

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ
ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԱՄԲԻՈՆ

Ազարյան Ս. Ա., Գրիգորյան Տ. Մ.

ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ԵՎ ՍՈՎՈՐԱԿԱՆ
ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ
ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆԸ
ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ
(ուսումնասովանողակ ձեռնարկ)

ԵՐԵՎԱՆ
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿԶՈՒԹՅՈՒՆ
2023

ՀՏԴ 517.958:53(075.8)

ԳՄԴ 22.161.6+22.311g73

Ա 227

*Հրատարակության է երաշխավորել
ԵՊՀ գիտական խորհուրդը:*

Ազարյան Ս. Ա., Գրիգորյան Ս. Մ.

Ա 227 Ինտեգրալների և սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների կիրառությունը ֆիզիկայի խնդիրներում (ուսումնասովանողական ձեռնարկ) / Ս. Ա. Ազարյան, Ս. Մ. Գրիգորյան: -Եր., ԵՊՀ հրատ., 2023, 136 էջ:

Ձեռնարկի առաջին գլխում ներառված են ֆիզիկայի եզրային խնդիրներ, որոնց լուծումները հանգեցնում են որոշյալ, կորագիծ, կրկնակի, եռակի, մակերևութային ինտեգրալների, ինչպես նաև ինտեգրալային գումարների սահմանների հաշվմանը:

Երկրորդ գլխում ընդգրկված են ֆիզիկայի այնպիսի եզրային խնդիրներ, որոնք հանգեցնում են առաջին ու երկրորդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների կիրառմանը:

Ուսումնասովանողական ձեռնարկում քննարկվող թեմաների վերաբերյալ լուծված խնդիրներն ու առաջադրանքները կնպաստեն ուսանողների իմացության մակարդակի բարձրացմանը:

Ձեռնարկը նախատեսված է ԵՊՀ ֆիզիկայի ֆակուլտետի 1-ին ու 2-րդ կուրսերի ուսանողների համար:

ՀՏԴ 517.958:53(075.8)

ԳՄԴ 22.161.6+22.311g73

ISBN 978-5-8084-2649-8

<https://doi.org/10.46991/YSUPH/9785808426498>

© ԵՊՀ հրատ., 2023

© Ազարյան Ս. Ա., Գրիգորյան Ս. Մ., 2023

Գլուխ 1. ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

§ 1.1. Որոշյալ ինտեգրալի գաղափարը

Դիցուք $[a; b]$ հատվածի վրա տրված է $y = f(x)$ սահմանափակ ֆունկցիան: $[a; b]$ հատվածը

$$x_k; (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n \equiv b)$$

կամայական կետերով տրոհենք մասերի, յուրաքանչյուր $[x_k; x_{k+1}]$ հատվածի վրա վերցնենք կամայական ξ_k կետ և կազմենք հետևյալ ինտեգրալային գումարը՝

$$\sigma(x_k; \xi_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k; (\Delta x_k = x_{k+1} - x_k): \quad (1.1.1)$$

Սահմանում 1. Եթե

$$\lambda = \max_{k \leq n} (\Delta x_k) \rightarrow 0$$

(1.1.1) ինտեգրալային գումարը, անկախ տրոհման եղանակից և անկախ ξ_k կետերի ընտրությունից, ձգտում է վերջավոր I սահմանի, այսինքն՝

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \lambda > \delta \Rightarrow |\sigma - I| < \varepsilon,$$

ապա $y = f(x)$ ինտեգրելի է $[a; b]$ -ում, և (1.1.1)-ի գումարի սահմանը տրվում է հետևյալ ներքոգրյալ սիմվոլով՝

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma(x_k; \xi_k) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = I = \int_a^b f(x) dx: \quad (1.1.2)$$

Դժվար չէ նկատել, որ $[a; b]$ -ում որոշված անընդհատ ֆունկցիան ինտեգրելի է:

Որոշյալ ինտեգրալը հաշվելու համար օգտվելու ենք ներքոհիշյալ բանաձևերից:

1.1. Նյութոն-Լայբնիցի բանաձև

Սահմանում 2. Եթե $F(x)$ -ը $y = f(x)$ անընդհատ ֆունկցիայի որևէ նախնականն է $[a; b]$ հատվածում, ապա՝

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a): \quad (1.1.3)$$

1.2. Մասերով ինտեգրման բանաձև

Սահմանում 3. Եթե $U(x)$ և $V(x)$ ֆունկցիաները $[a; b]$ -հատվածում ունեն անընդհատ ածանցյալներ, ապա՝

$$\int_a^b U(x)dV(x) = U((x)V(x))|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b V(x)dU(x): \quad (1.1.4)$$

1.3. Փոփոխականի փոխարինման բանաձև

Սահմանում 4. Եթե $[a; b]$ հատվածում որոշված $x = \varphi(t)$ ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

ա) $x = \varphi(t)$ -ն մոնոտոն է, $\varphi(a) = a, \varphi(b) = b$:

բ) $\varphi(t)$ ֆունկցիան գոյություն ունի և անընդհատ է $[\alpha; \beta]$ -հատվածում, ապա $[a; b]$ հատվածում որոշված կամայական $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիայի համար ճիշտ է՝

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt: \quad (1.1.5)$$

Պարզենք (1.1.5) բանաձևի մեխանիկական իմաստը:

Դիցուք $[a; b]$ -հատվածի վրա $\rho(x)$ զծային խտությամբ ($\rho(x)$ -ը անընդհատ ֆունկցիա է $[a; b]$ -ում), բաշխված է որոշակի m զանգված, որը հաշվելու համար $[a; b]$ հատվածը կամայական x_k կետերով տրոհենք $[x_k; x_{k+1}]$ մասերի, յուրաքանչյուր $[x_k; x_{k+1}]$ -ով բաշխված է Δm_k զանգվածը՝

$$\lambda = \max_{0 \leq k \leq n} (\Delta x_k) = \max_{0 \leq k \leq n} (x_{k+1} - x_k)$$

փոքր վերցնելու հաշվին, մոտավորապես հավասար կլինի $\rho(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$ -ին (ξ_k -ն որևէ կետ է $[x_k; x_{k+1}]$ - հատվածից): Հետևաբար m զանգվածը քիչ կտարբերվի

$$\sum_{k=0}^{n-1} \rho(\xi_k) \Delta x_k$$

գումարից, m -ի ճշգրիտ արժեքը կստացվի (ըստ տրված հատվածով բաշխված զանգվածի սահմանման), եթե անցնենք սահմանի երբ $\lambda \rightarrow 0$, այսինքն՝

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\xi_k) \Delta x_k: \quad (1.1.6)$$

Այսպիսով՝ $[a; b]$ հատվածով բաշխված m զանգվածը ρ գծային խտությամբ միջոցով արտահայտվում է հետևյալ կերպ.

$$m = \int_a^b \rho(x) dx: \quad (1.1.7)$$

Պատկերացնենք, որ $\rho(x)$ գծային խտությամբ $[a; b]$ նյութական հատվածը ձգվելով կամ սեղմվելով (ոչ անպայման հավասարաչափ) բերվում է ինչ-որ $\gamma(t)$ գծային խտությամբ $[\alpha; \beta]$ հատվածի:

Ենթադրենք՝ $[\alpha; \beta]$ հատվածի նշված փոխամիարժեք արտապատկերումը $[a; b]$ -ի վրա իրականացվում է ա, բ պայմաններին բավարարող $x = \varphi(t)$ ֆունկցիայի օգնությամբ:

Նկատենք, որ $[\alpha; \beta]$ նյութական հատվածի $\gamma(t)$ խտությունը՝

$$\gamma(t) = \rho[\varphi(t)]\varphi'(t); \quad t \in [\alpha; \beta]: \quad (1.1.8)$$

Իրոք, ըստ խտության սահմանման՝

$$\gamma(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t}; t_0 \in [\alpha; \beta],$$

որտեղ Δt -ն t_0 կետը պարունակող կամայական $[\alpha; \beta]$ հատվածի երկարությունն է, իսկ Δm -ը՝ այդ հատվածով բաշխված զանգվածը: $x = \varphi(t)$ արտապատկերման (սեղման կամ ձգման) ժամանակ Δt երկարությամբ t_0 կետը պարունակող հատվածը կարտապատկերվի $x_0 = \varphi(t_0)$ կետը պարունակող Δx երկարությամբ հատվածի վրա, որով բաշխված զանգվածը ակնհայտորեն նորից Δm -ն է:

Օգտվելով $x = \varphi(t)$ ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունից՝ կստանանք՝

$$\begin{aligned} \gamma(t_0) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta m}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \rho(x_0) \varphi'(t_0): \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

Քանի որ $[\alpha; \beta]$ նյութական հատվածի գծային խտությունը $\gamma(t) = \rho[\varphi(t)] \varphi'(t)$ ՝ ըստ (1.1.8) բանաձևի, ապա $[\alpha; \beta]$ -ով բաշխված զանգվածը հավասար կլինի հետևյալ՝

$$\int_{\alpha}^{\beta} \rho[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$$

ինտեգրալին: Մյուս կողմից այդ նույն m զանգվածը բաշխված էր $\rho(x)$ գծային խտությամբ $[a; b]$ հատվածի վրա և հավասար է.

$$\int_a^b \rho(x) dx,$$

հետևաբար՝

$$\int_a^b \rho(x) dx = m = \int_{\alpha}^{\beta} \rho[\varphi(t)] \varphi'(t) dt, \quad (1.1.10)$$

որը փոփոխականի փոխարինման բանաձևն է, մեխանիկական մեկնաբանությամբ նշանակում է $[a; b]$ նյութական հատվածի m զանգվածի պահպանելիությունը սեղման կամ ձգման ժամանակ:

1.4. Հիմնական որոշյալ ինտեգրալները

Եզրային խնդիրների լուծման ժամանակ կիրառվում են հետևյալ ինտեգրալները՝

$$1. \int_a^b x^m dx = \left(\frac{x^{m+1}}{m+1} \right) \Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{a^{m+1} - b^{m+1}}{m+1}; \quad (m \neq -1),$$

$$2. \int_a^b \frac{A dx}{Bx} = \frac{A \cdot \ln|x|}{B} \Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{A(\ln|b| - \ln|a|)}{B} = \\ = \frac{A}{B} \ln \left| \frac{b}{a} \right|; \quad (A, B = \text{const}),$$

$$3. \int_a^b e^{Ax} dx = \left(\frac{e^{Ax}}{A} \right) \Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{e^{Ab} - e^{Aa}}{A},$$

$$4. \int_a^b B^{Ax} dx = \int_a^b e^{Ax \ln B} dx = \left(\frac{e^{Ax \ln B}}{A \ln B} \right) \Big|_{x=a}^{x=b} = \left(\frac{B^{Ax}}{A \ln B} \right) \Big|_{x=a}^{x=b} = \\ = \frac{B^{Ab} - B^{Aa}}{A \ln B}, \quad (B > 0; B \neq 1),$$

$$5. \int_a^b \sin Ax dx = - \left(\frac{\cos Ax}{A} \right) \Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{\cos Aa - \cos Ab}{A},$$

$$6. \int_a^b \cos Ax dx = \left(\frac{\sin Ax}{A} \right) \Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{\sin Ab - \sin Aa}{A},$$

$$7. \int_a^b \frac{dx}{\sin^2 Ax} = - \left(\frac{\operatorname{ctg} Ax}{A} \right) \Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{\operatorname{ctg} Aa - \operatorname{ctg} Ab}{A},$$

$$8. \int_a^b \frac{dx}{\cos^2 Ax} = \left(\frac{\operatorname{tg} Ax}{A} \right) \Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{\operatorname{tg} Ab - \operatorname{tg} Aa}{A}, \quad (1.1.11)$$

$$9. \int_a^b \frac{dx}{\cos Ax} = \frac{1}{A} \left(\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| \right) \Big|_{x=a}^{x=b} =$$

$$= \frac{1}{A} \left\{ \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{b}{2} \right) \right| - \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} \right) \right| \right\},$$

$$10. \int_a^b \frac{dx}{x^2 + A^2} = \left(\frac{1}{A} \operatorname{arctg} \frac{x}{A} \right) \Big|_{x=a}^{x=b} =$$

$$= \frac{1}{A} (\operatorname{arctg} Ab - \operatorname{arctg} Aa); \quad (A \neq 0),$$

$$11. \int_a^b \frac{dx}{x^2 - A^2} = \left(\frac{1}{2A} \ln \left| \frac{x - A}{x + A} \right| \right) \Big|_{x=a}^{x=b} =$$

$$= \frac{1}{2A} \left(\ln \left| \frac{(b - A)(a + A)}{(b + A)(a - A)} \right| \right); \quad (A \neq 0),$$

$$12. \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{A^2 x^2 \pm B^2}} = \frac{1}{A} \ln \left[x + \frac{1}{A} \sqrt{A^2 x^2 \pm B^2} \right] \Big|_{x=a}^{x=b} =$$

$$= \frac{1}{A} \ln \left[\frac{x + \frac{1}{A} \sqrt{A^2 b^2 \pm B^2}}{x + \frac{1}{A} \sqrt{A^2 a^2 \pm B^2}} \right]; \quad (A \neq 0),$$

$$13. \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{A^2 - B^2 x^2}} = \left(\frac{1}{B} \arcsin \frac{B}{A} x \right) \Big|_{x=a}^{x=b} = \\ = \frac{1}{B} \left(\arcsin \frac{B}{A} b - \arcsin \frac{B}{A} a \right); (A, ; B \neq 0),$$

$$x = \frac{A}{B} \sin t; dx = \frac{A}{B} \cos t \cdot dt; \left(\frac{A}{B} \right)^2 - x^2 = \left(\frac{A}{B} \right)^2 - \left(\frac{A}{B} \right)^2 \sin^2 t = \\ = \left(\frac{A}{B} \right)^2 \cos^2 t:$$

Սահմանում 5. Որոշյալ ինտեգրալի արժեքը գտնվում է $f(x)$ ենթինտեգրալային ֆունկցիայի ամենամեծ և ամենափոքր արժեքների ու $[a; b]$ հատվածի երկարության արտադրյալի միջև, այսինքն՝

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b - a), \quad (1.1.12)$$

որտեղ m -ն ու M -ը համապատասխանաբար $y = f(x)$ -ի ամենափոքր ու ամենամեծ արժեքներն են:

Սահմանում 6. Անընդհատ $f(x)$ ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալը հավասար է $[a; b]$ ինտեգրման հատվածի որևէ միջանկյալ c կետում ֆունկցիայի արժեքի և հատվածի երկարության արտադրյալին՝

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a): \quad (1.1.13)$$

1.5. Փոփոխական վերին սահմանով ինտեգրալ

Փոփոխական վերին սահմանով ինտեգրալ կոչվում է հետևյալ ֆունկցիան՝

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt: \quad (1.1.14)$$

Այս $F(x)$ ֆունկցիան յուրաքանչյուր x -ի համապատասխանության մեջ է դնում որոշակի թիվ՝

$$\int_a^x f(t) dt,$$

որտեղ $y = f(x)$ -ը նախօրոք տրված ինտեգրելի ֆունկցիա է: $F(x)$ ֆունկցիան կարող է լինել ածանցելի, ինտեգրելի և այլ հատկություններով օժտված:

Թեորեմ 1. Անընդհատ $y = f(x)$ -ի փոփոխական վերին սահմանով ինտեգրալի ածանցյալը հավասար է $f(x)$ -ի.

$$F'(x) = \left[\int_a^x f(t) dt \right]' = f(x): \quad (1.1.15)$$

Ապացույց

Կազմենք $\Delta F(x)$ -ը, այսինքն՝

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt: \quad (1.1.16)$$

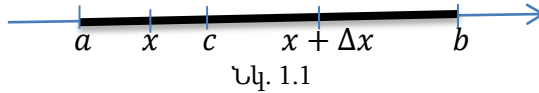
Համաձայն որոշյալ ինտեգրալի հատկության՝ կարող ենք գրել՝

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt: \quad (1.1.17)$$

Այդ դեպքում, հաշվի առնելով (1.115)-ը, (1.1.14)-ից կստանանք՝

$$\begin{aligned} \Delta F(x) &= \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \\ &= \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt: \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

Ըստ (1.1.13)-ի՝ եթե $c \in [a; b]$ հատվածին, ինչպես ցույց է տրված Նկար 1.1-ում.



ապա այդ դեպքում՝

$$\Delta F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(c)(x + \Delta x - x) = f(c)\Delta x:$$

Այստեղից կստանանք՝

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = f(x):$$

Այսինքն՝ $F'(x) = f(x)$: **Թեորեմ**ն ապացուցվեց:

Օրինակ 1. Հաշվել որոշյալ ինտեգրալը՝

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b e^{Ax} \sin Bx dx = \frac{1}{A} \int_a^b \sin Bx de^{Ax} = \\ &= \left(\frac{1}{A} e^{Ax} \sin Bx \right) \Big|_{x=a}^{x=b} - \frac{1}{A} \int_a^b e^{Ax} \cos Bx dx = \\ &= \frac{1}{A} (e^{Ab} \sin Bb - e^{Aa} \sin Ba) - \frac{B}{A^2} \int_a^b \cos Bx de^{Ax} \\ &= \frac{1}{A} (e^{Ab} \sin Bb - e^{Aa} \sin Ba) - \\ &- \left(\frac{B}{A^2} e^{Ax} \cos Bx \right) \Big|_{x=a}^{x=b} - \frac{B^2}{A^2} \int_a^b e^{Ax} \sin Bx dx = \\ &= \frac{1}{A} (e^{Ab} \sin Bb - e^{Aa} \sin Ba) - \\ &- \frac{B}{A^2} (e^{Ab} \cos Bb - e^{Aa} \cos Ba) - \frac{B^2}{A^2} \cdot I: \end{aligned}$$

Այստեղից կունենանք՝

$$I = \frac{1}{A^2 + B^2} [A(e^{Ab} \sin Bb - e^{Aa} \sin Ba) - B(e^{Ab} \cos Bb - e^{Aa} \cos Ba)] \quad (1.1.19)$$

Օրինակ 2. Հաշվել որոշյալ ինտեգրալը՝

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \pi^{Ax} \sin Bx \, dx = \frac{1}{A \ln \pi} \int_a^b \sin Bx \, de^{Ax \ln \pi} = \\ &= \left(\frac{1}{A \ln \pi} e^{Ax \ln \pi} \sin Bx \right) \Big|_{x=a}^{x=b} - \\ &- \frac{B}{A \ln \pi} \int_a^b e^{Ax \ln \pi} \cos Bx \, dx = \\ &= \frac{1}{A \ln \pi} (e^{Ab \ln \pi} \sin Bb - e^{Aa \ln \pi} \sin Ba) - \\ &- \frac{B}{(A \ln \pi)^2} \int_a^b \cos Bx \, de^{Ax \ln \pi} = \frac{1}{A \ln \pi} (\pi^{Ab} \sin Bb - \pi^{Aa} \sin Ba) - \\ &- \left(\frac{B}{(A \ln \pi)^2} e^{Ax \ln \pi} \cos Bx \right) \Big|_{x=a}^{x=b} - \frac{B^2}{(A \ln \pi)^2} \int_a^b \pi^{Ax} \sin Bx \, dx = \\ &= \frac{1}{A \ln \pi} (\pi^{Ab} \sin Bb - \pi^{Aa} \sin Ba) - \\ &- \frac{B}{(A \ln \pi)^2} (\pi^{Ab} \cos Bb - \pi^{Aa} \cos Ba) - \frac{B^2 I}{(A \ln \pi)^2}: \end{aligned}$$

Այստեղից կունենանք՝

$$I = \frac{1}{(A \ln \pi)^2 + B^2} [A \ln \pi (\pi^{Ab} \sin Bb - \pi^{Aa} \sin Ba) - B(\pi^{Ab} \cos Bb - \pi^{Aa} \cos Ba)]; \quad (1.1.20)$$

Օրինակ 3. Հաշվել որոշյալ ինտեգրալը՝

$$I = \int_a^b \sin Ax \cdot \sin Bx \, dx = ?:$$

Այս տիպի որոշյալ ինտեգրալը հաշվելու համար օգտվենք եռանկյունաչափական ներքոգրյալ բանաձևերից՝

$$\begin{cases} \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta; \\ \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta; \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} 2\cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta); \\ 2\sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta); \end{cases}$$

Հետևաբար դիտարկվող ինտեգրալի համար կունենանք՝

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \sin Ax \cdot \sin Bx \, dx = \frac{1}{2} \int_a^b [\cos(A - \beta)x - \cos(A + B)x] \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \cos(A - B)x \, dx - \frac{1}{2} \int_a^b \cos(A + B)x \, dx = \\ &= \left[\frac{\sin(A - B)x}{2(A - B)} - \frac{\sin(A + B)x}{2(A + B)} \right] \Big|_{x=a}^{x=b} : \end{aligned}$$

Այսինքն կստանանք՝

$$\begin{aligned} I &= \frac{\sin(A - \beta)b - \sin(A - \beta)a}{2(A - \beta)} - \\ &- \frac{\sin(A + \beta)b - \sin(A + \beta)a}{2(A + \beta)} : \end{aligned} \quad (1.1.21)$$

Օրինակ 4. Հաշվել որոշյալ ինտեգրալը՝

$$I = \int_a^b e^{\omega x} \sin Ax \cdot \cos Bx \, dx = ? :$$

Այս որոշյալ ինտեգրալը հաշվվում է այն նույն սկզբունքով (ինչպես **Օրինակ 3**-ում) եռանկյունաչափական հետևյալ բանաձևերից՝

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} 2\sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \\ 2\cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta) \end{cases} : \end{aligned} \quad (1.1.22)$$

Օգտվելով (1.1.15)-ի եռանկյունաչափական բանաձևերից՝

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b e^{\omega x} \sin Ax \cdot \cos Bx \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b e^{\omega x} [\sin(A+B)x + \sin(A-B)x] \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b e^{\omega x} \sin(A+B)x \, dx + \frac{1}{2} \int_a^b e^{\omega x} \sin(A-B)x \, dx = I^+ + I^-, \end{aligned}$$

որտեղ՝

$$\begin{aligned} I^+ &= \frac{1}{2} \int_a^b e^{\omega x} \sin(A+B)x \, dx = \frac{1}{2\omega} \int_a^b \sin(A+B)x \, de^{\omega x} = \\ &= \left[\frac{1}{2\omega} e^{\omega x} \sin(A+B)x \right]_{x=a}^{x=b} - \\ &- \frac{A+B}{2\omega} \int_a^b e^{\omega x} \cos(A+B)x \, dx = \\ &= \frac{1}{2\omega} [e^{\omega b} \sin(A+B)b - e^{\omega a} \sin(A+B)a] - \\ &- \frac{A+B}{2\omega^2} \cdot [e^{\omega b} \cos(A+B)b - e^{\omega a} \cos(A+B)a] - \\ &- \frac{(A+B)^2}{2\omega^2} \int_a^b e^{\omega x} \sin(A+B)x \, dx: \end{aligned}$$

Այստեղից կունենանք՝

$$\begin{aligned} I^+ &= \frac{1}{(A+B)^2} \{ \omega [e^{\omega b} \sin(A+B)b - e^{\omega a} \sin(A+B)a] - \\ &- (A+B) [e^{\omega b} \cos(A+B)b - e^{\omega a} \cos(A+B)a] \}: \end{aligned}$$

Անալոգ սկզբունքով կատանանք՝

$$I^- = \frac{1}{(A-B)^2} \{ \omega [e^{\omega b} \sin(A+B)b - e^{\omega a} \sin(A-B)a] - \\ - (A-B)[e^{\omega b} \cos(A-B)b - e^{\omega a} \cos(A-B)a] \}:$$

Հետևաբար՝

$$I = \frac{1}{(A+B)^2} \{ \omega [e^{\omega b} \sin(A+B)b - e^{\omega a} \sin(A+B)a] - \\ - (A+B)[e^{\omega b} \cos(A+B)b - e^{\omega a} \cos(A+B)a] \} + \quad (1.1.23) \\ + \frac{1}{(A-B)^2} \{ \omega [e^{\omega b} \sin(A+B)b - e^{\omega a} \sin(A-B)a] - \\ - (A-B)[e^{\omega b} \cos(A-B)b - e^{\omega a} \cos(A-B)a] \}:$$

Օրինակ 5. Հաշվել որոշյալ ինտեգրալը՝

$$I = \int_a^b \pi^{\omega x} (Ax^2 + Bx + C) dx = \int_a^b e^{\omega x \ln \pi} (Ax^2 + Bx + C) dx = \\ = \frac{1}{\omega \ln \pi} \int_a^b (Ax^2 + Bx + C) de^{\omega x \ln \pi} = \\ = \left[\frac{1}{\omega \ln \pi} \pi^{\omega x} (Ax^2 + Bx + C) \right]_{x=a}^{x=b} - \\ - \frac{1}{\omega \ln \pi} \int_a^b e^{\omega x \ln \pi} (2Ax + B) dx = \\ = \frac{\pi^{\omega b} (Ab^2 + Bb + C) - \pi^{\omega a} (Aa^2 + Ba + C)}{\omega \ln \pi} - \\ - \frac{\pi^{\omega b} (2Ab + B) - \pi^{\omega a} (2Aa + B)}{(\omega \ln \pi)^2} + \frac{2A\pi^{\omega x}}{(\omega \ln \pi)^3} \Big|_{x=a}^{x=b} :$$

Այստեղից կստանանք՝

$$I = \frac{\pi^{\omega b}}{(\omega \ln \pi)^3} [(Ab^2 + Bb + C)(\omega \ln \pi)^2 - (2Ab + B)\omega \ln \pi + 2A] - \\ - \frac{\pi^{\omega a}}{(\omega \ln \pi)^3} [(Aa^2 + Ba + C)(\omega \ln \pi)^2 - (2Aa + B)\omega \ln \pi + 2A]:$$

Առաջադրանք

Հաշվել որոշյալ ինտեգրալները:

$$1. \int_1^9 \left\{ 2(9 - x^2) - \frac{3}{\sqrt{2x+1}} + \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} - 5e^x + \frac{7x}{2+x^2} + \right. \\ \left. + 9\sqrt{x^2-4} - 7 \cdot 3^x - \frac{5x}{\sqrt{16+x^2}} \right\} dx =;$$

$$2. \int_0^{\pi/2} \left\{ 7 \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) + 5 \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) - 3x \sin \left(4x + \frac{\pi}{6} \right) - \right. \\ \left. - 9x^2 \cos \left(5x - \frac{2\pi}{3} \right) + \operatorname{tg} x \right\} dx =;$$

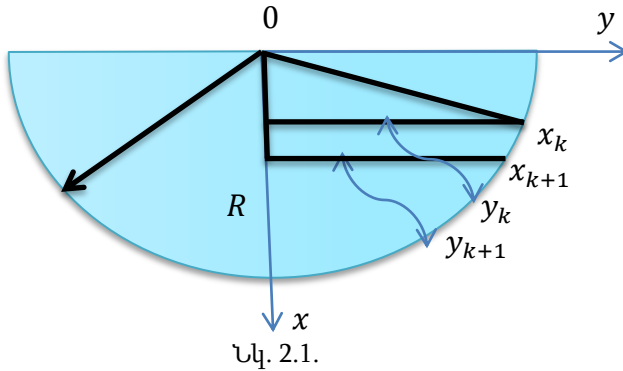
$$3. \int_0^3 \left\{ \ln(2x+1) - \frac{\ln(x+3)}{2e^x} + \frac{3 \ln^2 x}{2^x} \right\} dx =;$$

$$4. \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{x \cos 3x}{1 - \cos 6x} - \frac{1}{1 + \cos 2x} \right\} dx =;$$

$$5. \int_0^3 \left\{ 24\sqrt{4x^2+1} - 93 \cos 2(\pi + 5x) + 5 \ln(3x+1) + 13 \cdot 2^x - \right. \\ \left. - 35 \cdot \pi^{2x} - 31 \operatorname{tg}^2 2x \right\} dx =;$$

§ 1.2. Որոշյալ ինտեգրալի կիրառությունը ֆիզիկայի խնդիրներում

Խնդիր 1.2.1. Հաշվել այն աշխատանքը, որն անհրաժեշտ է R շառավղով կլիսագնդաձև ջրամբարից ջուրը դատարկելու համար:



Լուծում

Դիտարկենք ջրամբարի տրամագծային հատույթ և վերցնենք այդտեղ xOy ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգ, ինչպես ցույց է տրված Նկար 2.1-ում: ox առանցքին ուղղահայաց հարթությունների օգնությամբ, որոնք $[O; R]$ հատվածից կանջատեն x_k կետեր ($0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n$), ջրամբարը մտովի տրոհենք մանր շերտերի:

Նշանակելով k -րդ շերտում եղած ջուրը դատարկելու համար պահանջվող աշխատանքը ΔA_k -ով, նույն շերտի կշիռը P_k -ով՝ կունենանք

$$x_k P_k < \Delta A_k < x_{k+1} P_k = x_k P_k + \Delta x_k \cdot P_k: \quad (1.2.1)$$

Նկատի ունենալով, որ k -րդ շերտի ծավալը՝ V -ն բավարարում է, հետևյալ անհավասարությանը

$$\begin{aligned} \pi(R^2 - x_{k+1}^2) \Delta x_k &= \pi y_{k+1}^2 \cdot \Delta x_k < V_k < \pi y_k^2 \cdot \Delta x_k = \\ &= \pi(R^2 - x_k^2) \Delta x_k, \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

վերոգրյալ (1.1.18) ու (1.1.19) պայմաններից կստանանք՝

$$\begin{aligned} \pi(R^2 - x_{k+1}^2)x_k\Delta x_k < \Delta A_k < \pi(R^2 - x_k^2)x_k\Delta x_k + \\ + \pi(R^2 - x_k^2)(\Delta x_k)^2: \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Նշանակելով α -ով ու β -ով համապատասխանաբար հետևյալ արտահայտությունները՝

$$\alpha = \pi \sum_{k=0}^{n-1} (R^2 - x_k^2)(\Delta x_k)^2; \quad (1.2.4)$$

$$\beta = \pi \sum_{k=0}^{n-1} x_k(\Delta x_k)^2 [2x_k + \Delta x_k],$$

և անդամ առ անդամ գումարելով (1.1.20) անհավասարությունները՝ կստանանք՝

$$\begin{aligned} \beta + \pi \sum_{k=0}^{n-1} (R^2 - x_k^2)x_k\Delta x_k < \sum_{k=0}^{n-1} \Delta A_k < \\ < \pi \sum_{k=0}^{n-1} (R^2 - x_k^2)x_k\Delta x_k + \alpha: \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Հաշվի առնելով հետևյալ ներքոգրյալ առնչությունները՝

$$\alpha < \pi \max_k (\Delta x_k) \sum_{k=0}^{n-1} (R^2 - x_k^2)\Delta x_k < \pi R^2 \max_k (\Delta x_k),$$

$$\beta < 3\pi R^2 \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k \cdot \max_k (\Delta x_k) < 3\pi R^3 \cdot \max_k (\Delta x_k),$$

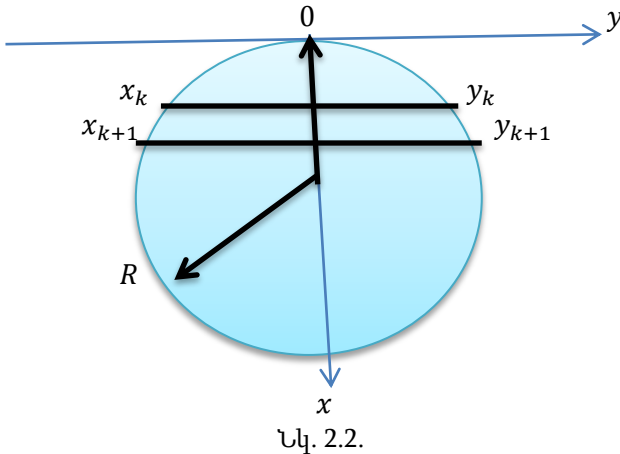
գոյություն ունի՝

$$\lim_{\max_k (\Delta x_k) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} (R^2 - x_k^2)x_k\Delta x_k = \int_0^R x(R^2 - x^2) : A = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta A_k:$$

(1.1.22) անհավասարությունում անցնելով սահմանի, երբ $\max(\Delta x_k) \rightarrow 0$, կգտնենք աշխատանքը՝

$$A = \pi \int_0^R x(R^2 - x^2) dx = \frac{\pi R^4}{4}: \quad (1.2.6)$$

Խնդիր 1.2.2. Սկավառակը ուղղաձիգ դիրքով ընկղմված է γ տեսակարար կշիռ ունեցող հեղուկի մեջ, որի հեռավորությունը հեղուկի մակերևույթից հավասար է R -ի: Հաշվել սկավառակի վրա հեղուկի ճնշման ուժը:



Լուծում

Վերցնենք ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգ, ինչպես ցույց է տրված Նկար 2.2-ում: Այդ կոորդինատական համակարգում սկավառակի եզրագծի (շրջանագծի) հավասարումը կլինի՝

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2 \text{ կամ } y^2 = 2Rx - x^2: \quad (1.2.7)$$

Սկավառակը տրոհենք $x = x_k$; ($0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = R$) զուգահեռ գծերով մանր մասերի, և k -րդ մասի մակերեսը նշանակենք S_k -ով:

Պարզ է, որ.

$$|S_k - 2y_k \cdot \Delta x_k| < 2\Delta x_k \cdot \Delta y_k,$$

որտեղ $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$; $y_k = \sqrt{2Rx_k - x_k^2}$; $\Delta y_k = |y_{k+1} - y_k|$:

Դիցուք α_k ; ($0 < \alpha_k < 1$)-ն այնպիսին է, որ.

$$S_k = 2y_k \cdot \Delta x_k + \alpha_k \cdot 2 \cdot \Delta x_k \cdot \Delta y_k: \quad (1.2.8)$$

Նշանակելով հեղուկի ճնշման ուժը k -րդ մասում F_k -ով, համաձայն Արքիմեդի և Պասկալի օրենքների, կունենանք՝

$$\gamma \cdot x_k \cdot g \cdot S_k < F_k < \gamma \cdot x_k \cdot g \cdot S_k, \quad (1.2.9)$$

որտեղից՝

$$F_k = \gamma \cdot x_k \cdot g \cdot S_k + \beta_k \cdot \Delta x_k \cdot \gamma \cdot g \cdot S_k; \quad (0 < \beta_k < 1):$$

Օգտվելով (1.2.8), (1.2.9) առնչություններից՝ սկավառակի վրա հեղուկի ճնշման F ուժի համար կստանանք՝

$$F = \sum_{k=0}^{n-1} F_k = 2\gamma g \sum_{k=0}^{n-1} x_k \sqrt{2Rx_k - x_k^2} \cdot \Delta x_k + \varepsilon, \quad (1.2.10)$$

որտեղ՝

$$\varepsilon = 2\gamma g \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x_k \cdot \Delta x_k \cdot \Delta y_k + \gamma g \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k S_k \cdot \Delta x_k:$$

Նկատելով, որ.

$$\lim_{\max(\Delta x_k) \rightarrow 0} \varepsilon = 0,$$

և (1.2.10) հավասարության մեջ անցնելով սահմանի՝ կգտնենք՝

$$\begin{aligned} F &= 2\gamma g \int_0^{2R} x \sqrt{2Rx - x^2} dx = \\ &= 2\gamma g \int_0^{2R} (x - R + R) \sqrt{R^2 - R^2 + 2Rx - x^2} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\gamma g \int_0^{2R} (x-R)\sqrt{R^2-(x-R)^2} dx + \\
&+ 2R\gamma g \int_0^{2R} \sqrt{R^2-(x-R)^2} dx = I_1 + I_2:
\end{aligned}$$

որտեղ՝

$$I_1 = 2\gamma g \int_0^{2R} (x-R)\sqrt{R^2-(x-R)^2} dx;$$

$$I_2 = 2R\gamma g \int_0^{2R} \sqrt{R^2-(x-R)^2} dx:$$

Հաշվենք վերոգրյալ՝ I_1 և I_2 որոշյալ ինտեգրալները, այսինքն՝

$$\begin{aligned}
I_1 &= 2\gamma g \int_0^{2R} (x-R)\sqrt{R^2-(x-R)^2} dx = \\
&= -\frac{2\gamma g}{3} [R^2-(x-R)^2]^{\frac{3}{2}} \Big|_{x=0}^{x=2R} = 0:
\end{aligned}$$

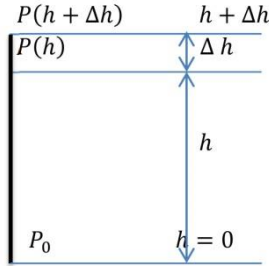
$$\begin{aligned}
I_2 &= 2R\gamma g \int_0^{2R} \sqrt{R^2-(x-R)^2} dx = 2R^3\gamma g \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \\
&= R^3\gamma g \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \pi R^3\gamma g:
\end{aligned}$$

Հետևաբար վերջնականապես կստանանք՝ $F = \pi R^3\gamma g$:

Խնդիր 1.2.3. Հաշվել օդի ճնշման կախվածությունը երկրի մակերևույթից ունեցած բարձրությունից:

Լուծում

Ենթադրենք օդի ջերմաստիճանը՝ T -ն, անկախ է բարձրությունից, իսկ ճնշումը՝ որպես բարձրության ֆունկցիա, անընդհատ է:



Նկ. 2.3

Դիտարկենք օղի մի ուղղաձիգ սյուն:

Դիցուք երկրի մակերևույթի մոտ, որտեղ $h = 0$, ճնշումը հավասար է P_0 -ի և h բարձրության վրա $P(h)$ -ի (Նկ. 2.3):

Բարձրությունը Δh -ով փոխելիս ճնշումը կփոխվի

$$h P(h) - P(h + \Delta h) = \Delta P\text{-ով:}$$

Համաձայն Պասկալի օրենքի՝ օղի ճնշումը ցանկացած բարձրության վրա հավասար է այդ բարձրությամբ և P_0 $h = 0$ 1 սմ² հիմքի մակերեսով օղի ուղղաձիգ սյան կշռին.

Կունենանք՝

$$\begin{aligned} \Delta P &= P(h) - P(h + \Delta h) = \\ &= \rho g h - \rho g(h + \Delta h) = -\rho g \Delta h, \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

որտեղ ρ -ն օղի խտությունն է (միավոր ծավալի զանգվածը) և g -ն՝ ծանրության ուժի արագացումը:

Ինչպես հայտնի է կլինետիկ տեսությունից, գազի ρ խտությունը հավասար է մոլեկուլի m զանգվածի և միավոր ծավալում մոլեկուլների n -թվի արտադրյալին՝

$$\rho = m \cdot n = m \cdot \frac{P(\bar{h})}{k \cdot T}, \quad (1.2.12)$$

որտեղ k -ն Բոլցմանի հաստատունն է, իսկ $\bar{h} \in [h; h + \Delta h]$:

Հաշվի առնելով (1.2.11) ու (1.2.12) արտահայտությունները՝ կստանանք՝

$$\frac{\Delta P}{\Delta h} - \frac{mg}{k \cdot T} P(\bar{h}): \quad (1.2.13)$$

Օգտվելով $P(\bar{h})$ - ֆունկցիայի անընդհատությունից և նկատի ունենալով (1.2.13)-ը՝ կստանանք, որ գոյություն ունի հետևյալ սահմանը.

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta h} = \frac{mg}{k \cdot T} \lim_{\Delta h \rightarrow 0} P(\bar{h}) = \frac{mg}{k \cdot T} P(h),$$

կամ, որ նույնն է՝

$$P'(h) = -\frac{mg}{k \cdot T} P(h):$$

Փոփոխականների անջատումից հետո վերջին հավասարությունը կգրվի հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{dP}{P} = -\frac{mg}{k \cdot T},$$

որտեղից կստանանք՝ $\int_{P_0}^{P(h)} \frac{dP}{P} = -\int_0^h \frac{mg}{k \cdot T} dh$,
 հետևաբար՝

$$\ln \frac{P(h)}{P_0} = -\frac{mg}{k \cdot T} h; \Rightarrow P(h) = P_0 e^{-\frac{mg}{k \cdot T} h}: \quad (1.2.14)$$

Սահմանում 7. Բարձրության մեծացման հետ ճնշման նվազման օրենքը սահմանող (1.2.14) բանաձևը կոչվում է բարոմետրական հավասարում:

Խնդիր 1.2.4. Հաշվել ժամանակի t պահին ռադիոակտիվ տարրի չտրոհված ատոմների քանակը, եթե ժամանակի սկզբնական պահին ($t = 0$) այն N_0 է:

Լուծում

Ժամանակի t պահին ռադիոակտիվ տարրի չտրոհված ատոմների քանակը նշանակենք $N(t)$ -ով: Այդ դեպքում ժամանակի Δt պահին չտրոհված ատոմների քանակը կլինի $N(t + \Delta t)$, հետևաբար՝

$$\Delta N = N(t) - N(t + \Delta t)$$

տարբերությունը ցույց է տալիս Δt ժամանակի ընթացքում պահված ատոմների քանակը:

Մահմանում 8. Համաձայն ռադիոակտիվ տրոհման հիմնական օրենքի՝ միավոր ժամանակում տրոհված ատոմների քանակի հարաբերությունն ատոմների ընդհանուր քանակին հաստատուն մեծություն է տվյալ ռադիոակտիվ տարրի համար, որը կոչվում է տրոհման հավանականություն և նշանակվում է ω տառով:

Այստեղ ենթադրվում է, որ տրոհված ատոմների քանակը կազմում է ատոմների քանակի չնչին մասը, որի համար կստանանք՝

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta t \cdot N(t)} = -\omega,$$

որտեղից՝

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = -\omega:$$

Ինտեգրելով վերջին հավասարությունը $[0; t]$ հատվածում՝ կունենանք՝

$$\int_0^t \frac{N'(t)}{N(t)} dt = -\omega \int_0^t dt:$$

Այսինքն՝

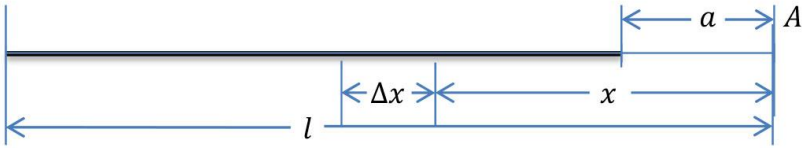
$$\ln \frac{N(t)}{N_0} = -\omega t; \quad N_0 = N(0),$$

և ուրեմն կստանանք ռադիոակտիվ տարրի չտրոհված ատոմների քանակը՝ $N(t)$ -ն որոշող բանաձևը՝ կախված t ժամանակից՝

$$N(t) = N_0 e^{-\omega t}: \quad (1.2.15)$$

Խնդիր 1.2.5. Դիցուք l երկարությամբ բարակ ձողի աջ ծայրից a հեռավորության վրա տեղավորված է մեկ A կետ՝ M զանգվածով, և ձողի զծային խտությունն է ρ -ն: Որոշել. ինչ c կետում տեղավորել ամբողջ ձողի զանգվածը, որ առաջացած

կետային զանգվածները ձգեն միմյանց նույն ուժով, ինչ ուժով ձգում են ձողին ու A կետը:



Նկ. 2.4

Լուծում

Ձողի մի կտոր, որի աջ ծայրը գտնվում է A կետից x հեռավորության վրա, իսկ ձախ ծայրը՝ $x + \Delta x$ հեռավորության վրա, կունենա $\rho \Delta x$ զանգված և կձգի A կետին մոտավորապես՝

$$k\rho \frac{M\Delta x}{x^2}$$

ուժով, որտեղ k -ն տիեզերական ձգողական ուժի հաստատունն է:

Հետևաբար ամբողջ ուժը, որով ձգում է A կետին, կլինի՝

$$F = k\rho M \int_a^{a+l} \frac{dx}{x^2} = k \frac{M\rho l}{a(a+l)}:$$

Նկատի ունենալով, որ $\rho l = m$ կլինի ձողի զանգվածը, կունենանք՝

$$F = k \frac{Mm}{a(a+l)}:$$

Նշանակելով x_c -ով A -ից ունեցած հեռավորությունն այն c կետից, ուր տեղավորված է ձողի ամբողջ զանգվածը, կստանանք՝

$$k \frac{Mm}{a(a+l)} = k \frac{Mm}{x_c^2},$$

և հետևաբար $x_c = \sqrt{a(a+l)}$:

§ 1.3. Կորագիծ ինտեգրալներին բերվող խնդիրներ

Դիցուք xoy հարթության վրա գտնվող $(L) = (AB)$ անընդ-
հատ և ուղղելի կորի վրա որոշված է $u = f(x, y)$ սահմանա-
փակ ֆունկցիան: (AB) կորը $A_k(x_k; y_k)$ կամայական կետերով
տրոհենք մասերի, յուրաքանչյուր $(A_k A_{k+1})$ աղեղի վրա վերց-
նենք $M_k(\xi_k; \eta_k)$ կամայական կետ և դիտարկենք հետևյալ
ինտեգրալային գումարները՝

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(M_k) \Delta S_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k; \eta_k) \Delta S_k, \quad (1.3.1)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(M_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k; \eta_k) \Delta x_k, \quad (1.3.2)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(M_k) \Delta y_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k; \eta_k) \Delta y_k, \quad (1.3.3)$$

որտեղ ΔS_k -ն $(A_k A_{k+1})$ աղեղի երկարությունն է, իսկ

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k \text{ և } \Delta y_k = y_{k+1} - y_k; (k = 0; 1; \dots; n-1)$$

նույն աղեղի պրոյեկցիաներն են ox ու oy առանցքների վրա:

Սահմանում 9. Եթե, երբ.

$$\lambda = \max_{0 \leq k \leq n} (\Delta S_k) \rightarrow 0$$

և (1.2.16), (1.2.17), (1.2.18) ինտեգրալային գումարներից
յուրաքանչյուրը ձգտում է վերջավոր սահմանի՝ անկախ (AB)
կորը տրոհելու ու M_k կետերը ընտրելու եղանակից, ապա այդ
սահմաններն անվանում ենք $f(M) = f(x, y)$ ֆունկցիայի
կորագիծ ինտեգրալներ տարված $(L) = (AB)$ կորով, և
նշանակում են հետևյալ կերպ՝

$$\int_{(L)} f(M) ds = \int_{(L)} f(x, y) ds, \quad (1.3.4)$$

$$\int_{(L)} f(M) dx = \int_{(L)} f(x, y) dx, \quad (1.3.5)$$

$$\int_{(L)} f(M) dy = \int_{(L)} f(x, y) dy: \quad (1.3.6)$$

(1.3.4) ինտեգրալն անվանում են առաջին տիպի կորագիծ ինտեգրալ, իսկ (1.3.5) ու (1.3.6) ինտեգրալները՝ երկրորդ տիպի, առաջինը՝ ըստ x -ի, իսկ երկրորդը՝ ըստ y -ի:

Տարածական կորի դեպքում նման եղանակով սահմանվում են հետևյալ կորագիծ ինտեգրալները՝

$$\begin{aligned} & \int_{(L)} f(x, y, z) ds; \int_{(L)} P(x, y, z) dx; \int_{(L)} Q(x, y) dy; \int_{(L)} R(x, y) dz, \\ & \int_{(L)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ & \equiv \int_{(L)} P dx + \int_{(L)} Q dy + \int_{(L)} R dz: \end{aligned}$$

ա) Առաջին և երկրորդ տիպի կորագիծ ինտեգրալները կապված են հետևյալ բանաձևերով՝

$$\int_{(L)} f(M) dx = \int_{(L)} f(M) \cos \alpha ds, \quad (1.3.7)$$

$$\int_{(L)} f(M) dy = \int_{(L)} f(M) \cos \beta ds, \quad (1.3.8)$$

$$\int_{(L)} f(M) dz = \int_{(L)} f(M) \cos \gamma ds, \quad (1.3.9)$$

$$\int_{(L)} P(M) dx + Q(M) dy + R(M) dz =$$

$$\equiv \int_{(L)} [P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma] ds, \quad (1.3.10)$$

որտեղ α, β, γ անկյունները $M \in (L)$ կետով տարված շոշափողի կազմած անկյուններն են ox, oy, oz առանցքների դրական ուղղությունների հետ:

Հարթ կորի դեպքում՝ $\gamma = 90^\circ$:

բ) Կորագիծ ինտեգրալները հաշվվում են հետևյալ բանաձևերով:

Եթե (L) կորը տրված է պարամետրական հավասարումներով՝

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (1.3.11)$$

ընդ որում՝ M կետը գծում է $(\widetilde{AB})$ աղեղը, երբ t -ն փոփոխվում է $\alpha \leq t \leq \beta$ միջակայքում, և գոյություն ունեն $\varphi'(t); \psi'(t)$ անընդհատ ածանցյալներ, ապա (L) -ի վրա որոշված $\forall$ անընդհատ $f(x, y)$ ֆունկցիայի համար.

$$\int_{(L)} f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t); \psi(t)] \cdot \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt, \quad (1.3.12)$$

$$\begin{cases} \int_{(L)} f(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t); \psi(t)] \cdot \varphi'(t) dt \\ \int_{(L)} f(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t); \psi(t)] \cdot \psi'(t) dt \end{cases} : \quad (1.3.13)$$

Օգտվենք կորագիծ ինտեգրալների հետևյալ **հատկությունից** (IN^*). Եթե E միակապ տիրույթում որոշված $P(x, y)$ և

$Q(x, y)$ ֆունկցիաները անընդհատ են $\frac{\partial P}{\partial y}$ և $\frac{\partial Q}{\partial x}$ մասնական ածանցյալների հետ միասին, ապա ներքոգրյալ չորս պայմաններից յուրաքանչյուրի առկայության դեպքում բավարարվում են նաև մյուսները՝

$$\text{ա) } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}:$$

$$\text{բ) } \int_{(L)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

կորագիծ ինտեգրալը կախված է A, B կետերի դիրքից և կախված չէ ինտեգրման ճանապարհի ձևից:

գ) E միակապ տիրույթում գտնվող ամեն մի (L) փակ կորով տարածված է՝

$$\int_{(L)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0:$$

դ) $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ արտահայտությունը ինչ-որ $U(x, y)$ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալ է՝ $dU = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$, այսինքն՝

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y); \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y):$$

Հետևաբար՝

$$\int_{(L)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = U(B) - U(A):$$

Խնդիր 1.3.1. Ենթադրենք հարթության վրա գտնվող ուղղելի և անընդհատ (L) կորի երկայնքով $\rho(x, y)$ գծային խտությամբ բաշխված է որոշակի զանգված:

Հաշվել՝

1. (L) կորով բաշխված զանգվածը:
2. (L) կորի ստատիկ և իներցիայի մոմենտները կորորդինատային առանցքների նկատմամբ:
3. (L) կորի ծանրության կենտրոնի կորորդինատները:

Լուծում

Նախ հիշատակենք ներքոհիշյալ սահմանումները:

Սահմանում 10. P նյութական կետի k -րդ կարգի մոմենտ տրված հարթության, ուղղի կամ կետի նկատմամբ կոչվում է $m \cdot D^k$ արտադրյալը, որտեղ m -ը P նյութական կետում կենտրոնացված զանգվածն է, իսկ D -ն P կետի հեռավորությունն է նշված հարթությունից, ուղղից կամ կետից:

Նյութական կետերի համակարգի k -րդ կարգի մոմենտ սահմանվում է որպես համակարգի բոլոր կետերի համապատասխան մոմենտների գումար՝

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot D_i^k:$$

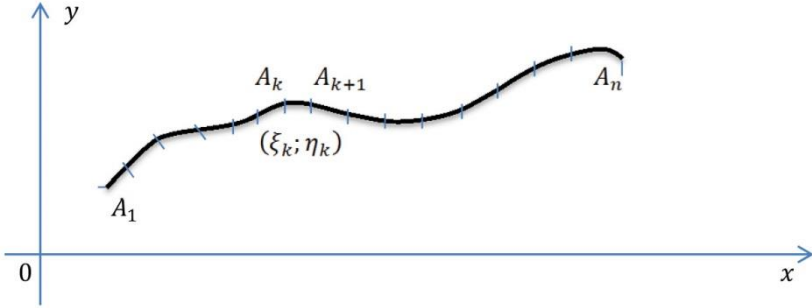
Սահմանում 11. Առաջին կարգի ($k = 1$) մոմենտը կոչվում է ստատիկ մոմենտ՝

$$M_{un} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot D_i,$$

երկրորդ կարգինը՝ ($k = 2$), իներցիայի մոմենտ՝

$$M_{\text{իւ}} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot D_i^2:$$

Խնդիր 1.3.1-ը լուծելու համար (L) կորը A_k ($k = 1; 2; \dots; n$) $\forall$ կետերով տրոհենք մասերի, յուրաքանչյուր ($A_k \widetilde{A}_{k+1}$) աղեղի վրա վերցնենք $\forall (\xi_k; \eta_k)$ կետ, և տրված աղեղով բաշխված զանգվածը շատ քիչ կտարբերվի $\rho(\xi_k; \eta_k) \Delta S_k$ -ից (Նկ. 3.1),



Նկ. 3.1

որտեղ ΔS_k -ն (A_k, A_{k+1}) աղեղի երկարությունն է, հետևաբար (L) կորով բաշխված

$$m = \sum_{k=1}^n \Delta m_k$$

զանգվածը քիչ կտարբերվի՝

$$\sum_{k=1}^n \rho(\xi_k; \eta_k) \Delta S_k$$

գումարից, և զանգվածի ճշգրիտ արժեքը կստացվի, եթե անցնենք սահմանի, երբ.

$$\max_k (\Delta S_k) \rightarrow 0:$$

Այսինքն՝

$$m = \lim_{\max_k (\Delta S_k) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \rho(\xi_k; \eta_k) \Delta S_k = \int_{(L)} \rho(x, y) dS: \quad (1.3.14)$$

Կոորդինատական առանցքների նկատմամբ ստատիկ և իներցիայի մոմենտները հաշվելու համար (A_k, A_{k+1}) -ով բաշխված զանգվածը կենտրոնացնենք տվյալ աղեղի որևէ $(\xi_k; \eta_k)$ կետում և գտնենք այդ մոմենտների $M_x; M_y; J_x; J_y$ մոտավոր արժեքները՝

$$\sum_{i=1}^n \rho(\xi_k; \eta_k) \xi_i^k \Delta S_k; \sum_{i=1}^n \rho(\xi_k; \eta_k) \eta_i^k \Delta S_k; (k = 1; 2):$$

Ստատիկ աւ իներցիայի մոմենտների ճշգրիտ արժեքները կատարվեն, եթե անցնենք սահմանի, երբ.

$$\lambda = \max_k(\Delta S_k) \rightarrow 0,$$

այսինքն՝

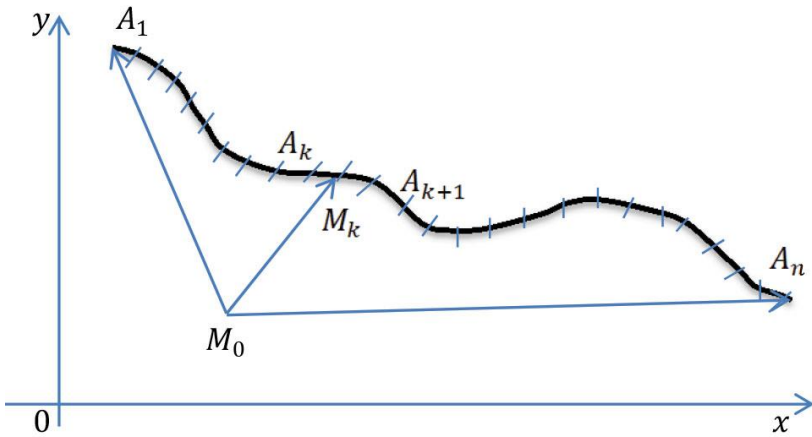
$$\begin{cases} M_x = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i; \eta_i) \eta_i \Delta S_i = \int_{(L)} \rho(x, y) y dS, \\ M_y = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i; \eta_i) \xi_i \Delta S_i = \int_{(L)} \rho(x, y) x dS, \end{cases} \quad (1.3.15)$$

$$\begin{cases} J_x = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i; \eta_i) \eta_i^2 \Delta S_i = \int_{(L)} \rho(x, y) y^2 dS, \\ J_y = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i; \eta_i) \xi_i^2 \Delta S_i = \int_{(L)} \rho(x, y) x^2 dS: \end{cases} \quad (3.16)$$

Ծանրության կենտրոնը՝ $C(x_c; y_c)$ -ն, հայտնի է, որ սահմանվում է հետևյալ կերպ, եթե պատկերացնենք, որ տրված (L) կորով բաշխված m զանգվածը կենտրոնացված է այդ C կետում, ապա նրա ստատիկ մոմենտները $m \cdot x_c$ և $m \cdot y_c$ առանցքների նկատմամբ հավասար կլինեն (L) նյութական կորի համապատասխան ստատիկ մոմենտներին M_x ; M_y , հետևաբար՝

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_{(L)} \rho(x, y) x dS}{\int_{(L)} \rho(x, y) dS}; \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_{(L)} \rho(x, y) y dS}{\int_{(L)} \rho(x, y) dS}: \quad (1.3.17)$$

Խնդիր 1.3.2. Հաշվել հարթության վրա գտնվող ուղղելի և անընդհատ (L) կորի երկայնքով, $\rho(x, y)$ զծային խտությամբ բաշխված զանգվածի (նյութական կորի) ձգողական ուժը հարթության մեջ գտնվող m_0 զանգվածով M_0 նյութական կետի վրա (Նկ. 3.2):



Նկ. 3.2

Լուծում

Ցանկացած $A_k (k = 1; 2; \dots; n)$ կետերով (L) կորը տրոհենք մասերի, ապա յուրաքանչյուր $A_k \overline{A_{k+1}}$ աղեղի վրա վերցնենք $\forall M_k (\xi_k; \eta_k)$ կետ և պատկերացնենք, որ $A_k \overline{A_{k+1}}$ աղեղով բաշխված է m_k զանգվածը, որը մոտավորապես հավասար է $\rho(M_k) \Delta S_k$ -ին կենտրոնացված M_k կետում, իսկ ΔS_k -ն $A_k \overline{A_{k+1}}$ աղեղի երկարությունն է:

Յուրաքանչյուր M_k նյութական կետ M_0 նյութական կետին ձգում է նյութոնյան $\overline{F_k}$ ուժով՝

$$\overline{F_k} = \gamma \frac{m_0 m_k}{|M_0 M_k|^2} \cdot \frac{\overline{M_0 M_k}}{|M_0 M_k|},$$

որի պրոյեկցիաները առանցքների վրա կլինեն՝

$$F_{xk} = \gamma \frac{m_0 m_k}{r_k^2} \cdot \cos \theta_k; \quad F_{yk} = \gamma \frac{m_0 m_k}{r_k^2} \cdot \sin \theta_k,$$

որտեղ $r_k = |M_0 M_k|$ և θ_k -ն $\overline{M_0 M_k}$ վեկտորի կազմած անկյունն է ox առանցքի հետ:

(L) նյութական կորի ձգողական $\vec{F}$ ուժը M_0 նյութական կետի վրա մոտավորապես հավասար կլինի՝

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k:$$

Հետևաբար նյութոնյան $\vec{F}$ ուժի F_{xk} ; F_{yk} պրոյեկցիաները համապատասխանաբար ox և oy առանցքների վրա մոտավորապես հավասար են

$$\gamma m_0 \sum_{k=1}^n \frac{\rho(\xi_k; \eta_k) \Delta S_k}{r_k^2} \cos \theta_k; \gamma m_0 \sum_{k=1}^n \frac{\rho(\xi_k; \eta_k) \Delta S_k}{r_k^2} \sin \theta_k:$$

Նյութոնյան $\vec{F}$ ուժի ճշգրիտ արժեքները կստացվեն, եթե անցնենք սահմանի, երբ

$$\lambda = \max_k(\Delta S_k) \rightarrow 0,$$

այսինքն՝

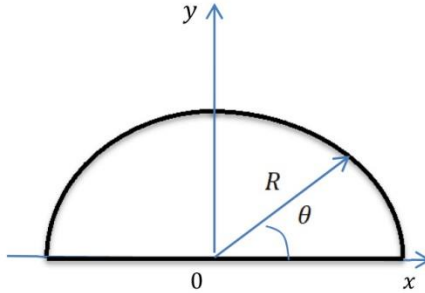
$$\begin{cases} F_x = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \gamma m_0 \sum_{k=1}^n \frac{\rho(\xi_k; \eta_k) \Delta S_k}{r_k^2} \cos \theta_k = \gamma m_0 \int_{(L)} \frac{\rho(x, y)}{r^2} \cos \theta dS \\ F_y = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \gamma m_0 \sum_{k=1}^n \frac{\rho(\xi_k; \eta_k) \Delta S_k}{r_k^2} \sin \theta_k = \gamma m_0 \int_{(L)} \frac{\rho(x, y)}{r^2} \sin \theta dS \end{cases} : (1.3.18)$$

Դիտարկենք հետևյալ օրինակները:

Օրինակ 1. Գտնել R շառավիղով համասեռ ($\rho = 1$) կիսաշրջանագծի ձգողական ուժը կենտրոնում տեղադրված միավոր զանգվածի վրա:

Լուծում

Կոորդինատական սկզբնակետը համարենք կիսաշրջանի կենտրոնը, իսկ առանցքներն ուղղենք այնպես, ինչպես ցույց է տրված Նկար 3.3-ում:



Նկ. 3.3

Միմետրիկության պատճառով ձգողական $\vec{F}$ ուժի F_x պրոյեկցիան հավասար է 0-ի:

Ըստ 3.18 բանաձևի՝

$$\text{Նկ. 3.3 } F_y = \int_{(L)} \frac{\sin \theta}{R^2} dS = \int_0^\pi \frac{R \sin \theta}{R^2} d\theta = \frac{2}{R}:$$

Օրինակ 2. Դիտարկենք նույն օրինակը, երբ $\rho = \cos A\theta$: Այդ դեպքում կունենանք՝

$$\begin{aligned} F_y &= \int_{(L)} \frac{\sin \theta}{R^2} dS = \int_0^\pi \frac{R \cos A\theta \sin \theta}{R^2} d\theta = \\ &= \frac{1}{2R} \int_0^\pi [\sin(1+A)\theta + \sin(1-A)\theta] d\theta = \\ &= \frac{1}{2R} \left[\frac{\cos(1+A)\theta}{(1+A)} + \frac{\cos(1-A)\theta}{(1-A)} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = \\ &= \frac{1}{2R} \left[\frac{1 - \cos(1+A)\theta}{(1+A)} + \frac{1 - \cos(1-A)\theta}{(1-A)} \right]: \end{aligned}$$

Օրինակ 3. Դիտարկենք նույն օրինակը, երբ $\rho = e^{B\theta} \cos A\theta$: Այդ դեպքում ձգողական $\vec{F}$ ուժի F_y պրոյեկցիան կորոշվի հետևյալ կերպ՝

$$\begin{aligned}
F_y &= \int \frac{e^{B\theta} \cos A\theta \sin \theta}{R^2_{(L)}} dS = \int_0^\pi \frac{Re^{B\theta} \cos A\theta \sin \theta}{R^2} d\theta = \\
&= \frac{1}{2R} \int_0^\pi e^{B\theta} [\sin(1+A)\theta + \sin(1-A)\theta] d\theta = \\
&= \frac{1}{2R} \left[\int_0^\pi e^{B\theta} \sin(1+A)\theta d\theta + \int_0^\pi e^{B\theta} \sin(1-A)\theta d\theta \right] = \\
&= \frac{1}{2R} (F_{y1} + F_{y2}),
\end{aligned}$$

որտեղ՝

$$\begin{aligned}
F_{y1} &= \int_0^\pi e^{B\theta} \sin(1+A)\theta d\theta = \frac{1}{B} \int_0^\pi \sin(1+A)\theta de^{B\theta} = \\
&= \left[\frac{1}{B} e^{B\theta} \sin(1+A)\theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} - \\
&- \frac{1+A}{B} \int_0^\pi e^{B\theta} \cos(1+A)\theta d\theta = \frac{e^{B\pi} \sin(1+A)\pi}{B} - \\
&- \left[\frac{e^{B\theta} (1+A) \cos(1+A)\theta}{B^2} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} - \left(\frac{1+A}{B} \right)^2 F_{y1},
\end{aligned}$$

այսինքն՝

$$F_{y1} = \frac{e^{B\pi} [B \sin(1+A)\pi - (1+A) \cos(1+A)\pi] - 1}{B^2 + (1+A)^2},$$

անալոգ սկզբունքով կստանանք՝

$$F_{y2} = \frac{e^{B\pi} [B \sin(1-A)\pi - (1-A) \cos(1-A)\pi] - 1}{B^2 + (1-A)^2}.$$

Հետևաբար՝

$$\begin{aligned}
F_y &= \frac{e^{B\pi} [B \sin(1+A)\pi - (1+A) \cos(1+A)\pi] - 1}{B^2 + (1+A)^2} + \\
&+ \frac{e^{B\pi} [B \sin(1-A)\pi - (1-A) \cos(1-A)\pi] - 1}{B^2 + (1-A)^2};
\end{aligned}$$

Օրինակ 4. Դիտարկենք նույն օրինակը, երբ $\rho = \delta^{C\theta} \cos A\theta \cos B\theta$: Այդ դեպքում կունենանք՝

$$\begin{aligned}
 F_y &= \int \frac{\delta^{C\theta} \cos A\theta \cos B\theta \sin \theta}{R_{(L)}^2} dS = \int_0^\pi \frac{R \delta^{C\theta} \cos A\theta \cos B\theta \sin \theta}{R^2} d\theta = \\
 &= \frac{1}{2R} \int_0^\pi e^{C\theta \ln \delta} \cos(A+B)\theta \sin \theta d\theta + \\
 &\quad + \int_0^\pi e^{C\theta \ln \delta} \cos(A-B)\theta \sin \theta d\theta = \\
 &= \frac{1}{2R} \int_0^\pi e^{C\theta \ln \delta} [\sin(1+A+B)\theta + \\
 &\quad + \sin(1-A-B)\theta + \sin(1+A-B)\theta + \sin(1-A+B)\theta] d\theta = \\
 &= F_y = F_{y1} + F_{y2} + F_{y3} + F_{y4},
 \end{aligned}$$

որտեղ՝

$$\begin{aligned}
 F_{y1} &= \frac{1}{2R} \int_0^\pi e^{C\theta \ln \delta} \sin(1+A+B)\theta d\theta = \\
 &= \frac{1}{2RC \ln \pi} \int_0^\pi \sin(1+A+B)\theta de^{C\theta \ln \pi} = \\
 &= \{\delta^{C\pi} [C \ln \pi \cdot \sin(1+A+B)\pi - (1+A+B) \cdot \cos(1+A+B)\pi] + \\
 &\quad + 1 + A + B\}^{-1} \cdot \{2R[(1+A+B)^2 + (C \ln \delta)^2]\}; \\
 F_{y2} &= \frac{1}{2R} \int_0^\pi e^{C\theta \ln \delta} \sin(1-A-B)\theta d\theta = \\
 &= \frac{1}{2RC \ln \pi} \int_0^\pi \sin(1-A-B)\theta de^{C\theta \ln \delta} = \\
 &= \{\delta^{C\pi} [C \ln \pi \cdot \sin(1-A-B)\pi - (1+A+B) \cdot \cos(1-A-B)\pi] + \\
 &\quad + 1 - A - B\}^{-1} \cdot \{2R[(1-A-B)^2 + (C \ln \delta)^2]\};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{y3} &= \frac{1}{2R} \int_0^\pi e^{C\theta \ln \delta} \sin(1 + A - B)\theta \, d\theta = \\
&= \frac{1}{2RC \ln \pi} \int_0^\pi \sin(1 + A - B)\theta \, de^{C\theta \ln \delta} = \\
&+ \{\delta^{C\pi} [C \ln \pi \cdot \sin(1 + A - B)\pi - (1 + A - B) \cdot \cos(1 + A + B)\pi] + \\
&\quad + 1 + A - B\}^{-1} \cdot \{2R[(1 + A - B)^2 + (C \ln \delta)^2]\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{y4} &= \frac{1}{2R} \int_0^\pi e^{C\theta \ln \delta} \sin(1 - A + B)\theta \, d\theta = \\
&= \frac{1}{2RC \ln \pi} \int_0^\pi \sin(1 - A + B)\theta \, de^{C\theta \ln \delta} = \\
&+ \{\delta^{C\pi} [C \ln \pi \cdot \sin(1 - A + B)\pi - (1 + A + B) \cdot \cos(1 - A + B)\pi] + \\
&\quad + 1 + A - B\}^{-1} \cdot \{2R[(1 - A + B)^2 + (C \ln \delta)^2]\};
\end{aligned}$$

Ենթադրենք, որ հարթության մեջ գտնվող յուրաքանչյուր $M(x; y)$ կետի վրա ազդում է որոշակի $\vec{F}$ նյութական ուժ՝ կախված միայն կետի դիրքից: Այդ դեպքում ասում են, որ հարթության վրա տրված է ուժային դաշտ՝ $\vec{F}(x; y)$ լարվածությամբ:

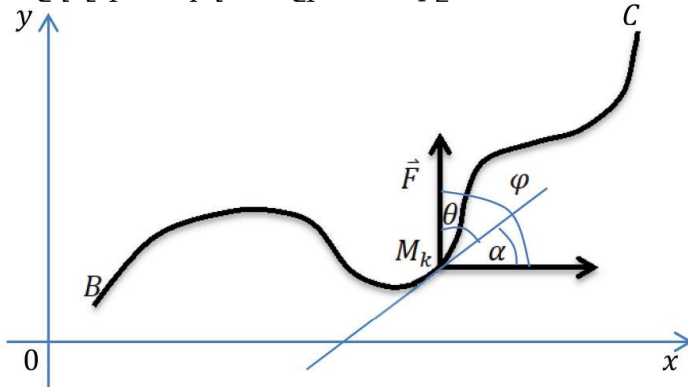
Եթե $\exists$ այնպիսի $U(x; y)$ ֆունկցիա, որը բոլոր կետերի համար բավարարում է հետևյալ՝

$$dU(x; y) = F_x(x; y)dx + F_y(x; y)dy \quad (1.3.19)$$

պայմանը, ապա դաշտը կոչվում է պոտենցյալ դաշտ, իսկ $U(x; y)$ -ը՝ պոտենցյալ:

Խնդիր 1.3.3. Դիցուք $\vec{F}(x; y)$ ուժային դաշտում $M(x; y)$ կետը B դիրքից տեղափոխվել է C դիրք (L) անընդհատ և ուղղելի կորով (ճանապարհով) (Նկ. 3.3):

Հաշվել կատարված աշխատանքը:



Նկ. 3.3

Լուծում

$(L) = (BC)$ կորը M_k կամայական կետերով տրոհենք մանր մասերի՝ $M_k \overline{M_{k+1}}$: Այդ աղեղները ընդունենք մոտավորապես ուղիղ հատվածներ

$$\Delta S_k = |M_k \overline{M_{k+1}}|$$

Երկարություններով: Ընդունենք, որ $\vec{F}$ ուժը յուրաքանչյուր $M_k \overline{M_{k+1}}$ աղեղի համար մնում է հաստատուն. պահպանում է աղեղի մի որևէ կետում, ասենք թե հենց M_k կետում ընդունած

$$\vec{F}(M_k) = \vec{F}(x_k; y_k)$$

արժեքը: Այդ դեպքում $M_k \overline{M_{k+1}}$ տեղամասի վրա ծախսված ΔA_k աշխատանքը հավասար է մոտավորապես՝

$$F(M_k) \Delta S_k \cos \theta_k - \text{ին,}$$

որտեղ θ_k -ն M_k կետում $\vec{F}$ վեկտորի և կորի շոշափողի կազմած անկյունն է: Հետևաբար M -կետը B դիրքից C դիրքը (L) տեղափոխելու վրա $\vec{F}$ ուժային դաշտի կատարած A աշխատանքը կորոշվի հետևյալ՝

$$A = \lim_{\max_k(\Delta S_k) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n F(M_k) \cos \theta_k \Delta S_k = \int_{(L)} F(M) \cos \theta dS \quad (1.3.20)$$

բանաձևով, որտեղ θ -ն փոփոխական M կետում $\vec{F}(M)$ ուժի և (L) կորի շոշափողի կազմած անկյունն է:

Եթե յուրաքանչյուր M կետում φ -ով և α -ով նշանակենք համապատասխանաբար $\vec{F}$ ուժի ու շոշափողի կազմած անկյուններն ox առանցքի հետ, կունենանք՝

$$\begin{aligned} F(x; y) \cos \theta &= F(x; y) \cos(\varphi - \alpha) = F(x; y) \cos \varphi \cos \alpha + \\ &+ F(x; y) \sin \varphi \sin \alpha = \\ &= F_x(x; y) \cos \alpha + F_y(x; y) \sin \alpha: \end{aligned} \quad (1.3.21)$$

Օգտվելով առաջին և երկրորդ ինտեգրալների կապից՝ կստանանք՝

$$A = \int_{(BC)} F_x(x; y) dx + F_y(x; y) dy: \quad (1.3.22)$$

Դիցուք $U(x; y)$ -ը՝ $\vec{F}$ ուժային դաշտի պոտենցյալը բավարարում է (1.3.19) պայմանը:

Օգտվելով կորագիծ ինտեգրալների հատկությունից՝ կստանանք, որ պոտենցյալ դաշտում M կետը B դիրքից C դիրքը տեղափոխելու վրա ծախսված աշխատանքը, անկախ տեղափոխման ճանապարհի ձևից, կախված է միայն սկզբնական ու վերջնական դիրքից և հավասար է պոտենցյալների տարբերությանը՝

$$A = U(C) - U(B)$$

Դիտարկվող խնդիրը պարզաբանենք հետևյալ օրինակով:

Օրինակ 4. Ենթադրենք կոորդինատների $O(0; 0)$ սկզբնակետում տեղադրված է q մեծությամբ լիցք: Ինչպես հայտնի է, այն իր շուրջն ստեղծում է էլեկտրական դաշտ, յուրաքանչյուր M կետում տեղադրված միավոր լիցքի վրա ազդում է Կուլոնյան ուժով՝

$$\vec{F} = k \frac{q}{r^2} \cdot \overrightarrow{OM},$$

որտեղ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ -ը M կետի հեռավորությունն է սկզբնակետից, k -ն հաստատուն մեծություն է:

Կատանանք ուժային դաշտ՝ $\vec{F}(M) = \vec{F}(x; y)$ լարվածությամբ, որի պրոյեկցիաները առանցքների վրա կլինեն՝

$$\begin{cases} F_x(x; y) = k \frac{q}{r^2} \cdot \cos \varphi = k \frac{q}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = k \frac{q}{r^3} x, \\ F_y(x; y) = k \frac{q}{r^2} \cdot \sin \varphi = k \frac{q}{r^2} \cdot \frac{y}{r} = k \frac{q}{r^3} y: \end{cases} \quad (1.3.23)$$

Նկատենք, որ $\vec{F}$ - Կուլոնյան դաշտը պոտենցյալ դաշտ է:

Իրոք, $U(x; y) = -qkr^{-1}$ ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ պայմանները՝

$$\frac{\partial U}{\partial x} = kq \frac{x}{r^3} = F_x(x; y); \quad \frac{\partial U}{\partial y} = kq \frac{y}{r^3} = F_y(x; y),$$

որտեղից հետևում է, որ.

$$DU(x; y) = F_x(x; y)dx + F_y(x; y)dy:$$

Հետևաբար միավոր լիցքը B դիրքից C դիրքը տեղափոխելու համար (Նկ. 3.3) դաշտի կատարած աշխատանքը կախված է սկզբնական և վերջնական դիրքից, այլ ոչ թե տեղափոխման ճանապարհից, այսինքն՝

$$A = U(C) - U(B) = \frac{qk}{r_B} - \frac{qk}{r_C}: \quad (1.3.24)$$

որտեղ r_B և r_C -ն B և C կետերի հեռավորություններն են սկզբնակետից:

Մասնավորապես, եթե (1.3.24) բանաձևում r_C ձգտի ∞ , կստանանք՝

$$A = \frac{qk}{r_B}, \quad (1.3.25)$$

Այսինքն՝ միավոր q լիցքը անվերջ հեռու կետից B կետը տեղափոխելու համար պետք է կատարել (1.3.25)-ով որոշվող աշխատանք:

Հաջորդ խնդիրը ձևակերպելու և իմաստը պարզելու համար հիշենք հետևյալ սահմանումը:

Սահմանում 11. Հեղուկի շարժումը անվանում են հարթ, եթե.

ա) հեղուկի յուրաքանչյուր մասնիկի արագությունը կախված է միայն իրեն դիրքից, անկախ է ժամանակից:

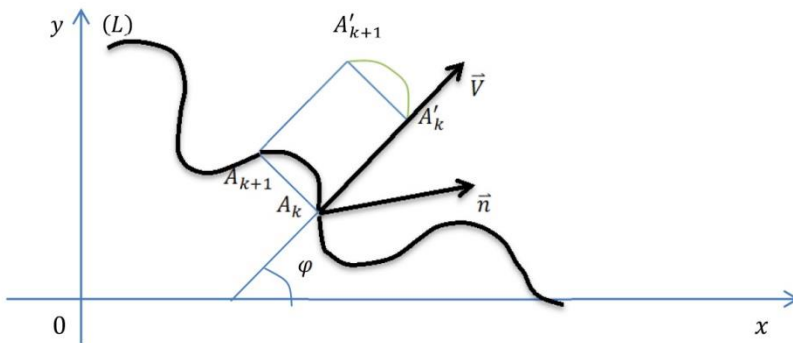
բ) գոյություն ունի այնպիսի α_0 հարթություն, որին ուղղահայաց միևնույն ուղղի վրա գտնվող բոլոր մասնիկները շարժվում են միևնույն արագությամբ:

Ակնհայտ է, որ հեղուկի հարթ շարժումն ուսումնասիրելիս բավական է դիտարկել միայն α_0 հարթության մեջ գտնվող բոլոր մասնիկների շարժումը:

Խնդիր 1.3.4. Հաշվել միավոր ժամանակում հարթության մեջ գտնվող անընդհատ և ուղղելի (L) կորով հոսած չտեղմվող հեղուկի քանակությունը, եթե մասնիկի արագությունը $\vec{V}(x; y)$ է:

Լուծում

Արագության վեկտորի պրոյեկցիաներն առանցքների վրա նշանակենք V_x և V_y , իսկ (L) նորմալի վրա V_n -ով, ինչպես տրված է Նկար 3.4-ում:



Նկ. 3.4

Արագության վեկտորի պրոյեկցիաները արտահայտվում են հետևյալ բանաձևով՝

$$V_x = V \cos \varphi ; V_y = V \sin \varphi , \quad (1.3.26)$$

որտեղ φ -ն $\vec{V}$ վեկտորի կազմած անկյունն է ox առանցքի հետ:

Պատկերացնենք, որ $A_k \overline{A_{k+1}}$ աղեղի յուրաքանչյուր կետում արագությունը նույնն է, ինչ A_k կետում: Քանի որ հեղուկը չսեղմվող է, միավոր ժամանակում $A_k \overline{A_{k+1}}$ աղեղով հոսած հեղուկի քանակությունը մոտավորապես հավասար է $A_k A'_k A'_{k+1} A_{k+1}$ զուգահեռագծի մակերեսին, որը քիչ է տարբերվում $V_n \Delta S_k$ -ից:

Հետևաբար միավոր ժամանակում (L) կորով հոսած չսեղմվող հեղուկի Q քանակը մոտավորապես հավասար է՝

$$\sum_{k=1}^n V_n \Delta S_k:$$

Այդ դեպքում Q -ն վերջապես կորոշվի հետևյալ կերպ՝

$$Q = \lim_{\max_k(\Delta S_k) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n V_n \Delta S_k = \int_{(L)} V_n(x; y) dS: \quad (1.3.27)$$

Նշանակելով α -ով յուրաքանչյուր $M \in (L)$ կետում $\vec{n}$ նորմալի ox առանցքի, β -ով $\vec{V}$ վեկտորի և $\vec{n}$ նորմալի հետ կազմած անկյուններն ու օգտվելով (1.3.26) ու (1.3.27) պայմաններից՝

$$\begin{aligned} Q &= \int_{(L)} V(x; y) \cos \beta dS = \\ &= \int_{(L)} [V(x; y) \cos \varphi \cos \alpha + V(x; y) \sin \varphi \sin \alpha] dS = \\ &= \int_{(L)} [V_x(x; y) \cos \alpha + V_y(x; y) \sin \alpha] dS: \end{aligned} \quad (1.3.28)$$

Ստացված առաջին տիպի կորագիծ ինտեգրալը բերենք երկրորդ տիպի կորագիծ ինտեգրալի՝ (L) կորի ընտրությունն

անելով այնպես, որ տրված շոշափողի դրական ուղղության և արդեն ընտրված նորմալի կազմած անկյունը լինի $\pi/2$:

$$Q = \int_{(L)} V_x(x; y) dx - V_y(x; y) dy: \quad (1.3.29)$$

Եթե (L) -ը կոնտուր է (փակ կոր է), ապա (L) կորի դրական ուղղության ընտրության դեպքում պետք է նորմալն ուղղված լինի այդ կորով առանձնացված տիրույթի ներսը: Այդ դեպքում (1.3.29) բանաձևը կորոշի հեղուկի այն քանակը, որը կհոսի (L) կոնտուրով սահմանափակված տիրույթի ներսը միավոր ժամանակում:

Կոնտուրով սահմանափակված տիրույթի ներսից արտահոսած հեղուկի քանակը հաշվելու համար պետք է (1.3.27) բանաձևում փոխել նշանը՝ վերցնելով նորմալի հակառակ ուղղությունը: Եթե արագությունների $\vec{V}$ դաշտում հեղուկի աղբյուրներ չկան, ապա (1.3.29) ինտեգրալի արժեքը կամայական կորով հավասար կլինի զրոյի, ինչքան ներհոսում է (L) կոնտուրով սահմանափակված տիրույթ, այնքան էլ արտահոսում է, այսինքն՝

$$Q = \int_{(L)} V_x(x; y) dx - V_y(x; y) dy = 0,$$

որտեղից, ըստ (IN^*) **հատկության**, կհետևի, որ $\vec{V}$ վեկտոր-ֆունկցիայի $V_x(x; y)$, $V_y(x; y)$ բաղադրիչները բավարարում են հետևյալ պայմանը՝

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} = 0,$$

որն իր հերթին կապահովի $\Phi(x; y)$ ֆունկցիայի գոյությունը՝

$$d\Phi(x; y) = V_x(x; y) dx - V_y(x; y) dy:$$

Դիտարկված դեպքում կամայական A և B կետերը միացնող (AB) կորով հոսած չսեղմվող հեղուկի քանակությունը

միավոր ժամանակում կախված չէ կորի ձևից և հավասար է $\Phi(x; y)$ հոսքի ֆունկցիայի արժեքների տարբերությանը՝

$$Q = \int_{(AB)} V_x(x; y) dx - V_y(x; y) dy = \Phi(B) - \Phi(A): \quad (1.3.30)$$

§ 1.4. Կրկնակի և եռակի ինտեգրալներ

Ենթադրենք xoy հարթությունում գտնվող քառակուսի (S) տիրույթում որոշված է $f(M) = f(x; y)$ սահմանափակ ֆունկցիան: (S) տիրույթը ողորկ կորերի՝ օգնությամբ կամայական եղանակով տրոհենք մանր մասերի՝ ΔS_k ($k = 1; 2; \dots; n$), այդ ΔS_k -ում վերցնենք $M_k(x_k; y_k)$ կետ և կազմենք հետևյալ ինտեգրալային գումարը՝

$$\sum_{k=1}^n f(x_k; y_k) |\Delta S_k|:$$

Սահմանում 12. Անկախ (S) տիրույթը տրոհելու և $M_k(x_k; y_k)$ կետերն ընտրելու եղանակից՝ եթե գոյություն ունի հետևյալ սահմանը՝

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k; y_k) |\Delta S_k|,$$

որտեղ λ -ն ΔS_k -երի առավելագույն տրամագիծն է, ապա $f(x; y)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է (S) տիրույթում, և ինտեգրալային գումարների սահմանն անվանում են այդ ֆունկցիայի կրկնակի ինտեգրալ տարածված (S): Այդ ինտեգրալը նշանակում են հետևյալ կերպ՝

$$\iint_{(S)} f(M) dS = \iint_{(S)} f(x; y) dx dy: \quad (1.4.1)$$

Անալոգ եղանակով սահմանվում է V տարածական խորանարդելի (V) տիրույթում որոշված $f(x; y; z)$ ֆունկցիայի եռակի ինտեգրալը՝

$$\iiint_{(V)} f(x; y; z) dx dy dz: \quad (1.4.2)$$

Լեմմա 1. Եթե $f(M)$ -ը անընդհատ ֆունկցիա է (S) տիրույթում $\{M \in (S)\}$, ապա (1.4.1) կրկնակի ինտեգրալը գոյություն ունի:

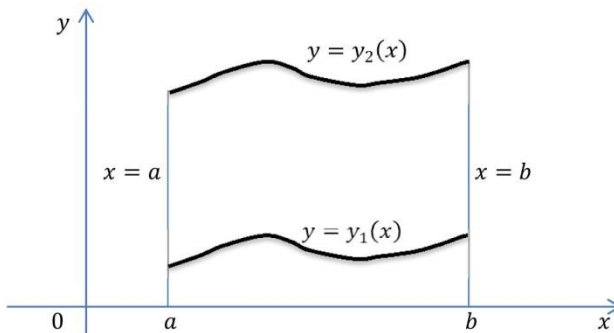
Լեմմա 2. Եթե $f(M)$ -ը անընդհատ ֆունկցիա է (V) տիրույթում $\{M \in (V)\}$, ապա (1.4.2) եռակի ինտեգրալը գոյություն ունի:

Կրկնակի ու եռակի ինտեգրալները հաշվվում են հետևյալ բանաձևերով:

1. ա. Եթե (S) -ը կորագիծ սեղանը

$$y = y_1(x); y = y_2(x); y_2(x) > y_1(x); x = a; x = b; x \in [a; b]$$

կորերով սահմանափակված տիրույթ է, իսկ $y_1(x)$ -ը և $y_2(x)$ -ը անընդհատ ֆունկցիաներ են (Նկ. 4.1), ապա՝



Նկ. 4.1

$$\iint_{(S)} f(x; y) dx dy, \quad \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x; y) dy, \quad \forall x \in [a, b]$$

ինտեգրալների գոյությունից հետևում է.

$$\int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x; y) dy \right] dx$$

ինտեգրալի գոյությունը՝

$$\iint_{(S)} f(x; y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x; y) dy \right] dx: \quad (1.4.3)$$

1. բ) Դիցուք տարածական խորանարդելի (V) տիրույթը սահմանափակված է $z = c$ և $z = d$, ինչպես նաև $\forall z = z_0$ զուգահեռ հարթություններով ($c \leq z_0 \leq d$), ընդ որում՝ այդ $z = z_0$ -ն հատում է P_{z_0} հարթ քառակուսելի տիրույթ, այդ դեպքում՝

$$\iiint_{(V)} f(x; y; z) dx dy dz = \int_c^d \left[\iint_{(P_{z_0})} f(x; y; z) dx dy \right] dz, \quad (1.4.4)$$

1.1.4 Բանաձևում ենթադրվում է եռակի ինտեգրալի և կամայական $z \in [c; d]$ -ի համար կրկնակի ինտեգրալների գոյությունը:

2. ա) Եթե (V) և (W) տարածական խորանարդելի տիրույթների միջև իրականացվում է փոխմիարժեք արտապատկերում հետևյալ՝

$$\begin{cases} x = x(\xi; \eta; \zeta), \\ y = y(\xi; \eta; \zeta), (\xi; \eta; \zeta) \in (W) \\ z = z(\xi; \eta; \zeta) \end{cases}$$

Ֆունկցիաներով, որոնք անընդհատ մասնակի ածանցյալներ ունեն, ապա (V)-ում որոշված $\forall f(x; y; z)$ անընդհատ ֆունկցիայի համար ճիշտ է

$$\begin{aligned} & \iiint_{(V)} f(x; y; z) dx dy dz = \\ &= \iiint_{(W)} f(x(\xi; \eta; \zeta); y(\xi; \eta; \zeta); z(\xi; \eta; \zeta)) \cdot |J_v| d\xi d\eta d\zeta, \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

որտեղ $J_v = J_v(\xi; \eta; \zeta)$ -Յակոբյանն է, այսինքն՝

$$J_v(\xi; \eta; \zeta) = \begin{vmatrix} x'_\xi & x'_\eta & x'_\zeta \\ y'_\xi & y'_\eta & y'_\zeta \\ z'_\xi & z'_\eta & z'_\zeta \end{vmatrix}: \quad (1.4.6)$$

3. ք) Փոփոխականի փոխարինման բանաձև է գործում նաև կրկնակի ինտեգրալի համար՝

$$\iint_{(S)} f(x; y) dx dy = \iint_{(\Delta)} f(x(\xi; \eta); y(\xi; \eta)) |J_\Delta| d\xi d\eta,$$

որտեղ (S) -ն ու (Δ) -ը քառակուսեղի տիրույթներ են, որոնց միջև $x(\xi; \eta), y(\xi; \eta)$ անընդհատ մասնակի ածանցյալներ ունեցող ֆունկցիաների օգնությամբ իրականացվում է փոխմիարժեք արտապատկերում, $f(x; y)$ -ը անընդհատ ֆունկցիա է (S) -ից, և $J_\Delta(\xi; \eta)$ -ն Յակոբյանն է՝

$$J_\Delta(\xi; \eta) = \begin{vmatrix} x'_\xi & x'_\eta \\ y'_\xi & y'_\eta \end{vmatrix} = x'_\xi \cdot y'_\eta - x'_\eta \cdot y'_\xi: \quad (1.4.7)$$

Դժվար չէ նկատել, որ 1.1.4 ու 1.4.6 բանաձևերին կարելի է տալ այնպիսի մեխանիկական մեկնաբանություն, ինչպիսին (1.1.3)-ին:

Դիցուք m զանգվածը $\rho(x; y)$ խտությամբ անընդհատ բաշխված է xoy հարթության մեջ գտնվող (S) տիրույթով: Այդ դեպքում պատկերի m զանգվածը կորոշվի այսպես՝

$$m = \iint_{(S)} \rho(x; y) dx dy, \quad (1.4.8)$$

և ստատիկ մոմենտները կորորդինատային առանցքների նկատմամբ կորոշվեն հետևյալ բանաձևերով՝

$$\begin{cases} M_x = \iint_{(S)} \rho(x; y) y dx dy, \\ M_y = \iint_{(S)} \rho(x; y) x dx dy, \end{cases} \quad (1.4.9)$$

ինտեգրալի մոմենտները կոորդինատային ox, oy առանցքների և $o(0; 0)$ սկզբնակետի նկատմամբ ներքոգրյալ ինտեգրալներով՝

$$\begin{cases} I_x = \iint_{(S)} \rho(x; y) y^2 dx dy, \\ I_y = \iint_{(S)} \rho(x; y) x^2 dx dy, \\ I_0 = I_x + I_y = \iint_{(S)} \rho(x; y) (x^2 + y^2) dx dy: \end{cases} \quad (1.4.10)$$

Եթե m զանգվածը $\rho(x; y)$ խտությամբ անընդհատ բաշխված է տարածական (V) -ում, ապա զանգվածն ու ստատիկ մոմենտները կոորդինատական հարթությունների նկատմամբ կորոշվեն հետևյալ բանաձևերով՝

$$m = \iiint_{(V)} \rho(x; y; z) dx dy dz, \quad (1.4.11)$$

$$\begin{cases} M_{xy} = \iiint_{(V)} \rho(x; y; z) z dx dy dz, \\ M_{yz} = \iiint_{(V)} \rho(x; y; z) x dx dy dz, \\ M_{xz} = \iiint_{(V)} \rho(x; y; z) y dx dy dz: \end{cases} \quad (1.4.12)$$

Ինտեգրալի մոմենտները կոորդինատային հարթությունների նկատմամբ կլինի՝

$$\begin{cases} I_{xy} = \iiint_{(V)} \rho(x; y; z) z^2 dx dy dz, \\ I_{yz} = \iiint_{(V)} \rho(x; y; z) x^2 dx dy dz, \\ I_{xz} = \iiint_{(V)} \rho(x; y; z) y^2 dx dy dz, \end{cases} \quad (1.4.13)$$

իսկ կոորդինատային առանցքների և սկզբնակետի նկատմամբ՝

$$\begin{cases} I_x = \iiint_{(V)} \rho(x; y; z) (y^2 + z^2) dx dy dz; \\ I_y = \iiint_{(V)} \rho(x; y; z) (x^2 + z^2) dx dy dz, \\ I_z = \iiint_{(V)} \rho(x; y; z) (y^2 + x^2) dx dy dz; \\ I_0 = \iiint_{(V)} \rho(x; y; z) (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz: \end{cases} \quad (1.4.14)$$

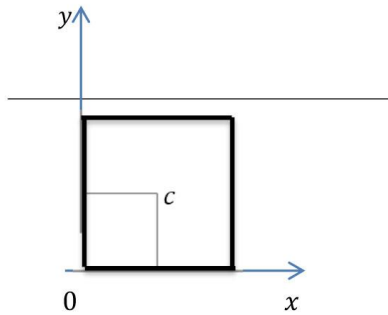
Ծանրության կենտրոնի կոորդինատների համար հարթ խնդրի դեպքում կլինի՝

$$x_c = \frac{M_y}{m}; \quad y_c = \frac{M_x}{m}, \quad (1.4.15)$$

իսկ տարածական խնդրի դեպքում կլինի՝

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}; \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m}; \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m}: \quad (1.4.16)$$

Խնդիր 4.1. Հաշվել a կողմ ունեցող քառակուսի թիթեղի զանգվածը, ստատիկ և իներցիայի մոմենտները, ծանրության կենտրոնը, եթե հայտնի է, որ յուրաքանչյուր կետում զանգվածի $\rho(x; y)$ խտությունը համեմատական է այդ կետի քառակուսու գագաթներից մեկից ունեցած հեռավորության քառակուսուն, ընդ որում՝ քառակուսու կենտրոնում խտությունը հավասար է 1-ի (Նկ. 4.2):



Նկ. 4.2

Լուծում

Կորորդինատների սկզբնակետը ընտրենք հենց այն գագաթում, որից ունեցած հեռավորության քառակուսուն համեմատական է խտությունը, և առանցքներն ուղղենք քառակուսու կողմերով:

Այդ դեպքում՝

$$\rho(x; y) = k \cdot (x^2 + y^2),$$

որտեղ k -ն համեմատականության գործակիցն է և կորոշվի Նկ. 4.2 հետևյալ պայմանով՝

$$1 = \rho\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right) = k \cdot \left(\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}\right) = k \cdot \frac{a^2}{2}; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{2}{a^2}: \text{ Հետևաբար } \rho(x; y) = \frac{2(x^2 + y^2)}{a^2}.$$

Համաձայն 4.8-4.10 բանաձևերի՝ կունենանք զանգվածի համար՝

$$m = \iint_{(S)} \rho(x; y) dx dy = \frac{2}{a^2} \int_0^a \left[\int_0^a (x^2 + y^2) dy \right] dx = \frac{4a^2}{3}, \quad (1.4.17)$$

ստատիկ մոմենտների համար՝

$$\begin{cases} M_x = \iint_{(S)} \rho(x; y) y dx dy = \frac{2}{a^2} \int_0^a \left[\int_0^a (x^2 + y^2) y dy \right] dx = \frac{5a^3}{6}, \\ M_y = \iint_{(S)} \rho(x; y) x dx dy = \frac{2}{a^2} \int_0^a \left[\int_0^a (x^2 + y^2) x dy \right] dx = \frac{5a^3}{6}, \end{cases} \quad (1.4.18)$$

ինտեգրիչի սումմաների համար՝

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_{(S)} \rho(x; y) y^2 dx dy = \frac{2}{a^2} \int_0^a \left[\int_0^a (x^2 + y^2) y^2 dy \right] dx = \frac{28a^4}{45}, \\ I_y &= \iint_{(S)} \rho(x; y) x^2 dx dy = \\ &= \frac{2}{a^2} \int_0^a \left[\int_0^a (x^2 + y^2) x^2 dy \right] dx = \frac{28a^4}{45}, \end{aligned} \quad (1.4.19)$$

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_{(S)} \rho(x; y) (x^2 + y^2) dx dy = \frac{56a^4}{45}.$$

Ծանրության կենտրոնի կոորդինատները կորոշենք (1.4.15)-ից, այսինքն՝

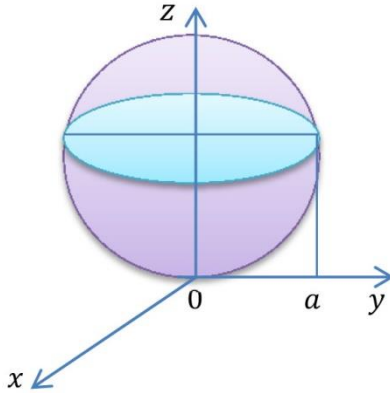
$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{5a^3}{6}}{\frac{4a^2}{3}} = \frac{5a}{8}; \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{5a^3}{6}}{\frac{4a^2}{3}} = \frac{5a}{8}.$$

Խնդիր 4.2. Գտնել $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$ գնդի ծանրության կենտրոնը, եթե ծավալային խտությունը $\rho(x; y; z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$:

Լուծում

Նախ գտնենք գնդի զանգվածը՝

$$\begin{aligned} m &= \iiint_{(V)} \rho(x; y; z) dx dy dz = \\ &= \iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} dx dy dz \end{aligned}$$



Նկ. 4.3

Համաձայն 4.4 բանաձևի, կունենանք՝

$$m = \int_0^{2a} \left[\iint_{P_z} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} dx dy \right] dz, \quad (14.20)$$

որտեղ P_z -ը $\sqrt{2az - z^2}$ շրջանն է: (1.4.20) ինտեգրալը հաշվելու համար անցնեք բևեռային կոորդինատների՝

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi; \\ y = r \sin \varphi; \end{cases} \quad (0 \leq r \leq \sqrt{2az - z^2}; \varphi \in [0; 2\pi]):$$

Հաշվի առնելով, որ Յակոբյանը $|J(r; \varphi)| = r$, ըստ 4.7 բանաձևի, կստանանք՝

$$\begin{aligned} Int(z) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2az - z^2}} \frac{r dr d\varphi}{\sqrt{r^2 + z^2}} = 2\pi \int_0^{\sqrt{2az - z^2}} \frac{r dr d\varphi}{\sqrt{r^2 + z^2}} \\ &= 2\pi(\sqrt{2az} - z): \end{aligned}$$

Այդ դեպքում, նկատի ունենալով $Int(z)$ ինտեգրալը, (1.4.20)-ից կունենանք՝

$$m = \int_0^{2\pi} Int(z) dz = 2\pi \int_0^{2\pi} (\sqrt{2az} - z) dz = \frac{4\pi}{3} a^2:$$

Համանման դատողություններով կստացվի՝

$$M_{xy} = \iiint_{(V)} \frac{z dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{16\pi}{15} a^2,$$

$$M_{yz} = \iiint_{(V)} \frac{x dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0; M_{xz} = \iiint_{(V)} \frac{y dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0:$$

Հետևաբար համաձայն 4.16-ի՝ կունենանք՝

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m} = 0; y_c = \frac{M_{xz}}{m} = 0; z_c = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{4a}{5}:$$

Խնդիր 4.3. Դիցուք $\rho(x; y; z)$ ծավալային խտությամբ տարածական տիրույթով (մարմնով) բաշխված է որոշակի զանգված, և այդ մարմնից դուրս գտնվող A կետում տեղավորված է միավոր զանգված: Որոշել այն ուժը, որով նյութական (V) տիրույթը ձգում է A նյութական կետը:

Լուծում

Եթե $A(\xi; \eta; \zeta)$ կետը ձգվեր միայն $M(x; y; z)$ կետում կենտրոնացված m զանգվածի կողմից, ապա ձգողական ուժի մեծությունը կլիներ՝

$$F = \frac{m}{r^2},$$

որտեղ $r = |AM|$: Քանի որ $\vec{F}$ ձգողական ուժը ուղղված է $\overrightarrow{AM}$ վեկտորով, նրա ուղղորդ կոորդինատները կլինեն՝

$$\frac{x - \xi}{r}; \frac{y - \eta}{r}; \frac{z - \zeta}{r}:$$

Հետևաբար $\vec{F}$ ձգողական ուժի պրոյեկցիաները առանցքների վրա կորոշվեն հետևյալ բանաձևերով՝

$$F_x = m \frac{x - \xi}{r^3}; F_y = m \frac{y - \eta}{r^3}; F_z = m \frac{z - \zeta}{r^3}: \quad (1.4.21)$$

Պատկերացնենք, որ (V) մարմինը տրոհված է մանր (V_k) մասերի, և յուրաքանչյուր մասի զանգվածը կենտրոնացված է

որևէ $M_k(x_k; y_k; z_k) \in (V_k)$ կետում: Այդ ժամանակ $\vec{F}$ ուժի $F_x; F_y; F_z$ պրոյեկցիաները համապատասխանաբար քիչ կտարբերվեն ներքոգրյալ գումարներից՝

$$\sum_{k=1}^n \frac{\rho(M_k)|V_k|}{r_k^3} (x_k - \xi); \sum_{k=1}^n \frac{\rho(M_k)|V_k|}{r_k^3} (y_k - \eta);$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\rho(M_k)|V_k|}{r_k^3} (z_k - \zeta),$$

որտեղ $r_k = |AM_k|$ և $|V_k|$ -ն (V) մարմնի տրոհված (V_k) մասի ծավալն է, որոնց ճշգրիտ արժեքները կստացվեն, երբ (V_k) մասերի առավելագույն տրամագիծը ձգտեցնենք 0-ի՝

$$\begin{cases} F_x = \iiint_{(V)} \rho(x; y; z) \frac{x - \xi}{r^3} dx dy dz, \\ F_y = \iiint_{(V)} \rho(x; y; z) \frac{y - \eta}{r^3} dx dy dz, \\ F_z = \iiint_{(V)} \rho(x; y; z) \frac{z - \zeta}{r^3} dx dy dz: \end{cases} \quad (1.4.22)$$

Դիտարկենք հետևյալ **խնդիրը**: Հաշվել R շառավղով համասեռ ($\rho = 1$) գնդի ձգողական ուժը գնդի կենտրոնից a ($a > R$) հեռավորության վրա գտնվող միավոր զանգվածով A կետում:

Լուծում

Ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգի սկզբնակետը համարենք գնդի կենտրոնը և oz առանցքն ուղղենք $\overrightarrow{OA}$ վեկտորով:

Հաշվի առնելով սիմետրիկությունը՝ $\vec{F}(A)$ ուժի F_x և F_y պրոյեկցիաների համար կունենանք՝

$$F_x(A) = F_y(A) = 0; F_z(0; 0; z) =$$

$$= \iiint_{(V)} (z - a) \frac{dx dy dz}{[x^2 + y^2 + (z - a)^2]^{3/2}}: \quad (1.4.23)$$

Վերոգրյալ ինտեգրալը հաշվելու համար անցնենք սֆերիկ կոորդինատների՝

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta; \\ y = r \sin \varphi \sin \theta; \varphi \in [0; \pi], \theta \in [0; 2\pi], r \in [0; R]; \\ z = r \cos \varphi; \end{cases}$$

Համաձայն 4.5 բանաձևի, քանի որ ըստ (1.4.6)-ի՝ Յակոբյանը հավասար է $r^2 \sin \varphi$, նկատի ունենալով (1.4.22)-ը՝ կունենանք՝

$$F_z = 2\pi \int_0^R \left[r^2 \int_0^\pi \frac{(r \cos \varphi - a) \sin \varphi}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi \right] dr : (1.4.24)$$

Կատարելով (1.4.24)-ում $r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi = t$ տեղադրումն ու նկատի ունենալով, որ $a > r$, կստանանք՝

$$\begin{aligned} r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi = t; \quad r \cos \varphi = \frac{r^2 + a^2 - t}{2a}; \quad \sin \varphi d\varphi = \frac{dt}{2ar}, \\ t = r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi = \begin{cases} r^2 + a^2 + 2ar = (r + a)^2, \text{ երբ } \varphi = \pi \\ r^2 + a^2 - 2ar = (r - a)^2, \text{ երբ } \varphi = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

այսինքն՝

$$\begin{aligned} F_z &= \frac{2\pi}{a^2} \int_0^R \left[r \int_{(r-a)^2}^{(r+a)^2} \left(\frac{r^2 - a^2}{t^{\frac{3}{2}}} - t^{\frac{1}{2}} \right) dt \right] dr = \\ &= -\frac{2\pi}{a^2} \int_0^R \left[\frac{(r^2 - a^2)}{t^{\frac{1}{2}}} + t^{\frac{1}{2}} \right]_{(r-a)^2}^{(r+a)^2} r dr = \\ &= -\frac{4\pi}{a^2} \int_0^R \left(\frac{r^2 - a^2 + (r + a)^2}{(r + a)} + \frac{r^2 - a^2 + (r - a)^2}{|r - a|} \right) r dr = \\ &= -\frac{4\pi}{a^2} \int_0^R r^2 dr = -\frac{4\pi R^3}{3} \frac{1}{a^2}. \end{aligned}$$

Այստեղից կունենանք՝

$$F_z = -\frac{4\pi R^3}{3} \frac{1}{a^2}: \quad (1.4.25)$$

Հաշվի առնելով, որ $\frac{4\pi R^3}{3}$ -ը համասեռ գնդի ծավալն է, (1.4.25)-ից հետևում է, որ գնդից դուրս գտնվող A միավոր զանգվածով նյութական կետը այդ գնդի կողմից ձգվում է այն ուժով, ինչ ուժով կձգվեր գնդի կենտրոնում կենտրոնացված ամբողջ $\frac{4\pi R^3}{3}$ զանգվածի կողմից:

§1.5. Մակերևութային ինտեգրալների սահմանումն ու կիրառությունները

1.5.1. Դիցուք տրված է (Q) մակերևույթ, որը կարող է լինել փակ կամ բաց, ողորկ կամ մաս առ մաս ողորկ, որի վրա որոշված է միարժեք $f(x; y; z) = f(M)$ ֆունկցիան:

Դիտարկվող (Q) մակերևույթը կամայական եղանակով մաս առ մաս ողորկ կորերի օգնությամբ տրոհենք մանր մասերի՝

$$(Q) = \sum_{k=1}^n (\Delta q_k):$$

Յուրաքանչյուր (Δq_k) մասում վերցնենք մի $M_k(x_k; y_k; z_k)$ ցանկացած կետ, այդ կետում հաշվենք $f(x_k; y_k; z_k)$ ֆունկցիայի արժեքները, դրանք բազմապատկենք մակերևույթի համապատասխան (Δq_k) մակերեսով և ստացված արտադրյալները գումարենք: Այդ դեպքում կստանանք մի նոր տեսակի ինտեգրալային գումար՝

$$\sum_{k=1}^n f(M_k) |\Delta q_k| = \sum_{k=1}^n f(x_k; y_k; z_k) |\Delta q_k|: \quad (1.5.1)$$

Սահմանում 13. Եթե գոյություն ունենա (1.5.1) ինտեգրալային գումարների սահմանը, երբ (Δq_k) -ների տրամագծերից մեծագույնը ձգտում է զրոյի՝ անկախ (Q) մակերևույթը տրոհելու և այդ $M(x; y; z)$ կետերը ընտրելու եղանակից, ապա այդ

սահմանը կոչվում է $f(x; y; z)$ -ի առաջին տիպի մակերևութային ինտեգրալ՝ տարածված (Q) -ով, նշանակվում է այսպես՝

$$\iint_{(Q)} f(x; y; z) dq = \iint_{(Q)} f(M) dq: \quad (1.5.2)$$

1.5.2. Դիցուք (Q) երկկողմ ողորկ կողմնորոշված մակերևութի վրա որոշված է $f(x; y; z)$ ֆունկցիան: Դիտարկվող (Q) -ն առանցքին զուգահեռ ուղիղների հետ հատվել կարող է միայն մեկ կետում: Տրոհենք (Q) -ը ողորկ կորերով մանր մասերի, կազմենք հետևյալ ներքոգրյալ ինտեգրալային գումարը՝

$$(Q) = \bigcup_{k=1}^n (\Delta q_k), \quad (1.5.3)$$

սակայն այս անգամ բազմապատկենք ոչ թե (Δq_k) մակերևութի մակերեսով, այլ xoy հարթության վրա (Δq_k) -ի պրոյեկցիայի $(\Delta q_k)_{xy}$ մակերեսով՝ վերջինս վերցնելով իր նշանով՝ (Q) մակերևութի կողմնորոշմանը համապատասխան:

Սահմանում 14. Եթե վերոնշված ինտեգրալային գումարի սահմանը գոյություն ունենա, երբ (Δq_k) -երի տրամագծերից մեծագույնը ձգտում է զրոյի՝ անկախ տրված մակերևութը տրոհելու և $M_k(x_k; y_k; z_k)$ կետերն ընտրելու եղանակից, ապա այդ սահմանն անվանում են երկրորդ տիպի մակերևութային ինտեգրալ՝ ըստ x և y փոփոխականների, տարածված (Q) մակերևութի մեր ընտրած կողմով և տրվում է հետևյալ տեսքով՝

$$I_{xy} = \iint_{(Q)} f(M) dq_{xy} = \iint_{(Q)} f(x; y; z) dx dy: \quad (1.5.4)$$

Համանման եղանակով տրվում են

$$\begin{aligned} I_{yz} &= \iint_{(Q)} f(M) dq_{yz} = \iint_{(Q)} f(x; y; z) dy dz, \\ I_{xz} &= \iint_{(Q)} f(M) dq_{xz} = \iint_{(Q)} f(x; y; z) dx dz \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

երկրորդ տիպի մակերևութային ինտեգրալների սահմանումները:

Կիրառություններում հաճախ հանդես են գալիս երեք տարբեր ֆունկցիաների 2-րդ տիպի մակերևութային ինտեգրալներ ըստ տարբեր փոփոխականների միմյանց հետ գումարած:

Առաջին ու երկրորդ տիպի մակերևութային ինտեգրալները կախված են հետևյալ կերպ՝

$$\begin{aligned} & \iint_{(Q)} P dydz + Q dx dz + R dx dy = \\ & = \iint_{(Q)} [P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma] dq, \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

որտեղ $\cos \alpha$ -ն, $\cos \beta$ -ն, $\cos \gamma$ -ն՝ մակերևույթի նորմալի ուղղորդ կոսինուսներն են, ընդ որում՝ նորմալը համապատասխանում է մակերևույթի ընտրված կողմին:

Մակերևութային ինտեգրալները հաշվվում են հետևյալ բանաձևերով:

Եթե

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), (u; v \in Q) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

անընդհատ մասնակի ածանցյալներ ունեցող ֆունկցիաները տրված (Q) մակերևույթի պարամետրական հավասարումներն են, ապա (Q) -ի վրա որոշված կամայական $f(x; y; z)$ ֆունկցիայի համար՝

$$\begin{aligned} & \iint_{(Q)} f(x; y; z) dq = \\ & = \iint_{(Q)} f(x(u, v); y(u, v); z(u, v)) \sqrt{EF - G} du dv, \end{aligned} \quad (1.5.7)$$

որտեղ՝

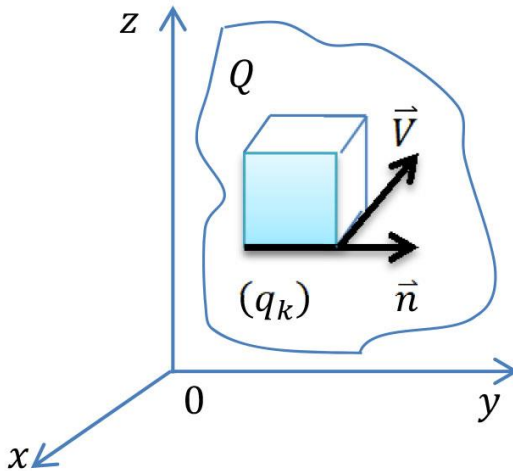
$$\begin{cases} E = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2, \\ F = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2, \\ G = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v. \end{cases}$$

Խնդիր 1.5.1. Դիտարկենք տարածության մեջ ունենք $\rho = 1$ ծավալային խտությամբ չսեղմվող հեղուկ, որի մասնիկի $\vec{V}$ արագությունն անկախ է ժամանակից, կախված է միայն մասնիկի դիրքից:

Գտնել (Q) ողորկ մակերևույթով միավոր ժամանակում հոսած հեղուկի քանակը:

Լուծում

Մասնիկի $\vec{V}$ արագության պրոյեկցիաներն առանցքների և (Q) -ի n նորմալի վրա նշանակենք $\vec{V}_x; \vec{V}_y; \vec{V}_z$: (Q) մակերևույթը ողորկ կորերով տրոհենք (q_k) մասերի, յուրաքանչյուր (q_k) մասով հոսած հեղուկի քանակությունը միավոր ժամանակում (q_k) $\vec{n}$ մոտավորապես հավասար է (Նկ. 5.1)



Նկ.5.1

$$V_n(M_k)|q_k| = (V_x \cos \alpha + V_x \cos \beta + V_x \cos \gamma)|q_k|,$$

որտեղ $|q_k|$ -ն q_k մասի մակերեսն է, M_k -ն որևէ կետ է q_k -ից, և $\cos \alpha$ -ն, $\cos \beta$ -ն, $\cos \gamma$ -ն մակերևույթի նորմալի ուղղորդ կոսինուսներն են այդ կետում:

Հետևաբար միավոր ժամանակում մակերևույթի բացասական կողմից դրական կողմը հասած հեղուկի քանակությունը հավասար է՝

$$\begin{aligned}\iint_{(Q)} V_n dq &= \iint_{(Q)} [V_x \cos \alpha + V_y \cos \beta + V_z \cos \gamma] dq = \\ &= \iint_{(Q)} V_x dydz + V_y dx dz + V_z dx dy: \quad (1.5.8)\end{aligned}$$

Վերագրյալ (1.5.8) ինտեգրալը հիդրոմեխանիկայում կոչվում է $\vec{V}$ -ի հոսք (Q) -ով:

Ենթադրենք, որ (Q) մակերևույթը փակ է, և $\vec{V}$ վեկտորի պրոյեկցիաները (Q) -ով սահմանափակված (D) տիրույթում ունեն անընդհատ մասնակի ածանցյալներ: Այդ դեպքում, համաձայն Օստրոգրադսկու բանաձևի, կունենաք

$$\begin{aligned}I &= \iint_{(Q)} V_n dq = \iiint_{(D)} \left[\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right] dx dy dz = \\ &= \iiint_{(D)} \operatorname{div} \vec{V} dx dy dz, \quad (1.5.9)\end{aligned}$$

որտեղ՝

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

արտահայտությունը կոչվում է $\vec{V}$ վեկտորական դաշտի դիվերգենցիա:

Օգտագործելով եռակի ինտեգրալի միջին արժեքի թեորեմը՝ (1.5.9)-ից կգտնենք՝

$$\operatorname{div} \vec{V} = \lim_{(D) \rightarrow M} \frac{\iint_{(Q)} V_n dq}{|D|}, \quad (1.5.10)$$

որտեղ $|D|$ -ն տիրույթի ծավալն է, և $(D) \rightarrow M$ -ը նշանակում է՝ (D) տիրույթը կծկվում է M կետի շուրջը: (1.5.10)-ից հետևում է, որ $\operatorname{div} \vec{V}$ -ն ցույց է տալիս աղբյուրների խտությունը:

Եթե աղբյուրներ չկան $\vec{V}$ վեկտորական դաշտում, ապա $\operatorname{div} \vec{V} = 0$ այդպիսի դաշտը կոչվում է խողովակակերպ (սուլենոիդալ): (1.5.8) բանաձևից հետևում է, որ սուլենոիդալ դաշտում յուրաքանչյուր փակ մակերևույթով արտահոսում է այնքան հեղուկ, որքան ներհոսում է:

Խնդիր 1.5.2. Դիտարկենք $\rho(x; y; z)$ մակերևութային խտությամբ (Q) մակերևույթով անընդմեջ բաշխված որոշակի զանգված և այդ մակերևույթից դուրս գտնվող միավոր զանգվածով A նյութական կետ: Որոշել այն ուժը, որով նյութական մակերևույթը կամ պարզ շերտը ձգում է A նյութական կետը:

Լուծում

Եթե $A(\xi; \eta; \zeta)$ կետը ձգվեր միայն $M(x; y; z)$ կետում կենտրոնացված m զանգվածի կողմից, ապա ձգողական ուժը կլիներ՝

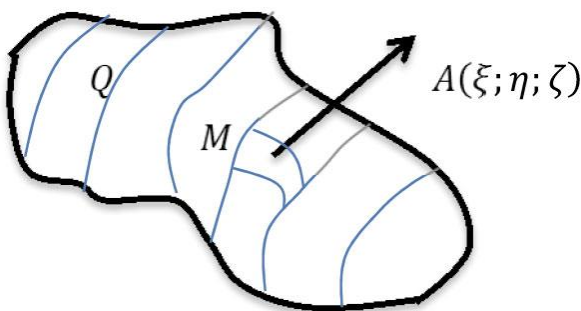
$$Q A(\xi; \eta; \zeta) \vec{F} = \frac{m}{r^2} \cdot \frac{\overrightarrow{AM}}{r},$$

M որտեղ

$$r = |AM| = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}:$$

Հաշվի առնելով, որ $\overrightarrow{AM}$ վեկտորի ուղղորդ կոսինուսներ են՝

$$\frac{x - \xi}{r}; \frac{y - \eta}{r}; \frac{z - \zeta}{r},$$



Նկ. 5.2

ապա այդ դեպքում ուժի պրոյեկցիաների համար կունենանք՝

$$F_x = m \frac{x - \xi}{r^3}; F_y = m \frac{y - \eta}{r^3}; F_z = m \frac{z - \zeta}{r^3}; \quad (1.5.11)$$

Պատկերացնենք, որ (Q) մակերևույթը տրոհված է մանր մասերի, այդ մասերի $\forall m_k$ զանգված կենտրոնացված է որևէ $M_k(x_k; y_k; z_k) \in (q_k)$: Այդ դեպքում $\vec{F}$ համագոր ուժի F_x, F_y, F_z պրոյեկցիաները համապատասխանաբար քիչ կտարբերվեն հետևյալ գումարներից

$$\sum_{k=1}^n \frac{\rho(M_k)|q_k|}{r_k^3} (x_k - \xi); \sum_{k=1}^n \frac{\rho(M_k)|q_k|}{r_k^3} (y_k - \eta);$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\rho(M_k)|q_k|}{r_k^3} (z_k - \zeta);$$

որտեղ $r_k = |AM_k|$ և $|q_k|$ -ն (q_k) -ի մակերեսն է, և այդ ձգողական ուժի պրոյեկցիաների ճշգրիտ արժեքները կստանանք, երբ (q_k) մասերի առավելագույն տրամագիծը $\lambda \rightarrow 0$,

$$\left\{ \begin{aligned} F_x(A) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{\rho(M_k)|q_k|}{r_k^3} (x_k - \xi) = \iint_{(q)} \rho(x; y; z) \frac{x - \xi}{r^3} dq; \\ F_y(A) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{\rho(M_k)|q_k|}{r_k^3} (y_k - \xi) = \iint_{(q)} \rho(x; y; z) \frac{y - \eta}{r^3} dq; \\ F_z(A) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{\rho(M_k)|q_k|}{r_k^3} (z_k - \xi) = \iint_{(q)} \rho(x; y; z) \frac{z - \zeta}{r^3} dq; \end{aligned} \right. \quad (1.5.12)$$

Համաձայն 2-րդ տիպի մակերևութային ինտեգրման (1.5.6) բանաձևի պարամետրից կախված ինտեգրալի նշանի տակ դիֆերենցման կանոնի՝ կունենանք՝

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\iint_{(q)} \frac{\rho(x; y; z)}{r} dq \right] = \iint_{(q)} \rho(x; y; z) \frac{x - \xi}{r^3} dq = F_x(\xi; \eta; \zeta), \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\iint_{(q)} \frac{\rho(x; y; z)}{r} dq \right] = \iint_{(q)} \rho(x; y; z) \frac{y - \eta}{r^3} dq = F_y(\xi; \eta; \zeta), \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\iint_{(q)} \frac{\rho(x; y; z)}{r} dq \right] = \iint_{(q)} \rho(x; y; z) \frac{z - \zeta}{r^3} dq = F_z(\xi; \eta; \zeta), \end{cases} \quad (1.5.13)$$

որտեղ $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$, նյութական A կետը չի պատկանում (q) -ին և (1.5.13) պայմանները բավարարող

$$W = \iint_{(q)} \frac{\rho(x; y; z)}{r} dq \quad (1.5.14)$$

ֆունկցիան կոչվում է (Q) պարզ շերտի պոտենցիալ:

Դիտարկենք հետևյալ մասնավոր դեպքերը:

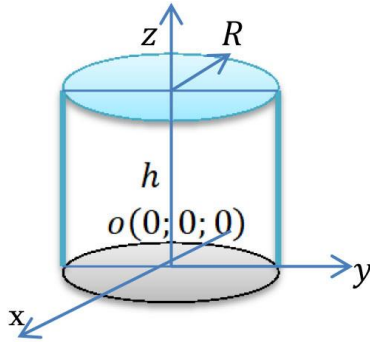
Խնդիր 1.5.3. Տրված է հիմքի R շառավիղով և h բարձրությամբ ուղիղ շրջանային զլան, որի կողմնային մակերևույթով $\rho(x; y; z) = 1$ խտությամբ բաշխված է որոշակի զանգված: Գտնել՝

ա) զլանային մակերևույթի ձգողական ուժը հիմքի կենտրոնում տեղադրված միավոր զանգվածի նկատմամբ,

բ) նույն կետում պոտենցիալը:

Լուծում

Եթե զլանի հիմքի կենտրոնը համարենք ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգի $o(0; 0; 0)$ սկզբնակետ և oz առանցքը ուղղենք զլանի առանցքով:



Նկ. 5.3

Նախ նկատենք, որ ձգողական ուժի F_x և F_y պրոյեկցիաները սիմետրիկության պատճառով հավասար են զրոյի:

Գլանի կողմնային մակերևույթը ներկայացնենք պարամետրական տեսքով՝

$$\begin{cases} x = R \cos \theta, \\ y = R \sin \theta, \quad (\theta \in [0; 2\pi], z \in [0; h]), \\ z = z, \end{cases}$$

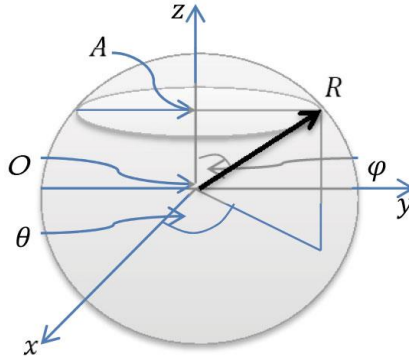
նկատի ունենալով (1.5.6) ու (1.5.12) բանաձևերը՝ կստանանք՝

$$\left\{ \begin{aligned} F_z(0; 0; 0) &= \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} R dz d\theta = \\ &= 2\pi R \int_0^h \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\pi(\sqrt{R^2 + z^2} - R)}{\sqrt{R^2 + z^2}}, \quad (1.5.15) \\ W(0; 0; 0) &= \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{R dz d\theta}{\sqrt{R^2 + z^2}} = 2\pi R \ln \frac{h + \sqrt{R^2 + h^2}}{R}: \end{aligned} \right.$$

Խնդիր 1.5.4. Գտնել R շառավիղով համասեռ գնդային մակերևույթի ձգողական ուժը և պոտենցյալը կենտրոնից a հեռավորության վրա գտնվող միավոր զանգվածով A նյութական կետում:

Լուծում

Դիցուք կոորդինատների սկզբնակետը $O(0; 0; 0)$ (Նկ. 5.4) գտնվում է գնդի կենտրոնում և միավոր զանգվածով A կետը Oz կոորդինատական առանցքի դրական դրական ուղղության վրա:



Նկ.5.4

Նախ նկատենք, որ F ձգողական ուժի F_x և F_y պրոյեկցիաները սիմետրիկության պատճառով հավասար են զրոյի: Գնդային մակերևույթը ներկայացնենք պարամետրական տեսքով՝

$$\begin{aligned} x &= R \sin \varphi \cos \theta; \quad y = R \sin \varphi \sin \theta; \quad z = R \cos \theta: \\ \theta &(0 \leq \varphi \leq \pi; 0 \leq \theta \leq 2\pi) \end{aligned}$$

Ըստ 1.5.6 ու 1.5.7-ի՝ երի, կունենանք

$$x F_z(0; 0; 0) = 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \frac{(R \cos \varphi - a) d\varphi}{(R^2 + a^2 - 2aR \cos \varphi)^{3/2}};$$

Վերջին ինտեգրալում կատարելով տեղադրում՝

$$t^2 = R^2 + a^2 - 2aR \cos \varphi,$$

կստանանք՝

$$F_z(0; 0; 0) = \frac{\pi R^2}{a^2} \left(2R - \frac{R^2 - a^2}{|R - a|} - |R - a| \right) =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ երբ } a < R; \\ -\frac{4\pi R^2}{a^2}, \text{ երբ } a > R: \end{cases} \quad (1.5.16)$$

Ստացանք, որ.

ա) եթե A նյութական կետը գտնվում է գնդի ներսում, ապա այն չի ձգվում սֆերայի կողմից՝ $F_x = F_y = F_z = 0$,

բ) եթե A նյութական կետը գտնվում է գնդից դուրս, ապա այն ձգվում է սֆերայի կողմից նույն ուժով, ինչ ուժով կձգվեր կենտրոնում կենտրոնացված նույն $m = 2\pi R^2$ զանգվածով նյութական կետի կողմից:

Եթե A նյութական կետը գտնվում է սֆերայի վրա ($a = R$), այդ ժամանակ (1.5.15) ինտեգրալը կվերածվի անիսկական ինտեգրալի, որի զուգամիտությունը դժվար չէ հիմնավորել: Որոշ պարզեցումներից հետո այն կրեքվի հետևյալ ինտեգրալին՝

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^\pi \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - \cos \varphi}} = -2\pi:$$

Երբ $a = R$, ստանում ենք՝

$$F_z(0; 0; 0) = \frac{1}{2} \left[\lim_{a \rightarrow R^+} F_z(0; 0; 0) + \lim_{a \rightarrow R^-} F_z(0; 0; 0) \right]:$$

Գտնենք պոտենցյալը: Համաձայն (1.5.6) ու (1.5.7) բանաձևերի՝ կստանանք՝

$$W(0; 0; a) = \iint_{(q)} \frac{dq}{r} = 2\pi R^2 \int_0^\pi \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2aR \cos \varphi}} =$$

$$= \begin{cases} 4\pi R^2; \text{ երբ } a < R; \\ \frac{4\pi R^2}{a^2}; \text{ երբ } a > R: \end{cases} \quad (1.5.17)$$

Երբ $a = R$, կստանանք զուգամետ անիսկական ինտեգրալ, որի արժեքը $= 4\pi R$ -ի:

§ 1.6. Ֆիզիկական մարմինների երկարության, մակերեսի և ծավալի հաշվումը որոշյալ ինտեգրալով

1.6.1. Հարթ պատկերի մակերեսի հաշվումը

Հաշվել տրված կորագիծ սեղանի մակերեսը, որը սահմանափակված է $f(x)$ -ի գրաֆիկով ($f(x) \geq 0$) $x = a, x = b$ ուղիղներով, $[a, b]$ հատվածով որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$S = \int_a^b y \, dx = \int_a^b f(x) \, dx:$$

Դիցուք հատվածի վրա տրված են $y = f_1(x), y = f_2(x)$ անընդհատ ֆունկցիաները այնպես, որ $f_2(x) \geq f_1(x)$: Այդ դեպքում այդ ֆունկցիաների միջև սահմանափակված պատկերի մակերեսը $[a, b]$ հատվածի վրա որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] \, dx:$$

Օրինակ 1. Որոշել $y = -x^2 + 3, y = 2x, x = 0$ զծերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

Լուծում

Նախ գտնենք գրաֆիկների հատման կետերի կոորդինատները՝

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 2x, (x \geq 0), \\ y = -x^2 + 3, \end{cases} &\Rightarrow (-x^2 + 3 = 2x), \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x^2 + x - 3 = 0), \text{ այստեղից } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 (2x + x^2 - 3) \, dx = \left(x^2 + \frac{x^3}{3} - 3x \right) \Big|_0^2 = 4 + \frac{8}{3} - 3 \cdot 2 = \\ &= \frac{12 + 8 - 18}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Օրինակ 2. Որոշել $y = \sin 2x, y = 0.5, x = 45^\circ$ գծերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

Լուծում

Նախ գտնենք գրաֆիկների հատման կետերի կոորդինատները

$$\begin{cases} y = \sin 2x \\ y = 0.5, (x = 45^\circ) \end{cases} \rightarrow \left(\sin 2x = \frac{1}{2} \right), \rightarrow (x = 60^\circ),$$

$$S = \int_{45^\circ}^{60^\circ} \left(\frac{1}{2} - \sin 2x \right) dx = \left(\frac{x}{2} + \frac{\cos 2x}{2} \right)_{45^\circ}^{60^\circ} = 0.38:$$

Օրինակ 3. Որոշել $y = 2^x, y = 2^{-x}, x = 0$ գծերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

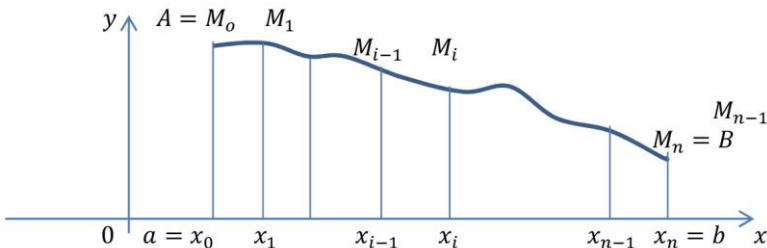
Օրինակ 4. Որոշել $y = \ln(x + 1), y = 2 \ln x, x = 1$ գծերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

Օրինակ 5. Որոշել $y = \sin 2x, y = \cos^2 x, x = 0$ գծերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

1.6.2. Կորի աղեղի երկարության հաշվումը

Ենթադրենք xOy հարթության մեջ AB կորը տրված է $y = f(x)$ հավասարման ($x \in [ab]$) օգնությամբ: Պահանջվում է գտնել այդ AB կորի L երկարությունը: AB կորը կամայական ձևով $A = M_0; M_1; M_2; \dots; M_{n-1}; M_n = B$ կետերով բաժանենք n մասերի, կստանանք AB բեկյալը:

Բեկյալի $[M_{i-1}; M_i]$ հատվածի երկարությունը նշանակենք $l_i(i, \mu) = \min_{j \in \{0, 1, \dots, n\}} |l_i|$:



Նկ. 6.1

Հաշվենք AB բեկյալի երկարությունը որպես l_i հատվածների երկարությունների գումար՝

$$P = \sum_{i=1}^n l_i:$$

Սահմանում. AB կորի L երկարություն կանվանենք P պարագծի սահմանը, երբ $\mu \rightarrow 0$:

$$\text{Այսինքն՝ } L = \lim_{\mu \rightarrow 0} P(\mu) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n l_i:$$

Թեորեմ. Եթե $f(x)$ և $f'(x)$ ֆունկցիաները անընդհատ են $[a, b]$ հատվածի վրա, ապա $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

Ապացույց. AB բեկյալի $A = M_0; M_1; M_2; \dots; M_{n-1}; M_n = B$ կետերի աբսցիսներով $[a, b]$ հատվածը $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$ կետերով բաժանվում է n մասերի: Համապատասխանաբար կորի կետերի կոորդինատներն են $M_0 = A(a, f(a)),$

$$M_1(x_1; f(x_1)); M_2(x_2; f(x_2)); \dots; M_i(x_i; f(x_i)); \dots;$$

$$M_n(x_n; f(x_n)) = B(b; f(b)),$$

$$l_i = M_{i-1}M_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$$

$f(x)$ և $f'(x)$ ֆունկցիաները անընդհատ են $[a, b]$

հատվածի վրա, և հետևաբար $\forall [x_{i-1}; x_i]$ հատվածի համար ըստ Լանգրաժի թեորեմի $\exists c_i \in [x_{i-1}; x_i]$, որ

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1}),$$

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} \\ = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(c_i)(x_i - x_{i-1})]^2} =$$

$$= \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}(x_i - x_{i-1}) = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i,$$

$$P = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i:$$

Ստացանք ինտեգրալային գումարները: Քանի որ $f(x)$ և $f'(x)$ անընդհատ են $[a, b]$ հատվածի վրա, ապա անընդհատ է նաև

$\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ ֆունկցիան: Ըստ որոշյալ ինտեգրալի սահմանման՝

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} P = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = L:$$

Ենթադրենք կորը տրված է $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$ պարամետրական հավասարումներով, ընդ որում՝

$$a = \varphi(\alpha); b = \psi(\beta); (\alpha \leq t \leq \beta): dx = \varphi'(t)dt;$$

$$dy = \psi'(t)dt; f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}:$$

Հաշվի առնելով վերոգրյալը՝ կստանանք՝

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right]^2} \cdot \varphi'(t) dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt: \end{aligned}$$

Ենթադրենք՝ կորը տրված է $\rho = \rho(\varphi)$ բևեռային կոորդինատներով $\alpha \leq \varphi \leq \beta$:

$$\begin{cases} x(\varphi) = \rho \cos \varphi, \\ y(\varphi) = \rho \sin \varphi, \end{cases} \begin{cases} x'(\varphi) = \rho'(\varphi) \cos \varphi - \rho(\varphi) \sin \varphi, \\ y'(\varphi) = \rho'(\varphi) \sin \varphi + \rho(\varphi) \cos \varphi. \end{cases}$$

Հաշվի առնելով վերոգրյալը՝ կստանանք՝

$$\begin{aligned} [x'(\varphi)]^2 + [y'(\varphi)]^2 &= [\rho'(\varphi) \cos \varphi - \rho(\varphi) \sin \varphi]^2 + \\ &+ [\rho'(\varphi) \sin \varphi + \rho(\varphi) \cos \varphi]^2 = \\ &= [\rho'(\varphi)]^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) - 2\rho'(\varphi)\rho(\varphi) \cos \varphi \sin \varphi + \\ &+ \rho^2(\varphi) (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + \\ &+ 2\rho'(\varphi)\rho(\varphi) \cos \varphi \sin \varphi = [\rho'(\varphi)]^2 + \rho^2(\varphi). \end{aligned}$$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\rho'(\varphi)]^2 + \rho^2(\varphi)} d\varphi:$$

Օրինակ 1. Գտնել պարաբոլի $y = 3 - 0.5x^2$ վերին կոր-
աղեղի երկարությունը $x \in [0; 5]$ հատվածի վրա:

Նախ հաշվենք տվյալ ֆունկցիայի ածանցյալը՝ $y'(x) = -x$;
Այդ դեպքում որոշվելիք կորի երկարությունը կլինի՝

$$\begin{aligned} L &= \int_0^5 \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = \int_0^5 \sqrt{1 + x^2} dx = x\sqrt{1 + x^2} \Big|_{x=0}^{x=5} - \\ &- \int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1 + x^2}} = 5\sqrt{26} - \int_0^{25} \frac{dt}{2\sqrt{1+t}} = 5\sqrt{26} - \sqrt{1+t} \Big|_0^{25} = \\ &= 4\sqrt{26} + 1: \end{aligned}$$

Օրինակ 2. Գտնել $x = 9(t - \sin t)$; $y = 9(1 - \cos t)$; ($0 \leq t \leq 2\pi$) ցիկլոիդի առաջին թռիչքի երկարությունը:

Այս դեպքում՝ $x'(t) = 9(1 - \cos t)$, $y'(t) = 9 \sin t$, ($t \in [0; 2\pi]$):

$$\begin{aligned} &\text{Հետևաբար՝} \\ L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = 9 \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = \\ &= 9 \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = \\ &= 18 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -36 \cos \frac{t}{2} \Big|_{t=0}^{t=2\pi} = -36(\cos \pi - \cos 0) = \\ &= -36(-1 - 1) = 72: \end{aligned}$$

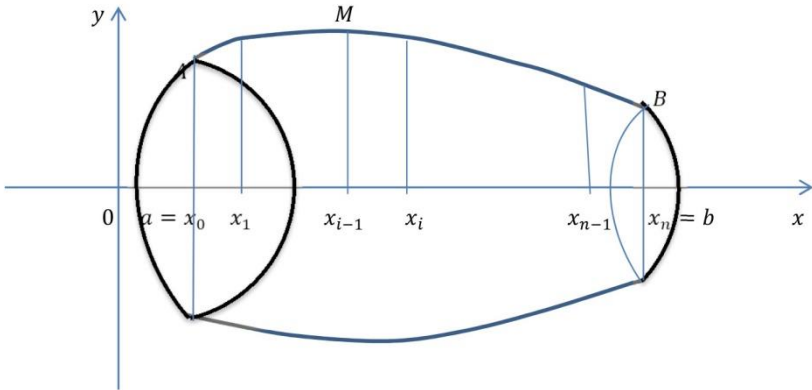
Օրինակ 3. Գտնել $y = 2 \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ կորի երկարու-
թյունը $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ հատվածում:

Օրինակ 4. Գտնել $y = 3x^3 - 5$ կորի երկարությունը $[1; 5]$ միջակայքում:

Օրինակ 5. Գտնել $y = 3e^x$ կորի երկարությունը $[0; 7]$ միջակայքում:

1.6.3. Պտտման մարմնի ծավալի հաշվումը

Դիցուք $f(x)$ անընդհատ ոչ բացասական ֆունկցիա է $[a, b]$ հատվածի վրա: Այդ դեպքում կորագիծ սեղանը՝ սահմանափակված կորով $x = a$; $x = b$; ox առանցքով, պտտվելով ox առանցքի շուրջը, առաջացնում է տարածական մարմին, որի ծավալը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով (Նկ 6.3)՝



Նկ. 6.3

Ապացույց. Տրոհենք $[a, b]$ հատվածը ցանկացած ձևով x_i կետերով: Յուրաքանչյուր $[x_{i-1}; x_i]$ հատվածի վրա ուղղանկյուն $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; $f(c_i)$ կողմերով, որը, պտտվելով ox առանցքի շուրջը, առաջացնում է գլան, որի ծավալն է՝

$$V_i = \pi f^2(c_i) \Delta x_i, \text{ որտեղ } f(c_i) = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x):$$

Հետևաբար առաջացած մարմնի մոտավոր ծավալը կլինի՝

$$V_{\text{պտտ}} \approx \sum_{i=1}^n \pi f^2(c_i) \Delta x_i = \sigma:$$

Այստեղ σ գումարը $f^2(x)$ ֆունկցիայի ինտեգրալային գումարն է: Հաշվենք այդ գումարի սահմանը, երբ $\lambda \rightarrow 0$:

$$V_x = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi f^2(c_i) \Delta x_i = \pi \int_a^b f^2(x) dx, \text{ որտեղ } \lambda = \max_{1 \leq i \leq n} (\Delta x_i):$$

Եթե $x = \varphi(y)$ կորը պտտվում է oy առանցքի շուրջը, որտեղ $y \in [c, d]$, ապա՝

$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy:$$

Դիցուք, եթե պատկերը սահմանափակված է $y_1 = f_1(x), y_2 = f_2(x)$; ($0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$) կորերով, $x = a; y = b$ ուղիղներով, ապա պատկերը ox առանցքի շուրջը պտտումից առաջացած մարմնի ծավալը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$V_x = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx:$$

Օրինակ 1. Հաշվել Տորի ծավալը:

Սահմանում. Այն մարմինը, որը առաջանում է a շառավիղով շրջանը առանցքից b հեռավորության վրա պտտումից, անվանում են տոր:

Լուծում

Հայտնի է շրջանագծի հավասարումը $x^2 + (y - b)^2 = a^2$; ($b \geq a$): Այստեղից՝

$$(y - b)^2 = a^2 - x^2; y - b = \pm \sqrt{a^2 - x^2}; \Rightarrow \begin{cases} y_1 = b + \sqrt{a^2 - x^2} \\ y_2 = b - \sqrt{a^2 - x^2} \end{cases};$$

Այդ դեպքում տորի ծավալը կլինի՝

$$\begin{aligned} V_{\text{տոր}} &= \pi \int_{-a}^a (y_1^2 - y_2^2) dx = \\ &= 2\pi \int_0^a \left[(b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 - (b - \sqrt{a^2 - x^2})^2 \right] dx = \\ &= 8\pi b \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx: \end{aligned}$$

Նշանակենք $x = a \sin t$; $dx = a \cos t dt$; $a \sin t = 0$; $t_1 = 0$ և $a \sin t = a$; $t_2 = \frac{\pi}{2}$: Այսինքն՝

$$\begin{aligned}
 V_{\text{տոն}} &= 8\pi b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt = 8\pi a^2 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \\
 &= 4\pi a^2 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \\
 &= 4\pi a^2 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + 2\pi a^2 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t d2t = 4\pi a^2 b (t - \sin 2t) \Big|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \\
 &= 2\pi^2 a^2 b:
 \end{aligned}$$

Օրինակ 2. Հաշվել $y = x^2 + x - 3$ կորով, $x = 0; x = 2$ ուղիղներով ox առանցքի շուրջը պտտումից առաջացած մարմնի ծավալը:

Օրինակ 3. Հաշվել $y = x^2 - 4; y = x + 5; x = 1; x = 3$ ուղիղներով, ox առանցքի շուրջը պտտումից առաջացած մարմնի ծավալը:

Օրինակ 4. Հաշվել $y = \sin 2x; y = e^x; x = 2, x = 5$ ուղիղներով, ox առանցքի շուրջը պտտումից առաջացած մարմնի ծավալը:

Օրինակ 5. Հաշվել $y = x \ln(x^2 + 1); y = 2 - x^2; x = 1; x = 3$ ուղիղներով ox առանցքի շուրջը պտտումից առաջացած մարմնի ծավալը:

1.6.4. Պտտման մարմնի մակերևույթի մակերեսի

հաշվումը

Ենթադրենք $y = f(x)$ -ը ոչ բացասական է, որն իր առաջին աստիճանի ածանցյալի հետ միասին $[a, b]$ հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիաներ է: Այդ դեպքում $y = f(x)$ ֆունկ-

ցիան ox -ի շուրջը պտտումից առաջացած մարմնի մակերևույթի մակերեսը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx:$$

Ապացույց. Դիցուք $[a, b]$ հատվածը բաժանված է ցանկացած λ նույն n մասի: Գրաֆիկի համապատասխան կետերն են՝ $A_0; A_1; A_2; \dots; A_{i-1}; A_i; \dots; A_n$: Կստանանք $\langle A_0; A_i; A_n \rangle$ բեկյալը, որը ox առանցքի շուրջը պտտելուց առաջացնում է մակերևույթ՝ որպես հատած կոնների կամ զլանների մակերևույթերի միացություն: Ստացված մարմնի i -րդ մակերևույթի մակերեսը կլինի՝ $2\pi[f(x_i) + f(x_{i-1})] \cdot 0.5l_i$, և l_i լարի երկարությունը կորոշվի հետևյալ բանաձևով՝ $l_i[A_{i-1}; A_i] = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$: Ըստ Լանգրանժի թեորեմի՝ $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i) \cdot \Delta x_i$, որտեղ $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$: Այսինքն՝ լարի երկարությունը, հաշվի առնելով վերոգրյալը, կունենա հետևյալ տեսքը

$$\begin{aligned} l_i &= \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \cdot \Delta x_i; \quad \lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i; \\ S_* &= \sum_{i=1}^n 2\pi \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \cdot \Delta x_i \\ S &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2\pi \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \cdot \Delta x_i = \\ &= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx: \end{aligned}$$

Եթե կորը տրված է $x = x(t); y = y(t)$ պարամետրական տեսքով $y(t) \geq 0, t \in [\alpha, \beta]$ և ապա՝

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt:$$

Եթե կորը տրված է $\rho = \rho(\varphi)$ բևեռային կոորդինատներով $\varphi \in [\alpha, \beta]$, ապա՝

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho \sin \varphi \cdot \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2} d\varphi:$$

Օրինակ 1. Հաշվել $y = x^2; x = 0; x = 2$ ուղիղներով օք առանցքի շուրջը պտտումից առաջացած մարմնի մակերևույթի մակերեսը:

Օրինակ 2. Հաշվել $y = e^x; x = 0; x = 5$ ուղիղներով օք առանցքի շուրջը պտտումից առաջացած մարմնի մակերևույթի մակերեսը:

Օրինակ 3. Հաշվել $y = \sin 2x; x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{\pi}{2}$ օք առանցքի շուրջը պտտումից առաջացած մարմնի մակերևույթի մակերեսը:

Օրինակ 4. Հաշվել $y = \ln(x + 5); x = 0; x = 3$ ուղիղներով օք առանցքի շուրջը պտտումից առաջացած մարմնի մակերևույթի մակերեսը:

Օրինակ 5. Հաշվել $y = \sqrt{x^2 - 9}; x = 5; x = 7$ ուղիղներով օք առանցքի շուրջը առաջացած մարմնի մակերևույթի մակերեսը:

Օրինակ 6. Հաշվել $y = -x^2 + 3; x = 0; x = 3$ ուղիղներով օք առանցքի շուրջը պտտումից առաջացած մարմնի մակերևույթի մակերեսը:

Օրինակ 7. Հաշվել $y = e^{-2x}; x = 0; x = 4$ ուղիղներով օք առանցքի շուրջը պտտումից առաջացած մարմնի մակերևույթի մակերեսը:

Օրինակ 8. Հաշվել $y = \cos 3x$; $x = \frac{\pi}{6}$; $x = \frac{\pi}{3}$ ox առանցքի շուրջը պտտումից առաջացած մարմնի մակերևույթի մակերեսը:

Օրինակ 9. Հաշվել $y = \ln(x + 1)$; $x = 0$; $x = e$ ուղիղներով ox առանցքի շուրջը պտտումից առաջացած մարմնի մակերևույթի մակերեսը:

Օրինակ 10. Հաշվել $y = \sqrt{x^2 + 4}$; $x = -3$; $x = 2$ ուղիղներով ox առանցքի շուրջը առաջացած մարմնի մակերևույթի մակերեսը:

Օրինակ 11. Հաշվել $y = -2x^2$; $x = 0$; $x = 1$ ուղիղներով ox առանցքի շուրջը պտտումից առաջացած մարմնի մակերևույթի մակերեսը:

Օրինակ 12. Հաշվել $y = 3^x$; $x = 0$; $x = 3$ ուղիղներով ox առանցքի շուրջը պտտումից առաջացած մարմնի մակերևույթի մակերեսը:

Օրինակ 13. Հաշվել $y = \sin^2 x$; $x = \frac{\pi}{6}$; $x = \frac{\pi}{2}$ ox առանցքի շուրջը պտտումից առաջացած մարմնի մակերևույթի մակերեսը:

Գլուխ 2. ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ

§ 2.1. Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներ

2.1.1. Առաջին կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներ

Հավասարումը կոչվում է դիֆերենցիալ հավասարում, եթե նրա մեջ մտնող անհայտ ֆունկցիան մտնում է իր ածանցյալով: Եթե անհայտ ֆունկցիան մեկ փոփոխականի ֆունկցիա է, ապա հավասարումը կոչվում է սովորական դիֆերենցիալ հավասարում:

Սահմանում 1. Հետևյալ տեսքի հավասարումը՝

$$F(x, y, y') = 0, \quad (2.1.1)$$

որտեղ x -ը անհայտ փոփոխականն է, $y = f(x)$ -ը, որոնելի ֆունկցիան $y' = f'(x)$ -ը՝ տվյալ որոնելի ֆունկցիայի ածանցյալը, կանվանենք առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարում: Հաճախ (2.1.1) հավասարումը պարզեցումից հետո բերվում է հետևյալ տեսքին՝

$$y' = Q(x, y): \quad (2.1.2)$$

Եթե (2.1.2) հավասարումը փոխարինենք $y' = \frac{dy}{dx}$ -ով, կստանանք՝

$$dy - Q(x, y)dx = 0: \quad (2.1.3)$$

(2.1.3) հավասարումը՝

$$Q_1(x, y)dx + Q_2(x, y)dy = P(x, y), \quad (2.1.4)$$

ընդհանուր տեսքի դիֆերենցիալ հավասարման մասնավոր տեսքն է:

Դիֆերենցիալ հավասարման օրինակներ՝

$$3y' = 5(4x^2 - 3x + 7) \sin^2 3y; \quad 4 \cos 2x \cdot e^{2y} y' = 3 \sin 2x;$$

$$5\sqrt{1-x^2} \sin 2y \cdot y' = 7x:$$

Սահմանում 2. Առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը, $y = \varphi(x)$ ֆունկցիաները տեղադրելով դիֆերենցիալ հավասարման մեջ, դարձնում է նույնությոն:

Օրինակ. Դիցուք տրված է հետևյալ առաջին կարգի հավասարումը՝

$$2y' - 7x^2 = 0:$$

Այս հավասարման լուծումն է $6y = 7x^3 + c$; ($c = const$) ցանկացած x -ի համար, որը անվանում են այդ դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրալային կոր:

Կոշու խնդիրը. Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը՝

$$\begin{cases} y' = f(x; y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (2.1.5)$$

որտեղ $f(t; y)$ -ն տրված ֆունկցիա է G տիրույթում, իսկ $\forall (x_0; y_0) \in G$:

Ձևակերպենք հետևյալ հիմնական արդյունքներից մեկը:

Թեորեմ (Կոշի). Դիցուք $f(x; y)$ և $\frac{\partial f}{\partial y}$ ֆունկցիաները որոշված և անընդհատ են G տիրույթում: Այդ դեպքում (2.1.5) Կոշու խնդիրը $\forall (x_0; y_0) \in G$ կետի համար ունի և այն էլ միակ լուծում:

Նախնական կամ Կոշի պայմանը տրվում է հետևյալ տեսքով՝

$$y|_{x=x_0} = y_0: \quad (2.1.6)$$

Կոորդինատական (xoy) հարթության այն բոլոր կետերը, որոնց համար տեղի ունի (2.1.5) պայմանը, անվանում են հատուկ կետեր, որոնցով անցնում են մեկից ավելի ինտեգրալային կորեր, կամ ոչ մի կոր չի անցնում:

Խնդիր 1. Դիտարկենք ռադիոակտիվ նյութի տրոհման խնդիրը, որի զանգվածը t պահին $M(t)$ է: Փորձից հայտնի է, որ ռադիոակտիվ նյութի տրոհման արագությունը ուղիղ համե-

մատական է այդ պահին եղած ռադիոակտիվ նյութի զանգվածին՝

$$\frac{dM(t)}{dt} = -kM(t), \quad (2.1.7)$$

որտեղ k -ն ռադիոակտիվ նյութը բնորոշ հաստատուն է:

Վերոգրյալ 2.1.6 հավասարումից կստանանք՝

$$\frac{dM(t)}{M(t)} = -k dt \Rightarrow \int \frac{dM(t)}{M(t)} = -k \int dt:$$

Այսինքն՝

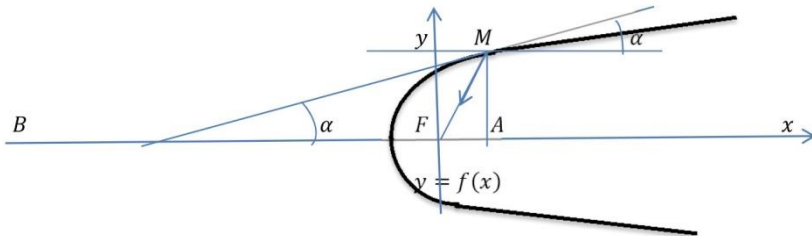
$$M(t) = \text{const} \cdot e^{-kt};$$

Եթե հայտնի է, որ ռադիոակտիվ նյութը $t = 0$ պահին $M(0) = M_0$ որպես սկզբնական պայման, ապա կունենանք՝

$$M(t) = M_0 \cdot e^{-kt}:$$

Տրված բանաձևը արտահայտում է, որ ռադիոակտիվ նյութը նվազում է էքսպոնենցյալ օրենքով և զրո չի դառնում:

Խնդիր 2. Պահանջվում է գտնել հայելային մակերևույթի տեսքը, որն առանցքային xOy հարթությունում ունի համաչափություն և այնպիսին է, որ առանցքին զուգահեռ ճառագայթները առանցքի որոշակի F ֆոկուսի են անդրադառնում:



Նկ. 2.1.

Լուծում

Խնդրի պահանջը ներկայացված է Նկար 2.1-ում: Համարենք, որ F ֆոկուսը կոորդինատների սկզբնակետի հետ ($F = 0$): $y = f(x)$, կորի ցանկացած $M(x, y)$ կետով տարված

շոշափողի կազմած անկյունը Ox առանցքի հետ նշանակենք α -ով: Հայտնի է, որ ըստ լույսի անդրադարձման օրենքի՝ անկման և անդրադարձման անկյունները իրար հավասար են, այս ΔAFM -ից կունենանք՝

$$BF = FM = z(x) = \sqrt{x^2 + y^2(x)}:$$

Իսկ ΔABM -ից կստանանք հետևյալը՝

$$y'(x) \equiv tg\alpha \equiv \frac{y(x)}{x+z(x)}:$$

Տեղադրելով $z(x)$ -ի արժեքը՝ վերագրյալ արտահայտությունը կբերվի հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարմանը՝

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x + \sqrt{x^2 + y^2(x)}},$$

կամ անցնելով դիֆերենցիալ տեսքի՝ որոշ ձևափոխություններից հետո կունենանք՝

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d[x^2 + y^2(x)]}{\sqrt{x^2 + y^2(x)}} \equiv dx:$$

Այստեղից ինտեգրելով՝ կստանանք՝

$$\int \frac{d[x^2 + y^2(x)]}{\sqrt{x^2 + y^2(x)}} \equiv \int dx + c:$$

Այսինքն՝

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2(x)} &\equiv x + c; \Rightarrow x^2 + y^2(x) \equiv x^2 + 2cx + c^2; \Rightarrow x \\ &\equiv \frac{1}{2c} y^2(x) - \frac{c}{2}: \end{aligned}$$

Ստացանք պարաբոլների ընտանիք և պտտելով Ox առանցքի շուրջը՝ կստանանք պարաբոլոիդների ընտանիք:

2.1.2. Առաջին կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների ընդհանուր և մասնակի լուծումներ

Սահմանում 3. (2.1.3) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծում կանվանենք $y = \varphi(x, c)$ ֆունկցիան, կախված է x փոփոխականից և ցանկացած c հաստատունից:

Այսինքն, եթե այն (2.1.3) հավասարման ընդհանուր լուծումն է, ապա այն լուծում է ցանկացած հաստատունի դեպքում:

Սահմանում 2. (2.1.2) հավասարման մասնակի լուծում կանվանենք այն լուծումը, որը ստացում է որոշակի հաստատունի դեպքում:

Օրինակ 1. $y = x^2 + 3x - 7$ ֆունկցիան $y' = 2x + 3$ դիֆերենցիալ հավասարման մասնակի լուծում է, $y = x^2 + 3x + c$ ֆունկցիան ցանկացած c հաստատունի համար ընդհանուր լուծում: Ընդհանուր լուծման երկրաչափական իմաստը կորդինատական հարթությունում ինտեգրալային կորերի բազմությունն է՝ կախված c հաստատունից:

Օրինակ 2. Գտնենք $y \cdot y' = 3x^2 + 6x - 7$ դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծման ինտեգրալային կորերի բազմությունը:

Լուծում

Դիֆերենցիալ հավասարումը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 6x - 7; \Rightarrow y \cdot dy = (3x^2 + 6x - 7) \cdot dx; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int y \cdot dy = \int (3x^2 + 6x - 7) \cdot dx,$$

որտեղից ինտեգրելով կստանանք բինտեգրալային կորերի բազմությունը՝

$$y^2 = 2x^3 + 6x^2 - 14x + c:$$

Օրինակ 3. Գտնենք $e^{2y+3x}y' - (n+1)x^n = \sin(4x-3)$ դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրալային կորերի բազմությունը:

Լուծում

Դիֆերենցիալ հավասարումը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\begin{aligned} e^{2y} \cdot dy &= e^{-3x}[(n+1)x^n + \sin(4x-3)] \cdot dx, \\ \int e^{2y} \cdot dy &= \int e^{-3x}[(n+1)x^n + \sin(4x-3)] \cdot dx, \\ \frac{1}{2}e^{2y} &= I_1 + I_2 + c, \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

որտեղ՝

$$I_1 = \int e^{-3x}(n+1)x^n \cdot dx; \quad I_2 = \int e^{-3x} \sin(4x-3) \cdot dx:$$

Վերագրյալ՝ $I_1; I_2$ ինտեգրալները հաշվենք մասերով ինտեգրման եղանակով՝

$$\begin{aligned} I_1 &= \int e^{-3x}(n+1)x^n \cdot dx = -\frac{n+1}{3} \int x^n \cdot de^{-3x} = \\ &= -\frac{(n+1)x^n}{3} e^{-3x} + \\ &+ \frac{(n+1)n}{3} \int e^{-3x} x^{n-1} \cdot dx = \\ &= -\frac{(n+1)x^n}{3} e^{-3x} - \frac{(n+1)n}{3^2} \cdot \int x^{n-1} \cdot de^{-3x} = \\ &= -\frac{(n+1)}{3} x^n e^{-3x} - \frac{(n+1)n}{3^2} x^{n-1} e^{-3x} + \\ &+ \frac{(n+1)n(n-1)}{3^2} \int e^{-3x} x^{n-2} \cdot dx = \\ &= -\frac{(n+1)}{3} x^n e^{-3x} - \frac{(n+1)n}{3^2} x^{n-1} e^{-3x} - \\ &- \frac{(n+1)n(n-1)}{3^3} x^{n-2} e^{-3x} = \\ &= -\frac{(n+1)e^{-3x}}{3} \left[x^n + \frac{x^{n-1}}{3} + \frac{x^{n-2}}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} \right], \end{aligned}$$

$$I_2 = \int e^{-3x} \sin(4x - 3) \cdot dx = -\frac{1}{3} \int \sin(4x - 3) \cdot de^{-3x} =$$

$$= -\frac{e^{-3x}}{3} \sin(4x - 3) -$$

$$-\frac{4}{3} \int e^{-3x} \cos(4x - 3) \cdot dx =$$

$$= -\frac{e^{-3x}}{3} \sin(4x - 3) + \frac{4}{9} \int \cos(4x - 3) \cdot de^{-3x} =$$

$$= -\frac{e^{-3x}}{3} \sin(4x - 3) + \frac{4e^{-3x}}{9} \cos(4x - 3) +$$

$$+ \frac{16}{9} \int e^{-3x} \sin(4x - 3) \cdot dx:$$

Այստեղից կստանանք՝

$$I_2 = \frac{e^{-3x}}{9} [4 \cos(4x - 3) - 3 \sin(4x - 3)] + \frac{16}{9} I_2; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{e^{-3x}}{15} [3 \sin(4x - 3) - 4 \cos(4x - 3)]:$$

Հետևաբար դիտարկվող դիֆերենցիալ հավասարման (2.1.8) ինտեգրալային կորերի բազմությունը կունենա հետևյալ տեսքը

$$e^{2y} = -\frac{2e^{-3x}}{3} \left\{ (n+1) \left(x^n + \frac{x^{n-1}}{3} + \frac{x^{n-2}}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{[3 \sin(4x - 3) - 4 \cos(4x - 3)]}{5} \right\} \{(n+1)\}:$$

Օրինակ 4. Գտնենք $\sin(3y - 7) \cos(7y + 3) y' = x e^{x^2} + \pi^x \sin(5x + 1)$ դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրալային կորերի բազմությունը:

Լուծում

Դիֆերենցյալ հավասարումը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$\sin(3y - 7) \cos(7y + 3) \frac{dy}{dx} = x e^{x^2} + \pi^x \sin(5x + 1), \Rightarrow$$

$$\sin(3y - 7) \cos(7y + 3) dy = [x e^{x^2} + \pi^x \sin(5x + 1)] dx, \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \int \sin(3y - 7) \cos(7y + 3) dy = \\ = \int [x e^{x^2} + 9\pi^x \sin(5x + 1)] dx + c: \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Օգտվելով հետևյալ բանաձևից՝

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)],$$

և ընդունելով, որ $\alpha = 3y - 7$; $\beta = 7y + 3$ (2.1.9)-ը կրկնովի հետևյալ տեսքին՝

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \sin(10y - 4) dy - \frac{1}{2} \int \sin(4y + 10) dy = \int x e^{x^2} dx + \\ + \int \pi^x \sin(5x + 1) dx, \end{aligned}$$

կամ

$$\frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2} I_2 = I_3 + I_4, \quad (2.1.10)$$

որտեղ

$$I_1 = \int \sin(10y - 4) dy; \quad I_2 = \int \sin(4y + 10) dy,$$

$$I_3 = \int x e^{x^2} dx; \quad I_4 = \int \pi^x \sin(5x + 1) dx:$$

Ապա հաշվենք I_n ($n = \overline{1; 4}$) ինտեգրալները:

$$I_1 = \int \sin(10y - 4) dy = \frac{1}{10} \int \sin(10y - 4) d(10y - 4) = -\frac{1}{10}:$$

$$\begin{aligned} I_2 = \int \sin(4y + 10) dy = \frac{1}{4} \int \sin(4y + 10) d(4y + 10) = \\ = -\frac{1}{4} \cos(4y + 10), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} dx^2 = \frac{1}{2} e^{x^2}, \\
I_4 &= \int \pi^x \sin(5x + 1) dx = \int e^{x \ln \pi} \sin(5x + 1) dx = \\
&= \frac{1}{\ln \pi} \int \sin(5x + 1) d e^{x \ln \pi} = \\
&= \frac{e^{x \ln \pi}}{\ln \pi} \sin(5x + 1) - \frac{5}{\ln \pi} \int e^{x \ln \pi} \cos(5x + 1) dx = \\
&= \frac{e^{x \ln \pi}}{\ln \pi} \sin(5x + 1) - \\
&- \frac{5}{(\ln \pi)^2} \int \cos(5x + 1) d e^{x \ln \pi} = \\
&= \frac{\pi^x}{(\ln \pi)^2} [\ln \pi \sin(5x + 1) - 5 \cos(5x + 1)] - \\
&- \frac{25}{(\ln \pi)^2} I_4
\end{aligned}$$

այստեղից կունենանք՝

$$I_4 = \frac{\pi^x}{25 + (\ln \pi)^2} [\ln \pi \sin(5x + 1) - 5 \cos(5x + 1)],$$

և այդ դեպքում դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրալային կորերի բազմությունը կլինի՝

$$\begin{aligned}
&\cos(10y - 4) + \frac{5}{2} \cos(4y + 10) + 5e^{x^2} + \\
&+ \frac{10\pi^x [\ln \pi \sin(5x + 1) - 5 \cos(5x + 1)]}{25 + (\ln \pi)^2} = c:
\end{aligned}$$

Օրինակ 5. Գտնենք $(x^2 + 1) \sin^3(2y - 3) y' = x^3$ դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը:

Լուծում

Դիֆերենցիալ հավասարումը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$(x^2 + 1)\sin^3(2y - 3)\frac{dy}{dx} = x^3; \Rightarrow \sin^3(2y - 3)\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{(x^2 + 1)} dx:$$

Այստեղից կստանանք՝

$$I_1 = I_2 + c; \quad (2.1.11)$$

որտեղ

$$I_1 = \int \sin^3(2y - 3) dy; \quad I_2 = \int \frac{x^3}{(x^2 + 1)} dx:$$

Օգտվելով հետևյալ բանաձևից՝

$$4 \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - \sin 3\alpha, (*)$$

և ընդունելով $\alpha = 2y - 3$, հաշվենք I_1 ինտեգրալը՝

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \sin^3(2y - 3) dy = \\ &= \frac{3}{4} \int \sin(2y - 3) dy - \frac{1}{4} \int \sin 3(2y - 3) dy = \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{8} \int \sin(2y - 3) d(2y - 3) - \frac{1}{24} \int \sin 3(2y - 3) d3(2y - 3) =$$

$$= -\frac{3}{8} \cos(2y - 3) + \frac{1}{24} \cos 3(2y - 3):$$

այնուհետև՝ I_2 ինտեգրալը՝

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{x^3}{(x^2 + 1)} dx = \int \frac{x \cdot x^2}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x \cdot (x^2 + 1 - 1)}{x^2 + 1} dx = \\ &= \int \frac{x(x^2 + 1)dx}{x^2 + 1} - \int \frac{xdx}{x^2 + 1} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int dx^2 - \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - \ln(x^2 + 1)}{2}:$$

Այդ դեպքում դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրալային կորերի բազմությունը կլինի՝

$$\cos 3(2y - 3) - 9 \cos(2y - 3) = 12[x^2 - \ln(x^2 + 1)] + c:$$

Առաջադրանքներ

Օրինակ 1. Գտնել $e^{-3y} \cos^3(2 - 5y) y' = (3x^2 + 7x + 1) \sin(4x - 1)$ դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրալային կորերի բազմությունը:

Ցուցում. Օգտվել $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$ բանաձևից:

Օրինակ 2. Գտնել

$$\pi^{2y-3x}(y^2 + 4y - 9)y' = \sin^3(2x - 1) + e^{3x}$$

դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրալային կորերի բազմությունը:

Օրինակ 3. Գտնել

$$e^{3y} \sin(2y - 7) \sin(3y - 4) y' + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \sin^3(x - 5) \cos 3x$$

դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրալային կորերի բազմությունը:

Օրինակ 4. Գտնել

$$(2y^2 - 7y + 4) \sin 2y \cdot y' + 3\pi^{2x} \cos 3x = \ln(x^2 + 1)$$

դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը:

Օրինակ 5. Գտնել

$$\pi\sqrt{y^2 - 9} \cdot y' - 10(6x^2 - x + 1)\pi^{3x} = \operatorname{tg}(2x - 7)$$

դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը:

Օրինակ 6. Գտնել

$$\begin{aligned} 7e^{2y}[\sin 3y \sin 2y - \sin^3(y - 1)] \cdot y' = \\ = (x^2 - 4x + 1) \cos^3(2x - 7) \end{aligned}$$

դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրալային կորերի բազմությունը:

Օրինակ 7. Գտնել

$$3 \cos^2(7y - 3) \cdot y' + 11(x + 3) \sin^3(x + 2) = 0$$

դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրալային կորերի բազմությունը:

Օրինակ 8. Գտնել

$$(y^3 - 3y + 11) \cos^2(7y - 3) \cdot y' + 3^x \sin^3(5x - 11) = 0$$

դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրալային կորերի բազմությունը:

Օրինակ 9. Գտնել

$$3 \cos^2(7y - 3) \sin^3(3y - 7) \cdot y' + \sin^2(x + 2) \cos^3(x - 2) = 0$$

դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրալային կորերի բազմությունը:

Օրինակ 10. Գտնել

$$3 \operatorname{tg}(5y - 4) \cdot y' + 8 \operatorname{ctg}(x + 2) = \sin(x - 1) \cos(x + 1)$$

դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրալային կորերի բազմությունը:

Օրինակ 11. Գտնել

$$\begin{aligned} e^{2y} \sin(y + 1) \cos(2y + 3) \sin(3y + 4) \cdot y' = \\ = \sin^2(x + 1) \sin(x - 2) \end{aligned}$$

դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրալային կորերի բազմությունը:

2.1.3. Փոփոխականների անջատման մեթոդի կիրառությունը առաջին կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներում

Դիցուք տրված է հետևյալ առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$f_1(x)F_1(y)dx + f_2(x)F_2(y)dy = 0: \quad (2.1.12)$$

Սահմանում 1. (2.1.7) տեսքի հավասարումը, որտեղ $f_1(x)$, $F_1(x)$, $f_2(x)$ և $F_2(x)$ ֆունկցիաները հավասար չեն 0-ի, կանվանենք անջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարում: (2.1.7) հավասարման երկու մասերը բաժանենք $f_2(x)F_1(y)$ -ի վրա, կստանանք՝

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \frac{F_2(y)}{F_1(y)} dy = 0:$$

Ինտեգրելով ստացված հավասարման երկու մասերը՝ կունենանք՝

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \int \frac{F_2(y)}{F_1(y)} dy = c$$

և (2.1.7) հավասարման ընդհանուր լուծումը անբացահայտ տեսքով:

Կատարելով հետևյալ նշանանակումները՝

$$f(x) = \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx \text{ և } F(y) = \int \frac{F_2(y)}{F_1(y)} dy, \quad (2.1.13)$$

կստանանք (2.1.13) հավասարման ընդհանուր լուծումը հետևյալ պարզ տեսքով՝

$$f(x) + F(y) = c:$$

Օրինակ 1. Լուծել հավասարումը՝

$$2y' = \frac{y^2}{x+1}:$$

Գտնել հավասարման ընդհանուր լուծումը և մասնակի լուծումը, երբ $x = e$, ապա $y=3$:

Լուծում

Տրված հավասարումը բերվում է հետևյալ տեսքին՝

$$2 \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x+1}; \Rightarrow 2 \frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x+1}:$$

Ինտեգրենք երկու մասերը,

$$\Rightarrow 2 \int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x+1} + c:$$

Այստեղից կստանանք դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը՝

$$-\frac{2}{y} = \ln(x+1) + c, \Rightarrow y = -\frac{2}{\ln(x+1) + c}:$$

Այնուհետև ստանանք հավասարման մասնակի լուծումը: Քանի որ $x = e - 1$, ապա $y = 3$ ընդհանուր լուծումից կունենանք՝

$$y = -\frac{2}{\ln(x+1) + c}, \Rightarrow 3 = -\frac{2}{\ln(e-1+1) + c}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 = -\frac{2}{1+c}, \quad c = -\frac{5}{3}:$$

Այսինքն հավասարման մասնակի լուծումը կլինի՝

$$y = 6(5 - 3 \ln(x+1))^{-1}:$$

Օրինակ 2. Լուծել հավասարումը՝

$$e^x(y-3)y' = \frac{2x}{y+3}:$$

Գտնել հավասարման ընդհանուր լուծումը և մասնակի լուծումը, երբ $x=0$, ապա $y=3$:

Լուծում

Տրված հավասարումը բերվում է հետևյալ տեսքին՝

$$\begin{aligned}
e^x(y-3)\frac{dy}{dx} &= \frac{2x}{y+3}, \Rightarrow (y^2-9)dy = 2xe^{-x}dx, \Rightarrow \\
&\Rightarrow \int (y^2-9)dy = 2 \int xe^{-x}dx + c, \rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{y^3}{3} - 9y = 2xe^{-x} - 2 \int e^{-x}dx + c, \Rightarrow \frac{y^3}{3} - 9y \\
&= 2e^{-x}(x+1) + c:
\end{aligned}$$

Այստեղից հավասարման ընդհանուր լուծումը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$y^3 - 27y = 6e^{-x}(x+1) + c:$$

Ստանանք հավասարման մասնակի լուծումը:

Քանի որ $x=0$; $\rightarrow y=3$, ապա ընդհանուր լուծումից կունենանք՝

$$\begin{aligned}
y^3 - 27y &= 6e^{-x}(x+1) + c, \Rightarrow 3^3 - 27 \cdot 3 = 6 \cdot e^0(0+1) + c, \Rightarrow \\
&\Rightarrow c = -60:
\end{aligned}$$

Այստեղից կունենանք հավասարման մասնակի լուծումը հետևյալ տեսքով՝

$$y^3 - 27y = 6e^{-x}(x+1) - 60:$$

Օրինակ 3. Լուծել հավասարումը՝

$$3(x^2+4)y' - (4+x)\sqrt{9-y^2} = 0:$$

Գտնել հավասարման ընդհանուր լուծումը և մասնակի լուծումը, երբ $x=0$, ապա $y=0$:

Լուծում

Տրված հավասարումը բերվում է հետևյալ տեսքին՝

$$\begin{aligned}
3 \frac{x^2+4}{\sqrt{9-y^2}} y' &= 4+x, \Rightarrow \frac{3(x^2+4)}{\sqrt{9-y^2}} \cdot \frac{dy}{dx} = 4+x, \Rightarrow \int \frac{3dy}{\sqrt{9-y^2}} = \\
&= \int \frac{(4+x)dx}{x^2+4} + c:
\end{aligned}$$

Ինտեգրելուց հետո կստանանք հավասարման ընդհանուր լուծումը հետևյալ տեսքով՝

$$\arcsin \frac{y}{3} = 2 \arctg \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + c:$$

Այնուհետև ստանանք հավասարման մասնակի լուծումը:

Քանի որ $x = 2; \Rightarrow y = 3$, ապա ընդհանուր լուծումից կունենանք՝

$$\begin{aligned} \arcsin \frac{y}{3} &= 2 \arctg \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + c, \rightarrow \arcsin 1 = \\ &= 2 \arctg 1 + \ln 8 + c, \rightarrow c = -\ln 8: \end{aligned}$$

Հետևաբար մասնակի լուծումը կլինի՝

$$\arcsin \frac{y}{3} = 2 \arctg \frac{x}{2} + \ln \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{8}:$$

Օրինակ 4. Լուծել հավասարումը՝

$$(x^2 + 16)(y + 1)y' + \frac{2x}{3 \sin y} = 0:$$

Գտնել հավասարման ընդհանուր լուծումը և մասնակի լուծումը, երբ $x = 0; \Rightarrow y = 0$:

Լուծում

Տրված հավասարումը բերվում է հետևյալ տեսքին՝

$$3(y + 1) \sin y \cdot y' + \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 16}} = 0:$$

Այստեղից կունենանք՝

$$3(y + 1) \sin y \cdot dy + \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 16}} dx = 0:$$

Ինտեգրելով տվյալ հավասարումը՝

$$3 \int y \sin y dy + 3 \int \sin y dy + \int \frac{2x dx}{\sqrt{x^2 + 16}} dx = 0,$$

կատանանք հավասարման ընդհանուր լուծումը՝

$$\sin y - (1 + y)\cos y + \frac{2}{3}\sqrt{x^2 + 16} = c:$$

Քանի որ $x = 0, \Rightarrow y = 0$, կունենանք՝ $c = \frac{5}{3}$, և մասնավոր լուծումը կլինի՝

$$\sin y - (1 + y)\cos y + \frac{2}{3}\sqrt{x^2 + 16} = \frac{5}{3}:$$

Օրինակ 5. Լուծել հավասարումը՝

$$\frac{2}{1 + \cos 2y}y' + \frac{3}{x^2 + 25} = 0:$$

Գտնել հավասարման ընդհանուր լուծումը և մասնակի լուծումը, երբ $x = 1; \Rightarrow y = \frac{\pi}{4}$:

Օրինակ 6. Լուծել հավասարումը՝

$$\frac{3}{7\sin^2 3y}y' - \frac{2}{5\cos^2 2x} = 0:$$

Գտնել ներքոգրյալ հավասարումների ընդհանուր լուծումը և մասնակի լուծումը, երբ $x = 45^\circ, \Rightarrow y = 30^\circ$:

Օրինակ 7. Լուծել հավասարումը՝

$$5(x^2 - 9) \cdot y' + 7\sqrt{y^2 + 1} = 0:$$

Օրինակ 8. Լուծել հավասարումը՝

$$3y \sin^2(2x + 1) \cdot y' - 5 \cos^2 y^2 = 0:$$

Օրինակ 9. Լուծել հավասարումը՝

$$2 \sin^2(2x + 45^\circ) \cdot y' + 7\sqrt{y^2 + 1} = 0:$$

Օրինակ 10. Լուծել հավասարումը՝

$$9\sqrt{16-x^2} \cdot y' - 2(x^2 - 25) = 0:$$

Օրինակ 11. Լուծել հավասարումը՝

$$2\sqrt{4+x^2} \cdot y' - 3\frac{e^{2y^2}}{y} = 0:$$

Օրինակ 12. Լուծել հավասարումը՝

$$5 \ln(y+3) e^x \cdot y' - 9 \frac{(x^2+12)}{y} = 0:$$

Օրինակ 13. Լուծել հավասարումը՝

$$\cos^2(3x+15^\circ) \cdot y' - \sin^2(3x-15^\circ) = 0:$$

Օրինակ 14. Լուծել հավասարումը՝

$$2(x^2+3x+11) \cdot y' - 3(y^2-2y+5) = 0:$$

Օրինակ 15. Լուծել հավասարումը՝

$$7\sqrt{49+y^2} \cdot y' - 2\frac{(x^2-16)}{y} = 0:$$

2.1.4. Համասեռ սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներ

Սահմանում 1. Կասենք, որ $f(x, y)$ -ը α կարգի համասեռ ֆունկցիա է, երբ (x, y) կետը պատկանում է որոշման տիրույթին, հետևում է, որ (tx, ty) կետն էլ է պատկանում այդ տիրույթին ($t > 0$), այսինքն՝ $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$:

Սահմանում 2. Հետևյալ տեսքի դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (2.1.14)$$

կոչվում է համասեռ, եթե $P(x, y)$ և $Q(x, y)$ նույն α կարգի համասեռ ֆունկցիաներ են:

Երբ $x > 0$, ձևափոխելով (2.1.14) հավասարումը և օգտվելով նրանից, որ $P(x, y)$, $Q(x, y)$ ֆունկցիաները համասեռ են, կստանանք՝

$$\begin{aligned} P\left(x \cdot l, x \cdot \frac{y}{x}\right) dx + Q\left(x \cdot l, x \cdot \frac{y}{x}\right) dy &= 0; \Rightarrow \\ \Rightarrow x^\alpha P\left(l, \frac{y}{x}\right) dx + x^\alpha Q\left(l, \frac{y}{x}\right) dy &= 0; \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{P\left(l, \frac{y}{x}\right)}{Q\left(l, \frac{y}{x}\right)} \equiv f\left(\frac{y}{x}\right), \{P, Q \in C(D), (D) \subset R^2, Q(x, y) \neq 0\}: \end{aligned}$$

Այսպիսով, համասեռ սովորական դիֆերենցիալ հավասարումները բերվում են հետևյալ տեսքի՝

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right); f \in C(D): \quad (2.1.15)$$

Ներմուծենք նոր որոնելի ֆունկցիա՝

$$\begin{aligned} z(x) = \frac{y}{x}; \Rightarrow y = zx; \Rightarrow y' = z + xz'; \Rightarrow z + xz' &= f(z); \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}; \end{aligned}$$

Ստացվեց անջատված փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարում:

Երբ $f(z) = z$, այդ դեպքում (2.1.10)-ը բերվում է հետևյալ հավասարմանը՝

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + \ln c, \Rightarrow \ln y = \ln cx, \Rightarrow y = cx,$$

և ստացանք գծային ֆունկցիաների ընտանիքը:

Սահմանում 3. Հետևյալ տեսքի դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$y' + p(x)y = q(x)y^k, (k \neq 0; k \neq 1) \quad (2.1.16)$$

անվանում են **Բեռնուլիի** հավասարում:

Ենթադրելով, որ $y \neq 0$ և բաժանելով y^k -ի վրա, կստանանք՝

$$\frac{1}{1-k} (y^{1-k})' + P(x)y^{1-k} = q(x):$$

Կատարելով նշանակում՝ $y^{1-k} = z(x)$ ՝ ստանում ենք հետևյալ գծային դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$\frac{1}{1-k} \frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x):$$

Սահմանում 4. Հետևյալ տեսքի դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y + q(x)y^2 = f(x), \quad (2.1.12)$$

անվանում են **Ռիկատիի** հավասարում:

Ընդհանուր դեպքում (2.1.12)-ը հնարավոր չէ լուծել: Եթե հայտնի լինի հավասարման որևէ $y_1(x)$ լուծում, ապա կատարելով (2.1.12)-ում փոփոխականի փոխարինում՝

$$z(x) = y(x) - y_1(x),$$

կստանանք՝

$$y_1' + z' + p(x)(y_1 + z) + q(x)(y_1 + z)^2 = f(x)$$

կամ ընդունելով $f(x) \equiv y_1' + p(x)y_1 + q(x)y_1^2$ ՝ վերոգրյալ հավասարումը կրեքվի

$$z' + [p(x) + 2q(x)]z + q(x)z^2 = 0$$

Բեռնուլիի հավասարմանը:

Օրինակ 1. Լուծել հետևյալ համասեռ սովորական դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$x \cdot y' = y + x \cdot \sin \frac{y}{x};$$

Օրինակ 2. Լուծել հետևյալ համասեռ սովորական դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$2xy \cdot y' = y^2 + x^3;$$

Այս հավասարումը բերվում է Բեռնուլիի հավասարմանը՝

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y}; \quad (2.1.13)$$

Կատարելով հետևյալ նշանակումը՝ $y^2 = z(x)$, վերագրյալ դիֆերենցիալ հավասարումը կբերվի հետևյալ գծային հավասարմանը՝

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} + x^2,$$

որի ընդհանուր լուծումն է $z(x) = c_1 x + \frac{x^3}{2}$,

հետևաբար $y = \pm \sqrt{c_1 x + \frac{x^3}{2}}$:

2.1.5. Ածանցյալի նկատմամբ բարձր կարգի դիֆերենցիալ հավասարումներ

Ա) Դիցուք տրված է հետևյալ սովորական դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$a(y')^2 + by' + c = 0; \quad (a; b; c = const) \quad (2.1.14)$$

Գտնել տվյալ դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը:

Լուծում

Հավասարումը լուծելու համար կատարենք նշանակում՝

$$y' = z: \quad (2.1.15)$$

Այդ դեպքում (2.1.14) դիֆերենցիալ հավասարումը կբերվի հետևյալ տեսքին՝

$$az^2 + bz + c = 0: \quad (2.1.16)$$

Լուծելով (2.1.16) քառակուսի հավասարումը՝ կստանանք՝

$$z = \left\{ z_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, (D > 0), z_3 = \frac{-b}{2a}; (D = 0); z_{4,5} = \frac{-b + i\sqrt{D}}{2a}, (D < 0; i = \sqrt{-1}) \right\}:$$

Հաշվի առնելով z -ի արժեքը՝ (2.1.15) դիֆերենցիալ հավասարումից կստանանք՝

$$\frac{dy}{dx} = z, \Rightarrow \int dy = z \int dx + const, \Rightarrow y = zx + const:$$

Բ) Դիցուք տրված է հետևյալ սովորական դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$ae^{Ex+Fy} \sin^2(Ay + B) (y')^2 + be^{\frac{Ex+Fy}{2}} (Mx + N) \sin(Ay + B) y' + c(Mx + N)^2 = 0: \quad (2.1.17)$$

Գտնել տվյալ դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը:

Լուծում

Նախ հավասարումը բաժանենք $(Mx + N)^2 \neq 0$ -ի վրա, կստանանք՝

$$a \left(\frac{e^{\frac{Ex+Fy}{2}} \sin(Ay + B) y'}{Mx + N} \right)^2 + b \left(\frac{e^{\frac{Ex+Fy}{2}} \sin(Ay + B) y'}{Mx + N} \right) + c = 0,$$

և կատարենք նշանակում՝

$$\frac{e^{\frac{Ex+Fy}{2}} \sin(Ay + B) y'}{Mx + N} = t: \quad (2.1.18)$$

Այդ դեպքում (2.1.17) դիֆերենցիալ հավասարումը կբերվի հետևյալ տեսքին՝

$$at^2 + bt + c = 0: \quad (2.1.19)$$

Լուծելով (2.1.16) քառակուսի հավասարումը՝ կստանանք՝

$$t = \left\{ t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, (D > 0); t_3 = \frac{-b}{2a}, (D = 0); \right. \\ \left. t_{4,5} = \frac{-b \pm i\sqrt{D}}{2a}, (D < 0; i = \sqrt{-1}) \right\}:$$

Հաշվի առնելով t -ի արժեքը՝ (2.1.18) դիֆերենցիալ հավասարումից կստանանք՝

$$e^{\frac{Fy}{2}} \sin(Ay + B) y' = t(Mx + N) e^{\frac{Ex}{2}}, \Rightarrow e^{\frac{Fy}{2}} \sin(Ay + B) dy = \\ = t e^{\frac{Ex}{2}} (Mx + N) dx:$$

Այստեղից կունենանք՝

$$I_1 = t \cdot I_2 + const, \quad (2.1.20)$$

որտեղ

$$I_1 = \int e^{\frac{Fy}{2}} \sin 2(Ay + B) dy, I_2 = \int e^{\frac{Ex}{2}} (Mx + N) dx:$$

Նախ հաշվենք I_1 ինտեգրալը՝

$$I_1 = \int e^{\frac{Fy}{2}} \sin(Ay + B) dy = \frac{2}{F} \int \sin(Ay + B) de^{\frac{Fy}{2}} = \\ = \frac{2e^{\frac{Fy}{2}}}{F} \sin(Ay + B) -$$

$$- \frac{2A}{F} \int e^{\frac{Fy}{2}} \cos(Ay + B) dy = \frac{2e^{\frac{Fy}{2}}}{F} \sin(Ay + B) -$$

$$-\frac{4Ae^{\frac{Fy}{2}}}{F^2} \cos(Ay + B) - \frac{4A^2}{F^2} I_1:$$

Այսինքն՝

$$I_1 = \frac{2e^{\frac{Fy}{2}}}{F^2 + 4A^2} [F \sin(Ay + B) - 2A \cos(Ay + B)]:$$

Հաշվենք I_2 ինտեգրալը՝

$$\begin{aligned} I_2 &= \int e^{\frac{Ex}{2}} (Mx + N) dx = \frac{2}{E} \int (Mx + N) de^{\frac{Ex}{2}} = \\ &= \frac{2e^{\frac{Ex}{2}}}{E^2} [E(Mx + N) - 2M]: \end{aligned}$$

Հաշվի առնելով I_1 ; I_2 ինտեգրալները՝ դիտարկվող դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի՝

$$\begin{aligned} \frac{2e^{\frac{Fy}{2}}}{F^2 + 4A^2} [F \sin(Ay + B) - 2A \cos(Ay + B)] = \\ = t \cdot \frac{2e^{\frac{Ex}{2}}}{E^2} [E(Mx + N) - 2M] + const: \end{aligned}$$

Գ) Դիցուք, տրված է հետևյալ սովորական դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$\begin{aligned} A \left(\frac{f(y)y'}{\varphi(x)} \right)^3 + B \left(\frac{f(y)y'}{\varphi(x)} \right)^2 + C \frac{f(y)y'}{\varphi(x)} + E \\ = 0; \quad (A; B; C; E = const): \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

Գտնել (2.1.14) հավասարման ընդհանուր լուծումը:

Լուծում

(2.1.14) դիֆերենցիալ հավասարումում կատարելով հետևյալ նշանակումը՝

$$\frac{f(y)y'}{\varphi(x)} = q, \quad (2.1.22)$$

կստանանք՝

$$Aq^3 + Bq^2 + Cq + E = 0: \quad (2.1.23)$$

Ենթադրելով, որ երրորդ կարգի (2.1.23) հավասարման արմատներից մեկը $q = q_0$ կատարենք հետևյալ գործողությունը՝

$\frac{Aq^3 + Bq^2 + Cq + E}{Aq^3 - Aq_0q^2}$	$\frac{q - q_0}{Aq^2 + B_0q + C_0}$
$\frac{B_0q^2 + Cq}{B_0q^2 - B_0q_0q}$	
$\frac{C_0q + E}{C_0q - C_0q_0}$	
$E + C_0q_0$	

Այստեղից, եթե.

$$Aq^3 + Bq^2 + Cq + E = (q - q_0)(Aq^2 + B_0q + C_0), \quad (2.1.24)$$

անհրաժեշտ է, որ տեղի ունենա հետևյալ պայմանը՝

$$B_0 = B - Aq_0; \quad C_0 = C + B_0q_0; \quad E + C_0q_0 = 0:$$

Հետևաբար նկատի ունենալով (2.1.24) վերլուծությունը՝ (2.1.23) հավասարման լուծումները կլինեն՝

$$q = \left\{ q_{1,2,3} = \frac{-B_0 \pm \sqrt{\Delta}}{2A}, (\Delta \geq 0), \right. \\ \left. q_{4,5} = \frac{-B_0 \pm i\sqrt{\Delta}}{2A} (\Delta < 0; i = \sqrt{-1}), q_6 = q_0 \right\}: \quad (2.1.25)$$

Հաշվի առնելով (2.1.24) ու (2.1.25) արտահայտությունները՝ (2.1.22)-ը կրեքվի հետևյալ հավասարմանը՝

$$I_f = q \cdot I_\varphi + const, \quad (2.1.26)$$

որտեղ՝

$$I_f = \int f(y)dy; \quad I_\varphi = q \int \varphi(x)dx: \quad (2.1.27)$$

Տրված $f(y)$; $\varphi(x)$ ֆունկցիաների դեպքում հաշվելով I_f ; I_φ ինտեգրալները և տեղադրելով (2.1.26)-ի մեջ՝ կստանանք (2.1.21)-ի ընդհանուր լուծումը:

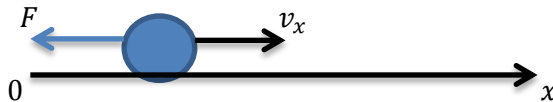
§ 2.2. Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների կիրառությունը ֆիզիկայի խնդիրներում

2.2.1. Ֆիզիկայի՝ փոփոխականների անջատման մեթոդով դիֆերենցիալ հավասարումների ինտեգրմանն ուղղված խնդիրներ

Անհամասեռ միջավայրում մարմնի շարժման դեպքում դիմադրության ուժը փոխվում է

$$F = -\frac{2v^2}{3+s}, \quad (2.2.1)$$

որտեղ v -ն մարմնի արագությունն է մ/վրկ-ով, իսկ s -ը՝ անցած ճանապարհը մետրով: Որոշել անցած ճանապարհը որպես ժամանակի ֆունկցիա, եթե սկզբնական արագությունը $v_0 = 5$ մ/վ (Նկ.2.1):



Նկ. 2.1

Լուծում

Ենթադրենք շարժումը կատարվում է ox առանցքի ուղղությամբ, և $t = 0$ պահին մարմինը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում, այդ դեպքում ուժի պրոյեկցիան, որը կիրառվում է մարմնի վրա կտրվի հետևյալ տեսքով՝

$$F_x = -\frac{2v_x^2}{3+x}: \quad (2.2.2)$$

Հաշվի առնելով (2.2.2)-ը և ընդունելով մարմնի զանգվածը $m = 1$ կգ՝ կունենանք մարմնի շարժման հետևյալ հավասարումը՝

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2v_x^2}{3+x} \quad (2.2.3)$$

հետևյալ սկզբնական պայմաններով՝

$$x|_{t=0} = 0; \quad (u); \quad v_x|_{t=0} = 5 \left(\frac{u}{l} \right): \quad (2.2.4)$$

Երկրորդ կարգի (2.2.3) հավասարման լուծումը կարելի է ստանալ առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների երկու հաջորդական ինտեգրման: Առաջին դեպքում (2.2.3) հավասարումը, նկատի ունենալով, որ $= v_x dt$, բերվում է հետևյալ տեսքին՝

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{2v_x^2}{3+x},$$

այնուհետև բազմապատկելով հավասարման երկու մասերը dt -ով՝ կստանանք՝

$$dv_x = -\frac{2v_x}{3+x} dx: \quad (2.2.5)$$

Վերագրյալ՝ (2.2.5) հավասարումը անջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարում է, որը լրացվում է սկզբնական պայմանով՝

$$v_x|_{x=0} = 5 \left(\frac{u}{l} \right): \quad (2.2.6)$$

Անջատելով (2.2.5)-ում փոփոխականները՝ կստանանք՝

$$\int_0^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} + 2 \int_0^x \frac{dx}{3+x} = 0:$$

Հաշվելով ինտեգրալները՝ կունենանք, որ.

$$\ln \frac{v_x}{5} + 2 \ln \left(\frac{3+x}{3} \right) = \ln 1, \Rightarrow \frac{v_x}{5} \left(\frac{3+x}{3} \right)^2 = 1, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_x = \frac{45}{(3+x)^2}; \quad (2.2.7)$$

Փոխարինենք (2.2.7)-ում.

$$v_x = \frac{dx}{dt},$$

և մենք նորից կստանանք անջատված փոփոխականներով սովորական դիֆերենցիալ հավասարում՝

$$\frac{dx}{dt} = \frac{45}{(3+x)^2}; \Rightarrow \int_0^x (3+x)^2 dx = 45 \int_0^t dt: \quad (2.2.8)$$

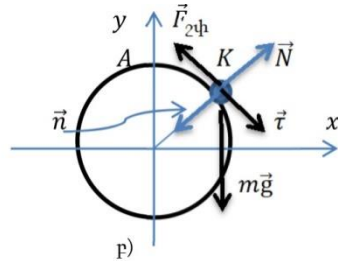
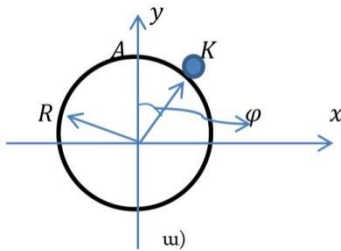
Ինտեգրելով վերոգրյալը՝ (2.2.8)-ը՝ կստանանք (2.2.3) դիֆերենցիալ հավասարման մասնակի լուծումը (2.2.4) սկզբնական պայմաններով՝

$$x = 3(\sqrt[3]{5t+1} - 1) \text{ մ:}$$

2.2.2. Առաջին կարգի գծային սովորական դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրման խնդիրներ

K մարմինը, որի չափերը կարելի է անտեսել, դրված է R շառավղով անշարժ գլանի մակերևույթի կոպիտ մակերևույթի վրա:

Ինչպիսի v_0 սկզբնական հորիզոնական արագություն պետք է հաղորդել մարմնին, որն ուղղված լինի գլանի շոշափողով, որ նա շարժվի ու կանգ առնի վերին A կետում, եթե շարժման ու հանգստի ժամանակ սահքի շփման գործակիցները նույնն են և հավասար μ (Նկ. 2.2):



Նկ. 2.2

Լուծում

Տեղադրելով K մարմնի գործող ուժերը՝ գրենք Նյուտոնի երկրորդ օրենքը՝

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{2\psi};$$

Պրոյեկտենք այս հավասարումը $\vec{n}$ -ի և $\vec{\tau}$ -ի ուղղությամբ, ինչպես ցույց է տրված Նկար 2.2 բ-ում: Կատանանք՝

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = mg \cdot \sin \varphi - F_{2\psi} \\ m \frac{v^2}{R} = mg \cdot \cos \varphi - N \end{cases}, \quad (2.2.9)$$

որտեղ՝

$$a_n = \frac{dv}{dt}, \text{ կենտրոնաձիգ արագացումն է, } a_\tau = \frac{v^2}{R}:$$

Կատարենք (2.2.9) համակարգի 1-ին հավասարումում փոփոխականի փոխարինում հետևյալ կերպ՝

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega \cdot \frac{dv}{d\varphi} = \frac{v}{R} \cdot \frac{dv}{d\varphi}; \Rightarrow \left(\omega = \frac{v}{R} \right):$$

Նկատի ունենալով (2.2.9) համակարգի հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases} \frac{m}{2R} \frac{dv^2}{d\varphi} = mg \cdot \sin \varphi - \mu N \\ m \frac{v^2}{R} = mg \cdot \cos \varphi - N \end{cases} : \quad (2.2.10)$$

Բազմապատկելով (2.2.10) համակարգի երկրորդ հավասարումը μ և հանելով 1-ին հավասարումից՝ կստանանք՝

$$\frac{dv^2}{d\varphi} - 2\mu v^2 = 2Rg(\sin \varphi - \cos \varphi), \quad (2.2.11)$$

որին ավելացվում է սկզբնական պայմանը՝

$$v^2|_{\varphi=0} = v_0^2:$$

Հետևաբար (2.2.11) դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը կլինի՝

$$v^2 = e^{2\mu \cdot \varphi} \left\{ v_0^2 - \frac{2Rg}{1 + 4\mu^2} \right.$$

$$\left. [e^{-2\mu \cdot \varphi} ((1 - 2\mu^2) \cdot \cos \varphi + 3\mu \cdot \sin \varphi) - 1 + 2\mu^2] \right\}: \quad (2.2.12)$$

Ըստ ինտրի պայմանի՝ K մարմինը պետք է կանգ առնի ինչ-որ φ_0 անկյան տակ՝ $v(\varphi_0) = 0$: Տեղադրելով $\varphi \rightarrow \varphi_0$ վերոգրյալ՝ (2.2.12) արտահայտության մեջ՝ կստանանք՝

$$v_0^2 = \frac{2Rg}{1 + 4\mu^2}$$

$$[e^{-2\mu \cdot \varphi_0} ((1 - 2\mu^2) \cdot \cos \varphi_0 + 3\mu \cdot \sin \varphi_0) - 1 + 2\mu^2]: \quad (2.2.13)$$

φ_0 -ն կարելի է արտահայտել μ շփման գործակցի միջոցով, քանի որ $v(\varphi_0) = 0$: Այդ դեպքում (2.2.10) համակարգից կունենանք՝

$$\begin{cases} mg \cdot \sin \varphi_0 - \mu N = 0 \\ mg \cdot \cos \varphi_0 - N = 0 \end{cases} ; \Rightarrow mg \cdot \sin \varphi_0 = \mu mg \cdot \cos \varphi_0 ; \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi_0 = \mu ;$$

$$\Rightarrow \varphi_0 = \arctg \mu:$$

Բայց քանի որ.

$$\begin{cases} \cos \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}, \\ \sin \varphi_0 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0}} = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}, \end{cases}$$

ապա (2.2.13) արտահայտությունից կստանանք՝

$$v_0 = \sqrt{\frac{2Rg}{1 + 4\mu^2} \left[e^{-2\mu \cdot \arctg \mu} \cdot \sqrt{1 + \mu^2} - 1 + 2\mu^2 \right]}: \quad (2.2.14)$$

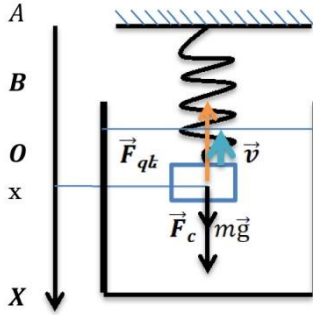
Հետևաբար, որպեսզի K մարմինը (Նկ. 2.2, բ) կանգ առնի գլանի կոպիտ մակերեսի վրա, անհրաժեշտ է, որ դրա սկզբնական արագությունը չգերազանցի (2.2.14)-ում սահմանված արժեքը:

2.2.3. Հաստատուն գործակիցներով երկրորդ կարգի գծային համասեռ դիֆերենցիալ հավասարման լուծմանն ուղղված խնդիրներ

Ենթադրենք 5 կգ զանգվածով մարմինը կախված 20 Ն/մ կոշտությամբ զսպանակի ծայրից և ընկղմված է մածուցիկ միջավայրում: Նրա տատանումների ժամանակահատվածն այս դեպքում 10 վ է: Գտնել խոնավացման հաստատունը, տատանումների լրգարիթմական նվազումն ու ազատ տատանումների պարբերությունը:

Լուծում

Ընտրում ենք կոորդինատների սկզբնակետը մարմնի ստատիկ հավասարակշռության դիրքում և նշում մարմնի վրա ազդող ուժերը տատանումների գործընթացում՝ ենթադրելով, որ մարմինը շարժվում է ներկա պահին դեպի վեր:



Նկ. 2.3

Եթե AB -ն նշանակում է չձգված զսպանակի երկարությունը, ապա OB հատվածը ներկայացնում է զսպանակի ստատիկ երկարացումը $m\vec{g}$ ուժի ազդեցության տակ: Ըստ Հուկի օրենքի $mg = k \times OB$, որտեղ k -ն զսպանակների կոշտության գործակիցն է: Գրեք Նյուտոնի երկրորդ օրենքը՝

$$m\vec{a} = \vec{F}_{qd} + \vec{F}_\eta + m\vec{g}:$$

Պրոյեկտենք այս հավասարումը ox -ի վրա՝ հաշվի առնելով, որ.

$$F_\eta = -\alpha v_x = -\alpha \frac{dx}{dt}, F_{qd} = -k(x + OB):$$

Արդյունքում ստանում ենք տատանման հավասարումը՝

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha \frac{dx}{dt} - k(x + OB) + mg:$$

Այստեղից կունենանք՝

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2.2.14)$$

որտեղ՝

$$n = \frac{\alpha}{2m}; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}:$$

Վերոգրյալ՝ (2.2.14)-ը 2-րդ կարգի համասեռ սովորական դիֆերենցիալ հավասարում է:

Կազմենք խարակտերիստիկ հավասարումը՝

$$\rho^2 + 2n\rho + \omega_0^2 = 0, \quad (2.2.15)$$

և հաշվենք դիսկրիմինանտը՝

$$D = n^2 - \omega_0^2: \quad (2.2.16)$$

Քանի որ մարմնի շարժումը, տրված խնդրի պայմաններին համապատասխան, ունի տատանողական (պարբերական) բնույթ, ապա դրա կոորդինատը պետք է փոխվի ժամանակի հետ ներդաշնակ օրենքի համաձայն, այսինքն՝ ըստ կոսինուսի կամ սինուսի: Հետևաբար (2.2.14) հավասարման լուծումն այս ֆունկցիաներով արտահայտելու համար պետք է ենթադրենք, որ $D < 0$, և լուծումը կներկայացվի հետևյալ տեսքով՝

$$x(t) = e^{-\lambda t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t), \quad (2.2.17)$$

որտեղ λ ու ω որոշվում են հետևյալ կերպ՝

$$\lambda = n; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - n^2}: \quad (2.2.18)$$

Մարման դեպքում, այսինքն՝ երբ $n = 0$, կունենանք $\omega = \omega_0$, և մարմինը կկատարի պարզ տատանում հետևյալ պարբերությամբ՝

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \pi = 3.14 \text{ վ:}$$

Եթե $n \neq 0$, ապա հաշվի առնելով (2.2.18)-ը՝ կունենանք՝

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - n^2}}:$$

Վերոգրյալ բանաձևից կստանանք՝

$$n = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2},$$

և որոշում ենք ամորտիզացիոն հաստատուն a (համաչափության գործակիցը դիֆադրության ուժի բանաձևում)՝

$$\alpha = 2mn = 2m \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}:$$

Տեղադրելով խնդրի տվյալները՝ կստանանք՝ $\alpha = 19 \frac{\text{ն.վ.}}{\text{ս.}}$:

Իր սահմանման համաձայն՝ լոգարիթմական մարման նվազումը երկու հաջորդական ամպլիտուդների հարաբերակցության բնական լոգարիթմն է (այսինքն՝ վերցված տատանումների ժամանակաշրջանի կեսից հետո՝ $T/2$) $\Delta = Tn/2$. Հաշվելով n -ը և փոխարինելով T -ի արժեքը՝ ստանում ենք $\Delta = 9.5$:

2.2.4. Հաստատուն գործակիցներով երկրորդ կարգի գծային անհամասեռ սովորական դիֆերենցիալ հավասարման լուծմանն ուղղված խնդիրներ

Դիցուք m զանգված ունեցող մարմնի վրա գրգռող ուժի՝

$$F = F_0 \sin(\omega t + \delta)$$

ազդեցությունը նվազեցնելու համար տեղադրվում է զսպանակային հարվածային կլանիչ՝ հեղուկ կափույրով, k կոշտության գործակցով:

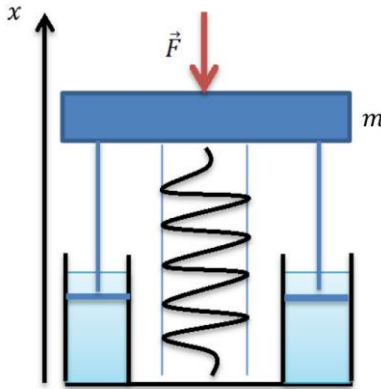
Ենթադրելով, որ դիֆադրության ուժը համաչափ է արագության առաջին ուժին՝

$$F_{\eta} = \alpha v,$$

գտնել ամբողջ համակարգի առավելագույն դինամիկ ճնշումը հիմքի վրա՝ կայուն տատանումներով (Նկ. 2.4):

Լուծում

Աբցիսների Ox առանցքը ուղղենք շարժման ուղղությամբ՝ ընտրելով մարմնի ստատիկ հավասարակշռության դիրքը կոորդինատների սկզբնակետ, այնուհետև միաժամանակ համարենք, որ ձգողականության ուժը փոխհատուցվում է հարվածային կլանիչի զսպանակի ստատիկ սեղմման ուժով:



Նկ. 2.4

Գրեք Նյուտոնի երկրորդ օրենքը՝

$$m\vec{a} = \vec{F}_{q\lambda} + \vec{F}_{\eta} + \vec{F}:$$

Պրոյեկտենք Ox -ի ուղղությամբ, կստանանք՝

$$F_{xq\lambda} = -kx; F_{x\eta} = -\alpha v_x; F_x = F_0 \sin(\omega t + \delta)$$

տատանման հավասարումը հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t + \delta), \quad (2.2.19)$$

որտեղ՝

$$n = \frac{\alpha}{2m}; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}:$$

Տատանումների ժամանակ հիմքի վրա գործում է ուժ, որը բաղկացած է աղբյուրի դեֆորմացիայի ուժից ու դիմադրու-

թյան ուժից, որոնք հավասար են Նյուտոնի երրորդ օրենքի հիման վրա՝

$$N_x = kx + \alpha \frac{dx}{dt} = m \left(\omega_0^2 x + 2n \frac{dx}{dt} \right): \quad (2.2.20)$$

Հետևաբար այս ուժը հաշվելու համար հարկավոր է իմանալ մարմնի շարժման հավասարումը՝ $x = x(t)$, որի համար պետք է լուծել (2.2.19) հավասարումը: Քանի որ խնդիրը հաշվի է առնում արդեն հաստատված տատանումները, որը հաստատվել է այն սկսելուց բավական մեծ ժամանակահատված անցնելուց հետո: Այս դեպքում մարմինը տատանվելու է շարժիչ ուժի հաճախականությամբ: Ուստի պետք է գտնենք այս հարկադիր տատանումներին համապատասխանող (2.2.19)-ի որոշակի լուծում:

Դա անելու համար մենք օգտագործում ենք ընտրության մեթոդը աջ կողմում:

Ներկայացնենք (2.2.19) հավասարման լուծումը հետևյալ տեսքով՝

$$x = A \cos \varphi + B \sin \varphi, \quad (2.2.21)$$

որտեղ $\varphi = \omega t + \delta$:

Տեղադրելով (2.2.21)-ը (2.2.19) հավասարումում՝ կստանանք՝

$$\begin{aligned} & -\omega^2 A \cos \varphi - \omega^2 B \sin \varphi - 2n\omega A \sin \varphi + 2n\omega B \cos \varphi + \\ & + \omega_0^2 A \cos \varphi + \omega_0^2 B \sin \varphi = \frac{F_0}{m} \sin \varphi: \end{aligned}$$

Հավասարացնելով $\sin \varphi$ և $\cos \varphi$ ֆունկցիաների գործակիցները՝ կունենանք՝

$$\begin{cases} -A\omega^2 + 2n\omega B + \omega_0^2 A = 0, \\ -\omega^2 B - 2n\omega A + \omega_0^2 B = \frac{F_0}{m}: \end{cases}$$

Լուծելով վերոգրյալ համակարգը՝ կստանանք՝

$$\begin{cases} A = -\frac{F_0}{m} \cdot \frac{2n\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}, \\ B = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}; \end{cases} \quad (2.2.22)$$

Տեղադրենք (2.2.22)-ը (2.2.21)-ում՝

$$x = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}$$

$$[(\omega_0^2 - \omega^2) \sin(\omega t + \delta) - 2n\omega \cos(\omega t + \delta)]: \quad (2.2.23)$$

Տվյալ բանաձևում նշանակելով՝

$$\begin{cases} \cos \varepsilon = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}, \\ \sin \varepsilon = \frac{2n\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}; \end{cases} \quad (2.2.24)$$

(2.2.23)-ը կգրվի հետևյալ տեսքով՝

$$x = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} \sin(\omega t + \delta - \varepsilon): \quad (2.2.25)$$

Տեղադրելով (2.2.25)-ը (2.2.20)-ում՝ կստանանք՝

$$N_x = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}$$

$$[\omega_0^2 \sin(\omega t + \delta - \varepsilon) + 2n\omega \cos(\omega t + \delta - \varepsilon)]: \quad (2.2.26)$$

Կատարելով նշանակումներ՝

$$\begin{cases} \sin \vartheta = \frac{2n\omega}{\sqrt{\omega_0^4 + 4n^2\omega^2}}, \\ \cos \vartheta = \frac{2n\omega}{\sqrt{\omega_0^4 + 4n^2\omega^2}}; \end{cases} \quad (2.2.27)$$

այդ դեպքում (2.2.26)-ը կբերվի հետևյալ տեսքին՝

$$N_x = F_0 \sqrt{\frac{\omega_0^4 + 4n^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} \cdot \sin(\omega t + \delta - \varepsilon + \vartheta) : (2.2.28)$$

Այստեղից հետևում է, որ հիմքի վրա ամբողջ համակարգի առավելագույն դինամիկ ճնշումը հավասար է՝

$$N_0 = F_0 \sqrt{\frac{\omega_0^4 + 4n^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} : (2.2.29)$$

2.2.5. Երկրաչափական օպտիկայի՝ սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների լուծմանն ուղղված խնդիրներ

Ինչ ձև պետք է ունենա հայելին, որ դրա վրա ընթացող զուգահեռ ճառագայթների հոսքը կենտրոնանա մի կետում: Ենթադրենք՝ ճառագայթները ընկնում են հայելու վրա աջից ox առանցքին զուգահեռ, և ըստ լույսի անդրադարձման օրենքի՝ անկման անկյունը հավասար է անդրադարձման անկյանը: Ստացված հավասարումը կլինի

$$y' = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}}{\frac{y}{x}} : (2.2.30)$$

Կատարելով $u = \frac{y}{x}$, նշանակումը՝ (2.2.30)-ը կբերվի հետևյալ հավասարմանը՝

$$xu' + u = \frac{\sqrt{1 + u^2} - 1}{u} :$$

Ինտեգրելու համար մտցնենք նոր փոփոխական՝ $w = \sqrt{1 + u^2}$: Այդ դեպքում վերոգրյալ հավասարումը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{dw}{1 - w} = \frac{dx}{x} :$$

Այստեղից կստանանք՝

$$x(1 - w) = c; (c = \text{const}):$$

Կամ՝

$$\sqrt{1 + u^2} = \frac{c}{x} + 1:$$

Վերադառնալով սկզբնական նշանակումներին՝ կունենանք՝

$$y^2 = c(2x + c):$$

Սա պարաբոլների ընտանիք է ընդհանուր կիզակետով $O(0; 0)$ կոորդինատների սկզբնակետում, և այդ կիզակետում էլ հավաքվում են հայելու միջոցով արտացոլված ճառագայթները:

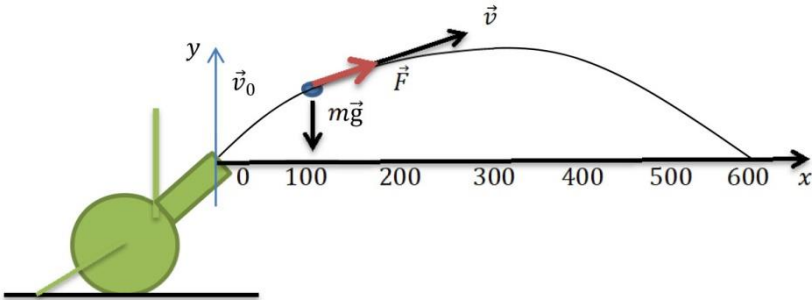
2.2.6. Սովորական դիֆերենցիալ հավասարման լուծմանն ուղղված խնդիրներ. արկի հետագծի վերաբերյալ խնդիր

Դիցուք m զանգվածով արկը դուրս է թռչում հրանոթից v_0 սկզբնական արագությամբ, և ենթադրենք, որ արկի վրա գործում է միայն ծանրության ուժը՝ F , իսկ պարզության համար հաշվի չենք առնի օդի դիմադրության ուժը: Անհրաժեշտ է որոշել արկի հետագիծը:

Լուծում

Կոորդինատների սկզբնակետը վերցնենք հրանոթից արկի արձակման կետից, oy և ox առանցքները վերցնենք այնպես, ինչպես պատկերված է Նկար 2.5-ում: Քանի որ արկի արագությունը միշտ շոշափելի է նրա հետագծին, նրա ուղղությունը փոխվում է t ժամանակի հետ: Հետևաբար մենք ուժը $\vec{F}$ տարրալուծում ենք F_x և F_y բաղադրիչների, իսկ արագությունը՝ v_x ու v_y բաղադրիչների կոորդինատային առանցքների ուղղությամբ: Այսինքն՝ oxy կոորդինատական հարթությունում կարելի է շարժումը համարել երկու շարժումների գումարի արդյունք՝ Ox առանցքի երկայնքով շարժում՝ F_x ուժի

ազդեցությամբ, v_x արագությամբ, և շարժում՝ Oy առանցքի երկայնքով, F_y ուժի ազդեցությամբ:



Նկ. 2.5

Կիրառելով Նյուտոնի երկրորդ օրենքը՝ կունենանք՝

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = F_x, \\ m \frac{dv_y}{dt} = F_y: \end{cases} \quad (2.2.31)$$

Համակարգի հավասարումներից յուրաքանչյուրում $\vec{F}$ ուժն ու $\vec{v}$ արագությունը ուղղվում են մեկ ուղիղ գծով. (2.2.31)-ի առաջին հավասարման դեպքում՝ Ox առանցքի երկայնքով, իսկ երկրորդ հավասարման դեպքում՝ Oy առանցքի երկայնքով:

Դիցուք հրանոթի խողովակը Ox առանցքի դրական ուղղության հետ կազմում է α անկյուն, որը կոչվում է նետման անկյուն: Քանի որ ծանրության ուժը ուղղված է դեպի գետնին, ապա $F_x = 0$ և $F = -mg$, որտեղ g -ն ազատ անկման արագացումն է:

Հետևաբար (2.2.31) հավասարումների համակարգը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = 0, \\ m \frac{dv_y}{dt} = -mg: \end{cases} \quad (2.2.32)$$

Տանք սկզբնական պայմանները հետևյալ տեսքով՝

$$\begin{cases} v_x|_{t=0} = v_0 \cos \alpha \\ v_y|_{t=0} = v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad (2.2.33)$$

Լուծելով (2.2.32) հավասարումների համակարգը (2.2.33) սկզբնական պայմանների դեպքում՝ կստանանք՝

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos \alpha, \\ v_y(t) = -gt + v_0 \sin \alpha : \end{cases} \quad (2.2.34)$$

իսկ x ու y կոորդինատները գտնելու համար կիրառում ենք $\vec{v}$ արագության վեկտորի նախագծման սահմանումը կոորդինատային առանցքների վրա.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x \\ \frac{dy}{dt} = v_y \end{cases} : \quad (2.2.35)$$

Հաշվի առնելով (2.2.34)-ը՝ (2.2.35) համակարգը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha, \\ \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin \alpha : \end{cases} \quad (2.2.36)$$

Համաձայն ինտեգրի տվյալների՝ ժամանակի սկզբնական պահին արկը գտնվում էր կոորդինատների սկզբնակետում, ուստի.

$$\begin{cases} x(t)|_{t=0} = 0, \\ y(t)|_{t=0} = 0: \end{cases} \quad (2.2.37)$$

Ինտեգրելով (2.2.36) դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը 0-ից t -ն և օգտագործելով (2.2.37) նախնական պայմանները՝ կստանանք արկի դիրքը որոշելու բանաձևեր t -ի ցանկացած պահին.

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha, \\ y = -\frac{g}{2} t^2 + v_0 t \sin \alpha : \end{cases} \quad (2.2.38)$$

Վերոգրյալ՝ (2.2.38) բանաձևերը ներկայացնում են $y = y(x)$ կորի պարամետրային տեսքերը t պարամետրի տարբեր արժեքների համար: Այս բանաձևերից արտաքսենք t պարամետրը առաջին հավասարումից՝

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

և տեղադրենք երկրորդ հավասարման մեջ, կստանանք՝

$$y = -x \cdot \operatorname{tg} \alpha - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}: \quad (2.2.39)$$

(2.2.39)-ից երևում է, որ եթե հաշվի չեն առնվում օդի դիմադրությունը, ապա՝ արկի հետագիծը, y -ը երկրորդ աստիճանի բազմանդամ է՝ կախված x -ից, հետևաբար նրա գրաֆիկը պարաբոլա է (Նկ. 2.5):

(2.2.39) բանաձևը ցույց է տալիս, որ կրակի տիրույթը կախված է v_0 սկզբնական արագությունից ու նետման α անկյունից:

Պետք է ասել, որ ցածր սկզբնական արագության դեպքում օդի դիմադրության դերն իսկապես փոքր է: Բայց եթե $v_0 = 80 \left(\frac{\text{մ}}{\text{վ}} \right)$ սկզբնական արագությունը մեծացնենք տասը անգամ, ապա 305 մ տրամաչափով (տրամագիծ) արկի համար $\alpha = 55^\circ$ նետման անկյան դեպքում օդի դիմադրության պատճառով նրա թռիչքի հեռահարությունը 61 կմ-ից կնվազի 22,2 կմ-ի:

Քանի որ արկն իրականում զգում է օդի դիմադրությունը, և իրականում արկերի հետագծերը պարաբոլներ չեն, օդի խտությունը, ինչպես նաև արկի քաշն ու ձևը ազդում են նրա հեռահար թռիչքի տարածության, արկի բարձրության, թռիչքի ժամանակի և այլնի վրա:

2.2.7. Նյութի տարրալուծման խնդիր՝ ուղղված առաջին կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի լուծմանը

Տրված A նյութը քայքայվում է X և Y նյութերի: Նրանց յուրաքանչյուրի առաջացման արագությունը համեմատական չքայքայված նյութի քանակին:

Պահանջվում է որոշել X ու Y նյութերի քանակի x ու y մեծությունների փոփոխման օրենքը՝ կախված t ժամանակից պայմանով, որ $x(t)|_{t=0} = y(t)|_{t=0} = 0$, իսկ մեկ ժամ հետո՝

$$x = \frac{a}{8}, y = \frac{3a}{8},$$

որտեղ a -ն A նյութի սկզբնական քանակությունն է:

Լուծում

Ըստ խնդրի պայմանի՝ t պահին չքայքայված A նյութի քանակը հավասար է $a - x - y$ -ի: Ներկայացնենք նշանակումները՝ X նյութի առաջացման արագությունը $\frac{dx}{dt}$ և Y նյութի առաջացման արագությունը $\frac{dy}{dt}$: Այդ դեպքում խնդիրը բերվում է հետևյալ սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի լուծմանը՝

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_1(a - x - y), \\ \frac{dy}{dt} = k_2(a - x - y): \end{cases} \quad (2.2.40)$$

(2.2.40) դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը լուծելու համար օգտագործում ենք ինտեգրելի համակցությունների մեթոդը: Համակարգի առաջին ու երկրորդ հավասարումների երկու մասերը բաժանելով իրար՝ կունենանք՝

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k_2}{k_1}: \quad (2.2.41)$$

Ինտեգրելով (2.2.41) հավասարում՝ կստանանք՝

$$y = \frac{k_2}{k_1}x + c_1, \quad (2.2.42)$$

որտեղ c_1 -ը կամայական հաստատուն է:

Քանի որ $t = 0$ -ի դեպքում $x = y = 0$, ապա (2.2.42)-ից հետևում է, որ $c_1 = 0$:

Հետևաբար (2.2.42)-ը կրեքվի հետևյալ տեսքին՝

$$y = \frac{k_2}{k_1}x: \quad (2.2.43)$$

Տեղադրելով (2.2.43) ֆունկցիան (2.2.40) համակարգի առաջին հավասարման մեջ՝ կստանանք առաջին կարգի գծային անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարում՝

$$\frac{dx}{dt} = k_1a - (k_1 + k_2)x: \quad (2.2.44)$$

Ինտեգրենք (2.2.44) հավասարումը՝

$$\begin{aligned} \int \frac{d[(k_1 + k_2)x - k_1a]}{(k_1 + k_2)x - k_1a} &= -(k_1 + k_2) \int dt; \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln[(k_1 + k_2)x - k_1a] &= -(k_1 + k_2)t + \ln c_2; \\ \Rightarrow (k_1 + k_2)x - k_1a &= e^{-(k_1 + k_2)t + \ln c_2}; \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= \frac{k_1a}{(k_1 + k_2)} + e^{-(k_1 + k_2)(t + \ln c_2)}; \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= \frac{k_1a}{(k_1 + k_2)} + c_2 e^{-(k_1 + k_2)t} \end{aligned}$$

և կստանանք ընդհանուր լուծումը՝

$$x(t) = \frac{k_1a}{(k_1 + k_2)} + c_2 e^{-(k_1 + k_2)t}: \quad (2.2.45)$$

Այսպիսով՝ (2.2.40) սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի ընդհանուր լուծումը կլինի՝

$$\begin{cases} x(t) = \frac{k_1 a}{(k_1 + k_2)} + c_2 e^{-(k_1 + k_2)t}, \\ y = \frac{k_2}{k_1} x + c_1, \end{cases} \quad (2.2.46)$$

իսկ c_2 հաստատունը որոշվում է սկզբնական պայմանով՝ $x(0) = 0$, այսինքն՝

$$0 = \frac{k_1 a}{(k_1 + k_2)} + c_2, \Rightarrow c_2 = -\frac{k_1 a}{(k_1 + k_2)},$$

և քանի որ $c_1 = 0$, այդ դեպքում (2.2.46)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases} x(t) = \frac{k_1 a}{(k_1 + k_2)} (1 - e^{-(k_1 + k_2)t}), \\ y = \frac{k_2}{k_1} x: \end{cases} \quad (2.2.46)$$

Որոշենք k_1 ու k_2 գործակիցները, քանի որ ըստ խնդրի պայմանի՝

$$x(1) = \frac{a}{8}, y(1) = \frac{3a}{8},$$

ապա (2.2.46) համակարգից կստանանք՝

$$\begin{cases} \frac{k_1}{(k_1 + k_2)} (1 - e^{-(k_1 + k_2)}) = \frac{1}{8}, \\ 3 = \frac{k_2}{k_1}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{-4k_1} = \frac{1}{2}; \\ k_2 = 3k_1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{\ln 2}{4}, \\ k_2 = \frac{3 \ln 2}{4}: \end{cases}$$

Այսպիսով՝ (2.2.40) հավասարումների համակարգի լուծումը, այսինքն՝ X ու Y նյութերի x ու y քանակությունների փոփոխման օրենքը, ըստ t ժամանակի, ստանում է հետևյալ տեսքը՝

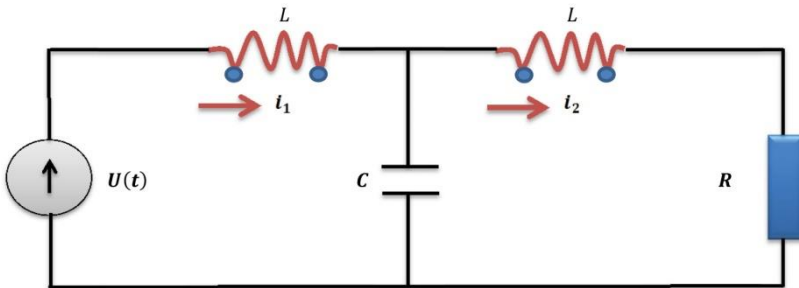
$$\begin{cases} x(t) = \frac{a}{4} (1 - 2^{-t}) \\ y(t) = \frac{3a}{4} (1 - 2^{-t}) \end{cases} :$$

2.2.8. Ցածր հաճախականության ֆիլտր

Էլեկտրական շղթան պարունակում է երկու հավասար L ինդուկտիվություն, C ունակություն, R դիմադրություն, որոնք միացված են լարման աղբյուրին: Լարումը փոխվում է $U(t) = U_0 \cos \omega t$ օրենքի համաձայն (Նկ. 2.7): Սահմանափակվելով կայուն գործընթացով՝ պահանջվում է որոշել դիմադրության վրա լարման անկման տատանումների բնույթը:

Լուծում

Նշանակենք i_1 -ով և i_2 -ով համապատասխանաբար էլեկտրական ձախ ու աջ սխեմաների հոսանքները: Այդ դեպքում C ունակության կոնդեսատորով հոսանքը հավասար կլինի $(i_2 - i_1)$ -ի: Ըստ Կիրխոֆի օրենքի՝ ստանում ենք i_1 ; i_2 հոսանքների նկատմամբ սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ՝



Նկ. 2.7. Էլեկտրական շղթայի սխեմացածր հաճախականության ֆիլտր (գտիչ)

$$\begin{cases} L \frac{di_1}{dt} + L \frac{di_2}{dt} + Ri_2 = U_0 \cos \omega t, \\ L \frac{di_2}{dt} + Ri_2 + \frac{1}{C} \int_0^t (i_2 - i_1) dt = 0, \end{cases} \quad (2.2.47)$$

որը լուծում ենք բացառման մեթոդով: Դիֆերենցելով ըստ t -ի համակարգի երկրորդ հավասարումը՝ կստանանք՝

$$L \frac{d^2 i_2}{dt^2} + R \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C}(i_2 - i_1) = 0: \quad (2.2.48)$$

Այստեղից կունենանք՝

$$i_1 = CL \frac{d^2 i_2}{dt^2} + CR \frac{di_2}{dt} + i_2: \quad (2.2.49)$$

Դիֆերենցելով ըստ t -ի (2.2.49) հավասարումը և տեղադրելով (2.2.47) համակարգի առաջին հավասարման մեջ՝ ստանում ենք երրորդ կարգի անհամասեռ հաստատուն գործակիցներով սովորական դիֆերենցիալ հավասարում՝

$$L^2 C \frac{d^3 i_2}{dt^3} + LRC \frac{d^2 i_2}{dt^2} + 2L \frac{di_2}{dt} + Ri_2 = U_0 \cos \omega t, \quad (2.2.50)$$

որի ընդհանուր լուծումը կներկայացնենք $i_2 = i_2^{(0)} + i_2^{(1)}$ տեսքով, որտեղ $i_2^{(0)}$ -ը կլինի (2.2.50) համապատասխան համասեռ հավասարման՝

$$L^2 C \frac{d^3 i_2^{(0)}}{dt^3} + LRC \frac{d^2 i_2^{(0)}}{dt^2} + 2L \frac{di_2^{(0)}}{dt} + Ri_2^{(0)} = 0 \quad (2.2.51)$$

ընդհանուր լուծումը, իսկ $i_2^{(1)}$ -ը՝ մասնակի լուծումը: Կազմենք (2.2.51)-ի բնութագրիչ հավասարումը՝

$$L^2 C \lambda^3 + LRC \lambda^2 + 2L \lambda + Ri_2^{(0)} = 0: \quad (2.2.52)$$

Քանի որ (2.2.52)-ի ձախ մասում բոլոր գումարելի անդամները դրական են, ապա այդ հավասարումը ունի կոմպլեքս արմատներ: Ըստ Ռաուս-Գուրվիցի հայտանիշի՝ բազմանդամի բոլոր արմատների իրական մասերի բացասականության անհրաժեշտ և բավարար պայմանն է.

$$H = \begin{pmatrix} LRC & L^2 C & 0 \\ R & 2L & LRC \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix} \quad (2.2.53)$$

մատրիցի բոլոր հիմնական անկյունագծային մինորների դրական լինելը:

Հաշվենք H մատրիցի հիմնական մինորները՝

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= LRC > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} LRC & L^2C \\ R & 2L \end{vmatrix} = LRC \cdot 2L - L^2C \cdot R = L^2CR > 0, \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} LRC & L^2C & 0 \\ R & 2L & LRC \\ 0 & 0 & R \end{vmatrix} \\ &= LRC \cdot 2L \cdot R + 0 + 0 - 0 - L^2C \cdot R \cdot R - 0 \\ &= L^2R^2C > 0:\end{aligned}$$

Քանի որ Ռաուս-Գուրվիցի մատրիցայի բոլոր մինորները դրական են, ապա (2.2.52) հավասարման կոմպլեքս արմատների իրական մասերը բացասական են: Հետևաբար (2.2.51) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծման բոլոր անդամները կլինեն էքսպոնենցիալներ բացասական ցուցիչներով, որոնք նվազում են t -ի մեծացման հետ:

Ըստ խնդրի պայմանի՝ սահմանափակվում ենք հաստատուն գործընթացով, որը որոշվում է (2.2.50) անհամասեռ հավասարման մասնակի լուծումով:

Փնտրում ենք մասնակի լուծումը հետևյալ տեսքով՝

$$i_2^{(1)} = A \cos \omega t + B \sin \omega t: \quad (2.2.54)$$

(2.2.54)-ը տեղադրելով (2.2.50) հավասարման մեջ՝ կստանանք A -ն ու B -ն որոշելու համար հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} (-2L\omega + L^2C\omega^3) \cdot A + (R - RLC\omega^2) \cdot B = 0, \\ (R - RLC\omega^2) \cdot A + (2L\omega - L^2C\omega^3) \cdot B = U_0: \end{cases}$$

Այստեղից, ըստ Կրամերի եղանակի, քանի որ Δ գլխավոր որոշիչն ունի հետևյալ՝

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} (-2L\omega + L^2C\omega^3) & (R - RLC\omega^2) \\ (R - RLC\omega^2) & (2L\omega - L^2C\omega^3) \end{vmatrix} = \\ &= -[(2L\omega - L^2C\omega^3)^2 + (R - RLC\omega^2)^2]\end{aligned}$$

տեսքը, իսկ երկրորդական Δ_A ; Δ_B որոշիչները՝

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 0 & (R - RLC\omega^2) \\ U_0 & (2L\omega - L^2C\omega^3) \end{vmatrix} = -U_0(R - RLC\omega^2),$$

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} (-2L\omega + L^2C\omega^3) & 0 \\ (R - RLC\omega^2) & U_0 \end{vmatrix} = -U_0(2L\omega - L^2C\omega^3)$$

տեսքերը, և $A = \Delta_A/\Delta$, $B = \Delta_B/\Delta$, ապա կստանանք՝

$$A = \frac{U_0(R - RLC\omega^2)}{(2L\omega - L^2C\omega^3)^2 + (R - RLC\omega^2)^2},$$

$$B = \frac{U_0(2L\omega - L^2C\omega^3)}{(2L\omega - L^2C\omega^3)^2 + (R - RLC\omega^2)^2}: \quad (2.2.54)$$

Հաշվենք i_2 -ի ամպլիտուդան: Ունենք հետևյալը՝

$$|v| = \sqrt{A^2 + B^2} =$$

$$= |U_0| \frac{\sqrt{(R - RLC\omega^2)^2 + (2L\omega - L^2C\omega^3)^2}}{(2L\omega - L^2C\omega^3)^2 + (R - RLC\omega^2)^2}: \quad (2.2.55)$$

Դիմադրության վրա լարման անկումը ստացվում է (2.2.54) արտահայտությունից, եթե դրա երկու մասերը բազմապատկելով R -ով՝ հաշվի առնենք (2.2.54), ինչպես նաև Օհմի օրենք շղթայի տեղամասի համար՝ $U_2 = Ri_2$, այսինքն՝

$$U_2 = U_0 \frac{(R - RLC\omega^2) \cos \omega t + U_0(2L\omega - L^2C\omega^3) \sin \omega t}{(2L\omega - L^2C\omega^3)^2 + (R - RLC\omega^2)^2}: \quad (2.2.56)$$

Ուսումնասիրենք ω տատանումների հաճախականության ազդեցությունը ելքային լարման դեպքում R դիմադրության և լարման ամպլիտուդների հարաբերակցության վրա: Փոքր ω հաճախականությունների դեպքում անտեսելով ω^2 և ավելի բարձր կարգի արժեքները՝ (2.2.55)-ից կստանանք

$$|v| \approx \frac{|U_0|}{R}; \Rightarrow |v| \cdot \frac{R}{|U_0|} \approx 1: \quad (2.2.57)$$

(2.2.57) կախվածությունը ցույց է տալիս, որ ցածր հաճախականության տատանումները, ինչպես ցույց է տրված Նկար 2.7-ում, անցնում են գործնականում առանց ամպլիտուդի փոփոխության:

Մեծ հաճախականությունների ω -ի համար (2.2.55) բանաձևում արմատատակ արտահայտության հիմնական տերմինը ω -ի ամենաբարձր աստիճան ունի: Հետևաբար նման հաճախությունների համար (2.2.55)-ից կունենանք՝

$$|v| \approx \frac{|U_0|}{L^2 C \omega^3},$$

հետևաբար՝

$$|v| \cdot \frac{R}{|U_0|} \approx \frac{|U_0|}{L^2 C \omega^3} \cdot \frac{R}{|U_0|} \approx \frac{R}{L^2 C \omega^3} \approx 0,$$

այսինքն՝ բարձր հաճախականության տատանումները գործնականում չեն անցնում էլեկտրական շղթայով, որը ցույց է տրված Նկար 2.7-ում:

Այսպիսով՝ Նկար 2.7-ում պատկերված շղթայում ցածր, ինչպես նաև բարձր հաճախականություններ գրեթե չեն անցնում: Հետևաբար նման էլեկտրական շղթայի սխեման անվանում են ցածր հաճախականության ֆիլտր (գտիչ):

SUMMARY

APPLICATION OF INTEGRALS AND ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PHYSICS PROBLEMS (Training Guide)

The manual is intended for 1st and 2nd year students of YSU Faculty of Physics.

In the first chapter of the manual, boundary problems of physics have been considered, the solutions of which lead to the calculation of definite, curvilinear, double, triple, surface integrals, as well as the limits of integral sums.

In the second chapter, such boundary problems of physics have been included, which are brought to the application of ordinary differential equations of the first and second order.

Solved problems and tasks on the topics discussed in the educational manual will increase the level of students' knowledge.

РЕЗЮМЕ

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ И ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ПО ФИЗИКЕ (Руководство по обучению)

Пособие предназначено для студентов 1-го и 2-го курсов факультета физики ЕГУ.

В первой главе пособия рассматриваются краевые задачи физики, решения которых приводят к вычислению пределов определенных, криволинейных, двойных, тройных, поверхностных интегралов, а также интегральных сумм.

Во второй главе представлены краевые задачи физики, которые приводят к применению обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядка.

Проблемы и задачи, решенные по темам, обсуждаемым в учебно-вспомогательном пособии, повысят уровень знаний учащихся.

Գրականության ցանկ

1. Ղալումյան Ա. Գ., Յուզուլյան Ա. Վ., Սարգսյան Ա. Ա., Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներ, ԵՊՀ հրատ., 2011:

2. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, М.: «Физмаиз», 1959, 915 с.

3. Беллман Р., Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, М.: ИЛ, 1954. 216 с.

4. Бессонов Л. А., Теоретические основы электротехники, М.: «Высшая школа», 1964, 750 с.

5. Вербжицкий В. М., Численные методы. Математический анализ и дифференциальные уравнения, М.: «Высшая школа», 2001, 384 с.

6. Глызин С. Д., Толбей А. О., Практикум по курсу обыкновенных дифференциальных уравнений: Учебное пособие, Ярославль: ЯрГУ, 2011, 68 с.

7. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М.: «Наука», 1971, 576 с.

8. Киселева Н. В., Хентов А. А., Введение в теорию обыкновенных линейных дифференциальных уравнений: Учебно-методическое пособие, Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2011, 44 с.

9. Маделунг Э., Математический аппарат физики. Справочное руководство / Пер. с нем. М.: «Наука», 1968, 620 с.

10. Марков К. А., Фаддеев М. А., Хомицкий Д. В., Избранные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений для физиков: Учебное пособие. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2015, 261 с.

11. Перов А. А., Перова В. И., Дифференциальные уравнения в прикладных задачах: Учебное пособие, Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2018, 223 с.

12. Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984, 296 с.

13. Пискунов Н. С., Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов, т. 2, М.: «Физматлит», 1985, 560 с.

14. Савельев И. В., Курс общей физики, т. 2, Электричество и магнетизм. Волны. Оптика, М.: «Наука», 1982, 496 с.

15. Сивухин Д. В., Курс общей физики, т. 3, Электричество, М.: «Физматлит», 2004, 656 с.

16. Фаддеев М. А., Марков К. А., Численные методы, Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2005, 156 с.

17. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука.

18. Sarkisyan V. S., Ovsepyan L. O., Mamrillova A., Azaryan S. A., Koncentracija naprjachenij okolo nekruplich otverstij v neodnorodnich beskonечnyh plastinkach, Jerevan, Uchenie zapiski EGU, No 2(156), 1984.

19. Mamrilla J., Sarkisyan V. S., Ovsepyan L. O., Mamrillova A., Azaryan S. A., The concentration of strains in the inhomogeneous boundless thin plate with the circular opening". Acta Phizica, Univ. Comen, XXVI, 1985.

20. Mamrillova A., Sarkisyan V. S., Azaryan S. A., The solution of the planar inhomogeneous problem for regions with the opening of the pure shear, Acta Phizica, Univ. Comen, XXVIII, 1985.

21. Mamrillova A., Azaryan S. A., New approach to the solution of problems of inhomogeneous thin plates a hole planar, Acta Phizica, Univ. Comen., XXIX, 1989.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Գլուխ 1. ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼ.....	3
§ 1.1. Որոշյալ ինտեգրալի գաղափարը	3
1.1. Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձև.....	4
1.2. Մասերով ինտեգրման բանաձև	4
1.3. Փոփոխականի փոխարինման բանաձև.....	4
1.4. Հիմնական որոշյալ ինտեգրալները.....	7
1.5. Փոփոխական վերին սահմանով ինտեգրալ.....	9
§ 1.2. Որոշյալ ինտեգրալի կիրառությունը ֆիզիկայի խնդիրներում	17
§ 1.3. Կորագիծ ինտեգրալներին բերվող խնդիրներ.....	26
§ 1.4. Կրկնակի և եռակի ինտեգրալներ	45
§ 1.5. Մակերևութային ինտեգրալների սահմանումն ու կիրառությունները.....	57
§ 1.6. Ֆիզիկական մարմինների երկարության, մակերեսի և ծավալի հաշվումը որոշյալ ինտեգրալով.....	68
1.6.1. Հարթ պատկերի մակերեսի հաշվումը.....	68
1.6.2. Կորի աղեղի երկարության հաշվումը.....	69
1.6.3. Պտտման մարմնի ծավալի հաշվումը	73
1.6.4. Պտտման մարմնի մակերևույթի մակերեսի հաշվումը..	75
Գլուխ 2. ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ	
ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ	79
§ 2.1. Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներ	79
2.1.1. Առաջին կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներ.....	79
2.1.2. Առաջին կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների ընդհանուր և մասնակի լուծումներ	83

2.1.3. Փոփոխականների անջատման մեթոդի կիրառությունը առաջին կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներում	91
2.1.4. Համասեռ սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներ.....	96
2.1.5. Ածանցյալի նկատմամբ բարձր կարգի դիֆերենցիալ հավասարումներ.....	99
§ 2.2. Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների կիրառությունը ֆիզիկայի խնդիրներում	104
2.2.1. Ֆիզիկայի՝ փոփոխականների անջատման մեթոդով դիֆերենցիալ հավասարումների ինտեգրմանն ուղղված խնդիրներ	104
2.2.2. Առաջին կարգի գծային սովորական դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրման խնդիրներ	106
2.2.3. Հաստատուն գործակիցներով երկրորդ կարգի գծային համասեռ դիֆերենցիալ հավասարման լուծմանն ուղղված խնդիրներ	109
2.2.4. Հաստատուն գործակիցներով երկրորդ կարգի գծային անհամասեռ սովորական դիֆերենցիալ հավասարման լուծմանն ուղղված խնդիրներ.....	112
2.2.5. Երկրաչափական օպտիկայի՝ սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների լուծմանն ուղղված խնդիրներ	116
2.2.6. Սովորական դիֆերենցիալ հավասարման լուծմանն ուղղված խնդիրներ. արկի հետագծի վերաբերյալ խնդիր.....	117
2.2.7. Նյութի տարրալուծման խնդիր՝ ուղղված առաջին կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի լուծմանը	121
2.2.8. Ցածր հաճախանականության ֆիլտր	124

Summary	129
Резюме	130
Գրականության ցանկ	131

**ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ
ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԱՄԲԻՈՆ**

Սերգեյ Ամիրխանի Ազարյան, Տիգրան Մարտինի Գրիգորյան

**ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ԵՎ ՍՈՎՈՐԱԿԱՆ
ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ
ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆԸ
ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ
(ուսումնաստանողակ ձեռնարկ)**

Համակարգչային ձևավորումը՝ Կ. Չալաբյանի
Կազմի ձևավորումը՝ Ա. Պատվականյանի
Հրատ. խմբագրումը՝ Մ. Հովհաննիսյանի

Ստորագրված է տպագրության՝ 28.11.2023:

Չափսը՝ $60 \times 84 \frac{1}{16}$: Տպ. մամուլը՝ 8.5:

Տպաքանակը՝ 100:

ԵՊՀ հրատարակչություն
ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1
www.publishing.ysu.am