Настоящее юбилейное издание
“КОЛМОГОРОВ”

посвящается
100-летию со дня рождения
великого ученого России,
крупнейшего математика XX века

академика

Андрея Николаевича
КОЛМОГОРОВА
(*25.IV.1903 — 20.X.1987*)

КОЛМОГОРОВ

юбилейное издание
в трех книгах

Юбилейное издание к 100-летию Андрея Николаевича Колмогорова состоит из трех книг, объединенных общим названием

“КОЛМОГОРОВ”.

Названия книг почерпнуты из разных высказываний самого Андрея Николаевича, все книги имеют и дополнительные подзаголовки, расшифровывающие их содержание.

Книга I: “Истина — благо”
Биобиблиография.

Книга II: “Этих строк бегущих тесьма”
Избранные места из переписки
А.Н. Колмогорова и П.С. Александрова.

Книга III: “Звуков сердца тихое эхо”
Из дневников.

В первую книгу включены материалы к биографии А.Н. Колмогорова (очерк о его жизни и творчестве и дополнительно, представленный в форме “Curriculum Vitae”, хронологический перечень фактов биографии, снабженный высказываниями самого Андрея Николаевича и его близких, коллег и учеников) и обновленная и выверенная Библиография А.Н. Колмогорова.

Во вторую книгу вошли в виде двух отдельных частей избранные письма П.С. Александрова и А.Н. Колмогорова друг другу периода от начала тридцатых до середины сороковых годов.

В третьей книге впервые публикуются дневниковые записи А.Н. Колмогорова, относящиеся к 1943—45 годам, т.е. времени, практически продолжающему период, отраженный в письмах.

Книгам предпосланы предисловия редактора-составителя, также озаглавленные строками, заимствованными у А.Н. Колмогорова.

Все книги снабжены Указателями имен, встречающихся на их страницах.

КОЛМОГОРОВ

Книга первая

Истина — благо

Биобиблиография

Редактор-составитель

А.Н. Ширяев

Подготовка текста

Н.Г. Химченко

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ
2003

УДК 51(41+57)
ББК 22.1г
К60

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 02-01-14030

Редактор-составитель
А.Н. Ширяев

К60 **Колмогоров. Юбилейное издание в 3-х кн. Кн. 1. Истина — благо. Биобиблиография** / Ред.-составитель А.Н. Ширяев. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 384 с. — ISBN 5-9221-0339-3.

Великий русский ученый, один из крупнейших математиков XX столетия — действительный член Академии наук СССР, Национальной Академии наук США и американской Академии искусств и наук, Академии наук Франции, почетный член Королевского статистического общества Великобритании и Лондонского математического общества, и т.д.; лауреат премий П.Л. Чебышева и Н.И. Лобачевского Академии Наук СССР, Международных премий фонда Бальцана и фонда Вольфа, а также Государственной и Ленинской премий, награжденный семью Орденами Ленина и Золотой медалью Героя Социалистического Труда

Андрей Николаевич КОЛМОГОРОВ

сам себя всегда называл "просто профессор Московского университета".

В книге, приуроченной к 100-летию со дня его рождения (А.Н.Колмогоров родился 25 апреля 1903 г.), публикуется наиболее полная БИБЛИОГРАФИЯ А.Н. Колмогорова, биографический очерк "ЖИЗНЬ и ТВОРЧЕСТВО", а также некоторые материалы к биографии, дополненные многими значимыми высказываниями А.Н. Колмогорова и о нем.

Илл. 83.

© А.Н.Ширяев, 2003
© ФИЗМАТЛИТ, 2003

ISBN 5-9221-0339-3

СОДЕРЖАНИЕ

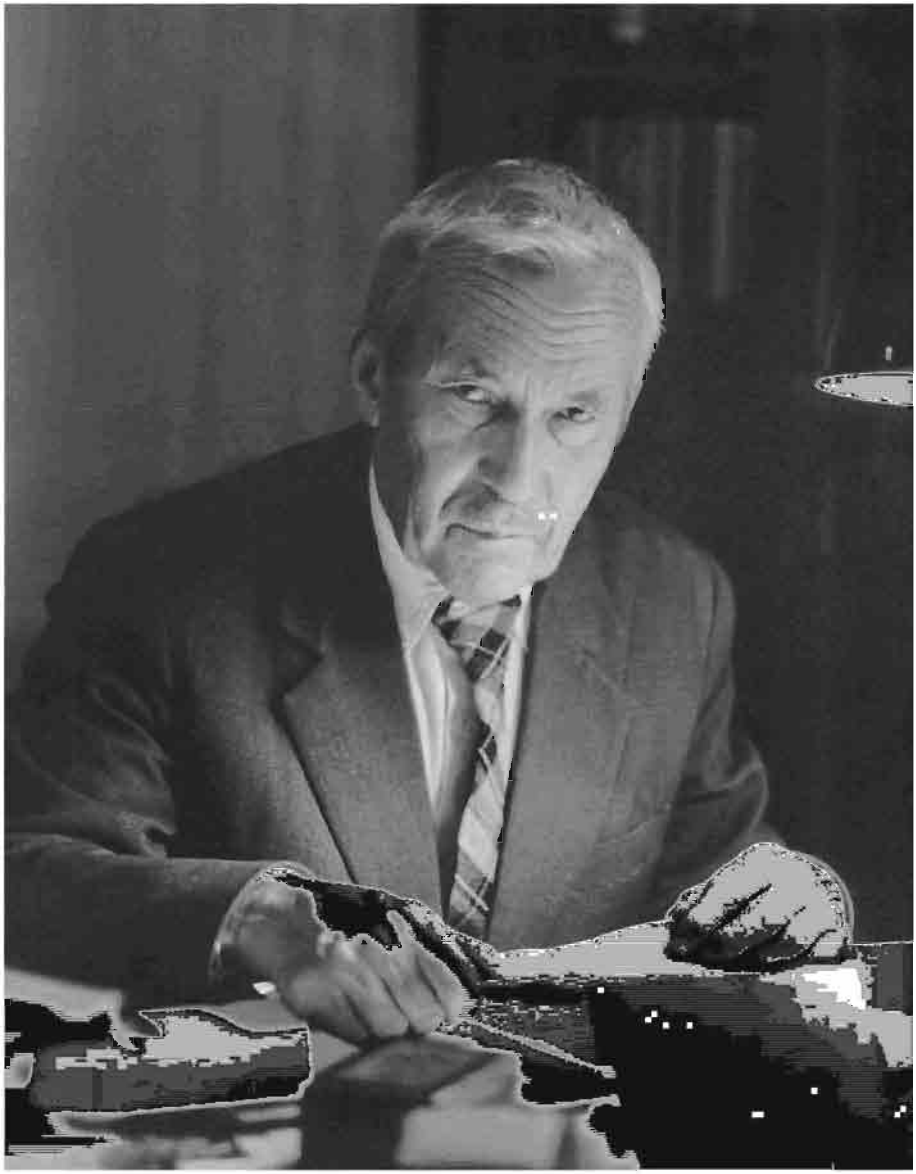
В поисках истины. Предисловие. *А.Н. Ширяев* 9

Жизнь и творчество. Биографический очерк. *А.Н. Ширяев* 17
Детские и школьные годы (1903–1919) 20
Студенческие и аспирантские годы (1920–1929) 29
Тридцатые годы (1930–1939) 47
Сороковые годы (1940–1949) 73
Пятидесятые годы (1950–1959) 99
Шестидесятые годы (1960–1969) 136
Семидесятые и восьмидесятые годы (1970–1987) 180
Послесловие 194
Дополнительный список работ разных авторов, на которые даются ссылки в очерке 201

Материалы к биографии. *Составитель Н.Г. Химченко* 211
Curriculum vitae 215

Библиография 243
I. Основные математические работы (статьи, книги) 247
Статьи 247
Книги 269
II. Статьи в энциклопедических изданиях 273
III. Доклады в Московском математическом обществе 277
IV. Статьи по исследованию русского стихосложения 284
V. Работы по педагогике 286
Учебники и учебные пособия для средней школы 286
Статьи в журнале “Математика в школе” 292
Статьи в журнале “Квант” 297
Другие работы по педагогике 298
Работы редакционно-издательского характера по педагогике 300
VI. Статьи о математике и математиках 302
VII. Научно-популярные статьи и книги 309
VIII. Работы редакционно-издательского характера 311
IX. Другие работы А.Н. Колмогорова 314
Приложение 1. Содержание трех книг избранных трудов А.Н. Колмогорова 315
Приложение 2. Некоторые письма и интервью А.Н. Колмогорова 324
Приложение 3. Выступления А.Н. Колмогорова в открытой печати 326
Приложение 4. Содержание сборника “Колмогоров в воспоминаниях” 328
Приложение 5. Содержание сборника “Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове”. . 330
Приложение 6. Содержание сборника “Kolmogorov in Perspective” 332
Приложение 7. Содержание издания “КОЛМОГОРОВ” (100 лет со дня рождения). . 333
Приложение 8. Некоторые биографические материалы и статьи об А.Н. Колмогорове . . 336
Биографические материалы 336
Статьи об А.Н. Колмогорове 337

Указатель имен 345



В ПОИСКАХ ИСТИНЫ

Я жил, всегда руководствуясь
тем тезисом, что истина — благо,
что наш долг — ее находить и отстаивать...
А. Колмогоров

Общеизвестно, что людям полагается
самим управлять своими действиями,
а не плыть по течению.
А. Колмогоров

Невозможно представить себе современное состояние математики и ее будущее без тех фундаментальных концепций, понятий, новых теорий и методов, которые дал этой науке великий русский ученый, один из крупнейших математиков XX века

Андрей Николаевич Колмогоров
25 апреля 1903 — 20 октября 1987

Вспомним хотя бы такие понятия, как *вероятностное пространство, условное математическое ожидание, δs-операция, ∇-оператор, A-интеграл, метрическая энтропия, ε-энтропия, колмогоровские поперечники, колмогоровская сложность, K-система, общее понятие алгоритма, грамматический падеж по Колмогорову...*

Открыв *"Математическую энциклопедию"* (Изд-во "Советская энциклопедия", 1979) на "Колмогоров", находим статьи:

- **Колмогорова аксиома**
- **Колмогорова двойственность**
- **Колмогорова интеграл**
- **Колмогорова критерий**
- **Колмогорова неравенство**
- **Колмогорова пространство**
- **Колмогорова уравнение**
- **Колмогорова—Селиверстова теорема**
- **Колмогорова—Смирнова критерий**
- **Колмогорова—Чепмена уравнение.**

Андрей Николаевич Колмогоров интересовался практически всей математикой, работал почти во всех ее областях и в каждой из них достиг блистательных результатов.

Теория функций: существование суммируемой функции с расходящимся рядом Фурье, наилучшие приближения функций заданного функционального класса, работы по суперпозициям (13-я проблема Гильберта).

Математическая логика: работы по интуиционистской семантике, обоснование непротиворечивости классической арифметики.

Общая топология: теория когомологий, закон двойственности.

Теория динамических систем и классическая механика: введение энтропийных характеристик как новых инвариантов метрического изоморфизма динамических систем, исследование поведения квазипериодических движений гамильтоновых систем при малых возмущениях, малые знаменатели, КАМ-теория.

Теория информации: ее математический фундамент и построение основ теории без обращения к вероятностным понятиям.

Теория сложности объектов: сложность как длина наикратчайшего описания объекта, колмогоровская характеристика сложности.

Теория вероятностей стала полноправной ветвью математики именно благодаря Колмогорову, построившему общепринятую ныне ее аксиоматику, основу общей теории случайных процессов, теорию марковских процессов с непрерывным временем. Им открыты "закон 0 или 1", "закон двух третей", даны условия справедливости усиленного закона больших чисел, многих предельных теорем... Без сомнения, А.Н. Колмогоров был признанным главой и первым авторитетом этой науки.

В энциклопедии "*Вероятность и математическая статистика*" (Изд-во "Большая Российская энциклопедия", 1999) находим:

- ***Колмогорова аксиоматика*** *(теории вероятностей)*
- ***Колмогорова гипотеза подобия*** *(в турбулентности)*
- ***Колмогорова закон двух третей*** *(в турбулентности)*
- ***Колмогорова критерий*** *(в статистике)*
- ***Колмогорова метрика*** *(равномерная метрика)*
- ***Колмогорова модель*** *(схема серий)*
- ***Колмогорова распределение*** *(в статистике)*
- ***Колмогорова средние*** *(для действительных чисел)*
- ***Колмогорова статистика*** *(в критерии Колмогорова)*
- ***Колмогорова теорема*** *(о конечномерных распределениях)*
- ***Колмогорова теорема*** *(о непрерывности выборочных функций)*
- ***Колмогорова теорема*** *(о согласованных распределениях)*
- ***Колмогорова теорема*** *(о трех рядах)*
- ***Колмогорова уравнение обратное*** *(в марковских процессах)*
- ***Колмогорова уравнение прямое*** *(в марковских процессах)*
- ***Колмогорова уравнения*** *(в теории марковских процессов)*
- ***Колмогорова уравнения*** *(для вторых моментов)*
- ***Колмогорова условие*** *(свойства самоусредняемости)*
- ***Колмогорова формула*** *(безгранично делимых распределений)*

- ***Колмогорова–Арака теорема*** *(об аппроксимации)*
- ***Колмогорова–Деева условие*** *(в анализе наблюдений)*
- ***Колмогорова–Дуба неравенство*** *(для квазимартингалов)*
- ***Колмогорова–Обухова закон пяти третей*** *(в турбулентности)*
- ***Колмогорова–Петровского задача*** *(для блужданий)*
- ***Колмогоровская автомодельность*** *(в турбулентности)*
- ***Колмогоровский внутренний масштаб*** *(в турбулентности)*
- ***Колмогоровский спектр*** *(кинетической энергии)*.

Работы А.Н. Колмогорова оказались фундаментом и для многих других объектов и разделов теории вероятностей, которые не носят прямо его имени (теория стационарных процессов, теория ветвящихся процессов — список может быть продолжен...).

"Мне хочется подчеркнуть законность и достоинство позиции математика, понимающего место и роль своей науки в развитии естественных наук, техники, да и всей человеческой культуры, но спокойно продолжающего развивать "чистую математику" в соответствии с внутренней логикой ее развития," — эти слова принадлежат А.Н. Колмогорову. И при этом он был математиком, который с тем же интересом и поразительным проникновением в существо дела занимался и многими прикладными темами: статистической гидродинамикой, биологией и генетикой, геологией и теорией стрельбы. Он плодотворно работал в истории и методологии математики, занимался анализом математическими методами в гуманитарных науках, наконец, более трети своей жизни отдал школьному образованию...

Мысль о подготовке к 100-летию Андрея Николаевича Колмогорова юбилейного издания с простым и емким названием ***"КОЛМОГОРОВ"*** постепенно воплотилась в три предлагаемых читателю книги: ***"Биобиблиография"***, ***"Избранные места из переписки А.Н. Колмогорова и П.С. Александрова"*** и ***"Из дневников"***.

Скажем несколько слов о каждой из этих книг.

Уже давно ощущалась необходимость пополнить и переиздать библиографию А.Н. Колмогорова. Список его трудов составлялся не раз (в том числе и самим Андреем Николаевичем), но всегда устаревал прежде, чем появлялся из печати — публиковались новые работы и находились не замеченные ранее публикации, росло число книг и статей о Колмогорове, которые тоже хотелось собрать и представить читателю.

Краткую биографию А.Н. Колмогорова ("Curriculum Vitae") мы здесь представляем в несколько необычной форме — факты и сведения, почерпнутые из его автобиографии и немногих биографических справок о нем, дополнены высказываниями самого Андрея Николаевича, многих его коллег, учеников и последователей.

Открывает первую книгу очерк о жизни и творчестве А.Н. Колмогорова, представляющий собой существенно переработанный и значительно расширенный вариант моего очерка с таким же названием из сборника "Колмогоров в воспоминаниях", вышедшего в 1993 году к 90-летию со дня рождения Андрея Николаевича.

В двух других книгах нашего издания впервые публикуются некоторые письма А.Н. Колмогорова, а также дневниковые записи, которые счастливо обнаружились в процессе приведения в порядок его бумаг.

Среди огромного множества писем, адресованных Колмогорову или написанных им самим (часто Андрей Николаевич писал свои письма, оставляя копии), выделились два больших массива, отправители и получатели которых оба жили в их загородном "Комаровском доме". Я говорю о письмах А.Н. Колмогорова и П.С. Александрова друг другу.

Думаю, что, может быть, придет время, когда все они будут опубликованы. Сейчас такая задача представляется вряд ли выполнимой, прежде всего, потому, что мы располагаем все же далеко не всеми письмами (что становится ясным уже из их датировки), и обозначенные пробелы не позволяют сделать публикацию полной.

Было решено отобрать лишь письма, которые относятся к временно́му отрезку тридцатых—сороковых годов, когда эта переписка была наиболее интенсивной и насыщенной. Читатель заметит, что писем П.С. Александрова представлено гораздо больше, чем писем А.Н. Колмогорова. Это объясняется лишь тем, что нам был доступен их общий архив "Комаровского дома" и архив московской квартиры А.Н. Колмогорова (где также хранились александровские письма). Доступа же к московскому архиву Павла Сергеевича мы не имели, и, по-видимому, колмогоровские письма из него не сохранились. (Скажем, Александров в одном из своих писем замечает, что Андрей Николаевич написал ему 42 письма в Принстон и 37 писем из Парижа. Пока из этого обнаружилось только 10 писем в Принстон — все они нами публикуются.)

Казалось бы, план публикации выкристаллизовался, но тут ждала непредвиденная проблема. Пристально вглядываясь в эти письма, отделенные от нас более чем шестью прошедшими десятилетиями, я пришел к убеждению, что не обладаю решимостью публиковать их в том виде, как они лежали передо мной. Написанные, по большей части, от руки (в войну приходилось жалеть ленту для пишущей машинки, необходимую для печатания математических работ, а до войны вряд ли вообще было принято писать личные письма иначе, как от руки) на разномастных листках негодной бумаги, плотно по всей середине листа, а затем, еще

плотнее, — по всему периметру, письма эти нельзя было представить себе переведенными доподлинно в современный компьютерный набор. Нет, к тому же, уверенности, что удалось точно и доподлинно разобрать сами тексты, изрядно пострадавшие от времени.

Но, конечно, не это главное, что меня останавливало. Главное — и в этом я убедился, изучив внимательно все найденные письма — они, все-таки, никак не предназначались "для всех". Написанные друг другу, они часто несли информацию, лишь Другом и для Друга предназначавшуюся, содержали обращения и подписи домашними именами, ставшими теперь уже, правда, широко известными, но не потерявшими от этого своей сокровенности. И публикация этих писем путем прямой их перепечатки показалась мне бесцеремонным вторжением в их мир, которого, как они оба цитировали по Гёте, "у них уже никто не отнимет"...

В этих своих размышлениях и сомнениях я буквально наткнулся на слова П.С. Александрова, приписанные им в конце одного письма: "... пожалуйста, для чтения никому не давай — иначе я бы не чувствовал свободы писать тебе все, что мне хочется, и так, как мне хочется!"

Эти слова-предостережения помогли мне найти ключ — я увидел свою задачу в том, чтобы отобрать, сохранить и представить читателю из множества писем те места, которые полны общего и непреходящего значения. О природе и музыке, об окружающих людях (коллегах, учениках, близких) и, конечно, о Математике: о путях ее развития и о преподавании, о своем месте в ней и, вообще, о позиции математика... И часто, как правило, без всякого перехода, — в письме какая-то конкретная математическая задача, какой-то новый подход, наметки какого-то доказательства...

Много в этих письмах и примет времени, особенно в военные годы. Эвакуация и нестерпимое желание вырваться из нее, карточки, дрова, огороды и нехватка всего самого необходимого... И потери, потери...

И все-таки, письма военных лет не о войне. Они связаны с войной, они зависят от нее, но не подчинены ей! Постоянно строятся планы на "после войны", и везде и безусловно это означает "после победы".

Читатель наверняка заметит, что в нашей публикации в письмах отсутствуют обращения и подписи — мы хотели, следуя довольно распространенной традиции, подчеркнуть этим, что публикуемое письмо не в точности совпадает с подлинником.

Мы надеемся, что читатель верит, что мы отнеслись к бесценным свидетельствам, какими являются эти письма, со всей возможной тщательностью, проявив при этом максимальную деликатность к личной переписке Андрея Николаевича и Павла Сергеевича.

Дневники А.Н. Колмогорова 1943–45 годов, составившие третью книгу нашего издания, во многом перекликаются с “Письмами”, но во многом и отличаются от них. Перекликаются, прежде всего, потому, что, начатые в 1943 году, они практически продолжают эти письма, населены, по большей части, теми же лицами и составляют живое дополнение к ним. Отличаются же, прежде всего, тем, что “Дневники” принадлежат перу одного автора, только Андрея Николаевича Колмогорова. И адресованы они самому себе (об этом А.Н. замечательно пишет в своем посвящении), а не другому, хотя и очень близкому человеку.

Наконец, незначительный сдвиг по времени приводит к неуловимым, но очень существенным переменам. В жизни, в судьбе, во всем “общем и отделенном от других мире” Александрова и Колмогорова появляется новое лицо — Анна Дмитриевна Колмогорова. Новые краски, новые отношения, новые роли — или, по существу, по большому счету, все остается по-прежнему — читатель сам может судить по публикуемым записям. Как раз, при публикации “Дневников”, никаких особенных сомнений, что печатать, а что не сто́ит, как-то не возникало. И впрямь, можно подумать, что Андрей Николаевич предполагал, что эти строки когда-нибудь увидят чьи-то глаза, и сам, хоть и не нарочито, но тщательно “отбирал материал”. Дневники публикуются практически без всяких изменений или умолчаний.

Хотелось как-то и в названиях книг отразить их сокровенный смысл. И вместо того, чтобы, так или иначе, выбирать среди примелькавшихся в мемуарной литературе заголовков, мы озаглавили книги издания *“КОЛМОГОРОВ”* строками, принадлежащими самому А.Н. Колмогорову. Книга ***“Истина — благо”***, представляющая *биобиблиографию* А.Н., названа словами из известного высказывания Андрея Николаевича, вынесенного в эпиграф к настоящему предисловию. Названия ***“Этих строк бегущих тесьма”*** для *избранных мест из переписки* и ***“Звуков сердца тихое эхо”*** для *дневниковых записей* взяты из вряд ли кому-либо известного колмогоровского стихотворения, посвященного им П.С. Александрову.

Работа над этим трехтомником не была легкой. Огромен объем напряженного и тщательного труда над библиографией, содержащей около 900 позиций. Не меньшего напряжения требовали разбор писем и рукописных дневников и подготовка их к печати. Все это можно было поручить лишь немногим.

И здесь мне хочется назвать с благодарностью свою первую помощницу и живую душу этого начинания — *Наталью Григорьевну Химченко*, которую Андрей Николаевич в далеком уже 1960 году привлек к своим стиховедческим исследованиям, уже тогда разглядев ее безусловные литературные способности. В этом и я имел случай убедиться, когда, при подготовке

к печати “Дневников”, мы решили дать переводы текстов из Гёте, которого очень любил Андрей Николаевич и чьими стихами (по-немецки) исписывал целые страницы. Эти переводы, по большей части, как раз и выполнила Н.Г. Химченко, за что я приношу ей отдельную благодарность.

Я хочу также искренне поблагодарить другую свою помощницу — *Татьяну Борисовну Толозову*, которая взяла на себя огромный труд по тщательной выверке библиографии и текстов всех трех книг.

Также огромную работу по восстановлению старых фотографий и оформлению книги выполнили *Андрей Николаевич Кузнецов* и *Константин Евгеньевич Панкратьев*.

Много пояснений, необходимых для составления подстрочных примечаний и указателей имен, дали нам живые герои писем и дневников — и сейчас работающие на Механико-математическом факультете Московского университета сын А.Д. Колмогоровой доцент кафедры математического анализа *Олег Сергеевич Ивашев-Мусатов* и живший в годы войны в Комаровском доме ученик П.С. Александрова профессор кафедры высшей геометрии и топологии *Юрий Михайлович Смирнов*.

Своими воспоминаниями поделился со мной и другой свидетель тех времен — самый старший ученик А.Н. Колмогорова академик *Сергей Михайлович Никольский*.

Всем им я выражаю свою глубокую признательность.

А. Ширяев

ЖИЗНЬ И ТВОРЧЕСТВО

Биографический очерк

А.Н. Ширяев

Наука не существует помимо человека и есть его создание... В научно выраженной истине всегда есть отражение — может быть, черезвычайно большое — духовной силы личности человека, его разума.

И.В. Вернадский

Предлагаемый читателю очерк о жизни и творчестве Андрея Николаевича Колмогорова является существенно переработанным и значительно расширенным вариантом очерка, написанного мною для сборника "Колмогоров в воспоминаниях" (М.: Наука, 1993), вышедшего к 90-летию со дня рождения Андрея Николаевича Колмогорова. Как и первый, настоящий очерк следует хронологической схеме; при этом основное внимание уделяется деятельности А.Н. Колмогорова в главной области его творчества — ***математике***. Поэтому чтение нашего очерка предполагает обращение к *Библиографии* А.Н. Колмогорова, публикуемой в этой же книге.

Эта *Библиография* состоит из 9 разделов и 8 приложений.

Разделы

I. Основные математические работы (I — статьи, Iкн — книги)
II. Статьи в энциклопедических изданиях
III. Доклады в Московском математическом обществе
IV. Статьи по исследованию русского стихосложения
V. Работы по педагогике
VI. Статьи о математике и математиках
VII. Научно-популярные книги и статьи
VIII. Работы редакционно-издательского характера
IX. Другие работы А.Н. Колмогорова

Приложения

1. Содержание трех книг избранных трудов А.Н. Колмогорова
2. Некоторые письма и интервью А.Н. Колмогорова
3. Выступления А.Н. Колмогорова в открытой печати
4. Содержание сборника "Колмогоров в воспоминаниях"
5. Содержание сборника "Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове"
6. Содержание сборника "Kolmogorov in Perspective"
7. Содержание издания "КОЛМОГОРОВ. 100 лет со дня рождения"
8. Некоторые биографические материалы и статьи об А.Н. Колмогорове

Ссылки на работы Андрея Николаевича даются и в очерке, и по всему изданию в виде [$Б_I$-1], ..., [$Б_{Iкн}$-1], ..., [$Б_{IX}$-6] (из разделов I, ..., IX) и в виде [$Б_1$-1], ..., [$Б_8$-133] (из приложений 1—8), расшифровка которых вполне

понятна: [$Б_I$-1] означает первую статью из раздела I, ..., [$Б_8$-131] — позицию 131 из приложения 8. Бóльшая часть ссылок приходится, естественно, на раздел I *Библиографии* — этот раздел имеет два подраздела: I и Iкн (статьи и книги), — в котором каждой работе, вошедшей впоследствии в какую-либо из трех книг "Избранных трудов" А.Н. Колмогорова ("Математика и механика", сост. В.М. Тихомиров. — М.: Наука, 1985; "Теория вероятностей и математическая статистика", сост. А.Н. Ширяев. — М.: Наука, 1986; и "Теория информации и теория алгоритмов", сост. А.Н. Ширяев. — М.: Наука, 1987), дается ее адрес в этих книгах. С полным содержанием "Избранных трудов", работы для которых отобрал сам Андрей Николаевич, можно ознакомиться в Приложении 1 *Библиографии* А.Н. Колмогорова.

Мы также приводим в конце очерка *Дополнительный список* (ДС) работ разных авторов, на которые делаются ссылки в этом очерке ([ДС-1], ..., [ДС-144]).

Детские и школьные годы (1903—1919)

Андрей Николаевич Колмогоров родился 25 (12) апреля 1903 года в Тамбове, где его мать Мария Яковлевна Колмогорова задержалась у своей подруги по пути из Крыма. Мария Яковлевна, младшая из шести дочерей предводителя угличского дворянства, богатого помещика либеральных взглядов, попечителя народных училищ Ярославской губернии Якова Степановича Колмогорова, скончалась родами, и в дом ее отца в имении Туношна под Ярославлем пришла тревожная телеграмма:

ОЧЕНЬ НЕБЛАГОПОЛУЧНО. ВЫЕЗЖАЙТЕ НЕМЕДЛЕННО.

Эта телеграмма, записанная от руки на почтовом бланке, и сейчас, сто лет спустя, хранится в колмогоровском домашнем архиве.

За маленьким выехала старшая из сестер, Софья Яковлевна, и в десятидневном возрасте он был привезен в дом деда и наречен Андреем (будто бы в честь князя Андрея Болконского, любимого литературного героя его матери). Все заботы по уходу и воспитанию ребенка взяли на себя его многочисленные тетушки, и позднее одна из них, Вера Яковлевна, усыновила его и прожила с ним всю жизнь до самой своей кончины в 1951 году.

Отец Андрея Николаевича — Николай Матвеевич Катаев, ученый агроном, окончивший Петровскую (ныне Тимирязевскую) академию, позна-

Мария Яковлевна Колмогорова
(Мать А.Н. Колмогорова)

Отец — Николай Матвеевич
и мать — Мария Яковлевна

комился с Марией Яковлевной в Ярославле, где он работал земским статистиком, будучи сосланным за участие в народническом движении.

В день рождения сына он находился по служебным делам в Севастополе и направлялся в Уфу к месту нового назначения. В день отъезда 27 (14) апреля он пишет несколько писем в Ярославль сестрам Марии Яковлевны и письмо священнику:

Его Высокоблагословению
Священнику Церкви

Заявление

Прошу Вас записать сына моего и Марии Яковлевны Колмогоровой при крещении в метрику как моего сына и меня как отца, т.е. в рубрике кто родители поставить мое имя и звание: Николай Матвеевич Катаев, Агроном I разряда, потомственный почетный гражданин.

Я не замедлю оформить усыновление и подать заявление в подлежащее ведомство...

Н.М. Катаев
Севастополь
14 апреля 1903 г.

Мария Яковлевна и Николай Матвеевич не были венчаны, и это создавало трудности при записи младенца. Он был крещен дядей Степаном Яковлевичем и получил фамилию Колмогоров.

Работа Н.М. Катаева была связана с многочисленными разъездами и фактически привела к тому, что он оказался вне участия в воспитании

Юлия Ивановна Колмогорова — бабушка Андрея

Яков Степанович Колмогоров — дед Андрея

Дом Колмогоровых в Ярославле

сына, хотя, как свидетельствуют его недавно найденные письма, очень печалился об этом и не оставлял надежды с возрастом стать ему ближе. Время распорядилось по-другому, Николай Матвеевич погиб (пропал без вести) во время деникинского наступления на Южном фронте в 1919 году.

У деда Андрея Николаевича, Якова Степановича Колмогорова, был дом в Угличе и дом в Ярославле на Пробойной улице, доставшийся ему от его отца Степана Петровича, о котором Андрей Николаевич говорил, что он *"разбогател и получил дворянство благодаря личной предприимчивости"*. В "Календаре Ярославской губернии на 1877 год" говорится: "Пробойная улица. От площади Ильинской до площади Семеновской казенное здание Присутственных мест. Рядом дом Степана Петровича Колмогорова". Из переписки Андрея Николаевича с автором путеводителя по памятникам истории и культуры Ярославля мы узнаем, что Пробойная улица была переименована в Советскую, в здании Присутственных мест располагался Облисполком, а на колмогоровском доме — мемориальная доска памяти выдающегося рус-

Андрей (1908 г.)

ского театрального деятеля Ф.Г. Волкова (1729–1763), основавшего в 1750 году в Ярославле первую русскую профессиональную актерскую труппу. Каким образом дом перешел во владение Колмогоровых, Андрей Николаевич не знал, и ярославский краевед не смог ему объяснить.

Дом Колмогоровых в Туношне

"В городском доме я бывал в гостях по нескольку дней или недель (хозяйство там вела моя тетка Варвара Яковлевна).

Кроме городского дома в Ярославле Якову Степановичу принадлежал еще дом в Угличе и загородный дом в Туношне, в восемнадцати верстах от Ярославля вниз по Волге. В этом загородном доме я провел свое раннее детство."

Вера Яковлевна с Андреем (1909 г.)

Тетушки Андрея Николаевича — сестры Колмогоровы — были свободомыслящими женщинами с высокими общественными идеалами. В Туношенском доме даже размещался подпольный гектограф и, как свидетельствует сам Андрей Николаевич, и ему в младенческом возрасте удалось поучаствовать в революционном движении, когда во время очередного обыска нелегальная литература была спасена, будучи подложена под его колыбель: *"Жандармы вошли, обошли весь дом, но не решились*

Вера Яковлевна с Петей Кузнецовым и Андреем

меня поднять... Все-таки жандармы, конечно, тоже знали, что эти злокозненные молодые женщины, как-никак, являются дочерьми местного предводителя дворянства. Так что у них сложные задачи были" [$Б_2$-20].

В Туношенском доме, где воспитывался еще один мальчик, Петя Кузнецов, тремя годами старший Андрея, сын близкой подруги Веры Яковлевны, впоследствии известный филолог, профессор Московского университета, тетушки "*устроили маленькую школу, в которой занимались с десятком детей разного возраста по новейшим рецептам педагогики того времени*" [$Б_{VII}$-6, $Б_{VII}$-14]. В школе издавался и журнал "Весенние ласточки", в котором пяти-шестилетний Андрей публиковал придуманные им арифметические задачи. Среди них была, например, такая: "Имеется пуговица с четырьмя дырочками. Для ее закрепления достаточно протянуть нить по крайней мере через две дырочки. Сколькими способами можно закрепить пуговицу?"

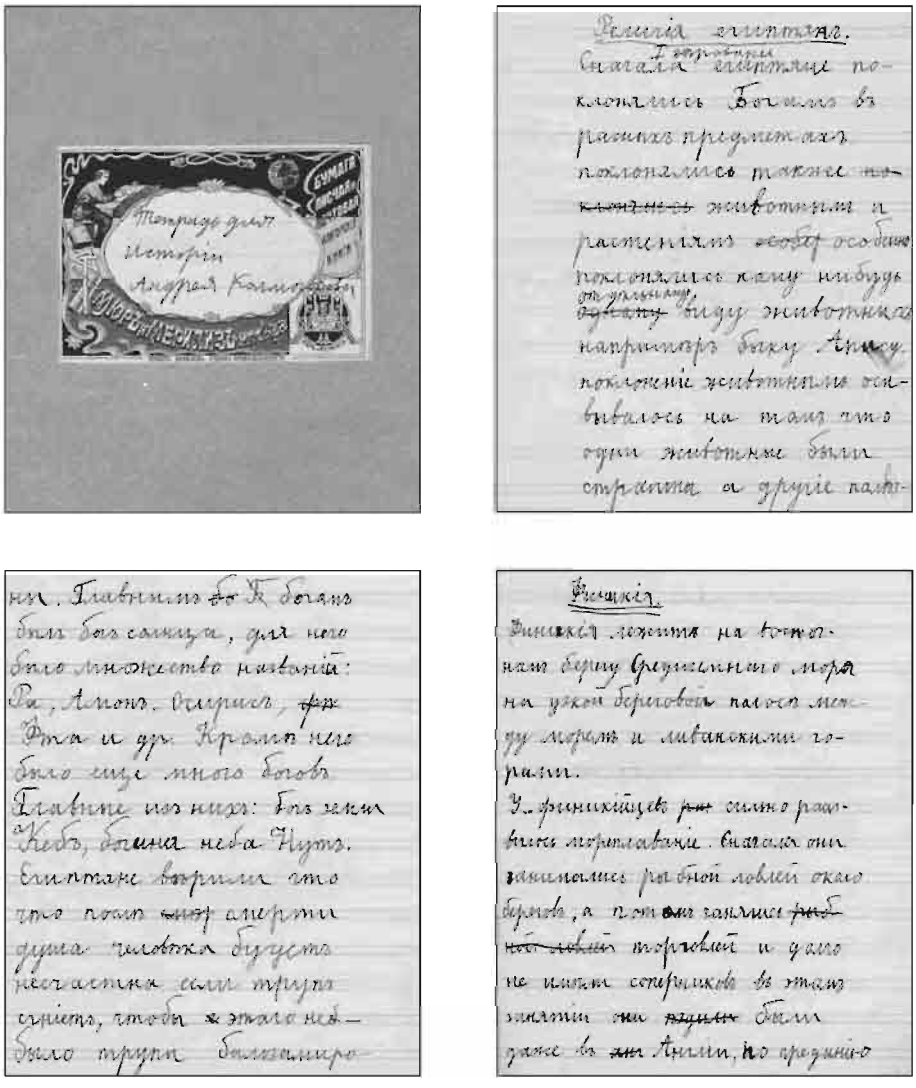
В 1910 году Вера Яковлевна, заменившая Андрею мать, переезжает с ним в Москву, где определяет его в частную гимназию Е.А. Репман (на самом деле, в гимназии были две соучредительницы, образованные дамы прогрессивных взглядов, Евгения Альбертовна Репман и Вера Федоровна Федорова). Гимназия была основана кружком демократической интеллигенции и среди частных гимназий была одной из самых уме-

Андрей (в Туношне)

Из школьных тетрадей Андрея Колмогорова (1914 г.)

ренных в отношении платы за обучение. Андрей Николаевич вспоминал:

“В гимназии классы были маленькие (15—20 учеников). Значительная часть учителей сама увлекалась наукой. Иногда это были преподаватели университета, наша преподавательница географии сама участвовала в интересных экспедициях. Многие школьники состязались между собой в самостоятельном изучении дополнительного материала, иногда даже с коварными замыслами посрамить своими знаниями менее опытных учителей. Делался



Из школьных тетрадей Андрея Колмогорова (1914 г.)

опыт ввести в традицию публичную защиту кончающими учащимися выпускного сочинения (типа вузовской дипломной работы). По математике я был одним из первых в своем классе, но первыми более серьезными научными увлечениями в школьное время для меня были сначала биология, а потом русская история".

И еще:

"В детские годы мечты о будущей деятельности законно переплетаются с игрой. В 11—12 лет я затратил немало труда

на собирание подробных сведений о необитаемых островах южных океанов, так как собирался навербовать выходцев из разных стран и организовать на этих островах некое идеальное государство, для которого мною была даже написана конституция. Был предусмотрен и военный флот для защиты от возможных посягательств на нашу свободу.

Но в 13—14 лет такие занятия были бы уже дурашливостью. К тому же наступил 1917 год, и мы все, товарищи по школе, вдруг стали взрослыми.

Первым серьезным планом дальнейшей жизни и работы было намерение заняться лесным хозяйством — стать лесничим, сажать леса, растить их и охранять. Увлекала, конечно, и романтика жизни в лесу.

Мои способности к математике к этому времени уже в значительной мере проявились. Я решал трудные задачи, а в теории ушел много дальше школьных программ. Высшую математику изучал по статьям в энциклопедическом словаре Брокгауза и Ефрона, что не слишком легко, так как статьи эти имели не учебный характер, а, скорее, справочный.

Но оформленная мысль стать математиком, исследователем, самому делать в математике серьезные открытия, продвигать математическую науку вперед, пришла не сразу. Скорее всего, в шестнадцать лет". ⟨Из домашнего архива А.Н. Колмогорова. — *А.Ш.*⟩.

Андрей Николаевич не раз отмечал благотворную атмосферу этой гимназии и ее роль в выборе им для себя жизненного пути.

"Общей установкой на поиски для себя серьезного, нужного дела я обязан семейной традиции (особенно воспитавшей меня тетке В.Я. Колмогоровой) и атмосфере, господствовавшей в замечательной частной гимназии Е.А. Репман, в которой я учился. Научные увлечения шли от учителей этой гимназии, но культивировались особенно азартно в кружке друзей, из которых назову братьев Селиверстовых (Глеб — математик, Николай — историк)" ⟨Из ответа на анкету журнала "Ровесник". — *А.Ш.*⟩.

Близкую дружбу с братьями Селиверстовыми Андрей Николаевич сохранил на долгие годы (с Глебом, которого особенно любил, и который тоже стал математиком, написал одну совместную работу [$Б_1$-5]). Оба брата в самом начале Великой Отечественной войны ушли на фронт, и оба погибли.

Интересные воспоминания о гимназических годах мы встречаем и в письмах Андрея Николаевича (например, в публикуемом во втором томе нашего издания письме П.С. Александрову от 17 мая 1943 г.; см. также "Последнее интервью", [$Б_5$, с. 183—214], [$Б_2$-20]).

Из своих гимназических лет Андрей Николаевич вынес и другие долгие дружбы — с будущим физиком-оптиком Колей Нюбергом (его мать Софья Николаевна Нюберг преподавала в гимназии латынь), с будущим генетиком Дмитрием Ромашовым, с будущим художником Сергеем Мусатовым. Из этой же гимназии навсегда вошла в его жизнь Аня Егорова, дочь известного историка Д.Н. Егорова, одноклассница, ставшая в 1942 году женой Андрея Николаевича.

Ко времени окончания гимназии пришли совсем другие времена, о которых сам Андрей Николаевич писал:

> *"В 1918—1920 годах жизнь в Москве была нелегкой. В школах серьезно занимались только самые настойчивые. В это время мне вместе со старшими пришлось уехать на постройку железной дороги Казань—Екатеринбург. Одновременно с работой я продолжал заниматься самостоятельно, готовясь сдать экстерном за среднюю школу. По возвращении в Москву я испытал некоторое разочарование: удостоверение об окончании школы мне выдали, даже не потрудившись проэкзаменовать"* [$Б_{VII}$-6, $Б_{VII}$-14].

Впрочем, и сама гимназия Е.А. Репман, в которой когда-то хотели "ввести в традицию публичную защиту выпускного сочинения", была к этому времени преобразована — в 23-ю школу второй ступени.

Студенческие и аспирантские годы (1920–1929)

“Не повезло” Андрею Николаевичу с экзаменами и в Московский университет, куда он решил поступить в 1920 году — на физико-математический факультет: тогда всех желающих принимали без экзаменов.

В своих воспоминаниях [$Б_{VI}$-88] Андрей Николаевич пишет: *“Я поступил в Московский университет с довольно большими знаниями по математике. Из книжек “Новые идеи в математике” я знал, в частности, начала теории множеств”*.

Параллельно с университетом Андрей Николаевич поступает на математическое отделение Химико-технологического института им. Д.И. Менделеева (где, как раз, требовался вступительный экзамен по математике). Сам Андрей Николаевич так объясняет это свое решение: *“Не бросал мысль о технической карьере, почему-то меня увлекала металлургия”* [$Б_2$-6], *“Техника тогда воспринималась как что-то более серьезное и необходимое, чем чистая наука”* [$Б_{VII}$-6, $Б_{VII}$-14].

Продолжает он и свои серьезные занятия историей, участвуя в семинаре по древнерусской истории известного историка профессора С.В. Бахрушина на историческом факультете Московского университета в качестве вольнослушателя. В этом семинаре в 1920 году Андрей Николаевич делает свой первый научный доклад — о земельных отношениях в Новгороде на основе анализа писцовых книг XV–XVI веков, в котором *“использовались... некоторые приемы математической теории”* [$Б_{VII}$-6, $Б_{VII}$-14]. Долгое время рукопись этой работы считалась утраченной, но сравнительно недавно, уже после кончины Андрея Николаевича, были обнаружены его работы по истории 1920–21 годов. Они опубликованы его учеником Л.А. Бассалыго (в сопровождении его собственных исследований, основанных на тех же материалах) с предисловием известного историка В.Л. Янина ([$Б_{IX}$-2]). “Оценивая историографическое место исследования Андрея Николаевича Колмогорова, следует прежде всего отметить бросающуюся в глаза внутреннюю свободу, независимость суждений, как правило несвойственную начинающим гуманитариям”, — пишет В.Л. Янин в своем предисловии к этой публикации.

Вскоре, однако, интерес Андрея Николаевича к математике перевесил все его сомнения в актуальности профессии математика, и его путь определился окончательно. *“Сдав в первые же месяцы экзамены за первый курс, я, как студент второго курса, получил право на* 16 *килограммов хлеба и* 1 *килограмм масла в месяц, что, по представлениям того времени, обозначало уже полное материальное благополучие. Одежда у меня была, а туфли на деревянной подошве я изготовил себе сам”* [$Б_{VII}$-6, $Б_{VII}$-14]. (Ту же непритязательность в одежде и других бытовых “мелочах” Андрей Николаевич сохранил и в своей последующей,

уже вполне обеспеченной жизни.) И далее Андрей Николаевич продолжает: *"Впрочем, в 1922–1925 годах потребность в дополнительном, к весьма маловесной в то время стипендии, заработке привела меня в среднюю школу. Работу в Потылихинской опытно-показательной школе Наркомпроса РСФСР я вспоминаю теперь с большим удовольствием. Я преподавал математику и физику (тогда не боялись поручать преподавание двух предметов сразу девятнадцатилетним учителям) и принимал самое активное участие во всей жизни школы (был секретарем школьного совета и воспитателем в интернате)"*. Заметим, что эти слова были сказаны в 1963 году, т. е. спустя сорок лет после описываемых событий. Но, что еще более удивительно, еще через двадцать лет в своем интервью перед 80-летием Андрей Николаевич вспоминает эту Потылихинскую школу и должность "секретаря школьного совета" с еще большим трепетом и восторгом! ([$Б_2$-20]).

Н.Н. Лузин

В студенческие же годы началась и настоящая научная деятельность Андрея Николаевича. Будучи студентом университета, он посещает, как правило, лишь специальные курсы и семинары по своему выбору (тогда обязательное посещение учебных занятий еще не предполагалось). На первом курсе (1920–1921) он слушает лекции Н.Н. Лузина по теории аналитических функций, лекции А.К. Власова по проективной геометрии и лекции П.С. Урысона по комбинаторной топологии. На одной из своих лекций, посвященной доказательству теоремы Коши, Н.Н. Лузин предложил слушателям доказать такое утверждение: "Пусть квадрат разделен на конечное число квадратов. Тогда для любой константы C найдется такое число C', что для всякой кривой длины не больше C сумма периметров задевающих кривую квадратов не превосходит C'" [$Б_{Iкн}$-50, с. 289–290]. *"Мне удалось показать*, — вспоминал Андрей Николаевич [$Б_{VII}$-11], — *что в действительности это утверждение ошибочно. Николай Николаевич сразу понял идею примера, опровергающего это предположение. Было решено, что я доложу опровергающий пример на студенческом математическом кружке"*.

Все построения и доказательства взялся проверить Павел Самуилович Урысон. Так возникла датированная 4 января 1921 года рукопись "Доклад математическому кружку о квадрильяже" [$Б_I$-1]. Рукопись, долгое время считавшаяся утерянной, не так давно обнаружилась и вошла в третью книгу

("Теория информации и теория алгоритмов"; [$Б_{Iкн}$-50]) "Избранных трудов" А.Н. Колмогорова как Приложение 1.

Об интересном эпизоде вспоминает и Павел Сергеевич Александров: "На одной из лекций П.С. Урысона Андрей Николаевич заметил ошибку в сложных построениях П.С., входивших в его доказательство теоремы о размерности трехмерного пространства. Ошибку эту П.С. Урысон на другой же день исправил, но острота математического восприятия, проявленная восемнадцатилетним студентом Колмогоровым, произвела на П.С. Урысона большое впечатление" [$Б_8$-6]. (Заметим, что и самому Павлу Самуиловичу не было тогда и двадцати трех. Этот математик замечательного таланта, ближайший друг П.С. Александрова, погиб на его глазах во время купания в шторм в Batz-sur-Mer (Франция, Бретань, Бискайский залив) в 1924 году в возрасте 26 лет!)

Андрей Николаевич, который стал приходить к П.С. Урысону для индивидуальных занятий, вспоминал впоследствии:

> *"Московская математика того времени была богата яркими и талантливыми индивидуальностями. Но Павел Самуилович* ⟨Урысон⟩ *и на этом фоне выделялся универсальностью интересов в соединении с целеустремленностью в выборе предмета собственных занятий, отчетливостью постановки задач (в частности, передо мной, когда он считал себя ответственным за направление моей работы), ясной оценкой своих и чужих достижений в соединении с доброжелательством в применении к достижениям самым маленьким"* ⟨из очерка А.Н. Колмогорова [$Б_{VII}$–11] в книге Л.С. Нейман, сестры П.С. Урысона, "Радость открытия", посвященной ее безвременно ушедшему брату⟩.

В это же время под влиянием лекций П.С. Александрова Андрей Николаевич начинает интересоваться общими вопросами дескриптивной теории множеств и приходит к замыслу построения весьма общей *теории операций над множествами*, продолжающей и обобщающей исследования Э. Бореля, Р. Бэра, А. Лебега, П.С. Александрова, М.Я. Суслина. Соответствующая работа была закончена в самом начале 1922 года (рукопись датирована 3 января), но ее первая часть была опубликована лишь в 1928 году [$Б_I$-16]. Сам Колмогоров так говорил об этой задержке, произошедшей не по его вине: *" Мои дескриптивные работы пролежали в письменном столе Н.Н. Лузина, находившего их методологически неправильными, без всякого движения до* 1926 *года"* [$Б_{VI}$-88]. (Вторая часть и вовсе увидела свет лишь в 1987 году в третьей книге "Избранных трудов" А.Н., где она помещена как Приложение 2, хотя в рукописном виде она и была доступна ряду исследователей в дескриптивной теории множеств.)

В этой первой части Колмогоров впервые вводит понятие δs-операции X над множествами, которая определяется следующим образом. Возьмем

за основной класс элементарных множеств замкнутые множества интервала $(0,1)$, включая в их число и пустое множество. Операция X задается двумя объектами: некоторой совокупностью $\{U^X\}$ числовых цепей $U^X = \{n_1, n_2, \dots\}$, являющихся подмножествами натурального числового ряда $\{1, 2, \dots\}$, и некоторой последовательностью множеств $E_1, E_2, \dots$ Каждому U^X ставится в соответствие цепь множеств $E_{n_1}, E_{n_2}, \dots$ и ядро $\bigcap_k E_{n_k}$. Сумма ядер всех цепей, соответствующих данной совокупности $\{U^X\}$ и последовательности множеств $E_1, E_2, \dots$, и есть результат применения операции X к этой последовательности множеств.

Далее Колмогоров определяет для данной операции X понятие *дополнительной операции* $\overline{X}$ и затем доказывает следующий замечательный результат: *существует X-множество (на интервале $(0,1)$), дополнение к которому X-множеством не является.* Специалистам в области дескриптивной теории множеств понятна значимость этого результата, обобщающего, в частности, суслинскую теорему существования A-множеств, построенных с помощью A-операции, введенной П.С. Александровым, и не являющихся B-множествами (борелевскими множествами).

Осенью 1921 года, будучи студентом второго курса, Андрей Николаевич начинает заниматься также в семинаре В.В. Степанова по тригонометрическим рядам. Здесь он решает интересовавшую Н.Н. Лузина задачу о построении ряда Фурье со сколь угодно медленно стремящимися к нулю коэффициентами. В своей работе [Б$_{\mathrm{I}}$-3] (рукопись датирована 3 декабря 1922 года) А.Н. так формулирует основной результат о порядке величины коэффициентов Фурье: *"Известно, что коэффициенты Фурье суммируемой функции стремятся к нулю. В этой заметке я докажу следующее предложение относительно рядов по косинусам.*

1. *Для любой последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящейся к нулю, найдется такая последовательность $\{a'_n\}_{n=1}^{\infty}$, что*

   1) $|a_n| < a'_n$,

   2) $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos nx$ *есть ряд Фурье суммируемой функции ..."*

Андрей Николаевич вспоминал [Б$_2$-7]: *"Когда об этом рассказали Н.Н. Лузину, он обратился ко мне (помню, это было на университетской лестнице) и предложил регулярно приходить к нему на занятия"*.

Так А.Н. Колмогоров становится учеником Н.Н. Лузина. Занятия Николая Николаевича со своими учениками состояли в научных беседах с ними раз в неделю, вечером, при этом составлялось особое расписание, кому когда приходить. *"Такая интенсивная работа с учениками была одним из тех новшеств, которые культивировал Николай Николаевич"* (там же). Часто по разным научным и совсем ненаучным поводам все

лузинские ученики собирались в квартире своего учителя, с интересом обсуждали научные проблемы, потом весело пили чай с неизменным яблочным пирогом и расходились чуть ли не заполночь (об этом замечательно пишет П.С. Александров, один из первых лузинских учеников, в "Страницах автобиографии" [ДС-1]). Летом вся "Лузитания" снимала большой дом где-нибудь в Подмосковье, и занятия, чередующиеся с купаниями, лодочными путешествиями и пр., становились еще интенсивнее.

В 1922 году девятнадцатилетний студент Андрей Колмогоров получает свой ставший самым знаменитым результат в области тригонометрических рядов — строит пример ряда Фурье–Лебега, расходящегося почти всюду. В работе [$Б_I$-2] (рукопись датирована 2 июня 1922 года) он так пишет об этом своем результате: *"Цель этой заметки — дать пример суммируемой (т. е. интегрируемой в смысле Лебега) функции, ряд Фурье которой расходится почти всюду (т. е. всюду, кроме точек множества меры нуль). Функция, построенная в этой заметке, не суммируема с квадратом, и я ничего не знаю о порядке величины коэффициентов ее ряда Фурье"*. Здесь же он указывает на то, что использованные в работе методы не позволяют построить ряд Фурье, расходящийся *всюду*. Однако позднее, в 1926 году, А.Н. Колмогоров, несколько изменив свою же конструкцию, строит и пример суммируемой функции, ряд Фурье которой расходится уже всюду [$Б_I$-13].

Оба эти примера явились для специалистов полной неожиданностью и произвели огромное впечатление. (Сошлемся в связи с этими примерами еще на запись от 14 сентября 1943 года в дневнике Андрея Николаевича, публикуемом в третьей книге нашего издания.) Интерес к теории тригонометрических функций и ортогональных рядов А.Н. Колмогоров сохранил на всю жизнь, по временам возвращаясь к задачам из этой области и передавая их своим ученикам для дальнейшей разработки. Сам Андрей Николаевич опубликовал на эти темы около десятка работ, каждая из которых фактически послужила началом последующих исследований, продолжающихся и ныне. (Обзор ряда этих работ А.Н. Колмогорова и дальнейших исследований в этом направлении дает П.Л. Ульянов в своей статье [ДС-110].)

Наряду с теорией тригонометрических рядов и дескриптивной теорией множеств Андрей Николаевич занимается в это время и рядом общих вопросов классического анализа — дифференцированием и интегрированием, теорией меры, а также математической логикой.

В многочисленных работах 20-х годов делались попытки различных обобщений понятия "дифференцирование" в надежде дать столь общее определение производной, чтобы любая измеримая (или хотя бы любая непрерывная) функция была дифференцируема в некотором естественном смысле. Как правило, однако, ко всем такого рода новым определениям удавалось построить контрпример непрерывной функции, не дифференцируемой в предлагаемом смысле.

В работе [Б$_{\mathrm{I}}$-8] А.Н. Колмогоров рассмотрел эту проблему в самом общем ее виде. Именно, сформулировав ряд требований, естественно предъявляемых к такой "обобщенной производной" $f'(x)$ функции $f(x)$ (типа: обобщенная производная совпадает с обычной, если последняя существует; если $\varphi(x) = af(x)$, то функция $\varphi(x)$ имеет обобщенную производную $\varphi'(x) = af'(x)$, и т. п.), Колмогоров показывает, что если функция

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3^n x}{3^n}$$

имеет конечную или бесконечную "обобщенную производную" на множестве положительной меры, то она является *неизмеримой* функцией. Тем самым, приведенный пример показывает, что поиски эффективного определения производной для слишком общих классов непрерывных функций неминуемо приводят к тем же трудностям, что и попытки построения неизмеримых множеств.

Аналогичные результаты сформулированы в этой работе и для суммирования расходящихся рядов, и для общего определения интеграла. Несколько позже в работе [Б$_{\mathrm{I}}$-27], опубликованной в 1930 году, А.Н. Колмогоров подвергает принципиальному анализу и известные, и некоторые новые подходы к определению понятия интеграла, внося стройность и ясность в общую теорию интегрирования, где результаты были, как правило, разрозненными, а связи между ними оставались неясными. Во введении к этой своей работе Андрей Николаевич так определяет ее цель и смысл: *"... выяснить логическую природу процессов интегрирования. И если, помимо объединения различных подходов, при этом возникло некоторое обобщение понятия интеграла, то дело тут, по-видимому, в том, что обобщение понятия зачастую бывает полезно для постижения его сущности... Не исключено, что все эти обобщения могут представить интерес и для приложений, однако достоинства более общего подхода видятся мне прежде всего в простоте и ясности, которые вносят новые понятия"*.

К этому же кругу вопросов относятся выполненные в 1925 году работы "Аксиоматическое определение интеграла" [Б$_{\mathrm{I}}$-6] и "О границах обобщения интеграла" [Б$_{\mathrm{I}}$-7] (последняя содержит доказательства результатов, сформулированных в [Б$_{\mathrm{I}}$-6]), а также работа 1928 года "О процессе интегрирования Данжуа" [Б$_{\mathrm{I}}$-19].

В 1925 году выходит и первая работа Андрея Николаевича по интуиционистской логике "О принципе tertium non datur" [Б$_{\mathrm{I}}$-10] (второй работой является [Б$_{\mathrm{I}}$-36]). В комментариях к этим работам, специально написанных Андреем Николаевичем к публикации их в "Избранных трудах" шесть десятилетий спустя (см. [Б$_{\mathrm{Iкн}}$-48, с. 393]), он так определяет их назначение:

“Работа ⟨[Б$_{\text{I}}$-10]⟩ *мыслилась мной как вводная часть более широкого замысла. Построение в рамках интуиционистской математики моделей различных разделов классической математики должно было служить для обоснования их непротиворечивости (непротиворечивость интуиционистской математики при этом считалась следствием ее интуитивной убедительности). Для обоснования непротиворечивости классической логики высказываний такой путь, конечно, излишен, но предполагалось, что метод окажется применимым и к обоснованию непротиворечивости классической арифметики (ср. с работой Гёделя 1933 года).*

Работа ⟨[Б$_{\text{I}}$-36]⟩ *писалась в надежде на то, что логика решения задач сделается со временем постоянным разделом курса логики. Предполагалось создание единого логического аппарата, имеющего дело с объектами двух типов — высказываниями и задачами”.*

В большом комментарии В.А. Успенского и В.Е. Плиско к этим работам, опубликованном в том же томе [Б$_{\text{Iкн}}$-48], прослежено дальнейшее развитие этих идей А.Н. Колмогорова.

На четвертом курсе университета, в 1924 году, Андрей Николаевич начинает интересоваться той областью науки, в которой его авторитет особенно велик, — теорией вероятностей.

Его первая статья в этой новой для него области — “О сходимости рядов, члены которых определяются случаем” [Б$_{\text{I}}$-11] — была написана совместно с А.Я. Хинчиным, более взрослым учеником Н.Н. Лузина. *“Все мои занятия по теории вероятностей совместно с А.Я. Хинчиным*, — вспоминал Андрей Николаевич [Б$_2$-7], — *весь вообще первый период занятий этой теорией отмечен тем, что мы применяли методы, разработанные в метрической теории функций. Такие темы, как условия для применимости закона больших чисел, условие сходимости ряда* ⟨из⟩ *независимых случайных величин, велись, по существу, методами, выкованными в общей теории тригонометрических рядов, т. е. методами, разрабатывавшимися Н.Н. Лузиным и его учениками”.*

Работа [Б$_{\text{I}}$-11] состоит из четырех параграфов. Первый написан А.Я. Хинчиным, остальные три — А.Н. Колмогоровым. В современных обозначениях результаты выглядят следующим образом.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин. Тогда:

I. Сходимость двух рядов $\sum \mathsf{E}\xi_k$ и $\sum \mathsf{D}\xi_k$ достаточна для сходимости ряда $\sum \xi_k$ почти наверное (обозначение: P-п.н.).

II. Если величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ равномерно ограничены ($\mathsf{P}(|\xi_k| \le c) = 1$, $k \ge 1$, $c < \infty$), то сходимость двух рядов $\sum \mathsf{E}\xi_k$ и $\sum \mathsf{D}\xi_k$ не только достаточна, но и необходима для сходимости ряда $\sum \xi_k$ почти наверное.

III. Для сходимости почти наверное ряда $\sum \xi_k$ достаточно, чтобы при некотором $c > 0$ сходились три ряда ($\xi^c = \xi I(|\xi| \le c)$) :

$$\sum \mathsf{E}\xi_k^c, \quad \sum \mathsf{D}\xi_k^c, \quad \sum \mathsf{P}(|\xi_k| \ge c),$$

и если ряд $\sum \xi_k$ сходится почти наверное, то указанные три ряда необходимо сходятся при любом $c > 0$.

В статье [Б$_{\mathrm{I}}$-11] (рукопись датирована 3 декабря 1925 г.) результат I доказывается А.Я. Хинчиным (§ 1) и А.Н. Колмогоровым (§ 2) разными методами. А.Я. Хинчин пользуется обобщением метода Радемахера, рассматривавшего в 1922 году случай, когда величины ξ_k принимают лишь два значения, c_k и $-c_k$, с вероятностями $1/2$.

А.Н. Колмогоров получает свое доказательство, идя совсем по другому пути, в основе которого лежат, по существу, те же идеи, что и при доказательстве ставшего теперь классическим *неравенства Колмогорова*:

Если $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ — взаимно независимые случайные величины, $\mathsf{E}\eta_i = 0$, $S_k = \eta_1 + \dots + \eta_k$, то

$$\mathsf{P}\Big(\max_{1 \le k \le n} |S_k| \ge \varepsilon\Big) \le \frac{\mathsf{E}S_n^2}{\varepsilon^2}. \tag{1}$$

(В точности в такой форме это неравенство приведено в последующей работе Колмогорова “О суммах независимых случайных величин” [Б$_{\mathrm{I}}$-20], написанной в конце 1927 года, где он снова передоказывает утверждение I.)

Доказательство утверждения II опирается на оценки вероятности $\mathsf{P}(\max_{1 \le k \le n} |S_k| \ge \varepsilon)$ снизу для ограниченных случайных величин η_k, $1 \le k \le n$. В привычном теперь виде соответствующее неравенство приведено в [Б$_{\mathrm{I}}$-20] и выглядит следующим образом:

Если $\eta_1, \dots, \eta_n$ — взаимно независимые случайные величины, $\mathsf{E}\eta_k = 0$, $\mathsf{P}(|\eta_k| \le c) = 1$, $1 \le k \le n$, $c < \infty$, то

$$\mathsf{P}\Big(\max_{1 \le k \le n} |S_k| \ge \varepsilon\Big) \le 1 - \frac{(c+\varepsilon)^2}{\mathsf{E}S_n^2}.$$

Таким образом, в этой небольшой по объему работе [Б$_{\mathrm{I}}$-11] — первой работе А.Н. Колмогорова по теории вероятностей, написанной им совместно с А.Я. Хинчиным, — содержатся и *теорема Колмогорова–Хинчина*

о двух рядах, и *теорема Колмогорова о трех рядах*, и входящий теперь во все руководства по теории вероятностей просто формулируемый *критерий Колмогорова–Хинчина* сходимости почти наверное ряда $\sum \xi_n$ из взаимно независимых случайных величин с $\mathsf{E}\xi_n = 0$, $n \geq 1$:

Если $\sum \mathsf{E}\xi_n^2 < \infty$, *то ряд* $\sum \xi_n$ *сходится почти наверное.*

Как показало последующее развитие теории вероятностей, значение работы [Б$_{\mathrm{I}}$-11] далеко не исчерпывается тем, что в ней было получено полное решение важной задачи о сходимости рядов со случайными членами, — в ней заложены *новые методы* вероятностного анализа, прочно вошедшие в арсенал современной теории вероятностей.

Андрей Колмогоров (1925 г.)

В 1925 году Андрей Николаевич оканчивает Московский университет и поступает в аспирантуру Научно-исследовательского института математики и механики МГУ (в то время аспирантура была в ведении этого НИИ), где его руководителем, по-прежнему, остается Н.Н. Лузин. Андрей Николаевич вспоминал [Б$_2$-7]: "*Пребывание в аспирантуре не завершалось тогда диссертацией, как сейчас: ведь ученые степени были введены лишь в 1934 году*". (Ученая степень доктора физико-математических наук была присуждена А.Н. Колмогорову без защиты в 1935 г.)

К аспирантским годам относятся фундаментальные работы Андрея Николаевича об условиях применимости *закона больших чисел* и *усиленного закона больших чисел*. К концу 1927 года ему удалось практически завершить исследования, начатые еще Я. Бернулли и С. Пуассоном и продолженные П.Л. Чебышевым и А.А. Марковым, по отысканию достаточных (а также необходимых и достаточных) условий справедливости закона больших чисел.

В предисловии [Б$_{\mathrm{VIII}}$-36] к книге Я. Бернулли "О законе больших чисел" А.Н. Колмогоров пишет:

"*Познавательная ценность теории вероятностей обусловлена тем, что массовые случайные явления в своем совокупном действии создают строгие закономерности. Само понятие математической вероятности было бы бесплодно, если бы не находило*

своего осуществления в виде частоты появления какого-либо результата при многократном повторении однородных условий. Поэтому работы Паскаля и Ферма можно рассматривать лишь как предысторию теории вероятностей, а настоящая ее история начинается с закона больших чисел Я. Бернулли".

В своем труде "Ars conjectandi" ("Искусство предположений", 1713 г.) Я. Бернулли так сформулировал свой закон больших чисел (даем его в современных обозначениях):

Если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные (бернуллиевские) случайные величины, принимающие два значения 1 и 0, $\mathsf{P}(\xi_n = 1) = p$, $\mathsf{P}(\xi_n = 0) = 1 - p$ *и* $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, *то при любом* $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0, \qquad n \to \infty. \tag{2}$$

Пуассон, которому как раз принадлежит термин *"закон больших чисел"* (1835 г.), обобщил его на случай *разнораспределенных* бернуллиевских слагаемых, придав ему следующую форму:

Если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые (бернуллиевские) случайные величины, принимающие два значения 1 и 0, $\mathsf{P}(\xi_n = 1) = p_n$, $\mathsf{P}(\xi_n = 0) = 1 - p_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} p_n(1 - p_n) = \infty$, *то для всякого* $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{\mathsf{E}S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0, \qquad n \to \infty, \tag{3}$$

где $\mathsf{E}S_n = p_1 + \cdots + p_n$.

П.Л. Чебышев в 1867 году исследовал вопрос о справедливости закона больших чисел в форме (3) для *произвольной* последовательности независимых случайных величин (не обязательно бернуллиевских). Развитый Чебышевым метод, применимый для случайных величин с конечными математическими ожиданиями и конечными дисперсиями, гарантирует выполнение закона больших чисел (3) лишь при выполнении условия

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathsf{D}\xi_k \longrightarrow 0, \qquad n \to \infty. \tag{4}$$

Это условие принято называть *условием Маркова*, который впервые в явной форме указал, что рассуждения Чебышева, предполагавшего ограниченность математических ожиданий $\mathsf{E}\xi_k^2$ одной и той же константой для всех $k \geq 1$, на самом деле полностью проходят и в предположении (4).

В работе "О суммах независимых случайных величин" [Б$_{\mathrm{I}}$-20], сданной в печать 24 декабря 1927 года, А.Н. Колмогоров находит *необходимые и достаточные* условия справедливости *обобщенного*, как он его

называет, закона больших чисел для “схемы серий”. Именно, пусть при каждом $n \geq 1$ задана последовательность независимых случайных величин $\xi^n = (\xi_{n1}, \dots, \xi_{nn})$. Говорят, что средние

$$\Sigma_n = \frac{\xi_{n1} + \dots + \xi_{nn}}{n}$$

устойчивы, если существует такая последовательность чисел $A_1, A_2, \dots$, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}(|\Sigma_n - A_n| > \varepsilon) \longrightarrow 0, \qquad n \to \infty. \tag{5}$$

Говорят также, что две системы случайных величин $\xi^n = (\xi_{n1}, \dots, \xi_{nn})$ и $\bar{\xi}^n = (\bar{\xi}_{n1}, \dots, \bar{\xi}_{nn})$, $n \geq 1$, являются *эквивалентными*, если

$$\mathsf{P}(\Sigma_n \neq \overline{\Sigma}_n) \longrightarrow 0, \qquad n \to \infty,$$

где $\overline{\Sigma}_n = \frac{\bar{\xi}_{n1} + \dots + \bar{\xi}_{nn}}{n}$.

Тогда *обобщенный закон больших чисел* А.Н. Колмогорова звучит следующим образом:

Необходимое и достаточное условие устойчивости средних $\Sigma_n, n \geq 1$, заключается в существовании некоторой системы $\bar{\xi}^n = (\bar{\xi}_{n1}, \dots, \bar{\xi}_{nn})$, состоящей из независимых при каждом $n \geq 1$ случайных величин и эквивалентной системе $\xi^n = (\xi_{n1}, \dots, \xi_{nn})$, $n \geq 1$, для которой

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{D}\bar{\xi}_{nk} \longrightarrow 0, \qquad n \to \infty.$$

Из этого А.Н. Колмогоров выводит следующий результат, подводящий итог длительным поискам условий справедливости закона больших чисел:

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых случайных величин и $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Для того чтобы для каждого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{\mathsf{E}S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0,$$

необходимо и достаточно существование при каждом $n \geq 1$ после-

довательности независимых случайных величин $\bar{\xi}_{n1}, \dots, \bar{\xi}_{nn}$ *такой, что при* $n \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(\xi_k \neq \bar{\xi}_{nk}) \longrightarrow 0,$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[\mathsf{E}\xi_k - \mathsf{E}\bar{\xi}_{nk}] \longrightarrow 0,$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathsf{D}\bar{\xi}_{nk} \longrightarrow 0.$$

В том же случае, когда величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ *независимы и одинаково распределены*, А.Н. Колмогоров получает такой результат:

Для того чтобы средние $\Sigma_n = \dfrac{\xi_{n1} + \dots + \xi_{nn}}{n}$ *были устойчивы, необходимо и достаточно, чтобы*

$$n\mathsf{P}(|\xi_1| > n) \longrightarrow 0, \qquad n \to \infty. \tag{6}$$

Если $\mathsf{E}|\xi_1| < \infty$, то условие (6) выполняется, и из предыдущего утверждения выводится (ранее полученный А.Я. Хинчиным) следующий критерий:

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ *— последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с* $\mathsf{E}|\xi_1| < \infty$. *Тогда имеет место закон больших чисел:*

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathsf{E}\xi_1\right| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0.$$

Несколько позже (1930 г., работа [Б$_\mathrm{I}$-25]) Андрей Николаевич получает другой свой знаменитый результат — условие справедливости *усиленного закона больших чисел*:

Если $\xi_1, \xi_2, \dots$ *— последовательность независимых случайных величин с конечными вторыми моментами и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{D}\xi_n}{n^2} < \infty,$$

то

$$\frac{S_n - \mathsf{E}S_n}{n} \longrightarrow 0 \qquad (\mathsf{P}\text{-}\textit{п.н.}).$$

В 1933 году в работе [$Б_{Iкн}$-6] Андрей Николаевич сам же заметил, что для случая *одинаково распределенных* слагаемых из предшествующего результата можно получить следующий окончательный результат:

Если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *— последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с* $\mathsf{E}|\xi_1| < \infty$, *то*

$$\frac{S_n}{n} \longrightarrow \mathsf{E}\xi_1 \qquad (\mathsf{P}\text{-}\textit{п.н.});$$

если же $\mathsf{E}|\xi_1| = \infty$, *то средние* $\frac{S_n}{n}$ *при* $n \to \infty$ *расходятся* (P-*п.н.*).

Уместно здесь вспомнить, что впервые *усиленный* закон больших чисел был сформулирован Борелем в 1909 году [ДС-13] для схемы Бернулли (в теоретико-числовой интерпретации):

Если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *— последовательность независимых бернуллиевских случайных величин,* $\mathsf{P}(\xi_n = 1) = \frac{1}{2}$, $\mathsf{P}(\xi_n = 0) = \frac{1}{2}$, *то при* $n \to \infty$

$$\frac{S_n}{n} \longrightarrow \frac{1}{2} \qquad (\mathsf{P}\text{-}\textit{п.н.}).$$

Затем Кантелли в 1917 году доказывает, что

Если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *— последовательность независимых случайных величин таких, что* $\mathsf{E}|\xi_n - \mathsf{E}\xi_n|^4 \le c < \infty$, $n \ge 1$, *то при* $n \to \infty$

$$\frac{S_n - \mathsf{E}S_n}{n} \longrightarrow 0 \qquad (\mathsf{P}\text{-}\textit{п.н.}).$$

(Сам термин "*усиленный* закон больших чисел" был введен А.Я. Хинчиным, который дал (1927—1928 гг.) некоторое достаточное условие его справедливости, применимое и к *зависимым* величинам.)

Приведенные выше результаты А.Н. Колмогорова об условиях применимости усиленного закона больших чисел к последовательности независимых случайных величин отличаются и завершенностью формулировок, и прозрачностью доказательств. Теперь они присутствуют практически во всех книгах по теории вероятностей и как самостоятельные утверждения, и как иллюстрации эффективности применения *неравенства Колмогорова* (1).

В конце 1927 года Андрей Николаевич завершает работу [$Б_I$-21] (опубликованную в 1929 году) об условиях выполнимости *закона повторного логарифма* — одной из замечательных теорем теории вероятностей, уточняющей усиленный закон больших чисел.

История вопроса вкратце такова.

Усиленный закон больших чисел Бореля может быть переформулирован следующим образом. Пусть $\varepsilon_k = 2\xi_k - 1$ и $S_n = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$. (Последовательность $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{k\geq 1}$ называют последовательностью Бернулли–Радемахера.) Тогда $\frac{S_n}{n} \to 0$ (P-п.н.), иначе, $S_n = o(n)$ с вероятностью единица.

В 1913 году Хаусдорф [ДС-120] обобщил этот результат, показав, что (P-п.н.)

$$S_n = o(n^{\frac{1}{2}+\epsilon}), \qquad \epsilon > 0.$$

В 1914 году Харди и Литтлвуд [ДС-117] показывают, что (P-п.н.)

$$S_n = O((n \ln n)^{1/2}).$$

В 1922 году Штейнгауз [ДС-136] получает результат, утверждающий, что (P-п.н.)

$$\limsup_n \frac{S_n}{\sqrt{8n \ln n}} \leq 1.$$

В 1923 году А.Я. Хинчин [ДС-125] предлагает формулировку, где впервые возникает *повторный логарифм*: (P-п.н.)

$$S_n = O((n \ln \ln n)^{1/2}).$$

Наконец, в 1924 году Хинчину же [ДС-126] удается получить (для схемы Бернулли, а затем и для схемы Пуассона) окончательный результат, который и принято теперь называть *законом повторного логарифма*:

Если $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные бернуллиевские случайные величины, $\mathsf{P}(\varepsilon_n = 1) = \mathsf{P}(\varepsilon_n = -1) = 1/2$, то ($\mathsf{P}$-*п.н.*)

$$\limsup_n \frac{S_n}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = 1. \tag{7}$$

В своей работе [Б$_{\mathrm{I}}$-21] Колмогоров значительно расширяет область применимости закона повторного логарифма, доказывая следующее предложение:

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с нулевыми средними, $\sigma_n^2 = \mathsf{E}X_n^2 < \infty$, $D_n = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 \to \infty$, $n \to \infty$, и для каждого $n \geq 1$

$$\sup_\omega |X_n(\omega)| = o\Big(\frac{D_n}{\sqrt{\ln \ln D_n}}\Big). \tag{8}$$

Тогда (P-*п.н.*)

$$\limsup_n \frac{S_n}{\sqrt{2D_n \ln\ln D_n}} = 1, \tag{9}$$

где $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \geq 1$.

Подобно тому, как в доказательствах теорем о сходимости почти наверное *рядов* из независимых случайных величин и в доказательстве *усиленного закона больших чисел* центральным моментом являлось неравенство Колмогорова (1), при доказательстве закона повторного логарифма Колмогоров создает новый метод, в основе которого лежат *экспоненциальные оценки* для вероятностей *больших уклонений* $\mathsf{P}(S_n \geq x)$ с $x = x(n)$.

В 1937 году Ю. Марцинкевич и А. Зигмунд показывают [ДС-66], что в колмогоровском условии (8) "o-малое" нельзя заменить на "O-большое". (Для случая независимых *одинаково* распределенных величин $X_1, X_2, \ldots$ Хартман и Винтнер [ДС-119] в 1941 году установили, что закон повторного логарифма справедлив в предположениях $\mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}X_1^2 < \infty$.)

Доказательства Хинчина и Колмогорова строились на равносильности свойств (9) тому, что:

(A) для всякого $\varepsilon > 0$ функция

$$\varphi^\varepsilon(n) = (1+\varepsilon)\sqrt{2D_n \ln\ln D_n} \tag{10}$$

является *верхней функцией* для $S_n = S_n(\omega)$, $n \geq 1$, т. е.

$$\mathsf{P}\{S_n(\omega) > \varphi^\varepsilon(n) \text{ бесконечно часто}\} = 0; \tag{11}$$

и

(B) для всякого $\varepsilon > 0$ функция

$$\varphi_\varepsilon(n) = (1-\varepsilon)\sqrt{2D_n \ln\ln D_n} \tag{12}$$

является *нижней функцией* для $S_n = S_n(\omega)$, $n \geq 1$, т. е.

$$\mathsf{P}\{S_n > \varphi_\varepsilon(n) \text{ бесконечно часто}\} = 1. \tag{13}$$

В связи с этим возникает естественный вопрос: когда та или иная функция $\varphi = \varphi(n)$ является верхней или нижней для последовательности $S_n = S_n(\omega)$, $n \geq 1$?

Для схемы Бернулли Колмогоровым был получен следующий замечательный результат:

Для возрастающей последовательности $\varphi = (\varphi_n)_{n\geq 1}$

$$\mathsf{P}(S_n(\omega) > D_n\varphi_n \textit{ бесконечно часто}) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

тогда и только тогда, когда ряд $\sum_{n=1}^\infty \frac{\varphi_n}{n} e^{-\varphi_n^2/2}$ *сходится или расходится соответственно.*

(См. также работы Эрдёша [ДС-141] и Феллера [ДС-111].)

В случае броуновского движения (винеровского процесса) $W = (W_t)_{t\geq 0}$ соответствующий результат был доказан И.Г. Петровским в работе [ДС-85] (1935 г.):

Неубывающая функция $\varphi = \varphi(t)$, $t > 0$, будет (при больших t) верхней для $W = (W_t)_{t\geq 0}$ тогда и только тогда, когда

$$\int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t} \exp\left(-\frac{\varphi^2(t)}{t}\right) dt < \infty. \tag{14}$$

Отметим, что тридцатью годами позже, в 1965 году В. Штрассен получил [ДС-138] "*обращение*" закона повторного логарифма для независимых одинаково распределенных величин, показав, что этот закон присущ лишь величинам X_n, $n \geq 1$, с конечными вторыми моментами: *если* $\mathsf{E}X_1 = 0$ *и* $\limsup_n \frac{S_n}{\sqrt{2n \ln\ln n}} < \infty$ (P-*п.н.*), *то* $\mathsf{E}X_1^2 < \infty$. Штрассену принадлежит также *функциональный* вариант закона повторного логарифма [ДС-137].

Ко времени окончания аспирантуры (май 1929 года) Андрей Николаевич опубликовал 18 математических работ — результат, которого вряд ли кому-нибудь удастся достигнуть, не говоря уж о том, чтобы перекрыть! Встал вопрос о месте дальнейшей работы. Андрей Николаевич получает заманчивое предложение от С.Н. Бернштейна работать в возглавляемом им Украинском математическом институте, открытом в 1926 году в Харькове. Сергей Натанович Бернштейн находился тогда, по словам А.Н., "*в зените своей международной славы и авторитета в СССР*". Он тогда же предпринял шаги для получения А.Н. Колмогоровым рокфеллеровской стипендии, благодаря которой научная деятельность будущего сотрудника нового Института должна была начаться с годичной стажировки за рубежом.

"*Однако против такого решения с большой энергией восстал Павел Сергеевич* ⟨Александров⟩ *... В Институте математики и механики* ⟨при Московском университете⟩ *имелась на этот год одна вакансия старшего научного сотрудника. На эту вакансию, кроме меня, мог претендовать и один из математиков старшего поколения, а директор Института Дмитрий Федорович Егоров, хотя и знал хорошо мои научные достижения, в вопросе о зачислении научных сотрудников считал обязательным следовать критериям старшинства ... Но Павлу Сергеевичу удалось убедить Д.Ф. Егорова отдать предпочтение моей кандидатуре*" [Б$_{\text{VI}}$-88].

Так в июне 1929 года Андрей Николаевич становится научным сотрудником НИИ математики и механики Московского университета. А менее чем через два года, в марте 1931-го — профессором, а еще через два — в 1933-м — директором этого Института.

Если считать от 1920-го — года, когда он впервые переступил порог Московского университета, жизнь Андрея Николаевича продолжалась в стенах университета 67 лет — до самой его кончины в 1987 году.

Лето, июнь 1929 года ознаменовались для Андрея Николаевича и началом самой большой дружбы его жизни — дружбы с Павлом Сергеевичем Александровым.

"Наши личные контакты с Павлом Сергеевичем были в это время весьма ограниченными, хотя мы встречались довольно часто, например, на концертах в Малом зале консерватории. Здоровались, но не вступали в какую-либо беседу. По-видимому, меня несколько смущали крахмальные воротнички и некоторая общая чопорность Павла Сергеевича ... " [Б$_{VI}$-88].

В том июне 1929-го Андрей Николаевич собирался в большое лодочное путешествие на веслах по Волге со своим гимназическим другом Колей Нюбергом.

"Мне до сих пор не совсем ясно, как я решился предложить быть третьим компаньоном Павлу Сергеевичу. Однако он согласился сразу.

16 июня 1929 г. мы отплыли вниз по Волге из Ярославля. Для Павла Сергеевича подобного рода сплавное лодочное путешествие было новостью, но он сразу же энергично взялся быть нашим провиант-мейстером и закупил уже перед отъездом из Москвы множество всяких вкусностей. Со дня отплытия — 16 июня — мы с Павлом Сергеевичем и исчисляем нашу дружбу ... " [Б$_{VI}$-88].

П.С. Александров и А.Н. Колмогоров на озере Гокча
(август 1929 г.)

Более полувека, до самой кончины Павла Сергеевича в 1982 году длилась эта дружба, и всегда отмечался, как праздник, этот день — 16 июня. Мы видим в июньских письмах 1942 года, какой печалью наполнились их сердца, когда война помешала им быть в этот день вместе. С того же лодочного путешествия 1929 года вошло в традицию и празднование 22 июня — дня летнего солнцестояния (из писем и дневников видно, что они вообще любили такие "астрономические" праздники и даты). И опять вспоминается, как был уничтожен и этот праздник в 1941-м . . .

Незадолго, примерно за год, до своей кончины тяжело больной Павел Сергеевич написал текст [$Б_8$-4], который попросил обнародовать в день восьмидесятилетия Андрея Николаевича, — в день, до которого Павлу Сергеевичу действительно не довелось дожить. В этом тексте есть такие строки: *" Моя дружба с А.Н. Колмогоровым занимает в моей жизни совершенно исключительное, неповторимое место: эта дружба перешагнула в* 1979 *году через свое пятидесятилетие и за весь этот полувековой период не только ни разу не дала никакой трещины, но не сопровождалась даже никакой ссорой, не было у нас за все это время и какого бы то ни было взаимного непонимания по вопросам, сколь-нибудь важным для нашей жизни и миросозерцания; даже тогда, когда наши взгляды на какой-нибудь из этих вопросов бывали различны, мы относились к этим взглядам друг друга с полным пониманием и сочувствием"*.

А Андрей Николаевич замечает: *"Наверное математиком я стал бы и самостоятельно, но мои человеческие качества сложились в значительной мере под влиянием Павла Сергеевича. Он действительно был изумительнейший человек по богатству и широте взглядов не только у нас, но и во всем мире. Его знание музыки, живописи, его душевное отношение к людям — необычайны"*. Эти слова сказаны А.Н. Колмогоровым 27 мая 1986 года на заседании Московского математического общества, посвященном памяти П.С. Александрова, т. е. тоже примерно за год до его, Андрея Николаевича, кончины. В своих "Воспоминаниях о П.С. Александрове", опубликованных в том же 1986 году [$Б_{VI}$-88], он еще усиливает свою оценку этих долгих лет дружбы, говоря, что они *"явились основой того, что вся моя жизнь в целом оказалась преисполненной счастья ..."*.

Само же 21-дневное путешествие по Волге, положившее начало этой дружбе, закончилось в Самаре, и за ним последовало путешествие на Кавказ (Баку, озеро Севан (Гокча), Ереван, Тбилиси, . . .). На Севане Павел Сергеевич работал над главами его общей с Х. Хопфом "Топологии", вышедшей в Берлине в 1935 году. Андрей же Николаевич писал статью о теории интеграла и, как он сам говорит, *"был занят размышлениями об аналитическом описании марковских процессов с непрерывным временем, результатом которых стал впоследствии мемуар 'Об аналитических методах в теории вероятностей' "*.

Тридцатые годы (1930–1939)

Конец двадцатых, начало тридцатых годов — **период стремительного расширения творческой деятельности А.Н. Колмогорова сразу по нескольким направлениям в математике**.

В 1929 году выходит в свет, в общем-то не очень известная широкому кругу математиков, работа Андрея Николаевича "Общая теория меры и исчисление вероятностей" [$Б_I$-23], в которой он дает свой *первый* вариант *аксиоматического построения основ теории вероятностей*, впоследствии превратившийся в "аксиоматику Колмогорова", в окончательном виде изложенную им в монографии "Основные понятия теории вероятностей", вышедшей на немецком языке в издательстве Springer в 1933 году [$Б_{Iкн}$-6] и переведенной на русский язык в 1936 году [$Б_{Iкн}$-7].

В этой работе 1929 года А.Н. Колмогоров заявляет о насущной потребности построения теории вероятностей как *"весьма общей и чисто математической теории"*, подчеркивает настоятельную необходимость *"выделить из изложения теории вероятностей те элементы, которые обуславливают ее внутреннюю логическую структуру"*. Он говорит также *"о пространстве элементарных случаев данной проблемы и о вероятностях различных множеств этих случаев"*, отмечает, что *"сила методов теории вероятностей в применении к вопросам чистой математики в значительной мере основана на употреблении понятия независимости случайных величин"*, обращает внимание на то, что понятие независимости *"не получило до сих пор явной чисто математической формулировки, хотя дать ее и не представляет больших трудностей"*. Колмогоров подчеркивает также, что аксиоматизация теории вероятностей должна строиться на базе общей теории меры и метрической теории функций — *"теории, которая занимается изучением тех свойств функций, которые зависят только от меры множеств, на которых функции принимают ту или иную совокупность значений"* (как, например, ортогональность двух функций или свойство полноты системы ортогональных функций).

Вообще, попытки аксиоматизации теории вероятностей предпринимались еще в начале ушедшего века Г. Больманом [ДС-12], который определял *вероятность* как конечно-аддитивную функцию на событиях, но без четкого определения "системы событий", что, впрочем, им полностью сознавалось. Именно по его инициативе Д. Гильберт в своем программном докладе 8 августа 1900 г. на Втором международном математическом конгрессе в Париже сформулировал свою 6-ю проблему как проблему аксиоматизации тех физических дисциплин, в которых математика играет доминирующую роль. К этим дисциплинам Гильберт отнес и теорию вероятностей, связь которой с чистой математикой стала отчетливо ясна уже к концу XIX века.

Свои соображения о построении фундамента теории вероятностей на базе общей теории меры высказывал в 1909 году Э. Борель [ДС-13], идеи которого развивались затем в статье 1923 года А. Ломницким [ДС-63].

В 1917 году С.Н. Бернштейн [ДС-8] предлагает строить аксиоматизацию теории вероятностей, основываясь на качественном сравнении событий по степени их большего или меньшего правдоподобия. Сама же система событий рассматривалась как булева алгебра.

В 1919 году Р. Мизес предложил [ДС-73] (см. также [ДС-75] и [ДС-76]) совсем иной, *частотный*, подход к обоснованию теории вероятностей, положив в основу идею, что о "вероятности" можно говорить лишь только в применении к так называемым "коллективам", т. е. бесконечным упорядоченным последовательностям, обладающим некоторыми свойствами "случайности" их образования. (Подробнее см. мой очерк "Математическая теория вероятностей. Очерк истории становления" [ДС-133], опубликованный как приложение к последнему, 3-му, изданию "Основных понятий теории вероятностей", вышедшему в 1998 году.)

В колмогоровских "Основных понятиях" первичная идея Э. Бореля принимает окончательную форму, а сама эта монография становится основой всего последующего развития теории вероятностей, образцом ее изложения, а для многих математиков последующих поколений — книгой вхождения в мир теории вероятностей. "Читая колмогоровские "Основные понятия", — писал К. Ито [ДС-41, с. XIII], — я убедился, что теория вероятностей может быть развита в терминах теории меры так же строго, как и другие области математики".

В своей автобиографии М. Кац [ДС-45], описывая начало своего совместного с Г. Штейнгаузом математического творчества, замечает: "Наша работа начиналась в то время, когда теория вероятностей из эпохи пренебрежения к ней начала медленно завоевывать признание как уважаемая чистая математика. И переворот произвела книга великого советского математика А.Н. Колмогорова об основаниях теории вероятностей, опубликованная в 1933 году".

Сам Андрей Николаевич в предисловии к первому изданию своей монографии так определил ее замысел:

> *"Целью предлагаемой работы является аксиоматическое обоснование теории вероятностей. Ведущей мыслью автора было при этом естественное включение основ теории вероятностей, считавшихся еще недавно совершенно своеобразными, в ряд общих понятий современной математики. До возникновения лебеговой теории меры и интеграла эта задача была почти безнадежна. После исследований Лебега стала ясной аналогия между мерой множества и вероятностью события, а также между интегралом от функции и математическим ожиданием случайной величины. Эта аналогия допускает и дальнейшее продолжение:*

так, например, многие свойства независимых случайных величин вполне аналогичны соответствующим свойствам ортогональных функций. Для того чтобы, исходя из этой аналогии, обосновать теорию вероятностей, следовало еще освободить теорию меры и теорию интегрирования от геометрических элементов, которые еще имелись у Лебега. Это освобождение было осуществлено Фреше.

Попытки построения основ теории вероятностей, исходящие из этой общей точки зрения, уже имеются, и весь круг идей, излагаемых здесь, уже успел приобрести известную популярность в узком кругу специалистов; однако отсутствовало полное и свободное от излишних усложнений изложение всей системы (подготовляется, впрочем, к печати книга Фреше, см. ⟨[ДС-115]⟩).

Я хотел бы еще указать здесь на те места в дальнейшем изложении, которые выходят за пределы упомянутого выше круга идей, уже достаточно знакомого в общих чертах специалистам. Эти места следующие: распределения вероятностей в бесконечномерных пространствах (глава третья, § 4), дифференцирование и интегрирование математических ожиданий по параметру (глава четвертая, § 5) и особенно теория условных вероятностей и математических ожиданий (глава пятая). Следует при этом отметить, что все эти новые понятия и проблемы с необходимостью возникают при рассмотрении вполне конкретных физических задач (ср., например, ⟨[Б$_{\text{I}}$-39]⟩, *а также* ⟨[ДС-56]⟩)*".*

(Сам Андрей Николаевич любил отмечать, что в работе [Б$_{\text{I}}$-39] чисто физическая часть написана *математиком* Колмогоровым, а математическая — *физиком* Леонтовичем.)

В 1998 году вышло третье издание "Основных понятий". В своем предисловии к нему Ю.В. Прохоров и А.Н. Ширяев пишут: "Значение монографии А.Н. Колмогорова определяется не только предложенной в ней схемой (ставшей универсально принятой) логического обоснования *математической теории вероятностей*. Ее роль также в том, что содержащиеся в ней новые концепции, понятия и результаты (такие как условное математическое ожидание, теорема о существовании случайного процесса с заданной системой конечномерных распределений, закон нуля или единицы и др.) открыли *новую эру* и в развитии самой теории вероятностей, и в расширении сферы ее влияния и областей применения".

Летом 1930 года Андрей Николаевич заканчивает и сдает в печать одну из самых замечательных своих работ в области теории вероятностей — уже упоминавшуюся статью (которую сам он называет, как было тогда принято, мемуаром) "Об аналитических методах в теории вероятностей" [Б$_{\text{I}}$-29]. Работа появилась в 1931 году на немецком языке в журнале "Mathematische

Annalen". В этой работе закладываются основы общей теории марковских случайных процессов и вскрываются глубокие связи не только этой теории, но и всей теории вероятностей в целом с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с частными производными и математической физикой.

Колмогоров особо подчеркивает, что предметом его работы является новый метод исследования процессов с *непрерывным* временем.

В совместной статье П.С. Александрова и А.Я. Хинчина к пятидесятилетию А.Н. Колмогорова [Б$_8$-6] о работе "Аналитические методы в теории вероятностей" говорится:

> "Во всей теории вероятностей XX столетия трудно указать другое исследование, которое оказалось бы столь основополагающим для дальнейшего развития науки и ее приложений, как эта работа Андрея Николаевича. В наши дни из нее развилась обширная область учения о вероятностях — теория случайных процессов, по своему объему и количеству своих приложений могущая соперничать с "классическими" частями теории вероятностей.
>
> Управляющие марковскими процессами дифференциальные "уравнения Колмогорова", строго и во всей широте математически обоснованные, содержали в себе в качестве частных случаев все те уравнения (Смолуховского, Чепмена, Фоккера—Планка и др.), которые до тех пор кустарно, без достаточного обоснования и без четкого выяснения лежащих в их основе предпосылок, выводились и применялись физиками по отдельным поводам. На этих уравнениях Колмогорова основывалось и продолжает основываться огромное количество исследований во всех странах мира; они оказались основными как для дальнейшего развития теории, так и для математической обработки самых разнообразных прикладных задач".

Заметим, что это было сказано ровно полстолетия тому назад, и эти последующие полстолетия подтвердили все значение этой работы Колмогорова и все, сказанное П.С. Александровым и А.Я. Хинчиным!

Основным объектом исследования в "Аналитических методах" является переходная вероятность $P(s,x;t,A)$ того, что некоторая "система", выходящая в момент времени s из состояния x фазового пространства E, в момент времени $t > s$ окажется в множестве A.

Для этой переходной вероятности предполагается выполненным соотношение

$$P(s,x;t,A) = \int P(s,x;u,dy)P(u,y;t,A), \quad 0 \le s < u < t, \tag{15}$$

получившее название *уравнение Колмогорова—Чепмена* и отражающее тот факт, что рассматриваемая "система" обладает так называемым свой-

ством *отсутствия последействия*, или — марковским свойством. (С. Чепмен указывал на справедливость свойства (15) для некоторых "систем" в своей работе [ДС-127].)

Как теперь известно, при весьма широких условиях уравнение (15) позволяет построить *марковский процесс* $X = (X_t)_{t\geq 0}$, для которого условная вероятность $\mathsf{P}(X_t \in A \mid X_s = x)$ совпадает с функцией $P(s, x; t, A)$. В "Аналитических методах" Колмогоров не оперирует с каким-либо "марковским процессом" $X = (X_t)_{t\geq 0}$ с отмеченным свойством, а занимается вопросом вывода *дифференциальных* уравнений для $P(s, x; t, A)$, удовлетворяющих уравнению (15), создав тем самым новый аналитический метод исследования вероятностных свойств "систем без последействия", эволюционирующих в непрерывном времени.

С целью получения соответствующих дифференциальных уравнений Колмогоров прежде всего вводит понятие *дифференциальных характеристик*, рассматривая при этом два случая фазового пространства: $E = \{\dots, i, j, \dots\}$ и $E = \mathbb{R}^d$.

В случае *дискретного* пространства состояний такими дифференциальными характеристиками для переходных вероятностей $p_{ij}(s,t) = P(i, s; t, \{j\})$ являются величины

$$A_{ii}(t) = \lim_{\Delta\downarrow 0} \frac{p_{ii}(t, t+\Delta) - 1}{\Delta},$$

$$A_{ij}(t) = \lim_{\Delta\downarrow 0} \frac{p_{ij}(t, t+\Delta)}{\Delta}, \quad i \neq j.$$

(При этом предполагается, что эти предельные значения определены.)

В случае *непрерывного* пространства состояний (с $d = 1$ для простоты) под дифференциальными характеристиками понимаются *локальный снос* и *локальная дисперсия*

$$A(s,x) = \lim_{\Delta\downarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} (y - x) f(s, x; s+\Delta, y)\, dy,$$

$$B^2(s,x) = \lim_{\Delta\downarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} (y - x)^2 f(s, x; s+\Delta, y)\, dy,$$

где $f(s, x; s+\Delta, y) = \dfrac{\partial P(s, x; s+\Delta, (-\infty, y])}{\partial y}$ (и снова предполагается существование соответствующих пределов).

В каждом из рассматриваемых случаев ($E = \{\dots, i, j, \dots\}$, $E = \mathbb{R}$) Колмогоров выводит свои знаменитые

обратные (или *первые*) *дифференциальные уравнения* (по (s, x)):

$$-\frac{\partial p_{ij}(s,t)}{\partial s} = \sum_{k\in E} A_{ik}(s) p_{kj}(s,t), \tag{16}$$

$$-\frac{\partial}{\partial s} f(s, x; t, y) = A(s,x) \frac{\partial}{\partial x} f(s, x; t, y) + \frac{B^2(s,x)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, x; t, y), \tag{17}$$

и *прямые* (или *вторые*) *дифференциальные уравнения* (по (t, y)):

$$-\frac{\partial p_{ij}(s,t)}{\partial t} = \sum_{k \in E} p_{ik}(s,t) A_{kj}(t), \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(s,x;t,y) = -\frac{\partial}{\partial y}[A(t,y) f(s,x;t,y)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[B^2(t,y) f(s,x;t,y)]. \tag{19}$$

(Частные случаи уравнения (19) использовались Фоккером и Планком в физических работах по теории диффузии.)

В "Аналитических методах" Колмогоров ставит вопрос о существовании и единственности решений этих уравнений и о дифференцируемости переходных вероятностей. Этим проблемам в последующем были посвящены работы и самого А.Н. Колмогорова (например, [Б$_{\mathrm{I}}$-121]), и работы В. Феллера, И.И. Гихмана и многих других.

Введенные А.Н. Колмогоровым дифференциальные характеристики нашли впоследствии свое место в общей ситуации в рамках полугруппового подхода к теории марковских процессов (В. Феллер, Е.Б. Дынкин и др.). В этой теории в качестве дифференциальной характеристики марковского процесса берется *инфинитезимальный оператор* соответствующей полугруппы операторов, связанной с процессом.

Как уже было отмечено, в "Аналитических методах" динамика "системы" описывалась с помощью переходных вероятностей $P(s,x;t,A)$ и их локальных характеристик. Само же *траекторное* движение "системы" не рассматривалось, и явно не вводился тот *марковский процесс* $X = (X_t)_{t \geq 0}$, для которого условные вероятности $\mathsf{P}(X_t \in A \mid X_s = x)$ совпадают с переходными вероятностями $P(s,x;t,A)$. Вопрос явного построения *диффузионного марковского процесса*, у которого локальными характеристиками являются введенные выше функции $A(s,x)$ и $B^2(s,x)$, был рассмотрен позже в сороковых—пятидесятых годах японским математиком К. Ито ([ДС-36]–[ДС-40]; см. также [ДС-41]), разработавшим с этой целью метод *стохастических дифференциальных уравнений*. (Близкий подход был предложен также и И.И. Гихманом, [ДС-21], [ДС-22]. Отметим, что *конечноразностные* стохастические дифференциальные уравнения рассматривались еще в 1934 году С.Н. Бернштейном [ДС-9].)

Суть метода К. Ито состоит в том, чтобы, отправляясь от простейшего процесса — винеровского $W = (W_t)_{t \geq 0}$ с $\mathsf{E}\Delta W_t = 0$, $\mathsf{E}(\Delta W_t)^2 = \Delta t$, строить соответствующие диффузионные марковские процессы $X = (X_t)_{t \geq 0}$ как решения *стохастического дифференциального уравнения*

$$dX_t = A(t, X_t)\, dt + B(t, X_t)\, dW_t. \tag{20}$$

С этой целью К. Ито, во-первых, придал точный смысл понятию *"стохастическое дифференциальное уравнение"*, для чего ему пришлось опре-

делить ставший теперь общеупотребительным *стохастический интеграл* от неупреждающих функций по винеровскому процессу; во-вторых, применяя метод последовательных приближений, показал, что условие Липшица и линейный рост по x коэффициентов $A(t,x)$ и $B(t,x)$ гарантируют существование и единственность решения уравнения (20); в-третьих, установил, что это решение есть марковский процесс; и, наконец, опираясь на свою знаменитую *формулу (Ито) замены переменных*, показал, что этот процесс имеет своими дифференциальными характеристиками функции $A(s,x)$ и $B^2(s,x)$.

Совсем недавно стало известно о судьбе В. Дёблина (Wolfgang Doeblin, 17.III.1915–21.VI.1940) и его математических открытий. Этот молодой математик, немец по рождению, перед самой войной получивший французское гражданство и призванный во французскую армию, в начале 1940 года отправил с фронта в Парижскую Академию запечатанный пакет со своими математическими заметками. Попав вскоре в немецкое окружение близ маленькой деревушки в Арденнах, он добровольно ушел из жизни перед неотвратимой опасностью немецкого плена. (Подробный комментарий о короткой жизни и значительном математическом наследии В. Дёблина недавно опубликован Б. Брю и М. Йором [ДС-16].)

Открытый лишь в мае 2000 года, этот пакет (*Pli cacheté* №11.668), хранившийся шестьдесят лет в Парижской Академии наук, содержал набросок статьи “Об уравнениях Колмогорова”. Оказалось, что В. Дёблин также интересовался вопросом о том, как по локальным характеристикам $A(s,x)$ и $B^2(s,x)$ *конструктивно* построить марковский диффузионный процесс $X=(X_t)_{t\geq 0}$, у которого соответствующая переходная функция имеет своими дифференциальными характеристиками функции $A(s,x)$ и $B^2(s,x)$.

В. Дёблин строит такой процесс как решение следующего стохастического дифференциального уравнения:

$$dX_t = A(t,X_t)\,dt + dW_{\int_0^t B^2(s,X_s)ds},$$

где $W=(W_t)_{t\geq 0}$ — винеровский процесс.

Интересно, что если в конструкции К. Ито требовалось определять стохастический интеграл $\int_0^t B^2(s,X_s)\,dW_s$, то в конструкции Дёблина нет необходимости это делать, а следует использовать лишь винеровский процесс в *новом времени* ($t \rightsquigarrow \int_0^t B^2(s,X_s)\,ds$).

Теперь мы знаем (из теоремы Дамбиса и Дубинса–Шварца, см. [ДС-95]), что всякий мартингал вида $(\int_0^t \sigma_s(\omega)\,dW_s)_{t\geq 0}$ с $\int_0^t \sigma_s^2(\omega)\,ds \uparrow \infty$, $t\to\infty$, может быть представлен в виде $(\widetilde{W}_{\int_0^t \sigma_s^2(\omega)\,ds})_{t\geq 0}$ с некоторым новым винеровским процессом. Тем самым, обнаруживается полная “стыковка” результатов Ито и Дёблина.

Позднее, в 60–70-х годах, особенно после работ Д. Струка и С.Р. С. Варадана (см., например, [ДС-108]), стал развиваться *мартингальный подход*, позволивший при весьма неограничительных предположениях относительно $A(t,x)$ и $B(t,x)$ доказывать существование и единственность так называемого *слабого решения* стохастического дифференциального уравнения (20), что позволило существенно продвинуть решение вопроса о существовании марковского диффузионного процесса с "дифференциальными характеристиками" $A(t,x)$ и $B(t,x)$ почти без каких-либо существенных ограничений "гладкости" на них ([ДС-105], [ДС-25], [ДС-33]).

В "Аналитических методах" и в работе 1931 года "Одно обобщение теоремы Лапласа–Ляпунова" [Б$_{\rm I}$-32] дано также принципиально новое доказательство *центральной предельной теоремы*, в основе которого лежит идея, что суммы S_n, $n \geq 1$, независимых случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ (с нулевыми средними) образуют марковский процесс, который при подходящей нормировке переходит в диффузионный марковский процесс.

На этом пути А.Н. Колмогоров дает метод построения *асимптотических разложений* для вероятностей $P_n(x) = \mathsf{P}(S_n/\sqrt{\mathsf{D}S_n} \leq x)$, а также ставит вопрос о вычислении вероятности, с которой выполняются все неравенства вида $a(t_k) < S_k < b(t_k), k = 1, 2, \dots, n$. В сущности, эта задача есть (в современной интерпретации) типичная граничная задача так называемого *принципа инвариантности*, связанного со следующим вопросом.

Пусть $\xi_{n1}, \dots, \xi_{nn}$ при каждом $n \geq 1$ есть последовательность независимых случайных величин, $S_{nk} = \sum_{i \leq k} \xi_{ni}$, $\mathsf{E}\xi_{ni} = 0$, $\sum_{i \leq n} \mathsf{D}\xi_{ni} = 1$, $\sum_{i \leq n} \mathsf{E}|\xi_{ni}|^3 = L_n \to 0$, $n \to \infty$. Спрашивается, когда и с какой скоростью для достаточно гладких границ $a(t)$ и $b(t)$, $0 \leq t \leq 1$,

$$R_n \equiv \Big|\mathsf{P}\big(a(\mathsf{D}S_{nk}) \leq S_{nk} \leq b(\mathsf{D}S_{nk}),\ 1 \leq k \leq n\big) - \\ - \mathsf{P}\big(a(t) \leq W_t \leq b(t),\ 0 \leq t \leq 1\big)\Big| \longrightarrow 0, \qquad n \to \infty,$$

где $W = (W_t)_{t \geq 0}$ — стандартный винеровский процесс. А.Н. Колмогоров показывает, к решению какой граничной задачи сводится отыскание вероятности $P = \mathsf{P}\big(a(t) \leq W_t \leq b(t),\ 0 \leq t \leq 1\big)$, и приводит асимптотическое разложение для вероятностей $P_n = \mathsf{P}\big(a(\mathsf{D}S_{nk}) \leq S_{nk} \leq b(\mathsf{D}S_{nk}),\ 1 \leq k \leq n\big)$, первым членом которого служит эта вероятность P. В последующем Ю.В. Прохоров [ДС-93] для достаточно гладких функций $a(t)$, $b(t)$, для которых $a(0) < 0 < b(0)$, получил оценку

$$R_n \equiv |P_n - P| = o(L_n^{1/4}(\ln L_n)^2),$$

а А.В. Скороход [ДС-105] для случая одинаково распределенных ограниченных слагаемых *методом "одного вероятностного пространства"* получил для R_n оценку $O(n^{-1/2} \ln n)$ (которую впоследствии С.В. Нагаев [ДС-78] и А.И. Саханенко [ДС-100] довели до $O(n^{-1/2})$, убрав $\ln n$ и сняв предположение ограниченности).

Девять месяцев (с июня 1930 года по март 1931) Андрей Николаевич проводит в своей первой длительной зарубежной командировке. Сначала вместе с П.С. Александровым он едет в Берлин, а затем переезжает в университетский Гёттинген, где Павел Сергеевич не раз бывал и до этого. Вот что мы читаем об этом пребывании в Германии в колмогоровских "Воспоминаниях о П.С. Александрове" [$Б_{VI}$-88]:

"Гёттинген в те годы воспринимался как первый математический центр Германии и как достойный конкурент Парижа во Франции и Принстона в США. Такое положение Гёттингена достигалось при очень ограниченном постоянном составе сотрудников. Ординарных профессоров-математиков было всего четверо: Гильберт, Курант, Ландау и, кажется, Бернштейн ⟨здесь речь идет о Ф. Бернштейне и, конечно, об Э. Ландау — А.Ш.⟩ *(достигший 68-летнего возраста Гильберт должен был перейти на пенсию, а на его место был уже приглашен Герман Вейль). На положении ассистентов находились многочисленные молодые сотрудники Куранта (Фридрихс, Реллих, Ганс Леви и др.). Не имела постоянной профессуры сама Эмми Нётер, уже воспринимавшаяся как глава современной общей алгебры. Ее ученики Ван дер Варден, Дёринг тоже находились на положении ассистентов ... Основной состав гёттингенских математиков группировался вокруг Гильберта, Куранта, Ландау и Эмми Нётер. Это был очень дружный коллектив, и Павел Сергеевич рассматривался в нем как человек, органически ему принадлежавший ... У меня также были в Гёттингене разносторонние научные контакты. Прежде всего — с Курантом и его учениками по линии предельных теорем, где диффузионные процессы оказываются пределами дискретных случайных процессов, затем по интуиционистской логике — с Г. Вейлем и, наконец, по теории функций — с Ландау".*

Из Гёттингена Андрей Николаевич переезжает в Мюнхен, где посещает К. Каратеодори, которому, как вспоминал А.Н. ([$Б_{VI}$-88]), *"понравилась моя работа по теории меры, и он настоял на ее возможно быстром печатании"*, хотя к работе об обобщении понятия интеграла [$Б_{I}$-27] *"отнесся ... довольно холодно"*.

Из Мюнхена Колмогоров и Александров отправляются на побережье Средиземного моря, куда их пригласил находившийся на отдыхе в прибрежном поселке Санари М. Фреше. Фреше собирался поработать в теории вероятностей с Андреем Николаевичем, а в теоретико-множественной топологии — с Павлом Сергеевичем. Дорога сама составила целое путешествие: Баварские Альпы, Ульм, Фрейбург и далее по Франции — озеро Анси, Марсель и, наконец, Санари.

“Фреше занимался в это время марковскими цепями с дискретным временем и различными типами и множествами состояний. Мы обсуждали с ним всю марковскую проблематику в широком аспекте. Такая довольно монотонная жизнь продолжалась около месяца, нарушаясь сравнительно редко небольшими экскурсиями”,

— вспоминал Андрей Николаевич ([Б$_{\text{VI}}$-88]). В Париже, куда он позднее отправился, ему показалось естественным поинтересоваться оценкой его работ и

“получить какие-нибудь советы для их продолжения, в первую очередь, у корифеев математики старшего поколения — Бореля и Лебега. Но мой контакт с ними, к сожалению, весь ограничился короткими чисто официальными визитами. Помощь Бореля оказалась существенной, впрочем, при продлении французской визы. Разрешение было дано немедленно после вручения письма, подписанного Emile Borel, Ancient Ministre de la Marine” ⟨Эмиль Борель был с 1925 по 1940 г. морским министром Франции. — *А.Ш.*⟩ [Б$_{\text{VI}}$-88].

“В сфере науки, — продолжает А.Н., — *я вынес очень многое из контактов с П. Леви. Он неоднократно приглашал меня к себе домой, где мы вели длительные содержательные научные беседы”*.

В 1930 и 1932 годах Андрей Николаевич публикует две работы, посвященные основам *геометрии*: “О тополого-теоретико-групповом обосновании геометрии” [Б$_{\text{I}}$-26] и “К обоснованию проективной геометрии” [Б$_{\text{I}}$-37]). В первой дается обоснование классических геометрий постоянной кривизны для n-мерного пространства, построенное на топологии и теории групп. Во второй — новое построение проективной геометрии, базирующееся на доказанной Л.С. Понтрягиным теореме о том, что связными локально-компактными топологическими телами со счетной базой являются лишь: тело действительных чисел, тело комплексных чисел и некоммутативное тело кватернионов.

К необычайно продуктивным тридцатым годам относятся и ставшие классическими работы Колмогорова по *топологии*. Здесь его заслуга состоит прежде всего во введении (одновременно с Дж. Александером и независимо от него) в алгебраическую топологию понятия ∇-*оператора* и построение с его помощью *когомологических групп* (называемых также верхними группами Бетти или ∇-группами), [Б$_{\text{I}}$-56]. Эти группы явились удобным и мощным средством исследования разных топологических проблем, в частности, связанных с непрерывными отображениями.

Далее А.Н. Колмогоров ([Б$_{\text{I}}$-58]) и Дж. Александер определяют *операцию произведения* в группе когомологий, превратив тем самым группу в кольцо (гомологическое кольцо), что сыграло в последующем исключительно важную роль.

Третий выдающийся вклад А.Н. Колмогорова в топологию (работы [$Б_I$-61], [$Б_I$-62], [$Б_I$-63]) — доказательство “закона двойственности, касающегося замкнутых множеств, расположенных в любых локально бикомпактных вполне регулярных топологических пространствах, удовлетворяющих условию ацикличности в тех размерностях, о которых идет речь в самой формулировке результата” ([$Б_8$-6, с. 187]). (Подробнее об этих результатах см. комментарий Г.С. Чогошвили к работам А.Н. Колмогорова по теории гомологий [$Б_{Iкн}$-48, с. 405–411].)

К числу замечательных работ А.Н. Колмогорова по топологии следует отнести и его работу “Об открытых отображениях” [$Б_I$-66] 1937 года, в которой он построил виртуозный пример *непрерывного открытого отображения* (т. е. переводящего открытое множество в открытое же) одномерного континуума на двумерный. В своем позднем комментарии [$Б_{Iкн}$-48, с. 412] к этой работе Андрей Николаевич писал: *“Проблема возможности повышения размерности при открытых отображениях горячо интересовала П.С. Александрова. Некоторое время мы вместе трудились над доказательством невозможности повышения размерности. В этих поисках постепенно выяснились причины наших неудач. Этот анализ неудач и привел, в конце концов, к контрпримеру”*, послужившему стимулом для дальнейших исследований многих советских топологов (Л.В. Келдыш, позднее Б.А. Пасынков и др.).

Среди топологических работ тридцатых годов следует назвать и работу Андрея Николаевича “О нормируемости общего линейного топологического пространства” [$Б_I$-46], в которой, в частности, впервые даются определение *топологического линейного пространства*, определение *ограниченности* и *выпуклости* множеств в таком пространстве, а также необходимое и достаточное условие *нормируемости* топологического линейного пространства.

В 1935 и 1936 годах одна за другой выходят две работы Колмогорова по *теории приближений*: “О порядке остаточного члена рядов Фурье дифференцируемых функций” [$Б_I$-53] и “О наилучшем приближении функций заданного функционального класса” [$Б_I$-55]. Эти работы, как это часто бывало с работами Колмогорова, привели к созданию целого нового направления в теории приближений функций.

В работе [$Б_I$-53] А.Н. Колмогоров рассматривает класс $\mathbf{F}^{(p)}$ всех периодических функций $f = f(x)$, непрерывных вместе со своей производной порядка $p-1$, у которых $(p-1)$-я производная удовлетворяет условию Липшица $|f^{(p-1)}(x) - f^{(p-1)}(y)| \leq |x-y|$ и условию $\sup_x |f^{(p)}(x)| \leq 1$. Обозначая

$$R_n(f,x) = f(x) - \left[\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right]$$

остаточный член ряда Фурье функции f, А.Н. Колмогоров рассматривает вопрос о величине

$$C_n^{(p)} = \sup_{f \in \mathbf{F}^{(p)}} |R_n(f, x)|.$$

Еще в 1910 году А. Лебег показал, что $C_n^{(1)}$ имеет порядок $\frac{\ln n}{n}$. В рассматриваемой статье А.Н. Колмогоров показывает, что в общем случае

$$C_n^{(p)} = \frac{4}{\pi^2} \frac{\ln n}{n^p} + O(n^{-p}),$$

а в случае нечетных p имеет место следующая *точная* формула:

$$C_n^{(p)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Big| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^p} \Big| \, dx.$$

Эти идеи А.Н. Колмогорова развивались затем многими авторами и в самых различных направлениях: вместо частных сумм Фурье брались иные аппроксимирующие выражения, вместо класса $\mathbf{F}^{(p)}$ — иные функциональные классы, и т. д.

Значительные достижения в теории приближений были получены одним из первых учеников Колмогорова, всего двумя годами его младшим, ныне академиком С.М. Никольским.

А.Н. Колмогоров и П.С. Александров познакомились с Сергеем Михайловичем Никольским в Днепропетровске, куда в тридцатые годы они вместе или поодиночке регулярно выезжали читать лекции, вести семинары, т. е. помогать становлению в этом университетском городе настоящей математической школы. Об этом можно прочесть в публикуемых во втором томе нашего издания письмах П.С. и А.Н., а также в “Воспоминаниях о Днепропетровске” С.М. Никольского ([Б$_8$-67]).

Исключительно важное, принципиальное значение имела вторая из названных статей А.Н. Колмогорова — “О наилучшем приближении функций заданного функционального класса” [Б$_I$-55], в которой вводится новая характеристика аппроксимативных свойств классов функций, получившая впоследствии название *колмогоровских поперечников*.

Расскажем об этом чуть подробнее.

Предположим, что для рассматриваемых функций f, g введено некоторое расстояние $\rho(f, g)$ и рассматривается задача о приближении функции f линейными комбинациями $\varphi_c = c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n$ с фиксированными функциями $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

П.Л. Чебышев рассматривал задачу выбора коэффициентов $c = (c_1, \ldots, c_n)$ так, чтобы расстояние $\rho(f, \varphi_c)$ сделать возможно меньшим для *фиксированной* функции f.

Колмогоров ставит новую задачу.

Пусть $F = \{f\}$ — некоторый класс функций и

$$D_n(F) = \inf_{(\varphi_1,\dots,\varphi_n)} \sup_{f\in F} \inf_{c=(c_1,\dots,c_n)} \rho(f, \varphi_c).$$

Требуется для заданных n и F найти $D_n(F)$, выяснить вопрос о существовании оптимальных функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ и их единственности (с точностью до некоторого линейного преобразования).

Для случая $\rho(f,g) = \left[\int_0^1 (f-g)^2\,dx\right]^{1/2}$ и класса F_1 дифференцируемых функций $f = f(x)$ таких, что $\int_0^1 (f'(x))^2\,dx \le 1$, А.Н. Колмогоров показывает, что

$$D_n(F_1) = \frac{1}{\pi n}, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

при этом оптимальными функциями $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ являются функции $1, \sqrt{2}\cos \pi k x$, $k = 1, \dots, n-1$.

Для класса F_p^*, $p \ge 1$, состоящего из всех p раз дифференцируемых функций $f = f(x)$, удовлетворяющих условиям

$$\int_0^1 (f^{(p)}(x))^2\,dx \le 1,$$

$$f(0) = f(1),\ f'(0) = f'(1),\ \dots,\ f^{(p-1)}(0) = f^{(p-1)}(1),$$

А.Н. Колмогоров находит, что

$$D_{2m-1}(F_p^*) = D_{2m}(F_p^*) = \frac{1}{(2\pi m)^p}, \qquad m = 1, 2, \dots,$$

и устанавливает, что для $n = 2m+1$ в качестве оптимальных могут быть взяты функции $1, \sqrt{2}\sin 2\pi k x, \sqrt{2}\cos 2\pi k x$, $k = 1, \dots, m$.

В этой работе [Б$_{\mathrm{I}}$-55] Андрей Николаевич дает своим доказательствам и наглядную геометрическую интерпретацию, послужившую основанием называть нижнюю грань $D_n(F)$ *n-м поперечником* множества F.

И, конечно, в тридцатые годы А.Н. Колмогоров получает ряд выдающихся результатов в области, которую принято считать главной привязанностью Андрея Николаевича, — в теории вероятностей. (Пожалуй, вернее было бы его считать главным в теории вероятностей.)

В конце двадцатых — начале тридцатых годов появились работы Бруно де Финетти, посвященные (в современной интерпретации) изучению вероятностных свойств случайных процессов $X = (X_t)_{t\ge 0}$ с однородными независимыми приращениями, что в свою очередь связано с изучением структуры распределений так называемых *безгранично делимых законов*.

Случайные величины $\xi = \xi(\omega)$, обладающие безгранично делимыми законами, характеризуются тем, что для любого конечного $n \geq 1$ их распределение совпадает с распределением суммы $\xi_{n1} + \cdots + \xi_{nn}$ независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nn}$. Важность этого класса безгранично делимых законов заключается в том, что при весьма общих условиях они выступают как *предельные* для нормированных сумм независимых случайных величин.

Бруно де Финетти указал [ДС-112] общую формулу для характеристической функции $f(t) = \mathsf{E}e^{it\xi}$ некоторого класса безгранично делимых случайных величин ξ. Именно, комбинируя нормальный тип и пуассоновский (со скачками различной величины), он показал, что

$$f(t) = \exp\left(iat - \frac{\sigma^2}{2}t^2 + c\int (e^{itu} - 1)\, dF(u)\right), \tag{21}$$

где $F(u)$ — функция распределения величины скачков. Однако эта формула не охватывала общего случая, а описывала лишь некоторый подкласс безгранично делимых законов.

В 1932 году А.Н. Колмогоров ([Б$_{\mathrm{I}}$-34, Б$_{\mathrm{I}}$-35]) для случая величин ξ с *конечным вторым моментом*, $\mathsf{E}\xi^2 < \infty$, дал исчерпывающий ответ на проблему Бруно де Финетти:

Функция $f = f(t)$ является характеристической функцией безгранично делимого закона случайной величины ξ, $\mathsf{E}\xi^2 < \infty$, тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде

$$f(t) = \exp\left(iat + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2}\, dK(x)\right), \tag{22}$$

где $a \in \mathbb{R}$, $K = K(x)$ — неубывающая ограниченная функция; подынтегральная функция при $x = 0$ считается равной $-t^2/2$.

Общий случай, включающий и возможность *бесконечной дисперсии*, совсем другим методом был исследован в 1934 году П. Леви [ДС-52]. В 1937 году А.Я. Хинчин [ДС-122] показал, что результат П. Леви может быть получен и методом Колмогорова.

Носящая общепринятое теперь название *"формула Леви–Хинчина"* (правильнее было бы говорить, конечно, *"формула Колмогорова–Леви–Хинчина"*) для характеристической функции $f = f(t)$ безгранично делимого распределения имеет следующий вид:

$$f(t) = \exp\left(i\alpha t - \frac{t^2\sigma^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,\Lambda(dx)\right), \tag{23}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geq 0$, Λ — некоторая конечная мера на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ с $\Lambda(\{0\}) = 0$.

Часто используют и другие формы записи, например,

$$f(t) = \exp\left(i\alpha t - \frac{t^2\sigma^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - ith(x))\, F(dx)\right),$$

где F — неотрицательная мера такая, что $\int_{-\infty}^{\infty} \min(1, x^2)\, F(dx) < \infty$, а $h = h(x)$ — ограниченная борелевская функция с компактным носителем, ведущая себя как x в окрестности нуля.

К 1933 году относится замечательная работа А.Н. Колмогорова "Об эмпирическом определении закона распределения" [Б$_{\mathrm{I}}$-43], ставшая классической и одной из центральных в теории непараметрических критериев.

Формулировка основного результата этой работы проста и красива.

Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с непрерывной функцией распределения $F(x) = \mathsf{P}(\xi_1 \le x)$ и

$$F_n(x;\xi) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I(\xi_k \le x)$$

есть эмпирическая функция распределения. Тогда

$$\lim_n \mathsf{P}\left\{\sqrt{n}\sup_n |F_n(x;\xi) - F(x)| \le \lambda\right\} = \mathcal{K}(\lambda), \tag{24}$$

где $\mathcal{K}(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2\lambda^2 k^2}$.

Чтобы читатель мог оценить значение этой работы, следует напомнить, что для проверки по результатам наблюдений над $\xi_1, \dots, \xi_n$ гипотезы об истинности распределения $F = F(x)$ в 1928 году Г. Крамер и в 1931 году Р. фон Мизес предложили так называемую статистику *омега-квадрат*:

$$\omega_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x;\xi) - F(x)]^2\, dx.$$

Однако каких-либо точных утверждений об асимптотическом поведении ω_n^2 приведено не было. (Историю вопроса, а также современное состояние всей этой проблематики см. в комментарии Э.В. Хмаладзе [Б$_{\mathrm{Iкн}}$-49, с. 514–520] к обсуждаемой работе Колмогорова [Б$_{\mathrm{I}}$-43].)

Из результата Колмогорова (24) с очевидностью следует, что $D_n = \sup_x |F(x;\xi) - F(x)| \longrightarrow 0$ *по вероятности*. Интересно отметить, что в том же четвертом томе журнала "Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari" за 1933 год, где опубликована статья А.Н. Колмогорова, были опубликованы и две известные в математической статистике работы В.С. Гливенко [ДС-26] и Ф. Кантелли [ДС-44], имеющие одинаковое название: "Sulla determinazione empirica delle leggi di probabilità", в которых доказана

сходимость $D_n \to 0$ уже и *с вероятностью единица* (Кантелли — для непрерывных функций $F = F(x)$ и Гливенко — в общем случае). Позднее, в 1944 году Н.В. Смирнов в работе [ДС-106] и в 1956 году А. Дворецкий, Дж. Кифер и Дж. Волфовитц в [ДС-28] показали, что для статистики Колмогорова D_n справедливо неравенство

$$\mathsf{P}(D_n > d) \le ce^{-2nd^2}, \qquad d > 0, \quad n \ge 1,$$

из которого, в силу леммы Бореля—Кантелли, в свою очередь, вытекает, что $D_n \to 0$ с вероятностью единица.

В 1936—1937 годах А.Н. Колмогоров предпринимает для случая цепей Маркова со *счетным* множеством возможных состояний широкое исследование асимптотического поведения вероятностей перехода из одного состояния в другое при неограниченно возрастающем числе шагов. Проведенная им классификация марковских цепей по *алгебраическим свойствам* вероятностей $p_{ij}^{(n)}$ перехода из состояния i в состояние j за n шагов (несущественные и существенные состояния, неразложимые классы, циклические подклассы, ...), а также классификация по *асимптотическим свойствам* вероятностей $p_{ij}^{(n)}$ (возвратность, невозвратность, нулевые и положительные состояния, ...) и по сей день остаются блестящим образцом исследования поведения такого, сложного, несмотря на дискретность времени, стохастического объекта, каким является цепь Маркова со *счетным* множеством состояний.

Исключительная широта научных интересов Андрея Николаевича проявляется и в его более "прикладных" работах, где вероятностные рассмотрения применяются к задачам биологии, генетики, физики, геологии, ...

Так, в работе "К решению одной биологической задачи" [Б$_{\mathrm{I}}$-76], он указывает асимптотику вероятности вырождения потомства с ростом числа поколений.

В проходившей осенью 1939 года, как пишет А.Н., *"дискуссии по вопросам генетики много внимания уделялось вопросу проверки состоятельности законов Менделя"*. В своей работе "Об одном новом подтверждении законов Менделя" [Б$_{\mathrm{I}}$-83], опубликованной в "Докладах АН СССР", Колмогоров, анализируя статистический материал, собранный Н.И. Ермолаевой (журнал "Яровизация", 1939, т. 2 (23), с. 79—86), и сделанные ею выводы, замечает: *"Материал этот, вопреки мнению самой Н.И. Ермолаевой, оказывается блестящим новым подтверждением законов Менделя"*.

В работе "К статистической теории кристаллизации металлов" [Б$_{\mathrm{I}}$-70] А.Н. Колмогоров дает при довольно общих предположениях строгое

решение задачи о скорости течения процесса кристаллизации, отмечая, что *"для металлургии имеет существенное значение изучение процесса роста кристаллов при случайном образовании центров кристаллизации"* и что *"известные затруднения представляет при этом учет столкновений зерен кристаллического вещества, возникающих вокруг отдельных центров кристаллизации"*. Указанные А.Н. Колмогоровым в этой работе формулы для вероятности включения данной точки в закристаллизовавшуюся массу (формула (3)), а также число центров кристаллизации (формулы (6) и (6-а)) и поныне являются фундаментальными в общей теории кристаллизации металлов.

В 1933 году в физическом журнале "Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion" выходит статья А.Н. Колмогорова и М.А. Леонтовича "К вычислению средней броуновской площади" [Б$_{\mathrm{I}}$-39], в которой решается поставленная С.И. Вавиловым задача о том, каково математическое ожидание $\mathsf{E}S_t$ площади S_t, заметаемой за время t кругом радиуса ρ, центр которого движется на плоскости, как броуновская частица.

Если ограничиться лишь главным членом, то полученная в статье формула для $\mathsf{E}S_t$ будет иметь вид

$$\mathsf{E}S_t \sim \frac{4\pi Dt}{\ln(1,26\,Dt\rho^{-2})} \qquad (Dt\rho^{-2} \gg 1),$$

где D — коэффициент диффузии.

Путь решения этой задачи теснейшим образом связан с колмогоровскими "Аналитическими методами" и состоит в следующем.

Пусть $P_L(x,y;t)$ обозначает вероятность того, что броуновская частица, находящаяся в начальный момент в точке (x,y), за время t хотя бы один раз пересечет границу Γ области G, содержащей точку (x,y), притом так, что первое пересечение придется на заданную часть L всей границы Γ. Тогда $P_L(x,y;t)$ удовлетворяет *первому уравнению Колмогорова* (17) с условиями: $P_L(x,y;0)=0$, если $(x,y)\in G$, $P_L(x,y;t)\to 1$ при любом $t>0$, когда (x,y) стремится к какой-либо точке части L границы Γ, и $P_L(x,y;t)\to 0$, если $t>0$ и точка (x,y) стремится к точке из $\Gamma\setminus L$. Эти условия однозначно определяют функцию $P_L(x,y;t)$, что и дает возможность ее найти. (Одновременно подобный же метод был предложен Л.С. Понтрягиным, А.А. Андроновым, А.А. Виттом в работе "О статистическом рассмотрении динамических систем" [ДС-87].)

Небольшая заметка А.Н. Колмогорова 1934 года "Случайные движения" [Б$_{\mathrm{I}}$-50] имеет подзаголовок "К теории броуновского движения" и посвящена живо интересовавшему тогда физиков вопросу общего описания *броуновского движения с инерцией*. В теории А. Эйнштейна и М. Смолуховского (см. сборник работ [ДС-140]) при исследовании движения

броуновской частицы ее энергия не принималась во внимание и, таким образом, частица не имела конечной скорости.

В 1930 году Л. Орнштейн и Дж. Уленбек занимались уточнениями теории броуновского движения с учетом инерции. В этой уточненной теории траектории движения частицы уже были дифференцируемыми (правда, с бесконечным ускорением).

Колмогоров рассматривает этот круг вопросов в общей ситуации, предполагая, что состояние исследуемой системы описывается $2n$ координатами $q = (q_1, \dots, q_n)$, $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$, для которых определена плотность вероятности $G(t, q, \dot{q}; t', q', \dot{q}')$, $t < t'$, и, в духе и на основе своих "Аналитических методов", показывает, что эта плотность удовлетворяет соответствующему прямому уравнению (уравнению типа Фоккера—Планка; в [Б$_{\mathrm{I}}$-50] — это уравнение (9)), являющемуся вырожденным уравнением параболического типа. (Математическая теория таких уравнений затем развивалась Н.С. Пискуновым.)

К циклу работ А.Н. Колмогорова по теории броуновского движения относится и его статья [Б$_{\mathrm{I}}$-71], законченная в 1936 году, касающаяся общих вопросов *обратимости* статистических законов природы.

Суть рассматриваемой проблемы заключается в следующем. В термодинамическом понимании броуновское движение является необратимым в том смысле, что при наличии большого числа диффундирующих частиц с ростом времени происходит, так сказать, "выравнивание" распределения вероятностей, описывающего положение частиц. При убывании же времени происходит, наоборот, увеличение "неоднородности" этого распределения. Видимо, Шрёдингер [ДС-135] был первым, кто обратил внимание на то, что диффузионный процесс будет, тем не менее, обладать определенной *обратимостью*, если, рассматривая поведение процесса на некотором временно́м интервале, *фиксировать* распределения вероятностей как в начальный, так и в конечный момент этого интервала.

В своей работе [Б$_{\mathrm{I}}$-71] 1937 года А.Н. Колмогоров в очень общей ситуации n-мерного диффузионного марковского процесса дает необходимые и достаточные условия *статистической обратимости*.

К исследованиям А.Н. Колмогорова по теории броуновского движения и диффузионных процессов следует отнести и его совместную с И.Г. Петровским и Н.С. Пискуновым ("КПП") работу 1937 года "Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме" [Б$_{\mathrm{I}}$-69], которая впервые устанавливала существование *волновых* решений у параболических уравнений и сходимость к ним при $t \to \infty$ решений задачи Коши.

Рассматриваемое уравнение диффузии имеет вид ($k > 0$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(u), \tag{25}$$

где $F = F(u)$ — достаточно гладкая функция, определенная на $[0,1]$ и удовлетворяющая условиям: $F(0) = F(1) = 0$, $F(u) > 0$ при $0 < u < 1$ и $F'(0) = \alpha > 0$, $F'(u) < \alpha$ при $0 < u \leq 1$.

Ищется решение $u = u(x,t)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $u(x,0) = f(x)$, где $f(x)$ — некоторая функция такая, что

$$0 < f(x) < 1 \text{ при } a < x < b \quad \text{и} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1, & x > b. \end{cases} \tag{26}$$

В работе показывается, что уравнение (25) имеет инвариантные решения типа *бегущей волны*, т. е. решения вида

$$u(x,t) = W(x + \lambda t + c), \tag{27}$$

удовлетворяющие условиям $W(\infty,t) = 1$, $W(-\infty,t) = 0$ при любом $\lambda \geq \sqrt{2k\alpha}$. При этом *задача Коши* (25)–(26) имеет решение, сходящееся при $t \to \infty$ к решению типа *бегущей волны* с $\lambda = \lambda_0$ и некоторой единственным образом определяемой константой c.

В комментариях Г.И. Баренблатта [$\text{Б}_{\text{Iкн}}$-48, с. 416–420] и А.И. Вольперта [ДС-85, с. 333–358] довольно подробно описано состояние исследований в математической физике (в частности, в теории горения), начало которой было положено “КПП”-работой. (А.Н. Колмогоров не раз обращался и к статистическим, и к динамическим проблемам биологии. Идея “КПП”-работы возникла у него из желания понять динамику распространения биологических видов при наличии миграции и диффузии.)

Совсем небольшая заметка А.Н. Колмогорова 1935 года “Преобразование Лапласа в линейных пространствах” [Б_{I}-52] явилась первой работой, в которой было дано определение *характеристического функционала вероятностной меры* в банаховых пространствах, иначе говоря, дано обобщение понятия характеристической функции на *бесконечномерный* случай. В этой заметке Колмогоров дает также определения нормальных распределений и моментных форм n-го порядка и отмечает возможности обобщения на линейные пространства центральной предельной теоремы и важность введенных понятий для построения нелинейной квантовой теории: *“если бы мы хотели создать нелинейную квантовую теорию, было бы необходимо рассматривать сами распределения или их характеристические функции, или, наконец, всю совокупность моментов”*.

Значительно позднее к понятию характеристического функционала приходят Л. Ле Кам (1947 г.) и Э. Мурье (1950, 1953 гг.). Состояние этой проблематики на середину восьмидесятых годов XX века отражено в монографии Н.Н. Вахании, В.И. Тариеладзе и С.А. Чобаняна “Вероятностные распределения в банаховых пространствах” [ДС-17].

Отметим еще раз, что тридцатые годы явились для А.Н. Колмогорова удивительно плодотворными. В самом деле,

1931 г. — опубликовано 5 работ,	1936 г. — 17 (!),
1932 г. — 6,	1937 г. — 9,
1933 г. — 9,	1938 г. — 16 (!)
1934 г. — снова 9,	и
1935 г. — 4,	1939 г. — 5 работ

— что составляет 80 работ за девять лет! Если при этом вспомнить, что в 1933 году вышли "Основные понятия теории вероятностей", в 1936 году — перевод этой монографии на русский язык, в 1932 году — первое, в 1933 году второе и в 1938 году третье издание совместного с П.С. Александровым учебника "Введение в теорию функций действительного переменного" [$Б_{Iкн}$-1]–[$Б_{Iкн}$-3], а в 1939 году — также совместный с Александровым школьный учебник "Алгебра" [$Б_V$-1], в такие возможности одного человека просто невозможно поверить!

Остановимся еще на некоторых работах А.Н. Колмогорова тридцатых годов. В 1937 году выходит на немецком языке, а в 1938 году — на русском — работа "Упрощенное доказательство эргодической теоремы Биркгофа–Хинчина" [$Б_I$-73, $Б_I$-74]. Затем Андрей Николаевич совместно с И.М. Гельфандом завершает работу "О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах" [$Б_I$-79], в которой выясняется, что в достаточно общей ситуации уже чисто алгебраическая структура кольца непрерывных функций, заданных на топологическом пространстве с достаточно "хорошей" топологией, определяет (с точностью до гомеоморфизма) само это топологическое пространство.

В 1939 году выходит работа "О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале" [$Б_I$-78], которая берет истоки в работах Э. Ландау и Ж. Адамара. Формулировка результата, полученного А.Н. Колмогоровым в этой работе, такова.

Рассматривается функция $f = f(x)$ на действительной прямой. Пусть $M_k(f) = \sup_x |f^{(k)}(x)|$, $k = 0, 1, \dots, n$. Тогда справедливо следующее утверждение:

Для того чтобы тройке положительных чисел M_0, M_k, M_n $(0 < k < n)$ соответствовала функция $f(x)$, для которой

$$M_0 = M_0(f), \qquad M_k = M_k(f), \qquad M_n = M_n(f),$$

необходимо и достаточно соблюдение условия

$$M_k \le C_{nk} M_0^{(n-k)/n} M_n^{k/n},$$

где C_{nk} *— указываемые константы* ([$Б_I$-78, теорема I]).

В комментариях В.М. Тихомирова и Г.Г. Магарил-Ильяева [$Б_{Iкн}$-47, с. 387–390] можно найти обзор последующих работ, развивающих этот результат А.Н. Колмогорова. В.И. Арнольд не раз подчеркивал, что из этих неравенств можно вывести многие результаты теории оптимального регулирования динамическими системами.

Тем временем, в жизни Колмогорова и Павла Сергеевича Александрова в середине тридцатых годов происходит очень важное для них обоих событие. Как пишет Андрей Николаевич,

" ... по возвращении из путешествия по Волге и на Кавказ, осенью 1929 года мы с П.С. решили поселиться вместе где-либо под Москвой. Той же осенью мы сняли трехкомнатную половину дома в поселке Клязьма, где и поселились вместе с моей теткой Верой Яковлевной. В.Я. в то время было уже 66 лет, но она еще была способна вести наше хозяйство.

П.С. Александров и А.Н.Колмогоров на отдыхе

В 1931 году мы переселились в том же поселке на дачу брата П.С. — известного хирурга Михаила Сергеевича Александрова. Здесь мы зимой занимали всю дачу, летом же, чтобы освободить место хозяевам, мы с П.С. переселялись в мансарду. На примыкавшем к мансарде балконе мы любили оставаться спать под звездами до поздней осени. По утрам мы бегали купаться на речку Учу

вплоть до ее замерзания. Зимой в нашу утреннюю зарядку входила пробежка в одних трусах и босиком вокруг нашего квартала.

Но к 1935 году вполне назрела потребность иметь свой вполне благоустроенный дом. Решение этой задачи явилось неожиданно. Ранней весной 1935 года во время лыжной прогулки мы увидели на краю поля довольно большой белый дом и в один голос сказали друг другу: "Как было бы хорошо, если бы этот дом продавался!" Чудесным образом оказалось, что этот дом, принадлежавший Анне Сергеевне Штеккер — сестре Константина Сергеевича Станиславского, — действительно продавался. Продавался не один белый дом, а целое владение, содержащее кроме белого дома еще один бревенчатый дом и сарай, могущий быть переделанным в дом. Сын Анны Сергеевны, Георгий Андреевич Штеккер, искусно соорудил коллектив покупателей, и в результате совершенной сделки мы с П.С. сделались владельцами (совместно с художником Владимиром Ивановичем Козлинским) большей части белого дома" ⟨в деревне Комаровка, ныне ул. Комаровка в поселке Первомайский, г. Королёв Московской области. — *А.Ш.*⟩.

Добавим некоторые подробности к этим воспоминаниям Андрея Николаевича.

Говоря о возникшем у них с Павлом Сергеевичем осенью 1929 года решении поселиться вместе где-нибудь под Москвой, Андрей Николаевич умалчивает, что в самой Москве не только у молодого сотрудника Института математики Московского университета, каковым в этом 1929 году стал Колмогоров, но и у его старшего не только по возрасту, но и по положению в Университете друга и учителя профессора П.С. Александрова никакого своего жилья не было. Павел Сергеевич со времени гибели своего ближайшего друга Павла Самуиловича Урысона занимал принадлежавшую раньше Урысону комнату в квартире его сестры Лины Самуиловны Нейман в Старопименовском переулке, где кроме нее жил еще ее взрослый племянник. Андрей Николаевич ютился в одной комнате с воспитавшей его шестидесятишестилетней Верой Яковлевной в Трубниковском переулке (в районе Пречистенки). Так что, в решении создать такую математическую "коммуну" была у обоих и насущная необходимость обрести свою крышу над головой.

Два слова из истории Комаровки. В газете "Маяк" (выходит в г. Пушкино Московской области) за 8 марта 1989 г. читаем: "405 лет назад впервые в Писцовой книге Московского государства 1584 года упоминается "деревня Комаровка на реке Клязьма, да под тою деревнею мельница мелет в одни жернова, пашни переложной середней земли 42 четьи с осьминой в поле, а дву потомуж, сена 300 копен" — вотчина Троице-Сергиева монастыря до 1764 года. В 1852 г. Комаровка значится во втором стане Московского уезда, в ней 6 дворов, и проживало 69 человек".

Об истории же покупки "белого дома" в этой деревне Комаровка, на той же Клязьме, в которой они купались, живя в семейном доме Александровых, можно прочесть в письмах А.Н. и П.С., которые составляют второй том нашего издания. Скажем здесь только, что коллектив покупателей "искусно соорудил", в сущности, не А.Г. Штеккер, а сам Павел Сергеевич, огромную энергию которого, вообще ему присущую, питало такое же огромное желание поселиться в этом доме.

Устройство этого коллектива (П.С. называет его *кооперативом покупщиков*) было довольно сложное и даже запутанное. Андрей Николаевич упоминает, кроме них с Павлом Сергеевичем, только В.И. Козлинского. На самом же деле, покупщиков было, по крайней мере на первых порах, значительно больше (в том числе, сохранил за собою часть владения и Г.А. Штеккер). Сохранились кальки планов дома и участка с разделительными линиями, указывающими владения разных лиц, право на подход и пользование общими "коммуникациями", вроде колодца, и т. п. Достояния владельцев почему-то исчислялись в сорок шестых долях, и прошло много лет, прежде чем по окончательному договору (1953 года) все владение перешло к А.Н. Колмогорову (27/46) и П.С. Александрову (19/46).

После кончины Павла Сергеевича в 1982 году его доля перешла к его наследникам, указанным в завещании. Андрей Николаевич скончался в 1987 году, и тогда доля Александрова по желанию этих наследников и настоятельной просьбе Анны Дмитриевны, вдовы А.Н. Колмогорова, была выкуплена А.Н. Ширяевым, которому Анна Дмитриевна затем передала и колмогоровскую часть с выражением пожелания хранить и поддерживать дом в надлежащем "мемориальном" состоянии.

Комаровский дом (осень 2002 г.)

В “Воспоминаниях о П.С. Александрове” [Бvi-88] Андрей Николаевич пишет:

“Этот “дом в Комаровке” удовлетворял всем нашим потребностям, давая возможность разместить большую библиотеку и помещать в отдельных комнатах наших гостей — на несколько дней и даже на более длительное время.

В конце тридцатых годов установился удовлетворяющий нас обоих распорядок. Как правило, из семи дней недели мы проводили 4 дня в Комаровке, один их которых полностью посвящали физкультурному отдыху — лыжам, гребле, большим пешеходным экскурсиям (протяженность длительных лыжных походов была в среднем около тридцати и доходила до пятидесяти километров; в солнечные мартовские дни мы проводили на лыжах в одних трусах до 4 часов подряд). В остальные дни обязательной была утренняя зарядка, дополнявшаяся зимой еще бегом на лыжах до 10 км. Мы никогда не были моржами, купающимися круглый год ежедневно — мы купались по произволу, когда захочется. Особенно мы любили плавать в только что вскрывшихся реках, еще посреди сугробов по берегам ... Заплывы в ледяной воде я делал только очень маленькие, а Павел Сергеевич — значительно более длинные. Но зато бегал на лыжах в раздетом виде на значительно большие расстояния — я.

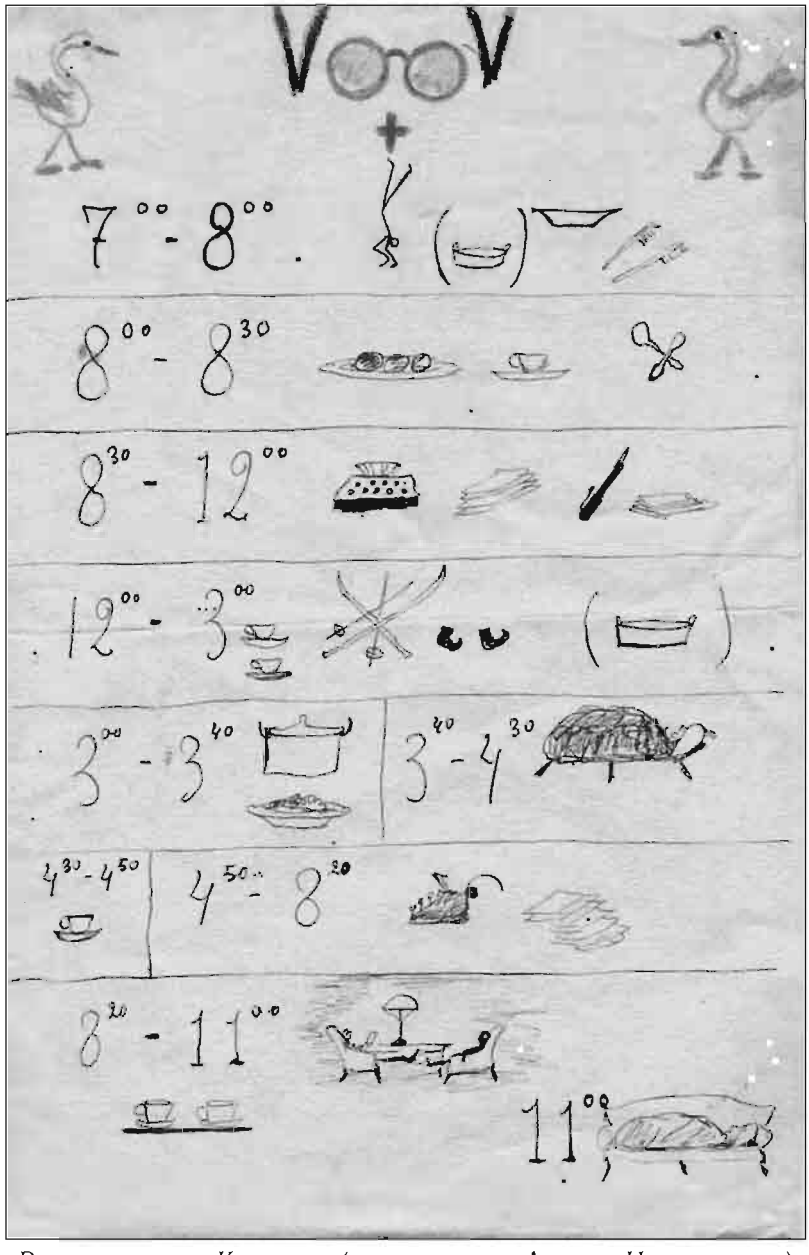
Библиотека—музыкальная комната в Комаровском доме (2002 г.)

Одним из любимых способов организации лыжных пробегов был такой. Мы приглашали математическую молодежь, скажем, в Калистово (станция Северной железной дороги дальше от Москвы еще примерно на 30–35 км. — А.Ш.) *и оттуда начинали двигаться в направлении Комаровки. Некоторые, не добравшись до Комаровки, садились в автобус и уезжали домой. Добравшимся предлагался душ, по желанию, валяние в снегу и затем — обед. В период расцвета Комаровского дома число гостей за обеденным столом после лыжного бега достигало 15 человек”.*

(Мне не раз доводилось самому участвовать и в таких пробегах, и в таких обедах. Судя по тому, что за столом бывало и более 15 человек, “периодом

расцвета Комаровского дома" еще, во всяком случае, оставались шестидесятые годы и начало семидесятых.)

Что касается "распорядка" комаровской жизни, то о нем можно судить по рисунку, сделанному когда-то Андреем Николаевичем.



Распорядок дня в Комаровке (рисунок сделан Андреем Николаевичем)

“Весь этот распорядок нарушался в двух случаях: а) *когда научные поиски становились азартными и требовали неограниченного времени и* б) *в солнечные мартовские дни, когда лыжные прогулки делались единственным занятием”*.

Отметим в нескольких словах и этапы, так сказать, “служебного” роста А.Н. Колмогорова в тридцатые годы. Мы знаем, что вступил он в это десятилетие начинающим сотрудником Научно-исследовательского института математики и механики Московского университета, аспирантуру которого только что окончил. Уже в следующем, 1930 году решением Государственного Ученого Совета Народного Комиссариата Просвещения РСФСР он утвержден в ученом звании профессора по кафедре математики (Аттестат ПР № 014075). В марте 1931 года Андрей Николаевич занимает должность профессора НИИ математики и механики, а 1 декабря 1933 года А.Н. Колмогоров, в возрасте тридцати с половиной лет, становится директором этого института (он был в этой должности до середины 1939 года и еще короткий период в начале пятидесятых годов).

В 1935 году решением квалификационной комиссии Наркомпроса СССР Колмогорову присуждается (без защиты диссертации) ученая степень доктора физико-математических наук (Диплом ДТ № 000038). (Тогда, как мы видим, профессорское звание могло опережать докторскую степень.)

На Втором Всесоюзном математическом съезде в 1934 году в Ленинграде принимается решение о создании нового математического журнала “Успехи математических наук”. (С момента основания в 1936 году и по 1946 год журнал выходил отдельными выпусками, а с 1946 года — уже как периодическое издание.) С самого первого номера и по день своей кончины Андрей Николаевич являлся бессменным членом редакционной коллегии журнала, а с 1946 по 1955 год и с 1983 по 1987 — его главным редактором.

И, наконец, 29 января 1939 года, т. е. всего через 10 лет после окончания аспирантуры, на общем собрании Академии наук А.Н. Колмогорова избирают действительным членом (академиком) АН СССР. И тут же — членом Президиума Академии и академиком-секретарем Отделения Физико-математических наук (на этом посту он пробыл до 1942 года).

В 1938 году Андрей Николаевич, параллельно с работой в Университете, становится заведующим Отделом теории вероятностей Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР, в этой должности он пробыл 20 лет — до 1958 года. Но об этом — впереди.

Сороковые годы (1940–1949)

К концу тридцатых – началу сороковых годов относятся исключительные по своей идейной значимости, фундаментальности концепций и разнообразию возможных применений работы А.Н. Колмогорова по **теории случайных процессов со стационарными приращениями**, **теории случайных функций многих переменных (случайных полей)** и связанной с ними **теории локально изотропной турбулентности**.

Сам Андрей Николаевич отмечал [$Б_{Iкн}$-49, с. 473], что его *"интерес к спектральной теории стационарных случайных процессов возник в связи с работами А.Я. Хинчина и Е.Е. Слуцкого"*, которые занимались этой тематикой еще в начале тридцатых годов. В 1947 году Андрей Николаевич делает на Общем собрании АН СССР доклад *"Статистическая теория колебаний с непрерывным спектром"* [$Б_I$-105], в котором, в частности, подчеркивает принципиальную важность обращения к интегралам Стилтьеса с целью получения общего представления стационарных колебательных процессов, включающих и почти периодические колебания, и колебания с непрерывным спектром. В комментарии А.М. Яглома [$Б_{Iкн}$-49, с. 491–496] этот доклад охарактеризован как "первый в мире популярный обзор спектральной теории стационарных случайных процессов — одного из важнейших разделов математической теории случайных функций, разработанного лишь незадолго до того (при активном участии самого А.Н. Колмогорова) и в то же время мало кому известного за пределами узкого круга специалистов". (В этом комментарии читатель может найти и подробную историко-библиографическую справку по спектральной теории случайных процессов; см. также [ДС-32], [ДС-47], [ДС-96], [ДС-97], [ДС-144].)

Но между первыми работами А.Н. Колмогорова по теории случайных процессов со стационарными приращениями и теории случайных полей и этим докладом на Общем собрании Академии наук 1947 года пролегла война ... Множество тяжелых, а часто и трагических событий в судьбах близких людей, выезд с Математическим институтом в эвакуацию в Казань, возвращение в Москву к обязанностям академика-секретаря Физико-математического отделения Академии и оборонным работам, тяжкие хлопоты о каждодневном быте ... И совсем другое, радостное событие — женитьба в начале сентября 1942 года на подруге школьных лет Анне Дмитриевне Егоровой, обретение ее 15-летнего сына, — обо всем этом читатель узнает из *"Казанских писем"* Андрея Николаевича и Павла Сергеевича друг другу и из "Дневника", который А.Н. начал вести к своему сорокалетию в 1943 году.

Здесь же, в нашем очерке, мы сосредотачиваем свое внимание на творчестве Андрея Николаевича, которое не прерывалось никакими внешними — самыми тяжелыми и самыми радостными — событиями ...

В работах “Кривые в гильбертовском пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений” [Б$_{\mathrm{I}}$-81] и “Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовском пространстве” [Б$_{\mathrm{I}}$-82], опубликованных в 1940 году, речь идет о случайных процессах $\xi = (\xi_t)_{-\infty<t<\infty}$ *со стационарными приращениями* и их различных подклассах (в том числе и о *стационарных в широком смысле* процессах, *винеровском* процессе и др.) с точки зрения структуры их *корреляционной* функции (“L^2-теория”)

$$B_\xi(\tau_1, \tau_2) = \mathsf{E}[\xi_{t+\tau_1} - \xi_t]\overline{[\xi_{t+\tau_2} - \xi_t]}$$

(см. теорему 2 в [Б$_{\mathrm{I}}$-81]) и о возможности спектрального представления самого процесса $\xi = (\xi_t)_{-\infty<t<\infty}$, которое (теорема 3 там же) Колмогоров дает в виде

$$\xi_t = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\lambda t} - 1)\, \Phi(d\lambda) + x_0 + x_1 t. \tag{28}$$

Если рассматриваемый (непрерывный в среднем квадратическом) процесс $\xi = (\xi_t)_{-\infty<t<\infty}$ оказывается, к тому же, не только имеющим *стационарные приращения*, но и просто *стационарным*, то тогда $x_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(d\lambda)$, $x_1 = 0$, и из (28) легко получить для $\xi = (\xi_t)$ его *спектральное представление* в виде интеграла Лебега—Стилтьеса

$$\xi_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, \Phi(d\lambda) \tag{29}$$

по случайной мере $\Phi(\Delta)$ с ортогональными значениями ($\mathsf{E}\Phi(\Delta_1)\overline{\Phi(\Delta_2)} = 0$, $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing$), открытое независимо в работах Г. Крамера (1942 г., [ДС-49]) и Г. Маруямы (1949 г., [ДС-69]). См. также работы М. Лоэва [ДС-64], А. Блан-Лапьера и Р. Форте [ДС-11], посвященные общим “гармонизуемым” случайным процессам.

Работа [Б$_{\mathrm{I}}$-82] (“Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве”) непосредственно примыкает к [Б$_{\mathrm{I}}$-81] и посвящена некоторым частным случаям процессов $\xi = (\xi_t)_{-\infty<t<\infty}$ со стационарными приращениями. В сущности, в этой работе А.Н. Колмогоров рассматривает процессы ξ, которые обладают свойством *автомодельности*, что означает, что при любом $k \neq 0$ существует такое преобразование подобия A_k, что при всех t

$$\xi_{kt} = A_k \xi_t.$$

Оказалось, что для таких процессов их “структурная” функция $B_\xi(\tau_1, \tau_2)$ может быть представлена в виде

$$B_\xi(\tau_1, \tau_2) = c[|\tau_1|^\gamma + |\tau_2|^\gamma - |\tau_1 - \tau_2|^\gamma], \tag{30}$$

где c и γ — действительные константы, удовлетворяющие неравенствам $c \geq 0, 0 < \gamma \leq 2$.

Отметим, что исследованию таких случайных процессов ξ, обладающих свойствами автомодельности, посвящено большое число работ, связанных с применениями, например, в статистической физике (см. [ДС-104]). Вместо термина "спираль Винера" за процессом $\xi = (\xi_t)_{-\infty<t<\infty}$ со структурной функцией (30) закрепился со временем другой термин — *фрактальное* или *дробное* броуновское движение. (См. [ДС-65], [ДС-134].)

Вслед за этими работами по процессам со стационарными приращениями выходят классические работы А.Н. Колмогорова по стационарным (в широком смысле) случайным процессам, в которых он, как и в [$Б_I$-81] и [$Б_I$-82], широко пользуется техникой гильбертова пространства. Например, в работе 1941 года "Стационарные последовательности в гильбертовском пространстве" [$Б_I$-84] были введены новые понятия (*подчиненности*, *регулярности*, *сингулярности* и *минимальности* стационарных последовательностей), послужившие источником многочисленных последующих исследований для векторных процессов с непрерывным временем. (Подробнее см. [ДС-96], [ДС-97].)

Понятие *подчиненности* стационарной последовательности $\eta = (\eta_n)$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, другой стационарной последовательности $\xi = (\xi_n)$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, означает, что эти последовательности стационарно связаны и замкнутое линейное подпространство $H(\xi)$, порожденное элементами ξ_n, $n = 0, \pm 1, \ldots$, содержит все элементы η_n, $n = 0, \pm 1, \ldots$ Неожиданный результат, обнаруженный здесь А.Н. Колмогоровым, состоит в том, что эта подчиненность может быть выражена в чисто спектральных терминах.

Именно, последовательность η подчинена ξ тогда и только тогда, когда существует такая функция $\varphi(\lambda) \in L^2(F_{\xi\xi})$, что спектральные функции $F_{\eta\eta}(\lambda)$ и $F_{\xi\eta}(\lambda)$, участвующие в представлении ковариационных функций

$$B_{\eta\eta}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}\, dF_{\eta\eta}(\lambda), \qquad B_{\xi\eta}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}\, dF_{\xi\eta}(\lambda),$$

таковы, что

$$F_{\eta\eta}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} |\varphi(u)|^2\, dF_{\xi\xi}(\lambda), \qquad F_{\xi\eta}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \varphi(u)\, dF_{\xi\xi}(\lambda)$$

с $F_{\xi\xi}(\lambda)$ из представления

$$B_{\xi\xi}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}\, dF_{\xi\xi}(\lambda) \qquad (B_{\xi\eta}(n) = \mathsf{E}\xi_{n+k}\overline{\eta}_k).$$

Свойство *сингулярности* (говорят еще — *детерминированности*) последовательности $\xi = (\xi_n)$, $\mathsf{E}\xi_n = 0$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, состоит в том, что

пространство $H(\xi)$ совпадает с $H_{-\infty}(\xi) = \bigcap_n H_n(\xi)$, где $H_n(\xi)$ — замкнутое линейное многообразие, порожденное величинами ξ_k, $k \le n$.

Свойство же *регулярности* (*чистой недетерминированности*) означает, что пространство $H_{-\infty}(\xi)$ тривиально.

Привлекая результаты о граничных свойствах функций, аналитических в круге, А.Н. Колмогоров получает следующий красивый и теперь широко известный результат:

Для того чтобы невырожденная стационарная последовательность ξ была регулярна, необходимо и достаточно, чтобы спектральная функция $F_{\xi\xi}(\lambda)$ имела плотность $f_{\xi\xi}(\lambda)$, притом такую, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln f_{\xi\xi}(\lambda)\, d\lambda > -\infty. \tag{31}$$

Данное А.Н. Колмогоровым определение *минимальности* последовательности ξ предполагает, что пространство $\widehat{H}(\xi)$ — минимальное линейное замкнутое подпространство, порожденное всеми ξ_n при $n \ne 0$, — не совпадает с пространством $H(\xi)$ — минимальным линейным замкнутым подпространством, порожденным всеми ξ_n, $n = 0, \pm 1, \ldots$

А.Н. Колмогоров показывает, что

стационарная последовательность ξ минимальна в том и только том случае, когда существует спектральная плотность $f_{\xi\xi}(\lambda)$ такая, что $f_{\xi\xi}(\lambda) > 0$ почти всюду по мере Лебега и

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{f_{\xi\xi}(\lambda)} < \infty. \tag{32}$$

К тому же, если эти условия выполнены, то

$$d_{\xi_0} \equiv \inf_{\widehat{\xi}_0 \in \widehat{H}(\xi)} \mathsf{E}[\xi_0 - \hat{\xi}_0]^2 = (2\pi)^2 \Big[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{f_{\xi\xi}(\lambda)} \Big]^{-1}. \tag{33}$$

К работе [Б$_{\mathrm{I}}$-84] самым тесным образом примыкает (и продолжает ее) работа “Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей” [Б$_{\mathrm{I}}$-85], в предисловии к которой Андрей Николаевич пишет, что в ней *“устанавливаются спектральные условия для возможности экстраполировать и интерполировать стационарные случайные последовательности по достаточно большому числу членов с любой заданной точностью”*.

В этой работе А.Н. Колмогоровым не только дана строгая постановка задач *экстраполяции* и *интерполяции* (действительных) случайных последовательностей, но и получены первые результаты относительно величин погрешностей в таких задачах.

Обозначая

$$\sigma_E^2(n,m) = \inf_{(a_1,\dots,a_n)} \mathsf{E}[\xi_{t+m} - \tilde{\xi}_{[t-1,\dots,t-n]}]^2$$

минимально возможную *ошибку экстраполяции* значения ξ_{t+m}, $m \geq 0$, по значениям $\tilde{\xi}_{[t-1,\dots,t-n]}$ вида $a_1\xi_{t-1} + \dots + a_n\xi_{t-n}$, $n > 0$, и полагая $\sigma_E^2(m) = \lim_{n\to\infty} \sigma_E^2(n,m)$, А.Н. Колмогоров получает *явную формулу* для $\sigma_E^2(m)$, выраженную в спектральных терминах. При этом он показывает, что если $\int_0^\pi \ln f_{\xi\xi}(\lambda)\,d\lambda = -\infty$, то ошибка предсказания $\sigma_E^2(m) = 0$ для всех $m \geq 0$. В случае же регулярных последовательностей, когда интеграл $\int_0^\pi \ln f_{\xi\xi}(\lambda)\,d\lambda$ конечен, А.Н. Колмогоров дает явную формулу для ошибки $\sigma_E^2(m)$ (теорема 2 в [Б$_{\mathrm{I}}$-85]).

В задаче интерполяции А.Н. Колмогоров вводит величину

$$\sigma_I^2(n) = \inf \mathsf{E}[\xi_t - \hat{\xi}_{[t-n,t+n]}]^2$$

— минимально возможную *ошибку интерполяции* значения ξ_t по значениям вида

$$\hat{\xi}_{[t-n,t+n]} = \sum_{k=\pm1,\dots,\pm n} a_k\xi_{t+k},$$

и для $\sigma_I^2 = \lim_{n\to\infty} \sigma_I^2(n)$ устанавливает, что если интеграл $R = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\lambda}{f_{\xi\xi}(\lambda)}$ равен $+\infty$, то $\sigma_I^2 = 0$, а если $R < \infty$, то $\sigma_I^2 = R^{-1}$ (теорема 3 в [Б$_{\mathrm{I}}$-85]).

Эти результаты А.Н. Колмогорова вместе с известными результатами Н. Винера [ДС-18] создали в теории случайных процессов целое направление исследований с широкими приложениями и в науке, и в технике.

А.Г. Курош, Н.А. Глаголев, А.Н. Колмогоров, И.Г. Петровский, Л.С. Понтрягин (1940 г.)

Трудно переоценить, в сущности, чисто физические работы А.Н. Колмогорова по ***турбулентности***, послужившие основой всего дальнейшего развития теории локальной структуры турбулентных движений и ее приложений. Комментируя ([$Б_{Iкн}$-48, с. 421]) свои работы в этой области начала сороковых годов, Андрей Николаевич, спустя более чем сорок лет, писал:

"Интерес к изучению турбулентных потоков жидкостей и газов возник у меня в конце тридцатых годов. Мне сразу стало ясно, что основным математическим аппаратом исследований призвана стать теория случайных функций многих переменных (случайных полей), которая в то время только зарождалась. Кроме того, вскоре мне стало ясно, что трудно надеяться на создание замкнутой в себе чистой теории. За отсутствием такой теории придется опираться на гипотезы, получаемые из обработки экспериментальных данных. Важно было и получить талантливых сотрудников, способных работать в таком смешанном плане, сочетая разработку теории с экспериментом.

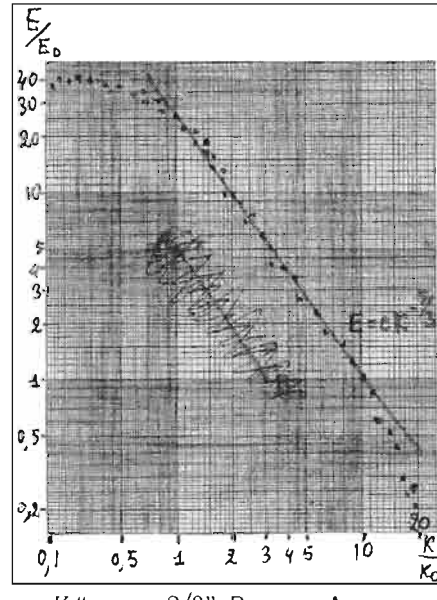
В этом последнем отношении мне повезло: А.М. Обухов, переведенный из Саратовского университета в Московский, сделался моим дипломником в 1939 году, а затем стал моим аспирантом; примерно в те же годы М.Д. Миллионщиков начал работать под моим руководством в качестве аспиранта МАИ (Московского авиационного института. — А.Ш.). *Позднее моими аспирантами стали также А.С. Монин и А.М. Яглом.*

А.М. Обухов и А.С. Монин

В 1946 году О.Ю. Шмидт предложил мне работать в качестве заведующего лабораторией турбулентности в Институте теоретической геофизики АН СССР (в 1949 г. руководство этой лабораторией перешло к А.М. Обухову). Непосредственной экспериментальной работой я не занимался, но потратил много энергии на расчетную и графическую обработку данных других исследователей".

Наличие беспорядочных пульсаций в течениях жидкости и газа (именуемое *турбулентностью*) делает мало реальным изучение индивидуальных полей турбулентных движений. Это обстоятельство определяет интерес к *статистическому* описанию этих течений, что было ясно основателю теории турбулентности О. Рейнольдсу еще в конце 19-го века. Однако предложенное им простейшее усреднение по заданному интервалу времени (или же по некоторой области пространства) оказалось не слишком удобным ввиду трудности получения достаточно простых и надежных уравнений для средних значений поля скоростей.

Колмогоров усреднение понимает в *вероятностном* смысле, т. е. как усреднение по ансамблю течений. Тем самым он предложил считать поля гидродинамических характеристик *случайными функциями пространственных и временных координат*, что является теперь общепринятым.



К "закону 2/3". Рисунок Андрея Николаевича

Глубокая физическая интуиция позволила А.Н. Колмогорову выявить общие качественные и количественные законы, определяющие вероятностно-статистический режим мелкомасштабных пульсаций локально изотропной развитой турбулентности, на основе *двух гипотез подобия*, сформулированных им в работе "Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса" [Б$_1$-87] (рукопись датирована 28 декабря 1940 года). Эти гипотезы дали возможность вывести фундаментальные количественные соотношения, имеющие характер новых законов природы, к которым прежде всего относится знаменитый колмогоровский ***закон двух третей***, утверждающий, что *средний квадрат разности скоростей в двух точках, находящихся на (не слишком малом и не слишком большом) расстоянии* r, *пропорционален* $r^{2/3}$.

Введенные А.Н. Колмогоровым в [Б$_{\mathrm{I}}$-87] *продольные* и *поперечные* структурные функции $B_{dd}(r)$ и $B_{nn}(r)$ поля скоростей многократно определялись экспериментально, и закон двух третей подтверждался на значительном интервале значений r, т. е. оказывалось, что действительно $B_{dd}(r) \sim r^{2/3}$, а $B_{nn}(r) \sim \frac{4}{3} B_{dd}(r)$. (Подробнее см. [Б$_{\mathrm{I}}$-87] и [Б$_{\mathrm{Iкн}}$-48, с. 421–433].)

В своем докладе на Международном коллоквиуме по механике турбулентности в 1961 году в Марселе [Б$_{\mathrm{I}}$-168] и [Б$_{\mathrm{I}}$-169] А.Н. Колмогоров, в развитие своих работ [Б$_{\mathrm{I}}$-87] и [Б$_{\mathrm{I}}$-89], предлагает заменить *две гипотезы подобия*, выдвинутые А.М. Обуховым в [ДС-82], двумя *уточненными* гипотезами, относящимися уже к *нормированным разностям* скоростей, дополнив их еще одной, *третьей гипотезой*, постулирующей логарифмическую нормальность распределения вероятностей осредненной по сфере радиуса r скорости диссипации энергии ε_r и линейность зависимости дисперсии $\ln \varepsilon_r$ от $\ln(L/r)$, где L — характерный масштаб длины в рассматриваемом течении.

Эти три новые гипотезы привели к уточнению закона двух третей — его новая формула $B_{dd}(r) \sim r^{2/3}(L/r)^{-k}$ уже учитывала замечание Л.Д. Ландау о необходимости принимать во внимание изменчивость диссипации энергии с возрастанием отношения L/r (подробнее см. [Б$_{\mathrm{Iкн}}$-48, с. 349, 428]).

Завершим наш небольшой обзор вклада Андрея Николаевича в теорию турбулентности заключительными строками статьи А.М. Обухова “Течение Колмогорова и его лабораторное моделирование” [ДС-83]: “Личный вклад А.Н. Колмогорова в учение о турбулентности и его идеи, относящиеся к общей теории динамических систем, являются основным ориентиром в развитии исследований сложнейшего явления природы — турбулентности — в применении к различным областям знаний”.

А.Н. Колмогоров по праву считается родоначальником и современной ***теории ветвящихся случайных процессов***. (И сам этот термин, теперь повсеместно и всеми употребляемый, был введен Андреем Николаевичем на семинаре в Московском университете, который он объявил в 1946/47 учебном году.)

Хотя отдельные задачи, связанные с простыми моделями ветвящихся процессов, рассматривались и ранее (например, Р. Фишером [ДС-113], Дж. Стеффенсеном [ДС-107], М.А. Леонтовичем [ДС-57], а также самим Колмогоровым [Б$_{\mathrm{I}}$-76]), именно с работ Андрея Николаевича с двумя его учениками — Н.А. Дмитриевым (“Ветвящиеся случайные процессы” [Б$_{\mathrm{I}}$-102]) и Б.А. Севастьяновым (“Вычисление финальных вероятностей для ветвящихся случайных процессов” [Б$_{\mathrm{I}}$-103]) — началось бурное развитие вскоре ставшего самостоятельным нового раздела теории вероятностей.

В этих работах [Б$_{\mathrm{I}}$-102] и [Б$_{\mathrm{I}}$-103] рассматриваются модели марковских ветвящихся процессов с несколькими типами частиц для случая как

дискретного, так и непрерывного времени. В последующем были введены в рассмотрение и более сложные модели, учитывающие зависимость размножения "частиц" от их возраста, положения в пространстве, энергии, и т. п.

В монографиях [ДС-102], [ДС-118], [ДС-6] помимо современного состояния теории ветвящихся случайных процессов содержится и богатый материал по разнообразным применениям этих процессов в биологии, химии, физике, технике и др. (См. также комментарий Б.А. Севастьянова [$Б_{Iкн}$-49, с. 485—486] к работам А.Н. Колмогорова в этой области.)

Уместно, пожалуй, отметить, что семинару 1946—47 годов по ветвящимся процессам предшествовал семинар 1944—1945 годов по марковским цепям, в первом объявлении о котором Андрей Николаевич указывал: *"... основная работа семинара начнется с первой недели ноября. Вводный доклад А.Н. Колмогорова "Современное положение и проблемы теории цепей Маркова" будет прочитан в обзорной секции Московского математического общества во вторник 31 октября. В октябре по средам в 11 час. будут происходить лишь распределение литературы и консультации докладчикам"*.

А далее сообщалось, что *"от участников семинара предполагается знание элементарного курса теории вероятностей в качестве минимума в размере первых пяти глав курса В.И. Гливенко* ⟨Теория вероятностей. — М.: Учпедгиз, 1937. — *А.Ш.*⟩. *Теория цепей Маркова является лучшим введением в общую теорию случайных процессов, а также в метрическую теорию динамических систем; несмотря на то, что исследование теории цепей Маркова с конечным числом состояний проводится совершенно элементарными алгебраическими методами, на них уже можно проследить все основные стороны сложного круга проблем, группирующихся вокруг так называемых эргодических теорем. Теория цепей Маркова со счетным числом состояний требует несколько более сложного алгебраического и аналитического аппарата. В ней имеется много остро поставленных и, по-видимому, доступных для решения проблем"*.

А.Н. Колмогоров не только сам выдвигал и развивал плодотворные идеи как универсальный математик, но и живо откликался на обращения к нему как к прикладному математику, будучи наделен удивительной способностью проникновения в суть поставленной проблемы, выявления главного, определяющего, и внесения ясности в дискуссионные ситуации.

Наглядной иллюстрацией этого могут служить работы Андрея Николаевича по ***теории стрельбы***, выполненные им в годы Великой Отечественной войны. Сам Колмогоров замечает, что его работа "Определение центра рассеивания и меры точности по ограниченному числу наблюдений" [$Б_I$-93],

датированная 15 сентября 1941 года (т.е. уже через три месяца после начала войны) и являющаяся ответом на просьбу соответствующих инстанций "дать свое заключение по поводу разногласий имеющихся приемов оценки меры точности по опытным данным", претендует, по преимуществу, лишь на методологический интерес благодаря критическому сопоставлению различных подходов. Однако следом Андрей Николаевич со своими сотрудниками по Математическому институту АН, Механико-математическому факультету МГУ и непосредственными практиками из Артиллерийского научно-исследовательского морского института (АНИМИ) разворачивает большую теоретическую и расчетную работу по оценке эффективности систем стрельбы. Одновременно он читает в университете курс теории стрельбы, который делает *обязательным* для студентов, выбравших своей специальностью теорию вероятностей. Завершились эти работы выходом отдельного выпуска "Трудов МИАН", который Колмогоров называл "Стрельбным сборником". В этот выпуск, кроме двух его статей [Б$_{\mathrm{I}}$-95] и [Б$_{\mathrm{I}}$-96], вошли еще статьи его сотрудников по этим работам А.А. Свешникова [ДС-101] и И.А. Гублера [ДС-27]. Андрей Николаевич сам отредактировал весь сборник и снабдил его предисловием (см. об этом в "Дневниках", записи от августа—сентября 1943 г., книга 3 нашего издания).

В работе [Б$_{\mathrm{I}}$-95] рассматривается число попаданий μ в группе из n выстрелов ($\mu = 0, 1, \dots, n$). Обозначая $P_m = \mathsf{P}(\mu = m)$, $\mathsf{E}\mu$ — математическое ожидание числа попаданий, А.Н. Колмогоров ставит вопрос об определении нового понятия *"показатель эффективности системы стрельбы"*. Он отмечает, что распространенные *"в литературе рассуждения о сравнительных достоинствах и недостатках "оценки по математическому ожиданию" и "оценки по вероятности" часто не обладают достаточной четкостью"*, и ставит вопрос о том, нельзя ли совокупность вероятностей $P_0, P_1, \dots, P_n$, характеризующих систему стрельбы с точки зрения распределений вероятностей числа попаданий, *"заменить какой-либо зависящей от них одной величиной $W = f(P_0, P_1, \dots, P_n)$, которую и объявить показателем эффективности стрельбы"*. После обсуждения этого вопроса (§ 1 в [Б$_{\mathrm{I}}$-95]) А.Н. Колмогоров выводит ряд точных формул для вероятностей P_m и затем дает к ним удобные для практических расчетов приближенные формулы.

Следующий круг рассматриваемых в этой работе вопросов связан, во-первых, с классификацией влияющих на результат стрельбы факторов с целью выбора рациональной системы стрельбы и, во-вторых, с задачей об *искусственном* рассеивании (обсуждается и самое понятие искусственного рассеивания), состоящей в следующем.

Обозначим $p_i = p_i(\alpha_i, \beta_i)$ вероятность попадания при i-м выстреле, зависящую от *азимута* α_i и *прицела* β_i. Пусть $(\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i)$ — комбинация (как правило, единственная) значений α_i и β_i, доставляющая максимум вероятности попадания: $\max p_i(\alpha_i, \beta_i) = p_i(\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i)$, и пусть $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$, $\bar{\beta} = (\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_n)$.

Спрашивается, не будет ли $\max W = W(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, т. е. не достаточно ли для достижения максимальной эффективности стрельбы стрелять так, чтобы вероятность попадания при каждом отдельном выстреле была наибольшей?

В статье отмечается, что в двух специальных случаях: когда $W = \mathsf{E}\mu$ (здесь μ — число попаданий при n выстрелах) или когда W имеет вид $(c_i \geq 0)\, W = c_1 P_1 + \cdots + c_n P_n$, а события, состоящие в попадании в цель, независимы, свойство $\max W = W(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ имеет место, и, следовательно, в этих случаях наиболее рациональной системой стрельбы, действительно, будет та, при которой *максимизируется вероятность попадания при каждом отдельном выстреле*.

Однако для других критериев эффективности стрельбы это, вообще говоря, не так, т. е. для достижения наибольшей эффективности в целом следует умышленно выбирать для отдельных выстрелов установки (азимута и прицела), отклоняющиеся от тех, которые дают наибольшее значение вероятности попадания при каждом отдельном выстреле. Такого рода стрельба называется стрельбой с *искусственным рассеиванием*, и типичной обстановкой, в которой оно оказывается полезным, будет та, при которой *"наиболее существенно добиться хотя бы небольшого числа попаданий, значительно меньшего, чем общее число выстрелов n"*.

Во второй из работ, [Б$_{\mathrm{I}}$-96], вошедших в "Стрельбный сборник", Колмогоров рассматривает вопрос об *"искусственном рассеивании"* при стрельбе по "малым" целям. В черновиках к этой работе Андрей Николаевич приводит такое образное обоснование целесообразности такого рассеивания: *"Иногда, производя по одной и той же цели несколько выстрелов, для увеличения вероятности поражения выгодно искусственно увеличить рассеивание снарядов, подобно тому как охотник предпочитает стрелять по летящей птице дробью с достаточно широким конусом разлета. В особенно резкой форме это явление наблюдается тогда, когда для поражения цели достаточно одного попадания"*.

Рассматривая в [Б$_{\mathrm{I}}$-96] именно такой случай, Колмогоров еще упрощает задачу, считая, что рассеивание производится лишь в одном измерении. Типичными случаями, когда возникают подобные ситуации, являются, например, обстрел узкой длинной полосы (скажем, моста), расположенной перпендикулярно к плоскости стрельбы (в этом случае ошибки в азимуте несущественны и вероятность попадания зависит только от выбора установки прицела) или минная стрельба на море (когда существенным, наоборот, является только выбор азимута). Как отмечает Колмогоров, полученные в работе формулы, *"относящиеся к такому "одномерному" случаю, допускают и непосредственные практические применения"*.

Андрея Николаевича крайне беспокоило положение в нашей стране с ***математической статистикой*** и, вообще, культурой статистических исследований, о чем можно судить по приводимому ниже тексту, составленному им как заведующим Отделом в Математическом институте им. В.А. Стеклова еще в самом начале 1940 года:

О работе отдела теории вероятностей
⟨Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР⟩
в области математической статистики

Положение с математической статистикой в СССР в настоящее время таково:

1) *Советские ученые имеют в этой области отдельные первоклассные достижения, получившие уже широкое международное признание. Таковы, например, исследования Е.Е. Слуцкого по корреляции в стационарных рядах и работы Н.В. Смирнова по определению законов распределения на основании опытных данных.*
2) *Однако эти достижения имеют несколько разрозненный характер и во многих важных направлениях статистических исследований мы не только не имеем собственных исследований, но даже не вполне владеем уже достигнутым (по преимуществу, английскими и американскими исследователями).*
3) *В частности, в области логических основ математической статистики до последнего времени советские исследователи удовлетворялись архаическим подходом с точки зрения условного допущения "априорных законов распределения" для всех подлежащих статистическому определению величин.*
4) *Новые теоретические достижения математической статистики чрезвычайно медленно входят в статистическую практику. Это, в значительной мере, вызвано отсутствием хороших руководств по математической статистике.*
5) *В некоторых областях применений статистических методов получила широкое распространение полная математическая неграмотность. Очень ярко это обстоятельство (по отношению к биологическим и сельскохозяйственным наукам) проявляется на происходящей сейчас дискуссии по генетике.* ⟨См. об этом на с. 62. — *А.Ш.*⟩
6) *Та работа, которая все же ведется в различных прикладных областях, совершенно разрозненна и не объединена вокруг каких-либо достаточно авторитетных научных центров.*
7) *Работа по обслуживанию статистических исследований составлением и изданием необходимых таблиц лишь начинает развертываться.*

Полное преодоление указанных выше недостатков далеко превосходит весьма ограниченные силы отдела теории вероятностей нашего института. Широкая программа подъема математической культуры статистических исследований во всевозможных областях социальных, биологических, сельскохозяйственных и технических

наук может составить задачу нескольких специализированных институтов, требует создания жизнеспособных отделений математической статистики на математических факультетах университетов и т. д.

Задачи нашего отдела, насчитывающего в своем составе шесть научных работников, из которых только двое заняты исключительно математической статистикой, много скромнее.

Основные проводимые им сейчас и намеченные на 1940 год работы:

1) *Применение новых результатов из спектральной теории стационарных процессов, полученных А.Н. Колмогоровым, к вопросам экстраполирования и интерполирования статистических стационарных рядов и эмпирического определения спектральных свойств таких рядов. В виде области применений и проверки практической пригодности методов намечается выбрать ряды индексов солнечной и ионосферной активности.*
2) *Продолжение исследований Н.В. Смирнова по эмпирическому определению законов распределения. Так как в этой области полученные у нас (главным образом, Н.В. Смирновым) за последние годы результаты составляют целый большой и практически важный отдел современной математической статистики, то в 1940 г. предположено выпустить специальную монографию, которая сделала бы все разработанные новые методы доступными для практического использования.*
3) *Разработка общих вопросов построения математической статистики с критическим пересмотром взглядов Р. Фишера, Джерси Неймана и др. представителей современной английской и американской школы. Сейчас готовится для "Успехов матем. наук" цикл переводных и оригинальных статей. А.Н. Колмогоровым читается в МГУ курс математической статистики.*
4) *Консультации по отдельным вопросам применений математической статистики. Опыт, накопленный при этих консультациях, предполагается обобщать в статьях, посвященных разъяснению правильных приемов при решении часто встречающихся задач. Сейчас составляется такого рода статья об определении по ограниченным данным малых вероятностей больших уклонений. Примерами такого рода вопросов могут служить определение максимальных напряжений в рельсах при прокатке паровозов, максимальных разливов рек и т. п. В данном случае статья будет носить, по преимуществу, предупредительный характер, предостерегая от необоснованных заключений. Вероятно, возникнет необходимость в подобной обобщающей статье на основе консультаций и экспертиз, производимых нами в связи с генетической дискуссией.*
5) *Развертывание работы по многолетней теме "Создание советских справочников и сборников таблиц по математической*

статистике". В 1939 г. была проведена подготовительная работа, которая позволит в ближайшее время определить конкретные задачи 1940 года. Заканчивается совместно с МГУ составление расширенной таблицы для χ-критерия. ⟨На самом деле, статистические таблицы появились много позднее, в 1965 г.: Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. — М.: Наука.⟩

Для объединения работ по математической статистике, ведущихся в специальных институтах, в 1940 г. предполагается собрать совещание по математической статистике.

А.Н. Колмогоров

Война помешала осуществлению замыслов Андрея Николаевича по улучшению положения с математической статистикой в нашей стране. Но он активно возвращается к этой проблеме в послевоенные годы. Так, в 1948 году в Ташкенте, на Втором Всесоюзном совещании, которое созывается в целях активизации статистических исследований по математической статистике в стране, он делает два доклада: "Основные задачи теоретической статистики" [$Б_{VI}$-22] и "Реальный смысл результатов дисперсионного анализа" [$Б_{VI}$-23]. А в марте 1950 года сдает в печать большую работу "Несмещенные оценки" [$Б_{I}$-116], в которой помимо систематического рассмотрения свойств несмещенных оценок и различных методов их построения с помощью достаточных статистик, показывает также важное прикладное значение этого аппарата в задачах *статистического контроля* и *браковки массовой промышленной продукции*.

Вообще, к вопросам статистического контроля массовой продукции Андрей Николаевич обращался не раз, считая эту работу исключительно важной.

Он пишет рассчитанную на широкий круг читателей работу "Статистический приемочный контроль при допустимом числе дефектных изделий, равном нулю" [$Б_{I}$-123]. 17—18 марта 1950 г. в Киеве читает две лекции о статистическом контроле. Сохранился набросок плана этих лекций:

<u>*Введение*</u>

1. *Роль статистических методов в технике.*

   Вопросы преподавания теории вероятностей и математической статистики инженерам.

2. *Статистические исследования и статистический контроль в промышленности.*

   1) *Необходимость тщательной отработки простых, отчетливо сформулированных и эффективных правил статистического контроля.*
   2) *Статистические исследования производственно необходимых предпосылок введения статистического контроля.*

3) *Использование контрольных данных для дальнейшего углубления анализа производства.*

3. *Вошедшие в употребление приемы статистического контроля.*

   а) *приемка и браковка партий по выборочным данным (последующий контроль);*
   б) *регулирование производственного процесса по контрольным диаграммам (текущий контроль);*

   [а) *— по-видимому, весьма давнего происхождения;*
   б) *— начало широкого применения связывается обычно с работами Шухарта 1926—1932 гг.* ⟨W. A. Shewhart; см., например, [ДС-139]. — *А.Ш.*⟩]

4. *Широкое развитие в США и Англии в предвоенное и военное время. Американские и английский стандарты.*
   Советские публикации с 1946 г.

   1) *Книжка "Статистические методы контроля" (1946).*
   2) *Книга "Статистические методы анализа и контроля качества машиностроительной продукции" под ред. А.К. Кутая (1949).*
   3) *Энциклопедический справочник "Машиностроение" (1950; Бородачев и Журавлев).*
   4) *E. L. Grant, Statistical quality control, 1946.*

   (Для математиков — публикации исследовательской группы Колумбийского университета, журнал Annals of Math. Stat.)

5. *Самостоятельность советского направления разработки методов статистического контроля.*

   1) *Ориентация на общность интересов производителя и потребителя.*
      [Замечание о коммерческой стороне условий приемки.]
   2) *Ориентация на непрерывное повышение качества.*
      [Замечание о "стационарности".]
   3) *Ориентация на заинтересованность в повышении квалификации всей массы рабочих, техников и инженеров.*

6. *Оригинальные советские методы контроля.*
   [Пример: метод группировки (В.Н. Гостев).]
   Отставание:

   а) *в разработке методов приемочного контроля;*
   б) *в работе по математическому образованию.*

7. *Мои задачи. Исчерпывающий обзор простейших схематизированных задач.*

В общих чертах, как отмечается в плане “киевских лекций”, статистический контроль имеет своей целью уменьшение средней доли пропущенного брака. Как видно из приведенного наброска, принято различать два вида контроля — *текущий* и *последующий*.

В случае *текущего контроля* уменьшение доли брака достигается при помощи *подналадок*, которые производятся, когда принятые для осуществления контроля выборочные характеристики выходят за контрольные пределы. При этом к системе контроля предъявляется требование, чтобы нарушение хода производства, ведущее к значительному повышению доли брака, не оставалось незамеченным, но в то же самое время при нормальном ходе производства вероятность “ошибочных сигналов” была бы достаточно мала.

В случае так называемого *последующего контроля* с целью уменьшения средней доли брака в принятой продукции производится *браковка целых партий*, оказавшихся по контрольным данным неудовлетворительными. При этом выбираемая система контроля должна быть такой, чтобы партии, содержащие недопустимо большую долю брака, оказались забракованными с вероятностью, близкой к единице, партии же хорошего качества оказывались с вероятностью, близкой к единице, принятыми. (В монографии Ю.К. Беляева [ДС-7], вышедшей в 1975 году, содержится детальное рассмотрение разнообразных систем статистического контроля качества продукции.)

По инициативе Андрея Николаевича автором настоящего очерка был выполнен ряд работ (см. библиографию в [ДС-132]), в которых рассматривались вопросы построения *оптимальных последовательных методов* текущего статистического контроля качества продукции при разных предположениях относительно спонтанного возникновения “разладок” производственного процесса.

Придавая исключительное значение постановке математико-статистического образования и развертыванию исследований по математической статистике, Андрей Николаевич инициирует перевод на русский язык книги Г. Крамера “Математические методы статистики” [ДС-50], которую сам редактирует и к которой пишет предисловие, отмечая, что *“существовавшие до настоящего времени систематические курсы математической статистики строились на теоретическом фундаменте, совершенно не соответствующем современным требованиям”*, а книга Г. Крамера (вышедшая в русском переводе в 1948 г.) является попыткой *“систематического изложения принципиальных вопросов математической статистики с современных позиций”*.

В развитии ***теории вероятностей*** исключительно важную роль сыграла вышедшая в 1949 году книга Б.В. Гнеденко и А.Н. Колмогорова

"Предельные распределения для сумм независимых случайных величин" [Б$_{\text{Iкн}}$-14], посвященная теории, где центральными являются понятия *безгранично делимых* и *устойчивых* вероятностных законов. В предисловии к своей книге авторы описывают в общих чертах проблематику предельных теорем, приводящих к этим законам.

Если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых *одинаково* распределенных случайных величин, $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, то естественно поставить общий вопрос о том, при каких условиях может иметь место предельное соотношение

$$\mathsf{P}\Big(\frac{S_n - A_n}{B_n} \le x\Big) \longrightarrow V(x), \qquad n \to \infty, \tag{34}$$

при том или ином выборе констант A_n и B_n и какие при этом предельные распределения $V(x)$ могут возникнуть.

Этот вопрос был полностью решен А.Я. Хинчиным, установившим, что все мыслимые законы $V(x)$ — это так называемые *устойчивые* распределения, относительно которых [Б$_{\text{Iкн}}$-14, с. 11] говорится, что "круг реальных прикладных задач, в которых они будут играть существенную роль, окажется со временем достаточно широким". (Как теперь хорошо известно, так в действительности и произошло — например, в финансовой математике такие распределения широко используются при описании цен акций, облигаций и других финансовых инструментов; [ДС-134].)

Переходя затем к общей проблематике предельных закономерностей (без предположения *одинаковой распределенности*), авторы придают особое значение выделению *схем серий* случайных величин $\xi^n = (\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nn})$, являющихся независимыми внутри каждой серии, поскольку именно в рамках такого подхода возникают *"вполне содержательные и практически интересные предельные теоремы, относящиеся к суммам независимых слагаемых и приводящие к законам распределения, существенно отличающимся от нормального"*, и в полной мере раскрывается важность понятия *безгранично делимых распределений* в теории предельных теорем.

Ставя вопрос об условиях, при которых для $S_n = \xi_{n1} + \cdots + \xi_{nn}$ возможны предельные соотношения типа (34), Б.В. Гнеденко и А.Н. Колмогоров представили образец изложения этой проблематики, по которому училось и учится не одно поколение "вероятностников".

За монографию "Предельные распределения для сумм независимых случайных величин" ее авторы были удостоены премии им. П.Л. Чебышева Академии наук СССР.

Мне не раз приходилось слышать от математиков старшего поколения о докладе Андрея Николаевича на заседании Математического общества 11 декабря 1944 года, который носил простое и емкое название: "Проблемы

теории вероятностей". В бумагах Комаровского дома сохранились тезисы этого доклада (один экземпляр написан Андреем Николаевичем от руки, другой им же перепечатан с первого на машинке). Хочу привести эти тезисы здесь полностью.

А.Н. Колмогоров
Проблемы теории вероятностей

Доклад будет содержать характеристику современного состояния теории вероятностей и попытку наметить перспективы ее развития в ближайшие годы. Кроме общей характеристики больших направлений работы, представляющихся докладчику особенно актуальными (обозначены далее римскими цифрами), будут в виде примера указаны отдельные отчетливо формулируемые проблемы, заслуживающие внимания исследователей (обозначены далее арабскими цифрами).

I. *Аксиоматика и проблемы применимости.*

1. *Логическое обоснование математической статистики, т. е. методов проверки гипотез, оценки параметров, контроля и регулирования массовой продукции по выборочным наблюдениям.*
2. *Построение общей теории наблюдения, соединенного с воздействием наблюдателя на наблюдаемую систему, с целью выяснения логических основ квантовой физики.*
3. *Выяснение логической природы теоретико-вероятностных аналогий в теории чисел.*

II. *Предельные теоремы.*

4. *Уточнение основной предельной теоремы.*
5. *Предельные теоремы для распределений в функциональных пространствах как универсальный источник специальных предельных теорем классического типа.*

III. *Бесконечномерные распределения вероятностей.*

6. *Распределения для скалярных, векторных и тензорных функций, инвариантные по отношению к различным группам преобразований. Проблема интересна с точки зрения статистической механики непрерывных сред, в частности, — статистической теории турбулентности.*
7. *Распределения для размещений частиц в пространстве, инвариантные по отношению к различным группам движений. Проблема интересна с точки зрения статистической теории кристаллов и кристаллизации.*

IV. *Классические случайные процессы.*

8. *Общее решение уравнения Смолуховского.*
9. *Оценка стационарных процессов по их ограниченному отрезку (оценка параметров и вопросы прогноза).*
10. *Нелинейный спектральный анализ случайных процессов с непрерывным спектром.*
11. *Статистические свойства динамических систем "в общем случае".*
12. *Взаимоотношения между обратимыми и необратимыми процессами.*

Докладчик не ставит перед собой задачи перечисления всех существенных проблем смежных наук, требующих для своего решения применения теории вероятностей. Из прикладных вопросов выше упомянуты только такие, которые неразрывно связаны с основными линиями развития самой теории вероятностей, притом, естественно, только те, для которых формулировка соответствующих теоретико-вероятностных проблем ясна для докладчика. В частности, широко представлена общая теория "классических случайных процессов", так как здесь, подобно общей теории "динамических систем", уже достаточно выкристаллизовалась самостоятельная, чисто математическая линия исследования. Наоборот, вопросы квантовой физики фигурируют лишь в проблеме 2, так как в этой области представляется затруднительным наметить длительную самостоятельную линию чисто математических исследований.

А. Колмогоров
18 ноября 1944 г.

Андрей Николаевич с большой тщательностью относился к составлению текстов планов работы (и им самим, и его учениками и сотрудниками), а также к написанию отчетов о проделанной работе. Приведем один из таких отчетов, с тем чтобы дать представление о состоянии области исследований, размахе проводимых работ и неформальном характере самого отчета.

Отчет о работе отдела теории вероятностей и математической статистики за 1949 г.

Отдел работал в составе зав. отделом А.Н. Колмогорова, ст. научных сотрудников А.Я. Хинчина и Н.В. Смирнова и мл. научных сотрудников Ю.В. Прохорова (с 1 августа) и Б.А. Севастьянова (на половине оклада по совместительсту с аспирантурой в МГУ).

План на 1949 год не выполнен в разделе оформления в виде больших статей исследований А.Н. Колмогорова по статистической теории турбулентности, проведенных в прошлые годы. Запоздание с выполнением этого раздела плана объясняется тем, что А.Н. Колмогоров был назначен членом главной редакции БСЭ и в начальный период работы по второму изданию БСЭ, когда математическая редакция БСЭ еще не была сформирована, был перегружен работой по БСЭ.

В остальных направлениях план работы отдела в целом можно считать выполненным со значительным превышением. В первую очередь следует отметить три законченные большие научные исследования сотрудников отдела:

1. *Математическое обоснование формул квантовой статистики с помощью предельных теорем теории вероятностей (А.Я. Хинчин). Задача решена полностью: найден метод, позволяющий элементарно редуцировать расчетные формулы всех видов квантовой статистики к предельным теоремам хорошо известных в теории вероятностей типов. Тем самым впервые показана возможность вполне строгого обоснования всех формул квантовой статистики без создания специальных громоздких аналитических приемов. Вместе с тем показано, что учение о предельных теоремах теории вероятностей, созданное русскими и советскими учеными (по почину П.Л. Чебышева), может служить вполне достаточной аналитической основой для решения всех задач современной физической статистики.*

   Работа закончена и сдана в "Труды МИ АН СССР".

2. *Предельное распределение числа циклов в циклирующих системах (Н.В. Смирнов). Первая часть работы содержит результаты, полученные в 1948 году. Во второй части они обобщены на случай неоднородных циклов (закон распределения цикла зависит от номера цикла) и некоторые случаи зависимых циклов (закон распределения зависит от длительности предшествующих циклов). В связи с этими исследованиями получены результаты, уточняющие теоремы непрерывности для преобразования Лапласа и производящих функций, которые могут найти и другие применения.*

   Вопросы о числе циклов, умещающихся на заданном промежутке времени, имеют основное значение для ряда технических применений статистики (износ оборудования и т. п.). Им посвящена большая литература. Исследование Н.В. Смирнова, являясь по своему характеру общетеоретическим, содержит все полученное в этом направлении по поводу отдельных практических задач в виде элементарно рассчитываемых (на основе теории Н.В. Смирнова) частных случаев.

   Работа закончена и оформляется для печати.

3. *Локальная предельная теорема для классических цепей Маркова (А.Н. Колмогоров). Получено почти исчерпывающее решение вопроса. Предельное распределение вероятностей*

$$\mathsf{P}\{\mu_1(n)=m_1;\mu_2(n)=m_2;\ldots;\mu_s(n)=m_s\}=P_n(m_1,m_2,\ldots,m_s),$$

где $\mu_k(n)$ обозначает число попаданий за n шагов в k-е состояние, дано для всех случаев. Незаконченность исследования заключалась в том, что существование некоторых вырожденных случаев, для которых решение было дано в особенно сложной форме, оставалось не доказанным. Аспирантом ЛОМИ И.В. Чулановским было позднее установлено, что этих случаев не существует, в силу чего результаты получили еще большую простоту.

Работа опубликована в "Известиях АН СССР".

Далее следует перечислить крупные направления исследований, по которым получены частичные результаты и работа продолжается.

4. *Н.В. Смирнов продолжал исследование отклонений эмпирической кривой распределения от теоретической. В 1948-м году Феллером был дан новый значительно более простой метод получения уже вошедших в общее употребление прежних результатов А.Н. Колмогорова и Н.В. Смирнова и новых аналогичных теорем. Однако в той общей формулировке, которая дана у Феллера, его метод оказывается не строгим (основная для метода теорема непрерывности — ошибочной). Н.В. Смирновым найдены условия, при которых метод Феллера действительно применим, и даны новые применения этого метода.*

Итоги работы во всем этом направлении, имеющем большое значение для математической статистики, в 1950 году будут изложены и обобщены Н.В. Смирновым в специальной монографии. ⟨Монография Н.В. Смирнова (в соавторстве с И.В. Ду-

Н.В. Смирнов

ниным–Барковским) "Теория вероятностей и математическая статистика в технике (с техническими приложениями) (общая часть)" появилась позднее, в 1955 г. — *А.Ш.*)

5. *А.Н. Колмогоров и Ю.В. Прохоров возобновили работу в направлении, в котором в прошлые годы крупные результаты были получены А.Я. Хинчиным. Эта работа по "проблемам ожидания" в телефонных сетях и других аналогичных устройствах будет продолжена в 1950 г. в тесном контакте с Центральным Институтом Связи. В 1949 году А.Н. Колмогоровым был разработан новый метод сведения всех задач данной области к дифференциально-разностным уравнениям для специального типа марковских процессов. Теоретическая статья о "марковских процессах с дискретным вмешательством случая" будет в начале 1950 г. сдана в печать. Ю.В. Прохоровым критически изучена литература вопроса. Небольшие новые задачи по непосредственным запросам Института Связи уже решены в университетском семинаре А.Н. Колмогорова.*

Ю.В. Прохоров

6. *А.Н. Колмогоров и Б.А. Севастьянов занимались детальным изучением неограниченно делимых и устойчивых законов распределения, их физическими применениями и попытками табулирования устойчивых законов. А.Н. Колмогоровым было показано, что теория неограниченно делимых законов с успехом применяется к нахождению законов распределения энергии быстрых частиц, замедляемых столкновениями с частицами среды (соответствующая заметка будет подготовлена для печати в начале 1950 года). В вопросах об асимптотическом поведении устойчивых законов обнаружились неожиданные трудности, помешавшие широко развить и работу по их табулированию. В 1950 году к этой теме будет привлечен и Н.В. Смирнов.*

7. *Б.А. Севастьянов занимался дальнейшим изучением ветвящихся случайных процессов и получил ряд промежуточных интересных новых результатов. Им изучена большая новая иностранная литература вопроса, появившаяся в 1948—49 годах, и подготовляется обзорная работа с изложениме всего опубликованного в этой интересной области у нас (А.Н. Колмогоров,*

Н.А. Дмитриев, Б.А. Севастьянов, А.М. Яглом) и иностранными авторами (составление этого обзора относится к плану 1950 года).

8. *В направлении задач, связанных со статистическим контролем производства, изучена Н.В. Смирновым, А.Н. Колмогоровым и Б.А. Севастьяновым литература и заслушан ряд докладов об опыте отдельных предприятий (чл.-корр. Академии артиллерийских наук Н.А. Бородачев). Н.В. Смирновым дан ряд практических консультаций. Работа будет развернута шире в 1950 году.*

А.Н. Колмогоров с Б.А. Севастьяновым

Кроме этих основных направлений работы длительного характера сотрудниками отдела получен ряд отдельных научных результатов в различных направлениях:

1. *Н.В. Смирновым найден предельный закон распределения одного статистического критерия независимости случайных величин.*
2. *А.Н. Колмогоровым и Ю.В. Прохоровым найдено простое доказательство и обобщение условий применимости тождеств Вальда, связанных с "последовательным анализом". Напечатано в "Успехах математических наук"* ⟨[Б$_1$-112] — *А.Ш.*⟩.
3. *По поводу экспериментальных работ М.К. Баранаева, Е.Н. Теверовского и Э.Л. Трегубовой А.Н. Колмогоровым выяснены некоторые вопросы, связанные с теорией дробления капель в турбулентном потоке. Опубликована заметка в ДАН* ⟨[Б$_1$-114] — *А.Ш.*⟩.

4. *А.Н. Колмогоровым разрешена задача, возникшая из исследований А.Б. Вистелиуса о перемежающемся накоплении и размыве геологических отложений. Разобранная вероятностная схема может иметь и другие применения. Некоторые вычисления к работе выполнены Б.А. Севастьяновым. Опубликована заметка в ДАН.** ⟨[Б$_{I}$-111] — *А.Ш.*⟩.
5. *А.Н. Колмогоровым доведено до конца решение одной задачи, поставленной кристаллографами еще в 1947-м году и ошибочно решавшейся чл.-корр. АН СССР А.В. Шубниковым. Опубликована заметка в ДАН.* ⟨[Б$_{I}$-110] — *А.Ш.*⟩.
6. *Н.В. Смирновым проделана небольшая работа по теории стрельбы (по просьбе сотрудников Академии артиллерийских наук). Составлено уравнение для определения оптимального решения и упрощено вычисление вероятности поражения.*
7. *Докторантом С.Х. Сираждиновым найдено необходимое и достаточное условие эргодичности цепи Маркова с двумя состояниями и переменными вероятностями перехода.*

Из литературных работ сотрудников отдела, относящихся к научной тематике отдела, следует отметить:

1. *Окончание А.Н. Колмогоровым совместно с действительным членом АН УССР Б.В. Гнеденко и при помощи Ю.В. Прохорова монографии "Предельные распределения для сумм независимых слагаемых"* ⟨[Б$_{Iкн}$-14] — *А.Ш.*⟩. *А.Н. Колмогоровым и Ю.В. Прохоровым внесено в эту монографию при ее окончательной обработке много новых упрощенных доказательств различных теорем.*
2. *Произведенную А.Я. Хинчиным совместно с Б.В. Гнеденко переработку популярной книги "Элементарное введение в теорию вероятностей".*
3. *Написанную А.Н. Колмогоровым статью* ⟨[Б$_{VI}$-23] — *А.Ш.*⟩ *об условиях применимости выводов "дисперсионного анализа", которая должна оказать существенное влияние на работы, использующие дисперсионный анализ на практике. Статья является переработкой доклада на Всесоюзном совещании по математической статистике, происходившем в Ташкенте в 1948-м году и опубликована в трудах этого совещания.*

---

*В комментарии [Б$_{Iкн}$-49, с. 527—531] к этой работе А.Б. Вистелиус пишет: "В момент публикации рассматриваемой статьи в геологических науках практически отсутствовали такие понятия, как случайная величина, функция распределения вероятностей, последовательность значений случайной величины. Это был период начала создания научной базы ряда геологических дисциплин на основе введения в них представления о стохастическом характере изучаемых этими науками величин. Этой принципиальной перестройке, приведшей в дальнейшем к возникновению математической геологии, сильно способствовали не только комментируемая статья, но и личные советы и высказывания А.Н. Колмогорова". — *А.Ш.*

Сотрудниками отдела давались многочисленные консультации по применениям теории вероятностей и математической статистики, заключения по диссертациям, программам преподавания статистики во ВТУЗ'ах, проектам стандартов на методы контроля качества в промышленности и т. п.

Под руководством А.Н. Колмогорова закончена подготовка к изданию таблиц неполной Г-функции, составленных Е.Е. Слуцким.

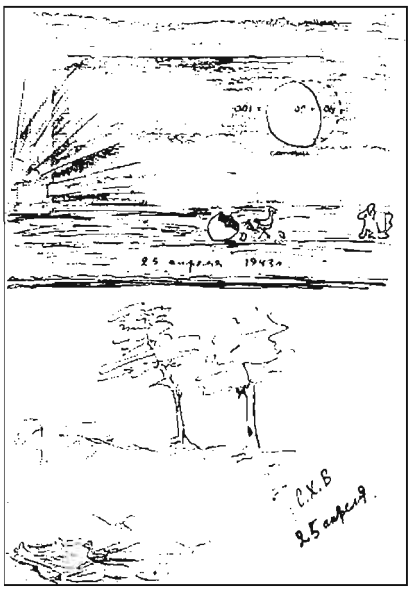
Ю.В. Прохоровым были выполнены вычисления для отдела атмосферной турбулентности Геофизического института АН СССР.

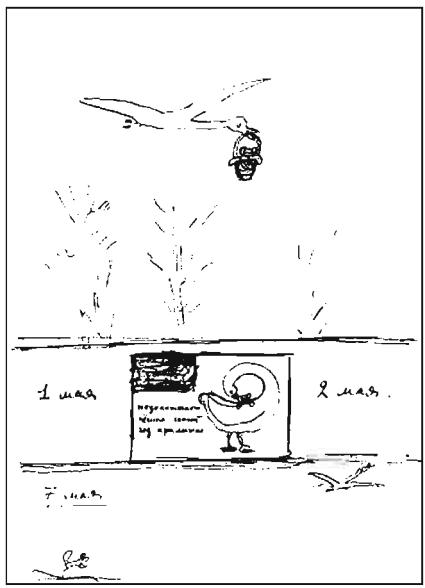
26—29 января 1949 года было проведено несколько расширенных заседаний Отдела совместно с кафедрой теории вероятностей МГУ, ленинградским отделением МИАН и работниками Львовского университета, на которых было заслушано 16 докладов.

Отчет об этих заседаниях опубликован в "Успехах математических наук" (т. 4, вып. 4 (1959)).

⟨Далее приведен список работ сотрудников отдела, опубликованных в 1949 г. — *А.Ш.*⟩

Сороковые годы в жизни Андрея Николаевича были освещены и одним светлым событием. В самый разгар войны, в неустроенности быта и неясности перспектив, Андрей Николаевич соединяет свою судьбу с подругой школьных лет, одноклассницей и ровесницей Анной Дмитриевной Егоровой. Анна Дмитриевна к тому времени разошлась со своим первым му-

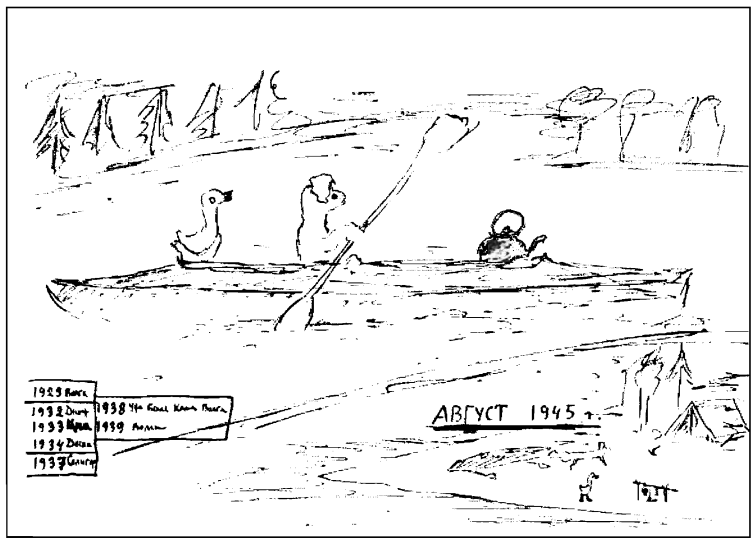




Из "художественных дневников" Андрея Николаевича

жем, учившимся в той же гимназии художником Сергеем Михайловичем Ивашевым-Мусатовым, и жила с пятнадцатилетним сыном Олегом, учеником Московской художественной школы. В “Дневниках” Колмогорова на многих страницах читаем, как складывалась эта новая, непривычная для Андрея Николаевича семейная жизнь, как искренне он хотел стать воспитателем и старшим другом Олегу . . .

Отмечены эти годы и научными и правительственными наградами. Мы уже упоминали академическую премию им. П.Л. Чебышева. В 1941 году Андрей Николаевич (вместе с А.Я. Хинчиным) удостаивается Сталинской премии. До этого, в 1940 году он награждается Орденом Трудового Красного Знамени, а в 1944 и 1945 годах — дважды Орденом Ленина. В конце войны, в 1945 году ему вручается еще и медаль “За доблестный труд в Великой Отечественной войне” — награда за труд, который во все годы его жизни был действительно доблестным.



Из “художественных дневников” Андрея Николаевича

Пятидесятые годы (1950–1959)

Общая теория гамильтоновых систем, теория информации, эргодическая теория динамических систем, ε-энтропия, суперпозиции функций и **13-я проблема Гильберта**, ... — вот разделы математики, которыми в пятидесятые годы занимался Андрей Николаевич и которые непременно ассоциируются теперь с его именем. Не говоря уже о том, что из его работ в этих областях выросли большие научные направления и школы других исследователей.

Работы этого периода по теории динамических систем составляют два цикла. Первый непосредственно связан с задачами *классической механики*, второй — с проблематикой *теории информации*.

Сам Андрей Николаевич в комментарии к своим работам по классической механике [$Б_{Iкн}$-48, с. 433] писал:

> *"Мои работы по классической механике возникли под влиянием работ Дж. Неймана* ⟨[ДС-79]⟩ *по спектральной теории динамических систем и в особенности под влиянием классической работы Н.Н. Боголюбова и Н.М. Крылова 1937 г.* ⟨[ДС-51]⟩.
>
> *Меня остро интересовал вопрос, какие могут быть эргодические множества (в смысле Боголюбова–Крылова) в динамических системах классической механики и какие из их типов могут заполнять множества положительной меры (вопрос этот остается нерешенным и до настоящего времени). Для накопления конкретного материала был организован семинар, посвященный изучению отдельных примеров. Мои размышления на эти и близкие к ним темы нашли широкий отклик у молодых московских математиков".*

На заключительном заседании Международного математического конгресса в Амстердаме в 1954 году А.Н. Колмогоров делает доклад *"Общая теория динамических систем и классическая механика"* [$Б_I$-132], посвященный (в терминологии Пуанкаре) *основной проблеме динамики* — исследованию поведения квазипериодических движений гамильтоновых систем при малом возмущении функций Гамильтона ("малость" изменения функции Гамильтона $W(p)$ понимается как переход к рассмотрению функции $W(p) + \theta S(q, p, \theta)$ с малым параметром θ).

Замечательный результат, сформулированный тогда А.Н. Колмогоровым, состоит в том, что *для большинства начальных условий и в случае общего положения, т. е. когда* $\det \dfrac{\partial^2 W}{\partial p^2} \neq 0$, *имеет место сохранение квазипериодических движений.*

Выдвинутая Колмогоровым теория и ее последующее развитие дали возможность решить множество проблем, давно ждавших своего разрешения. Из нее, в частности, следует устойчивость быстрого вращения несимметричного тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, устойчивость движения астероида пренебрежимой массы в так называемой плоской ограниченной задаче трех тел, а также сохранение большинства магнитных поверхностей при малых изменениях магнитного поля в тороидальных системах.

Говоря о методе доказательства, А.Н. Колмогоров отмечает, что в его основе лежит переработка *"широко дискутировавшейся в литературе по небесной механике идеи о возможности избежать появления ненормально "малых знаменателей" при расчете возмущенных орбит"* [Б$_{\text{Ікн}}$-48, с. 324]. (Хорошо известен следующий пример "малого знаменателя": $2\omega_1 - 5\omega_2 = 0{,}007$, где $\omega_1 = 299''{,}1$ и $\omega_2 = 120''{,}5$ — частоты движения Юпитера и Сатурна. Появление таких "малых знаменателей" приводит к большим взаимным возмущениям в движении этих планет в силу того обстоятельства, что выражения вида $m\omega_1 + n\omega_2$ входят *знаменателем* в ряды теории возмущения, имеющие вид

$$\sum_{mn\neq 0} a_{mn} \frac{\exp[i(m\omega_1 + n\omega_2)]}{m\omega_1 + n\omega_2}.)$$

Сам метод, предложенный Колмогоровым и позволивший преодолеть трудности, связанные с "малыми знаменателями", впоследствии разрабатывался учеником Андрея Николаевича В.И. Арнольдом и швейцарским математиком Ю. Мозером. Ныне эта теория широко известна как "КАМ-теория" (теория Колмогорова—Арнольда—Мозера).

За работы по теории возмущений гамильтоновых систем А.Н. Колмогоров и В.И. Арнольд в 1965 году были удостоены Ленинской премии.

Второй цикл работ А.Н. Колмогорова по теории динамических систем связан с применением к исследованию эргодических свойств этих систем идей теории информации (см. далее с. 103).

К проблематике собственно теории информации Андрей Николаевич обращается в начале пятидесятых годов под влиянием работ К. Шеннона:

> *"Значение работ Шеннона для чистой математики не сразу было достаточно оценено. Мне вспоминается, что еще на международном съезде математиков в Амстердаме (1954 г.) мои американские коллеги, специалисты по теории вероятностей, считали мой интерес к работам Шеннона несколько преувеличенным, так как это более техника, чем математика. Сейчас такие мнения вряд ли нуждаются в опровержении.*

Правда, строгое математическое "обоснование" своих идей Шеннон в сколь-либо трудных случаях предоставил своим продолжателям. Однако его математическая интуиция изумительно точна". [$Б_{VIII}$-15]

Становится ясно, что нужны были математические работы, которые дали бы теории информации прочный математический фундамент.

Первыми здесь были работы А.Я. Хинчина [ДС-123], [ДС-124], посвященные доказательству основных теорем теории информации для *дискретного* случая, а также две совместных статьи И.М. Гельфанда, А.Н. Колмогорова и А.М. Яглома: "К общему определению количества информации" [$Б_I$-142] и "Количество информации и энтропия для непрерывных распределений" [$Б_I$-147], в которых рассматривался уже *общий* случай, были установлены свойства "количества информации", получены явные формулы для информационных характеристик в гауссовском случае, даны формулировки теорем кодирования для воспроизведения сообщений с заданной точностью.

В 1956 году Андрей Николаевич делает на Сессии Академии наук СССР, посвященной научным проблемам автоматизации производства, большой пленарный доклад "Теория передачи информации" [$Б_I$-144], в котором излагает основные идеи теории информации и разъясняет границы ее приложимости.

Как отмечает Р.Л. Добрушин в своем комментарии [$Б_{Iкн}$-50, с. 255—257], все эти работы определили "традицию изложения результатов теории информации на уровне математической строгости, которой с тех пор неизменно придерживаются как те из специалистов по теории информации, которые считают себя математиками, так и те, кто считает себя инженерами".

Переосмысление идей шенноновской теории информации привело Колмогорова к совершенно неожиданному синтезу этих идей с теми, которые были заложены в его работах тридцатых годов по теории приближений и теории алгоритмов.

Остановимся на этом несколько подробней.

К. Шеннон в качестве *меры неопределенности дискретных сообщений* ξ, принимающих дискретные значения $x_1, x_2, \ldots$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots$, пользовался понятием *"энтропия"* $H(\xi)$, определяемым как

$$H(\xi) = -\sum_i p_i \ln p_i.$$

Он определил также понятие *информации* $I(\xi, \eta)$, содержащейся в объекте ξ относительно η, полагая

$$I(\xi, \eta) = \sum_{i,j} p_{ij} \ln \frac{p_{ij}}{p_i q_j}$$

в случае дискретных случайных величин ξ и η с вероятностями

$$p_{ij} = \mathsf{P}(\xi = x_i, \eta = y_j), \quad p_i = \mathsf{P}(\xi = x_i), \quad q_j = \mathsf{P}(\eta = y_j)$$

или

$$I(\xi, \eta) = \int\int \ln \frac{p(x,y)}{p(x)q(y)}\, p(x,y)\, dx\, dy$$

в случае величин ξ и η, имеющих совместную плотность распределения $p(x,y)$ и одномерные плотности $p(x)$ и $q(y)$ соответственно.

Для случая *непрерывных* сообщений все естественные аналоги шенноновской энтропии приводят к значению энтропии, равному бесконечности. В этой связи А.Н. Колмогоров неоднократно подчеркивал, что для случая *произвольных* сообщений основным понятием должна стать не *энтропия*, а *количество информации* $I(\xi, \eta)$ одного объекта ξ относительно другого η.

Отправляясь от этого, Колмогоров вводит *ε-энтропию* $H_\varepsilon(\xi)$ случайного объекта ξ как величину

$$H_\varepsilon(\xi) = \inf I(\xi, \eta),$$

где (при фиксированном распределении P_ξ объекта ξ) инфимум берется по всем парам случайных величин (ξ, η), удовлетворяющих следующему ограничению: их совместное распределение $P_{\xi\eta}$ принадлежит некоторому заданному классу W_ε, зависящему от параметра ε. (Например, $W_\varepsilon = \{(\xi, \eta) : \mathsf{E}\rho(\xi, \eta) \le \varepsilon\}$, где ρ — некоторая метрика в пространстве значений рассматриваемых объектов ξ и η.)

Величины $H_\varepsilon(\xi)$ рассматривались еще Шенноном, который называл их *скоростью создания сообщений*. В работе [Б$_{\mathrm{I}}$-144] Колмогоров пишет:

> *"Хотя выбор для этой величины нового названия и не меняет существа дела, я решаюсь предложить такое переименование, подчеркивающее более широкий интерес понятия и его глубокую аналогию с обыкновенной точной энтропией ... Мне особенно хотелось бы подчеркнуть интерес исследований по асимптотическому поведению ε-энтропии при $\varepsilon \to 0$. Исследованные ранее случаи ... являются лишь очень частными случаями могущих здесь встретиться закономерностей. Для понимания открывающихся перспектив может представлять интерес изложенная в других терминах моя заметка* ⟨[Б$_{\mathrm{I}}$-141]"⟩.

Заметка [Б$_{\mathrm{I}}$-141] — это работа "О некоторых асимптотических характеристиках вполне ограниченных метрических пространств". В ней Колмогоров вводит для *неслучайного* объекта C, являющегося множеством, лежащим в метрическом пространстве (X, ρ), понятие *ε-энтропии* $\mathcal{H}_\varepsilon(C)$, которая определяется как *двоичный логарифм минимального числа* $N_\varepsilon(C)$

элементов покрытия множества C множествами диаметра, не большего 2ε.

Наряду с *ε-энтропией* $\mathcal{H}_\varepsilon(C)$, названной впоследствии *абсолютной*, А.Н. Колмогоров вводит также и *относительную* ε-энтропию $\mathcal{H}_\varepsilon(C, X)$, определяемую как *двоичный логарифм минимального числа $N_\varepsilon(C, X)$ элементов ε-сети из X для множества C.*

По сути, величины $\mathcal{H}_\varepsilon(C)$ и $\mathcal{H}_\varepsilon(C, X)$ строятся по той же схеме, что и введенные А.Н. Колмогоровым еще в 1936 году *поперечники* (см. с. 58), которые теперь принято называть *колмогоровскими*. Так, например, двоичный логарифм обратной функции к *поперечнику*

$$\mathcal{E}_N(C, X) = \inf_{A \in \Sigma_N} \sup_{x \in C} \inf_{y \in A} \|x - y\|$$

(Σ_N — совокупность N-точечных аппроксимирующих множеств) в точности совпадает с *ε-энтропией* $\mathcal{H}_\varepsilon(C, X)$.

Как это почти всегда бывало с вводимыми А.Н. Колмогоровым новыми понятиями, ε-энтропийные средства оценки *метрической массивности* функциональных классов и пространств послужили основой для создания целых новых направлений исследований в теории приближений. (См. об этом комментарий В.М. Тихомирова в [$\text{Б}_{\text{Iкн}}$-50], с. 262–269.)

В 1958 году выходит статья А.Н. Колмогорова "Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега" [Б_{I}-148]. (Несколько переработанный вариант этой статьи опубликован позже: [Б_{I}-206].) В этой работе ("второй цикл" по терминологии на с. 100) идеи теории информации привели Колмогорова к введению энтропийных характеристик в теории динамических систем.

Под *динамической системой* в [Б_{I}-148] понимается *однопараметрическая группа $\{S^t\}$ сохраняющих меру преобразований вероятностного пространства* $(X, \mathfrak{X}, \mu)$. По аналогии с теорией стационарных случайных процессов А.Н. Колмогоров вводит понятие *квазирегулярной* динамической системы, или, в современной терминологии, *K-системы*. (Важность этого понятия для изучения эргодических свойств динамических систем обнаружилась через несколько лет, когда Я.Г. Синай выяснил, что многие классические динамические системы, не связанные с теорией вероятностей, являются K-системами.) И затем для таких систем А.Н. Колмогоров определяет понятие *энтропии* (несколько модернизированный уточненный вариант соответствующего определения приведен в [Б_{I}-206]). Через небольшое время Я.Г. Синаем было предложено определение энтропии, применимое уже и к любой динамической системе (подробнее см. его комментарий в [$\text{Б}_{\text{Iкн}}$-50], с. 275–279).

Для случая дискретного времени ($t = 1, 2, \dots ; S^1 = S$) общепринятое теперь определение *энтропии по Колмогорову—Синаю* состоит в следующем.

Пусть $A = \{A_1, \dots , A_N\}$ — конечное разбиение X, т. е. $\bigcup_i A_i = X$, $A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$. С этим разбиением связывается энтропия

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{N} \mu(A_i) \ln \mu(A_i).$$

Обозначим $\mu_{(i_1,\dots,i_r)} = \mu(A_{i_1} \cap SA_{i_2} \cap \dots \cap S^{r-1}A_{i_r})$ и

$$H_r(A) = -\sum_{(i_1,\dots,i_r)} \mu_{(i_1,\dots,i_r)} \ln \mu_{(i_1,\dots,i_r)}.$$

Энтропия Колмогорова—Синая (или *метрическая энтропия*) динамической системы, определяемой сохраняющим меру преобразованием S вероятностного пространства $(X, \mathfrak{X}, \mu)$, есть по определению величина

$$H(S) = \sup_A \lim_{r\to\infty} \frac{H_r(A)}{r}.$$

Понятие энтропии динамической системы сыграло выдающуюся роль в эргодической теории и, прежде всего, в решении проблемы *метрической классификации* динамических систем, т. е. проблемы отыскания (полного) набора инвариантов, по которым можно судить о метрическом изоморфизме динамических систем.

Напомним, что первым примером метрического инварианта являлся *спектр* динамической системы. В классе эргодических динамических систем с *чисто точечным спектром* полная система метрических инвариантов этим спектром и исчерпывается (Халмош и Нейман [ДС-116], [ДС-80]). Но для динамических систем с *непрерывным спектром*, в частности для наиболее важного их подкласса — систем со счетнократным лебеговским спектром (например, для автоморфизмов Бернулли), до работы Колмогорова не было никаких подходов к их метрической классификации.

Энтропия динамической системы оказалась принципиально *новым инвариантом* метрического изоморфизма динамических систем, не зависящим от их спектра, что следует из того, что на классе систем со счетнократным лебеговским спектром энтропия может принимать любые допустимые значения. Новый инвариант позволил, таким образом, "расщепить" динамические системы со счетнократным лебеговским спектром на континуум инвариантных подклассов с *разными* значениями энтропии и, следовательно, метрически неизоморфных между собой.

Далее, все K-системы (которые с точки зрения теории случайных процессов соответствуют процессам с некоторым свойством ослабления зависимости между значениями процесса на удаленных друг от друга интервалах времени) имеют счетнократный лебеговский спектр и положительную энтропию. Поскольку никаких метрических инвариантов, кроме энтропии, различающих K-системы, не было известно, то возник естественный вопрос: верно ли, что K-системы с одинаковыми значениями энтропии метрически изоморфны?

Первые примеры нетривиального изоморфизма автоморфизмов Бернулли были предложены учеником А.Н. Колмогорова Л.Д. Мешалкиным. Далее Я.Г. Синай показал, что автоморфизмы Бернулли с равной энтропией *слабо изоморфны*, т. е. каждый из них может быть реализован как фактор другого. Полное решение проблемы изоморфизма было получено позже американским математиком Д. Орнштейном, показавшим, что *автоморфизмы Бернулли с равной энтропией метрически изоморфны*. Через некоторое время было выяснено, что в классе всех K-систем энтропия не составляет полной системы метрических инвариантов. (Д. Орнштейн и П. Шилдс показали, что число неизоморфных типов K-систем с одинаковой энтропией несчетно.) Подробнее об этом см. комментарий Я.Г. Синая к работам А.Н. Колмогорова по эргодической теории [$Б_{Iкн}$-50, с. 275—279], а также монографии [ДС-46] и [ДС-84]. Ныне энтропийная теория динамических систем, начало которой было положено работой А.Н. Колмогорова [$Б_I$-148], — отдельное большое направление в эргодической теории.

Введенные А.Н. Колмогоровым энтропийные характеристики *"метрической массивности"* ($\mathcal{H}_\varepsilon(C), \mathcal{H}_\varepsilon(C, X), \dots$) позволили ему дать прозрачную интерпретацию результатов А.Г. Витушкина о *непредставимости* функции n переменных гладкости r с помощью суперпозиции m переменных гладкости l, если $n/r > m/l$. Эти исследования уже непосредственно привели А.Н. Колмогорова к известной с начала века, но тогда еще не решенной 13-й проблеме Гильберта о существовании *непрерывной* функции трех переменных, которую *нельзя* было бы представить в виде суперпозиции непрерывных функций двух переменных.

В 1955 году Андрей Николаевич начал вести студенческий семинар по теории приближенного представления функций нескольких переменных (в том числе задачам приближенного номографирования). Как вспоминает Андрей Николаевич ([$Б_{Iкн}$-48, с. 444]): *"Тринадцатая проблема Гильберта была сформулирована мной уже во вводной лекции в качестве далекой перспективы, которая почти наверное не будет достигнута"*.

В формулировке самого Д. Гильберта его 13-я проблема состояла в том, чтобы показать, что решение $f = f(x, y, z)$ уравнения седьмой степени

$$f^7 + xf^3 + yf^2 + zf + 1 = 0,$$

к которому можно привести общее алгебраическое уравнение седьмой степени, *не может быть* представлено суперпозицией непрерывных функций двух переменных. (См. сборник “Проблемы Гильберта” [ДС-88].)

Работа А.Н. Колмогорова 1956 года “О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных” [$Б_I$-140] начинается словами:

> *“Из сообщаемой далее теоремы 3 вытекает такое несколько неожиданное следствие: любая непрерывная функция сколь угодно большого числа переменных представима в виде конечной суперпозиции непрерывных функций не более чем трех переменных. Для произвольной функции четырех переменных такое представление имеет вид*
>
> $$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{r=1}^{4} h^r[x_4, g_1^r(x_1, x_2, x_3), g_2^r(x_1, x_2, x_3)]".$$

В 1957 году В.И. Арнольд, тогда студент третьего курса, показывает, что каждая непрерывная функция *трех переменных* может быть представлена как суперпозиция непрерывных функций *двух переменых*. Тем самым гипотеза Гильберта оказалась *опровергнутой*.

В том же 1957 году А.Н. Колмогоров сделал завершающий шаг, показав, что *каждая действительная непрерывная на n-мерном единичном кубе функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от n переменных представима в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного и операции сложения:*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} \chi_q \Big[\sum_{p=1}^{n} \varphi^{pq}(x_p) \Big],$$

где “внутренние” функции φ^{pq} — универсальны и лишь “внешние” χ_q зависят от разлагаемой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ([$Б_I$-145]).

По словам В.И. Арнольда ([$Б_{Iкн}$-48, с. 445]), этот результат А.Н. Колмогоров называл *“наиболее трудным в техническом отношении своим достижением”*.

В 1953 году А.Н. Колмогоров публикует статью “Некоторые работы последних лет в области предельных теорем теории вероятностей” [$Б_I$-128], во введении к которой он пишет:

> *“В середине 40-х годов существовало мнение, что проблематика предельных теорем классического типа (т.е. проблематика предельного поведения распределений сумм большого числа независимых или связанных в цепь Маркова слагаемых) в основном*

закончена... В действительности, однако, с конца 40-х годов наблюдается значительное оживление работы именно в этих "классических направлениях", что объясняется тем, что точность полученных оценок остаточных членов в предельных теоремах далеко не достаточна, и тем, что в ряде старых задач, поддававшихся решению лишь при сложных и ограничительных условиях, удалось получить весьма простое и законченное решение".

Эта работа А.Н. Колмогорова знаменательна тем, что в ней проанализированы и предложены различные оценки *близости* распределений вероятностей, а также рассмотрены различные виды их *сходимости*. В этой же работе Андрей Николаевич предлагает новую постановку задачи об *аппроксимации* распределений сумм $S_n = \xi_{n1} + \cdots + \xi_{nn}$ независимых случайных величин, удовлетворяющих условиям предельной пренебрегаемости. (В этом предположении предельное распределение, если оно существует, является безгранично делимым.)

Суть этой новой постановки заключается в следующем.

Исследования сходимости к конкретным безгранично делимым законам не раскрывали полностью механизм поведения распределений *сумм* независимых случайных величин. Кардинальное изменение постановки задачи, предложенное Колмогоровым, состоит в том, чтобы аппроксимировать распределения сумм S_n не *индивидуальным* распределением (и изучать скорость такой аппроксимации), а использовать для аппроксимации *целые семейства* безгранично делимых распределений. Кроме того, в этой работе была высказана идея о возможности получения равномерных теорем не только для фиксированной последовательности $(\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nn})$ случайных величин, но и для целых классов таких величин.

В 1955 году Ю.В. Прохоров доказал [ДС-92], что для расстояния $\rho(F_1, F_2) = \sup_x |F_1(x) - F_2(x)|$ между функциями распределения $F_1 = F_1(x)$ и $F_2 = F_2(x)$ для любого распределения F можно построить последовательность безгранично делимых распределений D_n таких, что

$$\rho(F^{*n}, D_n) \longrightarrow 0, \qquad n \to \infty,$$

где F^{*n} есть n-свертка распределения F.

Иначе говоря,

$$\rho(F^{*n}, \mathcal{D}) \equiv \inf_{D \in \mathcal{D}} \rho(F^{*n}, D) \longrightarrow 0, \qquad n \to \infty, \tag{35}$$

где $\mathcal{D}$ — класс всех безгранично делимых распределений.

В работе "Две равномерные предельные теоремы для сумм независимых слагаемых" [Б$_{\mathrm{I}}$-136] (рукопись датирована 12 ноября 1956 года) А.Н. Колмогоров делает принципиальный шаг вперед: показывает, что сходимость в (35) *равномерна по классу $\mathcal{F}$ всех распределений F*, т. е.

$$\psi(n) \equiv \sup_{F \in \mathcal{F}} \inf_{D \in \mathcal{D}} \rho(F^{*n}, D) \longrightarrow 0, \qquad n \to \infty, \tag{36}$$

и что

$$\psi(n) \le cn^{-1/2}, \tag{37}$$

где c — некоторая константа.

В работе дана и соответствующая теорема для случая *разнораспределенных* слагаемых.

Эти результаты А.Н. Колмогорова дали мощный импульс последующим исследованиям по отысканию правильного порядка убывания функции $\psi(n)$ при $n \to \infty$.

В 1960 году Ю.В. Прохоров [ДС-94] показывает, что

$$\psi(n) \le cn^{-1/3}(1 + \ln n)^2.$$

В 1963 году Ф.М. Каган [ДС-43] устанавливает оценку

$$\psi(n) \le cn^{-1/3}(1 + \ln n).$$

Сам Колмогоров в работе "О приближении распределений сумм независимых слагаемых неограниченно делимыми распределениями" [Б$_{\mathrm{I}}$-171], 1963 г., "убрал" логарифм: $\psi(n) \le cn^{-1/3}$.

Л.Д. Мешалкин в своих работах [ДС-71] 1960 года и [ДС-72] 1961-го устанавливает *нижнюю* оценку: $\psi(n) \ge cn^{-2/3}(1 + \ln n)^{-7/2}$.

Наконец, в 1980—1983 годах Т.В. Арак и А.Ю. Зайцев ([ДС-3], [ДС-5], [ДС-2], [ДС-35]) получают *окончательный* результат:

$$c_1 n^{-2/3} \le \psi(n) \le c_2 n^{-2/3}, \tag{38}$$

где c_1 и c_2 — некоторые константы. (Изложение этого и родственных результатов, а также подробное историко-библиографическое описание рассматриваемой проблематики можно найти в совместной книге Т.В. Арака и А.Ю. Зайцева [ДС-4].)

Результат (38) интересен, в частности, тем, что из него вытекает существование для свертки F^{*n} такой безгранично делимой аппроксимации, порядок которой в центральной предельной теореме (в равномерной метрике) значительно лучше, нежели $n^{-1/2}$ (классическая "оценка Берри—Эссеена").

В указанной работе [Б$_{\mathrm{I}}$-136] Колмогоров существенно опирается на ряд полученных им неравенств для (введенной П. Леви) *функции концентрации* $Q(l, \xi) \equiv \sup_x \mathsf{P}(x \le \xi \le x+l)$ случайных величин ξ. Эта функция является удобной характеристикой "разброса" случайных величин, особенно для количественного описания степени увеличения этого "разброса" при суммировании независимых случайных величин. Развивая результаты П. Леви о свойствах функции концентрации, А.Н. Колмогоров получает оценку величины $Q(l, S_n)$ суммы $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ через функции концентрации отдельных независимых слагаемых.

Пятидесятые годы явились для теории вероятностей годами создания нового раздела теории случайных процессов — *теории функциональных предельных теорем* (в частности, *принципа инвариантности*) для случайных процессов, и здесь выдающуюся роль сыграли работы А.Н. Колмогорова и его учеников Ю.В. Прохорова и А.В. Скорохода.

Еще в 1931 году в своей работе "Одно обобщение теоремы Лапласа—Ляпунова" [$Б_I$-32] А.Н. Колмогоров рассматривал задачу, которую в современной трактовке можно как раз назвать задачей теории функциональных предельных теорем. Программный доклад Андрей Николаевича 11 декабря 1944 года, тезисы которого приведены на с. 90—91, как на одну из насущных проблем теории вероятностей указывает на *"предельные теоремы для распределений в функциональных пространствах как универсальный источник специальных предельных теорем классического типа"*.

В сороковых—пятидесятых годах появился целый ряд результатов (1947 год — Эрдёш и Кац [ДС-142]; 1949 год — Дуб [ДС-31]; 1951—1952 годы — Донскер [ДС-29], [ДС-30]; 1953 год — Гихман [ДС-23], Форте и Мурье [ДС-114]; 1955 год — Маруяма [ДС-70] и др.), относящихся к принципу инвариантности.

В 1948 году, 30 ноября, на заседании Московского математического общества, А.Н. Колмогоров делает доклад "Меры и распределения вероятностей в функциональном пространстве", в котором высказывается идея рассмотрения *распределения случайного процесса как меры на борелевской алгебре того или иного функционального пространства* и указывается, что при таком понимании вопрос о сходимости распределений вероятностей случайных процессов естественно понимать как *слабую сходимость* соответствующих им мер в функциональном пространстве.

В 1953 году Ю.В. Прохоров получает важный результат [ДС-91]: *для относительной компактности семейства вероятностных мер на произвольном метрическом пространстве достаточна плотность этого семейства* (необходимость верна для *полных сепарабельных метрических пространств*) — и затем строит общую *теорию слабой сходимости вероятностных распределений случайных процессов* [ДС-93], 1956 г.

В 1955—1956 годах А.В. Скороход вводит в пространстве D (функций, непрерывных справа и имеющих пределы слева) *метрику*, превращающую его в *хаусдорфово топологическое пространство*. В последовавшей затем работе "О сходимости А.В. Скорохода" [$Б_{Iкн}$-50, с. 279—289] А.Н. Колмогоров указывает более удобную метрику (эквивалентную метрике Скорохода), в которой пространство D оказывается *сепарабельным*. В этой же работе А.Н. Колмогоров показывает, что из общих топологических рассмотрений следует, что в пространстве D можно ввести и метрику, которая превратила бы его в *полное* сепарабельное метрическое пространство, и ставит задачу возможно более простого (явного) построения такой метрики, что вскоре и было сделано Ю.В. Прохоровым [ДС-93].

А.Н. Колмогоров, П.С. Александров, Л. Фейер и С.М. Никольский
на Первом Конгрессе венгерских математиков (сентябрь 1950 г.)

Основные идеи и результаты общей теории слабой сходимости вероятностных мер на метрических пространствах были изложены в 1956 году в совместном докладе А.Н. Колмогорова и Ю.В. Прохорова [$Б_I$-137] на конференции по теории вероятностей и математической статистике в Берлине.

К пятидесятым годам относятся и замыслы Андрея Николаевича, связанные с понятием *алгоритма*. Их цель — дать возможно более общее математическое определение этого понятия, но так, чтобы это общее определение не привело к расширению уже сформировавшегося понятия *вычислимой функции*. Разработке замыслов Андрея Николаевича "была посвящена дипломная работа В.А. Успенского "Общее определение алгоритмической вычислимости и алгоритмической сводимости", выполненная в первой половине 1952 г." (см. комментарий В.А. Успенского и А.Л. Семенова [$Б_{Iкн}$-50, с. 279–289]). Впоследствии А.Н. Колмогоров изложил свои идеи в докладе "О понятии алгоритма", сделанном им 17 марта 1953 года на заседании Московского математического общества [$Б_I$-127]". В совместной статье А.Н. Колмогорова и В.А. Успенского 1958 года "К определению алгоритма" [$Б_I$-151] (а также в упомянутом комментарии) дан подробный анализ развития этих идей и изложено современное состояние этой проблематики.

Еще в конце сороковых годов Андрей Николаевич приходит в "Большую Советскую Энциклопедию" и на долгие годы связывает с ней свою судьбу,

возглавив Отдел математики выходившего тогда 2-го издания БСЭ. Он не только готовит словник, подбирает авторов, редактирует и переделывает их статьи, но и сам пишет огромное количество статей по самым разнообразным математическим дисциплинам (всего для разных энциклопедических изданий Андреем Николаевичем написано свыше 100 статей! — см. соответствующий раздел *Библиографии*).

Совершенно особое место в изданиях БСЭ занимает основополагающая статья Колмогорова "***Математика***", вышедшая впервые в 38-м томе БСЭ (с. 359–402), 1938 г., затем (в переработанном виде) в 26-м томе второго издания БСЭ (с. 464–483), 1954 г., и (еще раз переработанная) в 15-м томе третьего издания (с. 467–478), 1974 г. (см. [$Б_{II}$-84]). В этой статье он "в сжатой форме и на принципиальной основе проследил историческое развитие математики, указал узловые моменты этого развития и предложил для него оригинальную схему периодизации" [$Б_8$-17].

А.Н. Колмогоров и А. Реньи

В 1951–1952 годах Колмогоров пишет для сборника "Математика, ее содержание, методы и значение" статью "Теория вероятностей" [$Б_{VI}$-32], которая, вместе с его статьей "Вероятность" в 7-м томе второго издания БСЭ (1951 г.), [$Б_{II}$-33], должна, безусловно, включаться в список литературы любого курса теории вероятностей.

В подтверждение сказанного приведем здесь отзыв А.Я. Хинчина и выдержки из письма главного редактора сборника А.Д. Александрова, а также ответ А.Н. Колмогорова на это письмо.

Отзыв А.Я. Хинчина

на статью А.Н. Колмогорова "Теория вероятностей"
(для сборника "Математика, ее содержание, методы и значение")

Статью "Теория вероятностей" следует признать вполне удачной во всех отношениях. Написанная на очень высоком научном уровне, без всяких скидок на неподготовленность читателя, она в то же время доступна пониманию широкого круга лиц, интересующихся математикой. Самое ценное в этой статье, однако, представляет собой никогда еще в такой мере не достигнутая в принципиальных освещениях теории вероятностей связь общей теории с практическими применениями; автор умеет показать, как наибо-

лее абстрактные разделы теоретического построения неразрывно связаны с конкретными запросами практики. Поэтому в его изложении теория вероятностей предстает перед читателем одновременно как стройная и законченная логическая конструкция и как мощный аппарат естествознания и техники, причем эти две картины так тесно проникают друг в друга, что образуют собою органическое, неразрывное единство.

А.Я. Хинчин
10 октября 1951 г.

Из письма А.Д. Александрова к А.Н. Колмогорову

Так как на меня возложена ответственность за завершение работы над монографией "Математика, ее содержание, методы и значение", обращаюсь к Вам по поводу Вашей статьи.

В настоящем ее виде Ваша статья трудна, и с ее появлением может даже создаться представление, будто основы теории вероятностей и нельзя понять "простому смертному".

Я прочел Вашу статью "Вероятность" в БСЭ ⟨2-е изд. — *А.Ш.*⟩. Она произвела на меня очень большое впечатление. Я, конечно, не специалист и занимался вероятностью лишь в связи с физикой, но решаюсь высказать свое мнение. Ничего подобного по простоте и, вместе с тем, глубине изложения я не видел. В своих занятиях основами квантовой механики я подошел к тем же взглядам, но не смог сформулировать их с такой глубиной и четкостью. Ваша формулировка о связи явления с условиями имеет очень большое значение для квантовой механики, для преодоления чисто статистического ее толкования, отвечающего мизесовскому подходу к вероятности (кстати, В.А. Фок специально сказал мне, что считает Ваше толкование вероятности крайне важным).

Для того, чтобы Ваши глубокие и важные, а вместе с тем, простые идеи стали достоянием возможно более широких кругов читателей, я просил бы Вас перестроить Вашу статью с тем, чтобы, начав с указания на объективный характер статистических закономерностей, дав краткую характеристику субъективизма, сразу перейти к указанию на связь явления с условиями и развернуть Ваше понимание вероятности, чтобы оно не затерялось за детерминистической схемой или какими-либо выкладками. В соединении глубины с простотой изложения Ваша статья станет лучшим украшением нашей монографии. Очень прошу Вас именно упростить изложение, чтобы сделать Ваши идеи максимально доступными.

Ввиду крайней срочности работы очень прошу Вас прислать мне Вашу статью в ее новом виде к 20 марта. И в случае Вашего несогласия с моими предложениями прошу Вас сразу сообщить мне об этом . . .

А.Д. Александров
15 февраля 1952 г.

Из ответа А.Н. Колмогорова А.Д. Александрову

Благодарю Вас за Ваше письмо по поводу моей статьи для монографии о математике. Из Ваших пожеланий я заведомо могу

1) *пояснить на примерах в момент их введения понятия случайной величины, математического ожидания, дисперсии, и на возможно более простом примере — "марковскую схему";*

2) *более полно осветить специфичность проблем, когда говорится о возможности формального включения теории вероятностей в теорию меры (я говорил об этом в моих "Основных понятиях теории вероятностей" — в популярной статье, тем более, следовало сказать нечто аналогичное, и я просто позабыл это сделать).*

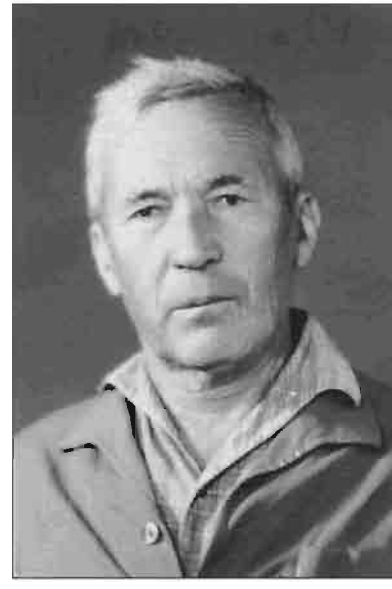
Менее ясен для меня вопрос о перестройке всей статьи и отказе от того, чтобы вводить вероятностные схемы путем противоположения их детерминистическим. Это сопоставление я люблю рассказывать на лекциях и считаю его очень важным, но, может быть, в данной статье оно не вышло или чрезмерно подавило все остальные стороны вопроса.

Основная трудность при освещении философских вопросов теории вероятностей начинается с ясного изложения и диалектического объединения двух положений:

1. *Существует объективная случайность.*

2. *Не существует ничего абсолютно случайного.*

Я понимаю, что с точки зрения отстаивания права на существование теории вероятностей (а, как Вы знаете, эта тема не совсем беспредметна) наиболее существенно первое. Но мне представляется, что в сколь угодно популярной статье необходимо говорить об обеих сторонах дела.



А.Н. Колмогоров
(пятидесятые годы)

Во всяком случае, я учту то обстоятельство, что, по Вашему мнению, статья не освещает достаточно выпукло именно объективный характер вероятностных высказываний. Об упрощении языка, в меру моего умения, я тоже постараюсь позаботиться и к 20 марта новый вариант статьи приготовлю.

А. Колмогоров
26 февраля 1952 г.

Наш очерк, следуя этапам творческого пути Андрея Николаевича в науке, как-то невольно оставил в стороне вопросы математического образования и преподавания математики, хотя, на самом деле, Колмогоров придавал этим вопросам первостепенное значение и отдавал им много времени, сил и творческой энергии. Дадим слово самому Андрею Николаевичу:

> *"Все мои годы активной работы в университете обычно складывались так: скажем, два часа в неделю какой-нибудь обязательный курс — я перечитал все-таки очень* много *разных обязательных курсов: "Теория функций действительного переменного", "Функциональный анализ", "Дифференциальные уравнения", "Теория вероятностей" . . . ; . . . один специальный курс о новейших работах с участием и своих собственных, но все-таки лекционный курс, — вторые два часа. А потом один или два семинара, куда приходят человек десять, скажем, делают поочередно доклады. Руководитель, конечно, рассказывает несколько больше других. И потом уже в этих семинарах выделяются те участники, с которыми начинается строго индивидуальная работа"* [$Б_2$-20].

Андрей Николаевич упомянул здесь лишь немногие из многих *обязательных* (т. е. тех, которые должны сдавать все студенты-математики) курсов, которые он читал в Московском университете, и совсем не назвал никаких *специальных* (которые сдают только студенты, специализирующиеся в той или иной узкой области математики). В бытность мою студентом университета Андрей Николаевич читал нам обязательный курс, который он назвал "Анализ-III" (ниже скажу о нем) и читал специальный курс "Случайные процессы" (1957—58 гг., 1962—63 гг.).

В.И. Арнольд в своих воспоминаниях "Об А.Н. Колмогорове" (см. [$Б_4$]) приводит полную программу семинара по теории динамических систем и гидродинамике, которую объявил Андрей Николаевич в конце пятидесятых годов. Воспроизведем ее здесь полностью, чтобы дать читателю представление, сколько разных глубоких и сложных тем он собирался поднять и обсудить со своими учениками всего лишь в одном семинаре одного учебного года!

Программа
(темы семинара):

1. Краевые задачи для гиперболических уравнений, решения которых всюду разрывно зависят от параметра (см., например, С.Л. Соболев, ДАН (1956), №109, с. 707).
2. Задачи классической механики, в которых собственные функции всюду разрывно зависят от параметра (обзор проблематики — в докладе А.Н. Колмогорова на Амстердамском конгрессе 1954 г.).
3. Моногенные функции Бореля и квазианалитические функции Гончара (в надежде на применение к задачам типа 1 и 2).

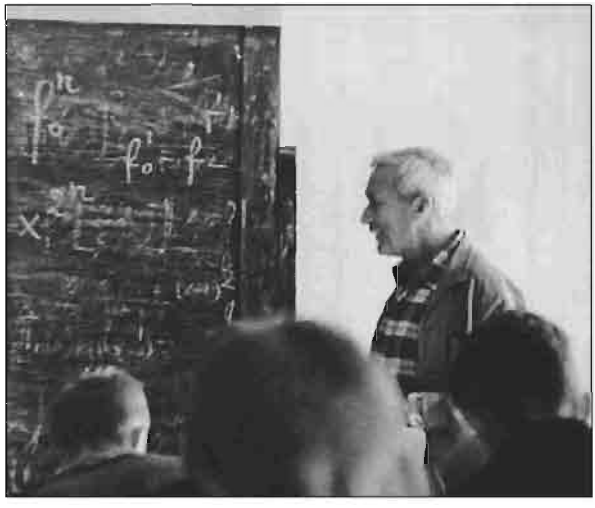
4. Возникновение высокочастотных колебаний при стремлении коэффициентов при старших производных к нулю (работы Волосова и Лыковой для обыкновенных дифференциальных уравнений).
5. В математической теории уравнений в частных производных с малым параметром при старших производных до настоящего времени изучены явления типа пограничных слоев и внутренних слоев, сходящихся к поверхностям разрыва предельных решений или их производных при "исчезновении вязкости". В реальной турбулентности решения портятся всюду плотным образом. Математическое изучение этого явления предполагается провести хотя бы на модельных уравнениях (модель Бюргерса?).
6. Вопросы устойчивости ламинарных течений. Асимптотически исчезающая устойчивость (хотя бы на модельных уравнениях).
7. Обсуждение возможностей применения к реальным механическим и физическим задачам представлений метрической теории динамических систем. Вопросы устойчивости различных типов спектра. Грубые системы и грубые свойства (в этом последнем направлении для систем с несколькими степенями свободы почти ничего не известно!).
8. Рассмотрение (хотя бы на моделях) гипотезы, что в обстановке конца п. 5 в пределе динамическая система превращается в случайный процесс (гипотеза практической невозможности долгосрочного прогноза погоды).

В письмах и дневниках Андрея Николаевича мы видим, как много внимания и забот он уделял математическому образованию в Московском университете в годы войны. Сколько раз он устраивал и перестраивал программы обучения всего для какого-нибудь десятка человек, которые оставались в это время на Мехмате в Москве. Сколько раз расставлял и перераспределял немногих остававшихся в Москве преподавателей. Как стремился повлиять и на содержание обучения эвакуированной части факультета ...

Еще раньше, в тридцатые годы, совсем еще молодой Андрей Николаевич многократно (вместе с П.С. Александровым и без него) отправлялся на целые семестры в Днепропетровск или Тбилиси, чтобы поставить на должный уровень образование в тамошних университетах. И опять мы видим те же подходы: какой-нибудь обязательный курс (в Днепропетровске, например, это были проективная геометрия, теория функций, теория вероятностей, в Тбилиси — теория вероятностей), один или два специальных курса, и спецсеминары (например, по проблеме Дирихле в Днепропетровске и об уравнении Смолуховского в Тбилиси). И опять из этих семинаров выделялись ученики, с которыми следовала "строго индивидуальная работа". Так из Днепропетровска "возник" и навсегда остался близок Сергей Михайлович Никольский, сам давно уже академик, ученик, всего двумя годами младший своего учителя, хранящий о нем самую благодарную память.

"Действительно хорошо преподавать математику может только человек, который сам ею увлечен и воспринимает ее как живую развивающуюся науку", — эти слова А.Н. Колмогорова, как ни к кому другому, относятся к нему самому.

Кроме курсов, которые традиционно входили в программу обучения на Механико-математическом факультете, Андрей Николаевич придумывал, наполнял содержанием и сам читал совершенно новые лекционные курсы. Так, в начале пятидесятых годов он ввел уже упомянутый новый курс "Анализ-III", призванный заменить читавшиеся тогда по отдельности курсы теории функций действительного переменного, теории меры, теории интегральных уравнений и вариационного исчисления. В 1954 и 1960 годах двумя отдельными выпусками выходят "Элементы теории функций и функционального анализа" [$Б_{Iкн}$-22] и [$Б_{Iкн}$-24] — записи лекций по этому новому курсу, читавшемуся тогда А.Н. Колмогоровым (на Механико-математическом факультете) и С.В. Фоминым (на Физическом факультете). Этой книге была уготована долгая и счастливая жизнь — второе издание вышло в 1968 году отдельной книгой, в 1989 году — 6-е издание, в 2003 году — 7-е издание. А начиналось все с лекций, которые записывали, обрабатывали и размножали на факультетском ротапринте студенты под руководством аспирантов.



А.Н. Колмогоров на лекции

Андрей Николаевич и еще раз испробовал этот метод, когда читал курс теории случайных процессов (1958—1959 гг.) и одновременно готовил учебное пособие по этому курсу для студентов четвертого курса, которым его предстояло сдавать. Своему ученику В. Леонову он поручил организовать записи этих лекций, их обработку и "издание" на пишущей машинке. Это было сделано, и такие машинописные экземпляры сохранились, и, конечно, их следует издать отдельной книжкой. Забегая вперед, скажу, что много позже, уже в восьмидесятые годы таким же способом Андрей Николаевич с помощью А.Г. Драгалина "соорудил", как он сам выражался, и издал, уже в Издательстве МГУ, два курса по математической логике ("Введение в математическую логику", 1982 г., и "Математическая логика. Дополнительные главы", 1984 г.). Сам обязательный курс математической логики был введен на Мехмате также А.Н. Колмогоровым и впервые им прочитан в 1972 году.

Приведем еще здесь коротенькую записку Андрея Николаевича, где он просто, для себя, перечисляет свою “педагогическую нагрузку” на осенний семестр 1956–1957 учебного года.

1. Математическая статистика (четверг, 16–18, аудитория 12-08) — элементарный годичный курс для студентов четвертого курса и других слушателей, интересующихся практическими применениями теории вероятностей.

2. Избранные вопросы теории вероятностей (среда, 18–20, аудитория 16-10) — курс будет состоять из отдельных циклов лекций на различные темы; первый цикл из пяти-шести лекций: “Основные понятия теории информации”.

3. Семинар по избранным вопросам теории функций нескольких переменных и теоретико-множественной геометрии (среда, 16–18, аудитория 12-08) — семинар для студентов третьего и четвертого курсов; вводная литература для желающих быть особенно хорошо подготовленными: Сакс, “Теория интеграла”, гл. 2, 5, 9; Кронрод, статья из УМН, т. 5, вып. 1 (1950).

   Организационное собрание постоянных участников — 3 октября; 10-го, 17-го и 24-го октября А.Н. Колмогоров будет излагать (с доказательствами) свои результаты из ДАН, т. 108 (1956), с. 179–182.

4. Семинар по избранным вопросам теории вероятностей (пятница, 10–12, аудитория 15-04).

Коротко об этапах пути А.Н. Колмогорова в пятидесятые годы. В 1951–1953 годах — он снова директор Научно-исследовательского института математики Московского университета — подразделения, с которого начал свою работу в должности научного сотрудника только что окончивший аспирантуру Андрей Николаевич в 1929 году. Тогда это была, так сказать, математическая часть Физико-математического факультета, потом после создания отдельного, Механико-математического факультета она была упразднена, затем снова восстановлена, уже в виде двух отдельных институтов — Института математики и Института механики МГУ. Институт математики позднее все же прекратил свое существование, а Институт механики существует и работает и по настоящее время.

К пятидесятым годам относится и наиболее знаменательный период организационной деятельности А.Н. Колмогорова в Московском университете. С 25 декабря 1954 г. по 1 февраля 1958 г. Андрей Николаевич — декан Механико-математического факультета. “ . . . Андрей Николаевич был замечательным деканом. Он говорил, что надо прощать талантливым людям

их талантливость, и спас не одного из известных сейчас математиков от исключения из университета ... " (В.И. Арнольд, [$Б_4$; с. 160]). И сам он свое деканство считал впоследствии достаточно удачным.

Одновременно он продолжает руководить и созданной им еще в 1935 году кафедрой теории вероятностей. Помимо чтения обязательных и буквально всех специальных курсов кафедры, занятий с учениками в семинарах и "строго индивидуально", Андрей Николаевич большое внимание уделяет работе так называемого Большого семинара кафедры. Этот семинар собирался раз в неделю, и все преподаватели, сотрудники и аспиранты кафедры по очереди рассказывали о своих работах. Андрей Николаевич скромно сидел за первой партой у входа и задавал докладчикам вопросы, всегда по существу, к какой бы узкой или специальной области исследований доклад ни относился.

На балконе московской квартиры в МГУ

Руководя аспирантурой "по должности" (в качестве директора Института математики или декана), Андрей Николаевич считал необходимым участвовать самым деятельным образом в руководстве аспирантами и по сути. С достаточной регулярностью он вызывал к себе каждого аспиранта независимо от его специализации, входил с ним в научную беседу, давал советы и по существу тематики, и по части необходимых для дальнейшего продвижения разделов дополнительного изучения, индивидуального плана отчетов и экзаменов и т. д.

Андрей Николаевич, как всегда, проявляет большой интерес и к общематематической жизни страны. В качестве примера приведем полученное когда-то мною письмо от М.А. Красносельского о поездках Андрея Николаевича в Воронеж (и о помещаемой ниже фотографии):

"Создание известной Воронежской математической школы (нелинейный анализ, дифференциальные уравнения, общий функциональный анализ, численные методы и др.) связано с возникшим в 1952–1955 гг. коллективом молодых ученых в Воронежском университете. Многие годы А.Н. Колмогоров активно поддерживал новый научный коллектив. Он был членом редколлегии "Трудов Воронежского семинара по функциональному анализу"; неоднократно приезжал в Воронеж с лекциями и докладами; был инициато-

ром проведения в Воронеже одной из Всесоюзных математических олимпиад, что существенно отразилось на уровне будущих студентов-математиков; оказал огромное влияние на круг научных интересов, на уровень научного энтузиазма, на широту научных взглядов многих воронежцев.

На снимке (слева направо): Г.А. Безсмертных, М.А. Красносельский, А.Н. Колмогоров, В.И. Соболев, А. Соболев

Во время одного из приездов в Воронеж А.Н. Колмогоров провел вместе с группой математиков несколько дней вне города на берегу реки Воронеж. Утренние прогулки с А.Н., дневные дискуссии на различные темы и, особенно, вечерние и ночные беседы у костра незабываемы".

5 мая 1953 года в здании Московского университета на Моховой состоялось совместное заседание Ученого Совета Механико-математического факультета, Московского математического общества, Отделения физико-математических наук АН СССР и Математического института имени В.А. Стеклова, посвященное пятидесятилетию Андрея Николаевича. Из сохранившегося Приглашения на это заседание мы знаем его повестку:

1. И.Г. Петровский. *Роль А.Н. Колмогорова в математической жизни нашей страны.*
2. П.С. Александров, И.М. Гельфанд, А.Я. Хинчин. *А.Н. Колмогоров как математик.*
3. Приветствия.

В ответ на приветствия А.Н. Колмогоров сказал: *"Мне посчастливилось открыть некоторые закономерности природы ... Но моя основная любовь — математика. Берясь за многое, я много ошибался и вызвал много острых обид. В трудные минуты жизни, когда мне казалось, что я провалился и перессорился, ко мне вдруг все тепло относились. Вероятно, потому, что я всегда ошибался не для себя, а для дела".*

К.Е. Ворошилов вручает А.Н. Колмогорову Орден Ленина
в связи с его пятидесятилетием

Ноябрь 1955 года и весенний семестр 1958 года Андрей Николаевич провел в Парижском университете. Сохранился его отчет 1958 года об этой командировке в качестве "ассоциированного профессора". В нем, в частности, говорится:

"С 5 марта по 6 июня я прочел два курса лекций по одиннадцать лекций в каждом:

1. *Избранные вопросы теории функций,*
2. *Спектральная теория динамических систем и случайных процессов.*

Первый курс лекций был посвящен, главным образом, изложению новых результатов, полученных мною, А.Г. Витушкиным, В.И. Арнольдом (решение поставленной в 1900 году 13-й проблемы Гильберта), В.М. Тихомировым и В.Д. Ерохиным. Эти новые результаты связывались со старыми исследованиями по теории приближений

русских, французских (Ж. Фавар) и других исследователей. Этот первый курс был сравнительно доступен и собирал вначале около 70 и в конце около 40 слушателей, из которых, однако, более половины составляли известные научные работники и лишь менее половины — студенты. Систематически слушали весь курс академик Ж. Дармуа, член-корреспондент Академии Наук П. Леви (бывший, пожалуй, самым внимательным слушателем, входившим во все детали изложения). Ряд других известных математиков (академики А. Картан, Ж. Лере и др.) приходили на отдельные лекции. Предположительно, обработанные мною записки курса, составленные слушателями, будут изданы в "Анналах Института Фурье" (Гренобль). Второй курс имел более специальный характер и посещался, в основном, специалистами в теории вероятностей. Состав слушателей был, таким образом, невелик, но весьма квалифицирован. Записки лекций, составлявшиеся Реньи — сотрудником Института Пуанкаре и студентом Биту после моей обработки и дополнений предполагается опубликовать в "Анналах Института Пуанкаре" (Париж).

Мною был сделан также доклад "Некоторые вопросы теории приближений" во Французском математическом обществе и доклад "Линейная размерность векторных топологических пространств" в семинаре "Н. Бурбаки" перед аудиторией в примерно 100 человек.

Во второй курс входили две лекции, связанные с вопросами классической механики. По этим вопросам мною был дополнительно сделан доклад в семинаре профессора Жане.

Я сделал также доклад в семинаре академика Дармуа "О двух равномерных предельных теоремах теории вероятностей".

Кроме того, по просьбе университета и по согласованию с нашим посольством был устроен мой доклад более общего содержания "Об организации преподавания математики и научных математических исследованиях в СССР", собравший аудиторию около 150 человек.

Научное общение со специалистами по теории вероятностей было довольно интенсивным (особенно с проф. П. Леви, проф. Р. Форте и во время нескольких коллективных прогулок под Парижем). Из математиков других направлений для меня было интересно общение с молодым специалистом по топологии и функциональному анализу А. Гротендиком, много интересных бесед я провел с проф. Ж. Фаваром в Гренобле, куда приезжал по его приглашению во время Пасхального перерыва в занятиях.

На собственную научную и литературную работу у меня оставалось не много времени, но все же я получил некоторые новые результаты в теории приближений, усовершенствовал многие дока-

зательства теорем, излагаемых на лекциях. Кроме того, во время посещения Всемирной выставки в Брюсселе я прочел доклад в Брюссельском университете с изложением некоторых результатов по теории функций. Аналогичный доклад я прочел 19 июня в Гёттингене (ФРГ), где пробыл на обратном пути один день. Также на обратном пути я прочел два доклада в Праге, задержавшись там для этого на два дня, и один доклад в Варшаве 24 июня."

Я хочу привести здесь полностью еще один документ. Сохранилась тетрадка, вся заполненная от руки А.Н. Колмогоровым в один день — 22 сентября 1958 года (отметим, как это любил делать Андрей Николаевич, — в день осеннего равноденствия). В этот день он решил подвести какие-то, промежуточные, итоги своей научной деятельности, в частности, выделить те темы, в которых собирается продолжить свои личные исследования, и распределить другие между своими учениками и продолжателями.

Вот эти записи:

ТЕМЫ ДЛЯ РАБОТЫ

А) Для окончания и передачи другим исследователям (темы I–IV).

I. Теория динамических систем и классическая механика

Заметки в "ДАН" — 1953 и 1954.

Доклад в Амстердаме — 1954.

Литературная работа:

1. Примечания к перепечатке в "УМН" амстердамского доклада.
2. Заметка в "CR" о задаче трех тел.
3. Подробный мемуар (Мешалкин)
   и соответствующая глава парижских лекций.
   [Непрерывный спектр на торе, задача трех тел]

Задачи для исследования:

1. Продолжение исследований "обмена и захвата" — Алексеев.
2. Применения к твердому телу — Мешалкин.
3. Окончание исследования движений на двумерном торе (работа Salem'a?).
   — Олег ?
   Мешалкин, Синай
4. Устойчивость перемешивания на многообразиях отрицательной кривизны.
   Мешалкин, Синай — ?
5. Задача о биллиарде.
   Студенты под руководством Мешалкина ?
6. *Квази-аналитичность по параметру* ? ?

II. Предельные теоремы

Обзор в “Вестнике МГУ”,

Стокгольмские и Парижские лекции — 1955 г.

Работа в “ТВ” и в сборнике Lévy.

Литературная работа:

1. Парижские лекции (со включением доказательства (?), коэффициента эргодичности, стационарных процессов).
   (Реньи, Прохоров)
2. Обзор для Cramér’a. (Прохоров)
3. Предельные теоремы для функционалов от стационарных процессов.
   (Розенблат)
   Розанов (см. VII)

III. Суперпозиции

Заметки в “ДАН” — 1956–57

Литературная работа:

Соответствующая глава парижских лекций.

Дальнейшие исследования:

Арнольд и его студенты ?

IV. Приближения, понятия теории информации в теории функций и анализе

“УМН”, заметка в “ДАН” — 1957

Литературная работа:

1. Статья с Володей для “УМН”.
2. Парижские лекции. (Алянич, Арнольд, Володя)
3. Заметка о поперечниках. (Володя) ?

ε-энтропии и емкости и трудности переработки информации
Володя ? Арнольд ? Ерохин, Витушкин, Бахвалов, Бабенко и др.

B) <u>Для сосредоточенной работы</u> (темы V–IX).

V. Основания теории вероятностей

Варшавский доклад.

Литературная работа:

Новое издание “Основных понятий” (Леонов, Ширяев)

Задачи для дополнительной разработки:

1. Необходимый запас булевых алгебр с системами мер и их представления (совершенные меры, пространство Лузина по Блэквеллу и пр.).

2. Алгебра “событий в момент времени t” в теории случайных процессов и строго-марковские процессы.

VI. Теория информации

Литературная работа:

Общие свойства информации (с доказательствами) и информация в стационарных процессах — для парижских лекций и соответствующего мемуара (см. III) и для “Основных понятий”.

Проблемы:

1. Обобщение теоремы Шеннона — передача точной (т. е. дискретной!) информации через непрерывный канал.
2. Вопрос о передаче неточной информации.
3. Спектральные проблемы (после изучения Пинскера).
4. Качественное понятие информации.
   ? Сотрудничество с Р.Л. Добрушиным
   Розанов и др. ?

VII. Спектральная теория динамических систем и случайных процессов

Литературная работа:

1. Парижские лекции и соответствующий мемуар. (Реньи, Розанов (?))

Проблемы:

1. Спектральные инварианты динамических систем с исследованием коммутативных систем проективных операторов.
2. Исследования, отправляющиеся от Гирсановского простого спектра.
3. Счетно-кратность спектра регулярных систем.
4. Алгебра семиинвариантов с применениями.
   Связи с проблемой моментов. (Ширяев, Леонов)
5. Свойства случайной спектральной функции в связи с предельными теоремами. (Розанов)
6. Непрерывный аналог теоремы Блан-Лапьера—Форте.

VIII. Турбулентность и примыкающие вопросы дифференциальных уравнений

(1) Изучение литературы по устойчивости.

(2) Стационарные решения, их отщепление, возникновение в стороне: единственность, характер спектра.

(3) Теория исчезающей устойчивости.

(4) Асимптотические исследования при наличии быстрых пульсаций.

Мешалкин, Синай, Баренблатт ?

В конечном счете, основные **мои личные направления**:

IX. Обобщенные функции

X. Приемочный контроль

Заключительная публикация — Айвазян.

Большев ??

Литературная работа:

1. Примечания к Амстердамскому докладу.
2. Заметка в Comptes Rendus.
3. Мемуар (Мешалкин).
4. Парижские спектральные лекции.
5. Парижские лекции о предельных теоремах (Реньи, Прохоров).
6. Обзор для Cramér'a (Прохоров).
7. Парижские лекции по теории функций (Алянич,Володя, Арнольд).
8. Статья с Володей в УМН.
9. Заметка о поперечниках (Володя).
10. Основные понятия (Леонов? Ширяев).
11. Мемуар о спектральной теории.
12. Статья о приемочном контроле.

1) Лекции и другие текущие обязательства (пятница—суббота)
2) Одна текущая литературная и систематизаторская работа утра воскресений, понедельник, вторник
3) Разные выдумки и разыскания, их оформление
   (a) для публикации
   (b) для памяти

На 1958—59 учебный год:

Карацуба	Айвазян	Тихомиров	Алексеев	
Арнольд	Ширяев	Синай	Беляев	
Хазен	Леонов	Ерохин	Мешалкин	Матвеев

Математические обязанности:

Кафедра

Семинар кафедры

Лекции о случайных процессах (Леонов)

Московское математическое общество

Отдел теории вероятностей Стекловского института

БСЭ — В.И. Битюцков

УМН	**Журнал Т.В.**	**Матем. сб.**	**Реферат. журнал**	**ДАН**
	Ю. Прохоров В. Золотарев		Н.В. Смирнов	Б.И. Ковнер

Общество "Франция–СССР"

22 сентября 1958 г.

В московской квартире (1958 г.)

Наверное, есть необходимость дать пояснения к этому документу, в частности, "расшифровать" встречающиеся здесь имена (хотя абсолютное большинство их — непосредственные ученики Андрея Николаевича).

Основные темы исследований имеют сплошную римскую нумерацию — от I до X. Они сгруппированы в два раздела — темы I–IV для окончания и передачи другим исследователям, а темы V–X для сосредоточенной работы. Две из них, IX и X, выделены в подраздел "Основные мои личные направления".

Рассмотрим на примере ***темы I***, как мыслит себе Андрей Николаевич ее дальнейшую разработку.

Сразу под названием темы приводится уже сделанное по ней и сданное в печать:

Заметки в "ДАН" — 1953 и 1954 — скорее всего, речь идет о [$Б_I$-129] и [$Б_I$-131].

Доклад в Амстердаме — 1954 — это [$Б_I$-132].

Далее намечается, что́ следует опубликовать в ближайшем будущем (Литературная работа) и кого привлечь к подготовке этих публикаций (обзорную статью по этой тематике А.Н. называет по-старинному "мемуар" и предполагает привлечь над работой над ней своего аспиранта Льва Дмитриевича Мешалкина).

Следующий пункт — *Задачи для исследования*. Их, как мы видим, здесь сформулировано шесть. Андрей Николаевич в некоторых случаях уверенно, а в некоторых под вопросом намечает исследователей из числа своих учеников (Владимир Михайлович Алексеев, Лев Дмитриевич Мешалкин, Олег Сергеевич Ивашев-Мусатов, Яков Григорьевич Синай).

По ***теме II*** уже сделано:

Обзор в "Вестнике МГУ" — [$Б_I$-128],

Работа в "Т.В." — [$Б_I$-136] и *в сборнике Lévy* — [$Б_I$-149].

В дальнейшей литературной работе предполагается сотрудничество с Юрием Васильевичем Прохоровым, М. Розенблат-Ротом и Юрием Анатольевичем Розановым.

В ***теме III*** опубликовано: [$Б_I$-140] и [$Б_I$-145]. Дальнейшие исследования предполагается поручить Владимиру Игоревичу Арнольду и "его студентам" (хотя и сам В.И. Арнольд был тогда студентом четвертого курса).

Тема IV. В 1957 году в "ДАН" была опубликована заметка [$Б_I$-145]. *Статья с Володей* (Владимиром Михайловичем Тихомировым) появилась в "Успехах математических наук" [$Б_I$-155]. *Заметка о поперечниках (Володя)?* — большая статья В.М. Тихомирова о поперечниках была опубликована в "УМН" в 1960 году [ДС-109].

К исследованиям в этой проблематике Колмогоров думает привлечь и разных своих учеников (кроме упоминавшихся уже В.М. Тихомирова и В.И. Арнольда, Владислава Дмитриевича Ерохина и Анатолия Георгиевича Витушкина), и близких ему математиков (Николая Сергеевича Бахвалова и Константина Ивановича Бабенко). Появляется здесь и совсем новая, неизвестная нам фамилия — Алянич.

Тема V открывает раздел ***"В) Для сосредоточенной работы"***. Здесь мы видим, что Андрей Николаевич собирается переиздавать свои "Основные понятия теории вероятностей", которые до этого выходили на русском языке только один раз, в 1936 году. Второе русское издание в действительности было осуществлено в издательстве "Наука" в серии "Теория вероятностей и математическая статистика" только в 1974 году. К тому времени В. Леонова уже не было в живых, а я действительно помогал в подготовке этого переработанного Колмогоровым и дополненного издания его классической книги [$Б_{Iкн}$-9].

Задачи для дополнительной разработки Андрей Николаевич здесь оставляет за собой.

По теории информации, выделенной в ***тему VI***, Андрей Николаевич собирается сделать многое и в "литературном плане", и в новых исследованиях (быть может, в сотрудничестве со своими учениками Роландом Львовичем Добрушиным, Марком Семеновичем Пинскером и Юрием Анатольевичем Розановым).

Целых шесть проблем Андрей Николаевич выдвигает для ближайших исследований по спектральной теории динамических систем и случайных процессов (***тема VII***). Пункт 3, как видим, инициирован работами аспиранта кафедры Игоря Владимировича Гирсанова. И способности, и работы этого исключительно талантливого и рано ушедшего ученика Е.Б. Дынкина Андрей Николаевич очень ценил. В этой тематике А.Н. вновь рассчитывал и на помощь своих учеников (Ю.А. Розанова, В.П. Леонова и А.Н. Ширяева).

Л.Н. Большев

Тема VIII — турбулентность — как мы знаем, привлекала А.Н. Колмогорова еще с конца тридцатых – начала сороковых годов. Здесь, в конце пятидесятых, Андрей Николаевич собирается рассмотреть и *примыкающие вопросы дифференциальных уравнений*. Исследования по пунктам 1–3 он оставляет за собой, а к *асимптотическим исследованиям при наличии быстрых пульсаций* собирается привлечь своих учеников Л.Д. Мешалкина, Я.Г. Синая и более старшего Григория Исааковича Баренблатта.

Темы IX и ***X*** Андрей Николаевич записывает под заголовком ***"Мои личные направления"***, при этом тематику обобщенных функций он собирается, по-видимому, разрабатывать в одиночку, а к задачам приемочного контроля — привлечь своего сотрудника по институту им. В.А. Стеклова Сергея Артемьевича Айвазяна, в 1957 году окончившего кафедру теории вероятностей, и своего ученика, тогда доцента кафедры, одного из лучших наших статистиков Логина Николаевича Большева. Приемочным контролем у Андрея Николаевича занимался впоследствии и другой его ученик, Юрий Константинович Беляев, тогда аспирант Стекловского института, и работы эти завершились выходом монографии [ДС-7] и статьей в БСЭ [$Б_{II}$-96].

Далее под заголовком *"На 1958–59 учебный год"* следуют фамилии учеников, выписанные стобиками. Мы видим, что в первом столбике тогдашние студенты 4-го курса (А.А. Карацуба, В.И. Арнольд, Э.М. Хазен), далее выпускники 1957 года, сотрудники МИАН (С.А. Айвазян, А.Н. Ширяев, В.П. Леонов); затем выпускники того же 1957 года, но аспиранты

кафедры (В.М. Тихомиров, Я.Г. Синай, В.Д. Ерохин); более старшие аспиранты (В.М. Алексеев, Ю.К. Беляев, Л.Д. Мешалкин) и отдельно — еще более старший аспирант МИАНа Ростислав Федорович Матвеев.

В.И. Арнольд

Я.Г. Синай

Новый раздел имеет показательное название — *"Математические обязанности"*, хотя, если посмотреть, что в него включено, вряд ли кто-либо другой назвал бы такого рода обязанности математическими.

В самом деле, свое время и силы в 1958–59 учебном году Андрей Николаевич предполагает разделить между: обязанностями по кафедре (сюда включается внимание к Большому семинару кафедры, о котором мы уже упоминали выше, также упоминавшаяся подготовка (с помощью В. Леонова) к изданию, хотя бы и машинописному, курса лекций по теории случайных процессов, которые в том же 1958–59 году читались студентам-вероятностникам 4-го курса) и обязанностями в Московском математическом обществе.

Далее — *"Отдел теории вероятностей Стекловского института"*. В Математическом институте им. В.А. Стеклова Академии наук Андрей Николаевич начал свою работу еще в 1938 году, когда в этом Институте только был создан Отдел теории вероятностей, который и возглавил А.Н. Колмогоров. Всю свою дальнейшую жизнь Андрей Николаевич практически работал одновременно в двух самых крупных научных математических учреждениях страны — на Механико-математическом факультете Московского государственного университета и в Математическом институте Академии наук, поочередно делая одно из них местом своей постоянной работы, а другое — работы по совместительству. Вряд ли следует говорить, что сам Андрей Николаевич не различал свои полные и "половинные"

должности, всегда работая с полной отдачей и везде успевая сделать так много, что даже описать все его организационные достижения (уж не говоря о научных, творческих) в пределах одного очерка трудно.

Был какой-то момент, когда в Стекловском институте было принято решение об упразднении совместительства. Андрей Николаевич (основным местом работы которого в то время был Московский университет) одним из первых тут же подал заявление об уходе с поста заведующего Отделом теории вероятностей, передав его своему ученику Ю.В. Прохорову. Впоследствии Андрей Николаевич вновь возвращается в МИАН, где для него открывается новый Отдел — математической статистики и теории информации.

Так же и в университете. Андрей Николаевич начинает с должности научного сотрудника Научно-исследовательского института математики и механики МГУ, коего уже через три года становится директором. В 1935 году организует кафедру теории вероятностей на Механико-математическом факультете, отделившемся от Физико-математического, и тридцать лет ею заведует. Передает кафедру своему ближайшему ученику академику Украины Б.В. Гнеденко (в настоящее время этой кафедрой заведует А.Н. Ширяев), а сам создает новую — кафедру математической статистики (позднее кафедра математической статистики и теории случайных процессов). Эту кафедру Андрей Николаевич оставляет другому своему ученику — Ю.А. Розанову (этой кафедрой сейчас заведует В.В. Козлов), а сам в последние годы жизни становится заведующим кафедрой математической логики, которую ныне возглавляет еще один ученик А.Н. Колмогорова — В.А. Успенский. А кроме этого, в Университете Андрей Николаевич открывает и сам возглавляет научно-исследовательскую лабораторию вероятностных и статистических методов (об этом подробнее см. в разделе "Шестидесятые годы", с. 146), затем один четырехлетний срок работает деканом Механико-математического факультета, а значит, и председателем Ученого совета факультета, до конца своих дней возглавляет диссертационный Совет, а также Отделение математики, ведающее, в частности, всей математической аспирантурой.

В.А. Успенский

Андрей Николаевич с учениками (В.М. Тихомиров, А.Н. Ширяев)

Однако, вернемся к разделу *"Математические обязанности"* из тетрадки 1958 года. Вслед за обязанностями по Стекловскому институту стоит *"Московское математическое общество"*.

А.Н. Колмогоров — член Московского математического общества с 1 февраля 1930 года,

— в 1953 году его избирают почетным членом,

— с 1954 — вице-президент, в 1964 — президент ММО. Этот пост он занимал до 1966 года и снова с 1973 по 1985 год, т. е. в сентябре 1958 года, когда писалась эта тетрадь, он был вице-президентом ММО.

На заседании Ученого Совета механико-математического факультета МГУ

А.Н. Колмогоров 102 (!) раза выступал с докладами на заседаниях общества. Его первый доклад *"Пример тригонометрического ряда Фурье–Лебега, расходящегося почти всюду"* состоялся 8 октября 1922 г., его последний собственно математический доклад — *"Замечания о статистических решениях уравнений Навье–Стокса"* — 18 января 1978 года. (И затем еще только два выступления: 13 декабря 1983 г. — *"Вступительное слово, посвященное 100-летию со дня рождения Н.Н. Лузина"*, и 2 апреля 1985 г. — *"Первая Московская школьная математическая олимпиада"*.)

Стараниями А.Н. Колмогорова в ММО была открыта отдельная секция теории вероятностей (в разное время ее руководителями, помимо Андрея Николаевича, были поочередно Б.А. Севастьянов, Л.Н. Большев и Ю.В. Прохоров). На этой секции А.Н. сделал, по меньшей мере, 16 докладов и сообщений.

Дальше выписаны многочисленные дела, которые Андрей Николаевич берет на себя по части разных математических изданий. В работе в "Большой Советской Энциклопедии" Андрей Николаевич рассчитывает на своего ученика Вадима Ивановича Битюцкова (который пришел в математическую редакцию БСЭ в 1950 году, а с 1959 по 1967 год возглавлял математическую редакцию издательства "Наука"; в 1967 году Битюцков снова вернулся в БСЭ, став заведующим редакцией математики и оставался на этой должности до самой своей кончины в 2000 году, дав жизнь очень многим математическим изданиям, в том числе уникальной энциклопедии "Вероятность и математическая статистика", 1999 г.).

Далее следует журнал "Успехи математических наук", в основании которого Андрей Николаевич принимал самое непосредственное участие, всю свою жизнь был членом редакционной коллегии, а с 1946 по 1955 и с 1983 по 1987 год, т. е. до конца своих дней, — главным редактором.

Журнал "Теория вероятностей и ее применения" был основан А.Н. Колмогоровым в 1955–1956 годах как журнал Академии наук. (Отметим, что это был первый специализированный математический журнал. До этого все известные журналы — "Известия АН СССР, серия математическая", "Математический сборник", "Успехи математических наук", "Доклады АН СССР" (раздел математики) — были общематематическими.) А.Н. Колмогоров становится главным редактором нового журнала и привлекает к участию в редколлегии В.С. Королюка (зам. главного редактора), В.М. Золотарева (ответственный секретарь), С.Н. Бернштейна, Б.В. Гнеденко, Ю.В. Линника, Т.А. Сарымсакова, Н.В. Смирнова и А.Я. Хинчина. Мы видим, что Андрей Николаевич рассчитывает на своих учеников Ю.В. Прохорова и В.М. Золотарева (в 1967 году Ю.В. Прохоров становится главным редактором журнала "Теория вероятностей и ее применения", а В.М. Золотарев — остается ответственным секретарем редакции).

В работе в реферативном журнале “Математика” Андрей Николаевич собирается сделать ставку на своего коллегу и сотрудника по Стекловскому институту статистика Николая Васильевича Смирнова, а в журнале “Доклады Академии наук СССР” — часть работы поручить Б.И. Певзнер (супруге С.С. Ковнера, по фамилии которого А.Н. ее здесь обозначает).

Все эти имена обдумываются в помощь себе самому: некоторые из названных лиц действительно стали участниками и помощниками Андрея Николаевича при осуществлении этих его многочисленных и разнообразных “математических обязанностей”. Но львиную долю всей этой неподъемной работы Андрей Николаевич все равно сохранил за собой.

Ответственно и с интересом относился он и к работе в Правлении Общества дружбы с Францией. Сохранилось немало писем А.Н., в которых упоминается его деятельность как члена правления этого общества, председателем которого был в ту пору писатель Илья Эренбург. В домашнем архиве А.Н. Колмогорова нашлась анкета общества “Франция–СССР”. Отвечая на ее вопросы, в частности, о своем отношении к Франции, Андрей Николаевич писал:

> *“Личные пристрастия к странам так же трудно объяснить, как и привязанности к людям. Я люблю вашу страну, хорошо себя в ней чувствую. Мне близки многие стороны французской культуры. Тесная связь французской и русской математической науки традиционна. Очень существенно было бы расширение личных контактов, особенно между научной молодежью. Если говорить о вещах, далеких от моей профессии, я особенно люблю старую французскую музыку — Корруа, Шарпантье, Куперена”.*

Но записи Андрея Николаевича от 22 сентября 1958 года на этом не кончаются. Он как бы сам ощущает, что калейдоскоп разных его дел и обязанностей получился слишком пестрым, и решает подвести некоторые итоги своих чисто научных занятий, начиная с самого начала, с первой, не состоявшейся тогда публикации 1922 года (работа “Об операциях над множествами” была опубликована, как уже упоминалось, только в 1928 году):

Об основных направлениях моей работы

1. *Конструктивная математика, математическая логика*
1925 (если причислять сюда уже первые работы по дескриптивной теории — 1922)

2. *Предельные теоремы теории вероятностей, построенные на допущениях типа независимости или их ослаблений*
1925

3. *Меры, чисто метрическая теория функций, ... с многомерными обобщениями, по аналогии с понятиями тензорного анализа, соответствующие методы в гомологической топологии, обобщенные функции и распределения. [Основания теории вероятностей]*
1930

4. *Дифференциальные уравнения процессов и всевозможные проблемы их предельного поведения (предельные переходы по t и по параметрам)*
1936

Марковские процессы,
Турбулентность как общематематическая идея
1930

5. *Теория приближений*
1936

Общие вопросы приближений с точки зрения количества информации
1956

6. *Спектральная теория процессов, однородных полей, унитарные представления групп*
1939

Почти периодичность в классической механике и соответствующие вопросы квазианалитической зависимости от параметров
1953
[Отщепление или возврат к общей проблеме?]

7. *Информация, основы статистики (взаимодействие при наблюдениях, регулирование)*
1941, 1956

Естествознание

8. *Турбулентность как природное явление*
1935

9. *Общая циркуляция в атмосфере или океанах, прогнозы*
Примеры

10. *Статистические вопросы космогонии*

За этими пределами — решение отдельных задач

Обычно Андрей Николаевич и Павел Сергеевич проводили в Москве середину недели, со вторника по пятницу, а с вечера пятницы по утро вторника — в Комаровке. Сохранился листочек с расписанием на одну из “московских” недель тоже примерно 1958 года.

Вторник

18–20. Математическое общество

20–22. Семинар кафедры и заседание кафедры

Среда

16–18. Маленький семинар для аспирантов

18–20. Лекция по спектральной теории

20– Чайно-музыкальное собрание

Четверг

МИАН

Основы радиотехники

16–18. Кружок первого курса

Пятница

9.30–12. Семинар по спектральной теории

12–14. Лекция по случайным процессам

14–15. Консультации для студентов

16–18. Ученые советы

К этому надо, конечно, добавить дела в редакциях журналов, с которыми он был связан, о чем уже было выше. Удивительно не то, что сам Андрей Николаевич так работал, но что и люди, окружавшие его, были к этому готовы! Семинар кафедры назначается на восемь вечера, а потом еще и заседание. И трудно представить себе, чтобы кто-нибудь из сотрудников его кафедры мог не прийти. Лекция и семинар по спектральной теории плюс лекция по случайным процессам и сразу вслед за нею консультация для студентов. “Маленький семинар” для аспирантов и кружок для первого курса. В четверг — Стекловский институт (в связи с прикладными задачами он обсуждал там с нами основы радиотехники). В музыкальных вечерах в гостиной студенческого общежития в здании университета на Ленинских горах, куда Павел Сергеевич (обычно он был организатором таких встреч) приносил пластинки по “тематическому выбору” и где устраивал лекцию о творчестве того или иного композитора, участвовало не одно поколение студентов Мехмата. Но оказывается, это были не просто музыкальные вечера, а чайно-музыкальные собрания!

Ну а “комаровская” часть недели — отдых? Из “Дневников”, которые велись, по большей части, как раз в Комаровке, мы видим ответ на этот вопрос — огромный труд собственно в науке . . .

Шестидесятые годы (1960–1969)

К этому периоду относятся основные работы А.Н. Колмогорова, связанные с **логическими основаниями теории информации и теории вероятностей и их реконструкцией на алгоритмической основе**. Если в пятидесятые годы усилия А.Н. Колмогорова были направлены на использование идей теории информации в различных областях математики, то теперь он создает новые области математики — *алгоритмическую теорию информации* и *алгоритмическую теорию вероятностей*.

Анализируя различные подходы к введению основных понятий теории информации, А.Н. Колмогоров выделяет следующие три:

I — *чисто комбинаторный подход*,

II — *вероятностный подход*,

III — *алгоритмический подход*.

В комментарии к своим работам по теории информации и некоторым ее применениям ([$Б_{Iкн}$-50, с. 251–253]) он так описывает смысл первого подхода:

> *"При комбинаторном подходе количество информации, сообщаемой при указании определенного элемента в множестве из N объектов, принимается равным двоичному логарифму N (Р. Хартли, 1928 г.). Например, имеется*
>
> $$C(m_1, \dots, m_s) = \frac{n!}{m_1! \cdots m_s!}$$
>
> *различных слов в алфавите из s элементов, содержащих по m_i вхождений i-й буквы нашего алфавита ($m_1 + \dots + m_s = n$). Поэтому интересующее нас количество информации равно*
>
> $$H = \log_2 C(m_1, \dots, m_s).$$
>
> *При $n, m_1, \dots, m_s$, стремящихся к бесконечности, действует асимптотическая формула*
>
> $$H \sim -n \sum_{i=1}^{s} \frac{m_i}{n} \log_2 \frac{m_i}{n}. \qquad (*)$$
>
> *Читатель, вероятно, уже заметил сходство этой формулы с формулой вероятностной теории информации*
>
> $$H = -n \sum_{i=1}^{s} p_i \log_2 p_i. \qquad (**)$$
>
> *Если наше "слово" образовано по хорошо известной схеме при помощи независимых испытаний, то асимптотическая форму-*

ла (*) является очевидным следствием формулы (**) и закона больших чисел, но круг практических применений формулы (*) значительно шире (см., например, работы по передаче информации по нестационарным каналам). Вообще мне представляется важной задача освобождения всюду, где это возможно, от излишних вероятностных допущений. На независимой ценности чисто комбинаторного подхода к задачам теории информации я неоднократно настаивал в своих лекциях.

На чисто комбинаторном подходе к понятию энтропии основаны мои работы и работы моих сотрудников по ε-энтропии и ε-емкости компактных классов функций. Здесь ε-энтропия $H_\varepsilon(K)$ есть количество информации, необходимое для выделения из класса функций K какой-нибудь индивидуальной функции, а ε-емкость $C_\varepsilon(K)$ есть количество информации, которое может быть закодировано элементами из K при условии, что надежно различимы элементы K, расположенные друг от друга на расстоянии, не меньшем ε."

Вероятностный подход к основным понятиям теории информации был описан выше (раздел "Пятидесятые годы").

Что же касается *алгоритмического подхода*, то замысел Колмогорова состоит в том, чтобы, основываясь на фундаментальных понятиях *алгоритма* и *вычислимой функции*, дать определение понятий *энтропии* (иначе, *сложности*) и *количества информации*. В докладе 24 апреля 1963 г. "Мера сложности конечных двоичных последовательностей" на Секции теории вероятностей Московского математического общества А.Н. Колмогоров объяснил, в общих чертах, истоки и суть алгоритмического подхода.

Часто приходится иметь дело с очень длинными последовательностями знаков. Одни из них, как, скажем, последовательности знаков пятизначной таблицы логарифмов, допускают простое описание и, в соответствии с этим, могут быть получены при помощи вычислений (бывает, и громоздких), следующих простой программе. Другие же, предположительно, не допускают никакого достаточно простого "закономерного" способа построения. Таков, например, какой-нибудь достаточно длинный отрезок "таблицы случайных чисел".

Возникает вопрос о путях построения точной математической теории, позволяющей уловить намеченное выше различие.

Как это принято в теории информации, ограничимся двоичными последовательностями, т. е. последовательностями вида $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_i = 0$ или 1. Обозначим D^n множество таких последовательностей длины n, и пусть $E = D^1 \cup D^2 \cup \cdots$ — множество всех двоичных последовательностей.

Можно многими различными способами вводить для таких последовательностей x меру $K(x)$ их *сложности*, соответствующую качественно сформулированному замыслу, хотя, по-видимому, трудно при этом избе-

жать и некоторого произвола. *"Основное открытие*, — писал А.Н. Колмогоров в работе [$Б_{Iкн}$-50, с. 253], — *сделанное мной и одновременно Р. Соломоновым, состоит в том, что с помощью теории алгоритмов можно ограничить этот произвол, определив сложность почти инвариантно (замена одного способа описания на другой приводит лишь к добавлению ограниченного слагаемого)."*

Отождествим каждую последовательность $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ с тем натуральным числом, двоичная запись которого (однозначно) определяется упорядоченным набором $\langle 1, x_1, \dots, x_n \rangle$. Такое отождествление позволяет говорить о *частично рекурсивных* (*вычислимых*) функциях f, определенных на E и со значениями в E. Для каждой такой функции f Колмогоров определяет

$$K_f(x) = \begin{cases} \min\{n : x \in f(D^n)\} & \text{при } x \in f(E), \\ +\infty & \text{при } x \notin f(E) \end{cases}$$

и называет эту величину *сложностью* объекта x *при способе задания* f.

Далее он вводит класс $\mathcal{F}_0$ функций f_0, называемых *оптимальными* и обладающих следующим свойством: какова бы ни была другая функция f, существует такая константа C, зависящая от f_0 и f, что для всех $x \in E$

$$K_{f_0}(x) \leq K_f(x) + C.$$

Фундаментальный результат, полученный независимо А.Н. Колмогоровым и Р. Соломоновым, состоит в том, что этот класс $\mathcal{F}_0$ вычислимых функций f_0 *не пуст*. Это принципиальное обстоятельство дает основание любую функцию $K(x) = K_{f_0}(x)$, где $f_0 \in \mathcal{F}_0$, назвать *сложностью* (или *мерой сложности*) последовательности x. Для любых двух функций f_1 и f_2 из $\mathcal{F}_0$ имеем $|K_{f_1}(x) - K_{f_2}(x)| \leq C(f_1, f_2)$ при любом $x \in E$. Так что в этом смысле все оптимальные функции из класса $\mathcal{F}_0$ являются эквивалентными, и тем самым ([$Б_{Iкн}$-50, с. 243]), *"с асимптотической точки зрения сложность $K(x)$ элемента x при ограничении эффективными способами задания не зависит от случайных особенностей выбранного оптимального метода"*.

Наряду с понятием *сложности* $K(x)$, называемой теперь также *простой колмогоровской энтропией* индивидуального объекта x, Колмогоровым были введены также *условная энтропия* $K(y \mid x)$ объекта y при известном x и *информация* $\mathcal{I}(y \mid x)$ об y, содержащаяся в x.

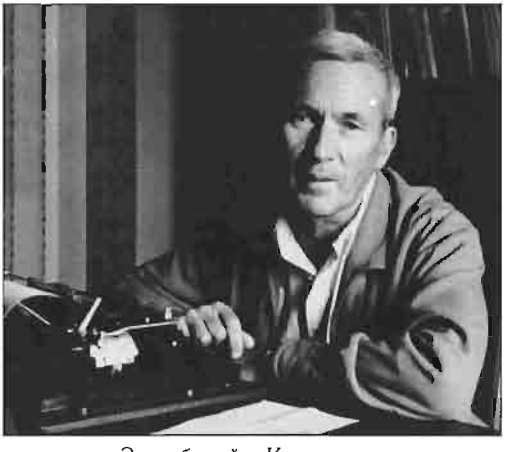
Все эти понятия, введенные и исследованные Колмогоровым в его работах "Три подхода к определению понятия 'количество информации'" [$Б_I$-180], "К логическим основам теории информации и теории вероятностей" [$Б_I$-186], "Комбинаторные основания теории информации и исчисления вероятностей" [$Б_I$-195], а также в работах его учеников и некоторых

других авторов (см. подробнее комментарий А.Х. Шеня [$Б_{Ікн}$-50, с. 257–261]), дали начало новому направлению — *алгоритмической теории информации*.

Идеи, связанные с введением понятия *сложности*, привели А.Н. Колмогорова к новым подходам к определению того, какую из конкретных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, состоящих, скажем, из нулей и единиц, естественно считать *"случайной"*.

Если, например, "честно" подбрасывать правильную монету $2n$ раз и использовать для записи результатов 0 и 1, то при достаточно большом n исходы вроде $(0, 0, \dots, 0)$ или $(0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1)$ вряд ли воспринимаются как "случайные", хотя согласно теории вероятностей обе эти последовательности, как, впрочем, и любая другая, имеют одну и ту же вероятность, равную $(1/2)^{-2n}$. Так что, классическая теория вероятностей не дает ответа на вопросы о том, как отличать "случайные" последовательности от "неслучайных", какой смысл следует вкладывать в само *понятие случайности индивидуальной последовательности*.

Сама мысль выделения в множестве *бесконечных* (скажем, двоичных) последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ подмножества, элементы которого можно было бы называть *случайными*, восходит к Р. фон Мизесу ([ДС-73], [ДС-74]), который использовал для этого термин "Kollektiv". Согласно схеме Мизеса для *случайности* последовательности $x = (x_1, x_2, \dots)$ необходимо прежде всего, чтобы существовал предел $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$, где $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ — число единиц в $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Пример последовательности $(0, 1, 0, 1, \dots)$, для которой такой предел существует, показывает, что это условие, хотя и необходимое, вовсе не может считаться достаточным условием случайности, поскольку вряд ли возможно такую последовательность воспринимать как "случайную".


За работой в Комаровке

Именно поэтому фон Мизес добавляет еще одно требование, смысл которого состоит в том, что средняя частота единиц должна сохраняться, если вместо всей последовательности рассматривать ее бесконечные подпоследовательности, полученные с помощью так называемых (точно фон Мизесом не определенных) *допустимых правил выбора*. В 1940 году А. Чёрч [ДС-128], уточняя замысел фон Мизеса, привел возможное определение "допустимого правила выбора", дав тем самым формальное определение *случайности* последовательности $x = (x_1, x_2, \dots)$.

Значение работы А.Н. Колмогорова “О таблицах случайных чисел” [$Б_I$-174], отражающей, как он сам отмечает в предисловии к русскому переводу ([$Б_{Iкн}$-50, с. 204]), определенный этап его *“попыток осмыслить частотную интерпретацию вероятностей Р. фон Мизеса”*, состоит прежде всего в том, что в ней предложена более общая схема, расширяющая класс *допустимых правил выбора* и состоящая в том, что *“порядок членов в подпоследовательности не обязан совпадать с их порядком в исходной последовательности”*. (Независимо и несколько позднее, в 1966 году, к этой же схеме пришел Д. Ловеланд [ДС-61], [ДС-62].) Возникающий в соответствии с этой схемой выбора класс последовательностей называется *классом случайных последовательностей по Мизесу—Колмогорову—Ловеланду*. (При этом все последовательности из этого класса являются также *случайными* и в смысле Мизеса—Чёрча. Обратное же, как показано Ловеландом, неверно.)

В статье “О таблицах случайных чисел” (см. также текст “От автора” к русскому переводу этой работы) Колмогоров, говоря о своем более широком (по сравнению с Мизесом) определении алгоритма формирования случайных выборок, подчеркивает, что *“главное отличие от Мизеса состоит в строго **финитном** характере всей концепции и во введении количественной оценки устойчивости частот”*. Этим Андрей Николаевич хотел подчеркнуть, что не только для бесконечной последовательности $x = (x_1, x_2, \dots)$, но и для достаточно длинной *конечной* последовательности $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно определить степень ее *случайности*.

Такой подход к этой проблеме, основанный на введении *конечной системы правил выбора*, естественно назвать *частотным*. Несколько позже Андрей Николаевич и его ученики П. Мартин-Лёф и Л.А. Левин развили другой подход, основанный на понятии *сложности*, в соответствии с которым *случайными* называются конечные последовательности $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, для которых сложность *максимальна*. (Поскольку $K((x_1, x_2, \dots, x_n)) \leq n + c$, то *случайной* естественно назвать ту последовательность $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, для которой $K((x_1, x_2, \dots, x_n)) \geq n - c$. Подробнее об этом см. [$Б_{Iкн}$-50], с. 272.)

К проблематике *случайности и сложности* Андрей Николаевич неоднократно возвращался и в последующие годы. Остановимся на некоторых его выступлениях на эту тему в семидесятые—восьмидесятые годы.

В 1970 году на Международном математическом конгрессе в Ницце он делает доклад “Комбинаторные основания теории информации и исчисления вероятностей”, опубликованный лишь в 1983 году ([$Б_I$-195]).

В 1971 году он выступает на заседании Московского математического общества с докладом “Сложность задания и сложность построения математических объектов”. Вот текст тезисов этого доклада:

1. При организации машинных вычислений приходится иметь дело с оценками а) сложности программы, б) используемого объекта памяти, в) длительности вычисления. Доклад будет посвящен группе работ, где аналогичные понятия употребляются несколько более отвлеченным образом.
2. В 1964–65 годах было замечено, что минимальная длина $K(x)$ двоичной записи программы, задающей построение объекта x, может быть определена инвариантно с точностью до аддитивной константы (Соломонов, Колмогоров). Это позволило сделать понятие сложности определения $K(x)$ конструктивных математических объектов исходным пунктом нового изложения основ теории информации (Колмогоров, Левин) и теории вероятностей (Колмогоров, Мартин-Лёф, Шнорр, Левин).
3. Труднее освободить от связи с техническими особенностями специальных видов "машин" характеристики "необходимого объема памяти" или "необходимой длительности работы". Но некоторые результаты можно извлечь уже из аксиоматической "машинно-независимой" теории широкого класса аналогичных характеристик (Блюм, 1967). Пусть $S(p)$ — некоторая характеристика "сложности построения" объекта $x = A(p)$ по программе p, а $l(p)$ обозначает длину программы p. Формула $K_S^s(x) = \inf\{l(p) : x = A(p), S(p) \leq s\}$ определяет "s-сложность определения" объекта x (при невыполнимости условия нижняя грань считается бесконечной).
4. Теорема Барздиня о сложности $K(M_a)$ начальных отрезков M_a перечислимого множества натуральных чисел (1968) и результаты Барздиня, Кановича и Петри, относящиеся к соответствующим сложностям $K_S^s(M_a)$, имеют общематематический интерес, так как проливают некоторый новый свет на роль выходов за пределы ранее употребляемой формализации в развитии математики. Обзор состояния очерченной выше проблематики будет сделан в форме, свободной от обременительного технического аппарата.

На IV Советско-Японском симпозиуме по теории вероятностей в Тбилиси (1982 г.) Андрей Николаевич выступает с докладом "О логических основаниях теории вероятностей" [Б$_{\mathrm{I}}$-197], в котором разъясняет идею, согласно которой *случайность* состоит в отсутствии *закономерности*, объясняет, как понятие *сложности конечного объекта* позволяет придать этой идее точный смысл.

В 1986 году на открытии I Всемирного конгресса Общества Бернулли по математической статистике и теории вероятностей в Ташкенте состоялся форумный доклад А.Н. Колмогорова и В.А. Успенского "Алгоритмы и случайность" [Б$_{\mathrm{I}}$-211], полный текст которого, опубликованный в журнале "Теория вероятностей и ее применения" в 1987 году, содержит наиболее исчерпывающее изложение идей и результатов Андрей Николаевича

и его учеников и последователей по алгоритмическому подходу к определению понятия "случайность". (См. также большую обзорную статью [ДС-58] и очерк [ДС-133]; и несколько подробнее об этом конгрессе см. далее на с. 185.)

Весну 1962 года Андрей Николаевич провел в Индии. Он читал лекции в Research and Training School Индийского статистического института в Калькутте, много времени проводил со своими коллегами проф. П.С. Махаланобисом, Ш. Бозе, С.Р. Рао и молодыми математиками С.Р. С. Вараданом, В.С. Варадарьяном, К.Р. Партасарати и др.

На лекции в Калькутте

28 апреля состоялась церемония присуждения А.Н. Колмогорову степени Почетного доктора Индийского статистического института:

На торжествах по этому поводу был исполнен танец из драмы "Basavdatta" Рабиндраната Тагора:

А несколькими днями раньше, 25 апреля, индийские коллеги Андрея Николаевича устроили празднование его дня рождения. Интересно отметить, что в подаренном ему альбоме мы находим фотографии праздника "60-го дня рождения 25 апреля 1962 года". (Обратите внимание на отличный от нашего счет дней рождения — Андрей Николаевич родился 25 апреля 1903 года.)

Среди исследований, выполненных А.Н. Колмогоровым в шестидесятые годы, особое место занимают его работы в области ***лингвистики*** и ***филологии***, посвященные *анализу статистики речи и математическим методам в стиховедении*.* Замыслы Андрея Николаевича, с одной стороны, тесно связаны с вероятностным и алгоритмическим подходами к теории информации, а с другой стороны, отражают его давний интерес к анализу закономерностей, свойственных форме и языку художественных литературных произведений. (Как мы видим из дневников А.Н. Колмогорова, стиховедением он интересовался еще в 40-е годы, а скорее всего, и раньше.)

Глобальная идея, высказанная Андреем Николаевичем и объясняющая направления первых из этих исследований, заключается в том, что *полная энтропия речи* (т. е. мера количества информации, передаваемой речью) может быть разложена на две компоненты:

1) *внеречевую* (смысловую, семантическую) информацию;

2) собственно *речевую* (лингвистическую) информацию.

*Приводимое описание этих исследований, а также список соответствующей литературы подготовлены по просьбе автора А.В. Прохоровым.

Первая из этих компонент характеризует разнообразие, позволяющее передавать *различную смысловую информацию*. Вторая компонента, названная Колмогоровым *остаточной энтропией*, характеризует разнообразие возможных *способов выражения одной и той же* (или равносильной) смысловой информации. Иначе говоря, эта компонента призвана характеризовать *гибкость* речи, *гибкость* выражения. Наличие остаточной энтропии обеспечивает возможность придания речи особой художественной, в частности, звуковой, выразительности при передаче задуманной смысловой информации.

В свете этой общей идеи были поставлены и частично решены конкретные задачи по оцениванию *полной энтропии* речи и ее *остаточной энтропии*. К этим работам А.Н. Колмогоров привлек своих молодых сотрудников А.В. Прохорова, Н.Г. Рычкову, А.П. Савчук, Н.Д. Светлову. Андрей Николаевич предложил тогда новый — по сравнению с методом определения энтропии с помощью угадывания продолжения текста, предложенным К. Шенноном [ДС-129, с. 669–686], — метод состоятельного оценивания энтропии речи.

В двух словах об этих колмогоровских опытах. “Испытуемому” предлагалось (в порядке подготовки) прочитать довольно значительный отрывок из прозы какого-либо известного русского автора. Затем дальнейший текст от него закрывался, и ему нужно было угадывать продолжение текста буква за буквой, применяя некую вероятностную стратегию. (Сохранились протоколы этих экспериментов и наброски статьи А.Н. Колмогорова, которые еще ждут публикации.) Андрей Николаевич с большим воодушевлением относился к этим опытам, приглашал принять в них участие многих из своих учеников, сотрудников и их друзей, в которых можно было предположить наличие, все же желательных, литературных способностей; и сам он с удовольствием принимал участие в качестве “испытуемого” и, кстати, достиг замечательного результата. Такая постановка эксперимента по угадыванию продолжений позволяла получить для истинной энтропии лишь оценку сверху. И все же эта оценка оказалась точнее оценки К. Шеннона. (При отступлении от оптимальной стратегии все оценки могут быть завышены и при этом нижние оценки оказываются ненадежными; см. [ДС-99], [ДС-86], [ДС-98], [ДС-143].)

В 1962 году А.Н. Колмогоровым был предложен чисто *комбинаторный* подход к определению *количества информации, передаваемой речью*. В соответствии с этим подходом *комбинаторная энтропия речи* определялась как предел $H = \lim_{n\to\infty} \frac{N_n}{n}$, где N_n — число текстов, состоящих из n букв, составленных из слов заданного словаря и подчиненных заданным грамматическим правилам. Как и следовало ожидать, полученные при таком подходе оценки энтропии речи оказались в среднем больше, чем верхние оценки, найденные методом угадывания продолжений для конкретных прозаических текстов ([Б$_{\text{VII}}$-2], [ДС-143]).

В эти же годы А.Н. Колмогоров развернул со своими молодыми сотрудниками и исследования по анализу стихотворной речи. Он исходил из того, что для такой речи существуют точно формулируемые закономерности, которые могут быть установлены вне непосредственной зависимости от содержания самой такой речи. При этом возможность придания стихотворной речи надлежащей *звуковой выразительности* основывается на существовании большого числа возможных вариантов выражения содержания.

В "классическом" стиховедении к тому времени уже было накоплено большое число исследований, в которых метрика и ритмика стиха изучались хоть и элементарными, но все же статистическими методами. А.Н. Колмогоров со своими сотрудниками проделал большую работу по пересмотру и уточнению результатов, полученных такими известными исследователями стиха, как А. Белый, Б. Томашевский, Г. Шенгели, К. Тарановский, Р. Якобсон и др. (Мы здесь не углубляемся в специфическую терминологию стиховедения, отсылая заинтересованного читателя к опубликованным исследованиям этих авторов.)

Основное, к чему пришел при этом А.Н. Колмогоров, можно сформулировать следующим образом.

I. *Выявление метрических законов стихотворной речи.*

Даны: общее и частные определения *метра*; представление об *образе метра* и *звуковом образе метра*; строгое формально-логическое определение *классических метров* [$Б_{IV}$-3, $Б_{IV}$-8, $Б_{IV}$-9, $Б_{IV}$-10]; описание и разграничение *неклассических* (русских) метров (в первую очередь дольников, логаэдов, вольных размеров, чисто акцентного стиха [$Б_{IV}$-1, $Б_{IV}$-2, $Б_{IV}$-3, $Б_{IV}$-5, $Б_{IV}$-6].

II. *Классификация и статистика ритмических вариантов метра.*

Здесь сформулировано и проверено общее принципиальное положение о том, что звуковое строение речи подчинено достаточно простым статистическим закономерностям, которые могут быть рассчитаны методами теории вероятностей. (Сами эти закономерности реализуются под давлением потребности передачи смысловой информации, если только этому давлению не противостоит систематически проводимая художественная тенденция.) Указан общий метод построения теоретических моделей различных метров; сформулирована гипотеза *имитации случайности* (см. [$Б_{IV}$-4, $Б_{IV}$-11], [ДС-90], [ДС-89]).

III. *Оценивание "остаточной" энтропии стихотворной речи.*

Получена оценка *остаточной* энтропии и дан расчет *затрат энтропии* на отдельные приемы звуковой выразительности стиха — работа А.Н. Колмогорова и А.В. Прохорова "Статистика и теория вероятностей в исследовании русского стихосложения" [$Б_{IV}$-4].

Эти работы А.Н. Колмогорова инициировали дальнейшие исследования по математическим методам изучения языка художественных произведений.

В шестидесятых годах на Механико-математическом факультете МГУ работали два семинара, в которых вместе с математиками впервые участвовали известные и молодые лингвисты и филологи (М.Л. Гаспаров, А.А. Жолковский, А. А. Зализняк, Вяч. Вс. Ива́нов, И. Мельчук, В.Ю. Розенцвейг и др.). Постоянное внимание и интерес к этому направлению проявляли и признанные авторитеты в этой области С. Бонди, В. Жирмунский, К. Тарановский и Р. Якобсон. *"Что касается моих работ по стихосложению, то и в само́й гуманитарной области это такой закоулочек очень специальный. Но меня там всерьез признаю́т. Я ... выступал даже как-то оппонентом докторской диссертации Гаспарова ... Так что это такое разветвление моей научной работы"*, — так Андрей Николаевич говорил об этом круге своих интересов ([$Б_2$-20]).

В 1960 году А.Н. Колмогоровым с целью объединения усилий и интенсификации работы в нашей стране по применениям теоретико-вероятностных и статистических методов, или, как пишет сам Андрей Николаевич, *"для создания хорошей традиции прикладных вероятностных и статистических работ"* при кафедре теории вероятностей была основана *Лаборатория статистических испытаний*. Заведование лабораторией Андрей Николаевич поручил своему ученику Юрию Константиновичу Беляеву. Первыми ее научными сотрудниками стали работавшие тогда на кафедре И.В. Гирсанов, Л.Д. Мешалкин, Я.Г. Синай, В.М. Тихомиров; были взяты и новые, молодые сотрудники.

Н.В. Гирсанов

В 1966 году Лаборатория получила новый статус и стала называться *Межфакультетской лабораторией статистических методов*. Во вновь построенном университетском Лабораторном корпусе "А" ей было отведено довольно обширное помещение — примерно полтора этажа. Андрей Николаевич принимает заведование этой расширенной лабораторией, а заместителем приглашает доктора технических наук Василия Васильевича Налимова. (В сборнике "Колмогоров в воспоминаниях" в очерке В.В. Налимова можно подробно прочитать о Лаборатории и о годах его работы с Андреем Николаевичем, [$Б_4$; с. 501–518].)

Лаборатория была задумана как небольшой статистический институт. Кроме обычных рабочих комнат, было предусмотрена большая библиотека

специальной литературы с просторным читальным залом, помещение для ЭВМ и лекционная аудитория на 100 мест. Работа в лаборатории развернулась очень быстро, и вскоре ее штатный состав был доведен до 130 человек.

Андрей Николаевич с учениками и сотрудниками (В. Лебедев, М. Малютов, А. Булинский, Г. Мартынов, В. Питербарг, Л. Питербарг, В. Тихомиров)

Межфакультетская, или, как все ее называли, *Колмогоровская лаборатория*, состояла из восьми отделов:

- *Теоретический отдел* (заведующий А.Н. Колмогоров);
- *Отдел теории вероятностей и случайных процессов* (заведующий И.В. Гирсанов и впоследствии, после трагической гибели И.В. Гирсанова в горах в 1967 году, — А.Н. Ширяев (на общественных началах));
- *Отдел планирования эксперимента* (заведующий В.В. Налимов);
- *Отдел статистических методов в медицине* (заведующий Л.Д. Мешалкин и позднее — Ю.Н. Благовещенский);
- *Отдел теории надежности и массового обслуживания* (заведующий Ю.К. Беляев);
- *Отдел статистических методов в геологии* (заведующий А.М. Шурыгин);
- *Отдел вычислительной техники* (заведующий С.В. Фомин, позднее В.М. Волосов; начальник ЭВМ — О.Н. Кутепов);
- *Библиотека* (заведующая А.С. Ягодкина).

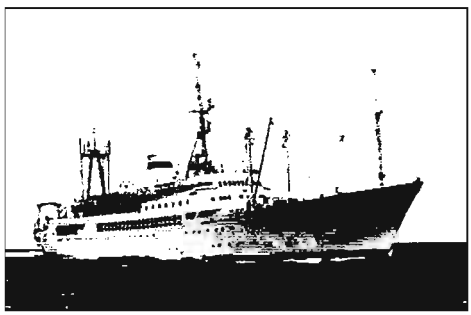
Задачи, поставленные перед лабораторией, формулировались следующим образом:

- изучение и дальнейшая разработка вероятностно-статистических методов; их пропаганда и широкое внедрение в научную, инженерную и медицинскую практику;
- хоздоговорная деятельность (т. е. выполнение заказов предприятий и организаций по договору оплаты);
- педагогическая и издательская деятельность (лаборатории была предоставлена практически неограниченная возможность издания препринтов тиражом от 100 до 500 экземпляров);
- проведение общемосковских семинаров, летних научных школ и участие сотрудников в научных конференциях.

А.Н. Колмогоровым были определены следующие основные направления исследований: теория оптимального управления и принятия статистических решений (И.В. Гирсанов, А.Н. Ширяев), математическая теория надежности (Б.В. Гнеденко, Ю.К. Беляев), планирование эксперимента (В.В. Налимов, В.В. Федоров), статистика в лингвистике и стиховедении (А.В. Прохоров), статистика в медицине (Л.Д. Мешалкин), статистика в геологии (А.М. Шурыгин), нелинейный спектральный анализ (А.Н. Колмогоров, А.Н. Ширяев, И.Г. Журбенко).

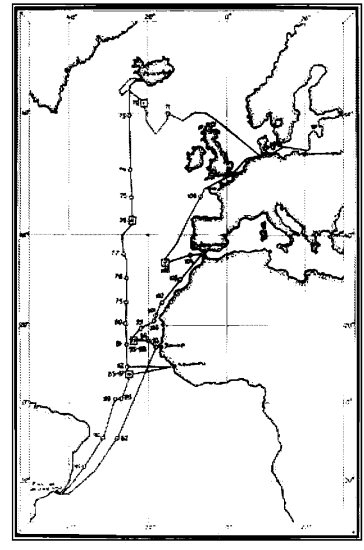
В Лаборатории статистических методов Андрей Николаевич, под влиянием Неймана (Jerzy Neyman) и Скотт (Elizabeth L. Scott) развернул еще одно направление прикладных исследований — статистический анализ результатов активного воздействия на атмосферные явления (включая искусственное вызывание дождевых осадков).

Изучив методику Неймана и Скотт, Андрей Николаевич приходит к выводу, что параметрические методы в данной проблематике являются слишком *тонкими* ("неробастными") по отношению к сравнительно *грубым* атмосферным данным. Колмогоров создает свои непараметрические методы (близкие по идеям к Р. Фишеру), апробированные в ряде экспериментов. Вместе с Нейманом Андрей Николаевич настойчиво отстаивает идею *рандомизации* эксперимента и необходимость получения *чистых* данных; всячески поддерживает тезис Неймана о том, что *"статистика бессильна против испорченных исходных данных"*.



Научно-исследовательское судно "Дмитрий Менделеев"

В рамках Лаборатории работал приобретший широкую известность общесоюзный семинар по турбулентности жидкости и газа при участии А.Н. Колмогорова, М.Д. Миллионщикова, А.М. Обухова, С.А. Христиановича, Л.И. Седова, А.С. Монина, А.М. Яглома и др. Именно на этом семинаре у Андрея Николаевича родилась идея непосредственного участия в рейсах научно-исследовательского судна "Дмитрий Менделеев".



Маршрут первого рейса "Дмитрия Менделеева" (23 июня — 18 сентября 1969 г.)

Первый рейс длился 87 дней: 23 июня — 18 сентября 1969 года. Вот его маршрут: Калининград → Рейкьявик → Рио-де-Жанейро (с заходом в Конакри (Гвинея) → Дакар (Сенегал) → Гибралтар → Калининград.

Во время второго рейса (с 20 января по 12 мая 1971 года) было пройдено 26 132 морских мили. Для Андрея Николаевича это было, в сущности, кругосветное путешествие: поездом из Москвы до Калининграда и далее на борту "Дмитрия Менделеева":

> Калининград → Кильский канал → Па-де-Кале → Бискайский залив → Саргассово море → через Гольфстрим к мысу Канаверал (Флорида, США) → порт Кингстон (Ямайка) → Панамский канал → Галапагосские острова (наблюдения Чарльза Дарвина на этих островах были использованы им для обоснования теории происхождения видов; территория принадлежит Эквадору) → Гонолулу (Гавайи) → переход к югу до 159° западной долготы → атолл Фаннинг (Брит.) → пересечение экватора → бухта Аваруа на острове Раротонга (центральный остров Архипелага Кука, протектората Новой Зеландии) → переход на Запад → порт Сува (Фиджи) → Порт-Вила (о. Эсфате), о. Малекула (Новые Гебриды) → Йокогама (Япония) → Владивосток,

и затем Андрей Николаевич возвращается на поезде в Москву.

Будучи научным руководителем этих рейсов, Андрей Николаевич (совместно с А.С. Мониным, В.Т. Паком, И.Г. Журбенко, М.В. Козловым и др.) занимался разработкой и непосредственным применением высокоробастных (по отношению к шумам в соседних частотах) методов спектрального анализа. Особую важность этих методов А.Н. Колмогоров видел в возможности их применения к спектральному анализу нестационарных процессов. Отмечая, что расчет статистических параметров случайного пространственно-временного турбулентного поля является весьма трудоемким, А.Н. Колмогоров, по его словам, видел свою роль в этих рейсах,

в частности, в том, чтобы *“непосредственно на судне, в оперативном порядке уточнять методику расчета, определять необходимую длительность реализаций, шаг дискретизации и т. д.”*, в том, чтобы, анализируя результаты расчетов, “оперативно планировать дальнейшие измерения, оценивать их репрезентативность, а также судить о пригодности и качестве испытываемых образцов измерительной аппаратуры”.

Сохранились путевые наброски, которые Андрей Николаевич вел во время первого рейса 1969 года.

Атлантический океан
Исландия–Гвинея–Бразилия–Сенегал–Гибралтар

Начато 22 августа 1969 года

в дни хорошего настроения и всяческих надежд на разумную и интересную жизнь.

Что-то будет в самом деле?

ИЮНЬ.

19. *Отъезд из Москвы.*

20–23. *Калининград. Отплытие 23 вечером.*

25. *Кильский канал.*

26. *Обход лаборатории, совещания с математиками.*

27. *Штормовая погода.*

28. *Дрейф для пробных работ.*
Первый пластиночный концерт (Моцарт, Бетховен).

30. *Постановка первого буя (№13).*

ИЮЛЬ.

1. *Киты. Буй снимается.*
Вивальди, Бах.

3–6. Рейкьявик.

3. *У посла, прогулки по городу. Исландский институт океанологии.*

4. *Автобусная экскурсия к Золотому водопаду.*
Исландский экскурсовод и его якутка.
Океанологи и советская колония у нас.
Плавательный бассейн.

5. *День открытых дверей.*
Посол и министр на “Дм. Менделееве”. Посол о Китае.

6. *Отплытие.*

Перголези, Stabat Mater.

9–10. *Мой доклад о локальной структуре на семинаре.*

11. *Что такое турбулентность? — для экипажа.*

9. — *Зеленый луч.*

10. *Солнце и тепло.*
Мои концерты 8, 10, 11.

12. *Доклад Ростислава Всеволодовича. Открытие подводной "горы".*

13. *Азорские острова. Тропическая форма одежды.*

14. *Доклад Юры Миропольского.*

15. *Тропик рака. Печатная программа "пятого вечера классической музыки" — Рахманинов.*

20–21. *Заход в Конакри для отправки в Москву больного. Всенародное празднование футбольной победы над Конго. На острове.*

23–27. *Полигон на 8°.*

30. ЭКВАТОР.*

"Праздник Нептуна"

*К празднику Нептуна при переходе через экватор участники рейса написали в шутку:

Первый крестник — нету споров —
Академик Колмогоров
Задает ученым взбучку,
Тянут те прибор за ручку
И спускают всех чертей
Для закона двух третей . . .

Грамоты о переходе через экватор

АВГУСТ.

4–8. *Рио-де-Жанейро.*

4–5. *Посольство. Прогулка на машине посла с Колей Медведевым. С капитаном на Корковадо. Прогулки по городу, купания. У Ленского. Ленский и компания у меня.*

6. *День с Вадимом Тим. Пакою.*

7. *В университете у Коимбры. Мой доклад.*
Обед в глубине залива. С Юрой ⟨Миропольским⟩ *и Ленским на Копакабане.*

8. *В институте у Пейшото. Обед и музей современного искусства (поляки, Новицкая). С Ленским на Прайя Вермилия и на Сахарной голове. Отплытие поздно вечером.*

Пятница, 22 августа.

В дрейфе между островами Зеленого Мыса. Отдаленные контуры гор, парусная шхуна и танкер. После нескольких пасмурных дней, наконец, солнце. Вчерашний день в основном был занят спектрами лабораторной турбулентности (сравнение Ильина с проблемами механики, сопоставление дифференциальных и интегральных спектров). Математики, наконец, успешно склеивают спектры и структурные функции двух диапазонов. У них кончается бумага для "широкой печати". На завтра Ростислав Всеволодович, наконец, назначает обсуждение положения с высокочастотными измерениями.

Обычное утро — восход солнца, капитан, Бор. Никанор., Ростислав Всеволод. и Володя на верхней палубе. Абрамов с его заботами. Пака и ленивая публика на корме при гондолах.

Конец работы с лабораторными спектрами, идея стандартных кривых для интегральных и размытых интегральных спектров локального строения турбулентности (к окончательному тексту соответствующей работы).

На палубе. Мирно стоим между островами. После обеда спускали шлюпку для фотографов и кинолюбителей. Отдых, солнце, немного гимнастики.

А.Н. Колмогоров
на "Дмитрии Менделееве"

Эрги и калории: диссипация в точке наших лабораторных измерений кипятит 25° *воду за* 30 *мин.* (175 000 $см^{-1}сек^{-2}$).

О моих океанологических увлечениях.

Статистическая механика и термодинамика океана сейчас в таком состоянии, что мое вмешательство в теоретическую работу (с организацией использования не только советского материала) может быть плодотворно и "выигрышно", особенно если бы удалось вовлечь в совместную работу А.М. (тема "взаимодействие атмосферы и океана"), но может быть и специальная обзорная монография с соавторством Монина (в виде продолжения общей "Статистической гидромеханики" А.М. и А.С.⟨имется в виду совместная монография А.С. Монина и А.М. Яглома "Статистическая гидромеханика" [ДС–77] — *А.Ш.*⟩).

Вполне серьезны и планы сделать океанологию одной из основ работы нашей университетской лаборатории. С точки зрения первоначального замысла устройства лаборатории ее база в области применений должна удовлетворять условиям: 1) быть с точки зрения статистических и вероятностных методов интересной, 2) требовать работ длительного значения, основанных на материале, который если и устаревает, то лишь за 3—5—10 лет, 3) относиться к областям, которыми я сам хорошо владею, 4) быть актуальной и допускающей дополнительное финансирование заказчиками, но (хотя бы в основном) требующей лишь открытых работ.

Естественно и желание продолжить участие в плаваниях с Игорем ⟨Журбенко — *А.Ш.*⟩ *и другими сотрудниками. При современном со-*

стоянии коллектива Института Океанологии ⟨директором института тогда был А.С. Монин — *А.Ш.*⟩ *в плаваниях будет много технической работы по элементарной обработке данных и обучению сотрудников, но эта довольно кропотливая работа мне не в тягость, а при систематическом продолжении и вовлечении в плавания своих сотрудников станет более легкой и продуктивной.*

!НО!

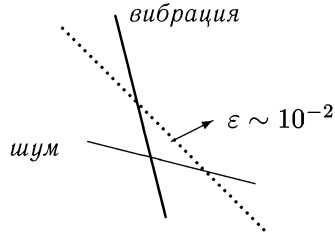
1) *Дело идет явно еще об одном большом начинании, скажем, примерно — о новой 1/5 возможностей на ближайшие 15 лет (ого, и то довольно оптимистично — плавать по примеру Зенкевича и Марьи Вас. Кленовой до 80 + ε!).*
2) *По отношению к лаборатории это и хорошо, и плохо: дает мне реальную базу для влияния на создание хорошей традиции прикладных вероятностных и статистических работ, но с другой стороны — потребует, вероятно, некоторого насилия над уже сложившимся коллективом Налимовых, Мешалкиных и Благовещенских. Как еще быть с математической геологией? Мне она при океанологических планах будет в тягость.*
3) *Опасно и слишком глубоко влезать в дела Института Океанологии. Тогда вместо дружелюбия даже со стороны таких хороших людей, как Ростислав Всеволодович* ⟨Озмидов — А.Ш.⟩, *возникнут и ревности.*

О ШКОЛЕ. Отказаться от общих дел математического образования, конечно, нельзя.

Нельзя в этом году отказаться и от нашей ФМШ. Надо даже здесь в оставшиеся четыре недели кое-что подготовить для своего курса. Но необходимо избежать всякой нервной нагрузки по управлению Раисой Арк. и разрешению всевозможных текущих дел.

Ответственный и ПОЛНОМОЧНЫЙ зам. предс. попечительского совета, являющийся официальным представителем университета!

Мих. Ник. Кошляков с новыми надеждами:



Его искренне хорошее отношение ко мне (в преодоление всяких ревностей).

Разноречие с Арк. И. Леоновым. Кажется, я не мог здесь ни в чем напутать?! А то эти ИПМ-цы окончательно возгордятся.

20° *в каюте — без рубашки все же холодно.*

На палубе перед вечерним чаем. Месяц, облачка и звезды, призраки островов. Четвертый механик пробует заняться гирями. Расспрашивает о стиховедении — хорошо слушает.

В рубке атласы и лоции Атлантического океана. Острова на локаторе. Дискуссия об определении скорости при инерционном ходе в кают-компании и о точности определения расстояний по локатору в рубке.

Но все занятия этими заметками не есть ли отлынивание от других дел. В оставшееся время надо еще выполнить намерение приучаться к порядку. Если эти недели будут вполне рабочими, то будет заслуженным запланированный чистый отдых на 10 дней.

24.

Вчера — обсуждение перспектив по локальной турбулентности с моим вводным докладом, сегодня — орг. совещание по аналоговым спектрам (Палевич, Леонов, Ильин, Столыпин, Поздынин). Соответствующие хлопоты и подсчеты.

Беляев и Абрамов о мехмате. Кальмары и жареная рыба у гидрологов. Филюшкин как студент-матрос (головотяп и шкерщик) на Баренцевом море. Вечера и утра в нашем межостровьи, душ и отдых на баке. Абрамов о годах морского училища.

Попытки возобновить занятия стиховедением. Юра ⟨Миропольский. — А.Ш.⟩ *и Леонов принесли свою работу.*

Танцы в лунную ночь. Философически-научные разговоры с Р.В. Абрамовым.

25.

Леонов с сообщением о том, что магнитофон ИПМ пишет лишь собственный шум. Великолепный Палевич реагирует невозмутимо.

Работа Миропольского и Леонова — пишу им замечания до двух часов. Иду загорать.

Учебная шлюпочная тревога. Шлюпка №2 под командой Бориса и с четвертым механиком, на волнах под бортом "Дм. Менделеева" на полном ходу.

"Орестея".

Споры Озмидова и Сорохтина о муравьях, людях и высших существах.

28.

За три дня: попытки наладить аналоговые спектры (бросил), успехи Паки с вибрациями. Внутренние волны по данным термотрала и радиобуя (начат пробный счет с Гришиной).

Прохладная и солнечная погода. Встреча с рыбацкими судами из Калининграда и Севастополя, танкер из Туапсе. Свежая рыба и ракушки (частные и общественные).

Осталось всего три недели. Надо вести к концу дела по экспедиции. В качестве работы на три месяца — обучение океанологии, тренировка в разных вспомогательных вопросах и достигнутое на пользу экспедиции — вполне почтенный итог.

Но почти ничего не сделано по личной программе. Для школы кое-что необходимо приготовить, а хочется еще выделить немного времени для логики (с основами информации и вероятности) и стиховедения. Преобладает опасение по возвращении сразу запутаться в текущих обязанностях.

А так, все-таки, было очень хорошо.

На "Дмитрии Менделееве"
(справа А.С. Монин)

29.

Занимался материалами наблюдений с радиобуя. План восстановления изотерм по наблюдениям и разделения волновых колебаний и обычной вертикальной турбулентности (точный смысл?). Глупо пропустил обед. Научно-технический совет с отчетом отрядов-неудачников ⟨А.Н. возглавлял на "Дм. Менделееве" научный отряд. — *А.Ш.*⟩.

Солнце, прохлада, лунная ночь.

31.

Чуть не забыл: большая часть рабочего времени — теория работы датчиков для сегодняшнего доклада Столыпина.

Вчера те же занятия. Вечером пришел Юр. Вас. Брыленко со своими материалами. Он, видимо, несколько обижен недостаточным вниманием к его работе. Плавал с рыбацкими поисковыми судами, сейчас в службе гл. инженера.

Канарские острова. Подмосковная погода. Вечером — Бах, Вивальди, Франк (12-й вечер). Олег Гущин и сорохтинский бородач.

Сегодня утром на палубе один Абрамов. Забортный душ вновь ликвидирован и на корме, и на носу. Бразильский кофе из немецкой кофеварки (а машинка для изготовления булочек все еще употребляется лишь по фантазии Яросл. Ник. не по прямому назначению).

Семинар. 1° эквивалентен 1 м/сек для датчика скорости! Изящный содокладчик Леонова. Вопрос о публикации и авторском свидетельстве Ильина и Столыпина.

Касабланка.

1—3 сентября.

ГИБРАЛТАР

1. *Утренняя прогулка с Ростиславом Всеволодовичем. С Миропольским на восточном пляже. Купанье на дамбе.*
2. *Покупки. С Пакою на Кемп-Бей. Аустралис. Вечерняя прогулка и поздние разговоры (может быть, излишние) с Сорохтиным.*
3. *На Санди-Бей с Абрамовым. Последние покупки, восточный пляж, аэродром и испанская граница.*

Отплытие.

11 сентября.

Конец полигона 34° *с.ш.*, 15° *з.д. Прохождение давно наметившегося фронта — дождь, волнение. Сейчас (вечером) вновь улучшение.*

4—11 — *дни беспорядочного чтения и занятий (впрочем, довольно продуктивных) и некоторой нервозности из-за неурядиц со спектрами. Впечатления за эти дни полезно было бы записать, хотя бы без точного распределения по времени.*

Утром занятия (число Ричардсона, геострофич. скорость и т. п.), снятие буев. Семинар с докладами Абрамова и Буркова (соединенный с заседанием научно-технического совета). Выставка сувениров.

ВЕЧЕР ОТДЫХА.

12/IX.

Штормовая погода, солнце, звезды. Моя лекция. Книжка Ламли и Пановского (перевод 1966, подлинник — 1964). Выставка-конкурс фотографий.

13/IX.

Шторм стихает, 17°, хорошо. Материалы Буркова.

Озмидова и Филюшкина зовут в Дублин к 24-му.

Семинар с докладами о термотрале (Филюшкин, Миропольский), радиобуе (инженеры + Пака) и термосолезонде (Сорохтин). Оживленные дискуссии.

Анализ бурковских журналов с вертушечной записью векторной скорости. День рождения (31-й) Ярослава Николаевича с 13 – 1 = = 12 гостями.

14 утро.

Числа Ричардсона у Буркова до 500 (!). Тихо, туманно.

Пака проводит последние опыты с управляемым заглубителем. Пишу разные отчетные соображения, в одиночестве делал гимнастику на пеленговой палубе.

Погода под стать грустному окончанию плавания. Физически чувствую себя очень хорошо.

За обедом Борис Никанорович о своих мечтаниях сделаться архитектором, своих товарищах архитекторах и художниках.

Аварийная комиссия и прочие заботы по окончанию рейса.

Птички (на корме и под окном моей каюты).

15.

Ламанш и Па-де-Кале. Туманы и слабые лучи солнца, пароходики и паром, 65 судов в радиолокаторе.

Семинар с докладами высокочастотных экспериментальных групп.

16.

Немецкое море. Кильский канал.

Гейне и "Тонио Крегер". Современная устроенная и скучная Германия. Лебеди, яхты, купающиеся мальчишки.

Доклады о вибрациях и режимах буксировки (Пака) и от "метрологической комиссии" (Поздынин, Палевич). Еще раз с Поздыниным о его завиральных идеях в теории информации.

17.

Балтийское море. Семинар с докладом Кошлякова об обработке высокочастотных наблюдений с моим содокладом. Очень вяло пишу свои замечания к методам обработки. Ветер, солнце.

Качает. Даже по радио передают предупреждение "сейчас усилится бортовая качка". Чайки, северный закат солнца.

Всеобщие сборы, фотографии от капитана.

Четверг, 18.

Пришли ночью. Огни на тихих водах. Сыро и холодно.

В марте 1976 года последовала новая реорганизация Лаборатории: она была разделена на пять отделов, два из которых (*математической биологии* и *математической геологии*) отошли к соответствующим факультетам, а три оставшихся были приданы Мехмату и стали самостоятельными лабораториями: *Теории вероятностей*, *Математической статистики* и *Вычислительных средств*. Была сохранена и *Библиотека* — львиная доля иностранных книг и журналов закупалась на личные средства Андрея Николаевича из его международной Бальцановской премии

Г. Крамер (Швеция) и А.Н. Колмогоров в Сухуми
(1963 г., после конференции по теории вероятностей в Тбилиси)

(об этом подробнее дальше на с. 178). Работающая и сегодня библиотека представляет собой уникальное собрание специальной литературы по теории вероятностей, математической статистике и их приложениям, доступное всем заинтересованным читателям, начиная со студентов.

В 1963 году при Московском, Ленинградском, Новосибирском и Киевском университетах по постановлению Совета Министров СССР одновременно были открыты четыре физико-математические школы-интерната.

Создание школы-интерната при МГУ — школы нового типа — неразрывно связано, а теперь, с 1989 года, и официально, с именем А.Н. Колмогорова (хотя все и всегда называли ее *колмогоровский интернат*, *колмогоровская школа*). Отвечая на вопрос о том, как он представляет себе первые шаги приобщения к науке будущего ученого, Андрей Николаевич писал:

"Прослеживая биографии известных ученых, в большинстве случаев в начале их пути мы найдем увлекшего наукой школьного учителя, обратившего на способного ученика индивидуальное внимание, первого научного руководителя, указавшего подходящую тему самостоятельного исследования, часто обдуманно приспособленную к возможностям именно данного студента. Часто заметим мы и одного или нескольких близких друзей-сверстников, поддерживающих друг друга. Думаю, что эти тонкие человеческие взаимоотношения, формирующие будущего ученого, сохранят все свое значение и в будущем.

Сейчас, когда наша страна нуждается в большом числе способных и хорошо подготовленных исследователей в самых разных областях науки и техники, нужна, конечно, широкая система организационных мероприятий, в которой находят свое место и факультативные занятия по выбору со старшими школьниками, специализированные школы, различные виды внешкольной работы (кружки школьников при вузах, олимпиады и т.п.), широкое ознакомление молодежи со специальным характером работы университетов и технических вузов новой техники (типа Московского Физико-технического института), над-

Беседа в школе-интернате

лежащая организация конкурсных экзаменов в такого рода вузы, широкое вовлечение в научную работу и студентов тех вузов, в которых подготовка будущих научных работников является лишь побочной задачей. Конечно, однако, все эти организационные мероприятия не дадут ожидаемого результата, если за ними не будет стоять та индивидуальная забота о развитии каждого юноши — потенциального будущего ученого, о которой я сказал сначала" ⟨Из домашнего архива А.Н. Колмогорова. — *А.Ш.*⟩.

В школе-интернате №18

Сдедуя этим принципам, Андрей Николаевич с первого дня создания своей физико-математической школы-интерната рассматривал непосредственно *личную* работу со школьниками, а затем и работу в более широком плане, связанную с совершенствованием содержания математического образования в средней школе в целом, как важную и нужную стране, как свою гражданскую ответственность за математическое просвещение. В течение пятнадцати лет (!) он не только читает лекции и сам проводит упражнения для школьников, но и пишет для учащихся конспекты своих лекций, рассказывает им о музыке, живописи, архиртектуре, литературе, ходит с ними в туристические походы, а летом проводит "выездные школы" для набора новых учащихся.

Подробнее о работе этой школы см. [Бv-110, Бv-192]. В 1970 году на экраны вышел документальный фильм "Спрашивайте, мальчики" (автор сценария Л. Гуревич, режиссер Г. Визитей, оператор М. Голдовская), посвященный колмогоровской школе.

В 1964 году А.Н. Колмогоров согласился возглавить математическую секцию Комиссии АН СССР и АПН СССР (действительным членом этой академии он был избран в 1966 году) по определению содержания среднего образования. В 1968 году этой секцией были выпущены новые программы по математике для 6–8-х и 9–10-х классов, которые явились базой и для дальнейшего совершенствования содержания математического образования, и для написания учебников. Сам Андрей Николаевич принял непосредственное участие в подготовке учебных пособий "Алгебра и начала анализа: учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы", "Геометрия для 6–8 классов".

А.Н. Колмогоров с учащимися школы-интерната №18

Многие, в том числе и близкие Андрею Николаевичу люди, высказывались (да и некоторые придерживаются этого мнения до сих пор), что было бы лучше, если бы он больше своего времени отдавал университетскому, а не школьному образованию. Приведем здесь письмо-ответ Андрея Николаевича А.Г. Курошу от 5 января 1964 г., интересное как его реакцией на подобные упреки, так и некоторыми его взглядами на университетское образование математиков вообще.

Глубокоуважаемый и дорогой Александр Геннадьевич!

Очень прошу Вас верить в мою самую высокую оценку Вашей деятельности и Вас как человека и как математика. Только иногда нас всех, хорошо относящихся к Вам математиков, достаточно самостоятельных, чтобы не во всем с Вами соглашаться, пугает Ваша

уверенность в обладании истиной. Так, совсем недавно Вы авторитетно высказали мне мнение, что напрасно я трачу время на физико-математическую школу вместо того, чтобы отдавать это время своим аспирантам. Прав я или нет, взявшись за непосредственную работу со школьниками, — во всяком случае, было бы естественно сначала поинтересоваться тем, с какой целью я это делаю. Взявшись вообще за школьные дела (я согласился быть председателем комиссии по математическому образованию в Академии Наук, играющей роль и нашей "национальной" комиссии, входящей в Международную организацию), я счел разумным возобновить свой непосредственный опыт работы со школьниками (чем я занимался совсем профессионально и с большим увлечением в 1922—25 годах) и уже получил от этого за истекший декабрь большую пользу для себя самого. Думаю, что это лучше, чем писать оторванные от непосредственного школьного опыта учебники и добиваться немедленного их издания миллионными тиражами или тратить время на председательствование в конкурсных комиссиях по учебникам, написанных малограмотными авторами по плохо составленным программам.

По существу, получить математическое образование человек средних способностей за пять лет может. Но, по-видимому, для этого надо как-то радикально изменить стиль преподавания.

Вы пишете в своем письме: "Не следует забывать, каков уровень подготовки основной массы студентов первого курса и в какой мере они смогли бы сразу начать работать на том или ином уровне активности и самостоятельности".

Я этого не забываю, но мне понятно лишь следующее:

а) *"Основная масса" (условное название студентов, пришедших из школ с обычным уровнем преподавания математики — вскоре они перестанут образовывать большинство, но думать о них все равно будет надо!) не способна к "иному уровню активности и самостоятельности" усвоения того материала, который мы предлагаем им на первом курсе.*

б) *Эта основная масса в значительной части доходит и до пятого курса, так и не поднявшись до иного уровня активности и самостоятельности. Это я хорошо знаю, беря на работу кончивших наш факультет девушек, числившихся хорошими студентками, которые с помощью своих молодых руководителей пишут приличные дипломные работы.*

Вы знаете и мое мнение о способах изменения такого положения: делать на первом курсе то, что требуется, чтобы принесенные из школы знания и навыки перешли в "активное" состояние. Между тем, сейчас происходит обратное. Из желания не потерять совсем

авторитет у более сильной части студентов лекторы на первом курсе усиленно поднимают уровень изложения на современный лад. Мне кажется, что мы стоим уже не перед перспективой, а перед фактом существования студентов "двух сортов" в наиболее вредной форме — все студенты понимают, что деление существует, многие преподаватели своей деятельностью это деление усугубляют, а не смягчают, и при этом формально все должны проходить в одинаковые сроки одинаковую программу.

Так как наличие школ с повышенной подготовкой по математике есть факт (и отнюдь не созданный с появлением руководимого мною интерната), то единственный разумный выход, по моему мнению, состоит в создании раздельных потоков, которые в разные сроки и по разным программам получают тот минимум общематематических знаний, который факультет признает обязательным.

Конкретно, поток выпускников специальных школ мог бы в два года пройти курс анализа, включающий в себя органически (а не в качестве надстройки) содержание "Анализа-III", с первого же семестра иметь "объединенный" курс линейной алгебры и геометрии и т. п. Они раньше приступали бы к работе в специальных семинарах и к специализации на кафедрах и "выгадывали" бы свободный год в конце (а желающие кончали бы и в четыре года). (При этом с третьего курса они сливались бы полностью с "основной массой" студентов.)

Я согласен с Вами, что объем знаний, обязательных для всех наших выпускников, следовало бы установить в какой-либо работоспособной комиссии. При наличии же такого "минимума", мне кажется, факультет не сделает ничего легкомысленного, позволив тем или иным группам математиков попробовать преподавать отдельным экспериментальным потокам всю математику в течение двух — двух с половиной лет (конечно, под контролем, но контролем не слишком педантичным — следует все же меньше стремиться к "униформизации" всей работы на факультете).

Мне представляется крайне важным, чтобы весь обязательный материал, входящий в университетскую программу преподавания на первых двух курсах, был изложен систематически и доступно в небольшом числе учебных книг, желательно, в одной книге по каждому предмету (аналитическая геометрия, анализ, дифференциальные уравнения и т.д.). Часто высказывается мнение, будто бы следование одной книге чрезмерно стесняет самостоятельность и оригинальность лектора, а программы, включающие в себя отдельные главы и параграфы из многих книг, содействуют приобретению студентами навыков более свободного пользования литературой. В применении к первым двум курсам и учебному материалу, выносимому

на экзамены, по моему мнению, это не соответствует реальности. Лишь очень немногие студенты при работе по основным предметам первых двух курсов (и при подготовке к экзаменам), в самом деле, производят какое-то самостоятельное осмысленное объединение прочитанного в различных книгах. Чаще обращение к нескольким книгам приводит к мало осмысленной "лоскутности" знаний.

Что касается свободы лектора, то наличие хорошего учебника, охватывающего весь экзаменационный материал, позволяет некоторые более простые части этого материала в лекциях освещать лишь в обзорном порядке, освобождая таким образом время в лекции для дополнительного материала, не ограниченного экзаменационной программой. Конечно, возможно и давать альтернативные доказательства отдельных теорем, позволяя студентам на экзамене по желанию следовать — учебнику или лекциям.

Другое дело, что такого рода книги не создаются быстро и нелегко заменяются другими.

Из письма А.Г. Курошу
от 5 января 1964 г.

Приведем еще один текст, написанный Андреем Николаевичем.

К вопросу о подготовке математиков

1. *Вопрос, мне кажется, распадается на два:*

а) *Как добиться, чтобы из университетов выходило возможно больше творчески одаренных математиков, способных самостоятельно получать ценные для развития науки результаты и в будущем руководить подготовкой научных работников (быть хорошими руководителями дипломников и аспирантов).*

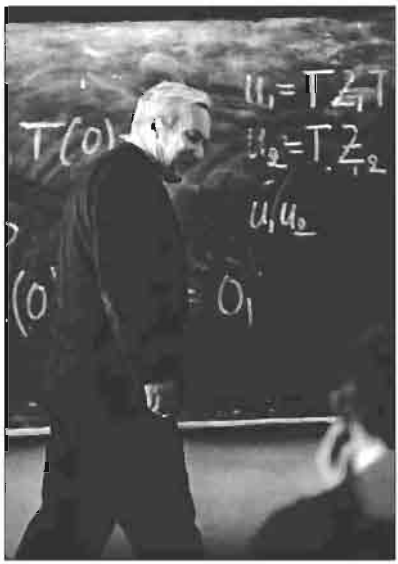
б) *Как добиться, чтобы большинство кончающих университеты (МГУ выпускает ежегодно 250 математиков) получили всю ту подготовку, которая необходима для той деятельности, к которой они предназначены.*

2. *Мне кажется, что для сколь угодно одаренных математиков полезно в студенческие годы находиться в коллективе, в котором имеют ясные представления о необходимом для всех уровне знаний и тренировки.*

3. *Фактически рядовой деятельностью кончивших математическое отделение МГУ является не только работа в НИИ (открытых или закрытых), но и работа ассистентов высшей технической школы и втузов. При развитии средних школ с увеличенным преподаванием математики и в них откроется важное поле деятельности наших выпускников. Фактически спрос на математиков со стороны научно-технических институтов отчасти объясняется тем, что значительная часть попавших туда математиков там не удерживается, а сбегает на работу ассистентов высшей школы.*

Положение улучшилось бы, если бы это обстоятельство было открыто признано и перед нашим факультетом была бы явно поставлена в качестве одной из задач подготовка ассистентов высшей школы.

4. *Осуществить ... при приеме в университеты что-либо подобное отбору учеников Высшей Нормальной Школы* ⟨Парижская École Normale Superieure. — А.Ш.⟩ *нельзя и, вероятно, совсем не нужно. И в семнадцать, и в девятнадцать лет отделение "талантов" от будущих рядовых работников НИИ и ассистентов вузов кажется бесцельным, а вероятно, и вредным.*



На лекции

Если считать желательным, чтобы в Московском университете процент действительно одаренных математиков был выше, чем он может быть при условии их выделения из обширного (250 человек) и, неизбежно, несколько случайного набора, то следует установить порядок перевода человек пятидесяти из других университетов на 3—4 курс. Если бы этот перевод был связан с обязательством по окончании университета или аспирантуры вернуться в вузы или НИИ той области, из которой переведенный приехал, то это было бы правильно. Конкурировать в нашу аспирантуру такие студенты, конечно, должны свободно.

Завершим это краткое описание деятельности Андрея Николаевича в шестидесятых годах, связанной со средней школой, таким же "наглядным" способом, приведя один из ежегодных его личных отчетов как действительного члена Академии педагогических наук СССР.

ОТЧЕТ О РАБОТЕ
члена АПН СССР за 1969 год:

1. *Написаны для журнала "Математика в школе" три первые статьи "Научные основы школьной математики" (две из них опубликованы в 1969 году, третья будет опубликована в 1970 году).*

2. *Проведена работа по редактированию пробного учебника по геометрии для шестого класса (авторы — Ф.Ф. Нагибин, А.Ф. Семенович, Р.С. Черкасов).*

3. *В течение первого полугодия руководил математической секцией комиссии по содержанию математического образования. Для этой комиссии составлено много отзывов на учебники.*

4. *Руководил преподаванием математики в школе-интернате при МГУ. Читал там лекции для учащихся девятых классов (в первом полугодии) и десятых классов (во втором полугодии).*

5. *Подготовка материалов для начинающего выходить в 1970-м году журнала для старших школьников "Квант".*

Вернемся к собственно научной деятельности Андрея Николаевича в эти годы.

К концу пятидесятых — началу шестидесятых годов относится создание техники вычисления *семиинвариантов* при нелинейных преобразованиях [ДС-54] и развитие *нелинейной теории спектрального анализа* моментов старших порядков стационарных случайных процессов ([ДС-55], [ДС-130], [ДС-34]). По существу, начало этому положил ряд задач, поставленных А.Н. Колмогоровым его ученикам В.П. Леонову и А.Н. Ширяеву в связи с некоторыми вопросами нелинейного анализа случайных процессов, в частности, в радиотехнике. Под руководством А.Н. Колмогорова и при его участии выполняются работы по выяснению условий справедливости различных свойств типа эргодичности и перемешиваний процесса, условий справедливости ряда основных предельных теорем для случайных процессов ([ДС-19], [ДС-20], [ДС-55], [ДС-103], [ДС-131]).

На конференции

В 1960 году на 6-й Всесоюзной конференции по теории вероятностей и математической статистике в Вильнюсе состоялся доклад А.Н. Колмогорова и А.Н. Ширяева "Применение марковских процессов к обнаружению разладки производственного процесса", давший начало широкому развитию и разработке *статистического последовательного анализа* ([Б$_{I}$-212], [ДС-132]), *методов оптимальной нелинейной фильтрации* [ДС-59], *теории мартингалов* ([ДС-60], [ДС-33]).

В работе [Б$_{I}$-166] А.Н. Колмогоров вместе с Я.Г. Синаем и аспирантом из Венгрии М. Арато строит математическую теорию, оценивающую параметры перемещения оси вращения Земли и основанную на представлении, что тонкая структура перемещений хорошо описывается моделью комплексного стационарного гауссовского процесса.

В Лаборатории статистических методов в 1964 г. под руководством Андрея Николаевича начинается работа по изучению природы 11-летней периодичности солнечной активности, имеющая целью подтвердить гипотезу Е.Е. Слуцкого ("точная периодичность с сохранением фазы на сотни периодов, замаскированная возмущениями, а не автоколебательный процесс с блуждающей фазой").

Хотелось бы сказать несколько слов о Колмогорове как пропагандисте современных знаний и его знаменитых публичных выступлениях 60-х годов.

6 апреля 1961 года Андрей Николаевич делает в Московском университетет доклад "Автоматы и жизнь" [Б$_{VII}$-2], произведший на присутствовавших незабываемое впечатление своей поразительной силой, глубиной и необычностью мыслей. К этому докладу Андрей Николаевич подготовил тезисы, которые хочу здесь привести полностью.

АВТОМАТЫ И ЖИЗНЬ
(тезисы доклада)

ПЕРВАЯ ЧАСТЬ

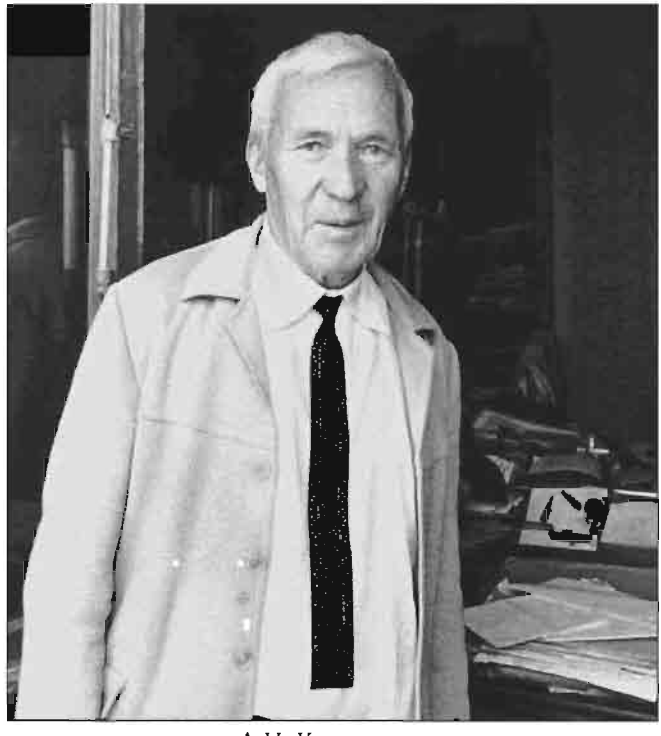
1. *Общеизвестен интерес к вопросам:*
   - *Могут ли машины воспроизводить себе подобных и может ли в процессе такого самовоспроизведения происходить прогрессивная эволюция, приводящая к созданию машин, существенно более совершенных, чем исходные?*
   - *Могут ли машины мыслить и испытывать эмоции?*
   - *Могут ли машины хотеть чего-либо и сами ставить перед собой новые задачи, не поставленные перед ними их конструкторами?*

Иногда пытаются обосновать отрицательный ответ на подобные вопросы при помощи

а) *ограничительного определения понятия "машина",*

б) *идеалистического толкования понятия "мышление", при котором легко доказывается неспособность к мышлению не только машин, но и человека*.*

2. *Существует более традиционная и простая форма этого вопроса: Возможно ли создание искусственных живых существ, способных к размножению, прогрессивной эволюции, в высших формах обладающих эмоциями, волей и мышлением, вплоть до самых тонких его разновидностей?*



А.Н. Колмогоров

3. *Точное определение всех входящих в поставленный сейчас вопрос понятий не вполне тривиально. Однако на естественнонаучном уровне строгости такое определение возможно. Лица, отрицающие такую возможность, неизбежно приводятся к солипсизму.*

**"Математическое возражение" по классификации А. Тьюринга в книжке "Может ли машина мыслить?".*

4. *Создание высокоорганизованных живых существ превосходит возможности техники сегодняшнего дня. Если технические трудности будут преодолены, то вопрос о практической целесообразности осуществления соответствующей программы работ будет еще, по меньшей мере, спорным.*
5. *Однако важно отчетливо понимать, что в рамках материалистического мировоззрения не существует никаких состоятельных принципиальных аргументов против положительного ответа на наш вопрос. Этот положительный ответ является современной формой представлений о естественном возникновении жизни и материальной природе сознания.*
6. *Несомненно, что переработка информации и процессы управления в живых организмах построены на сложном переплетении*
   а) *дискретных (цифровых) и непрерывных механизмов,*
   б) *детерминистического и вероятностного принципов действия.*
7. *Однако дискретные механизмы являются ведущими в процессах переработки информации и управления в живых организмах. Не существует состоятельных аргументов в пользу принципиальной ограниченности возможностей дискретных механизмов по сравнению с непрерывными.*
8. *Принципиальная возможность* ⟨создания⟩ *полноценных живых существ, построенных полностью на дискретных (цифровых) механизмах переработки информации и управления, не противоречит принципам материалистической диалектики. Противоположное мнение может возникнуть у специалистов по философии математики лишь потому, что они привыкли видеть диалектику лишь там, где появляется* бесконечное. *При анализе явлений жизни существенна не диалектика бесконечного, а* диалектика большого *(чисто арифметическая комбинация большого числа элементов создаст и непрерывность, и новые качества!).*

ВТОРАЯ ЧАСТЬ

9. *Несмотря на сказанное в первой части, в распространенном движении против "преувеличений кибернетики" есть и здоровая сторона. Реальными распространенными недостатками обобщающей литературы и отдельных научных работ по кибернетике являются:*

а) *упрощенное представление о механизмах переработки информации и управления в живых организмах и, особенно, в области высшей нервной деятельности человека,*

б) *пренебрежение опытом исследования таких механизмов, накопленным до возникновения кибернетики как отдельной науки.*

10. *Если первый из этих недостатков "исправляется на ходу" (в процессе работы несостоятельность упрощенных представлений обнаруживается), то второй недостаток требует систематической борьбы с ним, в частности, при планировании подготовки молодых специалистов по кибернетике и ее применениям.*

11. *В области высшей нервной деятельности человека кибернетика пока освоила лишь:*

    а) *механизм условных рефлексов в его простейшей форме (см. работы по "математической теории обучения"),*

    б) *механизм формального логического мышления.*

    Но условные рефлексы свойственны всем позвоночным, а логическое мышление возникло лишь на самой последней стадии развития человечества. Все предшествующие формальному логическому мышлению виды синтетической деятельности человеческого сознания, выходящие за рамки простейших условных рефлексов, пока не описаны на языке кибернетики.

12. *В развитом сознании современного человека аппарат формального мышления не занимает центрального положения. Это, скорее, некоторое "вспомогательное вычислительное устройство", запускаемое в ход по мере надобности. Так как, с другой стороны, обычные схемы теории условных рефлексов дают очень мало для понимания высших разделов эмоциональной жизни человека или, скажем, творческой интуиции ученого, то следует признать, что кибернетический анализ работы развитого человеческого сознания в его взаимодействии с подсознательной сферой еще почти не начат.*

13. *Рассматриваемые в кибернетических работах примеры художественного творчества и восприятия и их моделирования на машинах (компилирование музыкальных мелодий из отрывков по четыре—пять нот, взятых из нескольких десятков введенных в машину прежних мелодий и т. п.) поражают своей примитивностью, в то время как в "некибернетической" научной литературе формальный анализ художественного творчества*

уже давно достиг высокого уровня. Это лишь один из примеров примитивного уровня гуманитарных интересов кибернетиков, повышение которого необходимо, если ставить всерьез задачу понимания с позиций кибернетики действительной сложности психической жизни человека.

14. *Объективное изучение в терминах кибернетики некоторых наиболее тонких видов творческой деятельности человека может уже в ближайшем будущем получить большое практическое значение.*

    Вот пример, наиболее близкий математикам. Общеизвестно, что карандаш и бумага необходимы математику в процессе интуитивных творческих поисков. Вместо полностью выписанных формул иногда на бумаге появляются их предположительные схемы с незаполненными местами, несколько линий и точек изображают фигуры в многомерном или бесконечномерном пространстве, иногда знаками обозначается ход перебора вариантов, сгруппированных по принципам, которые перестраиваются в ходе перебора и т. д. Вполне возможно, что вычислительные машины с надлежащим устройством ввода и вывода данных могли бы быть полезны уже на этой стадии научной работы.

    Естественно, что разработка методики такого употребления машин предполагает предварительное объективное изучение процесса творческих поисков ученого.

15. *Некоторые другие направления объективного изучения механизма творческой деятельности человека могут и не получить в ближайшее время практических применений.**

    Однако серьезное объективное изучение высшей нервной деятельности человека во всей ее полноте *представляется мне необходимым звеном в утверждении материалистического гуманизма. Развитие науки многократно приводило к разрушению привычных для человека иллюзий, начиная с утешительной веры в личное бессмертие. На стадии полузнания и полупонимания эти разрушительные выводы науки становятся аргументами против самой науки, в пользу иррационализма и идеализма. Дарвиновская теория происхождения видов и павловское объективное изучение высшей нервной деятельности неоднократно изображались как принижающие высшие стремления человека к созданию моральных и эстетических идеалов. Аналогично в наше время страх перед тем, как бы человек не оказался ничем*

**Во всяком случае, мои личные опыты внесения идей кибернетики в стиховедение не имеют цели помогать поэтам писать стихи.*

не лучше "бездушных" автоматов, делается психологическим аргументом в пользу витализма и иррационализма.*
*Полное же понимание механизма высшей нервной деятельности человека должно, по моему убеждению, разрушить самый источник страха, заменив его удивлением перед результатами уже упоминавшейся диалектики большого.***

А. Колмогоров
1 марта 1961 г.

---

* *Страусовый аргумент (The "Heads in the Sand" objection) в терминологии Тьюринга.*

** *Поэт может вложить в "сообщение" из 400 печатных букв (сообщение чисто "цифровой" природы, несущее формально порядка* 10^3 *"бит", т. е. количественно ничтожную с точки зрения современной техники) целый мир чувств, который справедливо признается не поддающимся "формализации" в понятиях, и создать с такими скромными средствами "канал связи" непосредственного эмоционального общения со своими современниками и потомками, раскрывающий, разрывая ограничения пространства и времени, его неповторимую индивидуальность. Замечу, что мнение о "неповторимости" не противоречит арифметике. Число* возможных *русских стихотворений из 400 букв имеет порядок* 10^{100}.

К деятельности А.Н. Колмогорова, связанной с темой "Автоматы и жизнь", можно отнести и вышедшую в 1967 году совместную работу с Я.М. Барздинем "О реализации сетей в трехмерном пространстве" [$Б_I$-184], возникшую в связи с попыткой объяснения того факта, что (человеческий) мозг устроен так, что основную массу занимают нервные волокна (аксоны), а нервные клетки вместе с их отростками (нейронами) расположены лишь на его поверхности. Приведенные в этой работе конструкции подтверждают оптимальность именно такой структуры нервной сети. В вышедшей в 2001 г. небольшой книжке "Колмогоров и кибернетика" [$Б_{VII}$-22] сделана первая попытка собрать работы Андрея Николаевича по этой тематике. В ней, в частности, можно найти полное изложение доклада "Автоматы и жизнь" и обзорную статью Я.М. Бардзиня.

Среди "Тем для работы", записанных Андреем Николаевичем 22 сентября 1958 г. (см. с. 122), есть такая — *Продолжение исследований "обмена и захвата"*, и стоит фамилия "Алексеев". Спустя десять лет Владимир Михайлович Алексеев защищает докторскую диссертацию. Одним из официальных оппонентов был Андрей Николаевич. Прочитаем его отзыв.

ОТЗЫВ
на диссертацию В.М. Алексеева "Квазислучайные динамические системы"

Введение к диссертации содержит обзор современной проблематики теории классических динамических систем. Диссертация В.М. Алексеева примыкает к четырем группам работ.

1. *Попытки Шази доказать невозможность некоторых случаев предельного поведения при* $t \to \pm\infty$ *в "задаче трех тел" были*

сначала опровергнуты путем построения расчетных противоречащих примеров (для "захвата" и для "обмена", отсутствие ссылки на работы является моим единственным упреком диссертанту в отношении полноты исторического обзора). Исчерпывающее доказательство возможности захвата было дано К.А. Ситниковым, а обмена как при положительной, так и при отрицательной константе энергии — В.М. Алексеевым. В рамках элементарных представлений, не учитывающих возможности "осциллирующего" поведения, нерешенным оставался наиболее деликатный вопрос о возможности захвата при отрицательной константе энергии (захват кометы системой Солнце, Юпитер). Этот вопрос как раз решен в диссертации.

2. *Сама возможность осцилляций в этой задаче была доказана К.А. Ситниковым. Своеобразное с теоретико-множественной точки зрения устройство фазового пространства этой задачи в отношении поведения при $t \to \infty$ было намечено А.Н. Колмогоровым (см. указание на стр. 38 диссертации). Для обнаружения возможности "осцилляций" мною было предложено разобрать специальный случай, которому посвящена третья глава представляемой диссертации. В.М. Алексеев не ограничился осуществлением этой программы, но получил окончательные результаты и в отношении совместного учета поведения траекторий при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$. Это потребовало значительно более тонких методов.*

3. *Эти более тонкие методы автора диссертации возникли в развитие идей Я.Г. Синая, С. Смейла и Д.В. Аносова (обзор работ этих авторов дан на стр. 4–10 диссертации). В.М. Алексеев указывает и более старый источник своих идей — "символическую динамику" Дж. Биркхофа. "Квазислучайный" характер поведения траекторий при движении по геодезическим многообразия отрицательной кривизны был замечен давно. Более определенно эти аналогии со случайными процессами получили развитие в работах Я.Г. Синая при использовании введенного мною понятия "энтропии" динамической системы. Роль "бернуллиевских динамических систем" в классической проблематике выяснилась в работах Я.Г. Синая и Смейла. Из этих источников и развился тонкий аппарат исследования классических динамических систем, изложенный в первой главе диссертации.*

4. *Работы А.Н. Колмогорова, В.И. Арнольда и Ю. Мозера о роли в классических динамических системах почти периодических решений менее непосредственно связаны с диссертацией, хотя*

и необходимы для замыкания полной таблицы возможных типов поведения изучаемых систем. Кроме того, в них впервые появились подмножества фазового пространства с локальным устройством по типу произведения гладкого элемента на канторовское множество, играющее большую роль в диссертации.

Конкретные результаты второй и третьей глав существенно основаны на общих идеях первой главы, где в общей форме развивается метод изучения динамических систем при помощи "топологических марковских цепей". Трудно дать краткое изложение этой теории. В § 6 первой главы дан ряд примеров применения метода. Эта глава сама по себе представляет большой интерес.

Третья глава диссертации посвящена классической задаче трех тел. В случае отрицательной константы энергии при $t \to +\infty$ возможны три типа поведения системы (нумерация соответствует таблице к стр. 373 диссертации):

2) *одно из расстояний ограничено, два других стремятся к бесконечности;*

3) *все расстояния ограничены;*

4) *"осциллирующее" поведение.*

Рассматривая поведение системы при $t \to \pm\infty$, получаем девять логически возможных комбинаций: (2 2), (2 3), (2 4); (3 2), (3 3), (3 4); (4 2), (4 3), (4 4). *Случай* (2 2) *распадается при этом на два:* (2 2)-*а* — *без "обмена" и* (2 2)-*б* — *с "обменом".*

До недавнего времени были известны только примеры случаев (2 2)-*а и* (3 3). *В своей работе, не вошедшей в диссертацию, В.М. Алексеев впервые строго доказал возможность случая* (2 2)-*б. В 1960 г. К.А. Ситников построил пример "осциллирующего" поведения, т.е. установил возможность хотя бы одного из случаев* (2 4), (3 4), (4 4) *и хотя бы одного из случаев* (4 2), (4 3), (4 4).

Основной результат третьей главы диссертации заключается в доказательстве возможности всех десяти случаев. В частности, установлена возможность захвата (случай (2 3)), *которая отрицается еще в изданном в 1967 году сборнике "Успехи астрономии в СССР". Случаи* (2 2)-*а,* (2 2)-*б и* (3 3) *осуществляются с положительной вероятностью. Про остальные либо доказано, либо правдоподобно, что их вероятность нулевая. Но в качестве пограничных случаев они интересны и важны.*

Уже перечисленные результаты убедительно свидетельствуют о значительности достижений В.М. Алексеева в этой трудной области, в которой работал ряд крупных ученых. Результаты получены при помощи рассмотрения одного специального случая задачи трех тел, обладающего осевой симметрией, изучение которого было начато К.А. Ситниковым. Основные особенности этого специального

случая задачи трех тел сохраняются и при переходе к обладающему той же симметрией случаю "ограниченной задачи трех тел" (движущаяся по оси симметрии масса — нулевая). Сам же случай ограниченной задачи трех тел, с другой стороны, является частным случаем задачи об одномерном осцилляторе, подчиненном уравнению

$$\ddot{x} = Q(x, t), \qquad (*)$$

где Q периодически зависит от времени. Исследованию этого уравнения посвящена глава вторая.

В применении к решению уравнения $(*)$ результаты о предельном поведении решений при $t \to \pm\infty$, собраны на стр. 357 в виде следствия 9. Оказывается, что уже здесь это поведение может быть весьма разнообразным, а распределение в фазовом пространстве точек, дающих начало разного типа траекториям, обладает рядом неожиданных свойств. Есть все основания думать, что открытые здесь явления имеют широкое распространение в динамических системах классической механики. В частности, набросанная на стр. 378–381 общая картина устройства фазового пространства общей задачи трех тел, вероятно, может быть окончательно уточнена на основе методов, развитых В.М. Алексеевым.

Подводя итог, мы видим, что диссертант, полностью овладев всем очерченным кругом проблем и методов, существенно продвинул решение давно поставленных проблем, получив и ряд завершающих результатов. В отношении тонкости методов он стоит на самом высоком из достигнутых к настоящему моменту уровне.

В соответствии с этим диссертацию В.М. Алексеева следует признать полностью удовлетворяющей требованиям, предъявляемым к диссертациям на степень доктора физико-математических наук, а диссертанта — присуждению ему этой степени.

А. Колмогоров
6 декабря 1968 г.

Этот отзыв я привел здесь не только потому, что хотелось лишний раз вспомнить добрым словом рано ушедшего ученика Андрея Николаевича замечательного математика Владимира Михайловича Алексеева (а каждый читатель-математик безусловно поймет, что такой отзыв А.Н. Колмогорова — это очень доброе слово!), но и для того, чтобы показать, с какой глубиной проникал в работы других математиков, и своих учеников, в частности, Андрей Николаевич. И не только когда они уже собирались становиться докторами наук, но и когда еще только скромно писали свои дипломные работы — в сборнике "Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове" опубликован, например, отзыв А.Н. на дипломную работу В.А. Успенского ([$Б_5$, с. 234–235]).

С той же мерой ответственности и той же глубиной Андрей Николаевич подходил к отзывам, которые его просили дать на работы других математиков, не являющихся его прямыми учениками. В качестве доказательного примера приведем

ОТЗЫВ
о работах Николая Николаевича Ченцова по теории вероятностей и математической статистике

В теории случайных процессов представляет интерес найденный Н.Н. Ченцовым критерий отсутствия у траекторий разрывов второго рода. Он связан с предельными теоремами для таких процессов, установленными Н.Н. Ченцовым (его работы [2], [7], [12]).

Интересны и работы Н.Н. Ченцова по случайным полям ([1], [4], [24], [36]), в частности, конструкции гауссовских полей, обладающих обобщенным марковским свойством.

Другой большой цикл работ Н.Н. Ченцова имеет более методологический интерес ([42], [43]). В нем показано, что значительная часть математической статистики может получить новое освещение с точки зрения теории категорий и при помощи введения надлежащих метрик (в частности, "энтропийного расстояния", интересные свойства которого изучены Н.Н. Ченцовым).

Развивая идеи Н.В. Смирнова, Н.Н. Ченцов внес вклад в методы оценивания по выборке неизвестной гладкой плотности распределения. Многолетние исследования Н.Н. Ченцова по математической статистике обобщены в его монографии "Статистические решения, правила и оптимальные выводы" ([42]). Перевод русского издания 1972 года в настоящее время готовится к печати в США.

Все сказанное показывает, что Николай Николаевич ЧЕНЦОВ является крупным специалистом в теории вероятностей и математической статистике, а его работы получили широкое признание.

Академик А. Колмогоров
26 октября 1974 г.

Стоит словами самого Николая Николаевича [Б$_4$, с. 575–576] прокомментировать первый абзац этого отзыва, столь скромно изложенный Колмогоровым. "Из работы в семинаре Е.Б. Дынкина я знал, что конечномерные распределения хорошо описывают поведение траекторий марковского процесса, когда вероятность траектории достаточно мала. Перебрав несколько вариантов, я нашел, что при условии

$$\sup_{N,t} \mathsf{E}|\xi_N(t+\tau_2) - \xi_N(t)|^2 |\xi_N(t) - \xi_N(t-\tau_1)|^2 \le C|\tau_1 + \tau_2|^2, \qquad (*)$$

ограничивающем возможности повторных скачков, из слабой сходимости конечномерных распределений для последовательности произвольных процессов $\xi_N(t)$ с траекториями без разрывов второго рода, $\xi_N(t) \Rightarrow \xi(t)$, вытекает сходимость попаданий в полосу. Для $\xi_N(t) = \sqrt{N}[F_N(F^{-1}(t)) - t]$ условие $(*)$ легко проверяется. Мой доклад на "большом" семинаре по теории вероятностей был выслушан с большим интересом. Однако А.Н. заметил в конце обсуждения, что мое дополнительное требование, чтобы траектории процессов $\xi_N(t)$ не имели разрывов второго рода, является излишним. Он сказал: "*Это свойство само вытекает из* $(*)$. *Посмотрите мою теорему в работе Слуцкого, где из условия*

$$\sup_t \mathsf{E}|\xi(t+\tau) - \xi(t)|^p \le C|\tau|^{1+\epsilon} \qquad (**)$$

выводится непрерывность траектории $\xi(t)$ *с вероятностью* 1". И он был прав (а я — обескуражен)". Заметим, что позднее, когда усовершенствованная работа Н.Н. Ченцова была опубликована в первом номере только что созданного А.Н. Колмогоровым журнала "Теория вероятностей и ее применения", условие $(*)$ и его обобщение в стиле $(**)$ было названо Дж. Дубом "*условием Колмогорова–Ченцова*".

В 1962 году А.Н. Колмогорову первому из математиков была присуждена международная премия Фонда Бальцана*:

> "Pour les nombreuses contributions toujours fondementales, jamais d'ordre secondaire dans des disciplines mathématiques, les plus variées, telles que les fondements des mathématiques, la topologie, l'analyse fonctionnelle, le calcul des probabilités, les séries trigonométriques, la théorie de l'information — en particulier pour son œuvre dans l'analyse fonctionnelle, et plus encore, dans le calcul des probabilités qui a influencé le developpement de ces disciplines à un tel degré que la théorie des probabilités, généralement adoptée à présent, est celle basée sur ses idées".

*Eugene Balzan (1874–1953) — итальянский журналист и административный менеджер, долгое время работавший в итальянской газете "Corriere della sera". В 1933 г. переехал в Швейцарию. После его смерти, в 1957 г. его дочь Angela Lina Balzan передала полученное от отца наследство в пользу созданного ею премиального фонда, получившего название "Balzan Prize". Впервые эта премия была присуждена в 1961 г. международной организации — Нобелевскому фонду. Премию 1962 г. вместе с А.Н. Колмогоровым получили папа S. S. Giovanni XXIII (Премия мира), Karl von Frish (биология), Paul Hindemit (музыка), Samuel Eliot Morison (история). Вручение премии состоялось в Риме в 1963 году. По математике премии Фонда Бальцана позднее были еще удостоены Enrico Bombieri (1980), Jean-Pierre Serre (1985), Armand Borel (1992) и Михаил Громов (1999).

25 апреля 1963 года Андрею Николаевичу исполнилось шестьдесят лет. В этот день был опубликован Указ Президиума Верховного Совета СССР "О присвоении академику Колмогорову А.Н. звания Героя Социалистического Труда":

ВЫДАЮЩИЙСЯ МАТЕМАТИК СОВРЕМЕННОСТИ

Академик Андрей Николаевич Колмогоров — выдающийся математик современности — родился 25 апреля 1903 года вблизи от Ярославля.

В 1920 г. Колмогоров поступил в Московский университет, а через год начал самостоятельные научные исследования в области теории множеств. Затем его научные интересы распространились на теорию тригонометрических рядов, теорию интеграла, теорию вероятностей, математическую логику, функциональный анализ, геометрию, механику, теорию информации, математическую статистику, теорию конечных автоматов, основания математики, а также на применения математики в задачах физики, геофизики, теории стрельбы, техники, биологии, лингвистики.

Поражает не только исключительная широта научных интересов А. Н. Колмогорова, но и та глубина, с которой он проникает в существо стоящих перед ним задач. Основная характерная особенность его творчества — не только общность постановок проблем, но и стремление к выводам, непосредственно связанным с актуальными применениями.

Особенно велики заслуги А. Н. Колмогорова в развитии и полном преобразовании теории вероятностей — науки о случайных событиях, получившей в наше время огромное теоретическое и прикладное значение не только в естествознании, но и в технике и экономике. В 1925 году, когда он начал интересоваться вопросами теории вероятностей, эта наука носила почти кустарный характер. Стиль ее построения резко выпадал из принятых в математике норм. Приведению в порядок основ теории вероятностей Колмогоров уделил серьезное внимание.

Теория вероятностей не имела никаких средств для изучения таких процессов, состояние которых изменяется в зависимости от случая. А процессы этого рода постоянно встречаются в физических и технических явлениях. Разработка теории случайных процессов была почти целиком проведена А. Н. Колмогоровым и его школой.

А. Н. Колмогоров — один из самых умелых воспитателей молодых ученых. Обилие идей, новых замыслов и неожиданных путей разрешения труднейших проблем служит неисчерпаемым источником творчества и вдохновения не только для непосредственных его учеников, но и для всякого молодого ученого, который стремится работать. Недаром среди учеников А. Н. Колмогорова так много выдающихся советских ученых.

Я горд тем, что мне посчастливилось быть одним из близких его учеников.

Свое шестидесятилетие Андрей Николаевич встречает в расцвете сил и творческого подъема. Хочется пожелать Андрею Николаевичу крепкого здоровья, долгих лет активной творческой жизни, новых талантливых учеников и новых успехов в науке.

Б. ГНЕДЕНКО,
академик АН УССР.

УКАЗ ПРЕЗИДИУМА ВЕРХОВНОГО СОВЕТА СССР

О присвоении академику Колмогорову А. Н. звания Героя Социалистического Труда

За выдающиеся заслуги в области математики и в связи с шестидесятилетием со дня рождения присвоить академику Колмогорову Андрею Николаевичу звание Героя Социалистического Труда с вручением ему ордена Ленина и золотой медали «Серп и Молот».

Председатель Президиума Верховного Совета СССР
Л. БРЕЖНЕВ.

Секретарь Президиума Верховного Совета СССР
М. ГЕОРГАДЗЕ.

Москва, Кремль, 24 апреля 1963 г.

Указ прозвучал и по радио, в 12-часовом выпуске "Последних известий". Его услышали и в радиофицированной университетской аудитории 16-10, где в этот час собралось множество коллег, учеников и сотрудников и куда пришел сам Андрей Николаевич. Помню, как он со смущением и удовлетворением произнес своей обычной скороговоркой: "Да-да, просто в области математики . . . ".

С 1 декабря 1964 года по 13 декабря 1966 года А.Н. Колмогоров — президент Московского математического общества.

В 1965 году А.Н. Колмогорову и В.И. Арнольду за работы по теории возмущений гамильтоновых систем присуждается Ленинская премия.

В 1966 году А.Н. Колмогоров избирается действительным членом Академии педагогических наук СССР.

А.Н. Колмогоров
(1963 г.)

Семидесятые и восьмидесятые годы (1970–1987)

Совершенствование системы преподавания математики в средней школе — главное направление деятельности Андрея Николаевича в эти годы. Он с увлечением работает в своей школе-интернате. Вместе с академиком И.К. Кикоиным создает научно-популярный физико-математический журнал для юношества "Квант", где не только руководит математическим разделом, но и сам пишет немало статей, начиная с первого номера, вышедшего в 1970 году (они собраны в раздел V *Библиографии*).

А.Н. Колмогоров объединяет вокруг себя различные творческие коллективы по два–три человека, в соавторстве и тесной совместной работе с которыми пишет школьные учебники. Он, как всегда, старается охватить много больше, чем мыслимо для одного человека. Он пишет учебники сразу по всем школьным математическим предметам, для каждого из школьных возрастов в отдельности и целыми "блоками", стараясь лично и конкретно участвовать во всей реформе школьного математического образования.

Он выдвигает не только саму концепцию этой реформы, но и заботится в продвижении ее в административных инстанциях, участвуя в многочисленных комиссиях по школьному образованию, создаваемых в разных ведомствах и на разных уровнях. А главное, он непосредственно участвует сам и привлекает к этому своих ближайших сподвижников к объяснению идей своих преобразований огромной армии учительства. Выступает в открытой печати, в журналах "Математика в школе" и "Квант", в газете "Московский университет" и центральной печати, старается помочь этой реформе не только своим бескорыстным трудом, но и беспорочным именем.

Можно сказать, что в эти последние десятилетия своей жизни Андрей Николаевич вернулся к первым, юношеским мечтам преобразовать косное школьное математическое образование. *"Меня чрезвычайно занимала перспектива деятельности в области педагогики*, — говорит А.Н. Колмогоров в своем "Последнем интервью" [$Б_2$-20], — *и одна из идей, которые постоянно носились передо мной, — это сосредоточиться на деятельности руководства идеальной, в каком-то смысле, школой"*.

Первая проба написания школьного учебника относится к концу тридцатых годов, когда они с Павлом Сергеевичем Александровым решили написать новый учебник по элементарной алгебре. *"Мы везде стремились соединить понятность изложения с его достаточной обстоятельностью и логической безупречностью. При этом мы исходили из убеждения, что наша книга будет верным и надежным руководителем для учащегося не только при первом знакомстве с предметом, но и при дальнейшем изучении"*, — пишут авторы в предисловии к своей

“Алгебре”, вышедшей в 1939 году ([Бv-1]). Уже тогда они стремились привлечь к важному делу школьного математического образования математическую общественность. 22 и 28 ноября 1937 года состоялись два заседания Московского математического общества, посвященные обсуждению плана (!) этого учебника алгебры (заметим, что авторы затем работали над своим учебником еще два года!).

В одном из своих писем А.Н. Колмогорову Павел Сергеевич рассказывает, как ему довелось в войну принимать участие в школьном экзамене по геометрии и тригонометрии в выпускном классе казанской средней школы, где учился внук приютившего на время эвакуации в своем доме семейства Александровых и Колмогоровых казанского аптекаря А.А. Вильде. И школьники, и их знания, и их учительница произвели на Павла Сергеевича самое благоприятное впечатление, но при этом П.С. замечает: “На несколько дней дам упомянутой учительнице математики наш учебник алгебры, которым она очень интересуется, но который не держала в руках, так как в Казани будто бы никто не видал ни одного его экземпляра”.

Может быть, война помешала, но учебник, авторы которого *“везде стремились к полному и отчетливому пониманию учащимся смысла всех совершаемых операций”*, не прижился, и мы, учившиеся в старших классах в первые послевоенные годы, вновь штудировали алгебру по учебнику Киселева . . .

Тогда же, перед самой войной Александров и Колмогоров начинают сотрудничество с журналом “Математика в школе”, где в 1941 году появляются их статьи “Свойства неравенств и понятие о приближенных вычислениях” [Бv-65], “Иррациональные числа” [Бv-66], перепечатанные в 1961 году в сборнике “Вопросы преподавания математики в средней школе” ([Бv-164]). Это сотрудничество продолжалось почти полвека: всего в журнале “Математика в школе” Андрей Николаевич опубликовал 78 статей. Главный редактор журнала Р.С. Черкасов входил и в некоторые из авторских коллективов, являясь, таким образом, соавтором Андрея Николаевича более чем в двух десятках школьных учебников (см. раздел V Библиографии). Андрей Николаевич привлек к написанию с ним вместе или под его редакцией и многих других авторов: А.М. Абрамова, Б.Е. Вейца, В.А. Гусева, И.Т. Демидова, Ю.П. Дудницына, И.Г. Журбенко, Б.М. Ивлева, О.С. Ивашева-Мусатова, Ф.Ф. Нагибина, А.В. Прохорова, А.Ф. Семеновича, А.Б. Сосинского, С.И. Шварцбурда, А.А. Шершевского. Всего в семидесятых—восьмидесятых годах при непосредственном участии А.Н. Колмогорова было написано и издано более шестидесяти школьных учебников, и они, кроме русского, выходили на азербайджанском, армянском, башкирском, белорусском, грузинском, казахском, каракалпакском, киргизском, латышском, литовском, молдавском, таджикском, татарском, туркменском, тувинском, узбекском, уйгурском, украинском, а также венгерском и польском языках.

На этом впечатляющем (и, скорее всего, неполном) перечислении мне хотелось бы остановиться, отослав читателя к обзорному очерку А.М. Абрамова "О педагогическом наследии А.Н. Колмогорова" в сборнике "Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове" [$Б_5$], а также другим статьям раздела "Колмогоров и математическое образование" этого сборника. Упомянем, наконец, и вышедший в 1988 году в "Библиотечке 'Квант' " сборник статей А.Н. Колмогорова "Математика — наука и профессия" [$Б_{VII}$-14].

Чтобы представить зримо работу Андрея Николаевича в семидесятых годах и степень его личного участия в деле реформы математического образованияв стране, приведем здесь

ОТЧЕТ О РАБОТЕ
действительного члена АПН СССР
А.Н. Колмогорова за 1970 г.

1. *В физико-математической школе-интернате при МГУ руковожу методическим объединением математиков, читаю лекционный курс, а в качестве председателя попечительского совета занимаюсь и общими делами школы. На основе материалов школы готовится учебник математики* ⟨[$Б_V$-64]. — *А.Ш.*⟩ *для физико-математических школ (из сотрудников АПН в авторском коллективе В.А. Гусев, А.А. Шершевский), для которого мною написано несколько глав. В течение 24-х летних дней был полностью занят в летней школе, через которую происходит окончательный отбор в школу-интернат.*

2. *Как заместитель редактора журнала "Квант" руковожу в этом журнале отделом математики. Написал для журнала ряд заметок* ⟨см. [$Б_V$-144, $Б_V$-145, $Б_V$-147, $Б_V$-148]. — *А.Ш.*⟩ *и большую статью о современном понимании понятия функции ("Квант", 1970 г., №1, №2)* ⟨[$Б_V$-143, $Б_V$-146]. — *А.Ш.*⟩.

3. *Разработал программу нового курса для педагогических институтов "Научные основы школьного курса математики", принятую Министерством просвещения СССР. Опубликовал в "Математике в школе" очередную статью из цикла статей на темы этого курса* ⟨[$Б_V$-93] -А.Ш.⟩.

4. *Написал совместно с Р.С. Черкасовым и А.Ф. Семеновичем "Учебные материалы по геометрии для V-го класса". С теми же соавторами и Ф.Ф. Нагибиным работал над учебником геометрии для VI—VIII классов. Пробное издание учебника для шестого класса вышло из печати, для седьмого класса — сдано в издательство. Принимал участие в конференции учителей, ведущих экспериментальную работу (г. Владимир).*

5. *Работал в качестве председателя математической секции Комиссии по содержанию среднего образования при АН СССР и АПН СССР. Для этой комиссии детально рецензировал учебники, подготовленные в АПН под редакцией А.И. Маркушевича для IV, V, VI классов.*

6. *По окончании деятельности указанной выше комиссии начал работу в качестве председателя математической комиссии при Ученом методическом совете Министерства просвещения СССР. Для этой комиссии подготовил доклад "Система основных понятий и обозначений школьной математики"* ⟨[Бv-96]. — *А.Ш.*⟩.

5 *января* 1971 *г.*

Научно-организационная деятельность Андрея Николаевича в эти годы, как и всегда, связана с двумя крупнейшими центрами математической мысли в нашей стране — Механико-математическим факультетом Московского университета и Математическим институтом Академии наук.

На Мехмате, куда Андрей Николаевич пришел еще до его образования (ведь этот факультет выделился из Физико-математического в 1933 году, как раз когда А.Н. Колмогоров возглавлял такое необычное подразделение — Научно-исследовательский институт математики и механики (находившийся в ведении всего Университета, а не его Физико-математического факультета). В 1935 году Колмогоров основывает на новом, уже Механико-математическом, факультете кафедру теории вероятностей и становится ее первым заведующим, а позднее организует и возглавляет еще одну — кафедру математической статистики. Мы видим, что Андрей Николаевич соглашался занимать административные посты (а иногда, если судить по его письмам военных лет, и настаивал на этом), когда он считал, что начинается какое-то нужное дело и он сможет быть более полно полезен, если возглавит его и подкрепит своим неоспоримым авторитетом. Так было и с создаваемыми математическими журналами "Успехи математических наук" и "Теория вероятностей и ее применения", и с деканством на Мехмате в середине пятидесятых годов, и с созданием университетской Лаборатории вероятностных и статистических методов и организацией школы-интерната при МГУ в шестидесятые.

А.Н. Колмогоров

В неоднократно цитировавшемся нами “Последнем интервью” [$Б_2$-20] сам Андрей Николаевич подтверждает это:

— Вы сами тянулись к какой-то административной деятельности или она Вас настигала?

— Нет, стремиться я никогда не стремился. В некоторых случаях было такое чувство долга, так сказать, вера в то, что если я возьмусь, то сделаю существенно лучше — ну это в случае деканства моего, например.

— Ну, а как Вы считаете, это Вам удалось, Андрей Николаевич?

— В какой-то мере удалось. Для факультета, во всяком случае, это был все-таки один из лучших периодов. А вообще говоря, какого-то отвращения к административной деятельности у меня не было.

Наладив дело на кафедре математической статистики, Андрей Николаевич затем передает ее своему ученику Ю.А. Розанову, а сам соглашается возглавить осиротевшую в связи с кончиной в 1979 году А.А. Маркова кафедру математической логики. Думается, что тут Андрей Николаевич не только уступил настойчивым просьбам коллектива этой кафедры, но и решил попробовать вернуться к предмету своих еще первых математических увлечений — логике. И в своем удивительном “Конкретном плане того, как сделаться великим человеком, если на это хватит охоты и усердия” Андрей Николаевич намечал в 1954—1963 годы заниматься исследованиями по логике, а в следующем десятилетии (1964—1973) написать курс логики для университетов и курс логики для средней школы (см. в третьей книге нашего издания “Дневник 1943 г.”, запись от 1 декабря 1943 г.). Жизнь “подкорректировала” этот план, которому предречено было всерьез осуществиться: Андрей Николаевич успел написать даже два курса — “Введение в математическую логику” (1982 г., [$Б_{Iкн}$-46]) и “Математическая логика. Дополнительные главы” (1984 г., [$Б_{Iкн}$-47]). Что касается школьного курса логики, то Колмогоров имел намерения его ввести — в 1971 году в комиссии по математике при Ученом методическом совете Министерства просвещения СССР он делал доклад “Элементы логики в современном учебном курсе школьной математики” (см. [$Б_V$-98]).

В Стекловском институте А.Н. Колмогоров в эти годы тоже становится во главе нового подразделения — в 1983 году, в возрасте 80 лет он возглавляет специально для него открытый отдел математической статистики и теории информации.

Не оставляет Андрей Николаевич и другие свои “математические обязанности”: с 1973 г. по 15 октября 1985 г. он — президент Московского математического общества; с 1982 г. — вновь главный редактор журнала “Успехи математических наук”.

В 1982 году (с 22 по 29 августа) в Тбилиси проводился очередной, четвертый Советско-Японский симпозиум по теории вероятностей и матема-

Чтение на веранде в Комаровке

тической статистике. В нем приняли участие 45 японских ученых во главе с К. Ито и 270 советских, лидером которых, конечно, был Андрей Николаевич Колмогоров, приехавший, несмотря на плохое самочувствие. Это был его последний приезд в Тбилиси — город, который он любил еще с ранних тридцатых годов (он и П.С. Александров строили даже, как это видно из их переписки, планы насовсем туда переехать). На симпозиуме Андрей Николаевич читает лекцию "О логических, семантических и алгоритмических основах теории вероятностей". Текст этой лекции опубликован под более коротким и более общим названием "О логических основаниях теории вероятностей" в книге "Вероятность и математическая статистика" его "Избранных трудов" [$Б_I$-197]. (См. также наш текст на с. 141.)

Значительным событием восьмидесятых был Первый Всемирный конгресс Общества Бернулли по математической статистике и теории вероятностей, проходивший в Ташкенте с 8 по 14 сентября 1986 года. Вся подготовительная работа и проведение конгресса осуществлялись советским Оргкомитетом (почетный председатель — А.Н. Колмогоров, председатель — Ю.В. Прохоров, заместители председателя — С.Х. Сираждинов и А.Н. Ширяев), в Ташкенте работал еще свой Оргкомитет (председатель — С.Х. Сираждинов). Работа Конгресса проходила по 35 секциям. В общей сложности на Конгрессе было прочитано 100 сорокаминутных докладов по приглашению, 181 пятнадцатиминутных сообщений и представлено 430 стендовых сообщений; было организовано также 15 неформальных дискуссий. Были проведены также заседания "Круглого стола" по темам: "Вычислительные методы и средства в теоретической и прикладной статистике", "Взаимосвязь теории и приложений" и "Исторические аспекты развития теории вероятностей и математической статистики".

Открылся конгресс форумным докладом А.Н. Колмогорова и В.А. Успенского *"Алгоритмы и случайность"* [$Б_I$-211], в котором не только рас-

сматривались общие вопросы применимости математической теории вероятностей к явлениям реального мира, имеющим предположительно случайный характер, и показывалось, каким образом теория алгоритмов и рекурсивных функций позволяет придать точный математический смысл сопоставлению "сложного" и "случайного", но и была сформулирована программа дальнейших исследований в этой области. Колмогоров уже не смог приехать в Ташкент, и доклад читал Владимир Андреевич Успенский. Андрей Николаевич обратился к участникам Конгресса с письменным ***"Приветствием"*** [$Б_I$-211, с. 425–426].

Приветствие Андрея Николаевича Колмогорова участникам Первого Всемирного конгресса Общества Бернулли

Глубокоуважаемые дамы и господа! Разрешите приветствовать вас в день открытия Конгресса.

Мне представляется знаменательным, что Общество, принявшее имя Бернулли, Общество, объединяющее специалистов лишь в одной отрасли математики — теории вероятностей и математической статистики, сумело организовать собрание своих сочленов столь представительное, что оно сравнимо с международными математическими конгрессами. Но если задуматься, то этому, казалось бы, парадоксальному явлению можно найти свое объяснение.

Один из знаменитых членов семейства Бернулли, Якоб Бернулли, вошел в историю науки многими своими достижениями. Но две его заслуги должны быть отмечены особо. Он является родоначальником науки ***теории вероятностей****, получив в ней первый серьезный результат, повсюду известный как теорема Бернулли. Но, кроме этого, не следует забывать, что он, по-существу, явился родоначальником и* ***комбинаторики****. Начала этой науки были использованы им при доказательстве своей теоремы, но он пошел в области комбинаторики и значительно дальше, открыв, в частности, замечательную последовательность чисел, носящих его имя. Эти числа постоянно встречаются в научных исследованиях вплоть до нашего времени.*

Все мы ощущаем, что одним из основных требований к математике, которые предъявляет ей наше время, является исследование очень сложных систем. А сложность, с одной стороны, очень тесно соприкасается со случайностью, а с другой — требует в какой-то мере расширения и самой комбинаторики.

Все это дает надежду на то, что с течением времени Общество Бернулли будет все более и более увековечивать свое влияние в математическом мире. Желаю участникам Конгресса всего наилучшего.

В начале восьмидесятых годов Президиум Академии наук принял постановление об издании избранных трудов А.Н. Колмогорова. Надо сказать, что Андрей Николаевич поставил в свой уже упоминавшийся план *“ Как сделаться великим человеком”* даже два пункта: *“Подготовка полного собрания своих математических работ к 70-летию”* намечалась на 1964–1973 годы, а на следующее десятилетие (1974–1983) — *“Писание воспоминаний о прожитой жизни”*. В действительности же, в десятилетие 1964–1973, предшествовавшее его 70-летию, Андрей Николаевич еще был полон сил и непосредственных творческих планов, а к восьмидесятилетию занялся подготовкой как раз своих трудов (до “писания воспоминаний” дело, таким образом, так и не дошло).

Колмогоров принял в подготовке к изданию своих трудов самое непосредственное участие. Он сам придумал представить их в виде нескольких отдельных книг и сам отобрал статьи для трех таких книг: “Математика и механика”, “Теория вероятностей и математическая статистика” и “Теория информации и теория алгоритмов”. Для всех нас участие Андрея Николаевича явилось неоценимым вкладом и незабываемым уроком — мы могли воочию убедиться, какие из своих работ А.Н. ценил, счтал важными, узловыми и с какой критичностью к ним относился.

Работа над подготовкой “Избранных трудов” заняла годы — прежде всего потому, что было решено все отобранные Андреем Николаевичем статьи опубликовать по-русски, и такие русские переводы многих из его работ, вышедших в оригинале на иностранных языках, были осуществлены впервые именно для этого издания.

Первый том, “Математика и механика” (составитель В.М. Тихомиров) вышел при жизни Андрея Николаевича в 1985 году. Том включает 60 работ, начиная с самой первой: “Ряд Фурье–Лебега, расходящийся почти всюду” в переводе П.Л. Ульянова. Том снабжен довольно подробными комментариями, значительную часть из которых Андрей Николаевич написал сам (“К работам по теории функций и теории множеств”, “К работам по интуиционистской логике”, “К работам по теории гомологий”, “К работе об открытых отображениях”, “К работе об уравнении диффузии”, “К работам по турбулентности”, “К работам по классической механике” и “К работам о суперпозициях”). Другие комментарии по его просьбе составили В.И. Арнольд, А.В. Архангельский, Г.И. Баренблатт, Е.А. Горин, Е.П. Долженко, Г.Г. Магарил-Ильяев, А.А. Михалев, И.И. Паровиченко, В.Е. Плиско, Ю.А. Розанов, В.А. Скворцов, С.А. Теляковский, В.М. Тихомиров, П.Л. Ульянов, Г.С. Чогошвили и А.М. Яглом. В начале первого тома приводится составленная В.М. Тихомировым “Биографическая справка” об А.Н. Колмогорове, а в конце — Список его трудов (по состоянию на 1985 год).

Составителем второй и третьей книг избранных трудов А.Н. Колмогорова является А.Н. Ширяев. Вторая книга — “Теория вероятностей и математическая статистика” — открывается статьей П.С. Александрова “Несколько слов об А.Н. Колмогорове”, написанной к восьмидесятилетию Андрея Николаевича и впервые опубликованной в юбилейном номере журнала “Успехи математических наук” ([Б$_8$-4], 1983 г.) уже после смерти Павла Сергеевича. Вышедшая в 1986 году, эта книга содержит 53 отобранных Андреем Николаевичем статьи и его общий комментарий “К работам по теории вероятностей и математической статистике”. Авторами других комментариев являются: Т.В. Арак, Ю.Г. Баласанов, Ю.К. Беляев, А.Д. Вентцель, А.Б. Вистелиус, И.Г. Журбенко, В.М. Золотарев, В.М. Круглов, Я.П. Лумельский, М.Б. Малютов, А.А. Новиков, Ю.А. Розанов, Б.А. Севастьянов, А.В. Скороход, В.А. Статулявичус, Э.В. Хмаладзе, А.Н. Ширяев, А.А. Юшкевич и А.М. Яглом.

Третья, последняя, книга — “Теория информации и теория алгоритмов” — вышла в 1987 году. Она содержит 13 статей А.Н. Колмогорова, два его комментария (“К работам по теории информации и некоторым ее применениям” и “К работе о динамических системах”) и небольшой, впервые публикуемый текст “Из воспоминаний А.Н. Колмогорова”. Кроме того, в виде двух отдельных приложений в этой книге впервые опубликованы первые, самые ранние работы Андрея Николаевича (“Доклад математическому кружку о квадрильяже” и “Об операциях над множествами. II”. Открывается же эта, третья, книга приветствием А.Н. Колмогорову по случаю его восьмидесятилетия от Московского математического общества и юбилейной статьей Н.Н. Боголюбова, Б.В. Гнеденко и С.Л. Соболева “Андрей Николаевич Колмогоров (к восьмидесятилетию со дня рождения)”. Комментарии к отдельным статьям Андрея Николаевича составили: Я.М. Барздинь, Р.Л. Добрушин, А.Л. Семенов, Я.Г. Синай, В.М. Тихомиров, В.А. Успенский и А.Х. Шень. Завершается том “Послесловием”, написанным самим Андреем Николаевичем и подводящим как бы итог всему изданию, а, в каком-то смысле, и всему его собственно математическому творчеству.

Восьмидесятые годы, вообще, по существу, явились годами подведения итогов.

25 апреля 1983 году Андрею Николаевичу исполнялось 80 лет, и было решено провести в Московском университете двухдневную юбилейную научную конференцию. Вместо традиционной формы (пленарные заседания плюс работа в разных секциях) Андрей Николаевич предложил устроить два дня общих собраний с “большими” обзорными докладами по его приглашению. Пятьдесят минут отводилось докладчику и затем 10 минут на возможную дискуссию. Всего таких докладов было двенадцать. Доклады проходили в аудитории 02 (самой вместительной из всех больших аудиторий нового здания университета), и оба дня аудитория была переполнена

(пришлось даже открыть обычно закрытый балкон). У доски на мольберте установили портрет Андрея Николаевича, написанный его учеником художником Дмитрием Гордеевым. Этот "тройной" портрет теперь смотрит на вас со стены библиотеки Комаровского дома — его фотографии не раз за минувшие годы публиковались в самых разных изданиях, посвященных А.Н. Колмогорову. Необычайная динамичность, подвижность Андрея Николаевича — человека, который был, кажется, близок к тому, чтобы "объять необъятное", явственно видна в этом портрете сразу трех Колмогоровых, каждый из которых воодушевленно торопится успеть что-то рассказать . . .

"Тройной" портрет А.Н. Колмогорова. Художник Дм. Гордеев

Андрей Николаевич сидел в первом ряду напротив доски и своего портрета и слушал своих учеников и последователей. Аудитория была полна, и, видимо, он был тем, кто понимал ВСЕ эти доклады. Приведем здесь про-

грамму этой памятной конференции (тексты докладов опубликованы в юбилейном выпуске журнала “Успехи математических наук”. — 1983, т. 38, вып. 4):

25 апреля

С е к ц и я “Теория приближений”

С.М. Никольский. “А.Н. Колмогоров в Днепропетровске”

П.Л. Ульянов. “А.Н. Колмогоров и расходящиеся ряды Фурье”

В.М. Тихомиров. “Поперечники и энтропия”

С е к ц и я “Динамические системы и классическая механика”

Д. В. Аносов. “Геодезические потоки с неустойчивыми траекториями и бильярды”

Я.Г. Синай. “Переход к возникновению стохастичности в динамических системах”

26 апреля

С е к ц и я “Статистическая гидромеханика”

А.М. Обухов. “Течение Колмогорова и его моделирование”

А.С. Монин. “Геофизическая турбулентность”

М.И. Вишик. “Аттракторы эволюционных уравнений и оценки их размерности”

С е к ц и я “Предельные теоремы теории вероятностей”

Ю.В. Прохоров. “Закон больших чисел и закон повторного логарифма”

А.А. Боровков. “Граничные задачи, принцип инвариантности, большие уклонения”

А.В. Скороход. “Произведения независимых операторов”

С е к ц и я “Динамические системы и классическая механика”

В.И. Арнольд. “Новое о колмогоровских торах”

Утром же в день 25 апреля в конференц-зале 1-го Гуманитарного корпуса университета на Ленинских горах состоялось и торжественное юбилейное заседание.

Андрей Николаевич, которого уже несколько лет мучила все усиливавшаяся болезнь Паркинсона, был слаб, но воодушевлен — наверное, он ощущал искренность и тепло зала, до отказа заполненного пришедшими, приехавшими, прилетевшими его поздравить. В торжественном черном костюме, со звездой Героя на лацкане (думаю, что мы видели ее впервые) он сидел в центре длинного президиума, где среди ответственных лиц, организаторов науки были и близкие — Анна Дмитриевна, ученики . . . Опасаясь, что заседание слишком затянется и Андрею Николаевичу будет тяжело, желающих вручить приветственный адрес просили обходиться без “сопроводительных речей”, но речи все звучали и звучали . . .

Вице-президент Академии Наук СССР В.А. Котельников вручает А.Н. Колмогорову приветственный адрес

Вечером того же дня в университетской профессорской столовой от имени юбиляра был устроен торжественный ужин. Когда отзвучали бесчисленные тосты, Андрей Николаевич поднялся и взял слово. К сожалению, речь его осталась незаписанной. Поэтому могу только своими словами сказать, что мне запомнилось. Обращаясь к присутствующим, Андрей Николаевич сказал, что на протяжении примерно семидесяти пяти лет он *"пользовался отменным здоровьем"* и в учениках ценил, главным образом, их целеустремленность, способность к поиску, талант, их научные достижения, наконец ... Но в последние годы, когда здоровье изменило ему, он смог явственно почувствовать тепло своих учеников, их искреннюю готовность не только идти за ним в науке, иногда даже и опережая его, не только идти по лыжне или на веслах, но и помогать ему в преодолении трудностей, которые, к сожалению, становятся ежедневными. Думаю, что не у одного меня сдавило горло ... Но тут Андрей Николаевич вдруг добавил со знакомой всем, но присущей только ему интонацией, что благодарит всех, кто пришел и особенно кто приехал издалека. *"Я понимаю, что многие получили командировочные на такое важное мероприятие и благодаря этому могли собраться и повидать друг друга, и я уж постараюсь прожить*

еще пять лет, чтобы вновь предоставить им такую возможность. Я постараюсь . . . "

Это было одно из немногих, а может быть, и единственное обещание, которого Андрей Николаевич не выполнил . . .

Подарок-"награда" Б. Заходера (соседа по Комаровке)
к дню рождения Андрея Николаевича

25 апреля 1986 года Андрей Николаевич встречал свой, как оказалось, предпоследний день рождения и собрал в Комаровке на обед своих ближайших учеников — 12 человек, а меня заранее попросил быть "ведущим" за столом. Гости старались сказать своему учителю самые теплые слова, неизменно и искренне подчеркивая молодость духа, которую ему удавалось сохранять, несмотря на тяготы болезни. Безжалостная эта болезнь и понятное волнение не дали тогда Андрею Николаевичу произнести ответные слова. Но он хотел обязательно сказать их и на следующее утро попросил записать его *"Ответ ученикам"*:

"Здесь говорили о моей будто бы неиссякаемой молодости. Я благодарен за такую оценку, но должен внести в нее некоторые ограничения. Старость все-таки объективное явление, от которого никуда не уйти. Счастливая старость — как она может осуществиться? Или путем отказа производить какие-то

новые достижения и примирясь с, по существу, бессодержательной старостью. Если же это не так, то старый человек может рассматривать эту пору как светлую и радостную, но при этом неизбежными оказываются связанные с нею переживания о том, что я того-то и того-то делать не могу. Причем это относится не только к холодному купанию и спортивным достижениям.

По оценке врачей мое объективное состояние сравнительно благополучно. Но все-таки количественно продукция стала уже значительно меньше, что вносит все же печальные ограничения. В моем случае я считаю свою научную карьеру, в смысле получения новых результатов, законченной. Печалюсь об этом, но склоняюсь перед неизбежностью.

В последние годы моя деятельность развивается в другом направлении — в участии в деле, столь важном для нашей страны, как реформа школы. Тут я, во-первых, думаю, что если старость не помешает, я смогу внести еще много полезного и даже незаменимого, работая над учебниками для обычной школы и для юношества, увлеченного наукой. Оба направления деятельности меня увлекают, и имеется желание участвовать в них самым энергичным образом и с юношеским задором.

Но время идет, проходят месяцы, на которые была запланирована та или иная работа, но она все откладывается . . .

Поэтому особенное значение приобретает выбор тех направлений деятельности, где ты являешься наиболее трудно заменимым. Если я сосредоточусь на составлении учебников для способных ребят, то не успею участвовать в создании учебников для обычных школ. И сейчас вы меня застаете на таком распутье. Если я дам согласие активно и с достаточным размахом работать в одном направлении, то не смогу это делать в другом. Вот такого рода душевные переживания особенно обостряются в старости . . .

Поэтому я так ценю моих молодых помощников, многих из которых я пригласил сегодня".

Его не стало 20 октября 1987 года, за полгода до 85-летия.

В 14 часов 09 минут аппарат, который был подключен к сердцу Андрея Николаевича, начал чертить непрерывную прямую линию . . .

Послесловие

Этот очерк, как уже говорилось выше, родился из другого, одноименного, подготовленного мною для сборника “Колмогоров в воспоминаниях”, вышедшего в 1993 году к 90-летию со дня рождения Андрея Николаевича. За десять прошедших лет было найдено еще немало материалов, касающихся разных сторон его жизни и творчества. В бумагах А.Н. обнаружились и его дневники, в основном времен войны, и многочисленные письма самого Андрея Николаевича и к нему, и множество разных черновиков, заметок и набросков, в том числе и чисто математических, конечно. Это позволило не только довольно сильно переработать, но и значительно расширить очерк 1993 года.

Дневники и значительная часть писем А.Н. Колмогорова и П.С. Александрова друг другу публикуются в виде отдельных книг этого, юбилейного, издания.

В очерке 1993 года приводился и список учеников А.Н. Колмогорова. Удивительным образом, хотя, казалось бы, как может измениться список учеников в отсутствие Учителя, он претерпел за минувшие годы значительные изменения. Более того, и сегодня этот список нельзя считать ни окончательным, ни точным. Складывается впечатление, что список этот представляет еще один пример “большого числа” по Колмогорову (определение см. в его знаменитом докладе “Автоматы и жизнь” ([Б$_{\text{VII}}$-3] или [Б$_{\text{VII}}$-23]). А.Н. Колмогоров оказал настолько всеобъемлющее влияние на математику своего, да и последующего времени (а значит, и на математиков своего и последующих времен), что вряд ли можно указать имя математика, который не испытывал этого влияния, а значит, не мог бы в той или иной мере считать себя учеником Колмогорова (хотя в нашем списке 1993 года есть и немногие случаи, когда ошибочно были включены некоторые лица, но я не думаю, чтобы кто-нибудь мог быть за это в обиде!).

Основой списка 1993 года явился когда-то продиктованный по памяти самим Андреем Николаевичем список его учеников. Понятно, что такой список с неизбежностью страдал неполнотой. С другой стороны, многие математики сами считали (и объявляли) себя учениками Колмогорова по тому влиянию, которое он оказал на них и на их работы.

Поэтому при составлении списка, который публикуется сегодня, мы поступили иначе. Мы, во-первых, приводим список учеников А.Н. Колмогорова, которых можно считать “прямыми”, т. е. тех, у кого он являлся руководителем кандидатской диссертации или же руководителем “по существу” докторской (с которыми сложнее, но все-таки такой список тоже устоялся). Список же математиков, которые сами признавали себя учениками или испытывали влияние, можно рассматривать лишь как список *примеров* таких математиков.

Иногда возникает впечатление, что в ранние, довоенные и военные годы, Андрей Николаевич и Павел Сергеевич не разделяли строго своих учеников, по крайней мере, до тех пор, пока это не становилось формально необходимым. Просто каждый из них старался принести всю возможную пользу ученикам, которые становились близкими тому и другому (например, бывали в Комаровском доме). Из писем и дневников мы видим, что А.А. Петров, которого мы знаем и помним как ученика Андрея Николаевича, сначала "предназначался" Павлу Сергеевичу. Даже внимательно изучив переписку военных лет, мы, например, не смогли прийти к окончательному выводу, чьим же учеником был М.Ф. Бокштейн. Оба они принимали самое живое участие в докторской диссертации "Марочки" Бокштейна, оба присутствовали на защите в Казани . . .

Кроме того, можно составить и еще один огромный список — "учеников Колмогорова во втором поколении" (это определение принадлежит Н.Н. Ченцову, который формально был учеником сначала Е.Б. Дынкина, а позднее Н.В. Смирнова, но при этом сами они оба были учениками Андрея Николаевича).

За прошедшее время произошли и некоторые изменения в "разделах", к которым в очерке 1993 года были отнесены те или иные лица. Член-корреспондент АН СССР А.С. Монин стал действительным членом (академиком) РАН (Российской Академии наук), А.Н. Ширяев — избран членом-корреспондентом РАН, А.М. Абрамов и И.Я. Верченко — членами-корреспондентами РАО (Российской Академии образования). В списке учеников-академиков появилось и "новое" лицо — А.Г. Витушкин, не названный Андреем Николаевичем в первый раз (вряд ли А.Н. мог забыть столь выдающегося ученика — скорее, из скромности, счел свое влияние на его научные достижения не достаточным, чтобы объявить себя его учителем, а между тем, на автореферате кандидатской диссертации А.Г. Витушкина стоит: "Научные руководители — А.Н. Колмогоров и Е.М. Ландис").

Так или иначе, сегодня, со всеми оговорками, мы представляем список учеников Андрея Николаевича Колмогорова в следующем виде.

Прямые ученики:

Академики и члены-корреспонденты РАН:

Арнольд Владимир Игоревич
Большев Логин Николаевич
Боровков Александр Алексеевич
Витушкин Анатолий Георгиевич
Гельфанд Израиль Моисеевич
Мальцев Анатолий Иванович

Миллионщиков Михаил Дмитриевич
Михалевич Владимир Семенович
Монин Андрей Сергеевич
Никольский Сергей Михайлович
Обухов Александр Михайлович
Прохоров Юрий Васильевич
Севастьянов Борис Александрович
Синай Яков Григорьевич
Ширяев Альберт Николаевич

академики Украины и УзССР:

Гнеденко Борис Владимирович
Скороход Анатолий Владимирович
Сираждинов Сагды Хасанович

члены-корреспонденты РАО:

Абрамов Александр Михайлович
Верченко Иван Яковлевич

Доктора и кандидаты физико-математических наук:

Алексеев Владимир Михайлович
Асарин Евгений Александрович
Бавли Григорий Минкелевич
Баренблатт Григорий Исаакович
Баркалая Акакий Константинович
Бассалыго Леонид Александрович
Беляев Юрий Константинович
Булинский Александр Вадимович
Васильков Дмитрий Алексеевич
Вашакидзе Дареджан Ражденовна
Винокуров Владимир Григорьевич
Вовк Владимир Григорьевич
Гальперин Григорий Александрович
Дмитриев Николай Александрович
Добрушин Роланд Львович
Дынкин Евгений Борисович
Ерохин Владислав Дмитриевич
Журбенко Игорь Георгиевич
Золотарев Владимир Михайлович
Ивашев-Мусатов Олег Сергеевич

Козлов Василий Васильевич
Козлов Михаил Васильевич
Козуляев Петр Алексеевич
Кондурарь Владимир Трифонович
Левин Леонид Анатольевич
Леонов Виктор Петрович
Мартынов Анатолий Васильевич
Матвеев Ростислав Федорович
Медведев Юрий Тихонович
Мешалкин Лев Дмитриевич
Офман Юрий Петрович
Очан Юрий Семенович
Петров Алексей Аркадьевич
Пинскер Марк Семенович
Пискунов Николай Семенович
Прохоров Александр Владимирович
Розанов Юрий Анатольевич
Рыкова Любовь Викторовна
Тихомиров Владимир Михайлович
Тулайков Александр Николаевич
Тюрин Юрий Николаевич
Успенский Владимир Андреевич
Фаге Михаил Константинович
Хазен Элида Моисеевна
Шмидов Федор Исаакович
Яглом Акива Моисеевич

К этому списку следует добавить погибших на войне аспирантов А.Н. Колмогорова:

Двойченков А.Н.
Засухин Виктор Николаевич
Защинский Кива Израилевич
Юнович Борис Маркович

Учениками А.Н. Колмогорова официально являются также: Вадим Иванович Битюцков, Виктор Петрович Леонов, венгерский математик Матиаш Арато, швед Пер Мартин-Лёф, болгарин Боян Пенков и румын Милн Розенблат-Рот.

Испытывали настолько сильное влияние на свои работы, что могли себя назвать учениками А.Н. Колмогорова также Ян Мартинович Барздинь, Ан-

дрей Александрович Гончар, Ильдар Абдуллович Ибрагимов, Кирилл Александрович Ситников, Николай Васильевич Смирнов, Витаутас Антанович Статулявичус, Сергей Васильевич Фомин, Николай Николаевич Ченцов, Георгий Евгеньевич Шилов и Александр Адольфович Юшкевич.

За прошедшие со дня кончины Андрея Николаевича годы его учениками и научной общественностью был предпринят ряд шагов для достойного увековечивания его памяти. Отметим некоторые из них.

Российской Академией наук учреждена "Премия имени А.Н. Колмогорова".

На Новодевичьем кладбище установлен (открыт 21 апреля 1993 г.) памятник А.Н. Колмогорову (скульптор Д.И. Народицкий, архитектор Ю.Н. Воскресенский).

Памятник на Новодевичьем кладбище

Установлены мемориальные доски А.Н. Колмогорову и П.С. Александрову на той "профессорской" башне "Л" здания Московского университета на Ленинских горах, где с 1953 года жили в соседних квартирах № 9 и № 10 на третьем этаже Павел Сергеевич и Андрей Николаевич. Мемориальные барельефы П.С. Александрова и А.Н. Колмогорова установлены и на "Комаровском доме" (скульптор Д.И. Народицкий).

Мемориальные доски на здании МГУ

На Механико-математическом факультете Московского университета, которому А.Н. Колмогоров отдал более 60 лет своей жизни, также есть мемориальная доска его памяти. Учреждена колмогоровская именная стипендия, которая каждый год присуждается за особые достижения в учебе студенту-старшекурснику (как правило, вероятностной специализации).

На кафедре теории вероятностей МГУ стали традиционными конференции молодых ученых — студентов и аспирантов кафедры — Колмогоровские чтения, которые проходят в конце апреля, вблизи дня рождения Андрея Николаевича. В 2002 году кафедра провела первую Колмогоровскую студенческую олимпиаду по теории вероятностей, которую также предполагается сделать традиционной и тоже проводить в конце апреля, в Колмогоровские дни.

Имя Андрея Николаевича Колмогорова присвоено созданной им Московской физико-математической школе-интернату №18, которая сама преобразована за эти годы в особое подразделение Московского университета — Специализированный учебно-научный центр при МГУ — школа имени А.Н. Колмогорова.

Появилось за эти годы и немало изданий, посвященных Андрею Николаевичу Колмогорову. Если перечислять их в хронологическом порядке, то прежде всего следует назвать небольшой, но емкий сборник статей самого Андрея Николаевича: “Математика в ее историческом развитии” (составитель Г.А. Гальперин, под редакцией В.А. Успенского. — М.: Наука, 1991). Далее, к девяностолетию Колмогорова вышел уже упоминавшийся сборник “Колмогоров в воспоминаниях” (редактор-составитель А.Н. Ширяев. — М.: Наука, 1993). В 1999 году — новый сборник “Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове” (составитель Н.Х. Розов, под редакцией В.М. Тихомирова. — М.: МИРОС—ФАЗИС). Американское и Лондонское математические общества выпустили в 2000 году в своей совместной серии “История математики” сборник “Kolmogorov in Perspective”, состоящий, в основном, из статей, переведенных с русского; он также содержит перевод оригинальной статьи самого Андрея Николаевича 1946 г. “Ньютон и современное математическое мышление” (впервые публикуется на английском языке) и Библиографию А.Н. Колмогорова из сборника “Колмогоров в воспоминаниях” (AMS/LMS. 2000. History of Mathematics. V. 20).

В Приложении 8 Библиографии А.Н. Колмогорова, помещаемой в этой книге, указаны более 130 статей, посвященных А.Н. Колмогорову, его страница в Интернете, а также два документальных фильма о нем: “Спрашивайте, мальчики” и “Рассказы о Колмогорове”.

Теперь в библиографию войдет и само это издание “КОЛМОГОРОВ”, приуроченное к 100-летию со дня рождения Андрея Николаевича Колмогорова.

К 100-летию Андрея Николаевича В Москве состоится и Международная конференция (16—21 июня 2003 г.) под эгидой сразу обоих крупнейших научных центров страны — Российской Академии наук и Московского государственного университета. Само название конференции

“КОЛМОГОРОВ И СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА”

как нельзя лучше отражает глубинную роль и огромное влияние Андрея Николаевича Колмогорова не только на математику и математиков его времени, но и на МАТЕМАТИКУ и МАТЕМАТИКОВ, перешагнувших в третье тысячелетие.

Дополнительный список работ разных авторов, на которые даются ссылки в очерке

[ДС-1] *Александров П.С.* Страницы автобиографии // УМН, 1979, т. 34, №6, с. 219–249; 1980, т. 35, №3, с. 241–278.

[ДС-2] *Арак Т.В.* О сближении n-кратных сверток распределений, имеющих неотрицательную характеристическую функцию, с сопровождающими законами // Теория вероятн. и ее примен., 1980, т. 25, вып. 2, с. 225–246.

[ДС-3] *Арак Т.В.* О скорости сходимости в равномерной предельной теореме Колмогорова. I, II // Теория вероятн. и ее примен., 1981, т. 26, вып. 2, с. 225–245; вып. 3, с. 449–463.

[ДС-4] *Арак Т.В., Зайцев А.Ю.* Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. — Л.: Наука, 1986. (Труды МИАН. Т. 174.)

[ДС-5] *Арак Т.В., Зайцев А.Ю.* О скорости сходимости во второй равномерной предельной теореме Колмогорова // Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. 28, вып. 2, с. 333–353.

[ДС-6] *Атрейя, Ней* (*Athreya K.B., Ney P.E.*). Branching Processes. — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1972. (Grundlehren Math. Wiss. V. 196.)

[ДС-7] *Беляев Ю.К.* Вероятностные методы выборочного контроля. — М.: Наука, 1975.

[ДС-8] *Бернштейн С.Н.* Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей // Сообщ. Харьковск. матем. об-ва., 1917, вып. 15, с. 209–274.

[ДС-9] *Бернштейн С.Н.* (*Bernstein S.N.*). Principes de la théorie des équations différentielles stochastiques // Труды МИАН, 1934, т. 5, с. 95–124.

[ДС-10] *Бернштейн С.Н.* Теория вероятностей. 4-е изд. — М.: Гостехиздат, 1946.

[ДС-11] *Блан-Лапьер, Форте* (*Blanc-Lapierre A., Fortet R.*). Théorie des fonctions aléatoires. — Paris: Masson, 1953.

[ДС-12] *Больман* (*Bohlmann G.*). Die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrer Anwendung auf die Lebensversicherung // Atti del IV Congresso internazionale dei Matematici. — Roma, 6–11 Aprile. 1908. V. III. Sezione IIb. — Roma: Accademia dei Lincei, 1909.

[ДС-13] *Борель* (*Borel E.*). Sur les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques // Rend. Circ. Mat. Palermo, 1909, №26, p. 247–271.

[ДС-14] *Боровков А.А.* Граничные задачи, принцип инвариантности, большие уклонения // УМН, 1983, т. 38, вып. 4, с. 227–254.

[ДС-15] *Бриллинджер Д.Р.* Временные ряды. Обработка данных и теория. — М.: Мир, 1980.

[ДС-16] *Брю, Йор* (*Bru B., Yor M.*). Comments on the life and mathematical legacy of Wolfgang Doeblin // Finance & Stochastics, 2002, v. 6, №1, p. 3–47.

[ДС-17] *Вахания Н.Н., Тариеладзе В.И., Чобанян С.А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. — М.: Наука, 1985.

[ДС-18] *Винер* (*Wiener N.*). Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. — Cambridge: MIT Press, 1949.

[ДС-19] *Волконский В.А., Розанов Ю.А.* Некоторые предельные теоремы для случайных функций. I // Теория вероятн. и ее примен., 1959, т. 4, вып. 2, с. 186–207.

[ДС-20] *Волконский В.А., Розанов Ю.А.* Некоторые предельные теоремы для случайных функций. II // Теория вероятн. и ее примен., 1961, т. 6, вып. 2, с. 202–215.

[ДС-21] *Гихман И.И.* О некоторых дифференциальных уравнениях со случайными функциями // Укр. матем. журн., 1950, т. 2, №3, с. 45–69.

[ДС-22] *Гихман И.И.* К теории дифференциальных уравнений случайных процессов // Укр. матем. журн., 1950, т. 2, №4, с. 37–63; 1951, т. 3, №3, с. 317–339.

[ДС-23] *Гихман И.И.* Об одной теореме А.Н. Колмогорова // Учен. записки Киевск. ун-та, Матем. сб., 1953, №7, с. 76–94.

[ДС-24] *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. 2-е изд., перераб. — М.: Наука, 1977.

[ДС-25] *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. — Киев: Наукова думка, 1982.

[ДС-26] *Гливенко* (*Glivenko V.*). Sulla determinazione empirica delle leggi di probabilità // Giorn. Ist. Ital. Attuari., 1933, v. 4, №1, с. 92–99.

[ДС-27] *Гублер И.А.* Решение задачи стрельбы с искусственным рассеиванием для некоторых случаев // Труды МИАН, 1945, т. 12, с. 67–94.

[ДС-28] *Дворецкий, Кифер, Волфовитц* (*Dvoretzky A., Kiefer J., Wolfowitz J.*). Asymptotic minimax character of the sample distribution function and of the classical multinomial estimator // Ann. Math. Statist., 1956, v. 27, p. 642–669.

[ДС-29] *Донскер* (*Donsker M.D.*). An invariance principle for certain probability limit theorems // Mem. Amer. Math. Soc., 1951, №6, p. 1–12.

[ДС-30] *Донскер* (*Donsker M.D.*). Justification and extension of Doob's heuristic approach to the Kolmogorov–Smirnov theorems // Ann. Math. Statist., 1952, v. 23, p. 277–281.
[ДС-31] *Дуб* (*Doob J.L.*). Heuristic approach to the Kolmogorov–Smirnov theorems // Ann. Math. Statist., 1949, v. 20, p. 393–403.
[ДС-32] *Дуб Дж.Л.* Вероятностные процессы. — М.: ИЛ, 1956.
[ДС-33] *Жакод Ж., Ширяев А.Н.* Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1, 2. — М.: Физматлит, 1994. (Сер. Теория вероятн. и матем. статист. Вып. 47, 48.)
[ДС-34] *Журбенко И.Г.* Спектральный анализ временных рядов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.
[ДС-35] *Зайцев А.Ю.* О точности аппроксимации распределений сумм независимых случайных величин, отличных от нуля с малой вероятностью, с помощью сопровождающих законов // Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. 28, вып. 4, с. 625–636.
[ДС-36] *Ито* (*Itô K.*). Differential equations determining a Markoff process // J. Pan-Japan Math. Coll., 1942, №1077.
[ДС-37] *Ито* (*Itô K.*). Stochastic integral // Proc. Imper. Acad. Tokyo., 1944, v. 20, p. 519–524.
[ДС-38] *Ито* (*Itô K.*). On a stochastic integral equation // Proc. Japan Acad., 1946, v. 22, p. 32–35.
[ДС-39] *Ито* (*Itô K.*). On a formula concerning stochastic differentials // Nagoya Math. J., 1951, №3, p. 55–65.
[ДС-40] *Ито* (*Itô K.*). On stochastic differential equations // Mem. Amer. Math. Soc., 1951, №4, p. 1–51.
[ДС-41] *Ито* (*Itô K.*). Selected Papers / Ed. by D.W. Stroock and S.R.S. Varadhan. — New York etc.: Springer-Verlag, 1987.
[ДС-42] *Кавер, Кинг* (*Cover T., King R.C.*). A convergent gambling estimate of the entropy of English // IEEE Trans. Inform. Theory, 1978, v. IT-24, №4, p. 413–421.
[ДС-43] *Каган Ф.М.* Об одной предельной теореме Ю.В. Прохорова // Предельные теоремы теории вероятностей. — Ташкент: Фан, 1963, с. 38–42.
[ДС-44] *Кантелли* (*Cantelli F.P.*). Sulla determinazione empirica delle leggi di probabilità // Giorn. Ist. Ital. Attuari., 1933, v. 4, №2, p. 421–424.
[ДС-45] *Кац* (*Кас М.*). Enigmas of Chance. An Autobiography. — New York etc.: Harper & Row, 1985.
[ДС-46] *Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В.* Эргодическая теория. — М.: Наука, 1980.
[ДС-47] *Крамер Г., Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы. — М.: Мир, 1969.

[ДС-48] *Крамер* (*Cramér H.*). On the composition of elementary errors. Second paper: statistical applications // Scand. Aktuarietidskr., 1928, №1/2, p. 141–180.

[ДС-49] *Крамер* (*Cramér H.*). On harmonic analysis in certain functional spaces // Ark. Mat. Astron. Fys., 1942, v. 28, №12, p. 1–7.

[ДС-50] *Крамер Г.* Математические методы статистики. 2-е изд. — М.: ИЛ, 1948. М.: Мир, 1975.

[ДС-51] *Крылов, Боголюбов* (*Kryloff N., Bogoliouboff N.*). La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire // Ann. of Math. (2), 1937, v. 38, p. 65–113.

[ДС-52] *Леви* (*Lévy P.*). Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendentes // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser. II, 1934, v. 3, p. 337–366.

[ДС-53] *Леви* (*Lévy P.*). Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien. Introduction. 1-ère partie: Souvenirs mathématiques. 2-ème partie: Considérations philosophiques. — Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 1970.

[ДС-54] *Леонов В.П., Ширяев А.Н.* К технике вычисления семиинвариантов // Теория вероятн. и ее примен., 1959, т. 4, вып. 3, с. 342–355.

[ДС-55] *Леонов В.П.* Некоторые применения старших семиинвариантов к теории стационарных случайных процессов. — М.: Наука, 1964.

[ДС-56] *Леонтович* (*Leontovitch M.A.*). Zur Statistik der kontinuierlichen Systeme und des zeitlichen Verlaufes der physikalischen Vorträge // Phys. Ztschr. Sowjetunion, 1933, v. 3, p. 35–63.

[ДС-57] *Леонтович М.А.* Основные уравнения кинетической теории газов с точки зрения теории случайных процессов // ЖЭТФ, 1935, т. 5, с. 211–231.

[ДС-58] *Ли, Витаньи* (*Li M., Vitanyi P.M.B.*). Two decades of applied Kolmogorov complexity // Proceedings of the IEEE 3rd Structure in Complexity Theory Conference, Washington DC, June 1988. P. 1–23. (См. также Preprint TR-02-88, Harvard University, Center for Research in Computing Technology; УМН, 1988. т. 43, № 6, с. 129–166.)

[ДС-59] *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. — М.: Наука, 1974.

[ДС-60] *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Теория мартингалов. — М.: Наука, 1986.

[ДС-61] *Ловеланд* (*Loveland D.W.*). The Kleene hierarchy classification of recursively random sequences // Trans. Amer. Math. Soc., 1966, v. 125, №3, p. 497–510.

[ДС-62] *Ловеланд* (*Loveland D.*). A new interpretation of the von Mises' concept of random sequence // Z. Math. Logik Grundlag. Math., 1966, v. 12, №4, p. 279–294.

[ДС-63] *Ломницкий* (*Lomnicki A.*). Nouveaux fondements du calcul des probabilités // Fund. Math., 1923, v. 4, p. 34–71.

[ДС-64] *Лоэв* (*Loève M.*). Fonctions aléatoires du second ordre. Приложение к кн.: P. Lévy. Processus stochastiques et mouvement brownien. — Paris: Gauthier-Villars, 1948.

[ДС-65] *Мандельброт, Ван Несс* (*Mandelbrot B.B., Van Ness J.W.*). Fractional Brownian motions, fractional noises and applications // SIAM Rev., 1968, v. 10, №4, p. 422–437.

[ДС-66] *Марцинкевич, Зигмунд* (*Marcinkiewicz J., Zygmund A.*). Remarque sur la loi du logarithme iteré // Fund. Math., 1937, v. 29, p. 215–222.

[ДС-67] *Мартин-Лёф П.* О понятии случайной последовательности // Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, вып. 1, с. 198–200.

[ДС-68] *Мартин-Лёф* (*Martin-Löf P.*). The definition of random sequences // Inform. and Control, 1966, v. 9, №6, p. 602–619.

[ДС-69] *Маруяма* (*Maruyama G.*). The harmonic analysis of stationary stochastic processes // Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., Ser. A, 1949, v. 4, p. 45–106.

[ДС-70] *Маруяма* (*Maruyama G.*). Continuous Markov processes and stochastic equations // Rend. Circ. Mat. Palermo, 1955, №4, p. 48–90.

[ДС-71] *Мешалкин Л.Д.* Нижняя оценка для скорости сближения распределений сумм с совокупностью неограниченно делимых законов // Докл. АН СССР, 1960, т. 132, №4, с. 766–768.

[ДС-72] *Мешалкин Л.Д.* О приближении распределений сумм неограниченно делимыми законами // Теория вероятн. и ее примен., 1961, т. 6, вып. 3, с. 257–275.

[ДС-73] *Мизес* (*Mises R. von*). Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung // Math. Ztschr., 1919, v. 5, p. 52–99.

[ДС-74] *Мизес* (*Mises R. von*). Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. — Wien: Springer-Verlag, 1928.

[ДС-75] *Мизес Р.* Вероятность и статистика. — М.–Л.: Госиздат, 1930.

[ДС-76] *Мизес* (*Mises R. von*). Mathematical Theory of Probability and Statistics. — New York–London: Academic Press, 1964.

[ДС-77] *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Ч. 1, 2. — М.: Наука, 1965; 1967.

[ДС-78] *Нагаев С.В.* О скорости сходимости в одной граничной задаче. I, II // Теория вероятн. и ее примен., 1970, т. 15, вып. 2, с. 179–199; вып. 3, с. 419–441.

[ДС-79] *Нейман Дж. фон* (*Neumann J. von*). Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik // Ann. of Math. (2), 1932, v. 33, p. 587–642.
[ДС-80] *Нейман Дж. фон* (*Neumann J. von*). Mathematische Grundlagen der Quantentheorie. — Berlin: Springer-Verlag, 1932. (Grundlehren Math. Wiss. V. 38.)
[ДС-81] *Никодим* (*Nikodým O.*). Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon // Fund. Math., 1930, v. 15, p. 168.
[ДС-82] *Обухов* (*Obukhov A.M.*). Some specific features of atmospheric turbulence // J. Fluid Mech., 1962, v. 13, №1, p. 77–81. J. Geophys. Res., 1962, v. 67, p. 3011–3014.
[ДС-83] *Обухов А.М.* Течение Колмогорова и его лабораторное моделирование // УМН, 1983, т. 38, №4, с. 101–111.
[ДС-84] *Орнстейн Д.* Эргодическая теория, случайность и динамические системы. — М.: Мир, 1978.
[ДС-85] *Петровский И.Г.* Избранные труды. Дифференциальные уравнения. Теория вероятностей. — М.: Наука, 1987.
[ДС-86] *Пиотровский Р.Г.* Информационное изменение языка. — Л.: Наука, 1968.
[ДС-87] *Понтрягин Л.С., Андронов А.А., Витт А.А.* О статистическом рассмотрении динамических систем // ЖЭТФ, 1933, №3, с. 165–180.
[ДС-88] Проблемы Гильберта / Под общ. ред. *П.С. Александрова*. — М.: Наука, 1969.
[ДС-89] *Прохоров* (*Prochorov A.V.*). Teoria pravdopodobienstwa w badaniach rytmu wiersza // Pamietnik literacki, 1970, №61, p. 113–127.
[ДС-90] *Прохоров А.В.* О случайной версификации. (К вопросу о теоретических и речевых моделях стихотворной речи.) // Проблемы теории стиха. — Л.: Наука, 1984, с. 89–98.
[ДС-91] *Прохоров Ю.В.* Распределения вероятностей в функциональных пространствах // УМН, 1953, т. 8, вып. 3, с. 95–166.
[ДС-92] *Прохоров Ю.В.* О суммах одинаково распределенных величин // Докл. АН СССР, 1955, т. 105, №4, с. 645–647.
[ДС-93] *Прохоров Ю.В.* Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. 1, вып. 2, с. 177–238.
[ДС-94] *Прохоров Ю.В.* О равномерной предельной теореме А.Н. Колмогорова // Теория вероятн. и ее примен., 1960, т. 5, вып. 1, с. 103–113.
[ДС-95] *Ревюз, Йор* (*Revuz D., Yor M.*). Continuous Martingales and Brownian Motion. 3rd ed. — Berlin: Springer-Verlag, 1999.
[ДС-96] *Розанов Ю.А.* Стационарные случайные процессы. — М.: Физматгиз, 1963.

[ДС-97] *Розанов Ю.А.* Теория обновляющих процессов. — М.: Наука, 1974.
[ДС-98] *Рычкова Н.Г.* Лингвистика и математика // Наука и жизнь, 1961, №9, с. 76–77.
[ДС-99] *Савчук А.П.* Об оценках энтропии языка по Шеннону // Теория вероятн. и ее примен., 1964, т. 9, вып. 1, с. 154–157.
[ДС-100] *Саханенко А.И.* О скорости сходимости в одной граничной задаче // Теория вероятн. и ее примен., 1974, т. 19, вып. 3, с. 416–420.
[ДС-101] *Свешников А.А.* Определение наилучшего способа введения искусственного рассеивания при стрельбе (для некоторых частных случаев) // Труды МИАН, 1945, т. 12, с. 46–66.
[ДС-102] *Севастьянов Б.А.* Ветвящиеся процессы. — М.: Наука, 1971.
[ДС-103] *Синай Я.Г.* О спектральных мерах высших порядков эргодических стационарных процессов // Теория вероятн. и ее примен., 1963, т. 8, вып. 4, с. 463–470.
[ДС-104] *Синай Я.Г.* Теория фазовых переходов. — М.: Наука, 1980.
[ДС-105] *Скороход А.В.* Исследования по теории случайных процессов. — Киев: Изд-во Киевского ун-та, 1961.
[ДС-106] *Смирнов Н.В.* Приближение законов распределения случайных величин по эмпирическим данным // УМН, 1944, т. 10, с. 179–206.
[ДС-107] *Стеффенсен* (*Steffensen J.F.*). Deux problèmes du calcul des probabilités // Ann. Inst. H. Poincaré. — 1933, v. 3, p. 319–344.
[ДС-108] *Струк, Варадан* (*Stroock D.W., Varadhan S.R.S.*). Diffusion processes with continuous coefficients. I, II // Comm. Pure Appl. Math. — 1969, v. 22, p. 345–400; 479–530.
[ДС-109] *Тихомиров В.М.* Поперечники множеств в функциональном пространстве и теория наилучших приближений // УМН, 1960, т. 15, вып. 3, с. 81–120.
[ДС-110] *Ульянов П.Л.* А.Н. Колмогоров и расходящиеся ряды Фурье // УМН, 1983, т. 38, вып. 4, с. 51–90.
[ДС-111] *Феллер* (*Feller W.*). The general form of the so-called law of the iterated logarithm // Trans. Amer. Math. Soc., 1943, v. 54, p. 373–402.
[ДС-112] *Финетти де* (*Finetti B. de*). Le funzione caratteristiche de lagge istantanes // Atti Accad. naz. Lincei Rend., 1930, v. 12, p. 278–282
[ДС-113] *Фишер* (*Fisher R.A.*). The Genetical Theory of Natural Selection. — Oxford: Oxford Univ. Press, 1930.
[ДС-114] *Форте, Мурье* (*Fortet R., Mourier E.*). Convergence de la répartition empirique vers la répartition théorique // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 1953, t. 70, fasc. 3, p. 267–285.

[ДС-115] *Фреше* (*Fréchet R.M.*). Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités. Fasc. 3 du tome I du *Traité du calcul des probabilités et de ses applications* par É. Borel et divers auteurs. — Paris: Gauthier-Villars, 1925.

[ДС-116] *Халмош, Нейман Дж. фон* (*Halmos P., Neumann J. von*). Operator methods in classical mechanics. II // Ann. of Math. (2), 1942, v. 43, p. 332–350.

[ДС-117] *Харди, Литтлвуд* (*Hardy G.H., Littlewood J.E.*). Some problems of Diophantine approximations // Acta Math., 1914, v. 37, p. 155–239.

[ДС-118] *Харрис Т.Е.* Теория ветвящихся случайных процессов. — М.: Мир, 1966.

[ДС-119] *Хартман, Винтнер* (*Hartman P., Wintner A.*). On the law of the iterated logarithm // Amer. J. Math., 1941, v. 63, p. 169–176.

[ДС-120] *Хаусдорф* (*Hausdorff F.*). Grundzüge der Mengenlehre. — Leipzig: Viet, 1913.

[ДС-121] *Хинчин А.Я.* Асимптотические законы теории вероятностей. — М.–Л.: ОНТИ, 1936.

[ДС-122] *Хинчин А.Я.* Новый вывод одной формулы П. Леви // Бюлл. МГУ. Сер. матем., 1937, т. 1, вып. 1, с. 1–17.

[ДС-123] *Хинчин А.Я.* Понятие энтропии в теории вероятностей // УМН, 1953, т. 8, вып. 3, с. 3–20.

[ДС-124] *Хинчин А.Я.* Об основных теоремах теории информации // УМН, 1956, т. 11, вып. 1, с. 17–75.

[ДС-125] *Хинчин* (*Khintchine A.*). Über dyadische Brüche // Math. Ztschr., 1924, v. 18, p. 109–116.

[ДС-126] *Хинчин* (*Khintchine A.*). Über einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung // Fund. Math., 1924, v. 6, p. 9–20.

[ДС-127] *Чепмен* (*Chapman S.*). On the Brownian displacements and thermal diffusion of grains suspended in a non-uniform fluid // Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1928, v. 119, p. 34–54.

[ДС-128] *Чёрч* (*Church A.*). On the concept of a random sequence // Bull. Amer. Math. Soc., 1940, v. 46, №2, p. 130–135.

[ДС-129] *Шеннон К.* Предсказание и энтропия английского печатного текста // Работы по теории информации и кибернетике. — М.: ИЛ, 1963.

[ДС-130] *Ширяев А.Н.* Некоторые вопросы спектральной теории старших моментов. I // Теория вероятн. и ее примен., 1960, т. 5, вып. 3, с. 293–313.

[ДС-131] *Ширяев А.Н.* Об условиях эргодичности стационарных процессов в терминах моментов старших порядков // Теория вероятн. и ее примен., 1963, т. 8, вып. 4, с. 470–473.

[ДС-132] *Ширяев А.Н.* Статистический последовательный анализ. — М.: Наука, 1976.

[ДС-133] *Ширяев А.Н.* Математическая теория вероятностей. Очерк истории становления // А.Н. Колмогоров. Основные понятия теории вероятностей. 3-е изд. — М.: ФАЗИС, 1998. С. 101–129.

[ДС-134] *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 1, 2. — М.: ФАЗИС, 1998.

[ДС-135] *Шрёдингер* (*Schrödinger E.*). Über die Umkehrung der Naturgesetze // Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl., 1931, №12, p. 144–153.

[ДС-136] *Штейнгауз* (*Steinhaus H.*). Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure // Fund. Math., 1922, №4, p. 286–310.

[ДС-137] *Штрассен* (*Strassen V.*). An invariance principle for the law of the iterated logarithm // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1964, v. 3, p. 211–226.

[ДС-138] *Штрассен* (*Strassen V.*). A converse to the law of the iterated logarithm // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1965, v. 4, p. 265–268.

[ДС-139] *Шухарт* (*Shewhart W.A.*). The Economic Control of the Quality of a Manufactured Product. — New York etc.: Van Nostrand, 1931.

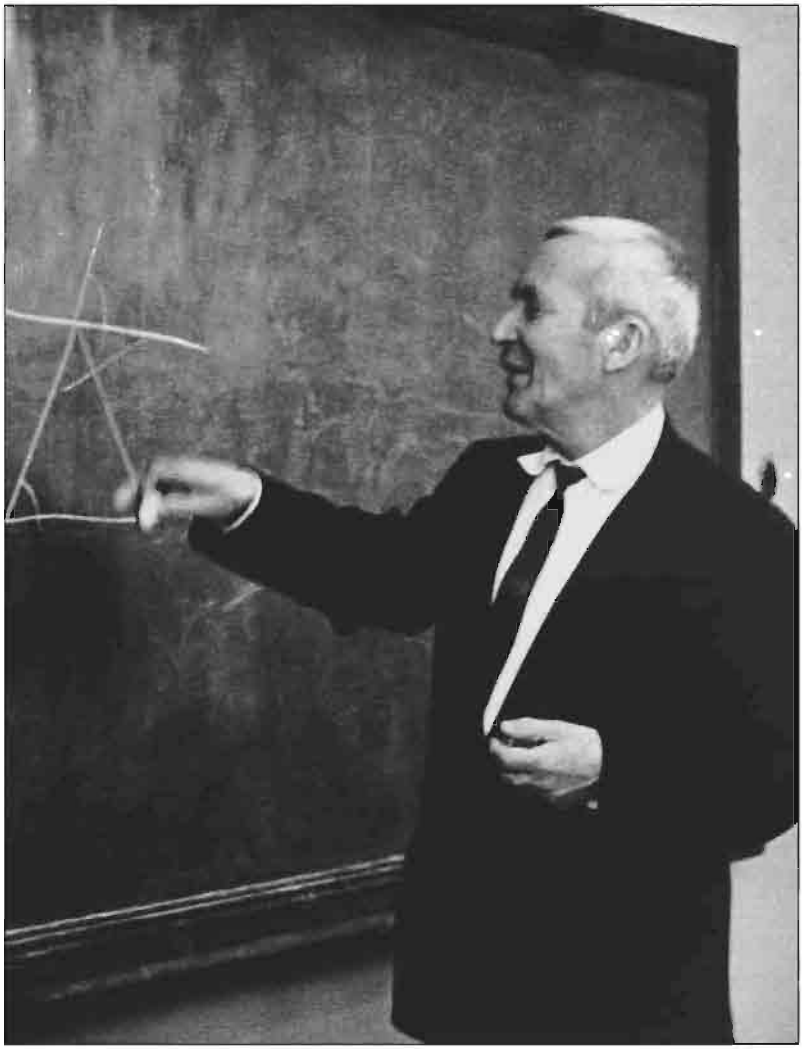
[ДС-140] *Эйнштейн А., Смолуховский М.* Броуновское движение. — М.–Л.: ОНТИ, 1936.

[ДС-141] *Эрдёш* (*Erdös P.*). On the law of the iterated logarithm // Ann. of Math. (2), 1942, v. 43, p. 419–436.

[ДС-142] *Эрдёш, Кац* (*Erdös P., Kac M.*). On the number of positive sums of independent random variables // Bull. Amer. Math. Soc., 1947, №53, p. 1011–1021.

[ДС-143] *Яглом А.М., Яглом И.М.* Вероятность и информация. — М.: Наука, 1973.

[ДС-144] *Яглом А.М.* Корреляционная теория стационарных случайных функций. — Л.: Гидрометеоиздат, 1981.



МАТЕРИАЛЫ К БИОГРАФИИ

составитель

Н.Г. Химченко

“Вам дан высокий дух, и я хочу, чтобы Вы его силы берегли для вещей, которые под силу очень немногим...”
Глубочайше уважающий Вас
Н. Лузин

“Занимаясь с некоторым успехом, а иногда и с пользой, довольно широким кругом практических приложений математики, я остаюсь, в основном, чистым математиком. Восхищаясь математиками, которые превратились в крупных представителей нашей техники, вполне оценивая значение для будущего человечества вычислительных машин и кибернетики, я все же думаю, что чистая математика в ее традиционном аспекте еще не потеряла своего почетного места среди других наук. Гибельным для нее могло бы оказаться только чрезмерно резкое расслоение математиков на два течения: одни культивируют абстрактные новейшие разделы математики, не ориентируясь отчетливо в их связях с породившим их реальным миром, другие заняты “приложениями”, не восходя до исчерпывающего анализа их теоретических основ.

Поэтому мне хочется подчеркнуть законность и достоинство позиции математика, понимающего место и роль своей науки в развитии естественных наук, техники, да и всей человеческой культуры, но спокойно продолжающего развивать “чистую математику” в соответствии с внутренней логикой ее развития.”
А.Н. Колмогоров

“А.Н. Колмогоров принадлежит к числу тех математиков, у которых каждая работа в каждой области производит полную переоценку ценностей. Трудно найти математика в последних десятилетиях не просто такой широты, а с таким воздействием на математические вкусы и на развитие математики.”
П.С. Александров

“Андрей Николаевич мечтал о новом устройстве общества, в котором богатство духовной жизни победит инстинкты. Как ни странны и наивны эти идеи, трудно всерьез с ними спорить: человечество, скорее, опоздало прислушаться к предупреждению мыслителей, и Андрей Николаевич считал своим долгом о нем напоминать в конце своей долгой и счастливой, несмотря ни на что, жизни.”
В.И. Арнольд

“Андрей Николаевич Колмогоров занимает уникальное место в современной математике, да и в мировой науке в целом. По широте и разнообразию своих научных занятий он напоминает классиков естествознания прошлых веков.”

Н.Н. Боголюбов, Б.В. Гнеденко, С.Л. Соболев

“Была поразительной сама его преданность своему делу при полном отсутствии каких-либо конъюнктурных мотивов — это была, на мой взгляд, одна из самых сильных сторон Андрея Николаевича, во многом объясняющая — конечно, вместе с его необычайно глубоким и широким видением всей математики — то огромное влияние на научную молодежь, которое он имел, — влияние, равного которому мало бывало в истории науки.”

А.А. Боровков

“Андрей Николаевич принадлежал к числу тех несравненных гениев, которые украшают жизнь уже самим фактом своего существования. Одно лишь сознание того, что где-то на Земле бьется сердце человека, наделенного столь совершенным разумом и бескорыстной душой, окрыляло, дарило радость, давало силы жить, уберегало от дурных поступков и вдохновляло на благие дела.”

В.М. Тихомиров

“В Московском университете Колмогоров, которому принадлежали выдающиеся достижения в самых разных областях математики, был кумиром учащейся молодежи. Его всегда окружала атмосфера научного поиска — поэтому его ученики были полны творческого энтузиазма.”

Б.А. Севастьянов

“Даже многие годы холодной войны и железного занавеса не смогли ни заслонить от всего мира величие гения Колмогорова, ни преуменьшить его роль в развитии всей математики XX столетия.”

Я.Г. Синай

“Колмогоров дарил окружавшим его людям ни с чем не сравнимое, почти физическое ощущение непосредственного соприкосновения с гением.

Колмогоров — уникальное явление русской культуры, наше национальное достояние.”

В.А. Успенский

“Научная, педагогическая, организаторская деятельность Андрея Николаевича Колмогорова отличается необыкновенной широтой и разнообразием — фундаментальные работы практически во всех областях математики и классической механики; прикладные работы (в геологии, металлургии, биологии, генетике, теории стрельбы,...); работы по истории, статистике текста и теории стиха; работы по основаниям и методологии математики; школьное и высшее образование...

Поразителен тот воспитательный эффект, который на себе испытывал каждый, соприкасавшийся с Андреем Николаевичем. Поражала необычайная щедрость, с которой он делился своими идеями и знаниями, гражданственность его позиции в понимании роли ученого своей страны. Удивляла его исключительная общечеловеческая культура, знание литературы, поэзии, музыки, истории, архитектуры...”

А. Ширяев

CURRICULUM VITAE

1903

25 (12) апреля родился в г. Тамбове

“Радость математического “открытия” я познал рано, подметив в возрасте пяти—шести лет закономерность:

$$1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 3^2, \text{ и так далее...”} *$$

Мать — *Мария Яковлевна Колмогорова* (1871—1903) умерла родами.

“Раннее детство я провел в родовом имении родителей моей матери в Ярославской губернии и всегда был окружен даже избытком внимания.”

Усыновлен и воспитывался сестрой матери *Верой Яковлевной Колмогоровой,* (1863—1951).

“Все мои тетушки были более или менее связаны с революционными кругами. Дед мой, вероятно, относился к этому с большим сожалением, но он, во всяком случае, был таким либеральным барином, который и сам любил умеренно вольнолюбивые разговоры.”

Детство провел в имении деда *Якова Степановича Колмогорова* в с. Туношна в 18 верстах от Ярославля.

“В нашем доме под Ярославлем мои тетушки устроили маленькую школу, в которой занимались с десятком детей разного возраста по новейшим рецептам педагогики того времени...”

Отец — *Катаев Николай Матвеевич*, по образованию агроном, окончил Петровскую (ныне Тимирязевскую) академию, погиб в 1919 г. во время деникинского наступления.

“Отец мой до революции был агрономом, затем чиновником в департаменте земледелия, после революции — сотрудником Народного Комиссариата земледелия; в моем воспитании заметного участия не принимал.”

1910

Вместе с Верой Яковлевной переселяется в Москву и поступает в частную гимназию Е.А. Репман, после Октябрьской революции преобразованную в 23 школу второй ступени.

“Общей установкой на поиски для себя серьезного, нужного дела я обязан семейной традиции и атмосфере, господствовавшей в замечательной частной гимназии Е.А. Репман, в которой я учился.”

---

*) Здесь и везде далее цитаты, не снабженные подписью, принадлежат А.Н. Колмогорову. — Прим. ред.-сост.

1920

Окончание школы.

Поступление в Московский университет на физико-математический факультет

“Я поступил в Московский университет с довольно большими знаниями по математике... Многие вопросы я изучал по энциклопедии Брокгауза и Ефрона, восстанавливая самостоятельно то, что в этих статьях написано слишком кратко.”

и параллельно на математическое отделение Химико-технологического института им. Д.И. Менделеева.

“Не бросал мысль о технической карьере, почему-то меня увлекала металлургия. Техника тогда воспринималась, как что-то более серьезное и необходимое, чем чистая наука.”

“Сдав в первые же месяцы экзамены за первый курс, я получил право на 16 килограммов хлеба и 1 килограмм масла в месяц, что, по представлениям того времени, обозначало уже полное материальное благополучие.”

Не оставляет своего серьезного увлечения историей, участвует в семинаре профессора С.В. Бахрушина...

“В первые студенческие годы, кроме математики, я занимался самым серьезным образом в семинаре по древнерусской истории профессора С.В. Бахрушина.”

Долгое время считалось, что рукописи первых работ А.Н. Колмогорова по истории не сохранились.

Найденные недавно, эти рукописи теперь опубликованы.

“Будь работа Андрея Николаевича издана вскоре после ее написания, наши знания сегодня были бы много полнее, и главное, точнее... История потеряла гениального исследователя, математика навсегда приобрела его.”

В.Л. Янин

Слушает лекции П.С. Александрова и П.С. Урысона.

“На одной из лекций П.С. Урысона Андрей Николаевич заметил ошибку в сложных построениях П.С. в его доказательстве теоремы о размерности трехмерного пространства. Ошибку эту Урысон на другой же день исправил, но острота математического восприятия, проявленная восемнадцатилетним студентом Колмогоровым, произвела на него большое впечатление.”

П.С. Александров

На втором курсе слушает лекции Н.Н. Лузина по теории функций и лекции А.К. Власова по проективной геометрии.

1921

Первая статья *“Доклад математическому кружку о квадрильяже”*.

“Николай Николаевич ⟨Лузин⟩ *сразу понял идею примера, опровергающего одно его предположение. Было решено, что я доложу пример на студенческом математическом кружке.”*

1921

Самый знаменитый результат — в области тригонометрических рядов — пример ряда Фурье–Лебега, расходящегося почти всюду.

“Цель этой заметки — дать пример суммируемой (т.е. интегрируемой в смысле Лебега) функции, ряд Фурье которой расходится почти всюду.”

1924

На 4-м курсе университета начинает интересоваться теорией вероятностей.

Первая статья по теории вероятностей *“О сходимости рядов, члены которых определяются случаем”* (совместно с другим учеником Н.Н. Лузина — А.Я. Хинчиным).

Наряду с этим занимается рядом вопросов классического анализа, теорией меры и математической логикой.

“Все мои занятия по теории вероятностей совместно с А.Я. Хинчиным, весь вообще первый период занятий этой теорией отмечен тем, что мы применяли методы, выкованные в метрической теории функций..., т.е. методы, разрабатывавшиеся Н.Н. Лузиным и его учениками.”

“Все мои первые работы были посвящены темам, развивавшимся Николаем Николаевичем: тригонометрическим рядам, теории интегрирования, дескриптивной теории множеств и функций.

Возможность общаться с Н.Н. Лузиным, рассказывать ему еще не полностью завершенные результаты была очень важна.”

1922–1925

Работа в Потылихинской опытно-показательной школе Наркомпроса (преподает математику и физику, является секретарем школьного совета и воспитателем в интернате).

“Потребность в дополнительном заработке к весьма маловесной в то время стипендии привела меня в среднюю школу. Работу в Потылихинской школе я вспоминаю теперь с большим удовольствием.”

1925

Окончание университета. Поступление в аспирантуру (к Н.Н. Лузину).

“Пребывание в аспирантуре не завершалось тогда диссертацией, как сейчас: ведь ученые степени были введены лишь в 1934 году...”

Первая работа по интуиционистской логике *“О принципе ‘tertium non datur’ ”*.

“Работа мыслилась мною как вводная часть более широкого замысла. Построение в рамках интуиционистской математики моделей различных разделов классической математики должно было служить для обоснования их непротиворечивости.”

1927

Завершение работы по закону повторного логарифма.

“При доказательстве закона повторного логарифма А.Н. Колмогоров создает новый метод, вошедший в арсенал фундаментальных средств теории вероятностей.”

А.Н. Ширяев

1929

Окончание аспирантуры.

“В Институте математики и механики имелась на этот год одна вакансия старшего научного сотрудника.

Поступление на работу в должности научного сотрудника Института математики и механики Московского университета.

Директор Института Дмитрий Федорович Егоров... в вопросе зачисления научных сотрудников считал обязательным следовать критерию старшинства. Но П.С. Александрову удалось убедить Д.Ф. Егорова отдать предпочтение моей кандидатуре.”

Путешествие по Волге и на Кавказ с П.С. Александровым, начало дружбы.

“...Мне до сих пор не совсем ясно, как я решился предложить Павлу Сергеевичу быть нашим компаньоном (в путешествии). Однако он согласился сразу...

Со дня отплытия — 16 июня — мы с Павлом Сергеевичем и исчисляем нашу дружбу.”

“Наверное, математиком я стал бы и самостоятельно, но мои человеческие

качества сложились в значительной мере под влиянием Павла Сергеевича. Он действительно был изумительнейший человек по богатству и широте взглядов. Его знание музыки, живописи, его душевное отношение к людям — необычайны."

Заведует кафедрой математики в Индустриально-педагогическом институте им. К. Либкнехта (по совместительству).

"Андрей Николаевич был предан науке и ученикам, обладая исключительным талантом замечать способных людей и способностью не жалеть времени для воспитания их."

Б.В. Гнеденко

1930

Работа *"Об аналитических методах теории вероятностей"*, в которой закладываются основы общей теории марковских случайных процессов.

"Во всей теории вероятностей XX столетия трудно указать другое исследование, которое оказалось бы столь основополагающим для дальнейшего развития науки и ее приложений, как эта работа Андрея Николаевича."

П.С. Александров, А.Я. Хинчин

1930–1931

Командировка в Германию (Гёттинген и Мюнхен) и Францию (Париж).

"Гёттинген в те годы воспринимался как первый математический центр Германии и как достойный конкурент Парижа во Франции и Принстона в США.

Я имел там разносторонние научные контакты. Прежде всего, с Курантом по линии предельных теорем, затем по интуиционистской логике с Г. Вейлем и, наконец, по теории функций — с Э. Ландау."

"Каратеодори понравилась моя работа по теории меры, и он настоял на ее возможно быстром печатании."

"Фреше занимался в это время марковскими цепями с дискретным временем и различными типами и множествами

состояний. Мы обсуждали с ним всю Марковскую проблематику в широком аспекте."
"В сфере науки я вынес очень многое из контактов с П. Леви."

1931

Становится профессором Московского университета.

"Действительно хорошо преподавать математику может только человек, который сам ею увлечен и воспринимает ее, как живую, развивающуюся науку."
"Некоторые лекции в Университете я с увлечением читал. Но в вузе я никаких оригинальных подходов к планировке времени не предпринимал — следовал тому, что у нас полагается.
Все мои годы активной работы в университете обычно складывались так: скажем, два часа в неделю какой-нибудь обязательный курс — я перечитал все-таки очень много разных обязательных курсов — один специальный курс о новейших работах, с участием и своих собственных, а потом один или два семинара, куда приходят человек десять и делают поочередно доклады..."

1932

Две работы по геометрии: *"О тополого-теоретико-групповом обосновании геометрии"* и *"К обоснованию проективной геометрии"*.
Работы 1932 года по безгранично делимым законам дают исчерпывающий ответ на проблему Бруно де Финетти.

"На стадии, где надо осмыслить полученные результаты и увидеть новые пути, на стадии создания фундаментальных обобщающих теорий Андрею Николаевичу принадлежат замечательные достижения!"

В.И. Арнольд

1933

Назначается директором Института математики и механики МГУ.

"Вообще говоря, какого-то отвращения к административной деятельности у меня не было.

Я занимался чуть не всеми аспирантами этого Института, подбирая им руководителей, давая советы параллельно с руководителями, заменяя руководителей в случае неудач, во всяком случае, входя в существо каждой из аспирантских программ.”

Выходят *“Основные понятия теории вероятностей”* (на немецком языке в издательстве “Springer”).

“...Аксиоматизация теории вероятностей должна строиться на базе общей теории меры и теории функций в чисто метрических пространствах.”

Работа *“Об эмпирическом определении закона распределения”.*

1934

Работа *“Случайные движения. К теории броуновского движения”.*

“Творец чистой математики, иногда образно называемой математической поэзией, переносит реальное пространство, его объекты, их движение и связи в математическую модель, в которой также существуют пространство, его части, их связи и т.д. Там они выводят новые законы и получают конкретные результаты, которые затем применяют в анализе реальных явлений. Вот, для описания Броуновского движения достаточно ведь одного вероятностного уравнения.”

Создание журнала *“Успехи математических наук”* — член редколлегии до своей кончины и главный редактор с 1946 по 1954 и с 1982 по 1987.

1935

Становится первым заведующим основанной им кафедры теории вероятностей на Механико-математическом

“В рамках чистой математики теория вероятностей воспринимается, как частная глава теории меры или теории булевских алгебр.

факультете Московского университета.	*На самом деле, теория вероятностей занимает видное положение как наука о реальных стохастических (вероятностных) связях между явлениями. По-видимому, настало время между конкретными естественными и социальными науками, классифицируемыми по отдельным кругам реальных явлений, и математикой найти место для наук, имеющих дело с такими категориями, как вероятность, причинность, информация, связь, игра, стратегия, и т.п. ...”*
1935	
Ученая степень (без защиты) доктора физико-математических наук.	*“К диссертации надо относиться безразлично. Индивидуальным творчеством можно заниматься чисто романтически, без уверенности, что что-то выйдет. Это я хотел бы внушить тем, кто на такое способен.”*
Приобретение с П.С. Александровым “Комаровского дома”.	*“По возвращении из путешествия по Волге и на Кавказ осенью 1929 года мы с П.С. решили поселиться вместе где-либо под Москвой...* *К 1935 году вполне назрела потребность иметь свой вполне благоустроенный дом... Этот дом в Комаровке удовлетворял всем нашим потребностям, давая возможность разместить большую библиотеку и помещать в отдельных комнатах наших гостей...”*
1936	
Работа по теории приближений, повлекшая создание нового направления в этой теории — *“О наилучшем приближении функций заданного функционального класса”*.	*“Обычно дело идет так: вы читаете книжки, подготавливаете свои лекции с какими-то новыми вариантами, и вдруг, на почве этой повседневной работы является какая-нибудь неожиданная идея: а вдруг на самом деле можно в такой-то задаче сделать все не так, как до сих пор делали? Еще смутно*

	виднеется какой-то совершенно другой путь... Тогда математику, как и всякому, вероятно, ученому, чрезвычайно существенно забросить все остальное и просто думать, думать без конца в одном, только что возникшем направлении. На счастье, у меня обычно такая возможность бывала."
Исследование вопросов об асимптотическом поведении вероятностей перехода. *"Основные понятия теории вероятностей"* выходят на русском языке.	*"Мы имеем, по крайней мере, одно весьма серьезное преимущество — владеем вероятностным мышлением."*
Работы по топологии, ставшие классическими.	*"Мои работы по топологии так и не были как следует поняты. Ведь я исходил из физических понятий — из гидродинамики и электромагнитной теории, а совсем не из комбинаторики."*
1937	
Работа *"Об открытых отображениях"*.	*"Проблема возможности повышения размерности при открытых отображениях горячо интересовала П.С. Александрова. Некоторое время мы вместе трудились над доказательством невозможности повышения размерности. В этих поисках постепенно выяснились причины наших неудач. Этот анализ неудач и привел, в конце концов, к контрпримеру."*
"К статистической теории кристаллизации металлов".	*"...Для металлургии имеет существенное значение изучение процесса роста кристаллов при случайном образовании центров кристаллизации."*
"К решению одной биологической задачи".	*"Принципиально область применения математического метода не ограничена: все виды движения материи могут изучаться математически."*
Работа *"Исследование уравнения диффузии, соединен-*	*"Само различие между прикладной и чистой математикой чрезвычайно условно.*

ной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме" (совместно с И.Г. Петровским и Н.С. Пискуновым).

Вопросы, которые, казалось бы, принадлежат к чистой математике и не имеют применений, очень часто совершенно неожиданно оказываются важными для разных приложений. С другой стороны, занимаясь прикладной математикой, ученый почти неизбежно наталкивается на смежные вопросы, решающиеся теми же методами, привлекающие его своей логической красотой, но, собственно говоря, непосредственных приложений уже не получающие. Вероятно, в практической работе математика нужно проявлять должную широту."

1938

Заведующий (по 1960 г.) Отделом теории вероятностей в Математическом институте им. В.А. Стеклова АН СССР.

1939

Избирается действительным членом (академиком) АН СССР, членом Президиума Академии Наук, академиком-секретарем Отделения физико-математических наук.

"Когда О.Ю. Шмидт пригласил меня в Президиум Академии наук, в академики-секретари физико-математического отделения, то я в такой интерес как-то сразу вошел.
Я действительно относился к этой деятельности всерьез."

Вместе с П.С. Александровым пишет школьный учебник *"Алгебра"*.

"Мы везде стремились соединить понятность изложения с его достаточной обстоятельностью и логической безупречностью. При этом мы исходили из убеждения, что наша книга будет верным и надежным руководителем для учащегося не только при первом знакомстве с предметом, но и при дальнейшем изучении математики."

1940

Работа *"Об одном новом подтверждении законов Менделя"*.

"Приложения кибернетики к вопросам биологии принципиально допустимы и практически полезны."

Орден Трудового Красного Знамени.

"Очень существенно в науке (как в поэзии, музыке и т.п.), что человек... при надлежащих моральных качествах

воспринимает свою работу, как особенно ответственный долг."

1941

"Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве",

"Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей".

"Устанавливаются спектральные условия для возможности экстраполировать стационарные случайные последовательности по достаточно большому числу членов с любой заданной точностью."

"В этой специальной, чисто математической, сфере конкуренция между мною и Н. Винером действительно была, причем основные результаты я получил раньше."

Первые работы по турбулентности:
"Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса";
"К вырождению изотропной турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости";
"Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности".

"Серия работ, опубликованных в 1941 году, до сих пор оказывает свое влияние на изучение турбулентности. Новые достижения часто позволяют увидеть в классических работах незамеченные ранее жемчужины. Так обстоит дело и с третьей, очень короткой статьей А.Н. Колмогорова 1941года. Она содержит один из столь редких в данной области нетривиальных строгих результатов, а также весьма современные идеи о скейлинге, неопровергаемые той аргументацией, которую Ландау использовал при критике допущений об универсальности, сделанных Колмогоровым в первой статье этой серии."

У. Фриш

(из кн. *"Турбулентность. Наследие Колмогорова"*)

Работы по теории стрельбы (1941–1945).

"Ко мне обратились с просьбой дать свое заключение по поводу разногласий имеющихся приемов оценки меры точности по опытным данным..."
"В литературе рассуждения о сравнительных достоинствах и недостатках 'оценки по математическому ожиданию' и 'оценки по вероятности' часто не обладают достаточной четкостью."

Сталинская премия (совместно с А.Я. Хинчиным) за цикл работ по теории случайных процессов.

“Андрей Николаевич в совершенстве владел абстрактным мышлением и ценил его, и в то же время его мысль была направлена к конкретным целям — к практике.”

С.М. Никольский

1942

Женитьба на Анне Дмитриевне Егоровой — подруге школьных лет.

Анна Дмитриевна не пережила Андрея Николаевича и года — она скончалась 16 сентября 1988 г. и похоронена рядом с ним на Новодевичьем кладбище в Москве.

1943

Начало дневниковых записей.

“К сорока годам я стал живее чувствовать, как жизнь течет... и уходит, насколько прожитое уже имеет самостоятельную ценность по сравнению с предстоящим далее...”

1944

11 декабря — Доклад *“О проблемах теории вероятностей”* на заседании Московского математического общества.

“Доклад будет содержать характеристику современного состояния теории вероятностей и попытку наметить перспективы ее развития в ближайшие годы.
Кроме общей характеристики больших направлений работы, представляющихся докладчику особенно актуальными, будут в виде примера указаны отдельные отчетливо сформулированные проблемы, заслуживающие внимания исследователей.”

Награждается Орденом Ленина.

1945

Второй Орден Ленина, медаль “За доблестный труд в Великой Отечественной войне”.

“Конечно, эти своеобразные обязанности ‘лидера’ известного направления в теории вероятностей надо нести, так как исследования в этом направлении должны продолжаться.

Я даже задумал опубликовать вскоре на русском и английском языках небольшой обзор проблем теории вероятностей, которые, по моему мнению, заслуживают внимания серьезных исследователей. Остались и некоторые проблемы, которыми, по-видимому, придется заниматься и мне.

Но уже давно (с 1936 года) я начал некоторый цикл исследований, который возник из проблем теории вероятностей и динамических систем, а оказался же, по существу, исследованием унитарных представлений групп в гильбертовом пространстве. Это звучит несколько изысканно и 'не классически', но у меня имеется убеждение, что здесь скрывается один из центральных вопросов будущей 'классической' математики: очень уж многие проблемы самых разных стилей согласно ведут именно сюда.

Очень соблазняет меня еще гомологическая топология, в которую я было погрузился в 1934—36 годах.

И еще — исследования в области логических оснований математики, где мне видятся зародыши очень большого нового движения в результатах Turing'a и Church'a.

С чем из всего этого я справлюсь в самом деле, конечно, сказать трудно..."

Из письма Н.Н. Лузину
(7 октября 1945г.)

1947

Работы по теории ветвящихся случайных процессов.

"Термин 'ветвящиеся процессы' придумал Колмогоров. Он оказался столь удачным, что вскоре его стали употреблять во всем мире как перевод-кальку с русского языка."

Б.А. Севастьянов

Доклад на Общем собрании АН СССР — обзор спектральной теории стационарных случайных процессов.

“Интерес к спектральной теории стационарных случайных процессов возник в связи с работами А.Я. Хинчина и Е.Е. Слуцкого.”

1948

Доклады на втором всесоюзном совещании по математической статистике в Ташкенте *“Основные задачи теоретической статистики”* и *“Реальный смысл дисперсионного анализа”*.

“Я считаю формальную строгость обязательной и думаю, что в конечном счете после большой (и обычно полезной для окончательного понимания) работы она всегда может быть соединена с полной простотой и естественностью.”

1949

Выход книги (в соавторстве с Б.В. Гнеденко) *“Предельные распределения для сумм независимых случайных величин”*, удостоенной премии им. П.Л. Чебышева АН СССР.

“...Могут существовать вполне содержательные и практически интересные предельные теоремы, относящиеся к суммам независимых слагаемых и приводящие к законам распределения, существенно отличающимся от нормального.”

Приходит работать в качестве руководителя Отдела математики в редакцию *“Большой Советской Энциклопедии”* (2-е издание).

“Колмогоров был не просто ученый, он был глубокий мыслитель. Для него процесс постоянного поиска нового результата, метода, идеи был равносилен самой жизни.”

Б.В. Гнеденко

Работа *“Решение одной задачи из теории вероятностей, связанной с вопросом о механизме слоеобразования”*.

“В момент публикации этой статьи в геологических науках практически отсутствовали такие понятия, как случайная величина, функция распределения вероятностей... Принципиальной перестройке, приведшей в дальнейшем к возникновению математической геологии, сильно способствовала не только эта статья, но и личные советы и высказывания А.Н. Колмогорова.”

А.Б. Вистелиус

Премия им. П.Л. Чебышева АН СССР.

1951

Вновь назначается директором Института математики Московского университета.

"Пока мне удавались лишь те виды организационной деятельности, где мой авторитет основывается на умении показывать личный пример."

Работы *"Несмещенные оценки"* и *"Статистический приемочный контроль"*.

"Связь математики с естествознанием, оставаясь, по существу, не менее тесной, приобретает теперь более сложные формы."

1953

Награждается третьим Орденом Ленина.

"Главное было то, что в 1953 году появилась надежда. От этого я почувствовал какой-то необыкновенный подъем."

"Мне посчастливилось открыть некоторые закономерности природы... Но моя основная любовь — математика. Берясь за многое, я много ошибался и вызывал много острых обид. В трудные минуты жизни, когда мне казалось, что я провалился и перессорился, ко мне вдруг все тепло относились.

Вероятно, потому, что я всегда ошибался не для себя, а для дела."

(Из речи на 50-летии)

"Некоторые работы последних лет в области предельных теорем теории вероятностей".

"В середине 40-х годов существовало мнение, что проблематика предельных теорем классического типа, в основном, закончена. В действительности, однако, с конца 40-х годов наблюдается значительное оживление работы именно в этих 'классических направлениях', что объясняется тем, что точность полученных оценок остаточных членов в предельных теоремах далеко не достаточна, и что в ряде старых задач, поддававшихся решению лишь при сложных и ограничительных условиях, удалось получить весьма простое и законченное решение."

Доклад *“О понятии алгоритма”* на заседании Московского математического общества, почетный член ММО.	*“Если, помимо объединения различных подходов, при этом возникло какое-то обобщение понятия ..., то дело тут, по-видимому, в том, что обобщение понятия зачастую бывает полезно для постижения его сущности.”*
1954	
Статья *“Математика”* в БСЭ.	*“В статье ‘Математика’ А.Н. Колмогоров “в сжатой форме и на принципиальной основе проследил историческое развитие математики, указал узловые моменты этого развития и предложил для него оригинальную схему периодизации.”* *Н.Н. Боголюбов, Б.В. Гнеденко, С.Л. Соболев*
Доклад на Международном математическом конгрессе в Амстердаме *“Общая теория динамических систем и классическая механика”.*	*“О задачах небесной механики я думал давно, с детства, с Фламмариона, а потом — читая Шарлье, Биркгофа, механику Уитеккера, работы Крылова и Боголюбова, Шази, Шмидта. Несколько раз пытался, но не получалось. А тут начало получаться.”*
Заведует Отделением математики мех.-мат. факультета МГУ (с 1954 по 1956 и с 1978 — по день кончины)	*“Стремиться к административной деятельности — я никогда не стремился. В некоторых случаях было такое чувство долга, вера в то, что если я возьмусь, то сделаю существенно лучше — ну, в случае деканства моего, например...”*
Назначен деканом Механико-математического факультета МГУ (по 1958 г.).	*“Андрей Николаевич был замечательным деканом. Он говорил, что надо прощать талантливым людям их талантливость и спас не одного из известных сейчас математиков от исключения из университета.* *Уровня, которого достиг тогда факультет, он более никогда не достигал и вряд ли когда достигнет.”* *В.И. Арнольд*

Первый выпуск учебника (в соавторстве с С.В. Фоминым) *“Элементы теории функций и функционального анализа”* (6-е издание — в 1989 г., после смерти А.Н. Колмогорова).

Работы, положившие начало КАМ-теории (Колмогорова—Арнольда—Мозера).

“...И точные (аналитические) решения, и численные способы в ряде случаев не могут нам помочь, необходимы какие-то общие методы качественного исследования. В трудах В.И. Арнольда и А.Н. Колмогорова разработан совершенно новый математический метод. Применение его позволило им решить ряд проблем, которые ‘не поддавались’, несмотря на усилия многих выдающихся математиков, механиков и астрономов.”

И.М. Гельфанд

1955

Почетный доктор Парижского университета.

“Я думаю, что просто человечеству достижения математики оказываются нужными. А нам, математикам, она доставляет такое внутреннее наслаждение. И, по-моему, самое лучшее решение — это такое мирное сосуществование.”

1955

Статья *“Теория вероятностей”* для книги *“Математика, ее содержание, методы и значение”*.

“Самое ценное в этой статье представляет собой никогда еще в такой мере не достигнутая в принципиальных освещениях теории вероятностей слиянность общей теории с практическими применениями; автор умеет показать, как наиболее абстрактные разделы теоретического построения неразрывно связаны с конкретными запросами практики. В его изложении теория вероятностей предстает

одновременно как стройная и законченная логическая конструкция и как мощный аппарат естествознания и техники, причем эти две картины так тесно проникают друг в друга, что образуют собою органическое, неразрывное единство."

А.Я. Хинчин

Пленарный доклад *"Теория передачи информации"* на сессии Академии Наук СССР по научным проблемам автоматизации производства.
Работы *"К общему определению количества информации"*,
"Количество информации и энтропия для непрерывных распределений".

"Эти работы заложили традицию изложения результатов теории информации на уровне математической строгости, которой с тех пор неизменно придерживаются как те из специалистов по теории информации, которые считают себя математиками, так и те, кто считает себя инженерами."

Р.Л. Добрушин

Работа *"Две равномерные предельные теоремы для сумм независимых слагаемых"*.

Основывает новый математический журнал *"Теория вероятностей и ее применения"* и становится его главным редактором.

Почетный член Королевского Статистического Общества Великобритании.

"Помимо большого числа поразительных научных достижений, существенно преобразивших лицо науки нашего века, А.Н. Колмогоров очень многого достиг и в решении организационных проблем:
— он создал блестящие школы в целом ряде направлений современной математики,
— основал значительное число плодотворно работающих научных коллективов,
— новые научные журналы, начиная с 'Теории вероятностей и ее применений'."

А.М. Яглом

1957

Решение знаменитой *13-й проблемы Гильберта* (со своим учеником В.И. Арнольдом).
Работа *"О представлении*

"Мне во всей истории моих научных открытий так уж самозабвенно приходилось работать неделю, иногда, может быть, две, но не больше."

непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных".

(Работу о 13-й проблеме Гильберта А.Н. Колмогоров называл своим самым трудным достижением.)

Почетный член Международного статистического института.

1958

Статья *"Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега".*

"Андрей Николаевич очень тонко чувствовал естественность того или иного подхода к решению задачи, его адекватность природе вещей, возможно, видя в этом один из залогов гармоничного развития математиков."

А.А. Боровков

Статья (совместно с В.А. Успенским) *"К определению алгоритма".*

"К пятидесятым годам относятся замыслы Андрея Николаевича относительно понятия 'алгоритм', цель которых, с одной стороны, состояла в том, чтобы дать возможно более общее математическое определение этого понятия, и, с другой стороны, в том, чтобы убедиться, что это общее определение не приводит к расширению уже сформировавшегося понятия 'вычислимая функция'."

А.Н. Ширяев

В весеннем семестре — профессор университета в Париже.

"К счастью, меня никто не фотографирует, а то, чего доброго, появились бы фотографии, как я лежу на подложенной газете на берегу Сены непосредственно под Музеем Современного Искусства против Эйфелевой башни (под Лувром можно было бы находиться в обществе почтенных лысых служащих в одних засученных выше колен брюках, но такая компания мне показалась малоэстетичной)."

1959

Почетный член Американской академии искусств и наук, г. Бостон, США.

Член Германской академии естествоиспытателей "Леопольдина".

Основывает и возглавляет редакцию математики и механики в Издательстве иностранной литературы (ныне "Мир").

"Не могу не провести параллели с судьбой другого гениального современника Андрея Николаевича Колмогорова — поэта Бориса Леонидовича Пастернака. Та же мера таланта, высокого профессионализма и способности к рядовой работе. Та же несочетаемость со многими реалиями повседневной жизни и обстановки. Та же неразрывная связь с культурой и природой. Та же смертельная ревность и пристрастность со стороны многих собратьев по цеху. То же высокое ощущение своей бескомпромиссной предназначенности для некоторой общечеловеческой миссии."

А.П. Ершов

1960

Работы по статистическому анализу в стиховедении; предложен метод состоятельного оценивания "энтропии речи".

Почетный доктор наук Стокгольмского университета (Швеция).

Иностранный член Американского Философского общества в Филадельфии (США).

"Мое увлечение поэзией имеет такой же непроизвольный, стихийный характер, как и у людей, не занимающихся теоретическими исследованиями стиха. Любимые мои поэты — это Тютчев, Пушкин, Блок. Что же касается моих научных работ по метрике и ритмике русского стиха, то они действительно обратили на себя внимание специалистов-литературоведов, но это все-таки довольно специальная область исследований, интересоваться которой совершенно не обязательно всякому..."

Создание при Механико-математическом факультете Московского университета Лаборатории статистических испытаний; после преобразования ее в Межфакультетскую лабораторию вероятностных и статистических методов (1966 г.) становится ее заведующим.

"Первое, что меня поразило, — это удивительная озабоченность Андрея Николаевича практическими приложениями — он, будучи активно работающим математиком-мыслителем, живущим в мире абстрактных идей, взял на себя тяжкий труд по созданию и руководству Лабораторией в условиях, явно не благоприятных для этого."

В.В. Налимов

1961

Доклад *"Автоматы и жизнь"* на Методологическом семинаре Механико-математического факультета Московского университета.

"К созданию основных идей современной кибернетики я все-таки не имею отношения. Здесь надо назвать рядом с Н. Винером Клода Шеннона. На мою долю выпала лишь популяризация этих идей в нашей стране."

Четвертый Орден Ленина.

"Сделавшись ... кибернетиком, я все более, в самом деле, вовлекаюсь в ее общие проблемы, выходящие за рамки математики, приходя к нескромному мнению, что ими мало кто занимается с должной широтой."

Доклад на Международном коллоквиуме по механике турбулентности в Марселе.

"Личный вклад А.Н. Колмогорова в учение о турбулентности и его идеи, относящиеся к общей теории динамических систем, являются основными ориентирами в развитии исследований сложнейшего явления природы — турбулентности в применении к различным областям знаний."

А.М. Обухов

"Случайно ли, что глубже всех в суть турбулентности проник именно Андрей Николаевич Колмогоров — математик, обладавший страстным интересом к живой действительности?"

У. Фриш

(из кн. *"Турбулентность. Наследие Колмогорова"*)

1962

Предложен комбинаторный подход к определению меры количества информации, передаваемой речью.

"На независимой ценности чисто комбинаторного подхода к задачам теории информации я неоднократно настаивал в своих лекциях. Вообще, мне представляется важной задача освобождения всюду, где это возможно, от излишних вероятностных допущений."

Почетный доктор наук Индийского статистического института в г. Калькутта и

"'Что такое гений?' Думается, этот вопрос — из той же категории, что и 'Что такое жизнь?', 'Что такое

почетный член математического общества Индии. Почетный член Американского Метеорологического общества. Почетный член Лондонского математического общества.	*разум?' или 'Могут ли машины мыслить?', т.е. из колмогоровской категории. Быть может, гениальность — это особенно высокая способность использовать свое подсознание."* *А.С. Монин*
Присуждение в Риме Международной **премии по математике Фонда Бальцана (Balzan Prize).**	***"За достижения в области математических исследований."***
<u>1963</u> Работа *"О таблицах случайных чисел"*.	*"...Определенный этап попыток осмыслить частотную интерпретацию вероятностей Р. фон Мизеса: порядок членов в последовательности не обязан совпадать с их порядком в исходной последовательности."* *"Главное отличие от Мизеса состоит в строго финитном характере всей концепции и во введении количественной оценки устойчивости частот."*
Открытие физико-математической школы-интерната при МГУ. (19 апреля 1989 года школе было присвоено имя А.Н. Колмогорова.)	*"Был довольно длинный период, когда наиболее увлекавшей меня перспективой было, если говорить официальным языком, положение директора школы... Это нашло небольшое осуществление в этом самом интернате..."* *"В физико-математической школе-интернате при МГУ я руковожу методическим объединением математиков, читаю лекционный курс, а в качестве председателя попечительского совета занимаюсь и общими делами школы."*
Звание Героя Социалистического Труда и Орден Ленина.	***"За выдающиеся заслуги в области математики и в связи с шестидесятилетием со дня рождения присвоить академику Колмогорову***

Доклад *"Из опыта работы"* на торжественном заседании по поводу 60-летия.

Андрею Николаевичу звание Героя Социалистического труда с вручением ему ордена Ленина и золотой медали 'Серп и молот'."

Иностранный член Нидерландской Королевской академии наук.

1964

Избирается Президентом Московского математического общества.
Член Лондонского Королевского общества.

"Я сейчас неизбежно очень занят тем, чтобы успеть сделать все то, что еще мне осталось сделать самому, а планы у меня довольно большие и разнообразные..."

1965

Ленинская премия (совместно с В.И. Арнольдом) за работы по теории возмущений гамильтоновых систем.

"Мне повезло на талантливых учеников. Многие из них, начав работу вместе со мной в какой-нибудь области, потом переходили на новую тематику и уже совершенно независимо от меня получали замечательные результаты. Скажу в виде шутки, что в настоящее время один из моих учеников управляет земной атмосферой (А.М. Обухов), а другой — океанами (А.С. Монин)."

КАМ-теория (Колмогорова—Арнольда—Мозера).

Работа *"Три подхода к определению понятия 'количество информации'"*.

"Основные понятия теории информации должны и могут быть обоснованы без помощи обращения к теории вероятностей и так, что понятия 'энтропия' и 'количество информации' оказываются применимы к индивидуальным объектам; введенные таким образом понятия информации могут лечь в основу концепции случайного, соответствующей естественной мысли о том, что случайность есть отсутствие закономерности."

Почетный член Румынской академии наук и Академии наук Венгрии.

1966

Избирается действительным членом Академии педагогических наук СССР.

"На колмогоровских программах выросло новое поколение успешно работающих математиков, которое доминирует в лучших проявлениях нашей математической мысли и практики. Кроме того, учителя, при всех пережитых ими трудностях, вкусили немало свежих и новаторских мыслей и тем самым перешли на новый уровень самосознания. Активность А.Н. Колмогорова пробудила творческую энергию коллег-академиков, в результате чего математическая литература по школьной математике весьма обогатилась."

А.П. Ершов

1968

Иностранный член Академии наук Франции.

1969

Работа *"К логическим основам теории информации и теории вероятностей"*.

"В применении к кибернетике, этой новой науке, для руководителя обязательно чутье в отношении перспектив только что зарождающихся направлений."

Первая экспедиция на научно-исследовательском судне "Дмитрий Менделеев".

"Я — за непосредственное участие, где можно, в эксперименте вместе с физиками."
"Непосредственно на судне, в оперативном порядке уточнять методику расчета, определять необходимую длительность реализаций, шаг дискретизации и т.п."

1970

Доклад на Международном математическом конгрессе в Ницце *"Комбинаторные основания теории веро-*

"Познавательная ценность теории вероятностей обусловлена тем, что массовые случайные явления в своем совокупном действии создают строгие

ятностей и исчисления вероятностей".	*закономерности. Само понятие математической вероятности было бы бесплодно, если бы не находило своего осуществления в виде частоты появления какого-либо результата при многократном повторении однородных условий."*
Создание популярного математического журнала для юношества "Квант".	*"Руковожу в этом журнале отделом математики. Написал ряд заметок и большую статью о современном понимании функции."* *"Очень ценно, что Вы, ученый такого исключительно крупного научного дарования, занимаетесь вопросом воспитания молодежи."* *П.Л. Капица*
1971	
Вторая экспедиция на судне "Дмитрий Менделеев".	*"Специальное внимание экспедиции было направлено на изучение явлений всех масштабов, начиная от масштабов, намеченных в качестве мест работы географических объектов, до микротурбулентности..."*
1973	
Шестой Орден Ленина (за заслуги и в связи с 70-летием со дня рождения)	*"Никакой отдельной науки 'прикладная математика' нет, собственно. А прикладной математик — это математик, который обычную математику умеет применять к решению реальных задач."*
1975	
Награждается Орденом Ленина в седьмой раз.	*"Математикам всегда хочется, чтобы математика была как можно более 'чистой', то есть строгой, доказательной. Но обычно самые интересные реальные задачи, которые нам ставят, бывают на этом пути недоступны. И тогда очень важно, чтобы математик сам умел находить приближенные, нестрогие, но эффективно действующие пути решения задач."*

1976

Становится заведующим созданной по его инициативе новой кафедры Механико-математического факультета — кафедры математической статистики.

"Вообще, Андрей Николаевич непосредственно организовывал состояние теории вероятностей, статистики и некоторое время логики. Но, как мы знаем, это не мешало ему интересоваться многими другими областями науки и получать там глубокие результаты."

С.М. Никольский

1977

Почетный член Международной академии истории наук.

Иностранный член Академии наук ГДР.

"Математика — вообще довольно объективная наука. Через некоторое время, достаточно скоро, выясняется, что такая-то новая идея действительно далеко идет, позволяет какие-то старые проблемы решать."

1980

Становится заведующим кафедрой математической логики Механико-математического факультета МГУ.

"Я никогда не встречал человека, ведущего более полноценную жизнь, чем Колмогоров."

В.А. Успенский

Присуждена **Международная премия по математике Фонда Вольфа *(The Wolf Foundation)*.**

"За глубокие и оригинальные открытия в анализе Фурье, теории вероятностей, эргодической теории и динамических системах."

1982

Вновь становится главным редактором журнала "Успехи математических наук".

Доклад на 4-м Советско-японском симпозиуме в г. Тбилиси *"О логических основаниях теории вероятностей"*.

"Про Андрея Николаевича часто говорили, что его доклады трудно понимать. Мои наблюдения на этот счет показывают, что Андрей Николаевич каждый свой доклад обычно делил на две части. Первая, меньшая часть представляла собой увертюру, которую он обычно играл четко и всем понятно. Вторая же часть, связанная с подробностями обоснования, могла быть и трудной. Видимо, Андрей Николаевич переоценивал своих слушателей — это было связано не с кичливым нежеланием разъяснить,

а с преувеличенным представлением о способностях собеседника."

С.М. Никольский

16 ноября 1982 года умер Павел Сергеевич Александров

"Мы всегда были вместе, и вот он умер, а я остался..."

Выходит первый том ("*Математика и механика*") избранных трудов А.Н. Колмогорова.

"Предлагаемые читателю три книги 'Избранных трудов' включают в себя в существенном все мои работы по математике, классической механике, теории турбулентного движения, теории вероятностей, математической логике и теории информации. Сюда не вошли работы по методике преподавания и истории математики, стиховеденью и статьи общего характера."

"В некоторых направлениях сделанное мною представляется мне достаточно цельным и законченным, так что в моем 82-летнем возрасте я с удовольствием оставляю сделанное продолжателям."

1986

Форумный доклад "*Алгоритмы и случайность*" (совместно с В.А. Успенским) на Первом Международном Конгрессе Общества Бернулли в Ташкенте.

"В докладе не только рассматривались общие вопросы применимости математической теории вероятностей к явлениям реального мира, имеющим случайный характер, и показано, каким образом теория алгоритмов и рекурсивных функций позволяет придать точный математический смысл сопоставлению 'сложного' и 'случайного', но и сформулирована программа дальнейших исследований."

А.Н. Ширяев

1987

Премия им. Н.И. Лобачевского АН СССР.

"В последние годы моя деятельность развивается в направлении участия в деле, столь важном для нашей страны, как реформа школы. Я думаю, что если старость не помешает, я смогу внести

еще много полезного и даже незаменимого, работая над учебниками для обычной школы и для юношества, увлеченного наукой. Оба направления меня чрезвычайно увлекают, и имеется желание участвовать в них самым энергичным образом и с юношеским задором."

А. Колмогоров
25 апреля 1986 года

1987, 20.X
Скончался в Москве.

"Мировое сообщество математиков потеряло сочлена, Университет — профессора, Отечество — одного из разумнейших и честнейших своих граждан. В его жизни и смерти есть назидание: пример того, как нужно служить своему Отечеству."

Ю.В. Прохоров

"Примите наши глубочайшие соболезнования по поводу смерти академика Андрея Колмогорова, одного из величайших математиков всех времен, который оказал столь сильное влияние на всех нас."

The Laboratory for Computer Science
of Massachusetts Institute of Technology

"Вся жизнь Андрея Николаевича Колмогорова — беспримерный подвиг во имя науки. Он был образцом благородства, бескорыстия и нравственной чистоты в служении Родине.
А.Н. Колмогоров вошел в плеяду великих русских и мировых ученых."

(Из Правительственного некролога)

"Men are cruel but Man is kind"

(“Люди жестоки, но Человек добр” — эти слова Рабиндраната Тагора из его книги ритмической прозы “Stray Birds” (1916 г.) были начертаны рукой Андрея Николаевича на меловой доске в его комнате в Комаровском доме. — *А.Ш.*)

БИБЛИОГРАФИЯ

От составителей

Мы предпринимаем новую попытку составить список работ А.Н. Колмогорова, понимая, что вряд ли и этим списком его работы будут исчерпаны. Сам Андрей Николаевич составил список своих работ, включавший 514 названий. Он также отобрал и работы, вошедшие в три книги его избранных трудов (М.: Наука, 1985–1987). В первой книге *"Избранные труды. Математика и механика"* (сост. В.М. Тихомиров) приводится список работ А.Н. Колмогорова (420 названий); большая библиография (204 названия) его педагогического наследия дается в статье А.М. Абрамова (*"Успехи математических наук"*, 1988, т. 43, вып. 6). Список работ А.Н. Колмогорова (529 названий) можно найти также в колмогоровском сборнике *"Математика в ее историческом развитии"* (сост. Г.А. Гальперин, под ред. В.А. Успенского. — М.: Наука, 1981) и других изданиях.

Наиболее полная, на сегодняшний день, библиография А.Н. Колмогорова помещена в сборнике ***"Колмогоров в воспоминаниях"***, вышедшем в издательстве "Наука" в 1993 году, к 90-летию со дня рождения Андрея Николаевича (ред.-сост. А.Н. Ширяев). Эта библиография занимает 100 страниц и впервые, наряду с ***Общим списком основных работ А.Н. Колмогорова*** (688 названий, составлен по годам, не имеет сплошной нумерации), содержит также несколько специальных разделов (*Статьи А.Н. Колмогорова в энциклопедических изданиях, Статьи А.Н. Колмогорова в журнале "Математика в школе", Статьи А.Н. Колмогорова в журнале "Квант", Статьи А.Н. Колмогорова по теории стиха и статистике текста, Научно-популярные работы А.Н. Колмогорова, Список статей А.Н. Колмогорова в газетах, Список выступлений А.Н. Колмогорова на заседаниях Московского математического общества, Содержание трех томов избранных трудов А.Н. Колмогорова, Об А.Н. Колмогорове*).

В последующие годы появилось немало новых публикаций о Колмогорове, увидели свет несколько не опубликованных ранее его работ и, кроме того, читатели сборника *"Колмогоров в воспоминаниях"* любезно сообщили нам о не вошедших в приведенный в нем список работах. В частности, значительное число таких публикаций указано Л.В. Богачевым и Н.Х. Розовым в вышедшем в 1999 году сборнике *"Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове"* (М.: МИРОС–ФАЗИС). В этом же издании содержится вновь пополненная А.М. Абрамовым библиография педагогических работ А.Н. Колмогорова (261 название). Предпринимая новую попытку, мы учли эти дополнения и уточнения.

Мы также пользовались следующим источниками:

- *"Успехи математических наук"*. — 8:3 (1953), 18:5 (1963), 28:5 (1973), 38:4 (1983), 43:6 (1988);

• *"Теория вероятностей и ее применения"*. — VIII:2 (1963);
• *А.Н. Колмогоров, "Избранные труды. Математика и механика"*. — М.: Наука, 1985;
• *А.Н. Колмогоров, "Математика в ее историческом развитии"*. — М.: Наука, 1991;
• *"Математика в СССР за 40 лет, 1917–1957". Т. 2: Библиография*. — М.–Л.: 1958;
• *"Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове"*. — М.: ФАЗИС–МИРОС, 1999.

Настоящая ***Библиография А.Н. Колмогорова*** (как уже отмечалось на с. 18) состоит из 9 разделов и 8 приложений:

Разделы

I. Основные математические работы (статьи, книги).
II. Статьи в энциклопедических изданиях.
III. Доклады в Московском математическом обществе.
IV. Статьи по исследованию русского стихосложения.
V. Работы по педагогике.
VI. Статьи о математике и математиках.
VII. Научно-популярные книги и статьи.
VIII. Работы редакционно-издательского характера.
IX. Другие работы А.Н. Колмогорова.

Приложения

1. Содержание трех книг избранных трудов А.Н. Колмогорова.
2. Некоторые письма и интервью А.Н. Колмогорова.
3. Выступления А.Н. Колмогорова в открытой печати.
4. Содержание сборника *"Колмогоров в воспоминаниях"*.
5. Содержание сборника *"Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове"*.
6. Содержание сборника *"Kolmogorov in Perspective"*.
7. Содержание издания *"КОЛМОГОРОВ. 100 лет со дня рождения"*.
8. Некоторые биографические материалы и статьи об А.Н. Колмогорове.

Взятая нами за основу *Библиография* из сборника *"Колмогоров в воспоминаниях"* довольно существенно переработана: изменено содержание отдельных разделов (особенно это касается основного раздела **I** — он теперь состоит из двух списков: 1) список *математических статей* А.Н. Колмогорова и 2) список *книг* А.Н. Колмогорова (монографии и учебники для высшей школы). При этом все статьи по школьной математике, а также учебники для средней школы вынесены в отдельный раздел (**V**).

Математические статьи А.Н. Колмогорова представлены не по отдельным годам, а по десятилетиям; все разделы (кроме **II** и **III**) снабжены сплошной нумерацией. В списке статей (раздел **I**) имеются указания на публикацию в книгах избранных трудов А.Н. Колмогорова. В свою очередь, в содержании этих трех книг, помещенном в *Приложении* к нашей *Библиографии*, даются ссылки на позиции из раздела **I**.

Мы также организовали некоторые новые разделы: раздел **VI** *"Статьи о математике и математиках",* раздел **VII** *"Научно-популярные книги и статьи"* — в них собраны работы соответствующей тематики из общего списка. В отдельный раздел (**VIII**) выделены также работы А.Н. Колмогорова редакционно-издательского характера. Небольшой новый раздел *"Другие работы А.Н. Колмогорова"* (**IX**) содержит работы, которые по своему содержанию и характеру не могут быть отнесены к другим разделам настоящей библиографии.

Ссылки на разделы I, II, ..., IX даются в виде [$Б_I$-1], ..., [$Б_{IкII}$-1], ..., [$Б_{IX}$-6].

В ***Приложения,*** кроме уже упомянутого *"Содержания трех книг Избранных трудов А.Н. Колмогорова"* (**1**), вынесены также небольшой раздел (**2**) *"Некоторые письма и интервью А.Н. Колмогорова"* (из опубликованных до настоящего времени) и раздел *"Выступления А.Н. Колмогорова в открытой печати"* (**3**). Сильно увеличившийся за прошедшие годы раздел *"О Колмогорове"* составляет несколько отдельных *Приложений* (**4**–**8**). Мы решили также поместить здесь и содержание настоящего, трехтомного юбилейного издания *"КОЛМОГОРОВ. 100 лет со дня рождения"* (**7**) с тем, чтобы наша библиография "не устарела" в самый момент ее выхода.

Ссылки на приложения 1,2,...,8 даются в виде [$Б_1$-1], ..., [$Б_8$-133]. Ссылки внутри отдельных разделов и приложений даются, как это принято, только с указанием соответствующей позиции.

А. Ширяев
Н. Химченко

I. Основные математические работы (статьи, книги)

Статьи

(В настоящем разделе помещены также короткие заметки, доклады, резюме, тезисы математических работ)

1921—1930

1. ***Доклад математическому кружку о квадрильяже.*** [1921 г.] // Впервые опубл. в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория информации и теория алгоритмов. — М.: Наука, 1987; 290—294.
2. ***Une série de Fourier–Lebesgue divergente presque partout*** // Fund. Math., v. 4, 1923; 324—328. Рус. пер. (П.Л. Ульянова): *Ряд Фурье—Лебега, расходящийся почти всюду* в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 8—11.
3. ***Sur l'ordre de grandeur des coefficients de la série de Fourier–Lebesgue*** // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. A, 1923; 83—86. Представлено В. Серпинским. Рус. пер. (П.Л. Ульянова): *О порядке величины коэффициентов ряда Фурье—Лебега* в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 12—14.
4. ***Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier*** // Fund. Math., v. 5, 1924; 96—97. Рус. пер. (И. А. Виноградовой): *Замечания к исследованию сходимости рядов Фурье* в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 15—16.
5. ***Sur la convergence des séries de Fourier*** // C. r. Acad. sci. Paris, v. 178, 1924; 303—306 (совм. с Г.А. Селиверстовым). Представлено А. Лебегом. Рус. пер. (И. А. Виноградовой): *О сходимости рядов Фурье* в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 16—19.
6. ***La définition axiomatique de l'intégrale*** // C. r. Acad. sci. Paris, v. 180, 1925; 110—111. Рус. пер. (В. А. Скворцова): *Аксиоматическое определение интеграла* в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 19—20.
7. ***Sur les bornes de la généralisation de l'intégrale.*** [1925 г.] // Впервые опубл. в рус. пер. (Т.П. Лукашенко): *О границах обобщения интеграла* в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 21—38.
8. ***Sur la possibilité de la définition générale de la dérivée, de l'intégrale et de la sommation des séries divergentes*** // C. r. Acad. sci. Paris, v. 180, 1925; 362—364. Представлено Э. Борелем. Рус. пер.

(Л.А. Балашова): *О возможности общего определения производной, интеграла и суммирования расходящихся рядов* в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 39–40.

9. ***Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier*** // Fund. Math., v. 7, 1925; 24–29. Рус. пер. (Т.П. Лукашенко): *О гармонически сопряженных функциях и рядах Фурье* в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 40–45.
10. ***О принципе tertium non datur*** // Матем. сб., т. 32, № 4, 1925; 646–667. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 45–69. Пер. на англ. яз.: [182].
11. ***Über Konvergenz von Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden*** // Матем. сб., т. 32, № 4, 1925; 668–677 (совм. с А. Я. Хинчиным). Рус. пер. (П.Л. Ульянова): *О сходимости рядов, члены которых определяются случаем* в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 7–16.
12. ***Sur la convergence des séries de Fourier*** // Atti Accad. Naz. Lincei, Rend., v. 3, 1926; 307–310 (совм. с Г.А. Селиверстовым). Представлено Л. Тонелли. Рус. пер. (И. А. Виноградовой): *О сходимости рядов Фурье* в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 69–73.
13. ***Une série de Fourier–Lebesgue divergente partout*** // C. r. Acad. sci. Paris, v. 183, 1926; 1327–1329. Представлено Э. Борелем. Рус. пер. (Л.А. Балашова): *Ряд Фурье–Лебега, расходящийся всюду* в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 73–75.
14. ***Sur la loi des grands nombres*** // C. r. Acad. sci. Paris, v. 185, 1927; 917–919. Представлено Э. Борелем. Рус. пер. (О.В. Вискова): *О законе больших чисел* в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 16–18.
15. ***Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales*** // Math. Ztschr., Bd. 26, H. 2/3, 1927; 432–441 (совм. с Д.Е. Меньшовым). Рус. пер. (С.В. Бочкарева): *О сходимости ортогональных рядов* в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 75–85.
16. ***Об операциях над множествами.*** [Рукопись 1921–1922 гг.] // Матем. сб., т. 35, № 3/4, 1928; 415–422. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 85–92.

17. ***Об операциях над множествами. II.*** [Рукопись 1922 г.] // Опубл. впервые в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория информации и теория алгоритмов. — М.: Наука, 1987; 294–303.
18. ***Sur une formule limite de M. A. Khintchine*** // C. r. Acad. sci. Paris, v. 186, 1928; 824–825. Представлено Ж. Адамаром. Рус. пер. (О.В. Вискова): *Об одной предельной формуле А. Хинчина* в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 18–19.
19. ***Sur un procédé d'intégration de M. Denjoy*** // Fund. Math., v. 11, 1928; 27–28. Рус. пер. (В.А. Скворцова): *О процессе интегрирования Данжуа* в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 93–94.
20. ***Über die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Größen*** // Math. Ann., Bd. 99, H. 1/2, 1928; 309–319. Рус. пер. (А.Н. Ширяева): *О суммах независимых случайных величин* в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 20–30.
21. ***Über das Gesetz des iterierten Logarithmus*** // Math. Ann., Bd. 101, H. 1, 1929; 126–135. Рус. пер. (Ю.В. Прохорова): *О законе повторного логарифма* в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 34–44.
22. ***Sur la loi des grands nombres*** // Atti Accad. Naz. Lincei, Rend., v. 9, № 6, 1929; 470–474. Представлено Г. Кастельнуово. Рус. пер. (О.В. Вискова): *О законе больших чисел* в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 44–47.
23. ***Общая теория меры и исчисление вероятностей*** // Коммунистическая академия, секция естественных и точных наук, сб. работ матем. раздела, т. 1. — 1929; 8–21. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 48–58.
24. ***Bemerkungen zu meiner Arbeit 'Über die Summen zufälliger Größen'.*** [Замечание к статье [20].] // Math. Ann., Bd. 102, 1930; 484–488. Рус. пер. (А.Н. Ширяева): *Замечания* [*к моей работе "О суммах независимых случайных величин"*] в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 30–34.
25. ***Sur la loi forte des grands nombres*** // C. r. Acad. sci. Paris, v. 191, 1930; 910–912. Рус. пер. (О.В. Вискова): *Об усиленном законе больших чисел* в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 59–60.

26. ***Zur topologisch-gruppentheoretischen Begründung der Geometrie*** // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Fachgr. I (Mathematik), H. 2, 1930; 208–210. Представлено П. Александровым. Рус. пер. (И. Пенкова): *О тополого-теоретико-групповом обосновании геометрии* в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 94–96.
27. ***Untersuchungen über den Integralbegriff*** // Math. Ann., Bd. 103, 1930; 654–696. Рус. пер. (П. Освальда): *Исследование понятия интеграла* в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 96–136.
28. ***Sur la notion de la moyenne*** // Atti Accad. Naz. Lincei, Rend., v. 12, № 9, 1930; 388–391. Представлено Г. Кастельнуово. Рус. пер. (В.М. Тихомирова): *Об определении среднего* в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 136–138.

1931—1940

29. ***Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*** // Math. Ann., Bd. 104, 1931; 415–458. Пер. на рус. яз.: [72].
30. ***Sur le problème d'attente*** // Матем. сб., т. 38, № 1/2, 1931; 101–106. Рус. пер. (Б.А. Севастьянова): *Проблема ожидания* в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 106–111.
31. ***Метод медианы в теории ошибок*** // Матем. сб., т. 38, № 3/4, 1931; 47–50. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 111–114.
32. ***Eine Verallgemeinerung des Laplace–Liapounoffschen Satzes*** // Изв. АН СССР, ОМЕН, № 7, 1931; 959–962. Представлено С.Н. Бернштейном. Рус. пер. (А.Н. Ширяева): *Одно обобщение теоремы Лапласа–Ляпунова* в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 114–116.
33. ***Über Kompaktheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz im Mittel*** // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, H. 1, 1931; 60–63. Представлено Р. Курантом. Рус. пер. (С.Б. Стечкина): *О компактности множеств функций при сходимости в среднем* в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 139–141.
34. ***Sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo (Un problema di Bruno de Finetti)*** // Atti Accad. Naz. Lincei, Rend., v. 15, № 10, 1932; 805–808. Представлено Г. Кастельнуово. Рус. пер.

(Л.А. Бассалыго): *Об общей форме стохастического однородного процесса (Проблема Бруно де Финетти)* в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 117–123.

35. ***Ancora sulla forma generale di un processo omogeneo*** // Atti Accad. Naz. Lincei, Rend., v. 15, № 12, 1932; 866–869. Представлено Г. Кастельнуово. Рус. пер. (Л.А. Бассалыго) вместе со статьей [34], под общим заголовком.
36. ***Zur Deutung der intuitionistischen Logik*** // Math. Ztschr., Bd. 35, H. 1, 1932; 58–65. Рус. пер. (В.А. Успенского): *К толкованию интуиционистской логики* в кн. А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 142–148.
37. ***Zur Begründung der projektiven Geometrie*** // Ann. of Math. (2), v. 33, № 1, 1932; 175–176. Рус. пер. (И. Пенкова): *К обоснованию проективной геометрии* в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 149–150.
38. ***Beiträge zur Maßtheorie*** // Math. Ann., Bd. 107, 1933; 351–366. Рус. пер. (И. Пенкова): *К теории меры* в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 150–166.
39. ***Zur Berechnung der mittleren Brownschen Fläche*** // Phys. Ztschr. Sowjetunion, Bd. 4, H. 1, 1933; 1–13 (совм. с М.А. Леонтовичем). Рус. пер. (А.М. Яглома): *К вычислению средней броуновской площади* в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 124–134.
40. ***Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione*** // Giorn. Istit. Ital. Attuari., v. 4, № 1, 1933; 83–91. Рус. пер. (А.С. Холево): *Об эмпирическом определении закона распределения* в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 134–141.
41. ***Über die Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung*** // Изв. АН СССР, ОМЕН, № 3, 1933; 363–372. Представлено С.Н. Бернштейном. Рус. пер. (К.И. Осколкова): *О предельных теоремах теории вероятностей* в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 41–148.
42. ***Zur Theorie der stetigen zufälligen Prozesse*** // Math. Ann., Bd. 108, H. 1, 1933; 149–160. Рус. пер. (П. Дитриха): *К теории непрерывных случайных процессов* в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 149–161.
43. ***Sur la détermination empirique d'une loi de distribution*** *(Об эмпирическом определении закона распределения)* // Учен. зап. Моск. ун-та, вып. 1, 1933; 9–10.

44. ***К вопросу о пригодности найденных статистическим путем формул прогноза*** // Журн. геофиз., т. 3, вып. 1, 1933; 78–82. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 161–167.
45. ***О точках разрыва функций двух переменных*** // ДАН СССР, т. 1, № 3, 1934; 105–106 (совм. с И.Я. Верченко). Представлено С.Н. Бернштейном. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 167–168.
46. ***Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes*** // Studia math., v. 5, 1934; 29–33. Рус. пер. (С.Б. Стечкина): *О нормируемости общего линейного топологического пространства* в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 168–171.
47. ***О сходимости рядов по ортогональным полиномам*** // ДАН СССР, т. 1, № 6, 1934; 291–294. Представлено С.Н. Бернштейном. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 174–177.
48. ***Продолжение исследований о точках разрыва функций двух переменных*** // ДАН СССР, т. 4, № 7, 1934; 361–362 (совм. с И.Я. Верченко). Представлено Н.Н. Лузиным. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 171–173.
49. ***Quelques remarques sur l'approximation des fonctions continues*** *(Несколько замечаний о приближении непрерывных функций)* // Матем. сб., т. 41, № 1, 1934; 99–103.
50. ***Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung)*** // Ann. of Math. (2), v. 35, 1934; 116–117. Рус. пер. (А.М. Яглома): *Случайные движения (к теории броуновского движения)* в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 168–170.
51. ***Уклонения от формул Харди при частичной изоляции*** // ДАН СССР, т. 3, № 3, 1935; 129–132. Представлено С.Н. Бернштейном. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 170–172.
52. ***La transformation de Laplace dans les espaces linéaires*** // C. r. Acad. sci. Paris, v. 200, 1935; 1717–1718. Представлено Ж. Адамаром. Рус. пер. (А.В. Булинского): *Преобразование Лапласа в линейных пространствах* в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985;178–179.
53. ***Zur Grössenordnung des restgliedes Fourierscher Reihen differenzierbarer Funktionen*** // Ann. of Math. (2), v. 36, 1935; 521–526. Рус. пер. (С.А. Теляковского): *О порядке остаточного члена рядов*

Фурье дифференцируемых функций в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 179–185.

54. ***Zur Theorie der Markoffschen Ketten*** // Math. Ann., Bd. 112, H. 1, 1935; 155–160. Рус. пер. (К.И. Осколкова): *К теории цепей Маркова* в кн. А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 173–178.
55. ***Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse*** // Ann. of Math. (2). v. 37, 1936; 107–110. Рус. пер. (С.А. Теляковского): *О наилучшем приближении функций заданного функционального класса* в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 186–189.
56. ***Über die Dualität im Aufbau der kombinatorischen Topologie*** // Матем. сб., т. 1, № 1, 1936; 97–102. Рус. пер. (О.В. Локуциевского): *О законах двойственности в комбинаторной топологии* в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 190–197.
57. ***Anfangsgründe der Theorie der Markoffschen Ketten mit unendlich vielen möglichen Zuständen*** *(Начала теории цепей Маркова с бесконечным числом возможных состояний)* // Матем. сб., т. 1, № 4, 1936; 607–610.
58. ***Homologiering des Komplexes und des lokalbikompakten Räumes*** // Матем. сб., т. 1, № 5, 1936; 701–706. Рус. пер. (О.В. Локуциевского): *Кольцо гомологий комплексов и локально бикомпактных пространств* в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 197–202.
59. ***К условию А.И. Плеснера для закона больших чисел*** // Матем. сб., т. 1, № 6, 1936; 847–849.
60. ***Endliche Überdeckungen topologischer Räume*** // Fund. Math., v. 26, 1936; 267–271 (совм. с П.С. Александровым). Рус. пер. (О.В. Локуциевкого): *Конечные покрытия топологических пространств* в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 203–206.
61. ***Les groupes de Betti des espaces localement bicompacts*** // C. r. Acad. sci. Paris, v. 202, 1936; 1144–1147. Представлено Г. Жюлиа. Рус. пер. (М.Б. Балавадзе): *Группы Бетти локально бикомпактных пространств* в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 207–209.
62. ***Propriétés des groupes de Betti des espaces localement bicompacts*** // C. r. Acad. sci. Paris, v. 202, 1936; 1325–1327. Рус. пер. (М.Б. Балавадзе): *Свойства групп Бетти локально бикомпактных пространств* в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 209–211.

63. ***Les groupes de Betti des espaces métriques*** // C. r. Acad. sci. Paris, v. 202, 1936; 1558–1560. Представлено Г. Жюлиа. Рус. пер. (М.Б. Балавадзе): *Группы Бетти метрических пространств* в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 211–213.
64. ***Cycles relatifs. Théorème de dualité de M. Alexander*** // C. r. Acad. sci. Paris, v. 202,1936; 1641–1643. Представлено Г. Жюлиа. Рус. пер. (М.Б. Балавадзе): *Относительные циклы. Теорема двойственности Александера* в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 214–215.
65. ***Sulla teoria di Volterra della lotta per l'esistenza*** *(О теории Вольтерра борьбы за существование)* // Giorn. Ist. Ital. Attuari., v. 7, № 1, 1936; 74–80.
66. ***Über offene Abbildungen*** // Ann. of Math. (2), v. 38, 1937; 36–38. Рус. пер. (В.А. Успенского): *Об открытых отображениях* в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 215–217.
67. ***Кососимметричные величины и топологические инварианты*** // Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике, физике. Вып. 4. — М.–Л.: ГОНТИ, 1937; 345–347. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Избранные труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 218–220.
68. ***Цепи Маркова со счетным числом возможных состояний*** // Бюлл. МГУ, секц. А, матем. мех., т. 1, вып. 3, 1937; 1–16. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 183–197.
69. ***Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме*** // Бюлл. МГУ, секц. А, матем. мех., т. 1, вып. 6, 1937; 1–26 (совм. с И.Г. Петровским и Н.С. Пискуновым). Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. —М.: Наука, 1985; 221–246.
70. ***К статистической теории кристаллизации металлов*** // Изв. АН СССР, ОМЕН, № 3, 1937; 355–359. Представлено С.Н. Бернштейном. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 178–182.
71. ***Zur Umkehrbarkeit der statistischen Naturgesetze*** // Math. Ann., Bd. 113, 1937; 766–772. Рус. пер. (А.М. Яглома): *Об обратимости статистических законов природы* в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 197–204.
72. ***Об аналитических методах в теории вероятностей*** // УМН, вып. 5, 1938; 5–41. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория

вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 60—105. Пер. с нем. яз. статьи [29].

73. ***Ein vereinfachter Beweis der Birkhoff–Khintchineschen Ergodensatzes*** // Матем. сб., т. 2 (44), № 2, 1937; 367—368.
74. ***Упрощенное доказательство эргодической теоремы Биркгофа–Хинчина.*** [Расширенный вариант статьи [73].] // УМН, вып. 5,1938; 52—56. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 246—252.
75. ***Несколько проблем по теории функций действительного переменного*** // УМН, вып. 5, 1938; 232—234 (совм. с И.М. Гельфандом и Г.М. Фихтенгольцем).
76. ***К решению одной биологической задачи*** // Изв. НИИ математики и механики Томского ун-та, т. 2, вып. 1, 1938; 7—12. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 204—209.
77. ***Une généralisation de l'inégalité de M. J. Hadamard entre les bornes supérieures des dérivées successives d'une fonction*** *(Обобщение неравенства Адамара между верхними границами последовательных производных функции)* // C. r. Acad. sci. Paris, v. 207, 1938; 764—765. Представлено Ж. Адамаром.
78. ***О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале*** // Учен. зап. Моск. ун-та, вып. 30, сер. матем., кн. 3, 1939; 3—16. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 252—263. Пер. на англ. яз.: [115].
79. ***О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах*** // ДАН СССР, т. 22, № 1, 1939; 11—15 (совм. с И.М. Гельфандом). Представлено И.М. Виноградовым. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 264—269.
80. ***Sur l'interpolation et extrapolation des suites stationnaires*** *(Об интерполяции и экстраполяции стационарных последовательностей)* // C. r. Acad. sci. Paris, v. 208, 1939; 2043—2045. Представлено Э. Борелем.
81. ***Кривые в гильбертовском пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений*** // ДАН СССР, т. 26, № 1, 1940; 6—9. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 269—273.
82. ***Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовском пространстве*** // ДАН СССР, т. 26, № 2, 1940; 115—118. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 274—277.

83. ***Об одном новом подтверждении законов Менделя*** // ДАН СССР, т. 27, № 1, 1940; 38–42. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 209–214.

1941—1950

84. ***Стационарные последовательности в гильбертовском пространстве*** // Бюлл. МГУ, матем., т. 2, вып. 6, 1941; 1–40. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 215–255.
85. ***Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей*** // Изв. АН СССР, сер. матем., т. 5, № 1, 1941; 3–14. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 255–263.
86. ***Точки локальной топологичности счетно-кратных открытых отображений компактов*** // ДАН СССР, т. 30, № 6, 1941; 477–479. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 278–281.
87. ***Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса*** // ДАН СССР, т. 30, № 4, 1941; 299–303. Опубл. также в УФН, т. 93, 1967; 476–481; и в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 281–287. Пер. на нем. яз. в сб.: Statistische Theorie der Turbulenz. — Berlin: Akademie-Verlag, 1958; 71–76.
88. ***О логарифмически-нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении*** // ДАН СССР, т. 31, № 2, 1941; 99–101. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 264–267.
89. ***К вырождению изотропной турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости*** // ДАН СССР, т. 31, № 6, 1941; 538–541. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 287–290. Пер. на нем. яз. в сб.: Statistische Theorie der Turbulenz. — Berlin: Akademie-Verlag, 1958; 147–150.
90. ***Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности*** // ДАН СССР, т. 32, № 1, 1941; 19–21. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 290–293. Пер. на нем. яз. в сб.: Statistische Theorie der Turbulenz. — Berlin: Akademie-Verlag, 1958; 77–81.
91. ***Confidence limits for an unknown distribution function*** // Ann. Math. Statist., v. 12, № 4, 1941; 461–463.

92. ***Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости.*** [*Резюме доклада на общем собрании Отделения физико-математических наук АН СССР, г. Казань, 26–28 января 1942 г.*] // Изв. АН СССР, сер. физ., т. 6, № 1/2, 1942; 56–58. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 294–296.
93. ***Определение центра рассеивания и меры точности по ограниченному числу наблюдений*** // Изв. АН СССР, сер. матем., т. 6, № 1/2, 1942; 3–32.
94. ***Проблемы теории вероятностей.*** [*Тезисы доклада на заседании Московского математического общества, 11 декабря 1944 г.*] // Впервые опубл. в журн.: Теория вероятн. и ее примен., т. 38, вып. 2, 1993; 211–212.
95. ***Число попаданий при нескольких выстрелах и общие принципы оценки эффективности системы стрельбы*** // Труды МИАН СССР, т. 12, 1945; 7–25.
96. ***Искусственное рассеивание в случае поражения одним попаданием и рассеивания в одном измерении*** // Труды МИАН СССР, т. 12, 1945; 26–45.
97. ***К вопросу о законе сопротивления при турбулентном течении в гладких трубах*** // ДАН СССР, т. 52, № 8, 1946; 669–671.
98. ***К обоснованию метода наименьших квадратов*** // УМН, т. 1, вып. 1, 1946; 57–70. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 267–283.
99. ***К обоснованию теории вещественных чисел*** // УМН, т. 1, вып. 1, 1946; 217–219.
100. ***К кинематике движения жидкости переменной мутности.*** [Дискуссия по статье члена-корреспондента АН СССР М.А. Великанова "*Перенос взвешенных наносов турбулентным потоком*".] // Изв. АН СССР, ОТН, № 5, 1946; 781–784.
101. ***Одна формула Гаусса из теории метода наименьших квадратов*** // Изв. АН СССР, сер. матем., т. 11, № 6, 1947; 561–566 (совм. с А.А. Петровым и Ю.М. Смирновым). Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 283–288.
102. ***Ветвящиеся случайные процессы*** // ДАН СССР, т. 56, № 1, 1947; 7–10 (совм. с Н.А. Дмитриевым). Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 288–293.
103. ***Вычисление финальных вероятностей для ветвящихся случайных процессов*** // ДАН СССР, т. 56, № 8, 1947; 783–786 (совм.

с Б.А. Савостьяновым [Б.А. Севастьяновым]). Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 294–298.

104. ***Статистическая теория колебаний с непрерывным спектром*** // Юбилейный сборник, посвященный тридцатилетию Великой Октябрьской социалистической революции. Ч. 1. — М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1947; 242–252. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 299–308.

105. ***Статистическая теория колебаний с непрерывным спектром*** // Общее собрание АН СССР, посвященное тридцатилетию Великой Октябрьской социалистической революции. — М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1948; 465–472.

106. ***О двух теоремах относительно вероятностей: комментарий*** // П.Л. Чебышёв. Полное собрание сочинений. Т. 3: Математический анализ. — М.–Л.: Гостехиздат, 1948; 404–409.

107. ***Строение полных метрических алгебр Буля.*** [*Резюме доклада на заседании Московского математического общества, 9 декабря 1947 г.*] // УМН, т. 3, вып. 1, 1948; 212.

108. ***Замечание по поводу многочленов П.Л. Чебышёва, наименее уклоняющихся от заданной функции*** // УМН, т. 3, вып. 1, 1948; 216–221. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 296–302.

109. ***Algèbres de Boole métriques complètes*** // VI Zjazd Matematykyw Polskich, Warszawa, 20–23.IX.1948; 22–30. Пер. на англ. яз.: *Complete metric Boolean algebras* // Philos. Stud., v. 77, № 1, 1995; 57–66.

110. ***К вопросу о “геометрическом отборе” кристаллов*** // ДАН СССР, т. 65, № 5, 1949; 681–684.

111. ***Решение одной задачи из теории вероятностей, связанной с вопросом о механизме слоеобразования*** // ДАН СССР, т. 65, № 6, 1949; 793–796. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 335–339. Пер. на англ. яз.: [124].

112. ***О суммах случайного числа случайных слагаемых*** // УМН, т. 4, вып. 4, 1949; 168–172 (совм. с Ю.В. Прохоровым). Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 308–313.

113. ***Локальная предельная теорема для классических цепей Маркова*** // Изв. АН СССР, сер. матем., т. 13, № 4, 1949; 281–300. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 313–335. Пер. на англ. яз.: [170].

114. ***О дроблении капель в турбулентном потоке*** // ДАН СССР, т. 66, № 5, 1949; 825–828. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 302–306. Пер. на нем. яз. в сб.: Statistische Theorie der Turbulenz. — Berlin: Akademie-Verlag, 1958; 151–156.
115. ***On inequalities between the upper bounds of the successive derivatives of an arbitrary function on an infinite interval*** // Amer. Math. Soc. Transl., № 4, 1949. Перепеч. в Translations Ser. 1, v. 2, 1962; 233–243. Пер. на англ. яз. статьи [78].
116. ***Несмещенные оценки*** // Изв. АН СССР, сер. матем., т. 14, № 4, 1950; 303–326. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 340–363. Пер. на англ. яз.: [130].
117. ***К вопросу об определении коэффициента температуропроводности почвы*** // Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., т. 14, № 2, 1950; 97–98.
118. ***Теорема о сходимости условных математических ожиданий и некоторые ее применения.*** [*Доклад на Первом конгрессе венгерских математиков, 2 сентября 1950 г.*] // Az Elso Magyar Matematikai Kongresszus Kozlemenyei, 27.VIII–2.IX.1950. — Budapest, Akadémiai Kiadó, 1952; 367–376, 377–386, на рус. и венг. яз.
119. ***К изложению основ лебеговской теории меры.*** [*Доклад на заседании Московского математического общества, 4 октября 1949 г.*] // УМН, т. 5, вып. 1, 1950; 211–213.
120. ***К вопросу о распределении цели*** // М.: Воениздат, № 12, 1950; 12–19.

1951—1960

121. ***К вопросу о дифференцируемости переходных вероятностей в однородных по времени процессах Маркова со счетным числом состояний*** // Учен. зап. Моск. ун-та, вып. 148, сер. матем., т. 4, 1951; 53–68. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 363–370.
122. ***Обобщение формулы Пуассона на случай выборки из конечной совокупности*** // УМН, т. 6, вып. 3, 1951; 133–134. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 371–372.
123. ***Статистический приемочный контроль при допустимом числе дефектных изделий, равном нулю***. — Л.: Всесоюзн. об-во по распростр. полит. и научн. знаний, Ленингр. дом научн.-техн. пропаганды, 1951, 24 с.

124. ***Solution of a problem in probability theory connected with the problem of the mechanism of stratification*** // Amer. Math. Soc. Transl., № 53, 1951. Перепеч. в Translations Ser. 1, v. 11, 1962; 171–177. Пер. на англ. яз. статьи [111].
125. ***К вопросу о сопротивлении и профиле скоростей при турбулентном течении в трубах*** // ДАН СССР, т. 84, № 1, 1952; 29–30.
126. ***[Конференция по алгебре и теории чисел (7–12 сентября 1951 г.): Выступление в прениях по докладу Б.Н. Делоне "Пути развития алгебры" (7 сентября)]*** // УМН, т. 7, вып. 3, 1952; 168–170.
127. ***О понятии алгоритма.*** [*Резюме доклада на заседании Московского математического общества 17 марта 1953 г.*] // УМН, т. 8, вып. 4, 1953; 175–176. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория информации и теория алгоритмов. — М.: Наука, 1987; 24.
128. ***Некоторые работы последних лет в области предельных теорем теории вероятностей*** // Вестник Моск. ун-та, сер. физ.-матем. и естеств. наук, вып. 7, № 10, 1953; 29–38. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 373–384.
129. ***О динамических системах с интегральным инвариантом на торе*** // ДАН СССР, т. 93, № 5, 1953; 763–766. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 307–310.
130. ***Unbiased estimates*** // Amer. Math. Soc. Transl., 1953, № 98, 28 p. Перепеч. в Translations Ser. 1, v. 11, 1962; 144–170. Пер. на англ. яз. статьи [116].
131. ***О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона*** // ДАН СССР, т. 98, № 4, 1954; 527–530. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 311–315.
132. ***Théorie générale des systèmes dynamiques et mécanique classique*** // Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Amsterdam, 1954, v. 1. 1957; 315–333. Изд. на рус. яз.: ***Общая теория динамических систем и классическая механика*** // Труды Международного математического конгресса, Амстердам, 1954; Обзорные доклады. — М.: Изд-во АН СССР, 1961; 187–208. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 316–332. Пер. на англ. яз.: [183].
133. ***О новом варианте гравитационной теории движения взвешенных наносов М.А. Великанова*** // Вестник Моск. ун-та, сер. физ.-матем. и естеств. наук, вып. 2, № 3, 1954; 41–45.

134. ***Оценки минимального числа элементов ε-сетей в различных функциональных классах и их применение к вопросу о представимости функций нескольких переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных.*** [*Резюме доклада на заседании Московского математического общества 27 апреля 1954 г.*] // УМН, т. 10, вып. 1, 1955; 192–194.
135. ***О сходимости А.В. Скорохода*** // Теория вероятн. и ее примен. — т. 1, вып. 2, 1956; 239–247. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 384–393.
136. ***Две равномерные предельные теоремы для сумм независимых слагаемых*** // Теория вероятн. и ее примен., т. 1, вып. 4, 1956; 426–436. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 393–404.
137. ***Zufällige Funktionen und Grenzverteilugssätze*** // Bericht über die Tagung Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, Berlin, 1954 / ed. B.W. Gnedenko. — Berlin: VEB Deutsher Verlag der Wissenschaften, 1956; 113–126 (совм. с Ю.В. Прохоровым). Рус. пер. (авторов): *Случайные функции и предельные теоремы* в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 404–419.
138. ***Некоторые принципиальные вопросы приближенного и точного представления функций одного и нескольких переменных*** // Труды 3-го Всесоюзного математического съезда, Москва, июнь–июль 1956 г. Т. II: Краткое содержание обзорных и секционных докладов. — М.: Изд-во АН СССР, 1956; 28–29. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 333–335.
139. ***On the Shannon theory of information transmission in the case of continuous signals.*** [*Доклад на симпозиуме по теории информации, Массачусетский технологический институт, Кембридж, 10–12 сентября 1956 г.*] // IEEE Trans. Inform. Theory, v. IT-2, № 4, 1956; 102–108.
140. ***О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных*** // ДАН СССР, т. 108, № 2, 1956; 179–182. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 335–339. Пер. на англ. яз.: [165].
141. ***О некоторых асимптотических характеристиках вполне ограниченных метрических пространств*** // ДАН СССР, т. 108, № 3, 1956; 385–388.

142. ***К общему определению количества информации*** // ДАН СССР, т. 111, № 4, 1956; 745–748 (совм. с И.М. Гельфандом и А.М. Ягломом). Опубл. также в кн. А.Н. Колмогоров. Теория информации и теория алгоритмов. — М.: Наука, 1987; 25–29.
143. ***Теория вероятностей*** // Математика, ее содержание, методы и значение. Т. 2. — М.: Изд-во АН СССР, 1956; 252–284. Пер. на англ. яз.: [175].
144. ***Теория передачи информации*** // Сессия АН СССР по научным проблемам автоматизации производства, 15–20 октября 1956 г.: Пленарные заседания. — М.: Изд-во АН СССР, 1957; 66–99. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория информации и теория алгоритмов. — М.: Наука, 1987; 29–56. *Выступление* А.Н. Колмогорова при обсуждении доклада см. там же; 56–58.
145. ***О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения*** // ДАН СССР, т. 114, № 5, 1957; 953–956. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 340–344. Пер. на англ. яз.: [176].
146. ***К обоснованию теории вещественных чисел*** // Матем. просвещение, вып. 2, 1957; 169–171.
147. ***Количество информации и энтропия для непрерывных распределений*** // Труды 3-го Всесоюзного математического съезда, Москва, июнь–июль 1956. Т. III: Обзорные доклады. — М.: Изд-во АН СССР, 1958; 300–320 (совм. с И.М. Гельфандом и А.М. Ягломом). Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория информации и теория алгоритмов. — М.: Наука, 1987; 59–85.
148. ***Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега*** // ДАН СССР, т. 119, № 5, 1958; 861–864. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория информации и теория алгоритмов. — М.: Наука, 1987; 86–91. См. также [206].
149. ***Sur les propriétés des fonctions de concentrations de M. P. Lévy*** // Ann. Inst. H. Poincaré, v. 16, № 1, 1958; 27–34. Рус. пер. (В.М. Круглова): *О свойствах функций концентрации П. Леви* в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 419–425.
150. ***О линейной размерности топологических векторных пространств*** // ДАН СССР, т. 120, № 2, 1958; 239–241. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука,1985; 344–348.
151. ***К определению алгоритма*** // УМН, т. 13, вып. 4, 1958; 3–28 (совм. с В.А. Успенским). Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров.

Теория информации и теория алгоритмов. — М.: Наука, 1987; 91–119. Пер. на англ. яз.: [177].

152. ***Эргодические стационарные случайные процессы с дискретным спектром.*** [*Резюме доклада на заседании научно-исследовательского семинара по теории вероятностей, Москва, 17 сентября 1957 г.*] // Теория вероятн. и ее примен., т. 3, вып. 2, 1958; 212–213.

153. ***Спектры динамических систем, порождаемых стационарными случайными процессами.*** [*Резюме доклада на заседании научно-исследовательского семинара по теории вероятностей, Москва, 17 декабря 1957 г.*] // Теория вероятн. и ее примен., т. 3, вып. 2, 1958; 214–215.

154. ***Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов*** // ДАН СССР, т. 124, № 4, 1959; 754–755.

155. ***ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах*** // УМН, т. 14, вып. 2, 1959; 3–86 (совм. с В.М. Тихомировым). Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория информации и теория алгоритмов. — М.: Наука, 1987; 119–192. Пер на англ. яз.: [164].

156. ***Переход ветвящихся процессов в диффузионные и примыкающие задачи генетики.*** [*Резюме доклада на заседании семинара кафедры теории вероятностей Московского университета, 18 ноября 1958 г.*] // Теория вероятн. и ее примен., т. 4, вып. 2, 1959; 233–236. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 425–428.

157. ***Замечание о работах Р.А. Минлоса и В. Сазонова.*** [*Выступление на заседании семинара кафедры теории вероятностей Московского университета, 16 декабря 1958 г.*] // Теория вероятн. и ее примен., т. 4, вып. 2, 1959; 237–239.

158. ***О классах $\Phi^{(n)}$ Форте и Блан-Лапьерра.*** [*Резюме доклада на заседании семинара кафедры теории вероятностей Московского университета, 4 ноября 1959 г.*] // Теория вероятн. и ее примен., т. 5, вып. 3, 1960; 373. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 428–429.

159. ***Об условиях сильного перемешивания гауссовского стационарного процесса*** // Теория вероятн. и ее примен., т. 5, вып. 2, 1960; 222–227 (совм. с Ю.А. Розановым). Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 429–435.

160. ***Случайные функции нескольких переменных, почти все реализации которых периодичны.*** [*Резюме доклада на заседании семинара кафедры теории вероятностей Московского университета, 18 ноября 1959 г.*] // Теория вероятн. и ее примен., т. 5, вып. 3, 1960; 374. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 435–436.

1961—1970

161. ***Замечание к докладу М.С. Пинскера [“Об асимптотических свойствах распределений квадратичных функционалов гауссовских случайных процессов”].*** [*Выступление на заседании секции теории вероятностей и математической статистики Московского математического общества, 16 ноября 1960 г.*] // Теория вероятн. и ее примен., т. 6, вып. 3, 1961; 366.
162. ***Замечание к докладу В.К. Лезерсона [“Современные задачи теории телефонного сообщения].*** [*Выступление на заседании секции теории вероятностей и математической статистики Московского математического общества, 23 ноября 1960 г.*] // Теория вероятн. и ее примен., т. 6, вып. 3, 1961; 367.
163. ***Замечание к докладу Б.А. Севастьянова [“Класс предельных законов распределения квадратичных форм от нормальных случайных величин”].*** [*Выступление на заседании секции теории вероятностей и математической статистики Московского математического общества, 23 ноября 1960 г.*] // Теория вероятн. и ее примен., т. 6, вып. 3, 1961; 372.
164. ***ε-entropy and ε-capacity of sets in functional spaces*** // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, v. 17, 1961; 277–364 (совм. с В.М. Тихомировым). Пер. на англ. яз. статьи [155].
165. ***On the representation of continuous functions of several variables by superpositions of continuous functions of a smaller numbers of variables*** // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, v. 17, 1961; 369–373. Пер. на англ. яз. статьи [140].
166. ***Об оценке параметров комплексного стационарного гауссовского марковского процесса*** // ДАН СССР, т. 146, № 4, 1962; 747–750 (совм. с М. Арато и Я.Г. Синаем). Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 436–440.
167. ***Об одной вероятностной задаче оптимального управления*** // ДАН СССР, т. 145, 1962; 993–995 (совм. с Е.Ф. Мищенко и Л.С. Понтрягиным).

168. ***Уточнение представлений о локальной структуре турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса*** // Mécanique de la turbulence: Actes du Colloque International du CNRS (Marseille, août—sept. 1961). — Paris, Éditions du CNRS, 1962; 447—458 (на рус. и франц. яз.). Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 348—352. Пер. на англ. яз.: [169].
169. ***A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number*** // J. Fluid Mech., v. 13, part 1, 1962; 82—85. Пер. на англ. яз. позиции [168].
170. ***A local limit theorem for Markov chains*** // Select. Transl. Math. Statist. Probab., v. 2, 1962; 109—129. Пер. на англ. яз. статьи [113].
171. ***О приближении распределений сумм независимых слагаемых неограниченно делимыми распределениями*** // Труды Моск. матем. об-ва, т. 12, 1963; 437—451. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 441-458. Пер. на англ. яз.: [178], [179].
172. ***Дискретные автоматы и конечные алгорифмы (тезисы доклада)*** // Труды 4-го Всесоюзного математического съезда, Ленинград, 3—12 июля 1961 г. Т. I: Пленарные доклады. — Л.: Изд-во АН СССР, 1963; 120.
173. ***Различные подходы к оценке трудности приближенного задания и вычисления функций*** // Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Stockholm, 1962. — Djursholm: Institut Mittag-Leffler, 1963; 351—356. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория информации и теория алгоритмов. — М.: Наука, 1987; 199—204. Пер. на англ. яз.: ***Various approaches to estimating the difficulty of approximate definition and computations of functions*** // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, v. 31, 1963; 47—52.
174. ***On tables of random numbers*** // Sankhyā Ser. A, v. 25, № 4, 1963; 369—376. Рус. пер. (А. Х. Шеня): *О таблицах случайных чисел* в сб.: “Семиотика и информатика”. — М.: ВИНИТИ, вып. 18, 1982; 3—13; а также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория информации и теория алгоритмов. — М.: Наука, 1987; 204—213.
175. ***Probability Theory*** // Transl. Math. Monographs, v. 1, part 4, 1963. Пер. на англ. яз. статьи [143].
176. ***On the representation of continuous functions of many variables by superposition of continuous functions of one variable and addition*** // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, v. 28, 1963; 55—59. Пер. на англ. яз. статьи [145].

177. ***On the definition of an algorithm*** // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, v. 29, 1963; 217–245 (совм. с В.А. Успенским). Пер. на англ. яз статьи [151].
178. ***On the approximation of distributions of sums of independent summands by infinitely divisible distributions.*** [*Translation of a lecture delivered at the Indian Statistical Institute, Calcutta, April 1962.*] // Sankhyā Ser. A, v. 25, part 2, 1963; 159–174. Статья включена также в сборник "Contributions to Statistics", посвященный профессору П. Махаланобису в связи с его 70-летием, [179].
179. ***On the approximation of distributions of sums of independent summands by infinitely divisible distribution*** // Contrib. Statist. — June 1964; 159–174.
180. ***Три подхода к определению понятия "количество информации"*** // Проблемы передачи информации, т. 1, вып. 1, 1965; 3–11. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория информации и теория алгоритмов. — М.: Наука, 1987; 213–223.
181. ***П.С. Александров и теория δs-операций*** // УМН, т. 21, вып. 4, 1966; 275–278. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 352–356.
182. ***On the principle of excluded middle*** // Van Heijenoort J. From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931. — Cambridge, MA: Harvard Univ. Press, 1967; 414–437. Пер. на англ. яз. статьи [10].
183. ***The general theory of dynamical systems and classical mechanics*** // R. Abraham, J.E. Marsden. Foundations of Mechanics. — New York–Amsterdam: W.A. Benjamin, Inc., 1967; Appendix. 2-nd ed.: Reading, MA: The Benjamin–Cummings Publ. Co., 1978; 741–757. Пер. на англ. яз. статьи [132].
184. ***О реализации сетей в трехмерном пространстве*** // Проблемы кибернетики, вып. 19, 1967; 261–268. (совм. с Я.М. Барздинем). Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория информации и теория алгоритмов. — М.: Наука, 1987; 223–232.
185. ***Несколько теорем об алгоритмической энтропии и алгоритмическом количестве информации.*** [*Резюме доклада на заседании Московского математического общества, 31 октября 1967 г.*] // УМН, т. 23, вып. 2, 1968; 201.
186. ***К логическим основам теории информации и теории вероятностей*** // Проблемы передачи информации, т. 5, вып. 3, 1969; 3–7. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория информации и теория алгоритмов. — М.: Наука, 1987; 232–237.
187. ***Статистическая гидродинамика океана.*** [*Резюме доклада на заседании Московского математического общества, 24 февраля 1970 г.*] // УМН, т. 25, вып. 4, 1970; 167.

1971—1980

188. ***Сложность задания и сложность построения математических объектов.*** [*Резюме доклада на заседании Московского математического общества, 23 ноября 1971 г.*] // УМН, т. 27, вып. 2, 1972; 159.
189. ***Качественное изучение математических моделей динамики популяций*** // Проблемы кибернетики, вып. 25, 1972; 101—106. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 357—362.
190. ***Сложность алгоритмов и объективное определение случайности.*** [*Резюме доклада на заседании Московского математического общества, 16 апреля 1974 г.*] // УМН, т. 29, вып. 4, 1974; 155.
191. ***Оценки спектральных функций случайных процессов*** // II Европейское совещание по статистике, Осло, 14—18 августа 1978 г.: Резюме докладов. — Осло, 1978 (совм. с И.Г. Журбенко). Полный текст доклада опубл. в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 458—467.
192. ***Замечания о статистических решениях уравнений Навье—Стокса.*** [*Резюме доклада на заседании Московского математического общества, 18 января 1978 г.*] // УМН, т. 33, вып. 3, 1978; 124.
193. ***Линейные выборочные оценки сумм*** // Теория вероятн. и ее примен., т. 24, вып. 2, 1979; 241—251 (совм. с А. В. Булинским).

1981—1987

194. ***О выборочных оценках сумм случайных величин*** // Труды Ин-та прикладн. геофизики, вып. 46, 1981; 73—77 (совм. с А.В. Булинским).
195. ***Комбинаторные основания теории информации и исчисления вероятностей*** // УМН, т. 38, вып. 4, 1983; 27—36. Опубл. также в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория информации и теория алгоритмов. — М.: Наука, 1987; 238—250.
196. ***Об оптимальных статистических выводах в экспериментах с рандомизацией*** // Планирование и оценка эффективности работ по искусственному увеличению осадков. — М.: Гидрометеоиздат, 1984; 17—18 (совм. с А.В. Булинским).
197. ***On logical foundations of probability theory*** // Lecture Notes in Math., № 1021, 1983; 1—5. Рус. пер. (А.З. Звонкина, А.А. Новикова и А.Х. Шеня): *О логических основаниях теории вероятностей*

в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 467–471.
198. ***К работам по теории функций и теории множеств*** // Комментарий в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 363–364.
199. ***К работам по интуиционистской логике*** // Комментарий в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 393.
200. ***К работам по теории гомологий*** // Комментарий в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 405.
201. ***К работе об открытых отображениях*** // Комментарий в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 412.
202. ***К работе об уравнении диффузии*** // Комментарий в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 416.
203. ***К работам по турбулентности*** // Комментарий в кн. А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 421.
204. ***К работам по классической механике*** // Комментарий в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 433.
205. ***К работам о суперпозициях*** // Комментарий в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 444–445.
206. ***Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега.*** [Новая редакция статьи [148].] // Труды МИАН СССР, т. 169, 1985; 94–98.
207. ***К работам по теории вероятностей и математической статистике*** // Комментарий в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986; 472–474.
208. ***К работам по теории информации и некоторым ее применениям*** // Комментарий в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория информации и теория алгоритмов. — М.: Наука, 1987; 251–253.
209. ***К работе о динамических системах*** // Комментарий в кн.: А.Н. Колмогоров. Теория информации и теория алгоритмов. — М.: Наука, 1987; 275.
210. ***Algorithms and Randomness*** // Proceedings of the First World Congress of the Bernoulli Society (Tashkent, USSR, 8–14 Sept., 1986). V. 1. — Utrecht: VNU Science Press, 1987; 3–56 (совм. с В.А. Успенским).

211. ***Алгоритмы и случайность*** // Теория вероятн. и ее примен., т. 32, вып. 3, 1987; 425–455 (совм. с В.А. Успенским).
212. ***Вероятностно-статистические методы обнаружения спонтанно возникающих эффектов*** // Труды МИАН СССР, т. 182, 1988; 4–23 (совм. с Ю.В. Прохоровым и А.Н. Ширяевым).

Книги

(Монографии и учебные пособия для высших учебных заведений)

1. ***Введение в теорию функций действительного переменного.*** — М.–Л.: ГТТИ, 1932; 270 с. (совм. с П.С. Александровым).
2. ***Введение в теорию функций действительного переменного.*** 2-е. изд. — М.-Л.: ГТТИ, 1933; 270 с. (совм. с П.С. Александровым).
3. ***Введение в теорию функций действительного переменного.*** 3-е изд., перераб. — М.–Л.: ГОНТИ, 1938; 268 с. (совм. с П.С. Александровым).
4. ***Вступ до теорії функцій дійсного змінного.*** Посібник для ун-тів і пед. ін-тів. — Київ: Радянська школа, 1941; 268 с. (совм. с П.С. Александровым), на укр. яз.
5. ***Introductory Real Analysis.*** — Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1970, xii+403 p. Перепеч.: Dover, 1975; xii+403 p.
6. ***Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.*** — Berlin: Springer-Verlag, 1933; iv+62 S. (Ergeb. Math. Grenzgeb. Bd. 2. № 3). Перепеч.: Springer-Verlag, 1973, 1977; iv+62 S.
7. ***Основные понятия теории вероятностей.*** — М.–Л.: ОНТИ, 1936; 80 с. Пер. с нем. яз. книги [6].
8. ***Foundations of the Theory of Probability.*** — New York: Chelsea, 1950, 1956; vi+84 p. Дополнения к библиографии (А.Т. Баруча-Рейд) на с. 75–84. Пер. на англ. яз. книги [6].
9. ***Основные понятия теории вероятностей.*** 2-е изд. — М.: Наука, 1974; 119 с.
10. ***Основни понятия на теорията на вероятностите*** // Бернулли, Лаплас, Колмогоров вероятности. Поредица математическа класика / Под ред. Б. Пенкова. — София: Наука и изкуство, 1982; 155–249, на болгар. яз.
11. ***A valószínűségszámítás alapfogalmai.*** — Budapest: Gondolat, 1982; 130 p., на венг. яз.
12. ***Concetti fondamentali di teoria delle probabilità.*** — Roma: Edizioni Teknos, 1995, на итал. яз.

13. ***Основные понятия теории вероятностей.*** 3-е изд. — М.: ФАЗИС, 1998; 144 с. С приложением: А.Н. Ширяев. *Математическая теория вероятностей. Очерк истории становления.* Сер. “Стохастика”, вып. 1.
14. ***Предельные распределения для сумм независимых случайных величин.*** — М.–Л.: Гостехиздат, 1949; 264 с. (совм с Б. В. Гнеденко).
15. ***Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai.*** — Budapest: Akadémiai Kiadó, 1951; 256 p. (совм. с Б.В. Гнеденко), на венг. яз.
16. ***Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables.*** — Cambridge, MA: Addison-Wesley, 1954; ix+264 p. (совм. с Б.В. Гнеденко).
17. ***Предельные распределения для сумм независимых слагаемых.*** — Пекин: Кэсюэ Чубаньше, 1955; 280 с. (совм. с Б.В. Гнеденко), на кит. яз.
18. ***Rozklady graniczne sum zmiennych niezaleznych.*** Warszawa: Państw. Wyd-wo naukowe, 1957; 262 p. (совм. с Б.В. Гнеденко), на польск. яз.
19. ***Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen.*** — Berlin: Akademie-Verlag, 1959; viii+279 S. Math. Lehrbücher Monogr. II. Abt.: Math. Monogr. Bd. IX (совм. с Б.В. Гнеденко).
20. ***Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables.*** 2-nd rev. ed. — Reading, MA: Addison-Wesley, 1968; ix+293 p. (совм. с Б.В. Гнеденко).
21. ***Теория меры и интеграл Лебега.*** Записи лекций. — Отпечатано множительным аппаратом на механико-математическом ф-те МГУ, 1952; 101 с.
22. ***Элементы теории функций и функционального анализа: Курс лекций. Вып. I: Метрические и нормированные пространства.*** — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1954; 154 с. (совм. с С.В. Фоминым).
23. ***Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. 1: Metric and Normed Spaces.*** — Rochester, N.Y.: Graylock, 1957; ix+129 p. (совм. с С.В. Фоминым). Пер. на англ. яз. книги [22].
24. ***Элементы теории функций и функционального анализа. Вып. II: Мера, интеграл Лебега, гильбертово пространство.*** — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1960; 119 с. (совм. с С.В. Фоминым).
25. ***Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. 2: Measure, the Lebesgue Integral and Hilbert Space.*** — Albany, N.Y.: Graylock, 1961; ix+128 p. (совм. с С.В. Фоминым). Пер. на англ. яз. книги [24].
26. ***Measure, Lebesgue Integrals, and Hilbert Space.*** — New York–London: Academic Press, 1961; xii+147 p. (совм. с С.В. Фоминым). Пер. на англ. яз. книги [24].

27. ***Элементы теории функций и функционального анализа.*** 2-е изд., перераб. и доп., книг [22], [24]. — М.: Физматгиз, 1968; 496 с. (совм. с С.В. Фоминым).
28. ***Introductory Real Analysis.*** — Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1970; xii+403 p. (совм. с С.В. Фоминым).
29. ***Элементы теории функций и функционального анализа.*** 3-е изд., перераб. — М.: Физматгиз, 1972; 496 с. (совм. с С.В. Фоминым).
30. ***Elementos de la teoria de funciones y del analisis funcional.*** — Moscu: Mir, 1972; 534 p. (совм. с С.В. Фоминым), на исп. яз.
31. ***Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle.*** — Moscou: Mir, 1974; 536 p. (совм. с С.В. Фоминым), на франц. яз.
32. ***Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional.*** 2-е изд. на исп. яз. — Moscu: Mir, 1975; 534 p. (совм. с С.В. Фоминым).
33. ***Reelle Funktionen und Funktionalanalysis.*** — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1975; 534 S. Hochschulbücher für Mathematik. Bd. 78 (совм. с С.В. Фоминым). Пер. на нем. яз. книги [28].
34. ***Элементы теории функций и функционального анализа.*** 4-е изд., перераб. — М.: Наука, 1976; 543 с. (совм. с С.В. Фоминым).
35. ***Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle.*** 2-е изд. на франц. яз. — Moscou: Mir, 1977; 538 p. (совм. с С.В. Фоминым).
36. ***Elementos de la teoria de funciones y del analisis funcional.*** 3-е изд. на исп. яз. — Moscu: Mir, 1978; 534 p. (совм с С.В. Фоминым).
37. ***Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale.*** — Mosca: Mir, 1980; 534 p. (совм. с С.В. Фоминым), на итал. яз.
38. ***Элементы теории функций и функционального анализа.*** 5-е изд. — М.: Наука, 1981; 542 с. (совм. с С.В. Фоминым).
39. ***A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei.*** — Budapest: Műszaki Könyvkiadó, 1981, 553 p. (совм. с С.В. Фоминым), на венг. яз.
40. ***Elementos da teoria das funções e de análise funcional.*** — Moscou: Mir, 1982; 534 p. (совм. с С.В. Фоминым), на португ. яз.
41. ***Элементы теории функций и функционального анализа.*** — М.: Мир, 1988; 712 с. (совм. с С.В. Фоминым), на яз. дари.
42. ***Элементы теории функций и функционального анализа.*** — М.: Мир, 1988; 712 с. (совм. с С.В. Фоминым), на староараб. яз.
43. ***Элементы теории функций и функционального анализа.*** 6-е изд., испр. — М.: Наука, 1989; 624 с. (совм. с С.В. Фоминым).
44. ***Курс теории случайных процессов.*** Записи лекций. — Отпечатано множительным аппаратом на механико-математическом ф-те МГУ, 1959; 214 с.
45. ***Алгоритм, информация, сложность.*** [Тематический сборник (6 статей) работ, выполненных в 50—60-х гг.] — М.: Знание, 1991; 45 с.

46. ***Введение в математическую логику.*** — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982; 120 с. (совм. с А.Г. Драгалиным).
47. ***Математическая логика. Дополнительные главы.*** [Учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности “Математика”.] — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984; 119 с. (совм. с А.Г. Драгалиным).
48. ***Избранные труды. Математика и механика*** / Отв. ред. С.М. Никольский, сост. В.М. Тихомиров. — М.: Наука, 1985; 470 с. (Содержит список работ А.Н. Колмогорова.)
49. ***Теория вероятностей и математическая статистика.*** [Вторая книга избранных трудов.] / Отв. ред. Ю.В. Прохоров, сост. А.Н. Ширяев. — М.: Наука, 1986; 535 с.
50. ***Теория информации и теория алгоритмов.*** [Третья книга избранных трудов.] / Отв. ред. Ю.В. Прохоров, сост. А.Н. Ширяев. — М.: Наука, 1987; 304 с.
51. ***Selected Works of A. N. Kolmogorov. Vol. I: Mathematics and Mechanics*** / Ed. V.M. Tikhomirov. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1991; xix+551 p. (Math. Appl. V. 25.)
52. ***Selected Works of A. N. Kolmogorov. Vol. II: Probability Theory and Mathematical Statistics*** / Ed. A.N. Shiryaev. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992; xv+597 p. (Math. Appl. V. 26.)
53. ***Selected Works of A. N. Kolmogorov. Vol. III: Information Theory and the Theory of Algorithms*** / Ed. A.N. Shiryaev. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993; xxv+275 p. (Math. Appl. V. 27.)
54. ***Элементы теории функций и функционального анализа.*** 7-е изд., стереотип. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003 (в печати) (совм. с С.В. Фоминым). См. книгу [43].

II. Статьи в энциклопедических изданиях

При составлении этого раздела мы использовали следующие энциклопедические издания:

БСЭ – Большая Советская Энциклопедия. Т. 1–65, том “СССР” / Гл. ред. О.Ю. Шмидт. — М.: Советская энциклопедия, ОГИЗ, 1926–1947.

БСЭ-2 – Большая Советская Энциклопедия. Т. 1–51. Изд. 2-е / Гл. ред. Б.А. Введенский. — М.: Большая советская энциклопедия, 1949–1958.

БСЭ-3 – Большая Советская Энциклопедия. Т. 1–30, Изд. 3-е / Гл. ред. А.М. Прохоров. — М.: Советская энциклопедия, 1970–1978.

МЭ – Математическая энциклопедия. Т. 1–5 / Гл. ред. И.М. Виноградов. — М.: Советская энциклопедия, 1977; 1979; 1982; 1984; 1985.

ВиМС – Вероятность и математическая статистика: энциклопедия / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. — М.: Большая Российская Энциклопедия, 1999; 910 с.

1. ***Абсолютная величина*** // БСЭ-2, т. 1, 1949; 32.
2. ***Абсолютная геометрия*** // БСЭ-2, т. 1, 1949; 33.
3. ***Адамар Жак*** // БСЭ-2, т. 1, 1949; 388.
4. ***Аддитивные величины*** // БСЭ-2, т. 1, 1949; 394.
5. ***Аксиома*** // БСЭ-2, т. 1, 1949; 613–616.
6. ***Аксонометрия*** // БСЭ-2, т. 1, 1949; 617.
7. ***Алгебра в средней школе*** // БСЭ-2, т. 2, 1950; 61–62.
8. ***Алгебраическое выражение*** // БСЭ-2, т. 2, 1950; 64.
9. ***Алгоритм*** // БСЭ-2, т. 2, 1950; 65.
10. ***Алгоритм Евклида*** // БСЭ-2, т. 2, 1950; 65–67.
11. ***Александров Александр Данилович*** // БСЭ-2, т. 2, 1950; 83.
12. ***Александров Павел Сергеевич*** // БСЭ-2, т. 2, 1950; 84.
13. ***Анализ математический*** // БСЭ-2, т. 2, 1950; 325–326.
14. ***Асимптота*** // БСЭ-2, т. 3, 1950; 238–239.
15. ***Асимптотические выражения*** // БСЭ-2, т. 3, 1950; 239.
16. ***Ахиезер Наум Ильич*** // БСЭ-2, т. 3, 1950; 565.
17. ***Банах Стефан*** // БСЭ-2, т. 4, 1950; 183.
18. ***Бари Нина Карловна*** // БСЭ-2, т. 4, 1950; 245.
19. ***Бернштейн Сергей Натанович*** // БСЭ-2, т. 5, 1950; 52.
20. ***Бесконечно большие*** // БСЭ-2, т. 5, 1950; 66–67.
21. ***Бесконечно малые*** // БСЭ-2, т. 5, 1950; 67–71 (совм. с В.Ф. Каганом).
22. ***Бесконечно удаленные элементы*** // БСЭ-2, т. 5, 1950; 71–72 (совм. с Б.Н. Делоне).
23. ***Бесконечность*** // МЭ, т. 1, 1977; 455–458.
24. ***Бесконечность (в математике)*** // БСЭ-2, т. 5, 1950; 73–74.

25. ***Бигармонические функции*** // БСЭ-2, т. 5, 1950; 159.
26. ***Билинейная форма*** // БСЭ-2, т. 5, 1950; 167.
27. ***Больших чисел закон*** // БСЭ-2, т. 5, 1950; 538–540. Перепеч. в ВиМС, 1999; 881–882.
28. ***Брауэр Лейтзен Эгберт Ян*** // БСЭ-2, т. 6, 1951; 62–63 (совм. с С.А. Яновской).
29. ***Вариационный ряд*** // БСЭ-2, т. 6, 1951; 641.
30. ***Вейль Герман*** // БСЭ-2, т. 7, 1951; 106–107 (совм. с С.А. Яновской).
31. ***Величина*** // БСЭ-2, т. 7, 1951; 340–341. БСЭ-3, т. 4, 1971; 456–457. МЭ, т. 1, 1977; 651–653.
32. ***Вероятностное отклонение*** // БСЭ-2, т. 7, 1951; 507–508.
33. ***Вероятность*** // БСЭ-2, т. 7, 1951; 508–510. МЭ, т. 1, 1977; 667–669. ВиМС, 1999; 96–97 (перепеч. статьи в БСЭ-2).
34. ***Винер Норберт*** // БСЭ-3, т. 5, 1971; 72.
35. ***Выборочный метод*** // БСЭ-2, т. 9, 1951; 417–418 (совм. с Т.И. Козловым).
36. ***Гаусса распределение*** // БСЭ-2, т. 10, 1952; 75.
37. ***Геодезическая кривизна*** // БСЭ-2, т. 10, 1952; 481.
38. ***Геодезические координаты*** // БСЭ-2, т. 10, 1952; 486.
39. ***Гильберт Давид*** // БСЭ-2, т. 11, 1952; 370–371. БСЭ-3, т. 6, 1971; 519.
40. ***Гистограмма*** // БСЭ-2, т. 11, 1952; 447.
41. ***Гнеденко Борис Владимирович*** // БСЭ-2, т. 11, 1952; 545.
42. ***Гомеоморфизм*** // БСЭ-2, т. 12, 1952; 21.
43. ***Гомотопия*** // БСЭ-2, т. 12, 1952; 35.
44. ***График*** // БСЭ-2, т. 12, 1952; 453–454.
45. ***Движение (в геометрии)*** // БСЭ-2, т. 13, 1952; 447–448.
46. ***Двучлен*** // БСЭ-2, т. 13, 1952; 518.
47. ***Действительные числа*** // БСЭ-2, т. 13,1952; 570–571.
48. ***Деление*** // БСЭ-2, т. 13, 1952; 628.
49. ***Дискретность*** // БСЭ-2, т. 14, 1952; 425.
50. ***Дисперсия*** // БСЭ-2, т. 14, 1952; 438–439.
51. ***Дистрибутивность*** // БСЭ-2, т. 14, 1952; 479.
52. ***Дистрибутивный оператор*** // БСЭ-2, т. 14, 1952; 479.
53. ***Дифференциал*** // БСЭ-2, т. 14, 1952; 497.
54. ***Дифференциальные уравнения*** // БСЭ-2, т. 14, 1952; 520–526 (совм. с Б.П. Демидовичем и В.В. Немыцким).
55. ***Доверительная вероятность*** // БСЭ-2, т. 14, 1952; 616–617.
56. ***Доверительные границы*** // БСЭ-2, т. 14, 1952; 617.
57. ***Достаточная статистика*** // БСЭ-2. т. 51, 1958; 106.
58. ***Знаки математические*** // БСЭ-2, т. 17, 1952; 117–119 (совм. с И.Г. Башмаковой и А.П. Юшкевичем).

59. ***Значащие цифры*** // БСЭ-2, т. 17, 1952; 135.
60. ***Измерение*** // БСЭ-3, т. 10, 1972; 220–221.
61. ***Изоморфизм*** // БСЭ-2, т. 17, 1952; 478–479 (совм. с В.И. Битюцковым).
62. ***Изотропные прямые*** // БСЭ-2, т. 17, 1952; 509.
63. ***Именованное число*** // БСЭ-2, т. 17, 1952; 557.
64. ***Имшенецкий Василий Григорьевич*** // БСЭ-2, т. 17, 1952; 607.
65. ***Индукция математическая*** // БСЭ-2, т. 18, 1953; 146–147.
66. ***Интеграл*** // БСЭ-2, т. 18, 1953; 250–253 (совм. с В.И. Гливенко). БСЭ-3, т. 10, 1972; 300–302.
67. ***Интеграл вероятности*** // БСЭ-2, т. 18, 1953; 253.
68. ***Интерполяция*** // БСЭ-2, т. 18, 1953, 304–305.
69. ***Интуиционизм***// БСЭ-2, т. 18, 1953; 319.
70. ***Информация*** // БСЭ-2, т. 51, 1958; 129-130. Перепеч. в ВиМС, 1999; 882–883.
71. ***Исключение неизвестных*** // БСЭ-2, т. 18, 1953; 483.
72. ***Испытание*** // БСЭ-2, т. 18, 1953; 604.
73. ***Исчерпывания метод*** // БСЭ-2, т. 19, 1953; 50-51. БСЭ-3, т. 10, 1972; 586.
74. ***Квадрант*** // БСЭ-2, т. 20, 1953; 434.
75. ***Кибернетика*** // БСЭ-2, т. 51, 1958; 149–151.
76. ***Компакт*** // БСЭ-2, т. 22, 1953; 282.
77. ***Константа*** // БСЭ-2, т. 22, 1953; 416.
78. ***Континуум*** // БСЭ, т. 34, 1937; 139-140; а также: БСЭ-2, т. 22, 1953; 454–455. БСЭ-3, т. 13, 1973; 64.
79. ***Координаты*** // БСЭ-2, т. 22, 1953; 524–525.
80. ***Корреляция*** // БСЭ-2, т. 23, 1953; 55-58. Перепеч. в ВиМС, 1999; 883–884
81. ***Линия*** // БСЭ-2, т. 25, 1954; 167–170.
82. ***Малых чисел закон*** // БСЭ-2, т. 26, 1954; 169.
83. ***Марков Андрей Андреевич*** // БСЭ, т. 38, 1938; 152–153. БСЭ-2, т. 26, 1954; 294–295. БСЭ-3. т. 15, 1974; 379.
84. ***Математика*** // БСЭ, т. 38, 1938; 359–402. БСЭ-2, т. 26, 1954; 464–483. БСЭ-3, т. 15, 1974; 467–478. МЭ, т. 3, 1982, 560–564 (по материалам статьи в БСЭ-2).
85. ***Математическая индукция*** // БСЭ, т. 38, 1938; 405–406.
86. ***Математическая статистика*** // БСЭ-2, т. 26, 1954; 485–490. БСЭ-3, т. 15, 1974; 480–484 (совм. с Ю.В. Прохоровым). МЭ, т. 3, 1982; 576–581.
87. ***Математическая физика*** // БСЭ-2, т. 26, 1954; 490.
88. ***Мера*** // БСЭ, т. 38, 1938; 831–832.
89. ***Мизес Рихард*** // БСЭ-2, т. 27, 1954; 414.

90. ***Многомерное пространство*** // БСЭ, т. 39, 1938; 577–578. БСЭ-2, т. 27, 1954; 660–661. БСЭ-3, т. 16, 1974; 372.
91. ***Множеств теория*** // БСЭ-2, т. 28, 1954; 14–17 (совм. с П.С. Александровым).
92. ***Ориентация*** // БСЭ, т. 43, 1939; 342–344. БСЭ-2, т. 31, 1955; 188-189. БСЭ-3, т. 18, 1974; 509–510.
93. ***Основания геометрии*** // БСЭ-2, т. 31, 1955; 296–297.
94. ***Поверхность*** // БСЭ, т. 45, 1940; 746–748. БСЭ-2, т. 33, 1955; 346–347 (совм. с Л.А. Скорняковым).
95. ***Порядковые числа*** // БСЭ-2, т. 34, 1955; 227.
96. ***Приемочный статистический контроль*** // БСЭ-2, т. 34, 1955; 498–499. БСЭ-3, т. 20, 1975; 572–573 (совм. с Ю.К. Беляевым).
97. ***Развитие математики в СССР*** // БСЭ, том “СССР”, 1947; 1318–1323.
98. ***Слуцкий Евгений Евгеньевич*** // БСЭ-2, т. 39, 1956; 378.
99. ***Смирнов Николай Васильевич*** // БСЭ-2, т. 39, 1956; 406.
100. ***Средние величины*** // БСЭ, т. 52, 1947; 508–509.
101. ***Теория вероятностей*** // ВиМС, 1999; 871–881. Перепеч. [$Б_{VI}$-34].
102. ***Уравнение*** // БСЭ, т. 56, 1936; 163–165.

III. Доклады в Московском математическом обществе

1922	8 октября	***Пример тригонометрического ряда Фурье–Лебега, расходящегося почти всюду.***
1925	5 апреля	***О возможности общего определения производной, интеграла и суммы ряда.***
1926	16 ноября	***О всюду расходящемся ряде Фурье.***
	7 декабря	***Принцип двойного отрицания и определение функции.***
1927	6 декабря	***Обобщение теоремы Чебышёва.***
1928	20 марта	***Об одной общей схеме теории вероятностей.***
	18 декабря	***Новая интерпретация интуиционистской логики.***
1931	4 апреля	***О научной командировке в Берлин и Гёттинген.***
	29 апреля	***Современные проблемы теории вероятностей.***
1932	11 декабря	***О геометрических идеях Plucker'a и Klein'a.***
1934	11 ноября	***О контингенциях*** (совм. с И.Я. Верченко).
	11 декабря	***Дополнительное сообщение к предыдущему докладу.***
1935	5 января	***Цепи Маркова и обратимость законов природы.***
1937	16 февраля	***Статистическая теория кристаллизации застывающих металлов.***
	22 апреля	***О дифференциальных свойствах функций двух переменных.***
	10 ноября	***Развитие в СССР математических методов познания природы (дифференциальные и интегральные уравнения и теория вероятностей).***
	22, 28 ноября	***Два заседания, посвященные обсуждению плана составления нового учебника элементарной алгебры*** (совм. с П.С. Александровым).
1938	10 (или 16) марта	***Дискуссия о проекте статьи А.Н. Колмогорова "Математика" для "Большой Советской энциклопедии".***

	22 декабря	***Современные вопросы теоретико-множественной геометрии.*** (Обзорный доклад.)
1939	16 февраля	***О принципах оценки надежности статистических гипотез.*** (Обзорный доклад.)
	22 марта	***Об экстраполируемости стационарных рядов в зависимости от характера их спектра.***
	4 июня	***Стационарные последовательности элементов гильбертова пространства.***
	22 ноября	***К определению стационарности индивидуальной функции.***
1940	22 марта	***Математическое изучение детерминированных и случайных процессов.***
1941	18 марта	***О двух видах аксиоматического метода.*** (Первый обзорный доклад.)
	1 апреля	***О двух видах аксиоматического метода.*** (Второй обзорный доклад.)
	16 апреля	***О мерах, инвариантных по отношению к группе преобразований.***
1942	7 марта	***Об одной вариационной задаче.***
1943	3 ноября	***Доклад на заседании, посвященном памяти Н.И. Лобачевского.***
1944	2 февраля	***Унитарные представления бесконечных групп.***
	3 октября	***Математическая теория турбулентности.***
	31 октября	***Современное состояние теории цепей Маркова и неразрешенные проблемы в этой области.*** (Обзорный доклад.)
	11 декабря	***Проблемы теории вероятностей.***
1945	4 декабря	***Вычислимые последовательности и их значение в исследованиях по основаниям математики.*** (Обзорный доклад.)
1946	7 мая	***Работы П.С. Александрова по теории множеств и теории функций. (В связи с 50-летием со дня рождения.)***
1947	10 июня	***О некоторых новых работах по теории вероятностей.*** (Обзорный доклад.)

	17 июня	***Выступление на заседании, посвященном памяти Алексея Константиновича Власова.***
	9 декабря	***Строение полных метрических алгебр Буля.***
1948	17 февраля	***О проекте программ для средней школы.***
	24 февраля	***Наилучшее приближение комплексных функций.***
	30 марта	***Локальная предельная теорема для цепей Маркова.***
	28 сентября	***О критике Остроградского на работы Лобачевского.***
	30 ноября	***Меры и распределения вероятностей в функциональных пространствах.*** (Обзорный доклад.)
1949	4 октября	***К изложению основ лебеговской теории меры.***
	18 октября	***"Аксиома", "Бесконечно малые" (статьи для нового издания БСЭ).***
	6 декабря	***Основные типы марковских процессов.***
	23 декабря	***Развитие математики в советскую эпоху.***
1951	9 января	***О некоторых математических задачах, связанных с контролем производства.*** (Обзорный доклад.)
	15 мая	***Работы В.В. Степанова по теории функций.***
	27 ноября	***Двузначные функции двузначных переменных и применение их к релейно-контактным схемам.***
1952	20 мая	***Работы Д.Е. Меньшова по теории функций действительного переменного. (В связи с 60-летием со дня рождения.)***
	30 сентября	***О спектрах динамических систем на торе.***
1953	25 февраля	***Научное направление кафедры теории вероятностей.***
	17 марта	***О понятии алгоритма.***
	26 мая	***О почти периодических движениях тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.***
	8 декабря	***Понятие "информация" в математической статистике и в шенноновской теории передачи информации.***

1954	27 апреля	***Оценки минимального числа элементов ε-сетей в различных функциональных классах и их применение к вопросу о представимости функций нескольких переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных.***
	25 мая	***Об устойчивости условно-периодических движений в консервативных динамических системах.***
	28 сентября	***О Международном математическом конгрессе в Амстердаме.***
1955	25 октября	***Несколько слов о поездке в Стокгольм*** (совм. с П. С. Александровым).
1956	28 февраля	***О научной командировке во Францию, ГДР и Польшу.***
	17 апреля	***Представление непрерывных функций многих переменных несколькими непрерывными функциями меньшего числа переменных.***
	29 мая	***"Элементы математики" Николя Бурбаки.***
	5 июня	***О некоторых асимптотических характеристиках вполне ограниченного метрического пространства.***
	18 декабря	***Равномерные предельные теоремы для сумм независимых слагаемых.***
	25 декабря	***О работах Д.Ф. Егорова по теории функций и по интегральным уравнениям. (К 20-летию со дня смерти.)***
1957	2 апреля	***Что такое кибернетика (к проекту статьи в БСЭ).***
	24 сентября	***О представлении непрерывной функции многих переменных при помощи непрерывных функций одной переменной и сложения.***
	17 октября	***О приближенном представлении функций нескольких переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных и ε-энтропии классов функций.***
1958	7 октября	***О подготовке кадров для физико-математических наук и новой техники.***

1959	13 января	***“Малые знаменатели” в задачах механики и анализа.*** (Обзорный доклад.)
	21 апреля	***О некоторых чертах современного этапа развития математики.***
1960	17 мая	***Решенные и нерешенные задачи, связанные с 13-й проблемой Гильберта.***
	16 ноября*	***Замечание к докладу М.С. Пинскера “Об асимптотических свойствах распределений квадратичных функционалов гауссовских случайных процессов”.***
	23 ноября*	***Замечание к докладу В.К. Лезерсона “Современные задачи теории телефонного сообщения”.***
	23 ноября*	***Замечание к докладу Б.А. Севастьянова “Класс предельных законов распределения квадратичных форм от нормальных случайных величин”.***
	30 ноября*	***О некоторых работах Проблемной Лаборатории теории вероятностей и статистических методов.***
	7 декабря	***Экспериментальный метод оценки энтропии речи.***
	13 декабря	***Работы А.Я. Хинчина по теории функций.***
	22 декабря**	***О русском четырехстопном ямбе*** *(совм. с А.В. Прохоровым и Н.Г. Рычковой).*
	27 декабря	***Математические методы исследования русского стиха.*** (Обзорный доклад.)
1961	22 марта*	***Редукция данных с сохранением информации.***
	22 марта*	***О физическом смысле граничных условий для диффузионных процессов.***
	4 апреля	***Что такое “информация”?***
	16 мая	***Оценка трудности определения и вычисления конечных последовательностей и дискретных функций.***

* Звездочкой отмечены доклады и выступления А.Н. Колмогорова на заседаниях *Секции теории вероятностей и математической статистики* Московского математического общества.

** Доклад на совместном заседании Секции теории вероятностей и математической статистики ММО и Семинара по математической лингвистике кафедры математической логики МГУ.

	18 октября*	***Совещание по применению математических методов в изучении языка художественных произведений в г. Горьком.***
	1 ноября*	***Об уточнении теории локально изотропной турбулентности.***
	21 ноября	***Самоконструирующиеся аппараты.***
	6 декабря*	***Об одной задаче Е.Ф. Мищенко и Л.С. Понтрягина.***
	26 декабря	***Работы Н.К. Бари о представлении функций суперпозициями.***
1962	24 октября*	***О таблицах случайных чисел.***
	26 декабря*	***Впечатления о поездке в Индию и Египет.***
1963	13 февраля*	***Предложения о некоторых видах работы Секции теории вероятностей и математической статистики.***
	26 марта	***О равномерных предельных теоремах для сумм независимых слагаемых.***
	24 апреля*	***Мера сложности конечных двоичных последовательностей.***
	25 апреля	***Из опыта работы.***
	28 мая	***Вступительное слово к тематическому заседанию по теории случайных процессов.***
	19 ноября	***Вычислимые функции и основания теории информации и теории вероятностей.***
1964	24 октября	***О влиянии идей теории информации на развитие математики.***
	15 декабря	***Асимптотика сложности конечных отрезков бесконечной последовательности.***
1965	18 мая	***Эксперимент и математическая теория в изучении турбулентности.***
	2 июня*	***Многомерный дискриминационный анализ.***
	7 декабря	***Исчисление финитных задач Ю.Т. Медведева.***
1966	3 марта	***О проекте программы по математике для средней школы.***
	10 мая	***Вступительное слово, посвященное 70-летию П.С. Александрова.***

1967	14 февраля	***О факультативных занятиях по математике в средней школе в 1967/68 учебном году.***
	28 марта	***Логика, интуиционизм, основания математики в работах Л. Брауэра.***
	31 октября	***Несколько теорем об алгоритмической энтропии и алгоритмическом количестве информации.***
	27 декабря*	***Об основаниях теории вероятностей и понятии 'коллектива'.***
1970	24 февраля	***Статистическая гидродинамика океана.***
1971	23 ноября	***Сложность задания и сложность построения математических объектов.***
	14 декабря	***О работах П.Л. Чебышёва по теории вероятностей.***
1972	25 апреля	***О работах Д.Е. Меньшова по теории ортогональных рядов.***
1974	16 апреля	***Сложность алгоритмов и объективное определение случайности.***
1977	15 февраля	***Вступительное слово, посвященное 60-летию со дня рождения Г.Е. Шилова.***
1978	18 января	***Замечания о статистических решениях уравнений Навье–Стокса.***
1983	13 декабря	***Вступительное слово, посвященное 100-летию со дня рождения Н.Н. Лузина.***
1985	2 апреля	***Первая Московская школьная математическая олимпиада.***

IV. Статьи по исследованию русского стихосложения

1. ***Ритмика поэм Маяковского*** // Вопросы языкознания, № 3, 1962; 62–74 (совм. с А.М. Кондратовым).
2. ***К изучению ритмики Маяковского*** // Вопросы языкознания, № 4, 1963; 64–71.
3. ***О дольнике современной русской поэзии (Общая характеристика)*** // Вопросы языкознания, № 6, 1963; 84–95 (совм. с А.В. Прохоровым).
4. ***Статистика и теория вероятностей в исследовании русского стихосложения*** // Симпозиум по комплексному изучению художественного творчества (18–22 февраля 1963 г.): Тезисы и аннотация. — Л.: Наука, 1963; 23 (совм. с А.В. Прохоровым). Перепечатано в кн.: В.А. Успенский. Труды по нематематике. Т. 2. — М.: ОГИ, 2002; 646.
5. ***О дольнике современной русской поэзии (Статистическая характеристика дольника Маяковского, Багрицкого, Ахматовой)*** // Вопросы языкознания, № 1, 1964; 75–94 (совм. с А.В. Прохоровым).
6. ***Замечания по поводу анализа ритма "Стихов о советском паспорте" Маяковского*** // Вопросы языкознания, № 3, 1965; 70–75.
7. ***О метре пушкинских "Песен западных славян"*** // Русская литература, № 1, 1966; 98–111.
8. ***К основам русской классической метрики*** // Содружество наук и тайны творчества / Под ред. Б.С. Мейлаха; Комиссия по взаимосвязям литературы, искусства и науки Союза писателей РСФСР. — М.: Искусство, 1968; 397–432 (совм. с А.В. Прохоровым).
9. ***Пример изучения метра и его метрических вариантов*** // Теория стиха / Отв. ред. В.Е. Холшевников; АН СССР: Ин-т русской литературы (Пушкинский дом). — Л.: Наука, 1968; 145–167.
10. ***Анализ ритмической структуры стихотворения А.С. Пушкина "Арион"*** // Проблемы теории стиха / Отв. ред. В.Е. Холшевников; АН СССР: Ин-т русской литературы (Пушкинский дом). — Л.: Наука, 1984; 118–124.
11. ***Модель ритмического строения русской речи, приспособленная к изучению метрики классического русского стиха*** //

Русское стихосложение. Традиции и проблемы развития / Отв. ред. Л.И. Тимофеев; АН СССР: Ин-т мировой литературы им. А.М. Горького. — М.: Наука, 1985; 113–134 (совм. с А.В. Прохоровым).

12. ***Анализ ритма русского стиха и теория вероятностей.*** [Рукопись 1962 г.] // Теория вероятн. и ее примен., т. 44, вып. 2, 1999; 419–431 (совм. с Н.Г. Рычковой).

13. ***О возможном применении простейших представлений теории информации к исследованию стиха, художественной прозы, техники перевода.*** [Рукопись без даты, текст ранее не публиковался.] // В.А. Успенский. Труды по нематематике. Т. 2. — М.: ОГИ, 2002; 743–745.

V. Работы по педагогике

Учебники и учебные пособия для средней школы

1. ***Алгебра.*** *Пособие для средних школ.* Ч. 1. — М.: Учпедгиз, 1939; 192 с. (совм. с П.С. Александровым).
2. ***Алгебра и начала анализа.*** Учебное пособие для 9 класса средней школы / Под ред. А.Н. Колмогорова. — М.: Просвещение, 1975; 222 с. (совм. с Б.Е. Вейцем, И.Т. Демидовым, О.С. Ивашевым-Мусатовым и С.И. Шварцбурдом). Издано также на белор., молд., укр. яз.
3. ***Алгебра и начала анализа.*** Учебное пособие для 9 класса средней школы / Под ред. А.Н. Колмогорова. 2-е изд., перераб. — М.: Просвещение, 1976; 222 с. (совм. с Б.Е. Вейцем, И.Т. Демидовым, О.С. Ивашевым-Мусатовым и С.И. Шварцбурдом). Издано также на азерб., арм., венг., каз., кирг., латыш., литов., молд., тадж., татар., туркм., узб., уйгур. яз.
4. ***Алгебра и начала анализа.*** *Учебное пособие для 9 класса средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 3-е изд. — М.: Просвещение, 1977; 222 с. (совм. с Б.Е. Вейцем, И.Т. Демидовым, О.С. Ивашевым-Мусатовым и С.И. Шварцбурдом). Издано также на азерб., латыш., литов., польск. яз.
5. ***Алгебра и начала анализа.*** *Учебное пособие для 9 класса средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 4-е изд. — М.: Просвещение, 1978; 222 с. (совм. с Б.Е. Вейцем, И.Т. Демидовым, О.С. Ивашевым-Мусатовым и С.И. Шварцбурдом).
6. ***Алгебра и начала анализа.*** *Учебное пособие для 9 класса средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 5-е изд. — М.: Просвещение, 1979; 222 с. (совм. с Б.Е. Вейцем, И.Т. Демидовым, О.С. Ивашевым-Мусатовым и С.И. Шварцбурдом). Издано также на венг., белор., укр. яз.
7. ***Алгебра и начала анализа.*** *Учебное пособие для 10 класса средней школы.* — М.: Просвещение, 1976; 271 с. (совм. с О.С. Ивашевым-Мусатовым, Б.М. Ивлевым и С.И. Шварцбурдом). Издано также на белор., литов., укр. яз.
8. ***Алгебра и начала анализа.*** *Учебное пособие для 10 класса средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 2-е изд. — М.: Просвещение, 1977; 271 с. (совм. с О.С. Ивашевым-Мусатовым, Б.М. Ивлевым и С.И. Шварцбурдом). Издано также на азерб., арм., венг., груз., каз., каракалп., кирг., литов., молд., польск., тадж., татар., туркм., узб., уйгур. яз.

9. ***Алгебра и начала анализа.*** *Учебное пособие для 10 класса средней школ.* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 3-е изд. — М.: Просвещение, 1978; 271 с. (совм. с О.С. Ивашевым-Мусатовым, Б.М. Ивлевым и С.И. Шварцбурдом). Издано также на польск. яз.
10. ***Алгебра и начала анализа.*** *Учебное пособие для 10 класса средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 4-е изд. — М.: Просвещение, 1979; 271 с. (совм. с О.С. Ивашевым-Мусатовым, Б.М. Ивлевым и С.И. Шварцбурдом).
11. ***Алгебра и начала анализа.*** *Учебное пособие для 10 класса средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 5-е изд. — М.: Просвещение, 1980; 271 с. (совм. с О.С. Ивашевым-Мусатовым, Б.М. Ивлевым и С.И. Шварцбурдом). Издано также на каракалп. яз.
12. ***Алгебра и начала анализа.*** *Учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. — М.: Просвещение, 1980; 335 с. (совм. с. А.М. Абрамовым, Б.Е. Вейцем, О.С. Ивашевым-Мусатовым, Б.М. Ивлевым и С.И. Шварцбурдом). Издано также на белор., польск. яз.
13. ***Алгебра и начала анализа.*** *Учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 2-е изд. — М.: Просвещение, 1981; 335 с. (совм. с А.М. Абрамовым, Б.Е. Вейцем, О.С. Ивашевым-Мусатовым, Б.М. Ивлевым и С.И. Шварцбурдом). Издано также на азерб., арм., белор., груз., каз., кирг., латыш., литов., татар., узб., уйгур., укр. яз.
14. ***Алгебра и начала анализа.*** *Учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 3-е изд. — М.: Просвещение, 1982; 335 с. (совм. с А.М. Абрамовым, Б.Е. Вейцем, О.С. Ивашевым-Мусатовым, Б.М. Ивлевым и С.И. Шварцбурдом). Издано также на белор., венг., польск., тадж. яз.
15. ***Алгебра и начала анализа.*** *Учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы.* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 4-е изд. — М.: Просвещение, 1983 (совм. с А.М. Абрамовым, Б.Е. Вейцем, О.С. Ивашевым-Мусатовым, Б.М. Ивлевым и С.И. Шварцбурдом).
16. ***Алгебра и начала анализа.*** *Учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 5-е изд. — М.: Просвещение, 1985; 335 с. (совм. с А.М. Абрамовым, Б.Е. Вейцем, О.С. Ивашевым-Мусатовым, Б.М. Ивлевым и С.И. Шварцбурдом). Издано также на каракалп. яз.
17. ***Алгебра и начала анализа.*** *Учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 6-е изд. — М.: Просвещение, 1986; 335 с. (совм. с А.М. Абрамовым, Б.Е. Вейцем, О.С. Ивашевым-Мусатовым, Б.М. Ивлевым, С.И. Шварцбурдом). Издано также на укр. яз.

18. ***Алгебра и начала анализа.*** *Учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 7-е изд. — М.: Просвещение, 1987; 335 с. (совм. с А.М. Абрамовым, Б.Е. Вейцем, О.С. Ивашевым-Мусатовым, Б.М. Ивлевым и С.И. Шварцбурдом). Издано также на латыш., литов., туркм. яз.
19. ***Алгебра и начала анализа.*** *Учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 8-е изд. — М.: Просвещение, 1988; 335 с. (совм. с А.М. Абрамовым, Б.Е. Вейцем, О.С. Ивашевым-Мусатовым, Б.М. Ивлевым и С.И. Шварцбурдом). Издано также на арм., белор., груз., каз., кирг., латыш., литов., молд., тадж., узб., укр. яз.
20. ***Algebra i poczatki analizy.*** *Pomoc naukowa dla klas X–XII szkoly sredniej* / Под ред. А.Н. Колмогорова. — Kaunas: Sviesa, 1989; 351 с. (совм. с А.М. Абрамовым, Б.Е. Вейцем, О.С. Ивашевым-Мусатовым, Б.М. Ивлевым и С.И. Шварцбурдом) на польск. яз.
21. ***Алгебра и начала анализа.*** *Учебник для 10 и 11 классов средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. — М.: Просвещение, 1990; 320 с. (совм. с А.М. Абрамовым, Ю.П. Дудницыным, Б.М. Ивлевым и С.И. Шварцбурдом). Издано также на азерб., арм., белор., груз., каз., узб., укр. яз.
22. ***Алгебра и начала анализа.*** *Учебник для 10 и 11 классов средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 2-е изд. — М.: Просвещение, 1991; 320 с. (совм. с А.М. Абрамовым, Ю.П. Дудницыным, Б.М. Ивлевым и С.И. Шварцбурдом). Издано также на белор., груз., молд., каз., кирг., туркм., уйгур., укр. яз.
23. ***Алгебра и начала анализа.*** *Учебник для 10 и 11 классов средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. — Киев: Радянська школа, 1992; 349 с. (совм. с А.М. Абрамовым, Б.М. Ивлевым, Ю.П. Дудницыным и С.И. Шварцбурдом), на укр. яз.
24. ***Алгебра и начала анализа.*** *Учебник для 10 и 11 классов средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 3-е изд. — М.: Просвещение, 1993; 320 с. (совм. с А.М. Абрамовым, Б.М. Ивлевым, Ю.П. Дудницыным и С.И. Шварцбурдом).
25. ***Введение в анализ.*** — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1966; 56 с.
26. ***Введение в теорию вероятностей и комбинаторику*** // Новое в школьной математике / Сост. И. М. Яглом. — М.: Знание, 1972; 181–199. (Народный университет. Естественнонаучный факультет.)
27. ***Введение в теорию вероятностей.*** — М.: Наука, 1982; 159 с. Библиотечка “Квант”, вып. 23. (Совм. с И.Г. Журбенко и А.В. Прохоровым.)
28. ***Введение в теорию вероятностей.*** 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1995; 176 с. (совм. с И.Г. Журбенко и А.В. Прохоровым).

29. ***Геометрия.*** *Пробный учебник для 6 класса* / Под ред. А.Н. Колмогорова. — М.: Просвещение, 1970; 136 с. (совм. с А.Ф. Семеновичем, Ф.Ф. Нагибиным и Р.С. Черкасовым).
30. ***Геометрия. 6 класс.*** *Методическое пособие.* — М.: Просвещение, 1970; 96 с. (совм. с А.Ф. Семеновичем, Ф.Ф. Нагибиным и Р.С. Черкасовым).
31. ***Геометрия для 6 класса.*** *Учебное пособие. (Проект для обсуждения)* / Под ред. А.Н. Колмогорова. — М.: НИИС и МО АПН СССР, МГОНО, МГИУУ, 1971 (совм. с. А.Ф. Семеновичем, Ф.Ф. Нагибиным и Р.С. Черкасовым).
32. ***Геометрия.*** *Учебное пособие для 6 класса средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 2-е изд., перераб. — М.: Просвещение, 1972; 126 с. (совм. с А.Ф. Семеновичем, Ф.Ф. Нагибиным, Р.С. Черкасовым). Издано также на азерб., арм., башк., белор., венг., груз., каз., каракалп., кирг., латыш., лит., молд., тадж., татар., тувин., туркмен., узб., уйгур. яз.
33. ***Геометрия.*** *Учебное пособие для 6 класса средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 3-е изд. — М.: Просвещение, 1973; 126 с. (совм. с А.Ф. Семеновичем, Ф.Ф. Нагибиным и Р.С. Черкасовым). Издано также на азерб., арм., башк., венг., груз., каз., каракалп., кирг., латыш., лит., тадж., тувин., туркмен., узб., уйгур., укр. яз.
34. ***Геометрия.*** *Учебное пособие для 6 класса* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 4-е изд. — М.: Просвещение, 1974; 126 с. (совм. с А.Ф. Семеновичем, Ф.Ф. Нагибиным, Р.С. Черкасовым). Издано также на польск. яз.
35. ***Геометрия.*** *Учебное пособие для 6 класса средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 5-е изд. — М.: Просвещение, 1975; 126 с. (совм. с А.Ф. Семеновичем, Ф.Ф. Нагибиным и Р.С. Черкасовым). Издано также на башк., белор., молд., укр. яз.
36. ***Геометрия.*** *Учебное пособие для 6 класса средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 6-е изд. — М.: Просвещение, 1976; 126 с. (совм. с А.Ф. Семеновичем, Ф.Ф. Нагибиным и Р.С. Черкасовым). Издано также на венг. яз.
37. ***Геометрия.*** *Учебное пособие для 6 класса средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 7-е изд. — М.: Просвещение, 1977; 126 с. (совм. с А.Ф. Семеновичем, Ф.Ф. Нагибиным и Р.С. Черкасовым).
38. ***Геометрия.*** *Учебное пособие для 6 класса средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 8-е изд. — М.: Просвещение, 1978; 128 с. (совм. с А.Ф. Семеновичем, Ф.Ф. Нагибиным и Р.С. Черкасовым). Издано также на литов., польск. яз.
39. ***Геометрия.*** *Учебное пособие для 6 класса средней школы.* — Кишинев: Лумина, 1979; 135 с. (совм. с А.Ф. Семеновичем и Р.С. Черкасовым), на молд. яз.

40. ***Геометрия.*** *Учебное пособие для 6 класса средней школы.* — Ереван: Луйс, 1980; 117 с. (совм. с А.Ф. Семеновичем и Р.С. Черкасовым), на арм. яз.
41. ***Геометрия.*** *Пробный учебник для 7 класса* / Под ред. А.Н. Колмогорова. — М.: Просвещение, 1971; 136 с. (совм. с А.Ф. Семеновичем, Ф.Ф. Нагибиным и Р.С. Черкасовым).
42. ***Геометрия.*** *Пробный учебник для 7 класса.* — Тбилиси, 1972; 208 с. (совм. с А.Ф. Семеновичем, Ф.Ф. Нагибиным и Р.С. Черкасовым), на груз. яз. Издано также на белор. и татар. яз.
43. ***Геометрия.*** *Учебное пособие для 7 класса средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 2-е изд., перераб. — М.: Просвещение, 1973; 174 с. (совм. с А.Ф. Семеновичем, Ф.Ф. Нагибиным и Р.С. Черкасовым). Издано также на белор., молд. и татар. яз.
44. ***Геометрия.*** *Учебное пособие для 7 класса средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 3-е изд. — М.: Просвещение, 1974; 175 с. (совм. с А.Ф. Семеновичем, Ф.Ф. Нагибиным, Р.С. Черкасовым). Издано также на азерб., арм., башк., венг., груз., каз., каракалп., кирг., латыш., литов., молд., польск., тадж., тувин., туркм., узб. яз.
45. ***Геометрия.*** *Учебное пособие для 7 класса средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 4-е изд. — М.: Просвещение, 1975; 175 с. (совм. с А.Ф. Семеновичем, Ф.Ф. Нагибиным и Р.С. Черкасовым). Издано также на кирг., литов., молд., польск., тувинск. яз.
46. ***Геометрия.*** *Учебное пособие для 7 класса средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 5-е изд. — М.: Просвещение, 1976; 158 с. (совм. с А.Ф. Семеновичем, Ф.Ф. Нагибиным и Р.С. Черкасовым). Издано также на латыш., польск. яз.
47. ***Геометрия.*** *Учебное пособие для 7 класса средней школы.* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 6-е изд. — М.: Просвещение, 1977; 158 с. (совм. с А.Ф. Семеновичем, Ф.Ф. Нагибиным и Р.С. Черкасовым). Издано также на венг. яз.
48. ***Геометрия.*** *Учебное пособие для 7 класса средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 7-е изд. — М.: Просвещение, 1978; 158 с. (совм. с А.Ф. Семеновичем, Ф.Ф. Нагибиным и Р.С. Черкасовым).
49. ***Геометрия.*** *Учебное пособие для 7 класса средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 8-е изд. — М.: Просвещение, 1979; 158 с. (совм. с А.Ф. Семеновичем, Ф.Ф. Нагибиным и Р.С. Черкасовым).
50. ***Геометрия.*** *Учебное пособие для 7 класса средней школы.* — Кишинев: Лумина, 1980; 158 с. (совм. с А.Ф. Семеновичем и Р.С. Черкасовым), на молд. яз.
51. ***Геометрия..*** *Пробный учебник для 8 класса* / Под ред. А.Н. Колмогорова. — М.: Просвещение, 1972; 80 с. (совм. с А.Ф. Семеновичем, Р.С. Черкасовым и В.А. Гусевым).

52. ***Геометрия.*** *Учебное пособие для 8 класса средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 2-е изд., перераб. — М.: Просвещение, 1974 (совм. с А.Ф. Семеновичем, Р.С. Черкасовым и В.А. Гусевым). Издано также на белор., молд., татар. яз.
53. ***Геометрия.*** *Учебное пособие для 8 класса средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 3-е изд. — М.: Просвещение, 1975; 111 с. (совм. с А.Ф. Семеновичем, В.А. Гусевым и Р.С. Черкасовым). Издано также на арм., башк., венг., каз., каракалп., кирг., латыш., молд., тадж., туркм., узб., уйгур. яз.
54. ***Геометрия.*** *Учебное пособие для 8 класса средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 4-е изд. — М.: Просвещение, 1976; 111 с. (совм. с А.Ф. Семеновичем, В.А. Гусевым и Р.С. Черкасовым). Издано также на латыш., польск., укр. яз.
55. ***Геометрия.*** *Учебное пособие для 8 класса средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 5-е изд. — М.: Просвещение, 1977; 111 с. (совм. с А.Ф. Семеновичем, В.А. Гусевым и Р.С. Черкасовым). Издано также на латыш., литов., польск. яз.
56. ***Геометрия.*** *Учебное пособие для 8 класса средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 6-е изд. — М.: Просвещение, 1978; 111 с. (совм. с А.Ф. Семеновичем, В.А. Гусевым и Р.С. Черкасовым). Издано также на венг. яз.
57. ***Геометрия.*** *Учебное пособие для 8 класса средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 7-е изд. — М.: Просвещение, 1979; 111 с. (совм. с А.Ф. Семеновичем, В.А. Гусевым и Р.С. Черкасовым).
58. ***Геометрия.*** *Учебное пособие для 8 класса средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 8-е изд. — М.: Просвещение, 1980; 111 с. (совм. с А.Ф. Семеновичем, В.А. Гусевым и Р.С. Черкасовым). Издано также на узб. яз.
59. ***Геометрия.*** *Учебное пособие для 6—8 классов средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. — М.: Просвещение, 1979; 382 с. (совм. с А.Ф. Семеновичем и Р.С. Черкасовым). Издано также на венг., белор., укр. яз.
60. ***Геометрия.*** *Учебное пособие для 6—8 классов средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 2-е изд. — М.: Просвещение, 1980; 382 с. (совм. с А.Ф. Семеновичем и Р.С. Черкасовым). Издано также на башк., венг., груз., каз., кирг., латыш., литов., польск., тадж., татар., туркм., узб. яз.
61. ***Геометрия.*** *Учебное пособие для 6—8 классов средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 3-е изд., дораб. — М.: Просвещение, 1981; 383 с. (совм. с А.Ф. Семеновичем и Р.С. Черкасовым). Издано также на азерб., арм., литов., молд., тувин., уйгур. яз.

62. ***Геометрия***. *Учебное пособие для 6—8 классов средней школы* / Под ред. А.Н. Колмогорова. 4-е изд., дораб. — М.: Просвещение, 1982; 383 с. (совм. с А.Ф. Семеновичем и Р.С. Черкасовым).
63. ***Geometria.*** *Pomoc. naukowa dla klas VIII—IX szkoly sredniej* / Под ред. А.Н. Колмогорова. — Kaunas: Sviesa, 1980; 116 с. (совм. с А.Ф. Семеновичем, В.А. Гусевым и Р.С. Черкасовым), на польск. яз.
64. ***Курс математики для физико-математических школ.*** Вып. 1 / Физико-математическая школа-интернат при МГУ. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1971, 224 с. (совм. с В.А. Гусевым, А.Б. Сосинским и А.А. Шершевским).

Статьи в журнале "Математика в школе"

65. ***Свойства неравенств и понятие о приближенных вычислениях*** // № 2, 1941; 1—12 (совм. с П.С. Александровым).
66. ***Иррациональные числа*** // № 3, 1941; 1—15 (совм. с П. С. Александровым).
67. [***Реферат доклада на совещании по проблемам математического образования в средней школе (25 июня 1964 г.)***] // № 6, 1964; 90—91.
68. ***Объем знаний по математике для восьмилетней школы (От Комиссии по математическому образованию математического отделения АН СССР)*** // № 2, 1965; 21—24 (совм. с И.М. Гельфандом, А.И. Маркушевичем, А.Д. Мышкисом, Д.К. Фаддеевым, И.М. Ягломом).
69. ***Геометрические преобразования в школьном курсе геометрии*** // № 2, 1965; 24—29.
70. ***О содержании школьного курса математики.*** [Замечания и разъяснения к [68].] // № 4, 1965; 53—62 (совм. с И.М. Ягломом).
71. ***Функции, графики, непрерывные функции. Предел функции. Производная.*** [Главы из пособия.] // № 6, 1965; 12—21.
72. ***О школьном определении тождества*** // № 2, 1966; 33—35.
73. ***Об учебниках на 1966/67 учебный год*** // № 3, 1966; 26—30.
74. [***Предисловие к статье С.Б. Суворовой "Об опыте раннего введения начал дифференциального исчисления в девятых классах"***] // № 4, 1966; 23.
75. ***Об учебниках на 1966/67 учебный год.*** [Продолжение [73].] // № 6, 1966; 31—37.
76. ***Проект программы средней школы по математике*** // № 1, 1967; 4—23 (совм. с А.И. Маркушевичем и И.М. Ягломом).

77. ***Об учебниках на 1966/67 учебный год.*** ["Алгебра и элементарные функции" Е.С. Кочеткова и Е.С. Кочетковой, ч. II.] // № 1, 1967; 43–48.
78. ***Факультативные занятия по математике*** // № 2, 1967; 2–3 (колл. авторов).
79. ***Новые программы и некоторые основные вопросы усовершенствования курса математики в средней школе*** // № 2, 1967; 4–13.
80. ***Содержание факультативных занятий по математике в 1967/68 и 1968/69 учебных годах*** // № 2, 1967; 33–38 (колл. авторов).
81. ***Программы специальных курсов по математике*** // № 3, 1967, 73–75 (колл. авторов).
82. ***Программы специальных курсов по математике.*** [Продолжение [81].] // № 4, 1967, 58–59 (колл. авторов).
83. ***К изменениям в тексте учебника алгебры для VI–VIII классов А.Н. Барсукова*** // № 6, 1967; 22–24.
84. ***Обобщение понятия степени и показательная функция.*** [В разделе "Примерное изложение некоторых вопросов новой программы".] // № 1, 1968; 24–32.
85. ***Программа по математике для средней школы*** // № 2, 1968; 5–20 (колл. авторов).
86. ***К новым программам по математике*** // № 2, 1968; 21–22.
87. ***К изучению показательной функции и логарифмов в восьмилетней школе*** // № 2, 1968; 23–25.
88. ***Введение в теорию вероятностей и комбинаторику.*** [В разделе "Материалы для факультативных занятий".] // № 2, 1968; 63–72. Перепечатано с незначительными сокр. в [$Б_{VII}$-14], с. 174–190.
89. ***Дополнение к рецензии Ю.А. Шихановича*** // № 3, 1968; 92. (Рецензию Ю.А. Шихановича "О работах А.А. Столяра" см. там же, с. 90–92.)
90. ***Письмо в редакцию.*** [*По поводу статьи Б.Е. Вейца* "Элементы теории вероятностей и комбинаторика".] // № 2, 1969; 93. (Статью Б.Е. Вейца см. в № 6 за 1968 г.)
91. ***Научные основы школьного курса математики. Первая лекция: Современные взгляды на природу математики*** // № 3, 1969; 12–17. Перепеч. в [$Б_{VII}$-14], с. 227–237.
92. ***Научные основы школьного курса математики. Вторая лекция: Натуральные числа*** // № 5, 1969; 8–17. Продолжение [91]. Перепеч. в [$Б_{VII}$-14], с. 237–255.
93. ***Научные основы школьного курса математики. Третья лекция: Обобщение понятия числа. Неотрицательные рациональные числа*** // № 2, 1970; 27–32. Продолжение [91], [92]. Перепеч. в [$Б_{VII}$-14], с. 255–267.

94. ***О пробном учебнике геометрии для VI класса*** // № 4, 1970; 21–34 (совм. с А.Ф. Семеновичем).
95. ***Учебные материалы по геометрии для V класса (по новым программам)*** // № 5, 1970; 30–45 (совм. с А.Ф. Семеновичем и Р.С. Черкасовым).
96. ***О системе основных понятий и обозначений для школьного курса математики.*** [*Краткое содержание доклада, прочитанного на заседании комиссии по математике при Ученом методическом совете Министерства просвещения СССР 11 января 1971 г.*] // № 2, 1971; 17–22.
97. ***Из пробного учебника геометрии для VII класса*** // № 3, 1971; 9–17 (совм. с А.Ф. Семеновичем, Ф.Ф. Нагибиным и Р.С. Черкасовым).
98. ***Элементы логики в современном курсе школьной математики.*** (*В комиссии по математике при Ученом методическом совете Министерства просвещения СССР.*) [*Реферат доклада.*] // № 3, 1971; 91–92.
99. ***О новом издании пробного учебника геометрии для VI класса.*** [§1 пробного учебника.] // № 4, 1971; 23–35 (совм. с А.Ф. Семеновичем, Ф.Ф. Нагибиным и Р.С. Черкасовым).
100. ***О новом издании пробного учебника геометрии для VI класса.*** [§2 пробного учебника.] // № 5, 1971; 25–38 (совм. с А.Ф. Семеновичем, Ф.Ф. Нагибиным и Р.С. Черкасовым). Продолжение [99].
101. ***Современная математика и математика в современной школе*** // № 6, 1971; 2–3.
102. ***Из нового учебного пособия по геометрии для VI класса (Геометрические построения).*** [§3 пробного учебника.] // № 6, 1971; 13–21 (совм. с А.Ф. Семеновичем, Ф.Ф. Нагибиным и Р.С. Черкасовым). Продолжение [99], [100].
103. ***Из нового учебного пособия по геометрии для VI класса*** // № 1, 1972; 22–31 (совм. с А.Ф. Семеновичем, Ф.Ф. Нагибиным и Р.С. Черкасовым). Продолжение [99], [100], [102].
104. ***Борис Владимирович Гнеденко (к 60-летию со дня рождения)*** // № 1, 1972; 85–86 (совм. с Р.С. Черкасовым).
105. ***По поводу письма Н.Я. Виленкина*** // № 6, 1972; 34–35. (Письмо Н.Я. Виленкина “Равенство или конгруэнтность?” см. в том же номере, с. 33–34.)
106. ***К методике изучения темы “Параллельность и параллельный перенос” в курсе геометрии VI класса*** // № 1, 1973; 24–29 (совм. с А.Ф. Семеновичем и Р.С. Черкасовым).
107. ***О структуре нового учебника по геометрии для VII класса*** // № 2, 1973; 17–29 (совм. с А.Ф. Семеновичем и Р.С. Черкасовым).

108. ***Иван Георгиевич Петровский*** [*Некролог*] // № 4, 1973; 81–86 (совм. с П. С. Александровым и О. А. Олейник).
109. ***Методические замечания к пробному учебнику IX класса "Алгебра и начала анализа"*** // № 5, 1973; 64 (совм. с Б.Е. Вейцем и И.Т. Демидовым).
110. ***Школа-интернат при университете. Для чего она?*** [В разделе "10 лет физико-математической школе при МГУ".] // № 2, 1974; 58–60.
111. ***Анна Максимилиановна Фишер*** [*Некролог*] // № 2, 1974; 87 (совм. с А.Ф. Семеновичем).
112. ***Алгебра и начала анализа. Метод математической индукции*** // № 1, 1975; 8–14 (совм. с С.И. Шварцбурдом).
113. ***Элементы комбинаторики*** // № 2, 1975; 16–25. Продолжение [112].
114. ***Действительные числа, бесконечные последовательности и их пределы*** // № 2, 1975; 25–35 (совм. с О.С. Ивашевым-Мусатовым).
115. ***Тригонометрические функции, их графики и производные в учебном пособии для X класса*** // № 1, 1976; 11–25 (совм. с С.И. Шварцбурдом).
116. ***XXXVIII Московская математическая олимпиада*** [февраль–март 1975 г.] // № 4, 1976, 68–72 (совм. с Г.А. Гальпериным).
117. ***Интеграл в учебном пособии для X класса*** // № 6, 1976, 15–17.
118. ***Что такое функция?*** [*В связи со статьей Г.В. Дорофеева "Понятие функции в математике и в школе"*] // № 2, 1978; 27–29. (Статью Г.В. Дорофеева см. в том же номере, с. 10–27.)
119. ***О воспитании на уроках математики и физики диалектико-материалистического мировоззрения.*** [*Доклад на IV пленуме Ученого методического совета Министерства просвещения СССР, декабрь 1977 г.*] // № 3, 1978; 6–9. Перепеч. в [$Б_{VII}$-14], с. 270–275.
120. ***Проект программы по математике для восьмилетней и средней школы*** // № 4, 1978; 7–32 (колл. авторов).
121. ***Сергей Львович Соболев (к 70-летию со дня рождения)*** // № 6, 1978; 67–73 (совм. с О.А. Олейник).
122. ***Новые программы французской средней школы*** // № 6, 1978; 74–78 (совм. с А.М. Абрамовым).
123. ***Об учебном пособии "Геометрия 6–8"*** // № 3, 1979; 38–42 (совм. с Р.С. Черкасовым и А.Ф. Семеновичем).
124. ***Алексей Иванович Маркушевич*** [*Некролог*] // № 5, 1979; 77–78 (совм. с Б. В. Гнеденко, В. Д. Белоусовым, В. Г. Болтянским и др.).

125. ***Показательная и логарифмическая функции*** // № 6, 1979; 22–27 (совм. с А.М. Абрамовым, О.С. Ивашевым-Мусатовым, Б.М. Ивлевым и С.И. Шварцбурдом).
126. ***Об учебном пособии "Алгебра и начала анализа 9–10"*** // № 4, 1980; 18–21 (совм. с А.М. Абрамовым, О.С. Ивашевым-Мусатовым, Б.М. Ивлевым и С.И. Шварцбурдом).
127. ***Изабелла Григорьевна Башмакова*** [к 60-летию со дня рождения] // № 1, 1981, 73–74 (совм. с П. С. Александровым, Б. В. Гнеденко, С. С. Демидовым и др.).
128. ***О понятии вектора в курсе средней школы*** // № 3, 1981; 7–8.
129. ***К вопросу о проведении первых уроков по теме "Векторы"*** // № 3, 1981, 8–11 (совм. с А.М. Абрамовым).
130. ***Борис Владимирович Гнеденко (к 70-летию со дня рождения)*** // № 1, 1982; 72–73 (совм. с Р.С. Черкасовым).
131. ***Леонид Витальевич Канторович (к 70-летию со дня рождения)*** // № 2, 1982; 77–78 (совм. с В.А. Залгаллером). Перепечатано в сб.: "Очерки истории информатики в России" / Ред.-сост. Д.А. Поспелов и Я.И. Фет. — Новосибирск: Научно-издат. центр ОИГГМ СО РАН, 1998; 512–515.
132. ***О понятии предела в общеобразовательной школе*** // № 5, 1982; 56.
133. ***Ньютон и современное математическое мышление*** // № 5, 1982; 58–64. Перепеч. из [$Б_{VI}$-17].
134. ***Павел Сергеевич Александров*** [*Некролог*] // № 1, 1983; 47–48 (совм. с Б.В. Гнеденко). Перепеч. в [$Б_{VI}$-91], с. 125–130.
135. ***Об учебном пособии "Геометрия 6–10" А.В. Погорелова*** // № 2, 1983; 45–46.
136. ***Замечания о понятии множества в школьном курсе математики*** // № 1, 1984; 52–53.
137. ***С.Л. Соболев и современная математика (к 75-летию со дня рождения)*** // № 1, 1984; 73–77 (совм. с О.А. Олейник).
138. ***О скалярных величинах*** // № 3, 1986; 32–33.
139. ***Борис Владимирович Гнеденко*** [к 75-летию со дня рождения] // № 2, 1987; 62–63 (совм. с И.Г. Башмаковой, Ю.К. Беляевым, С.С. Петровой и др.).
140. ***К обсуждению работы по проблеме "Перспективы развития советской школы на ближайшие 30 лет".*** [*Отзыв на проект плана развития советской школы, разработанный АПН СССР в конце 60-х – начале 70-х гг.*] // № 5, 1990; 59–61. (Публ. А.М. Абрамова и Р.С. Черкасова.) Перепечатано в сб.: Математика в образовании и воспитании / Сост. В.Б. Филиппов. — М.: ФАЗИС, 2000; 129–139.

141. ***О работе вузов со школами.*** [*Изложение доклада на совещании зав. кафедрами математики и методики математики, январь 1963 г.*] // № 2, 1995; 46–48.
142. ***Павел Сергеевич Александров (к 100-летию со дня рождения)*** // № 2, 1996; 2–4 (совм. с Б.В. Гнеденко).

См. также [212].

Статьи в журнале "Квант"

143. ***Что такое функция*** // № 1, 1970; 27–36, 62. Перепеч. в [158], а также в [$Б_{VII}$-14], с. 67–79.
144. ***Задача М3*** // № 1, 1970; 52–53.
145. ***Физико-математические школы-интернаты*** // № 1, 1970; 58–59 (совм. с В.А. Гусевым, А.А. Егоровым и Е.Л. Сурковым).
146. ***Что такое график функции*** // № 2, 1970; 3–13, 62.
147. ***Паркеты из правильных многоугольников*** // № 3, 1970; 24–27.
148. ***О решении десятой проблемы Гильберта*** // № 7, 1970; 39–44 (совм. с Ф.П. Варпаховским).
149. ***Полулогарифмическая и логарифмическая сетки*** // № 3, 1973; 2–7.
150. ***О профессии математика.*** [Выдержки из [$Б_{VI}$-39, 2-е изд.].] // № 4, 1973; 12–18 (публикация М. Смолянского и Т. Киселевой).
151. ***Решето Эратосфена*** // № 1, 1974; 77.
152. ***Группы преобразований*** // № 10, 1976; 2–5.
153. ***Физико-математическая школа-интернат при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова*** // № 1, 1977; 56–57 (совм. с В.В. Вавиловым).
154. ***ФМШ при МГУ — 15 лет*** // № 1, 1979; 55–57 (совм. с В.В. Вавиловым и И.Т. Тропиным).
155. ***Диалектико-материалистическое мировоззрение в школьных курсах математик и физики.*** [*Текст доклада на IV пленуме Ученого методического совета Министерства просвещения СССР*] // № 4, 1980; 15–18.
156. ***Решето Эратосфена*** // № 3, 1984; 35.
157. ***Паркеты из правильных многоугольников***. [Перепеч. статьи [147].] // № 8,1986; 3–4, 7.
158. ***Что такое функция*** [Перепеч. статьи [143].] // № 9/10, 1993; 3–12.
159. ***Путь в математику открыт*** // № 9/10, 1993; 60–61. (Перепеч. из газеты "Московский университет" от 8.04.1975.)

См. также [198], [203], [$Б_2$-6].

Другие работы по педагогике

160. ***Пробные учебники математики (алгебра, ч. I)*** // Учительская газета, 23.04.1941 (совм. с П.С. Александровым).
161. ***К обоснованию теории вещественных чисел*** // Матем. просвещение, вып. 2, 1957; 169–171.
162. ***Школа и подготовка научных кадров. (К обсуждению тезисов ЦК КПСС о школе.)*** // Труд, 10.12.1958.
163. ***Юношеские математические школы*** // Вестник высшей школы, № 11, 1959; 66–69 (совм. с И.М. Ягломом).
164. ***Свойства неравенств и понятие о приближенных вычислениях. Иррациональные числа*** // Вопросы преподавания математики в средней школе. — М.: Учпедгиз, 1961 (совм. с П.С. Александровым).
165. ***Физико-математическая школа*** // Учительская газета, 11.02.1964.
166. ***Натуральные числа и положительные скалярные величины*** // Математическая школа. Лекции и задачи, вып. IV–V. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1965; 19–35.
167. ***Одна проблема из теории кривых*** // Математическая школа. Лекции и задачи. Вып. VIII. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1966; 35.
168. ***Замысел "стохастической теории обучения" у Н.А. Романова*** // Природа, № 7, 1966; 88–89.
169. ***Знания, навыки, способности и конкурсные экзамены. (О подготовке учащихся физико-математических школ.)*** // Литературная газета, 11.01.1967.
170. ***Обновление школьного курса математики*** // Учительская газета, 14.02.1967.
171. ***Пожелания к пятилетию ФМШ при МГУ*** // Московский университет, 4.12.1968.
172. ***Новое в школьной математике*** // Наука и жизнь, № 3, 1969; 62–66.
173. ***Летняя школа на Рубском озере.*** [Из опыта работы летней физико-математической школы.] — М.: Просвещение, 1971; 160 с. (совм. с И.Г. Журбенко, Г.В. Пуховой, О.С. Смирновой и С.В. Смирновым).
174. ***Таланты требуют внимания (ФМШ при МГУ)*** // Московский комсомолец, 22.10.1971.
175. ***Как растят таланты. (О работе ФМШ при МГУ.)*** // Учительская газета, 28.10.1971.
176. ***Школа решает основную свою задачу*** // Московский комсомолец, 14.12.1971.
177. ***Согласование преподавания математики и физики*** // Всесоюзная научно-практическая конференция по проблеме учебно-воспи-

тательной работы в школах и классах с углубленным изучением отдельных предметов: Тезисы докладов. — М.: НИИ СиМО АПН СССР, 1972. Ротапринт.
178. ***Научный руководитель.*** [Воспоминания о П.С. Урысоне.] // Л. Нейман. Радость открытия. — М.: Детская литература, 1972; 160—164. Перепеч. в [$Б_{VII}$-14], с. 10—14.
179. ***Радость научного поиска*** // Смена, № 116, 1972; 14.
180. ***Учителя не заменить. (Как выработать у школьников активный интерес к знаниям.)*** // Комсомольская правда, 19.01.1972.
181. ***Воспитывать наглядное мышление (О новой программе по математике)*** // Учительская газета, 22.08.1972.
182. ***От старой к новой геометрии. (О новом курсе геометрии.)*** // Учительская газета, 21.12.1972.
183. ***Школа-интернат при университете. Для чего она?*** // Московский университет, 30.11.1973.
184. ***Научные основы школьного курса математики.*** — М.: Просвещение, 1973; 8 с. (Программы педагогических институтов.)
185. ***Материалы для обсуждения в Комиссии по школьной терминологии и обозначениям УМС МП СССР. —*** М.: 1973; 3 с. Ротапринт.
186. ***Заботясь о достойном пополнении*** // Вестник высшей школы, № 6, 1974; 26—33 (совм. с И.Т. Тропиным и К. В. Чернышевым).
187. ***Диалог о математике. (Диалог академика А.Н. Колмогорова и учителя 317 школы г. Москвы В.А. Садчикова.)*** // Учительская газета, 12.01.1974.
188. ***Новые программы: специализированные школы*** // Математическое образование сегодня. — М.: Просвещение, 1975; 5—12.
189. ***Некоторые соображения о структуре учебников математики*** // Проблемы школьного учебника. Вып. 3. — М.: Просвещение, 1975; 14—17.
190. ***Как я стал математиком. Что такое математика*** // Союз, рождающий чудеса. — М.: Знание, 1978; 5—10. (Народный университет. Факультет “Наука в твоей профессии”. № 11/78.)
191. ***О формировании диалектико-материалистического мировоззрения на уроках математики и физики*** // Роль учебной литературы в формировании мировоззрения школьников. — М.: Педагогика, 1978; 69—74.
192. ***Физико-математическая школа при МГУ*** // Новое в жизни, науке, технике, сер. “Математика, кибернетика” — М.: Знание, 1981; № 5, 3—7 (колл. авторов, предисл. Б.В. Гнеденко).
193. ***Каким быть X–XI классам? (Коллективное письмо девяти академиков с предложением к проекту реформы школы.)*** //

Известия, 26.01.1984 (совм. с Б.В. Гнеденко, Н.П. Дубининым, И.К. Кикоиным и др.).

194. ***Что дает и мог бы дать "Квант" учителю математики*** // Учительская газета, 22.01.1985. Перепеч. в [$Б_{VII}$-14], с. 267–270.

Работы редакционно-издательского характера по педагогике

195. ***Ред. и предисловие к кн.:*** *А. Лебег. Об измерении величин* / Пер. с франц. — М.: Учпедгиз, 1938 (предисловие на с. 3–12). 2-е изд.: 1960; 7–16.

196. ***Предисловие к кн.:*** *Н.Б. Васильев, А.А. Егоров. Сборник подготовительных задач к Всероссийской олимпиаде юных математиков.* — М.: Учпедгиз, 1963. Перепеч. с сокр. в [$Б_{VII}$-14], с. 63.

197. ***Ред.:*** *Б.Е. Вейц, И.Т. Демидов. Алгебра и начала анализ, 9 класс. Пробный учебник.* — М.: Просвещение, 1969; 264 с.

198. ***Предисловие к статье:*** *В.Г. Болтянский, Н.Х. Розов. Ленинская теория познания и математические понятия* // Квант, № 7, 1970; 2. Перепеч. в [$Б_{VIII}$-14], с. 66.

199. ***Ред.:*** *Б.Е. Вейц, И.Т. Демидов. Алгебра и начала анализа, 10 класс. Пробный учебник.* — М. Просвещение, 1971; 205 с.

200. ***Ред.:*** *В.А. Гусев, Г. Г. Маслова, Ф.Ф. Нагибин и др. Геометрия в VI классе. Методическое пособие (в помощь учителю).* — М.: Просвещение, 1972; 126 с.

201. ***Ред.:*** *В. А. Гусев, Г. Г. Маслова, А.Ф. Семенович, Р.С. Черкасов. Геометрия в VIII классе. Методическое пособие к учебнику "Геометрия".* — М.: Просвещение, 1972; 57 с.

202. ***Ред.:*** *В. А. Гусев, Г. Г. Маслова, А.Ф. Семенович, Р.С. Черкасов. Геометрия в VIII классе. Методическое пособие к учебнику "Геометрия".* — Таллин, 1973; 66 с.

203. ***Рецензия:*** Полезная книга. [Рецензия на книгу *О.С. Ивашева-Мусатова "Начала математического анализа".*] // Квант, № 11, 1973; 74.

204. ***Ред.:*** *В. А. Гусев, Г. Г. Маслова и др. Геометрия в 6 классе. Методическое пособие (в помощь учителю).* — Ереван: Луйс, 1973; 159 с., на арм. яз. Издано также на груз., белор., каз., латыш., литов., молд., тадж., туркм., укр. яз.

205. ***Ред.:*** *Б.Е. Вейц, И.Т. Демидов. Алгебра и начала анализа. Пробный учебник для 9 класса.* 2-е изд., перераб. — М.: Просвещение, 1973; 304 с.

206. ***Ред.:*** *В. А. Гусев, Г. Г. Маслова, Ф.Ф. Нагибин и др. Геометрия в VII классе. Методическое пособие для учителей.* — М.: Просвещение, 1973; 174 с.
207. ***Ред.:*** *Б.Е. Вейц, И.Т. Демидов. Алгебра и начала анализа. Пробный учебник для 10 класса.* 2-е изд., перераб. — М.: Просвещение, 1974; 190 с.
208. ***Ред.:*** *В. А. Гусев, Г. Г. Маслова, А.Ф. Семенович, Р.С. Черкасов. Геометрия в VIII классе. Пособие для учителей.* — М.: Просвещение, 1974; 159 с.
209. ***Предисловие к статье:*** *Г. Шилов, В. Берман. Над "балдой" стоит подумать* // Наука и жизнь, № 5, 1976; 138.
210. ***Ред.:*** *В. А. Гусев, Г. Г. Маслова и др. Геометрия в 6 классе (в помощь учителю).* — Алма-Ата: Мектеп, 1976; 159 с., на каз. яз.
211. ***Ред.:*** *В. А. Гусев, Г. Г. Маслова и др. Геометрия в 6 классе (в помощь учителю).* 2-е изд. — Алма-Ата: Мектеп, 1979; 159 с., на каз. яз.
212. ***Рецензия*** *на книгу Л.С. Понтрягина "Анализ бесконечно малых"* // Математика в школе, № 5, 1981; 73—74.
213. ***Предисловие к кн.:*** *Г. Штейнгауз. Математический калейдоскоп* / Пер. с польск. — М.: Наука, 1981. Библиотечка "Квант", вып. 8. Предисловие на с. 3—4. Перепеч. с сокр. в [$Б_{VIII}$-14], с. 62—63.
214. ***Ред. колл. в кн.:*** *Энциклопедический словарь юного математика* / Гл. ред. Б.В. Гнеденко, сост. А. П. Савин. — М.: Педагогика, 1985; 352 с. — 2-е изд., испр. и доп.: 1989; 348 с. — 3-е изд.: 1996; 348 с.
215. ***Ред. и предисловие к кн:*** *Г.А. Гальперин., А. К. Толпыго. Московские математические олимпиады.* — М.: Просвещение, 1986. (Предисловие на с. 3—4.) Предисловие перепеч. с сокр. в [$Б_{VIII}$-14], с. 64—66.

VI. Статьи о математике и математиках

1. ***Современные споры о природе математики*** // Научное слово, № 6, 1929; 41–54.
2. ***Теория функций действительного переменного*** // Наука в СССР за 15 лет (1917–1932). Математика. — М.–Л.: ГТТИ, 1932; 37–48.
3. ***О некоторых новых течениях в теории вероятностей:*** Тезисы доклада // Бюлл. 2-го Всесоюзного съезда математиков, Ленинград, 24–30 июня 1934 г. — Л.: Изд-во АН СССР, 1934; 8.
4. ***Современная математика*** // Фронт науки и техники, № 5/6, 1934; 25–28.
5. ***Институт математики и механики Московского государственного университета*** // Фронт науки и техники, № 5/6, 1934; 75–78.
6. ***Второй Всесоюзный математический съезд*** // Социалистическая реконструкция и наука, № 7, 1934; 142–145.
7. ***О некоторых современных течениях в теории вероятностей*** // Труды 2-го Всесоюзного математического съезда, Ленинград, 24–30 июня 1934 г. Т. I: Пленарные заседания и обзорные доклады. — Л.–М.: Изд-во АН СССР, 1935; 349–358.
8. ***Современная математика*** // Сборник статей по философии математики / Под ред. С.А. Яновской. — М.: Учпедгиз, 1936; 7–13.
9. ***Теория и практика в математике*** // Фронт науки и техники, № 5, 1936; 39–42.
10. ***Теория вероятностей и ее применения*** // Математика и естествознание в СССР. Очерки развития математических и естественных наук за 20 лет. — М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1938; 51–61.
11. ***Об отделе информации в первом выпуске "Успехов математических наук"*** // УМН, вып. 4, 1938; 326–327.
12. ***Одно замечание по поводу оснований геометрии. (К вопросу о необходимости нового перевода "Оснований геометрии" Д. Гильберта.)*** // УМН, вып. 4, 1938; 347–348.
13. ***От редакции.*** [Предисловие к циклу статей по теории случайных процессов.] // УМН, вып. 5, 1938; 3–4.
14. ***К шестидесятилетию Сергея Натановича Бернштейна*** // Изв. АН СССР, сер. матем., т. 4, 1940; 249–260 (совм. с В.Л. Гончаровым).
15. ***Валерий Иванович Гливенко (1897–1940)*** [*Некролог*] // УМН, вып. 8, 1940; 379–383.
16. ***Лобачевский и математическое мышление девятнадцатого века*** // Николай Иванович Лобачевский (1793–1843). — М.–Л.: Гостехиздат, 1943; 87–100. Перепеч. в [91], с. 112–124.

17. ***Ньютон и современное математическое мышление*** // Московский университет — памяти Исаака Ньютона (1643–1943). — М.: Изд во Моск. ун-та, 1946; 27–43. Перепеч. в [$Б_V$-133], а также в [$Б_{VI}$-91], с. 92–111.
18. ***Развитие математики в СССР*** // БСЭ, том “СССР”. — М.: Сов. энциклопедия, 1947; 1318–1323.
19. ***Роль русской науки в развитии теории вероятностей*** // Роль русской науки в развитии мировой науки и культуры. Т. I, кн. 1. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1947; 53–64. (Учен. зап. Моск. ун-та, вып. 91.)
20. ***Евгений Евгениевич Слуцкий*** [*Некролог*] // УМН, т. 3, вып. 4, 1948; 143–151.
21. ***Теория вероятностей*** // Математика в СССР за 30 лет (1917–1947). — М.–Л.: Гостехиздат, 1948; 701–727 (совм. с Б.В. Гнеденко).
22. ***Основные задачи теоретической статистики.*** [*Резюме доклада.*] // Труды Второго Всесоюзного совещания по математической статистике, Ташкент, 27 сентября – 2 октября 1948 г. — Ташкент: Изд-во АН УзССР, 1949; 216–220.
23. ***Реальный смысл результатов дисперсионного анализа*** // Труды Второго Всесоюзного совещания по математической статистике, Ташкент, 27 сентября – 2 октября 1948 г. — Ташкент: Изд-во АН УзССР, 1949; 240–268.
24. ***Научная сессия отдела теории вероятностей Математического института АН СССР и кафедры теории вероятностей Московского государственного университета*** // УМН, т. 4, вып. 4, 1949; 189–190.
25. ***Лазарь Аронович Люстерник (к 50-летию со дня рождения)*** // УМН, т. 5, вып. 1, 1950; 234–235.
26. ***Иван Георгиевич Петровский (к 50-летию со дня рождения)*** // УМН, т. 6, вып. 3, 1951; 160–164 (совм. с П. С. Александровым).
27. ***Работы И.М. Гельфанда по алгебраическим вопросам функционального анализа*** // УМН, т. 6, вып. 4, 1951; 184–186.
28. ***Работы Н.В. Смирнова по изучению свойств вариационного ряда к непараметрическим задачам математической статистики*** // УМН, т. 6, вып. 4, 1951; 190–192 (совм. с А.Я. Хинчиным).
29. ***О профессии математика. (В помощь поступающим в вузы.)*** — М.: Советская наука, 1952; 22 с. — 2-е изд., доп., без подзаголовка. — М.: Советская наука, 1954, 31 с. — 3-е изд.: [39].
30. ***O matematyce.*** — Warszawa, Państw. wyd-wo naukowe, 1955; 106 с. Пер. на польск. яз. статьи “Математика” из БСЭ-2, т. 26.

31. ***Сергей Михайлович Никольский (к 50-летию со дня рождения)*** // УМН, т. 11, вып. 2, 1956; 239–244 (совм. с С.Б. Стечкиным).
32. ***Теория вероятностей*** // Математика, ее содержание, методы и значение. Т. II. — М.: Изд-во АН СССР, 1956; 252–284. Пер. на англ. яз.: [$Б_I$-174].
33. ***Марк Григорьевич Крейн (к 50-летию со дня рождения)*** // УМН, т. 13, вып. 3, 1958; 213–224 (совм. с М.А. Красносельским).
34. ***Теория вероятностей*** // Математика в СССР за 40 лет (1917–1957). Т. I: Обзорные статьи. — М.: Физматгиз, 1959; 781–795.
35. ***Встречи с Отто Юльевичем*** // Отто Юльевич Шмидт: Жизнь и деятельность / Отв. ред. П.С. Александров, ред.-сост. Я.Б. Коган. — М.: Изд-во АН СССР, 1959; 184–185.
36. ***О работах С.Н. Бернштейна по теории вероятностей (К 80-летию со дня рождения)*** // Теория вероятн. и ее примен., т. 5, вып. 2, 1960; 215–221 (совм. с О.В. Сармановым).
37. ***О работах Н. В. Смирнова по математической статистике (К 60-летию со дня рождения)*** // Теория вероятн. и ее примен., т. 5, вып. 4, 1960; 436–440 (совм. с Б.В. Гнеденко, Ю.В. Прохоровым, О.В. Сармановым).
38. ***Александр Яковлевич Хинчин*** [*Некролог*] // УМН, т. 15, вып. 4, 1960; 97–110 (совм. с Б.В. Гнеденко).
39. ***О профессии математика.*** 3-е изд., доп. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1959; 29 с. Перепеч. в [$Б_{VII}$-14], с. 22–41, и в сокр. виде в [$Б_V$-150]
40. ***Борис Владимирович Гнеденко (к 50-летию со дня рождения)*** // УМН, т. 17, № 4, 1962; 191–200 (совм. с И.И. Гихманом и В.С. Королюком).
41. ***О работах Б.В. Гнеденко по теории вероятностей (к 50-летию со дня рождения)*** // Теория вероятн. и ее примен., т. 7, вып. 3, 1962; 323–329.
42. ***Израиль Моисеевич Гельфанд (к 50-летию со дня рождения)*** // УМН, т. 19, вып. 3, 1964; 187–205 (совм. с М.И. Вишиком, С.В. Фоминым, Г.Е. Шиловым).
43. ***Лев Абрамович Тумаркин (к 60-летию со дня рождения)*** // УМН, т. 19, вып. 4, 1964; 219–221 (совм. с П.С. Александровым).
44. ***Сергей Михайлович Никольский (к 60-летию со дня рождения)*** // УМН, т. 20, вып. 5, 1965; 275–287 (совм. с В.К. Дзядыком и Л.Д. Кудрявцевым).
45. ***Проблемы теории вероятностей и математической статистики***: [*Выступление на Общем собрании Отделения математики АН СССР*] // Вестник АН СССР, № 5, 1965; 94–96.

46. ***Павел Сергеевич Александров (к 70-летию со дня рождения и 50-летию научной деятельности)*** // УМН, т. 21, вып. 4, 1966; 4–7 (совм. с Л.А. Люстерником, Ю.М. Смирновым, А.Н. Тихоновым и др.).
47. ***П.С. Александров и теория δs-операций*** // УМН, т. 21, вып. 4, 1966; 275–278.
48. ***Игорь Владимирович Гирсанов*** [*Некролог*] // Теория вероятн. и ее примен., т. 12, вып. 3, 1967; 532–535 (совм. с Е.Б. Дынкиным, Б.Т. Поляком и М.И. Фрейдлиным).
49. ***Сергей Натанович Бернштейн*** [*Некролог*] // Теория вероятн. и ее примен., т. 14, вып. 1, 1969; 113–121 (совм. с Ю. В. Линником, Ю.В. Прохоровым, О.В. Сармановым).
50. ***Сергей Натанович Бернштейн*** [*Некролог*] // УМН, т. 24, вып. 3, 1969; 211–218 (совм. с П.С. Александровым, Н.И. Ахиезером, Б.В. Гнеденко).
51. ***Виктор Николаевич Засухин (1915–1941): Памяти математиков, погибших в Великой Отечественной войне Советского Союза*** // УМН, т. 25, вып. 3, 1970; 243.
52. ***Глеб Александрович Селиверстов (1905–1944): Памяти математиков, погибших в Великой Отечественной войне Советского Союза*** // УМН, т. 25, вып. 3, 1970; 244–245.
53. ***Иван Георгиевич Петровский (к 70-летию со дня рождения)*** // Вестник Моск. ун-та, сер. матем. мех., т. 26, № 1, 1971; 111–117 (совм. с П.С. Александровым, М.И. Вишиком, О.А. Олейник, А.Н. Тихоновым).
54. ***Иван Георгиевич Петровский (к 70-летию со дня рождения)*** // УМН, т. 26, вып. 2, 1971: 3–24 (совм. с П. С. Александровым, В.И. Арнольдом, И.М. Гельфандом и др.).
55. ***Наум Ильич Ахиезер (к 70-летию со дня рождения)*** // УМН, т. 26, вып. 6, 1971; 257–261 (совм. с Ю.М. Березанским, М.Г. Крейном, Б.Я. Левиным и др.).
56. ***Георгий Павлович Толстов (к 60-летию со дня рождения)*** // УМН, т. 27, вып. 1, 1972; 255–264 (совм. с И.Я. Верченко, В.Я. Козловым и Д.Е. Меньшовым).
57. ***Дмитрий Евгеньевич Меньшов (к 80-летию со дня рождения)*** // УМН, т. 27, вып. 2, 1972; 185–195 (совм. с П.С. Александровым и П.Л. Ульяновым).
58. ***Борис Владимирович Гнеденко (к 60-летию со дня рождения)*** // УМН, т. 27, вып. 2, 1972; 197–202 (совм. с Ю.К. Беляевым и А.Д. Соловьевым).
59. ***Леонид Витальевич Канторович (к 60-летию со дня рождения)*** // УМН, т. 27, вып. 3, 1972; 221–227 (совм. с Б.З. Вулихом, М.К. Гавуриным, Ю.В. Линником и др.).

60. ***Георгий Федорович Рыбкин*** [*Некролог*] // УМН, т. 27, вып. 5, 1972; 223–225 (совм. с П.С. Александровым, Б.В. Гнеденко, А.И. Маркушевичем и др.).
61. ***Иван Георгиевич Петровский*** // УМН, т. 29, вып. 2 (выпуск, посвященный памяти И.Г. Петровского), 1974; 3–5.
62. ***Памяти Ивана Георгиевича Петровского (18.01.1901–15.01.1973)*** // Труды Моск. матем. об-ва., т. 31, 1974; 5–16 (совм. с П.С. Александровым и О.А. Олейник).
63. ***Сергей Михайлович Никольский (к 70-летию со дня рождения)*** // УМН, т. 30, вып. 4, 1975; 271–280 (совм. с В.К. Дзядыком и Л.Д. Кудрявцевым).
64. ***Свой путь в науке (памяти математика А.И. Мальцева, 1909–1967)*** // Наука и жизнь, № 7, 1975; 112–115.
65. ***Ольга Арсеньевна Олейник*** // Вестник Моск. ун-та, сер. 1, № 4, 1975; 118–124 (совм. с П.С. Александровым и С.Л. Соболевым).
66. ***Общие проблемы математического образования в СССР*** // История математического образования в СССР. — Киев: Наукова думка, 1975; 9–13.
67. ***Георгий Евгеньевич Шилов*** [*Некролог*] // УМН, т. 31, вып. 1, 1976; 212–228 (совм. с П.С. Александровым, И.М. Гельфандом, С.В. Фоминым и др.).
68. ***Ташмухамед Алиевич Сарымсаков (к 60-летию со дня рождения)*** // УМН, т. 31, вып. 2, 1976; 241–246 (совм. с П.С. Александровым, Б.В. Гнеденко и Ю.В. Прохоровым).
69. ***Памяти Сергея Васильевича Фомина*** // УМН, т. 31, вып. 4, 1976; 199–212 (совм. с П.С. Александровым, И.М. Гельфандом, Е.Б. Майковым и др.).
70. ***Павел Сергеевич Александров (к 80-летию со дня рождения)*** // УМН, т. 31, вып. 5, 1976; 3–15 (совм. с А.В. Архангельским, А.А. Мальцевым и О.А. Олейник).
71. ***Адольф Павлович Юшкевич (к 70-летию со дня рождения)*** // УМН, т. 32, вып. 3, 1977; 197–202 (совм. с И.Г. Башмаковой, А.И. Маркушевичем и др.).
72. ***Памяти Бориса Павловича Демидовича*** // УМН, т. 33, вып. 2, 1978; 169–174 (совм. с Н.В. Ефимовым, В.М. Миллионщиковым и Н.Х. Розовым).
73. ***Марк Григорьевич Крейн (к 70-летию со дня рождения)*** // УМН, т. 33, вып. 3, 1978; 197–203 (совм. с Н.Н. Боголюбовым, М.А. Лаврентьевым и др.).
74. ***Математик и историк математики: о трудах А.И. Маркушевича (1908–1979) по истории математики*** // Вопросы истории естествознания и техники, № 2, 1980; 96–100.

75. ***Константин Иванович Бабенко (к 60-летию со дня рождения)*** // УМН, т. 35, № 2, 1980; 231–239 (совм. с Л.Р. Волевичем, Г.П. Воскресенским, А.В. Забродиным и др.).
76. ***Лазарь Аронович Люстерник (к 80-летию со дня рождения)*** // УМН, т. 35, № 6, 1980; 3–10 (совм. с П.С. Александровым, М.И. Вишиком, В.А. Диткиным и др.).
77. ***A. I. Markushevich as a historian of mathematics*** // Historia Math., v. 8, 1981; 125–132 (совм. с П.С. Александровым и А.П. Юшкевичем).
78. ***Памяти Михаила Алексеевича Лаврентьева*** // УМН, т. 36, вып. 2, 1981; 3–10 (совм. с П.С. Александровым, Н.Н. Боголюбовым, Л.А. Люстерником и др.).
79. ***Александр Филиппович Тиман (к 60-летию со дня рождения)*** // УМН, т. 36, вып. 2, 1981; 221–225 (совм. с В.Ф. Власовым, В.Г. Пономаренко и др.).
80. ***Владимир Михайлович Алексеев*** [*Некролог*] // УМН, т. 36, вып. 4, 1981; 177–182 (совм. с Д.В. Аносовым, В.И. Арнольдом, М.И. Зеликиным и др.).
81. ***Наум Ильич Ахиезер*** [*Некролог*] // УМН, т. 36, вып. 4, 1981; 183–184 (совм. с М.Г. Крейном, Б.Я. Левиным и др.).
82. ***Памяти Анатолия Илларионовича Ширшова*** // УМН, т. 36, вып. 5, 1981; 153–157 (совм. с А.И. Кострикиным, В.Н. Латышевым, С.Л. Соболевым и др.).
83. ***Сагды Хасанович Сираждинов (к 60-летию со дня рождения)*** // УМН, т. 36, вып. 6, 1981; 237–242 (совм. с Т.А. Азларовым, Б.В. Гнеденко, Ю.В. Прохоровым и др.).
84. ***Дмитрий Евгеньевич Меньшов (к 90-летию со дня рождения)*** // УМН, т. 37, вып. 5, 1982; 209–219 (совм. с С.М. Никольским, В.А. Скворцовым и П.Л. Ульяновым).
85. ***Борис Владимирович Гнеденко (к 70-летию со дня рождения)*** // УМН, т. 37, вып. 6, 1982; 243–248 (совм. с Ю.К. Беляевым и А.Д. Соловьевым).
86. ***Гурий Иванович Марчук (к 60-летию со дня рождения)*** // УМН, т. 40, вып. 5, 1985; 3–17 (совм. с Н.Н. Боголюбовым и В.С. Владимировым).
87. ***Сергей Михайлович Никольский (к 80-летию со дня рождения)*** // УМН, т. 40, вып. 5, 1985; 269–278 (совм. с В.К. Дзядыком, Л.Д. Кудрявцевым и С.Л. Соболевым).
88. ***Воспоминания о П.С. Александрове*** // УМН. — т. 41, вып. 6, 1986; 187–203. Перепеч. в [91], с. 131–157.
89. ***Джон фон Нейман*** // Джон фон Нейман. Избранные труды по функциональному анализу. Т. I. — М.: Наука, 1987; 337–351 (совм. с А.М. Вершиком и Я.Г. Синаем).

90. ***О понятиях величины и числа*** [1923 г.] / Публ. и примечания А.М. Абрамова и В.М. Тихомирова // Историко-математические исследования, вып. 32–33 / Отв. ред. А.П. Юшкевич. — М.: Наука, 1990; 474–484 (См. также комментарий А.М. Абрамова и В.М. Тихомирова, там же, с. 484–487).
91. ***Математика в ее историческом развитии*** / Под ред. В.А. Успенского, сост. Г.А. Гальперин. — М.: Наука, 1991; 223 с.
92. ***Проблемы теории вероятностей.*** Тезисы доклада на заседании Московского математического общества 11 декабря 1944 г.) // Теория вероятн. и ее примен., т. 38, вып. 2, 1993; 211–212.
93. ***Леонид Витальевич Канторович*** // Очерки истории информатики в России / Ред.-сост. Д.А. Поспелов и Я.И. Фет. — Новосибирск: Научно-издат. центр ОИГГМ СО РАН, 1998; 512–515 (совм. с В.А. Залгаллером).
94. ***Memories of P. S. Aleksandrov*** // Kolmogorov in Perspective / пер. с рус. — Providence, R.I. / London: Amer. Math. Soc. / London Math. Soc., 2000; 145–162. (Hist. Math. V. 20.)
95. ***Newton and Contemporary Mathematical Thought*** // Kolmogorov in Perspective / пер. с рус. — Providence, R.I. / London: Amer. Math. Soc. / London Math. Soc., 2000; 163–176. (Hist. Math. V. 20.)

См. также: [Б$_{V}$-104], [Б$_{V}$-108], [Б$_{V}$-111], [Б$_{V}$-121], [Б$_{V}$-127], [Б$_{V}$-130], [Б$_{V}$-134], [Б$_{V}$-139], [Б$_{VII}$-11].

VII. Научно-популярные статьи и книги

1. ***Подготовка молодых научных работников в СССР*** // Мир науки / Лондон: Всемирная федерация научных работников, № 1, 1957; 8–13.
2. ***Автоматы и жизнь:*** Тезисы доклада, прочитанного на методологическом семинаре механико-математического ф-та МГУ 6 апреля 1961 г. // Машинный перевод и прикладная лингвистика, вып. 6, 1961; 3–8.
3. ***Автоматы и жизнь*** // Техника — молодежи. — № 10, 1961; 16–19; № 11, 1961; 30–33 (изложение Н. Г. Рычковой). Перепеч.: [7], [10], [14; с. 43–62].
4. ***Жизнь и мышление с точки зрения кибернетики*:** Тезисы доклада на объединенной теоретической конференции философских (методологических) семинаров по философским вопросам кибернетики / АН СССР: Научный совет по философским вопросам естествознания. — М., 1962; 11 с.
5. ***Жизнь и мышление с точки зрения кибернетики*** // В кн.: *А.И. Опарин. Жизнь, ее соотношение с другими формами движения материи.* — М.: Изд-во АН СССР, 1962; 1–11.
6. ***Как я стал математиком*** // Огонек, № 48, 1963; 12–13.
7. ***Автоматы и жизнь*** // *Возможное и невозможное в кибернетике* / Под ред. А. Берга и Э. Кольмана, сост. В.Д. Пекелис. — М.: Изд-во АН СССР, 1963; 10–29 (изложение Н.Г. Рычковой). Перепеч. поз. [3].
8. ***Жизнь и мышление как особые формы существования материи*** // О сущности жизни. — М.: Наука, 1964; 48–57.
9. ***Геометрия на сфере и геология*** // *Наука и жизнь*, № 2, 1966; 32. Перепеч. в [VII.14], с. 41–43.
10. ***Автоматы и жизнь*** // Кибернетика ожидаемая и кибернетика неожиданная / Отв. ред. А. Берг и Э. Кольман, сост. В.Д. Пекелис. — М.: Изд-во АН СССР, 1968; 12–31 (изложение Н.Г. Рычковой). Перепеч. поз. [3].
11. ***Научный руководитель.*** [Воспоминания о П.С. Урысоне.] // Л. Нейман. Радость открытия. — М.: Детская литература, 1972; 160–164. Перепеч. в [14; с. 10–14].
12. ***Как я стал математиком. Что такое математика //*** Союз, рождающий чудеса. — М.: Знание, 1978; 5–10. (Народный университет. Факультет “Наука в твоей профессии”. № 11/78.)
13. ***Приветствие участникам Первого Всемирного Конгресса Общества Бернулли*** // Теория вероятн. и ее примен., т. 32, вып. 2, 1987; 218.
14. ***Математика — наука и профессия*** / Сост. Г.А. Гальперин. — М.: Наука, 1988; 288 с. Библиотечка “Квант”, вып. 64.

15. ***По поводу мнений КИБЕРНЕТИКА, ЛИТЕРАТУРОВЕДА, ФИЛОСОФА***. [Рукопись от 30 апреля 1961 г.] // Историко-математические исследования, сер. 2, вып. 1 (36), № 1. М.: ТОО "Янус", 1995; 155–159.
16. **[*Семиотические послания*:] *По поводу мнений КИБЕРНЕТИКА, ЛИТЕРАТУРОВЕДА, ФИЛОСОФА*** [рукопись от 30 апреля 1961 г.]. ***К семиотике искусства*** [рукопись от 10 января 1963 г.]. ***ТЕМ ЖЕ О ТОМ ЖЕ, если еще не надоело*** [рукопись от 15 января 1963 г.]. [***Тезисы о природе искусства***] [рукопись от 28 декабря 1964 г.] // Новое литературное обозрение, № 24, 1997; 216–245. (Публ., предварение и комментарии В.А. Успенского; предварение на с. 121–215.) Перепечатано в [19] и в кн.: В.А. Успенский. Труды по нематематике. Т. 2. — М.: ОГИ, 2002; 1319–1364.
17. ***Тезисы о кибернетике.*** [1957 г.] // Очерки истории информатики в России / Ред.-сост. Д.А. Поспелов и Я.И. Фет. — Новосибирск: Научно-издат. центр ОИГГМ СО РАН, 1998; 142–147. [С приложением проекта начала статьи "Кибернетика" для БСЭ.]
18. ***Автоматы и жизнь:*** Тезисы доклада // Очерки истории информатики в России / Ред.-сост. Д.А. Поспелов и Я.И. Фет. — Новосибирск: Научно-издат. центр ОИГГМ СО РАН, 1998; 147–150.
19. ***Семиотические послания*** // Очерки истории информатики в России / Ред.-сост. Д.А. Поспелов и Я.И. Фет. — Новосибирск: Научно-издат. центр ОИГГМ СО РАН, 1998; 216–246. Перепеч. [16].
20. ***Кибернетика*** // Очерки истории информатики в России / Ред.-сост. Д.А. Поспелов и Я.И. Фет. — Новосибирск: Научно-издат. центр ОИГГМ СО РАН, 1998; 614–617. Перепеч. [$Б_{II}$-75].
21. ***Автоматы и жизнь*** // Очерки истории информатики в России / Ред.-сост. Д.А. Поспелов и Я.И. Фет. — Новосибирск: Научно-издат. центр ОИГГМ СО РАН, 1998; 621–633 (изложение Н.Г. Рычковой).
22. ***Колмогоров и кибернетика:*** Сборник статей / Под ред. Д.А. Поспелова и Я.И. Фета. — Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2001, 159 с. (Вопросы истории информатики, вып. 2.)
23. ***Автоматы и жизнь:*** Тезисы доклада // Колмогоров и кибернетика / Под ред. Д.А. Поспелова и Я.И. Фета. — Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2001, с. 77–82.
24. ***Автоматы и жизнь:*** Изложение доклада // Колмогоров и кибернетика / Под ред. Д.А. Поспелова и Я.И. Фета. — Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2001, с. 83–109 (изложение Н.Г. Рычковой).
25. ***Понятие "информация" и основы теории вероятностей:*** Стенограмма доклада. [Институт философии АН СССР, Москва, 5 апреля 1965 г.] // Колмогоров и кибернетика / Под ред. Д.А. Поспелова и Я.И. Фета. — Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2001; с. 118–138.

VIII. Работы редакционно-издательского характера

1. ***Предисловие к кн.:*** *А. Гейтинг. Обзор исследований по основаниям математики. Интуиционизм — теория доказательства.* — М.–Л.: ОНТИ, 1936; 3–4.
2. ***Ред., предисловие и дополнение к кн.:*** *Ф. Хаусдорф. Теория множеств.* — М.–Л.: ГОНТИ, 1937, 304 с. Предисловие к рус. изд. на с. 3–4; добавление на с. 266–290 (совм. с П.С. Александровым).
3. ***Ред. и предисловие к кн.:*** *А. Лебег. Об измерении величин.* — М.: Учпедгиз, 1938; 208 с. Предисловие редактора на с. 3–12.
4. ***[Рецензия*** *на книгу В.И. Романовского "Математическая статистика"]* // УМН, вып. 7, 1940; 327–329.
5. ***Ред.:*** *Сборник статей по теории стрельбы.* I. — М.: Матем. ин-т им. В. А. Стеклова АН СССР, 1945, 106 с. (Труды МИАН СССР, т. 12.)
6. ***Ред. и предисловие к кн.:*** *Г. Крамер. Случайные величины и распределения вероятностей.* — М.: ИЛ, 1947; 144 с. Предисловие на с. 5.
7. ***Ред. и предисловие к кн.:*** *Г. Крамер. Математические методы статистики.* — М.: ИЛ, 1948; 631 с. Предисловие к рус. пер. на с. 5–8.
8. ***Предисловие к кн.:*** *П.С. Александров. Введение в общую теорию множеств и функций.* — М.–Л.: Гостехиздат, 1948; 411 с. Предисловие на с. 8–12 (совм. с П.С. Александровым). Венг. изд.: *P. Sz. Aleksandrov. Bevezetés a halmazok és függvények általános elméletébe.* — Budapest: Akadémiai Kiadó, 1952; 274 с.
9. ***Вводная статья и комментарий к статье:*** *Н.И. Лобачевский. "Вероятность средних результатов, полученных из повторных наблюдений"* // Н.И. Лобачевский. Полное собрание сочинений. Т. 5: Сочинения по математическому анализу, теории вероятностей, механике и астрономии. — М.–Л.: Гостехиздат, 1951; 329–332, 342–348 (комментарий совм. с А.Н. Хованским).
10. ***Ред. и предисловие к кн.:*** *Р. Петер. Рекурсивные функции.* — М.: ИЛ, 1954; 264 с. Предисловие на с. 3–10.
11. ***Ред.:*** *Математика, ее содержание, методы и значение. В трех томах.* — М.: Изд-во АН СССР, 1956 (совм. с П.С. Александровым и М.А. Лаврентьевым).
12. ***Предисловие к кн.:*** *У.Р. Эшби. Введение в кибернетику.* — М.: ИЛ, 1959, 5–8. Перепеч. в сб.: Очерки истории информатики в России / Ред.-сост. Д.А. Поспелов и Я.И. Фет. — Новосибирск: Научно-издат. центр ОИГГМ СО РАН, 1998; 618–621.

13. ***Ред. и предисловие к кн.:*** *А. Лебег. Об измерении величин.* 2-е изд. — М.: Учпедгиз, 1960; 208 с. Предисловие на с. 7–16.
14. ***Рецензия на кн.:*** *А.М. Длин. Математическая статистика в технике.* 3-е изд. // Теория вероятн. и ее примен., т. 7, вып. 1, 1962; 243–248 (совм. с С.А. Айвазяном и Л.Д. Мешалкиным и В.Ф. Писаренко).
15. ***Предисловие к кн.:*** *К. Шеннон. Работы по теории информации и кибернетике.* — М.: ИЛ, 1963; 5–6.
16. ***Предисловие к кн.:*** *В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* — М.: ИЛ, 1952; 3. 2-е изд. — М.: Мир, 1964; предисловие ко второму рус. изд. на с. 5–6.
17. ***Ред.:*** *М. Кендалл, А. Стьюарт. Теория распределений.* — М.: Наука, 1966; 587 с.
18. ***Ред. и предисловие к кн.:*** *Р. Фор, А. Кофман, М. Дени-Папен. Современная математика.* — М.: Мир, 1966; 271 с. Предисловие на с. 5–6.
19. ***Ред. и предисловие к кн.:*** *С. Кульбак. Теория информации и статистики.* — М.: Наука, 1967; 408 с. Предисловие на с. 5–6.
20. ***Ред. и предисловие к кн.:*** *Р. Курант, Г. Роббинс. Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов.* 2-е изд. — М.: Просвещение, 1967. Предисловие на с. 3. (Сер.: Математическое просвещение.) 3-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2001; предисловие на с. 12–13; вклейка “От издательства” в 1-е издание книги на рус. яз. — на с. 541–543.
21. ***Ред.:*** *Вероятностные методы исследования: Сборник статей.* Вып. 41. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1972; 51 с.
22. ***Ред. и предисловие к кн.:*** *М.Дж. Кендалл, А. Стьюарт. Статистические выводы и связи.* — М.: Наука, 1973; 899 с. Предисловие ред. перевода на с. 6–8.
23. ***Ред. и предисловие к кн.:*** *Г. Крамер. Математические методы статистики.* 2-е изд., стереотип. — М.: Мир, 1975; 648 с. Предисловие ко второму рус. изд. на с. 5; предисловие к первому рус. изд. на с. 6–8.
24. ***Ред.:*** *М. Кендалл, А. Стьюарт. Многомерный статистический анализ и временные ряды.* — М.: Наука, 1976; 736 с. (совм. с Ю.В. Прохоровым).
25. ***Ред.:*** *П.С. Александров. Теория размерности и смежные вопросы: статьи общего характера.* Избр. труды. — М.: Наука, 1978 (совм. с А.А. Мальцевым, Л.С. Понтрягиным и А.Н. Тихоновым).
26. ***Ред.:*** *П.С. Александров. Теория функций действительного переменного и теория топологических пространств.* Избр. труды. — М.: Наука, 1978 (совм. с А.А. Мальцевым, Л.С. Понтрягиным и А.Н. Тихоновым).

27. ***Ред. и предисловие к кн.:*** *Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей.* — М.: Наука, 1978. Предисловие на с. 7—10 (совм. с А.П. Юшкевичем).
28. ***Ред. и предисловие к кн.:*** *А. Донеддю. Евклидова планиметрия.* — М.: Наука, 1978; 271 с. Предисловие ред. пер. на с. 3—4.
29. ***Ред.:*** *П.С. Александров. Общая теория гомологий.* Избр. труды. — М.: Наука, 1979 (совм. с А.А. Мальцевым, Л.С. Понтрягиным и А.Н. Тихоновым).
30. ***Ред.:*** *П.С. Новиков. Теория множеств и функций. Математическая логика и алгебра.* Избр. труды. — М.: Наука, 1979; 369 с.
31. ***Рецензия:*** Опыт истории математики Нового времени. [Рецензия на кн.: *Abrégé d'histoire des mathématiques. 1700—1900.* — Paris: Hermann, 1978.] // Вопросы истории естествознания и техники. — № 3, 1980; 137—144 (совм. с И.Г. Башмаковой, А.И. Маркушевичем, А.Н. Паршиным и А.П. Юшкевичем).
32. ***Ред.:*** *Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций.* — М.: Наука, 1981; 269 с. (совм. с А.П. Юшкевичем).
33. ***Ред.:*** *Некоторые вопросы математики и механики.* — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981; 116 с.
34. ***Ред.:*** *Вероятностно-статистические методы исследования.* — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983; 160 с. (совм. с И.Г. Журбенко).
35. ***Ред. и послесловие к кн.:*** *Г. Кантор. Труды по теории множеств.* — М.: Наука, 1985; 430 с. Послесловие на с. 373—381 (совм. с А.П. Юшкевичем).
36. ***Предисловие к кн.:*** *Я. Бернулли. О законе больших чисел.* — М.: Наука, 1986. Предисловие на с. 4—6.
37. ***Ред. и предисловие к кн.:*** *Математика XIX века. Чебышёвские направления в теории функций. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Вариационное исчисление. Теория конечных разностей.* — М.: Наука, 1987; 318 с. Предисл. на с. 7—8 (совм. с А.П. Юшкевичем).
38. ***Ред. :*** *Нейман Джон фон. Избранные труды по функциональному анализу.* В двух томах. — М.: Наука, 1987.
39. ***Послесловие к кн.:*** *А.Н. Колмогоров. Теория информации и теория алгоритмов.* — М.: Наука, 1987; 303 с.
40. ***Предисловие к кн.:*** *И.Г. Журбенко. Анализ стационарных и однородных случайных систем.* — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987, 240 с.

IX. Другие работы А.Н. Колмогорова

1. ***Автобиография*** // А.Н. Колмогоров. Математика в ее историческом развитии / Под ред. В.А. Успенского, сост. Г.А. Гальперин. — М.: Наука, 1991; 22–23.
2. ***Землевладение в новгородских пятинах XV века; О сборе налогов и порядке землепользования; Новгородское землевладение XV века. Первая часть. [Новгородское землевладение XV века.] Вторая часть*** // А.Н. Колмогоров. Новгородское землевладение XV века. Л.А. Бассалыго. Комментарий к писцовым книгам Шелонской пятины / Предисловие В.Л. Янина. — М.: Наука, 1994; 15–84.
3. ***Из воспоминаний А.Н. Колмогорова*** // А.Н. Колмогоров, Теория информации и теория алгоритмов. — М.: Наука, 1987; 289.
4. ***Отзыв на дипломную работу Ю. Офмана "Автомат параллельного действия"*** // Колмогоров и кибернетика / Под ред. Д.А. Поспелова и Я.И. Фета. — Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2001, с. 143–144.
5. ***Отзыв на статью А.И. Китова "Кибернетика"*** // Колмогоров и кибернетика / Под ред. Д.А. Поспелова и Я.И. Фета. — Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2001, с. 145–147.
6. ***О некоторых тенденциях развития математики.*** [Листок из архива А.Н. Колмогорова (с комментарием В.М. Тихомирова)] // Колмогоров и кибернетика / Под ред. Д.А. Поспелова и Я.И. Фета. — Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2001, с. 148–152.

Приложение 1

Содержание трех книг избранных трудов

Книга I: ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ. МАТЕМАТИКА и МЕХАНИКА (Москва: НАУКА, 1985)

От редакции; 3.

Андрей Николаевич Колмогоров (Биографическая справка) (сост. В.М. Тихомиров); 4—7.

1. *Ряд Фурье—Лебега, расходящийся почти всюду* (рус. пер. П.Л. Ульянова [Б$_I$-2]); 8—11.
2. *О порядке величины коэффициентов ряда Фурье—Лебега* (рус. пер. П.Л. Ульянова [Б$_I$-3]); 12—14.
3. *Замечания к исследованию сходимости рядов Фурье* (рус. пер. И.А. Виноградовой [Б$_I$-4]); 15—16.
4. *О сходимости рядов Фурье* (совм. с Г.А. Селиверстовым, рус. пер. И.А. Виноградовой [Б$_I$-5]); 16—19.
5. *Аксиоматическое определение интеграла* (рус. пер. В.А. Скворцова [Б$_I$-6]); 19—20.
6. *О границах обобщения интеграла* (рус. пер. Т.П. Лукашенко [Б$_I$-7]); 21—38.
7. *О возможности общего определения производной, интеграла и суммирования расходящихся рядов* (рус. пер. Л.А. Балашова [Б$_I$-8]); 39—40.
8. *О гармонически сопряженных функциях и рядах Фурье* (рус. пер. Т.П. Лукашенко [Б$_I$-9]); 40—45.
9. *О принципе tertium non datur* (перепеч. [Б$_I$-10]); 45—69.
10. *О сходимости рядов Фурье* (совм. с Г.А. Селиверстовым, рус. пер. И.А. Виноградовой [Б$_I$-12]; 69—73.
11. *Ряд Фурье—Лебега, расходящийся всюду* (рус. пер. Л.А. Балашова [Б$_I$-13]); 73—75.
12. *О сходимости ортогональных рядов* (совм. с Д.Е. Меньшовым, рус. пер. С.В. Бочкарева [Б$_I$-15]); 75—85.
13. *Об операциях над множествами* (перепеч. [Б$_I$-16]); 85—92.
14. *О процессе интегрирования Данжуа* (рус. пер. В.А. Скворцова [Б$_I$-19]); 93—94.
15. *О тополого-теоретико-групповом обосновании геометрии* (рус. пер. И. Пенкова [Б$_I$-26]); 94—96.
16. *Исследование понятия интеграла* (рус. пер. П. Освальда [Б$_I$-27]); 96—136.
17. *Об определении среднего* (рус. пер. В.М. Тихомирова [Б$_I$-28]); 136—138.

18. *О компактности множеств функций при сходимости в среднем* (рус. пер. С.Б. Стечкина [$Б_I$-33]); 139—141.
19. *К толкованию интуиционистской логики* (рус. пер. В.А. Успенского [$Б_I$-36]); 142—148.
20. *К обоснованию проективной геометрии* (рус. пер. И. Пенкова [$Б_I$-37]); 149—150.
21. *К теории меры* (рус. пер. И. Пенкова [$Б_I$-38]); 150—166.
22. *О точках разрыва функций двух переменных* (совм. с И.Я. Верченко, перепеч. [$Б_I$-45]); 167—168.
23. *О нормируемости общего линейного топологического пространства* (рус. пер. С.Б. Стечкина [$Б_I$-46]); 168—171.
24. *Продолжение исследования о точках разрыва функций двух переменных* (совм. с И.Я. Верченко, перепеч. [$Б_I$-48]); 171—173.
25. *О сходимости рядов по ортогональным полиномам* (перепеч. [$Б_I$-47]); 174—177.
26. *Преобразование Лапласа в линейных пространствах* (рус. пер. А. В. Булинского [$Б_I$-52]); 178—179.
27. *О порядке остаточного члена рядов Фурье дифференцируемых функций* (рус. пер. С.А. Теляковского [$Б_I$-53]); 179—185.
28. *О наилучшем приближении функций заданного функционального класса* (рус. пер. С.А. Теляковского [$Б_I$-55]); 186—189.
29. *О законах двойственности в комбинаторной топологии* (рус. пер. О.В. Локуциевского [$Б_I$-56]); 190—197.
30. *Кольцо гомологий комплексов и локально бикомпактных пространств* (рус. пер. О.В. Локуциевского [$Б_I$-58]); 197—202.
31. *Конечные покрытия топологических пространств* (совм. с П.С. Александровым, рус. пер. О.В. Локуциевского [$Б_I$-60]); 203—206.
32. *Группы Бетти локально бикомпактных пространств* (рус. пер. М.Б. Балавадзе [$Б_I$-61]); 207—209.
33. *Свойства групп Бетти локально бикомпактных пространств* (рус. пер. М.Б. Балавадзе [$Б_I$-62]); 209—211.
34. *Группы Бетти метрических пространств* (рус. пер. М.Б. Балавадзе [$Б_I$-63]); 211—213.
35. *Относительные циклы. Теорема двойственности Александера* (рус. пер. М.Б. Балавадзе [$Б_I$-64]); 214—215.
36. *Об открытых отображениях* (рус. пер. В.А. Успенского [$Б_I$-66]); 215—217.
37. *Кососимметричные величины и топологические инварианты* (перепеч. [$Б_I$-67]); 218—220.
38. *Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической*

проблеме (совм. с И.Г. Петровским и Н.С. Пискуновым, перепеч. [Б$_{I}$-69]); 221–246.

39. *Упрощенное доказательство эргодической теоремы Биркгофа–Хинчина* (перепеч. [Б$_{I}$-74]); 246–252.
40. *О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале* (перепеч. [Б$_{I}$-78]); 252–263.
41. *О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах* (совм. с И.М. Гельфандом, перепеч. [Б$_{I}$-79]); 264–269.
42. *Кривые в гильбертовом пространстве инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений* (перепеч. [Б$_{I}$-81]); 269–273.
43. *Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве* (перепеч. [Б$_{I}$-82]); 274–277.
44. *Точки локальной топологичности счетнократных открытых отображений компактов* (перепеч. [Б$_{I}$-86]); 278–281.
45. *Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса* (перепеч. [Б$_{I}$-87]); 281–287.
46. *К вырождению изотропной турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости* (перепеч. [Б$_{I}$-89]); 287–290.
47. *Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности* (перепеч. [Б$_{I}$-90]); 290–293.
48. *Уравнения турбулентного движения несжимаемой вязкой жидкости* (перепеч. [Б$_{I}$-92]); 294–296.
49. *Замечание по поводу многочленов П.Л. Чебышёва, наименее уклоняющихся от заданной функции* (перепеч. [Б$_{I}$-108]); 296–302.
50. *О дроблении капель в турбулентном потоке* (перепеч. [Б$_{I}$-114]); 302–306.
51. *О динамических системах с интегральным инвариантом на торе* (перепеч. [Б$_{I}$-129]); 307–310.
52. *О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона* (перепеч. [Б$_{I}$-131]); 311–315.
53. *Общая теория динамических систем и классическая механика* (перепеч. [Б$_{I}$-132]); 316–332.
54. *Некоторые принципиальные вопросы приближенного и точного представления функций одного и нескольких переменных* (перепеч. [Б$_{I}$-138]); 333–335.
55. *О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных* (перепеч. [Б$_{I}$-140]); 335–339.

56. *О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения* (перепеч. [Б$_I$-145]); 340—344.
57. *О линейной размерности топологических векторных пространств* (перепеч. [Б$_I$-150]); 344—348.
58. *Уточнение представлений о локальной структуре турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса* (перепеч. [Б$_I$-168]); 348—352.
59. *П.С. Александров и теория δs-операций* (перепеч. [I.181); 352—356.
60. *Качественное изучение математических моделей динамики популяций* (перепеч. [Б$_I$-189]); 357—362.

КОММЕНТАРИИ

А.Н. Колмогоров. К работам по теории функций и теории множеств; 363—364.
Тригонометрические и ортогональные ряды (*П.Л. Ульянов*); 364—373.
Дескриптивная теория множеств (*И.И. Паровиченко*); 373—376.
Теория меры и интеграла (*В.А. Скворцов*); 376—381.
Точки разрыва функций (*Е.П. Долженко*); 381—382.
Теория приближений (*С.А. Теляковский, В.М. Тихомиров*); 382—386.
Неравенства для производных (*В.М. Тихомиров, Г.Г. Магарил-Ильяев*); 387—390.
Кольца непрерывных функций (*Е.А. Горин*); 390—392.
Кривые в гильбертовом пространстве (*Ю.А. Розанов*); 392—393.
А.Н. Колмогоров. К работам по интуиционистской логике; 393.
Интуиционистская логика (*В.А. Успенский, В.Е. Плиско*); 394—404.
А.Н. Колмогоров. К работам по теории гомологий; 405.
Теория гомологий (*Г.С. Чогошвили*); 405—411.
А.Н. Колмогоров. К работе об открытых отображениях; 412.
Топология (*А.В. Архангельский*); 412—414.
Аксиоматика проективной геометрии (*А.В. Михалев*); 414—416.
А.Н. Колмогоров. К работе об уравнении диффузии; 416.
Уравнение диффузии (*Г.И. Баренблатт*); 416—420.
А.Н. Колмогоров. К работам по турбулентности; 421.
Турбулентность (*А.М. Яглом*); 421—433.
А.Н. Колмогоров. К работам по классической механике; 433.
Классическая механика (*В.И. Арнольд*); 433—444.
А.Н. Колмогоров. К работам о суперпозициях; 444.
Суперпозиции (*В.И. Арнольд*); 445—451.

Список трудов А.Н. Колмогорова; 452—456.

Книга II : ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА (Москва: НАУКА, 1986)

От редакции; 3.
П. С. Александров. Несколько слов об А.Н. Колмогорове; 4—6.

1. *О сходимости рядов, члены которых определяются случаем* (совм. с А.Я. Хинчиным, рус. пер. П.Л. Ульянова [Б$_1$-11]); 7—16.
2. *О законе больших чисел* (рус. пер. О.В. Вискова [Б$_1$-14]); 16—18.
3. *Об одной предельной формуле А. Хинчина* (рус. пер. О.В. Вискова [Б$_1$-18]); 18—19.
4. *О суммах независимых случайных величин* (рус. пер. А.Н. Ширяева [Б$_1$-20]); 20—34.
5. *О законе повторного логарифма* (рус. пер. Ю.В. Прохорова [Б$_1$-21]); 34—44.
6. *О законе больших чисел* (рус. пер. О.В. Вискова [Б$_1$-22]); 44—47.
7. *Общая теория меры и исчисление вероятностей* (перепеч. [Б$_1$-23]); 48—58.
8. *Об усиленном законе больших чисел* (рус. пер. О.В. Вискова [Б$_1$-25]); 59—60.
9. *Об аналитических методах в теории вероятностей* (перепеч. русского перевода статьи [Б$_1$-29]); 60—105.
10. *Проблема ожидания* (рус. пер. Б.А. Севастьянова [Б$_1$-30]); 106—111.
11. *Метод медианы в теории ошибок* (перепеч. [Б$_1$-31]); 111—114.
12. *Одно обобщение теоремы Лапласа—Ляпунова* (рус. пер. А.Н. Ширяева [Б$_1$-32]); 114—116.
13. *Об общей форме стохастического однородного процесса (проблема Бруно де Финетти)* (рус. пер. Л.А. Бассалыго [Б$_1$-34], [Б$_1$-35]); 117—123.
14. *К вычислению средней броуновской площади* (совм. с М.А. Леонтовичем, рус. пер. А.М. Яглома [Б$_1$-39]); 124—134.
15. *Об эмпирическом определении законов распределения* (рус. пер. А.С. Холево [Б$_1$-40]); 134—141.
16. *О предельных теоремах теории вероятностей* (рус. пер. К.И. Осколкова [Б$_1$-41]); 141—148.
17. *К теории непрерывных случайных процессов* (рус. пер. П. Дитриха [Б$_1$-42]); 149—161.
18. *К вопросу о пригодности найденных статистическим путем формул прогноза* (перепеч. [Б$_1$-44]); 161—167.
19. *Случайные движения (к теории броуновского движения)* (рус. пер. А.М. Яглома [Б$_1$-50]); 168—170.

20. *Уклонение от формул Харди при частичной изоляции* (перепеч. [Б$_I$-51]); 170—172.
21. *К теории цепей Маркова* (рус. пер. К.И. Осколкова [Б$_I$-54]); 173—178.
22. *К статистической теории кристаллизации металлов* (перепеч. [Б$_I$-70]); 178—182.
23. *Цепи Маркова со счетным числом возможных состояний* (перепеч. [Б$_I$-68]); 183—197.
24. *Об обратимости статистических законов природы* (рус. пер. А.М. Яглома [Б$_I$-71]); 197—204.
25. *К решению одной биологической задачи* (перепеч. [Б$_I$-76]); 204—109.
26. *Об одном новом подтверждении законов Менделя* (перепеч. [Б$_I$-83]); 209—214.
27. *Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве* (перепеч. [Б$_I$-84]); 215—255.
28. *Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей* (перепеч. [Б$_I$-85]); 255—263.
29. *О логарифмически нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении* (перепеч. [Б$_I$-88]); 264—267.
30. *К обоснованию метода наименьших квадратов* (перепеч. [Б$_I$-98]); 267—283.
31. *Одна формула Гаусса из теории метода наименьших квадратов* (совм. с А.А. Петровым и Ю.М. Смирновым, перепеч. [Б$_I$-101]); 283—288.
32. *Ветвящиеся случайные процессы* (совм. с Н.А. Дмитриевым, перепеч. [Б$_I$-102]); 288—293.
33. *Вычисление финальных вероятностей для ветвящихся случайных процессов* (совм. с Б.А. Севастьяновым, перепеч. [Б$_I$-103]); 294—298.
34. *Статистическая теория колебаний с непрерывным спектром* (перепеч. [Б$_I$-105]); 299—308.
35. *О суммах случайного числа слагаемых* (совм. с Ю.В. Прохоровым, перепеч. [Б$_I$-112]); 308—313.
36. *Локальная предельная теорема для классических цепей Маркова* (перепеч. [Б$_I$-113]); 313—335.
37. *Решение одной задачи из теории вероятностей, связанной с вопросом о механизме слоеобразования* (перепеч. [Б$_I$-111]); 335—339.
38. *Несмещенные оценки* (перепеч. [Б$_I$-116]); 340—363.
39. *К вопросу о дифференцируемости переходных вероятностей в однородных по времени процессах Маркова со счетным числом состояний* (перепеч. [Б$_I$-121]); 363—370.
40. *Обобщение формулы Пуассона на случай выборки из конечной совокупности* (перепеч. [Б$_I$-122]); 371—372.

41. *Некоторые работы последних лет в области предельных теорем теории вероятностей* (перепеч. [Б$_1$-128]); 373—384.
42. *О сходимости А.В. Скорохода* (перепеч. [Б$_1$-135]); 384—393.
43. *Две равномерные предельные теоремы для сумм независимых слагаемых* (перепеч. [Б$_1$-136]); 393—404.
44. *Случайные функции и предельные теоремы* (совм. с Ю.В. Прохоровым, перепеч. [Б$_1$-137]); 404—419.
45. *О свойствах функций концентрации П. Леви* (рус. пер. В.М. Круглова [Б$_1$-149]); 419—425.
46. *Переход ветвящихся процессов в диффузионные и примыкающие задачи генетики (обзорный доклад)* (перепеч. [Б$_1$-156]); 425—428.
47. *О классах F Форте и Блан-Лапьерра* (перепеч. [Б$_1$-158]); 428—429.
48. *Об условиях сильного перемешивания гауссовского стационарного процесса* (перепеч. [Б$_1$-159]); 429—435.
49. *Случайные функции нескольких переменных, почти все реализации которых периодичны* (перепеч. [Б$_1$-160]); 435—436.
50. *Об оценке параметров комплексного стационарного гауссовского марковского процесса* (совм. с М. Арато и Я.Г. Синаем, перепеч. [Б$_1$-166]); 436—440.
51. *О приближении распределений сумм независимых слагаемых неограниченно делимыми распределениями* (перепеч. [Б$_1$-171]); 441—458.
52. *Оценки спектральных функций случайных процессов* (совм. с И.Г. Журбенко, опубл. впервые, [Б$_1$-191]); 458—467.
53. *О логических основаниях теории вероятностей* (рус. пер. А.З. Звонкина, А.А. Новикова и А.Х. Шеня [Б$_1$-197]); 467—471.

КОММЕНТАРИИ

А.Н. Колмогоров. *К работам по теории вероятностей и математической статистике*; 472—474.

Аналитические методы в теории вероятностей (*А.Д. Вентцель*); 474—478.

Марковские процессы со счетным числом состояний (*Б.А. Севастьянов*); 478.

Однородные случайные процессы (*В.М. Золотарев*); 478—479.

Однородные марковские процессы (*А.А. Юшкевич*); 480—485.

Ветвящиеся процессы (*Б.А. Севастьянов*); 485—486.

Стационарные последовательности (*Ю.А. Розанов*); 486—488.

Стационарные процессы (*В.А. Статулявичус*); 489—490.

Статистика процессов (*А.Н. Ширяев*); 490.

Спектральная теория стационарных процессов (*А.М. Яглом*); 491—496.

Спектральное представление случайных процессов (*Ю.Г. Баласанов, И.Г. Журбенко*); 496—498.

Броуновское движение (*А.М. Яглом*); 498–502.
Цепи Маркова со счетным числом состояний (*А.А. Юшкевич*); 503–508.
Тождества Вальда (*А.А. Новиков*); 508–510.
S-сходимость (*А.В. Скороход*); 510.
Равномерные предельные теоремы (*Т.В. Арак*); 510–511.
Функции концентрации (*В.М. Круглов*); 511–514.
Эмпирические распределения (*Э.В. Хмаладзе*); 514–520.
Метод наименьших квадратов (*М.Б. Малютов*); 520–521.
Несмещенные оценки (*Ю.К. Беляев, Я.П. Лумельский*); 522–523.
Статистическое прогнозирование (*А.М. Яглом*); 523–526.
О межслоевом размыве (*А.Б. Вистелиус*); 527–531.

Книга III: ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ (Москва: НАУКА, 1987)

От редакции; 3.
Приветствие А.Н. Колмогорову от Московского математического общества (перепеч. из УМН, т. 38, вып. 4, 1983; 3–5); 4–6.
Н.Н. Боголюбов, Б.В. Гнеденко, С.Л. Соболев. ***Андрей Николаевич Колмогоров (к восьмидесятилетию со дня рождения)*** (перепеч. из УМН, т. 38, вып. 4, 1983; 11–23); 7–23.

1. *О понятии алгоритма* (перепеч. [Б$_1$-127]); 24.
2. *К общему определению количества информации* (совм. с И.М. Гельфандом и А.М. Ягломом, перепеч. [Б$_1$-142]); 25–29.
3. *Теория передачи информации* (перепеч. [Б$_1$-144]); 29–58.
4. *Количество информации и энтропия для непрерывных распределений* (совм. с И.М. Гельфандом и А. М. Ягломом, перепеч. [Б$_1$-147]); 59–85.
5. *Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега* (перепеч. [Б$_1$-148]); 86–91.
6. *К определению алгоритма* (совм. с В.А. Успенским, перепеч. [Б$_1$-151]); 91–119.
7. *ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах* (совм. с В.М. Тихомировым, перепеч. [Б$_1$-155]; 119–198.
8. *Различные подходы к оценке трудности приближенного задания и вычисления функций* (перепеч. [Б$_1$-173]); 199–204.
9. *О таблицах случайных чисел* (рус. пер. А.Х. Шеня [Б$_1$-174]); 204–213.
10. *Три подхода к определению понятия “количество информации”* (перепеч. [Б$_1$-180]); 213–223.

11. *О реализации сетей в трехмерном пространстве* (совм. с Я.М. Барздинем, перепеч. [Б$_1$-184]); 223—232.
12. *К логическим основам теории информации и теории вероятностей* (перепеч. [Б$_1$-186]); 232—237.
13. *Комбинаторные основания теории информации и исчисление вероятностей* (перепеч. [Б$_1$-195]); 238—250.

КОММЕНТАРИИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

А.Н. Колмогоров. *К работам по теории информации и некоторым ее применениям*; 251—253.
Теория информации (к № 2—4, *Р.Л. Добрушин*); 254—257.
Алгоритмическая теория информации (к № 10, 12, 13, *А.Х. Шень*); 257—261.
ε-энтропия и ε-емкость (к № 7, 8, *В.М. Тихомиров*); 262—269.
Таблицы случайных чисел (к № 9, *А.Х. Шень*); 270—274.
Реализация сетей в трехмерном пространстве (к № 11, *Я.М. Барздинь*); 274.
А.Н. Колмогоров. *К работе о динамических системах* (к № 5); 275.
Эргодическая теория (к № 5, Я.Г. Синай); 275—279.
Алгоритмы, или машины, Колмогорова (к № 1, 6, *В.А. Успенский, А.Л. Семенов*); 279—289.

Из воспоминаний А.Н. Колмогорова; 289—290.

Приложение 1. *Доклад математическому кружку о квадрильяже* (публикуется впервые); 290—294.
Приложение 2. *Об операциях над множествами. II* (публикуется впервые); 294—303.

А.Н. Колмогоров. Послесловие; 303.

Приложение 2

Некоторые письма и интервью А.Н. Колмогорова

1. **[*Письмо в редакцию.*]** [Отклик на статью В. Ходота “Оборудование перекрестка с автоматически регулируемым движением”.] // Строительство Москвы. — № 19, 1936; 27. (Статья В. Ходота опубликована в № 11 за тот же год, с. 12–14.) Перепеч. в кн.: Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове / Под общ. ред. В.М. Тихомирова, сост. Н.Х. Розов. — М.: ФАЗИС–МИРОС, 1999; 236–237.
2. ***Письмо в редакцию*** [по поводу статьи С.Н. Мергеляна “Равномерные приближения функций комплексного переменного” в журнале УМН, т. 7, вып. 2, 1952] // Изв. высш. учебн. заведений, сер. матем., № 1, 1961; 177.
3. ***Письмо в редакцию.*** [По поводу статьи Б.Е. Вейца.] // Математика в школе, № 2, 1965; 93.
4. **[*Письмо П.Л. Капице*]** // Вопросы философии, № 9, 1972; 127–128. Перепеч. в сб.: Математика в образовании и воспитании / Сост. В.Б. Филиппов. — М.: ФАЗИС, 2000; 121–124.
5. ***В девятнадцать лет я открыл математику.*** [Интервью.] // Комсомольская правда Литвы, 23.07.1977. (Записал В. Ломсаргис.)
6. ***Беседа с Андреем Николаевичем Колмогоровым*** // Квант. — № 4, 1983; 12–15. (Беседу вел А.Б. Сосинский.) Перепеч. в [$Б_{VII}$-14], с. 14–19; а также в кн.: Явление чрезвычайное / Под общ. ред. В.М. Тихомирова, сост. Н.Х. Розов. Книга о Колмогорове. — М.: ФАЗИС–МИРОС, 1999; 175–180.
7. ***Ученик об учителе.*** [Интервью с академиком А.Н. Колмогоровым 8 июня 1983 г. в связи со столетием со дня рождения академика Н.Н. Лузина.] // Газета “Путь в науку” (орган Кемеровского ун-та), 7.09.1983. (Интервью взял В.А. Успенский.) Перепеч.: УМН, т. 40, вып. 3, 1985, с. 7–8; [$Б_{VII}$-14], с. 19–22; Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове / Под общ. ред. В.М. Тихомирова, сост. Н.Х. Розов. — М.: ФАЗИС–МИРОС, 1999, с. 180–182.
8. ***Как растить увлеченных.*** [О встрече акад. А.Н. Колмогорова с выпускниками ФМШ — докторами наук.] // Известия, 28 января 1984 г. (Запись И. Преловской.)
9. **[*Письмо в редакцию “Историко-математических исследований” (от 8 декабря 1983 г.)*]** // Историко-математические исследования. Вып. 28 / Отв. ред. А.П. Юшкевич. — М.: Наука, 1985; 337–338.
10. ***Письма к голландскому математику А. Гейтингу*** // УМН, т. 43, вып. 6, 1988; 75–77.
11. ***Из писем В.И. Арнольду*** *(от 31 мая 1957 г.; от 2 апреля 1958 г.; от 15 апреля 1958 г.; от 16 апреля 1962 г.; от 28 марта 1965 г.;*

от 11 октября 1965 г. от 9 августа 1969 г.) // опубл. в статье: В.И. Арнольд. *Об А.Н. Колмогорове*, сб. “Колмогоров в воспоминаниях” / Ред.-сост. А.Н. Ширяев. — М.: Наука, 1993; 144–172.

12. ***Из письма Н.Н. Лузину от 7 октября 1945 г.*** // опубл. в статье: В.М. Тихомиров. *Слово об учителе*, сб. “Колмогоров в воспоминаниях” / Ред.-сост. А.Н. Ширяев. — М.: Наука, 1993; 249–251.
13. ***Из писем В.М. Тихомирову*** *(от 6 мая 1961 г.; от 29–31 июля 1961 г.; от 14 декабря 1963 г.* // опубл. в статье: В.М. Тихомиров. *Слово об учителе*, сб. “Колмогоров в воспоминаниях” / Ред.-сост. А.Н. Ширяев. — М.: Наука, 1993; 220–279.
14. ***Письмо В.А. Успенскому*** *(от 5 марта 1962 г.)* // опубл. в статье: В.А. Успенский. *Колмогоров, каким я его помню*, сб. “Колмогоров в воспоминаниях” / Ред.-сост. А.Н. Ширяев. — М.: Наука, 1993; 280–384.
15. ***[Письмо А. Штерну.] (“Многоуважаемый поэт мехмата!..”)*** // Новое литературное обозрение, № 6, 1993–1994; 183–187 (публ. А. Штерна; послесловие Б.В. Гнеденко).
16. ***Два письма А.Н. Колмогорова 1941 г.*** // Вопросы истории естествознания и техники, № 2, 1995; 123–124 (публ. и комментарий В.М. Тихомирова).
17. ***Письмо Вл. А. Успенскому от 29 декабря 1964 г.*** // Новое литературное обозрение, № 24, 1997; 241–243 (в статье: А.Н. Колмогоров. Семиотические послания). Публ. и комментарий В.А. Успенского. Перепечатано в кн.: В.А. Успенский. Труды по нематематике. Т. 2. — М.: ОГИ, 2002; 1358–1364.
18. ***Письмо В. В. Голубеву*** // Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове / Под общ. ред. В.М. Тихомирова, сост. Н.Х. Розов. — М.: ФАЗИС–МИРОС, 1999; 232–233.
19. ***Письма до востребования (Два письма А.Н. Колмогорова П.С. Александрову 1942 года)*** // Вестник РАН, т. 69, № 3, 1999; 243–255. (Публ. Л.А. Бассалыго, комментарий В.М. Тихомирова.)
20. ***Последнее интервью.*** [Беседа А.Н. Колмогорова с А.Н. Марутяном, 1983 г.] // Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове / Под общ. ред. В.М. Тихомирова, сост. Н.Х. Розов. — М.: ФАЗИС–МИРОС, 1999; 183–214. (Публ. и предисл. Н.Г. Рычковой; послесловие А.Н. Марутяна.)
21. ***From the “Last Interview” with A.N. Kolmogorov*** // The Mathematical Intelligencer, v. 23, № 1, Winter 2001; 30–38. (Публ. и пер. Н. Г. Химченко.)
22. ***Письмо академику А. И. Бергу*** // Колмогоров и кибернетика / Под ред. Д.А. Поспелова и Я.И. Фета. — Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2001, с. 115–118.

Приложение 3

Выступления А.Н. Колмогорова в открытой печати

1. ***Великий русский ученый-новатор (К 150-летию со дня рождения Николая Ивановича Лобачевского)*** // Известия, 2.11.1943.
2. ***Вода и воздух должны быть чистыми! (О чистоте р. Клязьмы)*** // Литературная газета, 30.06.1953 (совм. с П.С. Александровым).
3. ***Молодые силы науки (О научной работе студентов МГУ)*** // Комсомольская правда, 15.05.1955.
4. ***Вы выбрали науку*** // Московский университет, 1.09.1961.
5. ***Наука в поиске*** // Неделя, № 42, 1961; 10–11. (Репортаж Е. Манучарова и Е. Худякова с пресс-конференции А.Н. Колмогорова и И.С. Шкловского.)
6. ***Искусственные разумные существа возможны*** // Неделя, № 5, 1962; 8.
7. ***Наука требует горения*** // Известия, 21.02.1962.
8. ***Нужны ли научные школы?*** // Известия, 27.10.62.
9. ***Простоту сложному*** // Известия, 31.12.1962.
10. ***Обычная профессия: математик*** // Комсомольская правда, 2.03.1963.
11. ***Поиск таланта.*** (О работах молодых советских математиков) // Известия, 7.04.1963.
12. ***В добрый путь.*** (О развитии математики и подготовке кадров) // Правда, 8.09.1963.
13. ***Да здравствует математика!*** (Круглый стол “Недели”) // Неделя, 1964; № 3. (Репортаж В. Корнилова и В. Янкулина.)
14. ***Московское математическое общество*** // Правда, 19.10.1964 (совм. с А.Г. Курошем).
15. ***Что такое “культурный человек”?*** *(Вечер в МГУ, проведенный П.С. Александровым и А.Н. Колмогоровым)* // Неделя, 1965; № 1 (запись В. Янкулина).
16. ***Алгоритмы жизнелюбия*** // Комсомольская правда, 9.07.1965.
17. ***Любителям математики*** // Пионерская правда, 3.09.1965.
18. ***Брак в солидных обложках (О выпуске литературы по экономико-математическим методам)*** // Известия, 24.10.1965.
19. ***Впереди большие перспективы*** // Московский университет, 10.12.1965.
20. ***Ключи от лесной сторожки*** // Литературная газета, 16.08.1966.
21. ***Шаг в науку*** // Московский университет, 10.12.1966.
22. ***Опыт, задачи, перспективы*** // Московский университет, 8.12.1967.
23. ***Радость познавать мир (В связи с началом учебного года)*** // Правда, 1.09.1968.

24. ***Настольная книга исследователей (на соискание Ленинской премии)*** // Известия, 21.03.1970.
25. ***Слово к учителю. (Ученый: "Профессия непрерывной юности...".)*** [В связи с началом учебного года.] // Правда, 1.09.1971.
26. ***Вероятность не равна нулю (О контакте с внеземными цивилизациями)*** // Литературная газета, 20.09.1972.
27. ***Радость научного поиска*** // Смена, № 6, 1972; 14.
28. ***Путь в математику открыт*** // Московский университет, 8.04.1975. Перепеч.: [$Б_V$-159].
29. ***Все начинается с дороги (О собеседнике, старшем друге)*** // Литературная газета, 13.10.1976.
30. ***Как растить увлеченных.*** [О встрече акад. А.Н. Колмогорова с выпускниками ФМШ при МГУ – докторами наук.] // Известия, 28.01.1984. (Запись И. Преловской.)
31. ***Ответ ученикам.*** [Ответ на статью "*Жизнь во имя науки*", 26.04.1986.] // Учительская газета, 26.11.1987.
32. ***Научные связи с Францией.*** [Подзаголовок: *Академик А.Н. Колмогоров, член президиума Общества дружбы "СССР–Франция", почетный доктор Сорбонны.*] // Историко-математические исследования, вып. 32–33 / Отв. ред. А.П. Юшкевич. — М.: Наука, 1990; 487–489. Пер. с франц. статьи, опубликованной в московской газете "Les nouvelles de Moscou" от 17.02.1960, пер. А.П. Юшкевича.

Приложение 4

Содержание сборника "Колмогоров в воспоминаниях"*

(редактор-составитель А.Н. Ширяев. — М.: Наука, 1993)

Ширяев А.Н. *Андрей Николаевич Колмогоров (25.IV.1902–09.X.1987): Биографический очерк о жизни и творческом пути; 9–143.**

Арнольд В.И. *Об А.Н. Колмогорове; 144–172.**

Гнеденко Б.В. *Учитель и друг; 173–208.*

Никольский С.М. *Памяти А.Н. Колмогорова; 209–219.**

Тихомиров В.М. *Слово об учителе; 220–276.* Приложение: *Путешествия А.Н. Колмогорова; 276–279.*

Успенский В.А. *Колмогоров, каким я его помню; 280–384.***

Арато М. *А.Н. Колмогоров в Венгрии; 387–395.*

Беляев Ю.К. *Несколько воспоминаний об Андрее Николаевиче; 396–400.*

Боровков А.А. *Воспоминания, связанные с Андреем Николаевичем Колмогоровым; 401–406.*

Булинский А.В. *Некоторые штрихи к портрету А.Н. Колмогорова; 407–433.*

Доронина Т.А. *Рядом с Андреем Николаевичем; 434–444.*

Журбенко И.Г. *Кругосветное плавание 1971 года; 445–450.*

Катаев Г.И. *Об А.Н. Колмогорове (HOMO UNIVERSALES); 451–469.*

Матвеев Р.Ф. *Вспоминая Колмогорова; 470–474.*

Монин А.С. *Дороги в Комаровку; 475–492.*

Мышкис А.Д. *А.Н. Колмогоров: несколько воспоминаний; 493–500.*

Налимов В.В. *Десять лет совместно с Андреем Николаевичем; 501–518.*

Семенович А.Ф. *Воспоминания об А.Н. Колмогорове; 519–536.*

Синай Я.Г. *Воспоминания об А.Н. Колмогорове; 537–541.**

Ульянов П.Л. *Влияние Андрея Николаевича Колмогорова на мою жизнь; 542–572.**

Ченцов Н.Н. *Это непостижимое влияние Колмогорова; 573–582.*

---

* Звездочкой помечены статьи, опубликованные в переводе на английский язык в сб.: Kolmogorov in Perspective. Providence, RI / London: Amer. Math. Soc. / London Math. Soc., 2000. (См. приложение 6.)

** Статью В.А. Успенского можно найти также в кн.: В. А. Успенский. Труды по нематематике. — М.: ОГИ, 2002; 1068–1163.

Черкасов Р.С. *Андрей Николаевич Колмогоров и школьное математическое образование; 583–604.*

Юшкевич А.П. *Мои немногие встречи с А.Н. Колмогоровым; 605–617.*

Яглом А.М. *А.Н. Колмогоров глазами человека моего поколения; 618–630.*

БИБЛИОГРАФИЯ:

Общий список основных работ А.Н. Колмогорова; 633–687.

Статьи А.Н. Колмогорова в энциклопедических изданиях; 688–691.

Статьи А.Н. Колмогорова в журнале "Математика в школе"; 692–696.

Статьи А.Н. Колмогорова в журнале "Квант"; 697.

Статьи А.Н. Колмогорова по теории стиха и статистике текста; 698.

Научно-популярные работы А.Н. Колмогорова; 699–701.

Список статей А.Н. Колмогорова в газетах; 702–704.

Список выступлений А.Н. Колмогорова на заседаниях Московского математического общества; 705–709.

Содержание трех томов избранных трудов А.Н. Колмогорова; 710–718.

Об А.Н. Колмогорове; 719–724.

Список работ разных авторов, на которые даются ссылки в биографическом очерке о жизни и творческом пути А.Н. Колмогорова (стр. 9–143); 725–733.

Приложение 5

Содержание сборника “Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове” (составитель Н.Х. Розов, редактор В.М. Тихомиров, М.: МИРОС–ФАЗИС, 1999)

Слово к читателю (Н.Х. Розов, В.М. Тихомиров); 7–11.

Успенский В.А. *Явление чрезвычайное: великий ученый России Андрей Николаевич Колмогоров (25.04.1903–20.10.1987)*; 15–39. Содержит ***Список литературы*** на с. 37–39. Опубликована также в кн.: В.А. Успенский. Труды по нематематике. — М.: ОГИ, 2002; 1282–1306; и, под названием “Андрей Николаевич Колмогоров — великий ученый России”, в сб.: Очерки истории информатики в России / Ред.-сост. Д.А. Поспелов, Я.И. Фет. — Новосибирск: Научно-издат. центр ОИГГМ СО РАН, 1998, 1998; 484-505.

Гнеденко Б.В. *Учитель в математике, учитель в жизни*; 40–48.

Тихомиров В.М. *Гений, живший среди нас*; 49–76.

Монин А. С. *Колмогоровские рейсы*; 77–85.

А.Н. Колмогоров в воспоминаниях учеников ***(В. И. Арнольд, В.А. Успенский, А.Н. Ширяев, А.М. Абрамов)***; 86–96.

Абрамов А.М. *О педагогическом наследии А.Н. Колмогорова*; 99–135. (Содержит ***Библиографию работ А.Н. Колмогорова по педагогике***); 135–147.

Ершов А.П. *Компьютеризация школы и математическое образование*; 148–151.

Черкасов Р.С. *О научно-методическом вкладе А.Н. Колмогорова в школьное математическое образование*; 152–157.

Сосинский А.Б. *А.Н. Колмогоров и журнал “Квант”*; 158–161.

Егоров А.А. *А.Н. Колмогоров и колмогоровский интернат*; 162–166.

Васильев Н.Б. *А.Н. Колмогоров и математические олимпиады*; 167–172.

*Беседа с Андреем Николаевичем Колмогоровым (**А.Б. Сосинский**)*; 175–181.

*Ученик об учителе (**В.А. Успенский,** Интервью с академиком А.Н. Колмогоровым 8 июня 1983 г. в связи со столетием со дня рождения академика Н.Н. Лузина)*; 180–182.

*Последнее интервью (Беседа А.Н. Колмогорова с **А.Н. Марутяном,** автором документального фильма “Рассказы о Колмогорове”,* “Центрнаучфильм”, 1984. Публикация и предисловие *Н. Г. Рычковой,* послесловие *А.Н. Марутяна)*; 183–214.

Автобиография А.Н. Колмогорова *(факсимильный текст)*; 216–219.

Личный листок по учету кадров А.Н. Колмогорова *(факсимиле)*; 220–223.

Архивная справка *об участии академика А.Н. Колмогорова в экспедициях Института океанологии им. П.П. Ширшова АН СССР*; 224–227.

Отчет научного руководителя *гидрофизического раздела экспедиции (5-й рейс н.-и. с. "Дмитрий Менделеев")*; 228–231.

Письмо В.В. Голубеву; 232–233.

Два отзыва:
Отзыв на дипломную работу *студента Успенского В.А.*; 234–235.
Отзыв о дипломной работе *студента Р.З. Хасьминского*; 235.

Письмо в редакцию журнала "Строительство Москвы"; 236–237.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Успенский В.А. *Об исправлении некоторых опечаток и неточностей*; 238–242.

Богачев Л.В., Розов Н.Х. *Дополнения к колмогоровской библиографии*; 242–245.

Указатель имен; 246–256.

Отдельные высказывания ***А.Н. Колмогорова*** приведены на стр. 13, 97, 173, 215.

Приложение 6

Содержание сборника "Kolmogorov in Perspective".

History of Mathematics · Volume 20;
American Mathematical Society ·
London Mathematical Society
(translated from the Russian by Harold H. McFaden, 2000)

Preface; IX

Shiryaev A.N. *Andrei Nikolaevich Kolmogorov (April 25, 1903 to October 20, 1987). A Biographical Sketch of His Life and Creative Parths*; 1–88.

Arnol'd V.I. *On A. N. Kolmogorov;* 89–108.

Nikol'skii S.M. *In Memory of A. N. Kolmogorov;* 109–116.

Sinai Ya.G. *Remembrances of A. N. Kolmogorov;* 117–120.

Ul'yanov P.L. *The Influence of Andrei Nikolaevich Kolmogorov on My Life;* 121–140.

Aleksandrov P.S. *A Few Words on A. N. Kolmogorov;* 141–144.

Kolmogorov A.N. *Memories of P. S. Aleksandrov;* 145–162.

Kolmogorov A.N. *Newton and Contemporary Mathematical Thought;* 163–176.

Bibliography; 177–230.

Приложение 7

Содержание юбилейного издания *“КОЛМОГОРОВ”* в трех книгах

Книга I. ИСТИНА — БЛАГО.

В поисках истины. Предисловие. *А.Н. Ширяев*; 9–16.

Жизнь и творчество. Биографический очерк. *А.Н. Ширяев*; 17–19.
Детские и школьные годы (1903–1919); 20–28.
Студенческие и аспирантские годы (1920–1929); 29–46.
Тридцатые годы (1930–1939); 47–72.
Сороковые годы (1940–1949); 73–98.
Пятидесятые годы (1950–1959); 99–135.
Шестидесятые годы (1960–1969); 136–179.
Семидесятые и восьмидесятые годы (1970–1987); 180–193.
Послесловие; 194–200.
Дополнительный список работ разных авторов, на которые даются ссылки в очерке; 201–210.

Материалы к библиографии. *Составитель Н.Г. Химченко*; 211–214.
Curriculum vitae; 215–242.

Библиография; 243–246.
I. Основные математические работы (статьи, книги); 247.
Статьи; 247–269.
Книги; 269–272.
II. Статьи в энциклопедических изданиях; 273–276.
III. Доклады в Московском математическом обществе; 277–283.
IV. Статьи по исследованию русского стихосложения; 284–285.
V. Работы по педагогике; 286.
Учебники для средней школы; 286–292.
Статьи в журнале “Математика в школе”; 292–296.
Статьи в журнале “Квант”; 297.
Другие работы по педагогике; 298–300.
Работы редакционно-издательского характера по педагогике; 300–301.
VI. Статьи о математике и математиках; 302–308.
VII. Научно-популярные статьи и книги; 309–310.
VIII. Работы редакционно-издательского характера; 311–313.
IX. Другие работы А.Н. Колмогорова; 314.

Приложение 1. Содержание трех книг избранных трудов А.Н. Колмогорова; 315–323.
Приложение 2. Некоторые письма и интервью А.Н. Колмогорова; 324–325.
Приложение 3. Выступления А.Н. Колмогорова в открытой печати; 326–327.
Приложение 4. Содержание сборника “Колмогоров в воспоминаниях”; 328–329.
Приложение 5. Содержание сборника “Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове”; 330–331.
Приложение 6. Содержание сборника “Kolmogorov in Perspective”; 332.
Приложение 7. Содержание юбилейного издания “КОЛМОГОРОВ”; 333–335.
Приложение 8. Некоторые биографические материалы и статьи об А.Н. Колмогорове; 336.
Биографические материалы; 336.
Статьи об А.Н. Колмогорове; 337–345.

Указатель имен; 346–380.

Книга II. ЭТИХ СТРОК БЕГУЩИХ ТЕСЬМА...

Согласное биение сердец. Предисловие. *А.Н. Ширяев*; 9–14.

П.С. Александров. Избранные письма А.Н. Колмогорову; 15.
Письма 1931 года; 16–137.
Письма 1932 года; 138–207.
Письма 1934 года; 208–228.
Письма 1935 года; 229–252.
Письма 1936 года; 253–282.
Письма 1937 года; 283–285.
Письма 1939 года; 286–302.
Письма 1940 года; 303–320.
Письма 1941 года; 321–325.
Письма 1942 года; 326–406.

А.Н. Колмогоров. Избранные письма П.С. Александрову; 407.
Письма 1931 года; 408–437.
Письма 1932 года; 438–462.
Письма 1933 года; 463–466.

Письма 1934 года; 467–473.
Письма 1935 года; 474–485.
Письма 1941 года; 486–489.
Письма 1942 года; 490–581.
Письма 1943 года; 582–615.
Письма 1946 года; 616–623.
Письма 1948 года; 624–630.

Указатель имен; 631–671.

Книга III. ЗВУКОВ СЕРДЦА ТИХОЕ ЭХО...

Между тривиальным и недоступным. Предисловие. *А.Н. Ширяев*; 9–22.

Дневники 1943 года. Август–Декабрь; 23–147.

Дневники 1944–1945 годов; 148–209.

Указатель имен; 210–231.

Приложение 8

Некоторые биографические материалы и статьи об А.Н. Колмогорове

Биографические материалы

- ***Андрей Николаевич Колмогоров (биографическая справка)*** // Избранные труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985; 4–7. (Сост. В.М. Тихомиров.)
- ***Андрей Николаевич Колмогоров (биографическая справка)*** // А.Н. Колмогоров. Математика в ее историческом развитии / Под ред. В.А. Успенского, сост. Г.А. Гальперин. – М.: Наука, 1991; 216–221.
- ***Колмогоров Андрей Николаевич*** // Большая Советская Энциклопедия. 3-е изд., т. 12. — М.: Советская энциклопедия, 1973; 473.
- ***Колмогоров Анд. Ник.*** // Советский энциклопедический словарь. — М.: Советская Энциклопедия, 1981; 609.
- ***Kolmogorov, Andrey Nikolaevich*** // Encyclopaedia Britannica (www version), *http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/References/Kolmogorov.html*
- ***Андрей Николаевич Колмогоров*** // Страница в Интернете, сост. Н. Г. Химченко, *http://www.netcolony.com/arts/gidon/*.

- Документальный фильм **"Спрашивайте, мальчики"** (автор сценария Л. Гуревич, режиссер Г. Визитей, оператор М. Голдовская, 1970 г.).
- Документальный фильм "**Рассказы о Колмогорове"** (автор сценария и режиссер А. Марутян, оператор С. Рахомяги, "Центрнаучфильм", 1984 г.).

Статьи об А.Н. Колмогорове

1. ***А.Н. Колмогоров в воспоминаниях учеников*** *(А.М. Абрамов, В.И. Арнольд, В.М. Тихомиров, В.А. Успенский, А.Н. Ширяев)* // Квант, № 11–12, 1988; 2–11.
2. ***Абрамов А.М.*** *О педагогическом наследии А.Н. Колмогорова* // УМН, т. 43, вып. 6; 1988; 39–74.
3. ***Александров П.С.*** *Андрей Николаевич Колмогоров (к 60-летию со дня рождения)* // Вестник Моск. ун-та, сер. 1, матем. мех., № 3, 1963; 3–6.
4. ***Александров П.С.*** *Несколько слов об А.Н. Колмогорове* // УМН, т. 38, вып. 4, 1983; 7–10. Перепеч. в [$Б_{VI}$-91]; 7–10.
5. ***Александров П.С., Гнеденко Б.В.*** *Колмогоров как педагог* // УМН, т. 18, вып. 5, 1963; 115–120.
6. ***Александров П.С., Хинчин А.Я.*** *Андрей Николаевич Колмогоров (к 50-летию со дня рождения)* // УМН, т. 8, вып. 3, 1953; 178–200.
7. ***Александров П.С., Дынкин Е.Б., Петровский И.Г.*** *Лауреат премии Бальцана (академик А.Н. Колмогоров)* // Московская правда, 9.06.1963.
8. ***Аносов Д.В.*** *О работах А.Н. Колмогорова и В.И. Арнольда, получивших в 1965 г. Ленинскую премию* // Математика в школе, № 1, 1966; 7–12.
9. ***Анфилов Г.*** *Ученый, учитель* // Огонек, № 48, 1963; 11–13.
10. ***Арнольд В.И.*** *Несколько слов об Андрее Николаевиче Колмогорове* // УМН, т. 43, вып. 6, 1988; 37.
11. ***Батимелли, Вильпиани (Battimelli G., Vilpiani A.).*** *Kolmogorov, Heisenberg, von Weizsäcker, Onsager: un caso di scoperta simultanea* // Atti del III congresso nazionale di storia della fisica (Palermo, 11–16 ottobre 1982), 169–175.
12. ***Бачелор (Batchelor G.K.)*** *Kolmogorov's work in Turbulence* // Bull. London Math. Soc., v. 22, № 1, 1990; 47–51. См. [53].
13. ***Бергер, Бассалыго, Добрушин, Пинскер (Berger T., Bassalygo L.A., Dobrushin R.L., Pinsker M.S.).*** *Andreï Nikolaevich Kolmogorov (April 25, 1903 – October 20, 1987)* // IEEE Trans. Inform. Theory, v. 34, № 2, 1988; 173–175.
14. ***Бинэм (Bingham N.H.).*** *The work of A.N. Kolmogorov on strong limit theorems* // Теория вероятн. и ее примен., т. 34, вып. 1, 1989; 152–164.
15. ***Бинэм (Bingham N.H.).*** *Kolmogorov's work on probability, particularly limit theorems* // Bull. London Math. Soc., v. 22, № 1, 1990; 51–61. См. [53].

16. ***Бинэм (Bingham N.H.).*** *Measure into probability: from Lebesgue to Kolmogorov* // Biometrika, v. 87, № 1, 2000; 145–156.
17. ***Боголюбов Н.Н., Гнеденко Б.В., Соболев С.Л.*** *Андрей Николаевич Колмогоров (к 80-летию со дня рождения)* // УМН, т. 38, вып. 4, 1983; 11–26. Перепеч. в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Теория информации и теория алгоритмов. — М.: Наука, 1987; 7–23.
18. ***Боровков А.А., Соболев С.Л., Юринский В.В.*** *Глубина исследований, широта проблематики* // Наука в Сибири, 12.05.1983.
19. ***Бутягин А.*** *Выдающиеся ученые МГУ (о присуждении Сталинских премий)* // Учительская газета, 16.03.1941.
20. ***Ван Цвет (Van Zwet W.R.).*** *Andrei Nikolaevich Kolmogorov* // Ann. Roy. Neth. Acad. Sci., 1989; 161–171.
21. ***Ватанабе (Watanabe O.) (ed.).*** *Kolmogorov Complexity and Computational Complexity.* — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1992; 105 с.
22. ***Вахания Н.Н.*** *А.Н. Колмогоров и развитие теории вероятностных распределений в линейных пространствах* // Теория вероятн. и ее примен., т. 34, вып. 1, 1989; 197–202.
23. ***Витаньи (Vitányi P.M.B.).*** *Andrei Nikolaevich Kolmogorov* // CWI Quart., v. 1, 1988; 3–18.
24. ***Войчиньски (Woyczyński W.A.).*** *Andreï Nikolaevič Kolmogorov* // Wiadom. Mat. (2), v. 20, № 2, 1978; 167–172, на польск. яз.
25. ***В последний путь*** // Правда, 24.10.1987.
26. ***В последний путь*** // Известия, 25.10.1987.
27. ***Выдающиеся успехи советских математиков*** *(о присуждении Сталинских премий)* // Правда, 14.04.1941.
28. ***Гельфанд И.М.*** *Учитель и ученик* // Известия, 1965; № 5.
29. ***Гельфанд И.М., Никольский С.М., Соболев С.Л., Гнеденко Б.В., Прокофьев М.А., Разумовский В.Г., Ермолаева Н.А., Черкасов Р.С., Абрамов А.М.*** *Жизнь во имя науки* // Учительская газета, 26.11.1987.
30. ***Гнеденко Б.В.*** *Колмогоров А. Н.* // БСЭ-2, т. 22, 1953; 13.
31. ***Гнеденко Б.В., Смирнов Н.В.*** *О работах А.Н. Колмогорова по теории вероятностей (к 60-летию со дня рождения)* // Теория вероятн. и ее примен., т. 8, вып. 2, 1963; 167–174.
32. ***Гнеденко Б.В.*** *Андрей Николаевич Колмогоров (к 60-летию со дня рождения)* // Математика в школе, № 2, 1963; 67–68.
33. ***Гнеденко Б.В.*** *Колмогоров Андрей Николаевич* // БСЭ-3, т. 12, 1973; 437.
34. ***Гнеденко Б.В.*** *О работах А.Н. Колмогорова по теории вероятностей* // УМН, т. 18, вып. 5, 1963; 5–11.
35. ***Гнеденко Б.В.*** *Андрей Николаевич Колмогоров (к 70-летию со дня рождения)* // УМН, т. 28, вып. 5, 1973; 5–15 (библиография на с. 13–15).

36. ***Гнеденко Б.В.*** *Ученый и педагог (к 70-летию Андрея Николаевича Колмогорова)* // Математика в школе, № 2, 1973; 88–89.
37. ***Гнеденко Б.В.*** *Математик (о творческом пути А.Н. Колмогорова)* // Московский комсомолец, 6.05.1973.
38. ***Гнеденко Б.В.*** *Ученый, педагог, реформатор (к 75-летию со дня рождения А.Н. Колмогорова)* // Математика в школе, № 2, 1978; 93–94.
39. ***Гнеденко Б.В.*** *Андрей Николаевич Колмогоров (к 80-летию со дня рождения)* // Математика в школе, № 2, 1983; 76–78.
40. ***Гнеденко Б В.*** *Ученый, учитель, гражданин* // Математика в школе, № 5, 1990; 56–59.
41. ***Гольс, Лошак (Golse R., Lochak P.).*** *Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov 1903–1987* // Gaz. Math., № 35, 1988; 51–52.
42. ***Горбачев Н.И.*** *Алгоритм замечательного человека* // Учительская газета, 6.03.1977.
43. ***Горбачев Н.И.*** *Ищу увлеченных* // Учительская газета, 25.04.1978.
44. ***Горбачев Н.И.*** *Академик Колмогоров* // Смена, № 12, 1978. Перепеч. в кн.: Советские ученые. Очерки и воспоминания. — М.: Изд-во АПН, 1982; 277–293.
45. ***Горбачев Н.*** Алгоритм Колмогорова, или как родилась советская математическая школа // Союз, рождающий чудеса. — М.: Знание, 1978; 10–16. (Наука в твоей профессии. № 11.)
46. ***Дадли, Кук, Лиопис, Пьюг (Dudley R. M., Cook S. L., Liopis J., Peug N.P.).*** *A.N. Kolmogorov and statistics: A citation bibliography* // Ann. Statist., v. 18, № 3, 1990; 1017–1031.
47. ***Дуб (Doob J.L.).*** *Kolmogorov's early work on convergence theory and foundations* // Ann. Probab., v. 17, № 3, 1989; 815–821.
48. ***Дынкин (Dynkin E.B.).*** *Kolmogorov and the theory of Markov processes* // Ann. Probab., v. 17, № 3, 1989; 822–832.
49. ***Кендалл (Kendall D.G.).*** *Kolmogorov: The man and his work* // Bull. London Math. Soc., v. 22, № 1, 1990; 31–47. См. [53].
50. ***Кендалл (Kendall D.G.).*** *Kolmogorov as I remember him* // Statist. Sci., v. 6, № 3, 1991; 303–312.
51. ***Кендалл (Kendall D.G.).*** *Andrei Nikolaevich Kolmogorov (25 April 1903 – 20 October 1987)* // Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society, v. 37, 1991; 300–319.
52. ***Кендалл, Бачелор, Моффет (Kendall D., Batchelor G.K., Moffat H.K.).*** *Obituary. Dr. Andrei Kolmogorov. Giant of Mathematics* // The Times, 1987.
53. ***Кендалл и др. (Kendall D.G. , Batchelor G.K., Bingham N.H., Hayman W.K., Hyland J.M.E., Lorentz G.G., Moffatt H.K., Parry W., Razborov A.A., Robinson C.A., Whittle P.).*** Obituary:

Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903–1987) // Bull. London Math. Soc., v. 22, № 1, 1990; 31–100.
54. ***Кавер, Гач, Грэй (Cover T.M., Gacs P., Gray R.M.).*** *Kolmogorov's contribution to information theory and algorithmic complexity* // Ann. Probab., v. 17, № 3, 1989; 840–865.
55. ***К пятидесятилетию Андрея Николаевича Колмогорова*** // Изв. АН СССР, сер. матем., т. 1953; 181–188.
56. ***Lorentz G.G.*** *Superpositions, Metric Entropy, Complexity of Functions, Widths* // Bull. London Math. Soc., v. 22, № 1, 1990; 64–71. См. [53].
57. ***Михайлова И.*** *Слово об ученом (о киноленте "Рассказы о Колмогорове")* // Советский экран, № 22, 1984; 11.
58. ***Моффет (Moffatt H.K.).*** *KAM-theory* // Bull. London Math. Soc., v. 22, № 1, 1990; 71–73. См. [53].
59. ***Некролог:*** *Андрей Николаевич Колмогоров* // Математика в школе, № 6, 1987; 3–5.
60. ***Некролог:*** *Андрей Николаевич Колмогоров* // Правда, 23.10.1987.
61. ***Некролог:*** *Андрей Николаевич Колмогоров* // Известия, 24.10.1987.
62. ***Некролог:*** *Академик Андрей Николаевич Колмогоров* // Теория вероятн. и ее примен., т. 32, вып. 4, 1987; 773.
63. ***Некролог:*** *Андрей Николаевич Колмогоров (25 апреля 1903 – 20 октября 1987)* // Проблемы передачи информации, т. 24, вып. 2, 1987; 108–109.
64. ***Немчук Г.*** *Власть над числом (о жизни и деятельности А.Н. Колмогорова)* // Литературная газета, 16.08.1966.
65. ***Никольский С.М.*** *П. С. Александров и А.Н. Колмогоров в Днепропетровске* // УМН, т. 38, вып. 4, 1983; 37–50.
66. ***Никольский С.М., Соболев С.Л. и др.*** *Жизнь во имя науки* // Учительская газета, 26.11.1987.
67. ***Никольский С. М.*** *Воспоминания о Днепропетровске.* — Днепропетровск: Изд-во Днепропетр. ун-та, 1998.
68. ***Новиков С.П.*** *Воспоминания об А.Н. Колмогорове* // УМН, т. 43, вып. 6, 1988; 35–36.
69. ***O doktoracie honoris causa Uniwersytetu Warszawskiego A.N. Kolmogorowa*** // Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Ser. I: Wiadomości Matematyczne, III, 1959; 105–106.
70. ***Партасарати (Parthasarathy K.R.).*** *Obituary: Andrei Nikolaevich Kolmogorov.* — Indian Statistical Inst., Delhi, February 1988.
71. ***Партасарати (Parthasarathy K.R.).*** *Andrei Nikolaevich Kolmogorov* // J. Appl. Probab., v. 25, № 2, 1988; 445–450.
72. ***Пенков (Penkov B.).*** *Personliche Erinnerung an Andrei Nikolaevitsch Kolmogorov* // Probab. Theory Relat. Fields, v. 84, № 3, 1990; 427–428.

73. ***Писаревский Б.М., Харин В.Т.*** *А.Н. Колмогоров. Лицо математики XX века* // Беседы о математике и математиках. — М.: Изд-во “Нефть и газ”, 1998; 185 с.
74. [***Приветствие А.Н. Колмогорову от Московского математического общества и редакции журнала “Успехи математических наук”*** *в связи с 60-летием со дня рождения*] // УМН, т. 18, вып. 5, 1963; 3.
75. [***Приветствие А.Н. Колмогорову от Президиума АН СССР*** *в связи с 70-летием со дня рождения*] // УМН, т. 28, вып. 5, 1973; 3.
76. ***К 75-летию со дня рождения Андрея Николаевича Колмогорова. [Приветствие от Отделения математики АН СССР, Московского математического общества и редакционной коллегии журнала “Успехи математических наук”.]*** // УМН, т. 33, вып. 2, 1978; вклейка между с. 212–213.
77. ***Приветствие А.Н. Колмогорову от Московского математического общества*** [*в связи с 80-летием со дня рождения*] // УМН, т. 38, вып. 4, 1983; 3–5. Перепечатано в кн.: А.Н. Колмогоров. Избр. труды. Теория информации и теория алгоритмов. — М.: Наука, 1987; 4–6.
78. [***Приветствие А.Н. Колмогорову в связи с 80-летием со дня рождения***] // Теория вероятн. и ее примен., т. 28, вып. 2, 1983; 208.
79. ***Пэрри (Parry W.).*** *Entropy in ergodic theory — the initial years* // Bull. London Math. Soc., v. 22, 1990; 73–79.
80. ***Разборов (Razborov A.A.).*** *Kolmogorov and the complexity of algorithms* // Bull. London Math. Soc., v. 22, № 1, 1990; 79–82. См. [53].
81. ***Робинсон (Robinson C.A.).*** *The work of Kolmogorov on cohomology* // Bull. London Math. Soc., v. 22, № 1, 1990; 82–83. См. [53].
82. ***Рухин (Rukhin A L.).*** *Kolmogorov's contributions to mathematical statistics* // Ann. Statist., v. 18, № 3, 1990; 1011–1016.
83. ***Синай (Sinai Ya.G.).*** *About A. N. Kolmogorov's work on the entropy of dynamical systems* // Ergodic Theory Dynam. Systems., v. 8, № 4, 1988; 501–502.
84. ***Синай (Sinai Ya.G.).*** *Kolmogorov's work on ergodic theory* // Ann. Probab., v. 17, № 3, 1989; 833–839.
85. ***Синай Я.Г., Ширяев А.Н.*** *К 50-летию создания кафедры теории вероятностей Механико-математического факультета МГУ, основанной А.Н. Колмогоровым* // Теория вероятн. и ее примен., т. 34, вып. 1, 1989; 190–191.
86. ***Советские физики и математики*** // Известия, 31.01.1946.
87. ***Сотрудники кафедры теории вероятностей Механико-математического факультета МГУ*** *(к 95-летию великого ученого)* // Московский университет, № 7 (3823), апрель 1998.

88. ***Терпе (Terpe F.).*** *Andrej Nikolaevich Kolmogorov* // Mitt. Math. Ges. DDR, v. 1, 1985; 43–56.
89. ***Терпе (Terpe F.)*** *Andrej Nikolajevih Kolmogorov und die Hilbertschen Probleme* // Wiss. Z. Ernst-Moritz-Arndt-Univ. Greifsw., Math.-Natur. Reihe., v. 38, № 4, 1989; 54–58.
90. ***Тихомиров В. М.*** *Беззаветное служение науке* // Московский университет, 26.05.1983.
91. ***Тихомиров В.М.*** *Жизнь и творчество Андрея Николаевича Колмогорова* // УМН, т. 43, вып. 6, 1988; 3–33.
92. ***Тихомиров В.М., Юшкевич А.П.*** *Андрей Николаевич Колмогоров* // Вопросы истории естествознан. и техники, вып. 1, 1988; 170–173.
93. ***Тихомиров В.М.*** *А.Н. Колмогоров и теория приближений* // УМН, т. 44, вып. 1, 1989; 83–122.
94. ***Тихомиров В.М.*** *А.Н. Колмогоров и развитие математики* // Топологические и геометрические методы анализа. — Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1989; 3–11.
95. ***Тихомиров В.М.*** *Один из Лузитании* // Эврика, № 3, 1993; 41–42.
96. ***Тихомиров (Tikhomirov V. M.).*** *Andrei Nikolaevich Kolmogorov* // Ergodic Theory Dynam. Systems, v. 8, № 4, 1988; 493–499.
97. ***Тихомиров, Прохоров (Tikhomirov V., Prokhorov A.).*** *Le leg de l'Académicien Andreï Kolmogorov* // *RAIRO Rech. Oper.*, v. 22, № 2, 1988; 81–82.
98. ***Turbulence and Stochastic Processes: Kolmogorov's Ideas 50 Years on*** / Eds. J.C.R. Hunt, O.M. Phillips, and D. Williams. — London Roy. Soc., 1991. (Proc. Roy. Soc. London Ser. A, v. 434, № 1890.)
99. ***Уиттл (Whittle P.).*** *Kolmogorov's contributions to the theory of stationary processes* // Bull. London Math. Soc., v. 22, № 1, 1990; 83–89. См. [53].
100. ***Ульянов П.Л.*** *А.Н. Колмогоров и расходящиеся ряды Фурье* // УМН, т. 38, вып. 4, 1983; 51–90.
101. ***Успенский В.А.*** *К определению падежа по А.Н. Колмогорову* // Бюллетень Объединения по проблемам машинного перевода. —. Вып. 5. М.: [I МГПИИЯ], 1957; 11–18. Перепечатано в кн.: В.А. Успенский. Труды по нематематике. Т. 1. — М.: ОГИ, 2002; 291–303.
102. ***Успенский В.А.*** *Наш великий современник Колмогоров* // А.Н. Колмогоров. Математика в ее историческом развитии / Под ред. В.А. Успенского, сост. Г.А. Гальперин. — М.: Наука, 1991; 11–20.
103. ***Успенский (Uspensky V.A.).*** *Kolmogorov and mathematical logic* // J. Symbolic Logic. — v. 57, № 2, 1992; 385–412.

104. ***Успенский В.А.*** *"...Их имена неотделимы..." (из выступления 18 ноября 1997 г. при открытии мемориальных досок профессорам МГУ академикам П.С. Александрову и А.Н. Колмогорову на стене Главного здания Московского университета)* // Историко-математические исследования, сер. 2, вып. 4 (39), 1999; 185–188. Перепечатано в кн.: В.А. Успенский. Труды по нематематике. — М.: ОГИ, 2002; 1278–1281.

105. ***Успенский В.А.*** *Предварение для читателей "НЛО" к "Семиотическим посланиям" Андрея Николаевича Колмогорова* // Новое литературное обозрение, № 24, 1997; 124–216. Перепечатано в кн.: В.А. Успенский. Труды по нематематике. Т. 2. — М.: ОГИ, 2002; 615–745. [В издании 2002 г. впервые опубликована рукопись А.Н. Колмогорова "О возможном применении простейших представлений теории информации к исследованию стиха, художественной прозы, техники перевода" [$Б_{IV}$-13].]

106. ***Успенский В.А.*** *Два параграфа из статьи "Предварение для читателей "НЛО" к Семиотическим посланиям Андрея Николаевича Колмогорова"* // Очерки истории информатики в России / Ред.-сост. Д.А. Поспелов, Я.И. Фет. — Новосибирск: Научно-издат. центр ОИГГМ СО РАН, 1998; 130–137.

107. ***Успенский В. А.*** *Андрей Николаевич Колмогоров — великий ученый России* // Очерки истории информатики в России / Ред.-сост. Д.А. Поспелов, Я.И. Фет. — Новосибирск: Научно-издат. центр ОИГГМ СО РАН, 1998; 484–506.

108. ***Успенский В. А.*** *Колмогоров* // Новая философская энциклопедия. В 4 томах. Т. 2. — М.: Мысль, 2001; 272–274. Перепечатано в кн.: В.А. Успенский. Труды по нематематике. В 2 томах. Т. 1. — М.: ОГИ, 2002; 21–26. [Содержит список сочинений Колмогорова, имеющих философскую составляющую.]

109. ***Успенский В. А.*** *Труды по нематематике. С приложением семиотических посланий А.Н. Колмогорова автору.* В 2 томах. — М.: ОГИ, 2002.

110. ***Фриш У.*** *Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова.* — М.: ФАЗИС, 1998. (Библиотека математика. Вып. 4.) Пер. с англ.: U. Frisch. Turbulence. The Legacy of A.N. Kolmogorov. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996.

111. ***Хайланд (Hyland J.M.E.).*** *Kolmogorov's work on Logic* // Bull. London Math. Soc., v. 22, № 1, 1990; 61–64. См. [53].

112. ***Химченко (Рычкова) Н.Г.*** *Как это было...* // Колмогоров и кибернетика / Под ред. Д.А. Поспелова и Я.И. Фета. — Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2001, с. 77–82.

113. ***Ченцов (Chentsov N.N.).*** *The unfathomable influence of Kolmogorov* // Ann. Statist., v. 18, № 3, 1990; 987–998.
114. ***Шварц (Schwartz L.).*** *La vie et l'œuvre d'Andréi Kolmogorov* // C. r. Acad. sci. Paris Sér. Gén. Vie Sci., v. 6, № 6, 1989; 573–581.
115. ***Ширяев А.Н.*** *Первый заведующий (кафедрой теории вероятностей)* // Московский университет, 11.12.1985.
116. ***Ширяев А.Н.*** *О научном наследии А.Н. Колмогорова* // УМН, т. 43, вып. 6, 1988; 209–210.
117. ***Ширяев А.Н.*** *Андрей Николаевич Колмогоров: In Memoriam...* // Теория вероятн. и ее примен., т. 34, вып. 1, 1989; 5–118.
118. ***Ширяев (Shiryaev A.N.).*** *A.N. Kolmogorov: Life and creative activities* // Ann. Probab., v. 17, № 3, 1989; 866–944.
119. ***Ширяев А.Н.*** *"Существует лишь тонкий слой..." (из дневниковых записей Андрея Николаевича Колмогорова)* // Газ. "Миссия" (орган Ассоциации журналистов "Культура России"), № 1, сентябрь 1993; 12–13.
120. ***Shiryaev A.N.*** *Everything about Kolmogorov was unusual...*// Statist. Sci., v. 6, № 3, 1991; 313–318.
121. ***Ширяев (Shiryaev A.N.).*** *Kolmogorov and the Turbulence.* — Aarhus: MaPhySto — Centre for Mathematical Physics and Stochastics, 1989; 1–24. Miscellanea, № 12.
122. ***Юсин А.*** *Там, за поворотом, в Комаровке* // Советский спорт, 3.07.1970.
123. ***Юшкевич А.П.*** *А.Н. Колмогоров о предмете математике и ее истории (к 80-летию со дня рождения А.Н. Колмогорова)* // Вопросы истории естествознания и техники, вып. 3, 1983; 67–74.
124. ***Юшкевич (Yushkevich A.P.).*** *A.N. Kolmogorov: Historian and philosopher of mathematics. On the occasion of his 80th birthday* // Historia Math. (Orlando, FL, Academic Press), v. 10, № 4, 1983; 383–395.
125. ***Юшкевич А.П.*** *Об избрании А.Н. Колмогорова иностранным членом Академии наук Института Франции* // Историко-математические исследования, вып. 32–33 / Отв. ред. А.П. Юшкевич. — М.: Наука, 1990; 490–503.
126. ***Юшкевич А.П.*** *А.Н. Колмогоров о сущности математики и о периодизации ее истории* // Историко-математические исследования, № 35, 1994; 8–16.
127. ***Яглом (Yaglom A.M.).*** *A.N. Kolmogorov as a fluid mechanician and founder of a school in turbulence research* // Annual Rev. Fluid Mech., v. 26, 1994; 1–22.
128. ***Янин В.Л.*** *Колмогоров как историк* // УМН, т. 43, вып. 6, 1988; 189–195.

129. ***Янин В. Л.*** *Предисл. к кн.: Колмогоров А.Н. Новгородское землевладение XV в.* — М.: Наука, 1994.
130. ***Янкулин В.*** *О математике (об А.Н. Колмогорове)* // Неделя, 9.08.1970.
131. ***Янкулин В.*** *Математик* // Огонек, № 20, 1983; 26.
132. ***Ширяев А.Н.*** Жизнь в поисках истины // Природа, № 4, 2003.
133. ***Kramli A.*** Последний математик эпохи Возрождения. 100 лет назад родился Колмогоров // Мир природы, т. 134, № 4, 2003, на венг. яз.

УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН

От составителя. В настоящем **Указателе** мы приводим краткие сведения о людях, составлявших ближайшее окружение А.Н. Колмогорова, и о математиках, великих и мало известных, коллегах, учениках, чьи имена встречаются на страницах первой, биобиблиографической книги нашего трехтомного издания "*КОЛМОГОРОВ*". Основные труды указаны классикам. Не обо всех мы сумели найти достаточные и достоверные свидетельства, возможно, некоторые наши сведения окажутся неточными. Мы будем благодарны всем читателям, которые исправят наши невольные огрехи или пролью свет на те имена, которые оказались скрыты от нас.

При составлении **Указателя** мы пользовались следующими справочными изданиями:

— Большая Советская Энциклопедия, 3-е изд. — М.: Советская энциклопедия, 1978;
— Советский Энциклопедический словарь. — М.: Советская энциклопедия, 1981;
— Академия Наук СССР. Персональный состав. В 2 томах. — М.: Наука, 1974;
— Российская Академия Наук. 1724–1999. Электронная версия (http://hp.iitp.ru/win/pers_ac.htm), 2002;
— Математика в СССР за сорок лет (1917–1957). Т. 2: Биобиблиография. — М.: Физматгиз, 1959;
— Математика в СССР (1958–1967). В 2 томах. — М.: Наука, 1969, 1970;
— Mathematiker-Lexikon (von Prof. Herbert Meschkowski), Bibliographisches Institut Mannheim / Wien /Zürich, 1980;
— Выдающиеся математики. Биографический словарь-справочник (сост. А.И. Бородин, А.С. Бугай). — Киев: Радяньска школа, 1987;
— Математики, механики. Биографический справочник (сост. А.Н. Боголюбов). — Киев: Наукова думка, 1983.

А

Абрамов *Александр Михайлович* (р. 1946) — математик и педагог, чл.-корр. РАО, директор (до 2002 г.) Московского института развития образовательных систем, ученик и соавтор А.Н. Колмогорова по школьным учебникам.

Адамар (***Hadamard*** *Jacques Salomon*) (1865–1963) — французский математик, профессор университета в Париже и Политехнической школы, член Парижской АН (1912), иностр. член АН СССР (1922), почетный член (1929); иностранный член Московского математического общества (1923). Труды: по теории дифференциальных уравнений, теории функций, теории чисел, геометрии и механике.

Айвазян *Сергей Артемьевич* (р. 1934) — математик, профессор, зам. директора ЦЭМИ РАН.

Александер (***Alexander*** *James Waddell*) (1888–1971) — американский математик, профессор Принстонского университета (1928), с 1933 г. работал в Принстонском Институте перспективных исследований, член Национальной АН США и ряда иностранных академий.

Александров *Александр Данилович* (1912–1999) — математик, академик (1964), ректор Ленинградского университета (1952–1964). Основные труды: по геометрии и ее приложениям, основаниям теории относительности и философии естествознания. Сталинская премия (1942); золотая медаль им. Л. Эйлера (1991).

Александров *Михаил Сергеевич* (1885–1965) — брат П.С. Александрова, известный московский хирург.

Александров *Павел Сергеевич* (7.V.1896–16.XI.1982) — математик, основатель научной школы по топологии, чл.-корр. АН СССР (1929), академик АН СССР (1953), действительный член Академии педагогических наук СССР (1945); член Национальной АН США и многих других академий, Герой Соц. Труда (1969); Сталинская премия (1943). Один из первых учителей и самый близкий друг А.Н. Колмогорова на протяжении более полувека. С 1935 г. они вместе владели домом в Комаровке, где жили и работали большую часть времени.

Алексеев *Владимир Михайлович* (1932–1980) — математик, доктор физ.-матем. наук (1959), профессор Московского университета, ученик А.Н. Колмогорова.

Альбер *Соломон Иосифович* (р. 1931) — математик, окончил Томский университет (1953), кандидат физ.-матем. наук (1956), доцент (1964).

Андронов *Александр Александрович* (1901–1952) — физик, академик (1946); автор фундаментальных трудов и основатель научной школы по теории нелинейных колебаний и ее приложениям.

Аносов *Дмитрий Викторович* (р. 1936) — математик, чл.-корр. РАН (1990), академик РАН (1992), зав. кафедрой теории динамических систем Московского университета.

Арак *Тайво Викторович* (р. 1946) — математик, доктор физ.-матем. наук (1983), премия им. А.А. Маркова АН СССР за цикл работ по предельным теоремам теории вероятностей.

Арато *Матиаш* (***Arató*** *Mátyás*) (р. 1935) — венгерский математик, ученик А.Н. Колмогорова.

Арнольд *Владимир Игоревич* (р. 1937) — математик, чл.-корр. АН СССР (1984), академик РАН (1990), президент Московского математического общества, ученик А.Н. Колмогорова, профессор Московского университета и главный научный сотрудник МИАН*. Ленинская премия (1965, совместно с А.Н. Колмогоровым). Премия фонда Вольфа (2001) ("За выдающиеся достижения в математике и классической механике").

Арнольд *Игорь Владимирович* (1900–1948) — математик, профессор (1943), чл.-корр. АПН РСФСР, в 1930–1947 гг. работал в Московском университете; отец В.И. Арнольда.

---

* МИАН — Математический институт им. В.А. Стеклова Академии наук СССР, ныне — Российской академии наук.

Архангельский *Александр Владимирович* (р. 1938) — математик, профессор, ученик П.С. Александрова.

Асарин *Евгений Александрович* — математик, ученик А.Н. Колмогорова.

Б

Бабенко *Константин Иванович* (1919–1987) — математик, чл.-корр. АН СССР (1945), участник Великой Отечественной войны. Государственная премия СССР (1967), премия им. Н.Е. Жуковского АН СССР (1949).

Бавли *Григорий Минкелевич* (1908–1941) — математик, окончил Московский университет (1930) и аспирантуру там же (1935), ученик А.Н. Колмогорова, погиб в Великую Отечественную войну.

Баласанов *Юрий Григорьевич* (р. 1952) — математик, сотрудник колмогоровской лаборатории вероятностных и статистических методов Московского университета.

Бальцан (***Balzan*** *Eugene*) (1874–1953) — итальянский журналист и административный менеджер. На его средства в 1953 г. был организован премиальный фонд "Balzan Prize" для награждения выдающихся мировых деятелей в категориях, не охваченных премией Нобелевского фонда. Впервые премия присуждалась в 1961 г. В 1962 г. А.Н. Колмогоров был удостоен Бальцановской премии одновременно с Папой Иоанном XXIII, биологом К. фон Фришем, историком С. Морисоном и композитором П. Хиндемитом.

Банах (***Banach*** *Stefan*) (1892–1945) — польский математик, член Польской АН и чл.-корр. АН Украины, профессор и декан Львовского университета, родился и похоронен во Львове. Один из создателей современного функционального анализа.

Баренблатт *Григорий Исаакович* (р. 1927) — математик и механик, профессор (1962), ученик А.Н. Колмогорова, в настоящее время живет и работает в США.

Барздинь *Ян Мартинович* (р. 1937) — математик и кибернетик, профессор, ученик А.Н. Колмогорова, живет и работает в Латвии.

Бассалыго *Леонид Александрович* (р. 1941) — математик, профессор, ученик А.Н. Колмогорова.

Баутин *Николай Николаевич* (р. 1908) — математик, профессор (1957), работал в Горьковском исследовательском физико-техническом институте.

Бахвалов *Николай Сергеевич* (р. 1934) — математик, чл.-корр. АН СССР (1981), академик АН СССР (1991), профессор и зав. кафедрой вычислительной математики Московского университета.

Бахрушин *Сергей Владимирович* (1882–1950) — историк, профессор Московского университета, чл.-корр. АН СССР (1939), ученик В.О. Ключевского.

Белый, Андрей Белый (наст. имя ***Бугаев*** *Борис Николаевич* (1880–1934)) — писатель, один из ведущих представителей символизма.

Беляев *Юрий Константинович* (р. 1932) — математик, профессор, зав. Лабораторией теории вероятностей Московского университета (1970–1986), ученик А.Н. Колмогорова.

Бернштейн *Сергей Натанович* (1880–1968) — математик, академик АН СССР (1929) и Украины (1925); иностранный член Парижской АН; почетный член Московского (1940) и Ленинградского (1966) математических обществ. Основные труды: по теории дифференциальных уравнений, теории функций, теории вероятностей. Сталинская премия (1942).

Бернштейн *Ф.* (***Bernstein*** *Felix*) (1878–1956) — немецкий математик, профессор Гёттингенского университета (до 1933), позже эмигрировал в США.

Бермант *Анисим Федорович* (1904–1959) — математик, профессор (1933), зав. редакцией журнала *"Математический сборник"*.

Бернулли *Якоб* (***Bernoulli*** *Jacob*) (1654–1705) — один из представителей всемирно известного швейцарского семейства математиков. Труды: по исчислению бесконечно малых и теории вероятностей. Автор труда *"Ars Conjectandi"* (1713).

Берри (***Бэрри***) (***Berry*** *Andrew C.*) (р. 1906) — американский математик, профессор, работал в разных университетах США.

Биркгоф (***Birkhoff*** *Georg David*) (1884–1944) — американский математик, профессор Гарвардского университета, член Национальной АН США. Труды: по теории динамических систем, топологии; участник Первой топологической конференции 1935 г. в Москве.

Битюцков *Вадим Иванович* (1926–1999) — математик, с 1950 г. заведующий редакцией математики и астрономии *Большой Советской Энциклопедии*, ученик А.Н. Колмогорова.

Благовещенский *Юрий Николаевич* (р. 1934) — математик, профессор МГУ, сотрудник А.Н. Колмогорова в Межфакультетской лаборатории статистических методов МГУ в течение многих лет.

Блан-Лапьер (***Blanc-Lapierre*** *André*) (1915–2001) — французский математик и физик, член Парижской АН (1970), вице-президент (1983–1984), президент (1985–1986); кавалер Ордена Почетного Легиона.

Боголюбов *Николай Николаевич* (1909–1992) – математик и физик-теоретик, чл.-корр. АН СССР (1946), академик АН СССР (1953), Герой Соц. Труда (1969), директор Объединенного института ядерных исследований в Дубне (с 1965). Директор МИАН СССР (1983–1988). Основатель научных школ по нелинейной механике и теоретической физике. Участник Пагоушского движения. Сталинская премия (1947, 1953); Ленинская премия (1958). Золотая медаль им. М.А. Лаврентьева (1983), золотая медаль им. М.В. Ломоносова (1984), золотая медаль им. А.М. Ляпунова (1989).

Бокштейн *Меер Феликсович* (р. 1913) — математик, окончил МГУ (1936), ученик П.С. Александрова; докторскую диссертацию защитил в эвакуации в Казани (1942).

Больман (***Bohlmann*** *Georg*) (1869–1928) — приват-доцент Гёттингенского университета.

Большев *Логин Николаевич* (1922–1978) — математик, статистик, чл.-корр. АН СССР (1974), ученик А.Н. Колмогорова.

Бонди *Сергей Михайлович* (1891–1987) — литературовед, исследователь творчества А.С. Пушкина.

Бор *Х.* (***Bohr*** *Harald*) (1887–1951) — датский математик, профессор университета в Копенгагене, директор Математического института при этом университете, брат выдающегося физика Нильса Бора. Труды: по теории почти периодических функций.

Борель (***Borel*** *Felix-Emil*) (1871–1956) — французский математик, профессор Высшей нормальной школы и Сорбонны, директор Института Анри Пуанкаре, член Парижской АН, чл.-корр. АН СССР (1929), иностранный член Московского математического общества (1926). Труды: по математическому анализу, теории функций, математической физике и теории вероятностей.

Боровков *Александр Алексеевич* (р. 1931) — математик, чл.-корр. АН СССР (1966), академик РАН (1990), ученик А.Н .Колмогорова.

Бородачев *Николай Александрович* — математик, доктор технич. наук, сотрудник А.Н. Колмогорова в то время; в 1950–1960-х годах работал в МИАН СССР.

Булинский *Александр Вадимович* (р. 1952) — математик, профессор кафедры теории вероятностей Московского университета, ученик А.Н. Колмогорова.

Бурбаки (***Bourbaki*** *Nikolas*) — собирательный псевдоним группы французских математиков, образовалась в 1935 г. (первые члены: А. Картан, К. Шевалле, Ж. Дельсарт, Ж. Дьёдонне и А. Вейль) с целью дать систематическое изложение современной математики с позиций формально-аксиоматического метода Гильберта. Основной труд — многотомные *"Основания математики"* (*"Éléments de Mathématique"*), а также *"Очерки по истории математики"*.

Бэр (***Baire*** *René-Louis*) (1874–1932) — французский математик, чл.-корр. Парижской АН (1922), профессор университетов Монпелье и Дижона.

Бюргерс (***Burgers*** *Johannes Martinus*) (1895–1981) — голландский математик и механик, член Нидерландской АН, в 1955–1965 гг. профессор университета Сиэтла (США), член Американской Академии искусств и наук. Основные труды: по газовой динамике и физике плазмы.

В

Вавилов *Сергей Иванович* (1891–1951) — физик, академик (1932), президент АН СССР (1945–1951), первый директор Физического института АН СССР, первый председатель общества *"Знание"*, гл. редактор *БСЭ*. Труды: по физической оптике, по философии естествознания и истории науки. Сталинская премия (1943, 1946, 1951 и 1952 (посмертно)).

Валле-Пуссен (***de la Vallée Poussin*** *Charles*) (1866–1962) — бельгийский математик и физик, член Бельгийской и Парижской АН, профессор университета в Лёвене (1897–1957), почетный президент Всемирного математического обще-

ства. Основные труды: по теории множеств, аналитической теории чисел, теории тригонометрических рядов, теории приближений функций полиномами.

Ван дер Варден (***van der Waerden*** *Bartel Leendert*) (1903–1996) — голландский математик, профессор Гронингенского, Лейпцигского и Цюрихского университетов, ученик Э. Нётер. Широко известны его *"Алгебра"* (1930) и *"Математическая статистика"* (1957).

Варадан (***Varadhan*** *Srinivasa S. R.*) (р. 1940) — математик, профессор Нью-Йоркского университета, член Национальной АН США и Американской Академии искусств и наук.

Васильев *Николай Борисович* (1940–1998) — математик, сподвижник А.Н. Колмогорова по олимпиадному движению, член редколлегии журнала *"Квант"*.

Васильков *Дмитрий Алексеевич* (р. 1916) — математик, окончил МГУ (1938), ученик и сотрудник А.Н. Колмогорова по "стрельбной" тематике, работал в МИАН СССР.

Веблен (***Veblen*** *Oswald*) (1880–1960) — американский математик, с 1910 г. профессор Принстонского университета, первый директор Института перспективных исследований в Принстоне, с 1950 г. — заслуженный профессор этого института, член Национальной АН США, президент Американского математического общества (1923–1924).

Вейль *А.* (***Weil*** *André*) (1906–2000) — французский математик, член Парижской АН, профессор Принстонского университета, один из основателей группы Бурбаки, с 1958 г. — профессор Принстонского Института перспективных исследований.

Вейль *Г.* (***Weyl*** *Hermann*) (1885–1955) — немецкий математик и физик, профессор Берлинского и Гёттингенского, Цюрихского и Принстонского университетов, профессор Института перспективных исследований в Принстоне (1933–1955); член Национальной АН США. Труды: по теории функций, теории чисел, теории групп и ее применениям в физике.

Вейц *Борис Ефимович* (р. 1921) — математик и педагог, один из соавторов А.Н. Колмогорова по школьным учебникам.

Вентцель *Александр Дмитриевич* (р. 1937) — математик, доктор физ.-матем. наук, профессор, в настоящее время живет и работает в США.

Верченко *Иван Яковлевич* — математик, ученик А.Н. Колмогорова.

Вильде *Альберт Альбертович* — хозяин дома в Казани, в котором в эвакуации жили семейства П.С. Александрова и А.Н. Колмогорова.

Вильде *Володя* — внук А.А. Вильде, окончил школу в Казани в 1942 г., ушел на фронт (1942) и в том же году погиб.

Винер (***Wiener*** *Norbert*) (1894–1964) — американский ученый, один из основоположников кибернетики, профессор Массачусетского технологического института. Сформулировал основные положения кибернетики (*"Кибернетика"*); труды: по математическому анализу, теории вероятностей, электрическим сетям и вычислительной технике.

Виноградов *Виктор Владимирович* (1895–1969) — языковед, лингвист и литературовед, академик (1946). Директор Института языкознания АН СССР (1950–1954), Института русского языка АН СССР (1958–1968), гл. редактор журнала “Вопросы языкознания”. Сталинская премия (1951).

Виноградов *Иван Матвеевич* (1891–1983) — математик, академик АН СССР (1929), директор МИАН СССР (1932–1983). Член Лондонского Королевского общества, Парижской АН и многих других академий и научных обществ. Главный редактор серии “Математика в монографиях”, гл. редактор журнала “Известия АН СССР. Серия математическая”, гл. редактор “Математической энциклопедии”. Основные труды: в области аналитической теории чисел. Герой Соц. Труда (1945, 1971); Сталинская премия (1941); Ленинская премия (1972); золотая медаль им. М.В. Ломоносова (1970).

Винтнер (***Wintner*** *Aurel*) (1903–1958) — астроном и математик, окончил Лейпцигский университет, с 1930 г. работал в Университете Дж. Хопкинса в США (в 1946–1958 гг. — профессор этого университета). Основные труды: по математическому анализу, теории чисел, дифференциальным уравнениям, теории вероятностей.

Вистелиус *Андрей Борисович* (р. 1915) — геолог, доктор геолого-минералогических наук, специалист по применениям математических методов в геологии; профессор.

Витт *Александр Адольфович* (1902–1937) — математик, профессор (1935), работал в Московском университете.

Витушкин *Анатолий Георгиевич* (р. 1931) — математик, чл.-корр. АН СССР (1976), академик РАН (1991), ученик А.Н. Колмогорова. Государственная премия СССР (1967).

Власов *Алексей Константинович* (1808–1922) — математик, профессор Московского университета с 1917 г., один из первых учителей А.Н. Колмогорова.

Вовк *Владимир Григорьевич* — математик, окончил Московский университет (1983), ученик А.Н. Колмогорова, в настоящее время живет и работает в Англии.

Волосов *Владимир Маркович* (р. 1928) — математик, профессор (1964), сотрудник А.Н. Колмогорова по Лаборатории теории вероятностей.

Волфовитц (***Wolfowitz*** *Jacob*) (1910–1981) — американский математик польского происхождения, профессор Колумбийского, Корнеллского, Иллинойсского и др. университетов, член Национальной АН США и Американской Академии искусств и наук. Основные результаты: в теоретической статистике, теории информации.

Вольтерра (***Volterra*** *Vito*) (1860–1940) — итальянский математик и физик, профессор университетов Пизы, Турина, Рима, член Национальной академии деи Линчеи (президент этой академии в 1921–1926 гг.), организатор и первый президент Общества прогресса наук, почетный член АН СССР (1926). Труды: по теории дифференциальных уравнений в частных производных, теории упругости, интегральным и интегро-дифференциальным уравнениям, теории множеств, функциональному анализу.

Вольф (***Wolf*** *Ricardo*) (1887–1981) — изобретатель, дипломат и филантроп, один из основателей (1976) фонда Вольфа, присуждающего премии за выдающиеся достижения в математике, а также в агрономии, химии, медицине, физике и искусстве. Из советских математиков, кроме А.Н. Колмогорова (1980), премия фонда Вольфа присуждалась его ученикам И.М. Гельфанду (1978), Я.Г. Синаю (1996/97) и В.И. Арнольду (2001), а также М.Г. Крейну (1982).

Вул *Бенцион Моисеевич* (1903–1985) — физик, чл.-корр. АН СССР (1939), академик (1972), Герой Соц. Труда (1969). Основные труды: по физике диэлектриков и полупроводников; Сталинская премия (1946), Ленинская премия (1964).

Выгодский *Марк Яковлевич* (1898–1965) — математик, профессор Московского университета (1931–1941 и 1945–1946), в 1931 г. — директор НИИ математики и механики МГУ, один из создателей советской историко-математической научной школы, первый доктор наук по специальности "история математики" (1933).

Г

Гальперин *Григорий Александрович* (р. 1953) — математик, ученик А.Н. Колмогорова, в настоящее время живет и работает в США.

Гальперн *Самарий Александрович* (1904–1977) — математик, учился в МГУ с А.Н. Колмогоровым, ученик И.И. Привалова; работал на кафедре дифференциальных уравнений МГУ с 1932 г., профессор (1962).

Гамильтон (***Hamilton*** *William Rowan*) (1805–1865) — ирландский математик, иностранный член Петербургской АН (1837); фундаментальные труды по теории чисел и классической механике.

Гантмахер *Феликс Рувимович* (1908–1964) — математик и механик, профессор (1938), с 1938 г. работал в МИАН СССР, в 1942–1946 гг. руководил отделом в ЦАГИ.

Гаспаров *Михаил Леонович* (р. 1935) — филолог и лингвист; труды: в области классической филологии, древней истории и общей поэтики и теории перевода, чл.-корр. РАН (1990), академик РАН (1992).

Гельфанд *Израиль Моисеевич* (р. 1913) — математик, чл.-корр. АН СССР (1953), академик АН СССР (1984), член Национальной АН США, Парижской АН и многих других академий мира, ученик А.Н. Колмогорова. Основные труды: в области функционального анализа, математической физики, прикладной математики. Сталинская премия (1951), премия фонда Вольфа (1978); в настоящее время живет и работает в США.

Гельфонд *Александр Осипович* (1906–1968) — математик, чл.-корр. АН СССР (1939), чл.-корр. Международной академии истории наук (1963), профессор и зав. кафедрой теории чисел Московского университета. Основные труды: в области теории чисел и теории функций.

Гильберт (***Hilbert*** *David*) (1862–1943) — немецкий математик, один из величайших математиков XX столетия, профессор Кёнигсбергского и Гёттингенского университетов, почетный академик Берлинской АН, чл.-корр. АН СССР (1922),

почетный член АН СССР (1934), иностранный член Московского математического общества (1904). Фундаментальные труды по теории инвариантов, основаниям геометрии, теории алгебраических чисел, вариационному исчислению, теории дифференциальных и интегральных уравнений, математической физике.

Гирсанов *Игорь Владимирович* (1932–1967) — математик, зав. отделом колмогоровской межфакультетской лаборатории статистических методов Московского университета. Трагически погиб в горах.

Гихман *Иосиф Ильич* (1918–1985) — математик, профессор Киевского университета, чл.-корр. АН УССР (1965), участник Великой Отечественной войны.

Глаголев *Нил Александрович* (1888–1945) — математик и логик, работал в Московском университете с 1916 г., профессор (1931), член Московского математического общества (1921).

Гливенко *Валерий Иванович* (1897–1940) — математик, профессор (1928), зав. кафедрой Московского индустриально-педагогического института им. К. Либкнехта. Основные труды: по теории вероятностей и математической статистике.

Гнеденко *Борис Владимирович* (1912–1995) — математик, академик АН УССР (1948), профессор и зав. кафедрой теории вероятностей Московского университета (1966–1995), ученик А.Н. Колмогорова и А.Я. Хинчина. Основные труды: в области классической и прикладной теории вероятностей, истории математики. Почетный член Королевского Статистического общества Великобритании. Премия им. П.Л. Чебышева АН СССР (совм. с А.Н. Колмогоровым) (1949). Государственная премия СССР (1979).

Головин *Олег Николаевич* (р. 1916) — математик, профессор Московского университета (1966).

Голубев *Владимир Васильевич* (1884–1954) — математик и механик, чл.-корр. АН (1934), генерал-майор инженерных войск, первый декан Механико-математического факультета МГУ, член Московского математического общества (1911); ученик Д.Ф. Егорова. Труды: по теории функций и аэромеханике.

Гонзет (***Gonseth*** *Ferdinand*) (1880–1975) — математик, профессор университета в Цюрихе.

Гончар *Андрей Александрович* (р. 1931) — математик, чл.-корр. АН СССР (1974), академик АН СССР (1987), член Президиума РАН, вице-президент РАН (1991–1998). Основные труды: по теории функций и теории приближений. Золотая медаль им. М.В. Келдыша (1993).

Гончаров *Василий Леонидович* (1896–1955) — математик и педагог, профессор, чл.-корр. АПН РСФСР (1944).

Гордеев *Дмитрий Иванович* (р. 1940) — математик, ученик А.Н. Колмогорова. Ныне художник, член МОСХ.

Гордон *Израиль Исаакович* (р. 1910) — математик, окончил Ленинградский университет (1931), кандидат физ.-матем. наук (1938), с 1944 г. работал в Горьковском университете.

Гротендик (***Grothendieck*** *Alexander*) (р. 1928) — французский математик немецкого происхождения, профессор Парижского университета. (В 1944 г. его вывезли полуживого и не помнящего даже своего имени из фашистского гетто;

его усыновил и дал ему свое имя голландец Гротендик; ООН выдала ему паспорт *гражданина мира*.) Медаль им. Дж. Филдса (1966), медаль им. Э. Пикара (1977).

Гусев *Валерий Александрович* (р. 1942) — математик и методист, зав. кафедрой Московского государственного педагогического университета, один из соавторов А.Н. Колмогорова по школьным учебникам.

Гутер *Рафаил Самуилович* (р. 1919) — математик, окончил МГУ (1941), работал в Военно-инженерной академии.

Гюнтер *Николай Максимович* (1871–1941) — математик, чл.-корр. АН СССР (1922), профессор Петербургского (позднее Ленинградского) университета. Работы: по теории дифференциальных уравнений, математической физике, теории потенциала.

Д

Данжуа (*Denjoy Arnaud*) (1884–1974) — французский математик, профессор Парижского университета (1922), член Парижской АН (1942) и ее президент (с 1962), иностранный член АН СССР (1971) и иностранный член Московского математического общества (1926). Золотая медаль им. М.В. Ломоносова (1971). Основные труды: по теории функций.

Дармуа (***Darmois*** *Georges*) (1888–1960) — французский математик, президент Международного статистического института (ISI) в 1953–1960 гг., член Парижской АН (1955).

Двойченков *А.Н.*— математик, ученик А.Н. Колмогорова.

Дворецкий (***Dvoretzky*** *Aryeh*) — математик, профессор Вейцмановского института в Израиле.

Дёблин (***Doeblin*** *Wolfgang*) (1915–1940) — французский математик немецкого происхождения, был призван во французскую армию и покончил с собой перед опасностью немецкого плена. Математические работы переслал на хранение в Парижскую АН. Были впервые опубликованы профессором Бернаром Брю в 2000 г.

Делоне *Борис Николаевич* (1890–1980) — математик, чл.-корр. АН СССР (1939), зав. кафедрой высшей геометрии МГУ (1935–1943); мастер спорта по альпинизму (1937). Труды: по геометрии, теории чисел, математической кристаллографии.

Демидов *И.Т.* — математик и педагог, один из соавторов А.Н. Колмогорова по школьным учебникам.

Демидович *Борис Павлович* (1906–1977) — математик, работал в Московском университете с 1935 г., профессор (1963).

Дёринг (***Deuring*** *Max Friedrich*) (1907–1984) — немецкий математик, профессор Гёттингенского университета, ученик Э. Нетер.

Дмитриев *Николай Александрович* (1924–2000) — математик и физик, ученик А.Н. Колмогорова, принимал непосредственное участие в *"Атомном проекте"* СССР.

Добрушин *Роланд Львович* (1929–1995) — математик, профессор и зав. лабораторией ИППИ АН СССР, ныне носящей его имя. Ученик А.Н. Колмогорова, член Национальной АН США.

Долженко *Евгений Прокофьевич* (р. 1934) — математик, окончил Луганский университет и аспирантуру при МГУ (1960), профессор Московского университета (1967).

Драгалин *Альберт Григорьевич* (1941–1998) — математик, работал в Московском университете, профессор, соавтор А.Н. Колмогорова по учебникам математической логики.

Дуб (***Doob*** *Joseph Leo*) (р. 1910) — американский математик, профессор Иллинойсского университета, член Национальной АН США.

Дудницын *Юрий Павлович* — математик и педагог, заслуженный учитель РФ, один из соавторов А.Н. Колмогорова по школьным учебникам.

Дынкин *Евгений Борисович* (р. 1924) — математик, профессор, ученик А.Н. Колмогорова. В настоящее время живет и работает в США, член Национальной АН США.

Е

Егоров *Андрей Александрович* (р. 1939) — математик, сподвижник А.Н. Колмогорова по олимпиадному движению, школе-интернату при МГУ и журналу “Квант”.

Егоров *Дмитрий Николаевич* (1878–1931) — историк и библиотековед, чл.-корр. АН СССР (1928), отец А.Д. Колмогоровой (Егоровой).

Егоров *Дмитрий Федорович* (1869–1931) — математик, чл.-корр. АН СССР (1924), почетный член АН СССР (1929), профессор Московского университета (1903), первый директор НИИ математики и механики МГУ (1923–1930), член (1893) Московского математического общества и президент (1922–1930). Труды: по дифференциальной геометрии, теории интегральных уравнений, вариационному исчислению, теории функций вещественного переменного. В 1910 г. организовал в МГУ первый большой математический семинар.

Егорова (***Колмогорова***) *Анна Дмитриевна* (1.X.1903–16.IX.1988) — жена А.Н. Колмогорова.

Ерохин *Владислав Дмитриевич* (1935–1961) — математик, ученик А.Н. Колмогорова, трагически погиб в горах.

Ефимов *Николай Владимирович* (1910–1982) — математик, профессор МГУ (1946), одно время декан Механико-математического факультета МГУ, чл.-корр. АН СССР (1978). Ленинская премия (1966).

Ж

Жирмунский *Виктор Максимович* (1891–1971) — филолог, чл.-корр. АН СССР (1939), академик АН СССР (1966).

Жолковский *Александр Константинович* (р. 1937) — филолог, прозаик. Автор монографий по лингвистике и литературоведению. Окончил филологический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова (1959) и аспирантуру Института восточ-

ных языков при МГУ (1966). В настоящее время живет и работает в США. Профессор Университета Южной Калифорнии.

Журбенко *Игорь Георгиевич* (р. 1938) — математик, профессор, ученик А.Н. Колмогорова, зав. лабораторией математической статистики МГУ; в настоящее время живет и работает в США.

Жюлиа (***Julia*** *Gaston*) (1893–1978) — французский математик, профессор университета в Париже и член Парижской АН. "Гран-при" этой Академии за работу о множествах, носящих его имя.

З

Зализняк *Андрей Анатольевич* (р. 1935) — филолог и лингвист в области русского и славянского языкознания, структурной грамматики и истории русского языка, восточнославянской и общеславянской акцентологии, исследований древнерусских рукописей; чл.-корр. АН СССР (1987), академик РАН (1997).

Заремба (***Zaremba*** *Stanislaw*) (1863–1942) — польский математик (родился в России), профессор Краковского университета, член Польской АН, чл.-корр. АН СССР (1924), один из создателей Польского математического общества. Труды: по математической физике, теории дифференциальных уравнений, теории рядов.

Засухин *Виктор Николаевич* (1915–1941) — математик, ученик А.Н. Колмогорова, погиб на фронте.

Зигель (***Siegel*** *Karl*) (1896–1981) — немецкий математик, профессор университета И.-В. Гёте во Франкфурте (1922), Гёттингенского (1937–1940 и с 1951) и Принстонского (1940–1951) университетов. Основные труды: по теории чисел, комплексному анализу, небесной механике.

Зигмунд (***Zygmund*** *Antoni*) (1900–1992) — польский математик, член Польской АН, член Национальной АН США, профессор Варшавского и Чикагского университетов.

Золотарев *Владимир Михайлович* (р. 1931) — математик, доктор физ.-матем. наук, профессор, ученик А.Н. Колмогорова.

И

Ибрагимов *Ильдар Абдуллович* (р. 1932) — математик, чл.-корр. РАН (1990), академик РАН (1997), член Бюро Отделения математики РАН. Основные труды по теории вероятностей и математической статистике.

Ива́нов *Вячеслав Всеволодович* (р. 1929) — филолог и лингвист в области поэтики, истории и теории литературы, фольклора и мифологии, изобразительного искусства, кино, культурологии, истории науки; профессор и зав. кафедрой Московского университета, директор Библиотеки иностранной литературы, чл.-корр. АН СССР (1989), академик РАН (2000); живет и работает в США.

Ивашев-Мусатов *Олег Сергеевич* (р. 1927) — математик, доцент Московского университета, сын А.Д. Колмогоровой и С.М. Ивашева-Мусатова, ученик А.Н. Колмогорова.

Ивлев *Борис Михайлович* (1946–1990) — математик и педагог, сотрудник А.Н. Колмогорова по школе-интернату, один из его соавторов по школьным учебникам.

Иоффе *Абрам Федорович* (1880–1960) — физик, чл.-корр. Российской АН (1918), академик Российской АН (1920), вице-президент АН СССР (1942–1945); первый директор Физико-технического института и Института полупроводников; один из основателей советской физической школы. Труды: по прочности, пластичности, электропроводности твердого тела. Герой Соц. Труда (1955), Сталинская премия (1942), Ленинская премия (1961 — посмертно).

Ито (***Itô*** *Kiosi*) (р. 1915) — японский математик, профессор университета в Киото и Корнеллского университета в США, один из основоположников стохастического исчисления.

К

Каган *Вениамин Федорович* (1869–1953) — математик, профессор МГУ (1923), член Московского математического общества (1923); зав. кафедрой дифференциальной геометрии МГУ; Сталинская премия (1943).

Кантелли (***Cantelli*** *Francesco Paolo*) (1875–1966) — итальянский математик, профессор Римского университета (1931), член Национальной академии деи Линчеи, основатель Итальянского института актуариев (1929) и гл. редактор журнала института (*"Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari"*) (1930–1958). Труды: по небесной механике, теории вероятностей и актуарной математике.

Канторович *Леонид Витальевич* (1912–1986) — математик и экономист, чл.-корр. АН СССР (1958), академик АН СССР (1964). Основные труды: по функциональному анализу, вычислительной математике; положил начало линейному программированию, один из создателей теории оптимального планирования и управления. Сталинская премия (1949), Ленинская премия (1965), Нобелевская премия по экономике (1975).

Капица *Петр Леонидович* (1894–1984) — физик, академик АН СССР (1939), основатель и директор Института физических проблем АН СССР, создатель советской физической школы физики низких температур и физики сильных магнитных полей, дважды Герой Соц. Труда (1945, 1974), иностранный член многих академий и научных обществ. Сталинская премия (1941, 1943); золотая медаль им. М.В. Ломоносова (1959). Нобелевская премия по физике (1978).

Каратеодори (***Carathéodory*** *Constantin*) (1873–1950) — немецкий математик греческого происхождения, профессор Гёттингенского, Берлинского университетов (1913–1918), Афинского университета (до 1924) и Мюнхенского университета (1924–1938). Труды: по теории функций, теории меры и вариационному исчислению; дал аксиоматическое построение основ термодинамики.

Карацуба *Анатолий Алексеевич* (р. 1937) — математик, профессор Московского университета, работает в МИАН.

Картан *А.* (***Cartan*** *Henri Paul*) (р. 1904) — французский математик, член Парижской АН (1974), в 1931–1940 гг. преподавал на Страсбургском факультете

наук, позже — профессор Парижского университета; президент Международного математического союза (1966–1970), член Лондонского Королевского общества и Национальной АН США, один из создателей группы Н. Бурбаки.

Картан *Э.* (***Cartan*** *Elie*) (1869–1951) — французский математик, член Парижской АН, профессор Сорбонны (1912). Труды: по теории групп, дифференциальным уравнениям, геометрии. Отец А. Картана.

Кастельнуово (***Castelnuovo*** *Guido*) (1865–1952) — итальянский математик, профессор Римского университета, президент Национальной академии деи Линчеи. Труды: по математическому анализу, проективной геометрии, алгебре и алгебраической геометрии.

Катаев *Николай Матвеевич* — отец А.Н. Колмогорова, сын сельского священника из Вятской губернии, окончил Петровскую (ныне Тимирязевскую) академию, участвовал в народническом движении, был выслан в Ярославль, где работал земским статистиком. С Марией Яковлевной Колмогоровой состоял в гражданском браке. Погиб (пропал без вести) в 1919 г. во время Гражданской войны.

Кац (***Кас*** *Marc*) (1914–1984) — американский математик, член Национальной АН США, с 1961 г. профессор и член Рокфеллеровского института. Премия им. Дж. Биркгофа (1978).

Келдыш *Людмила Всеволодовна* (1904–1976) — математик, ученица Н.Н. Лузина, доктор физ.-матем. наук, профессор Московского университета, работала в МИАН СССР с 1934 г., сестра М.В. Келдыша и жена П.С. Новикова.

Келдыш *Мстислав Всеволодович* (1911–1978) — математик и механик, чл.-корр. АН СССР (1943), академик АН СССР (1946), вице-президент АН СССР (1960), президент АН СССР (1961–1975), директор Института прикладной математики АН СССР, теперь носящего его имя. Фундаментальные труды: по теории функций комплексного переменного, функциональному анализу, аэрогидродинамике и теории колебаний. Герой Соц. Труда (1956, 1961, 1971); Сталинская премия (1942, 1946); Ленинская премия (1957); золотая медаль им. К.Э. Циолковского (1972), золотая медаль им. М.В. Ломоносова (1975).

Кикоин *Исаак Константинович* (1908–1984) — физик, академик (1953), один из основателей (вместе с А.Н. Колмогоровым) физико-математической школы-интерната при МГУ и журнала “Квант”. Труды: по атомной физике и технике, обнаружил *эффект Кикоина–Носкова*. Герой Соц. Труда (1951), Сталинская премия (1942, 1949, 1951, 1953), Государственная премия СССР (1967), Ленинская премия (1959).

Кириллов *Александр Александрович* (р. 1936) — математик, профессор Московского университета, в настоящее время живет и работает в США.

Кифер (***Kiefer*** *Jack Carl*) (1924–1981) — американский математик, профессор Корнеллского и Калифорнийского (Беркли) университетов, член Американской Академии искусств и наук и Национальной АН США (1975). Труды: по математической статистике.

Козлинский *Владимир Иванович* — театральный художник, один из совладельцев (вместе с П.С. Александровым и А.Н. Колмогоровым) Комаровского дома.

Козлов *Валерий Васильевич* (р. 1950) — математик и механик, чл.-корр. РАН (1997), академик (2000), вице-президент РАН (с 2001), зав. кафедрой математической статистики и теории случайных процессов Московского университета.

Козлов *Василий Васильевич* (р. 1954) — математик, кандидат физ.-матем. наук, преподаватель кафедры теории вероятностей Московского университета, ученик А.Н. Колмогорова.

Козлов *Михаил Васильевич* (р. 1943) — математик, доцент кафедры математической статистики и теории случайных процессов Московского университета, ученик А.Н. Колмогорова.

Колмогоров *Степан Петрович* — прадед Андрея Николаевича Колмогорова, получивший дворянство.

Колмогоров *Яков Степанович* — предводитель угличского дворянства, попечитель гимназий Ярославской губернии, сын С.П. Колмогорова, дед Андрея Николаевича Колмогорова (в доме Я.С. Колмогорова А.Н. вырос).

Колмогоров *Степан Яковлевич* — дядя А.Н. Колмогорова, брат его матери и его крестный отец; жил в Петербурге.

Колмогорова (***Егорова***) *Анна Дмитриевна* (1.X.1903–16.IX.1988) — жена А.Н. Колмогорова.

Колмогорова *Варвара Яковлевна* (1869–1943) — сестра матери А.Н. Колмогорова.

Колмогорова *Вера Яковлевна* (1863–1951) — сестра матери А.Н. Колмогорова, усыновившая и воспитавшая его (жила вместе с А.Н. Колмогоровым до своей кончины).

Колмогорова *Мария Яковлевна* (1871–1903) — мать А.Н. Колмогорова, младшая из шести дочерей Якова Степановича Колмогорова. Окончила Ярославскую женскую гимназию с особыми успехами по математике и правом преподавать этот предмет в начальных училищах и при частной практике. При рождении А.Н. Колмогорова скончалась.

Колмогорова *Надежда Яковлевна* (1865–1952) — сестра матери А.Н. Колмогорова, врач, единственная из сестер Колмогоровых, получившая высшее образование (окончила Женский медицинский институт в Петербурге).

Колмогорова *Ольга Яковлевна* — приемная дочь Варвары Яковлевны Колмогоровой.

Кольман *Арношт* (*Эрнст Яромирович*) (1892–1979) — ученый в области истории и философии математики, чех по происхождению; в те годы работал в СССР, заведовал отделом науки МК ВКП(б).

Кондурарь *Владимир Трифонович* (р. 1911) — математик, ученик А.Н. Колмогорова.

Кон-Фоссен (***Cohn-Vossen*** *Stefan*) (1902–1936) — немецкий математик польского происхождения, профессор Гёттингенского и Кёльнского университетов; с 1934 г. работал в Ленинградском университете и МИАН СССР.

Королюк *Владимир Семенович* (р. 1925) — математик, академик АН Украины, профессор Киевского университета, ученик Б.В. Гнеденко.

Космодемьянский *Аркадий Александрович* (1909–1988) — механик, профессор Московского университета (1939) и Института истории естествознания и техники АН СССР, чл.-корр. Международной академии истории наук.

Коши (***Cauchy*** *Augustin Louis*) (1789–1857) — французский математик, почетный член Петербургской АН (1831), один из основоположников теории аналитических функций. Труды: по математическому анализу, теории дифференциальных уравнений, математической физике, теории чисел, геометрии.

Крамер (***Cramér*** *Harald*) (1893–1985) — шведский математик, профессор Упсальского университета. Основные труды: по теории чисел, теории вероятностей и математической статистике.

Красносельский *Марк Александрович* (1920–1997) — математик, профессор Воронежского университета (1952–1969); премия им. А.А. Андронова (1983).

Крейн *Марк Григорьевич* (1907–1989) — математик, чл.-корр. АН УССР (1939); премия фонда Вольфа (1982).

Кронрод *Александр Семенович* (1921–1986) — математик, окончил МГУ, доктор физ.-матем. наук, профессор, участник Великой Отечественной войны.

Крылов *Николай Митрофанович* (1879–1955) — математик и механик, чл.-корр. АН СССР (1928), академик АН СССР (1929), член Московского математического общества (1922).

Кудрявцев *Всеволод Александрович* (1885–1953) — математик, профессор МГУ, член Московского математического общества (1923).

Кузнецов *Петр Саввич* (1899–1968) — филолог, профессор МГУ, рос и воспитывался в доме деда А.Н. Колмогорова с раннего детства.

Купрадзе *Виктор Дмитриевич* (1903–1985) — математик, профессор (1935), академик АН Грузии (1947), член президиума АН Грузии, Председатель Верховного Совета ГрузССР (с 1955).

Курант (***Courant*** *Richard*) (1888–1972) — немецкий математик, профессор Гёттингенского университета, в 1933 г. эмигрировал в США, профессор Нью-Йоркского университета, член Национальной АН США, иностранный член АН СССР (1966). Труды: по теории конформных отображений, математической физике, дифференциальным уравнениям.

Курош *Александр Геннадьевич* (1908–1971) — математик, профессор (1937), зав. кафедрой алгебры МГУ, ученик П.С. Александрова и О.Ю. Шмидта.

Л

Лаврентьев *Михаил Алексеевич* (1900–1980) — математик, ученик Н.Н. Лузина, академик (1946), вице-президент АН СССР (1957–1976), член Московского математического общества (1925); первый зав. кафедрой анализа и теории функций; с 1935 по 1960 г. работал в МИАН СССР; один из организаторов и председатель Сибирского отделения АН СССР (1957–1975). Основные труды: по теории функций, теории дифференциальных уравнений, механике сплошной среды и прикладной физике. Герой Соц. Труда (1967). Сталинская премия (1946, 1949); Ленинская премия (1958), золотая медаль им. М.В. Ломоносова (1977).

Ландау *Лев Давидович* (1908–1968) — физик-теоретик, академик (1946), основатель научной школы; Герой Соц. Труда (1954). Фундаментальные труды во многих областях теоретической физики. Сталинская премия (1946, 1949, 1953); Ленинская премия (1962); Нобелевская премия по физике (1962).

Ландау *Э.* (***Landau*** *Edmund*) (1877–1938) — немецкий математик, с 1909 г. профессор Гёттингенского университета, профессор Берлинского университета, иностранный чл.-корр. АН СССР (1924), почетный член (1932). Труды: по аналитической теории чисел, теории функций комплексного переменного, теории целых функций. Автор фундаментальных курсов по аналитической теории чисел и математическому анализу.

Ландис *Евгений Михайлович* (1921–1999) — математик, профессор Московского университета, участник Великой Отечественной войны.

Лаплас (***Laplace*** *Pierre Simon*) (1749–1827) — астроном, математик и физик, почетный член Петербургской АН (1802). Классические труды по небесной механике и теории вероятностей.

Лебег (***Lebesgue*** *Henri Léon*) (1875–1941) — французский математик, профессор Парижского университета (1910), член Парижской АН (1922), чл.-корр. АН СССР (1929), иностранный член Московского математического общества (1926); один из создателей теории функций действительного переменного.

Леви *Г.* (***Lewy*** *Hans*) (1904–1988) — немецкий математик, ученик Р. Куранта, профессор Гёттингенского университета, в 1933 г. эмигрировал в Америку, профессор Калифорнийского университета (Беркли).

Леви *П.* (***Lévy*** *Paul*) (1886–1971) — французский математик, профессор Политехнической школы в Париже (1920–1959), член Парижской АН (1964). Труды: по теории вероятностей, теории функций, функциональному анализу и механике.

Левин *Леонид Анатольевич* — математик, ученик А.Н. Колмогорова.

Ле Кам (***Le Cam*** *Lucien*) (1924–2000) — математик, статистик, член Нью-Йоркской АН и Американской Академии искусств и наук, член Математических обществ Франции и Канады, профессор Калифорнийского университета (Беркли).

Леонов *Виктор Петрович* (1934–1960) — математик, ученик А.Н. Колмогорова, трагически погиб в горах.

Леонтович *Михаил Александрович* (1903–1981) — физик-теоретик, чл.-корр. АН СССР (1939), академик АН СССР (1946). Основатель научной школы по радиофизике и физике плазмы, руководил исследованиями по проблеме управляемого термоядерного синтеза. Ленинская премия (1958).

Лере (***Leray*** *Jean*) (1906–1998) — французский математик, член Парижской АН (1953), Национальной АН США (1965), АН СССР (1966), с 1943 г. профессор Парижского университета. Золотая медаль им. М.В. Ломоносова (1988).

Лефшец (***Lefschetz*** *Solomon*) (1884–1972) — американский математик, родился в Москве, с 1924 г. профессор Принстонского университета, член Национальной АН США; гл. редактор журнала *"Annals of Mathematics"* (1928–1958).

Линдеберг (***Lindeberg*** *Jarl Waldemar*) (1876–1932) — финский математик, профессор университета в Хельсинки.

Линник *Юрий Владимирович* (1914–1972) — математик, профессор Ленинградского университета, участник Великой Отечественной войны, чл.-корр. АН СССР (1953), академик АН СССР (1964). Основные труды: по теории чисел, теории вероятностей (предельные теоремы) и математической статистике. Герой Соц. Труда (1969); Сталинская премия (1947), Ленинская премия (1970).

Липшиц (***Lipschitz*** *Rudolf Otto Sigismund*) (1832–1903) — немецкий математик, чл.-корр. Берлинской АН, профессор (1864) и ректор (1874–1875) Боннского университета.

Литтлвуд (***Littlewood*** *John Edensor*) (1885–1977) — английский математик, профессор Кембриджского университета.

Лобачевский *Николай Иванович* (1793–1852) — русский математик, создатель неевклидовой геометрии (геометрия Лобачевского); ректор Казанского университета (1827–1846), чл.-корр. Гёттингенской АН. Труды: по алгебре, математическому анализу, теории вероятностей, физике и астрономии.

Ловеланд (***Loveland*** *Donald W.*) — американский математик; профессор Нью-Йоркского университета и Duke University, специалист в области информатики и искусственного интеллекта.

Ломницкий (***Lomnicki*** *Antoni*) (1881–1941) — польский математик, родился во Львове, работал во Львовском политехническом институте; убит фашистами.

Лоэв (***Loève*** *Michel*) (1907–1979) — американский математик, профессор Калифорнийского университета (Беркли) (1948). Основные труды: по теории вероятностей.

Лузин *Николай Николаевич* (1883–1950) — математик, академик (1929), один из создателей московской математической школы (его ученики 20-х годов называли свое сообщество Лузитанией), член Московского математического общества (1910) и вице-президент (1926); ученик Д.Ф. Егорова; учитель П.С. Александрова и А.Н. Колмогорова. Основные труды: по метрической и дескриптивной теории функций действительного переменного, а также аналитическим функциям, дифференциальной геометрии, дифференциальным уравнениям.

Лумельский *Ян Петрович* (р. 1930) — математик, профессор Пермского университета.

Люстерник *Лазарь Аронович* (1899–1981) — математик, профессор Московского университета, чл.-корр. АН СССР (1946), член Московского математического общества (1927); первый зав. кафедрой функционального анализа МГУ (1933–1943) и первый гл. редактор журнала “Успехи математических наук”, с 1970 г. — профессор кафедры общих проблем управления МГУ; ученик Н.Н. Лузина. Фундаментальные труды: по теории функций, вариационному исчислению и вычислительной математике. Сталинская премия (1946).

Ляпунов *Алексей Андреевич* (1911–1973) — математик, чл.-корр. АН СССР (1964), один из основоположников советской кибернетики, в 1934–1962 гг. работал в МИАН СССР, в 1962–1973 гг. — в Институте математики Сибирского отделения АН СССР. Основные труды: в области теории функций, математической кибернетики, математической лингвистики.

М

Магарил-Ильяев *Георгий Георгиевич* (р. 1944) — математик, доктор физ.-матем. наук, професор кафедры высшей математики Московского института радиотехники, электроники и автоматики.

Мазур (***Mazur*** *Stanislaw*) (1905–1981) — польский математик, профессор Львовского, Лодзинского и Варшавского университетов, член Польской АН, ученик С. Банаха.

Мазуркевич (***Mazurkiewicz*** *Stefan*) (1888–1945) — польский математик, профессор Варшавского университета, член Польской АН, основатель журнала *"Fundamenta Mathematicae"*, президент Польского математического общества.

Малер (***Mahler*** *Kurt*) (1903–1988) — английский математик, член Лондонского Королевского общества, профессор университета в Манчестере и Национального института в Канберре.

Мальцев *Анатолий Иванович* (1909–1967) — математик, академик (1958), ученик А.Н. Колмогорова. С 1932 по 1960 г. работал в МИАН СССР. В годы войны — Сталинский докторант МИАН, докторскую диссертацию защитил в 1941 г. в эвакуации в Казани. Основные труды: по алгебре (теории групп и колец, топологической алгебре), математической логике и ее приложениям. Сталинская премия (1946); Ленинская премия (1964).

Малышев *Вадим Александрович* (р. 1938) — математик, профессор, зав. лабораторией больших случайных систем кафедры теории вероятностей Московского университета.

Малютов *Михаил Борисович* (р. 1941) — математик, профессор, в настоящее время живет и работает в США.

Мандельштам *Леонид Исаакович* (1879–1944) — физик, чл.-корр. АН СССР (1928), академик АН СССР (1929); один из основателей научной школы по радиофизике; основополагающие исследования по нелинейным колебаниям, радиоинтерференционному методу; труды по рассеянию света. Сталинская премия (1942).

Марков *Андрей Андреевич* (*ст.*) (1856–1922) — математик, адъюнкт по Физико-математическому отделению Петербургской АН (1886), ординарный член (1896). Исследования по математическому анализу, теории чисел и теории вероятностей.

Марков *Андрей Андреевич* (*мл.*) (1903–1979) — математик, профессор Ленинградского университета (1936–1955), чл.-корр. АН СССР (1953), первый зав. кафедрой математической логики МГУ (1959). Труды: по топологии, топологической алгебре, теории алгоритмов, конструктивной математике, теории динамических систем, математической логике и основаниям математики; участник Первой топологической конференции 1935 г. в Москве; сын А.А. Маркова (ст.).

Маркушевич *Алексей Иванович* (1908–1979) — математик и педагог, профессор Московского университета, действительный член (1950) и вице-президент АПН РСФСР (1964–1975), действительный член АПН СССР (1966). Труды: по теории функций, педагогике и методике преподавания, истории науки.

Мартин-Лёф (***Martin-Löf*** *Per*) (р. 1932) — шведский математик, логик, профессор, ученик А.Н. Колмогорова.

Марцинкевич (***Marcinkiewicz*** *Jósef*) (1910–1940) — польский математик, ученик А. Зигмунда. Погиб на войне. Основные работы: по тригонометрическим рядам.

Матвеев *Ростислав Федорович* (р. 1934) — математик, доктор физ.-матем. наук, ученик А.Н. Колмогорова.

Медведев *Юрий Тихонович* (р. 1929) — математик, логик, доктор физ.-матем. наук, ученик А.Н. Колмогорова.

Мельчук *Игорь Александрович* (р. 1932) — лингвист, окончил МГУ, работал в Институте языкознания; один из родоначальников компьютерной лингвистики; живет и работает в Канаде.

Меньшов *Дмитрий Евгеньевич* (1902–1988) — математик, чл.-корр. АН СССР (1953), профессор Московского университета (1929), ученик Н.Н. Лузина, член Московского математического общества (1919); первый зав. кафедрой теории функций и функционального анализа МГУ. Основные труды: по теории функций. Сталинская премия (1951).

Мешалкин *Лев Дмитриевич* (1934–2000) — математик, статистик, профессор Московского университета, ученик А.Н. Колмогорова.

Мизес (***Mises*** *Richard von*) (1883–1953) — математик и механик австрийского происхождения, профессор Берлинского, Стамбульского и Гарвардского университетов; основатель и руководитель Института математики Берлинского университета. Основные труды: по теории вероятностей.

Миллионщиков *Михаил Дмитриевич* (1913–1973) — советский математик и организатор науки, академик (1962), вице-президент АН СССР (1962–1973), ученик А.Н. Колмогорова. Основные труды: по теории турбулентности, фильтрации, газовой динамике, ядерной энергетике. Герой Соц. Труда (1967); Председатель Верховного Совета РСФСР (1967–1973), председатель Советского национального комитета Пагуошского движения; Сталинская премия (1951, 1954); Ленинская премия (1961).

Митягин *Борис Самуилович* (р. 1937) — математик, профессор (1965), в настоящее время живет и работает в США.

Михалев *Александр Васильевич* (р. 1940) — математик, зав. лабораторией вычислительных методов (1979) и профессор кафедры высшей алгебры (1992) Московского университета.

Мищенко *Евгений Фролович* (р. 1922) — математик, работал на кафедре дифференциальных уравнений МГУ (1954–1962), с 1957 г. работает в МИАН СССР, академик АН СССР (1984), ученик П.С. Александрова и Л.С. Понтрягина, гл. редактор “Трудов МИАН”, участник Великой Отечественной войны. Основные труды: по теории дифференциальных уравнений, математической теории оптимальных процессов. Ленинская премия (1962).

Млодзеевский *Болеслав Корнелиевич* (1858–1923) — физик и математик, профессор Московского университета (1892–1911), вице-президент (с 1906) и президент (с 1921) Московского математического общества. Труды: по диф-

ференциальной и алгебраической геометрии, математическому анализу, механике, астрономии.

Мозер (***Moser*** *Jürgen Kurt*) (1928–1999) — математик; окончил Гёттингенский университет, в 1955 г. переехал в США; профессор Массачусетского технологического института (1957), Курантовского института в Нью-Йорке (1960), директор Института математических исследований при Высшей технической школе в Цюрихе (1980–1995). Один из основоположников теории *КАМ* (Колмогорова–Арнольда–Мозера).

Монин *Андрей Сергеевич* (р. 1923) — математик, метеоролог и океанолог, чл.-корр. АН СССР (1972), академик РАН (2000), ученик А.Н. Колмогорова. Труды: по физике атмосферы, общей теории турбулентности, динамическим процессам в океане и атмосфере, в течение многих лет директор Института океанологии АН СССР.

Мусхелишвили *Николай Иванович* (1891–1976) — математик и механик, профессор Тбилисского университета (1922), директор Математического института АН ГрузССР (с 1941), чл.-корр. АН СССР (1933), академик АН СССР (1939), президент АН ГрузССР (1941–1972), председатель Национального комитета по теоретической и прикладной механике СССР, вице-президент IMU (Международного Математического Союза). Основные труды: по теории упругости, интегральным уравнениям и граничным задачам теории аналитических функций. Герой Соц. Труда (1945); Сталинская премия (1941, 1947); золотая медаль им. М.В. Ломоносова (1972).

Мюнтц *Герман Моисеевич* (***Müntz*** *Chaim H.*) — немецкий математик, в 1933 г. эмигрировал в СССР, профессор Ленинградского университета. О его судьбе с конца 30-х годов ничего не известно.

Н

Нагаев *Сергей Викторович* (р. 1932) — математик, с 1958 г. работает в Ташкентском университете, профессор.

Нагибин *Федор Федорович* (1909–1979) — математик, педагог и методист, один из соавторов А.Н. Колмогорова по школьным учебникам.

Налимов *Василий Васильевич* (1910–1997) — математик, статистик и философ, доктор технич. наук, профессор, заместитель А.Н. Колмогорова по Межфакультетской лаборатории статистических методов Московского университета.

Нейгебауэр (***Neugebauer*** *Otto E.*) (1899–1990) — австрийский математик и историк науки, профессор Гёттингенского и Копенгагенского университетов, основатель (1931) и первый редактор реферативного журнала *"Zentralblatt für Mathematik"*, в котором П.С. Александров вел топологический отдел; с 1939 г. профессор университета Дж. Брауна (США).

Нейман *Джерси* (*Ежи*) (***Neyman*** *Jerzy*) (1894–1981) — математик, статистик, профессор Варшавского, Краковского и Лондонского университетов; с 1938 г. — профессор Калифорнийского университета, член Национальной АН США.

Нейман *Дж. фон* (***Neumann*** *John von*) (1903–1957) — американский математик, профессор Берлинского, Гамбургского и Принстонского университетов,

с 1933 г. работал в Принстонском Иституте перспективных исследований; президент Американского математического общества, член Национальной АН США. Фундаментальные труды по динамическим системам, статистической физике, функциональному анализу, теории игр. Внес большой вклад в создание первых ЭВМ и разработку методов их применения.

Нейман (***Урысон***) *Лина Самуиловна* (1885–1971) — детская писательница, сестра П.С. Урысона, в ее квартире в Старопименовском пер. жили в предвоенные и военные годы П.С. Александров и А.Н. Колмогоров.

Немыцкий *Виктор Владимирович* (1900–1967) — математик, профессор кафедры дифференциальных уравнений Московского университета (1936), ученик П.С. Александрова.

Несмеянов *Александр Николаевич* (1899–1980) — химик-органик, основатель научной школы, академик АН СССР (1943), президент АН СССР (1951–1961), Герой Соц. Труда (1969). Сталинская премия (1943). Ленинская премия (1966).

Нётер (***Noether*** *Emmy*) (1882–1935) — немецкий математик, внештатный профессор Гёттингенского университета, в 1928–1929 г. читала абстрактную алгебру в Московском университете; после прихода фашистов эмигрировала в США, с 1933 г. профессор университета шт. Пенсильвания.

Никодим (***Nikodym*** *Otto Martin*) (1887–1974) — математик, родился в Польше, работал в США.

Никольский *Сергей Михайлович* (р. 1905) — математик, чл.-корр. АН СССР (1968), академик АН СССР (1972), ученик А.Н. Колмогорова; с 1940 г. работает в МИАН СССР, докторскую диссертацию защитил в эвакуации в Казани (1942). Фундаментальные труды: по функциональному анализу, теории приближений, квадратурным формулам и краевым задачам дифференциальных уравнений. Сталинская премия (1952), Государственная премия (1957).

Новиков *Александр Александрович* (р. 1945) — математик, доктор физ.-матем. наук (1982), с 1996 г. живет и работает в Австралии, профессор Сиднейского технологического университета. Работы: по стохастическому анализу и статистике случайных процессов.

Новиков *Петр Сергеевич* (1901–1975) — математик, чл.-корр. АН СССР (1953), академик АН СССР (1960), один из основателей научной школы математической логики, с 1934 г. работал в МИАН СССР. Труды: по теории множеств, математической логике, теории алгоритмов, теории групп. Ленинская премия (1957).

Нюберг *Николай Дмитриевич* (1902–1990) — физик-оптик, доктор наук, друг А.Н. Колмогорова по гимназии. Его мать *Софья Николаевна* ***Нюберг*** (1874–1964) преподавала в этой гимназии латынь.

О

Обухов *Александр Михайлович* (1918–1989) — математик и геофизик, чл.-корр. АН СССР (1953), академик АН СССР (1970); ученик А.Н. Колмогорова. Труды: по физике атмосферы, турбулентности и математической статистике.

Орнстейн (***Ornstein*** *Donald*) (р. 1934) — американский математик, профессор Стенфордского университета. Основные труды: по функциональному анализу и эргодической теории.

Орнштейн (***Ornstein*** *Leonard Salomon*) (1880—1941) — голландский математик. Основные труды: по теории вероятностей и математической статистике.

Отроков *Николай Федорович* (1912) — математик, доктор физ.-матем. наук, профессор, с 1943 г. работал в Горьковском университете.

Офман *Юрий Петрович* (р. 1939) — математик, ученик А.Н. Колмогорова.

Очан *Юрий Семенович* (р. 1913) — математик, ученик А.Н. Колмогорова, профессор (1967).

П

Пака *Вадим Тимофеевич* (р. 1936) — физик и океанолог, доктор физ.-матем. наук, участник экспедиции на научно-исследовательском судне *"Дмитрий Менделеев"* вместе с А.Н Колмогоровым.

Паровиченко *Иван Иванович* (р. 1930) — математик, с 1953 г. работал в Кишиневском университете.

Партасарати (***Parthasarathy*** *Kalyanapuran Rangachari*) (р. 1936) — индийский математик, профессор Индийского статистического института.

Паскаль (***Pascal*** *Blaise*) (1623—1662) — французский математик, физик, естествоиспытатель и философ. В математике труды по арифметике, теории чисел и теории вероятностей. Оказал большое влияние на развитие иррационалистической традиции в философии.

Пасынков *Борис Алексеевич* (р. 1937) — математик, профессор Московского университета, ученик П.С. Александрова.

Пенков *Боян Иванович* — болгарский математик, профессор, ученик А.Н. Колмогорова.

Петров *Алексей Аркадьевич* (1920—1971) — математик, ученик и личный секретарь А.Н. Колмогорова, работал в МИАН СССР (1962—1971) и Московском инженерно-физическом институте.

Петровский *Иван Георгиевич* (1901—1973) — математик, чл.-корр. АН СССР (1943), академик АН СССР (1946), член президиума АН СССР (1953—1973). Работал в Московском университете с 1927 г.; зав. кафедрой дифференциальных уравнений (1951—1973); в годы войны (1940—1944) — декан Механико-математического факультета МГУ, ректор МГУ (1951—1973); депутат и член Президиума Верховного Совета СССР. Фундаментальные труды по дифференциальным уравнениям, математической физике, алгебраической геометрии. Герой Соц. Труда (1969); Сталинская премия (1946, 1952).

Пинскер *Марк Семенович* (р. 1925) — математик, профессор, ученик А.Н. Колмогорова.

Планк (***Planck*** *Max Karl*) (1858—1947) — немецкий физик, основоположник квантовой теории; чл.-корр. Петербургской АН (1913), почетный член АН СССР

(1926). Труды: по термодинамике, теории относительности, философии естествознания. Нобелевская премия по физике (1918).

Плиско *Валерий Егорович* (р. 1947) — математик, кандидат физ.-матем. наук, доцент, ученик А.Н. Колмогорова. Труды: по конструктивной логике.

Пойа *Дьердь* (***Pólya*** *George*) (1887–1985) — венгерский математик, профессор Цюрихского университета; в 1940 г. эмигрировал в США, профессор университета Дж. Брауна и Стенфордского университета. (В русском переводе книги "Задачи и теоремы математического анализа", написанной в соавторстве с Г. Сеге, значится как *Полиа*.)

Положий *Георгий Николаевич* (1914–1968) — математик, чл.-корр. АН Украины, с 1953 г. профессор Киевского университета.

Понтрягин *Лев Семенович* (1908–1988) — математик, чл.-корр. АН СССР (1939), академик АН СССР (1958), ученик П.С. Александрова; с 1931 г. работал в Московском университете (профессор кафедры дифференциальных уравнений (1954–1962)) и одновременно в МИАН СССР. Основные труды: по топологии, теории групп, дифференциальным уравнениям. Фундаментальные труды и научная школа по математической теории оптимальных процессов. Герой Соц. Труда (1969); Сталинская премия (1941), Ленинская премия (1962).

Привалов *Иван Иванович* (1891–1941) — математик, ученик Д.Ф. Егорова, чл.-корр. АН СССР (1939), профессор Московского университета (с 1922), первый зав. кафедрой теории функций МГУ, член Московского математического общества (1915); ученик Д.Ф. Егорова. Труды: по теории функций комплексного переменного.

Прохоров *Александр Владимирович* (р. 1941) — математик, кандидат физ.-матем. наук, доцент кафедры математической статистики и теории случайных процессов МГУ, ученик А.Н. Колмогорова.

Прохоров *Юрий Васильевич* (р. 1929) — математик, чл.-корр. АН СССР (1966), академик АН СССР (1972), зав. отделом теории вероятностей МИАН СССР, зав. кафедрой математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ; ученик А.Н. Колмогорова. Ленинская премия (1970).

Пуанкаре (***Poincaré*** *Henri*) (1854–1912) — французский математик, физик, астроном и философ; член Парижской АН (1887), вице-президент (1905), президент (1906), член Французской академии (1908), иностранный член Петербургской АН (1895) и более 35 других академий мира. Автор свыше 1000 работ, посвященных алгебре, теории чисел, топологии, теории дифференциальных уравнений, математической физике, небесной механике, основаниям математики.

Пуассон (***Poisson*** *Siméon Denis*) (1781–1840) — французский математик, физик и медик, почетный член Российской АН (1826). Фундаментальные труды по математическому анализу, теории вероятностей, классической и небесной механике.

Пугачев *Владимир Семенович* (1911–1998) — математик, академик АН СССР (1981). Основные труды: по статистической теории процессов управления, динамике полета и др. Сталинская премия (1948), Государственная премия СССР (1976), Ленинская премия (1990).

Р

Радон (***Radon*** *Johann*) (1887–1956) — математик, профессор Гамбургского, Эрлангенского и др. университетов; с 1947 г. — профессор Венского университета. Основные труды: по вариационному исчислению и его применениям в дифференциальной геометрии и теории чисел, а также по интегрированию по Лебегу и Стилтьесу.

Райков *Дмитрий Абрамович* (1905–1981) — математик, окончил МГУ (1929), профессор (1941).

Рао (***Rao*** *Calyampuli Radhakrishna*) (р. 1920) — индийский математик, статистик, директор Индийского статистического института в Калькутте. Член Лондонского Королевского общества, Индийской национальной АН и Национальной АН США. В настоящее время живет и работает в США.

Рейнольдс (***Reinolds*** *Osborne*) (1842–1912) — английский физик и инженер, член Лондонского Королевского общества (1877). Профессор Манчестерского университета.

Реллих (***Rellich*** *Franz*) (1906–1955) — немецкий математик, профессор Гёттингенского университета.

Реньи (***Rényi*** *Alfréd*) (1921–1970) — венгерский математик, академик АН Венгрии. Директор Института прикладной математики АН Венгрии и зав. кафедрой теории вероятностей Будапештского университета. Ученик Ю.В. Линника.

Репман *Евгения Альбертовна* — основательница и директор частной гимназии в Москве, в которой учился А.Н. Колмогоров.

Рогозин *Борис Алексеевич* (р. 1935) — математик, профессор и ректор Омского университета, ученик Ю.В. Прохорова.

Розанов *Юрий Анатольевич* (р. 1934) — математик, профессор, зав. кафедрой математической статистики и теории случайных процессов Московского университета, ученик А.Н. Колмогорова. Ленинская премия (1970). В настоящее время живет и работает в Триесте.

Розенблат-Рот (***Rosenblatt-Roth*** *Millu*) — румынский математик, ученик А.Н. Колмогорова.

Розенцвейг *Виктор Юльевич* — лингвист, профессор, зав. кафедрой и зав. лабораторией Московского института иностранных языков, отв. редактор “Бюллетеня объединения по проблемам машинного перевода”, один из зачинателей структурной, прикладной и математической лингвистики в СССР.

Романовский *Всеволод Иванович* (1879–1954) — математик, профессор (1935), академик УзССР (1943); основатель Института математики АН УзССР, ныне носящего его имя.

Ромашов *Дмитрий Дмитриевич* (1899–1963) — биолог, генетик, товарищ А.Н. Колмогорова по гимназии Е.А. Репман.

Рычкова (***Химченко***) *Наталья Григорьевна* (р. 1937) — математик, преподаватель кафедры теории вероятностей Московского университета, сотрудница А.Н. Колмогорова в течение многих лет.

С

Савчук *Анна Порфирьевна* (р. 1940) — математик, сотрудница А.Н. Колмогорова по статистическим исследованиям языка.

Сарымсаков *Ташмухамед Алиевич* (1915–1995) — математик, академик АН Узбекистана (1943), президент АН УзССР (1946–1952), ректор Средне-Азиатского университета (1952–1958); участник Великой Отечественной войны. Герой Соц. Труда (1990); Сталинская премия (1948).

Светлова (***Солженицына***) *Наталья Дмитриевна* (р. 1939) — математик, сотрудница А.Н. Колмогорова по статистическим исследованиям языка.

Севери (***Severi*** *Francesco*) (1879–1961) — математик, профессор университетов Турина и Рима (ректор — 1923–1925), Пизы, Болоньи, Падуи и Пармы, член Национальной академии деи Линчеи, чл.-корр. АН СССР (1924). Труды: по алгебре, алгебраической геометрии, проективной геометрии, теории функций, топологии.

Седов *Леонид Иванович* (1907–1999) — механик, чл.-корр. АН СССР (1946), академик АН СССР (1953); в 1930–1947 гг. работал в ЦАГИ, с 1937 г. профессор МГУ, с 1945 г. работал в МИАН СССР. Труды: по гидро- и аэромеханике, механике сплошной среды, газовой динамике, теории подобия и моделированию. Герой Соц. Труда (1967), Сталинская премия (1952); золотая медаль им. А.М. Ляпунова (1974).

Селиверстов *Глеб Александрович* (1905–1944) — математик, близкий друг А.Н. Колмогорова с гимназических лет, погиб на фронте.

Селиверстов *Николай Александрович* (1902–1943) — историк, одноклассник и друг А.Н. Колмогорова с гимназических лет, брат Г.А. Селиверстова, погиб на фронте.

Семенов *Николай Николаевич* (1896–1986) — химико-физик, академик АН СССР (1932), вице-президент АН СССР (1963–1971). Основатель научной школы по химической физике, создал общую количественную теорию цепных реакций, теорию теплового взрыва газовых смесей. Герой Соц. Труда (1966, 1976); Сталинская премия (1941, 1949), Ленинская премия (1976); Нобелевская премия по химии (1956).

Семенович *Александр Федорович* (р. 1920) — математик и педагог, один из соавторов А.Н. Колмогорова по школьным учебникам.

Сигалов *Александр Григорьевич* (1913–1969) — математик, профессор Горьковского университета (1946).

Синай *Яков Григорьевич* (р. 1935) — математик, профессор Московского (1971–1993) и Принстонского (1993) университетов, академик РАН (1991). Главный научный сотрудник Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау. Золотая медаль Больцмана (1986), премия А.А. Маркова (1990) АН СССР, премия Д. Хайнемана по математической физике, медаль Дирака (1992), премия фонда Вольфа ("За выдающиеся достижения в эргодической теории, динамических системах, статистической физике") (1996/97), премия Неммерса (2002).

Синцов *Дмитрий Матвеевич* (1867–1946) — математик, академик АН Украины (1939), профессор Харьковского университета, член Московского

математического общества (1897); председатель Харьковского математического общества. Труды: по теории коннексов и их применению в теории дифференциальных уравнений и дифференциальной геометрии, а также по истории и методике преподавания математики.

Сираждинов *Сагды Хасанович* (1920–1989) — математик, академик АН УзССР, ректор Ташкентского университета, ученик А.Н. Колмогорова.

Ситников *Кирилл Александрович* (р. 1926) — математик, доктор физ.-матем. наук, ученик П.С. Александрова.

Скворцов *Валентин Анатольевич* (р. 1935) — математик, профессор Московского университета.

Скороход *Анатолий Владимирович* (р. 1930) — математик, профессор (1964), чл.-корр. АН УССР (1967), академик АН Украины. В настоящее время живет и работает в США.

Слуцкий *Евгений Евгеньевич* (1880–1948) — математик, профессор Московского университета (1934–1938) и сотрудник МИАН СССР (1938–1948).

Смейл (***Smale*** *Stephen*) (р. 1930) — американский математик, профессор Калифорнийского университета (Беркли), Чикагского и Колумбийского университетов; в 1958–1960 гг. работал в Принстонском Институте перспективных исследований, член Национальной АН США.

Смирнов *Владимир Иванович* (1887–1954) — математик, профессор Ленинградского университета, чл.-корр. АН СССР (1932), академик АН СССР (1943). Герой Соц. Труда (1967), Сталинская премия (1948).

Смирнов *Николай Васильевич* (1900–1966) — математик, член-корр. АН СССР (1960), участник Первой мировой войны. Основные труды: по математической статистике и ее приложениям. Сталинская премия (1951).

Смирнов *Юрий Михайлович* (р. 1921) — математик, участник Великой Отечественной войны, ученик П.С. Александрова, профессор кафедры высшей геометрии и топологии Московского университета.

Смолуховский (***Smoluchowski*** *Marian*) (1872–1917) — польский физик-теоретик; классические исследования по молекулярно-кинетической теории флуктуаций и броуновского движения.

Соболев *Сергей Львович* (1908–1989) — математик, академик (1939), профессор кафедры дифференциальных уравнений и зав. кафедрой вычислительной математики Московского университета, работал в Институте атомной энергии СССР (1943–1952); позднее (с 1958) — директор Института математики Сибирского отделения АН СССР. Фундаментальные труды по теории упругих волн, уравнениям математической физики, функциональному анализу, вычислительной математике; Сталинская премия (1941, 1951, 1953); золотая медаль им. М.В. Ломоносова (1988).

Соломонов (***Solomonoff*** *Ray J.*) (р. 1926) — американский математик, основатель алгоритмической теории вероятностей.

Сосинский *Алексей Брониславович* (р. 1937) — математик, профессор Независимого Московского университета, сотрудник А.Н. Колмогорова по журналу “Квант”, один из его соавторов по школьным математическим учебникам.

Сретенский *Леонид Николаевич* (1902–1973) — математик и механик, профессор Московского университета (1934–1973), чл.-корр. АН (1939); в 1923–1929 гг. работал в НИИ математики и механики Московского университета, в 1931–1941 гг. — в ЦАГИ; в 1941–1945 гг. — в Институте теоретической геофизики АН СССР. Труды: по теории волнового движения жидкости, теории интегральных уравнений, дифференциальной геометрии.

Станиславский *Константин Сергеевич* (наст. фамилия ***Алексеев***) (1863–1938) — режиссер, актер, педагог, теоретик театра, народный артист СССР (1936), крупнейший реформатор русского театра, один из основатель Художественного театра (МХАТ), с 1918 г. возглавлял Оперную студию Большого театра (ныне — Музыкальный театр им. К.С. Станиславского и Вл.И. Немировича-Данченко).

Статулявичюс *Витаутас Антанович* (р. 1929) — математик, академик АН Литвы, директор Института математики и кибернетики АН Литвы, ученик Ю.В. Линника.

Стеклов *Владимир Андреевич* (1863–1926) — математик, академик (1912), основатель Физико-математического института АН СССР (1921), Математический институт Академии наук СССР (МИАН) с 1934 г. носит его имя.

Степанов *Вячеслав Васильевич* (1889–1959) — математик, ученик Д.Ф. Егорова, профессор (1928) и первый зав. кафедрой дифференциальных уравнений Московского университета, чл.-корр. АН СССР (1946); член Московского математического общества (1915); в годы войны директор НИИ математики и механики МГУ. Труды: по теории функций и теории дифференциальных уравнений.

Стеффенсен (***Steffensen*** *Johan Frederik*) (1873–1961) — датский юрист и математик, профессор Копенгагенского университета, редактор журнала "Skandinavisk Aktuartidsskrift" (1918–1948), президент Ассоциации датских актуариев (1922–1924 и 1930–1933).

Струк (***Stroock*** *Daniel Wyler*) – американский математик, профессор Массачусетского технологического института; член Национальной АН США, член Американской Академии искусств и наук.

Суслин *Михаил Яковлевич* (1894–1919) — математик, ученик Н.Н. Лузина, в 1917–1919 гг. работал в Московском университете; скончался в Гражданскую войну от сыпного тифа.

Т

Тарановский *Кирил Ф.* (1911–1993) — филолог, славист, историк литературы, профессор Белградского и Гарвардского университетов.

Теляковский *Сергей Александрович* (р. 1932) — математик, доктор физ.-матем. наук (1967).

Тихомиров *Владимир Михайлович* (р. 1934) — математик, профессор и зав. кафедрой общих проблем управления Московского университета, ученик А.Н. Колмогорова.

Тихонов *Андрей Николаевич* (1906–1993) — математик, чл.-корр. АН СССР (1939), академик АН СССР (1966), ученик П.С. Александрова, профессор Москов-

ского университета (1936), зав. кафедрой математики Физического факультета (1934–1970) и кафедрой вычислительной математики Механико-математического ф-та (1958–1970); декан факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ (1970–1993); директор Института прикладной математики АН СССР (1978–1993). Труды: по топологии, функциональному анализу, теории дифференциальных уравнений, математической физике, геофизике, вычислительной математике. Герой Соц. Труда (1953); золотая медаль им. М.В. Келдыша (1990). Сталинская премия (1953), Государственная премия (1976), Ленинская премия (1966).

Толстой *Никита Ильич* (1923–1996) — лингвист и языковед, академик (1987).

Томашевский *Борис Викторович* (1890–1957) — литературовед и текстолог, исследователь жизни и творчества А.С. Пушкина.

Тулайков *Александр Николаевич* — математик, ученик А.Н. Колмогорова.

Тьюринг (***Turing*** *Alan Mathison*) (1912–1954) — математик, логик и кибернетик, член Лондонского Королевского общества. Основные труды: по математической логике, вычислительной математике; разработал несколько типов вычислительных машин, ввел концепцию абстрактной "вычислительной машины" (1936–1937).

У

Уиттекер (***Whittaker*** *Edmund Taylor*) (1873–1956) — английский математик, член Лондонского (1905) и Эдинбургского (президент, 1939) Королевских обществ, профессор Дублинского и Эдинбургского университетов.

Уленбек (***Uhlenbeck*** *George Eugene*) (1900–1988) — голландский физик, открывший спин электрона; с 1960 г. работал в Рокфеллеровском Институте статистической физики (Нью-Йорк). Труды: по квантовой механике, проблемам структуры атома, кинетической теории вещества, а также по броуновскому движению. Премия Планка (1965), медаль Лоренца (1970), премия фонда Вольфа (1979).

Ульянов *Петр Лаврентьевич* (р. 1928) — математик, чл.-корр. АН СССР (1981), профессор, зав. кафедрой теории функций и функционального анализа Московского университета.

Урысон *Павел Самуилович* (1898–1924) — математик, геометр и тополог, один из основателей советской топологии, близкий друг П.С. Александрова, трагически погибший во Франции во время купанья в шторм, похоронен в пос. Батц (Batz) вблизи г. Круазик.

Успенский *Владимир Андреевич* (р. 1930) — математик, профессор и зав. кафедрой математической логики и теории алгоритмов Московского университета, ученик А.Н. Колмогорова.

Ф

Фавар (***Favard*** *Jean*) (1902–1965) — французский математик. Основные труды: по теории функций и функциональному анализу, а также теории тригонометрических рядов.

Фаге *Михаил Константинович* (р. 1915) — математик, ученик А.Н. Колмогорова, кандидатскую диссертацию защитил в Казани в 1942 г., вернувшись раненым с фронта; доктор физ.-матем. наук (1958), профессор.

Фантапье (***Fantappiè*** *Luigi*) (1901–1956) — итальянский математик, профессор Римского университета, член Национальной академии деи Линчеи.

Федоров *Вячеслав Васильевич* (р. 1946) — математик, профессор, сотрудник А.Н. Колмогорова по Межфакультетской лаборатории статистических методов МГУ.

Федорова *Вера Федоровна* — соучредительница (вместе с Е.А. Репман) частной московской гимназии, в которой учился А.Н. Колмогоров.

Феллер (***Feller*** *William*) (1906–1970) — математик, родился в Югославии, работал в Германии и Швеции, с 1939 г. — в США, профессор Принстонского университета (с 1950). Труды: по теории вероятностей и ее приложениям (в генетике, физике, экономике).

Ферма (***Fermat*** *Pierre de*) (1601–1665) — французский математик, один из создателей аналитической геометрии и аналитической теории чисел. Труды: по теории вероятностей, исчислению бесконечно малых и оптике.

Финетти (***Finetti*** *Bruno de*) (1906–1985) — итальянский математик, профессор Римского университета (1954–1960), член Национальной академии деи Линчеи, член французского и швейцарского Актуарных институтов. Труды: по теории вероятностей, статистике, актуарной и финансовой математике, экономике.

Фиников *Сергей Павлович* (1883–1964) — математик, профессор (1918), зав. кафедрой дифференциальной геометрии Московского университета, член Московского математического общества (1912).

Фишер (***Fisher*** *Ronald Aylmer*) (1890–1962) — английский математик, генетик и статистик, член Лондонского Королевского общества (1929), профессор генетики Кембриджского университета, член многих академий и научных обществ.

Фок *Владимир Александрович* (1898–1974) — физик-теоретик, один из основателей Ленинградской научной школы, академик (1939). Фундаментальные труды: по квантовой механике и электродинамике, общей теории относительности, а также по математической физике и философским вопросам физики. Герой Соц. Труда (1968); Сталинская премия (1946), Ленинская премия (1960).

Фомин *Сергей Васильевич* (1917–1975) — математик, профессор кафедры общих проблем управления Московского университета (1968); руководил лабораторией математический методов в биологии Института биофизики АН СССР (с 1960); ученик П.С. Александрова и А.Н. Колмогорова; участник Великой Отечественной войны; кандидатскую диссертацию защитил в 1942 г. в эвакуации в Казани.

Форте (***Fortet*** *Robert M.*) (1912–1998) — французский математик, чл.-корр. Парижской АН (1973), профессор Сорбонны (с 1958). Основные работы: по теории вероятностей.

Фрейдлин *Марк Иосифович* (р. 1937) — математик, профессор, ученик Е.Б. Дынкина, в настоящее время живет и работает в США.

Фреше (***Fréchet*** *Maurice*) (1878–1973) — французский математик, ученик Ж. Адамара, профессор Страсбургского (1920–1927) и Парижского (1928–1948) университетов, член Нидерландской АН (1950) и Института Франции (1956); член Московского математического общества. Труды: по топологии, функциональному анализу, теории вероятностей.

Фридрихс (***Friedrichs*** *Kurt Otto*) (1901–1982) — немецкий математик, окончил Гёттингенский университет, профессор Брауншвейгской Высшей технической школы (1931); в 1937 г. эмигрировал в США; член Национальной АН США (1959). Основные труды: по дифференциальным уравнениям в частных производных и их применениям в математической физике.

Фробениус (***Frobenius*** *Ferdinand Georg*) (1849–1917) — швейцарский математик, профессор Берлинского университета, член Берлинской АН.

Фурье (***Fourier*** *Jean Batiste Joseph*) (1768–1830) — французский математик, член Института Франции (1817), член Французской академии (1826), иностранный член Лондонского Королевского общества, почетный член Российской АН (1829). Труды: по алгебре, дифференциальным уравнениям и, особенно, математической физике; основатель теории тригонометрических рядов (рядов Фурье).

Х

Хазен *Элида Моисеевна* (р. 1937) — математик, доктор физ.-матем. наук, ученица А.Н. Колмогорова.

Халмош (***Halmos*** *Paul Richard*) (р. 1916) — американский математик венгерского происхождения, профессор Мичиганского университета.

Харди (***Hardy*** *Godfrey Harold*) (1877–1947) — английский математик, член Лондонского Королевского общества, с 1928 г. профессор Оксфордского университета, чл.-корр. АН СССР (1924), почетный член АН СССР (1934). Труды: по теории чисел и теории функций, теории интегральных уравнений, теории рядов.

Хартман (***Hartman*** *Philip*) (1915) — американский математик, профессор университета Дж. Хопкинса.

Хаусдорф (***Hausdorff*** *Felix*) (1868–1942) — немецкий математик, профессор университетов в Гёттингене, Бонне и Лейпциге, выступал также как писатель под псевдонимом Поль Монтре; покончил с собой под угрозой отправки в фашистский концлагерь. Фундаментальные труды по топологии, теории множеств, математическому анализу.

Химченко *Наталья Григорьевна* — см. ***Рычкова*** *Наталья Григорьевна.*

Хинчин *Александр Яковлевич* (1894–1959) — математик, чл.-корр. АН (1939), профессор и зав. кафедрой математического анализа Московского университета, директор Института математики и механики МГУ, член Московского математического общества (1919); один из основоположников современной теории вероятностей, ученик Н.Н. Лузина и Д.Ф. Егорова. Труды: по теории функций, теории чисел, теории вероятностей и теории случайных процессов. Сталинская премия (1941, совм. с А.Н. Колмогоровым).

Хмаладзе *Эстате Вахтангович* (р. 1944) — математик, статистик, доктор физ.-матем. наук, профессор (1992), в настоящее время живет и работает в Новой Зеландии.

Хопф *Х.* (***Hopf*** *Heinz*) (1894–1971) — немецкий математик, приват-доцент университета в Берлине, профессор (1931) университета в Цюрихе. Труды: по топологии и функциональному анализу; участник Первой топологической конференции 1935 г. в Москве.

Хохлов *Рем Викторович* (1926–1977) — физик, один из основоположников современной нелинейной оптики, академик АН СССР (1974), ректор МГУ им. М.В. Ломоносова (1973–1977). Ленинская премия (1970).

Христианович *Сергей Алексеевич* (1908–2000) — математик и механик, чл.-корр. АН СССР (1939), академик АН СССР (1943). Герой Соц. Труда (1969). Труды по аэро-, гидро- и газовой динамике. Сталинская премия (1942, 1946, 1952).

Ч

Чаплыгин *Сергей Алексеевич* (1869–1942) — механик, один из основателей аэродинамики, академик (1929). Член Московского математического общества (1894). Труды: по теоретической механике, гидро-, аэро- и газовой динамике. С 1921 г. научный руководитель ЦАГИ. Герой Соц. Труда (1941).

Чеботарев *Николай Григорьевич* (1894–1947) — математик, чл.-корр. АН СССР (1929), профессор Казанского университета. Труды: по алгебре, теории чисел, теории функций.

Чебышев *Пафнутий Львович* (1821–1894) — русский математик и механик, создатель Петербургской научной школы; адъюнкт по Физико-математическому отделению Петербургской АН (1853), ординарный член (1859). Фундаментальные труды: по теории наилучших приближений, теории чисел, теории вероятностей и др.

Чепмен (***Chapman*** *Sydney*) (1888–1970) — английский математик и геофизик. Труды: по земному магнетизму, ионосфере, атмосферному электричеству и атмосферной оптике.

Черкасов *Ростислав Семенович* (р. 1912) — математик, педагог и методист, гл. редактор журнала “Математика в школе” (1958–1992), один из соавторов А.Н. Колмогорова по школьным учебникам.

Чёрч (***Church*** *Alonzo*) (1903–1995) — американский математик, профессор Принстонского и Калифорнийского университетов; член Американской Академии искусств и наук.

Чогошвили *Георгий Северьянович* (1914–1998) — математик, тополог, окончил МГУ (1936), профессор Тбилисского университета (1946), академик АН ГрузССР (1960), ученик П.С Александрова.

Чулановский *Владимир Михайлович* (р. 1889) — физик, профессор Ленинградского университета, сотрудник и директор (1943–1945) НИИ физики при ЛГУ.

Ш

Шази (***Chazy*** *Jean François*) (1882–1955) — французский математик и астроном, член Парижской АН (1937), профессор Сорбонны (1925), Парижского факультета наук (1932), президент Французского математического общества (1934).

Шанин *Николай Александрович* (р. 1919) — математик, профессор Ленинградского университета (1956), член С.-Петербургского математического общества; ученик П.С. Александрова, кандидатскую диссертацию защитил в 1942 г. в эвакуации в Казани.

Шарлье (***Charlier*** *Carl Wilhelm Ludwig*) (1862–1934) — шведский математик и астроном, профессор университета и директор обсерватории г. Лунд. Математические труды: по теории вероятностей и математической статистике.

Шафаревич *Игорь Ростиславович* (р. 1923) – математик, чл.-корр. АН СССР (1958), академик АН СССР (1972), член Национальной АН США, Американской Академии искусств и наук, Лондонского Королевского общества. Труды: по алгебре, теории алгебраических чисел и алгебраической геометрии. Ленинская премия (1959).

Шварцбурд Семен Исаакович — математик и педагог, чл.-корр. АПН; один из соавторов А.Н. Колмогорова по школьным учебникам.

Шенгели *Георгий Аркадьевич* (1894–1956) — поэт-переводчик и исследователь русского стихосложения.

Шеннон (***Shannon*** *Claude Edwood*) (1916–2001) — американский математик и инженер, основоположник современной теории информации, член Национальной АН США.

Шершевский *Александр Абрамович* (1920–1974) — математик и педагог, один из соавторов А.Н. Колмогорова по школьным учебникам.

Шилдс П. (***Shields*** *Paul C.*) (р. 1933) — математик; труды: по линейной алгебре, эргодической теории, теории информации и статистике.

Шилов *Георгий Евгеньевич* (1917–1975) — математик, профессор кафедры теории функций и функционального анализа Московского университета (1952), ученик И.М. Гельфанда, участник Великой Отечественной войны.

Ширяев *Альберт Николаевич* (р. 1934) — математик, профессор и зав. кафедрой теории вероятностей Московского университета, чл.-корр. РАН (1997), ученик А.Н Колмогорова; с 1957 г. работает в МИАН СССР. Doctor Rerum Naturalium Honoris Causa университета г. Фрейбурга в Бресгау (Германия) и Professor Honoris Causa Амстердамского университета (Голландия). Премия А.А. Маркова АН СССР (1974), премия А.Н. Колмогорова РАН (1994), премия Фонда Гумбольда.

Шмидов *Федор Иванович* (р. 1911) — математик, ученик А.Н. Колмогорова.

Шмидт *Отто Юльевич* (1891–1956) — ученый (геофизик, математик, астроном, географ), путешественник и организатор науки, Герой Советского Союза (1937), академик АН СССР (1935), вице-президент АН СССР (1939–1942), гл. редактор журнала *"Математический сборник"* и *БСЭ*, член Московского математического общества (1922). Труды: по алгебре и теории групп.

Шнирельман *Лев Генрихович* (1905–1938) — математик, ученик Н.Н. Лузина, чл.-корр. АН СССР (1933), зав. кафедрой теории чисел Московского университета. Труды: по теории чисел и вариационному исчислению.

Шнорр (***Schnorr*** *Claus Peter*) (р. 1943) — немецкий математик, профессор Франкфуртского университета И.-В. Гёте. Труды: по теории чисел, вычислительной математике, криптографии.

Шпайзер (***Speiser*** *Andreas*) (1885–1970) — швейцарский математик, профессор Базельского университета (1944).

Шпрингер (***Springer*** *Julius*) — известный немецкий издатель, основатель и глава знаменитой издательской фирмы (с 1947 г. — *"Springer-Verlag"*).

Шрёдингер (***Schrödinger*** *Ervin*) (1887–1961) — австрийский физик-теоретик, один из основоположников квантовой механики, иностранный чл.-корр. АН СССР (1928), почетный член АН СССР (1934); разработал волновую механику, сформулировал ее основное уравнение (уравнение Шрёдингера). Нобелевская премия по физике (1933, совм. с Дираком).

Штейнгауз (***Steinhaus*** *Hugo*) (1887–1972) — польский математик, член Краковской и Польской АН (1952), основатель (совместно с С. Банахом) и редактор журнала "Studia Mathematica".

Штеккер *Георгий Андреевич* — сын А.С. Алексеевой (Штеккер), сестры К.С. Станиславского (Алексеева), управлявший Комаровским домом на момент его покупки П.С. Александровым и А.Н. Колмогоровым.

Шубников *Алексей Васильевич* (1887–1970) — физик-кристаллограф, академик АН СССР (1953); с 1944 по 1978 г. — директор Института кристаллографии, с 1953 г. — заведующий кафедрой Московского университета. Основные труды: в области теории симметрии, кристаллофизики, теории роста кристаллов. Герой Соц. Труда (1967); Сталинская премия (1947, 1950).

Шур (***Schur*** *Issai*) (1875–1941) — немецкий математик российского происхождения, профессор университета в Берлине, член Берлинской АН, чл.-корр. АН СССР (1929); в 1938 г. эмигрировал в Палестину.

Шура-Бура *Михаил Романович* (р. 1918) — математик, профессор МГУ (1955), ученик П.С. Александрова. Государственная премия СССР (1955).

Шурыгин *Александр Михайлович* (р. 1931) — геолог и математик, доктор технич. наук, зав. отделом статистических методов в геологии Лаборатории А.Н. Колмогорова в МГУ.

Э

Эйнштейн (***Einstein*** *Albert*) (1879–1955) — крупнейший физик-теоретик, один из основателей современной физики, профессор Берлинского университета, чл.-корр. АН СССР (1922), почетный член АН СССР (1926); в 1933 г. эмигрировал в США, работал в Институте перспективных исследований в Принстоне. Создал частную (1905) и общую (1907–1910) теорию относительности. Основополагающие труды по квантовой теории света, молекулярно-статистической теории броуновского движения, открыл закон фотоэффекта. Нобелевская премия по физике (1921).

Эссеен (***Esseen*** *Carl-Gustav*) (1918–2001) — шведский математик, специалист в области математической статистики, профессор Высшей технической школы в Стокгольме (1949–1967) и Упсальского университета (1967–1984).

Ю

Юнович *Борис Маркович* (1906–1941) — математик, ученик А.Н. Колмогорова, пропал без вести на фронте в 1941 г.

Юшкевич *Адольф Павлович* (1906–1993) — математик и историк математики, профессор МВТУ (1940) и Московского университета, чл.-корр. Международной Академии истории наук.

Юшкевич *Александр Адольфович* (р. 1930) — математик, профессор, сын А.П. Юшкевича, в настоящее время живет и работает в США.

Я

Яглом *Акива Моисеевич* (р. 1921) — математик, профессор, ученик А.Н. Колмогорова.

Якобсон *Роман Осипович* (1896–1982) — русский и американский языковед и литературовед.

Янин *Валентин Леонтьевич* (р. 1929) — археолог и историк, чл.-корр. АН СССР (1966), академик РАН (1990).

КОЛМОГОРОВ
юбилейное издание в 3-х книгах

Книга первая
ИСТИНА — БЛАГО
Биобиблиография

Редактор-составитель А.Н. Ширяев
Подготовка текста Н.Г. Химченко

Редактор *И.Л. Легостаева*
Художник-ретушер *А.М. Кузнецов*
Дизайнер *К.Е. Панкратьев*
Оригинал-макет *И.Л. Панкратьевой*

ЛР №071930 от 06.07.99
Подписано в печать 02.04.03. Формат 70×100/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 14,5. Уч.-изд. л. 18,85. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МИАК «Наука/Интерпериодика»
117997 Москва, Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru

Отпечатано в ППП «Типография «Наука»
121099 Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 5-9221-0339-3

9 785922 103398