^t d\tau \exp \left\{ -n\alpha(t - \tau) + n \int_0^{t-\tau} d\tau_1 z(\tau + \tau_1) \right\},$$

которая описывается стохастическим уравнением первого порядка

$$\frac{d}{dt} S_n(t; \alpha) = 1 - n\{\alpha - z(t)\} S_n(t; \alpha), \quad S_n(0; \alpha) = 0.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(S_n, t; \alpha) = \\ = \left\{ -\frac{\partial}{\partial S_n} + n\alpha \frac{\partial}{\partial S_n} S_n + n^2 D \frac{\partial}{\partial S_n} S_n \frac{\partial}{\partial S_n} S_n \right\} P(S_n, y, t; \alpha), \end{aligned}$$

$$P(S_n, 0; \alpha) = \delta(S_n).$$

Задача 52. Показать, что при $t \rightarrow \infty$ существует стационарная плотность вероятностей (9.22) для случайных интегралов $S_n(\alpha) = \int_0^\infty d\tau y^n(\tau; \alpha)$.

Задача 53. Получить выражения для плотности вероятностей и интегральной функции распределения вероятностей для стохастической величины

$$\tilde{S}(t, \alpha) = \int_t^{\infty} d\tau y(\tau; \alpha), \quad (9.55)$$

где $y(t; \alpha)$ — логнормальный случайный процесс.

Указание. Интеграл (9.55) представить в виде

$$\tilde{S}(t, \alpha) = y(t; \alpha) \int_0^{\infty} d\tau \exp \left\{ -\alpha\tau + \int_0^{\tau} d\tau_1 z(\tau_1 + t) \right\}. \quad (9.56)$$

Тогда случайный процесс $y(t; \alpha)$ в (9.56) статистически не зависит от интеграла, стоящего в правой части (9.56), так как они функционально зависят от случайного процесса $z(\tau)$ в не перекрывающихся интервалах значений τ , и при этом сам интеграл статистически эквивалентен случайной величине $S(\alpha)$.

Решение.

$$P(\tilde{S}, t; \alpha) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dy dS \delta(yS - \tilde{S}) P(y, t; \alpha) = \int_0^{\infty} \frac{dy}{y} P(y, t; \alpha) P(\tilde{S}/y; \alpha),$$

где $P(y, t; \alpha)$ — одновременная плотность вероятностей логнормального процесса $y(t; \alpha)$, описываемая формулой (9.13), а $P(\tilde{S}/y; \alpha)$ — плотность вероятностей для площади (9.22) при $n = 1$.

Задача 54. Решить уравнение Фоккера–Планка

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(x, t | x_0, t_0) &= D \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - 1) \frac{\partial}{\partial x} p(x, t | x_0, t_0) \quad (x \geq 1), \\ p(x, t_0 | x_0, t_0) &= \delta(x - x_0). \end{aligned}$$

Указание. Использовать интегральное преобразование Меллера–Фока.

Решение.

$$\begin{aligned} p(x, t | x_0, t_0) &= \int_0^{\infty} d\mu \mu \tanh(\pi\mu) \exp \left\{ -D \left(\mu^2 + \frac{1}{4} \right) (t - t_0) \right\} \times \\ &\quad \times P_{-1/2+i\mu}(x) P_{-1/2+i\mu}(x_0). \end{aligned}$$

Если в начальный момент времени $t_0 = 0$ величина $x_0 = 1$, то

$$P(x, t) = \int_0^\infty d\mu \mu \tanh(\pi\mu) \exp \left\{ -D \left(\mu^2 + \frac{1}{4} \right) (t - t_0) \right\} P_{-1/2+i\mu}(x).$$

Задача 55. Для стохастической задачи с сингулярными особенностями, описываемой уравнением (1.13) ($\lambda = 1$),

$$\frac{d}{dt} x(t) = -x^2(t) + f(t), \quad x(0) = x_0, \quad (9.57)$$

где $f(t)$ — гауссов дельта-коррелированный во времени процесс с параметрами

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad \langle f(t)f(t') \rangle = 2D\delta(t - t') \quad (D = \sigma_f^2 \tau_0),$$

оценить среднее время, за которое система перейдет из состояния x_0 в состояние $(-\infty)$ и среднее время между двумя сингулярностями.

Решение.

$$\langle T(x_0) \rangle = \int_{-\infty}^{x_0} d\xi \int_{\xi}^{\infty} d\eta \exp \left\{ \frac{1}{3} (\xi^3 - \eta^3) \right\},$$

$$\langle T(\infty) \rangle = \sqrt{\pi} \frac{12^{1/6}}{3} \Gamma \left(\frac{1}{6} \right) \approx 4,976.$$

Задача 56. Получить стационарное распределение вероятностей для стохастической задачи (9.57).

Указание. Решать уравнение Фоккера–Планка при условии, что функция $x(t)$ разрывна и определена для всех значений времени t . При этом ее обращение в $(-\infty)$ в момент времени $t \rightarrow t_0 - 0$ немедленно сопровождается ее появлением при $t \rightarrow t_0 + 0$ со значением ∞ . Это соответствует краевому условию для уравнения Фоккера–Планка — условию непрерывности плотности потока вероятностей.

Решение.

$$P(x) = J \int_{-\infty}^x d\xi \exp \left\{ \frac{1}{3} (\xi^3 - x^3) \right\}, \quad (9.58)$$

где стационарная плотность потока вероятностей

$$J = \frac{1}{\langle T(\infty) \rangle}.$$

Замечание. Для больших значений x из (9.58) следует асимптотическая формула

$$P(x) \approx \frac{1}{\langle T(\infty) \rangle x^2}. \quad (9.59)$$

Задача 57. Показать, что асимптотическая формула (9.59) формируется разрывами функции $x(t)$.

Указание. Воспользоваться решением функции $x(t)$ в окрестности разрыва вида

$$x(t) = \frac{1}{t - t_k}.$$

Задача 58. Получить уравнение Фоккера–Планка для медленных изменений амплитуды и фазы решения задачи

$$\frac{d}{dt} x(t) = y(t), \quad \frac{d}{dt} y(t) = -2\gamma y(t) - \omega_0^2 [1 + z(t)] x(t), \quad (9.60)$$

где $z(t)$ — гауссов процесс с параметрами

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad \langle z(t) z(t') \rangle = 2\sigma^2 \tau_0 \delta(t - t').$$

Указание. Ввести вместо функций $x(t)$ и $y(t)$ новые переменные — амплитуду и фазу колебаний — с помощью равенств

$$x(t) = A(t) \sin(\omega_0 t + \varphi(t)), \quad y(t) = \omega_0 A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)),$$

и представить амплитуду $A(t)$ в виде $A(t) = e^{u(t)}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{P(t; u, \varphi)} &= \gamma \frac{\partial}{\partial u} \overline{P(t; u, \varphi)} - \frac{D}{4} \frac{\partial}{\partial u} \overline{P(t; u, \varphi)} + \\ &+ \frac{D}{8} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \overline{P(t; u, \varphi)} + \frac{3D}{8} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \overline{P(t; u, \varphi)}, \end{aligned} \quad (9.61)$$

где $D = \sigma^2 \tau_0 \omega_0^2$. Из уравнения (9.61) следует, что статистические характеристики амплитуды и фазы колебаний (усредненные по периоду колебаний) статистически независимы и соответствующие плотности вероятностей являются гауссовыми

$$\begin{aligned} \overline{P(t; u)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2(t)}} \exp \left\{ -\frac{(u - \langle u(t) \rangle)^2}{2\sigma_u^2(t)} \right\}, \\ \overline{P(t; \varphi)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varphi^2(t)}} \exp \left\{ -\frac{(\varphi - \varphi_0)^2}{2\sigma_\varphi^2(t)} \right\}, \end{aligned} \quad (9.62)$$

где

$$\begin{aligned} \langle u(t) \rangle &= u_0 - \gamma t + \frac{D}{4} t, \quad \sigma_u^2(t) = \frac{D}{4} t, \\ \langle \varphi(t) \rangle &= \varphi_0, \quad \sigma_\varphi^2(t) = \frac{3D}{4} t. \end{aligned} \quad (9.63)$$

Задача 59. Используя распределения вероятностей (9.62) вычислить величины $\langle x(t) \rangle$ и $\langle x^2(t) \rangle$. Получить условие стохастического возбуждения второго момента.

Решение. Для среднего значения получаем выражение

$$\langle x(t) \rangle = e^{-\gamma t} \sin(\omega_0 t),$$

совпадающее с решением задачи при отсутствии флуктуаций.

Для величины же $\langle x^2(t) \rangle$ получаем выражение

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{2} e^{(D-2\gamma)t} \left\{ 1 - e^{-3Dt/2} \cos(2\omega_0 t) \right\}, \quad (9.64)$$

совпадающее при отсутствии поглощения с выражением (6.73) гл. 6 с точностью до членов порядка $D/\omega_0 \ll 1$.

Задача 60. Получить условие статистического параметрического возбуждения функции $\langle A^n(t) \rangle$.

Решение. Для функции $\langle A^n(t) \rangle$ имеем

$$\langle A^n(t) \rangle = \langle e^{nu(t)} \rangle = A_0^n \exp \left\{ -n\gamma t + \frac{1}{8} n(n+2)Dt \right\},$$

и, следовательно, при выполнении условия

$$8\gamma < (n+2)D$$

стохастическая динамическая система статистически параметрически возбуждается начиная с моментной функции порядка n .

Замечание. Типичная реализация случайной амплитуды имеет вид

$$A^*(t) = A_0 \exp \left\{ - \left(\gamma - \frac{D}{4} \right) t \right\},$$

и при достаточно малом поглощении, а именно

$$1 < 4 \frac{\gamma}{D} < 1 + \frac{1}{2} n,$$

что выполняется для достаточно больших значений n , типичная реализация экспоненциально убывает во времени, в то время как все моментные функции случайной амплитуды $A(t)$ порядка n и выше, экспоненциально растут во времени. Это означает, что в этом случае статистика случайной амплитуды $A(t)$ формируется большими выбросами относительно экспоненциально спадающей типичной реализации. Это обстоятельство обусловлено логнормальностью случайной амплитуды $A(t)$.

Глава 10

ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЕЛЬТА- КОРРЕЛИРОВАННОГО ВО ВРЕМЕНИ ГАУССОВОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ (ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРИЧИННЫЕ УРАВНЕНИЯ)

Для задач, рассмотренных в предыдущем параграфе, удастся получить замкнутое статистическое описание в приближении дельта-коррелированного случайного поля благодаря тому факту, что эти задачи соответствуют системе дифференциальных уравнений первого порядка по времени с начальными условиями при $t = 0$. Для них выполняется условие динамической причинности, которое заключается в том, что решение задачи в момент времени t определяется только флуктуациями параметров системы в предшествующие моменты времени и не зависит от последующих.

Условие причинности, однако, может выполняться и для задач, описываемых интегральными уравнениями, которые, вообще говоря, не всегда сводятся к системе дифференциальных уравнений. Чтобы не загромождать изложение, рассмотрим простейший пример одномерно-го причинного уравнения ($t > t'$),

$$G(t; t') = g(t; t') + \Lambda \int_{t'}^t d\tau g(t; \tau) z(\tau) G(\tau; t'), \quad (10.1)$$

где функция $g(t; t')$ — функция Грина в отсутствие случайностей, а случайную функцию $z(t)$ считаем гауссовой функцией, дельта-коррелированной во времени, с параметрами

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad \langle z(t) z(t') \rangle = 2D \delta(t - t') \quad (D = \sigma_z^2 \tau_0). \quad (10.2)$$

В этом случае, при усреднении уравнения (10.1) по ансамблю реализаций случайной функции $z(t)$, получаем уравнение

$$\langle G(t; t') \rangle = g(t; t') + \Lambda \int_{t'}^t d\tau g(t; \tau) \langle z(\tau) G(\tau; t') \rangle. \quad (10.3)$$

Учитывая теперь равенство

$$\frac{\delta}{\delta z(t)} G(t; t') = g(t; t') \Lambda G(t; t'), \quad (10.4)$$

вытекающее из (10.1), корреляцию в правой части уравнения (10.3) можно записать в виде

$$\langle z(\tau) G(\tau; t') \rangle = D \left\langle \frac{\delta}{\delta z(\tau)} G(\tau; t') \right\rangle = \Lambda D g(\tau; \tau) \langle G(\tau; t') \rangle,$$

и мы видим, что уравнение (10.3) переходит в замкнутое интегральное уравнение для средней функции Грина,

$$\langle G(t; t') \rangle = g(t; t') + \Lambda^2 D \int_{t'}^t d\tau g(t; \tau) g(\tau; \tau) \langle G(\tau; t') \rangle, \quad (10.5)$$

которое, имеет форму *уравнения Дайсона* (по терминологии квантовой теории поля):

$$\langle G(t; t') \rangle = g(t; t') + \Lambda \int_{t'}^t d\tau g(t; \tau) \int_{t'}^{\tau} d\tau' Q(\tau; \tau') \langle G(\tau'; t') \rangle, \quad (10.6)$$

с *массовой функцией* вида $Q(\tau; \tau') = \Lambda^2 D g(\tau; \tau) \delta(\tau - \tau')$.

Получим теперь уравнение для корреляционной функции

$$\Gamma(t, t'; t_1, t'_1) = \langle G(t; t') G^*(t_1; t'_1) \rangle \quad (t > t', \quad t_1 > t'_1),$$

где $G^*(t; t')$ — комплексно сопряженная функция Грина. Для этого умножим уравнение (10.1) на $G^*(t_1; t'_1)$ и усредним по ансамблю реализаций случайной функции $z(t)$. В результате получаем уравнение, которое запишем в символическом виде

$$\Gamma = g \langle G^* \rangle + \Lambda g \langle z G G^* \rangle. \quad (10.7)$$

Учитывая уравнение Дайсона (10.6)

$$\langle G \rangle = \{1 + \langle G \rangle Q\} g,$$

подействуем на (10.7) оператором $\{1 + \langle G \rangle Q\}$. В результате получаем уравнение, записанное в символическом виде,

$$\Gamma = \langle G \rangle \langle G^* \rangle + \langle G \rangle \Lambda \{ \langle z G G^* \rangle - Q \Gamma \},$$

которое можно переписать в виде уравнения

$$\begin{aligned} \Gamma(t, t'; t_1, t'_1) = & \langle G(t; t') \rangle \langle G^*(t_1; t'_1) \rangle + \\ & + \Lambda D \int_0^t d\tau \langle G(t; \tau) \rangle \left[\left\langle \frac{\delta G(\tau; t')}{\delta z(\tau)} G^*(t_1; t'_1) + 2G(\tau; t') \frac{\delta G^*(t_1; t'_1)}{\delta z(\tau)} \right\rangle \right] - \\ & - \Lambda^2 D \int_0^t d\tau \langle G(t; \tau) \rangle g(\tau; \tau) \Gamma(\tau, t'; t_1, t'_1). \quad (10.8) \end{aligned}$$

При выводе уравнения (10.8) мы также воспользовались формулой (5.29) пятой главы для расщепления корреляций гауссового дельта-коррелированного процесса $z(t)$ с функционалами от него

$$\langle z(t') R[t; z(\tau)] \rangle = \begin{cases} D \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t)} R[t; z(\tau)] \right\rangle & (t' = t, \quad \tau < t), \\ 2D \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t')} R[t; z(\tau)] \right\rangle & (t' < t, \quad \tau < t). \end{cases}$$

Учитывая теперь формулу (10.4) и равенство

$$\frac{\delta}{\delta z(\tau)} G^*(t_1; t'_1) = \Lambda G^*(t_1; \tau) G^*(\tau; t'_1),$$

вытекающее из уравнения (10.1), уравнение (10.8) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Gamma(t, t'; t_1, t'_1) = & \langle G(t; t') \rangle \langle G^*(t_1; t'_1) \rangle + \\ & + 2|\Lambda|^2 D \int_0^t d\tau \langle G(t; \tau) \rangle \langle G^*(t_1; \tau) G(\tau; t') G^*(\tau; t'_1) \rangle. \quad (10.9) \end{aligned}$$

Теперь учтем то обстоятельство, что функция $G^*(t_1; \tau)$ функционально зависит от случайного процесса $z(\tilde{\tau})$ при $\tilde{\tau} \geq \tau$, а функции $G(\tau; t')$ и $G^*(\tau; t'_1)$ — при $\tilde{\tau} \leq \tau$ и для дельта-коррелированного процесса $z(\tilde{\tau})$ статистически независимы. Следовательно, уравнение (10.9) можно переписать в виде замкнутого уравнения ($t_1 \geq t$)

$$\begin{aligned} \Gamma(t, t'; t_1, t'_1) = & \langle G(t; t') \rangle \langle G^*(t_1; t'_1) \rangle + \\ & + 2|\Lambda|^2 D \int_0^t d\tau \langle G(t; \tau) \rangle \langle G^*(t_1; \tau) \rangle \Gamma(\tau, t'; \tau, t'_1). \quad (10.10) \end{aligned}$$

Задачи

Задача 61. Показать, что интегральное уравнение (10.1) эквивалентно уравнению в вариационных производных

$$\frac{\delta}{\delta z(\tau)} G(t, t') = G(t, \tau) \Lambda G(\tau, t') \quad (t' \leq \tau \leq t)$$

с «начальным» условием

$$G(t, t')|_{z(\tau)=0} = g(t, t').$$

Задача 62. Получить уравнение для корреляционной функции

$$\Gamma(t, t'; t_1, t') = \langle G(t; t') G^*(t_1; t') \rangle \quad (t > t', \quad t_1 > t'),$$

где $G^*(t; t')$ — комплексно сопряженная функция Грина решения одномерного причинного интегрального уравнения ($t > t'$) (10.1), где $z(t)$ — гауссова, дельта-коррелированная во времени случайная функция с параметрами (10.2).

Решение.

$$\begin{aligned} \Gamma(t, t'; t_1, t'_1) &= \langle G(t; t') \rangle \langle G^*(t_1; t'_1) \rangle + \\ &+ 2|\Lambda|^2 D \int_0^t d\tau \langle G(t; \tau) \rangle \langle G^*(t_1; \tau) \rangle \Gamma(\tau; t'; \tau; t'_1) \quad (t_1 \geq t). \end{aligned}$$

Часть III
ПРИМЕРЫ КОГЕРЕНТНЫХ
ЯВЛЕНИЙ
В СТОХАСТИЧЕСКИХ
ДИНАМИЧЕСКИХ
СИСТЕМАХ

Глава 11

КЛАСТЕРИЗАЦИЯ И ДИФФУЗИЯ ЧАСТИЦ И ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ В СЛУЧАЙНЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТОКАХ

Эволюция плотности консервативной пассивной примеси, движущейся в поле скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \right) \rho(\mathbf{r}, t) = \mu \Delta \rho(\mathbf{r}, t), \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}), \quad (11.1)$$

где $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t)$ — детерминированная составляющая поля скоростей (средний поток), а $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — случайная составляющая. В общем случае случайное поле $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ может иметь как соленоидальную (для которой $\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$), так и потенциальную (для которой $\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \neq 0$) составляющие. Правая часть уравнения (11.1) учитывает молекулярную диффузию с коэффициентом диффузии μ , и при этом общая масса примеси сохраняется в процессе эволюции, т. е.

$$M_0 = M(t) = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r} \rho_0(\mathbf{r}).$$

На начальных этапах развития диффузии можно пренебречь эффектами молекулярной диффузии. Тогда уравнение (11.1) упрощается и принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \rho(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (11.2)$$

Это *эйлерово описание* эволюции поля плотности.

Уравнение (11.2) — уравнение в частных производных 1-го порядка и, как указывалось в первой главе, может быть решено методом характеристик. Вводя характеристическую кривую $\mathbf{r}(t)$, описывающую уравнение движения частицы,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad (11.3)$$

перейдем от (11.2) к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = - \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \rho(t), \quad \rho(0) = \rho_0(\mathbf{r}_0). \quad (11.4)$$

Решения уравнений (11.3), (11.4) имеют наглядную геометрическую интерпретацию. Они описывают эволюцию плотности в окрестности фиксированной частицы примеси, траектория которой задается равенством $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Причем, как видно из (11.4), плотность в дивергентных потоках меняется, увеличиваясь в областях сжатия и уменьшаясь в областях разрежения среды.

Решения системы (11.3), (11.4) зависят от характеристического параметра $\mathbf{r}_0$ — начальной координаты частицы:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0), \quad \rho(t) = \rho(t | \mathbf{r}_0), \quad (11.5)$$

что будем отмечать вертикальной чертой. Компоненты вектора $\mathbf{r}_0$, однозначно определяющего положение произвольной частицы, называют ее *лагранжескими координатами*. При этом уравнения (11.3), (11.4) соответствуют *лагранжескому описанию* эволюции поля плотности. Связь между эйлеровым и лагранжеским описаниями задается первым из равенств (11.5). Разрешив его относительно $\mathbf{r}_0$, получим соотношение, выражающее лагранжеские координаты через эйлеровы:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t). \quad (11.6)$$

Исключая затем, с помощью (11.6), зависимость от $\mathbf{r}_0$ в последнем равенстве (11.5), вернемся к эйлерову описанию плотности:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(t | \mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t)) = \int d\mathbf{r}_0 \rho(t | \mathbf{r}_0) j(t | \mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0) - \mathbf{r}), \quad (11.7)$$

где введена новая функция, называемая *расходимостью*,

$$j(t | \mathbf{r}_0) = \det ||j_{ik}(t | \mathbf{r}_0)|| = \det \left\| \frac{\partial r_i(t | \mathbf{r}_0)}{\partial r_{0k}} \right\|,$$

которая является количественной мерой степени сжатия или растяжения физически бесконечно малых жидких частиц. Для нее легко получить уравнение

$$\frac{d}{dt} j(t | \mathbf{r}_0) = \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} j(t | \mathbf{r}_0), \quad j(0 | \mathbf{r}_0) = 1, \quad (11.8)$$

сопоставление которого с уравнением (11.4) дает равенство

$$\rho(t | \mathbf{r}_0) = \frac{\rho_0(\mathbf{r}_0)}{j(t | \mathbf{r}_0)}. \quad (11.9)$$

Таким образом, выражение (11.7) можно переписать в виде равенства

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}_0 \rho_0(\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0) - \mathbf{r}), \quad (11.10)$$

устанавливающего связь между лагранжевыми и эйлеровыми характеристиками. Дельта-функция в правой части (11.10) является *индикаторной функцией* для положения лагранжевой частицы, и, следовательно, после усреднения равенства (11.10) по ансамблю реализаций случайного поля скоростей, получаем связь средней плотности в эйлеровом описании с одновременной плотностью вероятностей

$$P(t, \mathbf{r} \mid \mathbf{r}_0) = \langle \delta(\mathbf{r}(t \mid \mathbf{r}_0) - \mathbf{r}) \rangle$$

лагранжевой частицы

$$\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \int d\mathbf{r}_0 \rho_0(\mathbf{r}_0) P(t, \mathbf{r} \mid \mathbf{r}_0).$$

Аналогичным образом получаем и связь пространственной корреляционной функции поля плотности в эйлеровом описании,

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \langle \rho(\mathbf{r}_1, t) \rho(\mathbf{r}_2, t) \rangle,$$

с совместной плотностью вероятностей положения двух частиц:

$$P(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \mid \mathbf{r}_{01}, \mathbf{r}_{02}) = \langle \delta(\mathbf{r}_1(t \mid \mathbf{r}_{01}) - \mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}_2(t \mid \mathbf{r}_{02}) - \mathbf{r}_2) \rangle,$$

в виде равенства

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \int d\mathbf{r}_{01} \int d\mathbf{r}_{02} \rho_0(\mathbf{r}_{01}) \rho_0(\mathbf{r}_{02}) P(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \mid \mathbf{r}_{01}, \mathbf{r}_{02}).$$

Для бездивергентного поля скоростей ($\operatorname{div} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = 0$) расходимость частицы, так же как и ее плотность, сохраняются, т. е.

$$j(t \mid \mathbf{r}_0) = 1, \quad \rho(t \mid \mathbf{r}_0) = \rho_0(\mathbf{r}_0).$$

Случайную составляющую поля скоростей будем предполагать в общем случае дивергентной ($\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \neq 0$), статистически однородным и изотропным в пространстве и стационарным во времени случайным гауссовым полем с корреляционным и спектральным тензорами ($\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$):

$$\langle u_i(\mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{r}', t') \rangle = B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \int d\mathbf{k} E_{ij}(\mathbf{k}, t - t') e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} ,$$

$$B_{ij}(\mathbf{r}, t) = B_{ij}^s(\mathbf{r}, t) + B_{ij}^p(\mathbf{r}, t), \quad E_{ij}(\mathbf{k}, t) = E_{ij}^s(\mathbf{k}, t) + E_{ij}^p(\mathbf{k}, t),$$

$$E_{ij}^s(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int d\mathbf{r} B_{ij}^s(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

$$E_{ij}^p(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int d\mathbf{r} B_{ij}^p(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (11.11)$$

где N — размерность пространства, а спектральные тензоры поля скоростей имеют структуру

$$E_{ij}^s(\mathbf{k}, t) = E^s(k, t) \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right), \quad E_{ij}^p(\mathbf{k}, t) = E^p(k, t) \frac{k_i k_j}{k^2}. \quad (11.12)$$

Здесь через $E^s(k, t)$ и $E^p(k, t)$ обозначены соответственно солениодальная и потенциальная компоненты спектральной плотности поля скоростей.

В дальнейшем, при расчете статистических характеристик частиц и поля плотности, воспользуемся приближением дельта-коррелированности во времени поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, в рамках которого корреляционный тензор (11.11) аппроксимируется выражением

$$B_{ij}(\mathbf{r}, t) = 2B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{r})\delta(t), \quad (11.13)$$

где

$$B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt B_{ij}(\mathbf{r}, t) = \int_0^{\infty} dt B_{ij}(\mathbf{r}, t).$$

В силу однородности и изотропности поля скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} B_{kl}^{\text{eff}}(0) &= D_0 \delta_{kl}, \quad \frac{\partial}{\partial r_i} B_{kl}^{\text{eff}}(0) = 0, \\ -\frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} B_{kl}^{\text{eff}}(0) &= \frac{D^s}{N(N+2)} [(N+1)\delta_{kl}\delta_{ij} - \delta_{ki}\delta_{lj} - \delta_{kj}\delta_{li}] + \\ &\quad + \frac{D^p}{N(N+2)} [\delta_{kl}\delta_{ij} + \delta_{ki}\delta_{lj} + \delta_{kj}\delta_{li}], \end{aligned} \quad (11.14)$$

где N — размерность пространства, а величины

$$\begin{aligned} D_0 &= \frac{1}{N} \int_0^{\infty} dt \int d\mathbf{k} [(N-1)E^s(k, t) + E^p(k, t)], \\ D^s &= \int_0^{\infty} dt \int d\mathbf{k} k^2 E^s(k, t), \quad D^p = \int_0^{\infty} dt \int d\mathbf{k} k^2 E^p(k, t). \end{aligned} \quad (11.15)$$

11.1. Диффузия частиц в случайном поле скоростей

11.1.1. Одноточечные статистические характеристики. Итак, в лагранжевом представлении диффузия частицы в случайном поле скоростей описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями (11.3), (11.4) и (11.8). От них легко перейти к линейному уравнению

Лиувилля в соответствующем фазовом пространстве для индикаторной функции

$$\Phi(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0) - \mathbf{r}) \delta(\rho(t | \mathbf{r}_0) - \rho) \delta(j(t | \mathbf{r}_0) - j), \quad (11.16)$$

в форме записи которой явно учтено, что решение исходных динамических уравнений зависит от лагранжевых координат $\mathbf{r}_0$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \right) \Phi(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) = \\ = \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \rho - \frac{\partial}{\partial j} j \right) \Phi(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0), \end{aligned}$$

$$\Phi(0; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) \delta(\rho_0(\mathbf{r}_0) - \rho) \delta(j - 1). \quad (11.17)$$

Одновременная плотность вероятностей для решения динамических задач (11.3), (11.4) и (11.8) совпадает с усредненным по ансамблю реализаций значением индикаторной функции

$$P(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) = \langle \Phi(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) \rangle.$$

Усреднив уравнение (11.17) по ансамблю реализаций случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, используя формулу Фурутцу–Новикова (8.9) и принимая во внимание равенство

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta u_\beta(\mathbf{r}', t - 0)} \Phi(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) = - \frac{\partial}{\partial r_\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Phi(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) + \\ + \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_\beta} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \rho - \frac{\partial}{\partial j} j \right) \Phi(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) \end{aligned}$$

и выражения (11.14), придем к следующему уравнению Фоккера–Планка для одновременной лагранжевой плотности вероятностей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) = D_0 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} P(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) + \\ + D^p \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial j} \rho j + \frac{\partial^2}{\partial j^2} j^2 \right) P(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0), \end{aligned}$$

$$P(0; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(\rho_0(\mathbf{r}_0) - \rho) \delta(j - 1). \quad (11.18)$$

Решение уравнения (11.18) имеет вид

$$P(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) = P(t; \mathbf{r} | \mathbf{r}_0) P(t; j | \mathbf{r}_0) \delta \left(\rho - \frac{\rho_0(\mathbf{r}_0)}{j} \right), \quad (11.19)$$

где

$$P(t; \mathbf{r} | \mathbf{r}') = \exp \left\{ D_0 t \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \right\} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(4\pi D_0 N t)^{N/2}} \exp \left\{ -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}{4 D_0 t} \right\} \quad (11.20)$$

— вероятностное распределение координат частицы, а

$$P(t; j | \mathbf{r}_0) = \exp \left\{ D^p t \frac{\partial^2}{\partial j^2} j^2 \right\} \delta(j - 1) = \frac{1}{2j\sqrt{\pi\tau}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2(je^\tau)}{4\tau} \right\} \quad (11.21)$$

— вероятностное распределение поля расходимости в ее окрестности. В (11.21) и ниже используется безразмерное время $\tau = D^p t$. Подчеркнем, что полученное решение (11.19) означает статистическую независимость координат $\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0)$ и расходимости $j(t | \mathbf{r}_0)$ в окрестности частицы с лагранжевыми координатами $\mathbf{r}_0$. Причем логарифмически нормальное распределение (11.21) означает, что величина $\chi(t | \mathbf{r}_0) = \ln j(t | \mathbf{r}_0)$ распределена по гауссовому закону с параметрами

$$\langle \chi(t | \mathbf{r}_0) \rangle = -\tau, \quad \sigma_\chi^2(t) = 2\tau. \quad (11.22)$$

В частности, из (11.21), как, впрочем, и непосредственно из уравнения (11.18), вытекают следующие выражения для моментов случайного поля расходимости:

$$\langle j^n(t | \mathbf{r}_0) \rangle = e^{n(n-1)\tau}; \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11.23)$$

Подчеркнем, что средняя расходимость постоянна $\langle j(t | \mathbf{r}_0) \rangle = 1$, а ее высшие моменты экспоненциально растут со временем.

Заметим еще, что, согласно (11.9) и (11.23), имеем следующее выражение для лагранжевых моментов плотности частицы:

$$\langle \rho^n(t | \mathbf{r}_0) \rangle = \rho_0^n(\mathbf{r}_0) e^{n(n+1)\tau},$$

означающее, в частности, экспоненциальный рост как средней плотности, так и ее высших моментов в лагранжевом представлении. При этом плотность вероятностей для плотности частицы имеет вид

$$P(t; \rho | \mathbf{r}_0) = \frac{1}{2\rho\sqrt{\pi\tau}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2(\rho e^{-\tau}/\rho_0(\mathbf{r}_0))}{4\tau} \right\}. \quad (11.24)$$

Его можно получить и как решение уравнения Фоккера–Планка, следующего из (11.18):

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t; \rho | \mathbf{r}_0) = D^p \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} P(t; \rho | \mathbf{r}_0), \quad P(0; \rho | \mathbf{r}_0) = \delta(\rho_0(\mathbf{r}_0) - \rho).$$

Выявленное выше парадоксальное поведение статистических характеристик расходимости и плотности, состоящее в одновременном росте со временем их моментных функций, объясняется свойствами логарифмически нормального распределения вероятностей. Так, типичной

реализацией случайной расходимости является экспоненциально спадающая кривая

$$j^*(t) = e^{-\tau}.$$

При этом для реализаций логарифмически нормального процесса существуют также мажорантные оценки. И, например, с вероятностью $p = 1/2$

$$j(t \mid \mathbf{r}_0) < 4e^{-\tau/2}$$

на интервале времени $t \in (0, \infty)$.

Аналогично, для реализаций плотности имеем типичную реализацию и минорантную оценку:

$$\rho^*(t) = \rho_0 e^\tau, \quad \rho(t \mid \mathbf{r}_0) > \frac{\rho_0}{4} e^{\tau/2}.$$

Подчеркнем, что исследованные выше лагранжевы статистические свойства частицы в потоках, содержащих случайную дивергентную составляющую, качественно отличаются от статистических свойств частицы в бездивергентных потоках, где $j(t \mid \mathbf{r}_0) \equiv 1$, а плотность в окрестности фиксированной частицы сохраняется: $\rho(t \mid \mathbf{r}_0) = \rho_0(\mathbf{r}_0) = \text{const}$. Приведенные выше статистические оценки для частицы означают, что статистика случайных процессов $j(t \mid \mathbf{r}_0)$ и $\rho(t \mid \mathbf{r}_0)$ формируется выбросами их реализаций относительно типичных реализаций. В то же время распределения вероятностей координат частиц в обоих случаях дивергентного и бездивергентного поля скоростей по сути одинаковы.

11.1.2. Двухточечные статистические характеристики. Рассмотрим теперь совместную динамику двух частиц в отсутствие среднего потока. В этом случае индикаторная функция для двух частиц,

$$\Phi(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \delta(\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_2),$$

описывается уравнением Лиувилля

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = - \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} \mathbf{u}_2(\mathbf{r}, t) \right] \Phi(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2),$$

усреднение ее по ансамблю реализаций поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, с учетом формулы Фурутцу–Новикова (8.9) и равенства

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}', t=0)} \Phi(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \\ &= - \left[\frac{\partial}{\partial r_{1j}} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}') + \frac{\partial}{\partial r_{2j}} \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}') \right] \Phi(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \end{aligned}$$

приводит для совместной плотности вероятностей положения двух частиц $P(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \Phi(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rangle$ к уравнению Фоккера–Планка

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = & \left[\frac{\partial^2}{\partial l_i \partial r_{1j}} + \frac{\partial^2}{\partial r_{2i} \partial r_{2j}} \right] B_{ij}^{\text{eff}}(0) P(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \\ & + 2 \frac{\partial^2}{\partial l_i \partial r_{2j}} B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) P(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \end{aligned} \quad (11.25)$$

Умножая теперь уравнение (11.25) на функцию $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 - \mathbf{l})$ и интегрируя по $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, получаем для плотности вероятностей относительной диффузии двух частиц,

$$P(t; \mathbf{l}) = \langle \delta(\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{l}) \rangle,$$

уравнение Фоккера–Планка

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t; \mathbf{l}) = \frac{\partial^2}{\partial l_\alpha \partial l_\beta} D_{\alpha\beta}(\mathbf{l}) P(t; \mathbf{l}), \quad P(0; \mathbf{l}) = \delta(\mathbf{l} - \mathbf{l}_0), \quad (11.26)$$

где

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{l}) = 2 [B_{\alpha\beta}^{\text{eff}}(0) - B_{\alpha\beta}^{\text{eff}}(\mathbf{l})]$$

— структурная матрица векторного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, а $\mathbf{l}_0$ — начальное расстояние между частицами.

В общем случае решить уравнение (11.26) не удастся. Однако, если начальное расстояние между частицами $l_0 \ll l_{\text{cor}}$, где l_{cor} — пространственный радиус корреляции поля скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, то можно разложить функции $D_{\alpha\beta}(\mathbf{l})$ в ряд Тейлора, в результате чего в первом приближении получаем

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{l}) = - \left. \frac{\partial^2 B_{\alpha\beta}^{\text{eff}}(\mathbf{l})}{\partial l_i \partial l_j} \right|_{\mathbf{l}=0} l_i l_j.$$

С использованием представления (11.12)–(11.15) диффузионный тензор упрощается и может быть записан в виде

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{l}) = \frac{1}{N(N+2)} [(D^s(N+1) + D^p) \delta_{\alpha\beta} l^2 - 2(D^s - D^p) l_\alpha l_\beta], \quad (11.27)$$

где N — размерность пространства.

Подставляя теперь (11.27) в (11.26) умножая обе части получившегося уравнения на l^n и интегрируя по $\mathbf{l}$, получаем замкнутое уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \ln \langle l^n(t) \rangle = \\ = \frac{1}{N(N+2)} [(D^s(N+1) + D^p) n(N+n-2) - 2(D^s - D^p) n(n-1)], \end{aligned}$$

решение которого соответствует экспоненциально растущим во времени функциям для всех моментов ($n = 1, 2, \dots$). При этом распределение вероятностей для случайного процесса $l(t)/l_0$ будет логарифмически нормальным. Следовательно, типичной реализацией для расстояния между двумя частицами будет экспоненциальная функция времени

$$l^*(t) = \exp \left\{ \frac{1}{N(N+2)} \{ D^s N(N-1) - D^p(4-N) \} t \right\}. \quad (11.28)$$

Отсюда следует, что в двумерном случае ($N = 2$) выражение

$$l^*(t) = \exp \left\{ \frac{1}{4} (D^s - D^p) t \right\}$$

существенно зависит от знака разности ($D^s - D^p$). В частности, для бездивергентного поля скоростей ($D^p = 0$) имеем экспоненциально растущую типичную реализацию, что соответствует экспоненциально быстрому разбеганию частиц при малых расстояниях между ними. Этот результат справедлив для времен

$$\frac{1}{4} D^s t \ll \ln \left(\frac{l_{\text{cor}}}{l_0} \right),$$

при которых справедливо разложение (11.27). В другом предельном случае, потенциальном поле скоростей ($D^s = 0$), типичной реализацией будет экспоненциально убывающая кривая, т.е. налицо стремление частиц «слиться». Учитывая, что при этом сами жидкие частицы сжимаются, мы видим, что в этом случае должны образовываться *кластеры*, т.е. зоны компактного сосредоточения частиц, расположенные в большей степени в разреженных зонах, что согласуется с результатами численного моделирования эволюции реализации однородного вначале распределения частиц в случайном потенциальном поле скоростей, приведенного на рис. 1.1, б (правда для совершенно другой статистической модели поля скоростей). Это означает, что само явление кластеризации не зависит от модели случайного поля скоростей, хотя, конечно, статистические параметры, характеризующие это явление, могут существенно зависеть от модели.

В трехмерном же случае ($N = 3$) из (11.28) следует, что

$$l^*(t) = \exp \left\{ \frac{1}{15} (6D^s - D^p) t \right\},$$

и типичная реализация будет экспоненциально затухать со временем при выполнении более жесткого (чем в двумерном случае) условия

$$D^p > 6D^s.$$

В одномерном случае,

$$l^*(t) = e^{-D^p t},$$

типичная реализация всегда убывает со временем, так как поле скоростей в этом случае всегда дивергентно.

11.2. Диффузия пассивной примеси в случайном поле скоростей

Прежде всего отметим, что в случае дельта-коррелированного случайного поля скоростей от линейного уравнения (11.1) в отсутствие среднего потока легко перейти к замкнутым уравнениям как для средней плотности плавучей примеси, так и для ее высших многоточечных корреляционных функций. Например, усреднив уравнение (11.1), используя формулу Фурутцу–Новикова (8.9) и вытекающее из (11.1) выражение для вариационной производной,

$$\frac{\delta \rho(\mathbf{r}, t)}{\delta u_\alpha(\mathbf{r}', t=0)} = -\frac{\partial}{\partial r_\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}, t),$$

получим уравнение для средней плотности примеси:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = (D_0 + \mu) \Delta \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (11.29)$$

При выполнении условия $D_0 \gg \mu$ ($\mu \ll \sigma_u^2 l_{\text{cor}}^2$), где σ_u^2 — дисперсия случайного поля скоростей, а l_{cor}^2 — его пространственный радиус корреляции, уравнение (11.29) совпадает с уравнением для вероятностного распределения координат частицы (11.20) и, следовательно, коэффициент диффузии D_0 , аналогично диффузии в бездивергентном случайном поле скоростей, характеризует лишь масштабы области сосредоточения примеси в целом, не неся информации о локальной структуре реализаций плотности.

Аналогичным образом для пространственной корреляционной функции поля плотности,

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \langle \rho(\mathbf{r}_1, t) \rho(\mathbf{r}_2, t) \rangle,$$

получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = & \left[\frac{\partial^2}{\partial r_{1i} \partial r_{1j}} + \frac{\partial^2}{\partial r_{2i} \partial r_{2j}} \right] [B_{ij}^{\text{eff}}(0) + \mu \delta_{ij}] \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial r_{1i} \partial r_{2j}} B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t), \end{aligned}$$

совпадающее с уравнением для двухчастичной плотности вероятностей в отсутствие молекулярного коэффициента диффузии ($\mu = 0$).

В частном случае постоянства начального распределения поля плотности ($\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0 = \text{const}$) случайное поле $\rho(\mathbf{r}, t)$ будет однородным и изотропным случайным полем. В этом случае $\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \rho_0$, а уравнение для корреляционной функции упрощается и принимает вид ($\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$)

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma(\mathbf{r}, t) = 2\mu \Delta \Gamma(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} D_{ij}(\mathbf{r}) \Gamma(\mathbf{r}, t), \quad \Gamma(\mathbf{r}, 0) = |\rho_0|^2,$$

где

$$D_{ij}(\mathbf{r}) = 2 [B_{ij}^{\text{eff}}(0) - B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{r})]$$

— структурная матрица векторного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. При отсутствии молекулярной диффузии это уравнение совпадает с уравнением для плотности вероятностей относительной диффузии двух частиц. Корреляционная функция $\Gamma(\mathbf{r}, t)$ теперь зависит только от модуля вектора $\mathbf{r}$, т. е. $\Gamma(\mathbf{r}, t) = \Gamma(r, t)$ и как функция переменных $\{r, t\}$ описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma(r, t) = \frac{1}{r^{N-1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{N-1} \left[\frac{\partial D_{ii}^p(r, t)}{\partial r} + \left(2\mu + \frac{r_i r_j}{r^2} D_{ij}(\mathbf{r}) \right) \frac{\partial}{\partial r} \right] \Gamma(r, t),$$

где, как и ранее, N — размерность пространства, а функция $D_{ii}^p(r, t)$ связана с дивергентной частью поля скоростей.

Для описания локального поведения реализаций примеси в случайном поле скоростей нужно знать вероятностное распределение ее плотности, что возможно только при отсутствии молекулярной диффузии.

Для описания поля плотности в эйлеровом представлении в этом случае, введем индикаторную функцию, аналогичную (11.16):

$$\Phi(t, \mathbf{r}; \rho) = \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho), \quad (11.30)$$

сосредоточенную на поверхности $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const}$ в трехмерном случае или контуре — в двумерном случае. Уравнение Лиувилля для нее имеет вид уравнения (3.9) второй главы:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \Phi(t, \mathbf{r}; \rho) = \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho \Phi(t, \mathbf{r}; \rho)], \quad (11.31)$$

и одноточечная плотность вероятностей для решения динамического уравнения (11.2) в этом случае совпадает с усредненной по ансамблю реализаций индикаторной функцией $P(t, \mathbf{r}; \rho) = \langle \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho) \rangle$.

Усредняя уравнение (11.31) по ансамблю реализаций поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, с учетом формулы Фурутцу–Новикова (8.9) и равенства

$$\frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}', t-0)} \Phi(t, \mathbf{r}; \rho) = - \left[\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial r_j} + \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_j} \right] \Phi(t, \mathbf{r}; \rho),$$

получаем уравнение для плотности вероятностей поля плотности в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_0 \Delta \right) P(t, \mathbf{r}; \rho) = D^p \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 P(t, \mathbf{r}; \rho). \quad (11.32)$$

Отметим, что уравнение (11.32) можно также получить, используя связь одноточечной плотности вероятностей поля плотности в эйлеровом описании с одновременной плотностью вероятностей в лагранжевом описании в виде равенства

$$P(t, \mathbf{r}; \rho) = \int d\mathbf{r}_0 \int_0^\infty j dj P(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0). \quad (11.33)$$

Из уравнения (11.32), в частности, следует, что моментные функции поля плотности описываются уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_0 \Delta \right) \langle \rho^n(\mathbf{r}, t) \rangle = D^p n(n-1) \langle \rho^n(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (11.34)$$

Его решение имеет структуру

$$\langle \rho^n(\mathbf{r}, t) \rangle = e^{n(n-1)\tau} \int d\mathbf{r}' P(t; \mathbf{r} | \mathbf{r}') \rho_0^n(\mathbf{r}'), \quad (11.35)$$

где функция $P(t; \mathbf{r} | \mathbf{r}')$ описывается равенством (11.20).

Так, если начальная плотность примеси всюду одинакова, $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0 = \text{const}$, то вероятностное распределение плотности не зависит от $\mathbf{r}$ и логнормально с плотностью вероятностей и соответствующей интегральной функцией распределения:

$$P(t; \rho) = \frac{1}{2\rho\sqrt{\pi\tau}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2(\rho e^\tau / \rho_0)}{4\tau} \right\}, \quad F(t; \rho) = \Phi \left(\frac{\ln(\rho e^\tau / \rho_0)}{2\sqrt{\tau}} \right), \quad (11.36)$$

где $\Phi(z)$ — интеграл ошибок,

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z dy \exp \left\{ -\frac{y^2}{2} \right\},$$

а через τ обозначена величина $\tau = D^p t$. При этом все моментные функции, начиная со второй, экспоненциально растут со временем:

$$\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \rho_0, \quad \langle \rho^n(\mathbf{r}, t) \rangle = \rho_0^n e^{n(n-1)\tau},$$

а типичная реализация поля плотности в любой фиксированной точке пространства экспоненциально спадает во времени:

$$\rho^*(t) = \rho_0 e^{-\tau},$$

что свидетельствует о наличии кластерного характера флуктуаций плотности среды в произвольных дивергентных потоках. Формирование же эйлеровой статистики плотности в любой фиксированной точке пространства идет за счет флуктуаций плотности вокруг этой кривой.

Итак мы получили одноточечное вероятностное распределение плотности примеси в эйлеровом представлении, что уже позволило нам сделать ряд заключений о поведении реализаций поля плотности во времени в фиксированных точках пространства. Покажем теперь, что это распределение дает также возможность выяснить некоторые характерные особенности пространственно-временной структуры реализаций поля плотности.

Для наглядности здесь ограничимся двумерным случаем. Как указывалось в третьей главе, важные сведения о пространственном поведении реализаций несет анализ линий уровня, определяемых равенством

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const}.$$

В частности, средние значения таких функционалов поля плотности, как общая величина площади, где $\rho(\mathbf{r}, t) > \rho - S(t, \rho)$, общая масса примеси, заключенная в этих областях — $M(t, \rho)$, описываются одноточечной плотностью вероятностей

$$\langle S(t, \rho) \rangle = \int_{\rho}^{\infty} d\tilde{\rho} \int d\mathbf{r} P(t, \mathbf{r}; \tilde{\rho}), \quad \langle M(t, \rho) \rangle = \int_{\rho}^{\infty} \tilde{\rho} d\tilde{\rho} \int d\mathbf{r} P(t, \mathbf{r}; \tilde{\rho}). \quad (11.37)$$

Подставив сюда решение уравнения (11.32), после несложных преобразований легко найти явные выражения для этих величин:

$$\begin{aligned} \langle S(t, \rho) \rangle &= \int d\mathbf{r} \Phi \left(\frac{1}{2\sqrt{\tau}} \ln \left(\frac{\rho_0(\mathbf{r})e^{-\tau}}{\rho} \right) \right), \\ \langle M(t, \rho) \rangle &= \int d\mathbf{r} \rho_0(\mathbf{r}) \Phi \left(\frac{1}{2\sqrt{\tau}} \ln \left(\frac{\rho_0(\mathbf{r})e^{\tau}}{\rho} \right) \right). \end{aligned} \quad (11.38)$$

Отсюда видно, в частности, что при $\tau \gg 1$ средняя площадь областей, где плотность выше уровня ρ , убывает со временем по закону

$$\langle S(t, \rho) \rangle \approx \frac{1}{\sqrt{\pi\tau\rho}} e^{-\tau/4} \int d\mathbf{r} \sqrt{\rho_0(\mathbf{r})}, \quad (11.39)$$

в то время как заключенная в этих областях средняя масса примеси

$$\langle M(t, \rho) \rangle \approx M_0 - \sqrt{\frac{\rho}{\pi\tau}} e^{-\tau/4} \int d\mathbf{r} \sqrt{\rho_0(\mathbf{r})} \quad (11.40)$$

монотонно стремится к полной ее массе

$$M_0 = \int d\mathbf{r} \rho_0(\mathbf{r}).$$

Это еще раз подтверждает сделанный ранее вывод о том, что частицы примеси со временем стремятся собраться в кластеры — компактные области повышенной плотности, окруженные разреженными областями.

Динамику формирования кластеров можно проиллюстрировать на примере, когда первоначально плавучая примесь равномерно распределена на плоскости: $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0 = \text{const}$. При этом средняя удельная площадь областей (приходящаяся на единицу площади), внутри которых $\rho(\mathbf{r}, t) > \rho$, равна

$$s(t, \rho) = \int_{\rho}^{\infty} d\tilde{\rho} P(t; \tilde{\rho}) = \Phi \left(\frac{\ln(\rho_0 e^{-\tau}/\rho)}{2\sqrt{\tau}} \right), \quad (11.41)$$

где $P(t; \rho)$ — не зависящее от $\mathbf{r}$ решение уравнения (11.32) (т. е. функция (11.36)), а удельная средняя масса примеси (приходящаяся на единицу площади), сосредоточенная в этих областях, описывается выражением

$$m(t, \rho) = \frac{1}{\rho_0} \int_{\rho}^{\infty} \tilde{\rho} d\tilde{\rho} P(t; \tilde{\rho}) = \Phi \left(\frac{\ln(\rho_0 e^{\tau}/\rho)}{2\sqrt{\tau}} \right). \quad (11.42)$$

Из (11.41), (11.42) следует, что на больших временах их средняя удельная площадь убывает по закону

$$s(t, \rho) = \Phi(-\sqrt{\tau}/2) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} e^{-\tau/4}, \quad (11.43)$$

независимо от отношения ρ/ρ_0 , в то время как внутри них собираются практически вся масса примеси:

$$m(t, \rho) = \Phi(\sqrt{\tau}/2) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} e^{-\tau/4}. \quad (11.44)$$

Характер же временной эволюции образования кластерной структуры существенно зависит от отношения ρ/ρ_0 . Так, если $\rho/\rho_0 < 1$, то в начальный момент времени $s(0, \rho) = 1$ и $m(0, \rho) = 1$. Далее образуются небольшие области, где $\rho(\mathbf{r}, t) < \rho$, и содержащие незначительную часть общей массы. С течением времени эти области быстро увеличиваются, а их масса перетекает в кластерные области, довольно быстро выходя на асимптотические зависимости (11.43), (11.44) (рис. 3.1). Отметим, что в момент времени $\tau^* = \ln(\rho/\rho_0)$ величина площади $s(\tau^*, \rho) = 1/2$.

В обратном, более интересном, случае, $\rho/\rho_0 > 1$, в начальный момент времени $s(0, \rho) = 0$ и $m(0, \rho) = 0$. В начале образуются небольшие кластерные области, где $\rho(\mathbf{r}, t) > \rho$, практически сохраняющиеся во времени и интенсивно втягивающие в себя значительную часть общей массы. В дальнейшем площади этих областей с течением времени

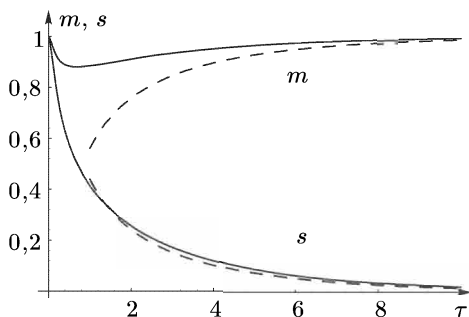


Рис. 3.1. Динамика образования кластеров для $\rho/\rho_0 = 0,5$

уменьшаются, а содержащаяся в них масса увеличивается согласно асимптотическим зависимостям (11.43), (11.44) (рис. 3.2, а, б).

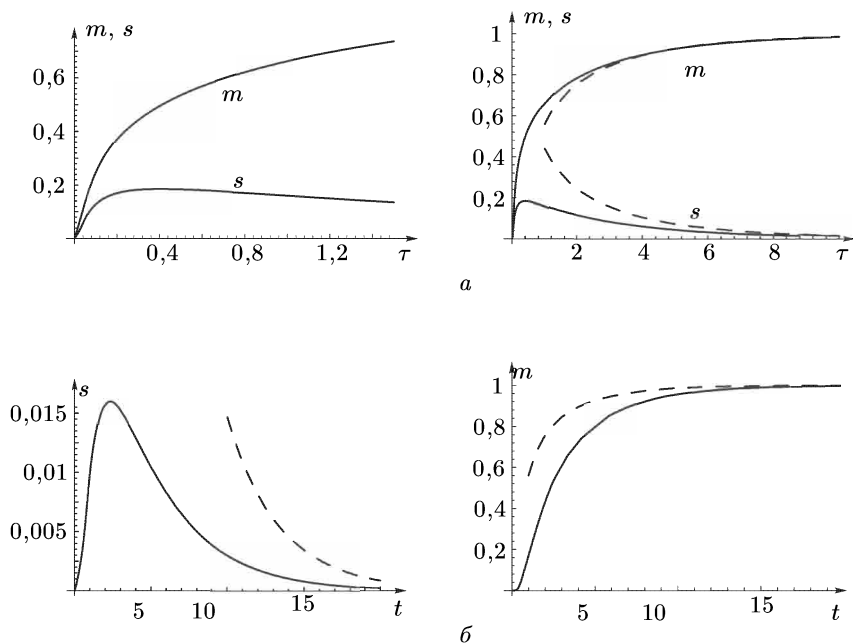


Рис. 3.2. Динамика образования кластеров для $\rho/\rho_0 = 1,5$ (а) и $\rho/\rho_0 = 10$ (б)

Для более детального описания поля плотности в случайном поле скоростей необходимо, как указывалось ранее, рассматривать его пространственный градиент $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \nabla \rho(\mathbf{r}, t)$ и, вообще говоря, производные высшего порядка.

Градиент плотности описывается динамическим уравнением (3.11) и, следовательно, индикаторная функция

$$\Phi(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) = \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho) \delta(\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{p})$$

для бездивергентного поля скоростей описывается уравнением (3.11). Усредняя теперь (3.11) по ансамблю реализаций поля скоростей в приближении дельта-коррелированного во времени поля скоростей, получаем уравнение для одноточечной совместной плотности вероятностей плотности и его градиента $P(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) = \langle \Phi(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) \rangle$, зависящей от пространственно временной точки $(\mathbf{r}, t)$, вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) &= D_0 \Delta P(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) + \\ &+ \frac{1}{N(N+2)} D^s \left((N+1) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \mathbf{p}^2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial p_k \partial p_l} p_k p_l \right) P(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}), \\ P(0, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) &= \delta(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho) \delta(\mathbf{p}_0(\mathbf{r}) - \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (11.45)$$

Так как случайное поле скоростей является бездивергентным, то решение уравнения (11.45) имеет структуру

$$P(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) = \int d\mathbf{r}_0 P(t, \mathbf{r} | \mathbf{r}_0) P(t, \mathbf{p} | \mathbf{r}_0), \quad (11.46)$$

где $P(t, \mathbf{r} | \mathbf{r}_0)$ и $P(t, \mathbf{p} | \mathbf{r}_0)$ — соответствующие лагранжевы плотности вероятностей положения частицы и ее градиента. Первая функция описывается выражением (11.20) а вторая описывается уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t, \mathbf{p} | \mathbf{r}_0) &= \\ &= \frac{1}{N(N+2)} D^s \left((N+1) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \mathbf{p}^2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial p_k \partial p_l} p_k p_l \right) P(t, \mathbf{p} | \mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (11.47)$$

Следствием уравнения (11.47) является сохранение среднего значения градиента плотности частицы примеси:

$$\langle \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) \rangle = \mathbf{p}_0(\mathbf{r}_0).$$

Что же касается моментных функций модуля градиента плотности, то они описываются уравнениями, вытекающими из (11.47):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle p^n(t | \mathbf{r}_0) \rangle &= \frac{n(N+n)(N-1)}{N(N+2)} D^s \langle p^n(t | \mathbf{r}_0) \rangle, \\ \langle p^n(0 | \mathbf{r}_0) \rangle &= p_0^n(\mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (11.48)$$

Следовательно, модуль градиента поля плотности в лагранжевом описании является логарифмически нормальной величиной, типичная

реализация которой, так же, как и его моментные функции, экспоненциально растут во времени. В частности, первый и второй момент в двумерном случае описываются равенствами

$$\langle |\mathbf{p}(t | \mathbf{r}_0)| \rangle = |\mathbf{p}_0(\mathbf{r}_0)| e^{3D^s t/8}, \quad \langle \mathbf{p}^2(t | \mathbf{r}_0) \rangle = \mathbf{p}_0^2(\mathbf{r}_0) e^{D^s t}. \quad (11.49)$$

Кроме того, из уравнения (11.45) с учетом формулы (4.28) третьей главы следует, что общая средняя длина контура $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const}$ (в двумерном случае) также экспоненциально растет во времени по закону

$$\langle l(t, \rho) \rangle = l_0 e^{D^s t},$$

где l_0 — начальная длина контура. Напомним, что в этом случае для бездивергентного поля скоростей сохраняется число контуров, которые не могут исчезать и порождаться в среде, а лишь эволюционируют во времени, исходя из заданного в начальный момент времени их распределения в пространстве.

Таким образом, гладкое вначале распределение примеси становится все более и более пространственно неоднородным; пространственные градиенты обостряются, и линии уровня приобретают фрактальный характер. Такую картину мы видели на рис. 1.1, *a*, соответствующей численному моделированию, правда для совершенно другой модели флуктуаций поля скоростей. Это означает, что общие особенности поведения, отмеченные выше, не зависят от типа моделей.

Выше мы изучали статистические характеристики решения уравнения (11.2) в лагранжевом и эйлеровом описании, и было показано, что при наличии потенциальной составляющей у поля скорости происходит кластеризация как в динамике частиц, так и в эйлеровом поле плотности. Наряду с динамическим уравнением (11.2), представляет определенный интерес и уравнение, соответствующее переносу неконсервативной примеси:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) q(\mathbf{r}, t) = 0, \quad q(\mathbf{r}, 0) = q_0(\mathbf{r}).$$

В этом случае в лагранжевом описании уравнение для динамики частиц совпадает с уравнением (11.3), и, следовательно, для частиц осуществляется кластеризация. Однако в эйлеровом описании, как легко видеть, кластеризация не осуществляется. В этом случае, аналогично бездивергентному полю скоростей, сохраняется как среднее число контуров, так и средняя площадь, где $q(\mathbf{r}, t) > q$, и средняя «масса» примеси $\int dS q(\mathbf{r}, t)$, сосредоточенная в этих контурах.

Выше мы рассмотрели простейшую статистическую задачу о диффузии примеси в случайном поле скоростей в отсутствие регулярного потока и эффекта молекулярной диффузии. Также для статистического описания использовалось приближение дельта-коррелированно-го во времени случайного поля. Все неучтенные факторы начинают

действовать с какого-то момента времени, так что полученные выше результаты справедливы лишь на начальном этапе диффузии. Кроме того, эти факторы могут приводить и к новым физическим эффектам.

11.3. Учет молекулярной диффузии

При наличии эффектов, связанных с молекулярной диффузией, диффузия примеси описывается стохастическим уравнением в частных производных второго порядка (11.1), для которого уже не удастся получить уравнения для одноточечной плотности вероятностей. Возможно лишь, как указывалось ранее, получить замкнутые уравнения для среднего значения поля плотности и пространственной корреляционной функции в общем случае дивергентного гидродинамического потока.

При наличии среднего градиента плотности в бездивергентном случайном поле скоростей возможен более полный анализ. Этот случай соответствует решению уравнения (11.1) с начальными условиями (здесь мы также ограничиваемся двумерным случаем)

$$\rho_0(\mathbf{r}) = \mathbf{G}\mathbf{r}, \quad \mathbf{p}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{G}.$$

Представляя поле плотности в виде

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \mathbf{G}\mathbf{r} + \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t),$$

получаем уравнение для флуктуирующей части поля плотности:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right) \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{G}\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \mu \Delta \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t), \quad \tilde{\rho}(\mathbf{r}, 0) = 0. \quad (11.50)$$

Решение этой задачи, в отличие от рассмотренных выше, является статистически пространственно однородным случайным полем, т. е. все одноточечные статистические средние не зависят от $\mathbf{r}$, и имеет стационарные (при $t \rightarrow \infty$) плотности вероятностей как самого поля плотности, так и его градиента.

В этом случае из уравнения (11.50) легко получить уравнение

$$\frac{d}{dt} \langle \tilde{\rho}^n(\mathbf{r}, t) \rangle = n(n-1) D_0 \mathbf{G}^2 \langle \tilde{\rho}^{n-2}(\mathbf{r}, t) \rangle - \mu n(n-1) \langle \tilde{\rho}^{n-2}(\mathbf{r}, t) \tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (11.51)$$

где

$$\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{G}.$$

В стационарном режиме (при $t \rightarrow \infty$) из (11.51) следует, что

$$\langle \tilde{\rho}^{n-2}(\mathbf{r}, t) \tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{D_0 \mathbf{G}^2}{\mu} \langle \tilde{\rho}^{n-2}(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (11.52)$$

и, в частности, для $n = 2$ выражение для дисперсии флуктуаций градиента плотности

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{D_0 \mathbf{G}^2}{\mu}. \quad (11.53)$$

Перепишем теперь уравнение (11.51) в виде

$$\frac{d}{dt} \langle \tilde{\rho}^n(\mathbf{r}, t) \rangle = n(n-1) D_0 \mathbf{G}^2 \langle f(\mathbf{r}, t) \tilde{\rho}^{n-2}(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (11.54)$$

где

$$f(\mathbf{r}, t) = 1 - \frac{\mu}{D_0 \mathbf{G}^2} \tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t).$$

Следовательно, дисперсия плотности описывается выражением ($\langle \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$)

$$\langle \tilde{\rho}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = 2 D_0 \mathbf{G}^2 \int_0^t d\tau \langle f(\mathbf{r}, \tau) \rangle. \quad (11.55)$$

Отметим, что корреляционная функция поля $\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t)$

$$\Gamma(\mathbf{r}, t) = \langle \tilde{\rho}(\mathbf{r}_1, t) \tilde{\rho}(\mathbf{r}_2, t) \rangle, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,$$

для данной задачи описывается уравнением, вытекающим из (11.50):

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma(\mathbf{r}, t) = 2 G_i G_j B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{r}) + 2 [B_{ij}^{\text{eff}}(0) - B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{r}) + \mu \delta_{ij}] \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \Gamma(\mathbf{r}, t),$$

и, следовательно, стационарное значение $\Gamma(\mathbf{r}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma(\mathbf{r}, t)$ описывается уравнением

$$G_i G_j B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{r}) = - [B_{ij}^{\text{eff}}(0) - B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{r}) + \mu \delta_{ij}] \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \Gamma(\mathbf{r}). \quad (11.56)$$

Полагая $\mathbf{r} = 0$ в этом уравнении, мы приходим, с учетом соотношений (11.14), (11.15), к равенству (11.53). А дифференцируя уравнение (11.56) дважды по $\mathbf{r}$ и полагая $\mathbf{r} = 0$, получаем равенство

$$\mu^2 \langle (\Delta \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t))^2 \rangle = \frac{1}{2} D^s (D_0 + \mu) \mathbf{G}^2. \quad (11.57)$$

Точные равенства (11.53) и (11.57) можно использовать для тестирования различных численных схем и проверки результатов численного моделирования. Однако для вычисления стационарного значения $\langle \tilde{\rho}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$ при $t \rightarrow \infty$ необходимо знать временную эволюцию второго момента $\langle \tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$. Такую информацию можно получить лишь при отсутствии молекулярной диффузии. В этом случае плотность вероятностей для градиента плотности описывается уравнением (11.45),

которое для рассматриваемой задачи упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t, \mathbf{r}; \mathbf{p}) = \frac{1}{8} D^s \left(3 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \mathbf{p}^2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial p_k \partial p_l} p_k p_l \right) P(t, \mathbf{r}; \mathbf{p}), \quad (11.58)$$

$$P(0, \mathbf{r}; \mathbf{p}) = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{G}).$$

Следовательно, согласно равенству (11.49),

$$\langle |\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle = \mathbf{G}^2 \left\{ e^{D^s t} - 1 \right\}. \quad (11.59)$$

Точная формула (11.53) и равенство (11.59) позволяют оценить время выхода на статистический стационарный режим для величины $\langle \tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$ при $t \rightarrow \infty$, а именно

$$D^s T_0 \sim \ln \left(\frac{D_0 + \mu}{\mu} \right).$$

Следовательно, для стационарной дисперсии флуктуаций поля плотности из равенства (11.55) получаем оценку

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \tilde{\rho}^2(\mathbf{r}, t) \rangle \sim 2 \frac{D_0}{D^s} \mathbf{G}^2 \ln \left(\frac{D_0 + \mu}{\mu} \right).$$

Принимая во внимание, что $D_0 \sim \sigma_u^2 \tau_0$ и $D_0/D^s \sim l_0^2$, где σ_u^2 — дисперсия флуктуаций поля скорости, а τ_0 и l_0 — соответственно его временной и пространственный радиусы корреляции, видим, что время T_0 , ввиду логарифмической зависимости от коэффициента молекулярной зависимости μ , может быть не слишком большим:

$$T_0 \approx \frac{l_0^2}{\sigma_u^2 \tau_0} \ln \left(\frac{\sigma_u^2 \tau_0}{\mu} \right),$$

а величина

$$\langle \tilde{\rho}^2 \rangle \sim \mathbf{G}^2 l_0^2 \ln \left(\frac{\sigma_u^2 \tau_0}{\mu} \right) \quad \text{при} \quad \mu \ll \sigma_u^2 \tau_0.$$

Задачи

Задача 63. Получить уравнение Фоккера–Планка для положения частицы в бездивергентном случайном поле скоростей с учетом двумерного плоскопараллельного среднего потока $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) = v(y)\mathbf{l}$, где $\mathbf{r} = (x, y)$, $\mathbf{l} = (1, 0)$.

Указание. Движение частицы описывается системой стохастических уравнений

$$\frac{d}{dt} x(t) = v(y) + u_1(\mathbf{r}, t), \quad \frac{d}{dt} y(t) = u_2(\mathbf{r}, t).$$

Решение.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v(y) \frac{\partial}{\partial x} \right) P(t; \mathbf{r}) = D_0 \Delta P(t; \mathbf{r}). \quad (11.60)$$

Задача 64. Показать, что уравнению (11.60) статистически эквивалентна частица, динамика которой описывается уравнениями

$$\frac{d}{dt} x(t) = v(y) + u_1(t), \quad \frac{d}{dt} y(t) = u_2(t), \quad (11.61)$$

где $u_i(t)$, $i = 1, 2$ — статистически независимые гауссовы процессы «белого шума» со статистическими характеристиками

$$\langle \mathbf{u}(t) \rangle = 0, \quad \langle u_i(t) u_j(t') \rangle = 2\delta_{ij} D_0 \delta(t - t').$$

Задача 65. Проинтегрировать уравнения (11.61) и вычислить статистические характеристики положения частицы для линейного сдвигового потока $v(y) = \alpha y$.

Решение.

$$y(t) = y_0 + w_2(t), \quad x(t) = x_0 + w_1(t) + \int_0^t d\tau v(y + w_2(\tau)), \quad (11.62)$$

где $w_i(t) = \int_0^t d\tau u_i(\tau)$ — независимые винеровские процессы с характеристиками

$$\langle \mathbf{w}(t) \rangle = 0, \quad \langle w_i(t) w_j(t') \rangle = 2D_0 \delta_{ij} \min\{t, t'\}.$$

Во всех случаях координата $y(t)$ имеет гауссову плотность распределения вероятностей с параметрами

$$\langle y(t) \rangle = y_0, \quad \langle y^2(t) \rangle = y_0^2 + 2D_0 t.$$

Для линейного сдвигового потока равенства (11.62) соответствуют совместной гауссовой плотности вероятностей с параметрами

$$\langle y(t) \rangle = y_0, \quad \langle x(t) \rangle = x_0 + \alpha y_0 t,$$

$$\sigma_{xx}^2(t) = \langle (x(t) - \langle x(t) \rangle)^2 \rangle = 2D_0 t \left(1 + \alpha t + \frac{1}{3} \alpha^2 t^2 \right),$$

$$\sigma_{yy}^2(t) = \langle (y(t) - \langle y(t) \rangle)^2 \rangle = 2D_0 t,$$

$$\sigma_{xy}^2(t) = \langle (x(t) - \langle x(t) \rangle) (y(t) - \langle y(t) \rangle) \rangle = 2D_0 t (1 + \alpha t).$$

Задача 66. Получить уравнение Фоккера–Планка для градиента плотности частицы в бездивергентном случайном поле скоростей для двумерного линейного сдвигового среднего потока $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) = \alpha y \mathbf{l}$, где $\mathbf{r} = (x, y)$, $\mathbf{l} = (1, 0)$.

Указание. В лагранжевом описании градиент плотности частицы в бездивергентном поле скоростей описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} p_x(t | \mathbf{r}_0) &= -p_k(t | \mathbf{r}_0) \frac{\partial u_k(\mathbf{r}, t)}{\partial x}, \\ \frac{d}{dt} p_y(t | \mathbf{r}_0) &= -\alpha p_x(t | \mathbf{r}_0) - p_k(t | \mathbf{r}_0) \frac{\partial u_k(\mathbf{r}, t)}{\partial y}, \\ \mathbf{p}(0 | \mathbf{r}_0) &= \mathbf{p}_0(\mathbf{r}_0) = \nabla \rho_0(\mathbf{r}_0).\end{aligned}$$

Решение.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} P(t, \mathbf{p} | \mathbf{r}_0) &= \\ &= \left\{ \alpha p_x \frac{\partial}{\partial p_y} + \frac{1}{8} D^s \left(3 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \mathbf{p}^2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial p_k \partial p_l} p_k p_l \right) \right\} P(t, \mathbf{p} | \mathbf{r}_0), \\ P(0, \mathbf{p} | \mathbf{r}_0) &= \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0(\mathbf{r}_0)).\end{aligned}\quad (11.63)$$

Задача 67. Исходя из уравнения (11.63) изучить поведение статистических характеристик градиента плотности частицы в бездивергентном случайном поле скоростей для двумерного линейного сдвигового среднего потока $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) = \alpha y \mathbf{l}$, где $\mathbf{r} = (x, y)$, $\mathbf{l} = (1, 0)$.

Решение. Среднее значение градиента поля плотности примеси соответствует решению задачи при отсутствии флуктуаций поля скоростей

$$\langle p_x(t) \rangle = p_x(0), \quad \langle p_y(t) \rangle = p_y(0) - \alpha p_x(0)t.$$

Вторые моменты градиента описываются замкнутой системой уравнений, характеристическое уравнение для которого относительно параметра λ имеет вид кубического уравнения

$$\left(\lambda + \frac{1}{2} D^s \right)^2 (\lambda - D^s) = \frac{3}{2} \alpha^2 D^s,$$

корни которого существенно зависят от параметра α/D^s . Для малых значений $\alpha/D^s \ll 1$ для корней уравнения имеем приближенные решения

$$\lambda_1 = D^s + \frac{2\alpha^2}{3D^s}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} D^s + i|\alpha|, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2} D^s - i|\alpha|.$$

Следовательно, в диапазоне времен $D^s t \gg 2$ решение задачи полностью определяется случайным фактором. Это означает, что эффекты, связанные с флуктуациями поля скоростей, полностью доминируют над эффектами, связанными со слабым градиентом линейного сдвига.

В другом предельном случае $\alpha/D^s \gg 1$ для корней уравнения получаем выражения

$$\lambda_1 = \left(\frac{3}{2} \alpha^2 D^s \right)^{1/3}, \quad \lambda_2 = \left(\frac{3}{2} \alpha^2 D^s \right)^{1/3} e^{i(2/3)\pi},$$

$$\lambda_3 = \left(\frac{3}{2} \alpha^2 D^s \right)^{1/3} e^{-i(2/3)\pi}.$$

Так как действительные части λ_2 и λ_3 отрицательны, то при $\left(\frac{3}{2} \alpha^2 D^s \right)^{1/3} t \gg 1$ асимптотическое решение системы для вторых моментов имеет вид

$$\langle p^2(t) \rangle \sim \exp \left\{ \left(\frac{3}{2} \alpha^2 D_2^s \right)^{1/3} t \right\},$$

и, следовательно, даже малые флуктуации поля скоростей являются определяющими в присутствии сильного градиента сдвигового потока.

Задача 68. *Получить уравнение для плотности вероятностей модуля вектора $l(t) = |l(t)|$ — расстояния между двумя частицами.*

Указание. Для получения плотности вероятностей $P(t; l) = \langle \delta(|l(t)| - l) \rangle$ следует умножить уравнение (11.26) на $\delta(l(t) - l)$ и проинтегрировать по l .

Решение.

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t, l) = -\frac{\partial}{\partial l} \frac{D_{ii}(l)}{l} P(t, l) + \frac{\partial}{\partial l} N(l) P(t, l) + \frac{\partial^2}{\partial l^2} N(l) P(t, l),$$

где $N(l) = l_j l_i D_{ij}(l)/l^2$.

Задача 69. *Получить уравнение для совместной эйлеровой плотности вероятностей поля плотности и его градиента в случайном бездивергентном поле скоростей для двумерного плоскопараллельного потока $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) = v(y)\mathbf{l}$, где $\mathbf{r} = (x, y)$, $\mathbf{l} = (1, 0)$.*

Решение.

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) = \left[-\alpha y \frac{\partial}{\partial x} + D_0 \Delta \right] P(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) + \left\{ \alpha p_x \frac{\partial}{\partial p_y} + \frac{1}{8} D^s \left(3 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \mathbf{p}^2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial p_k \partial p_l} p_k p_l \right) \right\} P(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}).$$

Решение этого уравнения можно записать в виде интеграла (11.46), где лагранжевы плотности вероятностей $P(t, \mathbf{r} | \mathbf{r}_0)$ и $P(t, \mathbf{p} | \mathbf{r}_0)$ описываются уравнениями (11.60) и (11.63).

Глава 12

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ПЛОСКИХ ВОЛН В СЛОИСТЫХ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Задача о распространении плоских волн в слоистых средах описывается одномерной краевой задачей и традиционно привлекает внимание многих исследователей. Это обусловлено, с одной стороны, ее простотой по сравнению с аналогичными задачами для двух и трех измерений, а с другой стороны, ее важностью для понимания процесса распространения волн в случайных средах. Учитывая, что одномерная задача допускает точное асимптотическое решение, можно проследить на ней влияние различных моделей, параметров среды и краевых условий на статистические характеристики волнового поля.

В одномерном случае постановка задачи описана в первой части книги.

Пусть слой неоднородной среды занимает часть пространства $L_0 < x < L$. Плоская волна с единичной амплитудой падает на него из области $x > L$. Волновое поле в слое неоднородной среды описывается уравнением Гельмгольца

$$\frac{d^2}{dx^2} u(x) + k^2(x)u(x) = 0, \quad (12.1)$$

где $k^2(x) = k^2[1 + \varepsilon(x)]$, а функция $\varepsilon(x)$ описывает неоднородности среды. В простейшем случае не согласованной границы считаем, что вне слоя $k(x) = k$, т.е. $\varepsilon(x) = 0$; внутри же слоя предполагаем, что $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + i\gamma$, где $\varepsilon_1(x)$ — действительная часть, ответственная за процессы рассеяния волны в среде, а мнимая часть $\gamma \ll 1$ описывает поглощение волны в среде.

Краевыми условиями для уравнения (12.1) являются условия непрерывности функции $u(x)$ и ее производной $\frac{d}{dx} u(x)$ на границах слоя, которые можно записать в виде

$$\left(1 + \frac{i}{k} \frac{d}{dx}\right) u(x) \Big|_{x=L} = 2, \quad \left(1 - \frac{i}{k} \frac{d}{dx}\right) u(x) \Big|_{x=L_0} = 0. \quad (12.2)$$

Из уравнения (12.1) при $x < L$ следует равенство

$$k\gamma I(x) = \frac{d}{dx} S(x), \quad (12.3)$$

где $S(x)$ — плотность потока энергии — определяется равенством

$$S(x) = \frac{i}{2k} \left[u(x) \frac{d}{dx} u^*(x) - u^*(x) \frac{d}{dx} u(x) \right],$$

а интенсивность волнового поля — $I(x) = |u(x)|^2$. При этом

$$S(L) = 1 - |R_L|^2, \quad S(L_0) = |T_L|^2,$$

где R_L — комплексный коэффициент отражения волны от слоя среды, а T_L — комплексный коэффициент прохождения волны. Следовательно, интегрируя (12.3) по пространству неоднородной среды, получаем равенство

$$|R_L|^2 + |T_L|^2 + k\gamma \int_{L_0}^L dx I(x) = 1. \quad (12.4)$$

Если затухание волны в среде отсутствует ($\gamma = 0$), то сохранение плотности потока энергии выражается равенством

$$|R_L|^2 + |T_L|^2 = 1.$$

Краевую задачу (12.1), (12.2) с помощью метода погружения можно переформулировать с самого начала в виде динамической задачи с начальными условиями по параметру L — геометрическому положению правой границы слоя, рассматривая решение этих задач как функции этого параметра. Так, коэффициент отражения R_L удовлетворяет при этом уравнению Риккати

$$\frac{d}{dL} R_L = 2ik R_L + \frac{ik}{2} \varepsilon(L) (1 + R_L)^2, \quad R_{L_0} = 0, \quad (12.5)$$

а волновое поле в слое среды $u(x) \equiv u(x; L)$ описывается линейным уравнением

$$\frac{\partial}{\partial L} u(x; L) = ik u(x; L) + \frac{ik}{2} \varepsilon(L) (1 + R_L) u(x; L), \quad u(x; x) = 1 + R_x. \quad (12.6)$$

Из уравнений (12.5) и (12.6) следуют уравнения для квадрата модуля коэффициента отражения $W_L = |R_L|^2$ и интенсивности волнового поля $I(x; L) = |u(x; L)|^2$ вида

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} W_L = \\ = -\frac{k\gamma}{2} [4W_L + (R_L + R_L^*) (1 + W_L)] - \frac{ik}{2} \varepsilon_1(L) (R_L - R_L^*) (1 - W_L), \end{aligned}$$

$$W_{L_0} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} I(x; L) = \\ = -\frac{k\gamma}{2} (2 + R_L + R_L^*) I(x; L) - \frac{ik}{2} \varepsilon_1(L) (R_L - R_L^*) I(x; L), \\ I(x; x) = |1 + R_x|^2. \end{aligned} \quad (12.7)$$

При отсутствии в среде поглощения уравнение (12.7) для интенсивности волнового поля интегрируется и интенсивность волнового поля внутри неоднородной среды простым образом связана с коэффициентом отражения волны от слоя среды:

$$I(x; L) = \frac{|1 + R_x|^2 (1 - W_L)}{1 - W_x}. \quad (12.8)$$

Аналогичным образом, поле точечного источника, расположенного в слое случайно неоднородной среды, описывается краевой задачей для функции Грина уравнения Гельмгольца:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} G(x; x_0) + k^2 [1 + \varepsilon(x)] G(x; x_0) = 2ik\delta(x - x_0), \\ \left(\frac{d}{dx} + ik \right) G(x; x_0) \Big|_{x=L_0} = 0, \quad \left(\frac{d}{dx} - ik \right) G(x; x_0) \Big|_{x=L} = 0. \end{aligned} \quad (12.9)$$

Отметим, что положение источника на границе слоя $x_0 = L$ соответствует краевой задаче (12.1), (12.2) о падении волны на слой среды, т. е.

$$G(x; L) = u(x; L).$$

Решение краевой задачи (12.9) имеет структуру

$$G(x; x_0) = G(x_0; x_0) \begin{cases} \exp \left[ik \int_x^{x_0} \psi_1(\xi) \right], & x_0 \geq x, \\ \exp \left[ik \int_{x_0}^x \psi_2(\xi) \right], & x_0 \leq x, \end{cases} \quad (12.10)$$

где поле в точке расположения источника, в силу условия скачка производной,

$$\frac{d}{dx} G(x; x_0) \Big|_{x=x_0+0} - \frac{d}{dx} G(x; x_0) \Big|_{x=x_0-0} = 2ik,$$

определяется выражением

$$G(x_0; x_0) = \frac{2}{\psi_1(x_0) + \psi_2(x_0)},$$

а функции $\psi_i(x)$ описываются уравнениями Риккати

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \psi_1 &= ik [\psi_1^2 - 1 - \varepsilon(x)], & \psi_1(L_0) &= 1, \\ \frac{d}{dx} \psi_2 &= -ik [\psi_2^2 - 1 - \varepsilon(x)], & \psi_2(L) &= 1. \end{aligned} \quad (12.11)$$

Вместо функций $\psi_i(x)$ введем новые функции $R_i(x)$ с помощью равенств

$$\psi_i(x) = \frac{1 - R_i(x)}{1 + R_i(x)}, \quad i = 1, 2.$$

Тогда волновое поле в области $x < x_0$ может быть записано в виде

$$G(x; x_0) = \frac{[1 + R_1(x_0)][1 + R_2(x_0)]}{1 - R_1(x_0)R_2(x_0)} \exp \left[ik \int_x^{x_0} d\xi \frac{1 - R_1(\xi)}{1 + R_1(\xi)} \right], \quad (12.12)$$

где величина $R_1(L) = R_L$ — коэффициент отражения плоской волны, падающей на слой среды из области $x > L$. Аналогичным образом величина $R_2(x_0)$ — коэффициент отражения волны, падающей на слой среды (x_0, L) из однородного полупространства $x < x_0$ (т. е. при $\varepsilon = 0$).

Задача с абсолютно отражающими границами, на которых поле $G(x; x_0)$ или $\frac{d}{dx} G(x; x_0)$ обращаются в нуль, имеет большое прикладное значение. Так, в последнем случае, для источника плоских волн, расположенного на этой границе, имеем $R_2(x_0) = 1$, и, следовательно,

$$G_{\text{ref}}(x; x_0) = \frac{2}{1 - R_1(x_0)} \exp \left[ik \int_x^{x_0} d\xi \frac{1 - R_1(\xi)}{1 + R_1(\xi)} \right], \quad x \leq x_0. \quad (12.13)$$

Из уравнения (12.9) при $x < x_0$ вытекает также равенство для интенсивности волнового поля $I(x; x_0) = |G(x; x_0)|^2$:

$$k\gamma I(x; x_0) = \frac{d}{dx} S(x; x_0), \quad (12.14)$$

где $S(x; x_0)$ — плотность потока энергии — определяется равенством

$$S(x; x_0) = \frac{i}{2k} \left[G(x; x_0) \frac{d}{dx} G^*(x; x_0) - G^*(x; x_0) \frac{d}{dx} G(x; x_0) \right].$$

Используя выражение (12.12), можно представить $S(x; x_0)$ в виде

$$S(x; x_0) = S(x_0; x_0) \exp \left[-k\gamma \int_x^{x_0} d\xi \frac{|1 + R_1(\xi)|^2}{1 - |R_1(\xi)|^2} \right],$$

где плотность потока энергии в точке расположения источника равна

$$S(x_0; x_0) = \frac{[1 - |R_1(x_0)|^2] |1 + R_2(x_0)|^2}{|1 - R_1(x_0) R_2(x_0)|^2}. \quad (12.15)$$

Далее нас будут интересовать статистические задачи о падении волны на полупространство случайно-неоднородной среды ($L_0 \rightarrow -\infty$) и источник в неограниченном пространстве ($L_0 \rightarrow -\infty$, $L \rightarrow \infty$) при достаточно малом поглощении ($\gamma \rightarrow 0$). Из выражения (12.14) видно, что, вообще говоря, эти предельные переходы не перестановочны. Действительно, если $\gamma = 0$, то имеет место сохранение плотности потока энергии $S(x; x_0)$ во всем полупространстве $x < x_0$. В присутствии малого конечного поглощения, однако, интегрируя равенство (12.14) по полупространству $x < x_0$, получаем ограничение на значение энергии, сосредоточенной в этом полупространстве:

$$k\gamma \int_{-\infty}^{x_0} dx I(x; x_0) = S(x_0; x_0) = \frac{[1 - |R_1(x_0)|^2] |1 + R_2(x_0)|^2}{|1 - R_1(x_0) R_2(x_0)|^2}. \quad (12.16)$$

Представляют интерес три простейшие статистические задачи:

- падение волны на слой среды (конечный и полупространство);
- источник волн внутри слоя среды (неограниченное пространство);
- влияние границ на статистические характеристики волнового поля.

Все эти задачи удастся решить в полном объеме аналитическими методами. Также легко в этом случае осуществить численное моделирование и провести сопоставление результатов с аналитическими результатами.

Будем считать, что $\varepsilon_1(x)$ — гауссов дельта-коррелированный случайный процесс с параметрами

$$\langle \varepsilon_1(L) \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon_1(L) \varepsilon_1(L') \rangle = B_\varepsilon(L - L') = 2\sigma_\varepsilon^2 l_0 \delta(L - L'), \quad (12.17)$$

где $\sigma_\varepsilon^2 \ll 1$ — дисперсия, а l_0 — радиус корреляции для случайной функции $\varepsilon_1(L)$. Такая аппроксимация означает, что переход к асимптотическому случаю $l_0 \rightarrow 0$ в точном решении задачи с конечным радиусом корреляции l_0 , приводит к результатам, совпадающим с решением статистической задачи с параметрами (12.17).

В силу малости параметра σ_ε^2 все статистические эффекты могут быть разделены на два типа — локальные и накапливающиеся, из-за эффекта многократного переотражения волны в среде. Нас будут интересовать последние.

Из постановки краевых волновых задач на основе метода погружения видно, что существуют два типа характеристик волнового поля, представляющих непосредственный интерес. Первый тип величин связан со значениями волнового поля на границах слоя (коэффициенты

отражения и прохождения R_L, T_L), поле в точке местонахождения источника $G(x_0; x_0)$, плотность потока энергии в точке нахождения точечного источника $S(x_0; x_0)$ и т. д. Второй тип величин связан с определением статистических характеристик интенсивности волнового поля внутри слоя среды, что и является предметом статистической теории переноса излучения.

12.1. Статистическое описание волнового поля на границах слоя среды

12.1.1. Коэффициенты отражения и прохождения волны. Комплексный коэффициент отражения волны от слоя среды описывается замкнутым уравнением — уравнением Риккати (12.5).

Введем модуль коэффициента отражения через $\sqrt{W_L}$, т. е. положим

$$R_L = \sqrt{W_L} \exp \{i\varphi_L\},$$

где φ_L — фаза коэффициента отражения. Тогда, исходя из уравнения (12.5), для величины W_L — квадрата модуля коэффициента отражения и его фазы получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} W_L &= -2k\gamma W_L + k\varepsilon_1(L) \sqrt{W_L} (1 - W_L) \sin \varphi_L, \quad W_{L_0} = 0, \\ \frac{d}{dL} \varphi_L &= 2k + k\varepsilon_1(L) \left\{ 1 + \frac{1 + W_L}{2\sqrt{W_L}} \cos \varphi_L \right\}, \quad \varphi_{L_0} = 0. \end{aligned} \quad (12.18)$$

Быстро осциллирующие функции в диссипативных членах, не вносящие вклада в накапливающиеся эффекты, опущены в системе уравнений (12.18) (ср. с уравнением (12.7)).

Введем индикаторную функцию

$$\Phi(L; W) = \delta(W_L - W),$$

которая описывается уравнением Лиувилля

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} \Phi(L; W) &= 2k\gamma \frac{\partial}{\partial W} \{W \Phi(L; W)\} - \\ &\quad - k\varepsilon_1(L) \frac{\partial}{\partial W} \left\{ \sqrt{W} (1 - W) \sin \varphi_L \Phi(L; W) \right\}, \\ \Phi(L_0; W) &= \delta(W - 1). \end{aligned} \quad (12.19)$$

Усредняя это уравнение по ансамблю реализаций функции $\varepsilon_1(L)$ и используя формулу Фурутцу–Новикова (8.9) и выражение (12.17), получаем для плотности вероятностей квадрата модуля коэффициента

отражения $P(L; W) = \langle \Phi(L; W) \rangle$ незамкнутое уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} P(L; W) &= 2k\gamma \frac{\partial}{\partial W} \{W P(L; W)\} - \\ &- k^2 \sigma_\varepsilon^2 l_0 \frac{\partial}{\partial W} (1 - W) \left\langle \left[\sqrt{W} \cos \varphi_L + \frac{1}{2} (1 + W) \cos^2 \varphi_L \right] \Phi(L; W) \right\rangle + \\ &+ k^2 \sigma_\varepsilon^2 l_0 \frac{\partial}{\partial W} \left\{ \sqrt{W} (1 - W) \frac{\partial}{\partial W} \left[\sqrt{W} (1 - W) \langle \sin^2 \varphi_L \Phi(L; W) \rangle \right] \right\}. \end{aligned}$$

Учитывая теперь, что фаза коэффициента отражения имеет структуру

$$\varphi_L = k(L - L_0) + \tilde{\varphi}_L,$$

т. е. быстро меняется на расстояниях порядка длины волны, можно дополнительно усреднить это уравнение по быстрым осцилляциям, что справедливо при естественном ограничении $k/D \gg 1$, и мы приходим к уравнению Фоккера–Планка

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} P(L; W) &= 2k\gamma \frac{\partial}{\partial W} W P(L; W) - 2D \frac{\partial}{\partial W} W (1 - W) P(L; W) + \\ &+ D \frac{\partial}{\partial W} W (1 - W)^2 \frac{\partial}{\partial W} P(L; W), \quad P(L_0, W) = \delta(W - 1), \quad (12.20) \end{aligned}$$

с коэффициентом диффузии

$$D = \frac{k^2 \sigma_\varepsilon^2 l_0}{2}.$$

В ряде случаев оказывается более удобным представлять величину W_L в виде

$$W_L = \frac{u_L - 1}{u_L + 1}, \quad u_L = \frac{1 + W_L}{1 - W_L}, \quad u_L \geq 1. \quad (12.21)$$

Тогда величина u_L описывается стохастической системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} u_L &= -k\gamma (u_L^2 - 1) + k\varepsilon_1(L) \sqrt{u_L^2 - 1} \sin \varphi_L, \quad u_{L_0} = 1, \\ \frac{d}{dL} \varphi_L &= 2k + k\varepsilon_1(L) \left\{ 1 + \frac{u_L}{\sqrt{u_L^2 - 1}} \cos \varphi_L \right\}, \quad \varphi_{L_0} = 0, \end{aligned}$$

и для плотности вероятностей случайной величины $u_L - P(L; u) = \langle \delta(u_L - u) \rangle$ получаем уравнение Фоккера–Планка

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} P(L; u) &= k\gamma \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) P(L; u) + D \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u} P(L; u), \\ P(L; u) &= \delta(u - 1). \end{aligned} \quad (12.22)$$

Отметим, что обратная величина к коэффициенту диффузии, определяющая естественный масштаб длины, связанный со случайными неоднородностями среды, обычно называется *длиной локализации*, т. е.

$$l_{\text{loc}} = 1/D.$$

Далее, при анализе статистических характеристик волнового поля, мы увидим, что именно эта величина определяет масштаб *динамической локализации волн* в отдельных реализациях волнового поля, несмотря на то, что в ряде случаев *статистическая локализация*, связанная со статистическими характеристиками волнового поля, может и не осуществляться.

Недиссипативная среда.

Если поглощение в среде отсутствует (т. е. $\gamma = 0$), то уравнение (12.22) для безразмерной толщины слоя $\eta = D(L - L_0)$ принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \eta} P(\eta; u) = \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u} P(\eta; u), \quad P(0; u) = \delta(u - 1). \quad (12.23)$$

Его решение легко получить, используя интегральное *преобразование Меллера-Фока*, в виде

$$P(\eta, u) = \int_0^\infty d\mu \mu \tanh(\pi\mu) \exp \left\{ - \left(\mu^2 + \frac{1}{4} \right) \eta \right\} P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(u), \quad (12.24)$$

где $P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(x)$ — *функция Лежандра* первого порядка (*функция конуса*).

Учитывая, что

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)^n} P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(x) = \frac{\pi}{\cosh(\mu\pi)} K_n(\mu),$$

где

$$K_{n+1}(\mu) = \frac{1}{2n} \left[\mu^2 + \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 \right] K_n(\mu), \quad K_1(\mu) = 1,$$

из представления (12.24) можно вычислить статистические характеристики коэффициентов отражения $W_L = |R_L|^2$ и прохождения $|T_L|^2 = 1 - |R_L|^2 = 2/(1 + u_L)$ и, в частности, получить выражение для моментов квадрата модуля коэффициента прохождения:

$$\langle |T_L|^{2n} \rangle = 2^n \pi \int_0^\infty d\mu \frac{\mu \sinh(\mu\pi)}{\cosh^2(\mu\pi)} K_n(\mu) e^{-(\mu^2+1/4)\eta}. \quad (12.25)$$

График зависимости величин $\langle W_L \rangle = \langle |R_L|^2 \rangle$ и $\langle |T_L|^2 \rangle = 1 - \langle |R_L|^2 \rangle$ от толщины слоя приведен на рис. 3.3.

При достаточно большой толщине слоя, а именно $\eta = D(L - L_0) \gg \gg 1$, для моментов модуля коэффициента прохождения из (12.25) следует асимптотическая формула

$$\langle |T_L|^{2n} \rangle \approx \frac{[(2n-3)!!]^2 \pi^2 \sqrt{\pi}}{2^{2n-1} (n-1)!} \frac{1}{\eta \sqrt{\eta}} e^{-\eta/4},$$

и, следовательно, асимптотическая зависимость любого момента модуля коэффициента прохождения $|T_L|$ от толщины слоя имеет универсальный характер (меняется лишь численный коэффициент).

Стремление к нулю всех моментов величины $|T_L|$ с увеличением толщины слоя означает, что $|R_L| \rightarrow 1$ с вероятностью единица, т. е. *полупространство случайно-неоднородной недиссипативной слоистой среды полностью отражает падающую на нее волну*. Очевидно, что это явление не зависит от статистической модели среды и от условия справедливости описания с помощью дополнительного усреднения по быстрым осцилляциям, связанным с фазой коэффициента отражения.

В приближении дельта-коррелированности случайного процесса $\varepsilon_1(L)$ случайные процессы W_L и u_L , очевидно, марковские процессы по параметру L . При этом плотность вероятностей перехода

$$p(u, L | u', L') = \langle \delta(u_L - u | u_{L'} = u') \rangle$$

описывается, очевидно, также уравнением (12.23), т. е.

$$\frac{\partial}{\partial L} p(u, L | u', L') = D \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u} p(u, L | u', L')$$

с начальным условием

$$p(u, L' | u', L') = \delta(u - u'),$$

решение которого

$$p(u, L | u', L') = \int_0^\infty d\mu \mu \tanh(\pi\mu) e^{-D(\mu^2 + 1/4)(L-L')} P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(u) P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(u'). \quad (12.26)$$

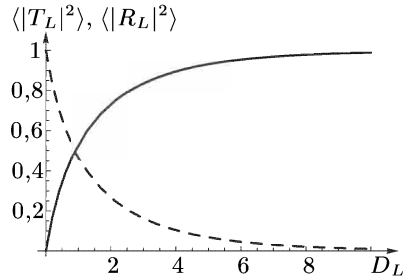


Рис. 3.3. Зависимости величин $\langle |R_L|^2 \rangle$ и $\langle |T_L|^2 \rangle$ от толщины слоя

Диссипативная среда.

При наличии поглощения в среде уравнения (12.20) и (12.22) не могут быть решены аналитически для слоя конечной толщины. Однако для полупространства ($L_0 \rightarrow -\infty$) существует «стационарная» плотность вероятностей для величин W_L и u_L , не зависящая от L и удовлетворяющая уравнениям

$$2(\beta - 1 + W)P(W) + (1 - W)^2 \frac{d}{dW} P(W) = 0, \quad 0 < W < 1, \quad (12.27)$$

$$\beta P(u) + \frac{d}{du} P(u) = 0, \quad u < 1,$$

где $\beta = k\gamma/D$ — безразмерный коэффициент поглощения.

Решения уравнений (12.27) имеют вид

$$P(W) = \frac{2\beta}{(1 - W)^2} \exp \left\{ -\frac{2\beta W}{1 - W} \right\}, \quad P(u) = \beta e^{-\beta(u-1)}, \quad (12.28)$$

и график функции $P(W)$ представлен для различных значений параметра β на рис. 3.4.

Физический смысл плотности вероятностей (12.28) очевиден, она описывает статистические свойства коэффициента отражения от достаточно протяженного хаотически неоднородного слоя, до конца которого падающая волна не проникает вследствие ее динамического поглощения средой.

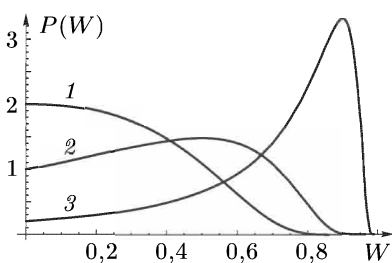


Рис. 3.4. Плотность вероятностей для квадрата модуля коэффициента отражения $P(W)$. Кривая 1 соответствует параметру $\beta = 1$; 2 — $\beta = 0,5$; 3 — $\beta = 0,1$

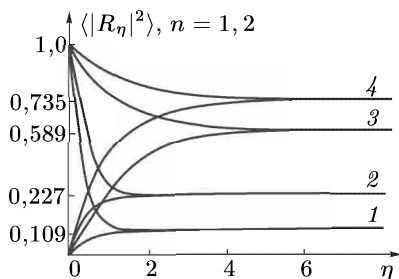


Рис. 3.5. Графики зависимости статистических характеристик $W_L = |R_L|^2$: кривые 1, 2 — второй и первый моменты при $\beta = 1$, кривые 3, 4 — второй и первый моменты при $\beta = 0,08$

С помощью распределений (12.28) можно вычислить все моменты величины $W_L = |R_L|^2$. Так, для среднего значения квадрата модуля

коэффициента отражения получаем

$$\langle W \rangle = \int_0^1 dW W P(W) = \int_1^\infty du \frac{u-1}{u+1} P(u) = 1 + 2\beta e^{2\beta} \text{Ei}(-2\beta),$$

где $\text{Ei}(-x) = -\int_x^\infty \frac{dt}{t} e^{-t} (x > 0)$ — интегральная показательная функция. Учитывая асимптотические разложения для функции $\text{Ei}(-x)$ получаем асимптотические разложения для величины $\langle W \rangle = \langle |R_L|^2 \rangle$:

$$\langle W \rangle \approx \begin{cases} 1 - 2\beta \ln(1/\beta), & \beta \ll 1, \\ 1/2\beta, & \beta \gg 1. \end{cases} \quad (12.29)$$

Для нахождения высших моментов величины $W_L = |R_L|^2$ умножим первое уравнение в (12.27) на W^n и проинтегрируем по W от 0 до 1. В результате получаем рекуррентное соотношение

$$n \langle W^{n+1} \rangle - 2(\beta + n) \langle W^n \rangle + n \langle W^{n-1} \rangle = 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (12.30)$$

с помощью которого можно последовательно вычислить все старшие моменты. Так, для $n = 1$, получаем

$$\langle W^2 \rangle = 2(\beta + 1) \langle W \rangle - 1.$$

Переход к «стационарному» распределению вероятностей можно осуществить не только предельным переходом $L_0 \rightarrow -\infty$, но и переходом $L \rightarrow \infty$. Уравнение (12.20) решалось численно для двух значений параметра $\beta = 1,0$ и $\beta = 0,08$ для различных начальных условий. По найденному решению вычислялись величины $\langle W_L \rangle$, $\langle W_L^2 \rangle$, графики поведения которых, в зависимости от безразмерной толщины слоя $\eta = D(L - L_0)$, представлены на рис. 3.5. Из графиков видно, что при $\beta \geq 1$ распределение вероятностей выходит на свое «стационарное» распределение довольно быстро ($\eta \sim 1,5$), в случае же $\beta = 0,08$ (большая «стохастичность» задачи) $\eta \geq 5$.

Отметим, что для рассматриваемой задачи плотность потока энергии и интенсивность волнового поля на границе слоя среды $x = L$ выражаются через коэффициент отражения и, следовательно, при $\beta \ll 1$

$$\langle S(L, L) \rangle = 1 - \langle W_L \rangle = 2\beta \ln(1/\beta), \quad \langle I(L, L) \rangle = 1 + \langle W_L \rangle = 2. \quad (12.31)$$

Учитывая, что для полупространства случайно-неоднородной среды $|T_L| = 0$, для энергии волнового поля, заключенного в этом полупространстве,

$$E = D \int_{-\infty}^L dx I(x; L),$$

исходя из равенства (12.4) получаем распределение вероятностей вида

$$P(E) = \beta P(W)_{W=(1-\beta E)} = \frac{2}{E^2} \exp \left\{ -\frac{2}{E} (1 - \beta E) \right\} \theta(1 - \beta E), \quad (12.32)$$

и, в частности, например при $\beta \ll 1$,

$$\langle E \rangle = 2 \ln(1/\beta). \quad (12.33)$$

Отметим, что распределение вероятностей (12.32) допускает предельный переход $\beta = 0$, в результате которого получаем предельную плотность вероятностей

$$P(E) = \frac{2}{E^2} \exp \left\{ -\frac{2}{E} \right\}, \quad (12.34)$$

затухающую степенным образом для больших значений энергии E с интегральной функцией распределения

$$F(E) = \exp \left\{ -\frac{2}{E} \right\}.$$

Следствием (12.34) является то, что все моменты полной энергии волнового поля равны бесконечности. И в то же время существует конечная вероятность ограничения полной энергии произвольной величиной в отдельных реализациях волнового поля.

12.1.2. Источник внутри среды. Для источника плоских волн, находящегося внутри среды, волновое поле и плотность потока энергии в точке расположения источника описываются формулами (12.12) и (12.15). Для модели дельта-коррелированных флуктуаций $\varepsilon_1(x)$ величины $R_1(x_0)$ и $R_2(x_0)$ статистически независимы, так как они описываются динамическими уравнениями в неперекрывающихся частях пространства. Для неограниченного пространства ($L_0 \rightarrow -\infty$, $L \rightarrow \infty$) плотности вероятностей для величин $R_1(x_0)$ и $R_2(x_0)$ описываются формулой (12.28), и, следовательно, для средней интенсивности волнового поля в точке расположения источника и среднего значения плотности потока энергии в точке расположения источника получаем выражение

$$\langle I(x_0; x_0) \rangle = 1 + \frac{1}{\beta}. \quad (12.35)$$

Неограниченный рост средней интенсивности в точке расположения источника при $\beta \rightarrow 0$ свидетельствует о накоплении энергии волны в хаотически слоистой среде, а в то же время среднее значение плотности потока энергии в точке расположения источника $\langle S(x_0; x_0) \rangle = 1$ не зависит от флуктуаций параметра среды и совпадает с плотностью потока энергии в свободном пространстве.

Аналогичным образом, с помощью формул (12.13) и (12.15) для источника, расположенного на отражающей границе $x_0 = L$, получаем

$$\langle I_{\text{ref}}(L; L) \rangle = 4 \left(1 + \frac{2}{\beta} \right), \quad \langle S_{\text{ref}}(L; L) \rangle = 4, \quad (12.36)$$

т. е. среднее значение плотности потока энергии от источника, расположенного на отражающей границе, также не зависит от флуктуаций параметров среды и совпадает с плотностью потока энергии в свободном пространстве.

Отметим, что полученные выше формулы (12.35), (12.36), при $\beta \rightarrow 0$ обращаются в бесконечность, т. е. наличие поглощения в среде (хоть и сколь угодно малого) является регуляризующим фактором в задаче о точечном источнике.

Используя равенство (12.16), можно получить распределение вероятностей для энергии волнового поля в полупространстве:

$$E = D \int_{-\infty}^{x_0} dx I(x; x_0).$$

В частности, для источника, находящегося на отражающей границе, получаем выражение

$$P_{\text{ref}}(E) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{E\sqrt{E}} \exp \left\{ -\frac{2}{E} \left(1 - \frac{\beta E}{4} \right)^2 \right\},$$

допускающее предельный переход $\beta \rightarrow 0$, аналогично случаю падения волны на полупространство случайно-неоднородной среды.

12.1.3. Статистическая локализация. Полученные выше равенства, связанные со значениями волнового поля в фиксированных точках пространства (на границе среды и в точке расположения источника) позволяют, в силу равенства (12.16), сделать некоторые общие заключения и о поведении средней интенсивности волнового поля внутри случайно-неоднородной среды.

Так, для средней энергии, содержащейся в полупространстве $(-\infty, x)$, из (12.16) следует выражение

$$\langle E \rangle = D \int_{-\infty}^{x_0} dx \langle I(x; x_0) \rangle = \frac{1}{\beta} \langle S(x_0; x_0) \rangle. \quad (12.37)$$

Следовательно, для падающей на полупространство $x \leq L$ плоской волны ($x_0 = L$), при условии $\beta \ll 1$ из (12.31) и (12.37) вытекают равенства

$$\langle E \rangle = 2 \ln(1/\beta), \quad \langle I(L; L) \rangle = 2. \quad (12.38)$$

Следовательно, бо́льшая часть средней энергии сосредоточена в части пространства

$$Dl_\beta \cong \ln(1/\beta),$$

т. е. осуществляется *статистическая локализация волнового поля*, связанная с поглощением волны. Отметим, что и при отсутствии флуктуаций параметров среды, также осуществляется локализация энергии на масштабах порядка длины поглощения $Dl_{\text{abs}} \cong 1/\beta$. Однако при выполнении условия $\beta \ll 1 - l_{\text{abs}} \gg l_\beta$. Если $\beta \rightarrow 0$, то величина $l_\beta \rightarrow \infty$, и в предельном случае непоглощающей среды, статистическая локализация волнового поля отсутствует.

Для источника в неограниченном пространстве имеем

$$\langle E \rangle = \frac{1}{\beta}, \quad \langle I(x_0; x_0) \rangle = 1 + \frac{1}{\beta},$$

и, следовательно, в отличие от предыдущего случая, локализация средней энергии осуществляется на пространственном масштабе $D|x - x_0| \cong 1$ при $\beta \rightarrow 0$.

Аналогичным образом, для источника, расположенного на отражающей границе, имеем

$$\langle E \rangle = \frac{4}{\beta}, \quad \langle I_{\text{ref}}(L; L) \rangle = 4 \left(1 + \frac{2}{\beta} \right),$$

и, следовательно, локализация средней энергии осуществляется на вдвое меньшем пространственном масштабе $D(L - x) \cong 1/2$ при $\beta \rightarrow 0$.

В рассмотренных выше задачах средняя энергия волнового поля существенно зависит от параметра β и стремится к бесконечности при условии $\beta \rightarrow 0$. Однако это справедливо только для средних величин. Далее при анализе волнового поля внутри случайно-неоднородной среды мы убедимся, что даже при отсутствии поглощения в среде в отдельных реализациях волнового поля осуществляется *динамическая локализация*.

12.2. Статистическая теория переноса излучения

Перейдем теперь к статистическому описанию волнового поля внутри среды. Рассмотрим две задачи — о падении волны на слой среды и об источнике волн внутри среды.

12.2.1. Падение волны на слой среды. В общем случае при наличии поглощения в среде волновое поле описывается краевой задачей (12.1), (12.2). Волновое поле внутри среды может быть представлено

в виде

$$\begin{aligned} u(x) &= u_1(x) + u_2(x), \\ \frac{d}{dx} u(x) &= -ik[u_1(x) - u_2(x)], \end{aligned} \quad (12.39)$$

где $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — комплексные *встречные волны*. Они связаны с волновым полем с помощью соотношений

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \frac{1}{2} \left[u(x) + \frac{i}{k} \frac{d}{dx} u(x) \right], \quad u_1(L) = 1, \\ u_2(x) &= \frac{1}{2} \left[u(x) - \frac{i}{k} \frac{d}{dx} u(x) \right], \quad u_2(L_0) = 0, \end{aligned} \quad (12.40)$$

и, следовательно, краевую задачу (12.1), (12.2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} + ik \right) u_1(x) &= -\frac{ik}{2} \varepsilon(x) [u_1(x) + u_2(x)], \quad u_1(L) = 1, \\ \left(\frac{d}{dx} - ik \right) u_2(x) &= -\frac{ik}{2} \varepsilon(x) [u_1(x) + u_2(x)], \quad u_2(L_0) = 0. \end{aligned} \quad (12.41)$$

Волновое поле, как функция параметра L , описывается уравнением погружения (12.6). Очевидно, что и встречные волны также будут удовлетворять уравнениям (12.6), но с различными начальными условиями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} u_1(x; L) &= ik \left\{ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon(L) (1 + R_L) \right\} u_1(x; L), \quad u_1(x; x) = 1, \\ \frac{\partial}{\partial L} u_2(x; L) &= ik \left\{ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon(L) (1 + R_L) \right\} u_2(x; L), \quad u_2(x; x) = R_x, \end{aligned}$$

где коэффициент отражения R_L описывается уравнением (12.5).

Введем теперь интенсивности встречных волн $W_1(x; L) = |u_1(x; L)|^2$ и $W_2(x; L) = |u_2(x; L)|^2$, удовлетворяющие, очевидно, уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} W_1(x; L) &= -k\gamma W_1(x; L) + \frac{ik}{2} \varepsilon(L) (R_L - R_L^*) u_1(x; L), \\ \frac{\partial}{\partial L} W_2(x; L) &= -k\gamma W_2(x; L) + \frac{ik}{2} \varepsilon(L) (R_L - R_L^*) W_2(x; L), \end{aligned} \quad (12.42)$$

$$W_1(x; x) = 1, \quad W_2(x; x) = |R_x|^2.$$

Величина $W_L = |R_L|^2$, входящая в начальное условие в (12.42), удовлетворяет уравнению (12.7). В уравнении (12.42) опущены слагаемые в диссипативных членах, не вносящие вклада в накапливающиеся эффекты.

Будем по-прежнему считать $\varepsilon_1(x)$ гауссовым дельта-коррелированным случайным процессом с корреляционной функцией (12.17). В силу того что уравнения (12.42) и (12.7) — уравнения первого порядка с начальными условиями, можно для совместной плотности вероятностей величин $W_1(x; L)$, $W_2(x; L)$ и W_L ,

$$P(x; L; W_1, W_2, W) = \langle \delta(W_1(x; L) - W_1) \delta(W_2(x; L) - W_2) \delta(W_L - W) \rangle,$$

обычным образом получить уравнение Фоккера–Планка

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} P(x; L; W_1, W_2, W) = & k\gamma \left(\frac{\partial}{\partial W_1} W_1 + \frac{\partial}{\partial W_2} W_2 + 2 \frac{\partial}{\partial W} W \right) P(x; L; W_1, W_2, W) + \\ & + D \left[\frac{\partial}{\partial W_1} W_1 + \frac{\partial}{\partial W_2} W_2 - \frac{\partial}{\partial W} (1 - W) \right] P(x; L; W_1, W_2, W) + \\ & + D \left[\frac{\partial}{\partial W_1} W_1 + \frac{\partial}{\partial W_2} W_2 - \frac{\partial}{\partial W} (1 - W) \right]^2 W P(x; L; W_1, W_2) \end{aligned} \quad (12.43)$$

с начальным условием

$$P(x; x; W_1, W_2, W) = \delta(W_1 - 1) \delta(W_2 - W) P(x; W),$$

где функция $P(L; W)$ — плотность вероятностей квадрата модуля отражения W_L , описываемая уравнением (12.20). В уравнении (12.43), как и ранее, коэффициент диффузии $D = k^2 \sigma_\varepsilon^2 l_0 / 2$, и при выводе уравнения используется дополнительное усреднение по быстрым осцилляциям, обусловленным решением задачи при $\varepsilon = 0$ — $u(x) \sim \exp\{\pm i k x\}$.

Учитывая, что уравнения (12.42) для функций $W_n(x; L)$ линейны, можно перейти к производящей функции для моментов интенсивностей встречных волн:

$$Q(x; L; \mu, \lambda, W) = \int_0^1 dW_1 \int_0^1 dW_2 W_1^{\mu-\lambda} W_2^\lambda P(x; L; W_1, W_2, W),$$

удовлетворяющей более простому уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} Q(x; L; \mu, \lambda, W) = & -k\gamma \left(\mu - 2 \frac{\partial}{\partial W} W \right) Q(x; L; \mu, \lambda, W) - \\ & - D \left[\mu + \frac{\partial}{\partial W} (1 - W) \right] Q(x; L; \mu, \lambda, W) + \\ & + D \left[\mu - \frac{\partial}{\partial W} (1 - W) \right]^2 W Q(x; L; \mu, \lambda, W) \quad (12.44) \end{aligned}$$

с начальным условием

$$Q(x; x; \mu, \lambda, W) = W^\lambda P(x; W).$$

Зная функцию $Q(x; L; \mu, \lambda, W)$, можно определить моментные функции интенсивностей встречных волн с помощью равенства

$$\left\langle W_1^{\mu-\lambda}(x; L) W_2^\lambda(x; L) \right\rangle = \int_0^1 dW Q(x; L; \mu, \lambda, W). \quad (12.45)$$

Уравнение (12.44) описывает статистическое поведение волнового поля внутри слоя среды $L_0 \leq x \leq L$ и, в частности, коэффициент прохождения волны, если в нем положить $x = L_0$.

В предельном случае полупространства ($L_0 \rightarrow -\infty$) уравнение (12.44) переходит в уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} Q(\xi; \mu, \lambda, W) = & -\beta \left(\mu - 2 \frac{\partial}{\partial W} W \right) Q(\xi; \mu, \lambda, W) - \\ & - \left[\mu + \frac{\partial}{\partial W} (1 - W) \right] Q(\xi; \mu, \lambda, W) + \\ & + \left[\mu - \frac{\partial}{\partial W} (1 - W) \right]^2 W Q(\xi; \mu, \lambda, W), \\ Q(0; \mu, \lambda, W) = & W^\lambda P(W), \quad (12.46) \end{aligned}$$

где введено безразмерное расстояние $\xi = D(L - x) > 0$, а «стационарная», не зависящая от L , плотность вероятностей для модуля коэффициента отражения $P(W)$ описывается формулой (12.28). Равенство (12.45) в этом случае переписывается в виде

$$\left\langle W_1^{\mu-\lambda}(\xi) W_2^\lambda(\xi) \right\rangle = \int_0^1 dW Q(\xi; \mu, \lambda, W). \quad (12.47)$$

Недиссипативная среда (стохастический волновой параметрический резонанс и динамическая локализация волн).

Рассмотрим теперь уравнения для моментов интенсивности встречных волн при отсутствии поглощения волны в среде, т. е. уравнения (12.46) при $\beta = 0$ для полупространства ($L_0 \rightarrow -\infty$) случайно-неоднородной среды. В этом случае с вероятностью единица $W_L = 1$ и решение уравнения (12.46) имеет структуру

$$Q(x, L; \mu, \lambda, W) = \delta(W - 1) \exp \{D\lambda(\lambda - 1)(L - x)\},$$

и, следовательно,

$$\langle W_1^{\lambda-\mu}(x; L) W_2^\mu(x; L) \rangle = \exp \{D\lambda(\lambda - 1)(L - x)\}.$$

Это означает, в силу произвольности параметров λ и μ , что

$$W_1(x; L) = W_2(x; L) = W(x; L)$$

с вероятностью единица, и величина $W(x; L)$ имеет логнормальную плотность вероятностей. При этом ее среднее значение равно единице, а высшие моменты, начиная со второго, экспоненциально растут вглубь среды:

$$\langle W(x; L) \rangle = 1, \quad \langle W^n(x; L) \rangle = e^{Dn(n-1)(L-x)}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Отметим, что интенсивность волнового поля $I(x; L)$ в этом случае имеет структуру

$$I(x; L) = 2W(x; L) (1 + \cos \varphi_x), \quad (12.48)$$

где φ_L — фаза коэффициента отражения.

По свойствам логнормального распределения вероятностей типичной реализацией функции $W(x; L)$ является экспоненциально спадающая вглубь среды кривая

$$W^*(x; L) = e^{-D(L-x)}, \quad (12.49)$$

и, например, с вероятностью $1/2$ для ее реализаций имеет место неравенство

$$W(x; L) < 4e^{-D(L-x)/2},$$

справедливое для всего полупространства.

Экспоненциальное спадание с ростом $\xi = D(L - x)$ типичной реализации (12.49) и отождествляется обычно в физике неупорядоченных систем со свойством *динамической локализации*, а величина

$$l_{\text{loc}} = \frac{1}{D}$$

обычно называется *локализационной длиной*. При этом

$$l_{\text{loc}}^{-1} = -\frac{\partial}{\partial L} \langle \varkappa(x; L) \rangle,$$

где

$$\varkappa(x; L) = \ln W(x; L).$$

С физической точки зрения логнормальность интенсивности волнового поля $W(x; L)$ означает наличие больших выбросов относительно кривой типичной реализации (12.49) как в сторону больших значений интенсивности, так и в сторону малых. Этот результат согласуется с примером численного моделирования (рис. 1.6), который был представлен в гл. 1. Такие скачки интенсивности, однако, не содержат много энергии, так как, по свойству логнормального распределения вероятностей, случайная величина

$$S(L) = D \int_{-\infty}^L dx W(x; L),$$

описывающая площадь под кривой $W(x; L)$, имеет стационарную, не зависящую от L , плотность вероятностей

$$P(S) = \frac{1}{S^2} \exp \left\{ -\frac{1}{S} \right\},$$

что согласуется с распределением всей энергии волнового поля внутри полупространства (12.34) при $E = 2S$. Это означает, что присутствие в выражении (12.48) члена, связанного с быстро осциллирующей фазой коэффициента отражения, не вносит существенного вклада в общую энергию.

Таким образом, знание одноточечной плотности вероятностей позволяет понять эволюцию во всем пространстве интенсивности волнового поля в отдельных реализациях и оценить параметры этой эволюции в терминах статистических характеристик флуктуирующей среды.

Диссипативная среда.

В присутствии конечного (хоть и сколь угодно малого) поглощения волны в среде, занимающей полупространство, экспоненциальный рост моментных функций должен прекратиться и смениться затуханием.

Если параметр $\beta \gg 1$ (т. е. поглощение велико по сравнению с диффузией), то

$$P(W) = 2\beta e^{-2\beta W}$$

и, как легко видеть из уравнения (12.46), интенсивности встречных волн $W_1(x; L)$ и $W_2(x; L)$ статистически независимы, т. е. они не коррелируют друг с другом. При этом

$$\langle W_1(\xi) \rangle = \exp \left\{ -\beta \xi \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right\},$$

$$\langle W_2(\xi) \rangle = \frac{1}{2\beta} \exp \left\{ -\beta \xi \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right\}.$$

На рис. 3.6–3.8 представлены в качестве примеров результаты численного решения уравнений (12.46) и квадратуры (12.47) для моментных функций случайных процессов для различных значений параметра β . Кривые с различными номерами соответствуют различным значениям параметра β . Рис. 3.6 соответствуют средним интенсивностям проходящей и отраженной волн. Кривые монотонно убывают с увеличением ξ . На рис. 3.7 изображены соответствующие зависимости для вторых моментов. При $\xi = 0 - \langle W_1^2(0) \rangle = 1$, $\langle W_2^2(0) \rangle = \langle |R_L|^4 \rangle$. При $\beta < 1$ зависимость от ξ становится немонотонной; моменты вначале растут, проходят через максимум и лишь затем начинают монотонно убывать. С уменьшением параметра β положение максимума смещается вправо, а максимальное значение увеличивается. На рис. 3.8 построены кривые для величины $\langle \Delta W_1(\xi) \Delta W_2(\xi) \rangle$ ($\Delta W_n(\xi) = W_n(\xi) - \langle W_n(\xi) \rangle$), описывающей корреляцию между интенсивностями проходящей и отраженной волн. При $\beta \geq 1$ такая корреляция исчезает. Ввиду наличия сильной корреляции при $\beta < 1$ ясно, что разделение волн на встречные волны никакого физического смысла не имеет. Это чисто математический прием. При $\beta \geq 1$ такое разделение оправдано отсутствием корреляции.

Как было показано выше, для параметра $\beta = 0$, все моменты волнового поля, начиная со второго, для полупространства случайно-неоднородной среды экспоненциально растут с дистанцией, проходимой волной. Ясно, что для малого параметра $\beta \ll 1$ решение задачи должно иметь сингулярный характер по β , чтобы обратить решение в нуль при достаточно больших расстояниях, пройденных волной.

Можно показать, что для значений параметра $\beta \ll 1$, интенсивности встречных волн равны друг другу с вероятностью единица и для малых расстояний от границы решение задачи совпадает с решением, соответствующим стохастическому параметрическому резонансу. Для достаточно больших расстояний ξ , а именно

$$\xi \gg 4 \left(n - \frac{1}{2} \right) \ln \left(\frac{n}{\beta} \right),$$

величины $\langle W^n(\xi) \rangle$ имеют универсальную пространственную локализационную структуру

$$\langle W^n(\xi) \rangle \cong A_n \frac{1}{\beta^{n-1/2}} \ln \left(\frac{1}{\beta} \right) \frac{1}{\xi \sqrt{\xi}} e^{-\xi/4}.$$

Таким образом, поведение моментов интенсивности встречных волн существенно различается в трех областях. В первой области, соответствующей стохастическому параметрическому резонансу, моменты экспоненциально нарастают в глубь среды и роль поглощения волны

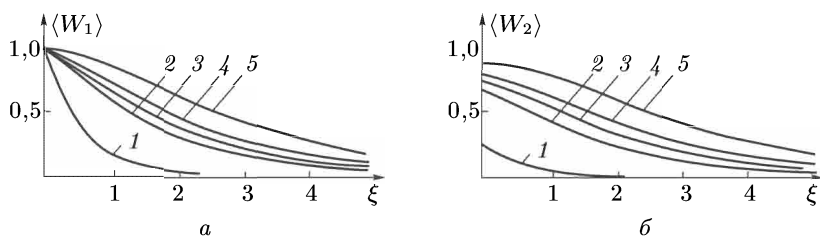


Рис. 3.6. Распределение средней интенсивности волнового поля внутри среды: проходящая волна (а); отраженная волна (б). Кривые соответствуют: 1 — $\beta = 1$; 2 — $\beta = 0,1$; 3 — $\beta = 0,06$; 4 — $\beta = 0,04$; 5 — $\beta = 0,02$

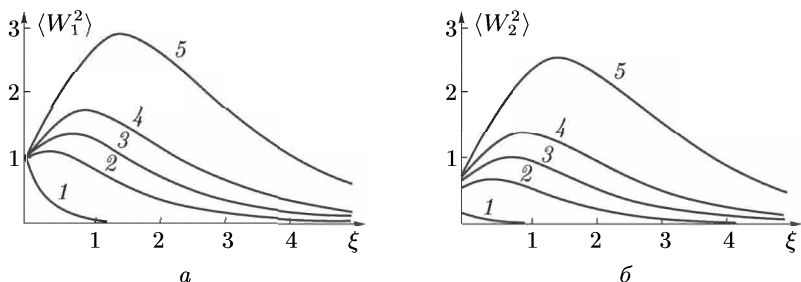


Рис. 3.7. Распределение второго момента интенсивности волнового поля внутри среды: проходящая волна (а); отраженная волна (б). Кривые соответствуют: 1 — $\beta = 1$; 2 — $\beta = 0,1$; 3 — $\beta = 0,06$; 4 — $\beta = 0,04$; 5 — $\beta = 0,02$

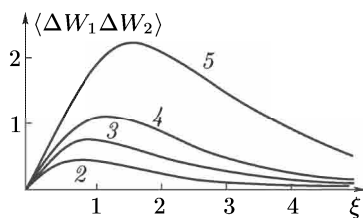


Рис. 3.8. Корреляция интенсивностей проходящей и отраженной волн. Кривые соответствуют: 1 — $\beta = 1$; 2 — $\beta = 0,1$; 3 — $\beta = 0,06$; 4 — $\beta = 0,04$; 5 — $\beta = 0,02$

в среде несущественна. Во второй области роль поглощения наиболее важна, потому что оно останавливает экспоненциальный рост моментов. И, наконец, в третьей области убывание моментных функций интенсивности встречных волн не зависит от поглощения. Границы этих областей определяются параметром β и стремятся к бесконечности при $\beta \rightarrow 0$.

12.2.2. Источник плоских волн внутри случайно-неоднородной среды. Рассмотрим теперь асимптотическое решение задачи об источнике плоских волн в неограниченном пространстве ($L_0 \rightarrow -\infty$, $L \rightarrow \infty$) при условии $\beta \rightarrow 0$. Для вычисления средней интенсивности волнового поля в области $x < x_0$ в этом случае удобно воспользоваться соотношениями (12.14) и (12.15):

$$\beta \langle I(x; x_0) \rangle = \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial x} \langle S(x; x_0) \rangle = \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial x} \langle \psi(x; x_0) \rangle,$$

где функция $\psi(x; x_0)$

$$\psi(x; x_0) = \exp \left\{ -\beta D \int_x^{x_0} d\xi \frac{|1 + R_\xi|^2}{1 - |R_\xi|^2} \right\}$$

и, следовательно, как функция параметра x_0 , описывается стохастическим уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \psi(x; x_0) = -\beta D \frac{|1 + R_{x_0}|^2}{1 - |R_{x_0}|^2} \psi(x; x_0), \quad \psi(x; x) = 1.$$

Введем функцию

$$\Phi(x; x_0; u) = \psi(x; x_0) \delta(u_{x_0} - u), \quad (12.50)$$

где величина $u_L = (1 + W_L)/(1 - W_L)$ описывается стохастической системой уравнений (12.21). Дифференцируя (12.50) по x_0 , получаем стохастическое уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_0} \Phi(x; x_0; u) = & -\beta D \left\{ u + \sqrt{u^2 - 1} \cos \varphi_{x_0} \right\} \Phi(x; x_0; u) + \\ & + \beta D \frac{\partial}{\partial u} \left\{ (u^2 - 1) \Phi(x; x_0; u) \right\} - \\ & - k\varepsilon_1(x_0) \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \sqrt{u^2 - 1} \sin \varphi_{x_0} \Phi(x; x_0; u) \right\}. \end{aligned} \quad (12.51)$$

Усредним теперь уравнение (12.51) по ансамблю реализаций случайного процесса $\varepsilon_1(x_0)$, который, как и ранее, считаем гауссовым дельта-коррелированным процессом по x_0 . Используя далее формулу Фурутцу–Новикова (8.9) и дополнительное усреднение по быстрым осцилляциям (фазе коэффициента отражения), получаем для функции

$$\Phi(\xi; u) = \langle \Phi(x; x_0; u) \rangle = \langle \psi(x; x_0) \delta(u_{x_0} - u) \rangle,$$

где $\xi = D|x - x_0|$, уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi(\xi; u) = \\ = -\beta u \Phi(\xi; u) + \beta \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \Phi(\xi; u) + \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u} \Phi(\xi; u), \\ \Phi(0; u) = P(u) = \beta e^{-\beta(u-1)}. \end{aligned} \quad (12.52)$$

Среднее значение интенсивности теперь может быть представлено в виде

$$\beta \langle I(x; x_0) \rangle = -\frac{\partial}{\partial \xi} \int_1^\infty du \Phi(\xi; u) = \beta \int_1^\infty du u \Phi(\xi; u).$$

В уравнении (12.52) возможно совершить предельный переход $\beta \rightarrow 0$. В результате получаем более простое уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{\Phi}(\xi; u) = -u \tilde{\Phi}(\xi; u) + \frac{\partial}{\partial u} u^2 \tilde{\Phi}(\xi; u) + \frac{\partial}{\partial u} u^2 \frac{\partial}{\partial u} \tilde{\Phi}(\xi; u), \\ \tilde{\Phi}(0; u) = e^{-u}. \end{aligned} \quad (12.53)$$

Следовательно, локализационное распределение в пространстве средней интенсивности описывается квадратурой

$$\Phi_{\text{loc}}(\xi) = \int_1^\infty du u \tilde{\Phi}(\xi; u),$$

где

$$\Phi_{\text{loc}}(\xi) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \beta \langle I(x; x_0) \rangle = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\langle I(x; x_0) \rangle}{\langle I(x_0; x_0) \rangle}.$$

Таким образом, средняя интенсивность волнового поля точечного источника при $\beta \ll 1$ имеет асимптотическое поведение:

$$\langle I(x; x_0) \rangle = \frac{1}{\beta} \Phi_{\text{loc}}(\xi).$$

Решение уравнения (12.53) может быть легко получено с помощью интегрального преобразования Конторовича–Лебедева, и в результате для локализационной кривой можно получить выражение

$$\Phi_{\text{loc}}(\xi) = 2\pi \int_0^\infty d\tau \tau \left(\tau^2 + \frac{1}{4} \right) \frac{\sinh(\pi\tau)}{\cosh^2(\pi\tau)} e^{-(\tau^2 + \frac{1}{4})\xi}. \quad (12.54)$$

Для малых значений расстояний ξ , локализационная кривая убы-

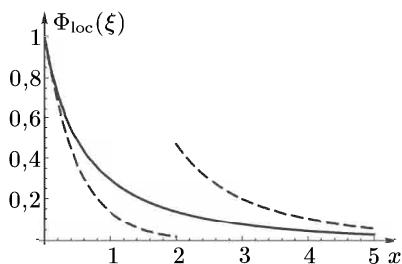


Рис. 3.9. График локализационной кривой для источника в неограниченном пространстве (12.54) — 1. Кривые 2 и 3 соответствуют асимптотикам на малых и больших расстояниях от источника

вадет довольно быстро по закону

$$\Phi_{\text{loc}}(\xi) \approx e^{-2\xi}. \quad (12.55)$$

Для больших значений ξ (а именно $\xi \gg \pi^2$) она убывает существенно медленнее по универсальному закону

$$\Phi_{\text{loc}}(\xi) \approx \frac{\pi^2 \sqrt{\pi}}{8} \frac{1}{\xi \sqrt{\xi}} e^{-\xi/4}. \quad (12.56)$$

График функции (12.54) представлен на рис. 3.9, где для сравнения также приведены асимптотические кривые (12.55) и (12.56).

Аналогичная ситуация и в случае источника плоских волн, расположенного на отражающей границе. В этом случае получаем выражение

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\langle I_{\text{ref}}(x; L) \rangle}{\langle I_{\text{ref}}(L; L) \rangle} = \frac{1}{2} \Phi_{\text{loc}}(\xi), \quad \xi = D(L - x). \quad (12.57)$$

12.3. Численное моделирование

Развитая выше теория основывалась на двух упрощениях: использовании приближения дельта-коррелированности функции $\varepsilon_1(x)$ (или диффузионного приближения) и усреднении по быстрым осцилляциям для нахождения медленных (на масштабе длины волны) изменений статистических характеристик. Метод усреднения по быстрым осцилляциям обоснован только для анализа статистических характеристик коэффициента отражения волны от полупространства случайно-неоднородной среды. Для расчета же статистических характеристик интенсивности волнового поля в среде обосновать его если и возможно, то очень сложно (этот метод является в большей степени физическим методом, чем математическим). Численное моделирование точной задачи позволяет как подтвердить эти упрощения, так и получить ответ в более сложных ситуациях, в которых мы не имеем аналитических результатов.

Такое численное моделирование, в принципе, можно было бы осуществить путем многократного решения задачи для различных реализаций параметров среды с последующим усреднением полученных решений по ансамблю реализаций. Однако такой подход мало перспективен, так как для получения значащих результатов требуется огромное число реализаций параметров среды. Этот подход совершенно непригоден для реальных физических задач, например для распространения волн

в атмосфере Земли и океане, где, как правило, имеется всего одна реализация. Более перспективен подход, основанный на свойстве эргодичности решения краевых задач по отношению к сдвигу всей задачи вдоль одной реализации функции $\varepsilon_1(x)$, определенной на полуоси (L_0, ∞) (см. рис. 3.10). На основе такого подхода статистические характеристики вычисляются с помощью формулы

$$\langle F(L_0; x, x_0; L) \rangle = \lim_{\delta \rightarrow \infty} F_\delta(L_0; x, x_0; L),$$

где

$$F_\delta(L_0; x, x_0; L) = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta d\Delta F(L_0 + \Delta; x + \Delta, x_0 + \Delta; L + \Delta).$$

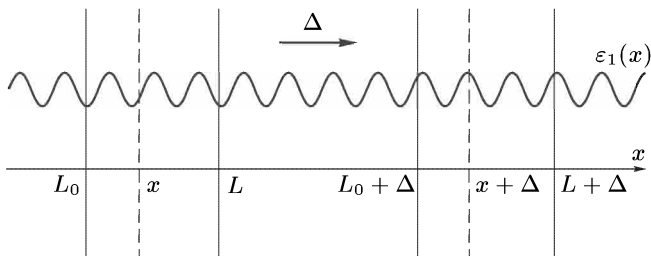


Рис. 3.10. Схема усреднения по параметру сдвига Δ , основанная на свойстве эргодичности уравнений погружения для полупространства случайно-неоднородной среды

В задачах, связанных с полупространством ($L_0 \rightarrow -\infty$), статистические характеристики не зависят от L_0 , и, следовательно изучаемая задача обладает свойством эргодичности по отношению к параметру L — положению правой границы слоя (который является переменной в методе погружения), так как он отождествляется в этом случае с параметром сдвига. Это позволяет при решении уравнений погружения для одной реализации параметров среды одновременно получать и все статистические характеристики ее решения, представляющие непосредственный интерес, с помощью очевидного равенства

$$\langle F(x, x_0; L) \rangle = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta d\xi F(\xi, \xi + x_0 - x; \xi + (L - x_0) + (x_0 - x))$$

для достаточно большого интервала $(0, \delta)$. Такой подход позволяет вычислять и такие статистические характеристики волны, которые современная статистическая теория дать не в состоянии, причем в отсутствие каких-либо дополнительных упрощающих предположений.

В качестве примера приведем расчет задачи о точечном источнике на отражающей границе $x_0 = L$ с краевым условием $dG(x, x_0; L)/dx|_{x=L} = 0$. На рис. 3.11 представлен результат моделирования величины $\langle I_{\text{ref}}(x, x_0) \rangle$ при $\beta = 0,08$ и $k/D = 25$.

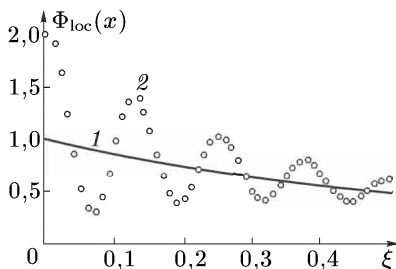


Рис. 3.11. Распределение средней интенсивности поля источника $2 \frac{\langle I_{\text{ref}}(x; L) \rangle}{\langle I_{\text{ref}}(L; L) \rangle}$, находящегося на отражающей границе при $\beta = 0,08$. 1 — локализационная кривая (12.54)

На этом рисунке видны осцилляции в области $\xi = D(L - x) < 0,3$, с периодом колебаний $T = 0,13$. Для больших значений ξ результаты моделирования хорошо согласуются с локализационной кривой (12.57).

Задачи

Задача 70. Получить распределение вероятностей для фазы коэффициента отражения при падении плоской волны на полупространство недиссипативной среды [42].

Указание. В этом случае коэффициент отражения имеет структуру $R_L = \exp\{i\varphi_L\}$, где фаза φ_L описывается уравнением погружения, вытекающим из (12.18):

$$\frac{d}{dL} \varphi_L = 2k + k\varepsilon_1(L) (1 + \cos \varphi_L), \quad \varphi_{L_0} = 0. \quad (12.58)$$

Решение уравнения (12.58) определено на всей оси $\varphi_L(-\infty, \infty)$. Однако для приложений полезнее знание распределения вероятностей на интервале $(-\pi, \pi)$, которое для полупространства, естественно, не должно зависеть от L . Для получения этого распределения удобно вместо фазы волны φ_L рассматривать функцию $z_L = \tan(\varphi_L/2)$, имеющую сингулярные точки. Динамическое уравнение для нее имеет вид

$$\frac{d}{dL} z_L = k (1 + z_L^2) + k\varepsilon_1(L), \quad z_{L_0} = 0.$$

Решение. Считая, что случайная функция $\varepsilon_1(L)$ является гауссовой дельта-коррелированной случайной функцией с параметрами

(12.17), для плотности вероятностей $P(L, z) = \langle \delta(z_L - z) \rangle$, определенной на всей оси $(-\infty, \infty)$, получаем уравнение Фоккера–Планка

$$\frac{\partial}{\partial L} P(L, z) = -k \frac{\partial}{\partial z} (1 + z_L^2) P(L, z) + 2D \frac{\partial^2}{\partial z^2} P(L, z).$$

Для полупространства случайно-неоднородной среды ($L_0 \rightarrow -\infty$) соответствующее «стационарное», не зависящее от L решение уравнения Фоккера–Планка $P(z) = \lim_{L_0 \rightarrow -\infty} P(L, z)$ описывается уравнением

$$-\kappa \frac{d}{dz} (1 + z^2) P(z) + \frac{d^2}{dz^2} P(z) = 0, \quad (12.59)$$

где параметр

$$\kappa = \frac{k}{2D}, \quad D = \frac{k^2 \sigma_\varepsilon^2 l_0}{2}.$$

Решение уравнения (12.59), соответствующее постоянству плотности потока вероятностей, имеет вид

$$P(z) = J(\kappa) \int_z^\infty d\xi \exp \left\{ -\kappa \xi \left[1 + \frac{\xi^3}{3} + z(z + \xi) \right] \right\},$$

где «стационарное» значение плотности потока вероятностей,

$$J^{-1}(\kappa) = \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} \int_0^\infty \xi^{-1/2} d\xi \exp \left\{ -\kappa \left(\xi + \frac{\xi^3}{12} \right) \right\}.$$

Соответствующее распределение вероятностей для фазы волны в интервале $(-\pi, \pi)$

$$P(\varphi) = \frac{1 + z^2}{2} P(z) \Big|_{z=\tan(\varphi/2)}.$$

При $\kappa \gg 1$ асимптотически имеем

$$P(z) = \frac{1}{\pi(1 + z^2)},$$

что соответствует равномерному распределению фазы коэффициента отражения:

$$P(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \quad -\pi < \varphi < \pi.$$

В обратном предельном случае $\kappa \ll 1$ мы получаем

$$P(z) = \kappa^{1/3} \left(\frac{3}{4} \right)^{1/6} \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(1/6)} \Gamma \left(\frac{1}{3}, \frac{\kappa z^3}{3} \right),$$

где $\Gamma(\mu, z)$ — неполная гамма-функция. При $\kappa|z|^3 \gg 3$ и $|z| \rightarrow \infty$ отсюда следует, что

$$P(z) = \kappa^{1/3} \left(\frac{3}{4}\right)^{1/6} \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/6)} \left(\frac{3}{\kappa z^3}\right)^{2/3}.$$

Задача 71. Получить в диффузионном приближении уравнение для плотности вероятностей коэффициента отражения.

Решение. Уравнение для плотности вероятностей коэффициента отражения имеет вид уравнения Фоккера–Планка (12.20) с коэффициентом диффузии

$$D(k, l_0) = \frac{k^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi B_\varepsilon(\xi) \cos(2k\xi) = \frac{k^2}{4} \Phi_\varepsilon(2k),$$

где $\Phi_\varepsilon(q) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi B_\varepsilon(\xi) e^{iq\xi}$ — спектральная функция случайного процесса $\varepsilon_1(x)$. Условием применимости для него являются условия

$$D(k, l_0)l_0 \ll 1, \quad \alpha = \frac{k}{D(k, l_0)} \gg 1.$$

Задача 72. Получить уравнение для плотности вероятностей коэффициента отражения в случае согласованной границы.

Указание. Коэффициент отражения для согласованной границы описывается уравнением Риккати

$$\frac{d}{dL} R_L = 2ikR_L - k\gamma R_L + \frac{\xi(L)}{2} (1 - R_L^2), \quad R_{L_0} = 0,$$

где $\xi(L) = \varepsilon'_1(L)$. Для гауссового процесса с корреляционной функцией $B_\varepsilon(x)$ случайный процесс $\xi(x)$ — также гауссов с корреляционной функцией

$$B_\xi(x - x') = \langle \xi(x)\xi(x') \rangle = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} B_\varepsilon(x - x').$$

Решение. Уравнение для плотности вероятностей коэффициента отражения имеет вид уравнения Фоккера–Планка (12.20) с коэффициентом диффузии

$$D(k, l_0) = \frac{k^2}{4} \Phi_\varepsilon(2k).$$

Список литературы

1. *Кляцкин В.И.* Метод погружения в теории распространения волн. — М.: Наука, 1986.
2. *Klyatskin V.I.* 1994, The imbedding method in statistical boundary-value wave problems / Progress in Optics. 1994. V. XXXIII. P. 1–128, ed. E. Wolf. — Amsterdam: North-Holland.
3. *Новиков Е.А.* Функционалы и метод случайных сил в теории турбулентности // ЖЭТФ. Т. 47, № 5. С. 1919–1926.
4. *Кляцкин В.И.* Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. — М.: Наука, 1975.
5. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах — М.: Наука, 1980.
6. *Klyatskin V.I.* Ondes et Équations Stochastiques dans les milieux Aléatoirement non Homogènes. — Besançon-Cedex: Les Éditions de Physique, 1985.
7. *Кляцкин В.И., Саичев А.И.* Статистическая теория диффузии плавучей пассивной примеси в случайном поле скоростей // ЖЭТФ. 1997. Т. 111, № 4. С. 1297–1313.
8. *Кляцкин В.И., Саичев А.И.* Статистическая и динамическая локализация плоских волн в случайных слоистых средах // УФН. 1992. Т. 162, № 3. С. 161–194.
9. *Кляцкин В.И., Гуракий Д.* Когерентные явления в стохастических динамических системах. // УФН. 1999. Т. 169, № 2. 171–207.
10. *Nicolis G., Prigogin I.* Exploring Complexity, an Introduction. — NY: W.H. Freeman and Company, 1989.
11. *Isichenko M.B.* Percolation, statistical topography, and transport in random media // Rev. Modern Phys. Т. 64, № 4. С. 961–1043.
12. *Кляцкин В.И.* Стохастический перенос пассивной примеси в случайных потоках. // Изв. АН, Физ. атмосф. и океана. 2000. Т. 36, № 2. С. 177–201.
13. *Кляцкин В.И., Кошель К.В.* Простейший пример возникновения кластерной структуры поля пассивной примеси в случайных потоках // УФН. 2000. Т. 170, № 7. С. 771–778.
14. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения глазами физика (Основные идеи, точные результаты и асимптотические приближения). — М.: Наука, 2001.
15. *Кошель К.В., Александрова О.В.* Некоторые результаты численного моделирования диффузии пассивной примеси в случайном

- поле скоростей // Изв. АН, Физ. атмосфер. и океана. 1999. Т. 35, № 5. С. 638–648.
16. *Zirbel C.L., Çinlar E.* Mass transport by Brownian motion / In: Stochastic Models in Geosystems, eds. S.A. Molchanov and W.A. Woyczynski, IMA Volumes in Math. and its Appl., 1996. V. 85, P. 459–492. — NY: Springer-Verlag.
17. *Mesinger F., Mintz Y.* Numerical simulation of the 1970 — 1971 Eole experiment, Numerical simulation of weather and climate, Technical Report № 4. — Los Angeles: Dep. Meteorology. Univ. of California, 1970.
18. *Mesinger F., Mintz Y.* Numerical simulation of the clustering of the constant-volume balloons in the global domain, Numerical simulation of weather and climate, Technical Report № 5. — Los Angeles: Dep. Meteorology, Univ. of California, 1970.
19. *Ярошук И. О.* Численное моделирование распространения плоских волн в случайных слоистых линейных и нелинейных средах / Дис. канд. физ. мат. наук. 1986. Владивосток: ТОИ ДВО РАН.
20. *Maxey M. R.* The Gravitational Settling of Aerosol Particles in Homogeneous Turbulence and Random Flow Field // J. Fluid Mech. 1987. V. 174. P. 441 — 465.
21. *Кляцкин В. И., Эльперин Т.* Кластеризация поля плотности числа малоинерционных частиц в случайных бездивергентных гидродинамических потоках // ЖЭТФ. 2002. Т. 122, № 9. (В печати.)
22. *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1977–1978.
23. *Татарский В. И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере, М.: Наука, 1967.
24. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидродинамика, Ч. 1, Ч. 2. — М.: Наука, 1965, 1967.
25. *Ambartsumian V. A.* Diffuse reflection of light by a foggy medium // Comptes Rendus (Doklady) de l'USSR. 1943. V. 38, № 8, P. 229–232.
26. *Ambartsumian V. A.* On the problem of diffuse reflection of light // Journal of Physics USSR. 1944. V. 8, № 1. P. 65.
27. *Амбарцумян В. А.* О принципе инвариантности и его некоторых применениях / В кн.: Принцип инвариантности и его приложения, С. 9 — 18, ред. М. А. Мнацаканян, О. В. Пикичян. Ереван: АН Армянской ССР, 1989.
28. *Касты Дж., Калаба Р.* Методы погружения в прикладной математике. — М.: Мир, 1973.
29. *Kagiwada H. H., Kalaba R.* Integral Equations Via Imbedding Methods. — Addison-Wesley, Reading, MA, 1974.

30. *Bellman R., Wing G.M.* An Introduction to Invariant Imbedding / Classics in Applied Mathematics V. 8, Philadelphia: SIAM, 1992.
31. *Golberg M.A.* Invariant imbedding and Riccati transformations // Appl. Math. and Com. 1975. V. 1, № 1. P. 1–24.
32. *Furutsu K.* On the statistical theory of electromagnetic waves in a fluctuating medium // J. Res. NBS. 1963. V. D-67. P. 303.
33. *Shapiro V.E., Loginov V.M.* «Formulae of differentiation» and their use for solving stochastic equations // Physica. 1978, V. 91A, P. 563–574.
34. *Шануро В.Е., Логинов В.М.* Динамические системы под воздействием случайных влияний. — Новосибирск: Наука, 1983.
35. *Bourret R.C., Frish U., Pouquet A.* Brownian motion of harmonical oscillator with stochastic frequency // Physica. 1973. V. A 65, № 2. P. 303–320.
36. *Кляцкин В.И., Эльперин Т.* Диффузия малоинерционных частиц под действием случайных сил и проблема Крамерса // Изв. АН, Физ. атмосф. и океана. 2002. Т. 38, № 6. (В печати.)
37. *Татарский В.И.* Распространение света в среде со случайным показателем преломления в приближении марковского процесса // ЖЭТФ. 1969. Т. 56, № 6. С. 2106–2117.
38. *Кляцкин В.И.* Пространственно-временное описание стационарной и однородной турбулентности // Изв. АН СССР, Мех. жидкости и газа. 1971. № 4. С. 120–127.
39. *Кузовлев Ю.Е., Бочков Г.Н.* Операторные методы анализа стохастических не гауссовых процессов и систем // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1977. Т. 20, № 10. С. 1505–1515.
40. *Саичев А.И., Славинский М.М.* Уравнения для моментных функций волн, распространяющихся в случайно неоднородной среде с протяженными неоднородностями // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1985. Т. 28, № 1. С. 75–83.
41. *Вировлянский А.Л., Саичев А.И., Славинский М.М.* Моментные функции при распространении волн в волноводах с протяженными случайными неоднородностями показателя преломления // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1985. Т. 28, № 9, С. 1149–1159.
42. *Guzev M.A., Klyatskin V.I., Popov G.V.* Phase fluctuations and localization length in layered randomly inhomogeneous media // Waves in Random Media. 1992. V. 2, № 2. P. 117–123.

Научное издание

КЛЯЦКИН Валерий Исаакович

ДИНАМИКА СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ
КУРС ЛЕКЦИЙ

Редактор *Н. Б. Бартошевич-Жагель*
Оригинал-макет: *В. В. Худяков*

ЛР № 071930 от 06.07.99
Подписано в печать 10.01.03. Формат 60×90/16
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная
Усл. печ. л. 15. Уч.-изд. л. 16. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117864 Москва, Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru

Отпечатано с диапозитивов
в РГУП «Чебоксарская типография № 1»
428019 Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15

ISBN 5-9221-0248-6

