ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ
Դիֆերենցիալ հավասարումների ամբիոն

Հ. Ա. ԱՍԱՏՐՅԱՆ, Ի. Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ,
Մ. Ի. ԿԱՐԱԽԱՆՅԱՆ, Ա. Հ. ՔԱՄԱԼՅԱՆ

ԲԱՆԱԽՅԱՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎՆԵՐ ԵՎ ՍՊԵԿՏՐԱԼ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Հաստատված է ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլ–տետի խորհրդի կողմից որպես դասագիրք բուհերի ֆիզիկամա–թեմատիկական մասնագիտությունների ուսանողների համար

ԵՐԵՎԱՆԻ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ – 2008

ՀՏԴ 512 (07)
ԳՄԴ 22.14 ց7
Բ-275

Հ. Ա. ԱՍԱՏՐՅԱՆ, Ի. Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ,
Մ. Ի. ԿԱՐԱԽԱՆՅԱՆ, Ա. Հ. ՔԱՄԱԼՅԱՆ

Բ-275 Բանախյան հանրահաշիվներ և սպեկտրալ տեսություն

Խմբագիր՝ ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Ի. Գ. Խաչատրյան

Գրախոսներ՝ ՀՀ ԳԱԱ թղթ. անդամ Վ. Հ. Մարտիրոսյան,
ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Բ. Թ. Բատիկյան

ԵՊՀ հրատ., 2008 թ., 252 էջ:

Դիտարկվող բնագավառի հետ առնչվող գրքերի շարքում սույն ձեռնարկն առաջինն է հայերեն լեզվով: Այն նվիրված է կոմպլեքս բանախյան հանրահաշիվների տեսությանը, սպեկտրալ տեսությանը, կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվների գելֆանդյան տեսությանը և նրա կիրառություններին ոչ ինքնահամալուծ օպերատորների տեսությունում:

Գիրքը մատչելի է բուհերի ֆիզիկամաթեմատիկական մասնագիտությամբ բարձր կուրսի ուսանողների համար: Այն կարող է օգտակար լինել նաև ասպիրանտների, գիտաշխատողների և դասավանդողների համար:

ԳՄԴ 22.14 ց7

ISBN 978-5-8084-0995-8

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԱԽԱԲԱՆ

Դիտարկվող բնագավառի հետ առնչվող գրքերի շարքում սույն ձեռնարկն առաջինն է հայերեն լեզվով: Այն նվիրված է կոմպլեքս բանախյան հանրահաշիվների տեսությանը, սպեկտրալ տեսությանը, կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվների գելֆանդյան տեսությանը և նրա կիրառություններին ոչ ինքնահամալուծ օպերատորների տեսությունում:

Ձեռնարկը բաղկացած է չորս գլխից: Առաջին գլուխը նվիրված է կոմպլեքս նորմավորված հանրահաշիվների տեսությանը, երկրորդը՝ կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվների գելֆանդյան տեսությանը, որտեղ առանցքային է բոլոր կոմուտատիվ B^*– հանրահաշիվները բնութագրող Գելֆանդ-Նայմարկի թեորեմը: Երրորդ գլխում, հիմնվելով նախորդ գլուխներում զարգացված ապարատի վրա, ուսումնասիրվում է կոմպլեքս հիլբերտյան տարածությունում գործող գծային սահմանափակ օպերատորների հանրահաշիվը և ապացուցվում է սպեկտրալ թեորեմի գելֆանդյան տարբերակը, որտեղից որպես հետևանք ստացվում է սահմանափակ նորմալ օպերատորների համար սպեկտրալ թեորեմը համապատասխան ֆունկցիոնալ հաշվի հետ միասին: Չորրորդ գլուխը նվիրված է ոչ կոմուտատիվ B^*– հանրահաշիվներին: Նրանում ապացուցվում են Բոխների թեորեմի աբստրակտ տարբերակը և ոչ կոմուտատիվ B^*– հանրահաշիվները բնութագրող Գելֆանդ-Նայմարկի թեորեմը:

Ձեռնարկում ընդգրկված են նաև վերջերս ստացված որոշ արդյունքներ: Դրանց մի մասի համար տրված են սխեմատիկ ապացույցներ, որոնք տեքստում բերված են մանր տառատեսակով:

Գիրքը մատչելի է բուհերի ֆիզիկամաթեմատիկական մասնագիտությամբ բարձր կուրսի ուսանողների համար: Այն կարող է օգտակար լինել նաև ասպիրանտների, գիտաշխատողների և դասավանդողների համար:

Գլուխ 1
ՆՈՐՄԱՎՈՐՎԱԾ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎՆԵՐ

§ 1.1. Կոմպլեքս հանրահաշիվներ

Սահմանում 1.1.1: Դիցուք P–ն որևէ դաշտ է, իսկ A–ն P-ի նկատմամբ գծային փարածություն է: Կասենք A–ն P–ի նկատմամբ հանրահաշիվ է, եթե A–ում ներմուծված է ևս մեկ հանրահաշվական գործողություն՝ արտադրյալ, որը բավարարում է հետևյալ երեք պայմաններին (աքսիոմներին).

1) $(xy)z = x(yz) \quad (\forall x, y, z \in A)$,

2) $x(y+z) = xy + xz,\ (y+z)x = yx + zx \quad (\forall x, y, z \in A)$,

3) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y) \quad (\forall x, y \in A,\ \forall \alpha \in P)$:

Երբ բավարարվում է նաև

4) $\exists e \in A$, որ $ex = xe = x \quad (\forall x \in A)$,

պայմանը, A–ն կոչվում է միավորով հանրահաշիվ, իսկ e–ն՝ նրա միավոր: Եթե 1) – 3) պայմանների հետ միասին բավարարվում է

5) $xy = yx \quad (\forall x, y \in A)$,

պայմանը, ապա A հանրահաշիվը կոչվում է կոմուտատիվ:

Նկատենք, որ հանրահաշիվը կարող է ունենալ մեկից ոչ ավելի թվով միավոր: Իրոք, եթե հանրահաշվի e և e' էլեմենտները միավորներ են, ապա $ee' = e'e = e'$, $e'e = ee' = e$ և, հետևաբար, $e = e'$:

Դիցուք A–ն հանրահաշիվ է: Հետևյալ կանոնական ընդլայնումը թույլ է տալիս A–ն լրացնել միավորով, այսինքն ներդնել ինչ–որ A' միավորով հանրահաշվի մեջ: Նշանակենք

$$A' = \{(x, \alpha) :\ x \in A,\ \alpha \in P\} = A \times P$$

և $(x, \alpha), (y, \beta) \in A'$ և $\lambda \in P$ համար սահմանենք

$$(x, \alpha) + (y, \beta) = (x + y, \alpha + \beta),$$

$$\lambda(x, \alpha) = (\lambda x, \lambda \alpha),$$

$$(x, \alpha)(y, \beta) = (xy + \alpha y + \beta x, \alpha\beta) :$$

Հեշտ է ստուգել, որ այդ դեպքում A'–ի համար կբավարարվեն գծային տարածության աքսիոմները և հանրահաշվի 1)-3) աքսիոմները, ինչպես նաև 4) աքսիոմը, որում միավորի դերը կատարում է $(0,1)$ էլեմենտը: $x\mapsto(x,0)$ արտապատկերմամբ A–ն իզոմորֆ արտապատկերվում է A'–ի ինչ–որ ենթատարածության վրա: $x\in A$ էլեմենտը նույնացնելով $(x,0)\in A'$ էլեմենտի հետ՝ կարող ենք համարել, որ $A\subset A'$: Եթե A հանրահաշիվը կոմուտատիվ է, ապա A'–ը նույնպես կլինի կոմուտատիվ:

Հանրահաշիվը և նրա ենթահանրահաշիվը կարող են ունենալ տարբեր միավորներ: Օրինակ, e միավորով A հանրահաշվի դեպքում A' հանրահաշվի միավորն է $(0,1)$ էլեմենտը, իսկ նրա $\{(x,0):x\in A\}$ ենթահանրահաշվի միավորն է $(e,0)$ էլեմենտը: Հետագայում, խոսելով միավորով հանրահաշվի միավոր ունեցող ենթահանրահաշվի մասին, կենթադրենք, որ ենթահանրահաշվի միավորը համընկնում է հանրահաշվի միավորի հետ:

Մենք հիմնականում կդիտարկենք այն դեպքը, երբ $P=\mathbb{C}$: Այդ դեպքում A հանրահաշիվը կոչվում է կոմպլեքս հանրահաշիվ:

Հանրահաշվում որպես M և G ենթատարածությունների MG արտադրյալ կհամարենք հետևյալ բազմությունը.

$$MG=\{xy:x\in M,\,y\in G:\}$$

Սահմանում 1.1.2: $J\subset A$ ենթատարածությունը կոչվում է ձախ (աջ) իդեալ, եթե $AJ\subset J$ $(JA\subset J)$:

J–ն կոչվում է երկկողմանի իդեալ (կամ, պարզապես, իդեալ), եթե այն և՛ ձախ, և՛ աջ իդեալ է:

J իդեալը կոչվում է սեփական, եթե $J\neq\{0\}$ և $J\neq A$:

J սեփական իդեալը կոչվում է մաքսիմալ, եթե գոյություն չունի J–ն պարունակող և J–ից տարբեր սեփական իդեալ:

Օրինակներ:

1) Եթե $\mathbb{C}^N$–ում երկու $z=(z_1,z_2,\dots,z_N)$, $z'=(z'_1,z'_2,\dots,z'_N)$ վեկտորների արտադրյալը սահմանենք

$$zz'=\left(z_1z'_1,z_2z'_2,\dots,z_Nz'_N\right)$$

բանաձևով, ապա $\mathbb{C}^N$-ը կդառնա միավորով կոմուտատիվ հանրահաշիվ (միավորն է $e = (1, 1, \ldots, 1)$ վեկտորը):

2) Դիտարկենք $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{C})$ տարածությունը, որը բաղկացած է բոլոր $z = (z_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ սահմանափակ հաջորդականություններից: ℓ^∞–ի երկու $z = (z_k)_{k=1}^\infty$, $z' = (z'_k)_{k=1}^\infty$ էլեմենտների և $\alpha \in \mathbb{C}$ թվի համար սահմանենք

$$z + z' = \left(z_k + z'_k\right)_{k=1}^\infty, \quad \alpha z = (\alpha z_k)_{k=1}^\infty, \quad zz' = \left(z_k z'_k\right)_{k=1}^\infty :$$

Այդ դեպքում ℓ^∞–ը կդառնա միավորով կոմուտատիվ հանրահաշիվ, որում e միավորի դերը կատարում է այն հաջորդականությունը, որի բոլոր անդամները 1 են: Այս օրինակում գործ ունենք անվերջ չափանի հանրահաշվի հետ:

3) X գծային տարածությունում գործող բոլոր գծային օպերատորների $L(X)$ բազմությունը կդառնա միավորով հանրահաշիվ, եթե նրանում T, S օպերատորների արտադրյալը սահմանենք

$$(TS)(x) = T(Sx)$$

բանաձևով (միավորը նույնական արտապատկերումն է):

4) X բանախյան տարածությում գործող բոլոր գծային սահմանափակ օպերատորների $BL(X)$ բազմությունը միավորով կոմպլեքս հանրահաշիվ է: Բազմաչափ X-ի դեպքում $BL(X)$ հանրահաշիվը կոմուտատիվ չէ, ընդ որում, երբ X–ը անվերջ չափանի է, $BL(X)$–ը նույնպես անվերջ չափանի է:

Անվերջ չափանի սեպարաբել X հիլբերտյան տարածության դեպքում $BL(X)$–ը որպես օպերատորային նորմով բանախյան տարածություն սեպարաբել չէ: Իրոք, X–ն իզոմետրիկորեն իզոմորֆ է $L^2(0,1)$–ին, ուստի $BL(X)$–ը իզոմետրիկորեն իզոմորֆ կլինի $BL\left(L^2(0,1)\right)$–ին և մնում է ապացուցել, որ $BL\left(L^2(0,1)\right)$–ը սեպարաբել չէ: Ցույց տանք, որ $\forall\, M \subset BL\left(L^2(0,1)\right)$ ամենուրեք խիտ ենթաբազմության հզորությունը փոքր չէ կոնտինուումի հզորությունից: $t \in (0,1)$ համար $P_t \in BL\left(L^2(0,1)\right)$ օպերատորը սահմանենք

$$(P_t f)(x) = \chi_{(0,t)}(x) f(x) \quad \left(f \in L^2(0,1)\right)$$

բանաձևով ($\chi_{(0,t)}$–ն $(0,t)$ միջակայքի բնութագրիչ ֆունկցիան է)։ $0 < t_1 < t_2 < 1$ համար ունենք $(P_{t_2} - P_{t_1})\, f\,(x) = \chi_{(t_1,t_2)}(x) f(x)$, ուստի $\|(P_{t_2} - P_{t_1})\, f\| \leqslant \|f\|$ $\big(f \in L^2(0,1)\big)$ և, հետևաբար, $\|P_{t_2} - P_{t_1}\| \leqslant 1$։ Մյուս կողմից,

$$\|P_{t_2} - P_{t_1}\| = \sup_{\|f\|\leqslant 1} \|(P_{t_2} - P_{t_1})\, f\| \geqslant \left\|(P_{t_2} - P_{t_1})\, \frac{\chi_{(t_1,t_2)}}{\sqrt{t_2 - t_1}}\right\| = 1:$$

Այսպիսով, $t_1, t_2 \in (0,1)$, $t_1 \neq t_2$ դեպքում $\|P_{t_2} - P_{t_1}\| = 1$։ $\forall t \in (0,1)$ համար $\exists Q = Q_t \in M$, որ $\|P_t - Q_t\| < \dfrac{1}{2}$։ $t_1 \neq t_2$ դեպքում ունենք

$$\|Q_{t_2} - Q_{t_1}\| = \|(P_{t_2} - P_{t_1}) - (P_{t_2} - Q_{t_2} + Q_{t_1} - P_{t_1})\| \geqslant$$

$$\geqslant \|P_{t_2} - P_{t_1}\| - \|P_{t_2} - Q_{t_2} + Q_{t_1} - P_{t_1}\| \geqslant$$

$$\geqslant \|P_{t_2} - P_{t_1}\| - \|P_{t_2} - Q_{t_2}\| - \|Q_{t_1} - P_{t_1}\| > 0,$$

ուստի $Q_{t_1} \neq Q_{t_2}$։ Ապացուցվեց, որ $t \mapsto Q_t$ արտապատկերումը $(0,1)$ միջակայքը փոխմիարժեք արտապատկերում է M–ի մեջ և, հետևաբար, M–ի հզորությունը փոքր չէ կոնտինուումի հզորությունից։

5) Դիցուք X–ը լոկալ կոմպակտ տոպոլոգիական տարածություն է (այսինքն $\forall\, x \in X$ կետ ունի հարաբերական կոմպակտ շրջակայք)։ $C_b(X)$–ով նշանակենք բոլոր $f : X \to \mathbb{C}$ սահմանափակ և անընդհատ ֆունկցիաների բազմությունը։ $C_b(X)$–ը միավորով կոմպլեքս հանրահաշիվ է (միավորը նույնաբար 1 ֆունկցիան է), ինչպես նաև բանախյան տարածություն է, որում $f \in C_b(X)$ ֆունկցիայի նորմն է

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)| :$$

Նշանակենք $C_0(X)$–ով բոլոր այն $f \in C_b(X)$ ֆունկցիաների բազմությունը, որ $\forall\, \varepsilon > 0$ համար $\exists\, K_\varepsilon \subset X$ կոմպակտ, այնպես, որ

$$|f(x)| < \varepsilon \quad (x \in X \setminus K_\varepsilon) :$$

$C_0(X)$–ի ֆունկցիաներին անվանում են ∞–ում անհետացող (0–ի ձգտող) ֆունկցիաներ։ Սա $C_b(X)$–ում փակ երկկողմանի իդեալ է։ Երբ X–ը կոմպակտ չէ, $C_0(X)$–ը միավոր չունի։

Նշանակենք $C_{00}(X)$–ով (կամ $C_c(X)$–ով) բոլոր այն $f \in C_b(X)$ ֆունկցիաների բազմությունը, որոնց

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X : \; f(x) \neq 0\}}$$

կրիչը կոմպակտ է: Պարզվում է (ինչն ակնհայտ չէ), որ

$$\overline{C_{00}(X)} = C_0(X) :$$

Այն դեպքում, երբ X–ը կոմպակտ է, կունենանք

$$C_{00}(X) = C_0(X) = C_b(X) = C(X),$$

որտեղ $C(X)$–ը բոլոր $f : X \to \mathbb{C}$ անընդհատ ֆունկցիաների տարածությունն է:

6) Դիցուք E–ն որևէ բազմություն է, իսկ X–ը P դաշտի նկատմամբ հանրահաշիվ է: Այդ դեպքում

$$J(E, X) = \{f : \; E \to X\}$$

արտապատկերումների բազմությունը կլինի P դաշտի նկատմամբ հանրահաշիվ, եթե $f_1, f_2, \in J(E, X)$, $\alpha \in P$ համար սահմանենք

$$(f_1 + f_2)\,(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

$$(f_1 f_2)\,(x) = f_1(x) f_2(x),$$

$$(\alpha f_1)\,(x) = \alpha f_1(x) :$$

Երբ X-ում կա e միավոր, $J(E, X)$-ը նույնպես ունի միավոր և միավորի դերը կատարում է $f(x) \equiv e$ արտապատկերումը:

Այժմ բերենք իդեալների օրինակներ:

1) Դիցուք X–ը բանախյան տարածություն է: Այդ դեպքում $K(X)$ կոմպակտ գծային օպերատորների բազմությունը $BL(X)$–ի փակ երկկողմանի իդեալ է:

2) Դիտարկենք K կոմպակտի վրա անընդհատ ֆունկցիաների $C(K)$ տարածությունը (որը, ինչպես արդեն նշվեց, կոմուտատիվ հանրահաշիվ է): Դիցուք $E \subset K$: Նշանակենք

$$J_E = \{f \in C(K) : \; f(x) = 0, \; x \in E\} :$$

Պարզ է, որ J_E–ն իդեալ է (կոմուտատիվության առկայության շնոր– հիվ ավելորդ է խոսել աջ կամ ձախ իդեալների մասին. դրանք համ– ընկնում են): Պարզվում է, որ $C(K)$–ում բոլոր մաքսիմալ իդեալներն ունեն $J_{\{x_0\}}$ տեսքը, որտեղ $x_0 \in K$: Այս պնդումը մենք կապացու– ցենք հետագայում (տես՝ § 2.1, օրինակ 1):

Սահմանում 1.1.3: $x \in A$ էլեմենտը կոչվում է հակադարձելի ձախից (աջից), եթե գոյություն ունի այնպիսի $y \in A$, որ $yx = e$ ($xy = e$): Այդպիսի ամեն մի y էլեմենտ կոչվում է x–ի ձախ (աջ) հակադարձ:

Սահմանում 1.1.4: $x \in A$ էլեմենտը կոչվում է հակադարձելի, եթե գոյություն ունի այնպիսի $y \in A$, որ $xy = yx = e$: Այդպիսի y–ը կոչվում է x–ի հակադարձ և նշանակվում է x^{-1}-ով:

Միաժամանակ ձախից և աջից հակադարձելի էլեմենտը հա– կադարձելի է և նրա միակողմանի հակադարձերը համընկնում են: Իրոք, եթե $yx = e = xz$, ապա

$$y = ye = y(xz) = (yx)z = ez = z :$$

Այստեղից բխում է, որ ոչ մի $x \in A$ էլեմենտ չի կարող ունենալ մեկից ավելի թվով հակադարձ (այսինքն՝ այնպիսի z, որ $xz = zx = e$): A հանրահաշվի բոլոր հակադարձելի էլեմենտների բազմու– թյունը կնշանակենք A^{-1}–ով: Պարզ է, որ $e \in A^{-1}$:

Նկատենք, որ միայն մի կողմից հակադարձելի էլեմենտի միա– կողմանի հակադարձը միակը չէ: Իրոք, դիցուք $x \in A$ էլեմենտը ձախից հակադարձելի է, իսկ աջից՝ ոչ: Դիցուք y-ը x էլեմենտի որևէ ձախ հակադարձ է: Այդ դեպքում հեշտ է ստուգել, որ ցանկացած $\lambda \in \mathbb{C}$ համար $y_\lambda = y + \lambda(e - xy)$ էլեմենտը ևս կլինի x-ի ձախ հակադարձ: Քանի որ $xy \neq e$, ուստի $\lambda_1 \neq \lambda_2$ դեպքում $y_{\lambda_1} \neq y_{\lambda_2}$:

§ 1.2. Բանախյան հանրահաշիվներ

Սահմանում 1.2.1: e միավորով A կոմպլեքս հանրահաշվում ներ– մուծված նորմը կոչվում է հանրահաշվական, եթե

1) $\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\| \quad (\forall x, y \in A)$,

2) $\|e\| = 1$:

Սահմանում 1.2.2: Միավորով A հանրահաշիվը՝ նրանում ներմուծ–ված հանրահաշվական նորմի հետ միասին կոչվում է նորմավորված հանրահաշիվ: Եթե A–ն նաև լրիվ է, ապա այն կոչվում է բանախյան (կամ Բանախի) հանրահաշիվ:

Դիցուք A հանրահաշվում ներմուծված նորմը բավարարում է

$$\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$

պայմանին: Կառուցենք նախորդ պարագրաֆում նշված A' ընդլայ–նումը և $(x, \alpha) \in A'$ համար սահմանենք

$$\|(x, \alpha)\| = \|x\| + |\alpha| :$$

Հեշտ է տեսնել, որ A'–ը կհանդիսանա նորմավորված հանրահաշիվ: $x \mapsto (x, 0)$ արտապատկերումը A–ն իզոմետրիկորեն կարտապատ–կերի A'–ի փակ երկկողմանի իդեալի վրա, ընդ որում, եթե A–ն լրիվ է, ապա A'–ը (հետևաբար, նաև այդ իդեալը) կլինի լրիվ:

Այսպիսով, e միավորի գոյության և $\|e\| = 1$ պահանջները չեն հանգեցնում ընդհանրության մեծ կորստի և հետագայում դրանք կհամարենք բավարարված:

Բերենք բանախյան հանրահաշիվների օրինակներ: Ինչպես կտեսնենք, նախորդ պարագրաֆում դիտարկված կոմպլեքս հանրա–հաշիվներից շատերը բանախյան հանրահաշիվներ են: Այդ օրինակ–ներում նորմի աքսիոմները ստուգվում են հեշտությամբ:

Օրինակներ:

1) $\mathbb{C}^N$-ը վերջավոր չափանի կոմուտատիվ բանախյան հանրա–հաշիվ է, որում $z = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$ վեկտորի նորմն է

$$\|z\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} |z_i| :$$

2) ℓ^∞-ը անվերջ չափանի կոմուտատիվ բանախյան հանրահա–շիվ է, որում $z = (z_k)_{k=1}^\infty$ էլեմենտի նորմն է

$$\|z\| = \sup_k |z_k| :$$

3) X բանախյան տարածությում գործող բոլոր գծային սահ–մանափակ օպերատորների $BL(X)$ բազմությունը օպերատորային

նորմի նկատմամբ բանախյան հանրահաշիվ է: Ինչպես նշվեց նախորդ պարագրաֆում, բազմաչափ դեպքում այս հանրահաշիվը միավորով ոչ կոմուտատիվ հանրահաշիվ է, ընդ որում, եթե X–ն անվերջ չափանի սեպարաբել հիլբերտյան տարածություն է, ապա $BL(X)$–ն անվերջ չափանի ոչ սեպարաբել բանախյան տարածություն է:

4) Դիցուք X–ը լոկալ կոմպակտ տոպոլոգիական տարածություն է: Սահմանենք

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)| \quad (f \in C_b(X)) :$$

Հեշտ է ստուգել, որ $C_b(X)$–ը բանախյան հանրահաշիվ է:

Երբ X–ը կոմպակտ է, կունենանք

$$C_{00}(X) = C_0(X) = C_b(X) = C(X),$$

որտեղ $C(X)$–ը բոլոր $f : X \to \mathbb{C}$ անընդհատ ֆունկցիաների տարածությունն է: Այս դեպքում կարող ենք գրել

$$\|f\| = \max_{x\in X} |f(x)| :$$

5) Դիտարկենք $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ բազմության համար $C(T)$ հանրահաշիվը: Նշանակենք $A(T)$-ով $C(T)$-ի բոլոր այն ֆունկցիաների բազմությունը, որոնք թույլ են տալիս անընդհատ շարունակություն $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ փակ շրջանի վրա, որոշելով անալիտիկ ֆունկցիա $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ բաց շրջանում: Հեշտ է ստուգել, որ $A(T)$–ն կլինի $C(T)$–ի փակ ենթահանրահաշիվ և կպարունակի $C(T)$–ի միավորը: Երբեմն $A(T)$–ին անվանում են դիսկ հանրահաշիվ: $f \in C(T)$ համար սահմանենք

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(e^{i\theta}\right) e^{-in\theta} d\theta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) :$$

Կարելի է ցույց տալ, որ

$$A(T) = \left\{ f \in C(T) : \quad \hat{f}(n) = 0 \quad (n = -1, -2, \ldots) \right\} :$$

Բացի այդ, պարզվում է, որ $A(T)$–ն $C(T)$–ում չլրացվող ենթապարածություն է, այսինքն՝ գոյություն չունի այնպիսի $L \subset C(T)$ փակ ենթապարածություն, որ

$$C(T) = A(T) \oplus L :$$

Այն, որ $A(T) \neq C(T)$, ակնհայտ է, որովհետև $C(T)$–ին պատկանող $f(z) = \dfrac{1}{z}$ ֆունկցիան չի պատկանում $A(T)$–ին:

Սահմանում 1.2.3: A կոմպլեքս հանրահաշիվը կոչվում է տոպոլոգիական հանրահաշիվ, եթե A–ն միաժամանակ հանդիսանում է տոպոլոգիական պարածություն և A-ում սահմանված գործողություններն անընդհատ են:

Բանախյան հանրահաշիվները հանդիսանում են տոպոլոգիական հանրահաշիվների մասնավոր դեպք: Ուստի վերը դիտարկված օրինակներում բերված հանրահաշիվները տոպոլոգիական են: Բերենք տոպոլոգիական հարահաշվի ևս մի կարևոր օրինակ:

Դիցուք $\Omega \subset \mathbb{C}$ բաց բազմություն է: Ω–ի վրա հոլոմորֆ ֆունկցիաների $H(\Omega)$ բազմությունն ակնհայտորեն կոմուտատիվ կոմպլեքս հանրահաշիվ է: $H(\Omega)$–ն կարելի է դարձնել տոպոլոգիական հանրահաշիվ հետևյալ կերպ: Վերցնենք Ω–ի որևէ $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ կոմպակտ սպառում, այսինքն՝ կոմպակտ բազմությունների հաջորդականություն, որն օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

ա) $K_n \subset int\, K_{n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots)$,

բ) $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$:

$\Omega \neq \mathbb{C}$ դեպքում որպես K_n կարելի է վերցնել, օրինակ,

$$K_n = \left\{ x \in \Omega : \, |x| \leqslant n, \, \rho(x, \partial\Omega) \geqslant \frac{1}{n} \right\}$$

բազմությունները, իսկ $\Omega = \mathbb{C}$ դեպքում կարելի է վերցնել $K_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant n\}$:

$p_n : H(\Omega) \to \mathbb{R}$ կիսանորմերը սահմանենք

$$p_n(f) = \max_{z \in K_n} |f(z)| \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

բանաձևերով: $f, g \in H(\Omega)$ համար սահմանենք

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)},$$

որտեղ a_n–երը որևէ դրական թվեր են, որոնց համար $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ (օրինակ, կարելի է վերցնել $a_n = 2^{-n}$): Այդ դեպքում ρ–ն կլինի մետրիկա $H(\Omega)$–ում, ընդ որում $f_n \xrightarrow{\rho} f$ կնշանակի, որ Ω–ի ներսում $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$: Հեշտ է տեսնել, որ $(H(\Omega), \rho)$–ն կլինի տոպոլոգիական հանրահաշիվ:

§ 1.3. Էքսպոնենտ

$\forall x \in A$ համար սահմանենք

$$e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(e^x - ը նշանակում է e թվի x աստիճանը, ոչ թե A հանրահաշվի e միավորի x աստիճանը): Վերը գրված շարքը զուգամետ է, քանի որ զուգամետ է նրա անդամների նորմերից կազմված շարքը: Ընդ որում կունենանք

$$\|e^x\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|x\|^n}{n!} = e^{\|x\|} :$$

Էքսպոնենտի հատկությունները ստանալու համար բերենք մի քանի պնդումներ:

Լեմմա 1.3.1: *Եթե $a_n \to a$, ապա*

$$s_n = \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} a :$$

Ապացույց: Ունենք

$$\|s_n - a\| = \left\| \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n+1} - a \right\| =$$

$$= \frac{\|(a_0 - a) + (a_1 - a) + \cdots + (a_n - a)\|}{n+1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|a_0 - a\| + \|a_1 - a\| + \cdots + \|a_n - a\|}{n+1} \; :$$

Վերցնենք $\forall \varepsilon > 0$ թիվ: N_1–ը ընտրենք այնպես, որ

$$\|a_n - a\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n > N_1) :$$

Այդ դեպքում $n > N_1$ համար կունենանք

$$\|s_n - a\| \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \|a_k - a\| = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N_1} \|a_k - a\| +$$

$$+ \frac{1}{n+1} \sum_{k=N_1+1}^{n} \|a_k - a\| < \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N_1} \|a_k - a\| +$$

$$+ \frac{1}{n+1} \cdot (n - N_1) \cdot \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N_1} \|a_k - a\| + \frac{\varepsilon}{2} \; :$$

Ունենք $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N_1} \|a_k - a\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ուստի $N > N_1$ կարելի է ընտրել այնքան մեծ, որ

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N_1} \|a_k - a\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n > N) :$$

Այդ դեպքում $n > N$ համար կունենանք

$$\|s_n - a\| < \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N_1} \|a_k - a\| + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon :$$

Լեմման ապացուցված է:

Լեմմա 1.3.2: *Եթե* $a_n \to a$, $b_n \to b$, *ապա*

$$\sigma_n = \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} ab :$$

Ապացույց: Ունենք

$$\sigma_n = \frac{a_0(b_n - b) + a_1(b_{n-1} - b) + \cdots + a_n(b_0 - b)}{n+1} +$$

$$+ \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n+1} \cdot b = x_n + y_n :$$

Նախորդ լեմմայից բխում է, որ $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} ab$: Մնում է ցույց տալ, որ $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$: Քանի որ a_n–ը զուգամետ է, ուստի սահմանափակ է՝ $\exists M > 0$, որ

$$\|a_k\| \leqslant M \quad (k = 0, 1, \ldots) :$$

Ուստի

$$\|x_n\| \leqslant \frac{\|a_0(b_n - b)\| + \|a_1(b_{n-1} - b)\| + \cdots + \|a_n(b_0 - b)\|}{n+1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|a_0\| \cdot \|b_n - b\| + \|a_1\| \cdot \|b_{n-1} - b\| + \cdots + \|a_n\| \cdot \|b_0 - b\|}{n+1} \leqslant$$

$$\leqslant M \frac{\|b_n - b\| + \|b_{n-1} - b\| + \cdots + \|b_0 - b\|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

որտեղ վերջին քայլը բխում է $\|b_n - b\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ առնչությունից և նախորդ լեմմայից (որում կվերցնենք $A = \mathbb{C}$, $a_n = \|b_n - b\|$): Լեմման ապացուցված է:

Սահմանում 1.3.1: Դիցուք ունենք 2 շարքեր՝

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_k + \cdots \tag{1.3.1}$$

և

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k = b_0 + b_1 + \cdots + b_k + \cdots \ : \tag{1.3.2}$$

Ելնելով դրանցից կազմենք

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = c_0 + c_1 + \cdots + c_k + \cdots \tag{1.3.3}$$

շարքը, որտեղ

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0 :$$

(1.3.3)–ը կոչվում է (1.3.1) և (1.3.2) շարքերի Կոշու արտադրյալ:

Աբելի թեորեմը: *Դիցուք* (1.3.1), (1.3.2) *շարքերը և նրանց* (1.3.3) *Կոշու արտադրյալը զուգամետ են և*

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad p = \sum_{k=0}^{\infty} b_k, \quad q = \sum_{k=0}^{\infty} c_k :$$

Այդ դեպքում

$$q = s \cdot p :$$

Ապացույց: Նշանակենք

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n,$$

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} b_k = b_0 + b_1 + \cdots + b_n,$$

$$q_n = \sum_{k=0}^{n} c_k = c_0 + c_1 + \cdots + c_n, :$$

Ունենք

$$q_n = (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) =$$

$$= a_0(b_0 + b_1 + \cdots + b_n) + a_1(b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1}) + \cdots + a_n b_0 =$$

$$= a_0 p_n + a_1 p_{n-1} + \cdots + a_n p_0 :$$

Նշանակենք

$$r_n = \frac{q_0 + q_1 + \cdots + q_n}{n+1} :$$

Կունենանք

$$r_n = \frac{a_0 p_0 + (a_0 p_1 + a_1 p_0) + \cdots + (a_0 p_n + a_1 p_{n-1} + \cdots + a_n p_0)}{n+1} =$$

$$= \frac{(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) p_0 + (a_0 + \cdots + a_{n-1}) p_1 + \cdots + a_0 p_n}{n+1} =$$

$$= \frac{s_n p_0 + s_{n-1} p_1 + \cdots + s_0 p_n}{n+1} = \frac{s_0 p_n + s_1 p_{n-1} + \cdots + s_n p_0}{n+1} :$$

Այսպիսով՝

$$\frac{q_0 + q_1 + \cdots + q_n}{n+1} = \frac{s_0 p_n + s_1 p_{n-1} + \cdots + s_n p_0}{n+1} : \qquad (1.3.4)$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

Ըստ պայմանի՝ $s_n \to s$, $p_n \to p$, $q_n \to q$: (1.3.4) հավասարության մեջ անցնենք սահմանի, երբ $n \to \infty$: Ըստ 1.3.1 լեմմայի՝ (1.3.4)-ի ձախ մասը կձգտի q–ին: Ըստ 1.3.2 լեմմայի՝ (1.3.4)–ի աջ մասը կձգտի $s \cdot p$–ին: Ուստի

$$q = sp :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Այժմ վերադառնանք էքսպոնենտի հատկությունների ուսումնասիրությանը: Դիցուք $a, b \in A$ էլեմենտները տեղափոխելի են՝

$$ab = ba :$$

Դիտարկենք

$$e^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} , \quad e^b = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!}$$

շարքերը և հաշվենք նրանց Կոշու արտադրյալը՝

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = c_0 + c_1 + \cdots + c_k + \cdots ,$$

որտեղ

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}\cdot\frac{b^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\,a^kb^{n-k}=$$

$$=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^kb^{n-k}\ ,$$

և օգտվելով նրանից, որ $\forall a,b\in A$ տեղափոխելի էլեմենտների համար տեղի ունի

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^kb^{n-k}$$

Նյուտոնի բինոմի բանաձևը (այն հիմնավորելու համար կարելի է կիրառել մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը n բնական ցուցիչի նկատմամբ), կստանանք

$$c_n=\frac{(a+b)^n}{n!}\ :$$

Այսպիսով, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}$ և $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b^k}{k!}$ շարքերի Կոշու արտադրյալը $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a+b)^n}{n!}$ շարքն է, ուստի ըստ Աբելի թեորեմի՝

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b^k}{k!}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a+b)^n}{n!}\ ,$$

$$e^a\cdot e^b=e^{a+b}\ : \tag{1.3.5}$$

Ապացուցվեց, որ $\forall a,b\in A$ տեղափոխելի էլեմենտների համար տեղի ունի (1.3.5)-ը: (1.3.5)–ում վերցնելով $a=x$, $b=-x$ և $a=-x$, $b=x$, կստանանք

$$e^x\cdot e^{-x}=e^{-x}\cdot e^x=e^0,$$

և քանի որ $e^0 = \exp(0) = e_A$, ուստի $\forall x \in A$ համար $e^x \in A^{-1}$, ընդ որում
$$\left(e^x\right)^{-1} = e^{-x} :$$
Նշենք, որ $\exp(A) = \{\exp(a) :\ a \in A\}$ բազմությունը հանդիսանում է A^{-1}–ի կարևոր ենթաբազմություն:

§ 1.4. Կոմպլեքս հոմոմորֆիզմներ

Սահմանում 1.4.1: Դիցուք A, B–ն կոմպլեքս հանրահաշիվներ են: $\varphi : A \to B$ արտապատկերումը կոչվում է հոմոմորֆիզմ, եթե այն գծային է և
$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \quad (\forall x, y \in A) :$$
Եթե $B = \mathbb{C}$, ապա հոմոմորֆիզմը կանվանենք կոմպլեքս հոմոմոր–ֆիզմ:

Լեմմա 1.4.1: *Դիցուք A–ն e միավորով կոմպլեքս հանրահաշիվ է: $\varphi : A \to \mathbb{C}$ նույնաբար 0–ից տարբեր կոմպլեքս հոմոմորֆիզ–մի համար*
$$\varphi(e) = 1, \quad \varphi(x) \neq 0 \quad \left(x \in A^{-1}\right) :$$
Ապացույց: $\exists x_0 \in A$, որ $\varphi(x_0) \neq 0$: Ունենք՝
$$\varphi(x_0) = \varphi(x_0 e) = \varphi(x_0)\varphi(e),$$
$$\varphi(x_0) \cdot [\varphi(e) - 1] = 0 :$$
Այստեղից ստանում ենք
$$\varphi(e) = 1 :$$
$\forall x \in A^{-1}$ համար
$$\varphi(x)\varphi\left(x^{-1}\right) = \varphi\left(xx^{-1}\right) = \varphi(e) = 1,$$
ուստի
$$\varphi(x) \neq 0 \quad (x \in A^{-1}) :$$
Լեմման ապացուցված է:

$\varphi : A \to \mathbb{C}$ հոմոմորֆիզմներին հաճախ անվանում են մուլտիպ–լիկատիվ ֆունկցիոնալներ:

Լեմմա 1.4.2: *Դիցուք A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, $x \in A$ և $\|x\| < 1$: Այդ դեպքում՝*

1) $\exists (e-x)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ *(Նեյմանի շարք),*

2) $\|(e-x)^{-1} - e - x\| \leqslant \dfrac{\|x\|^2}{1-\|x\|}$,

3) $\forall \varphi : A \to \mathbb{C}$ *մուլտիպլիկատիվ ֆունկցիոնալի համար* $|\varphi(x)| < 1$*:*

Ապացույց: Նշանակենք

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k :$$

Ունենք

$$\|s_{n+m} - s_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+m} x^k \right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+m} \left\| x^k \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{n+m} \|x\|^k \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \|x\|^k$$

Քանի, որ $\|x\| < 1$, ուստի $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|x\|^n < \infty$ և հետևաբար՝

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \|x\|^k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

որտեղից կբխի, որ $\{s_n\}_1^{\infty}$ հաջորդականությունը A–ում ֆունդամենտալ է: A–ի լրիվության շնորհիվ՝ գոյություն ունի

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

սահմանը: Ցույց տանք, որ $s = (e-x)^{-1}$: Ունենք

$$s_n(e-x) = e - x^{n+1}, \quad (e-x)s_n = e - x^{n+1},$$

որտեղ անցնելով սահմանի, երբ $n \to \infty$ և հաշվի առնելով, որ $x^{n+1} \to 0$ (չէ՞ որ $\|x^{n+1}\| \leqslant \|x\|^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$), կստանանք

$$s(e-x) = (e-x)s = e,$$

ուստի $\exists (e-x)^{-1} = s$:

Լեմմայի 2) պնդումը բխում է 1)–ից՝

$$\|(e-x)^{-1} - e - x\| = \left\| \sum_{n=2}^{\infty} x^n \right\| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \|x^n\| = \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|} :$$

Ցույց տանք 3)–ը: Դրա համար ցույց տանք, որ

$$\varphi(x) \neq \lambda \quad (|\lambda| \geqslant 1) :$$

Իրոք, ըստ 1) պնդման՝ $e - \lambda^{-1}x \in A^{-1}$, ուստի ըստ նախորդ լեմմայի՝

$$\varphi\left(e - \lambda^{-1}x\right) = 1 - \lambda^{-1}\varphi(x) \neq 0,$$

$$\varphi(x) \neq \lambda :$$

Լեմման ապացուցված է:

Լեմմա 1.4.3: *$\forall \varphi : A \to \mathbb{C}$ մուլտիպլիկատիվ ֆունկցիոնալ՝ որոշ– ված A բանախյան հանրահաշվի վրա, անընդհատ է, ընդ որում $\varphi \neq 0$ դեպքում $\|\varphi\| = 1$:*

Ապացույց: Վերցնենք $\forall x \in A$ և ցույց տանք, որ

$$|\varphi(x)| \leqslant \|x\| :$$

$x = 0$ դեպքում դա ակնհայտ է: Դիցուք $x \neq 0$: Վերցնենք կամա– յական $\lambda \in (0,\, 1)$ թիվ և նշանակենք $y = \lambda \dfrac{x}{\|x\|}$: Ունենք $\|y\| < 1$, ուստի ըստ նախորդ լեմմայի 3) կեփի՝

$$|\varphi(y)| < 1,$$

$$\left| \varphi\left(\frac{\lambda}{\|x\|}\, x \right) \right| < 1,$$

$$|\varphi(x)| < \lambda^{-1}\|x\|,$$

որտեղ անցնելով սահմանի, երբ $\lambda \to 1-0$, կստանանք

$$|\varphi(x)| \leqslant \|x\| :$$

Այստեղից բխում է, որ φ–ն սահմանափակ է և $\|\varphi\| \leqslant 1$: $\varphi \neq 0$ դեպքում 1.4.1 լեմմայից կբխի, որ $\varphi(e) = 1$, ուստի

$$1 \geqslant \|\varphi\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\varphi| \geqslant |\varphi(e)| = 1$$

և հետևաբար՝ $\|\varphi\| = 1$:
Լեմման ապացուցված է:

Պարզվում է, որ բանախյան հանրահաշիվների դեպքում 1.4.1 լեմման լիովին բնութագրում է մուլտիպլիկատիվ ֆունկցիոնալները (թեորեմ 1.4.1): Դա ցույց տալու նպատակով նախ ապացուցենք երկու լեմմա:

Լեմմա 1.4.4: *Դիցուք f-ն այնպիսի ամբողջ ֆունկցիա է, որ*

$$\operatorname{Re} f(z) \leqslant K|z|^N \quad (|z| > K), \tag{1.4.1}$$

որտեղ $K > 0$ և $N \in \mathbb{N}$ հաստատուններ են: Այդ դեպքում f-ը բազմանդամ է, որի կարգը չի գերազանցում N-ը:

Ապացույց: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ $f(0) = 0$ (հակառակ դեպքում $f(z)$-ի փոխարեն կարող ենք դիտարկել $f(z) - f(0)$ ֆունկցիան): Դիցուք

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \tag{1.4.2}$$

Կունենանք

$$\operatorname{Re} f\left(re^{i\theta}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left(\operatorname{Re} a_k \cos k\theta - \operatorname{Im} a_k \sin k\theta\right),$$
$$(r > 0,\ \theta \in [0,\, 2\pi])$$

որտեղից

$$\operatorname{Re} f\left(re^{i\theta}\right)\cos n\theta = \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left(\operatorname{Re} a_k \cos k\theta \cos n\theta - \right.$$
$$\left. - \operatorname{Im} a_k \sin k\theta \cos n\theta\right) \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots), \tag{1.4.3}$$

$$\operatorname{Re} f\left(re^{i\theta}\right)\sin n\theta = \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left(\operatorname{Re} a_k \cos k\theta \sin n\theta - \right.$$
$$\left. - \operatorname{Im} a_k \sin k\theta \sin n\theta\right) \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots)\ : \tag{1.4.4}$$

Քանի որ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|\, r^k < \infty$, ուստի (1.4.3), (1.4.4) շարքերը $[0,\ 2\pi]$-ում ըստ θ-ի հավասարաչափ զուգամետ են: (1.4.3)-ի և (1.4.4)-ի երկու կողմն ըստ θ-ի ինտեգրենք 0-ից 2π: Հավասարաչափ զուգամիտության շնորհիվ աջ մասերում գրված շարքերը կարելի է ինտեգրել անդամ առ անդամ: Հաշվի առնելով, որ

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos k\theta \cos n\theta d\theta = \int\limits_0^{2\pi} \sin k\theta \sin n\theta d\theta = \begin{cases} \pi, & k = n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases}$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos k\theta \sin n\theta d\theta = \int\limits_0^{2\pi} \cos n\theta \sin k\theta d\theta = 0,$$

կստանանք

$$\operatorname{Re} a_n = \frac{1}{\pi r^n} \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{Re} f\left(re^{i\theta}\right)\cos n\theta d\theta \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\operatorname{Im} a_n = \frac{1}{\pi r^n} \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{Re} f\left(re^{i\theta}\right)\sin n\theta d\theta \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f\left(re^{i\theta}\right) d\theta = 0 :$$

Ուստի

$$|\operatorname{Re} a_n| = \pm \operatorname{Re} a_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f\left(re^{i\theta}\right) d\theta \pm$$

$$\pm \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f\left(re^{i\theta}\right) \cos n\theta d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f\left(re^{i\theta}\right) (1 \pm \cos n\theta)\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K}{\pi} r^{N-n} \int_0^{2\pi} (1 \pm \cos n\theta)\, d\theta = 2Kr^{N-n},$$

$$|\operatorname{Re} a_n| \leqslant 2Kr^{N-n} \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{1.4.5}$$

և նմանապես՝

$$|\operatorname{Im} a_n| = \pm \operatorname{Im} a_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f\left(re^{i\theta}\right) d\theta \pm$$

$$\pm \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f\left(re^{i\theta}\right) \sin n\theta d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f\left(re^{i\theta}\right) (1 \pm \sin n\theta)\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K}{\pi} r^{N-n} \int_0^{2\pi} (1 \pm \sin n\theta)\, d\theta = 2Kr^{N-n},$$

$$|\mathrm{Im}\, a_n| \leqslant 2Kr^{N-n} \quad (n \in \mathbb{N}) : \tag{1.4.6}$$

$n > N$ դեպքում (1.4.5)-ում և (1.4.6)-ում անցնելով սահմանի, երբ $r \to \infty$, կստանանք $\mathrm{Re}\, a_n = \mathrm{Im}\, a_n = 0$, որտեղից և (1.4.2)-ից կբխի, որ $f\,(z) = \sum\limits_{k=1}^{N} a_k z^k$:

Լեմման ապացուցված է:

Լեմմա 1.4.5: *Եթե f ամբողջ ֆունկցիան բավարարում է*

$$f(0) = 1, \tag{1.4.7}$$

$$f'(0) = 0, \tag{1.4.8}$$

$$0 < |f(z)| \leqslant e^{|z|} \tag{1.4.9}$$

պայմաններին, ապա $f(z) \equiv 1$:

Ապացույց: Քանի որ f-ը զրոներ չունի, ուստի գոյություն ունի $\ln f(z)$-ի միարժեք ռեգուլյար ճյուղ, այսինքն գոյություն ունի այնպիսի g ամբողջ ֆունկցիա, որ

$$f(z) = e^{g(z)} : \tag{1.4.10}$$

(1.4.9)-ից և (1.4.10)-ից ունենք

$$\mathrm{Re}\, g\,(z) = \ln |f\,(z)| \leqslant |z| \quad (z \in \mathbb{C})\,,$$

որտեղից և 1.4.4 լեմմայից բխում է, որ g-ն գծային ֆունկցիա է՝

$$g(z) = az + b \quad (z \in \mathbb{C}) : \tag{1.4.11}$$

(1.4.10)-ից ունենք

$$f'(z) = f(z)g'(z), \tag{1.4.12}$$

$$g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} : \tag{1.4.13}$$

(1.4.8), (1.4.11), (1.4.13)-ից ստանում ենք $a = 0$: Այստեղից և (1.4.11), (1.4.12)-ից ստանում ենք, որ

$$f'(z) = 0 \quad (z \in \mathbb{C}) : \tag{1.4.14}$$

(1.4.7), (1.4.14)-ից բխում է, որ $f(z) \equiv 1$:

Լեմման ապացուցված է:

Թեորեմ 1.4.1 (Գլիսոն–Կախան–Ժելյազկո): *Եթե φ–ն e միավո–րով A կոմպլեքս բանախյան հանրահաշվի վրա որոշված այն–պիսի գծային ֆունկցիոնալ է, որ*

$$\varphi(e) = 1, \quad \varphi(x) \neq 0 \quad (x \in A^{-1}),$$

ապա

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \quad (\forall x, y \in A)$$

(նախօրոք φ–ից անընդհատություն չի պահանջվում):

Ապացույց: Դիցուք $x,\, y \in A:\, \varphi\,(e) = 1$ պայմանի շնորհիվ կունե–նանք

$$x = a + \varphi\,(x)\, e, \quad y = b + \varphi\,(y)\, e,$$

որտեղ

$$a,\, b \in \ker\,(\varphi) = \{x \in A:\; \varphi\,(x) = 0\}:$$

Ուստի

$$xy = ab + a\varphi\,(y) + b\varphi\,(x) + \varphi\,(x)\,\varphi\,(y)\,,$$

և հետևաբար՝

$$\varphi\,(xy) = \varphi\,(ab) + \varphi\,(x)\,\varphi\,(y): \tag{1.4.15}$$

(1.4.15)-ից բխում է, որ $\varphi\,(xy) = \varphi\,(x)\,\varphi\,(y) \quad (x,\, y \in A)$ հավա–սարությունն ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ, որ եթե $a \in \ker\,(\varphi)$ կամ $b \in \ker\,(\varphi)$, ապա $ab \in \ker\,(\varphi)$:

Ենթադրենք, թե ապացուցված է նշվածի հետևյալ մասնավոր դեպքը. եթե $a \in \ker\,(\varphi)$, ապա $a^2 \in \ker\,(\varphi)$: (1.4.15)-ում վերցնելով $x = y$, կստանանք

$$\varphi\left(x^2\right) = \varphi^2\,(x) \quad (x \in A): \tag{1.4.16}$$

(1.4.16)-ում x-ը փոխարինելով $(x + y)$-ով՝ կունենանք

$$\varphi\left((x+y)^2\right) = \varphi^2\,(x+y)\,,$$

$$\varphi\left(x^2 + xy + yx + y^2\right) = \left[\varphi\,(x) + \varphi\,(y)\right]^2,$$

$$\varphi\left(x^2\right)+\varphi\left(xy+yx\right)+\varphi\left(y^2\right)=\varphi^2\left(x\right)+2\varphi\left(x\right)\varphi\left(y\right)+\varphi^2\left(y\right),$$

որտեղից և (1.4.16)-ից կստանանք

$$\varphi\left(xy+yx\right)=2\varphi\left(x\right)\varphi\left(y\right): \tag{1.4.17}$$

(1.4.17)-ից բխում է, որ եթե $x\in\ker\left(\varphi\right)$ և $y\in A$, ապա $xy+yx\in\ker\left(\varphi\right)$:

$$\left(xy-yx\right)^2=2\left[x\left(yxy\right)+\left(yxy\right)x\right]-\left(xy+yx\right)^2$$

նույնությունից և (1.4.16)-ից բխում է, որ $xy-yx\in\ker\left(\varphi\right)$: Քանի որ

$$xy=\frac{1}{2}\left[\left(xy+yx\right)+\left(xy-yx\right)\right],\quad yx=\frac{1}{2}\left[\left(xy+yx\right)-\left(xy-yx\right)\right],$$

ուստի $xy,\,yx\in\ker\left(\varphi\right)$:

Հետագա դատողությունները շարունակելու համար նախ ցույց տանք, որ φ ֆունկցիոնալը սահմանափակ է և $\|\varphi\|\leqslant 1$:

Քանի որ հակադարձելի էլեմենտների վրա φ-ն զրո չի դառնում, ուստի ըստ 1.4.2 լեմմայի՝

$$\|e-a\|\geqslant 1\quad\left(a\in\ker\left(\varphi\right)\right): \tag{1.4.18}$$

(1.4.18)-ում a-ն փոխարինելով $-\frac{a}{\lambda}$-ով, որտեղ $\lambda\neq 0$, կստանանք

$$\left\|e+\frac{a}{\lambda}\right\|\geqslant 1\quad\left(a\in\ker\left(\varphi\right),\,\lambda\neq 0\right),$$

$$\|a+\lambda e\|\geqslant|\lambda|\quad\left(a\in\ker\left(\varphi\right),\,\lambda\neq 0\right): \tag{1.4.19}$$

(1.4.19)-ն ակնհայտորեն ճիշտ է նաև $\lambda=0$ դեպքում: Քանի որ $\forall x\in A$ էլեմենտ ներկայացվում է $x=a+\varphi\left(x\right)e$ տեսքով, որտեղ $a\in\ker\left(\varphi\right)$, ուստի (1.4.19)-ից կստանանք

$$|\varphi\left(x\right)|\leqslant\|a+\varphi\left(x\right)e\|=\|x\|,$$

$$|\varphi\left(x\right)|\leqslant\|x\|\quad\left(x\in A\right),$$

ինչը ցույց է տալիս, որ φ ֆունկցիոնալը սահմանափակ է և $\|\varphi\| \leqslant 1$:

Այժմ ցույց տանք, որ եթե $a \in \ker(\varphi)$, ապա $a^2 \in \ker(\varphi)$: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ $\|a\| = 1$: Իրոք, եթե նշված դեպքի համար պնդումն արդեն ապացուցված է, ապա $a \neq 0$ դեպքում $\dfrac{a}{\|a\|} \in \ker(\varphi)$ առնչությունից կբխի, որ $\left(\dfrac{a}{\|a\|}\right)^2 \in \ker(\varphi)$, ուստի $a^2 \in \ker(\varphi)$, իսկ $a = 0$ դեպքում $a^2 \in \ker(\varphi)$ առնչությունն ակնհայտ է:

Դիցուք $a \in \ker(\varphi)$ և $\|a\| = 1$: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ֆունկցիան սահմանենք

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi\left(a^k\right)\lambda^k}{k!} \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

բանաձևով: $\left|\varphi\left(a^k\right)\right| \leqslant \left\|a^k\right\| \leqslant \|a\|^k = 1 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$ գնահատականներից բխում է, որ f-ն ամբողջ ֆունկցիա է, ընդ որում $|f(\lambda)| \leqslant e^{|\lambda|} \quad (\lambda \in \mathbb{C})$: Բացի այդ, $f(0) = \varphi(e) = 1$, $f'(0) = \varphi(a) = 0$: φ-ի անընդհատության շնորհիվ ունենք

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi\left(\lambda^k a^k\right)}{k!} = \varphi\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k a^k}{k!}\right) = \varphi\left(e^{\lambda a}\right),$$

և քանի որ $e^{\lambda a} \in A^{-1}$, ուստի $|f(\lambda)| > 0 \quad (\lambda \in \mathbb{C})$: Ըստ 1.4.5 լեմմայի՝ $f(\lambda) \equiv 1$ և հետևաբար, $\varphi\left(a^2\right) = 0$:
Թեորեմն ապացուցված է:

§ 1.5. Անալիտիկ ֆունկցիաներ

Սահմանում 1.5.1: Դիցուք $\Omega \subset \mathbb{C}$ բաց բազմություն է, X–ը կոմպլեքս տոպոլոգիական վեկտորական տարածություն է, իսկ $f : \Omega \to X$: Այդ դեպքում՝
1) կասենք f–ը Ω–ում թույլ անալիտիկ (հոլոմորֆ) է, եթե $\forall \Lambda \in X^*$ համար $\Lambda f \in H(\Omega)$,
2) կասենք f–ը Ω–ում ուժեղ անալիտիկ (հոլոմորֆ) է, եթե $\forall z \in \Omega$

համար գոյություն ունի

$$\lim_{\omega\to z}\frac{f(\omega)-f(z)}{\omega-z}=f'(z)$$

սահմանը:

Դիտողություն 1.5.1: Վերը գրված $\dfrac{f(\omega)-f(z)}{\omega-z}$ հարաբերությունը հասկացվում է որպես $(\omega-z)^{-1}$ սկալյարի և $f(\omega)-f(z)$ վեկտորի արտադրյալ:

Նկատենք, որ

$$\frac{f(\omega)-f(z)}{\omega-z}\xrightarrow[\omega\to z]{} a$$

առնչությունը կարելի է գրել

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\xrightarrow[h\to 0]{} a$$

համարժեք տեսքով: Քանի որ $\forall A:\mathbb{C}\to X$ գծային օպերատոր անընդհատ է և ունի

$$Ah=ha\quad(h\in\mathbb{C})$$

տեսքը, որտեղ $a\in X$, ուստի եթե X-ը նորմավորված տարածություն է, ապա վերը գրված առնչությունը համարժեք է այնպիսի $A\in BL(\mathbb{C},X)$ օպերատորի գոյությանը, որի համար

$$\frac{\|f(z+h)-f(z)-Ah\|}{|h|}\ \xrightarrow[h\to 0]{}\ 0,$$

ինչը նշանակում է, որ f–ը z կետում ըստ Ֆրեշեի դիֆերենցելի է: Այսպիսով, $f:\Omega\to X$ ֆունկցիայի ուժեղ անալիտիկությունը նշանակում է Ω–ի վրա ըստ Ֆրեշեի դիֆերենցելիություն: ▶

Երբեմն կօգտվենք հետևյալ նշանակումներից.

$$D(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C}:\ |z-z_0|<r\},$$

$$\overline{D}(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C}:\ |z-z_0|\leqslant r\},$$

$$\partial D(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C}:\ |z-z_0|=r\}:$$

Թեորեմ 1.5.1: *Դիցուք $\Omega \subset \mathbb{C}$ բաց բազմություն է, X–ը բանախյան տարածություն է, իսկ $f : \Omega \to X$: Այդ դեպքում որպեսզի f–ը Ω–ում լինի ուժեղ անալիտիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն Ω–ում լինի թույլ անալիտիկ:*

Ապացույց: Անհրաժեշտությունն ակնհայտ է:
Բավարարություն: Վերցնենք կամայական $z_0 \in \Omega$ և ցույց տանք, որ

$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} :$$

Նշանակենք

$$g(h) = \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h},$$

$\gamma_r = \partial D(z_0, r)$ և ընտրենք $r > 0$ այնպես, որ $\overline{D}(z_0, 2r) \subset \Omega$: Դիցուք $0 < |h| < r$: Վերցնենք կամայական $\varphi \in X^*$: Ունենք $\varphi(f(\cdot)) \in H(\Omega)$, ուստի ըստ Կոշու բանաձևի՝

$$\varphi(g(h)) = \frac{1}{h}\left[\varphi\left(f(z_0+h)\right) - \varphi\left(f(z_0)m\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{2r}} \frac{\varphi(f(\xi))}{\xi-(z_0+h)}\,d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{2r}} \frac{\varphi(f(\xi))}{\xi - z_0}\,d\xi\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{h}\int\limits_{\gamma_{2r}} \varphi(f(\xi))\left[\frac{1}{\xi-(z_0+h)} - \frac{1}{\xi-z_0}\right] d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{h}\int\limits_{\gamma_{2r}} \frac{\varphi(f(\xi))\cdot h}{[\xi-(z_0+h)]\,(\xi-z_0)}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{2r}} \frac{\varphi(f(\xi))\,d\xi}{[\xi-(z_0+h)]\,(\xi-z_0)} :$$

Հետևաբար $0 < |h| < r$, $0 < |h'| < r$ համար

$$\varphi(g(h)) - \varphi(g(h')) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{2r}} \frac{\varphi(f(\xi))\,d\xi}{[\xi-(z_0+h)]\,(\xi-z_0)} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{2r}} \frac{\varphi(f(\xi))\,d\xi}{[\xi-(z_0+h')]\,(\xi-z_0)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{2r}} \frac{\varphi(f(\xi))}{\xi-z_0}\left[\frac{1}{\xi-(z_0+h)} - \frac{1}{\xi-(z_0+h')}\right] d\xi =$$

$$= \frac{h-h'}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{2r}} \frac{\varphi(f(\xi))\,d\xi}{(\xi-z_0)\,[\xi-(z_0+h)]\,[\xi-(z_0+h')]} \ :$$

Հետագա դատողությունները փաենլու համար ցույց տանք, որ f ֆունկցիան γ_{2r}–ի վրա սահմանափակ է:

Դիտարկենք $F_z : X^* \to \mathbb{C}\ \ (z \in \gamma_{2r})$ գծային անընդհատ ֆունկ–ցիոնալների ընտանիքը, որտեղ

$$F_z(\varphi) = \varphi(f(z)) \quad (\varphi \in X^*) :$$

Քանի որ $\forall\varphi \in X^*$ համար $\varphi(f(z))$ ֆունկցիան, լինելով անընդհատ, γ_{2r}–ի վրա սահմանափակ է, ուստի $\forall\varphi \in X^*$ ֆունկցիոնալի համար $\{F_z(\varphi) :\ z \in \gamma_{2r}\}$ ընտանիքը (որին անվանում են φ–ի օրբիտա) սահմանափակ է: Հետևաբար, ըստ Բանախ–Շտեյնհաուսի թեորեմի՝ $\{\|F_z\| :\ z \in \gamma_{2r}\}$ ընտանիքը ևս սահմանափակ է՝

$$\sup_{z\in\gamma_{2r}} \|F_z\| < \infty :$$

Օգտվելով

$$\|x\| = \sup_{\varphi\in X^*,\, \|\varphi\|\leqslant 1} |\varphi(x)| \tag{1.5.1}$$

բանաձևից՝ կունենանք

$$\|F_z\| = \sup_{\varphi\in X^*,\, \|\varphi\|\leqslant 1} |F_z(\varphi)| = \sup_{\varphi\in X^*,\, \|\varphi\|\leqslant 1} |\varphi(f(z))| = \|f(z)\|\,,$$

ուստի

$$\sup_{z\in\gamma_{2r}} \|f(z)\| < \infty :$$

Դիցուք

$$\|f(z)\| \leqslant M \quad (\xi \in \gamma_{2r}) :$$

Այդ դեպքում $\xi \in \gamma_{2r}$ համար կունենանք

$$|\varphi(f(z))| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|f(z)\| \leqslant M \|\varphi\| :$$

Քանի որ $\xi \in \gamma_{2r}$ համար $|\xi - z_0| = 2r$, և $|h|$, $|h'| < r$, ուստի

$$|\xi - (z_0 + h)| = |(\xi - z_0) - h| \geqslant |\xi - z_0| - |h| \geqslant 2r - r = r,$$

և նմանապես՝

$$\left|\xi - \left(z_0 + h'\right)\right| \geqslant r :$$

Հետևաբար, օգտվելով վերը $\varphi(g(h)) - \varphi(g(h'))$–ի համար ստացված ներկայացումից և ինտեգրալի գնահատականից՝ կստանանք, որ

$$\left|\varphi(g(h)) - \varphi(g(h'))\right| \leqslant \frac{|h-h'|}{2\pi} \cdot \frac{M\|\varphi\|}{2r \cdot r \cdot r}|\gamma_{2r}| = \frac{M}{r^2}\|\varphi\| \cdot |h-h'| :$$

Վերջինս տեղի ունի $\forall \varphi \in X^*$ համար: Դիցուք $\|\varphi\| \leqslant 1$: Այդ դեպքում

$$\left|\varphi\left(g(h) - g(h')\right)\right| = \left|\varphi(g(h)) - \varphi(g(h'))\right| \leqslant \frac{M}{r^2}|h-h'|,$$

և նորից օգտվելով (1.5.1) բանաձևից՝ կստանանք

$$\left|g(h) - g(h')\right| \leqslant \frac{M}{r^2}\,|h-h'|, \quad \left(0 < |h| < r,\ \ 0 < |h'| < r\right) :$$

Ստացված գնահատականներից և ֆունկցիաների համար Կոշու զուգամիտության սկզբունքից (որը կիրառելի է X–ի լրիվության շնորհիվ) կբխի, որ գոյություն ունի

$$\lim_{h \to 0} g(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

սահմանը (վերջինիս գոյությունը ապացուցելու համար կարելի էր չօգտվել ֆունկցիաների համար Կոշու զուգամետության սկզբունքից, այլ պարզապես ցույց տալ, որ $\forall \{h_n\}_1^\infty \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $h_n \to 0$ հաջորդականության համար $\{g(h_n)\}_{n=1}^\infty$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է):

Թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում 1.5.2: Դիցուք

$$\gamma : z = z(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

$\mathbb{C}$ կոմպլեքս հարթության մեջ որևէ կոր է (սա նշանակում է, որ $z(\cdot) \in C[\alpha, \beta]$), X–ը բանախյան փարածություն է, $f : \gamma \to X$: Դիփարկենք $[\alpha, \beta]$–ի կամայական

$$P: \; \alpha = t_0 < t_2 < \cdots < t_n = \beta$$

փրոհում, յուրաքանչյուր $[t_i, t_{i+1}]$ փրոհման հափվածից ընփրենք մե–կական $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$ կեփ և կազմենք

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(z\left(\xi_k\right)\right) \Delta z_k, \quad \Delta z_k = z_{k+1} - z_k$$

գումարը ($z_k = f(t_k)$, $k = \overline{0, n}$): Նշանակենք

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i, \quad \lambda = \max_i \Delta t_i :$$

Եթե գոյություն ունի (X–ում նորմի իմաստով)

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma$$

սահմանը (որը կախված չէ ո՛չ P փրոհումների ձևից, ո՛չ ξ_i կեփերի ընփրությունից), ապա այն կոչվում է f–ի կորագիծ ինփեգրալ՝ փա–րածված γ կորով և նշանակվում

$$\int_\gamma f(z)\, dz$$

սիմվոլով:

Երբեմն կորագիծ ինփեգրալի սահմանման մեջ վերցնում են $\xi_i = t_i$:

Ինչպես դասական դեպքում, այստեղ էլ կարելի է ապացուցել, որ եթե γ կորն ուղղելի է, իսկ f–ն անընդհատ է, ապա

$$\int\limits_\gamma f(z)\,dz$$

ինտեգրալը գոյություն ունի, և տեղի ունի

$$\left\|\int\limits_\gamma f(z)\,dz\right\| \leqslant \sup_{z\in\gamma}\|f(z)\|\cdot|\gamma|$$

գնահատականը: Այստեղ էլ մենք ըստ էության գործ ունենք Ստիլ–տեսի ինտեգրալի հետ:

Պարզ է նաև, որ եթե

$$\exists\int\limits_\gamma f(z)\,dz = x, \tag{1.5.2}$$

ապա $\forall\varphi\in X^*$ համար

$$\exists\int\limits_\gamma \varphi\left(f(z)\right)\,dz = \varphi(x)\,: \tag{1.5.3}$$

Հաճախ օգտակար է լինում հետևյալ փաստը. եթե $x\in X$ այն–պիսին է, որ

$$\varphi(x)=0\quad(\forall\varphi\in X^*)\,,$$

ապա $x=0$: Իրոք, դա բխում է Հան-Բանախի թեորեմի հետևանք հանդիսացող

$$\|x\| = \sup_{\varphi\in X^*,\|\varphi\|\leqslant 1}|\varphi(x)|$$

բանաձևից: Նշված փաստից բխում է, որ եթե (1.5.2) ինտեգրալը գոյություն ունի և $y\in X$ այնպիսին է, որ

$$\int\limits_\gamma \varphi\left(f(z)\right)\,dz = \varphi(y)\quad(\forall\varphi\in X^*),$$

ապա $y = x$: Այս պատճառով երբեմն (1.5.3) հավասարությունը և վերցվում է որպես ինտեգրալի սահմանում: Անալիտիկ ֆունկ–ցիաների տեսության մի շարք փաստեր տեղափոխվում են նաև այս ընդհանուր դեպք: Դրանց մի մասը կարելի ապացուցել ճիշտ նույն դատողություններով, ինչպես սովորական դեպքում: Սակայն վերը նշված կապը (1.5.2)–ի և (1.5.3)–ի միջև թույլ է տալիս շատ փաստեր տարածել այս ընդհանուր դեպքի վրա՝ առանց դժվարությունների: Բերենք դրանցից մի քանի հիմնականները:

Կոշու թեորեմը: *Միակապ տիրույթում անալիտիկ ֆունկցիայի ինտեգրալը՝ տարածված այդ տիրույթում ընկած կամայական փակ ուղղելի կորով, հավասար է զրոյի:*

Ապացույց: Դիցուք $\Omega \subset \mathbb{C}$ միակապ տիրույթ է, $f : \Omega \to X$ անա–լիտիկ է, իսկ $\gamma \subset \Omega$ փակ ուղղելի կոր է: Այդ դեպքում $\forall \varphi \in X^*$ համար $\varphi(f(\cdot)) \in H(\Omega)$, ուստի Կոշու դասական թեորեմից կբխի, որ

$$\varphi\left(\int\limits_\gamma f(z)\,dz\right) = \int\limits_\gamma \varphi(f(z))\,dz = 0 \quad (\forall \varphi \in X^*)$$

և հետևաբար՝

$$\int\limits_\gamma f(z)\,dz = 0\,:$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Կոշու բանաձևը: *Եթե f ֆունկցիան անալիտիկ է Γ կոնտուրով սահմանափակված $\overline{\mathcal{D}}$ փակ տիրույթում, ապա $\forall z \in \mathcal{D}$ կետի համար ճիշտ է*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(t)}{t-z}\,dt$$

բանաձևը:

Ապացույց: $\forall \varphi \in X^*$ համար ունենք

$$\varphi\left(f(z)\right) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi\left(f(t)\right)}{t-z}\,dt = \varphi\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(t)}{t-z}\,dt\right),$$

որտեղից էլ կբխի մեր պնդումը:

Լիուվիլի թեորեմը: *Եթե $f : \mathbb{C} \to X$ ֆունկցիան (թույլ) անալիտիկ է ամբողջ $\mathbb{C}$ հարթության վրա և թույլ սահմանափակ է, ապա f–ը հաստատուն է:*

Ապացույց: $\forall \varphi \in X^*$ համար $\varphi(f(z))$–ը կլինի ամբողջ և սահմանափակ, ուստի Լիուվիլի դասական թեորեմից կբխի, որ

$$\varphi\left(f(z)\right) = \varphi\left(f(0)\right) \quad (\forall z \in \mathbb{C}),$$

$$\varphi\left(f(z) - f(0)\right) = 0 \quad (\forall z \in \mathbb{C}) :$$

Այստեղ ֆիքսելով z–ը և օգտվելով φ–ի կամայականությունից՝ կստանանք

$$f(z) - f(0) = 0 \quad (\forall z \in \mathbb{C}) :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Կոշու տիպի ինտեգրալ: Մինչև Կոշու տիպի ինտեգրալի ուսումնասիրությանն անցնելը նկատենք, որ եթե $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to X$ ուժեղ անալիտիկ է, ապա f–ն ունի բոլոր կարգի ածանցյալները, ընդ որում $\forall \varphi \in X^*$ համար

$$\frac{d^n}{dx^n}\,\varphi\left(f(x)\right) = \varphi\left(\frac{d^n}{dx^n}\,f(x)\right) \quad (x \in \Omega) : \tag{1.5.4}$$

Նշված պնդումը ապացուցելու համար կատարենք ինդուկցիա ըստ n–ի: $n = 0$ դեպքում պնդումն ակնհայտ է: Այժմ դիցուք հայտնի է, որ f–ը Ω–ում ունի k–րդ կարգի ածանցյալ և տեղի ունի

$$\frac{d^k}{dx^k}\,\varphi\left(f(x)\right) = \varphi\left(\frac{d^k}{dx^k}\,f(x)\right) \quad (x \in \Omega,\ \varphi \in X^*) \tag{1.5.5}$$

հավասարությունը: Քանի որ $\varphi\left(f(\cdot)\right) \in H(\Omega)$, ուստի $\varphi(f(x))$–ը Ω-ում անվերջ դիֆերենցելի է: Մասնավորապես

$$\exists \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\,\varphi\left(f(x)\right) = \frac{d}{dx}\varphi\left(\frac{d^k}{dx^k}\,f(x)\right) \quad (\forall \varphi \in X^*) :$$

Հետևաբար 1.5.1 թեորեմից կբխի, որ

$$\exists \frac{d}{dx}\left(\frac{d^k}{dx^k}\, f(x)\right) = \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\,(f(x)):$$

Օգտվելով վերջինիս գոյությունից և (1.5.5)–ից՝ դժվար չէ ցույց տալ, որ (1.5.4)–ը տեղի ունի նաև $n = k+1$ համար:

Այժմ դիցուք $\gamma \subset \mathbb{C}$ կամայական ուղղելի կոր է, իսկ $g : \gamma \to X$ անընդհատ ֆունկցիա է: Այդ դեպքում

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{g(t)}{t-z}\, dt \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \gamma)$$

ինտեգրալը կոչվում է Կոշու տիպի: $\forall \varphi \in X^*$ համար կունենանք

$$\varphi\,(F(z)) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{\varphi\,(g(t))}{t-z}\, dt \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \gamma):$$

Աջ մասում ստացվածը, ինչպես հայտնի է կոմպլեքս անալիզից, հանդիսանում է γ–ի լրացման վրա անալիտիկ ֆունկցիա և

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{\varphi\,(g(t))}{t-z}\, dt\right) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{\varphi\,(g(t))}{(t-z)^{n+1}}\, dt,$$

ուստի $\forall \varphi \in X^*$ համար

$$\frac{d^n}{dz^n}\,\varphi\,(F(z)) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{\varphi\,(g(t))}{(t-z)^{n+1}}\, dt,$$

որը, շնորհիվ (1.5.4)-ի, կարելի է գրել

$$\varphi\left(\frac{d^n}{dz^n}\, F(z)\right) = \varphi\left(\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{g(t)}{(t-z)^{n+1}}\, dt\right) \qquad (\varphi \in X^*)$$

տեսքով: Այստեղից կբխի, որ

$$\frac{d^n}{dz^n}F(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{g(t)}{(t-z)^{n+1}}\,dt :$$

Օգտվելով սրանից՝ հեշտ է ապացուցել

Վայերշտրասի I **թեորեմը:** *Եթե Ω տիրույթում անալիտիկ $f_n : \Omega \to X$ ֆունկցիաների հաջորդականությունը Ω–ի ներսում (այսինքն՝ Ω–ի կոմպակտ ենթաբազմությունների վրա) զուգամիտում է հավասարաչափ, ապա՝*

1) $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$ սահմանային ֆունկցիան կլինի (ուժեղ) անալիտիկ Ω–ում;

2) $f_n^{(p)}(z) \underset{x\to\infty}{\rightrightarrows} f^{(p)}(z)$ $(p = 1, 2, \dots)$ (հավասարաչափ Ω–ի ներսում): ►

Քանի որ ամեն մի $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ տեսքի աստիճանային շարք (որում $a_n \in X$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$) իր զուգամիտության շրջանի ներսում զուգամիտում է հավասարաչափ, ուստի Վայերշտրասի I թեորեմից բխում է, որ այդ զուգամիտության շրջանի ներսում

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

ֆունկցիան ուժեղ անալիտիկ է և նրա ածանցյալները կարելի է հաշվել անդամ առ անդամ դիֆերենցման միջոցով: Ճիշտ նույն դատողություններով, ինչպես դասական դեպքում, ցույց կտանք, որ եթե f–ն անալիտիկ է $D(z_0, R)$ շրջանում, ապա այդ շրջանում տեղի ունի

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

ներկայացումը, որտեղ

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}\,dt$$

(այստեղ $\gamma_r = \partial D(z_0, r)$, որտեղ $0 < r < R$ որևէ թիվ է)։ Իհարկե, սա ևս կարելի է անմիջապես բերել դասական դեպքին, քանի որ $\forall \varphi \in X^*$ համար $\varphi\left(f(\cdot)\right) \in H\left(D\left(z_0, R\right)\right)$ և $z \in D\left(z_0, R\right)$ համար

$$\varphi(f(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{\varphi(f(t))}{(t-z_0)^{n+1}}\, dt\right] (z-z_0)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{\varphi\left[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}\, dt\right]\right\} (z-z_0)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi\left[a_n(z-z_0)^n\right] = \varphi\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\right) :$$

§ 1.6. Վեկտոր – ֆունկցիաների ինտեգրումը

Երբեմն կարիք է լինում ինտեգրել որևէ (Q, μ) չափով տարածության վրա որոշված և ինչ–որ X տոպոլոգիական վեկտորական տարածությունից արժեքներ ընդունող ֆունկցիաները։ Այլ կերպ ասած, այդպիսի f ֆունկցիային պետք է համապատասխանեցնել X տարածության որոշակի

$$\int\limits_Q f\, d\mu$$

վեկտոր, որն օժտված լինի թվային ֆունկցիայի ինտեգրալի հիմնական հատկություններով։ Օրինակ, ցանկացած $\Lambda \in X^*$ ֆունկցիոնալի համար պետք է տեղի ունենա

$$\Lambda\left(\int\limits_Q f\, d\mu\right) = \int\limits_Q (\Lambda f)\, d\mu$$

հավասարությունը, քանի որ վերջավոր գումարների համար անալոգ հավասարությունը տեղի ունի, իսկ ինտեգրալը միշտ հանդիսանում է այդպիսի գումարների սահմանը՝ այս կամ այն իմաստով: Ինտեգ–րալի մեր սահմանումը հիմնված է լինելու միայն այդ պահանջի վրա:

Սահմանում 1.6.1: Դիցուք (Q, μ)–ն չափով տարածություն է, X–ն այնպիսի տոպոլոգիական վեկտորական տարածություն է, որ X^*–ն անջատում է X–ի կետերը, իսկ $f : Q \to X$ ֆունկցիան այնպիսին է, որ ցանկացած $\Lambda \in X^*$ համար Λf սկալյար ֆունկցիան Q–ի վրա ըստ μ չափի ինտեգրելի է: Եթե գոյություն ունի այնպիսի $y \in X$ վեկտոր, որ ցանկացած $\Lambda \in X^*$ ֆունկցիոնալի համար

$$\Lambda y = \int_Q (\Lambda f)\, d\mu, \tag{1.6.1}$$

ապա y–ը կոչվում է ըստ μ չափի f ֆունկցիայի ինտեգրալ՝ տարած–ված Q բազմությամբ, և նշանակվում է $\int_Q f\, d\mu$ սիմվոլով:

Դիտողություն 1.6.1: Քանի որ X^*–ն անջատում է X–ի կետերը, ուստի ինտեգրալը (եթե այն գոյություն ունի) միակն է:

Քանի որ լոկալ ուռուցիկ X տարածության համար X^*–ն ան–ջատում է X–ի կետերը, ուստի ինտեգրալի սահմանման մեջ որպես X մասնավորապես կարելի է վերցնել կամայական լոկալ ուռուցիկ տոպոլոգիական վեկտորական տարածություն:

Թեորեմ 1.6.1: *Դիցուք՝*
1) X–ն այնպիսի տոպոլոգիական վեկտորական տարածու–թյուն է, որ X^*–ն անջատում է X–ի կետերը, իսկ μ–ն հավա–նականային բորելյան չափ է Q կոմպակտ հաուսդորֆյան տա–րածությունում,
2) $f : Q \to X$ ֆունկցիան անընդհատ է և $f(Q)$ բազմության ուռուցիկ թաղանթը հարաբերական կոմպակտ է X–ում:

Այդ դեպքում $\int_Q f\, d\mu$ ինտեգրալը գոյություն ունի և պատկա–նում է $f(Q)$ բազմության ուռուցիկ թաղանթի փակմանը:

Ապացույց: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք են–թադրել, որ X տարածությունն իրական է (կոմպլեքս տարածության դեպքը կոմպլեքս փարածությունների համար Հան–Բանախի թեորե–մի ապացույցի դափողություններին նման դափողություններով հեշ–փությամբ բերվում է նշված դեպքին): H–ով նշանակենք $f(Q)$ բազ–մության ուռուցիկ թաղանթը: Մենք պետք է ապացուցենք այնպիսի $y \in \overline{H}$ վեկտորի գոյությունը, որը ցանկացած $\Lambda \in X^*$ համար բա–վարարում է (1.6.1)–ին:

Դիցուք $L = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_n\}$-ը X^*–ի վերջավոր ենթաբազմություն է և

$$E_L = \left\{ y \in \overline{H} : \ \Lambda y = \int\limits_Q (\Lambda f)\, d\mu \quad (\forall \Lambda \in L) \right\} :$$

Λ ֆունկցիոնալների անընդհատության շնորհիվ E_L բազմություն–ները փակ են և հետևաբար, կոմպակտ են, քանի որ $\overline{H}$–ը կոմպակտ է: Թեորեմի ապացույցն ավարտելու համար բավական է ցույց տալ, որ E_L բազմություններից ոչ մեկը դատարկ չէ: Իրոք, այդ դեպքում E_L բազմությունները կկազմեն $\overline{H}$–ի կենտրոնացված համակարգ, և $\overline{H}$–ի կոմպակտությունից կբխի, որ բոլոր E_L բազմությունների հատումը դատարկ չէ: Այդ հատմանը պատկանող յուրաքանչյուր y վեկտոր կբավարարի թեորեմի պահանջներին:

$L = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_n\}$-ը դիտարկենք որպես X տարածության ար–տապատկերում $\mathbb{R}^n$–ի մեջ: Դիցուք $K = L\,(f(Q))$: Նշանակենք

$$m_i = \int\limits_Q (\Lambda_i f)\ d\mu \quad (1 \leqslant i \leqslant n) : \tag{1.6.2}$$

Մենք պնդում ենք, որ $m = (m_1, \dots, m_n)$ կետը պատկանում է K բազմության S ուռուցիկ թաղանթին:

Քանի որ Q–ն կոմպակտ է և կոմպակտ բազմության անընդհատ պատկերը կոմպակտ է, ուստի K–ն կոմպակտ է: Քանի որ $\mathbb{R}^n$–ում կոմպակտ բազմության ուռուցիկ թաղանթը կոմպակտ է, ուստի $S \subset \mathbb{R}^n$ կոմպակտ բազմություն է: Եթե $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ կետը չի պատկանում S–ին, ապա, օգտվելով կոմպակտ և փակ չհատվող ուռուցիկ բազմությունների անջատման վերաբերյալ թեորեմից և $\mathbb{R}^n$–ում գծային ֆունկցիոնալների հայտնի տեսքից, եզրակացնում ենք, որ գոյություն ունեն այնպիսի $c_1, \ldots, c_n$ իրական թվեր, որոնց համար

$$\sum_{i=1}^{n} c_i u_i < \sum_{i=1}^{n} c_i t_i \quad (u = (u_1, \ldots, u_n) \in K) : \tag{1.6.3}$$

Ուստի

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \Lambda_i f(q) < \sum_{i=1}^{n} c_i t_i \quad (q \in Q) : \tag{1.6.4}$$

Քանի որ μ–ն հավանականային չափ է ($\mu(Q) = 1$), ուստի (1.6.4)–ի երկու կողմն ինտեգրելով ստանում ենք $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i m_i < \sum\limits_{i=1}^{n} c_i t_i$: Հետևաբար, $t \neq m$:

Ստացվածը ցույց է տալիս, որ $m \in S$: Քանի որ $K = L\left(f(Q)\right)$, իսկ L արտապատկերումը գծային է, ուստի գոյություն ունի այնպիսի $y \in H$, որ $m = Ly$: Այդպիսի y վեկտորի համար ունենք

$$\Lambda_i y = m_i = \int\limits_{Q} (\Lambda_i f)\, d\mu \quad (1 \leqslant i \leqslant n) :$$

Ուստի $y \in E_L$ և հետևաբար, $E_L \neq \varnothing$:
Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն 1.6.2: Ցանկացած ν վերջավոր դրական բորելյան չափ հաստատունով բազմապատկելուց հետո կդառնա հավանականային, ուստի նախորդ թեորեմում ինտեգրալի գոյության մասին պնդումը ուժի մեջ կմնա նաև այդպիսի ν չափերի դեպքում: Չափի վերլուծության մասին Ժորդանի թեորեմի միջոցով նշված արդյունքը կարելի է ընդհանրացնել կամայական իրական վերջավոր չափերի և այնուհետև՝ կամայական կոմպլեքս չափերի դեպքերի համար:

Թեորեմ 1.6.2: *Դիցուք Q–ն կոմպակտ հաուսդորֆյան տարածություն է, X–ը բանախյան տարածություն է, $f : Q \to X$ անընդհատ արտապատկերում է և μ–ն Q–ի վրա դրական բորել–*

յան չափ է: Այդ դեպքում

$$\left\|\int\limits_Q f\,d\mu\right\| \leqslant \int\limits_Q \|f\|\,d\mu :$$

Ապացույց: Նշանակենք $y = \int\limits_Q f\,d\mu$: Ըստ Հան–Բանախի թեորեմի հետևանքի՝ գոյություն ունի այնպիսի $\Lambda \in X^*$ ֆունկցիոնալ, որ $\Lambda y = \|y\|$ և $|\Lambda x| \leqslant \|x\|$ $(x \in X)$: Մասնավորապես՝

$$|\Lambda f(q)| \leqslant \|f(q)\| \quad (q \in Q) :$$

Հետևաբար

$$\|y\| = \Lambda y = \int\limits_Q (\Lambda f)\,d\mu \leqslant \int\limits_Q \|f\|\,d\mu :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Վերջում մի փոքր կանգ առնենք A արժեքանի ֆունկցիաների ինտեգրման վրա, որտեղ A–ն բանախյան հանրահաշիվ է: Դիցուք Q–ն կոմպակտ հաուսդորֆյան տարածություն է, μ–ն Q–ի վրա բո–րելյան չափ է, իսկ $f : Q \to A$ անընդհատ ֆունկցիա է: Ըստ թեորեմ 1.6.1–ի՝ $\int\limits_Q f\,d\mu$ ինտեգրալը գոյություն ունի: Ապացուցենք, որ այս դեպքում ինտեգրալն օժտված է հետևյալ լրացուցիչ հատկությամբ. եթե $x \in A$, ապա

$$x\int\limits_Q f\,d\mu = \int\limits_Q xf(p)\,d\mu(p), \tag{1.6.5}$$

$$\left(\int\limits_Q f\,d\mu\right)x = \int\limits_Q f(p)x\,d\mu(p) : \tag{1.6.6}$$

(1.6.5) բանաձևն ապացուցելու համար M_x–ով նշանակենք ձախից x էլեմենտով բազմապատկման օպերատորը: Ցանկացած $\Lambda \in A^*$ համար ունենք $\Lambda M_x \in A^*$, ուստի ինտեգրալի սահմանումից կունենանք

$$\Lambda M_x \int\limits_Q f\, d\mu = \int\limits_Q (\Lambda M_x f)\, d\mu = \Lambda \int\limits_Q (M_x f)\, d\mu \quad (\forall \Lambda \in A^*) :$$

Հետևաբար

$$M_x \int\limits_Q f\, d\mu = \int\limits_Q (M_x f)\, d\mu,$$

որտեղից էլ բխում է (1.6.5)–ը: (1.6.6)–ն ապացուցելու համար որպես M_x պետք է վերցնել աջից x էլեմենտով բազմապատկման օպերատորը:

§ 1.7. Սպեկտրի հիմնական հատկությունները

Լեմմա 1.7.1: *Դիցուք A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, $x \in A^{-1}$, $h \in A$ և $\|h\| < \frac{1}{2}\left\|x^{-1}\right\|^{-1}$: Այդ դեպքում $x + h \in A^{-1}$ և*

$$\left\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\right\| \leqslant 2\left\|x^{-1}\right\|^3 \|h\|^2 : \qquad (1.7.1)$$

Ապացույց: Եթե $x, y \in A^{-1}$, ապա $y^{-1}x$ էլեմենտը հանդիսանում է $x^{-1}y$ էլեմենտի հակադարձը: Այսպիսով՝ $\forall x, y \in A^{-1}$ համար $x^{-1}y \in A^{-1}$, ուստի A^{-1}–ը խումբ է:

Ունենք $x + h = x\left(e + x^{-1}h\right)$: Քանի որ $\left\|x^{-1}h\right\| < \frac{1}{2}$, ուստի ըստ 1.4.2 լեմմայի՝ $\exists \left(e + x^{-1}h\right)^{-1}$ և

$$\left\|\left(e + x^{-1}h\right)^{-1} - e + x^{-1}h\right\| \leqslant \frac{\left\|x^{-1}h\right\|^2}{1 - \left\|x^{-1}h\right\|} \leqslant \frac{\left\|x^{-1}h\right\|^2}{1 - \frac{1}{2}} =$$

$$= 2\left\|x^{-1}h\right\|^2 :$$

Ուստի ըստ վերին սավածի՝ $\exists (x+h)^{-1} = \left(e + x^{-1}h\right)^{-1} x^{-1}$ և

$$\left\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\right\| = \left\|(e + x^{-1}h)^{-1}x^{-1} - x^{-1} + \right.$$

$$\left. + x^{-1}hx^{-1}\right\| = \left\|\left[(e + x^{-1}h)^{-1}x^{-1} - e + x^{-1}h\right] x^{-1}\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\left(e + x^{-1}h\right)^{-1} x^{-1} - e + x^{-1}h\right\| \cdot \left\|x^{-1}\right\| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \left\|x^{-1}h\right\|^{2} \cdot \left\|x^{-1}\right\| \leqslant 2 \left\|x^{-1}\right\|^{3} \|h\|^{2} :$$

Լեմման ապացուցված է:

Թեորեմ 1.7.1: *Եթե A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, ապա A^{-1}–ը A–ում բաց բազմություն է, իսկ $x \mapsto x^{-1}$ արտապատ-կերումը հանդիսանում է A^{-1}–ի հոմեոմորֆիզմ իր վրա:*

Ապացույց: Նախորդ թեորեմից բխում է, որ A^{-1}–ը A–ում բաց է, իսկ $x \mapsto x^{-1}$ արտապատկերումն անընդհատ է: Քանի որ $x \mapsto x^{-1}$ արտապատկերումը A^{-1}–ը փոխմիարժեք արտապատկե-րում է իր վրա և այդ արտապատկերման հակադարձը հենց ինքն է, ուստի այն հոմեոմորֆիզմ է:
Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն 1.7.1: F–ով նշանակենք այն արտապատկերումը, որը $\forall x \in A^{-1}$ վեկտորին համապատասխանեցնում է x^{-1} վեկտորը՝

$$F(x) = x^{-1} \quad \left(x \in A^{-1}\right) :$$

Քանի որ A^{-1}–ը բաց է, ուստի իմաստ ունի խոսել F–ի դիֆերենցե-լիության մասին: (1.7.1) հավասարությունից բխում է, որ $\forall x \in A^{-1}$ համար

$$\frac{\left\|F\left(x+h\right) - F\left(x\right) - \left(-x^{-1}hx^{-1}\right)\right\|}{\|h\|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0,$$

ուստի F–ն ըստ Ֆրեշեի դիֆերենցելի է, և

$$\left[F'(x)\right] h = -x^{-1}hx^{-1} \quad (h \in A) : \blacktriangleright$$

Սահմանում 1.7.1: $\lambda \in \mathbb{C}$ թիվը կոչվում է $a \in A$ էլեմենտի համար ռեգուլյար կետ, եթե $\lambda e - a$ էլեմենտը հակադարձելի է՝ $\lambda e - a \in A^{-1}$:

a էլեմենտի բոլոր ռեգուլյար կետերի բազմությունը կոչվում է a–ի ռեզոլվենտային բազմություն և նշանակվում է $\Omega(a)$ սիմվոլով: $\Omega(a)$–ի վրա որոշված

$$R_a(\lambda) = (\lambda e - a)^{-1}$$

ֆունկցիան կոչվում է a–ի ռեզոլվենտ:

$\sigma(a) = \mathbb{C} \setminus \Omega(a)$ բազմությունը կոչվում է a էլեմենտի սպեկտր:

Թեորեմ 1.7.2: *$\forall a \in A$ համար՝*
1) $\Omega(a) \subset \mathbb{C}$ բաց բազմություն է, իսկ R_a–ն $\Omega(a)$–ի վրա ուժեղ անալիտիկ է,
2) $\sigma(a) \subset \mathbb{C}$ կոմպակտ է, որն ընկած է

$$\bar{D}\left(0, \|a\|\right) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leqslant \|a\|\}$$

փակ շրջանում:

Ապացույց: 1) Ֆիքսենք $a \in A$ և դիտարկենք $g(\lambda) = \lambda e - a$ ֆունկցիան: $g : \mathbb{C} \to A$ անընդհատ ֆունկցիա է: Ըստ 1.7.1 թեորեմի՝ A^{-1} հակադարձելի էլեմենտների բազմությունը բաց է, ուստի նրա $g^{-1}\left(A^{-1}\right)$ նախապատկերը ևս կլինի բաց: Մնում է պեսնել, որ

$$\Omega(a) = g^{-1}\left(A^{-1}\right) :$$

1.7.1 լեմմայի մեջ վերցնենք $x = \lambda e - a$, $h = (\mu - \lambda)e$, որտեղ $\lambda \in \Omega(a)$ նախօրոք ֆիքսված (կամայական) կետ է, իսկ μ–ն ընտրված է λ–ին այնքան մոտ, որ պատկանի $\Omega(a)$–ին: Այդ դեպքում λ–ին բավականաչափ մոտ μ–երի համար (1.7.1)–ի շնորհիվ կունենանք

$$\|R_a(\mu) - R_a(\lambda) + R_a(\lambda)(\mu - \lambda)eR_a(\lambda)\| \leqslant 2\left\|R_a(\lambda)\right\|^3 |\mu - \lambda|^2,$$

որի երկու կողմը բաժանելով $|\mu - \lambda|$–ի վրա և անցնելով սահմանի, երբ $\mu \to \lambda$, կստանանք, որ

$$\exists \lim_{\mu \to \lambda} \frac{R_a(\mu) - R_a(\lambda)}{\mu - \lambda} = -R_a^2(\lambda)$$

կամ՝

$$\exists R_a'(\lambda) = -R_a^2(\lambda) \quad (\lambda \in \Omega(a)) : \tag{1.7.2}$$

2) Նախորդ պնդումից բխում է, որ $\sigma(a) = \mathbb{C} \backslash \Omega(a)$ բազմությունը փակ է, և ապացույցն ավարտելու համար բավական է ցույց տալ, որ

$$\sigma(a) \subset \overline{D}\,(0, \|a\|) :$$

Դրա համար նկատենք, որ $|\lambda| > \|a\|$ պայմանին բավարարող λ կոմպլեքս թվերը հանդիսանում են a–ի համար ռեգուլյար կետեր: Իրոք, ըստ 1.4.2 լեմմայի՝

$$e - \frac{a}{\lambda} \in A^{-1},$$

և հետևաբար

$$\lambda e - a = \lambda \left(e - \frac{a}{\lambda}\right) \in A^{-1},$$

ինչն էլ նշանակում է, որ $\lambda \in \Omega(a)$:
Թեորեմն ապացուցված է:

Լեմմա 1.7.2: *$\forall a \in A$ համար $\sigma(a) \neq \emptyset$:*

Ապացույց: Ենթադրենք հակառակը՝ ինչ–որ $a \in A$ համար $\sigma(a) = \emptyset$: Այդ դեպքում կունենանք $\Omega(a) = \mathbb{C}$ և նախորդ թեորեմից կբխի, որ R_a ռեզոլվենտը անալիտիկ է ամբողջ $\mathbb{C}$ կոմպլեքս հարթության վրա: Դիցուք $|\lambda| > \|a\|$: Այդ դեպքում ըստ 1.4.2 լեմմայի՝

$$\exists \left(e - \frac{a}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^n},$$

և հետևաբար

$$R_a(\lambda) = \left[\lambda\left(e - \frac{a}{\lambda}\right)\right]^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(e - \frac{a}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}},$$

$$R_a(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}} \quad (|\lambda| > \|a\|) : \tag{1.7.3}$$

Դիցուք $r > \|a\|$: Այդ դեպքում (1.7.3) շարքը

$$\gamma_r = \partial D(0,r) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = r\}$$

շրջանագծի վրա հավասարաչափ զուգամետ է (քանի որ ունի զուգամետ մաժորանտ՝ այն է՝ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\|a\|^n}{r^{n+1}}$ շարքը), ուստի այն կարելի է անդամ առ անդամ ինտեգրել: Արդյունքում կստանանք

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} R_a(\lambda)\, d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}} \right] a^n : \tag{1.7.4}$$

Քանի որ $R_a(\lambda)$–ն անալիտիկ է $\mathbb{C}$–ում, ուստի ըստ Կոշու թեորեմի՝

$$\int\limits_{\gamma_r} R_a(\lambda)\, d\lambda = 0 :$$

Մյուս կողմից, ինչպես գիտենք,

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases}$$

ինչը տեղադրելով (1.7.4)–ի մեջ՝ կստանանք

$$0 = e,$$

իսկ վերջինս հակասում է $\|e\| = 1$ պայմանին:
Լեմման ապացուցված է:

Սահմանում 1.7.2: A և B կոմպլեքս բանախյան հանրահաշիվները կոչվում են իզոմետրիկորեն իզոմորֆ, եթե գոյություն ունի այնպիսի $\varphi : A \to B$ բիեկտիվ հոմոմորֆիզմ, որ

$$\|\varphi(x)\|_B = \|x\|_A \quad (\forall x \in A) :$$

Սահմանում 1.7.3: A բանախյան հանրահաշիվը կոչվում է բանախյան մարմին, եթե $A \setminus \{0\} = A^{-1}$:

Գելֆանդ–Մազուրի թեորեմը: *Յանկացած կոմպլեքս բանախյան մարմին իզոմետրիկորեն իզոմորֆ է $\mathbb{C}$ կոմպլեքս հարթությանը:*

Ապացույց: $\forall a \in A$ համար $\sigma(a) \neq \emptyset$, ուստի $\exists \lambda(a) \in \sigma(a)$: Սա նշանակում է, որ $\lambda(a)e - a \notin A^{-1}$, ուստի ըստ պայմանի՝ $\lambda(a)e - a = 0$, կամ՝

$$a = \lambda(a)e :$$

Ցույց տանք, որ $\lambda(a)$–ն կլինի որոնելի իզոմետրիան: Նախ նկատենք, որ եթե ինչ–որ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ համար

$$a = \lambda_1 e = \lambda_2 e,$$

ապա $\lambda_1 = \lambda_2$, քանի որ կունենանք

$$|\lambda_1 - \lambda_2| = \|(\lambda_1 - \lambda_2)e\| = \|\lambda_1 e - \lambda_2 e\| = \|a - a\| = 0 :$$

Օգտվելով սրանից՝ հեշտ է տեսնել, որ $\lambda(a)$–ն կհանդիսանա հոմոմորֆիզմ A–ից $\mathbb{C}$: Ունենք, որ

$$\|a\| = |\lambda(a)| \quad (\forall a \in A) :$$

Այստեղից կբխի, որ եթե $\lambda(a) = 0$, ապա $a = 0$, ուստի $\lambda(a)$–ն փոխմիարժեք (ինեկտիվ) է: Հեշտ է տեսնել, որ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ պարր ունի նախապատկեր (այն է՝ λe էլեմենտը): Հետևաբար $\lambda(\cdot) : A \to \mathbb{C}$ կհանդիսանա իզոմետրիկական իզոմորֆիզմ A–ի և $\mathbb{C}$–ի միջև: Թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում 1.7.4: $a \in A$ էլեմենտի սպեկտրալ շառավիղ է կոչվում

$$\rho(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$$

մեծությունը: 1.7.2 լեմմայի շնորհիվ $\sigma(a) \neq \emptyset$, ուստի այս սահմանումը կոռեկտ է:

1.7.2 թեորեմից բխում է, որ $\forall a \in A$ համար

$$0 \leqslant \rho(a) \leqslant \|a\| : \tag{1.7.5}$$

Գելֆանդի բանաձևը: $\forall a \in A$ *համար*

$$\rho(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\geqslant 1} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \tag{1.7.6}$$

(գրված սահմանի գոյությունը ևս ապացուցվում է):

Ապացույց: Ըստ 1.7.2 թեորեմի՝ $R_a(\lambda)$–ն $\Omega(a)$ ռեզոլվենտային բազմության վրա ուժեղ անալիտիկ է: Դիցուք $|\lambda| > \|a\|$: Այդ դեպքում ըստ 1.4.2 լեմմայի՝

$$\exists \left(e - \frac{a}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^n},$$

և հետևաբար

$$R_a(\lambda) = \left[\lambda\left(e - \frac{a}{\lambda}\right)\right]^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(e - \frac{a}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}},$$

$$R_a(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}} \qquad (|\lambda| > \|a\|)\ : \tag{1.7.7}$$

Դիցուք $r > \|a\|$: Այդ դեպքում (1.7.7) շարքը

$$\gamma_r = \partial D(0, r) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = r\}$$

շրջանագծի վրա հավասարաչափ զուգամետ է (քանի որ ունի զուգամետ մաժորանտ՝ այն է $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a\|^n}{r^{n+1}}$ շարքը): (1.7.7)–ի երկու կողմը բազմապատկենք λ^m–ով ($m \geqslant 0$) և ինտեգրենք γ_r–ով: Հավասարաչափ զուգամիտության շնորհիվ կարող ենք կատարել անդամ առ անդամ ինտեգրում և արդյունքում կստանանք

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} R_a(\lambda)\, \lambda^m d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \lambda^{m-n-1} d\lambda\right] a^n\ :$$

Բայց ինչպես գիտենք՝

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}\lambda^{m-n-1}d\lambda=\begin{cases}1, & n=m\\ 0, & n\neq m,\end{cases}$$

ինչը տեղադրելով վերը ստացվածի մեջ՝ կստանանք

$$a^m=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}\lambda^m R_a(\lambda)\,d\lambda \quad (r>\|a\|,\ \ m=0,1,2,\ldots): \tag{1.7.8}$$

Սպեկտրալ շառավղի սահմանումից բխում է, որ $|\lambda|>\rho(a)$ պայմանին բավարարող λ–ն a–ի ռեգուլյար կետ է, ուստի $\lambda^m R_a(\lambda)$ ֆունկցիան անալիտիկ է $|\lambda|>\rho(a)$ տիրույթում: Բազմակապ տիրույթների համար Կոշու թեորեմից (որը հիմնավորվում է նույն ձևով, ինչպես դասական դեպքում) բխում է, որ $r>\rho(a)$ դեպքում

$$\int\limits_{\gamma_r}\lambda^m R_a(\lambda)\,d\lambda$$

ինտեգրալի արժեքը կախված չէ r–ի ընտրությունից: Այստեղից և (1.7.8)–ից կբխի, որ

$$a^n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}\lambda^n R_a(\lambda)\,d\lambda \quad (r>\rho(a),\ \ n=0,1,2,\ldots): \tag{1.7.9}$$

Քանի որ $R_a(\lambda)$ ֆունկցիան γ_r–ի վրա անընդհատ է, ուստի

$$\mathcal{M}(r)=\max_{\theta\in[0,2\pi]}\left\|R_a\left(re^{i\theta}\right)\right\|<\infty \quad (r>\rho(a)),$$

և (1.7.9) բանաձևում կիրառելով ինտեգրալի գնահատականը՝ կստանանք, որ $\forall r>\rho(a)$ համար

$$\|a^n\|\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot r^n\cdot\mathcal{M}(r)\cdot 2\pi r=r^{n+1}\mathcal{M}(r),$$

$$\|a^n\|^{\frac{1}{n}}\leqslant r\sqrt[n]{r\mathcal{M}(r)},$$

որտեղից կբխի, որ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant r \quad (\forall r > \rho(a)),$$

իսկ այստեղից էլ, r–ի կամայականության շնորհիվ, կստանանք

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \rho(a) : \tag{1.7.10}$$

Ապացույցն ավարտելու համար մնում է ցույց տալ, որ

$$\rho(a) \leqslant \inf_{n\geqslant 1} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} : \tag{1.7.11}$$

Դիցուք $\lambda \in \sigma(a)$: Նկատենք, որ այդ դեպքում

$$\lambda^n \in \sigma\left(a^n\right) \quad (n \geqslant 1) :$$

Իրոք, ունենք

$$\begin{aligned} &\lambda^n e - a^n = \\ &\qquad = (\lambda e - a)\left(\lambda^{n-1}e + \lambda^{n-2}a + \cdots + \lambda a^{n-2} + a^{n-1}\right) : \end{aligned} \tag{1.7.12}$$

Եթե ենթադրենք, թե $\exists\,(\lambda^n e - a^n)^{-1}$, ապա (1.7.12)–ի երկու կողմը աջից բազմապատկելով $(\lambda^n e - a^n)^{-1}$–ով՝ կստանանք

$$\begin{aligned} &(\lambda e - a)\left[\left(\lambda^{n-1}e + \lambda^{n-2}a + \cdots + \lambda a^{n-2} + a^{n-1}\right) \cdot \right. \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \left. \cdot \left(\lambda^n e - a^n\right)^{-1}\right] = e : \end{aligned} \tag{1.7.13}$$

Նշանակենք

$$x = \lambda^{n-1}e + \lambda^{n-2}a + \cdots + \lambda a^{n-2} + a^{n-1}, \quad y = \lambda^n e - a^n :$$

Հեշտ է տեսնել, որ

$$(\lambda e - a)x = x(\lambda e - a),$$

$$(\lambda e - a)y = y(\lambda e - a) :$$

Հետևաբար նաև

$$(\lambda e - a)y^{-1} = \left(y^{-1}y\right)\left[(\lambda e - a)y^{-1}\right] = y^{-1}\left[y(\lambda e - a)\right]y^{-1} =$$

$$= y^{-1}\left[(\lambda e - a)y\right]y^{-1} = y^{-1}(\lambda e - a)\left(yy^{-1}\right) = y^{-1}(\lambda e - a),$$

ուստի (1.7.13)–ի ձախ մասը կարելի է ձևափոխել այսպես՝

$$(\lambda e - a)\left[xy^{-1}\right] = x\left[(\lambda e - a)y^{-1}\right] = x\left[y^{-1}(\lambda e - a)\right] =$$

$$= \left[xy^{-1}\right](\lambda e - a),$$

և (1.7.13)–ից կբխի, որ

$$\left(xy^{-1}\right)(\lambda e - a) = e,$$

կամ որ նույնն է՝

$$\left[\left(\lambda^{n-1}e + \lambda^{n-2}a + \cdots + \lambda a^{n-2} + a^{n-1}\right)\left(\lambda^n e - a^n\right)^{-1}\right]\cdot$$
$$\cdot(\lambda e - a) = e\,: \qquad (1.7.14)$$

(1.7.13)–ից և (1.7.14)–ից կբխի, որ $\exists(\lambda e - a)^{-1}$, ինչը հակասում է $\lambda \in \sigma(a)$ պայմանին:

Այսպիսով, եթե $\lambda \in \sigma(a)$, ապա $\lambda^n \in \sigma\left(a^n\right)$ $(n \geqslant 1)$, ուստի (1.7.5)-ից կբխի, որ

$$|\lambda|^n \leqslant \rho\left(a^n\right) \leqslant \|a^n\|\,,$$

$$|\lambda| \leqslant \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \quad (\forall\lambda \in \sigma(a),\;\; n \geqslant 1)\,: \qquad (1.7.15)$$

Վերջինից էլ կբխի, որ

$$\rho(a) = \sup\left\{|\lambda| :\; \lambda \in \sigma(a)\right\} \leqslant \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \quad (n \geqslant 1),$$

ուստի տեղի ունի (1.7.11)–ը:

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 1.7.3: *Դիցուք $a \in A$ և $\lambda, \mu \in \Omega(a)$: Այդ դեպքում տեղի ունի Հիլբերտի*

$$R_a(\lambda) - R_a(\mu) = (\mu - \lambda) R_a(\mu) R_a(\lambda) \tag{1.7.16}$$

նույնությունը:

Ապացույց: Ունենք

$$R_a(\lambda) - R_a(\mu) = (\lambda e - a)^{-1} - (\mu e - a)^{-1} =$$

$$= (\mu e - a)^{-1} \left[(\mu e - a)(\lambda e - a)^{-1} - e\right] =$$

$$= R_a(\mu) \left\{[(\mu - \lambda) e + (\lambda e - a)](\lambda e - a)^{-1} - e\right\} =$$

$$= R_a(\mu) \left\{(\mu - \lambda)(\lambda e - a)^{-1} + (\lambda e - a)(\lambda e - a)^{-1} - e\right\} =$$

$$= (\mu - \lambda) R_a(\mu) R_a(\lambda) :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք 1.7.1: *Դիցուք $a \in A$ և $\lambda, \mu \in \Omega(a)$: Այդ դեպքում*

$$R_a(\mu) R_a(\lambda) = R_a(\lambda) R_a(\mu) : \tag{1.7.17}$$

Ապացույց: $\lambda = \mu$ դեպքում պնդումն ակնհայտ է: Դիցուք $\lambda \neq \mu$: Ըստ նախորդ թեորեմի՝

$$R_a(\mu) R_a(\lambda) = \frac{R_a(\lambda) - R_a(\mu)}{\lambda - \mu}, \tag{1.7.18}$$

որտեղ փոխելով λ և μ պառերի դերերը՝ կստանանք

$$R_a(\lambda) R_a(\mu) = \frac{R_a(\mu) - R_a(\lambda)}{\mu - \lambda} : \tag{1.7.19}$$

(1.7.18)-ից և (1.7.19)-ից կբխի (1.7.17)-ը:
Հետևանքն ապացուցված է:

§ 1.8. Սպեկտրալ շառավղի բանաձևի հետևանքներ

Սահմանում 1.8.1: A բանախյան հանրահաշվի a էլեմենտը կոչվում է նիլպոտենտ, եթե գոյություն ունի այնպիսի $n = n(a)$ բնական թիվ, որ

$$a^n = 0$$

($n = 1$ դեպքում կունենանք $a = 0$):

Սահմանում 1.8.2: $a \in A$ էլեմենտը կոչվում է քվազինիլպոտենտ, եթե $\rho(a) = 0$:

Սահմանում 1.8.3: A բանախյան հանրահաշվի բոլոր քվազինիլպոտենտ էլեմենտների բազմությունը կոչվում է A–ի ռադիկալ և նշանակվում է $\mathrm{Rad}(A)$:

Լեմմա 1.8.1: *Նիլպոտենտ էլեմենտը քվազինիլպոտենտ է:*

Ապացույց: Դիցուք $a \in A$ նիլպոտենտ է՝ $\exists k \in \mathbb{N}$, որ $a^k = 0$: Այդ դեպքում կունենանք

$$a^n = 0 \quad (n \geqslant k),$$

ուստի

$$\rho(a) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a^n\|} = 0 :$$

Լեմման ապացուցված է:

Հետևանք 1.8.1: *Եթե $a \in A$ նիլպոտենտ է, ապա $\sigma(a) = \{0\}$:*

Ապացույց: Իրոք, ունենք $\rho(a) = 0$, ուստի $\sigma(a) \subset \{0\}$: Քանի որ $\sigma(a) \neq \emptyset$, ուստի $\sigma(a) = \{0\}$: ▶

Լեմմա 1.8.2: $\forall a, b \in A$ *համար* $\rho(ab) = \rho(ba)$*:*

Ապացույց: Ունենք

$$(ab)^n = \underbrace{\underline{ab}\,\underline{ab}\ldots\underline{ab}}_{n} = a(\underbrace{\underline{ba}\,\underline{ba}\ldots\underline{ba}}_{n-1})b = a(ba)^{n-1}b,$$

ուստի

$$\|(ab)^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \|a\|^{\frac{1}{n}} \cdot \left\|(ba)^{n-1}\right\|^{\frac{1}{n}} \|b\|^{\frac{1}{n}} ,$$

և հետևաբար

$$\rho(ab) = \lim_{n\to\infty} \|(ab)^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \lim_{n\to\infty} \|a\|^{\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \left\|(ba)^{n-1}\right\|^{\frac{1}{n}} \lim_{n\to\infty} \|b\|^{\frac{1}{n}} :$$

Ունենք

$$\lim_{n\to\infty} \left\|(ba)^{n-1}\right\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left\{\left\|(ba)^{n-1}\right\|^{\frac{1}{n-1}}\right\}^{\frac{n}{n-1}}$$

և օգտվելով $f(x, y) = x^y$ ֆունկցիայի անընդհատությունից, կստանանք

$$\lim_{n\to\infty} \left\|(ba)^{n-1}\right\|^{\frac{1}{n}} = \left\{\lim_{n\to\infty} \left\|(ba)^{n-1}\right\|^{\frac{1}{n-1}}\right\}^{\lim \frac{n}{n-1}} = \rho(ba) :$$

Այսպիսով,

$$\rho(ab) \leqslant \rho(ba) \lim_{n\to\infty} \|a\|^{\frac{1}{n}} \lim_{n\to\infty} \|b\|^{\frac{1}{n}} :$$

Երբ $a \neq 0$, $b \neq 0$, սա նշանակում է, որ

$$\rho(ab) \leqslant \rho(ba) : \tag{1.8.1}$$

Վերջինս ակնհայտորեն տեղի ունի նաև այն դեպքում, երբ a և b էլեմենտներից մեկն ու մեկը կամ երկուսը հավասար են 0–ի:

(1.8.1)–ում փոխելով a և b տառերի դերերը՝ կստանանք

$$\rho(ba) \leqslant \rho(ab) : \tag{1.8.2}$$

(1.8.1)–ից և (1.8.2)–ից կբխի, որ $\rho(ab) = \rho(ba)$:
Լեմման ապացուցված է:

Իրականում պարզվում է, որ վերն ապացուցված լեմման հանդիսանում է հետևյալ՝ առավել ընդհանուր պնդման հետևանքը.

Լեմմա 1.8.3: $\forall a, b \in A$ *համար* $\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\}$: [1]

[1] տես՝ [17], гл. 10, упр. 2, с. 291.

Ապացույց: Ցույց տանք, որ

$$\Omega(ab) \setminus \{0\} = \Omega(ba) \setminus \{0\} : \tag{1.8.3}$$

Նախ ցույց տանք, որ

$$\Omega(ab) \setminus \{0\} \subset \Omega(ba) \setminus \{0\} : \tag{1.8.4}$$

Դիցուք $\lambda \in \Omega(ab)\setminus\{0\}$: Դա նշանակում է, որ $\lambda \neq 0$ և գոյություն ունի $(\lambda e - ab)^{-1}$ հակադարձը: $(\lambda e - ba)^{-1}$-ի գոյությունը ցույց տալու և այն գտնելու համար նախ համարենք, թե

$$|\lambda| > \max\{\|ab\|, \|ba\|\} \tag{1.8.5}$$

և $(\lambda e - ba)^{-1}$–ը արտահայտենք $(\lambda e - ab)^{-1}$–ով: Օգտվելով 1.4.2 լեմմայից՝ կունենանք

$$\exists\, (\lambda e - ba)^{-1} = \left[\lambda\left(e - \frac{ba}{\lambda}\right)\right]^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(e - \frac{ba}{\lambda}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ba)^n}{\lambda^n} = \frac{1}{\lambda}\left[e + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ba)^n}{\lambda^n}\right] :$$

Ունենք

$$(ba)^n = \underbrace{\underline{ba}\,\underline{ba}\ldots\underline{ba}}_{n} = b(\underbrace{\underline{ab}\,\underline{ab}\ldots\underline{ab}}_{n-1})a = b(ab)^{n-1}a \quad (n \geqslant 1),$$

ուստի

$$(\lambda e - ba)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left[e + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b(ab)^{n-1}a}{\lambda^n}\right] = \frac{1}{\lambda}\left[e + \frac{1}{\lambda}b\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ab)^{n-1}}{\lambda^{n-1}}a\right],$$

և ստացված գումարում կատարելով $m = n - 1$ գումարման ինդեքսի փոխարինում, կստանանք

$$(\lambda e - ba)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left[e + \frac{1}{\lambda}b\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(ab)^m}{\lambda^m}a\right] :$$

Բայց քանի որ $\|ab\| < |\lambda|$, ուստի

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ab)^m}{\lambda^m} = \left(e - \frac{ab}{\lambda}\right)^{-1},$$

և կստանանք

$$(\lambda e - ba)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left[e + \frac{1}{\lambda} b \left(e - \frac{ab}{\lambda}\right)^{-1} a\right] =$$

$$\frac{1}{\lambda}\left\{e + b\left[\frac{1}{\lambda}\left(e - \frac{ab}{\lambda}\right)^{-1}\right] a\right\} = \frac{1}{\lambda}\left\{e + b\left[\lambda\left(e - \frac{ab}{\lambda}\right)\right]^{-1} a\right\} =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left[e + b\,(\lambda e - ab)^{-1}\, a\right],$$

$$(\lambda e - ba)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left[e + b(\lambda e - ab)^{-1} a\right] : \tag{1.8.6}$$

Այսպիսով, (1.8.5) պայմանի դեպքում տեղի ունի (1.8.6)–ը: Պարզ– վում է, որ եթե $\lambda \neq 0$ և $\exists\,(\lambda e - ab)^{-1}$, ապա $\exists\,(\lambda e - ba)^{-1}$, և տեղի ունի (1.8.6)–ը: Իրոք, նշանակենք

$$x = \frac{1}{\lambda}\left[e + b\,(\lambda e - ab)^{-1}\, a\right]$$

և ցույց տանք, որ

$$(\lambda e - ba)\, x = x\,(\lambda e - ba) = e : \tag{1.8.7}$$

Ունենք

$$(\lambda e - ba)\, x = \lambda x - bax = e + b\,(\lambda e - ab)^{-1}\, a - \frac{ba}{\lambda} -$$

$$-\frac{bab}{\lambda}\,(\lambda e - ab)^{-1}\, a = e - \frac{ba}{\lambda} + b\left(e - \frac{ab}{\lambda}\right)(\lambda e - ab)^{-1}\, a =$$

$$= e - \frac{ba}{\lambda} + \frac{b}{\lambda}\,(\lambda e - ab)\,(\lambda e - ab)^{-1}\, a = e - \frac{ba}{\lambda} + \frac{ba}{\lambda} = e,$$

և նման ձևով

$$x\left(\lambda e-ba\right)=\lambda x-xba=e+b\left(\lambda e-ab\right)^{-1}a-\frac{ba}{\lambda}-$$

$$-\frac{1}{\lambda}b\left(\lambda e-ab\right)^{-1}aba=e-\frac{ba}{\lambda}+b\left(\lambda e-ab\right)^{-1}\left[e-\frac{ab}{\lambda}\right]a=$$

$$=\frac{\lambda e-ba}{\lambda}+\frac{b}{\lambda}\left(\lambda e-ab\right)^{-1}\left(\lambda e-ab\right)a=e-\frac{ba}{\lambda}+\frac{ba}{\lambda}=e,$$

որտեղից էլ բխում է (1.8.7)–ը:

Սրանով իսկ (1.8.4)–ը հիմնավորվեց: (1.8.4)-ում փոխելով a և b պառերի դերերը՝ կստանանք նաև

$$\Omega(ba)\setminus\{0\}\subset\Omega(ab)\setminus\{0\}: \tag{1.8.8}$$

(1.8.4)–ից և (1.8.8)–ից կբխի (1.8.3)–ը:
Լեմման ապացուցված է:

Թեորեմ 1.8.1 (Լ՚Պաժ)**:** *Եթե* $\exists k>0$, *որ*

$$\rho(a)\geqslant k\left\|a\right\|\quad(\forall a\in A),$$

ապա A*–ն կոմուտատիվ է:*

Ապացույց: Ֆիքսենք կամայական $a,b\in A$ և ցույց տանք, որ

$$ab=ba:$$

Դիտարկենք

$$f(\lambda)=e^{\lambda a}be^{-\lambda a}\quad(\lambda\in\mathbb{C})$$

ֆունկցիան ($e^{\lambda a}$, $e^{-\lambda a}$ էքսպոնենտներ են և ոչ թե A հանրահաշվի e միավորի աստիճաններ): Օգտվելով թեորեմի պայմանից և 1.8.2 լեմմայից՝ $\forall\lambda\in\mathbb{C}$ համար կունենանք

$$\|f(\lambda)\|=\left\|e^{\lambda a}be^{-\lambda a}\right\|\leqslant\frac{1}{k}\rho\left(e^{\lambda a}be^{-\lambda a}\right)=\frac{1}{k}\rho\left(be^{-\lambda a}e^{\lambda a}\right)=$$

$$=\frac{1}{k}\rho(b)\leqslant\frac{\|b\|}{k}:$$

Բայց $f : \mathbb{C} \to A$ ուժեղ անալիտիկ է, ընդ որում

$$f'(\lambda) = e^{\lambda a}[a,b]e^{-\lambda a} \quad ([a,b] = ab - ba) :$$

Ստացվեց, որ ամբողջ $\mathbb{C}$–ի վրա անալիտիկ ֆունկցիան ուժեղ սահմանափակ է, ուստի ըստ Լիուվիլի թեորեմի՝ $f(\lambda)$–ն հաստատուն է: Հետևաբար $f'(\lambda) \equiv 0$: Մասնավորապես,

$$f'(0) = 0,$$

կամ որ նույնն է՝

$$[a,b] = 0,$$

$$ab = ba :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում 1.8.4: Դիցուք A–ն և B–ն կոմպլեքս նորմավորված հանրահաշիվներ են: Այդ դեպքում կասենք, որ B–ն A–ի ընդլայնում է, եթե՝
1) $A \subset B$ և B–ում սահմանված գումարման, բազմապատկման, սկալյարով բազմապատկման գործողությունների նեղացումները A–ի վրա համընկնում են A–ում սահմանված համապատասխան գործողությունների հետ,
2) B–ի նորմի նեղացումը A–ի վրա համարժեք է A–ի նորմին:

1) պայմանը նշանակում է, որ A–ն հանդիսանում է B–ի գծային ենթապարածություն է և ենթաօղակ: Ընդ որում, քանի որ A–ն նորմավորված հանրահաշիվ է, ուստի A–ում կա միավոր: Երբեմն լրացուցիչ շեշտում են, որ A–ն պարունակում է B–ի միավորը: 2) պայմանը նշանակում է, որ B–ի նորմը A–ում ծնում է նույն զուգամիտությունը, ինչ որ A–ի նորմը: Երբեմն պահանջում են, որ B–ի նորմի նեղացումն A–ի վրա ուղղակի համընկնի A–ի նորմի հետ:

Մեզ կհետաքրքրի այն դեպքը, երբ A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, իսկ B–ն նրա բանախյան ընդլայնումն է:

Սահմանում 1.8.5: $a \in A$ տարրը կոչվում է 0–ի տոպոլոգիական բաժանարար, եթե

$$\inf \{\|ax\| + \|xa\| : \ x \in S(A)\} = 0,$$

որտեղ, ինչպես միշտ,

$$S(A) = \{x \in A : \ \|x\| = 1\} = \partial B(0,1) :$$

Այլ կերպ ասած, a–ն կոչվում է 0–ի տոպոլոգիական բաժանարար, եթե $\exists \{x_n\}_1^\infty \subset S(A)$, այնպես, որ

$$ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad x_n a \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 :$$

Կարելի է նաև սահմանել նաև 0–ի ձախ և աջ տոպոլոգիական բաժանարարներ (դրանք այնպիսի a–երն են, որոնց համար համապատասխանաբար $ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ կամ $x_n a \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$), և այդ դեպքում վերը սահմանված 0–ի տոպոլոգիական բաժանարարը կկոչվի երկկողմանի: Հետագայում մեզ պետք կգան միայն երկկողմանի բաժանարարներ:

Լեմմա 1.8.4: *Եթե $\{a_n\}_1^\infty \subset A^{-1}$ հաջորդականությունը զուգամիտում է $a \in \partial A^{-1}$ էլեմենտին, ապա $\left\|a_n^{-1}\right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$:*

Ապացույց: Ենթադրենք հակառակը՝ $\left\|a_n^{-1}\right\| \not\to \infty$: Այդ դեպքում $\left\{\left\|a_n^{-1}\right\|\right\}_{n=1}^\infty$ հաջորդականությունից կարելի է անջատել $\left\{\left\|a_{n_k}^{-1}\right\|\right\}_{k=1}^\infty$ սահմանափակ ենթահաջորդականություն: Դիցուք

$$\left\|a_{n_k}^{-1}\right\| \leqslant M \quad (k = 1, 2, \ldots) :$$

k_0 համարն ընտրենք այնպես, որ

$$\|a_{n_k} - a\| < \frac{1}{M} \quad (k > k_0) :$$

Այդ դեպքում $k > k_0$ համար կունենանք

$$\left\|e - a_{n_k}^{-1} a\right\| = \left\|a_{n_k}^{-1}\left(a_{n_k} - a\right)\right\| \leqslant \left\|a_{n_k}^{-1}\right\| \cdot \|a_{n_k} - a\| < 1,$$

ուստի $a_{n_k}^{-1} a \in A^{-1}$ $(k > k_0)$ և հետևաբար (քանի որ A^{-1}–ը խումբ է) $a = a_{n_k}\left(a_{n_k}^{-1} a\right) \in A^{-1}$, ինչը հակասություն է, քանի որ A^{-1}–ը բաց է, իսկ $a \in \partial A^{-1}$:
Լեմման ապացուցված է:

Թեորեմ 1.8.2: *∂A^{-1}–ի կետերը 0–ի տոպոլոգիական բաժանարարներ են:*

Ապացույց: Դիցուք $a \in \partial A^{-1}$ կամայական կետ է: Ընտրենք որևէ $\{a_n\}_1^\infty \subset A^{-1}$, որ $a_n \to a$: Ըստ նախորդ լեմմայի՝ $\|a_n^{-1}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$: Նշանակենք $x_n = \frac{a_n^{-1}}{\|a_n^{-1}\|}$: Պարզ է, որ $\{x_n\}_1^\infty \subset S(A)$: Ցույց տանք, որ

$$\lim_{n\to\infty} ax_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} x_n a = 0 :$$

Ցույց տանք գրված առնչություններից առաջինը (մյուսն ապացուցվում է ճիշտ նույն ձևով): Ունենք

$$\|ax_n\| = \|ax_n - a_nx_n + a_nx_n\| \leqslant \|(a - a_n)x_n\| + \|a_nx_n\| \leqslant$$

$$\leqslant \|a - a_n\| \cdot \|x_n\| + \left\| a_n \cdot \frac{a_n^{-1}}{\|a_n^{-1}\|} \right\| = \|a - a_n\| + \frac{1}{\|a_n^{-1}\|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում 1.8.6: $A \setminus A^{-1}$–ի էլեմենտներին կանվանենք A հանրահաշվի սինգուլյար էլեմենտներ: Կնշանակենք

$$\operatorname{sing}(A) = A \setminus A^{-1} :$$

Սահմանում 1.8.7: $a \in A$ էլեմենտը կոչվում է ժառանգական սինգուլյար, եթե A բանախյան հանրահաշվի ցանկացած B բանախյան ընդլայնման համար $a \in \operatorname{sing}(B)$:

Թեորեմ 1.8.3: *0–ի տոպոլոգիական բաժանարարները ժառանգական սինգուլյար էլեմենտներ են:*

Ապացույց: Դիցուք $a \in A$ հանդիսանում է 0–ի տոպոլոգիական բաժանարար, իսկ B–ն A–ի կամայական բանախյան ընդլայնում է: Ցույց տանք, որ $a \in \operatorname{sing}(B)$: Ենթադրենք հակառակը՝ $a \in B^{-1}$: Այդ դեպքում $\exists b \in B$, որ

$$ba = ab = e :$$

Ըստ պայմանի՝ $\exists \{x_n\}_1^\infty \subset S(A)$, որ A–ի նորմով

$$ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad x_n a \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 : \tag{1.8.9}$$

Քանի որ B–ի նորմը A–ում ծնում էր նույն զուգամիտությունը, ինչ որ A–ի նորմը, ուստի (1.8.9) առնչությունները տեղի ունի նաև B–ի նորմով, և արտադրյալի անընդհատությունից կբխի, որ (B–ի նորմով)

$$x_n = b(ax_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 :$$

Քանի որ $\{x_n\}_1^\infty \subset A$, ուստի նաև A–ի նորմով $x_n \to 0$, ինչը հնարավոր չէ, քանի որ

$$\|x_n\|_A = 1 \quad (n = 1, 2, \ldots) :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք 1.8.2: *∂A^{-1}–ի կետերը ժառանգական սինգուլյար էլեմենտներ են:*

Ապացույցը բխում է 1.8.2 և 1.8.3 թեորեմներից: ►

Թեորեմ 1.8.4: *Դիցուք V–ն և W–ն X տոպոլոգիական տարածության բաց ենթաբազմություններ են, ընդ որում $V \subset W$ և $W \cap \partial V = \varnothing$: Այդ դեպքում V–ն հանդիսանում է W–ի ինչ–որ կոմպոնենտների միավորումը:*

Ապացույց: $\mathcal{F}$–ով նշանակենք W–ի բոլոր այն կոմպոնոնտների բազմությունը, որոնք հատվում են V–ի հետ: Դիցուք $\Omega \in \mathcal{F}$ կամայական կոմպոնենտ է: Ցույց տանք, որ $\Omega \subset V$: Նշանակենք $U = X \setminus \overline{V}$: Քանի որ $W \cap \partial V = \varnothing$ և $\Omega \subset W$, ուստի $\Omega \cap \partial V = \varnothing$ և հետևաբար

$$\Omega = (\Omega \cap V) \cup (\Omega \cap U) :$$

Այստեղ $(\Omega \cap V)$-ն և $(\Omega \cap U)$-ն բաց են, ընդ որում $\Omega \cap V \neq \varnothing$: Ուստի, Ω–ի կապակցվածությունից կբխի, որ $\Omega \cap U = \varnothing$ և հետևաբար՝

$$\Omega = \Omega \cap V \subset V :$$

Ստացվեց, որ $\forall \Omega \in \mathcal{F}$ համար $\Omega \subset V$, ուստի

$$V = \bigcup_{\Omega \in \mathcal{F}} \Omega :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Դիցուք B բանախյան հանրահաշիվը հանդիսանում է A բանախյան հանրահաշվի ընդլայնում: Այդ դեպքում $A^{-1} \subset B^{-1}$ ակնհայտ առնչությունից բխում է, որ $\forall a \in A$ համար

$$\Omega_A(a) \subset \Omega_B(a) \tag{1.8.10}$$

և հետևաբար՝

$$\sigma_B(a) \subset \sigma_A(a) : \tag{1.8.11}$$

1.8.4 թեորեմից օգտվելով՝ կարող ենք ստանալ առավել սպառիչ ինֆորմացիա՝ $\sigma_A(a)$ և $\sigma_B(a)$ սպեկտրների միջև եղած կապի մասին:

Թեորեմ 1.8.5: *Դիցուք B բանախյան հանրահաշիվը հանդիսանում է A բանախյան հանրահաշվի ընդլայնում: Այդ դեպքում՝*

1) A^{-1}–ը հանդիսանում է $A \cap B^{-1}$ բազմության որոշ կոմպոնենտների ընտանիքի (որը կարող է լինել դատարկ) միավորումը,

2) $\forall a \in A$ համար $\sigma_A(a)$–ն հանդիսանում է $\sigma_B(a)$–ի և $\Omega_B(a)$–ի որոշ սահմանափակ կոմպոնենտների ընտանիքի (որը կարող է լինել դատարկ) միավորումը: Մասնավորապես, $\partial\sigma_A(a) \subset \sigma_B(a)$:

Ապացույց: 1) A^{-1}–ը և $A \cap B^{-1}$–ը հանդիսանում են A–ում բաց բազմություններ (վերջին բազմության բաց լինելը բխում է նրանից, որ A–ում B–ից մակածված (ինդուկցված) տոպոլոգիան բաղկացած է $A \cap V$ տեսքի բազմություններից, որտեղ V–ն բաց է B–ում): Ունենք նաև, որ $A^{-1} \subset A \cap B^{-1}$, ուստի ըստ նախորդ թեորեմի՝ բավական է ցույց տալ, որ

$$\partial A^{-1} \cap \left(A \cap B^{-1}\right) = \varnothing : \tag{1.8.12}$$

Քանի որ A–ն փակ է, ուստի $\partial A^{-1} \subset A$ և (1.8.12)–ը կնշանակի, որ

$$\partial A^{-1} \cap B^{-1} = \varnothing : \tag{1.8.13}$$

(1.8.13)–ը ցույց տանք հակասող ենթադրության մեթոդով՝ դիցուք

$$\exists a \in \partial A^{-1} \cap B^{-1} :$$

Այդ դեպքում $\exists\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A^{-1}$, որ $a_n \to a$: Քանի որ B^{-1}–ի վրա որոշված $x \mapsto x^{-1}$ արտապատկերումը անընդհատ է (նույնիսկ դի–ֆերենցելի է), ուստի

$$a_n^{-1} \longrightarrow a^{-1}$$

և հետևաբար $\left\{\left\|a_n^{-1}\right\|\right\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է, ինչը հակասում է 1.8.4 լեմմային:

2) Նկատենք, որ

$$\partial\Omega_A(a) \cap \Omega_B(a) = \varnothing : \tag{1.8.14}$$

Իրոք, դիցուք $\lambda_0 \in \partial\Omega_A(a)$: Այդ դեպքում, հեշտ է տեսնել, որ $\lambda_0 e - a \in \partial A^{-1}$, ուստի (1.8.13)–ից կբխի, որ $\lambda_0 e - a \notin B^{-1}$, այսինքն՝ $\lambda_0 \notin \Omega_B(a)$:

Քանի որ $\Omega_A(a)$, $\Omega_B(a)$ բաց են, ուստի (1.8.10), (1.8.14), առնչու–թյուններից և 1.8.4 թեորեմից կբխի, որ $\Omega_A(a)$–ն հանդիսանում է $\Omega_B(a)$ –ի որոշ կոմպոնենտների միավորումը: Հետևաբար, $\Omega_B(a)$–ի մնացած կոմպոնենտները չեն կարող հատվել $\Omega_A(a)$ –ի հետ (երկու կոմպոնենտներ կա՛մ չեն հատվում, կա՛մ համընկնում են), ուստի այդ կոմպոնենտները կպարունակվեն $\sigma_A(a)$–ում (ավելին, դրանք կպա–րունակվեն $\sigma_A(a) \setminus \sigma_B(a)$–ում): Ստացվեց, որ $\sigma_A(a) \setminus \sigma_B(a)$–ն իր մեջ ամբողջությամբ պարունակում է $\Omega_B(a)$-ի որոշ կոմպոնենտներ և չի հատվում $\Omega_B(a)$–ի մնացած կոմպոնենտների հետ: Քանի որ

$$\sigma_A(a) \setminus \sigma_B(a) \subset \Omega_B(a),$$

ուստի այստեղից կբխի, որ $\sigma_A(a) \setminus \sigma_B(a)$–ն հանդիսանում է $\Omega_B(a)$–ի որոշ կոմպոնենտների միավորումը: Այդ կոմպոնենտները կլինեն սահմանափակ, քանի որ սահմանափակ է $\sigma_A(a) \setminus \sigma_B(a)$–ն:

(1.8.14)–ից բխում է, որ

$$\partial\sigma_A(a) = \partial\Omega_A(a) \subset \sigma_B(a) :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք 1.8.3: *Եթե A բանախյան հանրահաշվի a էլեմենտի $\sigma_A(a)$ սպեկտրն ամենուրեք նոսր է, ապա A–ի ցանկացած B բանախյան ընդլայնման համար*

$$\sigma_A(a) = \sigma_B(a) :$$

Ապացույց: Իրոք, կունենանք $\sigma_A(a) = \partial\sigma_A(a) \subset \sigma_B(a)$, և քանի որ $\sigma_B(a) \subset \sigma_A(a)$ հակառակ ներդրումը միշտ ճիշտ է, ուստի $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$: ▶

Հետևանք 1.8.4: *Եթե B բանախյան հանրահաշիվը հանդիսանում է A բանախյան հանրահաշվի ընդլայնում, $a \in A$ և $\sigma_B(a)$–ի լրացումը կապակցված է, ապա*

$$\sigma_A(a) = \sigma_B(a) :$$

Ապացույց: Իրոք, դիտարկվող դեպքում $\Omega_B(a)$–ն չունի սահմանափակ կոմպոնենտներ (չէ՞ որ $\sigma_B(a)$–ն կոմպակտ է): ▶

Վերը նշված հետևանքի ամենակարևոր կիրառությունը վերաբերում է $\sigma_B(a) \subset \mathbb{R}$ դեպքին (ակնհայտ է, որ $\sigma_B(a)$–ի կոմպակտության շնորհիվ $\sigma_B(a) \subset \mathbb{R}$ դեպքում $\Omega_B(a)$–ն կապակցված է):

Դիտողություն 1.8.1: Նկատենք, որ նախորդ թեորեմի պայմաններում

$$\partial\sigma_A(a) \subset \partial\sigma_B(a) : \tag{1.8.15}$$

◀ Իրոք, (1.8.11)–ից բխում է, որ

$$int\,\sigma_B(a) \subset \operatorname{int}\sigma_A(a) :$$

Ըստ 1.8.5 թեորեմի՝

$$\partial\sigma_A(a) \subset \sigma_B(a) :$$

Կունենանք

$$\partial\sigma_A(a) \cap [int\,\sigma_B(a)] \subset \partial\sigma_A(a) \cap (int\,\sigma_A(a)) = \emptyset,$$

ուստի $\partial\sigma_A(a)$–ի կետերը չեն կարող լինել $\sigma_B(a)$–ի ներքին կետեր, և հետևաբար հանդիսանում են $\sigma_B(a)$–ի եզրային կետեր: ▶

Օրինակ: Դիցուք $A = A(T)$, $B = C(T)$ և $a(z) = z$ $(z \in T)$: Այդ դեպքում կունենանք $\sigma_A(a) = \overline{D}(0, 1)$, $\sigma_B(a) = T$ և հետևաբար $\sigma_B(a) = \partial\sigma_A(a)$:

Խնդիր: Դիցուք A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, իսկ $a \in A$ որևէ էլեմենտ է: Դիտարկենք A–ի որևէ B բանախյան ընդլայնում: (1.8.15) առնչության շնորհիվ A–ն ընդլայնելիս a էլեմենտի սպեկտրի եզրի կետերի թիվն ավելանում է, հետևաբար ավելանում է ընդհանրապես a–ի սպեկտրի ժառանգական սինգուլյար կետերի թիվը ($\lambda \in \sigma_A(a)$ կետը կոչվում է ժառանգական սինգուլյար, եթե այդպիսին է $\lambda e - a \in A$ էլեմենտը): Հարցը հետևյալն է՝ կարելի՞ է արդյոք գտնել A–ի այնպիսի B ընդլայնում, որ $\sigma_B(a)$–ն բաղկացած լինի միայն ժառանգական սինգուլյար կետերից: ►

Թեորեմ 1.8.6: *Դիցուք A բանախյան հանրահաշվի համար $\exists M > 0$ թիվ, որ*

$$\|x\| \cdot \|y\| \leqslant M \|xy\| \quad (\forall x, y \in A) : \tag{1.8.16}$$

Այդ դեպքում A–ն իզոմորֆ–իզոմետրիկ է $\mathbb{C}$ կոմպլեքս թվերի դաշտին:

Ապացույց: Ցույց տանք, որ $A^{-1} = A \setminus \{0\}$: Նախ համոզվենք, որ

$$\partial A^{-1} = \{0\} : \tag{1.8.17}$$

Իրոք, դիցուք $a \in \partial A^{-1}$: $\exists \{a_n\}_1^\infty \subset A^{-1}$, որ $a_n \to a$: Ըստ 1.8.4 լեմմայի՝ $\left\|a_n^{-1}\right\| \to \infty$, հետևաբար

$$\|a_n\| = \frac{\|a_n\| \left\|a_n^{-1}\right\|}{\left\|a_n^{-1}\right\|} \leqslant \frac{M \left\|a_n \cdot a_n^{-1}\right\|}{\left\|a_n^{-1}\right\|} = \frac{M \|e\|}{\left\|a_n^{-1}\right\|} = \frac{M}{\left\|a_n^{-1}\right\|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

որտեղից կստացվի, որ

$$\|a\| = \lim_{n\to\infty} \|a_n\| = 0 \Rightarrow a = 0 :$$

Այժմ դիցուք $a \in A$ կամայական ոչ 0–ական էլեմենտ է, ցույց տանք, որ $a \in A^{-1}$: Քանի որ $\sigma(a)$–ն դատարկ չէ և կոմպակտ է, ուստի $\partial\sigma(a) \neq \varnothing$: Դիցուք $\lambda \in \partial\sigma(a)$: Այդ դեպքում կունենանք $\lambda e - a \in \partial A^{-1}$ և (1.8.17)–ից կբխի, որ $\lambda e - a = 0$, կամ՝

$$a = \lambda e :$$

Քանի որ $a \neq 0$, ուստի $\lambda \neq 0$ և հետևաբար $\lambda^{-1}e$ էլեմենտը կհանդիսանա a–ի համար հակադարձ էլեմենտ: Այսպիսով՝ $a \in A^{-1}$: Հետևաբար մեր պնդումը կբխի Գելֆանդ–Մազուրի թեորեմից: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 1.8.7: *Դիցուք A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, $a \in A$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ բաց բազմություն է, և $\sigma(a) \subset \Omega$: Այդ դեպքում $\exists \delta > 0$, այնպես, որ $\|b\| < \delta$ պայմանին բավարարող ցանկացած $b \in A$ էլեմենտի համար $\sigma(a+b) \subset \Omega$:*

Ապացույց: $\mathbb{C} \backslash \Omega$–ն $\Omega(a)$–ում ընկած փակ բազմություն է: Նկատենք, որ $R_a(\lambda) = (\lambda e - a)^{-1}$ ֆունկցիան $\mathbb{C} \setminus \Omega$ բազմության վրա սահմանափակ է: Իրոք, $|\lambda| > \|a\|$ համար ունենք $\left\| \dfrac{a}{\lambda} \right\| < 1$, ուստի

$$R_a(\lambda) = (\lambda e - a)^{-1} = \left[\lambda \left(e - \frac{a}{\lambda} \right) \right]^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^n},$$

$$\|R_a(\lambda)\| \leqslant |\lambda|^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{a^n}{\lambda^n} \right\| \leqslant \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{a}{\lambda} \right\|^n = \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1 - \left\| \frac{a}{\lambda} \right\|},$$

ինչը ցույց է տալիս, որ $|\lambda| > \|a\|$ համար $R_a(\lambda)$–ն սահմանափակ է և դեռ ավելին՝

$$R_a(\lambda) \xrightarrow[|\lambda| \to \infty]{} 0 :$$

Նշանակենք

$$E_1 = (\mathbb{C} \setminus \Omega) \cap \overline{D}(0, \|a\|), \quad E_2 = (\mathbb{C} \setminus \Omega) \setminus \overline{D}(0, \|a\|) :$$

E_1–ը կոմպակտ է, իսկ $R_a(\lambda)$–ն անընդհատ է E_1–ի վրա (հիշենք, որ $R_a(\lambda)$–ն իր որոշման տիրույթում անալիտիկ է), ուստի $R_a(\lambda)$–ն E_1–ի վրա սահմանափակ է: Այսպիսով,

$$\mathbb{C} \setminus \Omega = E_1 \cup E_2,$$

և $R_a(\lambda)$–ն E_1, E_2 բազմություններից յուրաքանչյուրի վրա սահմանափակ է, ուստի այն կլինի սահմանափակ $\mathbb{C} \setminus \Omega$–ի վրա՝ $\exists M > 0$, որ

$$\|R_a(\lambda)\| \leqslant M \quad (\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Omega) :$$

$\delta > 0$ ընտրենք այնպես, որ $\delta M \leqslant 1$: Այդ դեպքում կունենանք, որ $\|b\| < \delta$ և $\lambda \notin \Omega$ համար

$$\left\| (\lambda e - a)^{-1} b \right\| \leqslant \left\| (\lambda e - a)^{-1} \right\| \cdot \|b\| = \|R_a(\lambda)\| \cdot \|b\| < \delta M \leqslant 1$$

ուստի
$$e - (\lambda e - a)^{-1}b \in A^{-1}$$
և քանի որ $\lambda e - a \in A^{-1}$, իսկ
$$\lambda e - (a+b) = (\lambda e - a)\left[e - (\lambda e - a)^{-1}b\right],$$
ուստի $\lambda e - (a+b) \in A^{-1}$ և հետևաբար $\lambda \notin \sigma(a+b)$:
Թեորեմն ապացուցված է:

§ 1.9. Սպեկտրալ շառավղի կիսանընդհատությունը

Սահմանում 1.9.1: Դիցուք X–ը մետրիկական փարածություն է, $f : X \to \mathbb{R}$ արտապատկերում է, իսկ $x_0 \in X$: Այդ դեպքում կասենք, որ f ֆունկցիան x_0 կետում վերևից (ներքևից) կիսանընդհատ է, եթե $\forall \varepsilon > 0$ համար $\exists \delta > 0$, այնպես, որ $\rho(x, x_0) < \delta$ համար
$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon \quad (f(x) > f(x_0) - \varepsilon):$$
Կասենք f–ը X–ի վրա վերևից (ներքևից) կիսանընդհատ է, եթե f–ը վերևից (ներքևից) կիսանընդհատ է X–ի յուրաքանչյուր կետում:

Պարզ է, որ f–ը x_0 կետում անընդհատ կլինի այն և միայն այն դեպքում, երբ այն x_0 կետում կիսանընդհատ է միաժամանակ վերևից և ներքևից:

Թեորեմ 1.9.1: *Ցանկացած A բանախյան հանրահաշվի համար ρ սպեկտրալ շառավիղը A–ի վրա վերևից կիսանընդհատ է:*

Ապացույց: Վերցնենք կամայական $a \in A$ կետ և ցույց տանք, որ ρ–ն a կետում վերևից կիսանընդհատ է: Վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ: Ունենք
$$\sigma(a) \subset \overline{D}(0, \rho(a)) \subset D(0, \rho(a) + \varepsilon)$$
ուստի թեորեմ 1.8.7-ից կբխի, որ $\exists \delta > 0$, այնպես, որ $\|b - a\| < \delta$ դեպքում
$$\sigma(b) = \sigma(a + (b - a)) \subset D(0, \rho(a) + \varepsilon),$$

որտեղից էլ կբխի, որ $\|b-a\|<\delta$ համար

$$\rho(b)<\rho(a)+\varepsilon:$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում 1.9.2: Դիցուք X, Y-ը տոպոլոգիական տարածություններ են և $\varphi : X \to 2^Y$: Կասենք, որ φ-ն $x_0 \in X$ կետում կիսաանընդհատ է վերևից, եթե $\forall V \supset \varphi(x_0)$ շրջակայքի համար $\exists U \ni x_0$ շրջակայք, որ $\varphi(x) \supset V$ $(x \in U)$:

Թեորեմ 1.8.7-ից բխում է, որ $\varphi : A \to 2^{\mathbb{C}}$, $\varphi(a)=\sigma(a)$ ֆունկցիան A-ի վրա վերևից կիսաանընդհատ է:

Խնդիր: Դիցուք X, Y մետրիկական տարածություններ են, Y-ը կոմպակտ է, և $\varphi : X \to 2^Y$: Ապացուցել կիսաանընդհատության հետևյալ հայտանիշը. որպեսզի φ-ն X-ի վրա լինի կիսաանընդհատ վերևից, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $x_n \in X$, $y_n \in \varphi(x_n)$ $(n \in \mathbb{N})$, $x=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $y=\lim\limits_{n\to\infty} y_n \Rightarrow y \in \varphi(x)$:

Սպեկտրալ շառավիղը, ընդհանրապես ասած, խզվող ֆունկցիա է: Համապատասխան օրինակը կառուցելու նպատակով նախ մի փոքր խոսենք կշիռներով միակողմանի տեղաշարժի օպերատորների մասին:

Դիցուք H–ն անվերջ չափանի սեպարաբել կոմպլեքս հիլբերտյան տարածություն է,

$$e_0, e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$$

հաջորդականությունը H–ի օրթոնորմավորված բազիս է, իսկ $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ սահմանափակ հաջորդականություն է՝

$$\alpha=\sup_n |\alpha_n|<\infty: \tag{1.9.1}$$

Կառուցենք $A : H \to H$ օպերատորը հետևյալ կերպ: e_n վեկտորների վրա A–ն սահմանենք

$$Ae_n=\alpha_n e_{n+1} \quad (n=0,1,2,\ldots) \tag{1.9.2}$$

բանաձևով: Եթե $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n e_n \in H$ կամայական վեկտոր է, ապա Ax–ը կսահմանենք

$$Ax = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A e_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha_n e_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} \alpha_{n-1} e_n \qquad (1.9.3)$$

բանաձևով: Քանի որ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n e_n$ շարքի զուգամիտության շնորհիվ

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty,$$

ուստի (1.9.1)–ից կբխի, որ նաև

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_{n-1}\alpha_{n-1}|^2 < \infty,$$

և հետևաբար (1.9.3)–ի աջ մասում գրված շարքը զուգամետ է: Հեշտ է տեսնել, որ A օպերատորը գծային է: Կամայական $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \alpha_n \in H$ վեկտորի համար ունենք

$$\|Ax\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_{n-1}\alpha_{n-1}|^2 \leqslant \alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_{n-1}|^2 = \alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \alpha^2 \|x\|^2,$$

այսինքն՝

$$\|Ax\| \leqslant \alpha \|x\| \quad (x \in H):$$

Հետևաբար A օպերատորը սահմանափակ է, և $\|A\| \leqslant \alpha$: Մյուս կողմից, $n \geqslant 0$ համար

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \geqslant \|Ae_n\| = \|\alpha_n e_{n+1}\| = |\alpha_n|,$$

ուստի

$$\alpha = \sup_n |\alpha_n| \leqslant \|A\|,$$

և հետևաբար

$$\|A\| = \alpha : \tag{1.9.4}$$

A օպերատորը կոչվում է α_n կշիռներով միակողմանի տեղաշարժի օպերատոր:[2]

Հաշվենք A–ի սպեկտրալ շառավիղը: Դիցուք $k \in \mathbb{N}$ կամայական թիվ է: Նշանակենք

$$\alpha_n^{(k)} = \alpha_n \alpha_{n+1} \cdots \alpha_{n+(k-1)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\alpha^{(k)} = \sup_n \left|\alpha_n^{(k)}\right| :$$

Կունենանք $\alpha^{(k)} < \infty$ $(k = 1, 2, \ldots)$, և հեշտ է տեսնել, որ A^k–ն կհանդիսանա $\alpha_n^{(k)}$ կշիռներով միակողմանի տեղաշարժի օպերատոր:[3] Ուստի ըստ (1.9.4) բանաձևի՝

$$\left\|A^k\right\| = \alpha^{(k)} = \sup_n \left|\prod_{i=0}^{k-1} \alpha_{n+i}\right|,$$

և հետևաբար՝

$$\rho(A) = \lim_{k\to\infty} \left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \sup_{m\geqslant 0} \left|\prod_{i=0}^{k-1} \alpha_{m+i}\right|^{\frac{1}{k}} : \tag{1.9.5}$$

Օգտագործելով կշիռներով միակողմանի տեղաշարժի օպերատորները՝ կառուցենք $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ նիլպոտենտ օպերատորների հաջորդականություն, որը ըստ օպերատորային նորմի զուգամիտում է դրական սպեկտրալ շառավիղ ունեցող օպերատորի: Նշված հաջորդականության օրինակը պատկանում է Կակուտանիին:

Ընտրենք որևէ $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ դրական թվերի հաջորդականություն՝ այնպես, որ $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ և

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln \varepsilon_k}{2^{k+1}}$$

[2] Դիցուք $p \in \mathbb{N}$ կամայական թիվ է: Դժվար չէ տեսնել, որ (1.9.2)–ը $Ae_n = \alpha e_{n+p}$ առնչությունով փոխարինելիս ևս (1.9.4)–ը կմնա ուժի մեջ:

[3] տես տողատակում արված նախորդ դիտողությունը:

շարքը լինի զուգամետ (օրինակ, $\varepsilon_k = \dfrac{1}{2^k}$)։ $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ հաջորդականությունը կառուցենք հետևյալ կերպ։ $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ հաջորդականության յուրաքանչյուր երկրորդ անդամը (սկսած ամենաառաջինից) վերցնենք հավասար ε_0–ի, այսինքն՝

$$\alpha_0 = \varepsilon_0,\ \alpha_2 = \varepsilon_0,\ \alpha_4 = \varepsilon_0, \ldots \ :$$

$\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ հաջորդականության մնացած անդամներից յուրաքանչյուր երկրորդը վերցնենք հավասար ε_1–ի, այսինքն՝

$$\alpha_1 = \varepsilon_1,\ \alpha_5 = \varepsilon_1,\ \alpha_9 = \varepsilon_1,\ \ldots \ :$$

Այնուհետև $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ հաջորդականության հաջորդականության մնացած անդամներից յուրաքանչյուր երկրորդը վերցնենք հավասար ε_3–ի և այլն։ Այս պրոցեսն անվերջ շարունակելով՝ կստանանք $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ դրական թվերի հաջորդականություն, որն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\varepsilon_0,\, \varepsilon_1,\, \varepsilon_0,\, \varepsilon_2,\, \varepsilon_0,\, \varepsilon_1,\, \varepsilon_0,\, \varepsilon_3,\, \varepsilon_0,\, \varepsilon_1,\, \varepsilon_0,\, \varepsilon_2,\, \varepsilon_0,\, \varepsilon_1,\, \varepsilon_0, \ldots :$$

A–ով նշանակենք α_n կշիռներով միակողմանի փեղաշարժի օպերատորը։ $k \geqslant 0$ համար $\left\{\alpha_n^{(k)}\right\}_{n=0}^{\infty}$–ով նշանակենք այն հաջորդականությունը, որը ստացվում է $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ հաջորդականության մեջ բոլոր ε_k–երը 0–ներով փոխարինելիս։ A_k–ով նշանակենք $\alpha_n^{(k)}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ կշիռներով միակողմանի փեղաշարժի օպերատորը։ Օրինակ, A_2–ին համապատասխան կշիռների հաջորդականությունը ունի հետևյալ տեսքը.

$$\varepsilon_0,\, \varepsilon_1,\, \varepsilon_0,\, 0,\, \varepsilon_0,\, \varepsilon_1,\, \varepsilon_0,\, \varepsilon_3,\, \varepsilon_0,\, \varepsilon_1,\, \varepsilon_0,\, 0,\, \varepsilon_0,\, \varepsilon_1,\, \varepsilon_0, \ldots :$$

Կառուցումից և վերը կշիռներով միակողմանի փեղաշարժի օպերատորի աստիճանների համար ստացված ներկայացումից բխում է, որ

$$A_k^{2^{k+1}} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) :$$

Հեշտ է տեսնել, որ $A - A_k$ օպերատորները ևս հանդիսանում են կշիռներով միակողմանի տեղաշարժի օպերատորներ, ընդ որում

$$\|A - A_k\| = \varepsilon_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) :$$

Հետևաբար $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$-ը նիլպոտենտ օպերատորների հաջորդականություն է, որը օպերատորային նորմով զուգամիտում է A օպերատորին: Համոզվենք, որ $\rho(A) > 0$: Դրա համար նկատենք, որ

$$\alpha_0 = \varepsilon_0,$$

$$\alpha_0\alpha_1\alpha_2 = \varepsilon_0^2\varepsilon_1,$$

$$\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6 = \varepsilon_0^4\varepsilon_1^2\varepsilon_2,$$

և ընդհանրապես, եթե $n = 2^p - 2$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$, ապա

$$\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n = \varepsilon_0^{2^{p-1}}\varepsilon_1^{2^{p-2}}\cdots\varepsilon_{p-1} :$$

Ուստի $n = 2^p - 2$ համար

$$\ln\left(\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n\right) = \sum_{k=0}^{p-1} 2^{p-1-k}\ln\varepsilon_k = 2^p\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\ln\varepsilon_k}{2^{k+1}},$$

կամ

$$\ln\left[\prod_{i=0}^{n}\alpha_i\right]^{\frac{1}{n+1}} = \frac{2^p}{2^p-1}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\ln\varepsilon_k}{2^{k+1}} : \tag{1.9.6}$$

Քանի որ $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\ln\varepsilon_k}{2^{k+1}}$ շարքը զուգամետ է, ուստի

$$\frac{2^p}{2^p-1}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\ln\varepsilon_k}{2^{k+1}}$$

հաջորդականությունը ներքևից սահմանափակ է: Հետևաբար

$$e^{\frac{2^p}{2^p-1}\sum\limits_{k=0}^{p-1}\frac{\ln\varepsilon_k}{2^{k+1}}}$$

հաջորդականությունը կլինի ներքևից սահմանափակ ինչ–որ $r > 0$ թվով: Նշանակենք

$$k_p = 2^p - 1 \quad (p = 1, 2, \ldots),$$

այդ դեպքում (վերցնելով $n = 2^p - 2$) (1.9.6)–ից կստանանք

$$\sup_{m \geqslant 0} \left| \prod_{i=0}^{k_p - 1} \alpha_{m+i} \right|^{\frac{1}{k_p}} \geqslant \left| \prod_{i=0}^{k_p - 1} \alpha_i \right|^{\frac{1}{k_p}} = \left[\prod_{i=0}^{2^p - 2} \alpha_i \right]^{\frac{1}{2^p - 1}} =$$

$$= \left[\prod_{i=0}^{n} \alpha_i \right]^{\frac{1}{n+1}} \geqslant r,$$

և (1.9.5)–ից կբխի, որ

$$\rho(A) = \lim_{k \to \infty} \sup_{m \geqslant 0} \left| \prod_{i=0}^{k-1} \alpha_{m+i} \right|^{\frac{1}{k}} = \lim_{p \to \infty} \sup_{m \geqslant 0} \left| \prod_{i=0}^{k_p - 1} \alpha_{m+i} \right|^{\frac{1}{k_p}} \geqslant r :$$

Այսպիսով, $\rho(A) \geqslant r > 0$:

Ստացվածը ցույց է տալիս, որ $A_n \to A$ առնչությունից չի բխում, որ $\rho(A_n) \to \rho(A)$ (չէ՞ որ $\rho(A_n) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, իսկ $\rho(A) > 0$), այսինքն՝ սպեկտրալ շառավիղը խզվում է:

§ 1.10. Թվային պատկեր և հանրահաշվական թվային պատկեր

Դիցուք H-ը կոմպլեքս հիլբերտյան տարածություն է: Դիտարկենք $BL\,(H)$ գծային սահմանափակ օպերատորների հանրահաշիվը:

Սահմանում 1.10.1: $T \in BL(H)$ օպերատորի թվային պատկեր է կոչվում

$$W(T) = \{(Tx, x) : \; \|x\| = 1\}$$

բազմությունը:

Տյոպլից-Խաուսդորֆի թեորեմ: $\forall T \in BL(H)$ համար $W(T)$-ն ուռուցիկ բազմություն է:

Թեորեմն ընդունում ենք առանց ապացույցի: ▶

Խնդիր: Բերել օպերատորի օրինակ, որի թվային պատկերը փակ չէ:

Թեորեմ 1.10.1: *$\forall T \in BL(H)$ համար $\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$:*

Թեորեմն ընդունում ենք առանց ապացույցի: ▶

Հետևանք 1.10.1: *$\forall T \in BL(H)$ համար $\operatorname{conv} \sigma(T) \subset \overline{W(T)}$:*

Ապացույցը բխում է նախորդ թեորեմից և Տյոպլից-Խաուսդորֆի թեորեմից:

Ֆիքսենք կամայական $x \in H$, $\|x\| = 1$: Դիտարկենք $BL(H)$-ի վրա որոշված
$$\varphi_x(T) = (Tx, x)$$
ֆունկցիոնալը: $\forall T \in BL(H)$ համար ունենք
$$|\varphi_x(T)| = |(Tx, x)| \leqslant \|Tx\| \cdot \|x\| \leqslant \|T\| \cdot \|x\|^2 = \|T\|,$$
ուստի φ_x-ը սահմանափակ է և $\|\varphi_x\| \leqslant 1$: Մյուս կողմից
$$\varphi_x(I) = 1,$$
ուստի $\|\varphi_x\| = 1$:

Այժմ դիցուք A-ն բանախյան հանրահաշիվ է, A^*-ը A-ի համալուծն է, իսկ
$$S(A^*) = \{\varphi \in A^* : \ \|\varphi\| = 1\} :$$
Նշանակենք
$$\mathcal{P}(A, x) = \{\varphi \in S(A^*) : \ \varphi(x) = 1\} \quad (x \in H) :$$
$\mathcal{P}(A, e)$-ի փոխարեն կգրենք $\mathcal{P}(A)$: $\mathcal{P}(A)$-ին կանվանենք նորմալիզացված վիճակների բազմություն, իսկ նրա էլեմենտներին՝ նորմալիզացված վիճակներ: Ըստ Բանախ-Ալաօգլուի թեորեմի՝ $S(A^*)$-ը թույլ կոմպակտ է, ուստի $\mathcal{P}(A)$-ն ևս կլինի թույլ* կոմպակտ: Ակնհայտ է, նաև, որ $\mathcal{P}(A)$-ն ուռուցիկ է, այսինքն՝ եթե $\varphi, \psi \in \mathcal{P}(A)$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$, ապա $\alpha\varphi + \beta\psi \in \mathcal{P}(A)$:

Վերն ասվածից բխում է, որ $\varphi_x \in \mathcal{P}\left(BL\left(H\right)\right)$:

Սահմանում 1.10.2: $a \in A$ էլեմենտի հանրահաշվական թվային պատկեր է կոչվում

$$V(a) = \{\varphi(a) : \varphi \in \mathcal{P}(A)\}$$

բազմությունը:

Քանի որ $\mathcal{P}(A)$-ն թույլ* կոմպակտ է, ուստի $V(a)$-ն կլինի $\mathbb{C}$-ում կոմպակտ բազմություն: Հեշտ է տեսնել, որ $V(a)$-ն նաև ուռուցիկ է:

Թեորեմ 1.10.2: *$\forall T \in BL(H)$ համար $\overline{W(T)} = V(T)$:*

Թեորեմն ընդունում ենք առանց ապացույցի: ►

Եթե ուզում ենք ընդգծել, որ a էլեմենտի հանրահաշվական թվային պատկերը դիտարկվում է A հանրահաշվի նկատմամբ, ապա $V(a)$-ի փոխարեն կգրենք $V(a, A)$:

Դիցուք B բանախյան հանրահաշիվը հանդիսանում է A բանախյան հանրահաշվի ընդլայնում, և $a \in A$: Նկատենք, որ

$$V(a, A) = V(a, B) :$$

Իրոք, ըստ Հան Բանախի թեորեմի $\varphi \to \varphi|_A$ արտապատկերումը $\mathcal{P}(B)$-ն արտապատկերում է $\mathcal{P}(A)$-ի վրա: Հիշենք, որ $\sigma_A(a)$-ն և $\sigma_B(a)$-ն կարող են իրարից տարբեր լինել:

Բերենք հանրահաշվական թվային պատկերի որոշ հատկություններ:

1° $\forall a \in A$ համար $V(a) \subset \overline{B}(0, \|a\|)$:

◄ Իրոք, $\lambda \in V(a)$ համար ունենք $|\lambda| = |\varphi(a)| \leqslant \|a\|$: ►

2° Դիցուք $a, b \in A$, իսկ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$: Այդ դեպքում՝

1) $V(a + b) \subset V(a) + V(b)$,

2) $V(\alpha e + \beta a) = \alpha + \beta V(a)$:

Ապացույցն ակնհայտ է: ►

3° $\forall a \in A$ համար

$$V(a) = \bigcap_{z \in \mathbb{C}} \overline{D}\,(z, \|ze - a\|) :$$

Ապացույց: Դիցուք $\lambda \in V(a) \Rightarrow \exists \varphi \in \mathcal{P}(A)$ այնպես, որ $\lambda = \varphi(a)$: Այդ դեպքում $\forall z \in \mathbb{C}$ համար կունենանք

$$|z - \lambda| = |\varphi(ze) - \varphi(a)| = |\varphi(ze - a)| \leqslant \|ze - a\|,$$

ուստի $\lambda \in \overline{D}\,(z, \|ze - a\|)$: Այսպիսով՝

$$V(a) \subset \bigcap_{z \in \mathbb{C}} \overline{D}\,(z, \|ze - a\|)\ :$$

Այժմ ցույց տանք, որ նաև

$$\bigcap_{z \in \mathbb{C}} \overline{D}\,(z, \|ze - a\|) \subset V(a)\ :$$

Դիցուք $\lambda \in \bigcap\limits_{z \in \mathbb{C}} \overline{D}\,(z, \|ze - a\|)$: Եթե a-ն և e-ն գծորեն կախյալ են, ապա կունենանք $a = \mu e$, ուստի

$$V(a) = \{\mu\}\ :$$

Ունենք $\lambda \in \overline{D}\,(z, \|ze - a\|)$ $(\forall z \in \mathbb{C})$, որտեղ վերցնելով $z = \mu$, կստանանք $\lambda = \mu \in V(a)$:

Այժմ դիցուք a-ն և e-ն գծորեն անկախ են: Նշանակենք $L = \operatorname{sp}\{a, e\}$ (այսինքն՝ a և e վեկտորների գծային թաղանթը): $\forall u \in L$ վեկտոր միակ ձևով կգրվի

$$u = \alpha e + \beta a$$

գծային կոմբինացիայի տեսքով: Սահմանենք $\varphi_0 : L \to \mathbb{C}$ գծային ֆունկցիոնալը՝ $\forall u = \alpha e + \beta a \in L$ համար վերցնելով

$$\varphi_0(u) = \alpha + \beta\lambda\ :$$

Ակնհայտ է, որ φ_0-ն կլինի գծային: Համոզվենք, որ

$$|\varphi_0(u)| \leqslant \|u\| \quad (u \in L)\ : \tag{1.10.1}$$

Դիցուք $u = \alpha e + \beta a$: Երբ $\beta = 0$, (1.10.1)-ը դառնում է ակնհայտ: Դիցուք $\beta \neq 0$: Ունենք

$$\lambda \in \overline{D}\,(z, \|ze - a\|) \quad (\forall z \in \mathbb{C}),$$

որտեղ վերցնելով $z = -\dfrac{\alpha}{\beta}$, կստանանք

$$\left|\lambda + \frac{\alpha}{\beta}\right| \leqslant \left\|-\frac{\alpha}{\beta}e - a\right\|,$$

որի երկու կողմը բազմապատկելով $|\beta|$-ով՝ կստանանք

$$|\varphi_0(u)| = |\alpha + \beta\lambda| \leqslant \|\alpha e + \beta a\| = \|u\| :$$

Քանի որ $\varphi_0(e) = 1$, ուստի $\|\varphi_0\|_L = 1$: Բացի այդ, $\varphi_0(a) = \lambda$: Ըստ Հան-Բանախի թեորեմի՝ $\exists\varphi \in S(A^*)$, որ

$$\varphi(u) = \varphi_0(u) \quad (u \in L) :$$

Այդ դեպքում կունենանք $\varphi \in \mathcal{P}(A)$ և $\lambda = \varphi(a)$, ուստի $\lambda \in V(a)$:
Հատկությունն ապացուցված է:
4° $\forall a \in A$ համար $\sigma(a) \subset V(a)$:
Ապացույց: Ցույց տանք, որ

$$\mathbb{C} \setminus V(a) \subset \Omega(a) :$$

Դիցուք $\lambda \in \mathbb{C} \setminus V(a)$: Ըստ նախորդ հատկության՝ $\exists z \in \mathbb{C}$ այնպես, որ

$$|z - \lambda| > \|ze - a\|,$$

որտեղից կբխի, որ

$$e - (z - \lambda)^{-1}(ze - a) \in A^{-1} :$$

Ունենք

$$e - (z-\lambda)^{-1}(ze - a) = (z-\lambda)^{-1}\left[(z-\lambda)e - (ze - a)\right] =$$

$$= (z-\lambda)^{-1}\left[ze - \lambda e - ze + a\right] = (z-\lambda)^{-1}(a - \lambda e),$$

ուստի (քանի որ $z - \lambda \neq 0$),

$$a - \lambda e = (z-\lambda)\Big[e - (z-\lambda)^{-1}(ze - a)\Big] \in A^{-1},$$

և հետևաբար՝ $\lambda \in \Omega(a)$:

Հատկությունն ապացուցված է:

Այժմ դիցուք A-ն և B-ն բանախյան հանրահաշիվներ են, իսկ $\pi : A \to B$ հոմոմորֆիզմը բավարարում է

$$\pi(e) = e, \quad \|\pi(a)\| \leqslant \|a\|$$

պայմաններին (ճիշտ կլիներ գրել՝ $\pi(e_A) = e_B$, $\|\pi(a)\|_B \leqslant \|a\|_A$, սակայն ինդեքսում A-ն և B-ն մենք բաց կթողնենք՝ նշանակումները չծանրաբեռնելու համար):

Այդ դեպքում նկատենք, որ

$$V(\pi(a)) \subset V(a) :$$

Իրոք, դա բխում է նրանից, որ եթե $\varphi \in \mathcal{P}(B)$, ապա

$$\psi = \varphi(\pi(\cdot)) \in \mathcal{P}(A) :$$

§ 1.11. Ֆակտոր–հանրահաշիվ

Դիցուք A–ն գծային փարածություն է, իսկ $N \subset A$ ենթափարածություն է: $\forall x \in A$ համար $\pi(x)$–ով նշանակենք A–ի այն հարակից դասն ըստ N–ի, որը պարունակում է x–ը, այլ կերպ ասած՝

$$\pi(x) = x + N :$$

A/N–ով նշանակենք բոլոր հարակից դասերի բազմությունը: A/N–ում սահմանենք գումարման և սկալյարով բազմապատկման գործողությունները հետևյալ բանաձևերով՝

$$\pi(x) + \pi(y) = \pi(x + y), \quad \alpha\pi(x) = \pi(\alpha x) :$$

Նկատենք, որ սահմանումները կոռեկտ են, այսինքն՝ եթե $\pi(x) = \pi(x')$, $\pi(y) = \pi(y')$, ապա

$$\pi(x) + \pi(y) = \pi(x') + \pi(y'), \quad \alpha\pi(x') = \alpha\pi(x) :$$

Իրոք, քանի որ $\pi(x) = \pi(x')$, $\pi(y) = \pi(y')$, ուստի $x - x'$, $y - y' \in N$ և հետևաբար

$$(x + y) - (x' + y'),\ \alpha x - \alpha x' \in N,$$

որտեղից կբխի, որ

$$\pi(x + y) = \pi(x' + y'), \quad \pi(\alpha x') = \pi(\alpha x)$$

և հետևաբար՝

$$\pi(x) + \pi(y) = \pi(x + y) = \pi(x' + y') = \pi(x') + \pi(y'),$$

$$\alpha\pi(x) = \pi(\alpha x) = \pi(\alpha x') = \alpha\pi(x') :$$

Այս ձևով գործողությունները սահմանելու դեպքում A/N–ը դառնում է գծային տարածություն (նրանում 0–ի դերը տանում է $\pi(0) = N$ դասը), որին անվանում են A–ի ֆակտոր–տարածություն ըստ N ենթատարածության: Պարզ է, որ $\pi : A \to A/N$ կլինի գծային արտապատկերում, ընդ որում

$$\ker(\pi) = N :$$

π–ն կոչվում է ֆակտոր–արտապատկերում կամ կանոնական արտա–պատկերում՝ A–ից A/N–ի վրա:

Այժմ դիցուք A–ն հանրահաշիվ է, իսկ N–ը A–ում երկկողմանի իդեալ է: Եթե $x' - x$, $y' - y \in N$, ապա

$$x'y' - xy = (x' - x)y' + x(y' - y)$$

նույնությունից կբխի, որ $x'y' - xy \in N$ և հետևաբար $\pi(x'y') = \pi(xy)$: Ուստի

$$\pi(x)\pi(y) = \pi(xy) \quad (x, y \in A)$$

բանաձևով A/N–ում ներմուծված բազմապատկման գործողությունը կլինի կոռեկտ, և հեշտ է տեսնել, որ A/N–ը կդառնա հանրահաշիվ: Եթե e–ն A–ի միավորն է, ապա $E = e + N$ կլինի միավոր A/N–ում:

Այժմ դիցուք A–ն գծային նորմավորված փարածություն է, իսկ $N \subset A$ փակ ենթափարածություն է: A/N–ում ներմուծենք նորմ՝

$$\|\pi(x)\| = \inf\{\|x+z\| : z \in N\}$$

բանաձևով: Հեշտ է փեսնել, որ այս սահմանումը կոռեկտ է (այսինքն՝ եթե $\pi(x) = \pi(x')$, ապա $\|\pi(x)\| = \|\pi(x')\|$): Ֆունկցիոնալ անալիզի դասընթացում ապացուցվել է, որ սա իրոք A/N–ում հանդիսանում է նորմ, ընդ որում եթե A–ն լրիվ է, ապա A/N–ը ևս լրիվ է: Պարզ է նաև, որ $\|\pi(x)\| \leqslant \|x\| \quad (x \in A)$:

Այժմ դիցուք A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, իսկ $N \subset A$ փակ սեփական երկկողմանի իդեալ է: Դիցուք $x_1, x_2 \in A$ կամայական էլեմենտներ են: Այդ դեպքում $\forall\delta > 0$ համար $\exists y_1, y_2 \in N$, որ

$$\|x_i + y_i\| \leqslant \|\pi(x_i)\| + \delta \quad (i = 1, 2),$$

ինչն անմիջապես բխում է փակտոր–նորմի սահմանումից: Քանի որ $(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) \in x_1x_2 + N$, ուստի

$$\|\pi(x_1x_2)\| \leqslant \|(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)\| \leqslant \|x_1 + y_1\| \, \|x_2 + y_2\| \leqslant$$

$$\leqslant (\|\pi(x_1)\| + \delta)(\|\pi(x_2)\| + \delta),$$

որտեղից և δ–ի կամայականությունից կբխի, որ

$$\|\pi(x_1x_2)\| \leqslant \|\pi(x_1)\| \cdot \|\pi(x_2)\| :$$

Ցույց տանք, որ նաև $\|\pi(e)\| = 1$ (e–ն A–ի միավորն է): Իրոք, քանի որ N–ը սեփական իդեալ է, ուստի $\pi(e) \neq N$ և

$$\|\pi(e)\| = \|\pi(e \cdot e)\| \leqslant \|\pi(e)\| \cdot \|\pi(e)\|$$

առնչությունից կբխի, որ $\|\pi(e)\| \geqslant 1$: Մյուս կողմից, ունենք $\|\pi(x)\| \leqslant \leqslant \|x\| \, (x \in A)$, ուստի $\|\pi(e)\| \leqslant \|e\| = 1$ և հետևաբար $\|\pi(e)\| = 1$:

Այսպիսով ապացուցվեց, որ եթե A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, իսկ N–ը A–ի սեփական երկկողմանի փակ իդեալ է, ապա A/N–ը ևս բանախյան հանրահաշիվ է:

§ 1.12. Ֆակտոր – հանրահաշվի էլեմենտների հանրահաշվական թվային պատկերը

Դիցուք A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, իսկ $J \subset A$ երկկողմանի փակ (սեփական) իդեալ է: Ինչպես նախորդ պարագրաֆում տեսանք, յուրաքանչյուր այդպիսի իդեալ ծնում է π_J: $A \to A/J$ կանոնական հոմոմորֆիզմ՝

$$\pi_J(a) = a + J,$$

ընդ որում

$$\|\pi_J(a)\| \leqslant \|a\|\,, \qquad \pi_J(e) = e_{A/J}\ :$$

Ֆիքսենք կամայական $a \in A$ և նշանակենք $\hat{a} = \pi_J(a)$: Ֆակտոր–նորմը կնշանակենք երեք գծով՝ $|||\cdot|||$: Ըստ § 1.10-ի վերջում ապացուցված արդյունքների՝

$$V\,(\hat{a}) \subset V(a)\ :$$

Ըստ այդ պարագրաֆի մեջ հանրահաշվական թվային պատկերի 3° հատկության՝

$$V\,(\hat{a}) = \bigcap_{z\in\mathbb{C}} \overline{D}\,(z, |||z\hat{e} - \hat{a}|||)\ :$$

Ըստ ֆակտոր–նորմի սահմանման՝

$$|||z\hat{e} - \hat{a}||| = \inf_{j\in J} \|ze - (a+j)\|\,,$$

ուստի

$$\overline{D}\,(z, |||z\hat{e} - \hat{a}|||) = \bigcap_{j\in\mathbb{C}} \overline{D}\,(z, \|ze - (a+j)\|)\,,$$

և հետևաբար

$$V\,(\hat{a}) = \bigcap_{z\in\mathbb{C}} \bigcap_{j\in J} \overline{D}\,(z, \|ze - (a+j)\|) =$$

$$= \bigcap_{j\in J} \bigcap_{z\in\mathbb{C}} \overline{D}\,(z, \|ze - (a+j)\|) = \bigcap_{j\in J} V(a+j)\ :$$

Այստեղից անմիջապես բխում է նաև վերը գրված $V\,(\hat{a}) \subset V(a)$ առնչությունը (չէ՞ որ $0 \in J$):

§ 1.13. Հերմիտյան և նորմալ էլեմենտներ

Խնդիր 1: Դիցուք A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, և $a \in A$: Նշանակենք

$$\rho_+(a) = \sup\{\operatorname{Re}\lambda : \ \lambda \in \sigma(a)\},$$

$$\rho_-(a) = \inf\{\operatorname{Re}\lambda : \ \lambda \in \sigma(a)\},$$

$$v_+(a) = \sup\{\operatorname{Re}\lambda : \ \lambda \in V(a)\},$$

$$v_-(a) = \inf\{\operatorname{Re}\lambda : \ \lambda \in V(a)\} :$$

$\rho_+(a)$, $\rho_-(a)$, $v_+(a)$, $v_-(a)$ մեծություններին անվանում են համապատասխանաբար a էլեմենտի վերին սպեկտրալ աբսցիս, ստորին սպեկտրալ աբսցիս, վերին թվային աբսցիս, ստորին թվային աբսցիս (պարզ է, որ $v_-(a) \leqslant \rho_-(a)$ և $\rho_+(a) \leqslant v_+(a)$):

Ապացուցել, որ

$$v_+(a) = \lim_{t\to+0} \frac{\ln\|\exp(ta)\|}{t},$$

$$\rho_+(a) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln\|\exp(ta)\|}{t},$$

$$v_-(a) = \lim_{t\to-0} \frac{\ln\|\exp(ta)\|}{t},$$

$$\rho_-(a) = \lim_{t\to-\infty} \frac{\ln\|\exp(ta)\|}{t} : \blacktriangleright$$

Կարելի է ներմուծել նաև սպեկտրալ և թվային օրդինատներ (սահմանումների մեջ Re–ն կփոխարինենք Im–ով):

Սահմանում 1.13.1: $a \in A$ էլեմենտը կոչվում է հերմիտյան, եթե $V(a) \subset \mathbb{R}$:

A բանախյան հանրահաշվի հերմիտյան էլեմենտները կազմում են իրական գծային տարածություն, որը նշանակվում է $\mathcal{H}(A)$:

Թեորեմ 1.13.1: *Որպեսզի $a \in A$ էլեմենտը լինի հերմիտյան, անհրաժեշտ է և բավարար, որ*

$$\|\exp(ita)\| = 1 \quad (\forall t \in \mathbb{R}) :$$

Թեորեմն ընդունում ենք առանց ապացույցի: ▶

Սահմանում 1.13.2: $v(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in V(a)\}$ կանվանենք a էլեմենտի թվային շառավիղ:

Սահմանում 1.13.3: $a \in A$ էլեմենտը կոչվում է հերմիտյան իմաստով պրոհվող, եթե $\exists h, k \in \mathcal{H}(A)$, որ $a = h + ik$:

Դժվար չէ տեսնել, որ $a = h + ik \quad (h, k \in \mathcal{H}(A))$ ներկայացումը, եթե այն գոյություն ունի, միակն է:

Սահմանում 1.13.4: Հերմիտյան իմաստով պրոհվող $a = h + ik$ $(h, k \in \mathcal{H}(A))$ էլեմենտի համալուծ է կոչվում $a^+ = h - ik$ էլեմենտը:

Սահմանում 1.13.5: $a \in A$ էլեմենտը կոչվում է նորմալ, եթե a–ն հերմիտյան իմաստով պրոհվում է՝ $a = h + ik$, որտեղ $h, k \in \mathcal{H}(A)$, ընդ որում $[h, k] = hk - kh = 0$:

Վերջին հավասարությունը համարժեք է $aa^+ = a^+a$ հավասարությանը:

Թեորեմ 1.13.2: *Եթե $a \in A$ էլեմենտը նորմալ է, ապա*

$$\operatorname{conv} \sigma(a) = V(a)\,:$$

Այս թեորեմը ևս ընդունում ենք առանց ապացույցի: ▶

Սահմանում 1.13.6: $a \in A$ էլեմենտը կոչվում է քվազինորմալ, եթե գոյություն ունի այնպիսի $a^+ \in A$ էլեմենտ, որ $[a, a^+] = 0$ և $\left\|\exp\left(\overline{\lambda} a - \lambda a^+\right)\right\| = o\left(|\lambda|^{\frac{1}{2}}\right)$, երբ $|\lambda| \to \infty,\ \lambda \in \mathbb{C}$:

Ակնհայտ է, որ նորմալ էլեմենտը քվազինորմալ է, ընդ որում 1.13.6 սահմանման մեջ հանդես եկող a^+ էլեմենտը a էլեմենտի համալուծն է:

Խնդիր 2: Դիցուք $f : D(0, 1) \to A$ այնպիսի A-արժեքանի անալիտիկ ֆունկցիա է, որ $\forall\lambda \in D(0, 1)$ համար $f(\lambda)$-ն քվազինորմալ էլեմենտ է A-ում: Ապացուցել, որ $f(D(0, 1))$-ը կոմուտատիվ ենթաբազմություն է A հանրահաշվում: ▶

Սահմանում 1.13.7: Դիցուք J-ն իդեալ է A բանախյան հանրահաշվում: Կասենք J իդեալն օժտված է (GFP) հատկությամբ, եթե կամայական x-ի և քվազինորմալ a-ի դեպքում $[a, x] \in J$ պայմանից բխում է, որ $[a^+, x] \in J$:

Խնդիր 3: Ապացուցել, որ A-ում կամայական փակ իդեալ օժտված է (GFP) հատկությամբ:

Սահմանում 1.13.8: $a \in A$ էլեմենտը կոչվում է սուբնորմալ, եթե գոյություն ունի A–ի այնպիսի B բանախյան ընդլայնում և այնպիսի $n \in B$ նորմալ էլեմենտ, որ

$$\sigma_A(a) = \sigma_B(n) \bigcup \bigcup_j w_j,$$

որտեղ w_j–երը $\sigma_B(n)$–ի լրացման ինչ-որ կոմպոնենտներ են:

Եթե a–ն սուբնորմալ է, ապա պարզվում է, որ

$$\operatorname{conv} \sigma_A(a) = \operatorname{conv} \sigma_B(a) = V(a) : \blacktriangleright$$

(վերջին հավասարությունը բխում է 1.13.2 թեորեմից):
Խնդիր 4: Կամայական A բանախյան հանրահաշվում նկարագրել այն a էլեմենտները, որոնց համար

$$\operatorname{conv} \sigma(a) = V(a) : \blacktriangleright$$

Օրինակ: Որպես A վերցնենք $BL\left(L^2(0,1)\right)$–ը: Դիտարկենք նույնաբար 1 կորիզով Վոլտերայի ինտեգրալ օպերատորը՝

$$(Vf)(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt \qquad \left(f \in L^2(0,1)\right) :$$

Սա Հիլբերտ–Շմիդտի օպերատոր է, ուստի լիովին անընդհատ է: Դժվար չէ ցույց տալ, որ V–ն չունի սեփական արժեքներ: Ուստի $\sigma(V) \subset \{0\}$: Այլ կերպ ասած՝ V–ն քվազինիլպոտենտ է: Պարզվում է, որ V–ի հանրահաշվական թվային պատկերը հանդիսանում է

$$\frac{1-\cos t}{t^2} \pm i\,\frac{t-\sin t}{t^2} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

կորերով սահմանափակված փակ ուռուցիկ փիրույթը: Ուստի V օպերատորն օժտված չէ նախորդ խնդրում նշված հատկությամբ: ▶

Նշենք, որ ինչպես այս, այնպես էլ նախորդ պարագրաֆներում թվային պատկերին և հանրահաշվական թվային պատկերին վերաբերող նյութը հանդիսանում է հիմնականում վերջերս ստացված արդյունքներից ի մի բերված նյութ և ունի ավելի շատ ինֆորմացիոն բնույթ:

§ 1.14. Սուբհարմանիկ ֆունկցիաներ և դրանց որոշ կիրառություններ բանախյան հանրահաշիվներում

Այս պարագրաֆում մենք կբերենք սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների մասին որոշ փաստեր [4], [21] գրքերից և կստանանք դրանց որոշ կիրառություններ բանախյան հանրահաշիվներում: Փաստերի մի մասի համար կտրվեն սխեմատիկ ապացույցներ:

Սահմանում 1.14.1: Դիցուք $f : \mathcal{D} \to [-\infty, \infty)$, որտեղ $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ տիրույթ է: f–ը կոչվում է սուբհարմոնիկ, եթե՝

1) f–ը $\mathcal{D}$–ում կիսանընդհատ է վերևից, այսինքն՝

$$f(\lambda_0) \leqslant \overline{\lim_{\lambda \to \lambda_0}} f(\lambda) \quad (\forall \lambda_0 \in \mathcal{D}),$$

2) եթե $\lambda_o \in \mathcal{D}$ և $r > 0$ այնպիսին են, որ $\overline{D(\lambda_0, r)} \subset \mathcal{D}$, ապա

$$f(\lambda_0) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\lambda_0 + re^{i\theta}\right) d\theta :$$

Պարզ է, որ հարմոնիկ ֆունկցիան սուբհարմոնիկ է:

Լեմմա 1.14.1: *Դիցուք A-ն բանախյան հանրահաշիվ է, $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ տիրույթ է, $f : \mathcal{D} \to A$ անալիտիկ ֆունկցիա է և $p \geqslant 1$: Այդ դեպքում $\|f\|^p$-ը սուբհարմոնիկ է:*

Ապացույց: Նախ դիտարկենք $A = \mathbb{C}$ դեպքը: Ըստ անալիտիկ ֆունկցիաների համար միջին արժեքի թեորեմի՝

$$f(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\lambda_0 + re^{i\theta}\right) d\theta \quad \left(\overline{D(\lambda_0, r)} \subset \mathcal{D}\right),$$

ուստի

$$|f(\lambda_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|f\left(\lambda_0+re^{i\theta}\right)\right|d\theta :$$

Հետևաբար $|f|$–ը սուբհարմոնիկ է: Այժմ դիցուք $p>1$, իսկ q–ն p–ի համալուծ ցուցիչն է $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$: Օգտվելով Հյոլդերի անհավասարությունից՝ կունենանք

$$|f(\lambda_0)|^p \leqslant \left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|f\left(\lambda_0+re^{i\theta}\right)\right|d\theta\right\}^p \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^{-p}\cdot\left\{\left[\int\limits_0^{2\pi}\left|f\left(\lambda_0+re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\int\limits_0^{2\pi}1^q\cdot d\theta\right]^{\frac{1}{q}}\right\}^p =$$

$$=(2\pi)^{-p}(2\pi)^{\frac{p}{q}}\int\limits_0^{2\pi}\left|f\left(\lambda_0+re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta=\int\limits_0^{2\pi}\left|f\left(\lambda_0+re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta,$$

և հետևաբար $|f|^p$–ը սուբհարմոնիկ է:

Այժմ անցնենք ընդհանուր դեպքի ապացույցին: Դիցուք $\overline{D(\lambda_0,\,r)}\subset\mathcal{D}$: Ըստ Հան-Բանախի թեորեմի հետևանքի՝ $\exists\Lambda\in A^*$ այնպիսին, որ $\|\Lambda\|=1$ և $\|f(\lambda_0)\|=\Lambda f(\lambda_0)$: Ըստ վերն ապացուցվածի՝ $|\Lambda f|^p$-ը սուբհարմոնիկ է, ուստի

$$\|f(\lambda_0)\|^p=[\Lambda f(\lambda_0)]^p\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\Lambda f\left(\lambda_0+re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\|\Lambda\|^p\cdot\left\|f\left(\lambda_0+re^{i\theta}\right)\right\|^p d\theta=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left\|f\left(\lambda_0+re^{i\theta}\right)\right\|^p d\theta :$$

Լեմման ապացուցված է:

Օկա–Ռոպշպեյնի թեորեմը: *Եթե* $\gamma: \quad z = z(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$ *ժորդանյան կորն ընկած է* $\mathcal{D}$ *տիրույթում, և* $f: \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \to [-\infty, \infty)$ *սուբհարմոնիկ ֆունկցիա է, ապա*

$$\overline{\lim_{t \to 0}} f(z(t)) = f(z(0)) :$$

Ապացույցը տես՝ [4] գրքում: ▶

Լեմմա 1.14.2: *Եթե* A*–ն բանախյան հանրահաշիվ է, և* $a \in A$*, ապա*

$$\left\| a^{2^n} \right\|^{\frac{1}{2^n}} \downarrow \rho(a) :$$

Ապացույցը բխում է (1.7.6) բանաձևից և հետևյալ առնչություններից.

$$\left\| a^{2^{n+1}} \right\|^{\frac{1}{2^{n+1}}} = \left\| a^{2^n} \cdot a^{2^n} \right\|^{\frac{1}{2^{n+1}}} \leqslant \left(\left\| a^{2^n} \right\| \cdot \left\| a^{2^n} \right\| \right)^{\frac{1}{2^{n+1}}} = \left\| a^{2^n} \right\|^{\frac{1}{2^n}} :$$

Լեմման ապացուցված է:

Լեմմա 1.14.3: *Եթե* $u \geqslant 0$*, ապա որպեսզի* $\ln u$ *լինի սուբհարմոնիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ* $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ *համար* $|e^{\alpha z}|\, u$ *ֆունկցիան լինի սուբհարմոնիկ:* ▶

Վեզենտինիի թեորեմը: *Եթե* $f: \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \to A$ *անալիտիկ է, ապա* $\lambda \mapsto \rho(f(\lambda))$ *ֆունկցիան սուբհարմոնիկ է:*

Ապացույց: Ըստ 1.14.1 լեմմայի՝ $\lambda \mapsto \left\| f^{2^n}(\lambda) \right\|$ ֆունկցիան սուբհարմոնիկ է: 1.14.3 լեմմայի օգնությամբ ցույց կտանք, որ $\frac{1}{2^n} \ln \left\| f^{2^n}(\lambda) \right\|$ ֆունկցիան նս կլինի սուբհարմոնիկ: 1.14.2 լեմմայից կբխի, որ

$$\frac{1}{2^n} \ln \left\| f^{2^n}(\lambda) \right\| \downarrow \ln \left(\rho(f(\lambda)) \right),$$

ուստի $\ln \left(\rho(f(\lambda)) \right)$ նս կլինի սուբհարմոնիկ, և հետևաբար, սուբհարմոնիկ կլինի

$$\rho(f(\lambda)) = e^{\ln(\rho(f(\lambda)))}$$

ֆունկցիան:

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 1.14.1: *Որպեսզի b էլեմենտը լինի քվազինիլպոտենտ* $(b \in \mathrm{Rad}(A))$, *անհրաժեշտ է և բավարար, որ*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{|\lambda|} \rho(a + \lambda b) = 0 \quad (\forall a \in A) : \tag{1.14.1}$$

Ապացույց: Ֆիքսած $\lambda \neq 0$ համար նշանակելով $t = \dfrac{1}{\lambda}$, կունենանք

$$\frac{1}{|\lambda|} \rho(a + \lambda b) = \frac{1}{|\lambda|} \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|(a + \lambda b)^n\|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|(b + ta)^n\|} =$$
$$= \rho(b + ta) :$$

Ուստի (1.14.1)–ը համարժեք է

$$\lim_{t \to 0} \rho(b + ta) = 0 \quad (\forall a \in A) \tag{1.14.2}$$

առնչությանը: Քանի որ $\rho(b + ta) \geqslant 0$, ուստի (1.14.2)–ը համարժեք է

$$\overline{\lim_{t \to 0}}\, \rho(b + ta) = 0 \quad (\forall a \in A) \tag{1.14.3}$$

առնչությանը: Քանի որ $t \mapsto b + ta$ ֆունկցիան անալիտիկ է, ուստի Վեզենտինիի թեորեմից կբխի, որ $\rho(b + ta)$ ֆունկցիան սուբհարմոնիկ է, և Օկա–Ռոտշտեյնի թեորեմից կբխի, որ (1.14.3)–ը համարժեք է $\rho(b) = 0$ առնչությանը:
Թեորեմն ապացուցված է:
Կլեյնեկե–Շիրոկովի թեորեմը: *Եթե որևէ* $a, b \in A$ *համար*

$$[a;\, [a, b]] = 0,$$

ապա

$$[a, b] \in \mathrm{Rad}(A) :$$

Ապացույց: Դիտարկենք $f(\lambda) = \exp(\lambda a)\, b \exp(-\lambda a)$ ֆունկցիան: Սա A արժեքանի ամբողջ անալիտիկ ֆունկցիա է: Գրենք f–ի Թեյլորի վերլուծությունը՝

$$f(\lambda) = f(0) + \lambda f'(0) + \frac{\lambda^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!} f^{(n)}(0) + \cdots$$

Հեշտ է տեսնել, որ

$$f(0) = b, \quad f'(0) = [a,b], \quad f''(0) = [a,[a,b]],$$

$$f'''(0) = [a,[a,[a,b]]],$$

և այլն: Ըստ թեորեմի պայմաններում

$$f''(0) = f'''(0) = \cdots = 0,$$

և կստանանք

$$f(\lambda) \equiv b + \lambda[a,b],$$

հետևաբար

$$\frac{\rho(b+\lambda[a,b])}{|\lambda|} = \frac{\rho(f(\lambda))}{|\lambda|} = \frac{\rho\,(exp(\lambda a)\,b\,exp(-\lambda a))}{|\lambda|} =$$

$$= \frac{\rho\,(exp(-\lambda a)\,exp(\lambda a)\,b)}{|\lambda|} = \frac{\rho(b)}{|\lambda|} \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0,$$

և նախորդ թեորեմից կբխի, որ $[a,b] \in \mathrm{Rad}(A)$:
Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք 1.14.1: *Եթե* $a, b \in A$, *ապա* $[a,b] \neq e$*:*

I **ապացույց:** Ենթադրենք հակառակը՝ $[a,b] = e$: Այդ դեպքում կստանանք

$$[a;[a,b]] = [a;e] = 0,$$

և Կլեյնեկե–Շիրոկովի թեորեմից կբխի, որ $[a,b] \in \mathrm{Rad}(A)$: Ստացվեց, որ

$$e \in [a,b] \in \mathrm{Rad}(A),$$

ինչը հակասություն է, քանի որ $\rho(e) = 1 \neq 0$:
II **ապացույցը** կատարենք պարզ (իտերացիոն) մեթոդով՝ չօգտագործելով Կլեյնեկե–Շիրոկովի թեորեմը: Ենթադրենք հակառակը՝ $\exists a, b \in A$, որ

$$[a,b] = e\,:$$

Այդ դեպքում $n = 1, 2, \ldots$ համար կունենանք

$$[a^n, b] = a^n b - ba^n = aa^{n-1}b - ba^n = a\left(ba^{n-1} + \left[a^{n-1}, b\right]\right) - ba^n =$$

$$= aba^{n-1} + a\left[a^{n-1}, b\right] - ba^n = (ba + e)a^{n-1} + a\left[a^{n-1}, b\right] - ba^n =$$

$$= ba^n + a^{n-1} + a\left[a^{n-1}, b\right] - ba^n = a^{n-1} + a\left[a^{n-1}, b\right],$$

$$[a^n, b] = a^{n-1} + a\left[a^{n-1}, b\right] :$$

Օգտվելով վերջինից և կիրառելով ինդուկցիա՝ հեշտությամբ կստանանք, որ

$$[a^n, b] = na^{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots) :$$

Ուստի

$$n\left\|a^{n-1}\right\| = \|[a^n, b]\| = \|a^n b - ba^n\| \leqslant \|a^n b\| + \|ba^n\| \leqslant$$

$$\leqslant \|a^n\| \, \|b\| + \|b\| \, \|a^n\| = 2\|a^n\| \, \|b\| = 2\left\|a^{n-1} \cdot a\right\| \|b\| \leqslant$$

$$\leqslant 2\left\|a^{n-1}\right\| \cdot \|a\| \cdot \|b\|,$$

որտեղից $a^{n-1} \neq 0$ դեպքում կստանանք

$$n \leqslant 2\|a\| \, \|b\| :$$

Հետևաբար, եթե a-ն նիլպոտենտ չէ, ապա

$$n \leqslant 2\|a\| \, \|b\| \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

ինչը հակասություն է: Ուստի a-ն նիլպոտենտ է:

Քանի որ $[a, b] = e$, ուստի

$$[-b, a] = e,$$

և վերը արված դատողություններում a-ն փոխարինելով $(-b)$-ով, իսկ b-ն a-ով՝ կստանանք, որ $(-b)$-ն նիլպոտենտ է, կամ որ նույնն է՝ b-ն նիլպոտենտ է:

Այսպիսով, a-ն և b-ն նիլպոտենտ են, ընդ որում

$$[a, b] = e\,:$$

Վարը (տես՝ թեորեմ 2.2.1) կոմուտատիվ դեպքի համար մենք կտեսնենք, որ $\mathrm{Rad}(A)$ ռադիկալը A-ի իդեալ է (դատողությունները մեծամասամբ կիրառելի են նաև ոչ կոմուտատիվ դեպքում): Ուստի $a, b \in \mathrm{Rad}(A)$ առնչությունից և

$$e = [a, b] = ab - ba$$

ներկայացումից կբխի, որ $e \in \mathrm{Rad}(A)$, ինչը հակասություն է:
Հետևանքն ապացուցված է:

Դիտողություն 1.14.1: Վերն ապացուցված հետևանքից բխում է, որ X բանախյան տարածությունում գործող ցանկացած A, B գծային անընդհատ օպերատորների համար $[A, B] \neq I$: Երբ A և B օպերատորներից գոնե մեկն անսահմանափակ է, $[A, B] = I$ առնչությունը կարող է տեղի ունենալ. այդպիսի իրավիճակ է քվանտային մեխանիկայից հայտնի Հայզենբերգի անորոշություններում: ▶

§ 1.15. Ֆունկցիոնալ հաշիվ

Դիցուք $\Omega \subset \mathbb{C}$ բաց բազմություն է, K–ն Ω–ի կոմպակտ ենթաբազմություն է, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \subset \Omega$ կողմնորոշված հատվածներ են, որոնցից ոչ մեկը չի հատվում K–ի հետ և $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{n} \gamma_j$: Այդ դեպքում $\varphi : \Gamma \to \mathbb{C}$ ֆունկցիայի ինտեգրալը՝ տարածված Γ–ով, սահմանվում է

$$\int_\Gamma \varphi(\lambda)\, d\lambda = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} \varphi(\lambda)\, d\lambda$$

բանաձևով: Ինչպես հայտնի է կոմպլեքս անալիզի դասընթացից, Γ–ն կարելի է ընտրել այնպես, որ այն K–ի յուրաքանչյուր կետ շրջանցի մի անգամ, այսինքն՝

$$Ind_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_\Gamma \frac{d\lambda}{\lambda - z} = \begin{cases} 1, & z \in K, \\ 0, & z \notin \Omega, \end{cases} \tag{1.15.1}$$

և այդ դեպքում յուրաքանչյուր $f \in H(\Omega)$ հոլոմորֆ ֆունկցիայի համար ճիշտ է

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_\Gamma (\lambda - z)^{-1} f(\lambda)\, d\lambda \quad (z \in K) \tag{1.15.2}$$

Կոշու բանաձևը:

(1.15.1)–ի հետ կապված հաճախ ասում են, որ Γ–ն ընդգրկում է K–ն Ω–ում:

Նշենք, որ K–ն, Ω–ն և Γ–ն կարող են կապակցված չլինել:

Լեմմա 1.15.1: *Դիցուք A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, $x \in A$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$ և Γ կոնտուրն ընդգրկում է $\sigma(x)$–ն Ω–ում: Այդ դեպքում*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma (\alpha - \lambda)^n (\lambda e - x)^{-1} d\lambda = (\alpha e - x)^n \quad (n \in \mathbb{Z}) : \tag{1.15.3}$$

Ապացույց: (1.15.3)–ի ձախ մասը նշանակենք y_n–ով: Ըստ Հիլբերտի (1.7.16) նույնության՝ $\lambda \notin \sigma(x)$ համար

$$(\lambda e - x)^{-1} = (\alpha e - x)^{-1} + (\alpha - \lambda)(\alpha e - x)^{-1}(\lambda e - x)^{-1},$$

ուստի

$$\begin{aligned} y_n = (\alpha e - x)^{-1} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma (\alpha - \lambda)^n d\lambda + (\alpha e - x)^{-1} \cdot \\ \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma (\alpha - \lambda)^{n+1} (\lambda e - x)^{-1} d\lambda : \end{aligned} \tag{1.15.4}$$

Քանի որ $Ind_\Gamma(\alpha) = 0$, ուստի (1.15.4)–ի առաջին գումարելին հավասար է 0–ի: Հետևաբար,

$$(\alpha e - x) y_n = y_{n+1} \quad (n \in \mathbb{Z}) : \tag{1.15.5}$$

(1.15.5)–ից բխում է, որ բավական է (1.15.3)–ն ապացուցել $n = 0$ դեպքում: Այսպիսով, մենք պետք է ապացուցենք, որ

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda e - x)^{-1}d\lambda = e : \tag{1.15.6}$$

Դիցուք Γ_r–ը 0 կենտրոնով և $r > \|x\|$ շառավղով դրականորեն կողմնորոշված շրջանագիծն է: Γ_r–ի վրա ունենք

$$(\lambda e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}x^n :$$

Անդամ առ անդամ ինտեգրելով այս շարքը՝ կստանանք (1.15.6)–ը, որում Γ–ն փոխարինված կլինի Γ_r–ով: Սակայն (1.15.6)–ում ենթինտեգրալ ֆունկցիան x էլեմենտի ռեզոլվենտն է, որն իրենից ներկայացնում է $\sigma(x)$–ի լրացման վրա հոլոմորֆ A–արժեքանի ֆունկցիա: Բացի այդ

$$Ind_{\Gamma_r}(z) = 1 = Ind_{\Gamma}(z) \quad (\forall z \in \sigma(x)) :$$

Ուստի, համաձայն Կոշու թեորեմի, (1.15.6)–ի ձախ մասը չի փոխվի, եթե Γ–ն փոխարինենք Γ_r–ով:
Լեմման ապացուցված է:

Թեորեմ 1.15.1: *Դիցուք*

$$R(\lambda) = \sum_{j=0}^{n}p_j\lambda^j + \sum_{m,k=1}^{N}c_{m,k}(\lambda - \alpha_m)^{-k} \tag{1.15.7}$$

ռացիոնալ ֆունկցիա է, A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, $x \in A$ և $R(\lambda)$–ն $\sigma(x)$–ի վրա բևեռներ չունի: Նշանակենք

$$R(x) = \sum_{j=0}^{n}p_jx^j + \sum_{m,k=1}^{N}c_{m,k}(x - \alpha_m e)^{-k} \tag{1.15.8}$$

Դիցուք $\Omega \supset \sigma(x)$ բաց բազմությունն $R(\lambda)$–ի բևեռներ չի պարունակում, իսկ Γ կոնտուրն ընդգրկում է $\sigma(x)$–ը Ω–ում: Այդ դեպքում

$$R(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} R(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda :$$

Ապացույցն անմիջապես բխում է լեմմա 1.15.1-ից: ►

Նշենք, որ (1.15.8)–ը հանդիսանում է բանախյան հանրահաշվի էլեմենտից ռացիոնալ ֆունկցիայի ամենաբնական սահմանումը: Թեորեմ 1.15.1–ը ցույց է տալիս, որ Կոշու բանաձևը ևս բերում է նույն արդյունքին: Այսպիսով, հանգում ենք հետևյալ սահմանմանը:

Սահմանում 1.15.1: Դիցուք A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, $\Omega \subset \mathbb{C}$ բաց բազմություն է, իսկ $H(\Omega)$–ն Ω–ում հոլոմորֆ բոլոր կոմպլեքս արժեքանի ֆունկցիաների հանրահաշիվ է: Ըստ թեորեմ 1.8.7–ի,

$$\Omega_A = \{x \in A : \sigma(x) \subset \Omega\} \tag{1.15.9}$$

բազմությունը բաց է A–ում:

$\tilde{H}\left(\Omega_A\right)$ բազմությունը որոշվում է հետևյալ կերպ: Այն բաղկացած է բոլոր $\tilde{f} : \Omega_A \to A$ ֆունկցիաներից, որտեղ $\tilde{f}$–ը ստացվում է $f \in H(\Omega)$ ֆունկցիայից՝

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda \tag{1.15.10}$$

բանաձևով, որում Γ–ն $\sigma\left(x\right)$–ը Ω–ում ընդգրկող կամայական կոնտուր է:

Բերված սահմանումը պահանջում է որոշակի պարզաբանումներ:

1) Քանի որ Γ–ն գտնվում է $\sigma(x)$–ից դրական հեռավորության վրա և $x \mapsto x^{-1}$ արտապատկերումն անընդհատ է A^{-1}–ում, ուստի (1.15.10)–ում ենթաինտեգրալ ֆունկցիան անընդհատ է, հետևաբար, ինտեգրալը գոյություն ունի և $\tilde{f}(x)$–ն իսկապես հանդիսանում է A հանրահաշվի էլեմենտ:

2) Ենթաինտեգրալ ֆունկցիան իրականում հանդիսանում է $\sigma(x)$–ի լրացման վրա անալիտիկ A–արժեքանի ֆունկցիա (ավելի ճիշտ,

$\sigma(x)$–ի լրացման և f–ի անալիտիկության տիրույթի հատման վրա անալիտիկ A–արժեքանի ֆունկցիա): Ուստի Կոշու թեորեմից բխում է, որ $\tilde{f}(x)$–ը կախված չէ Γ կոնտուրի ընտրությունից, եթե Γ–ն ընդգրկում է $\sigma(x)$–ը Ω–ում:

3) Եթե $x = \alpha e$ և $\alpha \in \Omega$, ապա (1.15.10)–ից ստանում ենք

$$\tilde{f}(\alpha e) = f(\alpha)e\,: \tag{1.15.11}$$

Նկատենք, որ $\alpha e \in \Omega_A$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\alpha \in \Omega$: Եթե $\alpha \in \mathbb{C}$ և $\alpha e \in A$ կետերը նույնացնենք, ապա յուրաքանչյուր $f \in H(\Omega)$ ֆունկցիա կարելի է դիտարկել որպես Ω_A–ի ինչ–որ ենթաբազմության (ավելի կոնկրետ, Ω_A–ի և e էլեմենտով A–ում ծնված միաչափ ենթապարածության հատման) արտապատկերում A–ի մեջ: Այդ դեպքում $\tilde{f}$–ը կարելի է դիտարկել որպես f ֆունկցիայի շարունակություն: Այս կոնտեքստում հաճախ $\tilde{f}(x)$–ի փոխարեն գրում են պարզապես $f(x)$: Այս ենթավերնագրի տակ մենք կօգտագործենք $\tilde{f}(x)$ նշանակումը, քանի որ այն հնարավորություն է ընձեռում խուսափել որոշ երկիմաստություններից, որոնք կարող են թյուրիմացությունների բերել:

4) Եթե $u, v : \Omega_A \to A$, ապա uv արտադրյալը սահմանվում է

$$(uv)(s) = u(s)v(s) \quad (s \in \Omega_A)$$

բանաձևով: Հեշտ է տեսնել, որ Ω_A–ի վրա որոշված բոլոր A արժեքանի ֆունկցիաները կազմում են հանրահաշիվ:

Թեորեմ 1.15.2: *$\tilde{H}(\Omega_A)$–ն կոմպլեքս հանրահաշիվ է, իսկ $f \mapsto \tilde{f}$ արտապատկերումն իզոմորֆիզմ է $H(\Omega)$ և $\tilde{H}(\Omega_A)$ հանրահաշիվների միջև: Այդ արտապատկերումն անընդհատ է հետևյալ իմաստով.*

եթե $f_n \in H(\Omega)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ և f_n–ը Ω–ի կոմպակտ ենթաբազմությունների վրա հավասարաչափ զուգամիտում է f ֆունկցիային, ապա

$$\tilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n(x) \quad (x \in \Omega_A)\,: \tag{1.15.12}$$

Եթե $u(\lambda) = \lambda$ $(\lambda \in \Omega)$ և $v(\lambda) = 1$ $(\lambda \in \Omega)$, ապա ցանկացած $x \in \Omega_A$ համար $\tilde{u}(x) = x$ և $\tilde{v}(x) = e$:

Ապացույց: Վերջին պնդումը բխում է թեորեմ 1.15.1–ից: (1.15.10) ինտեգրալ ներկայացումից ակնհայտորեն բխում է, որ $f \mapsto \tilde{f}$ արտապատկերումը գծային է: Եթե $\tilde{f} = 0$, ապա

$$f(\alpha)e = \tilde{f}(\alpha e) = 0 \quad (\alpha \in \Omega),$$

ուստի $f = 0$: Հետևաբար, $f \mapsto \tilde{f}$ արտապատկերումը փոխմիարժեք է:

Անընդհատության վերաբերյալ պնդումն ապացուցելու համար բոլոր f_n–երի համար (1.15.10)–ում պետք է վերցնել միևնույն Γ կոնտուրը և օգտվել ինտեգրալի գնահատականից ու Γ կոնտուրի վրա $\left\|(\lambda e - x)^{-1}\right\|$ մեծության սահմանափակությունից:

Մնում է ապացուցել, որ $f \mapsto \tilde{f}$ արտապատկերումը մուլտիպլիկատիվ է: Ավելի ճիշտ, պետք է ցույց տալ, որ եթե $f, g \in H(\Omega)$ և $h(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda)$ $(\lambda \in \Omega)$, ապա

$$\tilde{h}(x) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(x) \quad (x \in \Omega_A) : \tag{1.15.13}$$

Եթե f–ը և g–ն Ω–ում բևեռներ չունեցող ռացիոնալ ֆունկցիաներ են և $h = fg$, ապա $h(x) = f(x)g(x)$ (այստեղ $f(x)$–ը և $g(x)$–ը սահմանվում են այնպես, ինչպես թեորեմ 1.15.1–ում, իսկ նշված հավասարությունը ստուգվում է անմիջականորեն): Ըստ թեորեմ 1.15.1–ի՝ Ω–ում բևեռներ չունեցող յուրաքանչյուր R ռացիոնալ ֆունկցիայի համար $R(x) = \tilde{R}(x)$, ուստի դիտարկվող դեպքում (1.15.13)–ն ապացուցված է: Ընդհանուր դեպքը Ռունգեի թեորեմի միջոցով բերվում է արդեն դիտարկված դեպքին: Ըստ Ռունգեի թեորեմի՝ f և g ֆունկցիաները կարելի է Ω–ի կոմպակտ ենթաբազմությունների վրա հավասարաչափ մոտարկել f_n և g_n ռացիոնալ ֆունկցիաների հաջորդականություններով: Այդ դեպքում $f_n g_n$ հաջորդականությունը նույն իմաստով կզուգամիտի h–ին, և քանի որ $f \mapsto \tilde{f}$ արտապատկերումը վերը նշված իմաստով անընդհատ է, ուստի ընդհանուր դեպքում (1.15.13)–ը կստացվի սահմանային անցումով:

Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն 1.15.1: Նկատենք, որ $\tilde{H}\left(\Omega_A\right)$ հանրահաշիվը կոմուտատիվ է, քանի որ կոմուտատիվ է նրան իզոմորֆ $H(\Omega)$ հանրահաշիվը: Այլ կերպ ասած, յուրաքանչյուր $x \in \Omega_A$ համար $\tilde{f}(x)$–ը և $\tilde{g}(x)$–ը տեղափոխելի են: Սակայն $\tilde{f}(x)$–ը և $\tilde{f}(y)$–ը, ընդհանրապես ասած, կարող են տեղափոխելի չլինել: ►

Թեորեմ 1.15.3: *Դիցուք $x \in \Omega_A$ և $f \in H(\Omega)$:*
1) $\tilde{f}(x)$ էլեմենտը A–ում հակադարձելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ $f(\lambda) \neq 0$ $(\lambda \in \sigma(x))$,
2) $\sigma\left(\tilde{f}(x)\right) = f\left(\sigma(x)\right)$ (սպեկտրների արտապատկերման մասին թեորեմ):

Ապացույց: 1) Եթե $f(\lambda) \neq 0$ $(\lambda \in \sigma(x))$, ապա $g = \dfrac{1}{f}$ ֆունկցիան անալիտիկ է ինչ–որ Ω_1 բաց բազմության վրա, որտեղ $\sigma(x) \subset \Omega_1 \subset \Omega$: Քանի որ $f(\lambda)g(\lambda) = 1$ $(\lambda \in \Omega_1)$, ուստի նախորդ թեորեմից բխում է, որ $\tilde{f}(x)\tilde{g}(x) = e$ և հետևաբար $\tilde{f}(x) \in A^{-1}$: Հակառակը, եթե ինչ–որ $\alpha \in \sigma(x)$ համար $f(\alpha) = 0$, ապա գոյություն ունի այնպիսի $h \in H(\Omega)$ ֆունկցիա, որ

$$(\lambda - \alpha)h(\lambda) = f(\lambda) \quad (\lambda \in \Omega),$$

որտեղից և նախորդ թեորեմից ստանում ենք

$$(x - \lambda e)\tilde{h}(x) = \tilde{f}(x) = \tilde{h}(x)(x - \alpha e) : \tag{1.15.14}$$

Քանի որ $x - \alpha e \notin A^{-1}$, ուստի (1.15.14)–ից բխում է, որ $\tilde{f}(x) \notin A^{-1}$:
2) Ֆիքսենք որևէ $\beta \in \mathbb{C}$: Ըստ սահմանման, $\beta \in \sigma\left(\tilde{f}(x)\right)$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\tilde{f}(x) - \beta e \notin A^{-1}$: $f - \beta$ ֆունկցիայի վրա կիրառելով 1) պնդումը՝ ստանում ենք, որ $\tilde{f}(x) - \beta e \notin A^{-1}$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $f - \beta$ ֆունկցիան $\sigma(x)$–ի վրա ունի զրո, այսինքն՝ $\beta \in f(\sigma(x))$:
Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 1.15.4 (թեորեմ բարդ ֆունկցիայի վերաբերյալ)**:** *Դիցուք $x \in \Omega_A$, $f \in H(\Omega)$, Ω_1–ը $f(\sigma(x))$–ը պարունակող բաց բազմություն է, $\Omega_0 = \{\lambda \in \Omega : \ f(\lambda) \in \Omega_1\}$, $g \in H(\Omega_1)$ և $h(\lambda) = g\left(f(\lambda)\right)$*

$(\lambda \in \Omega_0)$: *Այդ դեպքում* $\tilde{f}(x) \in \Omega_{1,A}$ *և* $\tilde{h}(x) = \tilde{g}\left(\tilde{f}(x)\right)$ *(կարճ ասած, եթե* $h = g \circ f$, *ապա* $\tilde{h} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$*)*:

Ապացույց: Թեորեմ 1.15.3–ի 2) պնդումից բխում է, որ $\sigma\left(\tilde{f}(x)\right) \subset \Omega_1$, ուստի $\tilde{g}\left(\tilde{f}(x)\right)$-ը սահմանված է կոռեկտ:

Փիքսենք որևէ Γ_1 կոնտուր, որն ընդգրկում է $f(\sigma(x))$–ը Ω_1–ում: Գոյություն ունի այնպիսի W բաց բազմություն, որ $\sigma(x) \subset W \subset \Omega_0$ և

$$Ind_{\Gamma_1}(f(\lambda)) = 1 \quad (\lambda \in W): \tag{1.15.15}$$

Փիքսենք որևէ Γ_0 կոնտուր, որն ընդգրկում է $\sigma(x)$–ը W–ում: Եթե $t \in \Gamma_1$, ապա $\dfrac{1}{t-f} \in H(W)$: Ուստի թեորեմ 1.15.2–ը (որում որպես Ω պետք է վերցնել W–ն) ցույց է փալիս, որ $t \in \Gamma_1$ համար

$$\left[te - \tilde{f}(x)\right]^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0} [t - f(\lambda)]^{-1}(\lambda e - x)^{-1} d\lambda: \tag{1.15.16}$$

Քանի որ Γ_1 կոնտուրը ընդգրկում է $\sigma\left(\tilde{f}(x)\right)$–ը Ω_1–ում, ուստի, օգտվելով (1.15.15), (1.15.16)–ից, վերջնականապես ստանում ենք

$$\tilde{g}\left(\tilde{f}(x)\right) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} g(t)\left[te - \tilde{f}(x)\right]^{-1} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} g(t)\,[t - f(\lambda)]^{-1}\, dt\,(\lambda e - x)^{-1} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0} g\left(f(\lambda)\right)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0} h(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda = \tilde{h}(x):$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Այժմ մենք կբերենք կառուցված ֆունկցիոնալ հաշվի որոշ կիրառություններ: Սկզբում խոսքը կգնա արմատների և լոգարիթմի գոյության մասին: Ասում են, որ $x \in A$ էլեմենտն ունի m աստիճանի արմատ, եթե $\exists y \in A$ այնպես, որ $y^m = x$: Եթե $\exists y \in A$, այնպես, որ $x = \exp(y)$, ապա y–ը կոչվում է x–ի լոգարիթմ:

Նշենք, որ § 1.3–ում մեր տված էքսպոնենտի սահմանումը շարքի միջոցով համարժեք է (1.15.10)–ի միջոցով տրվող սահմանմանը: Իրոք, դիցուք $f(z) = e^z$ $(z \in \mathbb{C})$: Քանի որ $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{z^k}{k!}$ մասնակի գումարները $n \to \infty$ դեպքում $\mathbb{C}$–ի կոմպակտ ենթաբազմությունների վրա հավասարաչափ զուգամիտում են $f(z)$–ին, ուստի թեորեմ 1.15.2–ից բխում է, որ $\tilde{f}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ $(x \in A)$: Պարզ է, որ ասվածը ուժի մեջ է մնում e^z–ը կամայական ամբողջ ֆունկցիայով փոխարինելու դեպքում:

Թեորեմ 1.15.5: *Դիցուք A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, $x \in A$ և x էլեմենտի $\sigma(x)$ սպեկտրը չի անջատում 0–ն և ∞–ը (այսինքն՝ 0 կետը պատկանում է սպեկտրի լրացման անսահմանափակ կոմպոնենտին): Այդ դեպքում՝*

1) x էլեմենտն A–ում ունի ցանկացած աստիճանի արմատ,

2) x էլեմենտն A–ում ունի լոգարիթմ,

3) $\forall \varepsilon > 0$ համար գոյություն ունի այնպիսի P բազմանդամ, որ $\left\|x^{-1} - P(x)\right\| < \varepsilon$:

Բացի դրանից, եթե $\sigma(x) \subset (0, \infty)$, ապա 1)–ում x–ի արմատները կարելի է ընտրել այնպես, որ դրանք լինեն նմանատիպ հատկությամբ օժտված էլեմենտներ:

Ապացույց: Քանի որ 0 կետը պատկանում է $\sigma(x)$–ի լրացման անսահմանափակ կոմպոնենտին, ուստի գոյություն ունի ինչ–որ $\Omega \supset \sigma(x)$ միակապ տիրույթում անալիտիկ f ֆունկցիա՝ այնպես, որ

$$\exp(f(\lambda)) = \lambda :$$

Թեորեմ 1.15.4–ից բխում է, որ $\exp\left(\tilde{f}(x)\right) = x$, ուստի $y = \tilde{f}(x)$ հանդիսանում է x–ի լոգարիթմ: Դիցուք $z = \exp\left(\dfrac{y}{m}\right)$: Այդ դեպքում $z^m = x$: Եթե $\sigma(x) \subset (0, \infty)$, ապա f–ը կարելի է ընտրել այնպես, որ այն $\sigma(x)$–ի վրա լինի իրական: Ըստ սպեկտրների արտա–

պատկերման մասին թեորեմի՝ դիտարկվող դեպքում $\sigma(y) \subset \mathbb{R}$: Նորից կիրառելով սպեկտրների արտապատկերման մասին թեորեմը՝ ստանում ենք, որ $\sigma(z) \subset (0, \infty)$: Սրանով իսկ թեորեմի 1), 2) պնդումները և վերջին պնդումն ապացուցված են:

3) պնդումն ապացուցելու համար նկատենք, որ $\dfrac{1}{\lambda}$ ֆունկցիան անալիտիկ է $\sigma(x)$–ը պարունակող ինչ–որ միակապ տիրույթում, ուստի, ըստ Ռունգեի թեորեմի, $\dfrac{1}{\lambda}$ ֆունկցիան նշված տիրույթի կոմպակտ ենթաբազմությունների վրա կարելի է հավասարաչափ մոտարկել բազմանդամներով, որտեղից և թեորեմ 1.15.2–ի անընդհատության պնդումից էլ բխում է 3)–ը:
Թեորեմն ապացուցված է:

Բերված արդյունքները տրիվիալ չեն նույնիսկ վերջավոր չափանի A հանրահաշվի դեպքում: Օրինակ, թեորեմ 1.15.5–ի 2) պնդումից բխում է, որ n–րդ կարգի M քառակուսային մատրիցն ունի լոգարիթմ այն և միայն այն դեպքում, երբ 0–ն չի հանդիսանում M–ի սեփական արժեք, այսինքն՝ երբ M մատրիցը հակադարձելի է:

Սահմանում 1.15.2: A բանախյան հանրահաշվի p էլեմենտը կոչվում է իդեմպոտենտ, եթե $p^2 = p$:

Ակնհայտ է, որ 0–ն և e–ն իդեմպոտենտներ են:

Սահմանում 1.15.3: p իդեմպոտենտը կոչվում է ոչ տրիվիալ, եթե $p \neq 0$ և $p \neq e$:

Թեորեմ 1.15.6: *1) Դիցուք A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, $x \in A$, P–ն մի փոփոխականից բազմանդամ է և $P(x) = 0$: Այդ դեպքում $\sigma(x)$–ը ընկած է P բազմանդամի զրոների բազմության մեջ:*
2) Եթե p–ն իդեմպոտենտ է, ապա $\sigma(x) \subset \{0, 1\}$:

Ապացույց: 1) Ըստ սպեկտրների արտապատկերման մասին թեորեմի՝

$$P(\sigma(x)) = \sigma(P(x)) = \sigma(0) = \{0\},$$

որտեղից էլ բխում է 1) պնդումը: 1) պնդման մեջ վերցնելով $P(z) = z^2 - z$, կստանանք 2) պնդումը:
Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 1.15.7: *Դիցուք* $\sigma(a) = \bigcup\limits_{j=1}^{n} E_j$, *որտեղ* $E_1, E_2, \ldots, E_n$*-ը* $\mathbb{C}$ *կոմպլեքս հարթության զույգ առ զույգ չհատվող ոչ դատարկ կոմպակտ ենթաբազմություններ են* ($n \geqslant 2$)*: Այդ դեպքում գոյություն ունեն* $p_1, \ldots, p_n$ *ոչ տրիվիալ իդեմպոտենտներ, որոնք պատկանում են* $\left\{(ze-a)^{-1} : z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a)\right\}$ *բազմության գծային թաղանթի փակմանը, այնպես, որ*

$$e = p_1 + \cdots + p_n,$$

$$p_k p_j = 0 \quad (k \neq j) :$$

Ավելին, եթե $E_j = \{\xi_j\}$, *ապա* $\sigma(ap_j) = \{\xi_j, 0\}$, *և* $ap_j - \xi_j p_j$*-ն քվազինիլպոտենտ է (այսինքն՝* $\rho(ap_j - \xi_j p_j) = 0$*):*

Ապացույց: Դիցուք $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$-ը համապատասխանաբար $E_1, \ldots, E_n$–ը պարունակող, զույգ առ զույգ չհատվող բաց բազմություններ են: Դիցուք $\Omega = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \Omega_k$ և $f_k : \Omega \to \mathbb{C}$ ֆունկցիան որոշվում է

$$f_k(z) = \begin{cases} 1, & z \in \Omega_k \\ 0, & z \in \Omega \setminus \Omega_k \end{cases}$$

բանաձևով: Այդ դեպքում $f_k \in H(\Omega)$ և $f_k^2 = f_k$: Դիցուք $p_k = \tilde{f}_k(a)$: Այդ դեպքում $p_k^2 = p_k$ և p_k-ն պատկանում է $\left\{(ze-a)^{-1} : z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a)\right\}$ բազմության գծային թաղանթի փակմանը: Քանի որ $\sigma(p_k) = \sigma\left(\tilde{f}_k(a)\right) = f_k(\sigma(a)) = \{0, 1\}$, ուստի $p_k \neq 0, e$: Քանի որ $f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_k(z) = 1 \quad (z \in \Omega)$ և $f_k(z) f_j(z) = 0 \ \ (z \in \Omega,\, k \neq j)$, ուստի

$$e = p_1 + p_2 + \cdots + p_n \quad \text{և} \quad p_k p_j = 0 \quad (k \neq j) :$$

Դիցուք $E_j = \{\xi_j\}$, իսկ $g, h : \Omega \to \mathbb{C}$ ֆունկցիաները որոշվում են

$$g(z) = (z - \xi_j) f_j(z), \quad h(z) = z f_j(z)$$

բանաձևերով: Ունենք $\sigma(ap_j) = \sigma\left(\tilde{h}(a)\right) = h(\sigma(a)) = \{\xi_j, 0\}$: Պարզ է, որ եթե $z \in \sigma(a)$, ապա $g(z) = 0$: Ուստի $\sigma\left(\tilde{g}(a)\right) = g(\sigma(a)) = \{0\}$: Բայց $\tilde{g}(a) = ap_j - \xi_j p_j$, հետևաբար $\rho\left(ap_j - \xi_j p_j\right) = 0$:
Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք 1.15.1: *Եթե A հանրահաշվում գոյություն ունի չկապակցված սպեկտրով էլեմենտ, ապա A–ն պարունակում է ոչ տրիվիալ իդեմպոտենտ:* ▶

Թեորեմ 1.15.8: *Դիցուք f–ը պարզ զրոներով ամբողջ ֆունկցիա է, $f(0) \neq 0$, $a \in A$ և $\tilde{f}(a) = 0$: Այդ դեպքում $\sigma(a) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_q\}$, որտեղ $f(\lambda_j) = 0$ $(j = 1, \ldots, q)$,*

$$(a - \lambda_1 e)\,(a - \lambda_2 e) \cdots (a - \lambda_q e) = 0,$$

և գոյություն ունեն այնպիսի $p_1, \ldots, p_q$ ոչ տրիվիալ իդեմպոտենտներ, որոնք պատկանում են $\left\{(ze - a)^{-1} : z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a)\right\}$ բազմության գծային թաղանթի փակմանը և

$$e = p_1 + \cdots + p_q,$$

$$p_k p_j = 0 \quad (k \neq j),$$

$$ap_j = \lambda p_j \quad (j = 1, \ldots, q):$$

Ապացույց: Սպեկտրների արտապատկերման թեորեմի շնորհիվ՝ $f(\sigma(a)) = \sigma\left(\tilde{f}(a)\right) = \{0\}$: Քանի որ $\sigma(a)$-ն կոմպակտ է, իսկ f-ն ամբողջ ֆունկցիա է, ուստի $\sigma(a)$ բազմությունը վերջավոր է, և հետևաբար, $\sigma(a) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_q\}$, որտեղ $f(\lambda_j) = 0$ $(j = 1, \ldots, q)$: Ըստ թեորեմ 1.15.7–ի՝ գոյություն ունեն ոչ տրիվիալ $p_1, \ldots, p_q$ իդեմպոտենտներ, այնպիսիք, որ $\sigma(a_j) = \{0\}$ $(j = 1, \ldots, q)$, որտեղ $a_j = ap_j - \lambda_j p_j$: $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ֆունկցիան սահմանենք

$$g(z) = \begin{cases} (z - \lambda_1)^{-1} \cdots (z - \lambda_q)^{-1} f(z), & z \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_q\}, \\ f'(\lambda_j) \prod\limits_{k \neq j} (\lambda_j - \lambda_k)^{-1}, & z = \lambda_j \quad (j = 1, \ldots, q) \end{cases}$$

բանաձևով: Այդ դեպքում g-ն ամբողջ ֆունկցիա է, $g(z) \neq 0$ $(z \in \sigma(a))$ և հետևաբար՝ $0 \notin \sigma\left(\tilde{g}(a)\right)$: Քանի որ

$$g(z)(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_q) = f(z) \quad (z \in \mathbb{C}),$$

ուստի

$$\tilde{g}(a)(a-\lambda_1 e)\cdots(a-\lambda_q e) = \tilde{f}(a) = 0:$$

Բայց քանի որ $\tilde{g}(a) \in A^{-1}$, ուստի $(a-\lambda_1 e)\cdots(a-\lambda_q e) = 0$: Դիցուք $Q(z) = (z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_q)$ $(z \in \mathbb{C})$: Քանի որ $p_1^2 = p_1$, ուստի $p_1^q = p_1$, հետևաբար

$$p_1 Q(ap_1) = p_1(ap_1-\lambda_1 e)\cdots(ap_1-\lambda_q e) =$$

$$= p_1(ap_1-\lambda_1 e)\cdots p_1(ap_1-\lambda_q e) =$$

$$= (ap_1-\lambda_1 p_1)\cdots(ap_1-\lambda_q p_1) = p_1^q Q(a) = 0:$$

Բայց $p_1(ap_1-\lambda_1 e) = ap_1-\lambda_1 p_1 = a_1$, հետևաբար

$$a_1(ap_1-\lambda_2 e)\cdots(ap_1-\lambda_q e) = 0: \tag{1.15.17}$$

Թեորեմ 1.15.7–ի շնորհիվ $\sigma(ap_1) = \{\lambda_1, 0\}$, որտեղից և սպեկտրների արտապատկերման թեորեմից բխում է, որ $j = 2,\ldots,q$ համար $\sigma\left(ap_1-\lambda_j e\right) = \{\lambda_1-\lambda_j, -\lambda_j\}$, և հետևաբար $ap_1-\lambda_j e \in A^{-1}$: Այստեղից և (1.15.17)-ից բխում է, որ $a_1 = 0$: Նման ձևով կստանանք, որ $a_2 = \cdots = a_q = 0$:
Թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում 1.15.4: $T \in BL(X)$ օպերատորի կետային սպեկտր է կոչվում T օպերատորի սեփական արժեքների բազմությունը:

T օպերատորի կետային սպեկտրը նշանակվում է $\sigma_p(T)$ սիմվոլով: $A = BL(X)$ դեպքում սպեկտրների արտապատկերման մասին թեորեմը թույլ է տալիս այսպիսի ճշգրտում:

Թեորեմ 1.15.9: *Դիցուք $T \in BL(X)$, Ω–ն $\mathbb{C}$–ում բաց բազմություն է, $\sigma(T) \subset \Omega$ և $f \in H(\Omega)$: Այդ դեպքում*
1) եթե $x \in X$, $\alpha \in \Omega$ և $Tx = \alpha x$, ապա $\tilde{f}(T)x = f(\alpha)x$,
2) $f\left(\sigma_p(T)\right) \subset \sigma_p\left(\tilde{f}(T)\right)$,

3) եթե $\alpha \in \sigma_p\left(\tilde{f}(T)\right)$ և $f - \alpha$ ֆունկցիան Ω բազմության կոմպոնենտներից ոչ մեկում նույնաբար զրո չի դառնում, ապա $\alpha \in f\left(\sigma_p(T)\right)$,
4) եթե f ֆունկցիան Ω բազմության կոմպոնենտներից ոչ մեկում հաստատուն չէ, ապա $f\left(\sigma_p(T)\right) = \sigma_p\left(\tilde{f}(T)\right)$:

Ապացույց: 1) $x = 0$ դեպքում պնդումն ակնհայտ է: Դիցուք $x \neq 0$ և $Tx = \alpha x$: Այդ դեպքում $\alpha \in \sigma(T)$: Գոյություն ունի այնպիսի $g \in H(\Omega)$ ֆունկցիա, որ

$$f(\lambda) - f(\alpha) = g(\lambda)(\lambda - \alpha) \quad (\lambda \in \Omega) : \tag{1.15.18}$$

(1.15.18)–ից և թեորեմ 1.15.2–ից բխում է, որ

$$\tilde{f}(T) - f(\alpha)I = \tilde{g}(T)(T - \alpha I) : \tag{1.15.19}$$

(1.15.19)–ից և $(T - \alpha I)x = 0$ հավասարությունից էլ բխում է 1) պնդումը:

Այսպիսով, եթե α–ն T օպերատորի սեփական արժեք է, ապա $f(\alpha)$–ն $\tilde{f}(T)$ օպերատորի սեփական արժեք է: Ուստի 2) պնդումը բխում է 1)–ից:

Եթե տեղի ունեն 3)–ի պայմանները, ապա

$$\alpha \in \sigma_p\left(\tilde{f}(T)\right) \subset \sigma\left(\tilde{f}(T)\right) = f\left(\sigma(T)\right), \tag{1.15.20}$$

ուստի

$$f^{-1}(\alpha) \cap \sigma(T) \neq \emptyset : \tag{1.15.21}$$

Եթե s–ը $f^{-1}(\alpha) \cap \sigma(T)$ բազմության կուտակման կետ է, ապա այն կլինի կուտակման կետ նաև $\sigma(T)$–ի համար, և քանի որ $\sigma(T)$–ն կոմպակտ է, կստանանք $s \in \sigma(T) \subset \Omega$: Ստացվեց, որ $f - \alpha$ ֆունկցիայի զրոների բազմությունն ունի Ω–ին պատկանող կուտակման կետ: Ըստ միակության թեորեմի՝ $f - \alpha$ ֆունկցիան Ω բազմության՝ s–ը պարունակող կոմպոնենտի վրա նույնաբար դառնում է զրո, ինչը հակասում է պայմանին: Հետևաբար, $f^{-1}(\alpha) \cap \sigma(T)$ բազմությունը կուտակման կետ չունի: Քանի որ $f^{-1}(\alpha) \cap \sigma(T)$

բազմությունը սահմանափակ է, ուստի այն վերջավոր է: Դիցուք $\sigma(T)$–ում $f-\alpha$ ֆունկցիայի զրոներն են $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ թվերը, ընդ որում յուրաքանչյուր զրո վերցվում է այնքան անգամ, որքան իր պատիկությունն է: Այդ դեպքում գոյություն ունի այնպիսի $g \in H(\Omega)$ ֆունկցիա, որը $\sigma(T)$–ի վրա զրոներ չունի և

$$f(\lambda)-\alpha = g(\lambda)(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n): \tag{1.15.22}$$

Կունենանք

$$\tilde{f}(T)-\alpha I = \tilde{g}(T)(T-\lambda_1 I)\cdots(T-\lambda_n I): \tag{1.15.23}$$

Թեորեմ 1.15.3–ի 1) պնդումից բխում է, որ $\tilde{g}(T)$ էլեմենտը հակադարձելի է $BL(X)$–ում: Մյուս կողմից, ըստ պայմանի, α–ն $\tilde{f}(T)$ օպերատորի սեփական արժեք է, ուստի $\ker\left(\tilde{f}(T)-\alpha I\right) \neq \{0\}$, որտեղից և (1.15.23)–ից բխում է, որ $T-\lambda_i I$ օպերատորներից գոնե մեկի համար $\ker(T-\lambda_i I) \neq \{0\}$: Այդպիսի օպերատորին համապատասխան λ_i կետն ընկած կլինի $\sigma_p(T)$–ում: Հաշվի առնելով, որ $f(\lambda_i)=\alpha$, ստանում ենք $\alpha \in f\left(\sigma_p(T)\right)$:
4) պնդումն անմիջապես բխում է 2), 3) պնդումներից:
Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն 1.15.2: Նկատենք, որ նախորդ թեորեմի 3) և 4) պնդումներում f–ի վրա դրվող լրացուցիչ պայմանն էական է: Իրոք, դիցուք $X=C[0,1]$, $f(\lambda)\equiv 0$ և $(Tx)(t)=\int\limits_0^t x(s)\,ds$: Այդ դեպքում հեշտ է տեսնել, որ $\sigma_p(T)=\emptyset$, բայց $\sigma_p\left(\tilde{f}(T)\right)=\{0\}\neq\emptyset$: ►

Գլուխ 2
ԿՈՄՈՒՏԱՏԻՎ ԲԱՆԱԽՅԱՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎՆԵՐ

§ 2.1. Իդեալներ և հոմոմորֆիզմներ

Այսուհետև կենթադրենք, որ A բանախյան հանրահաշիվը կոմուտատիվ է՝

$$xy = yx \quad (\forall x, y \in A):$$

Դիցուք $J \subset A$ իդեալ է՝ $AJ \subset J$ (քանի որ A–ն կոմուտատիվ է, ուստի $AJ \subset J$ և $JA \subset J$ առնչությունները տեղի ունեն միաժամանակ): Այդ դեպքում ակնհայտ է, որ $\overline{J}$–ը ևս կլինի իդեալ:

Նկատենք, որ եթե $J \subset A$ իդեալը սեփական է, ապա

$$J \cap A^{-1} = \varnothing: \tag{2.1.1}$$

Իրոք, եթե ենթադրենք հակառակը՝ $\exists b \in A^{-1} \cap J$, ապա $\forall a \in A$ համար կունենանք

$$a = ab^{-1} \cdot b \in ab^{-1} \cdot J \subset AJ \subset J,$$

ուստի $A = J$ և հետևաբար J իդեալը սեփական չէ:

Լեմմա 2.1.1: *Եթե $J \subset A$ սեփական իդեալ է, ապա $\overline{J}$–ը ևս կլինի սեփական իդեալ:*

Ապացույց: Ունենք $\{0\} \neq J \subset \overline{J}$, ուստի $\overline{J} \neq \{0\}$, և մնում է համոզվել, որ $\overline{J} \neq A$: Դրա համար նկատենք, որ

$$\overline{J} \cap A^{-1} = \varnothing:$$

Իսկապես, վերցնենք $\forall a \in A^{-1}$ և ցույց տանք, որ $a \notin \overline{J}$: Քանի որ A^{-1}–ը բաց է, ուստի $\exists \delta > 0$, որ

$$B(a, \delta) \subset A^{-1}:$$

Ունենք $A^{-1} \cap J = \emptyset$, ուստի

$$B(a,\delta) \cap J = \emptyset :$$

Ստացվեց, որ գոյություն ունի a–ի այնպիսի $B(a,\delta)$ շրջակայք, որը չի պարունակում J–ի կետեր, ուստի $a \notin \overline{J}$:
Լեմման ապացուցված է:

Թեորեմ 2.1.1: *Ճիշտ են հետևյալ պնդումները՝*

ա) ցանկացած $J \subset A$ սեփական իդեալ պարունակվում է գոնե մի մաքսիմալ իդեալում,

բ) ցանկացած $J \subset A$ մաքսիմալ իդեալ փակ է:

Ապացույց:

ա) Դիցուք $J \subset A$ սեփական իդեալ է: $\mathcal{P}$–ով նշանակենք A հանրահաշվի այն բոլոր սեփական իդեալների ընտանիքը, որոնք պարունակում են J–ն: $\mathcal{P}$ ընտանիքը ըստ պարունակման մասնակի կարգավորված բազմություն է (կասենք $J_1 \leqslant J_2$, եթե $J_1 \subset J_2$): Դիցուք $Q = \{J_\alpha\}$ $\mathcal{P}$–ում կամայական գծորեն կարգավորված են–թաընտանիք է: Նշանակենք

$$I = \bigcup_\alpha J_\alpha :$$

Օգտվելով նրանից, որ Q–ն գծորեն կարգավորված է, հեշտությամբ նկատում ենք, որ I–ն կլինի A–ի իդեալ: Քանի որ J_α–երից ոչ մեկը չի պարունակում A հանրահաշվի e միավորը, ուստի $e \notin I$, և հե–տևաբար I–ն կլինի սեփական իդեալ և կհանդիսանա Q–ի համար վերին եզր: Ըստ Ցորնի լեմմայի՝ $\mathcal{P}$–ում կա մաքսիմալ էլեմենտ, որն էլ հենց կհանդիսանա J–ն պարունակող մաքսիմալ իդեալ:

բ)-ն անմիջապես բխում է 2.1.1 լեմմայից:

Թեորեմն ապացուցված է:

$\mathcal{M}_A$–ով կնշանակենք A կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշվի բոլոր ոչ 0–ական մուլտիպլիկատիվ ֆունկցիոնալների բազմությունը: Ինչպես գիտենք՝

$$\mathcal{M}_A \subset \mathcal{P}(A) = \{\varphi \in A^* : \ \|\varphi\| = \varphi(e) = 1\} :$$

Հետագայում մենք ցույց կտանք, որ $\mathcal{M}_A$–ի կետերը $\mathcal{P}(A)$–ի զագաթային կետեր են:

Խնդիր 1: Ցույց տալ, որ $\mathcal{M}_A$-ն A^*-ում գծորեն անկախ վեկտորական համակարգ է:

$\mathcal{M}_A$–ին անվանում են մաքսիմալ իդեալների տարածություն (այն երբեմն նշանակում են նաև Δ–ով): $\mathcal{M}_A$–ն, իհարկե, գծային տարածություն չէ, սակայն հետագայում մենք կտեսնենք, թե ինչպես կարելի է $\mathcal{M}_A$–ում մտցնել տոպոլոգիա, որից հետո արդարացված կլինի $\mathcal{M}_A$–ին տարածություն անվանելը: Թե ինչու $\mathcal{M}_A$–ն կոչվում է հենց մաքսիմալ իդեալների տարածություն, պարզ է դառնում հետևյալ թեորեմից:

Թեորեմ 2.1.2: *Ճիշտ են հետևյալ պնդումները՝*

1) A հանրահաշվի յուրաքանչյուր m մաքսիմալ իդեալ որևէ $\varphi \in \mathcal{M}_A$ հոմոմորֆիզմի միջուկ է ($m = \ker(\varphi)$),

2) $\forall \varphi \in \mathcal{M}_A$ հոմոմորֆիզմի $\ker(\varphi)$ միջուկը A հանրահաշվի մաքսիմալ իդեալ է,

3) $A^{-1} = \{a \in A : \varphi(a) \neq 0, \forall \varphi \in \mathcal{M}_A\}$,

4) որպեսզի $a \in A^{-1}$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ a–ն չպատկանի A–ի ոչ մի սեփական իդեալ,

5) $\sigma(a) = \{\varphi(a) : \varphi \in \mathcal{M}_A\}$:

Ապացույց:

1) Դիցուք $x \in A \setminus m$: Նշանակենք

$$J = \{ax + y : \, a \in A, \, y \in m\} :$$

Ակնհայտորեն J–ն իդեալ է և պարունակում է m–ը: Քանի որ $x \in J \setminus m$, ուստի $m \neq J$, իսկ m–ի մաքսիմալության պատճառով $J = A$: Հետևաբար $\exists a \in A$, $\exists y \in m$, որ

$$ax + y = e :$$

Ըստ նախորդ թեորեմի՝ m–ը փակ է, ուստի A/m ֆակտորը բանախյան հանրահաշիվ է: Դիտարկենք

$$\pi_m : \, A \to A/m$$

ֆակտոր–արտապատկերումը (որը ամեն մի $x \in A$ էլեմենտին հա–մապատասխանեցնում է $x+m$ հարակից դասը)։ Կունենանք

$$\pi_m(e) = \pi_m(ax+y) = \pi_m(ax) + \pi_m(y) =$$

$$= \pi_m(a)\pi_m(x) + \pi_m(y) = \pi_m(a)\pi_m(x)$$

(քանի որ $y \in m$, ուստի $\pi_m(y)$–ը A/m–ի 0–ն է), և քանի որ, A–ի կոմուտատիվության շնորհիվ, $\pi_m(a)\pi_m(x) = \pi_m(x)\pi_m(a)$, իսկ $\pi_m(e)$–ն A/m–ի միավորն է, ուստի ստացվում է, որ $\pi_m(x)$–ը A/m–ում հակադարձելի է։ Քանի որ A/m–ի բոլոր ոչ զրոյական էլեմենտներն ունեն $\pi_m(x)$ տեսքը, որտեղ $x \in A \setminus m$, ուստի ստաց–վեց, որ A/m–ի բոլոր ոչ զրոյական էլեմենտները հակադարձելի են։ Ըստ Գելֆանդ–Մազուրի թեորեմի՝ գոյություն ունի $j : A/m \to \mathbb{C}$ իզոմորֆիզմ։ Վերցնենք

$$\varphi = j \circ \pi = j\left(\pi(\cdot)\right) :$$

Այդ դեպքում ակնհայտ է, որ φ–ն կլինի մուլտիպլիկատիվ ֆունկցիո–նալ և $m = \ker(\varphi)$։

2) Դիցուք $\varphi \in \mathcal{M}_A$։ Նշանակենք

$$m = \ker(\varphi) = \varphi^{-1}(0) :$$

Հեշտ է տեսնել, որ m–ը A–ի իդեալ է։ Ցույց տանք, որ m–ը մաքսիմալ է։ Դրա համար ցույց տանք, որ եթե J–ն m–ը պարունակող և m–ից տարբեր իդեալ է, ապա $J = A$։ Իրոք, քանի որ $m \subset J$ և $m \neq J$, ուստի $\exists x_0 \in J \setminus m$։ Քանի որ $x_0 \notin m = \ker(\varphi)$, ուստի $\varphi(x_0) \neq 0$։ Դիտարկենք

$$y = -\frac{\varphi(e)}{\varphi(x_0)}\, x_0 + e$$

էլեմենտը։ Կունենանք

$$\varphi(y) = -\frac{\varphi(e)}{\varphi(x_0)}\, \varphi(x_0) + \varphi(e) = 0,$$

ուստի $y \in \ker(\varphi) = m \subset J$: Քանի որ նաև $\dfrac{\varphi(e)}{\varphi(x_0)} x_0 \in J$, ուստի կունենանք

$$e = y + \frac{\varphi(e)}{\varphi(x_0)} x_0 \in J$$

և (2.1.1)–ից կբխի, որ $J = A$:

3) Ըստ 1.4.1 լեմմայի, $\forall a \in A^{-1}$ և $\forall \varphi \in \mathcal{M}_A$ համար $\varphi(a) \neq 0$: Այժմ հակառակը՝ դիցուք $a \in A$ այնպիսին է, որ $\varphi(a) \neq 0$ $(\forall \varphi \in \mathcal{M}_A)$: Ցույց տանք, որ $a \in A^{-1}$: Ենթադրենք հակառակը՝ $a \notin A^{-1}$: Դիտարկենք

$$J = \{ax : \ x \in A\}$$

բազմությունը: Հեշտ է տեսնել, որ J–ն A-ի իդեալ է: Քանի որ $\varphi(a) \neq 0$ $(\forall \varphi \in \mathcal{M}_A)$, ուստի $a \neq 0$ և հետևաբար $J \neq \{0\}$: Քանի որ $a \notin A^{-1}$, ուստի $e \notin J$, և հետևաբար J–ն A–ի սեփական իդեալ է: Ըստ 2.1.1 թեորեմի՝ J-ն պարունակվում է մի ինչ-որ $m \subset A$ մաքսիմալ իդեալում: Ըստ 1) պնդման՝ $\exists \varphi \in \mathcal{M}_A$, այնպես, որ

$$m = \ker(\varphi) :$$

Այդ դեպքում, քանի որ $a \in J \subset m$, կունենանք

$$\varphi(a) = 0$$

ինչը կհակասի մեր ենթադրությանը:

4) Եթե $a \in A^{-1}$, ապա (2.1.1)-ից կբխի, որ a-ն չի պատկանում A-ի ոչ մի սեփական իդեալի: Այժմ հակառակը՝ դիցուք a-ն չի պատկանում A-ի ոչ մի սեփական իդեալի, ցույց տանք, որ $a \in A^{-1}$: Դրա համար, օգտվելով 3) պնդումից, ցույց տանք, որ $\forall \varphi \in \mathcal{M}_A$ համար $\varphi(a) \neq 0$: Իրոք, դիցուք $\varphi \in \mathcal{M}_A$ կամայական մուլտիպլիկատիվ ֆունկցիոնալ է: Ըստ 2) պնդման՝ $m = \ker(\varphi)$ կորիզը հանդիսանում է A-ի մաքսիմալ իդեալ: Քանի որ m-ը սեփական իդեալ է, ուստի $a \notin m$: Այսպիսով՝ $a \notin \ker(\varphi)$, ուստի $\varphi(a) \neq 0$:

5) $\lambda \in \sigma(a)$ նշանակում է, որ $\lambda e - a \notin A^{-1}$: Վերջինս, ըստ 3) պնդման, համարժեք է

$$\lambda e - a \notin \{x \in A : \ \varphi(x) \neq 0 \ (\forall \varphi \in \mathcal{M}_A)\}$$

առնչությանը, կամ որ նույնն է՝

$$\lambda e - a \in \{x \in A : \ \exists \varphi \in \mathcal{M}_A \ \ s.t. \ \varphi(x) = 0\}$$

առնչությանը: Վերջինս նշանակում է, որ $\exists \varphi \in \mathcal{M}_A$, այնպես, որ $\varphi(\lambda e - a) = 0$, ինչը $\varphi(e) = 1$ առնչության շնորհիվ կարելի է գրել $\lambda = \varphi(a)$ տեսքով:

Այսպիսով, $\lambda \in \sigma(a)$ համարժեք է նրան, որ $\exists \varphi \in \mathcal{M}_A$ այնպես, որ $\lambda = \varphi(a)$, ինչն էլ նշանակում է, որ

$$\lambda \in \{\varphi(a) : \ \varphi \in \mathcal{M}_A\} :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Օրինակ 1: Դիցուք K-ն կոմպակտ մետրիկական (կամ հաուսդորֆ–յան) տարածություն է: Դիտարկենք K-ի վրա որոշված բոլոր ան–ընդհատ կոմպլեքս արժեքանի ֆունկցիաների $C(K)$ հանրահաշիվը: Յուրաքանչյուր $x_0 \in K$ կետ ծնում է $\varphi_{x_0} : C(K) \to \mathbb{C}$ ֆունկցիոնալ՝ հետևյալ բանաձևով.

$$\varphi_{x_0}(f) = f(x_0) \quad (f \in C(K)) :$$

Դիցուք $A = C(K)$: Ակնհայտ է, որ $\forall x_0 \in K$ համար $\varphi_{x_0} \in A^*$ (φ_{x_0}-ին հաճախ անվանում են Դիրակի ֆունկցիոնալ): Բացի այդ, քանի որ $f_0(x) \equiv 1$ ֆունկցիան A-ից է (այն հանդիսանում է A-ի միավորը) և այդ ֆունկցիայի վրա $\varphi_{x_0}(f_0) = 1 \neq 0$, ուստի $\varphi_{x_0} \in \mathcal{M}_A$: Այսպիսով՝

$$\{\varphi_x : \ x \in K\} \subset \mathcal{M}_{C(K)} :$$

Ցույց տանք, որ

$$\mathcal{M}_{C(K)} = \{\varphi_x : \ x \in K\} : \tag{2.1.2}$$

Դիցուք $\varphi \in \mathcal{M}_{C(K)}$ կամայական ոչ 0-ական մուլտիպլիկատիվ ֆունկցիոնալ է, ցույց տանք, որ φ-ն ունի φ_x տեսքը: Ենթադրենք հակառակը՝

$$\varphi \neq \varphi_x \quad (\forall x \in K) :$$

Սա նշանակում է, որ $\forall x \in K$ համար $\exists g_x \in C(K)$ այնպես, որ

$$\varphi(g_x) \neq \varphi_x(g_x),$$

այսինքն՝

$$\varphi(g_x) \neq g_x(x) \quad (\forall x \in K) :$$

Քանի որ $f_0(x) \equiv 1$ ֆունկցիան $C(K)$-ի միավորն է, ուստի

$$\varphi(f_0) = 1 :$$

Կամայական $x \in K$ ֆիքսված x-ի համար f_x-ով նշանակենք հետևյալ ֆունկցիան՝

$$f_x(y) = g_x(y) - \varphi(g_x)\, f_0(y) \quad (y \in K) :$$

Կունենանք $f_x \in C(K)$, ընդ որում

$$\varphi(f_x) = \varphi\left(g_x - \varphi(g_x) f_0\right) = \varphi(g_x) - \varphi(g_x)\varphi(f_0) =$$

$$= \varphi(g_x) - \varphi(g_x) = 0$$

և

$$f_x(x) = g_x(x) - \varphi(g_x) f_0(x) = g_x(x) - \varphi(g_x) \neq 0 :$$

f_x-ի անընդհատության շնորհիվ $\forall x \in K$ համար գոյություն ունի $U_x \subset K$ բաց շրջակայք, որ

$$f_x(y) \neq 0 \quad (y \in U_x) :$$

Բայց $\{U_x\}_{x \in K}$ ընտանիքը ծածկում է K կոմպակտը, ուստի այդ ծածկույթից կարելի է անջատել վերջավոր ենթածածկույթ: Այլ կերպ ասած՝ գոյություն ունեն այնպիսի $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ կետեր, որ $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$ և

$$f_{x_i}(y) \neq 0 \quad (y \in U_{x_i}) :$$

Վերցնենք

$$h = f_{x_1}\overline{f}_{x_1} + f_{x_2}\overline{f}_{x_2} + \cdots + f_{x_n}\overline{f}_{x_n} :$$

Այդ դեպքում կունենանք $h \in C(K)$ և

$$\varphi(h) = \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(f_{x_i}\right) \varphi\left(\overline{f}_{x_i}\right) = 0 :$$

Մյուս կողմից՝

$$h = \left|f_{x_1}\right|^2 + \left|f_{x_2}\right|^2 + \cdots + \left|f_{x_n}\right|^2,$$

ուստի h-ը K-ի ոչ մի կետում 0 չի դառնում և հետևաբար՝ $h \in A^{-1}$: Վերջինս բերում է հակասության՝ նախորդ թեորեմի 3) պնդման հետ:

Սրանով իսկ (2.1.2)-ն ապացուցվեց: Քանի որ

$$\ker\left(\varphi_{x_0}\right) = \{f \in C(K): \ f(x_0) = 0\},$$

ուստի (2.1.2)-ից և նախորդ թեորեմի 1), 2) պնդումներից կբխի, որ $C(K)$-ի մաքսիմալ իդեալները հանդիսանում են

$$J_{\{x_0\}} = \{f \in C(K): \ f(x_0) = 0\} \quad (x_0 \in K)$$

բազմությունները և միայն նրանք:

Ըստ Ուրիսոնի լեմմայի՝ $C(K)$-ն անջատում է K-ի կետերը, այսինքն՝ $\forall x, y \in K$, $x \neq y$ կետերի համար $\exists f \in C(K)$ այնպես, որ $f(x) \neq f(y)$ (այն դեպքում, երբ K-ն հանդիսանում է մետրիկական տարածություն, որպես այդպիսի ֆունկցիա կարող է ծառայել $f(t) = \rho(t, y)$, $t \in K$ ֆունկցիան): Հետևաբար ամեն մի $x \in K$ կետին համապատասխանեցնելով $\varphi_x \in \mathcal{M}_{C(K)}$ ֆունկցիոնալը՝ կստանանք փոխմիարժեք (բիեկտիվ) արտապատկերում K-ից $\mathcal{M}_{C(K)}$-ի վրա: Դա թույլ է տալիս համարել, որ

$$M_{C(K)} = K : \tag{2.1.3}$$

Խնդիր 2: Դիցուք $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, իսկ $A(T)$-ն դիսկ հանրահաշիվն է: Ապացուցել, որ

$$\mathcal{M}_{A(T)} = \overline{D(0,1)} : \qquad (2.1.4)$$

Դիտողություն 2.1.1: (2.1.4)-ը համեմատելով (2.1.3)-ից բխող

$$\mathcal{M}_{C(T)} = T$$

հավասարության հետ՝ նկատում ենք, որ ենթահանրահաշվին անցնելիս մաքսիմալ իդեալների տարածությունը կարող է փոխվել: ▶

Սահմանում 2.1.1: Դիցուք A-ն բանախյան հանրահաշիվ է, և $F = \{x_\alpha\} \subset A \setminus \{e\}$ էլեմենտների գծորեն անկախ համակարգ է: Կասենք F-ը A-ի ծնիչ է, եթե $F \cup \{e\}$-ով ծնված մինիմալ փակ ենթահանրահաշիվը համընկնում է A-ի հետ:

Դիտողություն 2.1.2: Նկատենք, որ $\forall F \subset A$ էլեմենտների ընտանիքի համար F-ի էլեմենտներից բազմանդամների բազմության փակումը հանդիսանում է F-ը պարունակող մինիմալ փակ ենթահանրահաշիվ: Ուստի ցանկացած $F \subset A \setminus \{e\}$ գծորեն անկախ համակարգի համար գոյություն ունի $B \subset A$ փակ ենթահանրահաշիվ, որի համար F-ը հանդիսանում է ծնիչ: ▶

Օրինակ 3: $W = W_n$-ով նշանակենք այն բոլոր $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ֆունկցիաների դասը, որոնք ներկայացվում են

$$f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m e^{im \cdot x}$$

տեսքով, որտեղ $\sum\limits_{m \in \mathbb{Z}^n} |a_m| < \infty$: W-ում ներմուծենք նորմ՝ $\forall f \in W$ համար սահմանելով

$$\|f\| = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |a_m| :$$

Հեշտ է տեսնել, որ W-ն կհանդիսանա կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվ (գործողությունները հասկացվում են կետային իմաստով, միավորը $e(t) \equiv 1$ ֆունկցիան է): Յուրաքանչյուր $x \in \mathbb{R}^n$

համար $f \mapsto f(x)$ արտապատկերումը հանդիսանում է ոչ 0-ական մուլտիպլիկատիվ ֆունկցիոնալ: Ցույց տանք, որ ճիշտ է նաև հակառակը, այսինքն $\forall \varphi \in \mathcal{M}_W$ համար $\exists y \in \mathbb{R}^n$, որ

$$\varphi(f) = f(y) \quad (f \in W) : \tag{2.1.5}$$

$r = 1, 2, \ldots, n$ համար նշանակենք $g_r(x) = \exp(i\, x_r)$, որտեղ x_r-ը x կետի r-րդ կոորդինատն է: Ակնհայտ է, որ

$$g_r, \frac{1}{g_r} \in W,$$

և

$$\|g_r\| = \left\| \frac{1}{g_r} \right\| = 1 :$$

Քանի որ $\varphi \in \mathcal{M}_A$, ուստի $\|\varphi\| \leqslant 1$ և կունենանք՝

$$|\varphi\,(g_r)| \leqslant 1,$$

$$\left| \frac{1}{\varphi\,(g_r)} \right| = \left| \varphi \left(\frac{1}{g_r} \right) \right| \leqslant 1$$

(քանի որ $g_r \in W^{-1} \Rightarrow \varphi(g_r) \neq 0$): Այստեղից կբխի, որ

$$|\varphi\,(g_r)| = 1 :$$

Հետևաբար $\exists y_r \in \mathbb{R}$ $(1 \leqslant r \leqslant n)$, որ

$$\varphi(g_r) = \exp(i\, y_r) = g_r(y), \tag{2.1.6}$$

որտեղ $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$: Դիցուք P-ն կամայական եռանկյունաչափական բազմանդամ է (դա նշանակում է, որ P-ն հանդիսանում է g_r, $\dfrac{1}{g_r}$ $(1 \leqslant r \leqslant n)$ ֆունկցիաների ամբողջ աստիճանների վերջավոր գծային կոմբինացիա): Այդ դեպքում φ-ի գծայնությունից, մուլտիպլիկատիվությունից և (2.1.6)-ից կբխի, որ

$$\varphi(P) = P(y) : \tag{2.1.7}$$

W-ում նորմի սահմանումից պարզ երևում է, որ եռանկյունաչափական բազմանդամները W-ում ամենուրեք խիտ են, ուստի (2.1.7)-ից և φ-ի անընդհատությունից կբխի, որ

$$\varphi(f) = f(y) \quad (\forall f \in W),$$

ինչը հենց (2.1.5)-ն է:

Նշենք, որ եթե $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n)$ այնպիսին են, որ $y_i - \tilde{y}_i$ հանդիսանում են 2π-ի պատիկներ, ապա $f \mapsto f(y)$ և $f \mapsto f(\tilde{y})$ ֆունկցիոնալները կլինեն նույնը: Քանի որ (2.1.5)-ի աջ մասում գրված է $f \mapsto f(y)$ Դիրակի ֆունկցիոնալը, ուստի ինչպես (2.1.2)-ը գրեցինք (2.1.3) տեսքով, այնպես էլ (2.1.5)-ը կարելի է գրել

$$\mathcal{M}_W = [0, 2\pi]^n \tag{2.1.8}$$

տեսքով:

(2.1.5)-ից բխում է, որ եթե $f \in W$ այնպիսին է, որ $f(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, ապա $\dfrac{1}{f} \in W$: Սա Վիների հայտնի թեորեմն է (հիմնավորումը բխում է (2.1.5)-ից և 2.1.2 թեորեմի 3) պնդումից): ▶

Դիտողություն 2.1.3: $\left\{ g_r, \frac{1}{g_r} : 1 \leqslant r \leqslant n \right\}$ ընտանիքը հանդիսանում է W Վիների հանրահաշվի ծնիչ: ▶

Խնդիր 3: Ապացուցել, որ $C^n[a,b]$-ն

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \max_{a \leqslant t \leqslant b} \left| f^{(k)}(t) \right|$$

նորմի նկատմամբ հանդիսանում է բանախյան հանրահաշիվ և ցույց տալ, որ

$$\mathcal{M}_{C^n[a,b]} = [a, b] : \blacktriangleright$$

§ 2.2. Գելֆանդի ձևափոխությունը

Դիցուք A-ն կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվ է, իսկ $\mathcal{M}_A$-ն A-ի ոչ 0-ական մուլտիպլիկատիվ ֆունկցիոնալների բազ–

մությունն է (մաքսիմալ իդեալների տարածությունը):

$$\hat{a}(\varphi) = \varphi(a) \quad (\varphi \in \mathcal{M}_A)$$

բանաձևը յուրաքանչյուր $a \in A$ էլեմենտին համապատասխանեցնում է $\hat{a} : \mathcal{M}_A \to \mathbb{C}$ ֆունկցիան, որին անվանում են a էլեմենտի Գելֆանդի ձևափոխություն: Նշանակենք

$$\hat{A} = \{\hat{a} : \ a \in A\} :$$

$\hat{A}$-ը հանդիսանում է $a \mapsto \hat{a}$ արտապատկերման պատկերը: Այդ արտապատկերմանը ևս հաճախ անվանում են Գելֆանդի ձևափոխություն:

A-ում դիտարկենք թույլ * տոպոլոգիա: Հիշենք, որ այն որոշվում է

$$U\left(\varphi_0; x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon\right) = \\ = \{\varphi \in A^* : \ |\varphi(x_k) - \varphi_0(x_k)| < \varepsilon \ \ (1 \leqslant k \leqslant n)\}$$

շրջակայքերի համակարգով, որտեղ $\varphi_0 \in A^*$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$, և $\varepsilon > 0$ կամայական են: Դիտարկենք A^*-ի թույլ * տոպոլոգիայով $\mathcal{M}_A$-ի վրա մակածված տոպոլոգիան: Վերջինս կորոշվի

$$V\left(\varphi_0; x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon\right) = \\ = \{\varphi \in \mathcal{M}_A : \ |\varphi(x_k) - \varphi_0(x_k)| < \varepsilon \ \ (1 \leqslant k \leqslant n)\}$$

շրջակայքերի համակարգով, որտեղ $\varphi_0 \in \mathcal{M}_A$; $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ և $\varepsilon > 0$ կամայական են: Սա այն ամենաթույլ տոպոլոգիան է, ըստ որի բոլոր $\hat{a} : \mathcal{M}_A \to \mathbb{C}$ ֆունկցիաները անընդհատ են: Այս տոպոլոգիային անվանում են գելֆանդյան տոպոլոգիա: $\mathcal{M}_A$-ն, որը դիտարկվում է գելֆանդյան տոպոլոգիայի նկատմամբ, կոչվում է մաքսիմալ իդեալների տարածություն կամ A հանրահաշվի սպեկտր:

Լեմմա 2.2.1: *$\mathcal{M}_A$-ն A^*-ում թույլ * փակ է:*

Ապացույց: Դիցուք φ_0-ն պատկանում է $\mathcal{M}_A$-ի թույլ * փակմանը: Մենք պետք է ապացուցենք, որ

$$\varphi_0(xy) = \varphi_0(x)\varphi_0(y) \quad (x,\, y \in A) \tag{2.2.1}$$

և
$$\varphi_0(e) = 1 : \tag{2.2.2}$$
Ֆիքսենք $x, y \in A$ և $\varepsilon > 0$: Նշանակենք
$$W = \{\varphi \in A^* : \ |\varphi(z_i) - \varphi_0(z_i)| < \varepsilon \text{ երբ } 1 \leqslant i \leqslant 4\},$$
որտեղ $z_1 = e$, $z_2 = x$, $z_3 = y$, $z_4 = xy$: Այդ դեպքում W-ն կհանդիսանա φ_0 կետի թույլ * շրջակայք, ուստի փակման սահմանումից կբխի, որ $\exists \varphi \in W \cap \mathcal{M}_A$: Այդ φ-ի համար կունենանք
$$|1 - \varphi_0(e)| = |\varphi(e) - \varphi_0(e)| < \varepsilon,$$
որտեղից կբխի (2.2.2)-ը: Ունենք
$$\begin{aligned}&\varphi_0(xy) - \varphi_0(x)\varphi_0(y) = \\ &\ = [\varphi_0(xy) - \varphi(xy)] + [\varphi(x)\varphi(y) - \varphi_0(x)\varphi_0(y)] = \\ &\ = [\varphi_0(xy) - \varphi(xy)] + [\varphi(y) - \varphi_0(y)]\,\varphi(x) + [\varphi(x) - \varphi_0(x)]\,\varphi_0(y)\end{aligned}$$
և $\varphi \in W$ առնչությունից կբխի, որ
$$|\varphi_0(xy) - \varphi_0(x)\varphi_0(y)| < (1 + \|x\| + |\varphi_0(y)|)\,\varepsilon,$$
որտեղից էլ կբխի (2.2.1)-ը:
Լեմման ապացուցված է:

Թեորեմ 2.2.1: *Դիցուք A-ն կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվ է, $\mathcal{M}_A$-ն A-ի մաքսիմալ իդեալների տարածությունն է, իսկ R-ը A-ի բոլոր մաքսիմալ իդեալների հատումն է: Այդ դեպքում՝*

1) $\mathcal{M}_A$ տարածությունը հաուսդորֆյան է և կոմպակտ,

2) Գելֆանդի $x \mapsto \hat{x}$ ձևափոխությունը հոմոմորֆիզմ է A-ից $\hat{A}$-ի վրա (վերջինս $C(\mathcal{M}_A)$-ի ենթահանրահաշիվ է), ընդ որում այդ հոմոմորֆիզմի միջուկը համընկնում է R-ի հետ: Հետևաբար, Գելֆանդի ձևափոխությունը իզոմորֆիզմ կլինի այն և միայն այն դեպքում, երբ $R = \{0\}$;

3) $\forall x \in A$ *համար* $\hat{x}$*-ի պատկերը (*$\hat{x}(\mathcal{M}_A)$*-ն) համընկնում է* x *էլեմենտի* $\sigma(x)$ *սպեկտրի հետ: Այդ պատճառով*

$$\|\hat{x}\|_\infty = \rho(x) \leqslant \|x\|\,, \tag{2.2.3}$$

որտեղ

$$\|\hat{x}\|_\infty = \max_{\varphi \in \mathcal{M}_A} |\hat{x}(\varphi)| :$$

4) $R = \mathrm{Rad}(A) = \{x \in A : \ \rho(x) = 0\}$*:* [4]

Ապացույց:

1) Թույլ * տոպոլոգիան հաուսդորֆյան է: Իրոք, դիցուք $\varphi_i \in A^*$ $(i = 1, 2)$ և $\varphi_1 \neq \varphi_2$: Ուստի $\exists x \in A$, որ

$$\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x) :$$

Վերցնենք

$$0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\,|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| :$$

Այդ դեպքում ակնհայտ է, որ $\varphi_1(x)$ և $\varphi_2(x)$ ֆունկցիոնալների $U(\varphi_1, x, \varepsilon)$ և $U(\varphi_2, x, \varepsilon)$ շրջակայքերը չեն հատվի:

Այստեղից բխում է, որ $\mathcal{M}_A$-ի տոպոլոգիան, որն ինդուկցված է A^*-ից, ևս հաուսդորֆյան է:

Դիցուք $S(A^*)$-ը A^*-ի միավոր սֆերան է: Ունենք

$$\mathcal{M}_A \subset S(A^*) \subset \overline{B}(A^*),$$

որտեղ

$$\overline{B}(A^*) = \{\varphi \in A^* : \ \|\varphi\| \leqslant 1\}$$

A^*-ի միավոր գունդն է: Ըստ Բանախ-Ալաօգլուի թեորեմի՝ $\overline{B}(A^*)$-ը թույլ * կոմպակտ է, ուստի նախորդ լեմմայից կբխի, որ $\mathcal{M}_A$-ն ևս թույլ * կոմպակտ է:

2) Դիցուք $x \in A$, $y \in A$, $\alpha \in \mathbb{C}$ և $\varphi \in \mathcal{M}_A$: Այդ դեպքում՝

$$(\alpha x)\hat{}(\varphi) = \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) = (\alpha\hat{x})\,(\varphi),$$

[4] Քանի որ իդեալների հատումը իդեալ է, ուստի R-ը իդեալ է: Քանի որ $R = \mathrm{Rad}(A)$, ուստի ստացվում է, որ $\mathrm{Rad}(A)$ իդեալ է:

$$(x+y)\hat{}(\varphi) = \varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y) = \hat{x}(\varphi)+\hat{y}(\varphi) = (\hat{x}+\hat{y})\,(\varphi),$$

և

$$(xy)\hat{}(\varphi) = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \hat{x}(\varphi)\hat{y}(\varphi) = (\hat{x}\hat{y})\,(\varphi)\,:$$

Հետևաբար $x \mapsto \hat{x}$ արտապատկերումը հոմոմորֆիզմ է: Այդ հոմոմորֆիզմի պատկերն ակնհայտորեն $\hat{A}$-ն է: Իսկ կորիզն իրենից ներկայացնում է $\{x \in A : \varphi(x) = 0 \ \ (\forall \varphi \in \mathcal{M}_A)\}$ բազմությունը: Վերջինս կարելի է գրել

$$\bigcap_{\varphi \in \mathcal{M}_A} \ker(\varphi)$$

տեսքով: Իսկ սա, համաձայն 2.1.2 թեորեմի 1) և 2) պնդումների, համընկնում է R-ի հետ:

3) Ունենք

$$\hat{x}\,(\mathcal{M}_A) = \{\hat{x}(\varphi) : \ \varphi \in \mathcal{M}_A\} = \{\varphi(x) : \ \varphi \in \mathcal{M}_A\} = \sigma(x),$$

որտեղ վերջին քայլը բխում է 2.1.2 թեորեմի 5) պնդումից: Հետևաբար

$$\|\hat{x}\|_\infty = \rho(x) \leqslant \|x\|\,:$$

4) Ինչպես 2)-ի ապացույցի ընթացքում տեսանք՝

$$R = \bigcap_{\varphi \in \mathcal{M}_A} \ker(\varphi)\,:$$

Ուստի $x \in R$ նշանակում է, որ

$$\varphi(x) = 0 \quad (\forall \varphi \in \mathcal{M}_A),$$

կամ որ նույնն է՝

$$\hat{x}\,(\mathcal{M}_A) = \{0\}\,:$$

Ըստ 3)-ի՝ վերջինս համարժեք է

$$\sigma(x) = \{0\}$$

առնչությանը: Իսկ սա էլ համարժեք է

$$\rho(x) = 0,$$

կամ որ նույնն է՝ $x \in \mathrm{Rad}(A)$ առնչությանը:
Թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում 2.2.1: A կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվը կոչվում է կիսապարզ, եթե $\mathrm{Rad}(A) = \{0\}$:

Թեորեմ 2.2.2: *Դիցուք a էլեմենտը A կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշվի ծնիչն է: Այդ դեպքում $\varphi \mapsto \varphi(a)$ $(\varphi \in \mathcal{M}_A)$ արտապատկերումը հոմեոմորֆիզմ է $\mathcal{M}_A$-ի և $\sigma(a)$-ի միջև:*

Ապացույց: Քանի որ $\sigma(a) = \{\varphi(a) : \varphi \in \mathcal{M}_A\}$, ուստի $\varphi \to \varphi(a)$ արտապատկերումն անընդհատ է A տոպոլոգիայում: Հետևաբար, բավական է ցույց տալ, որ այն ինեկտիվ է: Ենթադրենք, թե $\exists \varphi,\ \psi \in \in \mathcal{M}_A$, որ $\varphi(a) = \psi(a)$ և դիցուք $B = \{x \in A : \varphi(x) = \psi(x)\}$: Քանի որ $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_A$, ուստի B-ն A-ի փակ ենթահանրահաշիվ է, որը պարունակում է a-ն: Հետևաբար $B = A$, այսինքն՝ $\varphi = \psi$:

Թեորեմ 2.2.3: *Դիցուք a էլեմենտը A կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշվի ծնիչն է: Այդ դեպքում $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ կապակցված է:*

Ապացույց: Ենթադրենք, որ $\mathbb{C}\setminus\sigma(a)$ ունի ոչ դատարկ սահմանափակ W կոմպոնենտ և $\xi_0 \in W$: Դիցուք B-ն A–ում $\{e, a\}$-ն պարունակող մինիմալ ենթահանրահաշիվն է: Քանի որ $\partial W \subset \sigma(a)$, ուստի սպեկտրների արտապատկերման մասին թեորեմից բխում է, որ $\forall p$ բազմանդամի համար

$$|p(\xi_0)| \leqslant \max\{|p(\xi)| : \xi \in \partial W\} \leqslant \max\{|p(\xi)| : \xi \in \sigma(a)\} =$$

$$= \max\{|\lambda| : \lambda \in p(\sigma(a))\} = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(p(a))\} \leqslant \|p(a)\| :$$

Վերցնենք $b \in B$, այդ դեպքում $\exists p$ բազմանդամ, որ $b = p(a)$: $\varphi_0 : B \to \mathbb{C}$ հոմոմորֆիզմը սահմանենք

$$\varphi_0(b) = p(\xi_0)$$

բանաձևով (որտեղ $b = p(a)$): Վերն արված դատողություններից բխում է, որ եթե ինչ-որ p_1, p_2 բազմանդամների համար $p_1(a) = p_2(a)$, ապա $p_1(\xi_0) = p_2(\xi_0)$: Ուստի φ_0-ի սահմանումը կոռեկտ է: Քանի որ $|\varphi_0(b)| = |p(\xi_0)| \leqslant \|p(a)\| = \|b\|$, ուստի φ_0-ն սահմանափակ է և $\|\varphi_0\| \leqslant 1$: Ըստ Հան-Բանախի թեորեմի՝

φ_0-ն ունի նորմը պահպանող φ շարունակություն A–ի վրա: Բայց $\varphi_0(e) = 1$, հետևաբար $\varphi \in \mathcal{M}_A$: Եթե $p(z) = z$, ապա $p(a) = a$ և $\varphi(a) = \varphi_0(a) = p(\xi_0) = \xi_0$: Հետևաբար, $\xi_0 \in \sigma(a)$, ինչը հակասություն է:

Թեորեմ 2.2.4: *Դիցուք K-ն ոչ դատարկ կոմպակտ է $\mathbb{C}$–ում, որի լրացումը կապակցված է: Այդ դեպքում գոյություն ունի միավորով և մեկ a ծնիչով A կոմպլեքս կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվ, այնպիսին, որ $\sigma(a) = K$:*

Ապացույց: Դիցուք $a(z) = z$ $(z \in K)$, իսկ A-ն $C(K)$-ում e-ն և a-ն պարունակող մինիմալ փակ ենթահանրահաշիվն է: Պարզ է, որ $K \subset \sigma_A(a)$: Եթե $\lambda \notin K$, ապա $\inf\{|\lambda - a(z)| : z \in K\} = M > 0$ և հետևաբար $\|(\lambda e - a)f\|_\infty \geqslant M\|f\|_\infty$ $(f \in A)$: Այստեղից բխում է, որ $(\lambda e - a)$-ն A–ում զրոյի տոպոլոգիական բաժանարար չէ և հետևաբար $\partial\sigma_A(a) \subset K$: Դիցուք $U = \operatorname{int}(\sigma_A(a))$, $V = \mathbb{C} \setminus \sigma_A(a)$: Այդ դեպքում U, V չհատվող բաց բազմություններ են և

$$\mathbb{C} \setminus K \subset \mathbb{C} \setminus \partial\sigma_A(a) = U \cup V \quad \text{և}$$

և $(\mathbb{C}\setminus K) \cap V \neq \emptyset$: Քանի որ $\mathbb{C}\setminus K$ կապակցված է, ուստի $\mathbb{C}\setminus K \subset V$: Այստեղից բխում է, որ $\sigma_A(a) \subset K$, և հետևաբար՝ $\sigma_A(a) = K$:

§ 2.3. Ինվոլյուցիաներ

Դիցուք X-ը կոմպլեքս գծային տարածություն է, իսկ A–ն կոմպլեքս հանրահաշիվ է:

Սահմանում 2.3.1: X–ից X գործող $x \mapsto x^*$ արտապատկերումը կոչվում է գծային ինվոլյուցիա (կամ՝ ինվոլյուցիա) X–ի վրա, եթե այն բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

1) $(x + y)^* = x^* + y^*$,
2) $(\lambda x^*) = \overline{\lambda} x^*$,
3) $(x^*)^* = x$:

$h \in X$ էլեմենտը կանվանենք ինքնահամալուծ (սիմետրիկ) * ինվոլյուցիայի նկատմամբ, եթե $h^* = h$: X–ի բոլոր ինքնահամալուծ տարրերի բազմությունը նշանակենք $\operatorname{sym}(X)$:

Պնդում 2.3.1: *Դիցուք $*$-ը գծային ինվոլյուցիա է X–ի վրա: Այդ դեպքում* $\mathrm{sym}(X)$*-ը իրական գծային ենթատարածություն է X–ում և*

$$X = \mathrm{sym}(X) \oplus i\ \mathrm{sym}(X) :$$

Ապացույց: Հեշտ է ստուգել, որ $\mathrm{sym}(X)$-ը X-ի իրական ենթատարածություն է: Դիցուք $x \in \mathrm{sym}(X) \cap i\ \mathrm{sym}(X)$: Այդ դեպքում $x = iy$, որտեղ $y = y^*$ և $x = x^* = (iy)^* = -iy^* = -iy = -x$, ուստի $x = 0$, և հետևաբար, $\exists\, \mathrm{sym}(X) \oplus i\ \mathrm{sym}(X)$: $\forall x \in X$ համար $\dfrac{x+x^*}{2}, \dfrac{x-x^*}{2i} \in \mathrm{sym}(X)$ և

$$x = \frac{x+x^*}{2} + i\,\frac{x-x^*}{2i},$$

հետևաբար՝ $X = \mathrm{sym}(X) \oplus i\ \mathrm{sym}(X)$:
Պնդումն ապացուցված է:

Պնդում 2.3.2: *Դիցուք Y-ը իրական ենթատարածություն է X–ում և $X = Y \oplus iY$: Այդ դեպքում $h + ik \mapsto h - ik$ $(h, k \in Y)$ արտապատկերումը գծային ինվոլյուցիա է X–ի վրա, ընդ որում* $\mathrm{sym}(X) = Y$*:*

Ապացույցն ակնհայտ է:

Սահմանում 2.3.2: Հանրահաշվական ինվոլյուցիա (կամ՝ ինվոլյուցիա) A–ի վրա կանվանենք այնպիսի $*$ գծային ինվոլյուցիան, որի համար տեղի ունի նաև հետևյալ պայմանը (աքսիոմը).

$$(xy)^* = y^*x^* \quad (x, y \in A) :$$

Հանրահաշիվը, որում կա ինվոլյուցիա, կոչվում է *ապրդանիշ* կամ *ինվոլյուտիվ* հանրահաշիվ:

Տրված $x, y \in A$ համար $\dfrac{xy+yx}{2}$ և $\dfrac{xy-yx}{2i}$ էլեմենտներին կանվանենք x, y տարրերի համապատասխանաբար *իրական* և *կեղծ* ժորդանյան արտադրյալներ:

Եթե A–ն ապրդանիշ հանրահաշիվ է, ապա հեշտ է տեսնել, որ $\mathrm{sym}(A)$ փակ է իրական և կեղծ ժորդանյան արտադրյալի նկատմամբ:

Պնդում 2.3.3: *Դիցուք Y-ը A–ում իրական գծային ենթատարածություն է, որը փակ է իրական և կեղծ ժորդանյան արտադրյալների նկատմամբ և $A = Y \oplus iY$: Այդ դեպքում $h + ik \mapsto h - ik$ $(h, k \in Y)$ արտապատկերումը ինվոլյուցիա է A–ի վրա, ընդ որում* $\mathrm{sym}(A) = Y$*:*

Ապացույց: Ըստ 2.3.2 պնդման՝ բավական է ապացուցել, որ $(ab)^* = b^*a^*$ $(a, b \in A)$:

Դիցուք $a = h+ik$, $b = p+iq$, որտեղ $h, k, p, q \in Y$: Այդ դեպքում

$$ab + b^*a^* = (h + ik)(p + iq) + (p - iq)(h - ik) =$$

$$= (hp + ph) - (kq + qk) + i(kp - pk) + i(hq - qh) \in Y :$$

Նման ձևով $\frac{1}{i}(ab - b^*a^*) \in Y$: Քանի որ $ab = \frac{1}{2}(ab + b^*a^*) + $ $+ i\frac{1}{2i}(ab - b^*a^*)$, ուստի

$$(ab)^* = \frac{1}{2}(ab + b^*a^*) - i\frac{1}{2i}(ab - b^*a^*) = b^*a^* :$$

Պնդումն ապացուցված է:

Սահմանում 2.3.3: Դիցուք A–ն ինվոլյուտիվ հանրահաշիվ է, և $\varphi : A \to \mathbb{C}$ գծային ֆունկցիոնալ է: φ^* գծային ֆունկցիոնալը սահմանենք

$$\varphi^*(a) = \overline{\varphi(a^*)} \quad (a \in A)$$

բանաձևով: Այդ դեպքում $\varphi \mapsto \varphi^*$ արտապատկերումը գծային ինվոլյուցիա է A-ի A' հանրահաշվական համալուծ տարածությունում: $\varphi : A \to \mathbb{C}$ գծային ֆունկցիոնալը կանվանենք *ինքնահամալուծ*, եթե $\varphi = \varphi^*$ (այսինքն՝ $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$ $(\forall a \in A)$):

Պարզ է, որ ինքնահամալուծ ֆունկցիոնալը ընդունում է իրական արժեքներ $\mathrm{sym}(A)$–ի վրա և հակառակը՝ եթե φ_0-ն իրական գծային ֆունկցիոնալ է $\mathrm{sym}(A)$–ի վրա, ապա այն

$$\varphi(a) = \varphi_0\left(\frac{a + a^*}{2}\right) + i\varphi_0\left(\frac{a - a^*}{2i}\right) \quad (a \in A) \tag{2.3.1}$$

բանաձևով ծնում է ինքնահամալուծ φ գծային ֆունկցիոնալ A–ի վրա:

A բանախյան հանրահաշվի վրա որոշված բոլոր ինքնահամա–լուծ *անընդհատ* գծային ֆունկցիոնալների բազմությունը կնշանա–կենք $\mathrm{sym}(A^*)$:

Դիտողություն 2.3.1: Դիցուք $\mathcal{H}(A)$–ն նախկինում դիտարկված հեր–միտյան էլեմենտների բազմություն է: Այդ դեպքում դժվար չէ տեսնել, որ

$$\mathcal{H}(A) \subset \mathrm{sym}(A),$$

սակայն հնարավոր է, որ $\mathcal{H}(A) \neq \mathrm{sym}(A)$: ►

Սահմանում 2.3.4: A ինվոլյուտիվ բանախյան հանրահաշիվը կոչ–վում է B^* հանրահաշիվ, եթե

$$\|xx^*\| = \|x\|^2 \quad (\forall x \in A) : \tag{2.3.2}$$

Նկատենք, որ $\|x\|^2 = \|xx^*\| \leqslant \|x\| \cdot \|x^*\|$ գնահատականից բխում է, որ $\|x\| \leqslant \|x^*\|$: Բայց $x^{**} = x$, ուստի վերը ստացվածից կբխի, որ

$$\|x^*\| \leqslant \|(x^*)^*\| = \|x^{**}\| = \|x\|,$$

հետևաբար B^* հանրահաշվում

$$\|x^*\| = \|x\| \quad (\forall x \in A) : \tag{2.3.3}$$

(2.3.3)–ից բխում է, որ B^* հանրահաշվի ինվոլյուցիան անընդհատ է:

Թեորեմ 2.3.1: *Դիցուք A–ն միավորով B^* հանրահաշիվ է: Այդ դեպքում $\mathcal{H}(A) = \mathrm{sym}(A)$:*

Ապացույց: Դիցուք $h \in A$, $h^* = h$ և $t \in \mathbb{R}$: Քանի որ

$$\|e + t^2h^2\| = \|(e + ith)(e - ith)\| = \|e + ith\|^2,$$

ուստի

$$\lim_{t \to +0} \frac{1}{t} \{\|e + ith\| - 1\} = \lim_{t \to +0} \left\{ \sqrt{\|e + ith\|} - 1 \right\} = 0 :$$

Հետևաբար, $V(h) \subset \mathbb{R}$:

Հակառակը, եթե $h \in \mathcal{H}(A)$ և $h = p + iq$, որտեղ $p = p^*$, $q = q^*$, ապա $V(h) = \{\varphi(p) + i\varphi(q) : \varphi \in \mathcal{P}(A)\}$: Քանի որ h, p, q հերմիտյան են, ապա $\forall \varphi \in \mathcal{P}(A)$ համար $\varphi(q) = 0 \Rightarrow h \in \mathrm{sym}(A)$:

Թեորեմն ապացուցված է:

Վիդալ–Պալմերի թեորեմը: *Եթե A բանախյան հանրահաշվում տրված $*$ ինվոլյուցիան այնպիսին է, որ*

$$\mathcal{H}(A) = \mathrm{sym}(A),$$

ապա A–ն B^* հանրահաշիվ է:

Թեորեմն ընդունում ենք առանց ապացույցի: ▶

Օրինակ 1: $C(K)$–ում $f \mapsto \overline{f}$ արտապատկերումը կլինի ինվոլյուցիա ($f^* \stackrel{def}{=} \overline{f}$): Ակնհայտ է, որ $C(K)$–ն B^*–հանրահաշիվ է:

Օրինակ 2: Դիտարկենք H հիլբերտյան տարածության վրա որոշված $BL(H)$ գծային սահմանափակ օպերատորների հանրահաշիվը: Դիցուք $*$–ը $A \in BL(H)$ օպերատորից նրա հերմիտյան համալուծին անցման գործողությունն է: Այդ դեպքում $BL(H)$–ը կլինի B^*–հանրահաշիվ: Սա մենք գիտենք ֆունկցիոնալ անալիզի դասընթացից, բայց ապացուցենք անկախ ճանապարհով: Նախ տանք այսպիսի՝

Սահմանում 2.3.5: Դիցուք X, Y, Z միևնույն թվային դաշտով (իրական կամ կոմպլեքս) գծային տարածություններ են, իսկ $B : X \times Y \to Z$: Յուրաքանչյուր $x \in X$ և $y \in Y$ էլեմենտներին համապատասխան՝ կառուցենք

$$B_x : Y \longrightarrow Z \quad \text{և} \quad B^y : X \longrightarrow Z$$

արտապատկերումներ՝ վերցնելով

$$B_x(y) = B(x, y) \quad (y \in Y)\,,$$

և

$$B^y(x) = B(x, y) \quad (x \in X)\,:$$

ա) B արտապատկերումը կոչվում է բիգծային, եթե $\forall x \in X$ և $\forall y \in Y$ համար B_x, B^y արտապատկերումները գծային են:

բ) B արտապատկերումը կոչվում է կիսագծային (полуторалинейный) եթե $\forall y \in Y$ համար B^y արտապատկերումը գծային է, իսկ B_x–ը $\forall x \in X$ համար համալուծ–գծային է, այսինքն՝

$$B_x\left(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\right) = \overline{\lambda}_1 B_x(y_1) + \overline{\lambda}_2 B_x(y_2),$$

($\forall y_1, y_2 \in Y$, $\forall \lambda_1, \lambda_2$ սկալյարների համար)։ Կիսագծային ֆունկ–ցիոնալի օրինակ է սկալյար արտադրյալը։

Լեմմա 2.3.1: *Եթե $f : H \times H \to \mathbb{C}$ կիսագծային ֆունկցիոնալը սահմանափակ է այն իմաստով, որ*

$$\|f\| = \sup\left\{|f(x, y)| : \ \|x\| = \|y\| = 1\right\} < \infty,$$

ապա գոյություն ունի միակ $S : H \to H$ արտապատկերում, որ

$$f(x, y) = (x, Sy) \quad (\forall x, y \in H) :$$

Ընդ որում՝ $S \in BL(H)$ և

$$\|S\| = \|f\| :$$

Ապացույց: Հեշտ է տեսնել, որ $|f(x, y)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$ ($\forall x, y \in H$), ուստի ցանկացած ֆիքսած $y \in H$ համար

$$x \mapsto f(x, y)$$

արտապատկերումը հանդիսանում է գծային սահմանափակ ֆունկ–ցիոնալ H–ում, ընդ որում այդ ֆունկցիոնալի նորմը չի գերազանցում $\|f\| \cdot \|y\|$–ը: Ըստ Ռիսի թեորեմի՝ գոյություն ունի միակ $Sy \in H$, որ

$$f(x, y) = (x, Sy) \quad (x \in H),$$

ընդ որում

$$\|Sy\| \leqslant \|f\| \cdot \|y\| : \tag{2.3.4}$$

Հեշտ է տեսնել. որ S–ն ադիտիվ է: Եթե $\alpha \in \mathbb{C}$, ապա

$$(x, S(\alpha y)) = f(x, \alpha y) = \overline{\alpha} f(x, y) = \overline{\alpha}(x, Sy) = (x, \alpha S y),$$

$\forall x, y \in H$ համար: Ուստի S–ը գծային է: (2.3.4)–ից կբխի, որ $S \in BL(H)$ և

$$\|S\| \leqslant \|f\| :$$

Բացի այդ, ունենք

$$|f(x, y)| = |(x, Sy)| \leqslant \|x\| \, \|Sy\| \leqslant \|x\| \cdot \|S\| \cdot \|y\|,$$

և հետևաբար նաև $\|f\| \leqslant \|S\|$:
Լեմման ապացուցված է:

Եթե $T \in BL(H)$, ապա $f(x, y) = (Tx, y)$ ձևը հանդիսանում է կիսագծային սահմանափակ ֆունկցիոնալ, ուստի ըստ նախորդ լեմ–մայի՝ գոյություն ունի միակ $T^* : H \to H$ արտապատկերում, որ

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \quad (x, y \in H), \tag{2.3.5}$$

ընդ որում $T^* \in BL(H)$ և

$$\|T^*\| = \|T\| : \tag{2.3.6}$$

T^*–ը կոչվում է T սահմանափակ օպերատորի հերմիտյան համալուծ: Ցույց տանք, որ $T \mapsto T^*$ արտապատկերումը $BL(H)$–ում ինվոլյու–ցիա է, այսինքն բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

$$(T + S)^* = T^* + S^*,$$

$$(\alpha T)^* = \overline{\lambda} T^*,$$

$$(ST)^* = T^* S^*,$$

$$T^{**} = T$$

($\forall T, S \in BL(H)$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$): Սրանցից առաջինն ակնհայտ է, իսկ մյուսները բխում են

$$(\alpha Tx, y) = \alpha(Tx, y) = \alpha\,(x, T^*y) = (x, \overline{\alpha} T^*y)\,,$$

$$(STx, y) = (Tx, S^*y) = (x, T^*S^*y)\,,$$

$$(Tx, y) = (x, T^*y) = \overline{(T^*y, x)} = \overline{(y, T^{**}x)} = (T^{**}x, y)$$

հավասարություններից: Քանի որ $\forall x \in H$ համար

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (T^*Tx, x) \leqslant \|T^*T\| \cdot \|x\|^2,$$

ուստի $\|T\|^2 \leqslant \|T^*T\|$: Մյուս կողմից, (2.3.6)–ից բխում է, որ

$$\|T^*T\| \leqslant \|T^*\| \; \|T\| = \|T\|^2 \, ,$$

ուստի $\forall T \in BL(H)$ համար

$$\|T^*T\| = \|T\|^2 \; :$$

Այսպիսով, ապացուցվեց, որ $BL(H)$–ը B^*–հանրահաշիվ է: ►

Թեորեմ 2.3.2: *Դիցուք A–ն ինվոլյուտիվ բանախյան հանրահաշիվ է, և $x \in A$: Այդ դեպքում՝*
1) $x + x^*$, $i(x - x^*)$, xx^* էլեմենտները սիմետրիկ են,
2) x էլեմենտը միակ ձևով ներկայացվում է $x = u + iv$ տեսքով, որտեղ u–ն և v–ն A–ի սիմետրիկ էլեմենտներ են,
3) e միավորը և 0–ն սիմետրիկ են,
4) $x \in A^{-1}$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $x^* \in A^{-1}$, ընդ որում $(x^*)^{-1} = \left(x^{-1}\right)^*$,
5) $\lambda \in \sigma(x)$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\overline{\lambda} \in \sigma(x^*)$:

Ապացույց: 1) պնդումն ակնհայտ է:
2) Վերցնենք $u = \frac{1}{2}\,(x + x^*)$, $v = \frac{1}{2i}\,(x - x^*) = \frac{i}{2}\,(x^* - x)$: Այդ դեպքում կունենանք $u, v \in \mathrm{sym}(A)$ և $x = u + iv$: Ենթադրենք թե նաև $x = u' + iv'$, որտեղ u', $v' \in \mathrm{sym}(A)$: Նշանակենք $w = v' - v$: Ունենք $w \in \mathrm{sym}(A)$: Քանի որ

$$iw = i(v' - v) = iv' - iv = (x - u') - (x - u) = u - u',$$

ուստի նաև $iw \in \mathrm{sym}(A)$, և հետևաբար

$$iw = (iw)^* = -iw^* = -iw,$$

որտեղից կստանանք, որ $w = 0$: Այստեղից կբխի, որ $v = v'$ և հետևաբար՝ նաև $u = u'$:

3) Ունենք $0^* = (0+0)^* = 0^* + 0^* \Rightarrow 0^* = 0$: Ունենք $e^* = ee^*$, ուստի 1)–ից կբխի, որ $e^* = (e^*)^* = e$:
4)–ը բխում է 3)–ից և $(xy)^* = y^*x^*$ հավասարությունից:
5)–ը ստանալու համար 4)–ը կկիրառենք $(\lambda e - x)$–ի վրա:
Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 2.3.3: *Եթե A կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվը կիսապարզ է, ապա A–ի վրա ցանկացած ինվոլյուցիա անընդհատ է:*

Ապացույց: A–ն իրական թվերի դաշտի նկատմամբ բանախյան տարածություն է, իսկ $*$–ը A–ից A իրականորեն գծային: Ուստի $*$–ի անընդհատությունը ցույց տալու համար՝ փակ գրաֆիկի մասին թեորեմի շնորհիվ բավական է ցույց տալ, որ $*$–ի գրաֆիկը փակ է: Դիցուք

$$x_n \to x, \quad x_n^* \to y:$$

Պետք է ցույց տալ, որ $y = x^*$: Վերցնենք $\forall \psi \in \mathcal{M}_A$ և դիտարկենք $\varphi(z) = \overline{\psi(z^*)}$ $(z \in A)$ բանաձևով որոշվող ֆունկցիոնալը: Ինվոլյուցիայի հատկություններից կբխի, որ $\varphi \in \mathcal{M}_A$: Ուստի φ–ն անընդհատ է, և կունենանք

$$\overline{\psi(x^*)} = \varphi(x) = \lim \varphi(x_n) = \lim \overline{\psi\left(x_n^*\right)} = \overline{\psi(y)},$$

$$\psi\left(x^* - y\right) = 0,$$

այսինքն՝ $x^* - y \in \ker(\psi)$: Քանի որ ψ–ն կամայական էր, ուստի ստանում ենք

$$x^* - y \in \bigcap_{\psi \in \mathcal{M}_A} \ker(\psi) = \mathrm{Rad}(A) = \{0\},$$

և հետևաբար $y = x^*$:
Թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում 2.3.6: Դիցուք K–ն հաուսդորֆյան կոմպակտ է: $A \subset C(K)$ կոչվում է հավասարաչափ հանրահաշիվ, եթե՝
1) A–ն $C(K)$–ի փակ ենթահանրահաշիվ է,
2) A–ն անջատում է K–ի կետերը,
3) $e \in A$ (e–ով նշանակված է $C(K)$–ի միավորը):

Օրինակ, $A(T)$ դիսկ հանրահաշիվը $C(T)$–ում հավասարաչափ ենթահանրահաշիվ է:

Սահմանում 2.3.7: $C(K)$–ի A ենթահանրահաշիվը կոչվում է սիմետրիկ, եթե $\forall f \in A$ համար $\overline{f} \in A$:

Ստոն–Վայերշտրասի թեորեմը: *Եթե հավասարաչափ հանրահաշիվը սիմետրիկ է, ապա այն համընկնում է $C(K)$–ի հետ:*

Սա մենք ապացուցել ենք մաթ. անալիզի դասընթացում: ▶

Լեմմա 2.3.2: *Դիցուք A–ն կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվ է, և*

$$r = \inf_{x \in A \setminus \{0\}} \frac{\left\|x^2\right\|}{\|x\|^2}, \quad s = \inf_{x \in A \setminus \{0\}} \frac{\|\hat{x}\|_\infty}{\|x\|^2} :$$

Այդ դեպքում

$$s^2 \leqslant r \leqslant s :$$

Ապացույց: $\forall x \in A$ համար ունենք $\|\hat{x}\|_\infty \geqslant s\|x\|$, ուստի

$$\left\|x^2\right\| \geqslant \left\|\hat{x}^2\right\|_\infty = \|\hat{x}\|_\infty^2 \geqslant s^2\|x\|^2 :$$

Հետևաբար՝ $s^2 \leqslant r$:

Քանի որ $\forall x \in A$ համար $\left\|x^2\right\| \geqslant r\|x\|^2$, ուստի ըստ n–ի ինդուկցիայով կստանանք, որ

$$\|x^m\| \geqslant r^{m-1} \|x\|^m \quad (m = 2^n,\ n = 1, 2, 3, \ldots) :$$

Ստացված առնչությունից հանենք m–րդ աստիճանի արմատ և այնուհետև անցնենք սահմանի, երբ $m \to \infty$: Օգտվելով սպեկտրալ շառավղի բանաձևից՝ կունենանք

$$\rho(x) \geqslant r\|x\|,$$

և քանի որ $\rho(x) = \|\hat{x}\|_\infty$, ուստի կստանանք

$$\|\hat{x}\|_\infty \geqslant r\|x\| \quad (x \in A),$$

որտեղից էլ բխում է, որ $r \leqslant s$:

Լեմման ապացուցված է:

Թեորեմ 2.3.4: *Դիցուք A–ն կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվ է: Այդ դեպքում՝*

1) Գելֆանդի ձևափոխությունը իզոմետրիա կլինի (այսինքն՝ $\|x\| = \|\hat{x}\|_\infty$ $(\forall x \in A)$) այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\left\|x^2\right\| = \|x\|^2 \quad (\forall x \in A),$$

2) որպեսզի A–ն լինի կիսապարզ և միաժամանակ $\hat{A}$–ը լինի փակ $C(\mathcal{M}_A)$–ում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\exists K > 0$, այնպես, որ

$$\|x\|^2 \leqslant K \left\|x^2\right\| \quad (\forall x \in A) :$$

Ապացույց: 1) Նախորդ լեմմայի նշանակումներով՝ Գելֆանդի ձևափոխությունը իզոմետրիա կլինի այն և միայն այն դեպքում, երբ $s = 1$ (չէ՞ որ, ըստ (2.2.3)-ի, միշտ $\|\hat{x}\|_\infty \leqslant \|x\|$), ինչը, ըստ այդ լեմմայի, համարժեք է $r = 1$ պայմանին: Քանի որ միշտ $\|x^2\| \leqslant \|x\|^2$, ուստի $r = 1$ պայմանը համարժեք է թեորեմի պայմանին:

2) Նշված $K > 0$ թվի գոյությունը նշանակում է, որ $r > 0$, ինչը, ըստ այդ լեմմայի, համարժեք է $s > 0$ պայմանին: Եթե $s > 0$, ապա $x \mapsto \hat{x}$ արտապատկերումը փոխմիարժեք է և ունի անընդհատ հակադարձ: Ուստի այդպիսի իրավիճակում $\hat{A}$ հանրահաշիվը լրիվ է (և հետևաբար փակ է) $C(\mathcal{M}_A)$–ում: [5]

Այժմ հակառակը, դիցուք $x \mapsto \hat{x}$ արտապատկերումը փոխմիարժեք է և $\hat{A}$ հանրահաշիվը փակ է $C(\mathcal{M}_A)$–ում: Այդ դեպքում հակադարձ օպերատորի մասին Բանախի թեորեմից կբխի, որ $x \mapsto \hat{x}$ արտապատկերման հակադարձը սահմանափակ է: Հետևաբար այդ օպերատորի նորմը՝

$$0 < \sup_{x \in A \setminus \{0\}} \frac{\|x\|}{\|\hat{x}\|_\infty} < \infty,$$

ինչը համարժեք է $s > 0$ առնչությանը: Նախորդ լեմմայից կբխի, որ $r > 0$:

Թեորեմն ապացուցված է:

---

[5] Ըստ 2.2.1 թեորեմի՝ A–ն կիսապարզ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $x \mapsto \hat{x}$ արտապատկերումը փոխմիարժեք է:

Թեորեմ 2.3.5 (Գելֆանդ–Նայմարկի կոմուտատիվ թեորեմը): *Դիցուք A–ն կոմուտատիվ B^* հանրահաշիվ է: Այդ դեպքում Գելֆանդի ձևափոխությունը հանդիսանում է իզոմետրիկական իզոմորֆիզմ A–ի և $C(\mathcal{M}_A)$–ի միջև, ընդ որում*

$$\varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)} \quad (x \in A,\ \varphi \in \mathcal{M}_A), \tag{2.3.7}$$

կամ որ նույնն է՝

$$(x^*)\hat{} = \overline{\hat{x}} \quad (x \in A) : \tag{2.3.8}$$

Մասնավորապես, $x \in A$ էլեմենտը սիմետրիկ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\hat{x}$–ը իրական ֆունկցիա է:

Ապացույց: Դիցուք $\varphi \in \mathcal{M}_A$ և $u \in \mathrm{sym}(A)$: Նախ ցույց տանք, որ $\varphi(u)$–ն իրական թիվ է: Դիցուք $\varphi(u) = \alpha + i\beta$, որտեղ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: Վերցնենք կամայական $t \in \mathbb{R}$ և դիտարկենք $z = u + ite$ էլեմենտը: Հեշտ է տեսնել, որ

$$zz^* = u^2 + t^2 e,$$

$$\varphi(z) = \alpha + i(\beta + t),$$

ուստի

$$\alpha^2 + (\beta + t)^2 = |\varphi(z)|^2 \leqslant \|z\|^2 = \|zz^*\| \leqslant \|u\|^2 + t^2,$$

կամ՝

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t \leqslant \|u\|^2 \quad (-\infty < t < \infty),$$

ինչը հնարավոր է միայն $\beta = 0$ դեպքում: Վերջինս էլ նշանակում է, որ $\varphi(u)$–ն իրական է:

$\forall x \in A$ կարելի է ներկայացնել $x = u + iv$ տեսքով, որտեղ $u = u^*$, $v = v^*$: Ընդ որում՝ $x^* = u - iv$: Ըստ վերն ապացուցվածի՝ $\hat{u}$, $\hat{v}$ ֆունկցիաները իրական են, որտեղից էլ կբխի (2.3.8)–ը:

Վերն ապացուցվածից բխում է, որ $\hat{A} \subset C(\mathcal{M}_A)$ սիմետրիկ հանրահաշիվ է, այսինքն եթե $f \in \hat{A}$, ապա նաև $\overline{f} \in \hat{A}$:

Եթե $x \in A$ և $y = xx^*$, ապա $y = y^*$, ուստի $\|y^2\| = \|y\|^2$: Այստեղից ըստ n–ի ինդուկցիայով ստացվում է, որ

$$\|y^m\| = \|y\|^m \quad (m = 2^n,\ n = 1, 2, \ldots) :$$

Ստացված հավասարությունից հանենք m–րդ աստիճանի արմատ և այնուհետև անցնենք սահմանի, երբ $m \to \infty$: Օգտվելով սպեկտրալ շառավղի բանաձևից՝ կունենանք

$$\rho(y) = \|y\|,$$

և քանի որ $\rho(y) = \|\hat{y}\|_\infty$, ուստի կստանանք

$$\|\hat{y}\|_\infty = \|y\| \ :$$

Քանի որ $y = xx^*$, ուստի (2.3.8)–ից բխում է, որ $\hat{y} = |\hat{x}|^2$: Հետևաբար

$$\|\hat{x}\|_\infty^2 = \|\hat{y}\|_\infty = \|y\| = \|xx^*\| = \|x\|^2\,,$$

կամ $\|\hat{x}\|_\infty = \|x\|$: Այսպիսով, $x \mapsto \hat{x}$ արտապատկերումը իզոմետրիա է: Հետևաբար $\hat{A}$–ն կլինի փակ $C(\mathcal{M}_A)$–ում:

Այսպիսով, $\hat{A} \subset C(\mathcal{M}_A)$ փակ ենթահանրահաշիվ է: Ակնհայտ է, որ $\hat{A}$–ը անջատում է $\mathcal{M}_A$–ի կետերը: $C(\mathcal{M}_A)$–ի միավորը՝ նույնաբար 1 ֆունկցիան է, հանդիսանում է e–ի Գելֆանդի ձևափոխությունը, ուստի և պատկանում է $\hat{A}$–ին: Հետևաբար $\hat{A}$–ը հավասարաչափ հանրահաշիվ է: Քանի որ $\hat{A}$–ը նաև սիմետրիկ է, ուստի Ստոն–Վայերշտրասի թեորեմից կբխի, որ $\hat{A} = C(\mathcal{M}_A)$: Թեորեմն ապացուցված է:

§ 2.4. Ինվոլյուցիայի անընդհատությունը

Թեորեմ 2.4.1: *Դիցուք A-ն բանախյան հանրահաշիվ է: Հետևյալ պայմաններն իրար համարժեք են.*
1) $*$ ինվոլյուցիան անընդհատ է A–ի վրա,
2) $\mathrm{sym}(A^*)$-ն անջատում է A–ի կետերը,
3) $\mathrm{sym}(A)$-ն A–ի փակ ենթատարածություն է:

Ապացույցը տանենք $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1)$ սխեմայով:
$1) \Rightarrow 2)$ Դիցուք *-ը անընդհատ ինվոլյուցիա է A–ի վրա և $h \in \mathrm{sym}(A) \setminus \{0\}$: Ըստ Հան–Բանախի թեորեմի գոյություն ունի $\mathrm{sym}(A)$-ի վրա որոշված այնպիսի φ_0 իրականորեն գծային անընդհատ ֆունկցիոնալ, որ $\varphi_0(h) = 1$: Դիտարկենք φ_0–ով ծնված և

$*$-ի նկատմամբ ինքնահամալուծ φ կոմպլեքս գծային ֆունկցիոնալը (տես՝ (2.3.1)-ը)։ Քանի որ $*$ ինվոլյուցիան անընդհատ է, ուստի $\varphi \in \mathrm{sym}(A^*)$, $\varphi(h) = 1$։ Քանի որ $A = \mathrm{sym}(A) \oplus i\,\mathrm{sym}(A)$ և $\mathrm{sym}(A^*)$–ի էլեմենտները $\mathrm{sym}(A)$–ի վրա ընդունում են իրական արժեքներ, ուստի այստեղից բխում է, որ $\mathrm{sym}(A^*)$-ն անջատում է A–ի կետերը։
2) $\Rightarrow$ 3) Դիցուք $\mathrm{sym}(A^*)$-ն անջատում է A–ի կետերը և $\{h_n\} \subset \mathrm{sym}(A)$, $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = h + ik$, որտեղ $h, k \in \mathrm{sym}(A)$։ $\forall\varphi \in \mathrm{sym}(A^*)$ համար ունենք

$$i\varphi(k) = \varphi(ik) = \varphi\left(\lim_{n\to\infty}(h_n - h)\right) = \lim_{n\to\infty}\varphi(h_n - h) :$$

Քանի որ φ-ն $\mathrm{sym}(A)$–ի վրա ընդունում է իրական արժեքներ, ուստի $\varphi(k) = 0 \ \ (\forall\varphi \in \mathrm{sym}(A^*))$, որտեղից $k = 0$։ Այսպիսով՝ $\mathrm{sym}(A)$-ն փակ է A–ում։
3) $\Rightarrow$ 1) Դիցուք $\mathrm{sym}(A)$-ն փակ է A–ում և $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^* = b$։ Այդ դեպքում

$$a + b = \lim_{n\to\infty}(a_n + a_n^*) \in \mathrm{sym}(A),$$

$$i(a - b) = \lim_{n\to\infty}(i(a_n - a_n^*)) \in \mathrm{sym}(A) :$$

Հետևաբար, $a + b = a^* + b^*$, $a - b = -a^* + b^*$, որտեղից $b = a^*$։ Մնում է կիրառել փակ գրաֆիկի մասին թեորեմը։
Թեորեմն ապացուցված է։

Ինչպես ցույց ենք տվել, կիսապարզ կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշվում բոլոր ինվոլյուցիաներն անընդհատ են։ Սակայն ընդհանուր դեպքում պարտադիր չէ, որ նորմավորված հանրահաշ–վում ինվոլյուցիան լինի անընդհատ։ Դա հասկանալու համար դի–տարկենք երկու օրինակ։

1) Դիցուք A-ն այնպիսի անվերջ չափանի կոմպլեքս բանախյան հանրահաշիվ է, որ $A^2 = \{0\}$։ Դիցուք $\{e_n\}_1^\infty \subset A$ գծորեն անկախ և նորմավորված վեկտորական համակարգ է։ Դիտարկենք $\{e_\lambda\}$ հանրահաշվական բազիսը A–ում, որը պարունակում է $\{e_n\}$–ը։ $\{e_\lambda\}$

բազիսի էլեմենտների վրա ինվոլյուցիան սահմանենք

$$e_{2n}^* = ne_{2n-1}, \;\; e_{2n-1}^* = \frac{1}{n}e_{2n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$e_\mu^* = e_\mu \quad (\forall e_\mu \in \{e_\lambda\} \setminus \{e_n\}_1^\infty)$$

բանաձևերով: Քանի որ $\{e_\lambda\}$-ն A-ի բազիս է, ուստի $\{e_\lambda\}$-ի վրա ընդունած արժեքներով ինվոլյուցիան միարժեքորեն կսահմանվի A–ի վրա: Այս ինվոլյուցիան խզվող է A–ի վրա:

2) Դիցուք A նորմավորված հանրահաշվում ունենք երկու՝ $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ հանրահաշվական նորմեր և $* : A \to A$ ինվոլյուցիան անընդհատ է $\|\cdot\|_1$ նորմով: Քանի որ $*$–ը իրականորեն գծային օպերատոր է, ուստի նրա անընդհատությունը նշանակում է, որ $\exists k > 0$, այնպես, որ

$$\|x^*\|_1 \leqslant k\|x\|_1 \quad (\forall x \in A) :$$

Կառուցենք

$$B = (A, \|\cdot\|_1) \oplus (A, \|\cdot\|_2)$$

ուղիղ գումարը: Ըստ սահմանման՝

$$B = \{(a, b) : \, a, b \in A\} \, ,$$

ընդ որում $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in B$ և $\lambda \in \mathbb{C}$ համար ըստ սահմանման

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \, ,$$

$$\lambda(a_1, b_1) = (\lambda a_1, \lambda b_1) \, ,$$

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2) :$$

Հեշտ է տեսնել, որ B–ն կլինի կոմպլեքս հանրահաշիվ: $(a, b) \in B$ համար սահմանենք

$$\|(a, b)\| = \max\{\|a\|_1, \|b\|_2\} \, ,$$

$$(a, b)^* = (b^*, a^*) :$$

Այդ դեպքում B-ն կդառնա ինվոլյուտիվ նորմավորված հանրահաշիվ:

Դիցուք $\|\cdot\|_1$ և $\|\cdot\|_2$ նորմերը իրար համարժեք չեն (անվերջ չափանի հանրահաշիվների համար այդպիսի նորմեր ընտրելը պրակտիկորեն միշտ հնարավոր է) և $\{a_n\}_1^\infty \subset A$ այնպիսին է, որ

$$\|a_n\|_1 \longrightarrow 0 \quad \text{և} \quad \|a_n\|_2 \longrightarrow 1 :$$

Այդ դեպքում կունենանք

$$\|(0, a_n)^*\| = \|a_n^*\|_1 \longrightarrow 0,$$

բայց

$$\|[(0, a_n)^*]^*\| = \|(0, a_n)\| = \|a_n\|_2 \longrightarrow 1,$$

ուստի $* : B \to B$ ինվոլյուցիան անընդհատ չէ:

Կապարենք մի կարևոր դիտողություն համարժեք նորմերի մասին: Դիցուք A հանրահաշիվը լրիվ է $\|\cdot\|_1$ և $\|\cdot\|_2$ նորմերից յուրաքանչյուրի նկատմամբ և $\exists k > 0$, որ

$$\|x\|_1 \leqslant k\|x\|_2 \quad (\forall x \in A) : \tag{2.4.1}$$

Այդ դեպքում $\exists k_1 > 0$, որ

$$\|x\|_2 \leqslant k_1\|x\|_1 \quad (\forall x \in A) : \tag{2.4.2}$$

Իրոք, (2.4.1)–ը ցույց է տալիս, որ I միավոր օպերատորը, եթե նրան դիտարկենք որպես $(A, \|\cdot\|_1)$ տարածությունը $(A, \|\cdot\|_2)$ տարածության մեջ արտապատկերող օպերատոր, անընդհատ է, որտեղից և հակադարձ օպերատորի մասին Բանախի թեորեմից կբխի, որ այդ օպերատորը կլինի անընդհատ նաև որպես $(A, \|\cdot\|_2)$ տարածությանը $(A, \|\cdot\|_1)$–ի մեջ արտապատկերող օպերատոր: Այստեղից էլ կբխի (2.4.2)–ը:

§ 2.5. Մոդուլի գաղափարը

Դիցուք A–ն կոմպլեքս հանրահաշիվ է, իսկ X–ը՝ կոմպլեքս գծային տարածություն: X–ը կոչվում է ձախ A մոդուլ, եթե գոյություն ունի $A \times X \to X$ արտապատկերում, որը $\forall(a, x)$ զույգին

համապատասխանեցնում է $ax \in X$ էլեմենտը, այնպես, որ բավարարվում են հետևյալ պայմանները (ձախ մոդուլի աքսիոմները).
LM1. $\forall a \in A$ ֆիքսած a–ի համար $x \mapsto ax$ արտապատկերումը գծային է,
LM2. $\forall x \in X$ ֆիքսված x–ի համար $a \mapsto ax$ արտապատկերումը գծային է,
LM3. $(a_1a_2)x = a_1(a_2x)$ $(\forall a_1, a_2 \in A, \forall x \in X)$:

Եթե A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, իսկ X–ը բանախյան տարածություն, ապա ձախ A մոդուլի աքսիոմներին ավելացվում է նաև հետևյալը.
LM4. $\exists k > 0$ այնպես, որ $\|ax\| \leqslant k\|a\| \cdot \|x\|$ $(\forall a \in A, \forall x \in X)$:

Եթե X-ը հիլբերտյան տարածություն է, իսկ A-ն՝ ինվոլյուտիվ բանախյան հանրահաշիվ, ապա դրվում է

$$(ax, y) = (x, a^*y)$$

լրացուցիչ պայմանը:

Նման ձևով սահմանվում է աջ A մոդուլը: Այս դեպքում արդեն պահանջվում է, որ գոյություն ունենա $X \times A \to X$ արտապատկերում, այնպես, որ բավարարվեն հետևյալ պայմանները (աջ մոդուլի աքսիոմները).
RM1. $\forall a \in A$ ֆիքսված a–ի համար $x \mapsto xa$ արտապատկերումը գծային է,
RM2. $\forall x \in X$ ֆիքսված x–ի համար $a \mapsto xa$ արտապատկերումը գծային է,
RM3. $x(a_1a_2) = (xa_1)a_2$ $(\forall a_1, a_2 \in A, \forall x \in X)$:

X–ը կոչվում է A բիմոդուլ, եթե այն միաժամանակ հանդիսանում է ձախ A մոդուլ և աջ A մոդուլ: Այդ դեպքում դրվում է նաև

$$(ax)b = a(xb) \quad (a,\, b \in A,\ x \in X)$$

պայմանը:

Օրինակ, A–ն կլինի A բիմոդուլ:

§ 2.6. Կիրառություններ ոչ կոմուտատիվ հանրահաշիվներում

Սահմանում 2.6.1: Դիցուք S-ը A բանախյան հանրահաշվի ենթաբազմություն է:

$$\Gamma(S) = \{x \in A : \; xs = sx \;\; (\forall s \in S)\}$$

բազմությունը կոչվում է S-ի կոմուտանտ (ցենտրալիզատոր):

Սահմանում 2.6.2: Կասենք $S \subset A$ բազմությունը կոմուտատիվ է, եթե $\forall x, y \in S$ համար $xy = yx$:

Լեմմա 2.6.1 (կոմուտանտի հատկությունները)**:** *Դիցուք $S \subset A$ կամայական ենթաբազմություն է: Այդ դեպքում՝*
1) $\Gamma(S)$*-ը A-ում միավորով փակ ենթահանրահաշիվ է,*
2) $S \subset \Gamma(\Gamma(S))$*,*
3) եթե $S \subset T$, ապա $\Gamma(S) \supset \Gamma(T)$*,*
4) եթե S-ը կոմուտատիվ է, ապա կոմուտատիվ է նաև $\Gamma(\Gamma(S))$*-ը:*

Ապացույց: 1) Դիցուք $x, y \in \Gamma(S)$, իսկ $s \in S$: Ունենք $xs = sx$, $ys = sy$, ուստի ակնհայտորեն

$$(\lambda x)s = s(\lambda x), \quad (x+y)s = s(x+y), \quad (xy)s = s(xy),$$

և, հետևաբար, $\Gamma(S)$-ը A-ի ենթահանրահաշիվ է: Ակնհայտորեն՝ $e \in \Gamma(S)$: Քանի որ A-ում բազմապատկման գործողությունն անընդհատ է, ուստի $\Gamma(S)$-ը փակ է:
2) Դիցուք $s \in S$: Այդ դեպքում $\forall x \in \Gamma(S)$ համար $xs = sx$, ինչը նշանակում է, որ $s \in \Gamma(\Gamma(S))$:
3)-ը ակնհայտ է:
4) Նկատենք, որ եթե որևէ $E \subset A$ համար $\Gamma(E) \subset E$, ապա $\Gamma(E)$-ն կոմուտատիվ է, ինչը բխում է $\Gamma(E)$-ի սահմանումից:

Դիցուք S-ը կոմուտատիվ է: Այդ դեպքում $S \subset \Gamma(S)$ և ըստ 3)-ի

$$\Gamma\left(\Gamma(S)\right) \subset \Gamma(S),$$

իսկ այստեղից, վերն ասվածի հիման վրա, ստանում ենք $\Gamma\left(\Gamma(S)\right)$-ի կոմուտատիվությունը:
Լեմման ապացուցված է:

Թեորեմ 2.6.1: *Դիցուք A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, $S \subset A$ կոմուտատիվ բազմություն է, և $B = \Gamma(\Gamma(S))$: Այդ դեպքում B–ն կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվ է, $S \subset B$ և $\forall x \in B$ համար*

$$\sigma_B(x) = \sigma_A(x) : \tag{2.6.1}$$

Ապացույց: Լեմմա 2.6.1-ից բխում է, որ B–ն կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվ է և $S \subset B$: Թեորեմի պնդումը համարժեք է

$$B^{-1} = A^{-1} \cap B \tag{2.6.2}$$

հավասարությանը: Իսկապես, դիցուք $\forall x \in B$ համար տեղի ունի (2.6.1)–ը: Եթե $b \in B^{-1}$, ապա $0 \notin \sigma_B(b)$ և (2.6.1)–ից կբխի, որ $0 \notin \sigma_A(b)$, կամ որ նույնն է՝ $b \in A^{-1}$: Քանի որ $B^{-1} \subset B$, ուստի $b \in B$ և հետևաբար $b \in A^{-1} \cap B$: Այսպիսով, $B^{-1} \subset A^{-1} \cap B$ (սա պարզ էր նաև A^{-1}, B^{-1}–ի սահմանումներից): Մյուս կողմից նկատենք, որ $A^{-1} \cap B \subset B^{-1}$: Իրոք, դիցուք $b \in A^{-1} \cap B$: Այդ դեպքում $0 \notin \sigma_A(b)$ և (2.6.1) պայմանից կբխի, որ $0 \notin \sigma_B(b)$, ուստի $b \in B^{-1}$: Հետևաբար տեղի ունի (2.6.2)–ը:

Հակառակը, եթե (2.6.2)–ը տեղի ունի, ապա որևէ $x \in B$, $\lambda \in \mathbb{C}$ համար $\lambda e - x \notin B^{-1}$ պայմանը համարժեք է

$$\lambda e - x \notin A^{-1} \cap B$$

պայմանին, ինչը $x \in B$ շնորհիվ համարժեք է $\lambda e - x \notin A^{-1}$ պայմանին: Հետևաբար տեղի ունի (2.6.1)–ը:

Ցույց տանք (2.6.2)–ը: Ակնհայտորեն միշտ տեղի ունի

$$B^{-1} \subset A^{-1} \cap B$$

ներդրումը, ցույց տանք, որ նաև

$$A^{-1} \cap B \subset B^{-1} :$$

Դիցուք $x \in A^{-1} \cap B$: Քանի որ $x \in B$, ուստի

$$xy = yx \quad (\forall y \in \Gamma(S)) :$$

Այստեղից կբխի, որ

$$yx^{-1} = x^{-1}y \quad (\forall y \in \Gamma(S)),$$

այսինքն՝ $x^{-1} \in B$: Սա էլ նշանակում է, որ $x \in B^{-1}$:
Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 2.6.2: *Դիցուք A–ն բանախյան հանրահաշիվ է, $x, y \in A$ և $xy = yx$: Այդ դեպքում՝*

$$\sigma(x+y) \subset \sigma(x) + \sigma(y) \quad \text{և} \quad \sigma(xy) \subset \sigma(x)\sigma(y) :$$

Ապացույց: Նշանակենք $S = \{x, y\}$, $B = \Gamma(\Gamma(S))$: Ըստ պայմանի՝ S–ը կոմուտատիվ է, ուստի 2.6.1 լեմմայի համաձայն B–ն կլինի կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվ: Ունենք $x+y, xy \in B$: Ըստ նախորդ թեորեմի՝ բավական է ցույց տալ, որ

$$\sigma_B(x+y) \subset \sigma_B(x) + \sigma_B(y), \quad \sigma_B(xy) \subset \sigma_B(x)\sigma_B(y) :$$

Քանի որ B հանրահաշիվը կոմուտատիվ է, ուստի ցանկացած $z \in B$ էլեմենտի $\sigma_B(z)$ սպեկտրը համընկնում է $\hat{z}$ Գելֆանդի ձևափոխության ընդունած արժեքների բազմության (պատկերի) հետ: Ուստի թեորեմի պնդումը բխում է

$$(x+y)\hat{} = \hat{x} + \hat{y}, \quad (xy)\hat{} = \hat{x}\hat{y}$$

հավասարություններից:
Թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում 2.6.3: Դիցուք A–ն ինվոլյուտիվ հանրահաշիվ է: $x \in A$ էլեմենտը կոչվում է նորմալ, եթե $xx^* = x^*x$: $S \subset A$ բազմությունը կոչվում է նորմալ, եթե S–ը կոմուտատիվ է և $\forall x \in S$ համար $x^* \in S$:

Օգտվելով Ցորնի լեմմայից՝ հեշտությամբ համոզվում ենք, որ ամեն մի նորմալ ենթաբազմություն պարունակվում է մի ինչ–որ մաքսիմալ նորմալ ենթաբազմության մեջ:

Թեորեմ 2.6.3: *Դիցուք A–ն ինվոլյուտիվ բանախյան հանրահաշիվ է, իսկ $B \subset A$ մաքսիմալ նորմալ ենթաբազմություն է: Այդ*

դեպքում՝
1) B–ն A–ում միավորով փակ կոմուտատիվ ենթահանրահաշիվ է,
2) $\sigma_B(x) = \sigma_A(x) \quad (\forall x \in B)$:

Ապացույց: Նախ ապացուցենք B–ին պատկանելու հետևյալ հայտանիշը. *եթե $x \in A$ նորմալ է և ցանկացած $y \in B$ համար $xy = yx$, ապա $x \in B$:*

Իրոք, դիցուք $x \in A$ էլեմենտը բավարարում է վերը նշված պայմաններին: Քանի որ $\forall y \in B \Rightarrow y^* \in B$, ուստի

$$xy^* = y^*x \quad (\forall y \in B)$$

որտեղից՝

$$(xy^*)^* = (y^*x)^* \quad (\forall y \in B),$$

$$yx^* = x^*y \quad (\forall y \in B):$$

Հետևաբար $B \cup \{x, x^*\}$ բազմությունը կլինի նորմալ: Քանի որ B–ն մաքսիմալ է, ուստի $B = B \cup \{x, x^*\}$, և հետևաբար $x \in B$:

Եթե օգտվենք նշված հայտանիշից, ապա պարզ կդառնա, որ $\forall x, y \in B$ և $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ համար $x + y, xy, \lambda x \in B$ և $e \in B$ (չէ՞ որ $e = e^*$): Ուստի B–ն միավորով կոմուտատիվ հանրահաշիվ է:

Այժմ ցույց տանք, որ B–ն փակ է՝ $\overline{B} \subset B$: Իրոք, դիցուք $x \in \overline{B}$ և $\{x_n\}_1^\infty \subset B$, $x_n \to x$:

$$x_n y = y x_n \quad (y \in B)$$

հավասարությունից և արտադրյալի անընդհատությունից կբխի, որ

$$xy = yx \quad (y \in B):$$

Քանի որ $\forall y \in B$ համար $y^* \in B$, ուստի նաև $xy^* = y^*x$, և կունենանք

$$x^*y = (y^*x)^* = (xy^*)^* = yx^*:$$

Մասնավորապես (վերցնելով $y = x_n$) կստանանք

$$x^*x_n = x_n x^* \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

որտեղից և արտադրյալի անընդհատությունից կբխի, որ $x^*x = xx^*$: Հետևաբար, վերը B–ին պատկանելու համար մեր ապացուցված հայտանիշից կբխի, որ $x \in B$:

2) Ինչպես 2.6.1 թեորեմի ապացույցի ընթացքում տեսանք,

$$\sigma_B(x) = \sigma_A(x) \quad (\forall x \in B) \tag{2.6.3}$$

պնդումը համարժեք է

$$B^{-1} = A^{-1} \cap B$$

հավասարությանը: Քանի որ միշտ $B^{-1} \subset A^{-1} \cap B$, ուստի (2.6.3)–ը համարժեք է

$$A^{-1} \cap B \subset B^{-1} \tag{2.6.4}$$

առնչությանը:

Ցույց տանք (2.6.4)–ը: Դիցուք $x \in A^{-1} \cap B$: Քանի որ $x \in B$, ուստի x–ը նորմալ է, և հետևաբար x^{-1}–ը ևս նորմալ է: Քանի որ

$$xy = yx \quad (\forall y \in B),$$

ուստի

$$x^{-1}y = yx^{-1} \quad (\forall y \in B)$$

և վերը B–ին պատկանելու համար մեր ապացուցած հայտանիշից կբխի, որ $x^{-1} \in B$, հետևաբար $x \in B^{-1}$:
Թեորեմն ապացուցված է:

§ 2.7. Կիրառություններ B^*–հանրահաշիվներում

Սահմանում 2.7.1: Դիցուք A–ն ինվոլյուտիվ բանախյան հանրահաշիվ է, իսկ $x \in A$: Կասենք (ինվոլյուցիայի նկատմամբ) $x \geqslant 0$, եթե $x = x^*$ և $\sigma(x) \subset [0, \infty)$:

Թեորեմ 2.7.1: *Դիցուք A–ն B^* հանրահաշիվ է: Այդ դեպքում՝*

1) սիմետրիկ էլեմենտներն ունեն իրական սպեկտր,

2) եթե $x \in A$ էլեմենտը նորմալ է, ապա $\rho(x) = \|x\|$,

3) եթե $y \in A$, ապա $\rho(yy^*) = \|y\|^2$,

4) եթե $u, v \geqslant 0$, ապա $u + v \geqslant 0$ $(u, v \in A)$,
5) եթե $y \in A$, ապա $yy^* \geqslant 0$,
6) եթե $y \in A$, ապա $e + yy^* \in A^{-1}$:

Ապացույց: Ցանկացած $x \in A$ նորմալ էլեմենտ պարունակվում է մի ինչ–որ $B \subset A$ մաքսիմալ նորմալ բազմության մեջ: Այդ դեպքում B–ն կոմուտատիվ B^*–հանրահաշիվ է և հետևաբար Գելֆանդի ձևափոխությունը, համաձայն Գելֆանդ–Նայմարկի թեորեմի, B–ն իզոմորֆ–իզոմետրիկ կերպով արտապատկերում է $\hat{B} = C(\mathcal{M}_B)$ հանրահաշվի վրա: Ինչպես գիտենք՝

$$\sigma_B(z) = \hat{z}(\mathcal{M}_B) \quad (z \in B) : \tag{2.7.1}$$

Բայց քանի որ B–ն մաքսիմալ նորմալ բազմություն է, ուստի $\sigma_A(z) = \sigma_B(z)$ և հետևաբար՝

$$\sigma_A(z) = \hat{z}(\mathcal{M}_B) \quad (z \in B) : \tag{2.7.2}$$

1) Եթե $x = x^*$, ապա ըստ Գելֆանդ–Նայմարկի թեորեմի՝ $\hat{x}$–ը $\mathcal{M}_B$–ի վրա իրական արժեքանի ֆունկցիա է, և (2.7.2)–ից կբխի, որ

$$\sigma(x) = \sigma_A(x) \subset \mathbb{R} :$$

2) Եթե x–ը նորմալ է, ապա (2.7.2)–ից բխում է, որ $\rho(x) = \|\hat{x}\|_\infty$: Քանի որ B–ն և $\hat{B}$–ը իզոմետրիկորեն իզոմորֆ են, ուստի

$$\|\hat{x}\|_\infty = \|x\|,$$

և հետևաբար՝ $\rho(x) = \|x\|$:

3) Եթե $y \in A$, ապա $x = yy^*$ էլեմենտը սիմետրիկ է, և 2)–ից կբխի, որ

$$\rho(yy^*) = \|yy^*\| = \|y\|^2$$

(վերջին քայլը բխում է նրանից, որ A–ն B^*-հանրահաշիվ է):
4) Դիցուք $u, v \in A$ և $u, v \geqslant 0$: Նշանակենք $\alpha = \|u\|$, $\beta = \|v\|$, $w = u + v$, $\gamma = \alpha + \beta$: Այդ դեպքում $\sigma(u) \subset [0, \alpha]$: Նկատենք, որ

$$\sigma(\alpha e - u) \subset [0, \alpha] :$$

Իրոք,

$$\lambda e - (\alpha e - u) = -\left[(\alpha - \lambda)e - u\right],$$

և քանի որ $\sigma(u) \subset [0, \alpha]$, ուստի $\alpha - \lambda \notin [0, \alpha]$ դեպքում $\lambda e - (\alpha e - u) \in A^{-1}$ և հետևաբար՝

$$\sigma(\alpha e - u) \subset \{\lambda : \ \alpha - \lambda \in [0, \alpha]\} = [0, \alpha] :$$

Այստեղից կբխի, որ

$$\rho(\alpha e - u) \leqslant \alpha,$$

և օգտվելով 2)–ից բխող $\rho(\alpha e - u) = \|\alpha e - u\|$ առնչությունից՝ կստանանք

$$\|\alpha e - u\| \leqslant \alpha :$$

Ճիշտ նույն ձևով ցույց կտանք, որ

$$\|\beta e - v\| \leqslant \beta :$$

Հետևաբար

$$\|\gamma e - w\| \leqslant \|\alpha e - u\| + \|\beta e - v\| \leqslant \alpha + \beta = \gamma,$$

$$\|\gamma e - w\| \leqslant \gamma : \tag{2.7.3}$$

Քանի որ $w = w^*$, ուստի 1)–ից բխում է, որ

$$\sigma(\gamma e - w) \subset \mathbb{R}$$

(չէ՞ որ կունենանք $(\gamma e - w)^* = \gamma e - w$): (2.7.3)–ից կբխի, որ

$$\sigma(\gamma e - w) \subset [-\gamma, \gamma] : \tag{2.7.4}$$

Բայց սպեկտրների արտապատկերման մասին թեորեմից բխում է, որ

$$\sigma(w) = \gamma - \sigma(\gamma e - w),$$

ուստի (2.7.4)–ից կստանանք $\sigma(w) \subset [0, 2\gamma]$, և հետևաբար՝ $w \geqslant 0$:
5) Նշանակենք $x = yy^*$: Այդ դեպքում $x^* = x$: Դիցուք B–ն նույնն է, ինչ–որ ապացույցի սկզբում էր: Այդ դեպքում, ինչպես

1)–ն ապացուցելիս պետանք, $\hat{x}$–ը $\mathcal{M}_B$–ի վրա իրական ֆունկցիա է: (2.7.2)–ի շնորհիվ մեզ մնում է ցույց տալ, որ $\mathcal{M}_B$-ի վրա $\hat{x} \geqslant 0$:

Քանի որ $\hat{B} = C(\mathcal{M}_B)$, ուստի $\exists z \in B$, որ

$$\hat{z} = |\hat{x}| - \hat{x} : \tag{2.7.5}$$

Այդ դեպքում $\hat{z}$–ը կլինի իրական, ուստի ըստ Գելֆանդ–Նայմարկի թեորեմի՝ $z = z^*$: Նշանակենք $w = zy$ և w–ն ներկայացնենք

$$w = u + iv$$

տեսքով, որտեղ u, v սիմետրիկ են: Այդ դեպքում

$$ww^* = zyy^*z^* = zxz = z^2x \tag{2.7.6}$$

(օգտվեցինք նրանից, որ $z, x \in B$ շնորհիվ $zx = xz$), և հետևաբար

$$\begin{aligned} w^*w = (u - iv)(u + iv) = 2u^2 + 2v^2 - (u + iv)(u - iv) = \\ = 2u^2 + 2v^2 - ww^* = 2u^2 + 2v^2 - z^2x : \end{aligned} \tag{2.7.7}$$

Քանի որ $u = u^*$, ուստի $\sigma(u) \subset \mathbb{R}$: Այստեղից և սպեկտրների արտապատկերման թեորեմից կբխի, որ $u^2 \geqslant 0$: Ճիշտ նույն ձևով ցույց կտանք, որ $v^2 \geqslant 0$: (2.7.5)–ից պարզ է, որ $\mathcal{M}_B$-ի վրա $\hat{z}^2\hat{x} \leqslant 0$: Իրոք, քանի որ $\hat{x}$–ը իրական է, ուստի

$$\hat{z}^2\hat{x} = (|\hat{x}| - \hat{x})^2\,\hat{x} = \left(|\hat{x}|^2 - 2\,|\hat{x}|\,\hat{x} + \hat{x}^2\right)\hat{x} =$$

$$= \left(2\hat{x}^2 - 2\,|\hat{x}|\,\hat{x}\right)\hat{x} = 2\hat{x}^2\,(\hat{x} - |\hat{x}|) \leqslant 0 :$$

Այստեղից, $z^2x \in B$ պայմանից և (2.7.2)–ից կբխի, որ $-z^2x \geqslant 0$: Հետևաբար (2.7.7)–ից և 4) պնդումից կբխի, որ $w^*w \geqslant 0$: Ըստ 1.8.3 լեմմայի՝

$$\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\},$$

ուստի

$$\sigma(ww^*) \subset \sigma(w^*w) \cup \{0\},$$

որտեղից և $ww^* \geqslant 0$ առնչությունից կբխի, որ $ww^* \geqslant 0$: (2.7.6)–ից և (2.7.1)–ից կբխի, որ $\hat{z}^2\hat{x} \geqslant 0$: Բայց քիչ առաջ պեսանք, որ նաև $\hat{z}^2\hat{x} \leqslant 0$, ուստի $\hat{z}^2\hat{x} = 0$: Ինչպես վերը պեսանք՝ $\hat{z}^2\hat{x} = 2\hat{x}^2\left(\hat{x} - |\hat{x}|\right)$, ուստի $\mathcal{M}_B$–ի վրա

$$2\hat{x}^2\left(\hat{x} - |\hat{x}|\right) = 0 : \tag{2.7.8}$$

Հետևաբար $\mathcal{M}_B$–ի վրա

$$\hat{x} = |\hat{x}| \tag{2.7.9}$$

((2.7.8)–ից բխում է, որ $\mathcal{M}_B$–ի յուրաքանչյուր կետում $2\hat{x}^2$ կամ $\hat{x} - |\hat{x}|$ արտադրիչներից գոնե մեկը 0 է, սակայն պարզ է, որ եթե որևէ կետում 0 է դառնում առաջին արտադրիչը, ապա երկրորդը ևս այդ կետում կդառնա 0):

(2.7.9)–ից կբխի, որ $\hat{x} \geqslant 0$, որտեղից և (2.7.2)–ից կստանանք $\sigma(x) \subset [0, +\infty)$:

6) Ունենք

$$\sigma\left(e + yy^*\right) = 1 + \sigma\left(yy^*\right) :$$

Ըստ 5)–ի՝ $\sigma\left(yy^*\right) \subset [0, +\infty)$, ուստի $\sigma\left(e + yy^*\right) \subset [1, +\infty)$, և հետևաբար՝ $0 \notin \sigma\left(e + yy^*\right)$: Սա էլ հենց նշանակում է, որ $e + yy^* \in A^{-1}$:

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 2.7.2: *Դիցուք A–ն B^*-հանրահաշիվ է, իսկ $B \subset A$ այնպիսի փակ ենթահանրահաշիվ է, որ $e \in B$, և $\forall x \in B$ համար $x^* \in B$: Այդ դեպքում*

$$\sigma_A(x) = \sigma_B(x) \quad (\forall x \in B) :$$

Ապացույց: Ինչպես 2.6.3 թեորեմի 2) կետի ապացույցի ընթացքում նշվեց, բավական է ցույց տալ, որ

$$A^{-1} \cap B \subset B^{-1} :$$

Ցույց տանք վերջինս: Դիցուք $x \in A^{-1} \cap B$: Այդ դեպքում կունենանք նաև, որ $x^* \in A^{-1} \cap B$ և հետևաբար՝

$$xx^* \in A^{-1} \cap B :$$

Ըստ նախորդ թեորեմի՝ $\sigma_A(xx^*) \subset (0,\infty)$: Ուստի $\sigma_A(xx^*)$-ի լրացումը $\mathbb{C}$–ում կլինի կապակցված և 1.8.4 հետևանքից կբխի, որ $\sigma_B(xx^*) = \sigma_A(xx^*)$: Ապացվեց, որ $\sigma_B(xx^*) \subset (0,\infty)$, և հետևաբար $0 \notin \sigma_B(xx^*)$, ինչը նշանակում է, որ $xx^* \in B^{-1}$:

Ունենք
$$x^{-1} = x^*(x^*)^{-1}x^{-1} = x^*(xx^*)^{-1},$$
ուստի կստանանք $x^{-1} \in B$, և հետևաբար՝ $x \in B^{-1}$:
Թեորեմն ապացուցված է:

Գլուխ 3

ԳԾԱՅԻՆ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐ ՀԻԼԲԵՐՏՅԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

§ 3.1. Նախնական տեղեկություններ

Թեորեմ 3.1.1: *Դիցուք $\{x_n\}$–ը H հիլբերտյան տարածությունում վեկտորների զույգ առ զույգ օրթոգոնալ հաջորդականություն է: Այդ դեպքում հետևյալ երեք պնդումներն իրար համարժեք են՝*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *շարքը H–ի նորմով զուգամետ է,*

2) $\forall y \in H$ *համար* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n, y)$ *շարքը զուգամետ է,*

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$*:*

Ապացույցը տանենք 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1) սխեմայով:
1) $\Rightarrow$ 2) Սա անմիջապես բխում է սկալյար արտադրյալի անընդհատությունից:
2) $\Rightarrow$ 3) Սահմանենք $\Lambda_n \in H^*$ ֆունկցիոնալները

$$\Lambda_n y = \sum_{i=1}^{n}(y, x_i) \quad (y \in H, \ \ n = 1, 2, \ldots)$$

բանաձևերով: 2) պայմանից բխում է, որ $\forall y \in H$ համար $\{\Lambda_n y\}$ թվային հաջորդականությունը զուգամետ է և հետևաբար սահմանափակ է: Ըստ Բանախ–Շտեյնհաուսի թեորեմի՝ $\{\|\Lambda_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է: Բայց $\Lambda_n y = \left(y, \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)$, ուստի

$$\|\Lambda_n\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| = \left[\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

հետևաբար,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 < \infty :$$

3) $\Rightarrow$ 1) Ունենք

$$\left\|\sum_{i=1}^{n+m} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \left\|\sum_{i=n+1}^{n+m} x_i\right\|^2 = \left(\sum_{i=n+1}^{n+m} x_i, \sum_{k=n+1}^{n+m} x_k\right) =$$

$$= \sum_{i=n+1}^{n+m} \sum_{k=n+1}^{n+m} (x_i, x_k) = \sum_{i=n+1}^{n+m} \|x_i\|^2 \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0, \quad m \in \mathbb{N}$$

ուստի $\sum_{i=1}^{n} x_i$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է և հետևաբար՝ զուգամետ է:

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 3.1.2: *Եթե H–ը կոմպլեքս հիլբերտյան տարածություն է*[6], $\overline{\mathcal{D}}_T = H$ *և* $T : \mathcal{D}_T \to H$ *գծային օպերատորն այնպիսին է, որ*

$$(Tx, x) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_T),$$

ապա $T = 0$*:*

Ապացույց: $\forall x, y \in \mathcal{D}_T$ և $\alpha \in \mathbb{C}$ համար ունենք

$$(T(x + \alpha y), x + \alpha y) = 0,$$

$$(Tx, x) + \overline{\alpha}(Tx, y) + \alpha(Ty, x) + |\alpha|^2(Ty, y) = 0,$$

որը, օգտվելով

$$(Tx, x) = (Ty, y) = 0$$

հավասարությունից, կարող ենք գրել

$$\overline{\alpha}(Tx, y) + \alpha(Ty, x) = 0$$

[6]Այսուհետև մենք կդիտարկենք միայն կոմպլեքս հիլբերտյան տարածություն–ները:

պարզեցված տեսքով: Վերցնելով $\alpha = 1$ և $\alpha = i$, կունենանք

$$\begin{cases} \quad (Tx,\, y) + (Ty,\, x) = 0, \\ -(Tx,\, y) + (Ty,\, x) = 0, \end{cases}$$

որտեղից կստանանք

$$(Tx, y) = 0 \quad (\forall x, y \in \mathcal{D}_T) :$$

Սկալյար արտադրյալի անընդհատությունից և $\overline{\mathcal{D}}_T = H$ պայմանից կբխի, որ

$$(Tx, y) = 0 \quad (\forall x \in \mathcal{D}_T, \;\; \forall y \in H) :$$

Այստեղ ֆիքսելով x–ը և վերցնելով $y = Tx$, կստանանք $Tx = 0$ ($\forall x \in \mathcal{D}_T$): Ուստի $T = 0$:
Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք 3.1.1 (Միակության թեորեմ): *Եթե H կոմպլեքս հիլբերտյան տարածության վրա որոշված S և T գծային օպերատորներն այնպիսին են, որ*

$$(Sx, x) = (Tx, x) \quad (x \in H),$$

ապա $S = T$:

Ապացուցելու համար նախորդ թեորեմը կկիրառենք $S - T$ օպերատորի վրա: ►

$T \in BL(H)$ համար կնշանակենք

$$\ker(T) = \{x \in H : \; Tx = 0\}, \quad \mathrm{Im}(T) = T(H) :$$

Լեմմա 3.1.1: $\forall T \in BL(H)$ *համար*

$$\ker(T^*) = [\mathrm{Im}(T)]^{\perp} \quad \textit{և} \quad \ker(T) = [\mathrm{Im}(T^*)]^{\perp} :$$

Ապացույց: Հետևյալ չորս պնդումներից յուրաքանչյուրն ակնհայտորեն համարժեք է իր հաջորդին և (կամ) նախորդին.

$$T^* y = 0,$$

$$(x, T^*y) = 0 \quad (\forall x \in H),$$
$$(Tx, y) = 0 \quad (\forall x \in H)\,,$$
$$y \in [\mathrm{Im}(T)]^{\perp}\,:$$

Հետևաբար՝
$$\ker(T^*) = [\mathrm{Im}(T)]^{\perp}\,:$$

Քանի որ $T^{**} = T$, ուստի թեորեմի երկրորդ պնդումը բխում է առաջինից, եթե նրանում T–ն փոխարինենք T^*–ով:
Լեմման ապացուցված է:

Սահմանում 3.1.1: $T \in BL(H)$ օպերատորը կոչվում է՝
ա) նորմալ, եթե $TT^* = T^*T$,
բ) ինքնահամալուծ (կամ հերմիտյան, սիմետրիկ), եթե $T^* = T$,
գ) ունիտար, եթե $T^*T = I = TT^*$, որտեղ I–ն նույնական արտապատկերումն է H տարածությունում,
դ) պրոյեկտոր, եթե $T^2 = T$:

Պարզ է, որ ինքնահամալուծ և ունիտար օպերատորները նորմալ են:

Թեորեմ 3.1.3: *Դիցուք $T \in BL(H)$: Այդ դեպքում՝*
1) T–ն նորմալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ
$$\|Tx\| = \|T^*x\| \quad (\forall x \in H)\,;$$
2) Եթե T օպերատորը նորմալ է, ապա $\ker(T) = \ker(T^*) = [\mathrm{Im}(T)]^{\perp}$;
3) Եթե T–ն նորմալ է, և որևէ $x \in H$ ու $\alpha \in \mathbb{C}$ համար $Tx = \alpha x$, ապա $T^*x = \overline{\alpha}x$;
4) Եթե T օպերատորը նորմալ է, իսկ α–ն և β–ն T օպերատորի՝ իրարից տարբեր սեփական արժեքներ են, ապա դրանց համապատասխան սեփական ենթատարածությունները օրթոգոնալ են:

Ապացույց: 1)–ն անմիջապես բխում է
$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (T^*Tx, x)$$

$$\|T^*x\|^2 = (T^*x, T^*x) = (TT^*x, x)$$

հավասարություններից և 3.1.1 հետևանքից:
2) պնդումը բխում է 1) պնդումից և 3.1.1 լեմմայից:
3) Եթե T–ն նորմալ է, ապա $T - \alpha I$ օպերատորը ևս նորմալ է, ուստի 2)–ից կբխի, որ

$$\ker(T - \alpha I) = \ker\left(T^* - \overline{\alpha} I\right),$$

որտեղից էլ կբխի 3)–ը:
4) Դիցուք $Tx = \alpha x$, $Ty = \beta y$, օգտվելով 3)–ից, կունենանք

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, y) = (Tx, y) = (x, T^*y) = \left(x, \overline{\beta} y\right) = \beta(x, y),$$

$$(\alpha - \beta)(x, y) = 0,$$

և քանի որ $\alpha \neq \beta$, ուստի $x \perp y$:
Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 3.1.4: *Եթե $U \in BL(H)$, ապա հետևյալ երեք պայմանները համարժեք են՝*
1) U-ն ունիտար օպերատոր է,
2) $\mathrm{Im}(U) = H$ և $(Ux, Uy) = (x, y)$ $(\forall x, y \in H)$,
3) $\mathrm{Im}(U) = H$ և $\|Ux\| = \|x\|$ $(\forall x \in H)$:

Ապացույցը տանենք 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1) սխեմայով:
1) $\Rightarrow$ 2): Քանի որ $UU^* = I$, ուստի $\mathrm{Im}(U) = H$: Ունենք նաև, որ $U^*U = I$, ուստի

$$(Ux, Uy) = (x, U^*Uy) = (x, y):$$

2) $\Rightarrow$ 3): Սա ակնհայտ է:
3) $\Rightarrow$ 1): $\forall x \in H$ համար

$$(U^*Ux, x) = (Ux, Ux) = \|Ux\|^2 = \|x\|^2 = (x, x),$$

ուստի 3.1.1 հետևանքից կբխի, որ $U^*U = I$: Բայց 3)–ից բխում է, որ U–ն $BL(H)$ բանախյան հանրահաշվի հակադարձելի էլեմենտ է՝ $U^{-1}U = UU^{-1} = I$, ուստի $U^*U = I$ առնչությունից կբխի, որ $U^* = U^{-1}$ և և հետևաբար՝

$$U^*U = UU^* = I :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 3.1.5: *Դիցուք $P \in BL(H)$ պրոյեկտոր է: Այդ դեպքում հետևյալ չորս պնդումներն իրար համարժեք են՝*

1) P–ն ինքնահամալուծ է;

2) P–ն նորմալ է;

3) $\mathrm{Im}(P) = [\ker(P)]^{\perp}$, [7]

4) $(Px, x) = \|Px\|^2 \quad (\forall x \in H)$*:*

Ապացույցը կապարենք 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 1) սխեմայով:

1) $\Rightarrow$ 2) պնդումն ակնհայտ է:

2) $\Rightarrow$ 3): 3.1.3 թեորեմի 2–րդ պնդումից կբխի, որ

$$\ker(P) = [\mathrm{Im}(P)]^{\perp} :$$

Քանի որ P–ն պրոյեկտոր է, ուստի $\mathrm{Im}(P) = \ker(I - P)$, և հետևաբար $\mathrm{Im}(P)$–ն փակ է: Ուստի $\mathrm{Im}(P) = [\ker(P)]^{\perp}$:

3) $\Rightarrow$ 4): Վերցնենք կամայական $x \in H$ վեկտոր և այն ներկայացնենք

$$x = y + z$$

տեսքով, որտեղ $z \in \mathrm{Im}(P)$, $y \in \ker(P)$: Կունենանք $z = Ph$, որտեղ $h \in H$: Հետևաբար

$$Pz = P^2h = Ph = z :$$

Քանի որ $z \perp y$, ուստի $Py = 0$ պայմանից կբխի, որ

$$\|Px\|^2 = (Px, Px) = (Py + Pz, Py + Pz) = (Pz, Pz) = (Pz, z) =$$

$$= (P(x - y), x - y) = (Px - Py, x - y) = (Px, x) - (Px, y) =$$

[7] $\mathrm{Im}(P) = [\ker(P)]^{\perp}$ պայմանի հետ կապված հաճախ ասում են, որ P–ն օրթոպրոյեկտոր է:

$$= (Px, x) - (Py + Pz, y) = (Px, x) - (z, y) = (Px, x) :$$

4) $\Rightarrow$ 1): $\forall x \in H$ համար

$$(P^* x, x) = \overline{(x, P^* x)} = \overline{(Px, x)} = \overline{\|Px\|^2} = \|Px\|^2 = (Px, x),$$

ուստի 3.1.1 հետևանքից կբխի, որ $P^* = P$:
Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 3.1.6: *Դիցուք $S, T \in BL(H)$, ընդ որում S–ը ինքնահամալուծ է: Այդ դեպքում որպեսզի $ST = 0$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ*

$$\mathrm{Im}(S) \perp \mathrm{Im}(T) :$$

Ապացույցը բխում է $(Sx, Ty) = (x, STy)$ հավասարությունից:
Թեորեմն ապացուցված է:

Խնդիր: Դիցուք X–ը բանախյան տարածություն է, $S(X)$–ը X–ի միավոր սֆերան է, իսկ $\mathcal{F} = \{U\}$ իզոմետրիկ օպերատորների խումբ է: Կասենք $\mathcal{F}$–ը գործում է տրանզիտիվ $S(X)$–ի վրա, եթե $\forall x, y \in S(X)$ համար $\exists U \in \mathcal{F}$, որ $Ux = y$:

Հայտնի է (տես՝ [13]), որ եթե X–ը վերջավոր չափանի է և գոյություն ունի $S(X)$–ի վրա տրանզիտիվ գործող $\mathcal{F}$ իզոմետրիկ օպերատորների խումբ, ապա X–ը հիլբերտյան տարածություն է (սա ոչ տրիվիալ, նուրբ արդյունք է): Հարցը կայանում է նրանում, թե արդյո՞ք անվերջ չափանի դեպքում ևս սա ճիշտ է (պատասխանը հայտնի չէ): ►

§ 3.2. Թեորեմ տեղափոխելիության մասին

Այս ենթավերնագրի տակ ևս կհամարենք, որ H–ը կոմպլեքս հիլբերտյան տարածություն է:

Թեորեմ 3.2.1 (Ֆուգլիդ–Պուտնամ–Ռոզենբլյում): *Դիցուք $M, N, T \in BL(H)$, ընդ որում M և N օպերատորները նորմալ են: Այդ դեպքում, եթե*

$$MT = TN, \tag{3.2.1}$$

ապա

$$M^* T = TN^* : \tag{3.2.2}$$

Ապացույց: Դիցուք $S \in BL(H)$ կամայական օպերատոր է: Վերցնենք $V = S - S^*$ և դիտարկենք

$$Q = \exp(V) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} V^n \tag{3.2.3}$$

օպերատորը: Այդ դեպքում $V^* = -V$, և հետևաբար՝

$$Q^* = \exp(V^*) = \exp(-V) = Q^{-1} : \tag{3.2.4}$$

Հետևաբար, Q–ն ունիտար է: Այսպիսով՝

$$\|\exp(S - S^*)\| = 1 \quad (\forall S \in BL(H)) : \tag{3.2.5}$$

(3.2.1)–ից ըստ k–ի ինդուկցիայով կստանանք, որ

$$M^k T = T N^k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) :$$

Հետևաբար

$$\exp(M)T = T \exp(N), \tag{3.2.6}$$

կամ՝

$$T = \exp(-M)T \exp(N) : \tag{3.2.7}$$

Նշանակենք $U_1 = \exp\left(M^* - M\right)$, $U_2 = \exp\left(N - N^*\right)$: Քանի որ M–ը և N–ը նորմալ են, ուստի

$$\exp\left(M^*\right) \exp(-M) = \exp\left(M^* - M\right),$$

$$\exp\left(N\right) \exp(-N^*) = \exp\left(N - N^*\right),$$

որտեղից և (3.2.7)-ից կունենանք

$$\exp\left(M^*\right) T \exp\left(-N^*\right) = U_1 T U_2 : \tag{3.2.8}$$

(3.2.5)–ից բխում է, որ $\|U_1\| = \|U_2\| = 1$, որտեղից և (3.2.8)–ից կստանանք

$$\|\exp(M^*)T \exp\left(-N^*\right)\| \leqslant \|T\| \tag{3.2.9}$$

անհավասարությունը: Նշանակենք

$$f(\lambda) = \exp(\lambda M^*)\, T\, \exp(-\lambda N^*) \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

(սա հիշեցնում է § 1.8-ում ապացուցված՝ Լեպաժի թեորեմում դիտարկված օժանդակ ֆունկցիան): M և N օպերատորների հետ մեկտեղ $\overline{\lambda} M$ և $\overline{\lambda} N$ օպերատորները ևս նորմալ են, ու բավարարում են

$$(\overline{\lambda} M)\, T = T\, (\overline{\lambda} N)$$

պայմանին, ուստի (3.2.9)–ում M–ը և N–ը կարելի է փոխարինել համապատասխանաբար $\overline{\lambda} M$–ով և $\overline{\lambda} N$–ով, և արդյունքում կստանանք, որ

$$\|f(\lambda)\| \leqslant \|T\| \quad (\forall \lambda \in \mathbb{C}) : \tag{3.2.10}$$

Բայց f–ը $\mathbb{C}$–ում՝ ամբողջ (ուժեղ անալիտիկ) $BL(H)$ արժեքանի ֆունկցիա է, ուստի (3.2.10)–ից և Լիուվիլի թեորեմից կբխի, որ f–ը հաստատուն է՝

$$f(\lambda) = f(0) \quad (\forall \lambda \in \mathbb{C}) :$$

Հետևաբար

$$f'(\lambda) = 0 \quad (\forall \lambda \in \mathbb{C}) : \tag{3.2.11}$$

Բայց հեշտ է տեսնել, որ

$$f'(\lambda) = \exp(\lambda M^*)\,(M^* T - T N^*)\, \exp(-\lambda N^*)\,,$$

ուստի (3.2.11)–ում վերցնելով $\lambda = 0$, կստանանք

$$M^* T - T N^* = 0,$$

որտեղից էլ կստացվի (3.2.2)–ը:
Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն 3.2.1: Վերանայելով 3.2.1 թեորեմի ապացույցը՝ նկատում ենք, որ այդ ապացույցում օգտագործվում են $BL(H)$–ի միայն այն հատկությունները, որոնք նշանակում են, որ այն B^*-հանրահաշիվ է: Ուստի 3.2.1 թեորեմի ապացույցը կարելի է բառացիորեն անցկացնել B^*-հանրահաշիվների համար: Այս հան–գամանքը, սակայն, ըստ էության չի բերում 3.2.1 թեորեմի ընդ–հանրացման, քանի որ, ինչպես մենք հետագայում կտեսնենք, ցանկացած B^*-հանրահաշիվ կարելի է ինվոլյուցիան պահպանող իզոմետրիկական իզոմորֆիզմի ($*$ – իզոմետրիկական իզոմորֆիզմ) միջոցով արտապատկերել մի ինչ–որ H հիլբերտյան տարածության վրա որոշված $BL(H)$ գծային սահմանափակ օպերատորների հանրահաշվի ինչ–որ փակ ենթահանրահաշվի վրա: Նշենք, որ 3.2.1 թեորեմն ունի ընդհանրացում կամայական կոմպլեքս բանախյան հանրահաշիվների համար: ►

§ 3.3. Միավորի վերլուծությունը

Սահմանում 3.3.1: Դիցուք Ω–ն ինչ–որ բազմություն է, իսկ $\mathfrak{M}$–ը Ω–ի ենթաբազմությունների ընտանիք է՝ $\mathfrak{M} \subset 2^{\Omega}$: $\mathfrak{M}$–ը կոչվում է σ–հանրահաշիվ, եթե տեղի ունեն հետևյալ 3 պայմանները.

1) $\Omega \in \mathfrak{M}$,

2) եթե $w \in \mathfrak{M}$, ապա $\Omega \setminus w \in \mathfrak{M}$,

3) եթե $\{w_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$, ապա $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} w_i \in \mathfrak{M}$:

Եթե $\mathfrak{M}$–ը σ–հանրահաշիվ է, ապա $(\Omega, \mathfrak{M})$ զույգը կոչվում է չա–փելի տարածություն:

Սահմանում 3.3.2: Դիցուք $(\Omega, \mathfrak{M})$–ը չափելի տարածություն է, X–ը բանախյան տարածություն է, իսկ $m : \mathfrak{M} \longrightarrow X$: m–ը կոչվում է X արժեքանի (վեկտորական) չափ՝ $\mathfrak{M}$–ի վրա, եթե այն $\mathfrak{M}$–ի վրա σ–ադիտիվ է, այսինքն՝ $\forall \{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$ հաշվելի թվով զույգ առ զույգ չհատվող բազմությունների համար $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} m(w_n)$ շարքը X–ի նորմով զուգամիտում է $m\left(\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} w_n\right)$ վեկտորին՝

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} w_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(w_n) :$$

Հիշենք, որ եթե քիչ առաջ տրված սահմանման մեջ ամենուրեք X–ը փոխարինենք $[0,\infty]$–ով, ապա ստացվում է ոչ բացասական չափի սահմանումը:[8]

Սահմանում 3.3.3: Դիցուք $(\Omega,\mathfrak{M})$–ը չափելի տարածություն է, իսկ H–ը հիլբերտյան տարածություն է: Այդ դեպքում $E:\mathfrak{M}\longrightarrow BL(H)$ արտապատկերումը կոչվում է ($\mathfrak{M}$–ի վրա) միավորի վերլուծություն, եթե այն բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

1) $E(\emptyset)=0$, $E(\Omega)=I$,
2) $\forall w\in\mathfrak{M}$ համար $E(w)$–ն օրթոպրոյեկտոր է,
3) $E\left(w'\cap w''\right)=E\left(w'\right)E\left(w''\right)\quad\left(\forall w',w''\in\mathfrak{M}\right)$,
4) եթե $w'\cap w''=\emptyset$, ապա $E\left(w'\cup w''\right)=E\left(w'\right)+E\left(w''\right)$,
5) $\forall x,y\in H$ համար

$$E_{x,y}(w)=(E(w)x,y)$$

բանաձևով որոշվող ֆունկցիան հանդիսանում է կոմպլեքս չափ՝ $\mathfrak{M}$–ի վրա:

Դիցուք X–ը կոմպակտ կամ լոկալ կոմպակտ հաուսդորֆյան տարածություն է: Ինչպես գիտենք, $\mathcal{B}(X)$ բորելյան բազմությունների դասը սահմանվում է որպես բաց բազմությունները պարունակող մինիմալ σ–հանրահաշիվ (կամ որ նույնն է՝ կոմպակտ բազմությունները պարունակող մինիմալ σ–հանրահաշիվ): $\mathcal{B}(X)$–ի վրա տրված չափերը կոչվում են բորելյան չափեր: Դիցուք $m:\mathcal{B}(X)\to\mathbb{C}$ կոմպլեքս բորելյան չափ է: $|m|:\mathcal{B}(X)\to[0,\infty)$ չափը սահմանենք

$$|m|(E)=\sup\sum_{i=1}^{\infty}\left|m\left(E_i\right)\right|$$

բանաձևով, որտեղ ճշգրիտ վերին եզրը վերցվում է ըստ բոլոր հնարավոր $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\mathcal{B}(X)$ զույգ առ զույգ չհատվող հաշվելի ընտանիքների, որոնց համար

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i=E:$$

[8] Չափի տեսության հետ կապված տես [12], [19], [22], [28] գրքերը:

Ապացուցվում է, որ $|m|$–ը $\mathcal{B}(X)$–ի վրա ոչ բացասական վերջավոր չափ է: Այն կոչվում է m չափի լրիվ վարիացիա: Երբեմն լրիվ վարիացիա են անվանում նաև

$$|m|(X)$$

վերջավոր թիվը (hեշտ է պեսնել, որ $|m|(X) \geqslant |m(X)|$, սակայն պարտադիր չէ, որ $|m|(X) = |m(X)|$):

$\mu : \mathcal{B}(X) \to [0, \infty)$ չափը կոչվում է ռեգուլյար, եթե այն բավարարում է հետևյալ երկու պայմաններին.

1) $\forall E \in \mathcal{B}(X)$ համար

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : \ E \subset V, \ V - \text{բաց է}\},$$

2) $\forall E \in \mathcal{B}(X)$ համար

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : \ K \subset E, \ K - \text{ն կոմպակտ է}\} :$$

$m : \mathcal{B}(X) \to \mathbb{C}$ կոմպլեքս չափը կոչվում է ռեգուլյար, եթե ռեգուլյար է նրա $|m|$ լրիվ վարիացիան:

Այժմ դիցուք 3.3.3 սահմանման մեջ $\mathfrak{M} = \mathcal{B}(X)$: Այդ դեպքում 3.3.3 սահմանման 5) պայմանի մեջ սովորաբար ավելացնում են այն պահանջը, որ $\forall x, y \in H$ համար $E_{x,y}$–ը լինի ռեգուլյար բորելյան չափ:

Բերենք 3.3.3 սահմանման 1)-5) պայմաններից բխող որոշ պարզ հետևանքներ:

Քանի որ $E(w)$ օպերատորներից յուրաքանչյուրը հանդիսանում է օրթոպրոյեկտոր, ուստի

$$E_{x,x}(w) = (E(w)x, x) = \|E(w)x\|^2 \quad (x \in H) :$$

Հետևաբար $E_{x,x}$ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը կլինի $\mathfrak{M}$–ի վրա ոչ բացասական չափ և նրա լրիվ վարիացիան հավասար կլինի՝

$$\|E_{x,x}\| = E_{x,x}(\Omega) = \|x\|^2 :$$

3)–րդ պայմանից բխում է, որ ցանկացած երկու $E(w)$ պրոյեկտորներ փեղափոխելի են:

1) և 3) պայմաններից բխում է, որ $w' \cap w'' = \emptyset$ դեպքում $E(w')$ և $E(w'')$ օպերատորների պատկերները օրթոգոնալ են: 4) պայմանի համաձայն E ֆունկցիան վերջավոր ադիտիվ է: Հարց է ծագում՝ կլինի՞ արդյոք E ֆունկցիան հաշվելի ադիտիվ, այսինքն՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left(w_n\right) \tag{3.3.1}$$

շարքը կզուգամիտի $E(w)$–ին ըստ $BL(H)$–ի նորմի, եթե w–ն հան– դիսանում է $w_n \in \mathfrak{M}$ հաշվելի թվով զույգ առ զույգ չհատվող բազ– մությունների միավորում: Նշանակենք

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} E\left(w_k\right) :$$

Ունենք

$$S_{n+m} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+m} E\left(w_k\right) :$$

Քանի որ $E(w_k)$–երը զույգ առ զույգ օրթոգոնալ օրթոպրոյեկտորներ են, ուստի $(S_{n+m} - S_n)$–ը կլինի օրթոպրոյեկտոր: Հետևաբար

$$\|S_{n+m} - S_n\| = 0$$

կամ

$$\|S_{n+m} - S_n\| = 1 :$$

Ուստի (3.3.1) շարքի մասնակի գումարները կկազմեն $BL(H)$–ում ֆունդամենտալ հաջորդականություն այն և միայն այն դեպքում, երբ $\exists N$ բնական թիվ, որ

$$S_n = S_N \quad (n \geqslant N) :$$ [9]

Ուսումնասիրությունից հանելով այդպիսի պրիմյալ դեպքերը, կու– նենանք, որ E ֆունկցիան երբեք նշված իմաստով σ–ադիտիվ չի լինում:

[9] Սա նշանակում է, որ սկսած որոշ համարից (3.3.1) շարքի անդամները դառ– նում են 0–ական: Դա բխում է նաև $E(w_n) \to 0$ զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանից և նրանից, որ $E(w_n)$–ը օրթոպրոյեկտոր է:

Լեմմա 3.3.1: *Եթե $E : \mathfrak{M} \to BL(H)$ միավորի վերլուծություն է և $x \in H$, ապա*

$$w \longmapsto E(w)x$$

ֆունկցիան հանդիսանում է $\mathfrak{M}$–ի վրա σ–ադիտիվ H արժեքանի չափ:

Ապացույց: Դիցուք $w_n \in \mathfrak{M}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ զույգ առ զույգ չեն հատվում և

$$w = \bigcup_{n=1}^{\infty} w_n :$$

Այդ դեպքում կունենանք

$$\mathrm{Im}\,[E(w_n)] \perp \mathrm{Im}\,[E(w_m)] \quad (n \neq m),$$

ուստի

$$E(w_n)x \perp E(w_m)x \quad (n \neq m) :$$

Ըստ միավորի վերլուծության սահմանման 5) պայմանի՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} (E(w_n)x, y) = (E(w)x, y) \quad (\forall x, y \in H),$$

և քանի որ $\{E(w_n)\}_{n=1}^{\infty}$–ը օրթոգոնալ համակարգ է, ուստի 3.1.1 թեորեմից կբխի, որ H–ի նորմով՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(w_n)x = E(w)x :$$

Լեմման ապացուցված է:

Լեմմա 3.3.2: *Դիցուք $E : \mathfrak{M} \to BL(H)$ միավորի վերլուծություն է: Այդ դեպքում եթե $w_n \in \mathfrak{M}$, $E(w_n) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ և $w = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} w_n$, ապա $E(w) = 0$:*

Ապացույց: Քանի որ $E(w_n) = 0$, ուստի $E_{x,x}(w_n) = 0$, $\forall x \in H$ համար: Քանի որ $E_{x,x}$ չափերից յուրաքանչյուրը σ–ադիտիվ է, ուստի $E_{x,x}(w) = 0$, $\forall x \in H$: Բայց

$$\|E(w)x\|^2 = E_{x,x}(w),$$

ուստի

$$E(w)x = 0, \quad \forall x \in H$$

և հետևաբար $E(w) = 0$:
Լեմման ապացուցված է:

Այժմ դիցուք $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$–ն չափով պարածություն է (μ–ն $\mathfrak{M}$–ի վրա σ-ադիտիվ ոչ բացասական չափ է): $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ֆունկցիան կոչվում է էապես սահմանափակ (μ–ի նկատմամբ), եթե $\exists N \in \mathfrak{M}$, այնպես, որ $\mu(N) = 0$ և f–ը $\Omega \setminus N$–ի վրա սահմանափակ է: Այդ դեպքում

$$\inf_{\substack{N \in \mathfrak{M} \\ \mu(N)=0}} \sup_{s \in \Omega \setminus N} |f(s)|$$

մեծությունը կոչվում է $|f(\cdot)|$–ի էապես ճշգրիտ վերին եզր և նշա–նակվում է

$$\underset{\mu}{vrai} \sup_{s \in \Omega} |f(s)|$$

կամ

$$\sup ess |f(s)|$$

սիմվոլով: եթե f–ը էապես սահմանափակ չէ, համարում են, որ

$$\underset{\mu}{vrai} \sup_{s \in \Omega} |f(s)| = \infty :$$

$L^\infty(\Omega)$–ով կնանակենք բոլոր չափելի էապես սահմանափակ ֆունկ–ցիաների դասը (հաճախ էապես սահմանափակության սահմանման մեջ մտցվում է ֆունկցիայի չափելիության պահանջը): $L^\infty(\Omega)$–ն

$$\|f\|_\infty = \underset{\mu}{vrai} \sup_{s \in \Omega} |f(s)|$$

նորմի նկատմամբ հանդիսանում է կոմուտատիվ B^*–հանրահաշիվ (միավորը $f(s) \equiv 1$ ֆունկցիան է)։ Ուստի ըստ Գելֆանդ–Նայմարկի թեորեմի՝

$$\widehat{L^\infty(\Omega)} = C\left(\mathcal{M}_{L^\infty(\Omega)}\right) :$$

Այս արդյունքը պարզաբանում է նաև, թե ինչու անընդհատ ֆունկ–ցիաների տարածությունում նորմը հաճախ գրում են $\|\cdot\|_\infty$ սիմվոլով։

Նկատենք, որ եթե $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ֆունկցիան չափելի է և գոյություն ունի այնպիսի $r \in [1, \infty)$ թիվ, որ

$$\|f\|_r = \left(\int\limits_\Omega |f|^r d\mu\right)^{\frac{1}{r}} < \infty,$$

ապա

$$\|f\|_p \xrightarrow[p\to\infty]{} \|f\|_\infty :$$

Իրոք, եթե $0 < \|f\|_\infty < \alpha$, ապա $p > r$ համար

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_\Omega |f|^r \cdot |f|^{p-r} d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|f\|_\infty^{\frac{p-r}{p}} \cdot \|f\|_r^{\frac{r}{p}} \xrightarrow[p\to\infty]{} \|f\|_\infty < \alpha,$$

ուստի բավականաչափ մեծ p–երի համար $\|f\|_p < \alpha$։ Մյուս կողմից, եթե $\|f\|_\infty > \beta$, ապա $\exists \Omega_1 \subset \Omega$ դրական չափի բազմություն, որ $|f(x)| > \beta_1 > \beta$ $(x \in \Omega_1)$, ուստի

$$\|f\|_p \geqslant \left(\int\limits_{\Omega_1} |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \beta_1 \left[\mu\left(\Omega_1\right)\right]^{\frac{1}{p}},$$

և հետևաբար, բավականաչափ մեծ p–երի համար $\|f\|_p > \beta$։

Ապացուցված պնդումը պարզ է դարձնում $L^\infty(\Omega)$ և $\|f\|_\infty$ նշանակումները։

§ 3.4. $L^\infty(E)$ հանրահաշիվը

Դիցուք $(\Omega, \mathfrak{M})$–ը չափելի պարածություն է, H–ը հիլբերտյան պարածություն է, և $E : \mathfrak{M} \to BL(H)$ միավորի վերլուծություն է: $\mathbb{C}$-ի սեպարաբելության շնորհիվ գոյություն ունի բաց շրջանների $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ հաշվելի ընտանիք, որը հանդիսանում է $\mathbb{C}$–ի բազա: Դիցուք $f : \Omega \to \mathbb{C}$ չափելի ֆունկցիա է: V–ով նշանակենք $E\left(f^{-1}(D_i)\right) = 0$ պայմանին բավարարող բոլոր D_i շրջանների միավորումը: 3.3.2 լեմմայից կբխի, որ $E\left(f^{-1}(V)\right) = 0$: Հեշտ է տեսնել, որ V–ն այդ հատկությամբ օժտված ամենալայն բաց բազմությունն է:

$\mathbb{C} \setminus V$ բազմությունը կոչվում է f–ի էական արժեքների բազմություն: $\mathbb{C} \setminus V$–ն այն ամենափոքր փակ բազմությունն է, որը պարունակում է $f(p)$ արժեքները համարյա բոլոր $p \in \Omega$ համար: Վերջինս նշանակում է, որ

$$f^{-1}(V) = \{p \in \Omega : \ f(p) \notin \mathbb{C} \setminus V\} \subset w,$$

որտեղ $w \in \mathfrak{M}$ և $E(w) = 0$:

Կասենք, որ f ֆունկցիան էապես սահմանափակ է, եթե նրա էական արժեքների բազմությունը սահմանափակ է (և հետևաբար՝ կոմպակտ է): Այդ դեպքում

$$\|f\|_\infty = \sup\{|\lambda| : \ \lambda \in \mathbb{C} \setminus V\} = \max\{|\lambda| : \ \lambda \in \mathbb{C} \setminus V\}$$

մեծությունը կոչվում է f–ի էապես վերին եզր:

Դիցուք B–ն բոլոր $f : \Omega \to \mathbb{C}$ սահմանափակ չափելի ֆունկցիաների հանրահաշիվն է՝

$$\|f\| = \sup\{|f(p)| : \ p \in \Omega\}$$

նորմով: Այդ դեպքում ակնհայտ է, որ B–ն հանդիսանում է բանախյան հանրահաշիվ, և

$$N = \{f \in B : \ \|f\|_\infty = 0\}$$

բազմությունը B–ի իդեալ է, ընդ որում այդ իդեալը (համաձայն 3.3.2 լեմմայի) փակ է: Հետևաբար B/N ֆակտոր–հանրահաշիվը հանդիսանում է բանախյան հանրահաշիվ: Այն սովորաբար նշանակվում է $L^\infty(E)$–ով:

$[f] = f + N$ էլեմենտի (հարակից դասի) նորմը $L^\infty(E)$–ում հավասար է $\|f\|_\infty$, իսկ $\sigma([f])$ սպեկտրը համընկնում է f ֆունկցիայի էական արժեքների բազմության հետ: Նշանակումներում մենք չենք տարբերի f ֆունկցիան և այն պարունակող $[f]$ դասը՝ ինչպես դա ընդունված է ֆունկցիաների տեսությունում:

Սահմանում 3.4.1: $s : \Omega \to \mathbb{C}$ ֆունկցիան կոչվում է պարզ[10], եթե նրա ընդունած արժեքների բազմությունը վերջավոր է: Դիցուք s պարզ ֆունկցիան ընդունում է $w_1, w_2, \ldots, w_n$ արժեքները ($w_i \neq w_j$, $i \neq j$): Այդ դեպքում s–ը կգրվի

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i \chi_{A_i}(x)$$

տեսքով, որտեղ $A_i = s^{-1}(\{w_i\})$: Պարզ է, որ $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$ և s–ը կլինի չափելի այն և միայն այն դեպքում, երբ չափելի են բոլոր A_i բազմությունները:

Լեմմա 3.4.1: *Պարզ ֆունկցիաները ամենուրեք խիտ են $L^\infty(E)$–ում:*

Ապացույց: Դիցուք $f \in L^\infty(E)$ և K–ն f–ի էական արժեքների բազմությունն է: Վերցնենք $\forall n \in \mathbb{N}$ բնական թիվ և $\mathbb{C}$ հարթության վրա դիտարկենք $\dfrac{1}{2^n}$ կողով քառակուսային ցանցը: Նշանակենք

$$\Delta_{mk}^{(n)} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \ \frac{m}{2^n} \leqslant \operatorname{Re} z < \frac{m+1}{2^n}, \ \frac{k}{2^n} \leqslant \operatorname{Im} z < \frac{k+1}{2^n} \right\} :$$
$$(m, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Նշանակենք $I_n = \left\{ (m,k) : \Delta_{mk}^{(n)} \cap K \neq 0 \right\}$: Քանի որ K–ն կոմպակտ է, ուստի I_n–ը վերջավոր բազմություն է: $\forall (m,k) \in I_n$ զույգի համար ընտրենք մեկական

$$\xi_{mk}^{(n)} \in \Delta_{mk}^{(n)} \cap K$$

[10] Երբեմն պարզ անվանում են նաև այն ֆունկցիաներին, որոնց ընդունած արժեքների բազմությունը հաշվելի է, իսկ միայն վերջավոր թվով արժեքներ ընդունող ֆունկցիաներին անվանում են աստիճանաձև:

կետ և սահմանենք

$$s_n(x) = \sum_{(m,k)\in I_n} \xi_{mk}^{(n)} \chi_{A_{mk}^{(n)}}(x);$$

որտեղ $A_{mk}^{(n)} = f^{-1}\left(\Delta_{mk}^{(n)} \cap K\right)$: Ակնհայտ է, որ s_n–ը պարզ ֆունկ– ցիա է: Պարզ է, որ $s_n \in L^\infty(E)$: Քանի որ $f^{-1}(K) = \bigcup\limits_{(m,k)\in I_n} A_{mk}^{(n)}$, և $A_{mk}^{(n)}$–երը չեն հատվում, ուստի

$$\sum_{(m,k)\in I_n} \chi_{A_{mk}^{(n)}}(x) = 1 \quad \left(x \in f^{-1}(K)\right),$$

և հետևաբար

$$|f(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{(m,k)\in I_n} \left(f(x) - \xi_{mk}^{(n)}\right) \chi_{A_{mk}^{(n)}}(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{(m,k)\in I_n} \left| f(x) - \xi_{mk}^{(n)} \right| \cdot \chi_{A_{mk}^{(n)}}(x) :$$

Նկատենք, որ $x \in A_{mk}^{(n)}$ դեպքում $f(x), \xi_{mk}^{(n)} \in \Delta_{mk}^{(n)}$, ուստի $\left| f(x) - \xi_{mk}^{(n)} \right|$–ը չի գերազանցում $\Delta_{mk}^{(n)}$–ի անկյունագծի երկարությու– նից, որը հավասար է $\dfrac{\sqrt{2}}{2^n}$: Հետևաբար

$$\left| f(x) - \xi_{mk}^{(n)} \right| \cdot \chi_{A_{mk}^{(n)}}(x) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2^n} \chi_{A_{mk}^{(n)}}(x) \quad \left(x \in A_{mk}^{(n)}\right) :$$

Այս գնահատականը ճիշտ է նաև $x \notin A_{mk}^{(n)}$ դեպքում, քանի որ այդ– պիսի x–երի համար անհավասարության երկու կողմն էլ դառնում են զրո: Հետևաբար

$$|f(x) - s_n(x)| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2^n} \sum_{(m,k)\in I_n} \chi_{A_{mk}^{(n)}} = \frac{\sqrt{2}}{2^n},$$

$$|f(x) - s_n(x)| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2^n} \quad \big(x \in f^{-1}(K)\big)\,,$$

որտեղից կբխի, որ

$$\sup_{x \in f^{-1}(K)} |f(x) - s_n(x)| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2^n}\;:$$

Այստեղից, հաշվի առնելով, որ $s_n(x) = 0$ ($x \notin f^{-1}(K)$), ստանում ենք

$$\|f - s_n\|_\infty \leqslant \sup_{f^{-1}(K)} |f(x) - s_n(x)| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2^n} \underset{n\,\to\,\infty}{\longrightarrow} 0,$$

որտեղից էլ կբխի, որ $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^\infty(E)} f$:
Լեմման ապացուցված է:

Թեորեմ 3.4.1: *Ցանկացած E միավորի տրոհման համար*

$$(\Psi(f)x, y) = \int\limits_\Omega f\, dE_{x,y} \quad (f \in L^\infty(E),\;\; x, y \in H) \tag{3.4.1}$$

բանաձևով որոշվում է $\Psi : L^\infty(E) \to A$ իզոմետրիկական իզոմորֆիզմ $L^\infty(E)$–ի և $BL(H)$–ի որոշակի A փակ նորմալ ենթահանրահաշվի միջև: Այդ Ψ իզոմորֆիզմը բավարարում է

$$\Psi\left(\overline{f}\right) = \Psi(f)^* \quad (f \in L^\infty(E)) \tag{3.4.2}$$

և

$$\|\Psi(f)x\|^2 = \int\limits_\Omega |f|^2 dE_{x,x} \quad (x \in H,\; f \in L^\infty(E)) \tag{3.4.3}$$

պայմաններին:

Բացի դրանից, $Q \in BL(H)$ օպերատորը բոլոր $E(w)$ օպերատորների հետ տեղափոխելի կլինի այն և միայն այն դեպքում, երբ Q–ն տեղափոխելի է բոլոր $\Psi(f)$ օպերատորների հետ:

Դիտողություն 3.4.1: (3.4.1) բանաձևը հաճախ գրում են

$$\Psi(f) = \int\limits_{\Omega} f\,dE \tag{3.4.4}$$

տեսքով: ▶

Ապացույց: Դիտարկենք Ω–ի կամայական $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ տրոհում $w_i \in \mathfrak{M}$ բազմությունների: Դիցուք

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{w_i}$$

պարզ ֆունկցիա է: $\Psi(s) \in BL(H)$ օպերատորը սահմանենք

$$\Psi(s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E(w_i) \tag{3.4.5}$$

բանաձևով: Քանի որ $E(w_i)$ օպերատորներից յուրաքանչյուրը ինքնահամալուծ է, ուստի

$$\Psi(s)^* = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha}_i E(w_i) = \Psi\left(\overline{s}\right) : \tag{3.4.6}$$

Եթե $\{w'_1, w'_2, \ldots, w'_m\}$–ը նույն տիպի մեկ այլ տրոհում է, և $t = \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_i \chi_{w'_j}$, ապա

$$\Psi(s)\Psi(t) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j E(w_i) E\left(w'_j\right) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j E\left(w_i \cap w'_j\right) :$$

Քանի որ st –ն պարզ ֆունկցիա է, որը $w_i \cap w'_j$–ի վրա ընդունում է $\alpha_i \beta_j$ արժեքը, ուստի այստեղից բխում է, որ

$$\Psi(s)\Psi(t) = \Psi(st) : \tag{3.4.7}$$

Հեշտ է նաև տեսնել, որ

$$\Psi(\alpha s+\beta t)=\alpha\Psi(s)+\beta\Psi(t) : \tag{3.4.8}$$

Եթե $x, y \in H$, ապա (3.4.5) բանաձևի համաձայն՝

$$(\Psi(s)x,y)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,(E(w_i)x,y)= \\ =\sum_{i=1}^{n}\alpha_i E_{x,y}(w_i)=\int\limits_{\Omega} s\,dE_{x,y} : \tag{3.4.9}$$

(3.4.6) և (3.4.7) բանաձևերից բխում է, որ

$$\Psi(s)^*\Psi(s)=\Psi\left(\overline{s}\right)\Psi(s)=\Psi\left(\overline{s}s\right)=\Psi\left(|s|^2\right) : \tag{3.4.10}$$

Հետևաբար (3.4.9)–ից կբխի, որ

$$\|\Psi(s)x\|^2=(\Psi(s)^*\Psi(s)x,x)= \\ =\left(\Psi\left(|s|^2\right)x,x\right)=\int\limits_{\Omega}|s|^2dE_{x,x} : \tag{3.4.11}$$

Այստեղից, հաշվի առնելով, որ $E_{x,x}(\Omega)=\|x\|^2$, ստանում ենք

$$\|\Psi(s)x\|\leqslant\|s\|_\infty\cdot\|x\| : \tag{3.4.12}$$

Մյուս կողմից, քանի որ $E(w_i)$ պրոյեկտորների պատկերներն իրար օրթոգոնալ են, ուստի $x\in\operatorname{Im}(E(w_j))$ համար կունենանք

$$\Psi(s)x=\alpha_j E(w_j)x=\alpha_j x : \tag{3.4.13}$$

Եթե j–ն ընտրենք այնպես, որ $|\alpha_j|=\|s\|_\infty$, ապա (3.4.12)–ից և (3.4.13)–ից կստանանք, որ

$$\|\Psi(s)x\|=\|s\|_\infty : \tag{3.4.14}$$

Այժմ դիցուք $f \in L^\infty(E)$: Ըստ նախորդ լեմմայի՝ $\exists\{s_k\}_1^\infty$ պարզ չափելի ֆունկցիաների հաջորդականություն, որը $L^\infty(E)$–ի նորմով զուգամիտում է f–ին: Համաձայն (3.4.14) առնչության, $\{\Psi(s_k)\}$–ն կլինի $BL(H)$–ում ֆունդամենտալ հաջորդականություն, ուստի այն կզուգամիտի որոշակի օպերատորի, որն էլ մենք կնշանակենք $\Psi(f)$–ով: Հեշտ է տեսնել, որ $\Psi(f)$–ը կախված չէ $\{s_k\}$ հաջորդականության ընտրությունից: (3.4.14)–ից ակնհայտորեն ստացվում է ավելի ընդհանուր՝

$$\|\Psi(f)\| = \|f\|_\infty \quad (f \in L^\infty(E)) \tag{3.4.15}$$

բանաձևը: (3.4.9)–ում s–ը փոխարինելով s_k–ով և անցնելով սահմանի, երբ $k \to \infty$ ու օգտվելով $E_{x,y}$ չափի վերջավոր լինելուց՝ կստանանք (3.4.1)–ը: (3.4.2) և (3.4.3) բանաձևերը բխում են (3.4.6)–ից և (3.4.11)–ից: $f, g \in L^\infty(E)$ ֆունկցիաները մոտարկելով s և t պարզ ֆունկցիաներով՝ նկատում ենք, որ (3.4.7) և (3.4.8) բանաձևերը ուժի մեջ են մնում դրանց մեջ s և t պարզ ֆունկցիաները f և g կամայական չափելի սահմանափակ ֆունկցիաներով փոխարինելիս:

Նշանակենք $A = \Psi\left(L^\infty(E)\right)$: Այդ դեպքում Ψ–ն կլինի իզոմետրիկական իզոմորֆիզմ $L^\infty(E)$–ի և A–ի միջև: Քանի որ $L^\infty(E)$–ն լրիվ է, ուստի A–ն կլինի փակ $BL(H)$–ում:

Որ A–ն կլինի նորմալ, բխում է (3.4.2)–ից և (3.4.7)–ից:

Վերջապես, եթե Q–ն տեղափոխելի է բոլոր $E(w)$ օպերատորների հետ, ապա այն տեղափոխելի կլինի բոլոր $\Psi(s)$ օպերատորների հետ, որտեղ s–ը պարզ ֆունկցիա է, և վերը կիրառված մոտարկման պրոցեսը ցույց է տալիս, որ Q–ն տեղափոխելի է A հանրահաշվի ցանկացած էլեմենտի հետ (հակառակն ակնհայտ է, քանի որ $E(w) \in A$):

Թեորեմն ապացուցված է:

§ 3.5. Սպեկտրալ թեորեմը

Սպեկտրալ թեորեմի հիմնական պնդումը կայանում է նրանում, որ հիլբերտյան տարածությունում գործող ցանկացած T սահմանափակ նորմալ օպերատոր (ինչ-որ կանոնական ձևով) ծնում է նրա $\sigma(T)$ սպեկտրի բորելյան ենթաբազմությունների վրա E միավորի վերլուծություն և որ T օպերատորը E-ի միջոցով կարելի է վերականգնել նախորդ ենթավերնագրում նկարագրված փիպի ինտեգրման պրոցեսով: Նորմալ օպերատորների տեսության արդյունքների մեծամասնությունը հիմնված է այդ փաստի վրա:

Հավանաբար, ավելորդ չէ նշել, որ խոսելով T օպերատորի $\sigma(T)$ սպեկտրի մասին՝ մենք միշտ նկատի ունենք ամբողջ $BL(H)$ հանրահաշիվը: Այլ կերպ ասած, $\lambda \in \sigma(T)$ նշանակում է, որ $T - \lambda I$ օպերատորը չունի հակադարձ $BL(H)$-ում: Դրա հետ մեկտեղ մենք գործ կունենանք նաև $BL(H)$ հանրահաշվի այնպիսի A փակ ենթահանրահաշիվների հետ, որոնք օժտված են հետևյալ լրացուցիչ հատկությամբ. $I \in A$, և $S \in A \Rightarrow S^* \in A$ (այդպիսի հանրահաշիվներին երբեմն անվանում են $*$-հանրահաշիվներ): Քանի որ $BL(H)$-ը B^*-հանրահաշիվ է, ուստի այդպիսի իրավիճակում $\forall T \in A$ օպերատորի համար $\sigma(T) = \sigma_A(T)$ (տես թեորեմ 2.7.2-ը):

Այսպիսով, T օպերատորն ունի նույն սպեկտրը $BL(H)$-ի բոլոր $*$-հանրահաշիվներում, որոնք պարունակում են այդ օպերատորը:

Սպեկտրալ թեորեմը (թեորեմ 3.5.3, տես՝ վարը) մենք կստանանք որպես հետևյալ արդյունքի մասնավոր դեպք: Այս արդյունքում խոսքը գնում է ոչ թե առանձին օպերատորի, այլ նորմալ օպերատորների հանրահաշվի մասին:

Թեորեմ 3.5.1: *Դիցուք A-ն $BL(H)$-ի ինչ-որ փակ նորմալ ենթահանրահաշիվ է, որը պարունակում է I միավոր օպերատորը, իսկ $\mathcal{M}_A$-ն A հանրահաշվի մաքսիմալ իդեալների տարածությունն է: Այդ դեպքում ճիշտ են հետևյալ պնդումները՝*

ա) $\mathcal{M}_A$ տարածության բորելյան ենթաբազմությունների վրա գոյություն ունի միակ E միավորի վերլուծություն, որ

$$T = \int\limits_{\mathcal{M}_A} \hat{T}\, dE \quad (\forall T \in A), \tag{3.5.1}$$

որտեղ $\hat{T}$-ը T օպերատորի Գելֆանդի ձևափոխությունն է՝ A

հանրահաշվի նկատմամբ: (3.5.1)*-ի պակ հասկացվում է, որ*

$$(Tx, y) = \int\limits_{\mathcal{M}_A} \hat{T}\, dE_{x,y} \quad (x, y \in H, \ \ T \in A), \tag{3.5.2}$$

բ) $\forall w \subset \mathcal{M}_A$ *ոչ դատարկ բաց բազմության համար* $E(w) \neq 0$*,*
գ) $S \in BL(H)$ *օպերատորը այն և միայն այն դեպքում կլինի տեղափոխելի* A*-ի բոլոր* T *օպերատորների հետ, երբ այն տեղափոխելի է ցանկացած* $E(w)$ *պրոյեկտորի հետ:*

Ապացույց: Քանի որ $BL(H)$-ը B^*-հանրահաշիվ է, ուստի տրված A հանրահաշիվը կլինի կոմուտատիվ B^*-հանրահաշիվ: Այստեղից, ըստ Գելֆանդ-Նայմարկի 2.3.5 թեորեմի, բխում է, որ $T \mapsto \hat{T}$ արտապատկերումը հանդիսանում է իզոմետրիկական $*$-իզոմորֆիզմ A-ի և $C(\mathcal{M}_A)$-ի միջև:

Դա բերում է E միավորի վերլուծության միակության թափանցիկ ապացույցի: Ենթադրենք, թե E-ն բավարարում է (3.5.2) պայմանին: Քանի որ $\hat{T}$-ը սպառում է ամբողջ $C(\mathcal{M}_A)$ տարածությունը, ուստի $E_{x,y}$ կոմպլեքս բորելյան չափերի ռեգուլյարությունից բխում է, որ $E_{x,y}$ չափերը միարժեքորեն որոշվում են (3.5.2) պայմանով: Ավելի խիստ լինելու համար նշենք, որ այս ասվածը հանդիսանում է հաուսդորֆյան կոմպակտի վրա որոշված բոլոր անընդհատ ֆունկցիաների տարածությունում գծային սահմանափակ ֆունկցիոնալի ընդհանուր տեսքի մասին Ռիսի թեորեմի միակության մասի հետևանք (տես՝ [28], թեորեմ 6.19): Քանի որ ըստ սահմանման՝

$$(E(w)x, y) = E_{x,y}(w), \tag{3.5.3}$$

ուստի $E(w)$ պրոյեկտորներից յուրաքանչյուրը նույնպես միարժեքորեն որոշվում է (3.5.2) պայմանով:

Բերված միակության ապացույցը հուշում է E-ի գոյության այսպիսի ապացույց: Եթե $x, y \in H$, ապա ըստ Գելֆալդ-Նայմարկի թեորեմի՝

$$\hat{T} \longmapsto (Tx, y) \tag{3.5.4}$$

արտապատկերումը $C(\mathcal{M}_A)$-ում գծային սահմանափակ ֆունկցիոնալ է, ընդ որում $\|\hat{T}\|_\infty = \|T\|$ հավասարությունից բխում է, որ այդ ֆունկցիոնալի նորմը չի գերազանցում $\|x\| \cdot \|y\|$-ը: Ըստ Ռիսի թեորեմի (որի մասին վերը խոսվեց) $\mathcal{M}_A$-ի վրա գոյություն ունի միակ $\mu_{x,y}$ ռեգուլյար կոմպլեքս բորելյան չափ, որ

$$(Tx, y) = \int\limits_{\mathcal{M}_A} \hat{T}\, d\mu_{x,y} \quad (x, y \in H,\ T \in A) : \tag{3.5.5}$$

Ըստ Գելֆանդ-Նայմարկի թեորեմի՝ $(T^*)\hat{} = \overline{\hat{T}}$: Ուստի եթե $\hat{T}$ ֆունկցիան իրական է, ապա T-ն ինքնահամալուծ է: Այդ դեպքում (Tx, y) և (Ty, x) թվերը իրար համալուծ կոմպլեքս թվեր են, ուստի

$$(Tx, y) = \overline{(Ty, x)} = \int\limits_{\mathcal{M}_A} \hat{T}\, d\overline{\mu}_{y,x},$$

որտեղից և (3.5.5)-ից կբխի, որ

$$\int\limits_{\mathcal{M}_A} \hat{T}\, d\mu_{x,y} = \int\limits_{\mathcal{M}_A} \hat{T}\, d\overline{\mu}_{y,x},$$

եթե $\hat{T}$-ը իրական է: Ըստ Գելֆանդ-Նայմարկի թեորեմի՝ $\hat{T}$-ը սպառում է ամբողջ $C(\mathcal{M}_A)$-ն, երբ T-ն սպառում է A-ն: Ուստի վերը գրված հավասարությունից կբխի, որ $\forall f \in C(\mathcal{M}_A)$ իրական ֆունկցիայի համար

$$\int\limits_{\mathcal{M}_A} f\, d\mu_{x,y} = \int\limits_{\mathcal{M}_A} f\, d\overline{\mu}_{y,x} :$$

Այստեղից կբխի, որ $\forall f \in C(\mathcal{M}_A)$ համար

$$\int\limits_{\mathcal{M}_A} f\, d\mu_{x,y} = \int\limits_{\mathcal{M}_A} f\, d\overline{\mu}_{y,x},$$

որտեղից և Ռիսի թեորեմում միակությունից կբխի, որ

$$\mu_{x,y} = \overline{\mu}_{y,x} \quad (x, y \in H) : \tag{3.5.6}$$

Ֆիքսած $T \in A$ համար (3.5.5)-ի ձախ մասը հանդիսանում է ըստ x-ի գծային և ըստ y-ի՝ համալուծ գծային ֆունկցիոնալ: Այստեղից և Ռիսի թեորեմի միակության պնդումից կբխի, որ $\forall w \subset \mathcal{M}_A$ բորել–յան բազմության համար $(x, y) \mapsto \mu_{x,y}(w)$ արտապատկերումը կլի–նի ըստ x-ի գծային և ըստ y-ի՝ համալուծ գծային: Իրոք, (3.5.5)-ից բխում է, որ $\forall x_1, x_2 \in H$ և $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ համար

$$\int\limits_{\mathcal{M}_A} \hat{T}\, d\mu_{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y} = \int\limits_{\mathcal{M}_A} \hat{T}\, d\left(\alpha_1 \mu_{x_1,y} + \alpha_2 \mu_{x_2,y}\right) \quad (T \in A),$$

և քանի որ $\hat{T}$-ը ապառում է $C(\mathcal{M}_A)$-ն, ուստի Ռիսի թեորեմի միա–կության պնդումից կբխի, որ

$$\mu_{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y} = \alpha_1 \mu_{x_1,y} + \alpha_2 \mu_{x_2,y} :$$

Նույն ձևով ցույց կտանք, որ

$$\mu_{x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2} = \overline{\beta}_1 \mu_{x,y_1} + \overline{\beta}_2 \mu_{x,y_2} :$$

Քանի որ $x, y \in H$ համար $\hat{T} \mapsto (Tx, y)$ ֆունկցիոնալի նորմը մի կողմից չի գերազանցում, ինչպես վերը տեսանք, $\|x\| \cdot \|y\|$-ը, մյուս կողմից, ըստ Ռիսի թեորեմի, հավասար է $\|\mu_{x,y}\|$, ուստի

$$\|\mu_{x,y}\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|,$$

որտեղից էլ կբխի, որ կամայական $f : \mathcal{M}_A \to \mathbb{C}$ սահմանափակ բորելյան ֆունկցիայի համար

$$\int\limits_{\mathcal{M}_A} f\, d\mu_{x,y} \tag{3.5.7}$$

ինտեգրալը ևս կհանդիսանա H-ում սահմանափակ կիսագծային ձև, ուստի ըստ 2.3.1 լեմմայի՝ գոյություն ունի միակ $\Phi(f) \in BL(H)$, որ

$$(\Phi(f)x, y) = \int\limits_{\mathcal{M}_A} f\, d\mu_{x,y} \quad (x, y \in H) : \tag{3.5.8}$$

(3.5.5), (3.5.8) առնչություններից բխում է, որ

$$\Phi\left(\hat{T}\right) = T \quad (T \in A) : \tag{3.5.9}$$

Հետևաբար Φ արտապատկերումը հանդիսանում է $C(\mathcal{M}_A)$-ն A-ի վրա արտապատկերող $\hat{T} \mapsto T$ արտապատկերման ընդլայնում:

Եթե f ֆունկցիան իրական է, ապա (3.5.6)-ից կբխի, որ

$$(\Phi(f)x, y) = \overline{(\Phi(f)y, x)} = (x, \Phi(f)y) \quad (x, y \in H),$$

ինչը նշանակում է, որ $\Phi(f)$ օպերատորն ինքնահամալուծ է:

Այժմ մենք ցույց կտանք, որ ցանկացած f, g սահմանափակ բո–րելյան ֆունկցիաների համար տեղի ունի

$$\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g) \tag{3.5.10}$$

հավասարությունը:

Եթե $S, T \in A$, ապա $(ST)\hat{} = \hat{S}\hat{T}$, և (3.5.5)-ից կբխի, որ

$$\int\limits_{\mathcal{M}_A} \hat{S}\hat{T}\, d\mu_{x,y} = (STx, y) = \int\limits_{\mathcal{M}_A} \hat{S}\, d\mu_{Tx,y} : \tag{3.5.11}$$

Քանի որ $\hat{A} = C(\mathcal{M}_A)$, ուստի այստեղից բխում է, որ

$$\hat{T}\, d\mu_{x,y} = d\mu_{Tx,y} \quad (\forall x, y \in H, \ \ \forall T \in A) : \tag{3.5.12}$$

Հետևաբար (3.5.11)-ում ինտեգրալները հավասար կմնան նաև $\hat{S}$-ը f-ով փոխարինելիս: Ուստի

$$\int\limits_{\mathcal{M}_A} f\hat{T}\, d\mu_{x,y} = \int\limits_{\mathcal{M}_A} f\, d\mu_{Tx,y} = (\Phi(f)Tx, y) =$$

$$= (Tx, z) = \int\limits_{\mathcal{M}_A} \hat{T}\, d\mu_{x,z}, \tag{3.5.13}$$

որտեղ $z = \Phi(f)^*y$: Վերը կատարվածին նման դատողությունները ցույց են տալիս, որ (3.5.13)-ում առաջին և վերջին ինտեգրալները կմնան հավասար, եթե $\hat{T}$-ը փոխարինվի g-ով: Հետևաբար՝

$$(\Phi(fg)x, y) = \int_{\mathcal{M}_A} fg\, d\mu_{x,y} = \int_{\mathcal{M}_A} g\, d\mu_{x,z} =$$
$$= (\Phi(g)x, z) = (\Phi(f)\Phi(g)x, y)\,, \quad (3.5.14)$$

և սրանով իսկ (3.5.10)-ն ապացուցված է:

Այժմ մենք պատրաստ ենք սահմանել E-ն: Եթե $w \subset \mathcal{M}_A$ կամայական բորելյան բազմություն է, ապա կսահմանենք $E(w) = \Phi(\chi_w)$:

(3.5.10) բանաձևի համաձայն՝ $E\,(w \cap w') = E(w)E(w')$: Սա $w = w'$ դեպքում նշանակում է, որ $E(w)$-ն պրոյեկտոր է: Քանի որ իրական f-երի համար $\Phi(f)$-ը ինքնահամալուծ է, ուստի բոլոր $E(w)$ պրոյեկտորները կլինեն ինքնահամալուծ: Պարզ է, որ $E(\varnothing) = \Phi(0) = 0$: $E(\mathcal{M}_A) = I$ հավասարությունը բխում է (3.5.9)-ից: (3.5.8)-ում վերցնելով $f = \chi_w$, կստանանք, որ

$$(E(w)x, y) = \mu_{x,y}(w), \quad (3.5.15)$$

որտեղից կստացվի, որ E ֆունկցիան վերջավոր ադիտիվ է: Այսպիսով, E-ն միավորի վերլուծություն է:

Քանի որ (3.5.2) բանաձևը բխում է (3.5.5)-ից և (3.5.15)-ից, ուստի ա) պնդման ապացույցն ավարտված է:

Այժմ ենթադրենք, թե $w \subset \mathcal{M}_A$ բաց բազմություն է և $E(w) = 0$: Եթե $T \in A$ և $\hat{T}$ ֆունկցիայի կրիչը ընկած է w-ի մեջ, ապա (3.5.1)-ից կբխի, որ $T = 0$: Հետևաբար $\hat{T} = 0$: Բայց $\hat{A} = C(\mathcal{M}_A)$, ուստի ըստ Ուրիսոնի լեմմայի՝ $w = \varnothing$: Սրանով իսկ բ) պնդումը ևս ապացուցված է:

գ) պնդումն ապացուցելու համար ընտրենք կամայական $S \in BL(H)$; $x, y \in H$ և նշանակենք $z = S^*y$: Այդ դեպքում $\forall T \in A$ օպերատորի և $\forall w \subset \mathcal{M}_A$ բորելյան բազմության համար կստանանք.

$$(STx, y) = (Tx, z) = \int_{\mathcal{M}_A} \hat{T}\, dE_{x,z}, \quad (3.5.16)$$

$$(TSx, y) = \int\limits_{\mathcal{M}_A} \hat{T}\, dE_{Sx,y}, \tag{3.5.17}$$

$$(SE(w)x, y) = (E(w)x, z) = E_{x,z}(w), \tag{3.5.18}$$

$$(E(w)Sx, y) = E_{Sx,y}(w) : \tag{3.5.19}$$

Եթե $ST = TS \quad (\forall T \in A)$, ապա (3.5.16), (3.5.17)-ից և Ռիսի թեո– րեմի միակության մասից կբխի, որ

$$E_{x,z} = E_{Sx,y} \quad (\forall x, y \in H),$$

որտեղից և (3.5.18), (3.5.19)-ից կբխի, որ ցանկացած $w \subset \mathcal{M}_A$ բո– րելյան բազմության համար $SE(w) = E(w)S$:

Եթե $\forall w \subset \mathcal{M}_A$ բորելյան բազմության համար $SE(w) = E(w)S$, ապա (3.5.18), (3.5.19)-ից կբխի, որ

$$E_{x,z} = E_{Sx,y} \quad (\forall x, y \in H),$$

որտեղից և (3.5.16), (3.5.17)-ից կբխի, որ $ST = TS$ $(\forall T \in A)$: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 3.5.2: *Դիցուք A-ն կոմուտատիվ B^*-հանրահաշիվ է, որը պարունակում է այնպիսի x էլեմենտ, որ x-ից և x^*-ից երկու փոփոխականի բազմանդամներն ամենուրեք խիտ են A-ում: Այդ դեպքում*

$$(\Psi f)\hat{} = f \circ \hat{x} \tag{3.5.20}$$

բանաձևով որոշվում է Ψ իզոմետրիկական իզոմորֆիզմ $C(\sigma(x))$ և A հանրահաշիվների միջև, ընդ որում

$$\Psi \overline{f} = (\Psi f)^* \quad (f \in C(\sigma(x))) : \tag{3.5.21}$$

Բացի այդ, եթե $f(\lambda) = \lambda \ (\lambda \in \sigma(x))$, ապա $\Psi f = x$:

Ապացույց: $\hat{x}$-ը $\mathcal{M}_A$-ի վրա անընդհատ ֆունկցիա է և նրա պատկերը $\sigma(x)$-ն է: Ցույց տանք, որ $\hat{x} : \mathcal{M}_A \to \sigma(x)$ հոմեոմորֆիզմ է: Իրոք, դիցուք $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{M}_A$ և $\hat{x}(\varphi_1) = \hat{x}(\varphi_2)$, այսինքն՝ $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$: Այստեղից և Գելֆանդ-Նայմարկի թեորեմից կբխի, որ $\varphi_1(x^*) = \varphi_2(x^*)$: Քանի որ φ_1, φ_2-ը հոմոմորֆիզմներ են, ուստի վերը ստացվածից կբխի, որ կամայական $P(x, x^*)$ բազմանդամի համար

$$\varphi_1\left(P(x, x^*)\right) = \varphi_2\left(P(x, x^*)\right):$$

Քանի որ $P(x, x^*)$ բազմանդամները ամենուրեք խիտ են A-ում, իսկ φ_1, φ_2-ն անընդհատ են, ուստի կստանանք, որ

$$\varphi_1(y) = \varphi_2(y) \quad (\forall y \in A)$$

և հետևաբար՝ $\varphi_1 = \varphi_2$: Ստացվածը ցույց է տալիս, որ $\hat{x} : \mathcal{M}_A \to \sigma(x)$ արտապատկերումը փոխմիարժեք (հակադարձելի) է: Քանի որ կոմպակտի վրա անընդհատ հակադարձելի ֆունկցիայի հակադարձը ևս անընդհատ է, ուստի $\hat{x} : \mathcal{M}_A \to \sigma(x)$ կլինի հոմեոմորֆիզմ:

Հետևաբար $f \mapsto f \circ \hat{x}$ արտապատկերումը կհաստատի իզոմետրիկական իզոմորֆիզմ $C(\sigma(x))$-ի և $C(\mathcal{M}_A)$-ի միջև, որը պահպանում է կոմպլեքս համալուծությունը:

Հետևաբար $\forall f \in C(\sigma(x))$ համար, ըստ Գելֆանդ-Նայմարկի թեորեմի, գոյություն ունի միակ $y \in A$ էլեմենտ, որ $f \circ \hat{x} = \hat{y}$: Այդ y-ը կնշանակենք Ψf-ով: Պարզ է, որ $\|\Psi f\| = \|f\|_\infty$: (3.5.21)-ը բխում է Գելֆանդ-Նայմարկի թեորեմից:

Եթե $f(\lambda) = \lambda$, ապա $f \circ \hat{x} = \hat{x}$, և (3.5.20)-ից կստացվի, որ $\Psi f = x$:

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 3.5.3: *Եթե $N \in BL(H)$ նորմալ օպերատոր է, ապա N օպերատորի $\sigma(N)$ սպեկտրի բորելյան ենթաբազմությունների վրա գոյություն ունի միակ E միավորի վերլուծություն, որ*

$$N = \int_{\sigma(N)} \lambda \, dE(\lambda): \tag{3.5.22}$$

Բացի դրանից, $S \in BL(H)$ օպերատորը այն և միայն այն դեպքում կլինի տեղափոխելի N-ի հետ, երբ այն տեղափոխելի է ցանկացած $E(w)$ պրոյեկտորի հետ:

Ապացույց: A-ով նշանակենք $BL(H)$-ի այն մինիմալ փակ ենթա–հանրահաշիվը, որը պարունակում է I, N, N^* օպերատորները: Հեշտ է պեսնել, որ A-ն իրենից ներկայացնում է N-ից և N^*-ից բոլոր հնարավոր

$$p(N,N^*) = \sum_{m,k=0}^{n} \alpha_{mk} N^m (N^*)^k \tag{3.5.23}$$

երկու փոփոխականի բազմանդամների դասի փակումը: Հետևաբար A-ն կլինի $BL(H)$-ի նորմալ ենթահանրահաշիվ և նրա համար կի–րառելի է թեորեմ 3.5.1-ը, համաձայն որի $\mathcal{M}_A$-ի բորելյան բազմու–թյունների վրա գոյություն ունի միակ E միավորի վերլուծություն, որ

$$Q = \int\limits_{\mathcal{M}_A} \hat{Q}\, dE \quad (\forall Q \in A)\, : \tag{3.5.24}$$

Օգտվելով նախորդ թեորեմից՝ A հանրահաշվի $\mathcal{M}_A$ մաքսիմալ իդեալների տարածությունը նույնացնենք $\sigma(N)$-ի հետ: Այդ դեպքում $\hat{N}$-ը կնույնացվի $f(\lambda) \equiv \lambda$ ֆունկցիայի հետ, և (3.5.1)-ից բխող

$$N = \int\limits_{\mathcal{M}_A} \hat{N}\, dE$$

հավասարությունը կգրվի

$$N = \int\limits_{\sigma(N)} \lambda\, dE(\lambda)$$

տեսքով: Սրանով իսկ $E(\lambda)$-ի գոյությունը հիմնավորվեց: Այժմ ցույց տանք նրա միակությունը:

3.4.1 թեորեմից բխում է, որ եթե տեղի ունի (3.5.22)-ը, ապա կամայական $p(x,y)$ երկու փոփոխականի բազմանդամի համար

$$p(N,N^*) = \int\limits_{\sigma(N)} p\left(\lambda, \overline{\lambda}\right)\, dE(\lambda)\, : \tag{3.5.25}$$

Բայց ըստ Ստոն-Վայերշտրասի թեորեմի՝ $p\left(\lambda,\overline{\lambda}\right)$ բազմանդամներն ամենուրեք խիտ են $C(\sigma(N))$-ում: Հետևաբար $\forall f \in C(\sigma(N))$ ֆունկցիայի համար

$$\int\limits_{\sigma(N)} f\left(\lambda\right) dE(\lambda)$$

ինտեգրալը միարժեքորեն որոշվում է $p(N,N^*)$ տեսքի բազմանդամների միջոցով (հանդիսանում է նրանց սահման), ուստի այդ ինտեգրալը միարժեքորեն որոշվում է N-ի միջոցով: Օգտվելով Ռիսի թեորեմում միակությունից՝ նմանատիպ ձևով, ինչպես 3.5.1 թեորեմի ապացույցում, ցույց կտանք, որ E-ն միարժեքորեն որոշվում է N-ի միջոցով:

Եթե $SN = NS$, ապա ըստ 3.2.1 թեորեմի՝ $SN^* = N^*S$: Հետևաբար S-ը տեղափոխելի է $\forall Q \in A$ օպերատորի հետ, ուստի ըստ 3.5.1 թեորեմի՝ S-ը տեղափոխելի է յուրաքանչյուր $E(w)$ օպերատորի հետ, որտեղ w-ն $\sigma(N)$-ի բորելյան ենթաբազմություն է: Հակառակը, եթե S-ը $\forall w \in \sigma(N)$ բորելյան բազմության համար տեղափոխելի է $E(w)$-ի հետ, ապա ըստ 3.5.1 թեորեմի՝ S-ը կլինի տեղափոխելի A-ի բոլոր օպերատորների և, մասնավորապես, նաև N-ի հետ:

Թեորեմն ապացուցված է:

§ 3.6. Ֆունկցիոնալ հաշիվ նորմալ օպերատորների համար

Դիցուք H–ը հիլբերտյան տարածություն է, $N \in BL(H)$ նորմալ օպերատոր է, իսկ E–ն նրա սպեկտրալ վերլուծությունն է: Դիցուք $f : \sigma(N) \to \mathbb{C}$ սահմանափակ բորելյան ֆունկցիա է: Այդ դեպքում

$$\Psi(f) = \int\limits_{\sigma(N)} f\, dE \tag{3.6.1}$$

օպերատորն ընդունված է նշանակել $f(N)$–ով:

Օգտագործելով այդ նշանակումը՝ մի օպերատորի դեպքի համար 3.4.1, 3.5.1, 3.5.3 թեորեմների տվածը կարելի է ձևակերպել այսպես.

Թեորեմ 3.6.1: *$f \mapsto f(N)$ արտապատկերումը հանդիսանում է հոմոմորֆիզմ $\sigma(N)$–ի վրա որոշված բոլոր սահմանափակ բորելյան ֆունկցիաների հանրահաշվից $BL(H)$ հանրահաշվի մեջ: Այդ արտապատկերումը $f(\lambda) = 1$ ֆունկցիան տանում է I միավոր օպերատորին, $f(\lambda) = \lambda$ ֆունկցիան տանում է N օպերատորին և բավարարում է*

$$\overline{f}(N) = f(N)^*, \tag{3.6.2}$$

$$\|f(N)\| \leqslant \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma(N)\} \tag{3.6.3}$$

պայմաններին: Ընդ որում՝
1) եթե $f \in C(\sigma(N))$, ապա (3.6.3)–ում տեղի ունի հավասարություն,
2) եթե $f_n \rightrightarrows f$, $x \in \sigma(N)$, ապա $\|f_n(N) - f(N)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,
3) եթե $S \in BL(H)$ և $SN = NS$, ապա ցանկացած f սահմանափակ բորելյան ֆունկցիայի համար $Sf(N) = f(N)S$,
4) $f(N)$ օպերատորը պատկանում է $BL(H)$–ում $E(w)$ պրոյեկտորների դասի գծային թաղանթի փակմանը,
5) եթե $S \in BL(H)$ և ցանկացած $w \subset \sigma(N)$ բորելյան բազմության համար $SE(w) = E(w)S$, ապա $SN = NS$:

Ապացույց: 3.4.1, 3.5.1, 3.5.3 թեորեմներից բխում է, որ ապացուցման կարիք ունեն միայն (3.6.3) առնչությունը և 1), 2), 4) պնդումները:

(3.6.3)–ն ապացուցելու համար օգտվենք

$$\|f(N)x\|^2 = \int\limits_{\sigma(N)} |f|^2 dE_{x,x}$$

հավասարությունից (տես՝ (3.4.3)-ը): Այս հավասարությունից կբխի, որ

$$\|f(N)x\|^2 \leqslant \sup_{\lambda\in\sigma(N)} |f(\lambda)|^2 \cdot \int\limits_{\sigma(N)} dE_{x,x} =$$
$$= \sup_{\lambda\in\sigma(N)} |f(\lambda)|^2 \cdot E_{x,x}((\sigma(N))),$$

և քանի որ $E_{x,x}(\sigma(N)) = (E(\sigma(N))x, x) = (x, x) = \|x\|^2$, ուստի կստանանք

$$\|f(N)x\|^2 \leqslant \sup_{\lambda\in\sigma(N)} |f(\lambda)|^2 \cdot \|x\|^2,$$

որտեղից՝

$$\|f(N)x\| \leqslant \sup_{\lambda\in\sigma(N)} |f(\lambda)| \cdot \|x\| \quad (x \in H) :$$

Այստեղից էլ բխում է (3.6.3)–ը:

1)–ն ապացուցելու համար օգտվենք (3.4.15) առնչությունից (ինչը նշանակում է, որ $\Psi : L^\infty(E) \to BL(H)$ արտապատկերումը իզոմետրիկ է), համաձայն որի՝

$$\|f(N)\| = \|f\|_{L^\infty(E)} :$$

Մնում է ցույց տալ, որ

$$\|f\|_{L^\infty(E)} = \|f\|_{C(\sigma(N))} = \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma(N)\} :$$

K–ով նշանակենք f–ի էական արժեքների բազմությունը: Նշանակենք $V = \mathbb{C} \setminus K$: Ունենք

$$\|f\|_{L^\infty(E)} = \sup_{\lambda\in K} |\lambda| :$$

Ցույց տանք, որ $K = f(\sigma(N))$: Ակնհայտ է, որ $K \subset f(\sigma(N))$: Ցույց տանք, որ նաև $f(\sigma(N)) \subset K$: Սա նշանակում է, որ

$$f(\sigma(N)) \cap V = \varnothing$$

կամ որ նույնն է՝

$$f^{-1}(V) = \varnothing : \tag{3.6.4}$$

Ցույց տանք (3.6.4)–ը: Քանի որ $f \in C(\sigma(N))$ և V–ն բաց է, ուստի $f^{-1}(V)$–ն ևս կլինի բաց: Ըստ V–ի սահմանման՝ $E\left(f^{-1}(V)\right) = 0$: Քանի որ $\forall w \subset \sigma(N)$ ոչ դատարկ բաց բազմության համար $E(w) \neq 0$, ուստի այստեղից կբխի (3.6.4)–ը: Դրանով իսկ 1)–ը

հիմնավորվեց:
2)–ը բխում է (3.6.3)–ից, քանի որ կունենանք

$$\|f_n(N)-f(N)\| \leqslant \sup_{\lambda\in\sigma(N)} |f_n(\lambda)-f(\lambda)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 :$$

4)–ը բխում է $f(N)$–ի սահմանումից (տես՝ 3.4.1 թեորեմի ապացույցը):
Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 3.6.2: *Եթե $N\in BL(H)$ օպերատորը նորմալ է, ապա*

$$\|N\| = \sup\{|(Nx,x)| : x\in H,\ \|x\|\leqslant 1\} :$$

Ապացույց: Քանի որ $\|x\|\leqslant 1$ համար

$$|(Nx,x)| \leqslant \|Nx\|\cdot\|x\| \leqslant \|N\|\cdot\|x\| \leqslant \|N\|,$$

ուստի բավական է ցույց տալ, որ $\forall\varepsilon>0$ համար $\exists x_0\in H$, որ $\|x_0\|=1$ և

$$|(Nx_0,x_0)| \geqslant \|N\|-\varepsilon :$$

Դիցուք A–ն 3.5.3 թեորեմի ապացույցի ժամանակ դիտարկված հանրահաշիվն է, և $\hat{N}$–ը N–ի Գելֆանդի ձևափոխությունն է (A–ի նկատմամբ): Ըստ Գելֆանդ–Նայմարկի թեորեմի՝ $\|N\|=\|\hat{N}\|_\infty = \rho(N)$: Դիցուք $\lambda_0\in\sigma(N)$ այնպիսին է, որ $|\lambda_0|=\rho(N)$: Այդ դեպքում կունենանք $|\lambda_0|=\|N\|$: Նշանակենք

$$w = \{\lambda\in\sigma(N) : |\lambda-\lambda_0|<\varepsilon\} = \sigma(N)\cap D(\lambda_0,\varepsilon) :$$

Այդ դեպքում $w\subset\sigma(N)$ կլինի ոչ դատարկ և բաց $\sigma(N)$–ում, ուստի N օպերատորի E սպեկտրալ վերլուծության համար կունենանք $E(w)\neq 0$: Հետևաբար $\exists x_o\in H$, որ $\|x_0\|=1$ և $E(w)x_0=x_0$:

Դիցուք

$$f(\lambda)=\begin{cases}\lambda-\lambda_0, & \lambda\in w,\\ 0, & \lambda\in\sigma(N)\setminus w :\end{cases}$$

Այդ դեպքում ակնհայտորեն

$$f(N)=(N-\lambda_0 I)E(w),$$

ուստի

$$f(N)x_0 = Nx_0 - \lambda_0 x_0$$

և կունենանք

$$|(Nx_0, x_0) - \lambda_0| = |(Nx_0, x_0) - \lambda_0(x_0, x_0)| =$$
$$= |(f(N)x_0, x_0)| \leqslant \|f(N)\| \leqslant \varepsilon,$$

քանի որ $|f(\lambda)| < \varepsilon \quad (\lambda \in \sigma(N))$: Քանի որ $|\lambda_0| = \|N\|$, ուստի կունենանք

$$|(Nx_0, x_0)| = |(Nx_0, x_0) - \lambda_0 - (-\lambda_0)| \geqslant$$

$$\geqslant \big||(Nx_0, x_0) - \lambda_0| - |-\lambda_0|\big| \geqslant |-\lambda_0| - |(Nx_0, x_0) - \lambda_0| \geqslant \|N\| - \varepsilon :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 3.6.3: *$N \in BL(H)$ նորմալ օպերատորը հանդիսանում է՝*
ա) ինքնահամալուծ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\sigma(N)$–ն ընկած է իրական առանցքի վրա,
բ) ունիտար այն և միայն այն դեպքում, երբ $\sigma(N)$–ն ընկած է միավոր շրջանագծի վրա:

Ապացույց: Դիցուք A–ն և $\hat{N}$–ը նույնն են, ինչ որ 3.5.3 թեորեմի ապացույցի մեջ: Այդ դեպքում $\lambda \in \sigma(N)$ համար կունենանք $\hat{N}(\lambda) = \lambda$ և $(N^*)\hat{}(\lambda) = \overline{\lambda}$: Ուստի $N = N^*$ այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\lambda = \overline{\lambda} \quad (\forall \lambda \in \sigma(N)),$$

և $NN^* = I$ այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\lambda\overline{\lambda} = 1 \quad (\forall \lambda \in \sigma(N)) :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

§ 3.7. Ինվարիանտ ենթապարածություններ

Սահմանում 3.7.1: H հիլբերտյան (բանախյան) պարածության M փակ ենթապարածությունը կոչվում է ինվարիանտ $\Sigma \subset BL(H)$ օպերատորների ընտանիքի համար, եթե

$$T(M) \subset M \quad (\forall T \in \Sigma) :$$

Օրինակ, T օպերատորի ամեն մի սեփական ենթապարածություն ինվարիանտ է նրա համար: Դիցուք $\dim H < \infty$, իսկ $N \in BL(H)$ նորմալ օպերատոր է: Այդ դեպքում, ինչպես հայտնի է հանրահաշվից, $\sigma(N)$–ն վերջավոր է և նրա կետերը N–ի սեփական արժեքներն են: Դիցուք $\sigma(N) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$: Այդ դեպքում կունենանք

$$\chi_{\{\lambda_1\}}(\lambda) + \chi_{\{\lambda_2\}}(\lambda) + \cdots + \chi_{\{\lambda_n\}}(\lambda) = 1 \quad (\forall \lambda \in \sigma(N)) : \quad (3.7.1)$$

Ըստ 3.6.1 թեորեմի՝ $f \mapsto f(N)$ արտապատկերման ժամանակ $f(\lambda) \equiv 1$ ֆունկցիային համապատասխանում է I միավոր օպերատորը, ուստի կստանանք

$$\chi_{\{\lambda_1\}}(N) + \chi_{\{\lambda_2\}}(N) + \cdots + \chi_{\{\lambda_n\}}(N) = I :$$

Նշանակենք $E_i = \chi_{\{\lambda_i\}}(N) \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$: Քանի որ

$$\chi_{\{\lambda_i\}}(\lambda)\chi_{\{\lambda_j\}}(\lambda) = \begin{cases} \chi_{\{\lambda_i\}}(\lambda), & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \qquad (\lambda \in \sigma(N)),$$

ուստի

$$E_i E_j = \begin{cases} E_i, & i = j, \\ 0, & i \neq j : \end{cases}$$

Քանի որ $\chi_{\{\lambda_i\}}(\lambda)$ ֆունկցիաները իրական են, ուստի E_i օպերատորները ինքնահամալուծ են: Հետևաբար E_i օպերատորները հանդիսանում են զույգ առ զույգ օրթոգոնալ պրոյեկտման օպերատորներ: Նշանակենք

$$M_i = E_i(H) \quad (1 \leqslant i \leqslant n) :$$

Քանի որ $E_1 + E_2 + \cdots + E_n = I$, ուստի

$$M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n = H : \tag{3.7.2}$$

Դիցուք $f(\lambda) \equiv \lambda$ $(\lambda \in \sigma(N))$: (3.7.1)–ից կբխի, որ $(\lambda \in \sigma(N))$ համար

$$f(\lambda) = \lambda\chi_{\{\lambda_1\}}(\lambda) + \lambda\chi_{\{\lambda_2\}}(\lambda) + \cdots + \lambda\chi_{\{\lambda_n\}}(\lambda) :$$

Հեշտ է տեսնել, որ վերջին հավասարությունը կարելի է գրել նաև

$$f(\lambda) = \lambda_1\chi_{\{\lambda_1\}}(\lambda) + \lambda_2\chi_{\{\lambda_2\}}(\lambda) + \cdots + \lambda_n\chi_{\{\lambda_n\}}(\lambda)$$

տեսքով: Այստեղից կբխի, որ

$$f(N) = \lambda_1\chi_{\{\lambda_1\}}(N) + \lambda_2\chi_{\{\lambda_2\}}(N) + \cdots + \lambda_n\chi_{\{\lambda_n\}}(N),$$

և հաշվի առնելով, որ (3.6.1 թեորեմի շնորհիվ) $f(N) = N$, կստանանք, որ

$$N = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_n E_n :$$

Այստեղից կբխի, որ E_i–ն λ_i սեփական արժեքին համապատասխան սեփական ենթատարածության վրա օրթոգոնալ պրոյեկտման օպերատորն է, իսկ M_i–ն λ_i–ին համապատասխան սեփական ենթատարածությունն է:

Հետևաբար (3.7.2)–ը ցույց է տալիս, որ H–ը ներկայացվում է N օպերատորի սեփական ենթատարածությունների ուղիղ գումարի տեսքով:

Սակայն $\dim H = \infty$ դեպքում N օպերատորը կարող է սեփական արժեքներ չունենալ:

Ցույց տանք, որ չնայած դրան՝ ցանկացած նորմալ օպերատոր ունի ոչ տրիվիալ (այսինքն՝ $\{0\}$–ից և H–ից տարբեր) ինվարիանտ ենթատարածություն: Մենք ցույց կտանք ավելին, որ (ոչ տրիվիալ) ինվարիանտ ենթատարածություն գոյություն ունի նաև 3.5.3 թեորեմի ապացույցում դիտարկված A նորմալ հանրահաշվի համար:

Իրոք, եթե $\mathcal{M}_A$–ն բաղկացած է մի կետից, ապա A հանրահաշիվը բաղկացած կլինի միավոր օպերատորի պատիկներից, ուստի այս դեպքում H–ի ցանկացած ենթատարածություն կլինի ինվարիանտ A–ի համար: Այժմ դիցուք $\mathcal{M}_A$–ն պարունակում է 1–ից ավելի թվով կետեր: Այդ դեպքում $\mathcal{M}_A$–ն ակնհայտորեն կարելի է ներկայացնել $\mathcal{M}_A = w \cup w'$ տեսքով, որտեղ w–ն և w'–ը ոչ դատարկ չհատվող բորելյան բազմություններ են (օրինակ, որպես w կարելի է վերցնել 1 կետից բաղկացած բազմություն): Դիցուք M–ը և M'–ը համապատասխանաբար $E(w)$ և $E(w')$ օպերատորների պատկերներն են: Քանի որ

$$TE(w) = E(w)T \quad (\forall T \in A),$$

ուստի $x \in M$ համար կունենանք

$$Tx = TE(w)x = E(w)Tx,$$

և հետևաբար՝ $Tx \in M$: Նույնը ճիշտ է նաև M'–ի համար:

Հետևաբար M–ը և M'–ը A–ի համար ինվարիանտ ենթատարածություններ են: Բացի այդ, $M' = M^{\perp}$ և

$$H = M \oplus M' : \tag{3.7.3}$$

Իրոք, $M' = M^{\perp}$ հավասարությունը բխում է

$$E(w)E(w') = E(w \cap w') = E(\emptyset) = 0,$$

$$E(w) + E(w') = E(w \cup w') = E(\mathcal{M}_A) = I$$

հավասարություններից:

w–ն և w'–ը կարելի է ընտրել այնպես, որ

$$M \neq \{0\}, \quad M' \neq \{0\} \tag{3.7.4}$$

Իրոք, քանի որ $\mathcal{M}_A$ տարածությունը պարունակում է գոնե երկու՝ φ և ψ իրարից տարբեր կետեր և քանի որ $\mathcal{M}_A$–ն հաուսդորֆյան է, ուստի φ և ψ կետերը ունեն չհատվող շրջակայքեր: Հետևաբար $\mathcal{M}_A$–ում գոյություն ունեն U և V ոչ դատարկ բաց չհատվող բազմություններ: Եթե վերցնենք $w = U$, ապա կունենանք, որ $w' = \mathcal{M}_A \setminus w \supset V$: Քանի որ w–ն բաց է, ուստի $E(w) \neq 0$: Նույն պատճառով նաև $E(V) \neq 0$, ուստի

$$E(w') = E(V) + E(w' \setminus V) \neq 0 :$$

Ստացվեց, որ
$$E(w) \neq 0, \quad E(w') \neq 0,$$
ուստի (3.7.4)–ը տեղի ունի:

(3.7.3)–ից և (3.7.4)–ից կբխի, որ նաև
$$M \neq H, \quad M' \neq H : \tag{3.7.5}$$
Այսպիսով, M–ը և M'–ը կլինեն ոչ տրիվիալ ինվարիանտ ենթատարածություններ A–ի համար:

Նմանատիպ դատողություններով կստանանք, որ $\mathcal{M}_A$ տարածության տրոհումը վերջավոր կամ հաշվելի թվով ոչ դատարկ չհատվող բորելյան բազմությունների ծնում է H տարածության վերլուծության իրար օրթոգոնալ վերջավոր կամ հաշվելի թվով ենթատարածությունների ուղիղ գումարի, ընդ որում այդ ենթատարածություններից յուրաքանչյուրը ինվարիանտ է A–ի համար:

Մինչ այժմ պարզ չէ, թե արդյոք ամեն մի $T \in BL(H)$ օպերատոր ունի ոչ տրիվիալ ինվարիանտ ենթատարածություն H անվերջ չափանի սեպարաբել հիլբերտյան տարածությունում:

§ 3.8. Նորմալ օպերատորների սեփական արժեքները

Թեորեմ 3.8.1: *Դիցուք E–ն $N \in BL(H)$ նորմալ օպերատորի սպեկտրալ վերլուծությունն է: Այդ դեպքում եթե $f \in C(\sigma(N))$ և $w_0 = f^{-1}(0)$, ապա*
$$\ker(f(N)) = \operatorname{Im}(E(w_0)) : \tag{3.8.1}$$

Ապացույց: Դիցուք
$$g(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \in w_0, \\ 0, & \lambda \in \sigma(N) \setminus w_0 : \end{cases}$$
Այդ դեպքում $fg = 0$, և հետևաբար՝ $f(N)g(N) = 0$: Քանի որ $g(N) = E(w_0)$ (տես՝ 3.5.1 թեորեմի ապացույցը), ուստի այստեղից կբխի, որ
$$\operatorname{Im}(E(w_0)) \subset \ker(f(N)) : \tag{3.8.2}$$

Ցույց տանք, որ տեղի ունի նաև հակառակ ներդրումը: Նշանակենք $\tilde{w} = \sigma(N) \setminus w_0$: $\tilde{w}$–ը ներկայացնենք

$$\tilde{w} = \bigcup_{n=1}^{\infty} w_n \tag{3.8.3}$$

միավորման տեսքով, որտեղ w_n–երը զույգ առ զույգ չհատվող բորելյան բազմություններ են, որոնք գտնվում են w_0–ից դրական հեռավորության վրա: Դրա համար նախ նկատենք, որ

$$\tilde{w} = \sigma(N) \setminus w_0 = \sigma(N) \setminus f^{-1}(0) = f^{-1}\left(\mathbb{C} \setminus \{0\}\right),$$

և քանի որ f–ն անընդհատ է, իսկ $\mathbb{C} \setminus \{0\}$–ն բաց է, ուստի այստեղից կբխի, որ $\tilde{w}$–ը բաց է $\sigma(N)$–ում: Հետևաբար

$$\rho(x, w_0) > 0 \quad (\forall x \in \tilde{w}) : \tag{3.8.4}$$

Վերցնենք

$$\begin{aligned}
&w_1 = \{x \in \tilde{w} : \ \rho(x, w_0) \geqslant 1\},\\
&w_2 = \left\{x \in \tilde{w} : \ \frac{1}{2} \leqslant \rho(x, w_0) < 1\right\},\\
&w_3 = \left\{x \in \tilde{w} : \ \frac{1}{3} \leqslant \rho(x, w_0) < \frac{1}{2}\right\},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&w_n = \left\{x \in \tilde{w} : \ \frac{1}{n} \leqslant \rho(x, w_0) < \frac{1}{n-1}\right\} \quad (n \geqslant 2),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Այդ դեպքում (3.8.4)–ից կբխի, որ (3.8.3)–ը տեղի ունի: Ակնհայտ է, որ w_n–երը զույգ առ զույգ չեն հատվում: Մնում է համոզվել, որ w_n–երը բորելյան բազմություններ են:

$\varphi(x) = \rho(x, w_0)$ ֆունկցիան անընդհատ է $\sigma(N)$–ի վրա: Հետևաբար այն կլինի բորելյան ֆունկցիա: Այստեղից կբխի, որ իրական առանցքի ամեն մի բորելյան բազմության նախապատկերը $\sigma(N)$–ում բորելյան բազմություն է: Մասնավորապես,

$$\{x \in \sigma\left(N\right) : \ \rho\left(x, \, w_0\right) \geqslant 1\} = \varphi^{-1}\left([1, \, \infty)\right),$$

$$\left\{x \in \sigma(N): \frac{1}{n} \leqslant \rho(x, w_0) < \frac{1}{n-1}\right\} = \varphi^{-1}\left(\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right)\right)$$
$$(n = 2, 3, \ldots)$$

բազմությունները կհանդիսանան $\sigma(N)$–ում բորելյան բազմություններ: Քանի որ $\tilde{w} \subset \sigma(N)$ ևս բորելյան է (ավելին, $\tilde{w}$–ը բաց է), ուստի

$$\omega_1 = \tilde{w} \cap \varphi^{-1}([1, \infty)),$$
$$\omega_2 = \tilde{w} \cap \varphi^{-1}\left(\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right)\right) \quad (n \geqslant 2)$$

հավասարություններից կբխի, որ w_n–երը ևս $\sigma(N)$–ում բորելյան բազմություններ են:

Ակնհայտ է, որ

$$\rho(w_n, w_0) > 0 \quad (n = 1, 2, \ldots): \tag{3.8.5}$$

Սահմանենք

$$f_n(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(\lambda)}, & \lambda \in w_n \\ 0, & \lambda \in \sigma(N) \setminus w_n: \end{cases} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.8.6}$$

(3.8.5)-ի շնորհիվ

$$f(\lambda) \neq 0 \quad (\lambda \in \overline{w}_n),$$

ուստի $\dfrac{1}{f(\lambda)}$ ֆունկցիան կլինի որոշված և անընդհատ $\overline{w}_n$–ի վրա: Քանի որ $\overline{w}_n$–ը կոմպակտ է, ուստի $\dfrac{1}{f(\lambda)}$ ֆունկցիան կլինի սահմանափակ $\overline{w}_n$–ի վրա: Հետևաբար (3.8.6)-ից կբխի, որ f_n–երը սահմանափակ բորելյան ֆունկցիաներ են $\sigma(N)$–ի վրա:

Քանի որ

$$f_n(x) f(\lambda) = \chi_{w_n}(\lambda) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

ուստի
$$f_n(N)f(N) = E(w_n) \quad (n = 1, 2, \ldots) : \tag{3.8.7}$$
Դիցուք $x \in \ker(f(N))$, այսինքն՝ $f(N)x = 0$: Այդ դեպքում (3.8.7)–ից կբխի, որ
$$E(w_n)x = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$
և $w \mapsto E(w)x$ ֆունկցիայի σ–ադիտիվությունից կբխի, որ $E(\tilde{w})x = 0$: Բայց
$$E(\tilde{w}) + E(w_0) = E(\tilde{w} \cup w_0) = E(\sigma(N)) = I,$$
ուստի կունենանք՝
$$E(w_0)x = x :$$
Վերջինս էլ նշանակում է, որ $x \in \mathrm{Im}\,(E\,(w_0))$:

Այսպիսով, ապացուցվեց, որ
$$\ker(f(N)) \subset \mathrm{Im}(E(w_0)) : \tag{3.8.8}$$
(3.8.2)–ից և (3.8.8)–ից կբխի (3.8.1)–ը:
Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 3.8.2: *Դիցուք E–ն $N \in BL(H)$ նորմալ օպերատորի սպեկտրալ վերլուծությունն է, $\lambda_0 \in \sigma(N)$ և $E_0 = E(\{\lambda_0\})$: Այդ դեպքում՝*
1) $\ker(N - \lambda_0 I) = \mathrm{Im}(E_0)$,
2) λ_0–ն հանդիսանում է N օպերատորի սեփական արժեք այն և միայն այն դեպքում, երբ $E_0 \neq 0$,
3) $\sigma(N)$ սպեկտրի ցանկացած մեկուսացված կետ հանդիսանում է N օպերատորի սեփական արժեք,
4) եթե $\sigma(N)$ բազմությունը վերջավոր է կամ հաշվելի՝ $\sigma(N) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\}$, ապա $\forall x \in H$ վեկտոր միարժեքորեն ներկայացվում է
$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \tag{3.8.9}$$
տեսքով, որտեղ $Nx_i = \lambda_i x_i$: Ընդ որում $x_i \perp x_j \quad (i \neq j)$:

Ապացույց: 1)–ը ապացուցելու համար նախորդ թեորեմում կվերցնենք $f(\lambda) = \lambda - \lambda_0$:
2)–ը անմիջապես բխում է 1)–ից:
3)–ը ապացուցելու համար նկատենք, որ եթե λ_0–ն $\sigma(N)$–ի մեկուսացված կետ է, ապա $\{\lambda_0\}$–ն կլինի բաց $\sigma(N)$–ում և հետևաբար՝ $E(\{\lambda_0\}) \neq 0$: Ուստի 2)–ից կբխի, որ λ_0–ն N–ի սեփական արժեք է:
4) Նշանակենք $E_i = E(\{\lambda_i\})$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$: $i \neq j$ դեպքում ունենք

$$E_iE_j = E(\{\lambda_i\})\, E(\{\lambda_j\}) = E(\{\lambda_i\} \cap \{\lambda_j\}) = E(\varnothing) = 0,$$

որտեղից բխում է, որ $i \neq j$ դեպքում $\mathrm{Im}(E_i) \perp \mathrm{Im}(E_j)$: Քանի որ $w \mapsto E(w)x$ արտապատկերումը σ–ադիտիվ է, ուստի

$$\sum_{i=1}^{\infty} E_i x = \sum_{i=1}^{\infty} E(\{\lambda_i\})\, x = E(\sigma(N))x = x \quad (x \in H) :$$

Նշանակենք $x_i = E_i x$: 1)–ից բխում է, որ E_i–ն λ_i սեփական արժեքին համապատասխան սեփական ենթատարածության վրա օրթոգոնալ պրոյեկտման օպերատորն է, ուստի $Nx_i = \lambda_i x_i$:

Այժմ ցույց տանք (3.8.9) ներկայացման միակությունը: Իրոք, դիցուք

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i,$$

որտեղ $Nx_i = \lambda_i x_i$: Այդ դեպքում կունենանք

$$E_j x = E_j \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} E_j x_i :$$

Քանի որ

$$E_j x_i = \begin{cases} x_j, & i = j \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

ուստի կստանանք

$$x_j = E_j x \quad (j = 1, 2, \ldots),$$

որտեղից էլ բխում է, որ x_j–երը միարժեքորեն որոշվում են x–ի մի–ջոցով:
Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք 3.8.1: *Եթե $N \in BL(H)$ նորմալ օպերատորի սպեկ–տրը վերջավոր է կամ հաշվելի, ապա N–ի սեփական վեկտորներից կարելի է կազմել H տարածության օրթոնորմա–վորված բազիս:*

Ապացույց: Դիցուք $\sigma(N) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\}$: $\forall n \in \mathbb{N}$ համար $\ker(N - \lambda_n I)$–ի համար ընտրենք $\{e_{ni}\}_{i \in I_n}$ օրթոնորմավորված բազիս: Նշանակենք

$$M = \{e_{ni} : \; n \in \mathbb{N}, \; i \in I_n\} :$$

Նախորդ թեորեմի 4) կետից բխում է, որ M վեկտորական համա–կարգի գծային թաղանթն ամենուրեք խիտ է H-ում: Հետևաբար M–ը կլինի H–ի օրթոնորմավորված բազիս:
Հետևանքն ապացուցված է:

Թեորեմ 3.8.3: *Որպեսզի $N \in BL(H)$ նորմալ օպերատորը լինի կոմպակտ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենան հե–տևյալ երկու պայմանները՝*
ա) $\sigma(N)$–ը չունի ոչ 0–ական կուտակման կետ,
բ) եթե $\lambda \neq 0$, ապա $\dim\ker(N - \lambda I) < \infty$:

Ապացույց: **Անհրաժեշտությունը** կապված չէ նորմալության հետ. եթե $N \in BL(H)$ կամայական կոմպակտ օպերատոր է, ապա ա), բ) պնդումները տեղի ունեն:
Բավարարություն: ա)–ի շնորհիվ N օպերատորի $\sigma(N)$ սպեկտրի ոչ 0–ական կետերը կարելի է գրել

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$$

վերջավոր կամ անվերջ հաջորդականության տեսքով, ընդ որում կարելի է համարել, որ

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n| \geqslant \cdots$$

և $\lambda_n \to 0$ (եթե սպեկտրը հաշվելի է): Սահմանենք

$$f_n(\lambda) = \begin{cases} \lambda, & \lambda = \lambda_i \ (1 \leqslant i \leqslant n), \\ 0, & \lambda \in \sigma(N) \setminus \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} : \end{cases}$$

Նշանակենք $E_i = E(\{\lambda_i\})$ $(i = 1, 2, \ldots)$: բ) պայմանից և նախորդ թեորեմի 1) կետից բխում է, որ $\dim \mathrm{Im}(E_i) < \infty \quad (i = 1, 2, \ldots)$, որտեղից կբխի, որ E_i–ն կոմպակտ է: Ունենք

$$f_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi \{\lambda_i\} (\lambda),$$

ուստի

$$f_n(N) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi \{\lambda_i\} (N) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_i,$$

որտեղից կբխի, որ $f_n(N)$ օպերատորները կոմպակտ են:

Եթե $\sigma(N)$–ն անվերջ է, ապա

$$|\lambda - f_n(\lambda)| \leqslant |\lambda_{n+1}| \quad (\lambda \in \sigma(N))$$

գնահատականից կբխի, որ

$$\|N - f_n(N)\| \leqslant |\lambda_{n+1}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ուստի N–ը կհանդիսանա $f_n(N)$ կոմպակտ օպերատորների հաջորդականության սահման ըստ $BL(H)$–ի նորմի և հետևաբար N–ը կլինի կոմպակտ:

Եթե $\sigma(N)$–ը վերջավոր է, ապա $\exists n \in \mathbb{N}$, որ

$$f_n(\lambda) \equiv \lambda$$

և կունենանք $f_n(N) = N$, որտեղից կբխի, որ N–ը կոմպակտ է: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 3.8.4: *Դիցուք $N \in BL(H)$ կոմպակտ նորմալ օպերատոր է: Այդ դեպքում՝*

ա) գոյություն ունի N օպերատորի այնպիսի λ սեփական արժեք, որ $|\lambda| = \|N\|$,
բ) եթե $0 \in \sigma(N)$, $f \in C(\sigma(N))$ և $f(0) = 0$, ապա $f(N)$ օպերատորը կոմպակտ է: [11]

Ապացույց: ա) Ինչպես գիտենք (տես՝ 2.7.1 թեորեմը), $\rho(N) = \|N\|$, ուստի $\exists \lambda \in \sigma(N)$, որ $|\lambda| = \|N\|$: Եթե $\|N\| > 0$, ապա ըստ 3.8.3 թեորեմի λ–ն կլինի $\sigma(N)$–ի մեկուսացված կետ, ուստի ըստ 3.8.2 թեորեմի 3) կետի՝ λ–ն կլինի N–ի սեփական արժեք (այստեղ կարելի էր չօգտվել 3.8.2 և 3.8.3 թեորեմներից, այլ օգտվել նրանից, որ կոմպակտ օպերատորի սպեկտրի ոչ 0–ական կետերը սեփական արժեքներ են): Եթե $\|N\| = 0$, ապա ա) պնդումն ակնհայտ է:
բ) Քանի որ $\sigma(N)$–ը վերջավոր է կամ հաշվելի, ուստի $\mathbb{C} \setminus \sigma(N)$ լրացումը կլինի կապակցված $\mathbb{C}$–ում: Հետևաբար, ըստ Մերգելյանի թեորեմի՝ գոյություն ունի $\{g_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ բազմանդամների հաջորդականություն, որը $\sigma(N)$–ի վրա հավասարաչափ ձգտում է f–ին: Կունենանք $g_n(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(0) = 0$, ուստի $p_n(z) = g_n(z) - g_n(0)$ հաջորդականությունը ևս $\sigma(N)$–ի վրա հավասարաչափ կձգտի f–ին, ընդ որում $p_n(0) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$: Ֆիքսենք $n \in \mathbb{N}$: Դիցուք

$$p_n(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_{m-1} z$$

($p_n(0) = 0$ պայմանից բխում է, որ ազատ անդամը 0 է): Այդ դեպքում կունենանք

$$p_n(N) = a_0 N^m + a_1 N^{m-1} + \cdots + a_{m-1} N,$$

որտեղից կբխի, որ $p_n(N)$–ը կոմպակտ է: Քանի որ $p_n(z) \underset{x\to\infty}{\rightrightarrows} f(z)$, $z \in \sigma(N)$, ուստի

$$p_n(N) \xrightarrow[n\to\infty]{BL(H)} f(N), \text{[12]}$$

[11]Եթե $0 \notin \sigma(N)$, ապա $\exists N^{-1} \in BL(H)$, որտեղից և N–ի կոմպակտությունից կբխի, որ $I = NN^{-1}$ միավոր օպերատորը կոմպակտ է և հետևաբար $\dim H < \infty$: Ուստի այդ դեպքում $\forall f \in C(\sigma(N))$ համար $f(N)$–ը կոմպակտ է:

[12]Նշենք, որ վերջավոր սպեկտրի դեպքում որպես $p_n(z)$ կարելի է վերցնել f-ի Լագրանժի ինտերպոլյացիոն բազմանդամը. այդ դեպքում պարզապես կունենանք $p_n(z) = f(z) \ \ (z \in \sigma(N))$, հետևաբար՝ $p_n(N) = f(N)$:

որտեղից կբխի, որ $f(N)$–ը կոմպակտ է:
Թեորեմն ապացուցված է:
Լրացում: *Եթե N–ը H անվերջ չափանի հիլբերտյան տարածությունում կոմպակտ նորմալ օպերատոր է, $f \in C(\sigma(N))$ և $f(N)$ օպերատորը կոմպակտ է, ապա $f(0) = 0$:*
Ապացույց: Քանի որ H–ը անվերջ չափանի է, և N–ը կոմպակտ է, ուստի $0 \in \sigma(N)$: $\sigma(N)$–ի վրա դիտարկենք $g(\lambda) = f(\lambda) - f(0)$ ֆունկցիան: Կունենանք $g \in C(\sigma(N))$ և $g(0) = 0$, ուստի ըստ նախորդ թեորեմի բ) կետի՝ $g(N) = f(N) - f(0)I$ օպերատորը կոմպակտ է: Քանի որ $f(N)$–ը ևս կոմպակտ է, ուստի կոմպակտ կլինի նաև

$$f(0)I = f(N) - g(N)$$

օպերատորը: Քանի որ $\dim H = \infty$, ուստի այստեղից կբխի, որ $f(0) = 0$: ►

§ 3.9. Դրական օպերատորներ և քառակուսի արմատներ

Թեորեմ 3.9.1: *Դիցուք $T \in BL(H)$: Այդ դեպքում հետևյալ երկու պայմանները իրար համարժեք են՝*
1) $(Tx, x) \geqslant 0$ $(x \in H)$,
2) $T = T^*$ և $\sigma(T) \subset [0, \infty)$:

Ապացույց: Նախ ցույց տանք, որ 1) $\Rightarrow$ 2): Քանի որ $(Tx, x) \geqslant 0$, ուստի $(Tx, x) = \overline{(Tx, x)} = (x, Tx) = (T^*x, x)$: Ստացվեց, որ

$$(Tx, x) = (T^*x, x) \quad (x \in H),$$

ուստի ըստ միակության թեորեմի (տես՝ 3.1.1 հետևանքը), կունենանք $T = T^*$:

$\sigma(T) \subset [0, \infty)$ ներդրումը ցույց տալու համար ապացուցենք, որ $\forall \lambda > 0$ թվի համար $-\lambda \notin \sigma(T)$, որտեղից կբխի (կօգտվենք 3.6.3 թեորեմի ա) կետից), որ $\sigma(T) \subset [0, \infty)$: Իրոք, $\forall x \in H$ համար 1)–ից բխում է, որ

$$\lambda \|x\|^2 = \lambda(x, x) \leqslant \lambda(x, x) + (Tx, x) = \\ = ((T + \lambda I)x, x) \leqslant \|(T + \lambda I)x\| \cdot \|x\|,$$

$$\|(T+\lambda I)x\| \cdot \|x\| \geqslant \lambda \|x\|^2,$$

որը $x \neq 0$ դեպքում կրճատելով $\|x\|$–ով՝ կստանանք

$$\|(T+\lambda I)x\| \geqslant \lambda \|x\| : \tag{3.9.1}$$

Վերջինս ճիշտ է նաև $x = 0$ համար: (3.9.1)–ից բխում է, որ $-\lambda$ թիվը T օպերատորի համար ռեգուլյար փիպի կետ է, իսկ քանի որ ինքնահամալուծ օպերատորի համար ռեգուլյար փիպի կետերը համընկնում են ռեգուլյար կետերի հետ, ուստի $-\lambda$–ն կլինի T–ի ռեգուլյար կետ՝ $-\lambda \notin \sigma(T)$:

$-\lambda \notin \sigma(T)$ առնչությունը կարելի է հիմնավորել նաև հետևյալ կերպ (այդ հիմնավորումը ըստ էության կրկնում է այն փաստի ապացույցի դատողությունները, համաձայն որի ինքնահամալուծ օպերատորի համար ռեգուլյար փիպի կետերը համընկնում են կետերի հետ): Ինչպես գիտենք (տես՝ 3.1.1 լեմման),

$$[\mathrm{Im}(T+\lambda I)]^{\perp} = \ker{(T+\lambda I)^*}\,,$$

և քանի որ

$$(T+\lambda I)^* = T^* + \overline{\lambda} I = T + \lambda I,$$

ուստի

$$[\mathrm{Im}(T+\lambda I)]^{\perp} = \ker{(T+\lambda I)} :$$

Բայց (3.9.1)–ից բխում է, որ $\ker{(T+\lambda I)} = \{0\}$, ուստի կունենանք $[\mathrm{Im}(T+\lambda I)]^{\perp} = \{0\}$ և հետևաբար՝

$$\overline{\mathrm{Im}(T+\lambda I)} = H : \tag{3.9.2}$$

Ցույց տանք, որ

$$\mathrm{Im}(T+\lambda I) = H : \tag{3.9.3}$$

Դրա համար, շնորհիվ (3.9.2)–ի, բավական է ցույց տալ, որ $\mathrm{Im}(T+\lambda I)$–ն փակ է՝

$$\overline{\mathrm{Im}(T+\lambda I)} \subset \mathrm{Im}(T+\lambda I) : \tag{3.9.4}$$

Վերցնենք $\forall y \in \overline{\mathrm{Im}(T+\lambda I)}$: Այդ դեպքում $\exists\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականություն, որ

$$\mathrm{Im}(T+\lambda I)x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y : \tag{3.9.5}$$

(3.9.1)–ից կբխի, որ

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \frac{1}{\lambda}\,\|(T+\lambda I)x_n - (T+\lambda I)x_m\|\,,$$

որտեղից բխում է, որ x_n–ը ֆունդամենտալ է: Քանի որ H–ը լրիվ է, ուստի

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = x : \tag{3.9.6}$$

(3.9.5)–ից և (3.9.6)–ից և $T+\lambda I$ օպերատորի անընդհատությունից (կամ՝ փակությունից) կբխի, որ

$$y = \lim_{n\to\infty}(T+\lambda I)x_n = (T+\lambda I)x,$$

և հետևաբար $y \in \mathrm{Im}(T+\lambda I)$:

(3.9.1)–ից և (3.9.3)–ից բխում է, որ $\exists(T+\lambda I)^{-1} \in BL(H)$, ուստի $-\lambda \notin \sigma(T)$:

Այժմ ցույց տանք, որ 2) $\Rightarrow$ 1):

Դիցուք E–ն T օպերատորի սպեկտրալ վերլուծությունն է: Այդ դեպքում

$$(Tx,x) = \int\limits_{\sigma(T)} \lambda\, dE_{x,x}(\lambda) \quad (x \in H) : \tag{3.9.7}$$

Քանի որ $E_{x,x}$ չափերից յուրաքանչյուրը դրական է և $\lambda \in \sigma(T)$ համար $\lambda \geqslant 0$, ուստի (3.9.7)–ից կբխի, որ

$$(Tx,x) \geqslant 0 \quad (x \in H) :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 3.9.2: *$\forall T \in BL(H)$ ոչ բացասական օպերատորի համար գոյություն ունի միակ $S \in BL(H)$ ոչ բացասական օպերատոր, որ $S^2 = T$: Ընդ որում, եթե T–ն հակադարձելի է, ապա հակադարձելի է նաև S–ը:* [13]

[13]Հակադարձելիությունը կարելի է հասկանալ թե՛ սովորական իմաստով, թե՛ $BL(H)$–ի իմաստով:

Ապացույց: Դիցուք $A \subset BL(H)$ որևէ փակ նորմալ ենթահանրահաշիվ է, որը պարունակում է I–ն և T–ն: Ըստ Գելֆանդ–Նայմարկի 2.3.5 թեորեմի՝ $\hat{A} = C(\mathcal{M}_A)$: Քանի որ $T \geqslant 0$, ուստի (ըստ նախորդ թեորեմի) $\sigma(T) \subset [0, \infty)$ և քանի որ $\sigma(T) = \hat{T}(\mathcal{M}_A)$, ուստի $\hat{T} \geqslant 0$: Բայց ցանկացած ոչ բացասական անընդհատ ֆունկցիա ունի միակ ոչ բացասական անընդհատ արմատ: Հետևաբար գոյություն ունի միակ $S \in A$, որ $S^2 = T$ և $\hat{S} \geqslant 0$: Իսկ $\hat{S} \geqslant 0$ պայմանը համարժեք է $S \geqslant 0$ պայմանին:

Այժմ դիցուք A_0–ն դիտարկված A հանրահաշիվներից փոքրագույնն է. A_0–ն իրենից կներկայացնի T–ից բազմանդամների դասի փակումը: Այդ դեպքում ըստ վերն ասվածի, $\exists S_0 \in A_0$, որ $S_0^2 = T$ և $S_0 \geqslant 0$: Դիցուք $S \in BL(H)$ ևս այնպիսին է, որ $S^2 = T$ և $S \geqslant 0$: Ցույց տանք, որ $S = S_0$: A–ով նշանակենք I–ով և S–ով ծնված մինիմալ փակ ենթահանրահաշիվը: Քանի որ $T = S^2$, ուստի $T \in A$: Հետևաբար $A_0 \subset A$, ուստի և $S_0 \in A$: Բայց A–ն նորմալ ենթահանրահաշիվ է, ուստի՝ ըստ վերն ասվածի T–ն A–ում ունի միակ ոչ բացասական արմատ: Հետևաբար $S = S_0$:

Այժմ դիցուք T–ն հակադարձելի է $BL(H)$–ում: Ցույց տանք, որ այդ դեպքում S–ը ևս կլինի հակադարձելի $BL(H)$–ում, ընդ որում

$$S^{-1} = T^{-1} S :$$

Քանի որ $T^{-1}S \in BL(H)$, ուստի մնում է նկատել, որ

$$\left(T^{-1}S\right) S = S T^{-1} S = I :$$

Քանի որ $TS = TS$, ուստի $T^{-1}S = ST^{-1}$ և հետևաբար

$$S T^{-1} S = T^{-1} S^2 = T^{-1} T = I :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 3.9.3: *$\forall T \in BL(H)$ համար գոյություն ունի միակ $P \in BL(H)$ ոչ բացասական օպերատոր, որ*

$$\|Px\| = \|Tx\| \quad (x \in H) :$$

Այդ օպերատորը T^*T–ի ոչ բացասական քառակուսի արմատն է:

Ապացույց: Նախ նկատենք, որ

$$(T^*Tx, x) = (Tx, Tx) = \|Tx\|^2 \geqslant 0 \quad (x \in H), \tag{3.9.8}$$

ուստի $T^*T \geqslant 0$:

Եթե $P \in BL(H)$ և $P = P^*$, ապա

$$\left(P^2x, x\right) = (Px, Px) = \|Px\|^2 \quad (x \in H): \tag{3.9.9}$$

(3.9.8)–ից և (3.9.9)–ից բխում է, որ $\|Px\| = \|Tx\|$ $(x \in H)$ հավասարությունը համարժեք է

$$\left(P^2x, x\right) = (T^*Tx, x) \quad (x \in H)$$

հավասարությանը, որն էլ, ըստ միակության թեորեմի, համարժեք է $P^2 = T^*T$ հավասարությանը:
Թեորեմն ապացուցված է:

Այն փաստը, որ $\forall\lambda \in \mathbb{C}$ թիվ ներկայացվում է $\lambda = \alpha|\lambda|$ տեսքով, որտեղ $|\alpha| = 1$, բերում է $T \in BL(H)$ օպերատորը $T = UP$ տեսքով ներկայացնելու խնդրին, որտեղ U–ն ունիտար օպերատոր է և $P \geqslant 0$: Եթե այդպիսի ֆակտորիզացիան հնարավոր է, ապա մենք UP–ն կանվանենք T օպերատորի բևեռային ներկայացում:

Քանի որ ունիտար օպերատորը իզոմետրիկ է, ուստի բևեռային ներկայացման մեջ P արտադրիչը, ինչպես ցույց է տալիս 3.9.3 թեորեմը, միարժեքորեն որոշվում է T–ի միջոցով:

Թեորեմ 3.9.4: *Դիցուք $T \in BL(H)$: Այդ դեպքում՝*
ա) եթե T–ն հակադարձելի է $BL(H)$–ում, ապա այն ունի միակ $T = UP$ բևեռային ներկայացում,
բ) եթե T–ն նորմալ է, ապա այն ունի այնպիսի $T = UP$ բևեռային ներկայացում, որտեղ U, P, T օպերատորները տեղափոխելի են մեկը մյուսի հետ:

Ապացույց: ա) Եթե T–ն $BL(H)$–ում հակադարձելի է, ապա $BL(H)$–ում հակադարձելի կլինեն նաև T^* և T^*T օպերատորները, ուստի ըստ 3.9.2 թեորեմի՝ T^*T օպերատորի P ոչ բացասական քառակուսի արմատը ևս կլինի հակադարձելի $BL(H)$–ում: Վերցնենք

$U = TP^{-1}$: Այդ դեպքում U–ն կլինի հակադարձելի $BL(H)$–ում և կունենանք

$$U^*U = P^{-1}T^*TP^{-1} = P^{-1}P^2P^{-1} = I,$$

ուստի U–ն ունիտար օպերատոր է և $T = UP$: Քանի որ P–ն հակադարձելի է, ուստի $T = UP$ ներկայացումը միակն է (եթե $T = UP$, ապա $U = TP^{-1}$):

բ) Նշանակենք

$$p(\lambda) = |\lambda|,$$

$$u(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{|\lambda|}, & \lambda \neq 0, \\ 1, & \lambda = 0 : \end{cases}$$

Այդ դեպքում $p(\lambda)$, $u(\lambda)$–ն կլինեն $\sigma(T)$–ի վրա սահմանափակ բորելյան ֆունկցիաներ: Դիցուք $P = p(T)$ և $U = u(T)$: Քանի որ $p \geqslant 0$, ուստի $P \geqslant 0$: Քանի որ $u\overline{u} = \overline{u}u = 1$, ուստի $UU^* = U^*U = I$: Քանի որ $\lambda = u(\lambda)p(\lambda)$, ուստի $T = UP$:

T, U, P օպերատորների պեղափոխելիությունը բխում է λ, $u(\lambda)$, $p(\lambda)$ ֆունկցիաների պեղափոխելիությունից:

Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն 3.9.1: Կամայական $T \in BL(H)$ օպերատոր պարտավոր չէ ունենալ բևեռային ներկայացում: Վարը մենք կբերենք օպերատորի օրինակ, որը չունի բևեռային ներկայացում: Սակայն եթե P–ն T^*T–ից ոչ բացասական քառակուսի արմատ է, ապա

$$\|Px\| = \|Tx\| \quad (x \in H),$$

և

$$VPx = Tx$$

բանաձևով որոշվում է V իզոմետրիա $\mathrm{Im}(P)$–ից $\mathrm{Im}(T)$–ի վրա՝

$$\|Vy\| = \|y\| \quad (y \in \mathrm{Im}(P)) :$$

V–ն անընդհատորեն միակ ձևով շարունակվում է $\overline{\mathrm{Im}(P)}$–ի վրա և արդյունքում կստանանք իզոմետրիկական իզոմորֆիզմ $\overline{\mathrm{Im}(P)}$–ի և $\overline{\mathrm{Im}(T)}$–ի միջև: Եթե նաև գոյություն ունի V_1 իզոմետրիկական իզոմորֆիզմ $[\mathrm{Im}(P)]^{\perp}$ և $[\mathrm{Im}(T)]^{\perp}$ ենթապարածությունների միջև, ապա $z = x + y$ ($x \in \overline{\mathrm{Im}(P)}$, $y \in [\mathrm{Im}(P)]^{\perp}$) համար սահմանելով

$$Uz = Vx + V_1 y,$$

կստանանք, որ U-ն V-ի շարունակություն է և U–ն ունիտար է, ընդ որում

$$T = UP,$$

այսինքն T–ն թույլ է տալիս բևեռային ներկայացում: Այդպիսի V_1 օպերատոր գոյություն ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\dim[\mathrm{Im}(P)]^{\perp} = \dim[\mathrm{Im}(T)]^{\perp} : \tag{3.9.10}$$

Սակայն, չնայած, որ $\overline{\mathrm{Im}(P)}$ և $\overline{\mathrm{Im}(T)}$ ենթապարածությունների իզոմորֆ–իզոմետրիկ լինելու պատճառով

$$\dim \overline{\mathrm{Im}(P)} = \dim \overline{\mathrm{Im}(T)}, \tag{3.9.11}$$

կարող է պատահել, որ (3.9.10)–ը տեղի չունենա:

Նկատենք, որ $\dim H < \infty$ դեպքում

$$\overline{\mathrm{Im}(P)} \oplus [\mathrm{Im}(P)]^{\perp} = H$$

$$\overline{\mathrm{Im}(T)} \oplus [\mathrm{Im}(T)]^{\perp} = H$$

առնչություններից կբխի, որ

$$\dim[\mathrm{Im}(P)]^{\perp} = \dim H - \dim \overline{\mathrm{Im}(P)},$$

$$\dim[\mathrm{Im}(T)]^{\perp} = \dim H - \dim \overline{\mathrm{Im}(T)},$$

որտեղից և (3.9.11)–ից կբխի (3.9.10)–ը: Հետևաբար $\dim H < \infty$ դեպքում $\forall T \in BL(H)$ օպերատոր թույլ է տալիս բևեռային ներկա– յացում:

Սակայն ընդհանուր դեպքում պարտադիր չէ, որ $\dim H < \infty$: (3.9.10)–ը տեղի կունենա, մասնավորապես, այն դեպքում, երբ

$$[\mathrm{Im}(P)]^{\perp} = [\mathrm{Im}(T)]^{\perp} : \tag{3.9.12}$$

Համոզվենք, որ (3.9.12)–ը համարժեք է

$$\ker(T^*T) = \ker(TT^*) \tag{3.9.13}$$

հավասարությանը: Դրա համար նկատենք, որ հետևյալ առնչու–թյուններից յուրաքանչյուրը համարժեք է իր հաջորդին (նախորդին).

$$y \in [\mathrm{Im}(P)]^\perp,$$

$$(Px, y) = 0 \quad (\forall x \in H),$$

$$(x, Py) = 0 \quad (\forall x \in H),$$

$$Py = 0, \tag{3.9.14}$$

$$Ty = 0, \tag{3.9.15}$$

$$T^*Ty = 0,$$ [14]

և, մյուս կողմից, հետևյալ առնչություններից յուրաքանչյուրը հա–մարժեք է իր հաջորդին (նախորդին).

$$y \in [\mathrm{Im}(T)]^\perp,$$

$$(Tx, y) = 0 \quad (\forall x \in H),$$

$$(x, T^*y) = 0 \quad (\forall x \in H),$$

$$T^*y = 0,$$

$$TT^*y = 0:$$

Մասնավորապես, եթե T օպերատորը նորմալ է, ապա (3.9.13)-ը տեղի ունի:

Վերադառնալով ընդհանուր դեպքին՝ նկատենք, որ եթե սահմա–նենք

$$Vy = 0 \quad \left(y \in [\mathrm{Im}(T)]^\perp\right)$$

[14] (3.9.14)–ի և (3.9.15)–ի համարժեքությունը բխում է $\|Py\| = \|Ty\|$ հավասարությունից:

և V–ն շարունակենք ամբողջ H–ի վրա, ապա կստանանք

$$T = VP$$

ներկայացում: Այստեղ V–ն ունիտար չէ, այլ այսպես կոչված՝ մասնակի իզոմետրիկ օպերատոր է: Այսպիսով, ստացվեց, որ $\forall T \in BL(H)$ օպերատոր թույլ է տալիս $T = VP$ ֆակտորիզացիա, որտեղ P–ն ոչ բացասական օպերատոր է, իսկ V–ն մասնակի իզոմետրիկ օպերատոր է:

Այժմ բերենք սահմանափակ օպերատորների օրինակներ, որոնք թույլ չեն տալիս բևեռային ներկայացում: Դիցուք $H = \ell^2$, որտեղ $\ell^2 = L^2(\mathbb{Z}_+)$: Սահմանենք

$$(S_R f)(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ f(n-1), & n \geqslant 1, \end{cases}$$

$$(S_L f)(n) = f(n+1) \quad (n \geqslant 0):$$

Այդ դեպքում հեշտ է տեսնել, որ

$$S_R^* = S_L, \quad S_L^* = S_R:$$

Հեշտ է նաև տեսնել, որ

$$(S_R S_L f)(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ f(n), & n \geqslant 1 \end{cases}; \tag{3.9.16}$$

$$S_L S_R = I: \tag{3.9.17}$$

Նշանակենք

$$P_1 = S_R S_L, \quad P_2 = S_L S_R = I:$$

Այդ դեպքում կունենանք

$$P_1^2 = S_L^* S_L, \quad P_2^2 = S_R^* S_R:$$

Ցույց տանք, որ S_L և S_R օպերատորները թույլ չեն տալիս բևեռային ներկայացում: Իրոք, եթե ենթադրենք, թե S_L–ը թույլ է տալիս

$$S_L = UP$$

բևեռային ներկայացում, որտեղ U–ն ունիտար է և $P \geqslant 0$, ապա կունենանք
$$\|S_L x\| = \|Px\| \quad (x \in H),$$
և 3.9.3 թեորեմից կբխի, որ $P = P_1$: Ուստի կունենանք

$$S_L = U S_L^* S_L,$$

$$S_L f = U S_L^* S_L f \quad \left(\forall f \in \ell^2\right),$$

և քանի որ $S_L(\ell^2) = \ell^2$, ուստի կստանանք, որ

$$U S_L^* = I,$$

$$S_L^* = U^{-1} = U^*,$$

$$S_L = U,$$

ինչը ցույց է տալիս, որ S_L–ն ունիտար է, իսկ դա հակասում է (3.9.16)–ին:

Այժմ ենթադրենք, թե S_R–ն է թույլ տալիս

$$S_R = UP$$

բևեռային ներկայացում, որտեղ U–ն ունիտար է և $P \geqslant 0$: Այդ դեպքում նորից կունենանք $P = P_2$, ուստի

$$S_R = U :$$

Ստացվեց, որ S_R–ը ունիտար է, ինչը հակասում է (3.9.16)–ին: ▶

Թեորեմ 3.9.5: *Դիցուք $M, N, T \in BL(H)$, ընդ որում M–ը և N–ը նորմալ են, իսկ T–ն հակադարձելի է $BL(H)$–ում: Դիցուք*

$$M = TNT^{-1} : \tag{3.9.18}$$

Այդ դեպքում եթե $T = UP$–ն T օպերատորի բևեռային ներկայացումն է, ապա
$$M = UNU^{-1} : \tag{3.9.19}$$

Ապացույց: (3.9.18) պայմանը կարելի է գրել $MT = TN$ տեսքով: Այստեղից և Ֆուգլիդ–Պուտնամ–Ռոզենբլյումի թեորեմից բխում է, որ $M^*T = TN^*$: Հետևաբար

$$T^*M = (M^*T)^* = (TN^*)^* = NT^*,$$

ուստի, քանի որ $P^2 = T^*T$, կունենանք

$$NP^2 = NT^*T = T^*MT = T^*TN = P^2N:$$

Այստեղից կբխի, որ $\forall f \in C\left(\sigma\left(P^2\right)\right)$ համար N–ը տեղափոխելի է $f\left(P^2\right)$–ու հետ: Քանի որ $P^2 \geqslant 0$, ուստի $\sigma\left(P^2\right) \subset [0,\infty)$: Վերցնենք $f(\lambda) = \sqrt{\lambda} \geqslant 0$ $\left(\lambda \in \sigma\left(P^2\right)\right)$, այդ դեպքում կունենանք $f^2(\lambda) = \lambda$ և հետևաբար $f^2\left(P^2\right) = P^2$: Քանի որ P^2–ու ոչ բացասական քառակուսի արմատը միակն է, ուստի $f\left(P^2\right) = P$: Հետևաբար $Nf\left(P^2\right) = f\left(P^2\right)N$ հավասարությունից կբխի, որ $NP = PN$: Ուստի (3.9.18)–ից կբխի, որ

$$M = (UP)N(UP)^{-1} = UPNP^{-1}U^{-1} = \\ = UNPP^{-1}U^{-1} = UNU^{-1}:$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն 3.9.2: (3.9.18) առնչությամբ կապված M և N օպե–րատորները կոչվում են նման: Եթե U–ն ունիտար օպերատոր է և տեղի ունի (3.9.19)–ը, ապա M և N օպերատորները կոչվում են ունիտար համարժեք (իզոմորֆ): Այսպիսով, նախորդ թեորեմը ցույց է տալիս, որ եթե նորմալ օպերատորներն իրար նման են, ապա դրանք ունիտար համարժեք են: ▶

§ 3.10. Հակադարձելի օպերատորների խումբը

Թեորեմ 3.10.1: *Բոլոր $T \in BL(H)$ հակադարձելի ($BL(H)$–ում) օպերատորների $G = [BL(H)]^{-1}$ խումբը կապակցված է, և յուրաքանչյուր $T \in G$ օպերատոր ներկայացվում է երկու էքս–պոնենտների արտադրյալի տեսքով:*

(Էքսպոնենտի տակ, հասկանալի է, նկատի ունենք $\exp(S)$ *տեսքի օպերատոր, որտեղ $S \in BL(H)$):*

Ապացույց: Դիցուք $T \in G$ և $T = UP$–ն նրա բևեռային ներկայացումն է: Այստեղ U–ն ունիտար է, իսկ $P \geqslant 0$, ընդ որում P–ն հակադարձելի է $BL(H)$–ում: Հետևաբար $\sigma(P) \subset (0, \infty)$, ուստի $\sigma(P)$–ի վրա կարող ենք դիտարկել $\varphi(\lambda) = \ln \lambda$ ֆունկցիան: Կունենանք

$$\exp(\varphi(\lambda)) = \lambda \quad (\lambda \in \sigma(P)),$$

ուստի նշանակելով $S = \varphi(P)$, կստանանք

$$\exp(S) = P :$$

Քանի որ U–ն ունիտար է, ուստի $\sigma(U)$–ն ընկած է միավոր շրջանագծի վրա: Հետևաբար գոյություն ունի $f : \sigma(U) \to \mathbb{R}$ սահմանափակ բորելյան ֆունկցիա, որ

$$\exp\{i\, f(\lambda)\} = \lambda \quad (\lambda \in \sigma(U)) :$$

Իսկապես, որպես $f(\lambda)$ կարելի է վերցնել արգումենտի գլխավոր արժեքը (նկատենք, որ նշված հատկություններով օժտված f անընդհատ ֆունկցիա կարող է գոյություն չունենալ): Նշանակենք $Q = f(U)$: Այդ դեպքում $Q \in BL(H)$ ինքնահամալուծ օպերատոր է և $U = \exp(iQ)$: Հետևաբար՝

$$T = UP = \exp(iQ)\exp(S) :$$

Այստեղից բխում է, որ G խումբը կապակցված է: Իրոք, $r \in [0, 1]$ համար սահմանենք

$$T_r = \exp(irQ)\exp(rS) :$$

Այդ դեպքում $r \mapsto T_r$ կլինի անընդհատ արտապատկերում $[0, 1]$–ից G–ի մեջ, ընդ որում $T_0 = I$ և $T_1 = T$: Ստացվեց, որ G–ի ցանկացած T էլեմենտ կարելի է G–ին պատկանող անընդհատ կորով միացնել I միավոր օպերատորին: Այստեղից կբխի, որ G–ի ցանկացած երկու էլեմենտներ կարելի է միացնել իրար ամբողջությամբ G–ին պատկանող անընդհատ կորով: Հետևաբար G–ն կապակցված է: Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն 3.10.1: 1.15.5 թեորեմից բխում է, որ եթե A–ն վերջավոր չափանի բանախյան հանրահաշիվ է, ապա $\forall a \in A^{-1}$ էլեմենտ ներկայացվում է $a = \exp(b)$ տեսքով, որտեղ $b \in A$ ինչ–որ էլեմենտ է: Ընդհանուր դեպքում պարտադիր չէ, որ $T \in G$ օպերատորը հանդիսանա էքսպոնենտ: Հարկ է նշել, որ ամեն մի էքսպոնենտ օժտված է քառակուսի արմատով. $\exp(S)$ օպերատորի համար $\exp\left(\frac{1}{2}S\right)$ օպերատորը հանդիսանում է քառակուսի արմատ: Վարը մենք կտեսնենք, որ պարտադիր չէ $T \in G$ օպերատորն ունենա քառակուսի արմատ:

Թեորեմ 3.10.2: *Դիցուք $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ այնպիսի բաց սահմանափակ բազմություն է, որ*

$$\Omega = \left\{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha^2 \in \mathcal{D}\right\} \tag{3.10.1}$$

բազմությունը կապակցված է և $0 \notin \overline{\mathcal{D}}$: Դիցուք H–ը այն բոլոր $f \in H(\mathcal{D})$ ֆունկցիաների պարածությունն է, որոնց համար

$$\int\limits_{\mathcal{D}} |f|^2 dm_2 < \infty \tag{3.10.2}$$

(որտեղ m_2–ը $\mathbb{R}^2$–ում Լեբեգի չափն է): H–ում սկալյար արտադրյալը սահմանենք

$$(f, g) = \int\limits_{\mathcal{D}} f\overline{g}\, dm_2 \tag{3.10.3}$$

բանաձևով: Այդ դեպքում H–ը հիլբերտյան պարածություն է: $M \in BL(H)$ բազմապատկման օպերատորը սահմանենք հետևյալ կերպ.

$$(Mf)(z) = zf(z) \quad (f \in H,\ z \in \mathcal{D}) :$$

Այդ դեպքում M–ը հակադարձելի է $BL(H)$–ում, բայց չունի քառակուսի արմատ:

Ապացույց: Պարզ է, որ (3.10.3)–ը սկալյար արտադրյալ է H–ի վրա և H–ը $L^2(\mathcal{D})$–ի ենթապարածություն է: Դիցուք $z \in \mathcal{D}$ կամայական կետ է: $\Delta_{z_0} = D\left(z_0; \varepsilon_{z_0}\right)$ ընտրենք այնքան փոքր, որ $\overline{D}\left(z_0; 2\varepsilon_{z_0}\right) \subset \mathcal{D}$: Ըստ միջին արժեքի թեորեմի՝ $\forall f \in H$ համար

$$f(z) = \frac{1}{\pi\varepsilon_z^2} \iint\limits_{D(z,\varepsilon_z)} f(t)\, dm_2 \quad (z \in D(z, \varepsilon_z)),$$

հետևաբար

$$|f(z)|^2 = \frac{1}{(\pi\varepsilon_z^2)^2} \left| \iint\limits_{D(z,\varepsilon_z)} f(t)\, dm_2 \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(\pi\varepsilon_z^2)^2} \iint\limits_{D(z,\varepsilon_z)} 1^2 dm_2 \cdot \iint\limits_{D(z,\varepsilon_z)} |f(t)|^2 dm_2 =$$

$$= \frac{1}{\pi\varepsilon_z^2} \iint\limits_{D(z,\varepsilon_z)} |f|^2 dm_2 \leqslant \frac{\|f\|^2}{\pi\varepsilon_z^2},$$

$$|f(z)| \leqslant \frac{\|f\|}{\sqrt{\pi}\, \varepsilon_{z_0}} \quad \left(z \in \overline{D}\left(z_0, \varepsilon_{z_0}\right),\, f \in H\right): \tag{3.10.4}$$

Այժմ դիցուք $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է H–ում: (3.10.4)–ից կբխի, որ կամայական $z_o \in \mathcal{D}$ կետի համար

$$\sup_{z \in \overline{\Delta}_{z_0}} |f_n(z) - f_m(z)| \leqslant \frac{\|f_n - f_m\|}{\sqrt{\pi}\, \varepsilon_{z_0}} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0,$$

ինչը ցույց է տալիս, որ $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը z_0 կետի Δ_{z_0} շրջակայքում (և Δ_{z_0}–ի փակման վրա) հավասարաչափ զուգամետ է: Ստացվեց, որ $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը $\mathcal{D}$–ի յուրաքանչյուր կետի շրջակայքում հավասարաչափ զուգամետ է, ուստի այն հավասարաչափ զուգամետ կլինի $\mathcal{D}$–ի կոմպակտ ենթաբազմությունների վրա: Հետևաբար, ըստ Վայերշտրասի թեորեմի,

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) \quad (z \in \mathcal{D}) \tag{3.10.5}$$

սահմանային ֆունկցիան պատկանում է $H(\mathcal{D})$–ին:

Մյուս կողմից, H–ում $\{f_n\}$ հաջորդականության ֆունդամենտա–լությունից բխում է, որ $\{f_n\}$–ը ֆունդամենտալ է նաև $L^2(\mathcal{D})$–ում, ուստի $\exists\varphi \in L^2(\mathcal{D})$, որ

$$f_n \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{L^2(\mathcal{D})}} \varphi : \tag{3.10.6}$$

(3.10.5)–ից և (3.10.6)–ից կբխի, որ $f = \varphi$ h.ա. $\mathcal{D}$–ում (չէ՞ որ L^2 նորմով զուգամետ յուրաքանչյուր $\{f_n\}$ հաջորդականություն պա–րունակում է համարյա ամենուրեք զուգամետ ենթահաջորդականու–թյուն, որի f սահմանային ֆունկցիան հանդիսանում է միաժամա–նակ $\{f_n\}$–ի սահմանը L^2 նորմով): Հետևաբար $f \in L^2(\mathcal{D})$ և

$$f_n \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{L^2(\mathcal{D})}} f : \tag{3.10.7}$$

Ստացվեց, որ $f \in H(\mathcal{D}) \cap L^2(\mathcal{D}) = H$, և (3.10.7)–ից կբխի, որ $f_n \xrightarrow{H} f$: Սրանով իսկ H–ի լրիվությունն ապացուցվեց:

Քանի որ $\mathcal{D}$–ն սահմանափակ է, ուստի $M \in BL(H)$: Բացի այդ, $\frac{1}{z}$ ֆունկցիան սահմանափակ է $\mathcal{D}$–ում, ուստի M–ի

$$\left(M^{-1}f\right)(z) = \frac{1}{z}f(z) \quad (f \in H)$$

հակադարձը կլինի $BL(H)$–ից:

Ցույց տանք, որ $\nexists Q \in BL(H)$, որ $Q^2 = M$: Ենթադրենք հակառակը: Ընտրենք որևէ $\alpha \in \Omega$ և նշանակենք $\lambda = \alpha^2$: Այդ դեպքում $\lambda \in \mathcal{D}$: Նշանակենք

$$M_\lambda = M - \lambda I, \quad S = Q - \alpha I, \quad T = Q + \alpha I : \tag{3.10.8}$$

Այդ դեպքում հեշտ է տեսնել, որ

$$ST = M_\lambda = TS : \tag{3.10.9}$$

Քանի որ մենք գործ ունենք հոլոմորֆ ֆունկցիաների հետ,

$$\left(M_\lambda g\right)(z) = (z - \lambda)g(z) \quad (z \in \mathcal{D},\ g \in H) \tag{3.10.10}$$

բանաձևը ցույց է տալիս, որ M_λ օպերատորը ինեկտիվ է և

$$\operatorname{Im}(M_\lambda) = \{f \in H : \ f(\lambda) = 0\} : \tag{3.10.11}$$

Վերը մենք տեսանք, որ $f_n \xrightarrow{H} F$ նշանակում է, որ $f_n \xrightarrow{L^2} F$ և $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$, $\mathcal{D}$–ի ներսում: Ուստի (3.10.11)–ից կբխի, որ $\operatorname{Im}(M_\lambda)$–ն H–ում փակ ենթատարածություն է: Նկատենք նաև, որ $\operatorname{Im}(M_\lambda)$–ի կոչափը հավասար է 1–ի՝

$$\dim_{\operatorname{Im}(M_\lambda)} H = \dim H / \operatorname{Im}(M_\lambda) = \dim[\operatorname{Im}(M_\lambda)]^\perp = 1 : \tag{3.10.12}$$

Իրոք, $\forall f \in H$ կարելի է գրել

$$f = f_1 + f_2$$

տեսքով, որտեղ $f_1 \in \operatorname{Im}(M_\lambda)$, $f_2 = const$ (կվերցնենք $f_1(z) = f(z) - f(\lambda)$, $f_2(z) = f(\lambda)$, $\forall z \in \mathcal{D}$):

M_λ–ի ինեկտիվությունից և (3.10.9)–ի առաջին հավասարությունից բխում է, որ T–ն ևս ինեկտիվ է, իսկ (3.10.9)–ի երկրորդ հավասարությունից բխում է, որ S–ը ևս ինեկտիվ է: Ունենք $\operatorname{Im}(M_\lambda) \neq H$ (չէ՞ որ $f(x) \equiv 1$ ֆունկցիան H–ից է և չի պատկանում $\operatorname{Im}(M_\lambda)$–ին), ուստի M_λ–ն $BL(H)$–ում հակադարձելի չէ: Այստեղից և (3.10.9)–ից կբխի, որ S և T օպերատորներից գոնե մեկը հակադարձելի չէ $BL(H)$–ում:

Ցույց տանք, որ S, T օպերատորներից ճիշտ մեկը հակադարձելի է $BL(H)$–ում: Այդ նպատակով ենթադրենք, թե S–ը հակադարձելի չէ $BL(H)$–ում և ցույց տանք, որ այդ դեպքում T–ն հակադարձելի է $BL(H)$–ում: Նախ նկատենք, որ $\operatorname{Im}(S)$-ը փակ է: Իրոք, եթե $f_n \in H$ $(n \in \mathbb{N})$ և $Sf_n \xrightarrow{H} g$, ապա (3.10.9)-ի շնորհիվ $M_\lambda f_n = T(Sf_n) \to Tg$, որտեղից և $\operatorname{Im}(M_\lambda)$-ի փակությունից կբխի, որ գոյություն ունի այնպիսի $f \in H$ ֆունկցիա, որ

$$M_\lambda f = Tg : \tag{3.10.13}$$

(3.10.9), (3.10.13)-ից կունենանք $TSf = Tg$, որտեղից և T-ի ինեկտիվությունից կբխի, որ $g = Sf \in \operatorname{Im}(S)$: Քանի որ S–ը ինեկտիվ է և հակադարձելի չէ, ուստի $\mathrm{Im}(S) \neq H$. հակառակ դեպքում, ըստ հակադարձ օպերատորի մասին Բանախի թեորեմի, S–ը կլիներ հակադարձելի: Հետևաբար

$$\dim\left[\mathrm{Im}\left(S\right)\right]^{\perp} \geqslant 1 : \tag{3.10.14}$$

$M_\lambda = ST$ հավասարությունից բխում է, որ $\mathrm{Im}(M_\lambda) \subset \mathrm{Im}(S)$, ուստի $[\mathrm{Im}\,(S)]^{\perp} \subset [\mathrm{Im}\,(M_\lambda)]^{\perp}$, որտեղից և (3.10.12), (3.10.14)–ից կբխի, որ $[\mathrm{Im}\,(S)]^{\perp} = [\mathrm{Im}\,(M_\lambda)]^{\perp}$: Հետևաբար $\mathrm{Im}(S) = \mathrm{Im}(M_\lambda)$: Ստացվածը ցույց է տալիս, որ S–ը H–ը փոխմիարժեք արտապատկերում է $\mathrm{Im}(M_\lambda)$–ի վրա: Բայց մյուս կողմից $M_\lambda = ST$ հավասարությունը ցույց է տալիս, որ S–ը $\mathrm{Im}(T)$–ն է փոխմիարժեք արտապատկերում $\mathrm{Im}(M_\lambda)$–ի վրա: Հետևաբար՝ $\mathrm{Im}(T) = H$, որտեղից, T–ի ինեկտիվությունից և հակադարձ օպերատորի մասին Բանախի թեորեմից բխում է, որ T–ն հակադարձելի է $BL(H)$–ում:

Այսպիսով, մենք ցույց տվեցինք, որ $\forall\alpha \in \Omega$ համար $Q - \alpha I$ և $Q + \alpha I$ օպերատորներից ճիշտ մեկը հակադարձելի է: Նկատենք, որ $0 \notin \overline{\mathcal{D}}$ պայմանի շնորհիվ կունենանք, որ $0 \notin \overline{\Omega}$: Դժվար չէ տեսնել, որ

$$\sigma(Q) \cap \Omega \neq \Omega : \tag{3.10.15}$$

Իրոք, եթե $\alpha \in \sigma(Q) \cap \Omega$, ապա $Q - \alpha I$ օպերատորը $BL(H)$–ում հակադարձելի չէ, ուստի $Q + \alpha I$ օպերատորը կլինի $BL(H)$–ում հակադարձելի և հետևաբար $-\alpha \notin \sigma(Q)$, մինչդեռ $-\alpha$–ն ակնհայտորեն պատկանում է Ω–ին:

Քանի որ Ω–ն հանդիսանում է $\alpha \mapsto \alpha^2$ անընդհատ արտապատկերման դեպքում $\mathcal{D}$ բաց բազմության նախապատկերը, ուստի Ω–ն բաց է: Ցույց տանք, որ $\sigma(Q) \cap \Omega$–ն բաց է Ω–ում: Դրա համար վերցնենք $\forall\alpha \in \sigma(Q) \cap \Omega$ և ցույց տանք, որ $\exists\,\varepsilon > 0$, այնպես, որ $D(\alpha, \varepsilon) \subset \sigma(Q) \cap \Omega$: Իրոք, $\alpha \in \sigma(Q)$ նշանակում է, որ $Q - \alpha I$ օպերատորը $BL(H)$–ում հակադարձելի չէ: Հետևաբար $Q + \alpha I$ օպերատորը կլինի հակադարձելի $BL(H)$–ում՝ $Q + \alpha I \in G$: Քանի որ G–ն բաց է, ուստի $\exists\,\varepsilon > 0$, որ $\lambda \in D(\alpha, \varepsilon)$ համար $Q + \lambda I \in G$: Քանի որ Ω–ն բաց է և $\alpha \in \Omega$, ուստի ε–ը կարելի է ընտրել այնքան փոքր, որ

$$D(\alpha, \varepsilon) \subset \Omega : \tag{3.10.16}$$

Այդ դեպքում $\lambda \in D(\alpha,\varepsilon)$ համար $Q-\lambda I$ օպերատորը չի լինի հակադարձելի (չէ՞ որ այդպիսի λ–ները Ω–ից են և նրանց համար $Q+\lambda I \in G$), ինչը նշանակում է, որ $D(\alpha,\varepsilon) \subset \sigma(Q)$: Այստեղից և (3.10.16)–ից էլ կբխի, որ

$$D(\alpha,\varepsilon) \subset \sigma(Q) \cap \Omega :$$

Մյուս կողմից, քանի որ $\sigma(Q)$–ն կոմպակտ է, ուստի $\sigma(Q)\cap\Omega$–ն կլինի նաև փակ Ω–ում: Այստեղից և Ω–ի կապակցվածությունից կբխի, որ $\sigma(Q) \cap \Omega = \emptyset$ կամ $\sigma(Q) \cap \Omega = \Omega$: Ստացվածից և (3.10.15)–ից կբխի, որ $\sigma(Q) \cap \Omega = \emptyset$, ինչը հակասում է այն բանին, որ $\forall \alpha \in \Omega$ համար $Q \pm \alpha I$ օպերատորներից մեկը հակադարձելի չէ $BL(H)$–ում կամ որ նույնն է՝ $\pm\alpha$ թվերից մեկը պատկանում է $\sigma(Q)$–ին:
Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն 3.10.2: Ինչպես ապացույցից պեսանք, H–ի լրիվու–թյան վերաբերյալ պնդումը ճիշտ է $\forall \mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ բաց բազմության համար: ▶

Գլուխ 4
B^*-ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎՆԵՐԻ ՆԿԱՐԱԳՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

§ 4.1. Քառակուսի արմատներ

Թեորեմ 4.1.1: *Դիցուք A–ն ինվոլյուտիվ բանախյան հանրահաշիվ է, $x \in A$, $x = x^*$ և $\sigma(x) \subset (0, \infty)$: Այդ դեպքում $\exists y \in A$, որ $y = y^*$ և $y^2 = x$:*

Ապացույց: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք համարել, որ A–ն կոմուտատիվ հանրահաշիվ է: Իրոք, հակառակ դեպքում A–ն կփոխարինենք x–ը պարունակող փակ նորմալ հանրահաշվով, որի արդյունքում x–ի սպեկտրը չի փոխվի:

Դիցուք $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$: Քանի որ Ω–ն միակապ է, ուստի $\exists f \in H(\Omega)$, որ $f^2(\lambda) = \lambda$ և $f(1) = 1$: Քանի որ $\sigma(x) \subset \Omega$, ուստի կարող ենք դիտարկել

$$y = \tilde{f}(x) \tag{4.1.1}$$

էլեմենտը: Կունենանք $y^2 = x$: Ցույց տանք, որ $y^* = y$:

Քանի որ Ω–ն միակապ է, ուստի ըստ Ռունգեի թեորեմի՝ $\exists \{P_n\}_1^\infty \subset H(\Omega)$ բազմանդամների հաջորդականություն, որը Ω–ի ներսում հավասարաչափ զուգամիտում է f–ին: Նշանակենք

$$Q_n(\lambda) = \frac{1}{2}\left(P_n(\lambda) + \overline{P_n\left(\overline{\lambda}\right)}\right):$$

Քանի որ $f\left(\overline{\lambda}\right) = \overline{f(\lambda)}$, ուստի Q_n–երը ևս Ω–ի ներսում հավասարաչափ կզուգամիտեն f–ին: Q_n–երը իրական գործակիցներով բազմանդամներ են, ուստի

$$y_n = Q_n(x) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

էլեմենտները կլինեն հերմիտյան, քանի որ $x = x^*$: Կունենանք

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n:$$

Եթե ենթադրենք, թե ինվոլյուցիան անընդհատ է, ապա $y_n = y_n^*$ հավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ $n \to \infty$, կստանանք $y = y^*$: Ընդհանուր դեպքը բերվում է նշվածին հետևյալ կերպ:

Դիցուք R–ը A հանրահաշվի ռադիկալն է և $\pi : A \to A/R$ կանոնական արտապատկերումն է: A/R ֆակտոր–հանրահաշվի վրա

$$(\pi(a))^* = \pi(a^*) \quad (a \in A)$$

բանաձևով որոշվում է կոռեկտ սահմանված ինվոլյուցիա: Եթե $a \in A$ էլեմենտը հերմիտյան է, ապա $\pi(a)$–ն ևս կլինի հերմիտյան: Գելֆանդի ձևափոխության մասին պնդումը ցույց է տալիս, որ A/R հանրահաշիվը իզոմորֆ է $\hat{A}$–ին և հետևաբար, կիսապարզ է: Այստեղից կբխի, որ A/R–ում ցանկացած ինվոլյուցիա անընդհատ է և հետևաբար՝ $\pi(y)$–ը հերմիտյան է՝ $\pi(y) = \pi(y^*)$:

Ապացուցվածը ցույց է տալիս, որ $y - y^* \in \ker(\pi) = \mathrm{Rad}(A)$: y–ը ներկայացնենք $y = u + iv$ տեսքով, որտեղ $u = u^*$ և $v = v^*$: Ունենք $y - y^* = 2iv \in R$, ուստի $v \in R$: Քանի որ $x = y^2$, ուստի

$$x = u^2 - v^2 + 2iuv \, : \tag{4.1.2}$$

Դիցուք $\varphi \in \mathcal{M}_A$ կամայական կոմպլեքս հոմոմորֆիզմ է: Քանի որ $v \in R$, ուստի $\varphi(v) = 0$: Հետևաբար

$$\varphi(x) = [\varphi(u)]^2 \, :$$

Ըստ ենթադրության՝ $0 \notin \sigma(x)$: Հետևաբար $\varphi(x) \neq 0$, ուստի և $\varphi(u) \neq 0$: Այստեղից և φ–ի կամայականությունից կբխի, որ $u \in A^{-1}$: Քանի որ $x = x^*$, ուստի (4.1.2)–ից կբխի, որ

$$uv = 0 \, :$$

Բայց $v = u^{-1}(uv)$, ուստի $v = 0$: Ստացվեց, որ $y = u$ և $u = u^*$, ուստի $y = y^*$:

Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն 4.1.1: Թեորեմի պայմաններում $\sigma(y) \subset (0, \infty)$: Իրոք, դա բխում է (4.1.1)–ից, $\sigma(x) \subset (0, \infty)$ պայմանից և սպեկտրների արտապատկերման թեորեմից: ▶

§ 4.2. Դրական ֆունկցիոնալներ

Դիցուք A-ն ինվոլյուտիվ բանախյան հանրահաշիվ է, իսկ A'–ը A–ի վրա որոշված բոլոր գծային ֆունկցիոնալների դասն է (A–ի հանրահաշվական համալուծը)։

Սահմանում 4.2.1: $F \in A'$ ֆունկցիոնալը կոչվում է դրական (ոչ բացասական), եթե

$$F(xx^*) \geqslant 0 \quad (\forall x \in A) :$$

Նախ ապացուցենք հետևյալ օժանդակ պնդումը։

Լեմմա 4.2.1: *Դիցուք L_1, L_2–ը X բանախյան պարածության այնպիսի փակ ենթապարածություններ են, որ $X = L_1 + L_2$: Այդ դեպքում $\exists \gamma > 0$ թիվ, այնպես, որ $\forall x \in X$ վեկտոր կարելի է ներկայացնել $x = x_1 + x_2$ տեսքով, որտեղ $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$ և*

$$\|x_1\| + \|x_2\| \leqslant \gamma \|x\| :$$

Ապացույց: Նշանակենք $Y = L_1 \times L_2$: Y–ում գործողությունները սահմանենք կոմպոնենտ առ կոմպոնենտ։ $(x_1, x_2) \in Y$ վեկտորի նորմը սահմանենք

$$\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\| + \|x_2\|$$

բանաձևով։ Այդ դեպքում հեշտ է տեսնել, որ Y–ը կդառնա բանախյան պարածություն։ $\Lambda : Y \to X$ օպերատորը սահմանենք

$$\Lambda(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

բանաձևով։ Այդ դեպքում Λ–ն կլինի գծային անընդհատ օպերատոր, որը Y–ն արտապատկերում է X–ի վրա։ Ըստ բաց արտապատկերման մասին թեորեմի՝ Λ արտապատկերումը բաց է։ Ունենք

$$\Lambda\left(\overline{B}(0,1)\right) \supset \Lambda(B(0,1)),$$

և քանի որ $0 \in \Lambda(B(0,1))$ ու $\Lambda(B(0,1))$–ը բաց է, ուստի $\exists \varepsilon > 0$, այնպես որ

$$\Lambda(B(0,1)) \supset \overline{B}(0,\varepsilon) :$$

Կունենանք

$$\Lambda\left(\overline{B}(0,1)\right) \supset \overline{B}(0,\varepsilon) :$$

Ուստի $\forall x \in \overline{B}(0,\varepsilon)$ համար $\exists (x_1,x_2) \in \overline{B}(0,1) \subset Y$, որ $x = \Lambda(x_1,x_2) = x_1 + x_2$ և

$$\|(x_1,x_2)\| \leqslant 1,$$

այսինքն՝

$$\|x_1\| + \|x_2\| \leqslant 1 :$$

Այժմ դիցուք $x \in X \setminus \{0\}$ կամայական վեկտոր է, այդ դեպքում $y = \frac{x}{\|x\|}\varepsilon \in \overline{B}(0,\varepsilon) \subset X$, ուստի $\exists (y_1,y_2) \in Y$, որ

$$y = y_1 + y_2$$

և

$$\|y_1\| + \|y_2\| \leqslant 1 :$$

$(y_1,y_2) \in Y$ նշանակում է, որ $y_1 \in L_1$, $y_2 \in L_2$: Վերցնելով

$$x_1 = \frac{\|x\|}{\varepsilon} y_1, \quad x_2 = \frac{\|x\|}{\varepsilon} y_2,$$

կունենանք $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$, $x = x_1 + x_2$ և

$$\|x_1\| + \|x_2\| = \frac{\|x\|}{\varepsilon}\left(\|y_1\| + \|y_2\|\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|x\| : \tag{4.2.1}$$

Եթե $x = 0$, ապա վերցնելով $x_1 = x_2 = 0$, կունենանք, որ (4.2.1)–ը կրկին տեղի ունի: Մնում է վերցնել $\gamma = \frac{1}{\varepsilon}$:
Լեմման ապացուցված է:

Թեորեմ 4.2.1: *Դիցուք F–ը դրական ֆունկցիոնալ է: Այդ դեպքում՝*
1) $F(x^*) = \overline{F(x)}$ $\quad (\forall x \in A)$,
2) $|F(xy^*)|^2 \leqslant F(xx^*)F(yy^*)$ $\quad (\forall x, y \in A)$,
3) $|F(x)|^2 \leqslant F(e)F(xx^*) \leqslant F(e)^2\rho(xx^*)$ $\quad (\forall x \in A)$,
4) եթե $x \in A$ նորմալ էլեմենտ է, ապա $|F(x)| \leqslant F(e)\rho(x)$,

5) F–ը հանդիսանում է A–ի վրա գծային սահմանափակ ֆունկ– ցիոնալ:

Բացի դրանից, եթե A–ն կոմուտատիվ է, ապա $\|F\| = F(e)$, և եթե A–ի ինվոլյուցիան բավարարում է $\|x^*\| \leqslant \beta \|x\|$ պայմանին, ապա $\|F\| \leqslant \beta^{\frac{1}{2}} F(e)$:

Ապացույց: Դիցուք $x, y \in A$: Նշանակենք

$$p = F(xx^*), \quad q = F(yy^*), \quad r = F(xy^*), \quad s = F(yx^*) : \quad (4.2.2)$$

Քանի որ $F\left[(x+\alpha y)\left(x^* + \overline{\alpha} y^*\right)\right\} \geqslant 0 \;\; (\forall \alpha \in \mathbb{C})$, ուստի

$$p + \overline{\alpha} r + \alpha s + |\alpha|^2 q \geqslant 0 \quad (\alpha \in \mathbb{C}) : \qquad (4.2.3)$$

Այստեղ վերցնելով նախ $\alpha = 1$ և ապա $\alpha = i$, տեսնում ենք, որ $s+r$ և $i(s-r)$ թվերն իրական են: Կունենանք

$$\begin{cases} s + r = \overline{s+r} \\ i(s-r) = \overline{i(s-r)} \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{s} + \overline{r} = s + r \\ -\left(\overline{s} - \overline{r}\right) = s - r \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{s} + \overline{r} = s + r \\ \overline{s} - \overline{r} = r - s \end{cases}$$

և վերջին երկու առնչությունները գումարելով՝ կստանանք $\overline{s} = r$: $y = e$ դեպքում այդ առնչությունը փալիս է 1)–ը:

$r = 0$ դեպքում 2)–ն ակնհայտ է: Դիցուք $r \neq 0$: (4.2.3)–ում վերցնենք $\alpha = \dfrac{tr}{|r|}$, որտեղ $t \in \mathbb{R}$: Այդ դեպքում կստանանք

$$p + 2|r|t + qt^2 \geqslant 0 \quad (t \in \mathbb{R}),$$

որտեղից կբխի, որ

$$|r|^2 \leqslant pq :$$

Սա էլ հենց 2)–ն է:

Քանի որ $ee^* = e$, ուստի 3)–ի առաջին մասը ստացվում է 2)–ում վերցնելով $y = e$: 3)–ի երկրորդ մասն ապացուցելու համար վերց– նենք որևէ $t > \rho(xx^*)$ թիվ: Կունենանք

$$\sigma\left(te - xx^*\right) \subset \{z \in \mathbb{C} : \; \mathrm{Re}\, z > 0\},$$

ուստի ըստ 4.1.1 թեորեմի՝ $\exists u \in A$, որ $u = u^*$ և $u^2 = te - xx^*$: Այդ պատճառով

$$tF(e) - F(xx^*) = F(u^2) = F(uu^*) \geqslant 0,$$

$$F(xx^*) \leqslant tF(e) \quad (\forall t > \rho(xx^*))\,,$$

որտեղից էլ կբխի, որ

$$F(xx^*) \leqslant F(e)\rho(xx^*)\,:$$

Սրանով 3)–ը ապացուցվեց:

Այժմ դիցուք x–ը նորմալ էլեմենտ է՝ $xx^* = x^*x$: Այդ դեպքում կունենանք $\sigma(xx^*) \subset \sigma(x)\sigma(x^*)$ (տես՝ 2.6.2 թեորեմը), ուստի

$$\rho(xx^*) \leqslant \rho(x)\rho(x^*)\,:$$

Բայց ակնհայտ է, որ $\sigma(x^*) = \overline{\sigma(x)} = \left\{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(x)\right\}$, ուստի $\rho(x^*) = \rho(x)$ և հետևաբար կունենանք

$$\rho(xx^*) \leqslant \rho(x)^2,$$

որտեղից և 3)–ից կբխի 4)–ը:

Եթե A հանրահաշիվը կոմուտատիվ է, ապա 4)–ը տեղի կունենա բոլոր $x \in A$ համար (բոլոր էլեմենտները կլինեն նորմալ), ուստի

$$|F(x)| \leqslant F(e)\|x\| \quad (\forall x \in A),$$

և հետևաբար F–ը սահմանափակ է ու $\|F\| \leqslant F(e)$: Մյուս կողմից $\|F\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |F(x)| \geqslant |F(e)| = F(e)$, ուստի $\|F\| = F(e)$: Եթե $\|x^*\| \leqslant \beta\|x\|$, ապա 3)–ից կբխի, որ

$$|F(x)| \leqslant F(e)\sqrt{\rho(xx^*)} \leqslant F(e)\sqrt{\|xx^*\|} \leqslant$$

$$\leqslant F(e)\sqrt{\|x\| \cdot \|x^*\|} \leqslant F(e)\beta^{\frac{1}{2}}\|x\|,$$

և սրանով իսկ 5)–ի հետ կապված երկու դեպքերի համար նշված պնդումները հիմնավորված են:

Մնաց ընդհանուր դեպքում ցույց տալ 5)–ը:

3)–ից բխում է, որ $F(e) \geqslant 0$, ընդ որում $F(e) = 0$ դեպքում կունենանք $F(x) = 0 \quad (\forall x \in A)$: Ուստի բավական է դիտարկել $F(e) > 0$ դեպքը: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարելի է ընդունել, որ

$$F(e) = 1 :$$

H–ով նշանակենք A–ի բոլոր սիմետրիկ էլեմենտների բազմությունը: H–ը և iH–ը իրական գծային պարածություններ են, ընդ որում, ըստ 2.3.1 պնդման, $A = H \oplus iH$: 4) պնդումից բխում է, որ H–ի վրա F–ի նեղացումը 1 նորմով գծային ֆունկցիոնալ է: Ուստի այն նորմը պահպանելով միարժեքորեն շարունակվում է $\overline{H}$–ի վրա և արդյունքում մենք ստանում ենք ինչ–որ $\Phi : \overline{H} \to \mathbb{R}$ գծային իրական ֆունկցիոնալ (1)–ի շնորհիվ H–ի վրա F–ը իրական էր), որի նորմը հավասար է 1–ի: Ցույց տանք, որ

$$\Phi(y) = 0 \quad \left(\forall y \in \overline{H} \cap i\overline{H}\right) : \tag{4.2.4}$$

Իրոք, դիցուք $y = \lim u_n = \lim(iv_n)$, որտեղ $u_n, v_n \in H$: Այդ դեպքում $u_n^2 \to y^2$, $v_n^2 \to -y^2$ և 3), 4)–ից կբխի, որ

$$|F(u_n)|^2 \leqslant F\left(u_n^2\right) \leqslant F\left(u_n^2 + v_n^2\right) \leqslant \left\|u_n^2 + v_n^2\right\| \to 0,$$

ուստի

$$\Phi(y) = \lim F(u_n) = 0 :$$

Ըստ 4.2.1 լեմմայի՝ $\exists \gamma > 0$ թիվ, այնպես որ $\forall x \in A$ էլեմենտ ներկայացվում է $x = x_1 + ix_2$ տեսքով, որտեղ $x_1, x_2 \in \overline{H}$ և

$$\|x_1\| + \|x_2\| \leqslant \gamma\|x\| :$$

Դիցուք $x = u + iv$, որտեղ $u, v \in H$: Կունենանք՝

$$x_1 - u,\ x_2 - v \in \overline{H} :$$

Մյուս կողմից,

$$x = x_1 + ix_2 = u + iv,$$

ուստի
$$x_1 - u = i(x_2 - v),$$
և հետևաբար $x_1 - u, x_2 - v \in i\overline{H}$: (4.2.4)–ից կբխի, որ
$$\Phi(x_1 - u) = \Phi(x_2 - v) = 0,$$
ուստի $\Phi(u) = \Phi(x_1)$, $\Phi(v) = \Phi(x_2)$ և հետևաբար՝
$$F(x) = F(u + iv) = F(u) + iF(v) = \Phi(x_1) + i\Phi(x_2),$$
$$|F(x)| \leqslant |\Phi(x_1)| + |\Phi(x_2)| \leqslant \|x_1\| + \|x_2\| \leqslant \gamma\|x\| :$$
Սա էլ ցույց է տալիս, որ F–ն սահմանափակ է:
Թեորեմն ապացուցված է:

§ 4.3. Դրական ֆունկցիոնալներ կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվներում

Լեմմա 4.3.1 (լեմմա եռյակի մասին): *Դիցուք X, Y, Z–ը գծային պարածություններ են, $A : X \to Y$ և $B : X \to Z$ գծային օպերատորներ են, ընդ որում $B(X) = Z$ և*
$$\ker(B) \subset \ker(A) : \tag{4.3.1}$$
Այդ դեպքում՝
1) $\exists C : Z \to Y$ գծային օպերատոր՝ այնպես, որ $A = CB$,
2) եթե X, Z–ը բանախյան պարածություններ են, Y–ը գծային նորմավորված պարածություն է, և A, B օպերատորները անընդհատ են, ապա 1) պնդման մեջ որպես C կարելի է վերցնել անընդհատ օպերատոր:

Ապացույց: 1) Վերցնենք կամայական $z \in Z$ էլեմենտ: Ըստ պայմանի՝ $\exists x \in X$, որ $z = Bx$: Սահմանենք
$$Cz = Ax : \tag{4.3.2}$$
Համոզվենք, որ C–ի սահմանումը կոռեկտ է, այսինքն՝ (4.3.2)–ի ձախ մասը կախված չէ x–ի ընտրությունից: Իրոք, եթե նաև $z = Bx_1$,

ապա կունենանք $Bx = Bx_1$, և հետևաբար $x - x_1 \in \ker(B)$: Այստեղից և (4.3.1)–ից կբխի, որ $x - x_1 \in \ker(A)$, ուստի $Ax = Ax_1$ և հետևաբար (4.3.2)–ի աջ մասը կախված չէ x–ի ընտրությունից:

Ակնհայտ է, որ C–ն կլինի գծային և $CB = A$:

2) Համոզվենք, որ դիտարկվող դեպքում վերը կառուցված C օպերատորը անընդհատ է: Դրա համար վերցնենք $\forall G \subset Y$ բաց բազմություն և ցույց տանք, որ $C^{-1}(G)$–ն բաց է: Ունենք

$$C^{-1}(G) = B\left(A^{-1}(G)\right) :$$

A–ի անընդհատության շնորհիվ $A^{-1}(G)$–ն բաց է: Այստեղից, B–ի անընդհատությունից և բաց արտապատկերման թեորեմից կբխի, որ $B\left(A^{-1}(G)\right)$–ն ևս կլինի բաց:

$CB = A$ հավասարությունը հաճախ գրում են աջից պապկերված դիագրամի պեսքով:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "B"'] & & Y \\
& Z \arrow[ur, "C"'] &
\end{tikzcd}$$

Լեմման ապացուցված է:

Լեմմա 4.3.2: *Եթե μ–ն X–ի վրա այնպիսի կոմպլեքս չափ է, որ $|\mu|(X) = \mu(X)$, ապա μ–ն դրական չափ է:*

Ապացույց: Վերցնենք $\forall A \subset X$ չափելի բազմություն և ցույց տանք, որ $\mu(A) \geqslant 0$: Նշանակենք $B = X \setminus A$: Կունենանք $A \cap B = \varnothing$ և $A \cup B = X$, ուստի

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(X) :$$

Մյուս կողմից, ըստ չափի լրիվ վարիացիայի սահմանման,

$$|\mu(A)| + |\mu(B)| \leqslant |\mu|(X) :$$

Ուստի $\mu(X) = |\mu|(X)$ պայմանից կբխի, որ

$$\mu(X) = \mu(A) + \mu(B) \leqslant |\mu(A) + \mu(B)| \leqslant$$

$$\leqslant |\mu(A)| + |\mu(B)| \leqslant |\mu|(X) = \mu(X),$$

և հետևաբար՝

$$\mu(A) + \mu(B) = |\mu(A)| + |\mu(B)| :$$

Նշանակենք $z_1 = \mu(A)$, $z_2 = \mu(B)$: Կունենանք

$$z_1 + z_2 = |z_1| + |z_2| : \tag{4.3.3}$$

Այստեղից բխում է, որ $(z_1 + z_2)$–ը իրական է, և հետևաբար՝ $\mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}\ z_1 + \mathrm{Im}\ z_2 = 0$, որտեղից կբխի, որ $\exists a, b, c \in \mathbb{R}$, այնպես, որ

$$z_1 = a + ic, \quad z_2 = b - ic :$$

Կունենանք

$$(a + ic) + (b - ic) = |a + ic| + |b - ic|;$$

$$a + b = |a + ic| + |b - ic| :$$

Այստեղից կբխի, որ $c = 0$, քանի որ հակառակ դեպքում կունենանք

$$a + b \leqslant |a| + |b| < |a + ic| + |b - ic| = a + b,$$

ինչը հակասություն է: Հետևաբար $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$: Ցույց տանք, որ $z_1 \geqslant 0$: Իրոք, հակառակ դեպքում կունենանք $z_1 < |z_1|$, ուստի

$$z_1 + z_2 < |z_1| + |z_2|,$$

ինչը կհակասի (4.3.3)–ին:

Այսպիսով $\mu(A) = z_1 \geqslant 0$:

Լեմման ապացուցված է:

Թեորեմ 4.3.1: *Դիցուք A կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշ– վում կա ինվոլյուցիա, որը բավարարում է*

$$\varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)} \quad (x \in A,\ \varphi \in \mathcal{M}_A) \tag{4.3.4}$$

սիմետրիկության պայմանին: K–ով նշանակենք $F(e) \leqslant 1$ պայ– մանին բավարարող բոլոր $F : A \to \mathbb{C}$ դրական ֆունկցիո– նալների բազմությունը: Դիցուք M–ը $\mathcal{M}_A$–ի վրա որոշված *և $\mu(\mathcal{M}_A) \leqslant 1$ պայմանին բավարարող բոլոր μ դրական բորելյան չափերի բազմությունն է: Այդ դեպքում*

$$F(x) = \int\limits_{\mathcal{M}_A} \hat{x}\, d\mu \tag{4.3.5}$$

բանաձևը հաստատում է փոխմիարժեք համապատասխանություն K–ի և M–ի միջև, որի դեպքում մի բազմության գագաթնային կետերին համապատասխանում են մյուս բազմության գագաթնային կետերը:

Մասնավորապես, K–ի գագաթնային կետերը մուլտիպլիկատիվ ֆունկցիոնալներն են (ներառյալ 0–ական ֆունկցիոնալը) և միայն դրանք:

Ապացույց: (4.3.5)–ից բխում է, որ $\mu \in M$ համար F–ը գծային ֆունկցիոնալ է: (4.3.4)–ի շնորհիվ $(xx^*)\hat{} = |\hat{x}|^2$, ուստի

$$F(xx^*) = \int\limits_{\mathcal{M}_A} |\hat{x}|^2\, d\mu \geqslant 0 \quad (\forall x \in A):$$

Հետևաբար F–ը դրական ֆունկցիոնալ է: Ունենք

$$F(e) = \mu(\mathcal{M}_A) \leqslant 1,$$

ուստի $F \in K$:

Այժմ դիցուք $F \in K$ կամայական էլեմենտ է: Ըստ 4.2.1 թեորեմի 4) պնդման, ունենք

$$|F(x)| \leqslant F(e)\rho(x), \tag{4.3.6}$$

որտեղից կբխի, որ $\mathrm{Rad}(A) \subset \ker(F)$: Բայց ինչպես գիտենք, $x \mapsto \hat{x}$ արտապատկերման կորիզը $\mathrm{Rad}(A)$–ն է, ուստի ըստ 4.3.1 լեմմայի՝ $\exists \hat{F} : \hat{A} \to \mathbb{C}$ գծային ֆունկցիոնալ, որ

$$F(x) = \hat{F}(\hat{x}) \quad (\forall x \in A):$$

(4.3.6)–ից կբխի, որ

$$\left|\hat{F}(\hat{x})\right| = |F(x)| \leqslant F(e)\rho(x) = F(e)\, \|\hat{x}\|_\infty \quad (x \in A),$$

ինչը ցույց է տալիս, որ $\hat{F}$–ը $C(\mathcal{M}_A)$ տարածության $\hat{A}$ ենթատարածությունում սահմանափակ ֆունկցիոնալ է, որի նորմը չի գերազանցում $F(e)$–ն: Քանի որ

$$\hat{F}\,(\hat{e}) = F(e),$$

ուստի $\|\hat{F}\| = F(e)$: Ըստ Հան–Բանախի թեորեմի՝ $\hat{F}$–ը նորմը պահպանելով շարունակվում է ամբողջ $C(\mathcal{M}_A)$–ի վրա: Ըստ Ռիսի ներկայացման թեորեմի՝ $\mathcal{M}_A$–ի վրա գոյություն ունի μ կոմպլեքս բորելյան չափ, որ տեղի ունի (4.3.5)–ը, ընդ որում $\|\mu\| = F(e)$: Կունենանք

$$\|\mu\| = F(e) = \int\limits_{\mathcal{M}_A} \hat{e}\,d\mu = \mu(\mathcal{M}_A),$$

ուստի 4.3.2 լեմմայից կբխի, որ μ–ն դրական չափ է: Քանի որ $F(e) \leqslant 1$, ուստի $\mu(\mathcal{M}_A) \leqslant 1$ և հետևաբար $\mu \in M$:

(4.3.4) պայմանի շնորհիվ $\hat{A}$ հանրահաշիվը ցանկացած ֆունկցիայի հետ միասին պարունակում է նրա համալուծը: Հեշտ է տեսնել, որ $\hat{A}$–ը պարունակում է հաստատուն ֆունկցիաները և բաժանում է $\mathcal{M}_A$–ի կետերը: Ըստ Ստոն–Վայերշտրասի թեորեմի՝ $\hat{A}$–ը ամենուրեք խիտ է $C(\mathcal{M}_A)$–ում: Այստեղից և Ռիսի ներկայացման թեորեմից կբխի, որ μ չափը F–ի միջոցով որոշվում է միարժեքորեն: Օգտվելով դրանից, հեշտ է տեսնել, որ $F \mapsto \mu$ արտապատկերման դեպքում K–ի գագաթնային կետերին համապատասխանում են M–ի գագաթնային կետեր և հակառակը:

0–ական չափը M–ի համար, ակնհայտորեն, գագաթնային կետ է: Դժվար չէ տեսնել, որ M–ի մյուս գագաթնային կետերը մի կետանոց կրիչով չափերն են, որոնց համար $\mu(\mathcal{M}_A) = 1$: Իրոք, պարզ է, որ մի կետանոց կրիչով միավոր չափերը M–ի համար գագաթնային կետեր են: Այժմ դիցուք $\mu \neq 0$ հանդիսանում M–ի գագաթնային կետ: Նախ ցույց տանք, որ $\mu(\mathcal{M}_A) = 1$: Ենթադրենք հակառակը, այդ դեպքում կունենանք $0 < \mu(\mathcal{M}_A) < 1$, ուստի $\exists k > 1$ թիվ, որ

$$k\mu(\mathcal{M}_A) < 1 :$$

Վերցնենք

$$\mu_1 = \frac{1}{k}\,\mu, \quad \mu_2 = k\mu, \quad \alpha = \frac{k}{k+1} \quad :$$

Այդ դեպքում կունենանք $\mu_1 \neq \mu_2$ և $\mu = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$, ընդ որում $\mu_1, \mu_2 \in M$: Այստեղից կբխի, որ μ–ն M–ի համար գագաթնային կետ չէ, ինչը հակասություն է: Ուստի $\mu(\mathcal{M}_A) = 1$: Այժմ ցույց տանք, որ μ–ն մի կետանոց չափ է: Ենթադրենք հակառակը: Ցույց տանք, որ եթե $C_1 \subset \mathcal{M}_A$ և $\mu(C_1) > 0$, ապա $\mu(\mathcal{M}_A \setminus C_1) = 0$: Իրոք, հակառակ դեպքում կունենանք, որ $\exists C_1 \subset \mathcal{M}_A$, որ $\mu(C_1) > 0$ և $\mu\left(\mathcal{M}_A \setminus C_1\right) > 0$: Նշանակենք $C_2 = \mathcal{M}_A \setminus C_1$ և $C \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_A)$ համար սահմանենք

$$\mu_1(C) = \mu\left(C \cap C_1\right), \quad \mu_2(C) = \mu\left(C \cap C_2\right):$$

Նշանակենք $\alpha = \mu(C_1)$, կունենանք $1-\alpha = \mu(C_2)$ և

$$\mu = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2:$$

Պարզ է, որ $\mu_1, \mu_2 \in M$, ընդ որում $\mu_1 \neq \mu_2$, քանի որ $\mu_1(C_1) = \mu(C_1) > 0$ և $\mu_2(C_1) = \mu_2(\emptyset) = 0$: Ստացվածը ցույց է տալիս, որ μ–ն M–ի գագաթնային կետ չէ, ինչը հակասություն է:

Այսպիսով, եթե $\mu(C_1) > 0$, ապա $\mu\left(\mathcal{M}_A \setminus C_1\right) = 0$ և հետևաբար՝ $\mu(C_1) = \mu(\mathcal{M}_A) - \mu(\mathcal{M}_A \setminus C_1) = 1$:

Վերցնենք $\forall x \in \mathcal{M}_A$ կետ: Ըստ մեր ենթադրության՝ $\{x\}$–ը չի հանդիսանում μ չափի կրիչ, հետևաբար

$$\mu\left(\mathcal{M}_A \setminus \{x\}\right) > 0,$$

և վերն ասվածից կբխի, որ $\mu\left(\mathcal{M}_A \setminus \{x\}\right) = \mu(\mathcal{M}_A) = 1$, ուստի

$$\mu\left(\{x\}\right) = 0 \quad (\forall x \in \mathcal{M}_A):$$

Քանի որ μ–ն ռեգուլյար է, ուստի $\forall x \in \mathcal{M}_A$ համար $\exists V_x$ շրջակայք, որ

$$\mu(V_x) < \mu\left(\{x\}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}:$$

Այստեղից կբխի, որ $\mu(V_x) \neq 1$, հետևաբար, ըստ վերն ասածի՝

$$\mu(V_x) = 0 \quad (\forall x \in \mathcal{M}_A): \tag{4.3.7}$$

Բայց $\mathcal{M}_A \subset \bigcup\limits_{x\in\mathcal{M}_A} V_x$, և քանի որ $\mathcal{M}_A$–ն կոմպակտ է, ուստի $\exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{M}_A$, որ

$$\mathcal{M}_A \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i} :$$

Այստեղից և (4.3.7)–ից կբխի, որ

$$1 = \mu(\mathcal{M}_A) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu\left(V_{x_i}\right) = 0,$$

ինչը հակասություն է:

Ասվածից բխում է, որ K–ի գագաթնային կետերը ունեն (4.3.5) տեսքը, որտեղ $\mu = 0$ կամ μ–ն մի կետանոց կրիչով միավոր չափ է: Առաջին դեպքում կունենանք $F = 0$: Երկրորդ դեպքում, երբ μ–ն φ կրիչով միավոր չափն է, կունենանք

$$F(x) = \hat{\varphi} \quad (\forall x \in A),$$

կամ՝ $F(x) = \varphi(x) \quad (\forall x \in A)$, այսինքն՝ F–ը մուլտիպլիկատիվ ֆունկցիոնալ է:

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 4.3.2: *Դիցուք A–ն ինվոլյուցիայով կոմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվ է, և K–ն $F(e) \leqslant 1$ պայմանին բավարարող բոլոր դրական ֆունկցիոնալների բազմությունն է: Այդ դեպքում $F \in K$ համար հետևյալ երեք պնդումներն իրար համարժեք են՝*

1) $F(xy) = F(x)F(y) \quad (\forall x, y \in A)$,

2) $F(xx^*) = F(x)F(x^*) \quad (\forall x \in A)$,

3) F–ը K–ի գագաթնային կետ է:

Ապացույցը տանենք $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1)$ սխեմայով:

$1) \Rightarrow 2)$ ակնհայտ է:

$2) \Rightarrow 3)$: 2)–ում վերցնելով $x = e$, կստանանք

$$F(e) = F(e)^2,$$

ուստի $F(e) = 0$ կամ $F(e) = 1$: $F(e) = 0$ դեպքում 4.2.1 թեորեմի 3) պնդումից կբխի, որ $F = 0$, ուստի F–ն ակնհայտորեն կհանդիսանա K–ի զագաթնային կետ: Այժմ դիցուք $F(e) = 1$: Դիցուք $F = \alpha F_1 + (1-\alpha)F_2$, որտեղ $0 < \alpha < 1$ և $F_1, F_2 \in K$: Ցույց տանք, որ $F_1 = F$: Իրոք, ճիշտ նույն ձևով, ինչպես վերը, կհամոզվենք, որ $F_1(e) = F_2(e) = 1$: Համոզվենք, որ

$$\ker(F) \subset \ker(F_1)\,: \tag{4.3.8}$$

Իրոք, դիցուք $x \in \ker(F)$, այսինքն՝ $F(x) = 0$: Ըստ 4.2.1 թեորեմի 3) կստի՝

$$|F_1(x)|^2 \leqslant F_1(e)F_1(xx^*) = F_1(xx^*) = \frac{1}{\alpha}\,\alpha F_1(xx^*) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha}\,(\alpha F_1(xx^*) + (1-\alpha)F_2(xx^*)) =$$

$$= \frac{1}{\alpha}F(xx^*) = \frac{1}{\alpha}F(x)F(x^*) = 0,$$

ուստի $x \in \ker(F_1)$: (4.3.8)–ից և

$$F(e) = F_1(e) = 1 \tag{4.3.9}$$

հավասարությունից կբխի, որ $F = F_1$: Իրոք, վերցնենք $\forall x \in A$ և ցույց տանք, որ

$$F(x) = F_1(x)\,: \tag{4.3.10}$$

Ունենք $x - F(x)e \in \ker(F)$, ուստի (4.3.8)–ից կբխի, որ $x - F(x)e \in \ker(F_1)$, այսինքն՝

$$F_1(x - F(x)e) = 0,$$
$$F_1(x) - F(x)F_1(e) = 0,$$

որտեղից և (4.3.9)–ից կբխի (4.3.10)–ը:

Ապացուցվեց, որ $F = F_1$, հետևաբար F–ը K–ի համար զագաթնային կետ է:

3) $\Rightarrow$ 1): Նախ մենք կապացուցենք, որ տեղի ունի 1) պայմանի հետևյալ մասնավոր դեպքը.

$$F(xx^*y) = F(xx^*)F(y) \quad (x, y \in A) : \tag{4.3.11}$$

Դիցուք x–ն այնպիսին է, որ $\|xx^*\| < 1$: Ըստ 4.1.1 թեորեմի $\exists z \in A$, որ $z = z^*$ և $z^2 = e - xx^*$: Նշանակենք

$$\Phi(y) = F(xx^*y) \quad (y \in A) :$$

Այդ դեպքում կունենանք

$$\Phi(yy^*) = F\left(xx^*yy^*\right) = F\left[(xy)(xy)^*\right] \geqslant 0 \tag{4.3.12}$$

և

$$\begin{aligned}(F - \Phi)(yy^*) &= F\left[\left(e - xx^*\right)yy^*\right] = \\ &= F\left(z^2yy^*\right) = F\left[(yz)(yz)^*\right] \geqslant 0 :\end{aligned} \tag{4.3.13}$$

Քանի որ

$$0 \leqslant \Phi(e) = F(xx^*) \leqslant F(e)\,\|xx^*\| < 1, \tag{4.3.14}$$

ուստի (4.3.12)–ից և (4.3.13)–ից կբխի, որ $\Phi, F - \Phi \in K$: Եթե $\Phi(e) = 0$, ապա $\Phi = 0$ և այդ դեպքում (4.3.11)–ը ակնհայտորեն տեղի ունի: Եթե $\Phi(e) > 0$, ապա (4.3.14)–ից կբխի, որ

$$F = \Phi(e) \cdot \frac{\Phi}{\Phi(e)} + (F - \Phi)(e)\frac{F - \Phi}{F(e) - \Phi(e)} :$$

Քանի որ F–ը K–ի զագաթնային կետ է, ուստի ստացվածից կբխի, որ

$$F = \frac{\Phi}{\Phi(e)},$$

$$\Phi = \Phi(e)F,$$

ինչը հենց (4.3.11)–ն է:

Սրանով իսկ $\|xx^*\| < 1$ դեպքում (4.3.11)–ը հիմնավորվեց: Ընդհանուր դեպքը ակնհայտորեն բերվում է այդ դեպքին (x–ի փոխարեն կդիտարկենք cx էլեմենտը, որտեղ c–ն ընտրված հաստատուն է):

Այժմ դիցուք $x, y \in A$ կամայական էլեմենտներ են: Ցույց տանք, որ

$$F(xy) = F(x)F(y) :$$

Վերցնենք որևէ $n \geqslant 3$ բնական թիվ: Նշանակենք $z_p = e + w^{-p}x$, որտեղ $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$: Համոզվենք, որ

$$x = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} w^p z_p z_p^* : \tag{4.3.15}$$

Ունենք

$$\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} w^p z_p z_p^* = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} w^p \left(e + w^{-p}x\right)\left(e + \overline{w}^{-p}x^*\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} w^p \left(e + w^{-p}x\right)\left(e + w^p x^*\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\left(\sum_{p=1}^{n} w^p\right)e + \left(\sum_{p=1}^{n} w^{2p}\right)x^* + \sum_{p=1}^{n} x + \left(\sum_{p=1}^{n} w^p\right)xx^*\right] =$$

$$= x + \left(\sum_{p=1}^{n} w^p\right)(e + xx^*) + \left(\sum_{p=1}^{n} w^{2p}\right)x^* : \tag{4.3.16}$$

Բայց $\forall k \in N$ համար

$$\sum_{p=1}^{n} w^{kp} = \frac{w^k\left(w^{nk} - 1\right)}{w - 1} = \frac{w^k\left((w^n)^k - 1\right)}{w - 1} = \frac{w^k\left(1^k - 1\right)}{w - 1} = 0,$$

ուստի (4.3.16)–ից կբխի (4.3.15)–ը: (4.3.15)–ից և (4.3.11)–ից կբխի, որ

$$F(xy) = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} w^p F\left(z_p z_p^* y\right) = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} w^p F\left(z_p z_p^*\right) F\left(y\right) =$$

$$= F\left(\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} w^p z_p z_p^*\right) F\left(y\right) = F(x)F(y) :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

§ 4.4. Գելֆանդ–Նայմարկի թեորեմը ոչ կոմուտատիվ հանրահաշիվների համար

Թեորեմ 4.4.1: *Եթե A–ն B^* հանրահաշիվ է և $z \in A$, ապա գոյություն ունի A–ի վրա որոշված այնպիսի F դրական ֆունկցիոնալ, որ*

$$F(e) = 1 \quad \text{և} \quad F(zz^*) = \|z\|^2 : \tag{4.4.1}$$

Ապացույց: A_r–ով նշանակենք A հանրահաշվի բոլոր սիմետրիկ էլեմենտների բազմությունը, իսկ P–ով՝ բոլոր ոչ բացասական էլեմենտների բազմությունը: Ինչպես գիտենք (տես՝ 2.7.1 թեորեմը), P–ն հանդիսանում է կոն, այսինքն եթե $x, y \in P$ և $c \geqslant 0$, ապա $cx, x + y \in P$: Ըստ վերը հիշատակված թեորեմի, $\forall x \in A$ համար $xx^* \in P$: Թեորեմի ապացույցն ավարտելու համար բավական է կառուցել այնպիսի $f : A_r \to \mathbb{R}$ գծային ֆունկցիոնալ, որը բավարարի (4.4.1) պայմանին և

$$f(x) \geqslant 0 \quad (x \in P) : \tag{4.4.2}$$

Իրոք, եթե ենթադրենք, թե այդպիսի f ֆունկցիոնալն արդեն կառուցված է, ապա $\forall x \in A$ էլեմենտը ներկայացնելով $x = u + iv$ տեսքով, որտեղ $u, v \in A_r$, կսահմանենք

$$F(x) = f(u) + if(v) :$$

Հեշտ է տեսնել, որ $F(ix) = iF(x)$, ուստի $F : A \to \mathbb{C}$ գծային ֆունկցիոնալ է: (4.4.2)–ից կբխի, որ F ֆունկցիոնալը դրական է, ուստի այն կբավարարի թեորեմի պահանջներին:

Դիցուք M_0–ն A_r–ի այն (իրական) ենթատարածությունն է, որը ծնված է e–ով և zz^*–ով: M_0–ի վրա f_0 ֆունկցիոնալը սահմանենք հետևյալ բանաձևով.

$$f_0\left(\alpha e + \beta zz^*\right) = \alpha + \beta \left\|zz^*\right\| \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}) :$$

Հեշտ է տեսնել, որ f_0–ն M_0–ի վրա սահմանված է կոռեկտ նույնիսկ այն դեպքում, երբ e և zz^* վեկտորները գծորեն կախյալ են: Իրոք, դիցուք

$$\alpha_1 e + \beta_1 zz^* = \alpha_2 e + \beta_2 zz^*,$$

ցույց տանք, որ

$$\alpha_1 + \beta_1 \left\|zz^*\right\| = \alpha_2 + \beta_2 \left\|zz^*\right\| :$$

Նշանակենք $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, $\beta = \beta_1 - \beta_2$: Կունենանք $\alpha e + \beta zz^* = 0$: Պետք է ցույց տալ, որ

$$\alpha + \beta \left\|zz^*\right\| = 0 :$$

$\beta = 0$ դեպքում դա ակնհայտ է: Դիցուք $\beta \neq 0$, այդ դեպքում կունենանք $-\dfrac{\alpha}{\beta} e - zz^* = 0$, ուստի $-\dfrac{\alpha}{\beta} \in \sigma(zz^*)$: Քանի որ $\sigma(zz^*) \subset [0, \infty)$, ուստի այստեղից կբխի, որ $-\dfrac{\alpha}{\beta} \geqslant 0$: Հետևաբար $zz^* = -\dfrac{\alpha}{\beta} e$ հավասարությունից կբխի, որ

$$\alpha + \beta \left\|zz^*\right\| = \alpha + \beta \left\|-\frac{\alpha}{\beta} e\right\| = \alpha + \beta \cdot \frac{-\alpha}{\beta} = 0 :$$

Քանի որ zz^*–ը նորմալ էլեմենտ է, ուստի (տես՝ 2.7.1 թեորեմը) $\rho(zz^*) = \left\|zz^*\right\|$ և հետևաբար՝ $\left\|zz^*\right\| \in \sigma(zz^*)$: Այստեղից կբխի, որ $\alpha + \beta \left\|zz^*\right\| \in \sigma\left(\alpha e + \ \beta zz^*\right)$: Այլ կերպ ասած, եթե $x \in M_0$, ապա $f_0(x) \in \sigma(x)$, որտեղից կբխի, որ $f_0(x) \geqslant 0$ $(x \in P \cap M_0)$: Պարզ է նաև, որ f_0–ն կբավարարի (4.4.1) պայմաններին:

Այժմ դիցուք A_r–ի M_1 (իրական) ենթապարածության վրա որոշված f_1 գծային ֆունկցիոնալը հանդիսանում է f_0–ի շարունակություն և

$$f_1(x) \geqslant 0 \quad (x \in P \cap M_1) :$$

Դիցուք $y \in A_r$ և $y \notin M_1$: Նշանակենք

$$E' = M_1 \cap (y - P), \quad E'' = M_1 \cap (y + P) :$$

Եթե $x' \in E'$ և $x'' \in E''$, ապա $y - x' \in P$ և $x'' - y \in P$: Քանի որ P–ն կոն է, ուստի այստեղից կբխի, որ

$$x'' - x' = (y - x') + (x'' - y) \in P,$$

և հետևաբար՝ $f_1(x') \leqslant f_1(x'')$: Ուստի

$$\sup_{x' \in E'} f_1(x') \leqslant \inf_{x'' \in E''} f_1(x''),$$

և հետևաբար $\exists c \in \mathbb{R}$, որ

$$f_1(x') \leqslant c \leqslant f_1(x'') \quad (\forall x', x'' \in E) : \tag{4.4.3}$$

Սահմանենք

$$f_2(x + \alpha y) = f_1(x) + \alpha c \quad (x \in M_1, \alpha \in \mathbb{R}) :$$

Համոզվենք, որ f_2–ը սահմանված է կոռեկտ: Դիցուք $x + \alpha_1 y = x + \alpha_2 y$ ($x \in M_1$; $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$), ցույց տանք, որ $f_1(x) + \alpha_1 c = f_1(x) + \alpha_2 c$: Նշանակենք $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$: Կունենանք $\alpha y = 0$: Պետք է ցույց տալ, որ $\alpha c = 0$: Իրոք, քանի որ $y \notin M_1$, ուստի $y \neq 0$ և հետևաբար $\alpha = 0$: Դիցուք $x \in M_1$: Եթե $x + y \in P$, ապա $-x \in E'$, ուստի (4.4.3)–ից կբխի, որ $f_1(-x) \leqslant c$, որտեղից $f_1(x) \geqslant -c$: Հետևաբար $f_2(x + y) \geqslant 0$: Այժմ եթե $x - y \in P$, ապա $x \in E''$, ուստի (4.4.3)–ից կբխի, որ $f_1(x) \geqslant c$ և հետևաբար $f_2(x - y) \geqslant c - c = 0$: Դիտարկված երկու դեպքերից կբխի, որ

$$f_2(u) \geqslant 0 \quad (u \in P \cap M_2) : \tag{4.4.4}$$

Իրոք, դիցուք $u = x + \alpha y$, որտեղ $x \in M_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha = 0$ դեպքում (4.4.4)–ն ակնհայտ է: Դիցուք $\alpha \neq 0$, այդ դեպքում կունենանք

$$f_2(u) = f_2(x + \alpha y) = |\alpha| f_2\left(\frac{1}{|\alpha|}x + \frac{\alpha}{|\alpha|}y\right) : \tag{4.4.5}$$

Քանի որ $u \in P$ և P–ն կոն է, ուստի $\frac{1}{|\alpha|}u = \frac{1}{\alpha}x + \frac{\alpha}{|\alpha|}y \in P$: Քանի որ $\frac{1}{\alpha}x \in M_1$ և $\frac{\alpha}{|\alpha|} = \pm 1$, ուստի վերը դիտարկված երկու դեպքերը ցույց են տալիս, որ

$$f_2\left(\frac{1}{|\alpha|}x + \frac{\alpha}{|\alpha|}y\right) \geqslant 0,$$

որտեղից և (4.4.5)–ից կբխի (4.4.4)–ը:

Φ–ով նշանակենք այն բոլոր φ իրական գծային ֆունկցիոնալ–ների բազմությունը, որոնցից յուրաքանչյուրը որոշված է մի ինչ–որ $L \subset A_r$ ենթապարածության վրա (որը տարբեր φ–երի համար կարող է լինել տարբեր), հանդիսանում է f_0–ի շարունակություն և բավարարում է

$$\varphi(x) \geqslant 0 \quad (x \in P \cap L)$$

պայմանին: Φ–ում ներմուծենք մասնակի կարգավորվածության առնչություն հետևյալ կերպ՝ կասենք $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$, եթե φ_2–ը φ_1–ի շարունակություն է: Ցույց տանք, որ Φ–ում ցանկացած Φ_0 գծորեն կարգավորված ենթաբազմությունն ունի վերին եզր: Իրոք, L_0–ով նշանակենք Φ_0–ին պատկանող բոլոր հնարավոր φ ֆունկցիոնալ–ների D_φ որոշման տիրույթների միավորումը՝

$$L_0 = \bigcup_{\varphi \in \Phi_0} D_\varphi :$$

Քանի որ D_φ որոշման տիրույթները ($\varphi \in \Phi_0$ համար) կազմում են ըստ $\subset$ առնչության գծորեն կարգավորված բազմություն, ուստի հեշտ է տեսնել, որ L_0–ն կլինի A_r–ի ենթապարածություն: $\varphi_0 : L_0 \to \mathbb{R}$ ֆունկցիոնալը սահմանենք հետևյալ կերպ: Դիցուք

$x \in L_0$ կամայական կետ է: Այդ դեպքում $\exists \varphi \in \Phi_0$, որ $x \in D_\varphi$: Սահմանենք

$$\varphi_0(x) = \varphi(x) :$$

Հեշտ է տեսնել, որ φ_0–ի սահմանումը կոռեկտ է, այսինքն $\varphi_0(x)$–ը կախված չէ φ–ի ընտրությունից: Ուստի φ_0–ն կլինի Φ_0–ի վերին եզր:

Ըստ Ցորնի լեմմայի՝ Φ–ում կա մաքսիմալ էլեմենտ: Դիցուք f–ը Φ–ի մաքսիմալ էլեմենտ է: Այդ դեպքում $D_f = A_r$, քանի որ հակառակ դեպքում, ըստ վերն ասվածի, f–ը թույլ կտար շարունակություն ավելի լայն ենթատարածության վրա:

f ֆունկցիոնալը կբավարարի մեր պահանջներին:
Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 4.4.2: *Եթե A–ն B^*–հանրահաշիվ է, ապա ցանկացած $u \in A \setminus \{0\}$ էլեմենտի համար գոյություն ունեն այնպիսի H_u հիլբերտյան տարածություն և $T_u : A \to BL(H_u)$ հոմոմորֆիզմ, որ $T_u(e) = I$,*

$$T_u(x^*) = T_u(x)^* \quad (x \in A), \tag{4.4.6}$$

$$\|T_u(x)\| \leqslant \|x\| \quad (x \in A), \tag{4.4.7}$$

և $\|T_u(u)\| = \|u\|$:

Ապացույց: Ըստ 4.4.1 թեորեմի՝ $\exists F : A \to \mathbb{C}$ դրական ֆունկցիոնալ, այնպես, որ

$$F(e) = 1 \quad \text{և} \quad F(u^*u) = \|u\|^2 \tag{4.4.8}$$

(4.4.1 թեորեմում կվերցնենք $z = u^*$, և կօգտվենք նրանից, որ B^*–հանրահաշվում $\|x^*\| = \|x\|$): Նշանակենք

$$Y = \{y \in A : \ F(xy) = 0 \ \ (\forall x \in A)\} : \tag{4.4.9}$$

Ըստ 4.2.1 թեորեմի, F–ն անընդհատ է, ուստի Y–ը փակ է A–ում: $x \in A$ համար կնշանակենք

$$x' = x + Y : \tag{4.4.10}$$

Մենք պնդում ենք, որ

$$(a', b') = F(b^*a) \tag{4.4.11}$$

բանաձևը փալիս է սկալյար արփադրյալի A/Y–ի վրա:

Նախ համոզվենք, որ (a', b')–ը (4.4.11) բանաձևով սահմանված է կոռեկտ, այսինքն (4.4.11)–ի–ի աջ մասը կախված չէ a', b' դասերի a, b ներկայացուցիչների ընտրությունից: Դիցուք $a' = \tilde{a}+Y$, $b' = \tilde{b}+Y$: Կունենանք $a - \tilde{a} \in Y$, $b - \tilde{b} \in Y$ և

$$F\left(\tilde{b}^* \tilde{a}\right) - F\left(b^* a\right) = F\left(\left(\tilde{b} - b\right)^* \tilde{a}\right) - F\left(b^*\left(a - \tilde{a}\right)\right),$$

ուստի բավական է ցույց տալ, որ եթե a, b էլեմենտներից գոնե մեկը պատկանում է Y–ին, ապա $F(b^*a) = 0$: Եթե $a \in Y$, ապա (4.4.9)–ից անմիջապես կբխի, որ $F(b^*a) = 0$: Դիցուք $b \in Y$: Այդ դեպքում (4.4.9)–ց կբխի, որ $F(a^*b) = 0$, և օգտագործելով $F \geqslant 0$ պայմանը, կունենանք

$$F(b^*a) = F\left((a^*b)^*\right) = \overline{F(a^*b)} = 0:$$

Ակնհայտ է, որ (a', b')–ը գծային է ըստ a'–ի և համալուծ գծային է ըստ b'–ի: Բացի այդ, $F \geqslant 0$ պայմանից բխում է, որ

$$(a', a') = F(aa^*) \geqslant 0: \tag{4.4.12}$$

Ունենք նաև, որ

$$(a', b') = F(b^*a) = F\left((a^*b)^*\right) = \overline{F(a^*b)} = \overline{(b', a')}:$$

Եթե $(a', a') = 0$, ապա (4.4.12)–ից կբխի, որ $F(a^*a) = 0$: Այստեղից և 4.4.1 թեորեմից կբխի, որ $\forall x \in A$ համար

$$|F(xa)| \leqslant F(xx^*)F(a^*a) = 0,$$

ուստի $a \in Y$ և հետևաբար $a' = 0$:

Այսպիսով, A/Y–ը $\|a'\| = (F(a^*a))^{\frac{1}{2}}$ նորմով նախահիլբերտյան տարածություն է: Դիցուք H–ն այդ տարածության լրիվացումն է: $T(x): A/Y \to A/Y$ օպերատորը սահմանենք հետևյալ կերպ.

$$T(x)a' = (xa)' \quad (a' \in A/Y): \tag{4.4.13}$$

Հեշտ է տեսնել, որ այս սահմանումը կոռեկտ է, այսինքն՝ (4.4.13)–ի աջ մասը կախված չէ $a \in a'$–ի ներկայացուցչի ընտրությունից: Իրոք, (4.4.9)–ը ցույց է տալիս, որ Y–ը A–ում ձախ իդեալ է, այսինքն $y \in Y$ դեպքում $xy \in Y$ $(\forall x \in A)$: Ուստի եթե նաև $a' = \tilde{a} + Y$, ապա $y = a' - \tilde{a} \in Y$ և

$$xa - x\tilde{a} = xy$$

ներկայացումից կբխի, որ $xa - x\tilde{a} \in Y$ և հետևաբար՝ $(xa)' = (x\tilde{a})'$: Ակնհայտ է, որ $x \mapsto T(x)$ արտապատկերումը գծային է, և

$$T(x_1)T(x_2) = T(x_1x_2) \quad (x_1, x_2 \in A) : \tag{4.4.14}$$

(4.4.13)–ից բխում է, որ $T(e)$–ն A/Y–ի վրա միավոր օպերատորն է:

Ցույց տանք, որ

$$\|T(x)\| \leqslant \|x\| \quad (x \in A) : \tag{4.4.15}$$

Նախ նկատենք, որ

$$\left\|T(x)a'\right\|^2 = \big((xa)', (xa)'\big) = F\left(a^*x^*xa\right) : \tag{4.4.16}$$

Ֆիքսած $a \in A$ համար դիտարկենք $G(x) = F(a^*xa)$ ֆունկցիոնալը: Ակնհայտ է, որ $G \geqslant 0$, ուստի ըստ 4.2.1 թեորեմի՝

$$G(x^*x) \leqslant G(e)\|x\|^2,$$

և հետևաբար՝

$$\left\|T(x)a'\right\|^2 = G(x^*x) \leqslant F(a^*a)\|x\|^2 = \left\|a'\right\|^2 \|x\|^2,$$

որտեղից կբխի (4.4.15)–ը: Քանի որ (4.4.15)–ի շնորհիվ $T(x)$–ը անընդհատ է A/Y–ում, իսկ A/Y–ը ամենուրեք խիտ է H–ում, ուստի $T(x)$–ը անընդհատությունը պահպանելով միարժեքորեն շարունակվում է ամբողջ H–ի վրա: Այդպիսի շարունակումը չի փոխում $T(x)$–ի նորմը, ուստի (4.4.15)–ը կմնա ուժի մեջ նաև $T(x)$–ը շարունակելուց հետո: Քանի որ $\|e'\|^2 = F(e^*e) = F(e) = 1$, ուստի (4.4.8)–ից և (4.4.6)–ից կբխի, որ

$$\|u\|^2 = F(u^*u) = \left\|T(u)e'\right\|^2 \leqslant \|T(u)\|^2 \cdot \left\|e'\right\|^2 = \|T(u)\|^2 ,$$

որտեղից և (4.4.15)–ից կբխի, որ

$$\|T(u)\| = \|u\| :$$

Ունենք, որ $\forall a', b' \in A/Y$ համար

$$\left(T(x^*)a', b'\right) = \left((x^*a'), b'\right) = F\left(b^*x^*a\right) = F\left((xb)^*a\right) =$$

$$= \left(a', (xb)'\right) = \left(a', T(x)b'\right) = \left(T(x)^*a', b'\right),$$

ուստի

$$T(x^*)a' = \left(T(x)\right)^* a' \quad (\forall a' \in A/Y) :$$

Այստեղից, $T(x^*)$, $(T(x))^*$ օպերատորների անընդհատությունից և A/Y–ի ամենուրեք խիտ լինելուց կբխի, որ

$$T(x^*)h = \left(T(x)\right)^* h \quad (\forall h \in H),$$

ուստի $T(x^*) = (T(x))^*$:

Վերցնելով $H_u = H$, $T_u = T$, ակնհայտորեն կստանանք, որ բավարարվում են թեորեմի պահանջները:
Թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում 4.4.1: Դիցուք I–ն որևէ բազմություն է, իսկ $a_i \geqslant 0$ $(i \in I)$: Այդ դեպքում

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup_{\substack{I_0 \subset I \\ |I_0| < \infty}} \sum_{i \in I_0} a_i = \sup_{\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subset I} \sum_{k=1}^{n} a_{i_k}$$

վերջավոր կամ անվերջ մեծությունը կոչվում է a_i թվերի գումար:

Պարզ է, որ եթե $\pi : I \to I$ բիեկտիվ արտապատկերում է, ապա $\sum\limits_{i\in I} a_i = \sum\limits_{i\in I} a_{\pi(i)}$:

Կասենք $\sum\limits_{i\in I} a_i$ շարքը զուգամետ է, եթե $\sum\limits_{i\in I} a_i < \infty$:

Լեմմա 4.4.1: *Եթե $\sum\limits_{i\in I} a_i < \infty$, ապա 0–ից տարբեր a_i–երի թիվը վերջավոր է կամ հաշվելի:*

Ապացույց: Դիցուք $\sum\limits_{i\in I} a_i = A < +\infty$: Նշանակենք

$$I_0 = \{i \in I :\ a_i > 0\},$$
$$I_n = \left\{i \in I :\ a_i > \frac{1}{n}\right\} \quad (n = 1, 2, \ldots) :$$

Ունենք

$$I_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n : \tag{4.4.17}$$

Նկատենք, որ յուրաքանչյուր I_n վերջավոր է: Իրոք, I_n–ը չի կարող պարունակել An–ից շատ թվով անդամներ, քանի որ հակառակ դեպքում կունենայինք

$$A = \sum_{i\in I} a_i \geqslant \sum_{i\in I_n} a_i \geqslant \sum_{i\in I_n} \frac{1}{n} > An \cdot \frac{1}{n} = A,$$

$$A > A,$$

ինչը հակասություն է:

Ուստի (4.4.17)–ից կբխի, որ I_0–ն վերջավոր է կամ հաշվելի: Լեմման ապացուցված է:

Սահմանում 4.4.2: Դիցուք ունենք բազմությունների ինչ–որ $\{X_i\}_{i\in I}$ ընտանիք: $\prod\limits_{i\in I} X_i$–ով կնշանակենք այն բոլոր $x = x_i$, $x : I \to \bigcup\limits_{i\in I} X_i$ ֆունկցիաների բազմությունը, որ $x_i \in X_i$ $(\forall i \in I)$: $\prod\limits_{i\in I} X_i$–ն կոչվում է X_i բազմությունների դեկարտյան արտադրյալ:

Քանի որ $x : I \to \bigcup\limits_{i\in I} X_i$ ֆունկցիան որոշվում է իր x_i $(i \in I)$ արժեքներով, ուստի հաճախ խոսելով կամայական $x \in \prod\limits_{i\in I} X_i$ էլեմենտի մասին, x–ի փոխարեն գրում են $\{x_i\}_{i\in I}$:

Եթե $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, ապա, $\{x_i\}_{i\in I}$-ի փոխարեն գրելով $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, հանգում ենք վերջավոր թվով բազմությունների դեկարտյան արտադրյալի համար նախկինում մեզ հայտնի սահմանմանը:

$\pi_i : \prod\limits_{k\in I} X_k \to X_i$ արտապատկերումը սահմանենք հետևյալ կերպ.

$$\pi_i\left(\{x_k\}\right) = x_i, \qquad \left(\{x_k\} \in \prod_k X_k\right) :$$

π_i–ն կոչվում է X_i–ի վրա պրոյեկտող արտապատկերում: Փաստորեն, $x \in \prod\limits_k X_k$ էլեմենտը կարելի է գրել $\{\pi_k(x)\}_{k\in I}$ տեսքով:

Սահմանում 4.4.3: Դիցուք ունենք միևնույն (իրական կամ կոմպլեքս) թվային դաշտի վրա որոշված հիլբերտյան տարածությունների մի ինչ–որ $\{H_i\}_{i\in I}$ ընտանիք: Նշանակենք

$$\sum_{i\in I} \oplus H_i = \left\{x \in \prod_{i\in I} H_i :\ \sum_i \left\|\pi_i(x)\right\|^2 < \infty\right\} :$$

$\sum\limits_{i\in I} \oplus H_i$–ն կոչվում է H_i տարածությունների ուղիղ գումար:

Պարզ է, որ $\sum\limits_{i\in I} \oplus H_i$–ն կդառնա գծային տարածություն, եթե գումարումը և թվով բազմապատկումը սահմանենք

$$\{x_i\} + \{y_i\} = \{x_i + y_i\}, \quad \alpha\{x_i\} = \{\alpha x_i\}$$

բանաձևերով: Բացի այդ, $\sum\limits_{i\in I} \oplus H_i$–ում կարելի է սահմանել սկալյար արտադրյալ հետևյալ կերպ.

$$\left(\{x_i\}, \{y_i\}\right) = \sum_i \left(x_i, y_i\right) : \tag{4.4.18}$$

Գրված շարքը բացարձակ զուգամետ է, քանի որ ըստ Շվարցի անհավասարության՝

$$\sum_i \left|(x_i, y_i)\right| \leqslant \sum_i \|x_i\| \cdot \|y_i\| \leqslant \left(\sum_i \|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_i \|y_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

(4.4.1 լեմման լիովին հասկանալի է դարձնում այդ շարքի գումարի իմաստը): Հեշտ է տեսնել, որ սկալյար արտադրյալի բոլոր հատ–կությունները բավարարվում են: Համոզվենք, որ $\sum\limits_{i\in I}\oplus H_i$ տարածու–թյունը լրիվ է, այսինքն՝ հանդիսանում է հիլբերտյան տարածություն: (4.4.18)–ը գրենք

$$(x,y)=\sum_i(\pi_i(x),\pi_i(y))\quad\left(x,y\in\sum_{i\in I}\oplus H_i\right)\tag{4.4.19}$$

համարժեք տեսքով: Այստեղից կբխի, որ

$$\|x\|^2=\sum_i\|\pi_i(x)\|^2\quad\left(x\in\sum_{i\in I}\oplus H_i\right):\tag{4.4.20}$$

Դիցուք $\{x_n\}\subset\sum\limits_{i\in I}\oplus H_i$ ֆունդամենտալ հաջորդականություն է: Այդ դեպքում (4.4.20)–ից կբխի, որ $\{\pi_i(x_n)\}$–ը ևս կլինի ֆունդամենտալ (H_i–ում), ուստի H_i–ի լրիվությունից կբխի, որ գոյություն ունի

$$h_i=\lim_{n\to\infty}\pi_i(x_n)\quad(i\in I)$$

սահմանը: Դիցուք $x=\{h_i\}$: Այդ դեպքում $h_i=\pi_i(x)$, և (4.4.20)–ից կբխի, որ $\forall I_0\subset I$ վերջավոր ենթաբազմության համար

$$\sum_{i\in I_0}\|\pi_i(x_n)-\pi_i(x_m)\|^2\leqslant\|x_n-x_m\|^2:\tag{4.4.21}$$

Վերցնենք $\forall\varepsilon>0$ թիվ և N–ը ընտրենք այնպես, որ

$$\|x_n-x_m\|<\varepsilon\quad(n,m>N):$$

(4.4.21)–ից կբխի, որ

$$\sum_{i\in I_0}\|\pi_i(x_n)-\pi_i(x_m)\|^2\leqslant\varepsilon^2\quad(n,m>N),$$

որտեղ անցնելով սահմանի, երբ $m \to \infty$, կստանանք

$$\sum_{i \in I_0} \|\pi_i(x_n) - \pi_i(x)\|^2 \leqslant \varepsilon^2 \quad (n > N) :$$

Վերջինս տեղի ունի $\forall I_0 \subset I$ վերջավոր ենթաբազմության համար, որտեղից կբխի, որ

$$\sum_{i \in I} \|\pi_i(x_n) - \pi_i(x)\|^2 \leqslant \varepsilon^2 \quad (n > N),$$

$$\|x_n - x\| \leqslant \varepsilon \quad (n > N),$$

ինչն էլ ցույց է տալիս, որ $x_n \to x$:

Թեորեմ 4.4.3 (Գելֆանդ–Նայմարկի ոչ կոմուտատիվ թեորեմը): *Յանկացած A B^*–հանրահաշվի համար գոյություն ունի H հիլբերտյան տարածություն, այնպես, որ A–ի և $BL(H)$–ի մի ինչ–որ փակ ենթահանրահաշվի միջև գոյություն ունի իզոմետրիկական $*$–իզոմորֆիզմ:*

Ապացույց: Դիցուք H–ը նախորդ թեորեմում կառուցված H_u $(u \in A)$ տարածությունների ուղիղ գումարն է: Դիցուք $S_u \in BL(H)$ $(u \in A)$ և

$$\|S_u\| \leqslant M \quad (u \in A) :$$

$S : H \to H$ օպերատորը սահմանենք հետևյալ կերպ: $\forall v \in H$ համար որպես Sv վերցնենք այն վեկտորը, որի համար

$$\pi_u(Sv) = S_u \pi_u(v) :$$

Դժվար չէ ստուգել, որ $\sum\limits_{u \in A} \|\pi_u(Sv)\|^2 < \infty$ և հետևաբար՝ $S : H \to H$: Դժվար չէ տեսնել, որ

$$\|S\| = \sup_{u \in A} \|S_u\| : \tag{4.4.22}$$

Դիցուք $T_u(x)$–երը նախորդ թեորեմում կառուցված օպերատորներն են: Վերը նշված սխեմայով կառուցենք այնպիսի $T(x) \in BL(H)$ $(x \in A)$ օպերատորներ, որ

$$\pi_u(T(x)v) = T_u(x)\,(\pi_u(v)) \quad (v \in H) :$$

Քանի որ
$$\|T_u(x)\| \leqslant \|x\| = \|T_x(x)\|,$$
ուստի (4.4.22)–ից կբխի, որ
$$\|T(x)\| = \sup_{u\in A} \|T_u(x)\| = \|x\| :$$

Նախորդ թեորեմը կիրառելով H_u տարածությունների վրա՝ կստանանք, որ $x \mapsto T(x)$ արտապատկերումը բավարարում է թեորեմի բոլոր պահանջներին:
Թեորեմն ապացուցված է:

Գրականություն

1. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965.
2. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Том I – Харьков: 1977, том II – Харьков: 1978.
3. Бурбаки Н. Спектральная теория. – М.: Мир, 1972.
4. Владимиров В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных. – М.: Наука, 1964.
5. Гамелин Т. Равномерные алгебры. – М.: Мир, 1973.
6. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е. Коммутативные нормированные кольца. – М.: Физматгиз, 1960.
7. Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций. – М.: ИЛ, 1963.
8. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. – М.: ИЛ, 1962.
9. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Спектральная теория. – М.: Мир, 1966.
10. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Спектральные операторы. – М.: Мир, 1974.
11. Дэй М. М. Нормированные линейные пространства. – М.: ИЛ, 1961.
12. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967.
13. Любич Ю. И. Теория представлений групп в банаховом пространстве. – Харьков: Виша школа, 1985.
14. Люмис Л. Введение в абстрактный гармонический анализ. – М.: ИЛ, 1956.
15. Наймарк М. А. Нормированные кольца (изд. 2-е). – М.: Наука, 1968.
16. Рисс Ф., Секефальви–Надь Б. Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979.

17. Р у д и н У. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1976.
18. Ф е л п с Р. Лекции о теоремах Шоке. – М.: Мир, 1968.
19. Х а л м о ш П. Теория меры. – М.: Мир, 1953.
20. Х а л м о ш П. Гильбертово пространство в задачах. – М.: Мир, 1970.
21. Х е й м а н У., К е н н е д и Н. Субгармонические функции. т. 1. – М.: Мир, 1980.
22. Х и л л е Э., Ф и л л и п с Р. Функциональный анализ и полугруппы. – М.: ИЛ, 1962.
23. Х ь ю и т т Э., Р о с с К. А. Абстрактный гармонический анализ. т. 1. – М.: Наука, 1975; т. 2 – М.: Мир, 1975.
24. Ш е ф е р Х. Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1971.
25. Э д в а р д с Э. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1969.
26. B r o w d e r A. Introduction to Function Algebras. – New York: W. A. Benjamin, Inc., 1969.
27. R i c k a r t C. E. General Theory of Banach Algebras. – Princeton: D. van Nostrand, N. J., 1960.
28. R u d i n W. Real And Complex Analysis. – New York: McGraw–Hill, 1987.

ԱՍԱՏՐՅԱՆ ՀԱՅԿ ԱԼԲԵՐՏԻ
ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ ԻՇԽԱՆ ԳՎԻԴՈՆԻ
ԿԱՐԱԽԱՆՅԱՆ ՄԱՐՏԻՆ ԻՍԱԿԻ
ՔԱՄԱԼՅԱՆ ԱՐՄԵՆ ՀՐԱՉԻԿԻ

ԲԱՆԱԽՅԱՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎՆԵՐ ԵՎ ՍՊԵԿՏՐԱԼ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ստորագրված է փպագրության 10.07.2008 թ.:
Չափսը՝ $60 \times 84\,{}^1/_{16}$: Թուղթը՝ օֆսեթ: Հրատ. 13.5 մամուլ,
փպագր. 15.8 մամուլ=14.6 պայմ. մամուլի:
Տպաքանակ՝ 100: Պատվեր՝ 98:

ԵՊՀ հրատարակչություն
Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Երևանի պետական համալսարանի
օպերատիվ պոլիգրաֆիայի ստորաբաժանում
Երևան, Ալ. Մանուկյան 1: