СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

КНИГА ВТОРАЯ

ЭЛИ КАРТАН

МЕТОД ПОДВИЖНОГО РЕПЕРА, ТЕОРИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ГРУПП И ОБОБЩЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

Э. КАРТАН

МЕТОД ПОДВИЖНОГО РЕПЕРА, ТЕОРИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ГРУПП И ОБОБЩЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

ЛЕКЦИИ, ЧИТАННЫЕ В НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОМ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ.
МОСКВА 16—20 ИЮНЯ 1930.

Перевод с французского
Проф. С. П. ФИНИКОВА

МОСКВА — 1933 — ЛЕНИНГРАД

T 25-5a-4

ÉLIE CARTAN

LA MÉTHODE DU REPÈRE MOBILE, LA THÉORIE DES GROUPES CONTINUS ET LES ESPACES GÉNÉRALISÉS

CONFÉRENCES FAITES À MOSCOU
16—20 juin 1930

Редакционную работу по этой книге провел *В. И. Контовт*. Издание оформила *О. Н. Персиянинова*. Корректуру держал *И. П. Заградсков*. Наблюдал за выпуском *Н. А. Сахаров*. Рукопись сдана в производство 23/VI 1932 г. Вышла в свет в июле 1933 г. в колич. 2000 экз. на бумаге формата 82/111. Печат. знак в книге 202 000, листов $4^1/_2$.
Зак. № 5665. ГТТИ 471. Уполн. Главл. № В-45009.

Фабрика книги «Красный пролетарий» издательства ЦК ВКП(б) Партиздата.
Москва, Краснопролетарская, 16.

I.

1. Всем геометрам известно, что удалось извлечь Дарбу (G. Darboux) в теории кривых и поверхностей из употребления подвижного трехгранника, связанного внутренним образом с различными точками кривой или поверхности. Для кривой осями трехгранника, известного под именем трехгранника Френе (Frenet), служат касательная, главная нормаль и бинормаль кривой. В случае поверхности его оси — касательные к главным направлениям и нормаль к поверхности; Дарбу пользовался также произвольным прямоугольным трехгранником с единственным условием, чтобы третья ось была нормальна к поверхности. Метод подвижного трехгранника с успехом применяется и в других геометрических теориях, например в теории триортогональных поверхностей.

Если подумать о внутренних причинах плодотворности этого метода, то можно прежде всего заметить, что область применения его ограничивается *диференциальной* геометрией; он не принесет пользы в теории алгебраических кривых, как таковых. Метод приложим только к тем проблемам, которые касаются бесконечно малых свойств кривой или поверхности. И в области диференциальной геометрии его успех зависит от двух причин:

Первая. — Трехгранник, присоединенный к данной точке кривой или поверхности, представляет наиболее простую систему отнесения для изучения бесконечно малых свойств кривой или поверхности в окрестности точки.

Вторая. — Кривая (или поверхность) вполне определена, вплоть до перемещения в пространстве, если известны компоненты по осям трехгранника бесконечно малого перемещения его при переходе из данной точки кривой (или поверхности) в бесконечно близкую.

2. Первое основание имеет характер простого удобства, можно сказать, определяется эстетическими принципами. Поэтому оно не налагает на выбор трехгранника никакого стесняющего условия. Легко понять, что в некоторых вопросах может даже оказаться более удобным выбирать трехгранник не прямоугольный, а косоугольный, изменяющийся от точки к точке. Как бы то ни было, он должен определяться теми диференциальными свойствами кривой или поверхности, которые появляются в

первую очередь, т. е. которые вводят диференциальные элементы низшего порядка. И действительно, в случае кривой или поверхности подвижной трехгранник Дарбу определяется диференциальными элементами первых двух порядков.

3. Второе покоится на хорошо известной теореме: если имеется два непрерывных семейства прямоугольных трехгранников и можно установить взаимно однозначное соответствие между трехгранниками обоих семейств так, что компоненты в относительном движении бесконечно малого перемещения трехгранника первого семейства равны относительным компонентам бесконечно малого перемещения соответствующего трехгранника второго семейства, то существует определенное перемещение, которое приводит в совпадение одновременно все трехгранники первого семейства с соответствующими трехгранниками второго. Относительными компонентами бесконечно малого перемещения подвижного прямоугольного трехгранника являются шесть компонентов по осям этого трехгранника бесконечно малого перемещения вершины трехгранника и соответственного бесконечно малого вращения его.

Эта теорема, строго говоря, не требует, чтобы трехгранники были прямоугольны; надо только, чтобы рассматриваемые трехгранники были все равны между собой; шесть количеств, которые по отношению к осям подвижного трехгранника аналитически определяют бесконечно малое перемещение его, будут выражены более или менее сложно, но теорема сохранит силу. Наоборот, если пользоваться трехгранниками переменной формы, то, конечно, можно аналитически определить переход от одного трехгранника к бесконечно близкому, но придется ввести изменение формы трехгранника, т. е. паразитические элементы, не имеющие отношения к свойствам изучаемой кривой или поверхности.

4. Предыдущие рассуждения показывают, что метод подвижного трехгранника, чтобы сохранить всю свою силу, должен удовлетворять следующим условиям:

1°. Трехгранник, связанный с данной точкой изучаемого многообразия, должен быть определен внутренним образом диференциальными элементами первых порядков многообразия.

2°. Различные трехгранники должны быть прямоугольны или, по крайней мере, все равны между собой.

Сказать, что трехгранник определен внутренним образом, значит утверждать, что трехгранники, определенные согласно выбранному закону в аналогичных точках двух равных многообразий, совпадут после перемещения, которое приведет в совпадение два многообразия.

Что касается отмеченного выше условия удобства, то это зависит от вида многообразия. С точки зрения чисто логической, ничто не мешает, например, заменить трехгранник Френе для кривой в пространстве совсем другим трехгранником, прямоугольным или не прямоугольным, который был бы с ней неразрывно связан.

II.

5. В классических приложениях метода подвижного трехгранника выбор трехграника подсказывается сам собой так, что геометр не испытывает никакого колебания. Но даже не покидая эвклидову геометрию, мы найдем случаи, когда дело обстоит иначе. Рассмотрим, например, в комплексной эвклидовой геометрии минимальную кривую. Трехгранник Френе, который можно рассматривать, как образованный тремя единичными векторами, отложенными на касательной, главной нормали и бинормали, здесь уже не существует, так как всякий вектор, отложенный на касательной, имеет длину равную нулю. Правда, можно выбирать трехгранники, у которых координатные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_3$ будут нулевой длины со скалярным произведением, равным единице, а вектор $\vec{e}_2$ длиной равный единице и перпендикулярный к двум первым; вектор $\vec{e}_1$ мы примем тогда касательным к кривой, но совершенно не видно, по крайней мере непосредственно, никакого основания, чтобы выбрать для $\vec{e}_1$ тот или другой из векторов касательных к кривой (они все, впрочем, равны между собой).

С другой стороны, нормальная плоскость к кривой совпадает с соприкасающейся, поэтому не существует, повидимому, никакого основния, чтобы та или другая нормаль по преимуществу играла роль главной нормали. Следовательно, не установлен ни выбор вектора $\vec{e}_1$, ни выбор вектора $\vec{e}_2$.

Этот пример показывает законность проблемы:

Возможно ли присоединить ко всякой точке минимальной кривой трехгранник, определенный внутренним образом, всегда равный самому себе?

И более общего вопроса: допускает ли метод подвижного трехгранника обобщение на все вопросы диференциальной геометрии?

6. Прежде чем заняться этой общей задачей, заметим, что, конечно, найдутся случаи, когда определение трехгранника, внутренним образом связанного с переменной точкой кривой или поверхности, невозможно. Достаточно вспомнить о прямой линии

(не изотропной): первая ось трехгранника Френе вполне определена, но не может быть никакого основания, чтобы предпочесть для второй оси то или другое направление, перпендикулярное к прямой. Заметим, что в этом случае — и мы увидим позднее всю важность этого замечания — невозможность лежит в природе вещей: существует группа перемещений, оставляющая неподвижными одновременно все точки прямой. Достаточно даже для логической невозможности определения трехгранника, чтобы изучаемое многообразие было инвариантно по отношению к группе перемещений, лишь бы было бесконечное множество перемещений этой группы, оставляющих неподвижной произвольно заданную точку M этого многообразия, ибо тогда определение трехгранника, внутренним образом связанного с точкой M, если бы оно было возможно, дало бы этот трехгранник совершенно так же, как все те, которые можно из него получить, применяя рассматриваемые перемещения. Таким образом, например, невозможно определение прямоугольного трехгранника, внутренним образом связанного с точкой M какой-нибудь сферы, ибо существует бесконечное множество перемещений, оставляющих инвариантной сферу и оставляющих неподвижной точку M.

7. Оставим это пока в стороне (мы увидим далее, что это единственный случай, когда внутреннее определение трехгранника невозможно). Прежде чем рассмотреть минимальную кривую, вернемся к классическому случаю обыкновенной кривой в пространстве и исследуем, немного педантично, процесс, посредством которого, изгоняя по возможности всякую геометрическую интуицию, можно притти к трехграннику Френе.

Присоединим сначала к данной точке M пространственной кривой — определенной, допустим, с помощью параметра t — целое семейство прямоугольных трехгранников, а именно: все те трехгранники, которые имеют свою вершину в точке M. Назовем их трехгранниками нулевого порядка. Они зависят от трех параметров u_1, u_2, u_3, которые мы будем называть вторичными параметрами нулевого порядка. Если будем менять точку M, то трехгранники нулевого порядка будут зависеть от четырех параметров u_1, u_2, u_3 и t. Обозначим через ω_1, ω_2, ω_3 компоненты по подвижным осям переноса вершины трехгранника M и через ω_{23}, ω_{31}, ω_{12} относительные компоненты мгновенного вращения трехграника. Ясно, что три компонента ω_1, ω_2, ω_3, обращающиеся в нуль, когда точка M остается неподвижной, имеют вид:

$$\omega_1 = p_1\,dt, \quad \omega_2 = p_2\,dt, \quad \omega_3 = p_3\,dt;$$

что касается компонентов вращения ω_{23}, ω_{31}, ω_{12}, то они содержат не только dt, но и диференциалы вторичных параметров du_1, du_2, du_3; нетрудно даже заметить, что они линейно независимы по отношению к этим трем диференциалам.

Коэфициенты p_1, p_2, p_3, очевидно, зависят от числовых значений вторичных параметров; поэтому между этими параметрами и параметром t можно установить два соотношения так, чтобы отношения $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ и $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ обратились в нуль; геометрически это сводится к выбору первой оси касательной к кривой.

Трехгранники, удовлетворяющие этому условию, будут называться трехгранниками первого порядка; ограничиваясь ими, мы будем иметь:

$$\omega_2 = 0, \quad \omega_3 = 0.$$

Так как трехгранники первого порядка зависят только от одного параметра, то компоненты ω_{23}, ω_{31}, ω_{12} бесконечно малого вращения при условии $dt = 0$ будут связаны двумя линейными соотношениями. Геометрически это значит: если закрепить точку M, то трехгранник первого порядка допускает вращение только около своей первой оси, так что компоненты вращения около двух последних осей ω_{31}, ω_{12} равны нулю. Отсюда следует, что при изменении положения точки M

$$\omega_{31} = p_{31}\,dt, \quad \omega_{12} = p_{12}\,dt.$$

Отношения

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_1} = \frac{p_{31}}{p_1}, \quad \frac{\omega_{12}}{\omega_1} = \frac{p_{12}}{p_1}$$

зависят теперь только от одного вторичного параметра первого порядка, и его можно выбрать так, чтобы обратить в нуль одно из этих отношений, например p_{31}. Мы приходим, таким образом, к вполне определенной системе отнесения второго порядка. Выражение ω_1 есть элемент дуги ds, отношение $\frac{p_{12}}{p_1}$ — кривизна кривой. Компонент $\omega_{23} = p_{23}\,dt$ дает кручение $\frac{p_{23}}{p_1}$.

Мы видим, что от трехгранников нулевого порядка, зависящих от трех параметров, путем последовательных ограничений мы пришли к трехгранникам первого порядка, зависящим от одного параметра, и в конце концов к единственному трехграннику второго порядка — трехграннику Френе.

8. Перейдем теперь к случаю минимальной кривой. Воспользуемся ради удобства трехгранником, образованным тремя

векторами $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, присоединенными к точке M кривой и удовлетворяющими условиям:

$$\vec{e}_1^{\,2} = \vec{e}_3^{\,2} = \vec{e}_1 \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \vec{e}_3 = 0, \quad \vec{e}_2^{\,2} = \vec{e}_1 \vec{e}_3 = 1. \tag{1}$$

Относительными компонентами бесконечно малого перемещения трехгранника служат коэфициенты, входящие в формулы:

$$dM = \omega^1 \vec{e}_1 + \omega^2 \vec{e}_2 + \omega^3 \vec{e}_3,$$
$$d\vec{e}_i = \omega_i^{\,1} \vec{e}_1 + \omega_i^{\,2} \vec{e}_2 + \omega_i^{\,3} \vec{e}_3.$$

Девять компонентов ω_i^j не будут независимы. Диференцируя равенства (1, легко найдем:

$$\omega_1^{\,3} = \omega_3^{\,1} = \omega_2^{\,2} = 0,$$
$$\omega_1^{\,2} + \omega_2^{\,3} = \omega_2^{\,1} + \omega_3^{\,2} = \omega_1^{\,1} + \omega_3^{\,3} = 0. \tag{2}$$

Сохраним компонентами бесконечно малого перемещения шесть количеств ω^1, ω^2, ω^3; $\omega_1^{\,1}$, $\omega_1^{\,2}$, $\omega_3^{\,2}$.

Мы можем тотчас же сэкономить, начав с трехгранников первого порядка, для которых $\vec{e}_1$ есть какой-нибудь вектор касательной к кривой. Эти трехгранники зависят от двух вторичных параметров: один из них служит для определения самого вектора $\vec{e}_1$, а другой — для определения направления вектора $\vec{e}_2$, перпендикулярного к $\vec{e}_1$. Прежде всего имеем:

$$\omega^2 = \omega^3 = 0.$$

Из четырех остающихся компонентов два, ω^1 и $\omega_1^{\,2}$, обращаются в нуль, если оставить неподвижной точку M; действительно, диференциал $d\vec{e}^1$ вектора $\vec{e}_1$ должен быть вектором, отложенным на определенной касательной к кривой, и не должен иметь компонентов, параллельных $\vec{e}_2$. Что касается двух других компонентов $\omega_1^{\,1}$ и $\omega_3^{\,2}$, то они зависят линейно от диференциалов двух вторичных параметров. Меняя основной параметр t и два вторичных, мы имеем, следовательно:

$$\omega^1 = p^1\, dt, \quad \omega_1^{\,2} = p_1^{\,2}\, dt.$$

Коэфициенты p^1 и p_1^2 a priori зависят от вторичных параметров. Чтобы увидеть, как они зависят, заменим трехгранник $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ другим трехгранником первого порядка $(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \vec{\eta}_3)$. Легко получим:

$$\vec{\eta}_1 = \lambda\vec{e}_1, \quad \vec{\eta}_2 = \vec{e}_2 + \mu\vec{e}_1, \quad \vec{\eta}_3 = \frac{1}{\lambda}\vec{e}_3 - \frac{\mu}{\lambda}\vec{e}_2 - \frac{\mu^2}{2\lambda}\vec{e}_1.$$

Новые значения компонентов ω^1 и ω_1^2 вычисляются без затруднения, и мы находим:

$$\overline{\omega}^1 = \frac{1}{\lambda}\omega^1, \quad \overline{\omega}_1^2 = \lambda\omega_1^2,$$

откуда

$$\overline{p}^1 = \frac{1}{\lambda}p^1, \quad \overline{p}_1^2 = \lambda p_1^2.$$

Можно теперь выбрать λ так, чтобы привести отношение $\frac{p_1^2}{p^1}$ к определенному числовому значению, например к 1. Мы получаем, таким образом, семейство трехгранников второго порядка, которое зависит не более, чем от одного вторичного параметра и для которого

$$\omega^2 = 0, \ \omega^3 = 0, \ \omega_1^2 = \omega^1.$$

Если теперь станем менять трехгранники второго порядка, оставляя неподвижной точку M, то два компонента ω_1^1 и ω_2^2 не будут более независимы; они связаны соотношением. Мы легко его получим, заметив, что вектор $\vec{e}_1$ теперь неподвижен, его диференциал равен нулю и компонент ω_1^1, следовательно, обращается в нуль вместе с dt. Перемещая M, мы будем иметь:

$$\omega_1^1 = p_1^1\, dt.$$

Чтобы увидеть, как p_1^1 зависит от вторичного параметра трехгранников второго порядка, заменим трехгранник $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ трехгранником $(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \vec{\eta}_3)$ с векторами

$$\vec{\eta}_1 = \vec{e}_1, \quad \vec{\eta}_2 = \vec{e}_2 + \mu\vec{e}_1, \quad \vec{\eta}_3 = \vec{e}_3 - \mu\vec{e}_2 - \frac{1}{2}\mu^2\vec{e}_1.$$

Замечая, что ω_1^1 есть скалярное произведение $\vec{e}_2 d\vec{e}_1$, мы найдем:

$$\overline{\omega}_1^1 = \omega_1^1 - \mu\,\omega_1^2 = (p_1^1 - \mu p^1)\,dt.$$

Можно, следовательно, располагая параметром μ, обратить p_1^1 в нуль. Мы приходим, таким образом, к определенному трехграннику третьего порядка, для которого

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega_1^2 = \omega_1^1 = 0.$$

Компонент ω_2^1 имеет тогда вид $k\omega^1$, и коэфициент k есть *диференциальный инвариант* кривой; это — *псевдокривизна.*

Наконец, выражение ω^1, неопределенное, пока мы имеем дело с трехгранниками первого порядка, принимает определенное значение, как только мы приходим к трехгранникам второго порядка. Это — элемент *псевдодуги* минимальной кривой $d\sigma$.

Можно теперь написать формулы Френе для минимальных кривых; именно:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dM}{d\sigma} &= \vec{e}_1, \\ \frac{d\vec{e}_1}{d\sigma} &= \vec{e}_2, \\ \frac{d\vec{e}_2}{d\sigma} &= -k\vec{e}_1 - \vec{e}_3, \\ \frac{d\vec{e}_3}{d\sigma} &= k\vec{e}_2. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Две минимальных кривых равны, если псевдокривизна у обеих кривых — одна и та же функция от псевдодуги σ или лучше, если $\frac{dk}{d\sigma}$ — одна и та же функция от k.

9. Заметим, что мимоходом мы неявно сделали допущение, когда привели к единице отношение:

$$\frac{\overline{p_1^2}}{\overline{p^1}} = \lambda^2 \frac{p_1^2}{p^1}.$$

Это предполагало, что коэфициент p_1^2 не равен нулю, т. е. геометрически, что мы не имеем дела с прямой. Если данная линия — прямая, то нет никакого средства отличить один от другого трехгранники первого порядка и тем более нет средства определить на прямой *естественный параметр* σ, что, впрочем, геометрически очевидно.

Заметим, кроме того, что мы воспользовались геометрическими соображениями, чтобы предвидеть, какие из новых компонентов бесконечно малого перемещения при переходе от трехгранников данного порядка к трехгранникам высшего рода не будут более зависеть от диференциалов вторичных параметров. Метод, которым мы пользовались, если и дает форму уравнений Френе, что *только и представляет интерес в теоретическом исследовании*, — не дает нам явно ни выражения $d\sigma$, ни выражения k. Можно обойти эти неудобства, подсчитывая непосредственно с самого начала компоненты бесконечно малого перемещения для трехгранника нулевого порядка. Мы проведем это в случае минимальной кривой.

10. Определим минимальную кривую по Вейерштрассу уравнениями в прямоугольных координатах:

$$x = \int \frac{1-t^2}{2} F(t)\,dt, \quad y = \int i\,\frac{1+t^2}{2} F(t)\,dt, \quad z = \int tF(t)\,dt, \qquad (4)$$

где x, y, z означают прямоугольные координаты точки кривой, $F(t)$ — аналитическую функцию от t. Обозначим через α_i, β_i, γ_i проекции вектора $\vec{e}_i$ на неподвижные прямоугольные оси. Имеем:

$$\begin{aligned}
\omega^1 &= \vec{e}_3\, dM = \alpha_3\, dx + \beta_3\, dy + \gamma_3\, dz,\\
\omega^2 &= \vec{e}_2\, dM = \alpha_2\, dx + \beta_2\, dy + \gamma_2\, dz,\\
\omega^3 &= \vec{e}_1\, dM = \alpha_1\, dx + \beta_1\, dy + \gamma_1\, dz,\\
\omega_1^{\,1} &= \vec{e}_3\, d\vec{e}_1 = \alpha_3\, d\alpha_1 + \beta_3\, d\beta_1 + \gamma_3\, d\gamma_1,\\
\omega_1^{\,2} &= \vec{e}_2\, d\vec{e}_1 = \alpha_2\, d\alpha_1 + \beta_2\, d\beta_1 + \gamma_2\, d\gamma_1,\\
\omega_2^{\,2} &= -\vec{e}_3\, d\vec{e}_2 = -\alpha_3\, d\alpha_2 - \beta_3\, d\beta_2 - \gamma_3\, d\gamma_2.
\end{aligned}$$

Чтобы определить трехгранник нулевого порядка, можно взять:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \lambda\frac{1-t^2}{2}, & \beta_1 &= i\lambda\frac{1+t^2}{2}, & \gamma_1 &= \lambda t,\\
\alpha_2 &= -t+\mu\frac{1-t^2}{2}, & \beta_2 &= it+i\mu\frac{1+t^2}{2}, & \gamma_2 &= 1+\mu t,\\
\alpha_3 &= \rho\,\frac{1+u^2}{2}, & \beta_3 &= i\rho\,\frac{1+u^2}{2}, & \gamma_3 &= \rho u,
\end{aligned}$$

с условиями

$$u-t=\frac{2}{\mu}, \quad \lambda\rho=-\frac{1}{2}\mu^2.$$

Простой подсчет дает:

$$\omega^1=\frac{1}{\lambda}F(t)dt, \quad \omega^2=0, \quad \omega^3=0,$$

$$\omega_1^{\ 1}=\frac{d\lambda}{\lambda}-\mu\,dt, \quad \omega_1^{\ 2}=\lambda\,dt, \quad \omega_3^{\ 2}=2\rho\frac{d\mu}{\mu^2}-\rho\,dt.$$

Мы видим, что отношение

$$\frac{\omega_1^{\ 2}}{\omega^1}=\frac{\lambda^2}{F(t)}$$

можно привести к единице, полагая

$$\lambda^2=F(t).$$

Тогда

$$\omega^1=d\sigma=\sqrt{F(t)}\,dt, \tag{5}$$

$$\omega_1^{\ 1}=\left(\frac{1}{2}\frac{F'(t)}{F(t)}-\mu\right)dt$$

и $\omega_1^{\ 1}$ можно привести к нулю, полагая

$$\mu=\frac{1}{2}\frac{F'(t)}{F(t)}, \text{ откуда } \rho=-\frac{1}{8}\frac{F'^2}{\lambda F^2}.$$

Наконец,

$$\omega_3^{\ 2}=\frac{5F'^2-4FF''}{8\lambda F^2}dt=\frac{5F'^2-4FF''}{8F^3}d\sigma,$$

что дает кривизну

$$K=\frac{5F'^2-4FF''}{8F^3}. \tag{6}$$

Мы видим, что $d\sigma$ определено только вплоть до знака, но K определено рационально через производные первых двух порядков от $F(t)$. Два вектора $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ определены тоже вплоть до знака (второй вполне определяется выбором первого); что касается до вектора $\vec{e}_3$, то он определяется без двойного знака.

Раз только трехгранник Френе определен, дело геометра — установить геометрическое значение его векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, значение псевдодуги и кривизны. Но ясно, что знание формул Френе окажет существенную помощь в этом чисто геометрическом исследовании; оно подскажет интерпретации, которые нельзя было предвидеть.

III.

11. Прежде чем приступить к систематическому исследованию метода подвижного репера (система отнесения), рассмотрим еще несколько примеров из области эвклидовой геометрии в собственном смысле слова.

Можно поставить себе задачей изучение свойства кривых, которые не только не зависят от их положения в пространстве, но и не меняются при подобном преобразовании. С этой точки зрения две подобные фигуры должны рассматриваться как равные. Ясно, что два прямых трехгранника, построенных на трех векторах одной и той же длины, надо рассматривать как равные, даже если длина векторов первого трехгранника не та же самая, как длина векторов второго. Переход от одного прямоугольного трехгранника к другому, бесконечно близкому, происходит тогда посредством переноса и бесконечно малого вращения, вместе с подобным преобразованием с отношением подобия, близким к единице. Необходимо семь количеств вместо шести, чтобы определить аналитически этот новый вид перемещения, и новые формулы имеют вид:

$$
\begin{aligned}
dM &= \omega_1\vec{e}_1+\omega_2\vec{e}_2+\omega_3\vec{e}_3,\\
d\vec{e}_1 &= \omega\vec{e}_1+\omega_{12}\vec{e}_2+\omega_{13}\vec{e}_3,\\
d\vec{e}_2 &= \omega_{21}\vec{e}_1+\omega\vec{e}_2+\omega_{23}\vec{e}_3,\\
d\vec{e}_3 &= \omega_{31}\vec{e}_1+\omega_{32}\vec{e}_2+\omega\vec{e}_3,
\end{aligned}
$$

где ω_1, ω_2, ω_3 — компоненты переноса, $\omega_{23}=-\omega_{32}$, $\omega_{31}=-\omega_{13}$, $\omega_{12}=-\omega_{21}$ — компоненты вращения и $1+\omega$ — отношение подобия.

Если дана кривая в пространстве, мы не заметим непосредственно вектора $\vec{e}_1$ среди векторов различной длины, касательных к кривой, и действительно, ограничиваясь элементами первого порядка, мы не имеем никакого основания выбрать один вектор касательный к кривой преимущественно перед другим. Существует, однако, единица длины, которую можно присоединить внутренним образом к каждой точке M кривой, это—длина радиуса кривизны в этой точке. Искомый трехгранник, таким образом, вполне определен из геометрических соображений. Обозначая через $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ единичные векторы обычного трехгранника Френе, через $\frac{1}{\rho}$ и $\frac{1}{\tau}$ — кривизну и кручение, принимаем:

$$\vec{e}_1 = \rho\vec{T},\quad \vec{e}_2 = \rho\vec{N},\quad \vec{e}_3 = \rho\vec{B}$$

и формулы Френе будут:

$$\begin{aligned}
dM &= \frac{ds}{\rho}\vec{e}_1,\\
d\vec{e}_1 &= \frac{d\rho}{\rho}\vec{e}_1 + \frac{ds}{\rho}\vec{e}_2,\\
d\vec{e}_2 &= -\frac{ds}{\rho}\vec{e}_1 + \frac{d\rho}{\rho}\vec{e}_2 + \frac{ds}{\tau}\vec{e}_3,\\
d\vec{e}_3 &= \qquad\qquad -\frac{ds}{\tau}\vec{e}_2 + \frac{d\rho}{\rho}\vec{e}_3.
\end{aligned}$$

Новый естественный параметр определен формулой:

$$d\sigma = \frac{ds}{\rho}, \tag{7}$$

и мы имеем:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dM}{d\sigma} &= \vec{e}_1,\\
\frac{d\vec{e}_1}{d\sigma} &= k\vec{e}_1 + \vec{e}_2,\\
\frac{d\vec{e}_2}{d\sigma} &= -\vec{e}_1 + k\vec{e}_2 + h\vec{e}_3,\\
\frac{d\vec{e}_3}{d\sigma} &= \qquad -h\vec{e}_2 + k\vec{e}_3,
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

с двумя *основными инвариантами*:

$$k = \frac{d\rho}{ds},\quad h = \frac{\rho}{\tau}. \tag{9}$$

Две кривые, у которых k и h — одни и те же функции σ, *равны*, в смысле геометрии подобий, т. е. в обычном смысле слова подобны.

12. Возьмем теперь пример, еще более удаленный от обычной эвклидовой геометрии. Рассмотрим свойства плоских кривых, инвариантных по отношению к афинным унимодулярным преобразованиям, т. е. по отношению к преобразованиям, определяемым в декартовых координатах формулами вида:

$$x' = ax + by + c,$$
$$y' = a'x + b'y + c',$$

при условии

$$ab' - ba' = 1.$$

Система отнесения, или *репер*, которая станет теперь на место прямоугольного трехгранника, является системой декартовых координат, определенной двумя векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, с единственным условием, чтобы построенный на этих двух векторах параллелограм имел заданную площадь, которая будет служить единицей площади.

Присвоим еще имя *перемещения* афинному унимодулярному преобразованию. Для бесконечно малого перемещения репера с началом M мы будем иметь формулы:

$$\left.\begin{aligned} dM &= \omega^1\vec{e}_1 + \omega^2\vec{e}_2, \\ de_1 &= \omega_1{}^1\vec{e}_1 + \omega_1{}^2\vec{e}_2, \\ de_2 &= \omega_2{}^1\vec{e}_1 + \omega_2{}^2\vec{e}_2, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

и условие на площадь параллелограма $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ дает:

$$\omega_1{}^1 + \omega_2{}^2 = 0. \tag{11}$$

Рассматриваемое бесконечно малое перемещение по отношению к подвижному реперу имеет пять компонентов: ω^1, ω^2, $\omega_2{}^1$, $\omega_1{}^2$, $\omega_2{}^1$.

Можно доказать, что если два семейства подвижных реперов соответствуют так, что компоненты ω_i и $\omega_i{}^j$ равны, то можно перейти от одного семейства к другому определенным афинным унимодулярным преобразованием.

Заметив это, допустим, что выбрана неподвижная система отнесения, и пусть x и y — координаты точки плоской кривой, которая, допустим для простоты, дана своим уравнением $y = f(x)$. Присоединим ко всякой точке ее репер первого порядка с вектором $\vec{e}_1$'

касательным к кривой. Компоненты двух векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ примут вид:

$$\text{для } \vec{e}_1: \qquad \alpha, \quad \alpha y',$$

$$\text{для } \vec{e}_2: \qquad \beta, \quad \beta y' + \frac{1}{\alpha}.$$

Подсчет компонентов ω^i и ω_i^j производится без затруднения при помощи уравнения (10) и дает:

$$\omega^2 = 0, \qquad \omega^1 = \frac{dx}{\alpha}, \quad \omega_1^2 = \alpha^3 y'' dx,$$

$$\omega_1^1 = \frac{d\alpha}{\alpha} - \alpha\beta y'' dx, \quad \omega_2^1 = \frac{d\beta}{\alpha} + \beta\frac{d\alpha}{\alpha^2} - \beta^2 y'' dx.$$

Мы получим реперы второго порядка, приравнивая единице отношения $\frac{\omega_1^2}{\omega^1}$ (что предполагает $y'' \neq 0$). Эти реперы зависят от одного только параметра β. Имеем:

$$\alpha = y''^{-\frac{1}{3}};$$

более того, ω^1 вполне определено и дает диференциал аффинной дуги ds:

$$ds = y''^{\frac{1}{3}} dx. \tag{12}$$

Для реперов второго порядка компонент ω_1^1 не зависит от диференциала единственного вторичного параметра β; имеем:

$$\omega_1^1 = \left(-\frac{1}{3}\frac{y'''}{y''} - \beta y''^{\frac{2}{3}}\right)dx.$$

Репер третьего порядка получается обращением в нуль ω_1^1, что дает:

$$\beta = -\frac{1}{3} y''^{-\frac{5}{3}} y''' = \frac{1}{2}\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)'.$$

Для репера третьего порядка, искомого, окончательного, имеем:

$$\omega_2^1 = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} z'' dx = \frac{1}{2} z'' ds = k\, ds,$$

где $z = (y'')^{-\frac{2}{3}}$.

Итак, формулы Френе имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dM}{d\sigma} &= \vec{e}_1, \\ \frac{d\vec{e}_1}{d\sigma} &= \vec{e}_2, \\ \frac{d\vec{e}_2}{d\sigma} &= k\vec{e}_1. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Диференциальный инвариант k есть *афинная кривизна*. Конические сечения характеризуются постоянной афинной кривизной согласно диференциальному уравнению их:

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)''' = 0,$$

которое принадлежит, вплоть до формы, Монжу.

В действительности, имеется три возможных выбора репера: если j означает какой-нибудь кубический корень из единицы, то можно соответственно заменить

$$d\sigma, \quad \vec{e}_1, \quad \vec{e}_2, \quad k$$

на

$$j\,d\sigma, \quad j^2\vec{e}_1, \quad j\vec{e}_2, \quad jk.$$

Чтобы две кривые были равны, т. е. отличались только афинным унимодулярным преобразованием, необходимо и достаточно, чтобы k^3 имело одно и то же постоянное значение для обеих кривых, или же чтобы $\frac{dk}{d\sigma}$ было для обеих кривых одной и той же функцией от k^3.

IV.

13. Отметим теперь другой метод, достаточно быстрый в известных случаях, если не для того, чтобы получить явно диференциальные инварианты, то по крайней мере для того, чтобы получить формулы Френе. Этот новый способ использует метод *приведенных уравнений*, систематически развитый Трессом (Tresse) для изыскания диференциальных инвариантов. Мы ограничимся тем, что покажем его на двух частных примерах.

Первый из них — тот же, что мы рассматривали в предыдущем параграфе.

Присоединим к произвольной точке M какой-либо плоской кривой систему декартовых координат с началом в M так, чтобы уравнение кривой в окрестности точки M было насколько возможно просто. Мы ограничим координатные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ условием, что определяемый ими параллелограм имеет площадь, равную единице. Выбирая первую ось касательной к кривой, мы получим уравнение кривой, которую будем предполагать аналитической, в виде:

$$y = \frac{1}{2} a_2 x^2 + \frac{1}{6} a_3 x^3 + \ldots$$

Можно умножить x и y на множителя λ и $\frac{1}{\lambda}$; это соответствует дозволенному нашими условиями преобразованию координат и приведет коэфициент a_2 к единице. Полагая затем

$$x = X + \mu Y, \quad y = Y,$$

что тоже допустимо, легко обнаружить, что можно обратить коэфициент a_3 в нуль.

Таким образом приходим к *приведенному уравнению*, которое мы будем писать в виде:

$$y = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} k x^4 + \ldots \tag{14}$$

Если рассматривать точку M', бесконечно близкую к M, то ее абсцисса x является количеством, внутренним образом связанным с дугой кривой MM'. Мы можем назвать его элементом *афинной дуги*. Выбирая на кривой начало, можно приписать каждой точке M ее *афинную криволинейную абсциссу* σ, и коэфициенты k... в приведенном уравнении будут определенными функциями абсциссы σ соответствующей точки M.

Перемещаясь по кривой, мы, очевидно, будем иметь:

$$\frac{dM}{d\sigma} = \vec{e}_1, \quad \frac{d\vec{e}_1}{d\sigma} = p_1{}^1 \vec{e}_1 + p_1{}^2 \vec{e}_2, \quad \frac{d\vec{e}_2}{d\sigma} = p_2{}^1 \vec{e}_1 - p_1{}^1 \vec{e}_2.$$

Все сводится к определению неизвестных коэфициентов $p_1{}^1$, $p_1{}^2$, $p_2{}^1$.

Рассмотрим для этого на кривой *неподвижную* точку P; обозначим через x, y ее координаты относительно репера к точке M

с абсциссой σ; это — функции от σ, удовлетворяющие некоторым диференциальным уравнениям, которые нетрудно составить. Действительно, достаточно выразить, что точка $M + x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ неподвижна; это даст:

$$\frac{dx}{d\sigma} + 1 + p_1^1 x + p_2^1 y = 0, \quad \frac{dy}{d\sigma} + p_1^2 x - p_1^1 y = 0. \tag{15}$$

С другой стороны, координаты x и y удовлетворяют соотношению:

$$y = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} k(\sigma) x^4 + \ldots = f(x, \sigma).$$

Отсюда путем диференцирования получается с помощью формул (15):

$$-p_1^2 x + p_1^1 f(x, \sigma) = f'_x \left[-1 - p_1^1 x - p_2^1 f(x, \sigma)\right] + f'_\sigma. \tag{16}$$

Это соотношение должно иметь место при всяком σ и для любой закрепленной точки P на кривой; следовательно, это тождество относительно xp_2^1. Мы можем сравнить коэфициенты при различных степенях x в обеих частях уравнения (16), которое мы перепишем, развертывая:

$$-p_1^2 x + p_1^1 \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} kx^4 + \ldots\right) =$$

$$= \left(x - \frac{1}{2} kx^3 + \ldots\right)\left(-1 - p_1^1 x - \frac{1}{2} p_2^1 x^2 + \ldots\right) - \frac{1}{8} k' x^4 + \ldots \tag{16'}$$

Последовательно получаем:

$$-p_1^2 = -1,$$

$$\frac{1}{2} p_1^1 = -p_1^1,$$

$$0 = -\frac{1}{2} p_2^1 + \frac{1}{2} k,$$

откуда

$$p_1^2 = 1, \; p_1^1 = 0, \; p_2^1 = k.$$

Мы находим, таким образом, уже раз полученные формулы Френе (13) и, продолжая сравнивать коэфициенты, будем иметь в функциях афинной кривизны и ее последовательных производных коэфициенты разложения y по степеням x. Это подтверждает уже раз сказанное: кривая вполне определена, вплоть до унимодулярного аффинитета заданием k, как функции σ.

14. Мы применим этот метод еще к одной проблеме эвклидовой геометрии. Рассмотрим мнимую аналитическую поверхность,

которая не является развертывающейся минимальной поверхностью, но у которой вторая основная форма имеет один и только один линейный множитель, общий с первой основной формой так, что поверхность допускает двойное семейство минимальных линий кривизны. Мы воспользуемся здесь тем же самым трехгранником, что и в теории минимальных кривых, с двумя изотропными векторами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_3$, касательными к поверхности, и с единичным вектором $\vec{e}_2$, нормальным к ней.

Приведенное уравнение поверхности будет вида:

$$y=\frac{1}{2}ax^2+bxz+\ldots$$

Так как x и z можно умножить соответственно на λ и $\frac{1}{\lambda}$, то коэфициент a приводится к единице, и мы напишем:

$$y=\frac{1}{2}x^2+kxz+\frac{1}{6}\alpha x^3+\frac{1}{2}\beta x^2z+$$
$$+\frac{1}{2}\gamma xz^2+\frac{1}{6}\delta z^3+\ldots \tag{17}$$

Если рассматривать точку M', бесконечно близкую к M, то бесконечно малые величины x и z будут внутренне связаны с этой парой точек: это будут компоненты ω^1 и ω^3 бесконечно малого перемещения подвижного трехгранника. Положим, как в 8,

$$\left.\begin{aligned}
dM&=\omega^1\vec{e}_1+\omega^3\vec{e}_3,\\
d\vec{e}_1&=\omega_1{}^1\vec{e}_1+\omega_1{}^2\vec{e}_2,\\
d\vec{e}_2&=-\omega_3{}^2\vec{e}_1-\omega_1{}^2\vec{e}_3,\\
d\vec{e}_3&=\omega_3{}^2\vec{e}_2-\omega_1{}^1\vec{e}_3.
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Координаты x, y, z неподвижной точки P поверхности, отнесенной к трехграннику с вершиной M, удовлетворяют уравнению (17), где k, α, β зависят от положения точки M, и диференциальным уравнениям, которые выражают, что точка P неподвижна, а именно:

$$\left.\begin{aligned}
dx+\omega^1+x\omega_1{}^1-y\omega_3{}^2&=0,\\
dy\qquad\quad+x\omega_1{}^2+z\omega_3{}^2&=0,\\
dz+\omega^3-y\omega_1{}^2-z\omega_1{}^1&=0.
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Отсюда получается, как в предыдущем примере:

$$-x\omega_1^2-z\omega_3^2=(x+kz+\frac{1}{2}\alpha x^2+\beta xz+\frac{1}{2}\gamma z^2).$$

$$\left[-\omega^1-x\omega_1^1+(\frac{1}{2}x^2+kxz+\ldots)\omega_3^2\right]+(kx+\frac{1}{2}\beta x^2+\gamma xz+\frac{1}{2}\delta z^2)$$

$$\left[-\omega^3+z\omega_1^1+(\frac{1}{2}x^2+kxz+\ldots)\omega_1^2\right]+$$

$$+xzdk+\frac{1}{6}x^3d\alpha+\frac{1}{2}x^2zd\beta+\frac{1}{2}xz^2d\gamma+\frac{1}{6}z^3d\delta+\ldots$$

Сравнивая коэфициенты, находим последовательно:

$$-x\omega_1^3-z\omega_3^3=-(x+kz)\omega^1-kx\omega^3,$$

$$0=-x(x+kz)\omega_1^1-\left(\frac{1}{2}\alpha x^2+\beta xz+\frac{1}{2}\gamma z^2\right)\omega^1+kxz\omega_1^1-$$

$$-(\frac{1}{2}\beta x^2+\gamma xz+\frac{1}{2}\delta z^2)\omega^3+xzdk,$$

откуда

$$\left.\begin{array}{c}\omega_1^3=\omega^1+k\omega^3,\quad \omega_3^3=k\omega^1,\quad \omega_1^1=-\frac{1}{2}\alpha\omega^1-\frac{1}{2}\beta\omega^3,\\ \gamma=\delta=0,\quad dk=\beta\omega^1.\end{array}\right\} \tag{20}$$

Мы видим, что члены третьего порядка в разложении y не произвольны. Это объясняется тем, что минимальные линии кривизны, которые в то же самое время являются асимптотическими, — прямые. Действительно, мы получим их, полагая $\omega^1=0$; вектор $\vec{e}_3$ касателен к ним, а при перемещении вдоль одной из этих линий мы увидим, что и $d\vec{e}_3$ тоже касается ее; это показывает, что линия имеет неподвижную касательную.

Диференциальный инвариант k (второго порядка) является единственной главной кривизной поверхности; полная кривизна ее k^2. Из диференциальных инвариантов α и β можно вывести последовательными диференцированиями все остальные диференциальные инварианты поверхности, полагая

$$d\alpha=\alpha_1\omega^1+\alpha_3\omega^3,$$

$$d\beta=\beta_1\omega^1+\beta_3\omega^3.$$

Коэфициенты α_1, α_3, β_1, β_3 — искомые диференциальные инварианты.

Несмотря на все результаты, полученные методом приведенных уравнений, мы все же не знаем кое чего существенного, например не существуют ли между найденными диференциальными инвариантами необходимые соотношения и можно ли произвольно дать эти соотношения, конечно, между a, β и k и т. д.

Чтобы разрешить все эти вопросы, необходимо принять во внимание условия совместности, которым должны удовлетворять компоненты бесконечно малого перемещения подвижного трехгранника, вависящего от нескольких параметров. Скоро мы найдем эти условия в совершенно общей форме и увидим, что они содержат в себе все существо диференциальной геометрии.

Удовлетворимся в настоящий момент замечанием, что выражения ω^1 и ω^2 вообще не являются точными диференциалами и что, следовательно, нельзя приписать поверхности систему двух натуральных параметров σ_1 и σ_2 аналогично натуральному параметру σ, который мы вводили каждый раз, когда имели дело с кривой.

V.

15. Пора теперь приступить к общей теории подвижного репера, связав ее с основными принципами теории непрерывных групп.

Известно, что по идее Ф. Клейна (F. Klein) каждой непрерывной группе G с n переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответствует в пространстве n измерений геометрия, имеющая объектом изучения свойства фигур, инвариантных относительно преобразования группы. Таким образом элементарная геометрия соответствует группе перемещений, афинная геометрия — группе афинных преобразований, проективная геометрия — группе проективных преобразований. Группа G иногда называется основной группой геометрии или основной группой пространства, в котором изучаются инвариантные относительно группы свойства фигур.

Мы будем предполагать в последующем, что группа *конечна*, т. е. что общее преобразование зависит от конечного числа параметров. Мы предположим также для простоты, что преобразованные переменные $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ являются аналитическими функциями от первоначальных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и от параметров $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Наконец, мы будем предполагать группу *связной*; это значит, что всегда существует по крайней мере одно преобразование группы, приводящее в совпадение две произвольно данные точки пространства. Будем по аналогии называть преобразование группы *перемещением* и обозначать через S_a перемещение с параметрами $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$.

16. Первый вопрос, который мы должны себе поставить, — *что заменит в какой-нибудь геометрии Клейна понятие прямого трехгранника обычной геометрии?*

Вспомним, что совокупность прямых трехгранников обладает следующим свойством: *два каких-нибудь прямых трехгранника могут быть приведены в совпадение одним и только одним перемещением.* Легко заметить, что это свойство и является основным в приложениях метода подвижного трехгранника.

Заметив это, мы скажем, что семейство фигур образует систему реперов, *если две какие-либо фигуры семейства можно привести в совпадение одним и только одним преобразованием группы G.*

В частности ясно, что если удастся найти какую-либо фигуру (R_0) так, что всякое нетождественное преобразование группы G переводит (R_0) в фигуру, отличную от (R_0), то совокупность этой фигуры (R_0) и всех тех фигур (R_a), которые получатся из нее различными преобразованиями S_a группы G, образует систему реперов. Действительно, чтобы привести (R_a) в (R_b), достаточно произвести над (R_a) последовательно преобразование S_a^{-1}, которое приведет (R_a) в (R_0) и затем S_b, которое приведет (R_0) в (R_b). Результат — преобразование

$$S_c = S_b S_a^{-1}$$

будет тоже некоторым преобразованием S_c группы G, и это преобразование переведет (R_a) в (R_b). Обратно, если $S_{c'}$ переводит (R_a) в (R_b), то преобразование $S_b^{-1} S_{c'} S_a$ переводит последовательно (R_0) в (R_a), потом в (R_b), потом в (R_0); это, следовательно, тождественное преобразование, что и даст:

$$S_{c'} S_a = S_b \quad \text{или} \quad S_{c'} = S_b S_a^{-1} = S_c.$$

Изыскание системы реперов приводится, следовательно, к изысканию фигуры (R_0), инвариантной ни при каком преобразовании группы G, отличном от тождественного.

17. Есть случаи, когда выбор репера представляется совершенно естественным. Например, в общей афинной геометрии n измерений естественно принять в качестве репера фигуру, состоящую из точки и n векторов, из нее выходящих и не расположенных в одной гиперплоскости.

В проективной геометрии n измерений фигура, образованная $n+2$ точками, тоже может служить репером; но удобнее взять фигуру, состоящую из $n+1$ *аналитических* точек, называя аналитической точкой совокупность $n+1$ чисел, не равных одновременно нулю. Если даны $n+1$ аналитических точек $A_1, A_2, \ldots A_{n+1}$, *линейно независимых*, то всякая аналитическая точка может быть одним и только одним способом представлена в виде:

$$M = x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_{n+1}A_{n+1}.$$

Коэфициенты $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ можно рассматривать как однородные координаты геометрической точки, которую можно присоединить к M и ко всем аналитическим точкам вида λM. Но надо заметить, что, как репер в собственном смысле, упорядоченная совокупность $n+1$ аналитических точек $(A_1, A_2, \ldots, A_{n+1})$ не отличается от совокупности $n+1$ аналитических точек $(mA_1, mA_2, \ldots, mA_{n+1})$.

18. Вернемся к произвольной группе G. Если группа односвязна, т. е. существует только одно преобразование группы, приводящее в совпадение две произвольно заданные точки, то уже сами точки пространства представляют совокупность реперов.

Допустим, что группа не односвязна; это значит, что порядок группы r выше числа переменных n. Начнем с произвольной точки A_0; по предположению существует бесконечное множество преобразований G, оставляющих ее неподвижной; они образуют подгруппу g_1 с $r_1 = r - n$ параметрами.

Существуют, конечно, точки не инвариантные относительно g_1; пусть B_0 — одна из этих точек. Преобразования группы g_1, оставляющие неподвижной точку B_0, образуют подгруппу g_2 порядка $r_2 < r_1$. Если r_2 положительно, то существуют, конечно, точки не инвариантные относительно g_2; пусть C_0 — одна из этих точек. Преобразования группы g_2, оставляющие неподвижной точку C_0, образуют подгруппу g_3 порядка $r_3 < r_2$. Если r_3 — нуль, т. е. если g_3 сводится к тождественному преобразованию, то фигура, состоящая из трех точек A_0, B_0, C_0, может служить начальным репером (R_0); в противном случае мы продолжаем тот же самый процесс, который, несомненно, придет к концу, ибо порядки последовательных подгрупп g_1, $g_2 \ldots$ все время убывают.

Итак, всегда можно найти систему реперов, каждый из которых состоит из конечного числа точек, расположенных в известном порядке.

Нет надобности говорить, что существует бесконечное множество других систем реперов. Заметим, что в эвклидовой геометрии прямой трехгранник тоже можно уподобить фигуре, образованной четырьмя точками: вершиной трехгранника и концами трех единичных векторов, отложенных на его осях,

19. В эвклидовой геометрии прямой трехгранник служит системой координат. В общем случае дело обстоит совершенно так же. Действительно, присоединим к какому-нибудь частному реперу (R_0), который мы будем называть начальным, первоначально заданную систему координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пусть (R_a) — какой-нибудь репер, M — произвольная точка пространства и M' — точка, полученная из M перемещением S_a^{-1}, которое переводит (R_a) в (R_0).

Условимся называть начальные координаты M' *координатами точки M относительно репера* (R_a). Мы видим, что фигура, состоящая из репера (R) и точки M, и фигура, образованная из репера (R') и точки N, *равны*, если координаты M по отношению к реперу (R) равны координатам N по отношению к реперу (R').

Если мы воспользуемся вместо первоначальных координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ координатами $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ относительно репера (R_a), уравнения, аналитически определяющие преобразование группы G, будут иметь в точности ту же форму, что и раньше. Действительно, пусть S_b — какое-нибудь преобразование группы G и пусть M_b — точка, полученная из M посредством S_b. С другой стороны, пусть M' и M_b' — точки, преобразованные из M и M_b, посредством S_a^{-1}. Начальными координатами точек M' и M_b' являются координаты ξ точек M и M_b. Но мы переходим от M' и M_b' последовательными преобразованиями S_a, S_b, S_a^{-1}; следовательно, аналитически мы переходим от координат ξ точки M к координатам ξ' преобразованной точки M_b посредством преобразования $S_a^{-1}S_bS_a$, и это есть преобразование группы. Но следует заметить, что параметры, фигурирующие в уравнении этого преобразования $(\xi_i \to \xi_i')$, уже не параметры b_i из S_b, но параметры преобразования $S_a^{-1}S_bS_a$, которое называется *преобразованным из S_b посредством S_a*.

Необходимо, следовательно, различать S_a как *геометрическую* операцию и S_a — как операцию *аналитическую*. *Геометрическое* преобразование S_a представлено *аналитическим* преобразованием S_a только в том случае, если принята начальная система координат, связанная с репером (R_0).

20. Мы переходим теперь к бесконечно малому преобразованию, которое приводит в совпадение два бесконечно-близких репера (R_a) и (R_{a+da}). От (R_a) к (R_{a+da}) перейдем *геометрическим* преобразованием $S_{a+da}S_a^{-1}$, складывающимся из перемещения S_a^{-1}, которое переводит (R_a) в (R_0), и перемещения S_{a+da}, которое переводит (R_0) в (R_{a+da}). Если же мы захотим аналитически выразить это бесконечно малое перемещение в *координа-*

тах по отношению к реперу (R_a), то следует сначала переместить фигуру, образованную двумя реперами, так, чтобы (R_a) перешла в (R_0); если при этом (R_ϵ) есть новое положение репера (R_{a+da}), то рассматриваемое бесконечно малое перемещение аналитически выражается посредством *аналитического* преобразования S_ϵ. Но от (R_0) к (R_ϵ) перейдем последовательными перемещениями S_{a+da} и S_a^{-1}. *Следовательно, относительными параметрами бесконечно малого перемещения, которое переводит* (R_a) *в* (R_{a+da}), *являются параметры бесконечно малого аналитического преобразования* $S_\epsilon = S_a^{-1} S_{a+da}$.

Предположим, что тождественное преобразование соответствует начальным значениям параметров; тогда относительные компоненты ϵ_i бесконечно малого перемещения репера будут бесконечно малые величины, очевидно, линейные по отношению к da_i, с коэфициентами, зависящими от a_i. Мы их будем обозначать символами $\omega_i(a; da)$:

$$\omega_i(a; da) = a_{i1}(a)\, da_1 + a_{i2}(a)\, da_2 + \ldots + a_{ir}(a)\, da_r. \qquad (21)$$

Полученный результат составляет с известной точки зрения первую основную теорему в теории групп Софуса Ли. В самом деле, он выражает, что если преобразования S_a, по предположению зависящие от r параметров, образуют группу, бесконечно малое преобразование $S_a^{-1} S_{a+da}$ зависит только от r параметров $\omega_i(a; da)$, а не от $2r$. Эта теорема допускает обращение, но мы оставим это в стороне.

21. Легко получить выражение ω_i, если известны конечные уравнения группы G:

$$x_i' = f_i(x, a) \qquad (i = 1, 2 \ldots, n).$$

Можно было бы сначала образовать бесконечно малые преобразования группы, давая параметрам a_i бесконечно малые значения ϵ_i, что даст:

$$x_i' = x_i + \sum_k \left(\frac{df_i}{da_k}\right) \epsilon_k = x_i + \sum_k \epsilon_k \xi_{ki}(x),$$

если пренебречь бесконечно малыми второго порядка по отношению ϵ_i.

Чтобы получить *аналитическое* преобразование $S_a^{-1} S_{a+da}$, посмотрим теперь, какой будет результат двух преобразований:

$$x'_i = f_i(x; a + da) \text{ и } x'_i = f_i(x''; a);$$

переменные x_i'' получаются из x_i посредством искомого преобразования. Полагая

$$x_i''=x_i+\delta x_i$$

и пренебрегая бесконечно-малыми второго порядка, непосредственно находим:

$$\sum_k \frac{df_i}{dx_k} da_k = \sum_j \frac{df_i}{dx_j} \delta x_j. \tag{22}$$

Эти уравнения, если их решить относительно δx_j, должны иметь вид:

$$\delta x_i = \sum_k \omega_k (a\,; da)\,\xi_{ki}(x).$$

Возьмем, например, группу эвклидовых перемещений. Уравнения перемещения в прямоугольных координатах:

$$\begin{aligned} x' &= x_0+\alpha x+\beta y+\gamma z, \\ y' &= y_0+\alpha' x+\beta' y+\gamma' z, \\ z' &= z_0+\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z. \end{aligned}$$

Здесь шесть независимых бесконечно малых преобразований, которые можно выразить формулами:

$$\begin{aligned} \delta x &= \varepsilon_1+\varepsilon_5 z-\varepsilon_6 y, \\ \delta y &= \varepsilon_2+\varepsilon_6 x-\varepsilon_4 z, \\ \delta z &= \varepsilon_3+\varepsilon_4 y-\varepsilon_5 x. \end{aligned}$$

Заметив это, переходим к разрешению уравнений (22), которые напишутся здесь в виде:

$$\begin{aligned} \alpha\delta x+\beta\delta y+\gamma\delta z &= dx_0+x d\alpha+y d\beta+z d\gamma, \\ \alpha'\delta x+\beta'\delta y+\gamma'\delta z &= dy_0+x d\alpha'+y d\beta'+z d\gamma', \\ \alpha''\delta x+\beta''\delta y+\gamma''\delta z &= dz_0+x d\alpha''+y d\beta''+z d\gamma''. \end{aligned}$$

Они дадут, если воспользоваться соотношениями между девятью направляющими косинусами прямой:

$$\begin{aligned}\delta x &= (\alpha dx_0 + \alpha' dy_0 + \alpha'' dz_0) + (\alpha d\gamma + \alpha' p\gamma' + \alpha'' d\gamma'')z - \\ &\quad - (\beta d\alpha + \beta' d\alpha' + \beta'' d\alpha'')y, \\ \delta y &= (\beta dx_0 + \beta' dy_0 + \beta'' dz_0) + (\beta d\alpha + \beta' d\alpha' + \beta'' d\alpha'')x - \\ &\quad - (\gamma d\beta + \gamma' d\beta' + \gamma'' d\beta'')z, \\ \delta z &= (\gamma dx_0 + \gamma' dy_0 + \gamma'' dz_0) + (\gamma d\beta + \gamma' d\beta' + \gamma'' d\beta'')y - \\ &\quad - (\alpha d\gamma + \alpha' d\gamma' + \alpha'' d\gamma'')x.\end{aligned}$$

Получаем, конечно, уравнение того типа, который мы предвидели, причем ω_i имеют вид:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \alpha dx_0 + \alpha' dy_0 + \alpha'' dz_0, \\ \omega_2 &= \beta dx_0 + \beta' dy_0 + \beta'' dz_0, \\ \omega_3 &= \gamma dx_0 + \gamma' dy_0 + \gamma'' dz_0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_4 &= \gamma d\beta + \gamma' d\beta' + \gamma'' d\beta'' = -(\beta d\gamma + \beta' d\gamma' + \beta'' d\gamma''), \\ \omega_5 &= \alpha d\gamma + \alpha' d\gamma' + \alpha'' d\gamma'' = -(\gamma d\alpha + \gamma' d\alpha' + \gamma'' d\alpha''), \\ \omega_6 &= \beta d\alpha + \beta' d\alpha' + \beta'' d\alpha'' = -(\alpha d\beta + \alpha' d\beta' + \alpha'' d\beta'').\end{aligned}$$

Сделаем здесь важное замечание: r относительных компонентов бесконечно малого перемещения репера ω_i определены только вплоть до линейной подстановки с *постоянными* коэфициентами. Впрочем, легко доказать, что они линейно не зависимы, если только r параметров группы существенны.

22. Вот еще существенное замечание.

Допустим, что к двум реперам (R_a) и (R_{a+da}) применяется одно и то же перемещение S_c; *относительные компоненты бесконечно малого перемещения, совмещающего два бесконечно близких репера, не изменятся.* Это легко показать аналитически, ибо после замены S_c на $S_c S_a$ и S_{a+da} на $S_c S_{a+da}$ преобразование $S_a^{-1} S_{a+da}$ заменится на

$$(S_c S_a)^{-1} (S_c S_{a+da}) = S_a^{-1} S_c^{-1} S_{a+da} = S_a^{-1} S_{a+da}$$

и, следовательно, не изменится.

Обратное предложение является основным. Допустим, что имеются два непрерывных семейства реперов (R_u) и (R_v), которые зависят от одного и того же числа p параметров $u_1, u_2, \ldots, u_p$ и $v_1, v_2, \ldots, v_p$. При этом допустим, что можно установить взаимно однозначное соответствие между реперами этих двух семейств так, что относительные компоненты $\omega_i(u;\ du)$ бесконечно малого перемещения репера первого семейства будут равны соответственным компонентам $\omega_i(v;\ dv)$ второго семейства. Я утверждаю, что тогда существует перемещение, приводящее в совпадение одновременно все реперы первого семейства с соответствующими реперами второго.

Доказательство просто. Действительно, обозначим через S_u и S_v перемещения, переводящие (R_0) соответственно в (R_u) и (R_v). Имеем:

$$S_u^{-1}\ S_{u+du} = S_v^{-1}\ S_{v+dv}$$

или

$$S_v\ S_u^{-1} = S_{v+dv}\ S_u^{-1}{}_{+du}.$$

Простое рассуждение показывает тогда, что переобразование $S_v\ S_u^{-1}$ является определенным преобразованием S_c из G. Следовательно,

$$S_v = S_c\ S_u;$$

это доказывает, что репер (R_v) получается из репера (R_u) одним определенным перемещением S_c.

Мы имеем, таким образом, обобщение основной теоремы метода подвижного трехгранника.

VI.

23. Переходим теперь к условиям совместности, которым должны удовлетворять относительные компоненты бесконечно малого перемещения подвижного репера, зависящего от нескольких параметров. Они хорошо известны в теории поверхностей, изучаемых методом подвижного трехгранника, где движение трехгранника зависит от двух параметров.

Предварим изыскание этих условий очень простым замечанием аналитического порядка.

Если формы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ линейно независимы по отношению к $da_1, da_2, \ldots, da_r$, то можно, обратно, выразить всякую диференциальную форму линейную относительно $da_1, da_2, \ldots, da_r$ как линейную форму от $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$.

Заметив это, рассмотрим сначала совокупность всех реперов пространства, которые зависят от r параметров a_i. Введем два символа диференцирования d и δ, переместимых между собой, и выражения

$$d\omega_s(a\,;\delta a) - \delta\omega_s(a\,;da),$$

которые представляют не что иное, как билинейные ковариянты форм ω_s; как известно, это—выражения билинейные, альтернированные по отношению к двум сериям переменных da_i и δa_i.

$$d\omega_s(\delta) - \delta\omega_s(d) = \sum_{i,j}\left(\frac{\partial a_{sj}}{\partial a_i} - \frac{\partial a_{si}}{\partial a_j}\right) da_i \delta a_j.$$

Если мы подставим вместо переменных da_i переменные $\omega_i(d)$ и вместо переменных δa_i переменные $\omega_i(\delta)$, мы получим еще билинейную альтернированную относительно двух новых серий переменную форму так, что можно написать:

$$d\omega_s(\delta) - \delta\omega_s(d) = \sum_{ij} c_{ijs}\,\omega_i(d)\omega_j(\delta) \quad (c_{ijs} + c_{jis} = 0), \quad (23)$$

где c_{ijs} a priori—определенные функции от $a_1, a_2, \ldots, a_r$.

По отношению к этим коэфициентам c_{ijs} мы имеем следующую основную теорему, которая представляет с известной точки зрения вторую основную теорему теории групп. *Коэфициенты c_{ijs} в соотношениях* (23)—*абсолютные постоянные.*

Доказывается эта теорема непосредственно. Подвергнем различные реперы (R_a) одному и тому же определенному перемещению S_c; мы уже заметили, что это не изменит относительных компонентов ω_i бесконечно малого перемещения репера. В формулах (23) первые части так же, как количества $\omega_i(d)$ и $\omega_j(\delta)$ во вторых частях не изменяются. Это возможно только в том случае, если коэфициенты c_{ijs} имеют одно и то же числовое значение для репера (R_a) и для репера $(R_{a'})$, полученного из (R_a) перемещением (S_c). Но всегда можно перейти с помощью подходящего перемещения от произвольного репера (R_a) к другому произвольному реперу $(R_{a'})$, и это требует, чтобы коэфициенты c_{ijs} были абсолютными постоянными.

Эти постоянные носят имя *постоянных структуры*[1] группы; а уравнения (23)—*уравнений структуры группы.*

Можно написать их в форме несколько менее сжатой, если принять d за символ диференцирования по отношению к одно-

---

[1] В теории Софуса Ли эти постоянные вводятся совершенно другим способом. Если обозначить через $\varepsilon_1 X_1 f + \ldots + \varepsilon_r X_r f$ общее бесконечно-малое преобразование группы, то

$$(X_i X_j) = \sum_s c_{ijs} X_s f.$$

му параметру a_k, и δ—за символ диференцирования по отношению к другому параметру a_h. Если еще ввести функции a_{si} из формул (21), то они примут вид:

$$\frac{\partial a_{sh}}{\partial a_k}-\frac{\partial a_{sk}}{\partial a_h}=\sum_{i,j} c_{ijs}\, a_{ik}\, a_{jh}. \tag{24}$$

Давая указателям s, k, h все возможные значения, получаем в открытом виде искомые условия совместности.

С другой стороны, можно написать уравнение структуры (23) в еще более сжатой форме.

В самом деле, заметим, что, соединяя в правой части два члена, соответствующие одному и тому же сочетанию (i,j) указателей i и j, получим:

$$d\omega_s(\delta)-\delta\omega_s(d)=\sum_{i<j} c_{ijs}\begin{vmatrix}\omega_i(d) & \omega_j(d)\\ \omega_i(\delta) & \omega_j(\delta)\end{vmatrix} \tag{25}$$

это можно записать в символической форме:

$$\omega'_s=\sum_{i<j} c_{ijs}\,[\omega_i\ \omega_j]. \tag{25'}$$

Мы видим, что символ $[\omega_i\ \omega_j]$ занимает место определителя и что, следовательно, символ $[\omega_j\ \omega_i]$ следует рассматривать как равный с обратным знаком символу $[\omega_i\ \omega_j]$.

24. Мы доказали a priori существование уравнений структуры с постоянными коэфициентами c_{ijs}. Вполне очевидно, что может существовать только одна система соотношений этого рода. В эвклидовой геометрии их можно получить и не составляя в действительности выражений ω_i, например так, как мы это сделали в № 21. Достаточно отправиться от уравнений:

$$dM=\omega_1\vec{e}_1+\omega_2\vec{e}_2+\omega_3\vec{e}_3,$$
$$d\vec{e}_1=\omega_{12}\vec{e}_2-\omega_{31}\vec{e}_3,$$
$$d\vec{e}_2=\omega_{23}\vec{e}_3-\omega_{12}\vec{e}_1,$$
$$d\vec{e}_3=\omega_{31}\vec{e}_1-\omega_{23}\vec{e}_2,$$

где ω_{23}, ω_{31}, ω_{12} — скалярные произведения $\vec{e}_3\, d\vec{e}_2$, $\vec{e}_1\, d\vec{e}_3$, $\vec{e}_2\, d\vec{e}_1$ и, следовательно, тождественны с компонентами, которые мы обозначили через ω_4, ω_5, ω_6.

Если мы выразим, что $d\delta M$, $d\delta \vec{e}_1$, $d\delta \vec{e}_2$, $d\delta \vec{e}_3$ соответственно равны $\delta d M$, $\delta d \vec{e}_1$, $\delta d \vec{e}_2$, $\delta d \vec{e}_3$, мы получим, приравнивая попарно коэфициенты при e_1, e_2, e_3, в точности искомые уравнения структуры. Это даст:

$$\left.\begin{aligned}
d\omega_1(\delta) - \delta\omega_1(d) &= \begin{vmatrix} \omega_3(d) & \omega_{31}(d) \\ \omega_3(\delta) & \omega_{31}(\delta) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \omega_2(d) & \omega_{12}(d) \\ \omega_2(\delta) & \omega_{12}(\delta) \end{vmatrix}, \\
d\omega_2(\delta) - \delta\omega_2(d) &= \begin{vmatrix} \omega_1(d) & \omega_{12}(d) \\ \omega_1(\delta) & \omega_{12}(\delta) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \omega_3(d) & \omega_{23}(d) \\ \omega_3(\delta) & \omega_{23}(\delta) \end{vmatrix}, \\
d\omega_3(\delta) - \delta\omega_3(d) &= \begin{vmatrix} \omega_2(d) & \omega_{23}(d) \\ \omega_2(\delta) & \omega_{23}(\delta) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \omega_1(d) & \omega_{31}(d) \\ \omega_1(\delta) & \omega_{31}(\delta) \end{vmatrix}, \\
d\omega_{23}(\delta) - \delta\omega_{23}(d) &= \begin{vmatrix} \omega_{12}(d) & \omega_{31}(d) \\ \omega_{12}(\delta) & \omega_{31}(\delta) \end{vmatrix}, \\
d\omega_{31}(\delta) - \delta\omega_{31}(d) &= \begin{vmatrix} \omega_{23}(d) & \omega_{12}(d) \\ \omega_{23}(\delta) & \omega_{12}(\delta) \end{vmatrix}, \\
d\omega_{12}(\delta) - \delta\omega_{12}(d) &= \begin{vmatrix} \omega_{31}(d) & \omega_{23}(d) \\ \omega_{31}(\delta) & \omega_{23}(\delta) \end{vmatrix}.
\end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Классические формулы Дарбу для движения трехгранника с двумя степенями свободы получаются, если положить

$$\left.\begin{aligned}
\omega_1 &= \xi du + \xi_1 dv, \\
\omega_2 &= \eta du + \eta_1 dv, \\
\omega_3 &= \zeta du + \zeta_1 dv, \\
\omega_{23} &= p du + p_1 dv, \\
\omega_{31} &= q du + q_1 dv, \\
\omega_{12} &= r du + r_1 dv
\end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

и принять d и δ за символы диференцирования по отношению к u и к v. Таким образом получим:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \xi_1}{\partial u} - \frac{\partial \xi}{\partial v} &= \zeta q_1 - q\zeta_1 - \eta x_1 + x\eta_1, \\
\frac{\partial \eta_1}{\partial u} - \frac{\partial \eta}{\partial v} &= \xi r_1 - r\xi_1 - \zeta p_1 + p\zeta_1, \\
\frac{\partial \zeta_1}{\partial u} - \frac{\partial \zeta}{\partial v} &= \eta p_1 - p\eta_1 - \xi q_1 + q\xi_1, \\
\frac{\partial p_1}{\partial u} - \frac{\partial p}{\partial v} &= r q_1 - q r_1, \\
\frac{\partial q_1}{\partial u} - \frac{\partial q}{\partial v} &= p r_1 - r p_1, \\
\frac{\partial r}{\partial u} - \frac{\partial r_1}{\partial v} &= q p_1 - p q_1.
\end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Уравнения (24) в теории групп известны под именем *уравнений Морера* (Maurer); Буль (Buhl) предложил назвать их уравнениями Морер-Картана.

Было бы правильно назвать их уравнениями Дарбу-Морер-Картана.

25. Непосредственное обобщение уравнений (26) получается в аффинной геометрии. Вводя репер, образованный точкой M и n векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, исходящими из этой точки, получим:

$$dM = \sum_i \omega^i \vec{e}_i,$$

$$d\vec{e}_i = \sum_k \omega_i^k \vec{e}_k.$$

Тот же самый процесс, который только что применялся в эвклидовой геометрии, даст здесь уравнения структуры общей аффинной группы в форме:

$$\left.\begin{aligned} d\omega^i(\delta) - \delta\omega^i(d) &= \sum_k \begin{vmatrix} \omega^k(d) & \omega_k^i(d) \\ \omega^k(\delta) & \omega_k^i(\delta) \end{vmatrix}, \\ d\omega_i^j(\delta) - \delta\omega_i^j(d) &= \sum_k \begin{vmatrix} \omega_i^k(d) & \omega_k^j(d) \\ \omega_i^k(\delta) & \omega_k^j(\delta) \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

или в еще более сжатой форме:

$$\left.\begin{aligned} (\omega^i)' &= \sum_k \left[\omega^k \omega_k^i\right], \\ (\omega_i^j)' &= \sum_k \left[\omega_i^k \omega_k^j\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Уравнения структуры проективной группы n измерений также

$$\left.\begin{aligned} (\omega_i^j)' &= \sum_k [\omega_i^k \ \omega_k^j], \\ (i,j &= 1, 2, \ldots, n+1), \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

причем компонентами бесконечно малого перемещения служат количества $\omega_i^j (i \neq j)$ и $\omega_i^i - \omega_{n+1}^{n+1}$; число их $n(n+2)$ по числу параметров проективной группы.

26. Прежде чем переходить к приложениям, закончим основной теоремой, которая придаѐт уравнениям структуры все их значения.

Если задать произвольно r диференциальных форм $\omega_i(u;du)$, *построенных с каким-нибудь числом p переменных* $u_1,\ldots,u_p$ *и их диференциалов* $du_1,\ldots,du_p$, *и если эти формы удовлетворят уравнениям структуры (28), то каждой системе значений переменных* u_i *можно поставить в соответствие репер* (R_u) *так, что относительные компоненты бесконечно малого перемещения репера будут в точности данные формы* ω.

Мы не станем доказывать эту теорему, чтобы не входить в теорию вполне интегрируемых систем уравнений в частных производных. Мы заметим только, что определение реперов (R_u) возможно бесчисленным числом способов, ибо, если имеется одно решение задачи, то, подвергая все реперы (R_u) одному и тому же произвольному перемещению (S_c), получим другое решение. Общее решение задачи зависит, следовательно, от r произвольных постоянных.

Эта теорема содержит как частный случай теорему Дарбу, в силу которой всегда существует для трехгранника движение с двумя параметрами, в котором компонентами бесконечно малого перемещения являются заданные количества, удовлетворяющие уравнению (28).

В частности видно, что уравнения Кодацци (Codazzi) в теории поверхности—только частный случай уравнений структуры группы эвклидовых перемещений.

Можно себя спросить, можно ли произвольно выбрать коэфициенты структуры группы c_{ijs}. Ответ отрицателен: существуют алгебраические соотношения, которым должны удовлетворять эти постоянные, чтобы можно было найти r линейно независимых форм ω_i, удовлетворяющих уравнениям структуры. Мы не будем входить в исследование этого вопроса, который составит содержание *третьей основной теоремы* теории групп Ли.

VII.

27. Мы в состоянии теперь изложить метод подвижного репера во всей его общности. Будем рассматривать в пространстве n измерений, с основной группой G, многообразие V p измерений, в каждой точке которого мы попытаемся построить определяемый внутренним образом репер.

Допустим для простоты, что $p = 3$.

Заметим прежде всего, что мы можем присоединить по определенному закону к каждому реперу (R_a) точку, которую мы будем называть началом репера; если репер образован, как в № 18, конечным числом точек A, B, C, мы можем, например, поставить ему в соответствие точку A. Если мы теперь будем рассматривать семейство реперов с общим началом A, то его можно в известном смысле отождествить с точкой A, и наоборот. Реперы этого семейства зависят, очевидно, от $r-n$ параметров, и относительные компоненты ω_i бесконечно малого перемещения при переходе от одного из этих реперов к бесконечно близкому связаны n линейными соотношениями, так как ω_i зависят только от $r-n$ диференциалов.

Это — соотношения с постоянными коэфициентами. Допустим, действительно, что, решенные относительно n компонентов ω_i, они имеют вид:

$$\begin{gathered}\omega_1=\lambda_{11}\ \omega_{n+1}+\ldots+\lambda_{1,r-n}\omega_r,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \omega_n=\lambda_{n1}\ \omega_{n+1}+\ldots+\lambda_{n,r-n}\omega_r.\end{gathered}$$

Если два рассматриваемых бесконечно близких репера подвергнуть какому-нибудь перемещению, то количества ω_i не изменятся, коэфициенты λ_{ij} не зависят, следовательно, ни от точки A, ни от рассматриваемых двух реперов; значит, это — абсолютные постоянные. Так как ω_i определены только вплоть до линейной с постоянными коэфициентами подстановки, то можно *предположить, что для всех бесконечно малых перемещений репера, при неподвижном начале*, было

$$\omega_1=\omega_2=\ldots=\omega_n=0. \tag{32}$$

Уравнения (32) можно рассматривать как *диференциальные уравнения точек* пространства; они вполне интегрируемы, так как их общее решение зависит от n произвольных постоянных. Можно заметить, что равны нулю все постоянные $c_{\alpha\beta i}$, где латинскими буквами обозначены указатели $1, 2, \ldots, n$, и греческими указатели $n+1, \ldots, r$. Действительно, семейство реперов с данным началом удовлетворяет, как и всякое другое, уравнениям структуры (23). Следовательно, если через d и δ обозначить два элементарных изменения внутри семейства, все $\omega_i(d)$ и $\omega_i(\delta)$ — нули, а следовательно, и $d\omega_i(\delta)-\delta\omega_i(d)$ тоже. Отсюда следует, что

$$\sum_{\alpha<\beta} c_{\alpha\beta i}\,\omega_\alpha(d)\,\omega_\beta(\delta)=0,$$

и это — каковы бы ни были $\omega_\alpha(d)$ и $\omega_\beta(\delta)$, что и требовалось доказать.

Бесконечно малые преобразования с n первыми параметрами, равными нулю, совпадают с преобразованиями, оставляющими неподвижной начальную точку репера (R_0). Если изменить закон, по которому присоединяется точка к каждому реперу, то подгруппа, образованная $r-n$ последними бесконечно малыми преобразованиями группы, изменится и перейдет в подгруппу, оставляющую неподвижной вновь присоединенную к (R_0) точку; эти две подгруппы *гомологичны* в группе G.

28. Переходим теперь к методу подвижного репера. Присоединим к каждой точке M данного многообразия V, которое мы предположим трех измерений, семейство реперов с началом M. Эти реперы, которые мы будем называть реперами нулевого порядка, зависят от $r-n$ вторичных параметров. Так как ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_n$ обращаются в нуль, если точка M остается неподвижной при перемещениях точки M по V, то они представляют собой линейное сочетание диференциалов трех *главных* параметров t_1, t_2, t_3, определяющих положение точки в многообразии V. Мы имеем, следовательно, $n-3$ линейных соотношений между ω_i, которые можно написать в виде:

$$\omega_i = a_{i1}\omega_1 + a_{i2}\omega_2 + a_{i3}\omega_3 \quad (i = 4, \ldots, n). \tag{33}$$

Коэфициенты a_{ij} могут зависеть одновременно от t_1, t_2, t_3 и от вторичных параметров. Располагаем этими последними так, чтобы дать определенные числовые значения наибольшему возможному числу коэфициентов. Остальные коэфициенты примут тогда значения, которые будут определенными функциями от t_1, t_2, t_3, и образуют для данного многообразия диференциальные инварианты первого порядка. Полученные реперы образуют семейство *реперов первого порядка*.

Пусть $\rho_1 < r-n$ — число параметров, от которых зависят реперы первого порядка. Если ρ_1 действительно меньше, чем $r-n$, относительные компоненты бесконечно малого перемещения репера первого порядка $\omega_{n+1}, \ldots \omega_r$ уже более не будут независимы при закрепленной точке M, а будут связаны $r-n-\rho_1$ линейно независимыми соотношениями. *Коэфициенты этих соотношений — вполне определенные функции диференциальных инвариантов первого порядка.*

Действительно, если пользоваться только реперами первого порядка, то все коэфициенты форм (33) — или постоянные или функции диференциальных инвариантов первого порядка; значит, они не зависят от вторичных параметров первого порядка. Применим теперь уравнения структуры (23), относя символ δ к элементарному изменению репера первого порядка, оставляющему неподвижной точку M, и символ d — к любому изменению его. Будем писать для краткости e_i вместо $\omega_i(\delta)$ и ω_i вместо $\omega_i(d)$.

Так как $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — все нули, то

$$\delta\omega_i = \sum_{\alpha > n}^{k < n} c_{\alpha k i}\, e_\alpha \omega_k.$$

Следовательно, заметив, что $\delta a_{ij} = 0$, получим:

$$\sum_{\alpha > n}^{k < n} (c_{\alpha k i} - a_{i1} c_{\alpha k 1} - a_{i2} c_{\alpha k 2} - a_{i3} c_{\alpha k 3})\, e_\alpha \omega_k = 0,$$

или, заменяя ω_k их значениями:

$$\sum_{\alpha, k} (c_{\alpha k i} - a_{i1} c_{\alpha k 1} - a_{i2} c_{\alpha k 2} - a_{i3} c_{\alpha k 3})\, a_{k1} e_\alpha = 0,$$

$$\sum_{\alpha, k} (c_{\alpha k i} - a_{i1} c_{\alpha k 1} - a_{i2} c_{\alpha k 2} - a_{i3} c_{\alpha k 3})\, a_{k2} e_\alpha = 0,$$

$$\sum_{\alpha, k} (c_{\alpha k i} - a_{i1} c_{\alpha k 1} - a_{i2} c_{\alpha k 2} - a_{i3} c_{\alpha k 3})\, a_{k3} e_\alpha = 0.$$

Эти уравнения, если последовательно полагать $i = 4, 5, \ldots, n$, дадут соотиошения между e_α, т. е. соотношения между ω_α при неподвижной точке M. Мы видим, что коэфициенты зависят только от a_{ij}, т. е. от диференциальных инвариантов первого порядка многообразия V.

29. Предположим, что, выполняя в случае необходимости линейную подстановку, коэфициенты которой являются функциями от диференциальных инвариантов первого порядка, мы привели соотношения, существующие между $\omega_{n+1}, \ldots, \omega_r$ при неподвижной точке M, к виду:

$$\omega_{n+1} = \ldots = \omega_{n_1} = 0 \quad (n_1 - n = r - n - \rho_1).$$

Мы будем иметь тогда, двигая точку M в многообразии V:

$$\omega_{n+i} = a_{n+i,1}\omega_1 + a_{n+i,2}\omega_2 + a_{n+i,3}\omega_3, \quad (i = 1, 2, \ldots, n_1 - n), \tag{34}$$

причем коэфициенты в правых частях зависят от основных параметров и от вторичных параметров первого порядка.

Существуют два способа, чтобы отличить один от другого реперы первого порядка и притти к семейству реперов второго порядка.

1) Постараться свести к определенным числовым значениям возможно большее число коэфициентов.

2) Если есть диференциальные инварианты первого порядка, например два не зависящих один от другого I и J, то составить диференциалы dI и dJ, которые выражаются линейно через ω_1, ω_2, ω_3:

$$\left.\begin{aligned} dI &= I_1\omega_1 + I_2\omega_2 + I_3\omega_3, \\ dJ &= J_1\omega_1 + J_2\omega_2 + J_3\omega_3, \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

и снова устанавливать между вторичными параметрами первого порядка и основными параметрами соотношения, позволяющие свести к определенным числовым значениям наибольшее возможное число коэфициентов, входящих в формулы (35). Реперы первого порядка с параметрами, удовлетворяющими этим соотношениям, составляют семейство *реперов второго порядка.* Что касается коэфициентов в уравнениях (34) и (35), которые не приведены к определенным числовым значениям, то они принимают постоянные значения или являются функциями только основных переменных t_1, t_2, t_3; *это диференциальные инварианты второго порядка.*

Компоненты $\omega_{n+1}, \ldots, \omega_r$ бесконечно малого перемещения репера второго порядка связаны теперь, при неподвижной точке M, $r-n-\rho_2$ соотношениями, где ρ_2 — число вторичных параметров второго порядка. Можно доказать так же, как мы только что делали, что коэфициенты этих соотношений — функции диференциальных инвариантов двух первых порядков. Мы переходим от реперов второго порядка к реперам третьего так же, как мы перешли от реперов первого порядка к реперам второго. Но соотношения вроде (35) используются только при существовании диференциального инварианта второго порядка, не являющегося функцией двух первых уже использованных инвариантов I и J. Так будем продолжать далее.

30. Допустим, что после того, как получены реперы порядка p:

1°. Реперы порядка $p+1$ будут совпадать с реперами порядка p.

2°. Диференциальные инварианты порядка $p+1$ будут функциями диференциальных инвариантов порядка, равного или ниже, чем p.

Тогда можно доказать, что, если M и M' — две точки многообразия, для которых все диференциальные инварианты порядка, равного или ниже, чем p, имеют одни и те же числовые значения, если, с другой стороны, (R) и (R') — два репера порядка p с началом соответственно в точках M и M', то перемещение, переводящее (R) в (R'), оставляет многообразие V инвариантным.

Очевидно, что в этом случае невозможно отличить один от другого реперы порядка p. Многообразие допускает группу перемещений g, порядок которой равен числу вторичных параметров порядка p, увеличенному на разность между 3 и числом независимых диференциальных инвариантов. Если в частности существуют три независимых диференциальных инварианта порядка, равного или ниже, чем p, то всякое перемещение группы g оставляет неподвижными все точки многообразия [1].

Если обстоятельство, которое только что отмечено, никогда не представится, то мы придем к полному определению репера, присоединенного к любой точке многообразия. Действительно, мы остановимся в последовательных определениях реперов только в том случае, если в какой-нибудь момент реперы порядка $p+1$ окажутся совпадающими с реперами порядка p, а один по крайней мере диференциальный инвариант порядка $p+1$ будет независим от полученных ранее.

Но так как здесь не может быть более трех независимых диференциальных инвариантов, то это обстоятельство может представиться только конечное число раз, следовательно, число *вторичных параметров, определяющих* реперы возрастающих порядков, будет убывать, пока не обратится в нуль.

31. Пусть мы имеем дело с общим случаем и пришли к определенному в каждой точке реперу, предположим, порядка q. Диференциальные инварианты порядка, равного или ниже, чем q, — *основные инварианты.*

Чтобы определить, равны ли два многообразия V и V', составляем диференциальные инварианты порядка $q+1$. Если для многообразия V они — функции основных диференциальных инвариантов, то будет необходимо и достаточно, чтобы так же обстояло и для V' и чтобы соотношения, существующие между диференциальными инвариантами порядка $<q+1$ были одними и теми же для обоих многообразий.

[1] Достаточно общий пример многообразий, где невозможно определить репер внутренним образом, являют в проективной геометрии линейчатые поверхности с двумя прямолинейными направляющими. Если рассматривать эти поверхности как геометрическое место прямых, то, очевидно, существует группа ∞^1 геометрических преобразований, которые оставляют неподвижными обе директрисы, так же как и всякую прямую, которая их пересекает.

Если хотя бы один из диференциальных инвариантов порядка $q+1$ не зависит от инвариантов низших порядков, то составим диференциальные инварианты порядка $q+2$. Если они не дадут инвариантов, не зависящих от предыдущих, то будет необходимо и достаточно, чтобы существующие между диференциальными инвариантами порядка $<q+2$ были одними и теми же для обоих многообразий.

Так продолжаем до тех пор, пока диференциальные инварианты некоторого порядка $q+h$ все будут функциями инвариантов низших порядков, что, несомненно, произойдет после конечного числа операций.

Заметим, что в рассмотренных ранее примерах диференциальные инварианты никогда более не появлялись, раз только репер был вполне определен.

32. Дадим теперь один пример, чтобы показать ту роль, которую играют диференциальные инварианты до окончательного определения репера.

Возьмем в качестве группы G группу с тремя параметрами параллельных переносов и подобий на плоскости.

Возьмем в качестве репера фигуру, образованную точкой M и двумя перпендикулярными векторами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ одной и той же длины и строго определенных направлений. Для бесконечно малого перемещения репера имеем:

$$d M=\omega_1 \vec{e}_1+\omega_2 \vec{e}_2,$$

$$d \vec{e}_1=\omega \vec{e}_1,$$

$$d \vec{e}_2=\omega \vec{e}_2.$$

Пусть кривая задана уравнением

$$y=f(x)$$

и

$$\begin{matrix} \lambda, 0 \\ 0, \lambda \end{matrix};$$

— проекции векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ на неподвижные оси. Реперы нулевого порядка имеют началом точку $M(x, y)$; они зависят от одного вторичного параметра λ. Впрочем,

$$\omega_1=\frac{dx}{\lambda}, \quad \omega_2=\frac{y' dx}{\lambda}, \quad \omega=\frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Отношение $\frac{\omega_2}{\omega_1}=y'$ не зависит от λ, и реперы первого порядка те же самые, что и нулевого порядка; имеется один диференциальный инвариант первого порядка y'.

Чтобы получить реперы второго порядка, составляем диференциал:

$$dy'=\lambda y''\frac{dx}{\lambda}=\lambda y''\omega_1.$$

Так как коэфициент $\lambda y''$ зависит от λ, то можно, располагая λ, сделать его равным единице.

Таким образом имеем определенный репер второго порядка. Выражение $\omega=\frac{d\lambda}{\lambda}$ даст тогда:

$$\omega=-\frac{y'''}{y''}dx=-\frac{y'''}{y''^2}\omega_1.$$

Следовательно, кривая определена вплоть до преобразований группы G соотношением, которое существует между диференциальным инвариантом третьего порядка $\frac{y'''}{y''^2}$ и диференциальным инвариантом y'.

Мы предположили попутно $y''\neq 0$. Если бы имелось $y''=0$, то нельзя было бы различить один от другого реперы первого порядка; линия была бы прямой и допускала бы подгруппу с двумя параметрами из группы G.

VIII.

33. Общий метод подвижного репера, как он изложен в предыдущих параграфах, предполагает, что многообразие действительно дано и последовательные выкладки выполняются. Но, как мы уже заметили, это не имеет значения в теоретическом исследовании, где дело идет об определении только вида формул Френе, о выделении различных частных случаев, которые могут представиться. С этой точки зрения, уравнения структуры играют основную роль даже в теории кривых.

Вернемся к задаче, рассмотренной в n° 26 и следующих.

Ко всякой точке M многообразия V трех измерений было присоединено семейство реперов с началом в M. Для всякого бесконечно малого перемещения такого репера справедливо соотношение:

$$\omega_i=a_{i1}\omega_1+a_{i2}\omega_2+a_{i3}\omega_3\qquad(i=4,\ldots,n).\qquad(36)$$

Можно ли предсказать, как коэфициенты a_{ij} зависят от вторичных параметров и к каким числовым значениям их можно привести? Представим себе для этого элементарное изменение репера нулевого порядка *при неподвижной точке* M; присвоим ему символ диференцирования δ.

Обозначая через δa_{ij} элементарное изменение коэфициентов a_{ij}, мы получим из уравнений структуры:

$$\delta a_{i1}\,\omega_1+\delta a_{i2}\,\omega_2+\delta a_{i3}\,\omega_3=\delta\omega_i-a_{i1}\,\delta\omega_1-a_{i2}\,\delta\omega_2-a_{i3}\,\delta\omega_3,$$

откуда

$$\delta a_{i1}=\sum_{\alpha=n+1}^{\alpha=r} e_\alpha \sum_{k=4}^{k=n}\left(c_{\alpha k i}-a_{i1}\,c_{\alpha k 1}-a_{i2}\,c_{\alpha k 2}-a_{i3}\,c_{\alpha k 3}\right)a_{k1},$$

$$\delta a_{i2}=\sum_{\alpha=n+1}^{\alpha=r} e_\alpha \sum_{k=4}^{k=n}\left(c_{\alpha k i}-a_{i1}\,c_{\alpha k 1}-a_{i2}\,c_{\alpha k 2}-a_{i3}\,c_{\alpha k 3}\right)a_{k2},$$

$$\delta a_{i3}=\sum_{\alpha=n+1}^{\alpha=r} e_\alpha \sum_{k=4}^{k=n}\left(c_{\alpha k i}-a_{i1}\,c_{\alpha k 1}-a_{i2}\,c_{\alpha k 2}-a_{i3}\,c_{\alpha k 3}\right)a_{k3}.$$

Правые части являются, следовательно, элементарными изменениями коэфициентов a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} под действием группы, бесконечно малые преобразования которой, таким образом, известны; эта группа, впрочем, — гомографическая группа.

Если бы мы могли подняться от бесконечно малых преобразований к преобразованиям конечным, что в обычных приложениях легко сделать, то мы снова пришли бы к отысканию тех числовых значений, к которым можно свести a_{ij} преобразованием группы [1]. Известно, например, что при помощи ортогональной группы с тремя переменными можно свести два из них к нулю, причем третье примет определенное значение, если только мы не находимся в комплексной области, когда может случиться, что можно свести три переменных к значениям $1, i, 0$, если опять три переменных не нули все три одновременно.

Следовательно, теоретически говоря, уравнения структуры позволяют предвидеть различные неприводимые между собой случаи, которые могут представиться, и позволяют вывести таким образом заключение в каждом случае о природе реперов первого

---

[1] Впрочем, с точки зрения теоретической бесполезно возвращаться к конечным преобразованиям группы. Мы обязаны С. Ли методом, позволяющим по одному заданию бесконечно малых преобразований найти точку, представительницу семейства точек, гомологичных в силу рассматриваемой группы.

порядка. Тот же метод может служить для перехода от реперов одного какого-либо порядка к реперам порядка непосредственно высшего.

34. Приложим сказанное к теории плоских кривых в аффинной унимодулярной геометрии. В обозначениях № 12, если ω^1, ω^2, $\omega_1{}^1, \omega_1{}^2, \omega_2{}^1$ — компоненты бесконечно малого перемещения репера, имеем уравнения структуры:

$$d\omega^1(\delta) - \delta\omega^1(d) = \begin{vmatrix} \omega^1(d) & \omega_1{}^1(d) \\ \omega^1(\delta) & \omega_1{}^1(\delta) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \omega^2(d) & \omega_2{}^1(d) \\ \omega^2(\delta) & \omega_2{}^1(\delta) \end{vmatrix},$$

$$d\omega^2(\delta) - \delta\omega^2(d) = \begin{vmatrix} \omega^1(d) & \omega_1{}^2(d) \\ \omega^1(\delta) & \omega_1{}^2(\delta) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \omega^2(d) & \omega_1{}^1(d) \\ \omega^2(\delta) & \omega_1{}^1(\delta) \end{vmatrix},$$

$$d\omega_1{}^1(\delta) - \delta\omega_1{}^1(d) = \begin{vmatrix} \omega_1{}^2(d) & \omega_2{}^1(d) \\ \omega_1{}^2(\delta) & \omega_2{}^1(\delta) \end{vmatrix},$$

$$d\omega_1{}^2(\delta) - \delta\omega_1{}^2(d) = 2\begin{vmatrix} \omega_1{}^1(d) & \omega_1{}^2(d) \\ \omega_1{}^1(\delta) & \omega_1{}^2(\delta) \end{vmatrix},$$

$$d\omega_2{}^1(\delta) - \delta\omega_2{}^1(d) = 2\begin{vmatrix} \omega_2{}^1(d) & \omega_1{}^1(d) \\ \omega_2{}^1(\delta) & \omega_1{}^1(\delta) \end{vmatrix}.$$

Можно сразу начать с реперов первого порядка, удовлетворяющих условию:

$$\omega^2 = 0.$$

Замечая, что $\omega^1(\delta) = \omega^2(\delta) = 0$, мы имеем тогда:

$$\delta\omega^2 = -e_1{}^2\omega^1,$$

откуда

$$e_1{}^2 = 0;$$

следовательно, заставляя точку двигаться по кривой, имеем соотношения вида:

$$\omega_1{}^2 = a\omega^1.$$

С другой стороны, варьируя реперы первого порядка при неподвижной точке M ($e^1 = e^2 = e_1{}^2 = 0$), имеем:

$$\delta\omega_1{}^2 = 2e_1{}^1\omega_1{}^2, \quad \delta\omega^1 = -e_1{}^1\omega^1,$$

откуда

$$\delta a = 3e_1{}^1 a.$$

Это соотношение показывает, что при бесконечно малой вариации репера первого порядка коэфициент a умножается на постоянную $1 + 3e_1{}^1$, бесконечно близкую к единице; следовательно, при конечном изменении она умножится на произвольную постоянную.

Теперь возможны два случая:

1°. Или $a = 0$ (случай прямой), и тогда нельзя более различить один от другого реперы первого порядка.

2°. Или же $a \neq 0$, и тогда можно выбрать среди реперов первого порядка некоторое семейство так, чтобы a стало равно единице; это будут реперы второго порядка.

Если коэфициент a приведен к единице и, следовательно, δa равно нулю для вариаций репера второго порядка, то $e_1{}^1 = 0$, откуда

$$\omega_1{}^1 = \beta\omega^1.$$

Будем менять репер второго порядка, оставляя неподвижной точку M (тогда $e^1 = e^2 = e_1{}^2 = e_1{}^1 = 0$).

Имеем:

$$\delta\omega_1{}^1 = -e_2{}^1\omega_1{}^2 = -e_2{}^1\omega^1, \quad \delta\omega^1 = 0,$$

откуда

$$\delta\beta = -e_2{}^1.$$

Коэфициент β увеличивается на бесконечно малое количество $-e_2{}^1$; значит, при конечном изменении репера он увеличится на произвольное конечное количество. Следовательно, можно устроить так, чтобы он обратился в нуль. Репер тогда будет вполне определен (репер третьего порядка), и мы получим:

$$\omega_2{}^1 = k\omega^1,$$

где k — первый диференциальный инвариант (афинная кривизна); он — четвертого порядка.

Мы вновь находим результаты, уже полученные двумя другими способами (n° 12 и 13).

35. Предыдущие рассуждения, подкрепленные несколькими примерами, которые их иллюстрируют, показывают, что *уравнения структуры группы G содержат в себе всю диференциальную геометрию пространства, обладающего основной группой G*, с единственным условием знания линейных соотношений с постоянными коэфициентами между ω, которые определяют точки

пространства; классификацию кривых, поверхностей и всякого рода точечных многообразий можно произвести, исходя из уравнений структуры, без логической необходимости какой-либо геометрической интуиции.

Известно, что в проективной геометрии теория линейчатого пространства, т. е. пространства, рассматриваемого как образованного прямыми, развертывается параллельно теории точечного пространства. Во всякой геометрии в духе Клейна естественно можно взять за элемент, образующий пространство, всякую совокупность фигур, обладающую следующими двумя характерными свойствами:

1) Рассматриваемые фигуры связно преобразуются между собой преобразованиями основной группы G.

2) Не существует никакого преобразования группы G, оставляющего неподвижными все фигуры совокупности.

Метод подвижного репера прилагается без изменений, когда точки заменим другим образующим элементом. Возьмем, например, эвклидову геометрию трех измерений.

Если мы примем прямую за образующий элемент, то достаточно присоединить к каждому реперу определенную прямую, которая будет играть роль прямой — начала этого репера. Это будет, например, ось z подвижного прямоугольного трехгранника. Если репер меняется так, что его прямая — начало, остается неподвижной, то существует, как известно, четыре линейных с постоянными коэфициентами соотношений между компонентами бесконечно малого перемещения репера ω_1, ω_2, ω_3, ω_{23}, ω_{31}, ω_{12}.

Действительно, замечая, что точка M перемещается тогда по оси z, и эта ось z остается неподвижной, мы находим:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_{23} = \omega_{31} = 0.$$

Это четыре диференциальных уравнения прямых в пространстве или, скорее, уравнения, определяющие семейства реперов с одной и той же начальной прямой. Компоненты ω_1, ω_2, ω_{23}, ω_{31} играют в приложении метода подвижного репера ту же роль, которую играли в изложении § VII n компонентов $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$.

Вообще всякому выбору образующего элемента соответствует вполне интегрируемая система уравнений в полных диференциалах, устанавливающих линейные с постоянными коэфициентами соотношения между $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$. Обратное предложение легко доказать [1].

[1] С другой точки зрения, всякому выбору образующего элемента соответствует выбор определенной подгруппы из группы G, которая оставляет инвариантным образующий элемент — начало репера. Обратно, всякой подгруппе соответствует семейство образующих элементов.

Все предшествующее показывает еще лучше, чем раньше, ту роль, которую играют уравнения структуры группы G.

IX.

36. Можно посмотреть на уравнения структуры группы еще с другой точки зрения. Представим себе в обыкновенном пространстве какую-нибудь систему криволинейных координат u_1, u_2, u_3. Пусть ко всякой точке пространства присоединен определенный прямоугольный трехгранник. Если мы знаем в функциях линейных относительно du_1, du_2, du_3 шесть относительных компонентов бесконечо малого перемещения этого трехгранника ω_1, ω_2, ω_3, ω_{23}, ω_{31}, ω_{12}, мы можем восстановить диференциальным путем все эвклидово пространство при условии необходимом и достаточном, что шесть данных форм удовлетворяют уравнениям структуры Дарбу и что три формы ω_1, ω_2, ω_3 линейно независимы. Если мы зададимся точкой эвклидова пространства, которая соответствует координатам (u_1^0, u_2^0, u_3^0) и в этой точке прямым трехгранником, мы сможем определить, какая точка пространства соответствует произвольным координатам, и какой прямой трехгранник следует ей присоединить. Можно, следовательно, сказать, что *задание в трехмерном континууме шести диференциальных форм* ω_1, ω_2, ω_3, ω_{23}, ω_{31}, ω_{12}, *удовлетворяющих уравнениям структуры эвклидовой группы, позволяет организовать этот континуум подобно эвклидову пространству* (и притом бесчисленным числом способов) и сделать из него что-то вроде эвклидова пространства, в каждой точке которого присоединен определенный прямоугольный трехгранник.

Задаться шестью рассматриваемыми формами — это, если угодно, то же, что присоединить к каждой паре бесконечно близких точек континуума эвклидово бесконечно малое перемещение, параметры которого будут в точности ω_1, ω_2, ω_3, ω_{23}, ω_{31}, ω_{12}. В этом смысле, *континуум, организованный подобно эвклидову пространству, является носителем бесконечно малых эвклидовых перемещений*. Но надо заметить, что эти перемещения, присоединенные к различным парам бесконечно близких точек, не произвольны, так как их компоненты должны удовлетворять уравнениям структуры.

Задание шести компонентов ω_i, ω_{ij} соответствует выбору трехгранников, присоединенных к различным точкам пространства; оно произвольно до известной степени. Так как бесконечно малое перемещение, присоединенное к двум бесконечно близким точкам, имеет вид $S_a^{-1}S_{a+da}$, где S_a и S_{a+da} означают перемещения, приводящие начальный репер в совпадение с реперами, присоединенными к этим двум точкам, то можно заменить S_a всяким другим перемещением, приводящим начало в рассматриваемую точку, но эти перемещения будут вида $S_a R$, где R означает произвольное вращение около начала. Отсюда следует, что, присоединяя по произвольному закону ко всякой точке (u_1, u_2, u_3) континуума эвклидово вращение R_u вокруг начала, мы заменим бесконечно малое перемещение $S_u^{-1} S_{u+du}$ бесконечно малым перемещением $R_u^{-1}(S_u^{-1} S_{u+du}) R_{u+du}$.

Этот результат можно высказать следующим образом. *Если бесконечно малое перемещение $T_{u\,;\,du}$, присоединенное к двум бесконечно близким точкам, заменить перемещением*

$$T^1_{u\,;\,du} = R_u^{-1} T_{u\,;\,du} R_{u+du},$$

то получим ту же самую эвклидову организацию континуума. Замена данных перемещений соответствует простому изменению трехгранников, присоединенных к различным точкам пространства.

Вообще можно было бы вместо R_u взять *произвольное* вращение, зависящее от трех параметров v_1, v_2, v_3; мы получили бы таким образом континуум, снабженный полной системой реперов, зависящих от шести параметров; мы бы знали линейные независимые компоненты ω_i, ω_{ij} бесконечно малого перемещения этого репера, и можно было бы, следовательно, прилагать метод подвижного репера к данным криволинейным координатам.

37. Разъясним все предыдущее, разобрав подробно, как обстоит дело на плоскости.

Мы имеем, континуум двух измерений, определенный посредством двух координат u и v и задаемся системой трех форм:

$$\omega_1 = \xi du + \xi_1 dv, \quad \omega_2 = \eta du + \eta_1 dv, \quad \omega_{12} = r du + r_1 dv,$$

удовлетворяющих уравнениям структуры:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \xi_1}{\partial u} = \eta r_1 - r\eta_1, \\ &\frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \eta_1}{\partial u} = -\xi r_1 + r\xi_1, \\ &\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Количества ω_1, ω_2, ω_{12} служат: два первых — компонентами параллельного переноса осей (подвижных) и последнее — компонентом вращения около начала (подвижного).

Если мы изменим расположение осей, если, например, мы их повернем на угол θ, мы получим более общие выражения:

$$\bar{\omega}_1=\omega_1\cos\theta+\omega_2\sin\theta,\ \bar{\omega}_2=-\omega_1\sin\theta+\omega_2\cos\theta,\ \bar{\omega}_{12}=\omega_{12}+d\theta,\quad(38)$$

которые позволят применить метод подвижного репера. Например прямые будут характеризоваться тем свойством, что им можно присоединить репер с неподвижной первой осью, что даст:

$$\bar{\omega}_2=0,\ \bar{\omega}_{12}=0,$$

откуда следует

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\omega_2}{\omega_1}\ \text{и}\ \omega_{12}+\frac{\omega_1 d\omega_2-\omega_2 d\omega_1}{\omega_1^2+\omega_2^2}=0.$$

Таким образом получается диференциальное уравнение прямых, если ω_1, ω_2, ω_{12} заменить данными выражениями их.

Окружность радиуса a точно так же характеризуется уравнениями:

$$\bar{\omega}_2=0,\ \bar{\omega}_{12}=\frac{1}{a}\bar{\omega}_1\ \text{и т. д.}$$

Все это естественно прилагаетстя к какому угодно пространству Клейна, определенному в любых криволинейных координатах.

38. Чтобы подготовить введение обобщенных пространств, нам остается показать, в чем состоит внутреннее геометрическое значение уравнений структуры.

Возьмем пространство Клейна и присоединим к каждой паре бесконечно близких точек (u_i) и (u_i+du_i) бесконечно малое перемещение $T_{u\,:\,du}$, удовлетворяющее условиям структуры. Это сводится к присоединению ко всякой точке пространства репера (R_u); если этот репер происходит из начального репера перемещением S_u, то

$$T_{u\,:\,du}=S_u^{-1}S_{u+du}.$$

Представим себе в пространстве замкнутый обход или цикл, который мы разделим точками деления M_0, $M_1,\ldots,M_{n-1}$ на большое число очень малых дуг. Назовем через (R^i) репер, присоединенный к точке M_i и через S_i — перемещение, которое переводит начальный репер (R_0) в (R^i).

Перемещение, переводящее (R^0) в (R^1), будет $S_0^{-1}S_1$; перемещение, переводящее (R^0) в (R^2):

$$S_0^{-1}S_2=(S_0^{-1}S_1)(S_1^{-1}S_2),$$

и т. д.

Перемещение, переводящее (R^0) в (R^p) имеет вид:

$$(S_0^{-1}S_p)=(S_0^{-1}S_1)(S_1^{-1}S_2)\ldots(S_{p-1}^{-1}S_p);$$

все эти перемещения отнесены к реперу (R^0). Наконец, когда цикл будет описан, мы вернемся к реперу (R^0) перемещением, которое необходимо равно нулю; оно явится произведением бесконечно малых перемещений, присоединенных к дугам, на которые цикл был разложен.

Следовательно, если назвать $T_{i;i+1}$ бесконечно малое перемещение, отнесенное к реперу (R^i), которое переводит (R^i) в (R^{i+1}), то имеем:

$$T_{0,1}\ T_{1,2}\ldots T_{n-2,n-1}\ T_{n-1,0}=1. \tag{39}$$

39. *Предыдущее соотношение, по условию верное для всех циклов n-мерного континуума, достаточно для того, чтобы компоненты бесконечно малого перемещения $T_{u;du}$, присоединенного к паре бесконечно близких точек этого континуума, удовлетворяли уравнениям структуры.* Действительно, поставим в соответствие какой-либо точке (u_i^0) континуума определенную точку A_0 в пространстве Клейна и определенный репер (R_0) с началом A_0. Пусть теперь (u_i) — какая-то точка континуума; соединим непрерывной кривой (u_i^0) и (u_i) и разделим этот путь на большое число частных дуг. Каждой из этих дуг присоединим бесконечно малое перемещение $T_{u;du}$; построим теперь, начиная с (R_0), последовательно реперы, получающиеся один из другого соответствующими бесконечно малыми перемещениями; эти перемещения по предположению аналитически определены по отношению к реперу, которым переносится. Мы придем таким образом к конечному реперу (R_u), который будет вполне определен, когда в пределе число частных дуг будет увеличиваться до бесконечности, а каждая дуга будет стремиться к нулю. Репер (R_u), присоединенный таким образом к точке (u_i) континуума, не зависит от пути, которым следовали в континууме, чтобы притти от точки (u_i^0) до точки (u_i); это в точности следует из гипотезы относительно циклов континуума, выраженной соотношением (39). Легко затем показать, что перемещение, переводящее (R_u) в (R_{u+du}), совпадает, если его отнести к (R_u), с данным перемещением $T_{u;du}$. Этого, очевидно, достаточно, чтобы компоненты $T_{u;du}$ удовлетворяли уравнениям структуры.

40. Казалось бы, после всего предшествующего, что уравнения структуры абсолютно эквивалентны соотношениям (39).

В действительности уравнения структуры являются не чем иным, как соотношениями (39), *приложенными к бесконечно малым циклам*. Более глубокое исследование показывает, что если задаться произвольно перемещением $T_{u\,;\,du}$ с компонентами ω_i и рассмотреть элементарный параллелограм с вершинами

$$(u_i^0)=(u_i),\ (u_i^1)=(u_i+du_i),$$
$$(u_i^2)=(u_i+du_i+\delta u_i+d\delta u_i),\quad (u_i^3)=(u_i+\delta u_i),$$

где d и δ — два символа диференцирования, переместимые между собой, то компонентами перемещения

$$T_{0,1}\ T_{1,2}\ T_{2,3}\ T_{3,0}$$

являются в точности количества

$$\Omega_i=d\omega_i(\delta)-\delta\omega_i(d)-\sum_{j,k}c_{jki}\,\omega_j(d)\,\omega_k(\delta).$$

Почти очевидно, что соотношения (39), по предположению верные для бесконечно малых циклов, будут еще верны для конечных циклов при условии, что циклы эти могут быть сведены непрерывным изменением к точке. *Следовательно, из уравнений структуры не вытекает обязательно соотношения* (39) *для циклов, не удовлетворяющих этому условию.*

X.

41. Мы в состоянии теперь понять, как можно обобщить пространства Клейна.

Первое обобщение этого рода восходит к Гауссу, который, конечно, не мог стоять на нашей точке зрения. Вернемся к уравнениям Дарбу (37) в геометрии на плоскости. Знание компонентов перемещения на плоскости ξ, ξ_1, η, η_1, r, r_1 в функциях двух параметров u и v достаточно, чтобы восстановить эвклидову организацию плоскости. Но мы можем заметить, что уже знания ξ, ξ_1, η, η_1 достаточно, ибо два первые уравнения (37) позволяют получить значения r и r_1. С другой стороны, вместо того чтобы задаваться двумя формами ω_1 и ω_2, которые определяют ξ, ξ_1, η, η_1, можно совершенно так же задаться, как мы это видели в № 37, двумя формами:

$$\overline{\omega}_1=\omega_1\cos\theta+\omega_2\sin\theta,\quad \overline{\omega}_2=-\omega_1\sin\theta+\omega_2\cos\theta.$$

Это значит, сказать, что одно только знание квадратичной формы $\omega_1^2 + \omega_2^2$ достаточно, чтобы восстановить эвклидову организацию плоскости. Эта квадратичная форма — не что иное, как ds^2 плоскости, квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками.

Это — хорошо известный результат, внутреннее основание которого заключается в том, что эвклидову геометрию можно построить на одном понятии расстояния.

Линейный элемент ds^2 нельзя дать произвольно, если угодно, чтобы уравнения структуры были удовлетворены. Дадим, однако, произвольное ds^2, т. е. зададимся для ξ, ξ_1, η, η_1 произвольными функциями от u и v; мы сможем еще получить r и r_1 из первых двух уравнений структуры, но уже третье не будет удовлетворено. Двумерный континуум, обладающий заданным линейным элементом ds^2, можно было бы, мы знаем, уподобить поверхности, и он обладал бы всеми геометрическими свойствами поверхности, которые зависят от линейного элемента. На такой поверхности *теория кривых будет тождественно та же, как на плоскости, и ничто не изменится в приложении метода подвижного репера.* Вводя наиболее общий репер с компонентами ω_1, ω_2, ω_3 бесконечно малого перемещения мы будем присоединять подвижной репер к кривой с условием $\omega_2 = 0$, который дает нам кривизну (*геодезическая кривизна* в смысле Гаусса):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\omega_{12}}{\omega_1}.$$

Различие между поверхностью и плоскостью станет заметным только благодаря тому, что третье уравнение структуры (37) не будет более удовлетворено.

Мы будем иметь:

$$\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = K(\xi\eta_1 - \eta\xi_1),$$

где в наших обозначениях

$$d\omega_{12}(\delta) - \delta\omega_{12}(d) = -K \begin{vmatrix} \omega_1(d) & \omega_2(d) \\ \omega_1(\delta) & \omega_2(\delta) \end{vmatrix}.$$

Коэфициент K есть *полная кривизна.* Его можно истолковать, вообразив бесконечно малый цикл и репер, присоединенный к различным точкам цикла, перемещающийся шаг за шагом без вращения. После возвращения в исходную точку он примет положение, отличное от начального, получающееся из него вращением $Kd\sigma$, где $d\sigma$ означает площадь, ограниченную циклом.

Можно представить себе другие обобщения эвклидовой плоскости, присоединяя каждой паре бесконечно близких точек двумерного континуума бесконечно малое эвклидово перемещение $T_{u;\,du}$, для которого первые два уравнения структуры не будут удовлетворены. Например, можно было бы задаться произвольными функциями ξ, ξ_1, η, η_1, полагая $r = r_1 = 0$. Эвклидовы реперы, присоединенные к различным точкам континуума, будут, следовательно, получаться один из другого простым переносом; мы будем *иметь пространство эвклидовой связности, обладающее абсолютным параллелизмом*. В этом пространстве теория кривых все еще та же, что на эвклидовой плоскости. Вводя наиболее общие реперы, будем иметь:

$$\overline{\omega_1} = \omega_1 \cos\theta + \omega_2 \sin\theta, \overline{\omega_2} = -\omega_1 \sin\theta + \omega_2 \cos\theta, \overline{\omega_{12}} = d\theta;$$

прямые будут определены уравнениями:

$$\omega_2 = \overline{\omega_{12}} = 0$$

или

$$\eta + \eta_1 \frac{dv}{du} = C\left(\xi + \xi_1 \frac{dv}{du}\right),$$

где C — произвольное постоянное, определяющее направление прямой. На поверхности, заданной своим ds^2, можно определить эвклидову связность с абсолютным параллелизмом, разлагая ее ds^2 на сумму двух квадратов $\omega_1^2 + \omega_2^2$ и принимая $\omega_{12} = 0$; например, для сферы, отнесенной к ее широте φ и долготе θ, можно было бы взять:

$$\omega_1 = d\theta;\quad \omega_2 = \sin\theta d\varphi;\quad \omega_{12} = 0;$$

прямыми будут локсодромы, допускающие в качестве полюсов два полюса сферы и определенные уравнением:

$$\sin\theta \frac{d\varphi}{d\theta} = C.$$

В этом обобщении, отличном от гауссова, перемещение $T_{01}T_{12}\ldots$, присоединенное к циклу — уже не просто вращение, но перенос с компонентами:

$$\Omega_1 = d\omega_1(\delta) - \delta\omega_1(d) + \begin{vmatrix} \omega_2(d) & \omega_{12}(d) \\ \omega_2(\delta) & \omega_{12}(\delta) \end{vmatrix}$$

$$\Omega_2 = d\omega_2(\delta) - \delta\omega_2(d) - \begin{vmatrix} \omega_1(d) & \omega_{12}(d) \\ \omega_1(\delta) & \omega_{12}(\delta) \end{vmatrix}.$$

это *кручение* пространства, в противоположность *кривизне* Гаусса [1].

Наконец, наиболее общее двухмерное пространство с эвклидовой связностью получится, если принять для ξ, ξ_1, η, η_1, r, r_1 абсолютно произвольные функции от u, v, тогда будем иметь и *кривизну и кручение*. Но и тогда все еще теория кривых и приложение метода подвижного репера будут тождественно те же, что и на эвклидовой плоскости.

42. Если перейти от эвклидовой плоскости к эвклидову пространству произвольного числа измерений, то снова найдем, как частный случай, классическую риманову геометрию. Уравнение структуры эвклидова пространства можно разбить на две группы.

1°. Уравнения, которые в сжатой форме имеют вид:

$$\omega_i' = \sum_k [\omega_k\ \omega_{ki}]. \tag{40}$$

2°. Уравнения

$$\omega_{ij}' = \sum_k [\omega_{jk}\ \omega_{ki}]. \tag{41}$$

Если задаться в n-мерном континууме n формами ω_i (компоненты переноса), по предположению линейно независимыми в $du_1, \ldots, du_n$, то уравнения (40) позволят вывести отсюда без колебаний формы ω_{ij} (компоненты вращения подвижного репера). С другой стороны, с изменением репера, присоединенного к точке, ω_i испытывают произвольную ортогональную подстановку, так что задание линейного элемента пространства

$$ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_n^2$$

достаточно, чтобы его организовать по-эвклидовски при само собой подразумевающимся условии, что уравнения структуры будут удовлетворены.

Если задаться произвольным ds^2, то получится пространство Римана; все еще можно устроить так, чтобы удовлетворить уравнению структуры (40); это позволит по закону, внутренне

---

[1] В обозначениях Дарбу кручение определено аналитически; двумя коэфициентами a и b в уравнениях:

$$\frac{\partial\xi}{\partial v} - \frac{\partial\xi_1}{\partial u} = a\,(\xi\eta_1 - \eta\xi_1),$$
$$\frac{\partial\eta}{\partial v} - \frac{\partial\eta_1}{\partial u} = b\,(\xi\eta_1 - \eta\xi_1).$$

связанному с заданным ds^2, определить бесконечно малое эвклидово перемещение, приводящее в совпадение два бесконечно близких прямоугольных репера или, что то же, определить угол двух направлений, исходящих из двух бесконечно близких точек пространства. Таким образом приходим к понятию *параллелизма* шаг за шагом Леви-Чивита.

Уравнения структуры (41) вообще более не удовлетворены; следует добавить во вторых частях дополнительные члены, которые определят *риманову кривизну* пространства.

В римановом пространстве приложение метода подвижного репера к теории кривых тождественно то же, что в эвклидовом пространстве; классификация кривых, понятие кривизны и кручения те же. Иначе говоря, *все операции эвклидовой диференциальной геометрии, которые относятся к теории кривых, сохраняют свое значение в римановой геометрии.* Приложение метода подвижного репера к теории поверхностей будет происходить так же, как в эвклидовой геометрии, но результаты будут не те, именно: в эвклидовой геометрии, как и в римановой, приходится считаться с значениями билинейных ковариантов ω_i' и ω_{ij}', а эти выражения различны в обеих геометриях, если число переменных превышает единицу. Таким образом понятие прямой, окружности, винтовой линии и т. д. автоматически обобщается при переходе от эвклидовой геометрии в риманову геометрию, но понятия *плоскости* вообще не существует в римановой геометрии, если только определять плоскость теми же *диференциальными* свойствами, как в эвклидовой геометрии. Действительно, эти диференциальные свойства в трехмерном пространстве записываются уравнениями:

$$\omega_3 = 0, \ \omega_{13} = 0, \ \omega_{23} = 0,$$

и эти уравнения не будут вполне интегрируемы, если уравнения структуры перестанут удовлетворяться.

Можно, естественно, рассмотреть пространства *эвклидовой связности* более общие, чем римановы, когда первые уравнения структуры перестанут удовлетворяться. *Римановы пространства с абсолютным параллелизмом*, вновь найденные Эйнштейном, — те же, для которых последние уравнения структуры (41) удовлетворены, а первые нет. Они не содержат кривизны, но имеют кручение.

43. Легко видеть теперь, как ко всякой группе G с n переменными можно присоединить бесконечное множество обобщенных пространств, допускающих G в качестве основной группы; эти

пространства можно рассматривать как континуумы n измерений, в которых каждой паре бесконечно близких точек (u_i) и (u_i+du_i) присоединено определенное бесконечно малое преобразование $T_{u;\,du}$ группы G так, что уравнения структуры перестали удовлетворяться[1].

В этих пространствах операции диференциальной геометрии клейновского пространства группы G продолжают сохранять свое значение; теория кривых там та же, что и в пространстве Клейна; метод подвижного репера там прилагается тоже попрежнему. Но классификация поверхностей так же, как и некоторые свойства их, уже не те.

Всякому циклу обобщенного пространства с заданной начальной точкой A_0 присоединено преобразование группы G. Можно его себе изобразить следующим образом. Вообразим последовательность наблюдателей, расставленных вдоль цикла, представляющих, что они все находятся в пространстве Клейна, и обладающих каждый определенным репером. Наблюдатель, помещенный в A_0, мог бы попытаться изобразить в пространстве Клейна, в котором он считает себя находящимся, последовательность положений реперов своих коллег, если бы каждый из них передал ему положение по отношению к своему собственному реперу репера бесконечно близкого. Когда наблюдатель, помещенный в A_0, достигнет конца цикла, он обнаружит, что он должен придать своему собственному реперу положение, отличное от того, которое он занимает в действительности; перемещение, необходимое, чтобы вернуться к этому начальному положению, есть перемещение, присоединенное к циклу с началом A_0. Очевидно, что это перемещение, рассматриваемое с точки зрения чисто геометрической наблюдателем, помещенным в A_0, не зависит от последовательности реперов, выбранных промежуточными наблюдателями, но его аналитическое выражение зависит от выбора репера в начале A_0. На рассмотрении перемещений, присоединенных к различным циклам *данного начала* A_0, можно основать очень важное понятие — понятие *группы голономии* пространства. Но мы не будем входить в рассмотрение этого вопроса.

Если этот цикл есть элементарный параллелограм, компонентами бесконечно малого перемещения, присоединенного к циклу, являются те дополнительные члены, которые надо добавить к правым частям уравнений структуры, чтобы эти уравнения стали точными.

---

[1] С более общей точки зрения можно было бы в континууме n-и измерений, каждая точка которого определена какой-нибудь системой координат $u_1, u_2, \ldots, u_n$, присоединить к каждой паре бесконечно близких точек бесконечно малое преобразование $T_{u;\,du}$ группы G; получится пространство, которое сохранит еще некоторые понятия диференциальной геометрии пространства Клейна с фундаментальной группой G.

Это — билинейные выражения, альтернированные по отношению к двум сериям диференциалов du_i; и δu_i; или еще по отношению к двум сериям компонентов $\omega_i(d)$ и $\omega_i^1(\delta)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, если допустить, что диференциальные уравнения точек получаются, приравнивая нулю n первых форм ω_i [1].

Пространство — *без кручения*, если дополнительные члены первых уравнений равны нулю; это имеет место в классических римановых пространствах, так как перемещение, присоединенное к элементарному циклу с началом A_0, есть вращение вокруг своего начала репера, связанного с точкой A.

44. Клейновская геометрия с основной группой G может принимать много различных видов в зависимости от выбора *образующего элемента*.

В предыдущем мы предполагали, что это — точка. При другом выборе образующего элемента получатся обобщенные геометрии, *существенно отличные* от предыдущих. Если в обыкновенной геометрии рассматривать пространство как место плоскостей, то понятие точки сохранится, если рассматривать точку как семейство плоскостей частного вида, зависящее от трех параметров; но, как в пространстве Римана, являющемся точечным пространством с эвклидовой связностью, исчезает понятие плоскости, — так в *пространстве плоскостей* с эвклидовой связностью исчезает понятие точки, и геометрия в таком пространстве совершенно отлична от римановой геометрии.

Интересно посмотреть, чтобы не оставаться в этих общих рассуждениях, как можно было бы аналитически определить линейчатое пространство с эвклидовой связностью. Если в эвклидовом пространстве присоединить к каждому прямоугольному трехграннику третью ось как начальную прямую, то компонентами бесконечно малого перемещения трехгранника, обращающимися в нуль при неподвижной начальной прямой, являются, как мы это видели (№ 35),

$$\omega_1, \omega_2, \omega_{13}, \omega_{23}.$$

Линейчатое пространство с эвклидовой связностью определяется заданием шести диференциальных форм в четырех переменных u_1, u_2, u_3, u_4, из которых четыре ω_1, ω_2, ω_{13}, ω_{23} линейно независимы. Можно заметить здесь, что из знания этих четырех форм в эвклидовой геометрии вытекает знание двух других.

[1] Эти билинейные выражения не произвольны; они удовлетворяют тождествам [тождества Бианки (Bianchi) в римановой геометрии], которые составляют *теорему сохранения кривизны и кручения*.

В обозначениях Дарбу задаемся функциями ξ_i, η_i, p_i, q_i $(i=1, 2, 3, 4)$ и уравнения:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \xi_i}{\partial u_j}-\frac{\partial \xi_j}{\partial u_i}=\eta_i r_j-r_i \eta_j-\zeta_i q_j+q_i \zeta_j, \\
&\frac{\partial \eta_i}{\partial u_j}-\frac{\partial \eta_j}{\partial u_i}=\zeta_i p_j-p_i \zeta_j-\xi_i r_j+r_i \xi_j, \\
&\frac{\partial p_i}{\partial u_j}-\frac{\partial p_j}{\partial u_i}=q_i r_j-r_i q_j, \\
&\frac{\partial q_i}{\partial u_j}-\frac{\partial q_j}{\partial u_i}=r_i p_j-p_i r_j
\end{aligned} \tag{42}
$$

определяют единственным образом ζ_i и r_i.

Чтобы иметь линейчатое пространство с эвклидовой связностью *без кручения*, следует задаться функциями $\xi_i, \eta_i, p_i, q_i, \zeta_i, r_i$, удовлетворяющими 24 предыдущим уравнениям. Но мы знаем, что эти функции можно выбирать бесконечным числом способов для одного и того же пространства в зависимости от частного выбора реперов. Что касается форм $\omega_1, \omega_2, \omega_{13}, \omega_{23}$, то оказывается, что с выбором репера не меняются две квадратичные формы.

$$\omega_{13}^2+\omega_{23}^2 \quad \text{и} \quad \omega_1 \omega_{23}-\omega_2 \omega_{13},$$

из которых первая представляет квадрат угла двух бесконечно близких прямых и вторая — произведение этого угла на кратчайшее расстояние между ними. Но эти две диференциальные квадратичные формы нельзя выбирать произвольно, если угодно, чтобы уравнения (42) были удовлетворены подходящим выбором ζ_i и r_i. В частности необходимо, чтобы первая форма $\omega_{13}^2+\omega_{23}^2$ могла быть выражена, как диференциальная квадратичная форма только двух переменных. Особенно просто выбрать эти две основные квадратичные формы, приняв

$$\omega_{13}^2+\omega_{23}^2=du_1^2+du_2^2, \quad \omega_1 \omega_{23}-\omega_2 \omega_{13}=du_2\, du_3-du_1 du_4. \tag{43}$$

Переменные u_1 и u_2 определяют *направление* прямой. Мы увидим, что в соответствующей линейчатой геометрии понятие точки (рассматриваемой как центр связки прямых) и понятие плоскости (рассматриваемой как плоское поле прямых) сохраняются [1].

Условие, что две прямые (u_i) и (u_i') *принадлежат одной и той*

---

[1] Если пространство без кручения, то понятие плоскости необходимо сохраняется, но вообще этого не будет с понятием точки.

же точке или что две прямые (u_i) и (u_i') *принадлежат одной и той же плоскости*, — одно и то же, а именно:

$$(u_2' - u_2)(u_3' - u_3) - (u_1' - u_1)(u_4' - u_4) = 0.$$

45. Ясно, что большое число обобщенных геометрий—до сих пор только геометрические достопримечательности. Они имеют, однако, двойное преимущество бросать свет на самые основы диференциальной геометрии и образовывать резервуар геометрических схем, из которого могут черпать математика и математическая физика. Таким образом, например, риманова геометрия с абсолютным параллелизмом, которая лежит в основе новейших изысканий Эйнштейна, входит в общую схему, которую мы изложили. Совершенно так же пространства Вейля (Weyl) являются пространствами без кручения, допускающими в качестве основной группы группу подобия; теория кривых в этих пространствах дана формулами Френе (8). До сих пор, кроме римановых пространств и пространств Вейля, изучались пространства афинной связности, проективной связности и конформной связности. Две последние категории можно связать с очень старыми проблемами анализа, которые, таким образом, снова облекаются в геометрическую, вызывающую интуицию форму. Пусть дана, например, система обыкновенных диференциальных уравнений с n переменным, из которых $n-1$ зависимы и одно независимое; можно ли рассматривать интегральные кривые этой системы как прямые в континууме, обладающем проективной связностью? Непосредственно видно, что это возможно только для частной формы уравнений, например в случае $n=2$, если данное диференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + B\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + C\frac{dy}{dx} + D, \qquad (44)$$

с коэфициентами A, B, C, D, заданными функциями от x, y. Проблема допускает тогда бесконечное множество решений, но среди всех проективных связностей, отвечающих на вопрос, существует одна и только одна, внутренне связанная с данным уравнением. Это значит, что закон, по которому присоединяется проективная связность к диференциальному уравнению, остается инвариантным при всякой замене переменных [1].

Определяемая таким образом в двухмерном пространстве (x, y)

---

[1] Определение этой внутренней проективной связности составляет частный случай приложения метода подвижного репера, но прилагаемого к *бесконечной* группе, а именно, к группе всех точечных преобразований двух переменных.

так называемая нормальная геометрия проективной связности, дает все свойства уравнений (44), не зависящие от выбора переменных x, y.

Если диференциальное уравнение не имеет частной формы (44), если они—произвольного вида, то его интегральные кривые можно еще рассматривать как прямые в пространстве проективной связности, но при обязательном условии принять за образующий элемент геометрии не точку, а линейный элемент (совокупность точки и прямой, проходящей через эту точку), причем основная группа будет все время проективная группа плоскости; здесь среди всех проективных связностей, делающих интегралы диференциального уравнения прямыми, еще есть одна привилегированная, и соответствующая геометрия дает все свойства диференциального уравнения, которые не зависят от выбора переменных x, y.

Можно также рассматривать интегральные кривые произвольного диференциального уравнения третьего порядка как окружности на плоскости, рассматривая континуум точек (x,y) как обобщенное пространство с основной группой, группой преобразований прикосновения, которые меняют ориентированный круг на орентированный круг. Все еще существует привилегированная связность, и соответствующая геометрия дает все свойства диференциального уравнения, инвариантные по отношению к произвольному преобразованию прикосновения.

46. Последний пример вернет нас к эвклидовой геометрии. Известно, что Риман рассматривал для определения расстояния между двумя бесконечно близкими точками выражения более общие, чем квадратный корень из квадратической диференциальной формы. В случае двух измерений можно было бы взять какую-нибудь функцию однородную и первого измерения относительно dx, dy, которую всегда можно писать в виде $F(x,y,y')\,dx$, полагая $y' = \frac{dy}{dx}$. С другой стороны, варифионное исчисление в случае наиболее простого интеграла $\int F(x,y,y')\,dx$ приводит к понятиям, очень похожим на понятия элементарной геометрии; трансверсальность, например, имеет много аналогичного с перпендикулярностью. Некоторые авторы провели обобщение римановой геометрии, основанное на соображениях этого рода. Это обобщение входит в нашу общую схему. Можно сделать экстремали интеграла $\int F(x,y,y')\,dx$ эвклидовыми *прямыми*, вводя эвклидову связность, но надо тогда принять за образующий элемент не точку, но линейный элемент. Это сводится к тому, что в окрестности линейного элемента, рассматриваемого как элемент экс-

тремали, пространство имеет характер эвклидовой плоскости, но этот характер теряется, если рассматривать окрестность точки, т. е. совокупность линейных элементов, с центром в соседстве с данной точкой. Можно, следовательно, определить, как в эвклидовой геометрии, угол двух бесконечно близких линейных элементов, расстояния их центров и т. д.; но важно отметить, что расстояние центров может меняться, если будем вращать два линейных элемента около их неподвижных центров.

Тот факт, что геометрию эвклидовой связности можно внутренним образом построить на одном задании аналитического выражения расстояния двух бесконечно близких точек, ставит вопрос, нельзя ли осуществить что-либо подобное, задавая в трехмерном континууме аналитическое выражение элемента площади поверхности. Весьма замечательно, что это вообще возможно; можно присоединить, согласно внутреннему закону, к интегралу $\iint F(x,y,z,p,q)\,dx\,dy$ эвклидову связность, в которой этот интеграл будет изображать эвклидову площадь поверхности. Но здесь есть исключения; я отмечу только случай интеграла $\iint (p^2+q^2)\,dx\,dy$. Так как этот интеграл инвариантен относительно бесконечной группы точечных преобразований

$$\left.\begin{aligned} x'+iy' &= f(x+iy), \\ z' &= z+a, \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

где $f(x+iy)$ означает произвольную аналитическую функцию и a — произвольное постоянное, то несомненно, невозможно присоединить к нему эвклидову связность по закону внутреннему (т. е. инвариантному относительно какой угодно замены переменных), ибо всякая эвклидова связность может оставаться инвариантной только относительно группы самое большее шести параметров, тогда как она должна остаться инвариантной относительно бесконечной группы.

Предыдущий пример очень показателен. Прежде всего он доказывает возможность основать эвклидову диференциальную геометрию в пространстве на одном понятии площади так же, как ее можно основать на одном понятии длины. Но он доказывает также, что если, обобщая эвклидово аналитическое выражение *длины*, можно всегда основать геометрию, сохраняющую основные понятия эвклидовой диференциальной геометрии, то это уже не всегда так, если обобщать эвклидово аналитическое выражение площади. И это не без того, чтобы открыть новые горизонты на основы даже элементарной геометрии.

Примечания переводчика.

I.

1. Метод подвижного трехгранника систематически изложен Дарбу (G. Darboux) в его теории поверхностей. Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géometriques du calcul infinitésimal, т. I, кн. I, гл. I, V, VII; т. II, кн. 5, гл. I, II, III, IV.

Движение трехгранника с одной степенью свободы и вся теория кривых двоякой кривизны изложены в главе I, первой книги; движение с несколькими степенями свободы — в главе IV. Основные формулы теории поверхностей выведены методом подвижного трехгранника в пятой книге. Интегрирование диференциальных уравнений, сюда относящихся, — в главах II и VI первой книги. Кроме того, в первом томе рассеяно много различных частных случаев приложения метода.

Много общего имеет с ним метод Рибокура (Ribaucour) геометрии около поверхности, см.:

Ribaucour, Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes, Journ. de Math., сер. 4, т. VII, 1891.

3. Доказательство этой теоремы можно найти в цитированной книге Дарбу, т. I, гл. I, V.

5. Минимальные кривые в пространстве определяются условием: линейный элемент их $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ во всякой точке равен нулю. Это мнимые кривые, определяемые диференциальным уравнением:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0, \tag{1}$$

где штрихом обозначено диференцирование по независимому переменному.

Любой вектор, расположенный на касательной, имеет вид:

$$\vec{T} = \{ \lambda x', \lambda y', \lambda z' \},$$

где в фигурных скобках записаны компоненты вектора, и λ — любое число. Длина этого вектора равна нулю, ибо квадрат его — нуль

$$\vec{T}^2 = (\lambda x')^2 + (\lambda y')^2 + (\lambda z')^2 = 0$$

в силу уравнения (1). Иначе вектор касательной $\vec{\tau}$ перпендикулярен сам к себе, ибо

$$\vec{T}^2 = \vec{T} \cdot \vec{T} = 0,$$

т. е. скалярное произведение вектора самого на себя равно нулю.

Соприкасающаяся плоскость определяется как плоскость, содержащая два вектора $\vec{\tau}$ и $\vec{\nu}$:

$$\vec{\tau}=\left\{x', y', z'\right\}, \quad \vec{\nu}=\left\{x'', y'', z''\right\}.$$

Диференцируя равенство (1), получим:

$$x' x''+y' y''+z' z''=0.$$

Значит,

$$\vec{\tau}\vec{\nu}=0,$$

т. е. вектор $\vec{\nu}$ перпендикулярен к касательной, а так как $\vec{\tau}$ как вектор касательной тоже перпендикулярен сам к себе, то, следовательно, соприкасающаяся плоскость содержит две нормали, два вектора, перпендикулярных к касательной. Поэтому соприкасающаяся плоскость совпадает с нормальной плоскостью.

Так как главная нормаль кривой обычно определяется как пересечение соприкасающейся и нормальной плоскостей, то здесь она неопределенна.

Направления касательных к минимальным кривым называются изотропными направлениями, а прямые с этим направлением — изотропными прямыми. Изотропные прямые, выходящие из центра шара

$$x^2+y^2+z^2=1$$

образуют его асмиптотический конус

$$x^2+y^2+z^2=0.$$

Они, следовательно, проходят через мнимые бесконечно удаленные точки сферы. В каждой плоскости есть два таких направления; например, в плоскости $z=0$ две прямые

$$x+iy=0, \quad x-iy=0$$

с угловыми коэфициентами $\pm i$.

10. Диференциальное уравнение (1) минимальных кривых можно написать в виде:

$$dx^2+dy^2+dz^2=0$$

или

$$(dx+idy)(dx-idy)=-dz^2.$$

Вводим новое независимое переменное t посредством уравнений

$$\frac{dx+idy}{-dz}=\frac{dz}{dx-idy}=t,$$

откуда

$$dx+idy=-t dz,$$

$$dx-idy=\frac{dz}{t}$$

и

$$\frac{dx}{1-t^2}=\frac{dy}{i(1+t^2)}=\frac{dz}{2t}=\frac{1}{2}F(t)dt.$$

В правой части мы ввели новую неизвестную функцию $F(t)$. Эта функция, очевидно, остается произвольной, и мы имеем:

$$dx=\frac{1}{2}(1-t^2)F(t)\,dt,$$

$$dy=i(1+t^2)F(t)\,dt,$$

$$dz=tF(t)\,dt.$$

Формулы текста отсюда непосредственно вытекают.

Weierstrass, Ueber die Flächen, deren mittlere Krümmung überal gleich Null ist. Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1866, стр. 612 и 855.

См. также Darboux, т. I, стр. 339 (изд. 1914 г.) или Егоров, Диференциальная геометрия, стр. 158, где эти формулы приведены без знака интеграла.

Cartan, Sur l'équivalence absolue de certains systèmes d'équations différentielles et sur certaines familles de courbes, Bull. de la Soc. Math. de France, t. 42, стр. 12—48, 1914 г.

Автор ищет семейства кривых, определяемых заданным соотношением между кривизной, кручением и производной от кривизны по дуге так, чтобы уравнения кривых могли быть написаны без знака интеграла. Кроме сферических кривых и винтовых линий он находит три семейства мнимых кривых, тесно связанных с минимальными линиями и позволяющих дать несколько интересных истолкований их псевдодуг.

III.

Построение подвижного репера в афинной геометрии (и как частный случай в геометрии подобия и в эвклидовой) см.:

Cartan, Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée, Annales de l'École Normale supérieure, т. 40, стр. 325—412, 1923 г., т. 41, стр. 1—25, 1924 г.; т. 42, стр. 17—88, 1925 г.

Мемуар посвящен (кроме теории относительности) исследованию обобщенных пространств афинной связности. Теория кривых затронута сравнительно мало.

IV.

13. Tresse, Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations, Acta Mathematica, т. 18, 1894 г., стр. 1—88.

Автор дает общую теорию диференциальных инвариантов на основе теории групп С. Ли и применяет к отысканию диференциальных инвариантов поверхности в конформной и проективной геометриях.

Cartan, Sur un problème du calcul des variations en géometrie projective plane. Московский Математический сборник, т. 34, стр. 349—364, 1927.

Основная задача — определение в эллиптических функциях всех кривых, осуществляющих extremum проективной дуги.

V.

15. F. Klein, Vergleichende, Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Programm zum Eintritt in die philosophische Fakultät zu Erlangen, 1872. Mathematische Annalen, т. 43, стр. 63, 1893. Также в собрании сочинений.

16. Предшественником Картана, в обобщении метода подвижного трехгранника является.

E. Cotton, Généralisation de la théorie du trièdre mobile, Bulletin de la Société Math. de France, 1905, т. 33, стр. 42—64.

Еще ранее Демулэн (Demoulin) применял подвижную систему отнесения в конформной и проективной геометрии. См. его замечания в Comptes Rendus, Paris 1905, т. 141, стр. 302. Картан дал обобщение метода подвижного трехгранника в статье:

Cartan, La structure des groupes de transformations continus et la théorie du trièdre mobile, Bull. de la Soc. Math. de France, 1910, сер. 2, т. 34, стр. 1—34.

Автор прилагает построенный репер к изучению в эвклидовой геометрии мнимых поверхностей с совпадающими линиями кривизны и изотропных развертывающихся поверхностей.

20. S. Lie, G. Scheffers, Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen, Leipzig 1893 г., стр. 391, уравнение (9).

VI.

23. Вторая теорема теории групп Lie-Scheffers, стр. 380. Связь теории групп и геометрии см.:

Cartan, La géometrie des groupes de transformations, Journal de Mathemat., 1927, 6, стр. 1—119.

Cartan, La théorie des groupes et la géometrie. Conférence faite à la Soc. Math. Suisse à Berne le 7 mai 1927, L'Enseignement mathémat., 1927, 26, стр. 200—225.

A. Buhl. Aperçus modernes sur la théorie des groupes continus et finis. Mémorial des Sciences Math., вып. 33, 1928.

Автор выводит теорию групп из геометрических рассуждений Картана.

Относительно билинейных ковариантов, внешнего диференцирования и теории Картана уравнений в инволюции см.:

Cartan, Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff. Annales de l'École Norm. sup., 1899, сер. 3, т. 16, стр. 239—332.

Cartan, Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales, Annales de l'École Norm. sup., 1901, сер. 3, т. 18, стр. 241—311.

Cartan, Leçons sur les invariants intégraux, 1922;

Goursat, Leçons sur le problème de Pfaff:

26. Доказательство можно найти.

Cartan, Leçons sur la géometrie des espaces de Riemann, Paris 1928:

Третья теорема теории групп: Lie-Scheffers, стр. 395.

VII.

Последовательное определение репера, внутренним образом связанного с поверхностью в проективном пространстве трех измерений, см.:

Cartan, Sur la déformation projective des surfaces, Annales de l'École Normale sup., 1920, т. 37, стр. 259—356.

Основная задача мемуара — исследование проективного изгибания поверхности.

X.

Теория относительности и обусловленный ею интерес к многомерной геометрии вызвали появление целого ряда работ, последовательно обобщавших риманово пространство. Первой была работа Вейля.

H. Weyl, Reine Infinitesimalgeometrie, Mathem. Zeitschr., 1918, т. 2, стр. 384—411.

H. Weyl, Zur Infinitesimalgeometrie, Einordnung der projectiven und der konformen Auffassung, Göttingen Nachricht, 1921, стр. 99—112.

См. также:

H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, первое издание 1918 г.

В схеме Картана пространство Вейля — пространство без кручения в геометрии группы подобия. Затем Эддингтон (Eddington) построил более общее пространство, тоже без кручения аффинной связности.

A. S. Eddington, A generalisation of Weyl's Theory of the electromagnetic and gravitational fields. Proceedings of the Royal Soc. of London, сер. A, 1921, т. 99, стр. 104—122. См. также:

A. Eddington, The mathematical theory of Relativity, Cambridge 1923.

В это время стали появляться заметки Картана.

E. Cartan, Sur une définiton géometrique du tenseur d'énergie d'Einstein, Comptes Rend., 1922, т. 174, стр. 437.

Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion, ibid., стр. 593.

Sur les éspaces généralisés et la théorie de la relativité, ibid., стр. 734.

Sur les espaces conformes généralisés et l'Univers optique, ibid., стр. 857.

Sur les équations de structure des espaces généralisés et l'éxpression analytique du tenseur d'Einstein, ibid., стр. 1104.

Опубликованные здесь основы построения пространства аффинной и конформной связанности с кривизной и кручением подробно развиты в большом мемуаре в трех частях.

E. Cartan, Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée, Annales de l'École Norm. sup., 1923, т. 40, стр. 325—412; 1924, т. 41, стр. 1—25; 1925, т. 42, стр. 17—88.

Здесь содержится все то учение о метрическом и аффинном обобщенных пространствах, основы которого даны в главах IX и X текста. Теория пространства конформной и проективной связности развита в мемуарах.

E. Cartan, Les espaces à connexion conforme, Annales de la Société Polonaise Math., 1923, т. 2, стр. 171—221.

E. Cartan, Sur les variétés à connexion projective, Bull. Société Math. de France, 1924, т. 52, стр. 205—241.

Около этого же времени (т. е. времени опубликования первых статей Картана) появились работы Скоутена (Schouten).

J. A. Schouten, Ueber die verschiedenen Arten der Uebertragung in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit die einer Differentialgeometrie zu Grunde gelegt werden können, Math. Zeitschr., 1922, т. 13, стр. 56—81, Nachtrag, ibid., т. 15, стр. 168.

J. A. Schouten, Ueber die Einordnung der Affingeometrie in die Theorie der höheren Uebertragungen, I, II, Math. Zeitschr., 1923, т. 17, стр. 161—188, где в основу обобщения пространства положена идея параллельного переноса и работы американской школы.

L. P. Eisenhart and O. Veblen, The Riemannian geometry and its generalisation, Proceedings of the National As. of Science, 1922, т. 8.

L. P. Eisenhart, The geometry of paths and general relativity, Ann. of Math., 1922 — 1923, сер. 2, т. 24, стр. 367—392.

O. Veblen and T.Y. Thomas, The geometry of paths., Transactions of the Amer. Math. Soc., 1923, т. 25, стр. 551—668.

Попытку распространить метод параллельного переноса на обобщение пространств проективной и конформной связности можно найти у:

J. A. Schouten, Erlangen Programm und Uebertragungslehre, Rend. Circolo Math. di Palermo, 1926, т. 50, стр. 1—28.

Полное изложение этого направления можно найти у:

D. I. Struik, Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie in directer Darstellung, Berlin 1922. Содержит полную библиографию.

J. Schouten, Der Ricci-Kalkül, Berlin 1924.

L. P. Eisenhart, Riemannian geometry, Princéton, 1926.

L. P. Eisenhart, Non-riemanniani geometry, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 8, New York 1927.

Содержит краткую библиографию:

42. Levi-Civita, Nozione de parallelismo in una varieta qualunque, Rendiconti di Circolo Math. di Palermo, 1917, т. 42, стр. 173—205.

43. О группе голономии см:

E. Cartan, Les groupes d'holonomie des espaces généralisés, Acta Mathematica, 1926, т. 48, стр. 1—42.

E. Cartan, La théorie des groupes et les recherches récentes de géometrie différentielle. Conférence, faite au Congrés international de Toronto en 1924. L'Enseignement math, 1925, т. 24, стр. 1—18.

45. См. цитированную статью Картана. Sur les var. à conn. proj.

46. См. E. Cartan, Sur un problème d'équivalence et la théorie des espaces métriques généralises, Mathematica, 1930, т. 4, стр. 114—136, где приведена и некоторая библиография, а также:

L. Berwald, Über zweidimensionale allgemeine metrische Räume. J. f. reine u. ang. Math, 1927, т. 156, стр. 191—222 и его же:

Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus, Math. Zeitschr., 1926, т. 25, стр. 40—73.

СОДЕРЖАНИЕ