

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

**ՌՈԼԱՆԴ ԱՎԱԳՅԱՆ, ԱՐԱՄ ՍԱՀԱՐՅԱՆ,
ՏԻԳՐԱՆ ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ**

**ՏԵՍԱԿԱՆ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ
ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԺՈՂՈՎԱԾՈՒ**

**ԵՐԵՎԱՆ
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿԶՈՒԹՅՈՒՆ
2024**

ՀՏԴ 531(076.1)

ԳՄԴ 22.21g7

Ա 770

Հրատարակության է երաշխավորել
ԵՊՀ գիտական խորհուրդը:

Գրախոսներ՝ ֆ.մ.գ.դ., պրոֆ. **Լ.Ս. Ասախյան**

ֆ.մ.գ.դ., պրոֆ. **Լ.Ծ. Գրիգորյան**

Ավագյան Ռ.Ս., Սահարյան Ա.Ա., Պետրոսյան Տ.Ա.,

Ա 770 **Տեսական մեխանիկայի խնդիրների ժողովածու**, - Եր.:

ԵՊՀ հրատ., 2024, 244 էջ:

Խնդրագիրքը պարունակում է դասական մեխանիկայի շուրջ 130 խնդիր: Խնդիրների մեծ մասը բերվում է լուծումներով: Առկա են հավելվածներ վարիացիոն հաշվի, կոորդինատային համակարգերի և վեկտորական անալիզի վերաբերյալ:

Սույն ժողովածուն նախատեսված է բուհերի ֆիզիկայի ֆակուլտետների և ֆիզիկային առնչվող մասնագիտացումների ուսանողների համար: Այն կարող է օգտակար լինել նաև ասպիրանտների և գիտաշխատողների համար:

ՀՏԴ 531(076.1)

ԳՄԴ 22.21g7

ISBN 978-5-8084-2664-1

DOI: <https://doi.org/10.46991/YSUPH/9785808426641>

© ԵՊՀ հրատ., 2024

© Հեղ. խումբ, 2024

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԱԽԱԲԱՆ	4
ԲԱԺԻՆ ԱՌԱՋԻՆ	
ԽՆԴԻՐՆԵՐ	6
Գլուխ 1 Հիմնական հասկացություններ և սկզբունքներ	8
Գլուխ 2 Միաչափ շարժում.....	16
Գլուխ 3 Շարժումը կենտրոնահամաչափ դաշտում: Տրոհում և ցրում.....	21
Գլուխ 4 Փոքր տատանումներ	28
Գլուխ 5 Պինդ մարմնի շարժում	35
Գլուխ 6 Կանոնական հավասարումներ	42
ԲԱԺԻՆ ԵՐԿՐՈՐԴ	
ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ ԵՎ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ.....	46
Գլուխ 1 Հիմնական հասկացություններ և սկզբունքներ	48
Գլուխ 2 Միաչափ շարժում.....	65
Գլուխ 3 Շարժումը կենտրոնահամաչափ դաշտում: Տրոհում և ցրում.....	84
Գլուխ 4 Փոքր տատանումներ	114
Գլուխ 5 Պինդ մարմնի շարժում	136
Գլուխ 6 Կանոնական հավասարումներ	164
ՀԱՎԵԼՎԱԾ	179
Հավելված 1 Վեկտորական անալիզ	180
Հավելված 2 Վարիացիոն հաշիվ.....	222
ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ	241
SUMMARY	242
PEՅՈՒՄԵ	243

ՆԱԽԱԲԱՆ

Տեսական ֆիզիկայի դասընթացների շարքում «Դասական մեխանիկա» առարկան առանձնահատուկ տեղ է զբաղեցնում: Այն առաջինն է այդ շարքում և հիմնարար գաղափարներ ու օրենքներ է ներմուծում, որոնք օգտագործվում են հետագայում «Դասական էլեկտրադինամիկա», «Քվանտային մեխանիկա», «Վիճակագրական ֆիզիկա», «Դաշտի քվանտային տեսություն» և «Գրավիտացիայի դասական տեսություն» դասընթացներում: Դրանցից կարևորներն են փոքրագույն գործողության սկզբունքը, պահպանման օրենքները, կանոնական ձևափոխությունները, ֆիզիկական համակարգերի դինամիկայի նկարագրման համիլտոնյան ձևակերպումը, տատանողական համակարգերի դինամիկայի օրինաչափությունները: Դասընթացի հաջող ընկալման անհրաժեշտ բաղադրամաս է դասախոսությունների ընթացքում շարադրված օրենքների և հետազոտական մեթոդների կիրառումը կոնկրետ խնդիրների լուծումներում: Սույն խնդրագրքում ներառված են տարբեր բարդության թվով 130-ից ավելի խնդիրներ, որոնց մի մասը վերցված է գրականությունում հայտնի տարբեր գրքերից: Խնդիրների ընտրության ընթացքում հաշվի է առնված Երևանի պետական համալսարանի ակադեմիկոս Գուրգեն Սահակյանի անվան տեսական ֆիզիկայի ամբիոնում «Դասական մեխանիկա» առարկայի դասավանդման բազմամյա փորձը: Արդյունավետ ինքնուրույն աշխատանքի համար խնդիրներն ուղեկցվում են լուծումներով: Ոչ բարդ խնդիրների համար տրվում են ցուցումներ, իսկ համեմատաբար բարդերի համար բերվում են մանրամասն լուծումները:

Հեղինակները երախտապարտ են ակադեմիկոս Գուրգեն Սահակյանի անվան տեսական ֆիզիկայի ամբիոնի դասախոսներին մանրամասն քննարկումների ու օգտակար խորհուրդների համար, ջերմ շնորհակալություն են հայտնում գրախոսներ պրոֆեսորներ Լ. Ասլանյանին և Լ. Գրիգորյանին արժեքավոր դիտողությունների համար:

Բաժին I

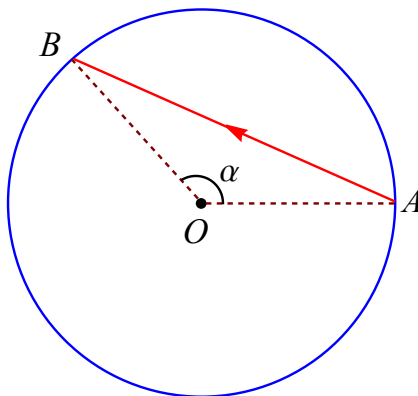
ԽՆԴԻՐՆԵՐ

ԳԼՈՒԽ 1

ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՍԿԱՅՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ՍԿԶԲՈՒՆՔՆԵՐ

1.1. Որոշել հետևյալ համակարգերի ազատության աստիճանների քանակը.

- ա) կորի երկայնքով շարժվող նյութական կետ,
- բ) մակերևույթի վրայով շարժվող նյութական կետ,
- գ) տարածության մեջ շարժվող նյութական կետ,
- դ) երկու նյութական կետերից կազմված համակարգ,
- ե) միմյանցից որոշակի հաստատուն հեռավորության վրա գտնվող երկու նյութական կետերից կազմված համակարգ,
- զ) միմյանցից որոշակի հեռավորության վրա գտնվող երկու նյութական կետերից կազմված համակարգ, որտեղ կետերից մեկը շարժվում է տրված կորի երկայնքով, իսկ մյուսը՝ տրված մակերևույթի վրայով,
- է) եռանկյան գագաթներում գտնվող երեք նյութական կետերից կազմված համակարգ:



Նկ. 1

1.2. Գնդիկն առանց շփման շարժվում է շրջանաձև սեղանի վրայով՝ ամեն անգամ առաձգականորեն անդրադառնալով սեղանի եզրին բախվելիս: Սկզբնական պահին գնդիկը սկսում է շարժվել սեղանի եզրի A կետից B կետ: AOB անկյունը հավասար է α -ի, որտեղ O -ն սեղանի կենտրոնն է (տե՛ս նկ. 1): Պարզել, թե ինչպես է կախված գնդիկի հետագծի տեսքը α -ի արժեքից:

1.3. Գտնել արագացումը, եթե տրված է Լագրանժի ֆունկցիան (կետով նշանակված է ածանցյալն ըստ ժամանակի)

ա) $L = \frac{\dot{q}^2}{2} - \frac{q^2}{2},$

բ) $L = \frac{(1+q^2)\dot{q}^2}{2} - \frac{q^2}{2},$

գ) $L = \frac{t\dot{q}^2}{2},$

դ) $L = -\sqrt{1-\dot{q}^2} + q,$

ե) $L = \frac{r^2}{2} + \frac{r^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{1}{r},$

զ) $L = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \sin^2 \theta - \cos \theta,$

է) $L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + (x\dot{y} - y\dot{x}),$

ը) $L = \frac{\dot{u}\dot{v}}{2} + \frac{1}{\sqrt{uv}}:$

1.4. Արտաքսելով ըստ ժամանակի լրիվ ածանցյալները՝ պարզեցնել Լագրանժի ֆունկցիաները.

ա) $L' = \dot{x} \sin t,$

բ) $L' = \frac{1}{2} (\dot{q} + t)^2,$

գ) $L' = \frac{1}{2} (\dot{q} + q)^2,$

դ) $L' = x\dot{y} - y\dot{x},$

ե) $L' = tx\dot{x}:$

1.5. Ստանալ նյութական կետի Լագրանժի ֆունկցիան հետևյալ կոորդինատային համակարգերում.

ա) դեկարտյան՝ (x, y, z) ,

բ) գլանային՝ (ρ, ϕ, z) ,

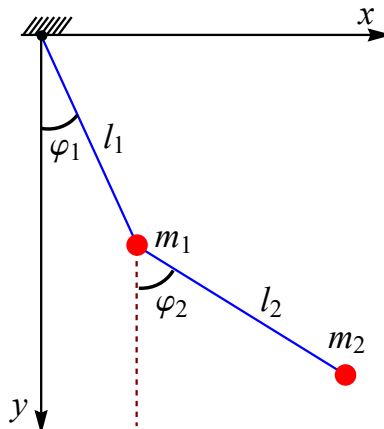
գ) սֆերիկ՝ (r, θ, φ) ,

դ) (u, v) կոորդինատներ, որոնք կապված են (x, y) դեկարտյան կոորդինատների հետ հետևյալ առնչություններով՝

$$x = \frac{u - v}{2}, \quad y = \sqrt{uv}:$$

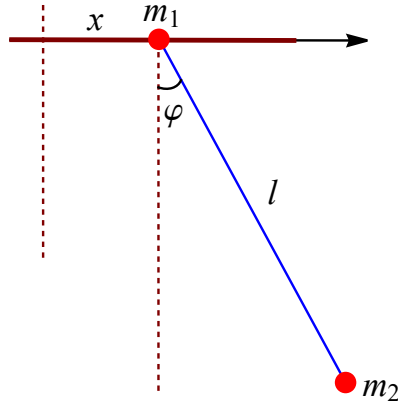
1.6. Որոշել հետևյալ համակարգերի Լագրանժի ֆունկցիաները (համակարգերը գտնվում են ծանրության ուժի համասեռ դաշտում, ազատ անկման արագացումը g է).

ա) հարթ կրկնակի ճոճանակ (տե՛ս նկ.2),



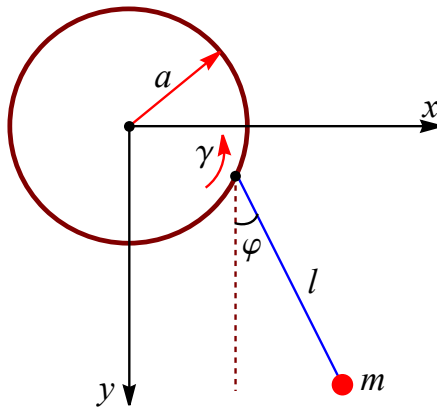
Նկ. 2

բ) m_2 զանգվածով հարթ ճոճանակ կախման կետում հորիզոնական առանցքի երկայնքով ազատ շարժվող m_1 զանգվածով մասնիկի առկայությամբ (տե՛ս նկ.3),



Նկ. 3

գ) հարթ ճոճանակ, որի կախման կետը հաստատուն γ անկյունային արագությամբ հավասարաչափ պտտվում է ուղղաձիգ շրջանագծի երկայնքով (տե՛ս նկ.4),



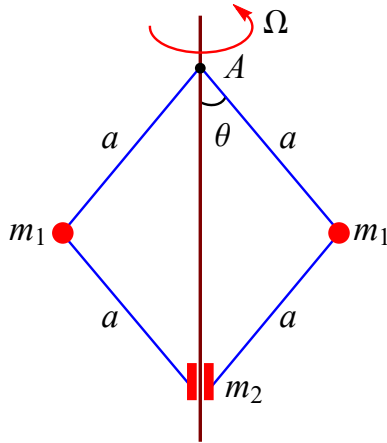
Նկ. 4

դ) հարթ ճոճանակ, որի կախման կետը կատարում է հորիզոնական տատանումներ $a \cos(\gamma t)$ օրենքով,

ե) հարթ ճոճանակ, որի կախման կետը կատարում է ուղղաձիգ

տատանումներ $a \cos(\gamma t)$ օրենքով,

զ) ուղղաձիգ առանցքի շուրջ հաստատուն Ω անկյունային արագության պտտվող համակարգ, որտեղ m_2 զանգվածը կարող է ազատ շարժվել ուղղաձիգ առանցքի երկայնքով (տե՛ս նկ.5):



Նկ. 5

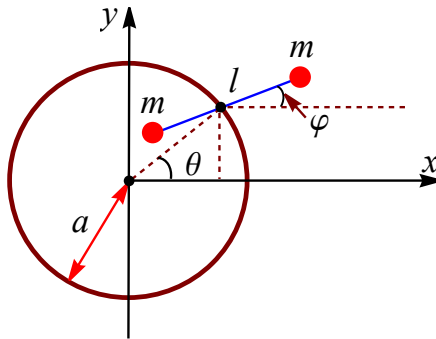
1.7. Որոշել հետևյալ համակարգերի Լագրանժի ֆունկցիաները.

ա) r շառավղով գնդային մակերևույթի վրայով շարժվող m զանգվածով նյութական կետ, որը գտնվում է ծանրության ուժի դաշտում (այս համակարգը հայտնի է որպես *սֆերիկ ճոճանակ*),

բ) գագաթի 2α անկյամբ կոնի մակերևույթով շարժվող m զանգվածով նյութական կետ, որի պոտենցիալ էներգիան հակադարձ համեմատական է կոնի գագաթից ունեցած հեռավորությանը՝ $U(r) = \frac{k}{r}$: Ենթադրվում է, որ կոնի գագաթն ուղղված է ուղղաձիգով դեպի վար:

1.8. m զանգվածով երկու նյութական կետերը միացված են l երկարությամբ անկշիռ ձողով: Ձողի կենտրոնը կարող է ազատ շարժվել a շառավղով շրջանագծի երկայնքով, իսկ ձողը՝ ազատ պտտվել շրջանագծի

xy հարթության մեջ (տե՛ս նկ.6): Որոշել համակարգի Լագրանժի ֆունկցիան:



Նկ. 6

1.9. Որոշել նյութական կետի Լագրանժի ֆունկցիան.

- ա) հավասարաչափ շարժվող հաշվարկման համակարգում,
- բ) հավասարաչափ արագացող հաշվարկման համակարգում,
- գ) հավասարաչափ պտտվող հաշվարկման համակարգում:

1.10. Որոշել էներգիան, եթե մասնիկի Լագրանժի ֆունկցիան տրվում է հետևյալ արտահայտությամբ՝

$$L = -\sqrt{1 - v^2} + Av - \varphi,$$

որտեղ v -ն արագությունն է, իսկ A -ն և φ -ն միայն կոորդինատներից կախված ֆունկցիաներ են:

1.11. m զանգվածով մասնիկը, շարժվելով $\vec{v}_1$ հաստատուն արագությամբ, մի կիսատարածությունից անցնում է մյուսը: Կիսատարածություններում մասնիկի պոտենցիալ էներգիան հաստատուն է և, համապատասխանաբար, հավասար է U_1 և U_2 : Որոշել մասնիկի շարժման ուղղության փոփոխությունը:

1.12. Մասնիկը, շարժվելով $U(x) = -Fx$ պոտենցիալ էներգիայով դաշտում, τ ժամանակահատվածում տեղափոխվում է $x = 0$ կետից դեպի $x = a$ կետ: Որոշել մասնիկի շարժման օրենքը, ենթադրելով, որ այն ունի $x(t) = At^2 + Bt + C$ տեսքը: A, B, C պարամետրերն ընտրել այնպես, որ գործողությունն ունենա փոքրագույն արժեք:

1.13. Ստանալ շարժման հավասարումը տվյալ Լագրանժի ֆունկցիաների համար.

$$\text{ա) } L = e^{-x^2 - \dot{x}^2} + 2\dot{x}e^{-x^2} \int_0^{\dot{x}} e^{-y^2} dy,$$

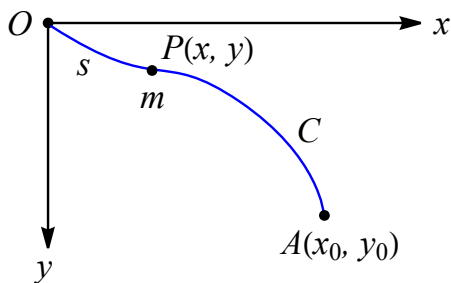
$$\text{բ) } L = \frac{1}{2}e^{\alpha t} (\dot{x}^2 - \omega^2 x^2):$$

1.14. Ուղղագիծ բարակ ձողը հաստատուն ω անկյունային արագությամբ պտտվում է ձողին ուղղահայաց ֆիքսված առանցքի շուրջ: Ձողի վրայով առանց շփման կարող է սահել m զանգվածով գնդիկը: Որոշել համակարգի Լագրանժի ֆունկցիան և գնդիկի արագացումը: Ծանրության ուժը հաշվի չառնել:

1.15. $O(0, 0)$ կետում դադարի վիճակում գտնվող մասնիկը ծանրության ուժի ազդեցությամբ սկսում է առանց շփման սահել ուղղաձիգ հարթության մեջ գտնվող լարի երկայնքով դեպի $A(x_0, y_0)$ կետը (տե՛ս նկ. 7): Նկարում լարը պատկերված է որպես xy հարթությունում գտնվող C կոր: Որոշել մասնիկի շարժման ժամանակահատվածը: Պարամետրական տեսքով ստանալ լարի $y(x)$ կախվածությունն այն դեպքում, երբ O կետից դեպի A կետը մասնիկը հասնում է հնարավոր նվազագույն ժամանակահատվածում (սա հայտնի է որպես *բրախիստոխրոնի խնդիր*):

1.16. Որոշել m_1 և m_2 զանգվածներով մասնիկների միևնույն հետագծով շարժման ժամանակների հարաբերությունը: Մասնիկների պոտենցիալ էներգիաները հավասար են:

1.17. Մասնիկը նույն հետագծով կատարում է երկու շարժում: Որոշել



Նկ. 7

շարժման ժամանակների հարաբերությունը, եթե երկրորդ շարժման դեպքում պոտենցիալ էներգիան k անգամ ավելի մեծ է, քան առաջին դեպքում:

1.18. Տարբեր խնդիրներում ֆիզիկական մեծությունների արտահայտություններում ի հայտ են գալիս այնպիսի ֆունկցիաներ, ինչպես օրինակ՝ $\cos u$, $\sin u$, e^u , $\ln u$ և այլն, որտեղ u արգումենտը սկալյար է՝ կախված որոշակի ֆիզիկական մեծություններից (օրինակ՝ ժամանակը, հաճախությունը, զանգվածը և այլն): Պարզել, թե ինչու u -ն պետք է լինի անչափ, այսինքն՝ կախված չլինի զանգվածի, երկարության և ժամանակի միավորների համակարգի ընտրությունից:

1.19. Չափայնությունների վերլուծությամբ որոշել մաթեմատիկական ճոճանակի տատանման T պարբերության կախվածությունը ճոճանակի m զանգվածից, P կշռից և l երկարությունից:

ԳԼՈՒԽ 2

ՄԻԱՉԱՓ ՇԱՐԺՈՒՄ

2.1. Որոշել հետևյալ Լագրանժի ֆունկցիաներով նկարագրվող համակարգերի կանգառի կետերի (դարձակետերի) կոորդինատները՝ հաշվի առնելով համապատասխան սկզբնական պայմանները.

ա) $L = \frac{\dot{x}^2}{2} - \sin x, \quad x_0 = 0, \dot{x}_0 = 1,$

բ) $L = -\sqrt{1 - \dot{x}^2} + x, \quad x_0 = 1, \dot{x}_0 = \frac{1}{2},$

գ) $L = \frac{\dot{x}^2 - x^2 + 1}{x}, \quad x_0 = 1, \dot{x}_0 = 1:$

2.2. Ինտեգրել տրված սկզբնական պայմաններով նյութական կետի շարժման հավասարումները հետևյալ Լագրանժի ֆունկցիաների համար ($t = t_0$ պահին նյութական կետի կոորդինատն ու արագությունը նշանակված են, համապատասխանաբար, x_0 և $\dot{x}_0$).

ա) $L = \dot{x}^2 - \frac{1}{x^2}, \quad t_0 = 0, \quad x_0 = 1, \quad \dot{x}_0 = 0,$

բ) $L = -\sqrt{1 - \dot{x}^2} + x, \quad t_0 = 0, \quad x_0 = 2, \quad \dot{x}_0 = 0,$

գ) $L = \sqrt{t + \dot{x}^2}, \quad t_0 = 3, \quad x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 1,$

դ) $L = -\sqrt{1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2} + x, \quad t_0 = 0, \quad x_0 = y_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = \frac{1}{2}:$

2.3. Նշել պայմանը, որի դեպքում հետևյալ Լագրանժի ֆունկցիաներով նկարագրվող համակարգերը կկատարեն ֆինիտ շարժում, և որոշել համապատասխան տատանումների պարբերության կախվածությունը էներգիայից.

ա) $L = \dot{x}^2 - x^2,$

բ) $L = \frac{\dot{x}^2}{x} - x - \frac{1}{x},$

$$\text{զ) } L = \dot{x}^2 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2},$$

$$\text{դ) } L = \dot{x}^2 - (e^x - 1)^2:$$

2.4. l երկարությամբ թելի ծայրին ամրացված է m զանգվածով նյութական կետ, որը գտնվում է ծանրության ուժի դաշտում (այս համակարգը հայտնի է որպես *հարթ մաթեմատիկական ճոճանակ*): Որոշել այս համակարգի տատանումների պարբերության կախվածությունը տատանումների լայնությունից:

2.5. Որոշել m զանգվածով մասնիկի տատանումների պարբերության կախվածությունը էներգիայից, երբ մասնիկը շարժվում է հետևյալ պոտենցիալ էներգիաներով դաշտերում.

$$\text{ա) } U(x) = A|x|^n,$$

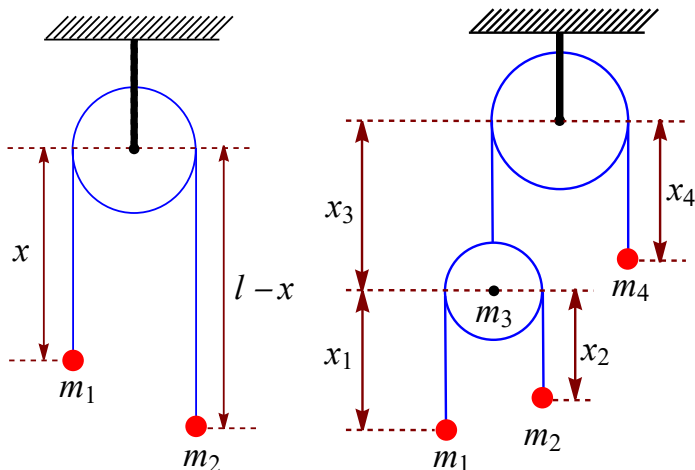
$$\text{բ) } U(x) = -\frac{U_0}{\cosh^2(\alpha x)}, \text{ ընդ որում, } -U_0 < E < 0,$$

$$\text{գ) } U(x) = U_0 \tan^2(\alpha x):$$

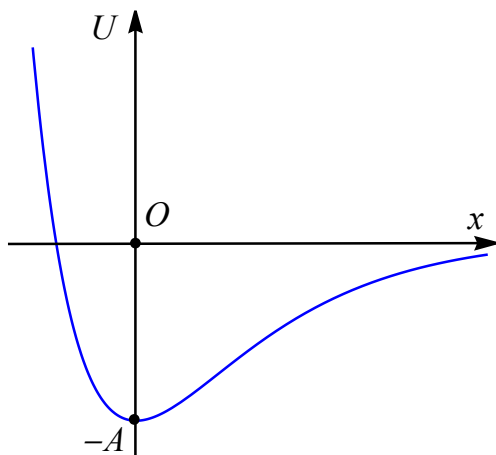
2.6. Պարանն անցնում է զանգված չունեցող ճախարակի վրայով և կարող է առանց շփման սահել նրա վրայով (տե՛ս նկ.8, ձախ մաս): Պարանի ծայրերից կախված են m_1 և m_2 զանգվածներով երկու մարմիններ (այս համակարգը հայտնի է որպես *Ատվուդի մեքենա*): Որոշել համակարգի *Լագրանժի ֆունկցիան* և մարմինների արագացումները:

2.7. m_4 զանգվածով մարմինը կախված է լարի մի ծայրից, ընդ որում, լարն անցնում է չպտտվող անշարժ ճախարակի վրայով (շփումն անտեսել, տե՛ս նկ.8, աջ մաս): Լարի մյուս ծայրից կախված է m_3 զանգվածով մեկ այլ չպտտվող ճախարակ, որի վրայով անցնող լարից կախված են m_1 և m_2 զանգվածներով մարմիններ: Գտնել համակարգի *Լագրանժի ֆունկցիան*: Որոշել m_4 զանգվածով մարմնի արագացումը:

2.8. Որոշել նյութական կետի շարժման օրենքը $U(x) = A(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x})$ դաշտում (այն հայտնի է որպես *Մորզեի պոտենցիալ*, տե՛ս նկ.9):



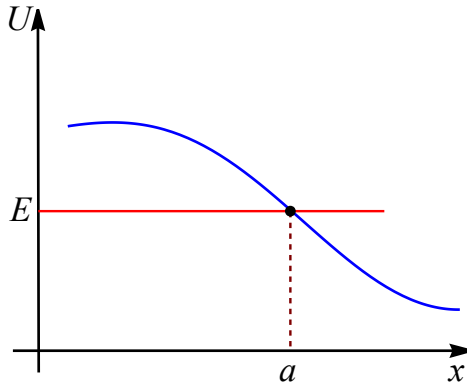
Նկ. 8



Նկ. 9

2.9. Որոշել $U(x)$ դաշտում գտնվող նյութական կետի շարժման օրենքի մոտավոր տեսքը $x = a$ կանգառի կետի մոտակայքում (տե՛ս նկ.10): Խնդիրը լուծել՝ $U(x)$ ֆունկցիան վերլուծելով Թեյլորի շարքի $x = a$ կետի

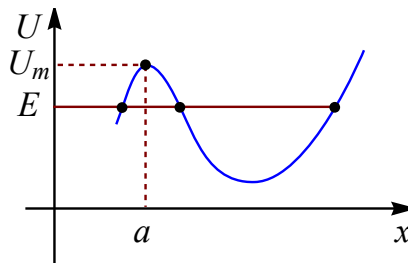
մոտակայքում: Դիտարկել $U'(a) \neq 0$ և $\begin{cases} U'(a) = 0 \\ U''(a) \neq 0 \end{cases}$ դեպքերը:



Նկ. 10

2.10. Որոշել մասնիկի շարժման օրենքը $U(x) = -Ax^4$ դաշտում, երբ լրիվ էներգիան հավասար է զրոյի:

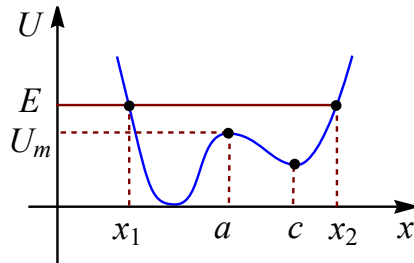
2.11. Պարզել, թե ինչ օրենքով է անվերջության ձգտում մասնիկի շարժման պարբերությունը նկ.11-ում պատկերված դաշտում, երբ E էներգիան ձգտում է U_m -ին:



Նկ. 11

2.12. ա) Գնահատել մասնիկի շարժման պարբերությունը $U(x)$ դաշտում

(տե՛ս նկ. 12), եթե նրա էներգիան մոտ է U_m -ին:



Նկ. 12

բ) Որոշել, թե մասնիկի պարբերության որ ժամանակահատվածում է մասնիկը գտնվում x -ից $x + dx$ տիրույթում:

2.13. Որոշել մասնիկի շարժման օրենքի փոփոխությունն այն հատվածում, որտեղ չկան կանգառի կետեր, երբ $U(x)$ դաշտին ավելացվում է փոքր $\delta U(x)$ մաս: Հետազոտել ստացված արդյունքների կիրառելիությունը կանգառի կետի մոտակայքում:

ԳԼՈՒԽ 3

ՇԱՐԺՈՒՄԸ ԿԵՆՏՐՈՆԱՀԱՄԱԶՁՓ ԴԱՇՏՈՒՄ: ՏՐՈՀՈՒՄ ԵՎ ՑՐՈՒՄ

3.1. Դիցուք $\vec{r}_a$ -ը կամայական սկզբնակետի նկատմամբ m_a զանգվածով մասնիկի շառավիղ վեկտորն է, երկու մասնիկների փոխադարձ հեռավորության վեկտորը՝ $\vec{r}_{ab} = \vec{r}_a - \vec{r}_b$, իսկ $\vec{R}$ -ը՝ այդ մասնիկների համակարգի իներցիայի կենտրոնի շառավիղ վեկտորն է: Հիմնավորել հետևյալ առնչությունը՝

$$M^2 R^2 = M \sum_a m_a r_a^2 - \frac{1}{2} \sum_{a,b} m_a m_b r_{ab}^2,$$

որտեղ $M = \sum_a m_a$ -ը համակարգի զանգվածն է:

3.2. Միջուկի շուրջ պտտվող n էլեկտրոնների շարժման խնդիրը բերել n մասնիկների շարժման խնդրին: Միջուկի զանգվածը M է, էլեկտրոնինը՝ m , իսկ համակարգի U պոտենցիալ էներգիան կախված է միայն միջուկ-էլեկտրոն հեռավորություններից:

3.3. Ստանալ արտահայտություններ մասնիկի իմպուլսի մոմենտի դեկարտյան բաղադրիչների և բացարձակ արժեքի համար հետևյալ կոորդինատային համակարգերում.

ա) գլանային՝ (ρ, ϕ, z) ,

բ) սֆերիկ՝ (r, θ, φ) :

3.4. Պարզել, թե մասնիկի $\vec{P}$ իմպուլսի և $\vec{M}$ իմպուլսի մոմենտի որ բաղադրիչներն են պահպանվում հետևյալ դաշտերում շարժվելիս.

ա) անվերջ համասեռ հարթության դաշտ,

- բ) անվերջ համասեռ զլանի դաշտ,
- գ) անվերջ համասեռ պրիզմայի դաշտ,
- դ) երկու անշարժ նյութական կետերի դաշտ,
- ե) անվերջ համասեռ կիսահարթության դաշտ,
- զ) համասեռ կոնի դաշտ,
- է) համասեռ շրջանային տորի դաշտ,
- ը) անվերջ համասեռ զլանային պտուտակագծի դաշտ:

3.5. m զանգվածով նյութական կետը շարժվում է կենտրոնահամաչափ դաշտում: Որոշել կոորդինատների սկզբնակետից մասնիկի ունեցած մեծագույն և փոքրագույն հեռավորությունների կախվածությունը էներգիայից և դաշտի կենտրոնի նկատմամբ իմպուլսի մոմենտից: Դիտարկել հետևյալ պոտենցիալ էներգիաներով դաշտերը.

ա) $U(r) = \frac{a}{r^2},$

բ) $U(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} \right),$ (ընդունել $m = 1$):

3.6. Ինտեգրել $m = 1$ զանգվածով նյութական կետի շարժման հավասարումները, եթե մասնիկը շարժվում է

$$U(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} \right)$$

պոտենցիալ էներգիայով կենտրոնահամաչափ դաշտում:

3.7. l շառավղով գնդային մակերևույթի վրայով շարժվում է m զանգվածով նյութական կետ, որը գտնվում է ծանրության ուժի դաշտում (այս համակարգը հայտնի է որպես *սֆերիկ ճոճանակ*): Ինտեգրել այս համակարգի շարժման հավասարումները:

3.8. Ինտեգրել նյութական կետի շարժման հավասարումները, երբ այն շարժվում է ծանրության ուժի դաշտում գտնվող գազաթի 2α անկյամբ

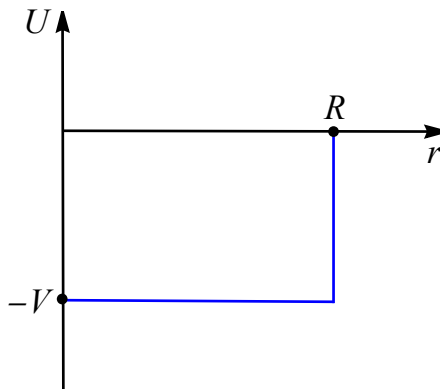
կոնի վրայով: Ենթադրվում է, որ կոնի գագաթն ուղղված է ուղղաձիգով դեպի վար:

3.9. Ինտեգրել շարժման հավասարումները m_2 զանգվածով հարթ ճոճանակի համար, որի կախման կետում առկա է m_1 զանգված, ընդ որում, վերջինս կարող է ազատ շարժվել հորիզոնական առանցքի երկայնքով (տե՛ս նկ.3):

3.10. Որոշել մասնիկի հետագիծը և շարժման օրենքը

$$\begin{cases} U = -V, & r < R \\ U = 0, & r > R \end{cases}$$

պոտենցիալ էներգիայով դաշտում (այն կոչվում է *սֆերիկ ուղղանկյուն պոտենցիալ հոր*, տե՛ս նկ.13) մասնիկի իմպուլսի մոմենտի և էներգիայի բոլոր հնարավոր արժեքների համար:



Նկ. 13

3.11. Որոշել մասնիկի կոորդինատների կախվածությունը ժամանակից

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

պոտենցիալ էներգիայով դաշտում շարժվելիս, եթե նրա էներգիան հավասար է զրոյի ($E = 0$), այսինքն՝ շարժման հետագիծը պարաբոլ է:

3.12. Ինտեգրել մասնիկի շարժման հավասարումները

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$$

պոտենցիալ էներգիայով կենտրոնահամաչափ դաշտում ($\alpha > 0$):

3.13. Երբ $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ պոտենցիալ էներգիային ավելացվում է փոքր $\delta U(r)$ մաս, ֆինիտ շարժման հետագծերը փակ են լինում միայն իմպուլսի մոմենտի ընդհատ արժեքների դեպքում, ընդ որում, յուրաքանչյուր պտույտից հետո հետագծի պերիհելիումը (դաշտի կենտրոնին ամենամոտ կետը) շեղվում է փոքր $\delta\varphi$ անկյունով: Որոշել այդ $\delta\varphi$ անկյունը հետևյալ դեպքերում.

ա) $\delta U(r) = \frac{\beta}{r^2},$

բ) $\delta U(r) = \frac{\gamma}{r^3}:$

3.14. Որոշել մասնիկի հետագիծը

$$U(r) = \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$$

պոտենցիալ էներգիայով դաշտում, որտեղ $\alpha > 0$ և $\beta > 0$: Ցրման արդյունքում նրա ուղղության փոփոխությունը (այն հայտնի է որպես *ցրման անկյուն*) արտահայտել էներգիայի և իմպուլսի մոմենտի միջոցով:

3.15. Պարզել, թե M իմպուլսի մոմենտի ինչ արժեքների դեպքում մասնիկը կկարողանա կատարել ֆինիտ շարժում հետևյալ $U(r)$ պոտենցիալ էներգիայով դաշտում.

ա) $U(r) = -\frac{\alpha e^{-\kappa r}}{r},$

բ) $U(r) = -V e^{-\kappa^2 r^2}:$

3.16. Որոշել m_1 և m_2 զանգվածներով երկու մասնիկների ֆինիտ շարժման հետագծերը զանգվածների կենտրոնի հետ կապված հաշվարկման համակարգում, եթե մասնիկները փոխազդում են $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ օրենքով:

3.17. m_1 զանգվածով մասնիկը, շարժվելով $\vec{v}$ արագությամբ, բախվում է m_2 զանգվածով անշարժ մասնիկին: Բախումից հետո մասնիկների ձեռք բերած արագություններն արտահայտել լաբորատոր հաշվարկման համակարգում (Λ -համակարգ) նրանց շեղման անկյունների միջոցով:

3.18. Որոշել $m = 1$ զանգվածով նյութական կետի շեղման անկյունը

$$U(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} \right)$$

պոտենցիալ էներգիայով կենտրոնահամաչափ դաշտում, երբ լրիվ էներգիան դրական է:

3.19. Որոշել

$$U(r) = \frac{1}{2r^2} - \frac{1}{r}$$

պոտենցիալ էներգիայով կենտրոնահամաչափ դաշտում մասնիկների ցրման էֆեկտիվ կտրվածքը փոքր անկյամբ ցրումների համար:

3.20. Որոշել a շառավղով բացարձակ պինդ գնդի վրա մասնիկների ցրման էֆեկտիվ կտրվածքը: Գնդի հետ մասնիկների փոխազդեցությունը նկարագրվում է հետևյալ պոտենցիալ էներգիայով՝

$$\begin{cases} U = \infty, & r < a, \\ U = 0, & r > a : \end{cases}$$

3.21. Որոշել $U(r) \propto \frac{1}{r^n}$ պոտենցիալ էներգիայով դաշտում մասնիկների ցրման էֆեկտիվ կտրվածքի կախվածությունն անվերջ հեռվում մասնիկների ունեցած v_∞ արագությունից:

3.22. Որոշել հետևյալ պոտենցիալ էներգիաներով դաշտի ուժային կենտրոնի վրա մասնիկների անկման էֆեկտիվ կտրվածքը.

ա) $U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}, \alpha > 0,$

բ) $U(r) = -\frac{\alpha}{r^n}, n > 2, \alpha > 0:$

3.23. Որոշել m_2 զանգվածով և R շառավղով սֆերիկ մարմնի մակերևույթի վրա m_1 զանգվածով մասնիկների անկման էֆեկտիվ կտրվածքը, եթե գունդը ձգում է մասնիկներին Նյուտոնի օրենքի համաձայն:

3.24. Որոշել

$$U(r) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}, \alpha > 0, \beta > 0$$

պոտենցիալ էներգիայով դաշտի ուժային կենտրոնի վրա մասնիկների անկման էֆեկտիվ կտրվածքը:

3.25. Որոշել

$$U(r) = \frac{\beta}{r^2} - \frac{\gamma}{r^4}, \beta > 0, \gamma > 0$$

պոտենցիալ էներգիայով դաշտի ուժային կենտրոնի վրա մասնիկների անկման էֆեկտիվ կտրվածքը:

3.26. Որոշել

$$U(r) = \frac{\alpha}{r^2}, \alpha > 0$$

պոտենցիալ էներգիայով դաշտում մասնիկների ցրման էֆեկտիվ կտրվածքը:

3.27. Որոշել R շառավղով գնդի վրա մասնիկների անկման էֆեկտիվ կտրվածքը, եթե գունդը գտնվում է հետևյալ $U(r)$ պոտենցիալ էներգիայով դաշտի կենտրոնում.

ա) $U(r) = -\frac{\alpha}{r^n}, n \geq 2,$

բ) $U(r) = \frac{\beta}{r^2} - \frac{\gamma}{r^4}:$

3.28. V արագությամբ շարժվող մասնիկը տրոհվում է երկու միանման մասնիկների: Իներցիայի կենտրոնի հետ կապված հաշվարկման համակարգում (C -համակարգ) տրոհումն իզոտրոպ է, իսկ առաջացած մասնիկների արագությունը՝ v_0 : Որոշել մասնիկների բաշխվածությունն ըստ ցրման անկյան (*ցրման անկյունը* մասնիկների թռիչքի ուղղությունների միջև կազմած անկյունն է):

3.29. Էլեկտրոնը, որն անվերջ հեռվում օժտված է v արագությամբ, ընկնում է մեկ այլ, սկզբնապես անշարժ էլեկտրոնի վրա (նշանացուցային պարամետրը ρ է): Որոշել էլեկտրոնների արագությունները ցրումից հետո:

ԳԼՈՒԽ 4

ՓՈՔՐ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐ

4.1. Ներդաշնակ տատանումների հաճախությունը ω է, իսկ մասնիկի կոորդինատն ու արագությունը $t = 0$ պահին, համապատասխանաբար, հավասար են x_0 և v_0 : Որոշել տատանումների լայնություն ու փուլը:

4.2. Որոշել համակարգի փոքր տատանումների հաճախությունը, եթե Լագրանժի ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը.

ա) $L = \frac{\dot{x}^2}{2} + \sin x,$

բ) $L = \frac{\dot{x}^2 - x^2 - 1}{2x},$

գ) $L = \dot{x}^2 - x^2 e^x,$

դ) $L = \cosh x (\dot{x}^2 - 1),$

ե) $L = \frac{\dot{x}^2}{x} - \frac{x}{\ln x}:$

4.3. Որոշել երկու երկատոմ մոլեկուլների տատանման ω և ω' հաճախությունների հարաբերությունը, եթե մոլեկուլները կազմված են տարբեր իզոտոպների ատոմներից, իսկ ատոմների զանգվածներն են, համապատասխանաբար, m_1, m_2 և m'_1, m'_2 :

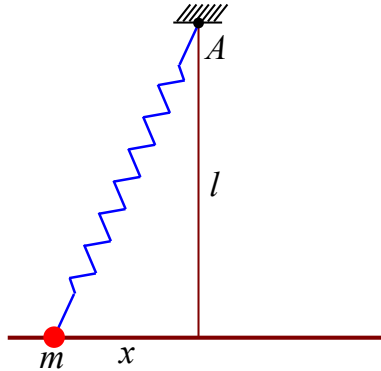
4.4. Որոշել երկու միանման մասնիկներից կազմված ազատ պտտվող համակարգի տատանումների հաճախությունը, եթե մասնիկները փոխազդում են

$$U(r) = -\frac{\ln r}{r^2}$$

օրենքով:

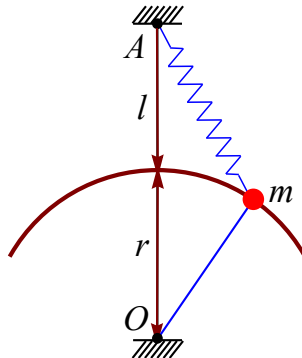
4.5. Որոշել m զանգվածով նյութական կետի փոքր տատանումների հաճախությունը, եթե այն կարող է շարժվել ուղղի երկայնքով

և ամրացված է զսպանակի մի ծայրին: Չսպանակի մյուս ծայրն ամրացված է ուղղից l հեռավորության վրա գտնվող անշարժ A կետում: Չսպանակը նախապես ձգված է բավականաչափ մեծ F ուժով (տե՛ս նկ.14):



Նկ. 14

4.6. Նախորդ խնդիրը լուծել այն դեպքում, երբ m զանգվածով նյութական կետը շարժվում է r շառավղով շրջանագծի երկայնքով (տե՛ս նկ.15):



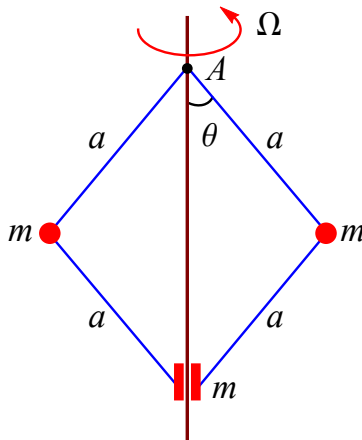
Նկ. 15

4.7. Որոշել m_2 զանգվածով հարթ ճոճանակի փոքր տատանումների

հաճախությունը, եթե ճոճանակի կախման կետում առկա է հորիզոնական առանցքի երկայնքով ազատ շարժվող m_1 զանգված (տե՛ս նկ.3):

4.8. Որոշել անկայուն հավասարակշռության դիրքի մոտակայքում կոորդինատի կախվածությունը ժամանակից:

4.9. Որոշել ծանրության ուժի դաշտում ուղղաձիգ առանցքի շուրջ հաստատուն Ω անկյունային արագությամբ պտտվող համակարգի փոքր տատանումների հաճախությունը (տե՛ս նկ.16):



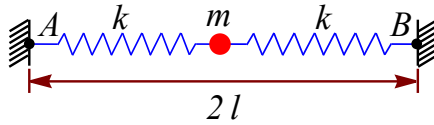
Նկ. 16

4.10. Որոշել տրված համակարգի (տե՛ս նկ.17) ազատ տատանումները, եթե m զանգվածով մասնիկը կարող է շարժվել՝

ա) AB ուղղի երկայնքով,

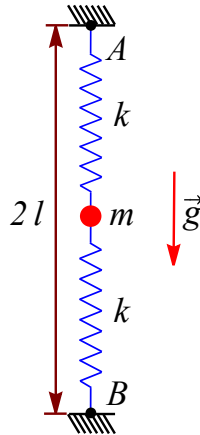
բ) AB -ին ուղղահայաց ուղղությամբ:

Հավասարակշռության դիրքում զսպանակները ձգված են բավականաչափ մեծ f ուժով: Որոշել հաճախության կախվածությունը f -ից:



Նկ. 17

4.11. Որոշել տրված համակարգի (տե՛ս նկ.18) ազատ տատանումների հաճախությունը, եթե այն գտնվում է ծանրության ուժի համասեռ դաշտում, իսկ m զանգվածով մասնիկը կարող է շարժվել միայն ուղղահիգ ուղղությամբ:



Նկ. 18

4.12. Որոշել արտաքին F ուժի ազդեցությամբ հարկադրական տատանումներ կատարող նյութական կետի շարժման օրենքը, եթե $t = 0$ սկզբնական պահին կոորդինատն ու արագությունը զրոյական են, ազատ տատանումների հաճախությունը ω է, իսկ F ուժի ժամանակային կախվածությունն ունի հետևյալ տեսքը (a -ն, α -ն և β -ն հաստատուններ են).

ա) $F = a,$

- ք) $F(t) = at$,
 զ) $F(t) = a \cos(\alpha t)$,
 դ) $F(t) = a \sin(\alpha t)$,
 ե) $F(t) = ae^{-\alpha t}$,
 զ) $F(t) = ae^{-\alpha t} \sin(\beta t)$:

4.13. Որոշել հետևյալ ֆունկցիաներով նկարագրվող արտաքին ուժերի կիրառումից հետո համակարգի տատանումների վերջնական լայնությունը, եթե մինչև $t = 0$ պահը համակարգը գտնվում էր դադարի վիճակում հավասարակշռության դիրքում:

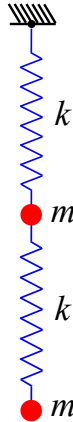
- ա) $F(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ F_0 t/T, & 0 \leq t \leq T, \\ F_0, & t \geq T, \end{cases}$
 բ) $F(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, t \geq T, \\ F_0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases}$
 գ) $F(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, t \geq T, \\ F_0 t/T, & 0 \leq t \leq T, \end{cases}$
 դ) $F(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, t \geq T, \\ F_0 \sin(\omega t), & 0 \leq t \leq T : \end{cases}$

4.14. Որոշել հաճախությունները և նորմալ տատանումները տրված Լագրանժի ֆունկցիաներով նկարագրվող համակարգերի համար.

- ա) $L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2) - \frac{1}{2} (x^2 - xy + y^2)$,
 բ) $L = \frac{1}{2} (2\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2) - \frac{1}{2} (3x^2 + 2y^2)$,
 գ) $L = \frac{1}{2} \left(\dot{x}^2 + \frac{2}{5} \dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) - \frac{1}{2} \left(x^2 + y^2 + \frac{2}{5} yz + z^2 \right)$,
 դ) $L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2} (x^2 + xy + y^2 + 2yz + 2z^2)$:

4.15. Հիմնավորել, որ նյութական կետի նորմալ տատանումները փոխուղղահայաց են:

4.16. Որոշել տրված համակարգի (տե՛ս նկ.19) ազատ տատանումները, երբ մասնիկները շարժվում են ուղղաձիգ ուղղությամբ: Որոշել նորմալ կոորդինատները և Լագրանժի ֆունկցիան արտահայտել դրանց միջոցով:



Նկ. 19

4.17. Որոշել համակարգի ազատ տատանումները, եթե Լագրանժի ֆունկցիան հետևյալն է՝

$$L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - \frac{\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2}{2} :$$

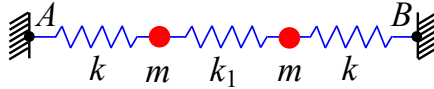
Ի՞նչ տեսք ունի (x, y) դեկարտյան կոորդինատներով նյութական կետի հետագիծը:

4.18. Որոշել զսպանակներով միմյանց կապված մասնիկների համակարգի ազատ տատանումները (տե՛ս նկ.20), եթե մասնիկները կարող են շարժվել միայն AB ուղղի երկայնքով, ընդ որում, սկզբնական պահին՝

ա) մասնիկներից մեկի արագությունը v է, իսկ մյուս մասնիկի արագությունը և երկու մասնիկների շեղումները հավասարակշռության

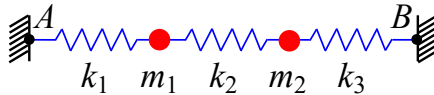
դիրքից զրոյական են:

բ) մասնիկներից մեկի շեղումը հավասարակշռության դիրքից a է, իսկ մյուս մասնիկի շեղումը և երկու մասնիկների արագությունները զրոյական են:



Նկ. 20

4.19. Որոշել զսպանակներով միմյանց հետ կապված մասնիկների համակարգի (տե՛ս նկ.21) նորմալ տատանումները, եթե մասնիկները կարող են շարժվել միայն AB ուղղի երկայնքով: Որոշել նաև համակարգի ազատ տատանումների հաճախությունը:



Նկ. 21

4.20. Ուսումնասիրել

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Լագրանժի ֆունկցիայով նկարագրվող համակարգի անհարմոնիկ տատանումները:

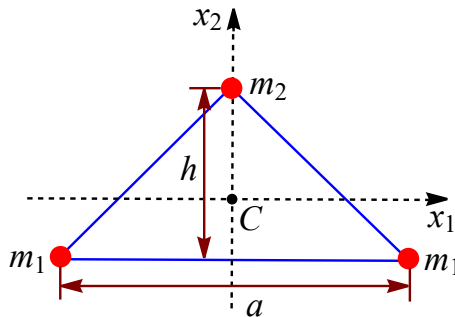
ԳԼՈՒԽ 5

ՊԻՆԴ ՄԱՐՄՆԻ ՇԱՐԺՈՒՄ

5.1. Որոշել մոլեկուլի իներցիայի գլխավոր մոմենտները, ենթադրելով, որ այդ մոլեկուլը կազմված է մի ուղղի վրա գտնվող իրարից տարբեր զանգվածներով ատոմներից: m_a և m_b զանգվածներով այդ a և b ատոմները գտնվում են միմյանցից անփոփոխ l_{ab} հեռավորությունների վրա:

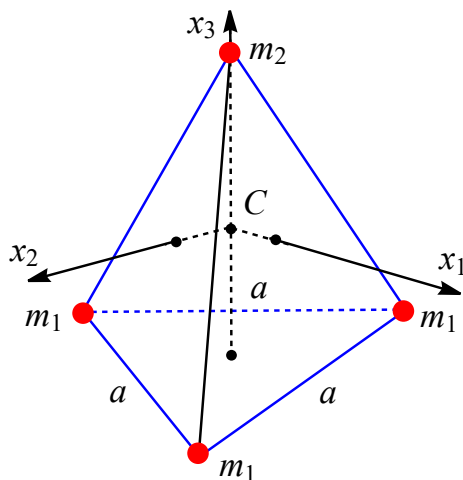
5.2. Որոշել հետևյալ մոլեկուլների իներցիայի գլխավոր մոմենտները, ենթադրելով, որ այդ մոլեկուլները կազմված են միմյանցից անփոփոխ հեռավորությունների վրա գտնվող ատոմներից.

ա) եռատոմ մոլեկուլ, որի ատոմները գտնվում են հավասարասրուն եռանկյան գագաթներում (տե՛ս նկ.22),



Նկ. 22

բ) քառատոմ մոլեկուլ, որի ատոմները գտնվում են կանոնավոր եռանկյուն բուրգի գագաթներում (տե՛ս նկ.23),



Նկ. 23

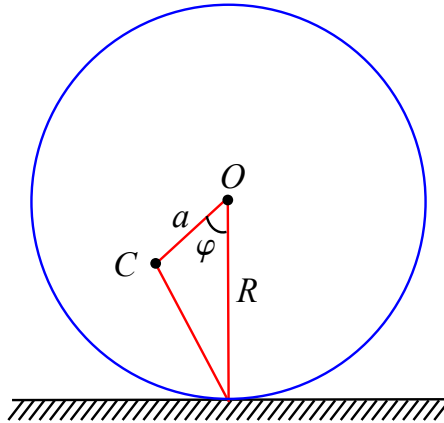
5.3. Որոշել հետևյալ համասեռ հոծ մարմինների իներցիայի գլխավոր մոմենտները.

- ա) l երկարությամբ բարակ ձող,
- բ) R շառավղով գունդ,
- գ) R շառավղով և h բարձրությամբ գլան,
- դ) a, b, c կողերով ուղղանկյուն գուգահեռանիստ,
- ե) R հիմքի շառավղով և h բարձրությամբ կոն,
- զ) a, b, c կիսաառանցքներով եռառանցք էլիպսոիդ:

5.4. Որոշել ծանրության ուժի դաշտում անշարժ հորիզոնական առանցքի շուրջ տատանվող պինդ մարմնի (*ֆիզիկական ճոճանակ*) փոքր տատանումների հաճախությունը:

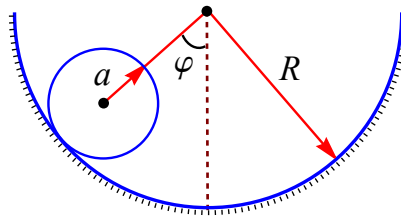
5.5. Հարթության վրայով գլորվող R շառավղով գլանի ներսում զանգվածը բաշխված է այնպես, որ գլանի իներցիայի գլխավոր առանցքներից մեկը գուգահեռ է գլանի առանցքին և գտնվում է դրանից a հեռավորության վրա (տե՛ս նկ.24): Իներցիայի մոմենտը նշված իներցիայի գլխավոր

առանցքի նկատմամբ I է: Որոշել գլանի կինետիկ էներգիան:



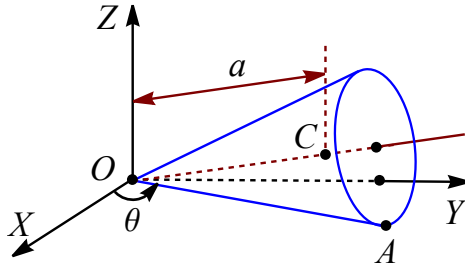
Նկ. 24

5.6. Որոշել a շառավղով համասեռ գլանի կինետիկ էներգիան, եթե այն առանց սահելու գլորվում է R շառավղով գլանի ներքին մակերևույթի վրայով (տե՛ս նկ.25):



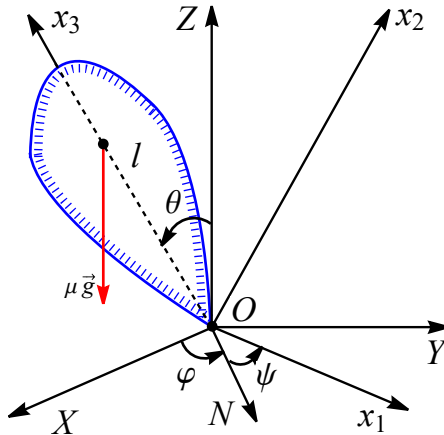
Նկ. 25

5.7. Որոշել հարթության վրայով գլորվող համասեռ կոնի կինետիկ էներգիան (տե՛ս նկ.26):



Նկ. 26

- 5.8.** Օգտվելով Էյլերի անկյունների սահմանումից՝ որոշել համաչափ հողի կինետիկ էներգիան:
- 5.9.** Ուսումնասիրել ծանր համաչափ հողի շարժումը, երբ նրա ստորին կետն անշարժ է (տե՛ս նկ.27):



Նկ. 27

- 5.10.** Պարզել, թե ինչ պայմանի դեպքում ծանր համաչափ հողի պտույտն ուղղաձիգ առանցքի շուրջ կլինի կայուն:
- 5.11.** Ուսումնասիրել ծանր համաչափ հողի շարժումն այն դեպքում, երբ նրա

սեփական առանցքի շուրջ պտտման կինետիկ էներգիան շատ մեծ է ծանրության ուժի դաշտում նրա ունեցած էներգիայից (*արագ պտտվող հող*):

5.12. Պտույտի ձևափոխության մատրիցն արտահայտել էյլերի անկյուններով:

5.13. Իներցիալ հաշվարկման համակարգում անկյունային արագության բաղադրիչներն արտահայտել էյլերի անկյուններով՝ օգտվելով պտույտի մատրիցից:

5.14. Հիմնավորել հետևյալ առնչությունը՝

$$\cos \frac{\Phi}{2} = \cos \frac{\varphi + \psi}{2} \cos \frac{\theta}{2},$$

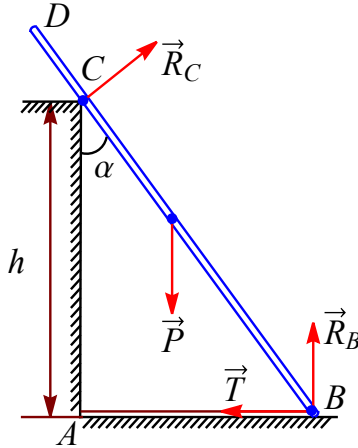
որտեղ Φ -ն պինդ մարմնի պտույտի անկյունն է, իսկ φ , ψ , θ -ն՝ էյլերի անկյունները:

5.15. Ուսումնասիրել ազատ համաչափ հողի շարժումը հողի հետ կապված կոորդինատային համակարգում (*ուղեկցող համակարգ*):

5.16. Արտաքին $\vec{F}$ ուժի և $\vec{K}$ ուժի մոմենտի ազդեցությամբ a շառավղով և μ զանգվածով համասեռ գունդը գլորվում է հարթության վրայով: Օգտվելով Դալամբերի սկզբունքից՝ ստանալ գնդի շարժման հավասարումները:

5.17. $\vec{P}$ կշռով և l երկարությամբ համասեռ BD ձողը հենված է պատին, ընդ որում, ձողի ստորին B ծայրը կապված է AB թելով (տե՛ս նկ.28): Որոշել հենման կետերում ռեակցիայի ուժերը և թելի լարվածությունը:

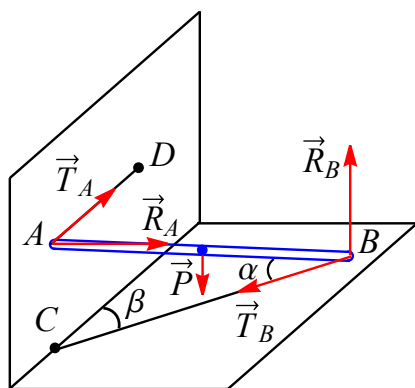
5.18. P կշռով AB ձողն իր ծայրերով հենված է հորիզոնական և ուղղահիվ հարթությունների վրա (տե՛ս նկ.29) և այդ դիրքում պահվում է երկու հորիզոնական թելերով՝ AD և BC , ընդ որում, BC թելը գտնվում է



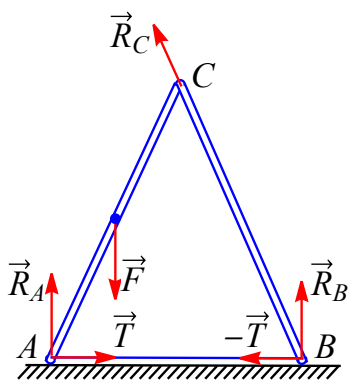
Նկ. 28

AB ձողի հետ միևնույն ուղղաձիգ հարթությունում: Որոշել հենման կետերում ռեակցիայի ուժերը և թելերի լարվածությունները:

- 5.19.** Միևնույն երկարությամբ երկու ձողերը վերևում ամրացված են հողակապով, իսկ ներքևում՝ AB թելով (տե՛ս նկ.30): Ձողերից մեկի կենտրոնում կիրառված է F ուժ (ձողերը համարել անկշիռ): Որոշել ռեակցիայի ուժերը:
- 5.20.** Որոշել ազատ անկում կատարող մարմնի շեղումն ուղղաձիգ ուղղությունից՝ պայմանավորված Երկրի պտույտով (Երկրի պտտման անկյունային արագությունը համարել շատ փոքր):
- 5.21.** Որոշել Երկրի մակերևույթից $\vec{v}_0$ սկզբնական արագությամբ որոշակի անկյան տակ նետված մարմնի շեղումն այն ուղղաձիգ հարթությունից, որում գտնվում է $\vec{v}_0$ վեկտորը:
- 5.22.** Որոշել Երկրի պտույտի ազդեցությունը մաթեմատիկական ճոճանակի փոքր տատանումների վրա (*Ֆուկոյի ճոճանակ*):



Ул. 29



Ул. 30

ԳԼՈՒԽ 6

ԿԱՆՈՆԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

6.1. Ստանալ Համիլտոնի հավասարումները տրված Համիլտոնի ֆունկցիաների համար՝

ա) $H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2r^2 \sin^2 \theta} + \sin \theta,$

բ) $H = \frac{p_u^2 + p_v^2}{2(u^2 + v^2)} + u,$

գ) $H = \sqrt{1 + p^2} + r,$

դ) $H = \frac{p_x p_y}{t x^2 y},$

ե) $H = \frac{(p - r^2)^2}{2},$

զ) $H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} + \lambda \left(\frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} \right)^2 :$

6.2. Ստանալ Համիլտոնի ֆունկցիան՝ օգտագործելով տրված Լագրանժի ֆունկցիաները.

ա) $L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z),$

բ) $L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - U(r, \phi, z),$

գ) $L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\phi}^2) - U(r, \theta, \phi),$

դ) $L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$

ե) խնդիր 3.2-ում ստացվող Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$L = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^n \left(\dot{\vec{r}}_i \right)^2 - \frac{m^2}{2(M + mn)} \left(\sum_{i=1}^n \dot{\vec{r}}_i \right)^2 - U(\vec{r}_i),$$

զ) $L = \frac{xy^2}{2} + \ln x,$

է) անհարմոնիկ օսցիլյատորի Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{\omega^2 x^2}{2} - \alpha x^3 + \beta x \dot{x}^2 :$$

6.3. Ստանալ Լագրանժի ֆունկցիան՝ օգտագործելով տրված Համիլտոնի ֆունկցիաները.

ա) $H = \frac{p_r^2}{2\theta^2} + \frac{p_\theta^2}{2r^2 \sin^2 \theta} + r,$

բ) $H = \ln p_x + p_x + \frac{p_y^2}{2},$

գ) $H = \frac{p_x^2 t}{2} + p_x p_y:$

6.4. Որոշել մասնիկի Համիլտոնի ֆունկցիան հավասարաչափ պտտվող հաշվարկման համակարգում:

6.5. Արտածել իմպուլսի և իմպուլսի մոմենտի պահպանման օրենքները, ընդունելով, որ անվերջ փոքր տեղափոխության և պտույտի արդյունքում համակարգի H Համիլտոնի ֆունկցիան մնում է անփոփոխ:

6.6. Հիմնավորել, որ համակարգի կոորդինատներից և իմպուլսներից կախված կամայական $f(p(t), q(t))$ ֆունկցիայի արժեքն արտահայտվում է $t = 0$ պահին p -ի և q -ի արժեքների միջոցով հետևյալ բանաձևով՝

$$f(p(t), q(t)) = f + \frac{t}{1!} \{H, f\} + \frac{t^2}{2!} \{H, \{H, f\}\} + \dots,$$

որտեղ $f = f(p(0), q(0))$, իսկ $H = H(p(0), q(0))$ մեծությունը Համիլտոնի ֆունկցիան է: Ենթադրվում է, որ վերը նշված բանաձևում շարքը զուգամիտում է: Այդ բանաձևի միջոցով հաշվել $p(t)$, $q(t)$, $p^2(t)$ և $q^2(t)$ մեծությունները հետևյալ համակարգերի համար.

- ա) համասեռ դաշտում շարժվող մասնիկ,
- բ) հարմոնիկ օսցիլյատոր (ներդաշնակ տատանակ):

6.7. Հաշվել Պուասոնի փակագծերը.

- ա) $\{M_i, x_j\}, \{M_i, p_j\}, \{M_i, M_j\},$
- բ) $\{\vec{a} \cdot \vec{p}, \vec{b} \cdot \vec{r}\}, \{\vec{a} \cdot \vec{M}, \vec{b} \cdot \vec{r}\}, \{\vec{a} \cdot \vec{M}, \vec{b} \cdot \vec{M}\},$
- գ) $\{\vec{M}, \vec{r} \cdot \vec{p}\}, \{\vec{p}, r^n\}, \{\vec{p}, (\vec{a} \cdot \vec{r})^2\},$

որտեղ $\vec{a}$ -ն և $\vec{b}$ -ն հաստատուն վեկտորներ են, իսկ x_i -ն, p_i -ն և M_i -ն՝ շառավիղ վեկտորի, իմպուլսի և իմպուլսի մոմենտի դեկարտյան բաղադրիչները:

6.8. Հաշվել Պուասոնի փակագծերը.

- ա) $\{M_i, \Lambda_{jk}\},$
- բ) $\{\Lambda_{jk}, \Lambda_{il}\},$

որտեղ $\Lambda_{ik} = x_i x_k + p_i p_k$:

6.9. Հիմնավորել, որ $\{\varphi, M_z\} = 0$, որտեղ φ -ն մասնիկի կոորդինատներից և իմպուլսից կախված կամայական սկալյար ֆունկցիա է, իսկ M_z -ը մասնիկի իմպուլսի մոմենտի z բաղադրիչն է:

6.10. Ինտեգրել Համիլտոն-Յակոբիի հավասարումը հետևյալ համակարգերի համար.

- ա) m զանգվածով ազատ նյութական կետ,
- բ) $L = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{x^2}{2}$ Լագրանժի ֆունկցիայով նկարագրվող գծային հարմոնիկ օսցիլյատոր,
- գ) միավոր զանգվածով նյութական կետ, որը գտնվում է միավոր լարվածությամբ համասեռ դաշտում,
- դ) $U(r) = \frac{1}{r}$ դաշտում հարթ շարժում կատարող $m = 1$ զանգվածով նյութական կետ,

- ե) $U(r) = \frac{1}{r}$ առանցքահամաչափ դաշտում շարժվող $m = 1$ զանգվածով նյութական կետ,
 գ) $U(r) = \frac{1}{r}$ կենտրոնահամաչափ դաշտում շարժվող $m = 1$ զանգվածով նյութական կետ:

6.11. Օգտագործելով Համիլտոն-Յակոբիի մեթոդը՝ որոշել

$$U(r) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

պոտենցիալ էներգիայով դաշտի աղբյուր R շառավղով գնդի վրա մասնիկների անկման կտրվածքը:

6.12. Օգտագործելով Համիլտոն-Յակոբիի մեթոդը՝ որոշել մասնիկի ֆինիտ շարժման հետագիծը (ներկայացնել ինտեգրալային տեսքով)

$$U(\vec{r}) = \frac{a \cos \theta}{r^2} - \frac{\alpha}{r},$$

պոտենցիալ էներգիայով դաշտի համար, երբ $M_z = 0$: Պարզել, թե ինչ պայմանի դեպքում այդ հետագիծը կլինի փակ:

Բաժին II

**ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ ԵՎ
ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ**

ԳԼՈՒԽ 1

ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՍԿԱՅՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ՍԿԶԲՈՒՆՔՆԵՐ

1.1. Համակարգի ազատության աստիճանների քանակն այն անկախ կոորդինատների թիվն է, որոնցով միարժեք որոշվում է համակարգի դիրքը տարածության մեջ:

ա) Կորի երկայնքով շարժվող կետի դիրքը կարելի է նկարագրել մեկ կոորդինատով, օրինակ՝ կորի վրա նշված որևէ կետից ունեցած հեռավորությամբ: Ուստի կորի երկայնքով շարժվող կետն ունի 1 ազատության աստիճան:

բ) Նմանապես՝ 2:

գ) Նմանապես՝ 3:

դ) Կետերից յուրաքանչյուրն ունի 3-ական, իսկ ընդհանուր համակարգը՝ 6 ազատության աստիճան:

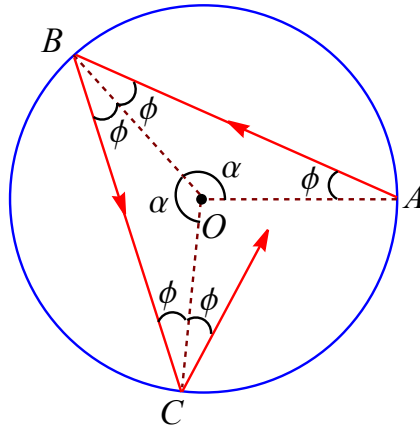
ե) Երկու կետերից կազմված համակարգն ունի 6 ազատության աստիճան, իսկ մեկ լրացուցիչ կապի առկայությամբ պայմանավորված այդ թիվը 1-ով նվազում է: Ուստի ընդհանուր համակարգն ունի 5 ազատության աստիճան:

զ) Կորի երկայնքով շարժվող կետն ունի 1, իսկ մակերևույթի վրայով շարժվողը՝ 2 ազատության աստիճան: Մեկ լրացուցիչ կապի առկայությամբ պայմանավորված դրանց գումարը 1-ով նվազում է: Ուստի ընդհանուր համակարգն ունի 2 ազատության աստիճան:

է) Նմանապես՝ 6:

1.2. Քանի որ պատերի հետ բախումներն առաձգական են, հետևաբար անկման և անդրադարձման անկյուններն իրար հավասար են. դրանք

նշանակենք ϕ -ով (տե՛ս նկ.31): Ուստի սեղանի եզրի հետ գնդիկի



Նկ. 31

բոլոր հաջորդական բախումների դիրքերը սեղանի կենտրոնին միացնող շառավիղների կազմած անկյունները (AOB , BOC և այլն) միևնույնն են և հավասար են α -ի: Այստեղից երևում է, որ կարող են գոյություն ունենալ միայն երկու տիպի հետագծեր:

Եթե $\alpha = \frac{2\pi p}{q}$, որտեղ p, q -ն ոչ զրոյական ամբողջ թվեր են, ապա q անդրադարձումներից հետո բախման կետը կհամընկնի A -ի հետ, քանի որ կենտրոնի շուրջ գնդիկը պտտված կլինի $q\alpha = 2\pi p$ անկյունով: Այսինքն՝ հետագիծը փակ է և վերջավոր, իսկ շարժումը՝ պարբերական:

Եթե α -ի հարաբերությունը 2π -ի իռացիոնալ թիվ է, ապա կամայական q բախումների արդյունքում կենտրոնի շուրջ գնդիկի պտտման անկյունը պատիկ չի լինի 2π -ի: Այսինքն՝ գնդիկի հետագիծը հետագա բախումների ընթացքում երբեք չի անցնի սկզբնական A կետով:

1.3. Լագրանժի հավասարումները հետևյալն են՝

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

որտեղ $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \equiv p_i$ -ն i -րդ կոորդինատին համապատասխանող ընդհանրացված իմպուլսն է, իսկ $\frac{\partial L}{\partial q_i} \equiv Q_i$ -ն i -րդ կոորդինատին համապատասխանող ընդհանրացված ուժն է: Լագրանժի ֆունկցիայի տեսքից կախված ստացվում են p_i -երը և Q_i -երը, այնուհետև Լագրանժի հավասարումներից որոշվում են $\ddot{q}_i$ -երը:

ա) Պատ.՝ $\ddot{q} = -q$:

բ) Պատ.՝ $\ddot{q} = -\frac{q\dot{q}^2 + q}{1 + q^2}$:

գ) Պատ.՝ $\ddot{q} = -\frac{\dot{q}}{t}$:

դ) Պատ.՝ $\ddot{q} = (1 - \dot{q}^2)^{3/2}$:

ե) Պատ.՝ $\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{1}{r^2}$, $\ddot{\theta} = -\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta}$:

զ) Պատ.՝ $\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 \sin 2\theta + \sin \theta$, $\ddot{\varphi} = -2\dot{\varphi}\dot{\theta} \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$:

է) Պատ.՝ $\ddot{x} = 2\dot{y}$, $\ddot{y} = -2\dot{x}$:

ը) Պատ.՝ $\ddot{v} = -\frac{1}{uv} \sqrt{\frac{v}{u}}$, $\ddot{u} = -\frac{1}{uv} \sqrt{\frac{u}{v}}$:

1.4. Լագրանժի ֆունկցիան որոշված է ըստ ժամանակի $\frac{d}{dt} f(q, t)$ ածանցյալի ճշտությամբ (փոքրագույն գործողության սկզբունքն ինվարիանտ է Լագրանժի ֆունկցիային ըստ ժամանակի $\frac{d}{dt} f(q, t)$ ածանցյալ գումարելու նկատմամբ): Հետևաբար Լագրանժի ֆունկցիայում կարելի է անտեսել բոլոր այն անդամները, որոնք կարելի է ներկայացնել որպես լրիվ ածանցյալ ըստ ժամանակի:

ա) Նկատենք, որ

$$\frac{d}{dt}(x \sin t) = \dot{x} \sin t + x \cos t :$$

Տեղափոխելով $x \cos t$ անդամը հավասարության ձախ կողմ և անտեսելով ըստ ժամանակի լրիվ ածանցյալը՝ կստանանք

$$L = -x \cos t :$$

բ) Հաշվի առնելով, որ

$$\dot{q}t = \frac{d}{dt}(qt) - q, \quad t^2 = \frac{1}{3} \frac{d}{dt}(t^3)$$

կստանանք՝

$$L = \frac{\dot{q}^2}{2} - q :$$

գ) Փակագծերը բացելով և հաշվի առնելով, որ $\frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2}\right) = \dot{q}q$ կստանանք

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 + q^2) :$$

դ) Քանի որ $\frac{d}{dt}(xy) = \dot{x}y + x\dot{y}$, ապա

$$L = 2x\dot{y}$$

կամ

$$L = -2y\dot{x} :$$

ե) Հաշվի առնելով, որ $t\dot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{tx^2}{2}\right) - \frac{1}{2}x^2$ և անտեսելով լրիվ ածանցյալն ըստ ժամանակի, կստանանք

$$L = -\frac{1}{2}x^2 :$$

1.5. Նյութական կետի Լագրանժի ֆունկցիան կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$L = T - U = \frac{m}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 - U(q) = \frac{m}{2} \frac{ds^2}{dt^2} - U(q),$$

որտեղ T -ն կինետիկ էներգիան է, $U(q)$ -ն՝ պոտենցիալ էներգիան է, որը միայն կոորդինատներից կախված ֆունկցիա է, իսկ ds^2 -ն՝ գծային տարրի քառակուսին է այն կոորդինատային համակարգում, որտեղ դիտարկվում է նյութական կետի շարժումը:

ա) (x, y, z) դեկարտյան կոորդինատային համակարգում գծային տարրը տրվում է $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ արտահայտությամբ, հետևաբար

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z): \quad (1.1)$$

բ) Քանի որ $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2$, հետևաբար

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - U(\rho, \phi, z): \quad (1.2)$$

գ) Քանի որ $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$, հետևաբար

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - U(r, \theta, \varphi): \quad (1.3)$$

դ) Քանի որ $ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{v}{u} \right) du^2 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{u}{v} \right) dv^2$, հետևաբար

$$L = \frac{m}{8} \left[\left(1 + \frac{v}{u} \right) \dot{u}^2 + \left(1 + \frac{u}{v} \right) \dot{v}^2 \right] - U(u, v): \quad (1.4)$$

1.6. ա) Տվյալ խնդրում որպես կոորդինատներ հարմար է օգտագործել l_1 և l_2 երկարություններով լարերի՝ ուղղաձիգի հետ կազմած անկյունները, որոնք կնշանակենք, համապատասխանաբար, φ_1 և φ_2 : Պոտենցիալ էներգիան հաշվարկելիս զրոյական մակարդակ կհամարենք

համակարգի կախման կետով անցնող հորիզոնական հարթությունը: Ուստի m_1 զանգվածով մասնիկի կինետիկ և պոտենցիալ էներգիաները կտրվեն հետևյալ արտահայտություններով՝

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2,$$

$$U_1 = -m_1 g l_1 \cos \varphi_1 :$$

Երկրորդ մասնիկի կինետիկ էներգիան որոշելու նպատակով այդ մասնիկի x_2 , y_2 դեկարտյան կոորդինատները կարտահայտենք φ_1 և φ_2 անկյուններով՝ կոորդինատների սկզբնակետ համարելով համակարգի կախման կետը և y -ների առանցքն ուղղելով ուղղաձիգ դեպի վար: Արդյունքում կստանանք՝

$$x_2 = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2,$$

$$y_2 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2,$$

այնուհետև՝

$$T_2 = \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_2}{2} [l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] :$$

Հետևաբար համակարգի Լագրանժի ֆունկցիան կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \varphi_1 + m_2 g l_2 \cos \varphi_2 :$$

բ) Տվյալ խնդրում որպես կոորդինատներ հարմար է օգտագործել m_1 մասնիկի x կոորդինատը և լարի՝ ուղղաձիգի հետ կազմած φ անկյունը: Արդյունքում կստանանք՝

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} (l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi) + m_2 g l \cos \varphi :$$

զ) y -ների առանցքը կողողենք ուղղաձիգ դեպի վար: Այդ դեպքում m մասնիկի կոորդինատներն են՝

$$\begin{aligned}x &= a \cos(\gamma t) + l \sin \varphi, \\y &= -a \sin(\gamma t) + l \cos \varphi,\end{aligned}$$

և Լագրանժի ֆունկցիան կրնդունի հետևյալ տեսքը՝

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mal\gamma^2 \sin(\varphi - \gamma t) + mgl \cos \varphi,$$

որտեղ անտեսված են հաստատուն անդամը, միայն ժամանակից կախված անդամը, ինչպես նաև արտաքսվել է $mal\gamma \cos(\varphi - \gamma t)$ ֆունկցիայի՝ ըստ ժամանակի լրիվ ածանցյալը:

դ) Տվյալ դեպքում m մասնիկի կոորդինատներն են՝

$$x = a \cos(\gamma t) + l \sin \varphi, \quad y = l \cos \varphi,$$

և, ըստ ժամանակի լրիվ ածանցյալներն արտաքսելուց հետո, Լագրանժի ֆունկցիան ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mal\gamma^2 \cos(\gamma t) \sin \varphi + mgl \cos \varphi :$$

ե) Լագրանժի ֆունկցիան կարելի է ստանալ նախորդ դեպքի նման.

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mal\gamma^2 \cos(\gamma t) \cos \varphi + mgl \cos \varphi :$$

զ) a երկարությամբ հատվածի ուղղաձիգ առանցքի հետ կազմած անկյունը նշանակենք θ , իսկ այդ առանցքի շուրջ ամբողջ համակարգի պտույտի անկյունը՝ φ : Ուստի՝ $\dot{\varphi} = \Omega$, իսկ m_1 զանգվածով մասնիկներից յուրաքանչյուրի տեղափոխության տարրն է՝ $dl_1^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$: Կախման A կետից m_2 մասնիկի հեռավորությունը հավասար է $2a \cos \theta$, հետևաբար՝ $dl_2 = -2a \sin \theta d\theta$: Ուստի Լագրանժի ֆունկցիան կրնդունի

հետևյալ տեսքը՝

$$L = m_1 a^2 \left(\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta \right) + 2m_2 a^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + 2(m_1 + m_2)ga \cos \theta :$$

- 1.7. ա) Շարժումը նկարագրելիս հարմար է կիրառել սֆերիկ կոորդինատներ (բևեռային առանցքն ուղղելով ուղղաձիգով դեպի վեր), և քանի որ գնդի շառավիղը հաստատուն է՝ $\dot{r} = 0$, ապա խնդիր 1.5-ից հետևում է, որ կինետիկ էներգիան տրվում է հետևյալ արտահայտությամբ (տե՛ս (1.3))՝

$$T = \frac{mr^2}{2} \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2 \right) :$$

Ծանրության ուժի դաշտում պոտենցիալ էներգիան հավասար է զանգվածի, ազատ անկման արագացման և որոշակի զրոյական մակարդակի նկատմամբ հաշվարկված բարձրության արտադրյալին: Նկատենք, որ զրոյական մակարդակի ընտրությունը կամայական է, քանի որ երկու տարբեր մակարդակներից հաշվարկված բարձրությունները տարբերվում են միայն որոշակի հաստատունով, հետևաբար Լագրանժի ֆունկցիաները նույնպես կտարբերվեն որոշակի հաստատունով, որը կարելի է անտեսել (տե՛ս խնդիր 1.4): Որպես զրոյական մակարդակ հարմար է ընտրել գնդի հասարակածային հարթությունը: Հետևաբար նյութական կետի բարձրությունը կլինի $r \cos \theta$: Կինետիկ էներգիայից հանելով պոտենցիալ էներգիան՝ կստանանք

$$L = \frac{mr^2}{2} \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2 \right) - mgr \cos \theta :$$

բ) Կրկին հարմար է օգտվել սֆերիկ կոորդինատային համակարգից, որի կենտրոնն այժմ գտնվում է կոնի գագաթում, իսկ ուղղաձիգ առանցքը, որի նկատմամբ հաշվարկվում է θ անկյունը, համընկնում է կոնի առանցքի հետ: Հաշվի առնելով այն, որ $\theta = \alpha$ (այսինքն՝ $\dot{\theta} = 0$), ինչպես նաև այն, որ հեռավորությունը գագաթից տրվում է r -ով,

կատանանք

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \alpha \cdot \dot{\varphi}^2) - \frac{k}{r} :$$

1.8. Տվյալ խնդրում xy կոորդինատային համակարգն ընտրենք այնպես, որ կոորդինատների սկզբնակետը համընկնի շրջանագծի կենտրոնի հետ, իսկ x -առանցքի հետ ձողի և նրա կենտրոնով անցնող շառավղի կազմած անկյունները նշանակենք, համապատասխանաբար, φ -ով և θ -ով (տե՛ս նկ.6): Նյութական կետերի x և y կոորդինատներն են՝

$$\begin{aligned} x &= a \cos \theta \pm \frac{l}{2} \cos \varphi, \\ y &= a \sin \theta \pm \frac{l}{2} \sin \varphi, \end{aligned}$$

հետևաբար նրանց արագությունների համար կատանանք՝

$$v^2 = a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{l^2}{4} \dot{\varphi}^2 \pm al \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos(\theta - \varphi) :$$

Համապատասխան $\frac{mv^2}{2}$ կինետիկ էներգիաները գումարելիս v^2 -ի արտահայտության երրորդ անդամի ներդրումը կրճատվում է: Նմանապես կրճատվում է նաև y -ի արտահայտության երկրորդ անդամի ներդրումը, երբ գումարում ենք մասնիկների mgy պոտենցիալ էներգիաները: Ուստի համակարգի Լագրանժի ֆունկցիայի համար կատանանք՝

$$L = m \left(a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{l^2}{4} \dot{\varphi}^2 \right) - 2mga \sin \theta :$$

1.9. ա) Դիցուք (x', y', z') կոորդինատային համակարգը հաստատուն v արագությամբ հավասարաչափ շարժվում է (x, y, z) կոորդինատային համակարգի նկատմամբ x առանցքին զուգահեռ ուղղությամբ: Նյութական կետի կոորդինատներն այդ երկու համակարգերում կապված են հետևյալ առնչություններով (ենթադրվում է, որ $t = 0$

պահին այդ երկու համակարգերի սկզբնականները համընկնում են՝

$$x = x' + Vt, \quad y = y', \quad z = z',$$

$$\dot{x} = \dot{x}' + V, \quad \dot{y} = \dot{y}', \quad \dot{z} = \dot{z}',$$

և Լագրանժի ֆունկցիան կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U = \frac{m}{2} (\dot{x}'^2 + 2\dot{x}'V + V^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2) - U :$$

Այստեղ կարելի է անտեսել V^2 և $2\dot{x}'V$ անդամները: Ուստի՝

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2) - U :$$

Այսինքն՝ Լագրանժի ֆունկցիան միևնույն տեսքն ունի, ինչ (x, y, z) կոորդինատներում: Սա Գալիլեյի հարաբերականության սկզբունքի հետևանք է:

բ) Դիցուք (x', y', z') կոորդինատային համակարգը հաստատուն w արագացմամբ հավասարաչափ արագացող շարժում է կատարում (x, y, z) կոորդինատային համակարգի նկատմամբ x առանցքին զուգահեռ ուղղությամբ: Նյութական կետի արագության բաղադրիչներն այդ երկու համակարգերում կապված են հետևյալ առնչություններով՝

$$\dot{x} = \dot{x}' + wt, \quad \dot{y} = \dot{y}', \quad \dot{z} = \dot{z}' :$$

Հետևաբար Լագրանժի ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U = \frac{m}{2} (\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2 + 2w\dot{x}'t + w^2t^2) - U :$$

Այստեղ անտեսելով $w^2 t^2$ անդամը, ինչպես նաև հաշվի առնելով այն, որ

$$2w\dot{x}'t = \frac{d}{dt}(2wx't) - 2wx'$$

կստանանք՝

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2) - mwx' - U :$$

Այսինքն՝ արագացման առկայությունը դրսևորվում է Լագրանժի ֆունկցիայում ի հայտ եկող լրացուցիչ համասեռ դաշտի միջոցով:

զ) Այստեղ հարմար է օգտվել գլանային կոորդինատային համակարգից: Դիցուք (ρ, ϕ, z) կոորդինատային համակարգն անշարժ է, իսկ (ρ', ϕ', z') կոորդինատային համակարգը հաստատուն Ω անկյունային արագությամբ հավասարաչափ պտտվում է z առանցքի շուրջ, ընդ որում, z և z' առանցքները համընկնում են: Այդ դեպքում

$$\rho = \rho', \quad z = z', \quad \phi = \phi' + \Omega t,$$

$$\dot{\rho} = \dot{\rho}', \quad \dot{z} = \dot{z}', \quad \dot{\phi} = \dot{\phi}' + \Omega$$

և, հետևաբար

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - U = \frac{m}{2} \left[\dot{\rho}'^2 + \rho'^2 (\dot{\phi}' + \Omega)^2 + \dot{z}'^2 \right] - U :$$

1.10. Էներգիան որոշվում է

$$E = \frac{\partial L}{\partial v} v - L$$

բանաձևով, որտեղ

$$\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} + A,$$

հետևաբար

$$E = \frac{v^2}{\sqrt{1-v^2}} + \sqrt{1-v^2} + \varphi = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} + \varphi :$$

1.11. Պոտենցիալ էներգիան կախված չէ կիսատարածությունների բաժանման հարթությանը զուգահեռ առանցքներով ուղղված կոորդինատներից: Հետևաբար այդ հարթության վրա մասնիկի իմպուլսի պրոյեկցիան պահպանվում է: Անցումից առաջ և հետո մասնիկի ունեցած $\vec{v}_1$ և $\vec{v}_2$ արագությունների՝ բաժանման հարթության նորմալի հետ կազմած անկյունները նշանակելով, համապատասխանաբար, θ_1 և θ_2 , կստանանք՝ $v_1 \sin \theta_1 = v_2 \sin \theta_2$: Մյուս կողմից, v_1, v_2 -ի միջև կապը կարելի է ստանալ էներգիայի պահպանման օրենքից: Արդյունքում կստանանք՝

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \sqrt{1 + \frac{2}{mv_1^2} (U_1 - U_2)} :$$

1.12. Օգտվելով Էյլեր-Լագրանժի հավասարումից՝ կստանանք

$$A = \frac{F}{2m}, B = \frac{a}{\tau} - \frac{F}{2m}\tau, C = 0 :$$

1.13. ա) Պատ.՝ $\ddot{x} = -x$:

բ) Պատ.՝ $\ddot{x} = -\omega^2 x - \alpha \dot{x}$:

1.14. Տվյալ խնդրում գնդիկի կոորդինատները տրվում են

$$x = r \cos(\omega t), y = r \sin(\omega t)$$

արտահայտություններով, հետևաբար համակարգի Լագրանժի ֆունկցիան հետևյալն է՝

$$L = T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2),$$

իսկ շարժման հավասարումը՝

$$\ddot{r} = r\omega^2 :$$

Վերջինս հայտնի առնչությունն է. ձողի երկայնքով գնդիկի հեռացումը պտտման առանցքից պայմանավորված է կենտրոնախույս արագացմամբ: Նկատենք, որ Լագրանժի մեթոդով այս խնդրի լուծման ընթացքում անհրաժեշտություն չառաջացավ հաշվի առնելու ձողի կողմից գնդիկի վրա ազդող հակազդեցության ուժը:

1.15. Դիցուք $P(x, y)$ կետը m զանգվածով մասնիկի դիրքն է ժամանակի կամայական t պահին (տե՛ս նկ.7): Օգտվելով Էներգիայի պահպանման օրենքից՝ կստանանք

$$mgy_0 = mg(y_0 - y) + \frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

որտեղ ժամանակի t պահին s -ը սկզբնակետից հաշվարկված աղեղի երկարությունն է, իսկ $\frac{ds}{dt}$ -ն՝ այդ նույն պահին մասնիկի ակնթարթային արագությունը, հետևաբար

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$$

և O -ից A հասնելու τ ժամանակահատվածը հավասար է

$$\tau = \int_0^\tau dt = \int_{y=0}^{y_0} \frac{ds}{\sqrt{2gy}} :$$

Քանի որ $ds^2 = dx^2 + dy^2$, ապա

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{y=0}^{y_0} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx, \quad (1.5)$$

որտեղ $y' = \frac{dy}{dx}$:

Որպեսզի (1.5) արտահայտությամբ տրվող ժամանակահատվածը լինի նվազագույնը, անհրաժեշտ է, որ տեղի ունենա հետևյալ պայմանը

(տե՛ս Հավելված 2, Էյլերի հավասարումը)

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0, \quad (1.6)$$

որտեղ F մեծությունը սահմանվում է որպես

$$F = (1 + y'^2)^{1/2} y^{-1/2} :$$

Հաշվելով համապատասխան ածանցյալները՝

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = (1 + y'^2)^{-1/2} y' y^{-1/2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{2} (1 + y'^2)^{1/2} y^{-3/2},$$

և տեղադրելով (1.6) հավասարման մեջ, կստանանք լարի տեսքը նկարագրող հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$1 + y'^2 + 2yy'' = 0 : \quad (1.7)$$

Ստացված հավասարումը լուծելու համար նշանակենք $y' = u$ այնպես, որ

$$y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} = u \frac{du}{dy},$$

որի արդյունքում (1.7) հավասարումն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$1 + u^2 + 2yu \frac{du}{dy} = 0 :$$

Փոփոխականներն անջատելով և ինտեգրելով՝ կստանանք

$$\ln(1 + u^2) + \ln y = \text{const}$$

կամ

$$(1 + u^2) y = b,$$

որտեղ b -ն հաստատուն է: Որպեսզի մասնիկը սահի լարի երկայնքով,

անհրաժեշտ է, որ $y' > 0$, հետևաբար

$$u = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{b-y}{y}} :$$

Կրկին անջատելով փոփոխականները՝ կստանանք

$$x = \int \sqrt{\frac{y}{b-y}} dy :$$

Վերջինս $y = b \sin^2 \theta$ նշանակմամբ բերվում է հետևյալ տեսքի՝

$$x = 2b \int \sin^2 \theta d\theta = \frac{b}{2} (2\theta - \sin(2\theta)) + c,$$

որտեղ c -ն ինտեգրման հաստատունն է: Արդյունքում C կորի տեսքը նկարագրող պարամետրական հավասարումը կլինի՝

$$x = \frac{b}{2} (2\theta - \sin(2\theta)) + c, \quad y = \frac{b}{2} (1 - \cos(2\theta)) :$$

Քանի որ կորն անցնում է $O(0, 0)$ կետով, հետևաբար $c = 0$ և

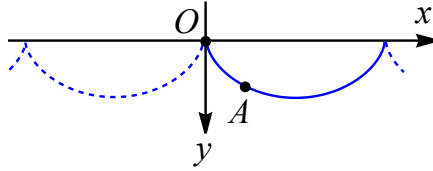
$$x = a(\varphi - \sin \varphi), \quad y = a(1 - \cos \varphi) : \quad (1.8)$$

Այստեղ կատարված են

$$\varphi = 2\theta, \quad a = \frac{b}{2}$$

նշանակումները: Իսկ a հաստատունի արժեքը որոշվում է $A(x_0, y_0)$ կետով կորի անցնելու պայմանից:

Ստացված (1.8) պարամետրական $y(x)$ կախվածությունը նկարագրում է մի կոր, որը կոչվում է *ցիկլոիդ* (տե՛ս նկ.32): Ցիկլոիդը հետագիծն է այն կետի, որը գտնվում է որոշակի ուղղի վրայով գլորվող օղակի վրա:



Նկ. 32

1.16. Պատ.՝ $\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{m'}{m}}:$

1.17. Պատ.՝ $\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{U}{U'}}:$

1.18. Արդյունքը դառնում է ակնհայտ, երբ դիտարկվող ֆունկցիաները վերլուծում ենք Թեյլորի շարքի: Օրինակ՝

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \dots,$$

որը ճիշտ է u -ի բոլոր արժեքների համար: Այստեղից երևում է, որ u -ն անչափ է:

1.19. Տվյալ խնդրում անտեսվում է T -ի կախվածությունը տատանումների լայնույթից: Նաև ենթադրվում է, որ փնտրվող $T = T(m, P, l)$ ֆունկցիան աստիճանային է, ըստ երեք արգումենտների, այսինքն՝

$$T = km^\alpha P^\beta l^\gamma, \quad (1.9)$$

որտեղ k, α, β, γ պարամետրերն անչափ հաստատուններ են: Պահանջվում է, որ (1.9) հավասարության երկու կողմերի չափայնությունները համընկնեն, այսինքն՝

$$[T] = [m]^\alpha [P]^\beta [l]^\gamma: \quad (1.10)$$

Այստեղ $[Q]$ -ով նշանակված է կամայական Q մեծության

չափայնությունը: Չանգվածի (M), երկարության (L) և ժամանակի (T) հիմնարար միավորներով արտահայտված ունենք $[T] = T$, $[m] = M$, $[P] = MLT^{-2}$ (P -ն ուժ է, որը կարելի է դիտարկել որպես զանգվածի և արագացման արտադրյալ) և $[l] = L$: Ուստի (1.10) հավասարությունը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$M^0 L^0 T = M^\alpha (MLT^{-2})^\beta L^\gamma,$$

որտեղից ստացվում են α, β, γ հաստատուններով հետևյալ երեք հավասարումները՝

$$\alpha + \beta = 0, \quad \beta + \gamma = 0, \quad -2\beta = 1 :$$

Հետևաբար $\alpha = -\beta = \gamma = \frac{1}{2}$ և (1.9) առնչությունն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$T = k \sqrt{\frac{ml}{P}} :$$

Եթե հաշվի առնենք, որ $P = mg$, կստանանք՝

$$T = k \sqrt{\frac{l}{g}} : \tag{1.11}$$

ԳԼՈՒԽ 2

ՄԻԱՉԱՓ ՇԱՐԺՈՒՄ

2.1. ա) Օգտվելով սկզբնական պայմաններից՝ էներգիայի արժեքի համար ստանում ենք

$$E = \frac{\dot{x}^2}{2} + \sin x = \frac{1}{2}:$$

Համակարգը կանգ է առնում ($\dot{x} = 0$) $x = \frac{\pi}{6}$ կետում:

բ) Էներգիան տրվում է հետևյալ տեսքով՝

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{x}^2}} - x = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1,$$

և $\dot{x} = 0$ պայմանից ստացվում է, որ

$$x = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}}:$$

գ) Էներգիայի համար կստանանք

$$E = \frac{\dot{x}^2 + x^2 - 1}{x} = 1,$$

իսկ կանգառի կետերը կորոշվեն հետևյալ հավասարումից՝

$$\frac{x^2 - 1}{x} = 1,$$

հետևաբար՝

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}:$$

2.2. Էներգիայի պահպանման $E(x, \dot{x}) = E$ օրենքից հետևում է, որ

$\dot{x} = f(x, E)$: Այստեղից ստացվում է՝

$$t = \int \frac{dx}{f(x, E)} + \text{const} :$$

Աղիտիվ հաստատունի և E էներգիայի արժեքները ստացվում են սկզբնական պայմաններից:

ա) Տվյալ դեպքում $E = \dot{x}^2 + \frac{1}{x^2}$ և, օգտվելով սկզբնական պայմաններից, այսինքն՝ տեղադրելով $x_0, \dot{x}_0$ արժեքները E -ի արտահայտության մեջ՝ ստանում ենք $E = 1$: Ուստի

$$\dot{x} = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}},$$

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} + \text{const} = \sqrt{x^2 - 1} + \text{const} :$$

Սկզբնական պայմաններին բավարարելու համար անհրաժեշտ է տեղադրել $\text{const} = 0$, հետևաբար

$$t = \sqrt{x^2 - 1}, \quad x = \sqrt{t^2 + 1} :$$

բ) Տվյալ դեպքում

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{x}^2}} - x = -1,$$

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{(x-1)^2}}} + c = \sqrt{x^2 - 2x} + c, \quad c = 0,$$

հետևաբար

$$x = 1 + \sqrt{1 + t^2} :$$

գ) Քանի որ Լագրանժի ֆունկցիան բացահայտ կախված չէ x -ից, ապա

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{dp_x}{dt} = 0,$$

այսինքն՝ առաջին շարժման ինտեգրալն է՝

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = p_x = \text{const} :$$

Օգտվելով սկզբնական պայմաններից՝ կստանանք

$$p_x = \frac{\dot{x}}{\sqrt{t + \dot{x}^2}} = \frac{1}{2},$$

հետևաբար

$$\dot{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{t}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \sqrt{t} dt = \frac{2}{3\sqrt{3}} t^{3/2} + \text{const} :$$

Այստեղ կրկին օգտագործելով սկզբնական պայմանները, կստանանք $\text{const} = -2$:

դ) Տվյալ դեպքում էներգիան ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2}} - x :$$

Հաշվի առնելով այն, որ y -ը ցիկլային կոորդինատ է կստանանք՝

$$p_y = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2}} = \text{const} :$$

Տեղադրելով $\dot{y}$ -ը E -ի արտահայտության մեջ՝ կարելի է ցույց տալ, որ

$$\dot{x} = \frac{\sqrt{(E + x)^2 - (1 + p_y^2)}}{E + x},$$

այսինքն՝

$$t = \int \frac{(E+x) dx}{\sqrt{(E+x)^2 - (1+p_y^2)}} = \sqrt{(E+x)^2 - (1+p_y^2)} + t_0,$$

կամ որ նույնն է

$$x = -E \pm \sqrt{(t-t_0)^2 + (1+p_y^2)} :$$

y -ը որոշելու նպատակով $\dot{x}$ -ը տեղադրենք p_y -ի արտահայտության մեջ:
Այստեղից՝

$$\dot{y} = \frac{p_y}{E+x},$$

հետևաբար

$$\begin{aligned} y &= p_y \int \frac{dt}{E+x} = p_y \int \frac{dx}{\sqrt{(E+x)^2 - (1+p_y^2)}} \\ &= p_y \operatorname{arccosh} \left(\frac{E+x}{\sqrt{1+p_y^2}} \right) : \end{aligned}$$

Հաշվի առնելով սկզբնական պայմանները՝ կստանանք

$$\begin{aligned} x(t) &= \pm \sqrt{t^2 + 2} - \sqrt{2}, \\ y(t) &= \operatorname{arccosh} \left(\pm \sqrt{\frac{t^2}{2} + 1} - 1 \right) : \end{aligned}$$

2.3. ա) Շարժումը ֆինիտ է բոլոր $E > 0$ համար, քանի որ այդ էներգիաների դեպքում կան երկու կետեր, որոնցում $\dot{x}$ -ը դառնում է զրո: Այդ երկու կետերը որոշվում են $x^2 = E$ հավասարումից, այսինքն՝ $x = \pm\sqrt{E}$: Ուստի պարբերության համար ստացվում է՝

$$T = 2 \int_{-\sqrt{E}}^{+\sqrt{E}} \frac{dx}{\sqrt{E-x^2}} = 2\pi :$$

բ) Շարժման տիրույթի եզրերը որոշվում են $x + \frac{1}{x} = E$ պայմանից, այսինքն՝

$$x_1 = \frac{E - \sqrt{E^2 - 4}}{2}, x_2 = \frac{E + \sqrt{E^2 - 4}}{2} :$$

Ուստի շարժումը կլինի ֆինիտ, եթե $E > 2$: Համապատասխան պարբերության համար կստանանք՝

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{Ex - x^2 - 1}} = 2 \arccos \frac{2x - E}{\sqrt{E^2 - 4}} \Big|_{x_2}^{x_1} = 2\pi :$$

գ) Շարժման տիրույթի եզրերը որոշվում են $\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = E$ պայմանից, այսինքն՝

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + E}}{E}, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + E}}{E} :$$

Շարժումը կլինի ֆինիտ, երբ $-1 < E < 0$ և ինֆինիտ՝ $E \geq 0$ դեպքում: Առաջին դեպքում լրիվ էներգիան կնշանակենք $-E_1$ ($0 < E_1 < 1$): Հետևաբար

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - E_1}}{E_1}, x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - E_1}}{E_1} :$$

Համապատասխան պարբերության համար կստանանք՝

$$\begin{aligned} T &= 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{x dx}{\sqrt{-E_1 x^2 + 2x - 1}} \\ &= -\frac{2}{E_1} \left[\sqrt{-E_1 x^2 + 2x - 1} + \frac{1}{\sqrt{E_1}} \arccos \frac{E_1 x - 1}{\sqrt{1 - E_1}} \right]_{x_1}^{x_2}, \end{aligned}$$

և քանի որ քառակուսի փակագծերի ներսում գրված առաջին անդամի ներդրումը զրոյական է, ապա

$$T = \frac{2\pi}{E_1^{3/2}} :$$

դ) Շարժման սահմանները որոշվում են $E = (e^x - 1)^2$ հավասարմամբ, որտեղից ստացվում են կանգառի կետերի կոորդինատները՝

$$x_1 = \ln(1 - \sqrt{E}), \quad x_2 = \ln(1 + \sqrt{E}) :$$

Ընդ որում, շարժումը ֆինիտ է, երբ $0 < E < 1$: Համապատասխան պարբերության համար ստացվում է՝

$$\begin{aligned} T &= 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - (e^x - 1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 - E}} \operatorname{arccos} \frac{e^{-x}(1 - E) - 1}{\sqrt{E}} \Big|_{x_1}^{x_2} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{1 - E}} : \end{aligned}$$

2.4. Ճոճանակի էներգիան տրվում է հետևյալ արտահայտությամբ՝

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi = -mgl \cos \varphi_0,$$

որտեղ φ -ն թելի՝ ուղղաձիգի նկատմամբ շեղման, իսկ φ_0 -ն առավելագույն շեղման անկյունն է: Տատանման պարբերությունը որոշելու համար անհրաժեշտ է շեղման անկյունների $[0, \varphi_0]$ տիրույթով անցնելու ժամանակահատվածը բազմապատկել 4-ով: Արդյունքում կստանանք՝

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} :$$

Այստեղ կատարելով $\frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} = \sin \xi$ նշանակումը՝ ինտեգրալը կներկայացվի հետևյալ տեսքով՝

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} K\left(\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}\right),$$

որտեղ $K(k)$ ֆունկցիան հայտնի է որպես առաջին սեռի լրիվ էլիպտական ինտեգրալ և սահմանվում է հետևյալ կերպ (տե՛ս [9], Գլուխ 17)՝

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k \sin^2 \xi}} :$$

Փոքր տատանումների դեպքում, երբ $\sin \frac{\varphi_0}{2} \approx \frac{\varphi_0}{2} \ll 1$, վերլուծելով $K(k)$ ֆունկցիան, կստանանք՝

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \varphi_0^2 + \dots \right) :$$

Այս վերլուծության առաջին անդամը հանգեցնում է ճոճանակի փոքր տատանումների պարբերության հայտնի բանաձևին:

2.5. ա) Տվյալ դեպքում տատանման պարբերությունը տրվում է հետևյալ արտահայտությամբ՝

$$T(E) = 2\sqrt{2m} \int_0^{(E/A)^{1/n}} \frac{dx}{\sqrt{E - Ax^n}} = \frac{2\sqrt{2m}E^{1/n-1/2}}{A^{1/n}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^n}} : \quad (2.1)$$

Նկատենք, որ $y^n = u$ նշանակմամբ այս ինտեգրալը բերվում է *բետա ֆունկցիայի*, որը սահմանվում է հետևյալ կերպ (տե՛ս [9], Գլուխ 6)՝

$$B(x, y) = \int_0^1 du u^{x-1} (1 - u)^{y-1}, \quad (2.2)$$

կամայական $\operatorname{Re} x > 0$, $\operatorname{Re} y > 0$ համար: Այս ֆունկցիան հայտնի է նաև որպես *Էյլերի առաջին սեռի ինտեգրալ*: Հայտնի է, որ վերջինս արտահայտվում է $\Gamma(x)$ *գամմա ֆունկցիայի* միջոցով.

$$B(x, y) = B(y, x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad (2.3)$$

որտեղ $\Gamma(x)$ ֆունկցիան է (տե՛ս [9], Գլուխ 6)

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} dt t^{x-1} e^{-t} \quad (2.4)$$

ինտեգրալը, կամայական $\operatorname{Re} x > 0$ համար:

Ուստի (2.1) արտահայտությունն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$T(E) = \frac{2\sqrt{2\pi m}\Gamma(1/n)}{nA^{1/n}\Gamma(1/n + 1/2)} E^{1/n-1/2} :$$

Ստացված $T(E)$ կախվածությունը համապատասխանում է մեխանիկական նմանության օրենքին, որն արտահայտվում է իրար նման հետազոծերի l, l' չափերը, t, t' ժամանակները և E, E' էներգիաներն իրար կապող հետևյալ առնչություններով՝

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-k/2}, \quad \frac{E'}{E} = \left(\frac{l'}{l}\right)^k,$$

որտեղ k -ն պոտենցիալ էներգիայի համասեռության աստիճանն է:

բ) Պատ.՝ $T(E) = \frac{\pi\sqrt{2m}}{\alpha\sqrt{|E|}}:$

գ) Պատ.՝ $T(E) = \frac{\pi\sqrt{2m}}{\alpha\sqrt{E+U_0}}:$

2.6. Տվյալ խնդրում միակ անկախ կոորդինատը m_1 զանգվածով մարմնի դիրքը նկարագրող x կոորդինատն է: Երկրորդ մարմնի դիրքը որոշվում է պարանի l երկարության հաստատուն լինելու պայմանից: Համակարգի պոտենցիալ էներգիան հետևյալն է՝

$$U(x) = -m_1gx - m_2g(l-x),$$

իսկ կինետիկը՝

$$T(\dot{x}) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 :$$

Ուստի Լագրանժի ֆունկցիայի համար կստանանք՝

$$L = T - U = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + m_1 g x + m_2 g (l - x) :$$

Քանի որ

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= (m_1 - m_2) g, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= (m_1 + m_2) \dot{x}, \end{aligned}$$

ապա շարժման հավասարումն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$(m_1 + m_2) \ddot{x} = (m_1 - m_2) g,$$

որտեղից էլ՝

$$\ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g :$$

Վերջինս հայտնի արդյունք է, որը կարելի է ստանալ նաև տարրական եղանակով: Այս խնդիրը ցույց է տալիս, որ կապի ուժերը՝ տվյալ դեպքում պարանի լարվածությունը, ի հայտ չեն գալիս Լագրանժի ձևակերպման մեջ: Նմանապես, պարանի լարվածությունը հնարավոր չէ որոշել զուտ Լագրանժի մեթոդով:

2.7. Դիցուք x_3 -ը և x_4 -ը, համապատասխանաբար, m_3 և m_4 զանգվածներով մարմինների հեռավորություններն են անշարժ ճախարակի կենտրոնով անցնող հորիզոնական հարթությունից, իսկ x_1 -ը և x_2 -ը, համապատասխանաբար, m_1 և m_2 մարմինների հեռավորություններն են m_3 շարժական ճախարակի կենտրոնով անցնող հորիզոնական հարթությունից (տե՛ս նկ.8, աջ մաս):

Լարերի երկարություններն անփոփոխ են, հետևաբար

$$x_1 + x_2 = \text{const} \equiv a, \quad x_3 + x_4 = \text{const} \equiv b,$$

$$\Rightarrow \dot{x}_2 = -\dot{x}_1, \dot{x}_4 = -\dot{x}_3 :$$

Ուստի համակարգի կինետիկ էներգիան կտրվի հետևյալ արտահայտությամբ՝

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1 + \dot{x}_3)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_3)^2 + \frac{1}{2}(m_3 + m_4)\dot{x}_3^2,$$

իսկ անշարժ ճախարակի կենտրոնի նկատմամբ համակարգի պոտենցիալ էներգիան՝

$$U = -m_1g(x_1 + x_3) - m_2g(a - x_1 + x_3) - m_3gx_3 - m_4g(b - x_3) :$$

Համակարգի Լարգրանժի ֆունկցիայի համար կստանանք՝

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1 + \dot{x}_3)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_3)^2 + \frac{1}{2}(m_3 + m_4)\dot{x}_3^2 \\ & + m_1g(x_1 + x_3) + m_2g(a - x_1 + x_3) + m_3gx_3 + m_4g(b - x_3) : \end{aligned} \quad (2.5)$$

Գրելով համակարգի Էյլեր-Լագրանժի հավասարումները x_1 և x_3 կոորդինատների համար՝

$$\begin{aligned} (m_1 - m_2)\ddot{x}_1 + (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)\ddot{x}_3 &= (m_1 + m_2 + m_3 - m_4)g, \\ (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + (m_1 - m_2)\ddot{x}_3 &= (m_1 - m_2)g, \end{aligned}$$

կստանանք՝

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{2m_4(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4) + 4m_1m_2}g, \\ \ddot{x}_3 &= \frac{(m_1 + m_2)(m_3 - m_4) + 4m_1m_2}{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4) + 4m_1m_2}g : \end{aligned}$$

Հաշվի առնելով $\ddot{x}_4 = -\ddot{x}_3$ կապը, m_4 մարմնի արագացման (պրոյեկցիան

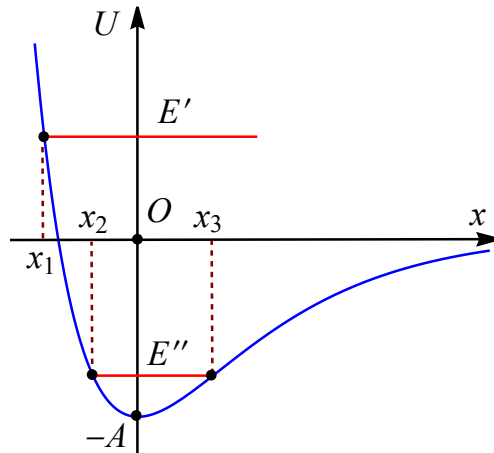
ուղղաձիգ դեպի վար ուղղված առանցքի վրա) համար կստանանք՝

$$\ddot{x}_4 = \frac{(m_1 + m_2)(m_4 - m_3) - 4m_1m_2}{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4) + 4m_1m_2} g :$$

2.8. $x(0)$ և $\dot{x}(0)$ սկզբնական արժեքներից կարելի է որոշել մասնիկի E էներգիան: Նրա հետագա շարժումը կարելի է որոշել էներգիայի պահպանման օրենքից՝

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E : \quad (2.6)$$

Եթե $E \geq 0$ (տե՛ս նկ.33, $E = E'$), ապա մասնիկը կարող է շարժվել $x \geq x_1$ տիրույթում, այսինքն՝ շարժումն ինֆինիտ է: Եթե $E < 0$ (տե՛ս նկ.33, $E = E''$), ապա մասնիկը կարող է շարժվել $x_2 \leq x \leq x_3$ տիրույթում, այսինքն՝ շարժումը ֆինիտ է: Կանգառի կետերը որոշվում



Նկ. 33

են (2.6) հավասարումից՝ $U(x_i) = E$ և տրվում են հետևյալ տեսքով՝

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\sqrt{A(A+E)} - A}{E}, & E > 0, \\ x_1 = -\frac{\ln 2}{\alpha}, & E = 0, \\ x_{2,3} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{A \mp \sqrt{A(A-|E|)}}{|E|}, & E < 0 : \end{cases} \quad (2.7)$$

(2.6) հավասարումից կստանանք՝

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x(0)}^x \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}},$$

որտեղից է՝

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\sqrt{A(A+E)} \cosh(\alpha t \sqrt{2E/m} + C) - A}{E}, & E > 0, \\ \frac{1}{\alpha} \ln \left[\frac{1}{2} + \frac{A\alpha^2}{m} (t+C)^2 \right], & E = 0, \\ \frac{1}{\alpha} \ln \frac{A - \sqrt{A(A-|E|)} \cos(\alpha t \sqrt{2|E|/m} + C)}{|E|}, & E < 0 : \end{cases} \quad (2.8)$$

Համապատասխան C հաստատունի արժեքները որոշվում են $x(0)$ սկզբնական արժեքից: Օրինակ, եթե $\dot{x}(0) > 0$, ապա $E < 0$ դեպքում ստացվում է

$$C = \arccos \frac{A - |E| e^{\alpha x(0)}}{\sqrt{A(A-|E|)}} :$$

(2.7) կանգառի կետերը նույնպես հեշտությամբ կարելի է ստանալ (2.8)-ից:

(2.8)-ի համաձայն՝ $E < 0$ դեպքում շարժումը պարբերական է $T = \frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{2m}{|E|}}$ պարբերությամբ: Եթե E -ն մոտ է $U(x)$ -ի մինիմալ

արժեքին, որը հավասար է $U_{\min} = U(0) = -A$, այսինքն, եթե $\varepsilon = \frac{A - |E|}{A} \ll 1$, ապա պարբերության կախվածությունը E -ից թույլ է՝ $T \approx T_0 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$, $T_0 = \frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{2m}{A}}$: Այդ դեպքում (2.8)-ի վերջին տողում գրված արտահայտությունը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{\alpha} \ln(1 - \varepsilon) + \frac{1}{\alpha} \ln \left[1 - \sqrt{\varepsilon} \cos \left(\frac{2\pi}{T} t + C \right) \right] \\ &\approx -\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\alpha} \cos \left(\frac{2\pi}{T_0} t + C \right) : \end{aligned}$$

Ընդ որում, $x = 0$ կետի մոտակայքում մասնիկը կատարում է հարմոնիկ (ներդաշնակ) տատանումներ, որոնց լայնույթը՝ $\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\alpha}$, որոշվում է $E - U_{\min}$ տարբերությամբ, իսկ հաճախությունը կախված է α էներգիայից: $U_{\min}$ -ին մոտ E -ով շարժումների բնույթն այսպիսին է գրեթե բոլոր $U(x)$ դաշտերում:

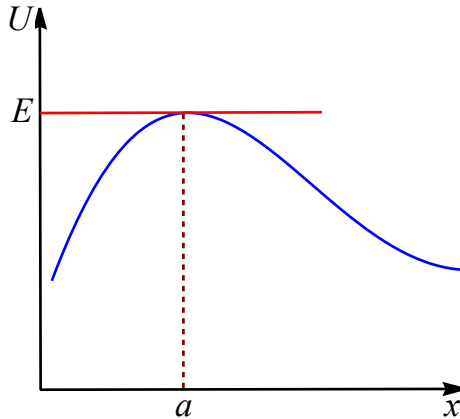
Եթե $E \geq 0$, ապա աջից մոտեցող մասնիկը հասնում է x_1 կանգառի կետին, փոխում է իր շարժման ուղղությունը և հեռանում դեպի անվերջություն: Ընդ որում, ժամանակի ընթացքում նրա արագությունը վերևից ձգտում է $\sqrt{\frac{2E}{m}}$ -ի:

2.9. Կանգառի կետի մոտակայքում $U(x) = E - (x - a)F$, որտեղ $F = -U'(a)$, այսինքն՝ կարելի է համարել, որ մասնիկը շարժվում է հաստատուն F ուժի ազդեցությամբ: Ենթադրելով, որ $x(0) = a$, կստանանք

$$x(t) = \frac{Ft^2}{2m} + a,$$

ընդ որում, $x = a$ կետից հեռանալուն զուգընթաց այս բանաձևի ճշտությունը նվազում է:

Կանգառի կետից մեծ հեռավորության վրա գտնվող s երկարությամբ փոքր տեղամասը մասնիկը կանցնի $\tau \sim s$ ժամանակահատվածում: Իսկ եթե հետագծի տվյալ փոքր տեղամասը մոտ է կանգառի կետին, ապա այն անցնելու համար կպահանջվի $\tau = \sqrt{\frac{2ms}{|F|}}$ ժամանակահատված, այսինքն՝ $\tau \sim \sqrt{s}$:



Նկ. 34

Եթե $U'(a) = 0$ (տե՛ս նկ.34), ապա $U(x)$ վերլուծության մեջ անհրաժեշտ է պահել հաջորդ անդամը, այսինքն՝

$$U(x) = E + \frac{1}{2}U''(a)(x - a)^2 :$$

Այս դեպքում $x(t) = a + se^{\pm \lambda t}$, որտեղ $s = x(0) - a$, $\lambda^2 = -\frac{U''(a)}{m}$, իսկ էքսպոնենտի ցուցչի նշանը որոշվում է սկզբնական պահին արագության ուղղությամբ: Ուստի կանգառի կետին հասնելու համար մասնիկից կպահանջվի անվերջ ժամանակ:

2.10. Շարժման օրենքն է՝

$$x(t) = \frac{x_0}{1 \pm tx_0 \sqrt{2A/m}}, \quad x_0 = x(0) :$$

Հայտարարում նշանը պետք է վերցնել $\dot{x}(0)$ -ի նշանին հակառակ: Որոշակիության համար ենթադրենք, որ $x(0) > 0$: Երբ $\dot{x}(0) > 0$, մասնիկը հեռանում է դեպի անվերջություն $\sqrt{\frac{m}{2Ax_0^2}}$ ժամանակահատվածում: Բնականաբար, իրականում խոսքը շատ մեծ, բայց վերջավոր հեռավորության մասին է, որին հասնում է տրված $U(x)$ դաշտը:

Երբ $\dot{x}(0) < 0$ մասնիկն ասիմպտոտորեն մոտենում է $x = 0$ կետին:

2.11. Եթե $U''(a) \neq 0$, ապա $T \sim \ln \varepsilon$, որտեղ $\varepsilon = U_m - E$: Եթե $U''(a) = \dots = U^{(n-1)}(a) = 0$, $U^{(n)}(a) \neq 0$, ապա $T \sim \varepsilon^{-\frac{n-2}{2n}}$:

2.12. ա) Փոքր $\varepsilon = E - U_m$ դեպքում մասնիկն ամենադանդաղը շարժվում է $x = a$ կետի մոտակայքում: Հետևաբար շարժման ամբողջ T պարբերությունը կարելի է գնահատել ըստ այդ կետի փոքր $a - \delta < x < a + \delta$ շրջակայքի անցման (առաջ գնալու և հետ գալու) T_1 ժամանակահատվածի.

$$T_1 = \sqrt{2m} \int_{a-\delta}^{a+\delta} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \approx T :$$

$x = a$ կետի շրջակայքում $U(x)$ -ը ներկայացնենք $U(x) = U_m - \frac{k(x-a)^2}{2}$ տեսքով, որտեղ $k = -U''(a)$: Բավականաչափ փոքր ε համար կարելի է ընտրել այնպիսի δ , որ միջակայքի սահմանների վրա v արագությունը լինի շատ ավելի մեծ իր

նվազագույն արժեքից (երբ $x = a$), այսինքն՝

$$\frac{mv^2}{2} \sim \frac{k\delta^2}{2} \gg \varepsilon,$$

և միաժամանակ բավարարի $\delta \ll L = x_2 - x_1$ պայմանին, այսինքն՝

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{k}} \ll \delta \ll L = x_2 - x_1 :$$

Արդյունքում կստացվի՝

$$T_1 = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \ln \frac{2k\delta^2}{\varepsilon} : \quad (2.9)$$

$x_1 < x < a - \delta$ և $a + \delta < x < x_2$ տիրույթներում մասնիկի շարժման T_2 ժամանակահատվածը բավարարում է հետևյալ պայմանին՝

$$T_2 \lesssim \frac{L}{v} \sim \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{L}{\delta} :$$

ε -ի նվազմանը զուգընթաց T_1 մեծությունն աճում է, բավականաչափ փոքր ε համար $T_2 \ll T_1$, և շարժման պարբերությունը գնահատելու համար կարելի է օգտվել (2.9) բանաձևից: Այդ բանաձևն օժտված է ասիմպտոտական ճշտությամբ: Նրա հարաբերական սխալը ձգտում է զրոյի $\frac{1}{\ln \varepsilon}$ օրենքով, երբ $\varepsilon \rightarrow 0$: Բայց լոգարիթմական ճշտությամբ (2.9)-ում կարելի է δ -ն փոխարինել L -ով, և լոգարիթմի նշանի տակ անտեսել 2 գործակիցը.

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \ln \frac{kL^2}{\varepsilon} :$$

Եթե $U''(a) = 0$, $U^{(4)} = -K \neq 0$, ապա

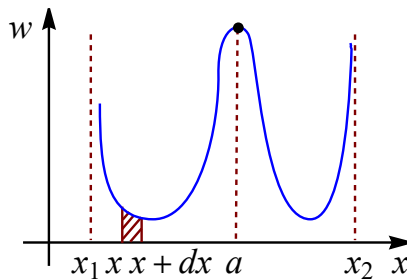
$$T = 4 \left(\frac{6m^2}{\varepsilon K} \right)^{1/4} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \approx 11.6 \left(\frac{m^2}{\varepsilon K} \right)^{1/4},$$

ընդ որում, $\varepsilon \rightarrow 0$ սահմանում հարաբերական սխալը ձգտում է զրոյի $\varepsilon^{1/4}$ օրենքով:

բ) Հավանականությունը, որ T պարբերությունից շատ մեծ ժամանակահատվածում մասնիկը կհայտնվի $[x, x + dx]$ տիրույթում, հավասար է

$$w(x) dx = \frac{2dt}{T} = \frac{\sqrt{2m} dx}{T \sqrt{E - U(x)}},$$

որտեղ $2dt$ -ն մեկ պարբերության ընթացքում մասնիկի՝ dx երկարությամբ տիրույթում գտնվելու ժամանակահատվածն է: w հավանականության խտության x -ից կախվածությունը պատկերված է նկ.35-ում:



Նկ. 35

Դիտարկվող $w(x) dx$ հավանականությանը համապատասխանում է ստվերագծված տիրույթի մակերեսը (կորով սահմանափակված ամբողջ մակերեսը հավասար է մեկի): Բավականաչափ փոքր ε համար կորով սահմանափակված մակերեսի մեջ հիմնական ներդրումը ($\frac{T_1}{T}$) պայմանավորված է կենտրոնական մաքսիմումով: Չնայած $x \rightarrow x_{1,2}$ սահմանում $w(x) \rightarrow \infty$, այնուամենայնիվ կանգառի կետերին մոտ գտնվող տիրույթների ներդրումը համեմատաբար փոքր է:

2.13. $U(x) + \delta U(x)$ դաշտում շարժման օրենքը որոշվում է

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{E - U(x) - \delta U(x)}} \quad (2.10)$$

արտահայտությամբ ($t = 0$ պահին $x = a$): (2.10)-ի ենթաինտեգրալային արտահայտությունը վերլուծելով ըստ $\delta U(x)$ -ի աստիճանների՝ կստանանք

$$t = t_0(x) + \delta t(x), \quad (2.11)$$

որտեղ

$$t_0(x) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \quad (2.12)$$

$$\delta t(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_a^x \frac{\delta U(x) dx}{[E - U(x)]^{3/2}} : \quad (2.13)$$

Դիցուք $\delta U(x)$ մասի բացակայության դեպքում $t = t_0(x)$ հավասարումից ստացվող շարժման օրենքը $x = x_0(t)$ է: Այդ դեպքում (2.11)-ից կստանանք

$$x = x_0(t - \delta t(x)), \quad (2.14)$$

ընդ որում, փոքր $\delta t(x)$ անդամում կարելի է տեղադրել $x = x_0(t)$, ինչպես նաև վերլուծել (2.14)-ն ըստ δt -ի: Արդյունքում կստանանք

$$x = x_0(t) - x_0'(t) \delta t(x_0(t)) : \quad (2.15)$$

$x = x_1$ կանգառի կետի մոտակայքում (2.11) վերլուծությունն այլևս կիրառելի չէ, քանի որ x_1 -ի մոտ $\delta t(x) \rightarrow \infty$:

Սակայն հատկանշական է, որ (2.15) բանաձևը կիրառելի է ընդհուպ մինչև կանգառի կետը, եթե

$$|\delta U'(x)| \ll |F|, \quad F = -U'(x_1) : \quad (2.16)$$

Դա պայմանավորված է նրանով, որ չնայած կանգառի կետին մոտենալիս δt -ն աճում է, $x(t)$ կախվածությունն էքստրեմումի մոտակայքում թույլ է:

Ակնհայտ է, որ x_1 -ի մոտակայքում չխոտորված շարժման օրենքն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$x_0(t) = x_1 + \frac{F}{2m} (t - t_1)^2 : \quad (2.17)$$

δU անդամի ավելացման արդյունքում կանգառի կետը շեղվում է δx_1 չափով՝ ըստ

$$U(x_1 + \delta x_1) + \delta U(x_1 + \delta x_1) = E$$

հավասարման: Այստեղից ստացվում է $\delta x_1 = \frac{\delta U(x_1)}{F}$: Հաշվի առնելով δU խոտորումը և (2.16) պայմանը (2.17)-ի նմանությամբ կստանանք

$$x(t) = x_1 + \delta x_1 + \frac{F}{2m} (t - t_1 - \delta t_1)^2 : \quad (2.18)$$

Համոզվենք, որ (2.15) բանաձևի միջոցով կարելի է ստանալ (2.18)-ը:

(2.13) արտահայտության ինտեգրման տիրույթը տրոհենք երկու մասի՝ $[a, b]$ և $[b, x]$, որտեղ b -ն մոտ է գտնվում x_1 -ին: Երկրորդ տիրույթում կարելի է տեղադրել $\delta U = \delta U(x_1)$ և $U(x) = E - (x - x_1)F$: Արդյունքում կստացվի

$$\begin{aligned} \delta t &= -\frac{\sqrt{m}\delta U(x_1)}{\sqrt{2F^3(x-x_1)}} + \delta t_0, \\ \delta t_0 &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{2}} \int_a^b \frac{\delta U(x) dx}{(E-U)^{3/2}} + \frac{\sqrt{m}\delta U(x_1)}{\sqrt{2F^3(b-x_1)}} : \end{aligned} \quad (2.19)$$

Տեղադրելով (2.19) և (2.17) արտահայտությունները (2.15)-ում և անտեսելով δt_0^2 անդամը՝ կստանանք (2.18)-ը, որտեղ $\delta t_1 = \delta t_0$:

ԳԼՈՒԽ 3

ՇԱՐԺՈՒՄԸ ԿԵՆՏՐՈՆԱՀԱՄԱԶԱՓ ԴԱՇՏՈՒՄ: ՏՐՈՀՈՒՄ, ՑՐՈՒՄ

3.1. Համակարգի իներցիայի կենտրոնի x կոորդինատը տրվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$R_x = \frac{1}{M} \sum_a m_a x_a,$$

հետևաբար

$$R_x^2 = \frac{1}{M^2} \left[\sum_a m_a^2 x_a^2 + \sum_{a \neq b} m_a m_b x_a x_b \right] :$$

Նմանատիպ արտահայտություններ են ստացվում նաև y և z բաղադրիչների քառակուսիների համար: Դրանք իրար գումարելով և բազմապատկելով M^2 -ով՝ կստանանք

$$M^2 R^2 = \sum_a m_a^2 r_a^2 + \sum_{a \neq b} m_a m_b (\vec{r}_a \cdot \vec{r}_b) : \quad (3.1)$$

Նկատենք, որ

$$M \sum_a m_a r_a^2 = \sum_b m_b \left(\sum_a m_a r_a^2 \right) = \sum_a m_a^2 r_a^2 + \sum_{a \neq b} m_a m_b r_a^2 : \quad (3.2)$$

Մյուս կողմից է՝

$$r_{ab}^2 = r_a^2 + r_b^2 - 2 \vec{r}_a \cdot \vec{r}_b,$$

և, մասնավորապես, $r_{aa}^2 = 0$: Ուստի

$$\sum_{a,b} m_a m_b r_{ab}^2 = \sum_{a \neq b} [m_a m_b r_a^2 + m_a m_b r_b^2 - 2m_a m_b (\vec{r}_a \cdot \vec{r}_b)],$$

կամ

$$\frac{1}{2} \sum_{a,b} m_a m_b r_{ab}^2 = \sum_{a \neq b} m_a m_b r_a^2 - \sum_{a \neq b} m_a m_b (\vec{r}_a \cdot \vec{r}_b): \quad (3.3)$$

Համադրելով ստացված (3.1), (3.2) և (3.3) արտահայտությունները, կստանանք պահանջվող նույնությունը:

3.2. Միջուկի շառավիղ վեկտորը նշանակենք $\vec{R}$ -ով, իսկ էլեկտրոններինը՝ $\vec{R}_i$ -ով: Ներմուծենք միջուկի և էլեկտրոնների միջև եղած հեռավորությունները որպես

$$\vec{R}_i - \vec{R} = \vec{r}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

և կոորդինատների սկզբնակետ համարենք իներցիայի կենտրոնը, այսինքն՝

$$M \vec{R} + m \sum_{i=1}^n \vec{R}_i = 0:$$

Վերը նշված հավասարություններից կստացվեն հետևյալ առնչություններ՝

$$\begin{aligned} \vec{R} &= -\frac{m}{M + mn} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i, \\ \vec{R}_k &= \vec{r}_k + \vec{R} = \vec{r}_k - \frac{m}{M + mn} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i: \end{aligned}$$

Տեղադրելով այս առնչությունները Լագրանժի ֆունկցիայում՝

կստանանք

$$L = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^n \dot{\vec{r}}_i^2 - \frac{m^2}{2(M + mn)} \left(\sum_{i=1}^n \dot{\vec{r}}_i \right)^2 - U(\vec{r}_i) : \quad (3.4)$$

3.3. ա) Պատ.՝

$$\begin{aligned} M_x &= m(\rho\dot{z} - z\dot{\rho})\sin\phi - m\rho z\dot{\phi}\cos\phi, \\ M_y &= -m(\rho\dot{z} - z\dot{\rho})\cos\phi - m\rho z\dot{\phi}\sin\phi, \\ M_z &= m\rho^2\dot{\phi}, \\ M^2 &= m^2(\rho\dot{z} - z\dot{\rho})^2 + m^2\rho^2\dot{\phi}^2(\rho^2 + z^2) : \end{aligned}$$

բ) Պատ.՝

$$\begin{aligned} M_x &= -mr^2(\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\cos\varphi), \\ M_y &= mr^2(\dot{\theta}\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi), \\ M_z &= mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta, \\ M^2 &= m^2r^4(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) : \end{aligned}$$

3.4. Դասական մեխանիկայում պահպանման օրենքները ստացվում են ժամանակի համասեռությունից, ինչպես նաև տարածության համասեռությունից ու իզոտրոպությունից: Տարրական զուգահեռ տեղափոխության և պտույտի արդյունքում Լագրանժի ֆունկցիայի փոփոխությունը տրվում է հետևյալ արտահայտությամբ՝

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial t}\delta t + \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}\delta \vec{r} + \frac{\partial L}{\partial \vec{\varphi}}\delta \vec{\varphi} :$$

Հաշվի առնելով, որ $\frac{\partial L}{\partial t} = -\dot{E}$, $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \vec{P}$ և $\frac{\partial L}{\partial \vec{\varphi}} = \vec{M}$, կստանանք

$$\delta L = -\dot{E}\delta t + \vec{P}\delta \vec{r} + \vec{M}\delta \vec{\varphi} :$$

Դաշտի բացակայության դեպքում այդ փոփոխությունը զրոյական է ժամանակի սկզբնական պահի, կոորդինատների սկզբնական փոփոխության կամ կոորդինատային առանցքների պտույտի դեպքում: Ուստի այդ դեպքում համակարգի էներգիան, իմպուլսը և իմպուլսի մոմենտը պահպանվում են:

ա) Անվերջ xy հարթության ստեղծած դաշտում շարժվելիս համակարգի Լագրանժի ֆունկցիան չի փոփոխվում, այսինքն՝ $\delta L = 0$, երբ ժամանակը ձևափոխվում է $t' = t + \delta t$ օրենքով, երբ համակարգը տեղափոխվում է xy հարթությանը զուգահեռ ուղղությամբ, և երբ համակարգը պտտվում է այդ հարթությանն ուղղահայաց z առանցքի շուրջ: Այստեղից ստացվում է, որ $E = \text{const}$, $P_x = \text{const}$, $P_y = \text{const}$, $M_z = \text{const}$:

բ) Գլանի առանցքն ընդունելով որպես z առանցք, կստանանք՝ $E = \text{const}$, $P_z = \text{const}$, $M_z = \text{const}$:

գ) $E = \text{const}$, $P_z = \text{const}$ (պրիզմայի կողերը զուգահեռ են z առանցքին):

դ) $E = \text{const}$, $M_x = \text{const}$ (նյութական կետերը գտնվում են x առանցքի վրա):

ե) $E = \text{const}$, $P_y = \text{const}$ (կիսահարթությունը xy հարթության այն մասն է, որը սահմանափակված է y առանցքով):

զ) $E = \text{const}$, $M_z = \text{const}$ (կոնի առանցքն ուղղված է z առանցքով):

է) $E = \text{const}$, $M_z = \text{const}$ (տորի առանցքն ուղղված է z առանցքով):

ը) Դիցուք պտուտակագծի առանցքն ուղղված է z առանցքով: Անվերջ համասեռ գլանային պտուտակագծի ստեղծած դաշտում $\delta L = 0$, երբ համակարգը պտտվում է z առանցքի շուրջ $\delta\varphi$ անկյունով՝ միաժամանակ z առանցքի երկայնքով տեղափոխվելով $\frac{h}{2\pi}\delta\varphi$ -ով: Այստեղ h -ը պտուտակագծի քայլի երկարությունն է, այսինքն՝ $\delta z = h$, երբ $\delta\varphi = 2\pi$: Ուստի

$$\delta L = \left(\frac{h}{2\pi} \dot{P}_z + \dot{M}_z \right) \delta\varphi = 0,$$

որտեղից

$$\frac{h}{2\pi} P_z + M_z = \text{const} :$$

3.5. Կենտրոնահամաչափ դաշտում շարժվելիս պահպանվում է դաշտի կենտրոնի նկատմամբ մասնիկի իմպուլսի մոմենտը, այսինքն՝ $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}$ մեծությունը: Այս արտահայտության երկու կողմերը բազմապատկելով $\vec{r}$ -ով՝ կստանանք

$$\vec{r} \cdot \vec{M} = \vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{p} \cdot (\vec{r} \times \vec{r}) = 0 :$$

Այստեղից հետևում է, որ $\vec{r}$ -ը միշտ ուղղահայաց է $\vec{M}$ -ին, այսինքն՝ մասնիկի հետագիծն ընկած է իմպուլսի մոմենտին ուղղահայաց հարթության մեջ: Ուստի կենտրոնահամաչափ դաշտում մասնիկի շարժումը բերվում է հարթ շարժման, որը կարելի է նկարագրել բևեռային կոորդինատներով արտահայտված տվյալ Լագրանժի ֆունկցիայի միջոցով.

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r) :$$

Ընդ որում, $p_\varphi = M = mr^2 \dot{\varphi} = \text{const}$ և ստանում ենք

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) :$$

Կենտրոնից առավելագույն և նվազագույն հեռավորությունները (r_0) որոշվում են հետևյալ հավասարումից.

$$E = \frac{M^2}{2mr_0^2} + U(r_0) ,$$

այսինքն՝ այդ հեռավորությունների վրա $\dot{r} = 0$:

ա) Տվյալ դեպքում r_0 -ն որոշվում է հետևյալ հավասարումից՝

$$E = \frac{M^2}{2mr_0^2} + \frac{a}{r_0^2},$$

որտեղից ստանում ենք

$$r_0 = \sqrt{\frac{2ma + M^2}{2mE}} :$$

Երբ $a > 0$, շարժումը ինֆինիտ է, քանի որ գոյություն ունի միայն նվազագույն հեռավորություն (E -ն միշտ դրական է, որպես դրական գումարելիների գումար): Բացասական a -երի դեպքում հնարավոր են հետևյալ մասնավոր դեպքերը.

1. Եթե $E > 0$, ապա $M^2 > -2ma$ դեպքում գոյություն ունի միայն նվազագույն հեռավորություն և շարժումն ինֆինիտ է: Իսկ $M^2 < -2ma$ դեպքում գոյություն չունի ոչ առավելագույն, ոչ էլ նվազագույն հեռավորություն. մասնիկն անվերջությունից ընկնում է կոորդինատների սկզբնակետի վրա:

2. Եթե $E < 0$ (դա հնարավոր է միայն $-2ma > M^2$ դեպքում), ապա գոյություն ունի միայն առավելագույն հեռավորություն (շարժումը ֆինիտ է). մասնիկն ընկնում է կոորդինատների սկզբնակետի վրա:

բ) Տվյալ դեպքում r_0 -ն որոշվում է հետևյալ հավասարումից՝

$$2Er_0^2 = M^2 + 1 - r_0,$$

որտեղից ստանում ենք

$$r_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8E(M^2 + 1)}}{4E} : \quad (3.5)$$

Եթե $E > 0$, ապա գոյություն ունի միայն նվազագույն հեռավորություն (r_0 -ում վերցնում ենք $+$ նշանը), այսինքն՝ շարժումն ինֆինիտ է:

Եթե $-\frac{1}{8(M^2+1)} < E < 0$, ապա շարժումը ֆինիտ է (գոյություն ունի ինչպես նվազագույն, այնպես էլ առավելագույն հեռավորություն):

3.6. Քանի որ շարժումը կարելի է համարել հարթ, ապա կօգտվենք էներգիայի հետևյալ արտահայտությունից՝

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r),$$

որտեղից ստացվում է

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{M^2}{m^2r^2} - \frac{2U(r)}{m}},$$

հետևաբար

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{M^2}{m^2r^2} - \frac{2U(r)}{m}}} + \text{const} :$$

Հաշվի առնելով, որ $M = mr^2\dot{\varphi}$, կստանանք նաև

$$\varphi = \int \frac{M}{mr^2} dt = \int \frac{M dr}{mr^2 \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{M^2}{m^2r^2} - \frac{2U(r)}{m}}} + \text{const} :$$

Այս արտահայտություններում տեղադրելով $U(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} \right)$ և

$m = 1$ ՝ կստանանք

$$\begin{aligned} t &= \int \frac{dr}{\sqrt{2E - \frac{M^2}{r^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r}}} = \frac{1}{2E} \sqrt{2Er^2 + r - (M^2 + 1)} \\ &\quad - \frac{1}{2(2E)^{3/2}} \operatorname{arccosh} \frac{4rE + 1}{\sqrt{8E(M^2 + 1) + 1}} + t_0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}\varphi &= \int \frac{M dr}{r^2 \sqrt{2E - \frac{M^2}{r^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r}}} \\ &= \frac{M}{\sqrt{M^2 + 1}} \arccos \frac{(M^2 + 1) \frac{2}{r} - 1}{\sqrt{8E(M^2 + 1) + 1}} + \varphi_0,\end{aligned}\quad (3.7)$$

կամ որ նույնն է՝

$$(M^2 + 1) \frac{2}{r} = 1 + \sqrt{8E(M^2 + 1) + 1} \cos \left[\frac{\sqrt{M^2 + 1}}{M} (\varphi - \varphi_0) \right] :$$

Եթե $E < 0$, ապա t -ի համար ստացված արտահայտության մեջ $\operatorname{arccosh}$ ֆունկցիայի փոխարեն պետք է լինի $\arcsin$, իսկ $(2E)^{3/2}$ -ի փոխարեն՝ $(-2E)^{3/2}$:

3.7. Սֆերիկ կոորդինատային համակարգի կենտրոնը սֆերայի կենտրոնում վերցնելիս և բևեռային առանցքն ուղղաձիգով դեպի վար ուղղելիս սֆերիկ ճոճանակի Լագրանժի ֆունկցիան կրնդունի հետևյալ տեսքը (տե՛ս նաև խնդիր 1.7(ա))՝

$$L = \frac{ml^2}{2} \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right) + mgl \cos \theta :$$

Այստեղ φ կոորդինատը ցիկլային է, հետևաբար p_φ ընդհանրացված իմպուլսը, որը համընկնում է իմպուլսի մոմենտի z բաղադրիչի հետ, պահպանվում է՝

$$ml^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta = M_z = \text{const} : \quad (3.8)$$

Էներգիան տրվում է հետևյալ արտահայտությամբ՝

$$\begin{aligned}E &= \frac{ml^2}{2} \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right) - mgl \cos \theta \\ &= \frac{ml^2 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{M_z^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} - mgl \cos \theta : \end{aligned}\quad (3.9)$$

Այստեղից որոշելով θ -ը և անջատելով փոփոխականները, կստանանք

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{ml^2} [E - U_{\text{էֆ}}(\theta)]}}, \quad (3.10)$$

որտեղ ներմուծված է հետևյալ «էֆեկտիվ պոտենցիալ էներգիան»՝

$$U_{\text{էֆ}}(\theta) = \frac{M_z^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} - mgl \cos \theta : \quad (3.11)$$

Օգտվելով (3.8) առնչությունից՝ φ անկյան համար կստանանք

$$\varphi = \frac{M_z}{l\sqrt{2m}} \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{E - U_{\text{էֆ}}(\theta)}} : \quad (3.12)$$

(3.10) և (3.12) ինտեգրալները բերվում են, համապատասխանաբար, առաջին և երրորդ սեռի էլիպտական ինտեգրալների:

θ անկյամբ շարժման տիրույթը որոշվում է $E > U_{\text{էֆ}}$ պայմանից, իսկ այդ տիրույթի սահմանները՝ $E = U_{\text{էֆ}}$ հավասարումից: Վերջինս խորանարդային հավասարում է ըստ $\cos \theta$ -ի, որը -1 -ից մինչև $+1$ -ն ընկած միջակայքում ունի երկու արմատ: Այդ արմատներով որոշվում են սֆերայի վրա գտնվող այն երկու շրջանագծերի դիրքերը, որոնց միջև ընկած տիրույթում գտնվում է ամբողջ հետագիծը:

3.8. Խնդիրը հարմար է լուծել սֆերիկ կոորդինատային համակարգում՝ սկզբնակետ համարելով կոնի գագաթը, իսկ բևեռային առանցքն ուղղելով ուղղաձիգով դեպի վեր: Մասնիկի Լագրանժի ֆունկցիան կընդունի հետևյալ տեսքը (տե՛ս նաև խնդիր 1.7(բ))՝

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha) - mgr \cos \alpha :$$

Քանի որ φ կոորդինատը ցիկլային է, ապա

$$M_z = mr^2 \dot{\varphi} \sin^2 \alpha$$

մեծությունը պահպանվում է: Համապատասխան էներգիան հետևյալն է՝

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M_z^2}{2mr^2 \sin^2 \alpha} + mgr \cos \alpha :$$

Խնդիր 3.7-ի նմանությամբ կարելի է ստանալ

$$\begin{aligned} t &= \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U_{\text{էֆ}}(r)]}}, \\ \varphi &= \frac{M_z}{\sin^2 \alpha \sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{\text{էֆ}}(r)}}, \\ U_{\text{էֆ}}(r) &= \frac{M_z^2}{2mr^2 \sin^2 \alpha} + mgr \cos \alpha : \end{aligned}$$

$M_z \neq 0$ դեպքում $E = U_{\text{էֆ}}(r)$ պայմանը, ըստ r -ի, խորանարդային (Երրորդ աստիճանի) հավասարում է, որն ունի երկու դրական արմատ: Այդ արմատներով որոշվում են կոնի մակերևույթի վրա այն երկու հորիզոնական շրջանագծերի դիրքերը, որոնց միջև ընկած տիրույթում գտնվում է մասնիկի հետագիծը:

3.9. Դիտարկվող հարթ ճոճանակի լագրանժիանը տրվում է հետևյալ արտահայտությամբ (տե՛ս խնդիր 1.6 (բ))

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} (l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi) + m_2 gl \cos \varphi : \quad (3.13)$$

Նկատենք, որ x կոորդինատը ցիկլային է: Հետևաբար P_x ընդհանրացված իմպուլսը պահպանվում է և համընկնում է համակարգի լրիվ իմպուլսի հորիզոնական բաղադրիչի հետ՝

$$P_x = (m_1 + m_2) \dot{x} + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi = \text{const} : \quad (3.14)$$

Կարելի է համարել, որ տվյալ համակարգը հանգստի վիճակում է գտնվում, հետևաբար $\text{const} = 0$ և (3.14) հավասարման ինտեգրումից

կատացվի հետևյալ առնչությունը՝

$$(m_1 + m_2)x + m_2 l \sin \varphi = \text{const}, \quad (3.15)$$

ինչը ցույց է տալիս, որ համակարգի իներցիայի կենտրոնը հորիզոնական ուղղությամբ որևէ շարժում չի կատարում: Օգտվելով (3.14)-ից՝ էներգիայի համար կատանանք հետևյալ արտահայտությունը՝

$$E = \frac{m_2 l^2 \dot{\varphi}^2}{2} \left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cos^2 \varphi \right) - m_2 g l \cos \varphi,$$

որտեղից էլ՝

$$t = l \sqrt{\frac{m_2}{2(m_1 + m_2)}} \int \sqrt{\frac{m_1 + m_2 \sin^2 \varphi}{E + m_2 g l \cos \varphi}} d\varphi : \quad (3.16)$$

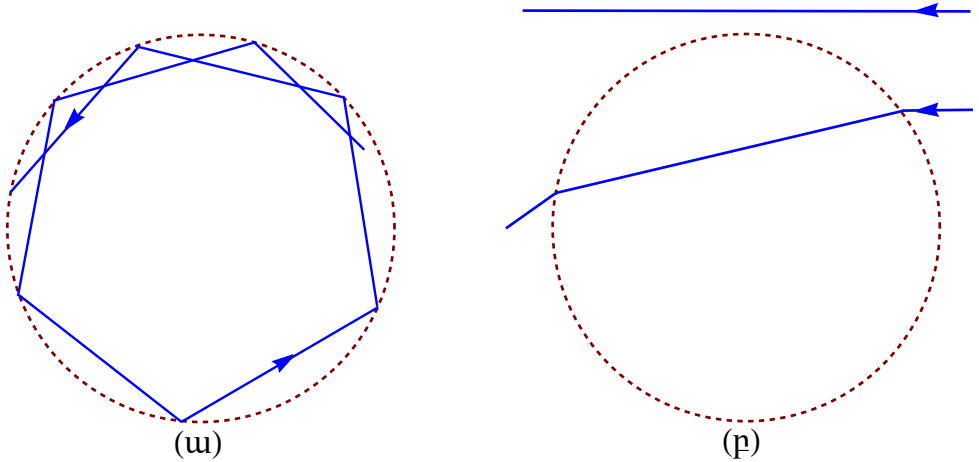
Այժմ (3.14) առնչության միջոցով m_2 զանգվածով մասնիկի $x_2 = x + l \sin \varphi$ և $y_2 = l \cos \varphi$ կոորդինատներն արտահայտելով φ -ով, կարող ենք պնդել, որ այդ մասնիկի հետագիծը $\frac{l m_1}{m_1 + m_2}$ հորիզոնական կիսառանցքով և l ուղղաձիգ կիսառանցքով էլիպսի աղեղ է: Երբ $m_1 \rightarrow \infty$, խնդիրը բերվում է սովորական մաթեմատիկական ճոճանակին, որտեղ այդ մասնիկը շարժվում է շրջանագծի աղեղով:

3.10. R շառավղով սֆերայից դուրս և սֆերայի ներսում գտնվող տիրույթներում մասնիկը շարժվում է, համապատասխանաբար, $\sqrt{\frac{2E}{m}}$ և $\sqrt{\frac{2(E+V)}{m}}$ արագություններով: Եթե

$$M^2/2mR^2 - V < E < M^2/2mR^2,$$

ապա մասնիկը կամ կշարժվի սֆերայի ներսում՝ պարբերաբար անդրադառնալով սֆերայի մակերևույթից (տե՛ս նկ.36(ա)), կամ, լրացուցիչ $E > 0$ պայմանի դեպքում, կկատարի ինֆինիտ շարժում, որի

հետագիծը կարող է լինել ուղիղ գիծ (տե՛ս նկ.36(բ)): Եթե $E > \frac{M^2}{2mR^2}$, ապա մասնիկը կշարժվի բեկված հետագծով (տե՛ս նկ.36(բ)): Հենշտ է



Նկ. 36

նկատել, որ $E = \frac{M^2}{2mR^2} - V$ դեպքում մասնիկը կշարժվի շրջանագծով:

3.11. Տվյալ դաշտի դեպքում ժամանակի և մասնիկի r կոորդինատի միջև կապը տրվում է հետևյալ առնչությամբ՝

$$t = \int \frac{r dr}{\sqrt{\frac{2\alpha}{m} r - \frac{M^2}{m^2}}} :$$

Այստեղ կատարելով

$$r = \frac{M^2}{2m\alpha} (1 + \eta^2) \quad (3.17)$$

ինտեգրման փոփոխականի փոխարինումը՝ կոորդինատների ժամանակային կախվածությունը կարող ենք ներկայացնել հետևյալ

պարամետրական տեսքով՝

$$r = \frac{p}{2} (1 + \eta^2), \quad t = \sqrt{\frac{mp^3}{\alpha}} \frac{\eta}{2} \left(1 + \frac{\eta^2}{3}\right),$$

$$x = \frac{p}{2} (1 - \eta^2), \quad y = p\eta,$$

որտեղ

$$p = \frac{M^2}{m\alpha},$$

և η պարամետրն ընդունում է արժեքներ $-\infty$ -ից մինչև $+\infty$ ընկած տիրույթում:

3.12. $U(r)$ դաշտում շարժվող մասնիկի համար $t(r)$ և $\varphi(r)$ կախվածությունները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով՝

$$t = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}}} + \text{const},$$

$$\varphi = \pm \int \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m [E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} + \text{const},$$

որտեղ վերին և ստորին նշանները վերաբերում են, համապատասխանաբար, $\frac{dr}{dt} > 0$ և $\frac{dr}{dt} < 0$ դեպքերին: r -ի և φ -ի սկզբնական արժեքներից կախված՝ հնարավոր է երեք դեպք.

ա) Եթե $E > 0$ և $\frac{M^2}{2m} > \alpha$, ապա

$$\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2mE}{M^2 - 2m\alpha}} \cos \left[\varphi \sqrt{1 - \frac{2m\alpha}{M^2}} \right]:$$

բ) Եթե $E > 0$ և $\frac{M^2}{2m} < \alpha$, ապա

$$\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2mE}{2m\alpha - M^2}} \sinh \left[\varphi \sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2} - 1} \right] : \quad (3.18)$$

գ) Եթե $E < 0$ և $\frac{M^2}{2m} < \alpha$, ապա

$$\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2m|E|}{2m\alpha - M^2}} \cosh \left[\varphi \sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2} - 1} \right] : \quad (3.19)$$

Նկատենք, որ բոլոր երեք դեպքերում

$$t = \frac{1}{E} \sqrt{\frac{m}{2}} \sqrt{Er^2 - \frac{M^2}{2m} + \alpha} : \quad (3.20)$$

Նշենք, որ բ) և գ) դեպքերում մասնիկն «ընկնում» է դաշտի կենտրոնի վրա այնպես, որ $\varphi \rightarrow \infty$ սահմանում նրա հետագիծը մոտենում է կոորդինատների սկզբնակետին: Ընդ որում, որոշակի r հեռավորությունից անկումը տեղի է ունենում

$$\frac{1}{E} \sqrt{\frac{m}{2}} \left\{ \sqrt{\alpha - \frac{M^2}{2m} + Er^2} - \sqrt{\alpha - \frac{M^2}{2m}} \right\}$$

վերջավոր ժամանակահատվածում:

3.13. Երբ r -ը $r_{\min}$ արժեքից հասնում է մինչև $r_{\max}$ և հետո կրկին դառնում $r_{\min}$, φ անկյան $\Delta\varphi$ փոփոխությունը տրվում է հետևյալ արտահայտությամբ՝

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m(E - U) - \frac{M^2}{r^2}}} :$$

Հետագայում կեղծ տարամիտող ինտեգրալներից խուսափելու

նպատակով այս արտահայտությունը գրենք հետևյալ տեսքով՝

$$\Delta\varphi = -2 \frac{\partial}{\partial M} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m(E - U) - \frac{M^2}{r^2}} dr :$$

Այժմ տեղադրենք $U = -\frac{\alpha}{r} + \delta U$ և ենթաինտեգրալային արտահայտությունը վերլուծենք ըստ δU -ի աստիճանների: Վերլուծության առաջին կարգի անդամը 2π է, իսկ երկրորդ կարգի անդամը պահանջվող $\delta\varphi$ շեղման չափն է: Այն հավասար է

$$\delta\varphi = \frac{\partial}{\partial M} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{2m\delta U \cdot dr}{\sqrt{2m(E + \frac{\alpha}{r}) - \frac{M^2}{r^2}}} = \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{2m}{M} \int_0^\pi r^2 \delta U d\varphi \right), \quad (3.21)$$

որտեղ ըստ r -ի ինտեգրումից անցել ենք ինտեգրման ըստ φ -ի՝ «խոտորված» շարժման հետագծի երկայնքով: Այժմ առանձին-առանձին դիտարկենք δU -ի երկու դեպքերը:

ա) (3.21)-ի աջ մասի ինտեգրալը հաշվելով ստանում ենք

$$\delta\varphi = -\frac{2\pi\beta m}{M^2} = -\frac{2\pi\beta}{\alpha p},$$

որտեղ $p = \frac{M^2}{m\alpha}$ -ն չխոտորված էլիպսի պարամետրն է:

բ) Հաշվի առնելով, որ $r^2\delta U = \frac{\gamma}{r}$ և օգտվելով չխոտորված էլիպսի հավասարումից՝

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} (1 + e \cos \varphi),$$

կստանանք

$$\delta\varphi = -\frac{6\pi\alpha\gamma m^2}{M^4} = -\frac{6\pi\gamma}{\alpha p^2} :$$

3.14. Հետագիծը որոշելու նպատակով կօգտվենք հետևյալ բանաձևից՝

$$\varphi = \int \frac{M dr}{r^2 \sqrt{2m(E - U_{\text{էֆ}}(r))}} + \text{const},$$

որտեղ

$$U_{\text{էֆ}}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} :$$

Այս ինտեգրալը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{\widetilde{M}}{M} \varphi = \int \frac{\widetilde{M} dr}{r^2 \sqrt{2m \left(E - \frac{\widetilde{M}^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \right)}},$$

որտեղ կատարված է $\widetilde{M}^2 = M^2 + 2m\beta$ նշանակումը: Միննույն տիպի ինտեգրալ է ստացվում նաև Կեպլերի խնդրում: Արդյունքում ստացվում է

$$r = \frac{p}{e \cos[\gamma(\varphi - \psi)] - 1},$$

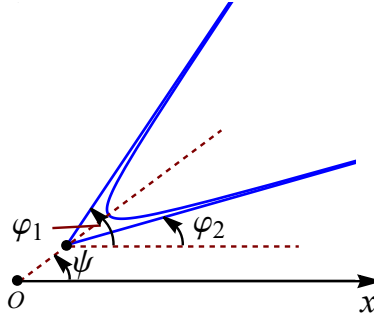
որտեղ

$$p = \frac{2}{\alpha} \left(\beta + \frac{M^2}{2m} \right), \quad e = \sqrt{1 + \frac{4E}{\alpha^2} \left(\beta + \frac{M^2}{2m} \right)}, \quad \gamma = \sqrt{1 + \frac{2m\beta}{M^2}},$$

$E > 0$, իսկ ψ -ն կամայական հաստատուն է:

Հետագիծն այնպիսի կոր է, որը ստացվում է հիպերբոլից՝ վերջինիս բևեռային անկյունները γ անգամ փոքրացնելու արդյունքում (տե՛ս նկ.37): Հետագծի դիրքը որոշվում է ψ հաստատունի արժեքով:

Ասիմպտոտների ուղղությունը որոշվում է $r \rightarrow \infty$ պայմանից կամ, որ նույնն է, $e \cos[\gamma(\varphi_{1,2} - \psi)] = 1$ հավասարումից: Յրման արդյունքում



Նկ. 37

մասնիկի շարժման ուղղությունը փոփոխվում է

$$\pi - (\varphi_1 - \varphi_2) = \pi - \frac{2}{\gamma} \arccos \frac{1}{e} = \pi - \frac{2}{\gamma} \arctan \sqrt{\frac{4E}{\alpha^2} \left(\beta + \frac{M^2}{2m} \right)}$$

անկյամբ:

3.15. ա) Հետագիծը կարող է լինել ֆինիտ, եթե $U_{\text{էֆ}}(r)$ ֆունկցիան ունի մինիմում: $U'_{\text{էֆ}}(r) = 0$ հավասարումը բերվում է $f(x) = \frac{M^2 \kappa}{\alpha m}$ տեսքի, որտեղ $f(x) = x(x+1)e^{-x}$, $x = \kappa r$: Օգտվելով $f(x)$ -ի գրաֆիկից՝ կարելի է եզրակացնել, որ այս հավասարումն ունի իրական լուծումներ միայն այն դեպքում, երբ $\frac{M^2 \kappa}{\alpha m}$ -ն ավելի փոքր է, քան $f(x)$ -ի մեծագույն արժեքը $x > 0$ տիրույթում: Այդ մեծագույն արժեքը հավասար է $(2 + \sqrt{5})e^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \approx 0.84$: Ուստի ֆինիտ շարժումը հնարավոր է, եթե $M^2 < \frac{0.84 \alpha m}{\kappa}$:

բ) Ֆինիտ շարժումը հնարավոր է, եթե $M^2 < \frac{8mV}{e^2 \kappa^2}$:

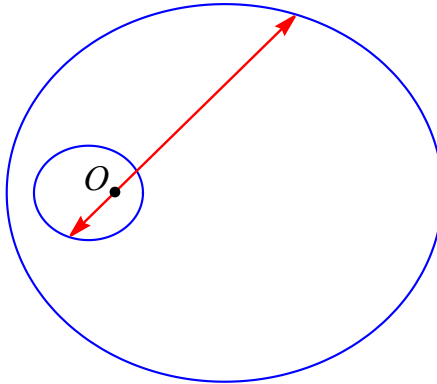
3.16. Մասնիկների հետագծերը տրվում են հետևյալ հավասարմամբ՝

$$\frac{m}{m_{1,2}} \frac{p}{r_{1,2}} = 1 \pm e \cos \varphi_{1,2},$$

որտեղ

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad p = \frac{M^2}{m\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}},$$

E -ն և M -ը, համապատասխանաբար, համակարգի լրիվ էներգիան և իմպուլսի մոմենտն են, իսկ $\varphi_{1,2}$ -ը $\vec{r}_{1,2}$ շառավիղ վեկտորներին համապատասխանող բևեռային անկյուններն են: Մասնիկները

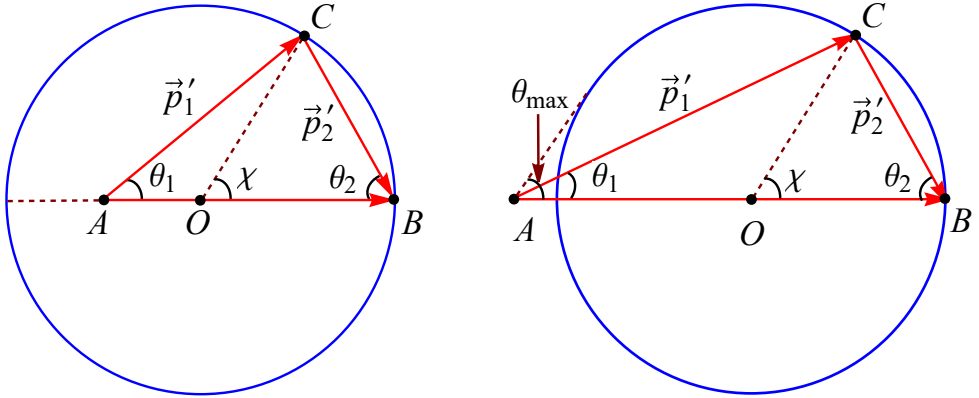


Նկ. 38

շարժվում են միմյանց նման կոնական հատույթներով, որոնք ունեն ընդհանուր կիզակետ, ընդ որում, ժամանակի ցանկացած պահի մասնիկների շառավիղ վեկտորներն ունեն հակադիր ուղղություններ (տե՛ս նկ.38):

3.17. Խնդիրը դիտարկենք երկրաչափորեն (տե՛ս նկ.39): Նկարում $\vec{OC} = m\vec{v}$, $\vec{AO} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{p}_1$, $\vec{OB} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{p}_1$, $\vec{AC} = \vec{p}'_1$ և $\vec{CB} = \vec{p}'_2$, որտեղ m -ը բերված զանգվածն է՝ $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, իսկ շտրիխով նշված են մասնիկների իմպուլսները բախումից հետո: Բացի այդ՝

$\overrightarrow{AB} = \vec{p}_1$ և $\frac{AO}{OB} = \frac{m_1}{m_2}$: Ձախ և աջ դիագրամները գծված են, համապատասխանաբար, $m_1 < m_2$ և $m_1 > m_2$ դեպքերի համար: Նկատենք, որ $p'_2 = 2 \cdot OB \cdot \cos \theta_2$, որտեղից ստացվում է



Նկ. 39

$$v'_2 = 2v \frac{m}{m_2} \cos \theta_2 :$$

Հաշվի առնելով, որ $AC = p'_1$, և AOC եռանկյան համար գրելով կոսինուսների թեորեմը՝

$$OC^2 = AO^2 + p_1'^2 - 2AO \cdot p_1' \cos \theta_1,$$

կստանանք

$$\left(\frac{v'_1}{v}\right)^2 - \frac{2m}{m_2} \frac{v'_1}{v} \cos \theta_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 0, \quad (3.22)$$

որտեղից էլ՝

$$\frac{v'_1}{v} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cos \theta_1 \pm \frac{1}{m_1 + m_2} \sqrt{m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \theta_1},$$

ընդ որում, $m_1 < m_2$ դեպքում պետք է վերցնել + նշանը, իսկ $m_1 > m_2$ դեպքում երկրորդ անդամի դիմաց երկու նշաններն էլ հնարավոր են:

3.18. Անվերջությունից մինչև կենտրոնին ամենամոտ r_0 կետը տեղափոխվելիս մասնիկի բևեռային անկյան φ_0 փոփոխությունը տրվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\varphi_0 = \int_{r_0}^{\infty} \frac{\frac{M}{mr^2} dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{M^2}{m^2 r^2} - \frac{2U(r)}{m}}} :$$

Անվերջությունից մոտենալու և կրկին դեպի անվերջություն գնալու արդյունքում բևեռային անկյան լրիվ փոփոխությունը կազմում է $2\varphi_0$, իսկ իր սկզբնական շարժման ուղղությունից մասնիկի շեղման χ անկյունը որոշվում է $\chi = \pi - 2\varphi_0$ բանաձևով: Ընդ որում, E և M հաստատուն մեծությունները կարելի է փոխարինել, համապատասխանաբար, $\frac{mv_\infty^2}{2}$ և $m\rho v_\infty$ մեծություններով: Օգտվելով խնդիր 3.5(բ)-ի և խնդիր 3.6-ի արդյունքներից (տե՛ս (3.5) և (3.7) բանաձևերը), կստանանք

$$\begin{aligned} \chi &= \pi - \frac{2M}{\sqrt{M^2 + 1}} \arccos \frac{-1}{\sqrt{8E(M^2 + 1) + 1}} \\ &= \pi - \frac{2m\rho v_\infty}{\sqrt{m^2 \rho^2 v_\infty^2 + 1}} \arccos \frac{-1}{\sqrt{4mv_\infty^2(m^2 \rho^2 v_\infty^2 + 1) + 1}} : \end{aligned}$$

3.19. Քանի որ տվյալ դաշտում շարժվելիս մասնիկների χ շեղման անկյունը շատ փոքր է, կարելի է համարել, որ χ -ն մոտավորապես հավասար է իմպուլսի փոփոխության (այն ուղղահայաց է սկզբնական շարժման ուղղությանը) և սկզբնական իմպուլսի (այն հավասար է mv -ի) հարաբերությանը: Եթե x առանցքն ուղղենք մասնիկի սկզբնական շարժման ուղղությամբ, ապա իմպուլսի փոփոխությունը կտրվի

հետևյալ բանաձևով՝

$$\Delta p = \int_{-\infty}^{\infty} F_y dt,$$

որտեղ F_y -ը մասնիկի վրա ազդող ուժի՝ շարժման ուղղությանն ուղղահայաց բաղադրիչն է, որը սահմանվում է որպես

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} :$$

Քանի որ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, ապա հաշվի առնելով, որ $y \approx \rho$, կստանանք $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \approx \frac{\rho}{r}$: Ուստի

$$\chi = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\rho}{rmv} dt :$$

Այստեղ կարելի է օգտվել նաև $r \approx \sqrt{v^2 t^2 + \rho^2}$ մոտավորությունից:

Հաշվի առնելով, որ $U(r) = \frac{1}{2r^2} - \frac{1}{r}$, կստանանք

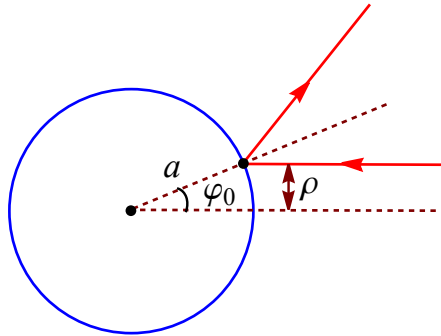
$$\begin{aligned} \chi &= \frac{\rho}{mv} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r^3} \right) dt \\ &= \frac{\rho}{mv} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(\rho^2 + v^2 t^2)^2} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(\rho^2 + v^2 t^2)^{3/2}} \right] \\ &= \frac{1}{mv^2} \left(\frac{\pi}{2\rho^2} - \frac{2}{\rho} \right) : \end{aligned}$$

Այնուհետև ρ -ն, արտահայտված χ -ով, պետք է տեղադրել ցրման էֆեկտիվ կտրվածքի հետևյալ բանաձևի մեջ՝

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho = \frac{\rho}{\sin \chi} \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\chi \approx \frac{\rho}{\chi} \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\chi :$$

3.20. Քանի որ մասնիկն ազատ շարժվում է գնդից դուրս գտնվող տիրույթում, իսկ գնդի ներս թափանցել ընդհանրապես չի կարող, ապա մասնիկի

հետագիծը կազմված է երկու ուղիղներից, որոնք սիմետրիկ են գնդի հետ դրանց հատման կետով անցնող շառավղի նկատմամբ (տե՛ս նկ.40): Նկարից երևում է, որ



Նկ. 40

$$\rho = a \sin \varphi_0 = a \sin \frac{\pi - \chi}{2} = a \cos \frac{\chi}{2} :$$

Իներցիայի կենտրոնի հետ կապված հաշվարկման համակարգում (C -համակարգ) էֆեկտիվ կտրվածքի կախվածությունը ցրման անկյունից տրվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi) \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\chi,$$

իսկ կախվածությունը χ և $\chi + d\chi$ ցրման անկյուններով կառուցվող կոների միջև պարփակված $do = 2\pi \sin \chi d\chi$ մարմնային անկյունից՝

$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin \chi} \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| do : \quad (3.23)$$

Ուստի տվյալ խնդրի համար կստանանք

$$d\sigma = \frac{\pi a^2}{2} \sin \chi d\chi = \frac{a^2}{4} do, \quad (3.24)$$

այսինքն՝ C -համակարգում մասնիկների ցրումն իզոտրոպ է: Ինտեգրելով $d\sigma$ -ն ըստ բոլոր անկյունների՝ ստանում ենք, որ լրիվ կտրվածքը տրվում է $\sigma = \pi a^2$ արտահայտությամբ: Այսինքն՝ այն մասկերեսը, որի ներսում հայտնվելիս մասնիկը կցրվի, հավասար է գնդի հատույթի մակերեսին:

Լաբորատոր հաշվարկման համակարգին (Λ -համակարգ) անցնելիս անհրաժեշտ է χ -ն արտահայտել θ_1 -ի միջոցով (տե՛ս նկ.39): Ակնհայտ է, որ

$$\tan \theta_1 = \frac{m_2 \sin \chi}{m_2 \cos \chi + m_1},$$

որտեղ m_1, m_2 -ով նշանակված են, համապատասխանաբար, մասնիկի և գնդի զանգվածները: Հետևաբար

$$\cos \chi_{\pm} = -\frac{m_1}{m_2} \sin^2 \theta_1 \pm \cos \theta_1 \sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \sin^2 \theta_1} : \quad (3.25)$$

Քանի որ $m_1 < m_2$ դեպքում χ -ի և θ_1 -ի միջև կապը փոխմիարժեք է, ապա երկրորդ անդամը պետք է վերցնել + նշանով և արդյունքում կստանանք

$$d\sigma_1 = \frac{a^2}{4} \left[2 \frac{m_1}{m_2} \cos \theta_1 + \frac{1 + \frac{m_1^2}{m_2^2} \cos(2\theta_1)}{\sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \sin^2 \theta_1}} \right] d\theta_1, \quad (3.26)$$

որտեղ $d\theta_1 = 2\pi \sin \theta_1 d\theta_1$: Իսկ եթե $m_1 > m_2$, ապա (3.25)-ի երկրորդ անդամի երկու նշաններն էլ ներդրում կունենան ցրման կտրվածքում՝

$$d\sigma = \frac{\pi a^2}{2} (\sin \chi_+ d\chi_+ - \sin \chi_- d\chi_-) = \frac{\pi a^2}{2} [d(\cos \chi_-) - d(\cos \chi_+)],$$

որտեղ χ_+ -ի և χ_- -ի ներդրումները վերցված են հակառակ նշաններով: Վերջինս պայմանավորված է նրանով, որ θ_1 -ի աճմանը

համապատասխանում է χ_+ -ի անը և χ_- -ի նվազումը: Ուստի այդ դեպքում ստացվում է

$$d\sigma_1 = \frac{a^2}{2} \frac{1 + \frac{m_1^2}{m_2^2} \cos(2\theta_1)}{\sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \sin^2 \theta_1}} d\sigma_1 : \quad (3.27)$$

Իսկ $m_1 = m_2$ դեպքում էֆեկտիվ կտրվածքը տրվում է հետևյալ արտահայտությամբ՝

$$d\sigma_1 = a^2 |\cos \theta_1| d\sigma_1,$$

ինչը կարելի է ստանալ նաև (3.24) բանաձևից, պարզապես տեղադրելով $\chi = 2\theta_1$, քանի որ այս դեպքում, ի տարբերություն նկ.39-ի, A կետը գտնվում է շրջանագծի վրա:

Եթե գունդն ի սկզբանե անշարժ է եղել, ապա բոլոր դեպքերում $\chi = \pi - 2\theta_2$, և այն տեղադրելով (3.24)-ի մեջ, կստանանք

$$d\sigma_2 = a^2 |\cos \theta_2| d\sigma_2 :$$

3.21. Մեխանիկական նմանության էությունն այն է, որ եթե պոտենցիալ էներգիան $k = -n$ կարգի համասեռ ֆունկցիա է, ապա երկրաչափորեն իրար նման հետագծերի համար $\rho \sim v^{-2/n}$ կամ

$$\rho = v_\infty^{-2/n} f(\chi),$$

քանի որ նման հետագծերում χ շեղման անկյունը նույնն է: Տեղադրելով վերջինս (3.23)-ում կստանանք

$$d\sigma \sim v_\infty^{-4/n} d\sigma :$$

3.22. ա) Դիտարկենք հետևյալ առնչությունը՝

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} > 0,$$

որտեղ հաշվի առնելով հաստատուն իմպուլսի մոմենտի $M = m\rho v_\infty$ բանաձևը՝ կստանանք

$$r^2 U(r) + \frac{m\rho^2 v_\infty^2}{2} < Er^2 :$$

Այստեղից երևում է, որ $U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$ դաշտի դեպքում r -ը կարող է ընդունել որքան ասես փոքր արժեքներ, եթե $2\alpha > m\rho^2 v_\infty^2$: Դա նշանակում է, որ ρ նշանացուցային հեռավորությունը չի կարող գերազանցել $\rho_{\max} = \sqrt{\frac{2\alpha}{mv_\infty^2}}$ արժեքը: Հետևաբար էֆեկտիվ կտրվածքը ներկայացվում է որպես

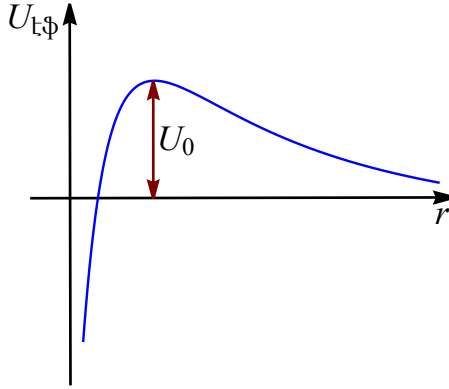
$$\sigma = \pi\rho_{\max}^2 = \frac{2\pi\alpha}{mv_\infty^2} :$$

բ) Էֆեկտիվ պոտենցիալ էներգիայի r -ից կախվածությունն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$U_{\text{էֆ}}(r) = \frac{m\rho^2 v_\infty^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r^n},$$

որի գրաֆիկը պատկերված է նկ.41-ում, ընդ որում, $U_{\text{էֆ}}$ -ի մեծագույն արժեքն է՝

$$(U_{\text{էֆ}})_{\max} \equiv U_0 = \frac{(n-2)\alpha}{2} \left(\frac{m\rho^2 v_\infty^2}{\alpha n} \right)^{\frac{n}{n-2}} : \quad (3.28)$$



Նկ. 41

Դաշտի կենտրոնի վրա «կլնկնեն» այն մասնիկները, որոնց համար $U_0 < E$: Իսկ $U_0 = E$ պայմանից որոշելով $\rho_{\max}$ -ը՝ կստանանք

$$\sigma = \pi n (n-2)^{\frac{2-n}{n}} \left(\frac{\alpha}{m v_{\infty}^2} \right)^{\frac{2}{n}} :$$

3.23. Սֆերիկ մարմնի մակերևույթի վրա մասնիկների ընկնելու պայմանն է $r_{\min} < R$, որտեղ $r_{\min}$ -ը մասնիկի հետագծի՝ սֆերայի կենտրոնին ամենամոտ կետն է: ρ նշանացուցային հեռավորության մեծագույն հնարավոր արժեքը որոշվում է $r_{\min} > R$ պայմանից, որը բերվում է $U_{t,\phi}(R) = E$ հավասարման լուծմանը, կամ որ նույնն է՝

$$\frac{m_1 v_{\infty}^2 \rho_{\max}^2}{2R^2} - \frac{\alpha}{R} = \frac{m_1 v_{\infty}^2}{2},$$

որտեղ $\alpha = \gamma m_1 m_2$ (γ -ն գրավիտացիոն հաստատունն է) և հաշվի առնելով, որ $m_2 \gg m_1$, բերված զանգվածի փոխարեն տեղադրվել է $m \approx m_1$: Այստեղից որոշելով $\rho_{\max}^2$ -ը՝ անկման էֆեկտիվ կտրվածքի

համար կատանանք

$$\sigma = \pi R^2 \left(1 + \frac{2\gamma m_2}{Rv_\infty^2} \right) :$$

Նկատենք, որ $v_\infty \rightarrow \infty$ սահմանում էֆեկտիվ կտրվածքը հավասարվում է սֆերայի հատույթի մակերեսին:

3.24. Պատ.՝

$$\sigma = \begin{cases} \pi \left(\frac{\beta}{E} - \frac{\alpha^2}{4E^2} \right), & E > \frac{\alpha^2}{4\beta}, \\ 0, & E < \frac{\alpha^2}{4\beta} : \end{cases}$$

Պարզել, թե ինչպես կփոխվի կտրվածքը α -ի նշանի փոփոխության դեպքում:

3.25. Պատ.՝

$$\sigma = \begin{cases} \pi \left(2\sqrt{\frac{\gamma}{E}} - \frac{\beta}{E} \right), & E > \frac{\beta^2}{4\gamma}, \\ 0, & E < \frac{\beta^2}{4\gamma} : \end{cases}$$

3.26. Շեղման անկյունը տրվում է հետևյալ արտահայտությամբ՝

$$\chi = \pi \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\alpha}{m\rho^2 v_\infty^2}}} \right],$$

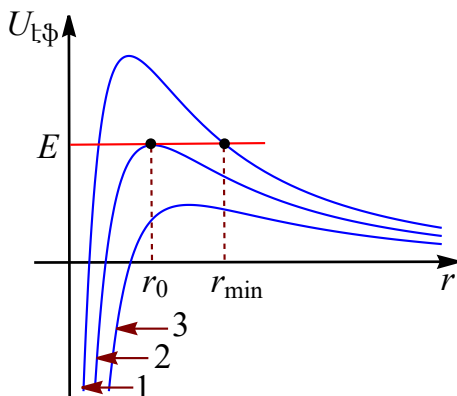
իսկ էֆեկտիվ կտրվածքն է՝

$$d\sigma = \frac{2\pi^2\alpha}{mv_\infty^2} \frac{\pi - \chi}{\chi^2 (2\pi - \chi)^2} \frac{d\sigma}{\sin \chi} :$$

3.27. ա) Նախ դիտարկենք մասնիկի շարժումը $U(r) = -\frac{\alpha}{r^n}$ դաշտում: Նկ.42-ում պատկերված է

$$U_{\text{էֆ}}(r) = \frac{E\rho^2}{r^2} - \frac{\alpha}{r^n}$$

արտահայտությամբ տրվող էֆեկտիվ պոտենցիալ էներգիայի կախվածությունը r -ից՝ ρ նշանացուցային հեռավորության տարբեր արժեքների համար:



Նկ. 42

Գրաֆիկներից երևում է, որ ρ -ի մեծ արժեքների դեպքում (տե՛ս կոր 1) մասնիկները ցրվում են, ընդ որում, դաշտի կենտրոնից նրանց ունեցած նվազագույն հեռավորությունը, որը կնշանակենք $r_{\min}(\rho)$ -ով, որոշվում է $U_{t\Phi}(r_{\min}) = E$ պայմանից: ρ -ի նվազմանը զուգընթաց $r_{\min}$ -ը նվազում է, հասնելով r_0 արժեքին, երբ $\rho = \rho_0$ (տե՛ս կոր 2): ρ -ի հետագա նվազումը հանգեցնում է նրան, որ մասնիկն ընկնում է դաշտի կենտրոնի վրա (տե՛ս կոր 3):

r_0 -ի և ρ_0 -ի արժեքները որոշվում են հետևյալ հավասարումներից՝

$$U_{t\Phi}(r_0) = E, \quad U'_{t\Phi}(r_0) = 0$$

և տրվում են հետևյալ արտահայտություններով՝

$$r_0 = \left[\frac{(n-2)\alpha}{2E} \right]^{1/n}, \quad \rho_0 = \sqrt{\frac{n}{n-2}} \left[\frac{(n-2)\alpha}{2E} \right]^{1/n} :$$

Եթե $R > r_0$, ապա բոլոր այն մասնիկները, որոնց համար $r_{\min} \leq R$, կհարվածեն գնդին, իսկ անկման կտրվածքը կընդունի հետևյալ արժեքը՝

$$\sigma = \pi \rho^2 (r_{\min} = R) = \pi R^2 \left(1 + \frac{\alpha}{ER^n} \right) :$$

Եթե $R < r_0$, ապա գնդին կհարվածեն միայն այն մասնիկները, որոնք ընկնում են դաշտի կենտրոնի վրա: Այս դեպքում կստանանք

$$\sigma = \pi \rho_0^2 = \frac{\pi n}{n-2} \left[\frac{(n-2)\alpha}{2E} \right]^{2/n} :$$

բ) Եթե $\gamma > ER^4$ և $2\sqrt{\gamma E} > \beta$, ապա կտրվածքի համար կստանանք

$$\sigma = \pi \left(2\sqrt{\frac{\gamma}{E}} - \frac{\beta}{E} \right) :$$

Իսկ $\gamma < ER^4$ դեպքում կստանանք

$$\sigma = \pi R^2 \left(1 + \frac{\gamma}{ER^4} - \frac{\beta}{ER^2} \right) ,$$

եթե $2\sqrt{\gamma E} > \beta$ կամ

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\sqrt{\gamma E} < \beta \\ \left[\begin{array}{l} R < R_1 \\ R > R_2 \end{array} \right. \end{array} \right. ,$$

որտեղ

$$R_{1,2} = \frac{\beta}{2E} \mp \sqrt{\frac{\beta^2}{4E^2} - \frac{\gamma}{E}} :$$

Ցանկացած այլ դեպքում կստանանք $\sigma = 0$:

3.28. Առաջացած մասնիկների բաշխվածությունը, ըստ ցրման θ անկյան, ներկայացվում է հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{dN}{N} = \frac{\lambda^2 \sin \theta d\theta}{\cos^3 \theta \sqrt{1 - \lambda^2 \tan^2 \theta}} ,$$

որտեղ λ -ն սահմանվում է որպես

$$\lambda = \frac{V^2 - v_0^2}{2Vv_0},$$

ընդ որում,

$$\begin{aligned} 0 \leq \theta \leq \arctan \frac{1}{\lambda}, & \quad \text{եթե } V > v_0, \\ \pi - \arctan \frac{1}{|\lambda|} \leq \theta \leq \pi, & \quad \text{եթե } V < v_0 : \end{aligned}$$

3.29. Պատ.՝

$$\begin{aligned} \tan \theta_1 = \cot \theta_2 = \frac{\alpha}{E\rho}, \quad E = \frac{mv^2}{2}, \\ v_1 = \frac{E\rho v}{\sqrt{\alpha^2 + E^2\rho^2}}, \quad v_2 = \frac{\alpha v}{\sqrt{\alpha^2 + E^2\rho^2}} : \end{aligned}$$

ԳԼՈՒԽ 4

ՓՈՔՐ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐ

4.1. Պատ.՝ $a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \tan \varphi = -\frac{v_0}{\omega x_0}:$

4.2. Եթե մեկ ազատության աստիճան ունեցող համակարգի Լագրանժի ֆունկցիան հետևյալ տեսքի է՝

$$L = \frac{f(q) \dot{q}^2}{2} - U(q),$$

որտեղ $U(q)$ պոտենցիալ էներգիան ունի մինիմում $q = q_0$ կետում, այսինքն՝ $U'(q_0) = 0, U''(q_0) > 0$, ապա հավասարակշռության դիրքից (U -ի մինիմումի կետից) համակարգի $q - q_0 = x$ շեղումը համարելով շատ փոքր, կարելի է գրել

$$U(q) = U(q_0) + \frac{1}{2} U''(q_0) x^2$$

և

$$L = \frac{f(q_0) \dot{x}^2}{2} - \frac{U''(q_0) x^2}{2}:$$

Վերջին բանաձևում $U(q_0)$ անդամը բաց է թողնված, քանի որ այն հաստատուն է: Այսպիսով, շարժման հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$f(q_0) \ddot{x} + U''(q_0) x = 0,$$

ինչը համապատասխանում է

$$\omega = \sqrt{\frac{U''(q_0)}{f(q_0)}} \quad (4.1)$$

հաճախությամբ հարմոնիկ տատանումներին:

ա) Այս դեպքում $U(x) = -\sin x$, իսկ $U'(x_0) = 0$ պայմանից ստացվում է $x_0 = \frac{\pi}{2}$ և $U''(x_0) = 1$: Արդյունքում (4.1) բանաձևից կստանանք

$$\omega = 1 :$$

բ) $U(x) = \frac{x^2 + 1}{2x}$ ֆունկցիան ունի մինիմում $x = x_0 = 1$ կետում, ընդ որում, $U''(x_0) = 1$: Բացի այդ, $\frac{\dot{x}^2}{2}$ -ի գործակիցը x_0 կետում հավասար է 1-ի: Հետևաբար

$$\omega = 1 :$$

գ) $U(x) = x^2 e^x$ ֆունկցիան ունի մինիմում $x = 0$ կետում, ընդ որում, $U''(0) = 2$: Բացի այդ, $\frac{\dot{x}^2}{2}$ -ի գործակիցն այդ կետում հավասար է 2-ի: Հետևաբար

$$\omega = 1 :$$

դ) $U(x) = \cosh x$ ֆունկցիան ունի մինիմում $x = 0$ կետում, ընդ որում, $U''(0) = 1$: Բացի այդ, $\frac{\dot{x}^2}{2}$ -ի գործակիցն այդ կետում հավասար է 2-ի: Հետևաբար

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} :$$

ե) $U(x) = \frac{x}{\ln x}$ ֆունկցիան ունի մինիմում $x = e$ կետում, ընդ որում, $U''(e) = \frac{1}{e}$: Բացի այդ, $\frac{\dot{x}^2}{2}$ -ի գործակիցն այդ կետում հավասար է $\frac{2}{e}$ -ի: Հետևաբար

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} :$$

4.3. Քանի որ իզոտոպների ատոմների փոխազդեցությունները միատեսակ են, ապա $k = k'$, իսկ մոլեկուլների կինետիկ էներգիաներում m գործակիցների դերում նրանց բերված զանգվածներն են: Արդյունքում,

օգտագործելով $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ բանաձևը՝ կստանանք

$$\frac{\omega'}{\omega} = \sqrt{\frac{m_1 m_2 (m'_1 + m'_2)}{m'_1 m'_2 (m_1 + m_2)}} :$$

4.4. Համակարգի բերված զանգվածը հավասար է $\frac{m}{2}$, որտեղ m -ը մի մասնիկի զանգվածն է: Ուստի էներգիան հետևյալն է՝

$$E = \frac{m}{4} (r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2) - \frac{\ln r}{r^2},$$

Ներմուծելով հաստատուն $p_\varphi = \frac{mr^2 \dot{\varphi}}{2}$ իմպուլսը՝ կստանանք

$$E = \frac{mr^2}{4} + \left(\frac{p_\varphi^2}{mr^2} - \frac{\ln r}{r^2} \right) :$$

Ակնհայտ է, որ փակագծերում գրված արտահայտությունը պոտենցիալ էներգիայի դեր է խաղում: Դրա առաջին կարգի ածանցյալը հավասարեցնելով 0-ի, կարելի է տեսնել, որ այն ունի մինիմում հետևյալ կետում՝

$$r = e^{\frac{p_\varphi^2}{m} + \frac{1}{2}} :$$

Այդ կետում երկրորդ կարգի ածանցյալը հավասար է $2e^{-\frac{4p_\varphi^2}{m} - 2}$:

Բաժանելով վերջինս $\frac{r^2}{2}$ -ի գործակցի վրա, հաճախության համար կստանանք

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{m}} e^{-\frac{2p_\varphi^2}{m} - 1} :$$

4.5. Չապանակի պոտենցիալ էներգիան, բարձր կարգի անվերջ փոքր անդամների ճշտությամբ, հավասար է F ուժի և զապանակի δl

երկարացման արտադրյալին: Երբ $x \ll l$, ստանում ենք

$$\delta l = \sqrt{l^2 + x^2} - l \approx \frac{x^2}{2l},$$

այնպես որ $U = \frac{Fx^2}{2l}$: Քանի որ կինետիկ էներգիան հավասար է $\frac{m\dot{x}^2}{2}$, հաճախության համար ստանում ենք

$$\omega = \sqrt{\frac{F}{ml}} :$$

4.6. Երբ $\varphi \ll 1$, զսպանակի երկարացումը տրվում է հետևյալ արտահայտությամբ՝

$$\delta l = \sqrt{r^2 + (l+r)^2 - 2r(l+r)\cos\varphi} - l \approx \frac{r(l+r)}{2l}\varphi^2 :$$

Հաշվի առնելով նաև, որ կինետիկ էներգիան հավասար է $\frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2}$, հաճախության համար կստանանք

$$\omega = \sqrt{\frac{F(r+l)}{rlm}} :$$

4.7. Երբ $\varphi \ll 1$, համակարգի կինետիկ և պոտենցիալ էներգիաներն ընդունում են հետևյալ տեսքը՝

$$T = \frac{m_1 m_2 l^2}{2(m_1 + m_2)} \dot{\varphi}^2, \quad U = \frac{m_2 g l}{2} \varphi^2,$$

հետևաբար

$$\omega = \sqrt{\frac{g(m_1 + m_2)}{m_1 l}} : \quad (4.2)$$

4.8. Անկայուն հավասարակշռության $q = q_0$ կետում $U(q)$ պոտենցիալ էներգիան ունի մաքսիմում, այսինքն՝ $U'(q_0) = 0$ և $U''(q_0) < 0$:

Այժմ $U(q)$ ֆունկցիան վերլուծելով շարքի q_0 կետի մոտակայքում և կատարելով $q - q_0 = x$ և $U''(q_0) = -k$, $k > 0$ նշանակումները՝ կստանանք

$$U(q) = U(q_0) - \frac{k}{2}x^2,$$

քանի որ այստեղ x -ը շատ փոքր մեծություն է և դրա ավելի բարձր կարգի աստիճանները կարելի է անտեսել: Համապատասխան շարժման հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$m\ddot{x} - kx = 0,$$

որտեղից կստանանք

$$x = c_1 e^{\sqrt{k/m} \cdot t} + c_2 e^{-\sqrt{k/m} \cdot t},$$

որտեղ $c_{1,2}$ -ը հաստատուններ են:

4.9. Համակարգի Լագրանժի ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը (տե՛ս խնդիր 1.6(զ))՝

$$L = ma^2 \dot{\theta}^2 (1 + 2 \sin^2 \theta) + ma^2 (\Omega^2 \sin^2 \theta + 2\Omega_0^2 \cos \theta),$$

որտեղ $\Omega_0^2 = \frac{2g}{a}$:

Եթե $\Omega > \Omega_0$, ապա համակարգի

$$U(\theta) = -ma^2 (\Omega^2 \sin^2 \theta + 2\Omega_0^2 \cos \theta)$$

պոտենցիալ էներգիան ունի մինիմում $\cos \theta_0 = \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2}$ անկյունային կոորդինատով նկարագրվող դիրքում: Վերլուծենք $U(\theta)$ ֆունկցիան θ_0 կետի մոտակայքում, իսկ կինետիկ էներգիայի արտահայտության մեջ

տեղադրենք

$$1 + 2 \sin^2 \theta = 1 + 2 \sin^2 \theta_0 = 3 - 2 \left(\frac{\Omega_0}{\Omega} \right)^4 \equiv \frac{M}{2ma^2} :$$

Արդյունքում լագրանժիանը կներկայացվի հետևյալ տեսքով՝

$$L = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2,$$

որտեղ $k = U''(\theta_0)$, $x = \theta - \theta_0$, հետևաբար

$$\omega^2 = \frac{k}{M} = \Omega^2 \frac{\Omega^4 - \Omega_0^4}{3\Omega^4 - 2\Omega_0^4}, \quad \Omega > \Omega_0 :$$

Եթե $\Omega \gg \Omega_0$, ապա տատանումների հաճախությունը համեմատական է պտտման անկյունային արագությանը՝ $\omega = \frac{\Omega}{\sqrt{3}}$, ընդ որում, $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$: Իսկ $\Omega \rightarrow \Omega_0$ դեպքում փոքր տատանումները տեղի են ունենում $\omega \rightarrow 0$ հաճախությամբ, ընդ որում, $\theta_0 \rightarrow 0$:

Եթե $\Omega < \Omega_0$, ապա կարելի է դիտարկել տատանումները $\theta_0 = 0$ մոտակայքում, հաշվի առնելով, որ

$$\omega^2 = \Omega_0^2 - \Omega^2, \quad \Omega < \Omega_0 :$$

Եթե $\Omega = \Omega_0$, ապա U պոտենցիալ էներգիան ունի մինիմում $\theta_0 = 0$ -ում և դրա մոտակայքում ներկայացվում է հետևյալ տեսքով՝

$$U = ma^2 \Omega_0^2 \left(-2 + \frac{\theta^4}{4} \right),$$

այսինքն՝ տատանումներն էապես ոչ գծային են: Կինետիկ էներգիայի վերլուծության մեջ նույնպես թողնելով միայն մինչև չորրորդ կարգի

անդամները՝ կատանանք

$$\frac{2\pi}{\omega} = T = 4 \int_0^{\theta_m} \frac{\sqrt{1 + 2\theta^2} d\theta}{\sqrt{\Omega_0^2 (\theta_m^4 - \theta^4)}},$$

որտեղ θ_m -ը տատանումների լայնույթն է:

4.10. ա) Հավասարակշռության դիրքից շեղումը տրվում է հետևյալ արտահայտությամբ՝

$$x = x_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}} \cos(\omega t + \varphi),$$

որտեղ

$$\tan \varphi = -\frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}, \quad \omega^2 = \frac{2k}{m} :$$

բ) Դիցուք զսպանակներից մեկի լարվածությունը f է: Փոքր $|y| \ll \sqrt{\frac{fl}{k}}$ շեղումների դեպքում տատանումները հարմոնիկ են՝ $y = A \cos(\omega t + \varphi)$, որտեղ $\omega^2 = \frac{2f}{ml}$:

Եթե $f = kl$, ապա տատանումների հաճախությունը համընկնում է ա)-ում ստացվածի հետ: Եթե զսպանակները ձգված չեն ($f = 0$), ապա տատանումները ոչ գծային են, դեպի հավասարակշռության դիրք վերադարձնող ուժը՝ $F = -\frac{ky^3}{l^2}$, իսկ հաճախությունը՝

$$\omega = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \sqrt{\frac{2k}{m}} \frac{y_m}{l},$$

որտեղ y_m -ը տատանումների լայնույթն է:

Եթե մասնիկը կարող է շարժվել xy հարթության մեջ, ապա $f \neq 0$ և փոքր շեղումների դեպքում նրա շարժումը x և y առանցքների երկայնքով, համապատասխանաբար, $\omega_x^2 = \frac{2k}{m}$ և $\omega_y^2 = \frac{2f}{ml}$ հաճախություններով հարմոնիկ տատանումների վերադրում է:

4.11. Դիցուք y -ը մասնիկի կոորդինատն է՝ հաշվարկված վերին կախման կետից, իսկ $2l$ -ը երկու կախման կետերի միջև եղած հեռավորությունն է (տե՛ս նկ. 18): Համակարգի Լագրանժի ֆունկցիան հետևյալն է՝

$$L = \frac{m\dot{y}^2}{2} - k(y-l)^2 + mgy = \frac{m\dot{y}^2}{2} - k\left(y-l - \frac{mg}{2k}\right)^2 + \text{const} :$$

Այն համապատասխանում է $\omega^2 = \frac{2k}{m}$ հաճախությամբ և $y_0 = l + \frac{mg}{2k}$ հավասարակշռության դիրքով օսցիլյատորի, ուստի $y = y_0 + A \cos(\omega t + \varphi)$: Նկատենք, որ եթե որպես կոորդինատ վերցնեինք շեղումը հավասարակշռության դիրքից, ապա դրանով իսկ կվերացնեինք ծանրության դաշտի ներդրումը Լագրանժի ֆունկցիայում:

4.12. Հարկադրական տատանումները ներկայացվում են որպես

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

հավասարման լուծումներ: Հաստատուն գործակիցներով անհամասեռ գծային դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը կարելի է ներկայացնել երկու գումարելիների գումարի տեսքով՝ $x = x_0 + x_1$, որտեղ x_0 -ն համապատասխան համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումն է, իսկ x_1 -ը անհամասեռ հավասարման մասնակի ինտեգրալն է:

ա) Մասնակի լուծումն է՝

$$x = \frac{a}{m\omega^2},$$

իսկ լրիվ տատանումը ներկայացվում է հետևյալ արտահայտությամբ՝

$$x = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) + \frac{a}{m\omega^2} :$$

Սկզբնական պայմաններից ստացվում է՝

$$c_2 = 0, \quad c_1 = -\frac{a}{m\omega^2},$$

այսինքն՝

$$x = \frac{a}{m\omega^2} (1 - \cos(\omega t)) :$$

բ) Մասնակի լուծումն է՝

$$x = \frac{at}{m\omega^2},$$

իսկ լրիվ տատանումը՝

$$x = b \cos(\omega t + \alpha) + \frac{at}{m\omega^2} :$$

Սկզբնական պայմաններից ստացվում է՝

$$\cos \alpha = 0, \quad b = \frac{a}{m\omega^3},$$

հետևաբար

$$x = \frac{a}{m\omega^3} [\omega t - \sin(\omega t)] :$$

գ) Մասնակի լուծումը կփնտրենք $b \cos(\alpha t)$ տեսքով: Տեղադրելով այդ լուծումը

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{a}{m} \cos(\alpha t)$$

հավասարման մեջ՝ կստանանք

$$b = \frac{a}{m(\omega^2 - \alpha^2)},$$

այսինքն՝

$$x = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) + \frac{a}{m(\omega^2 - \alpha^2)} \cos(\alpha t) :$$

Սկզբնական պայմաններից հետևում է, որ

$$c_1 = -\frac{a}{m(\omega^2 - \alpha^2)}, \quad c_2 = 0,$$

այսինքն՝

$$x = \frac{a}{m(\omega^2 - \alpha^2)} [\cos(\alpha t) - \cos(\omega t)] :$$

դ) Այս դեպքում

$$x = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) + \frac{a}{m(\omega^2 - \alpha^2)} \sin(\alpha t) :$$

Սկզբնական պայմաններից ստացվում է, որ

$$c_1 = 0, \quad c_2 = -\frac{\alpha a}{\omega m(\omega^2 - \alpha^2)},$$

այսինքն՝

$$x = \frac{a}{m(\omega^2 - \alpha^2)} \left[\sin(\alpha t) - \frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t) \right] :$$

ե) Մասնակի լուծումն է՝

$$x = \frac{ae^{-\alpha t}}{m(\alpha^2 + \omega^2)},$$

իսկ լրիվ տատանումը՝

$$x = b \cos(\omega t + \varphi) + \frac{ae^{-\alpha t}}{m(\alpha^2 + \omega^2)} :$$

Սկզբնական պայմաններից ստացվում է, որ

$$b \cos \varphi = -\frac{F_0}{m(\alpha^2 + \omega^2)}, \quad \tan \varphi = \frac{\alpha}{\omega},$$

հետևաբար

$$\begin{aligned} x &= b \cos \varphi [\cos (\omega t) - \sin (\omega t) \tan \varphi] + \frac{F_0}{m (\alpha^2 + \omega^2)} e^{-\alpha t} \\ &= \frac{F_0}{m (\alpha^2 + \omega^2)} \left[\frac{\alpha}{\omega} \sin (\omega t) - \cos (\omega t) + e^{-\alpha t} \right] : \end{aligned}$$

զ) Այստեղ հարմար է F ուժը ներկայացնել

$$F = a e^{(-\alpha + i\beta)t}$$

կոմպլեքս տեսքով, գտնել լուծումը, այնուհետև վերցնել այդ լուծման կեղծ մասը: Մասնակի լուծումը կփնտրենք $b e^{(-\alpha + i\beta)t}$ տեսքով: Տեղադրելով վերջինս հավասարման մեջ, կստանանք

$$b = \frac{a}{m [(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2) - 2i\alpha\beta]} :$$

Ստացված լուծման կեղծ մասն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{aligned} x &= c_1 \cos (\omega t) + c_2 \sin (\omega t) + \frac{a e^{-\alpha t}}{m \left[(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2 \beta^2 \right]} \\ &\times [2\alpha\beta \cos (\beta t) + (\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2) \sin (\beta t)] : \end{aligned}$$

Օգտագործելով սկզբնական պայմանները՝ կստանանք

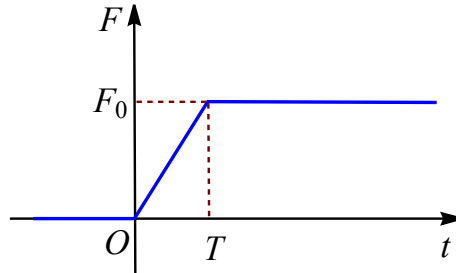
$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{m \left[(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2 \beta^2 \right]} \\ &\times \left\{ -2\alpha\beta \cos (\omega t) - \frac{\beta}{\omega} (\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2) \sin (\omega t) \right. \\ &\left. + e^{-\alpha t} [2\alpha\beta \cos (\beta t) + (\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2) \sin (\beta t)] \right\} : \end{aligned}$$

4.13. ա) Արտաքին ուժի տեսքը պատկերված է նկ.43-ում: $0 < t < T$ ժամանակահատվածում սկզբնական պայմանին բավարարող

տատանումները հետևյալ տեսքն ունեն՝

$$x = \frac{F_0}{mT\omega^3} (\omega t - \sin(\omega t)) :$$

Իսկ $t > T$ տիրույթում լուծումը կփնտրենք



Նկ. 43

$$x = c_1 \cos [\omega (t - T)] + c_2 \sin [\omega (t - T)] + \frac{F_0}{m\omega^2}$$

տեսքով: $t = T$ պահին x -ի և $\dot{x}$ -ի անընդհատությունից կստանանք

$$c_1 = -\frac{F_0}{mT\omega^3} \sin(\omega T),$$

$$c_2 = \frac{F_0}{mT\omega^3} (1 - \cos(\omega T)),$$

ընդ որում, տատանումների լայնությունը հավասար է՝

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \frac{2F_0}{mT\omega^3} \sin \frac{\omega T}{2} :$$

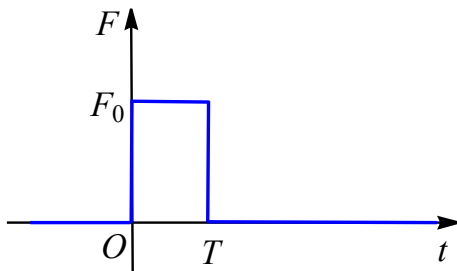
Նշենք, որ որքան ուշ է սկսվում F_0 ուժի կիրառումը (այսինքն՝ որքան մեծ է T -ն), այնքան ավելի փոքր է a լայնությունը:

բ) Արտաքին ուժի տեսքը պատկերված է նկ.44-ում: Տվյալ խնդիրը կարելի է լուծել ա)-ի նման, բայց լուծումն ավելի հակիրճ կլինի, եթե

օգտվենք հետևյալ հայտնի բանաձևից՝

$$\xi = e^{i\omega t} \left\{ \int_0^t \frac{1}{m} F(t) e^{-i\omega t} dt + \xi_0 \right\}, \quad (4.3)$$

որտեղ $\xi = \dot{x} + i\omega x$: $t > T$ տիրույթում համակարգը կատարում է ազատ



Նկ. 44

տատանումներ $x = 0$ դիրքի շուրջ, ընդ որում,

$$\xi = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \int_0^T e^{-i\omega t} dt = \frac{F_0}{i\omega m} (1 - e^{-i\omega T}) e^{i\omega t},$$

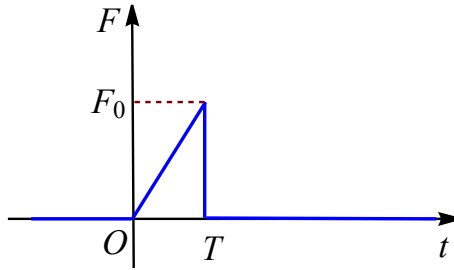
իսկ լայնույթը ստացվում է ξ -ի մոդուլի քառակուսուց $|\xi|^2 = a^2 \omega^2$ բանաձևի միջոցով: Արդյունքում կստանանք

$$a = \frac{2F_0}{m\omega^2} \sin \frac{\omega T}{2} :$$

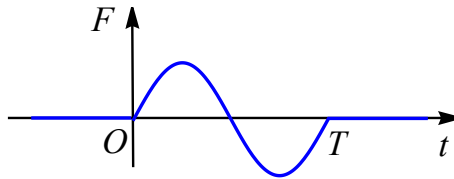
զ) Արտաքին ուժի տեսքը պատկերված է նկ.45-ում: Տվյալ դեպքում լայնույթի համար ստացվում է հետևյալ արտահայտությունը՝

$$a = \frac{F_0}{Tm\omega^3} \sqrt{\omega^2 T^2 - 2\omega T \sin(\omega T) + 2(1 - \cos(\omega T))} :$$

դ) Արտաքին ուժի տեսքը պատկերված է նկ.46-ում: (4.3) բանաձևում



Նկ. 45



Նկ. 46

տեղադրելով

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t) = \frac{F_0}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

և ինտեգրելով զրոյից մինչև T կատանանք

$$a = \frac{F_0 \pi}{m\omega^2} :$$

4.14. ա) Շարժման հավասարումներն ընդունում են հետևյալ տեսքը՝

$$\ddot{x} + \frac{\ddot{y}}{2} + x - \frac{y}{2} = 0, \quad (4.4)$$

$$\ddot{y} + \frac{\ddot{x}}{2} + y - \frac{x}{2} = 0, \quad (4.5)$$

որոնց լուծումները կփնտրենք

$$x = c_1 e^{i\omega t}, y = c_2 e^{i\omega t}$$

տեսքով: Տեղադրելով վերջիններս հավասարումների մեջ՝ կստանանք

$$\begin{aligned} c_1 (1 - \omega^2) - \frac{c_2}{2} (1 + \omega^2) &= 0, \\ -\frac{c_1}{2} (1 + \omega^2) + c_2 (1 - \omega^2) &= 0 : \end{aligned}$$

Այս երկու համասեռ հավասարումների համակարգը կունենա ոչ-զրոյական լուծումներ, եթե $c_{1,2}$ -ի գործակիցներից կազմված որոշիչը հավասար լինի զրոյի, այսինքն՝

$$\begin{vmatrix} 1 - \omega^2 & -\frac{1}{2} (1 + \omega^2) \\ -\frac{1}{2} (1 + \omega^2) & 1 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

որտեղից ստանում ենք

$$\omega_1^2 = 3, \quad \omega_2^2 = \frac{1}{3} :$$

Այսպիսով, նորմալ տատանումներն են

$$Q_1 = \operatorname{Re} \left\{ a_1 e^{i\sqrt{3}t} \right\}, \quad Q_2 = \operatorname{Re} \left\{ a_2 e^{\frac{it}{\sqrt{3}}} \right\},$$

իսկ x, y -ն արտահայտվում են դրանց միջոցով հետևյալ կերպ՝

$$x = c_{11}Q_1 + c_{12}Q_2, \quad y = c_{21}Q_1 + c_{22}Q_2 :$$

Եթե $c_{1,2}$ -ի համար ստացված հավասարումների մեջ տեղադրենք սկզբում $\omega^2 = 3$, այնուհետև $\omega^2 = \frac{1}{3}$, ապա կստանանք

$$c_{11} = -c_{21}, \quad c_{12} = c_{22} :$$

Նկատենք, որ c_{11} և c_{22} գործակիցները պետք է ընտրել այնպես, որ

Լագրանժի ֆունկցիան բերվի հետևյալ տեսքի՝

$$L = \frac{1}{2} (\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2) - \frac{1}{2} (\omega_1^2 Q_1^2 + \omega_2^2 Q_2^2) :$$

Տեղադրելով

$$\dot{x} = c_{11}\dot{Q}_1, \quad \dot{y} = c_{21}\dot{Q}_1 = -c_{11}\dot{Q}_1$$

առնչությունները Լագրանժի ֆունկցիայի նախնական արտահայտության մեջ՝ կինետիկ էներգիան բերվում է $\frac{c_{11}^2 \dot{Q}_1^2}{2}$ տեսքի, հետևաբար անհրաժեշտ է տեղադրել

$$c_{11} = -c_{21} = 1,$$

որպեսզի $\dot{Q}_1^2$ -ի գործակիցը լինի $\frac{1}{2}$:

Նմանապես, տեղադրելով

$$\dot{x} = c_{12}\dot{Q}_2, \quad \dot{y} = c_{22}\dot{Q}_2 = c_{12}\dot{Q}_2,$$

կստանանք

$$c_{12} = c_{22} = \frac{1}{\sqrt{3}} :$$

Այսպիսով՝

$$x = \frac{Q_2}{\sqrt{3}} + Q_1, \quad y = \frac{Q_2}{\sqrt{3}} - Q_1 :$$

բ) Հաճախությունների համար ստացվում է

$$\omega_1^2 = 6, \quad \omega_2^2 = 1,$$

իսկ նորմալ կոորդինատներն են՝

$$Q_1 = \operatorname{Re} \left(a_1 e^{i\sqrt{6}t} \right), \quad Q_2 = \operatorname{Re} \left(a_2 e^{it} \right),$$

ընդ որում,

$$L = \frac{1}{2} (\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2) - \frac{1}{2} (6Q_1^2 + Q_2^2),$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{5}} (-2Q_1 + Q_2), \quad y = \sqrt{\frac{1}{5}} (3Q_1 + Q_2) :$$

զ) Պատ.՝ $\omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = \frac{4}{3}, \omega_3^2 = \frac{3}{4}$:

դ) Պատ.՝ $\omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = \frac{9 + \sqrt{57}}{6}, \omega_3^2 = \frac{9 - \sqrt{57}}{6}$:

4.15. Միշտ կարելի է ընտրել այնպիսի դեկարտյան կոորդինատներ, որտեղ U -ի վերլուծության երկրորդ կարգի անդամները կհանդիսանան միայն կոորդինատների քառակուսիներ, քանի որ համապատասխան կոորդինատային ձևափոխությամբ ցանկացած քառակուսային ձև բերվում է քառակուսիների գումարի տեսքի: Արագության քառակուսին ցանկացած դեկարտյան կոորդինատային համակարգում հավասար է բոլոր առանցքներով ուղղված բաղադրիչների քառակուսիների գումարին, այսինքն՝

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2} (k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2),$$

ընդ որում, նորմալ տատանումներն ուղղված են այդ նույն առանցքներով, այսինքն՝ փոխուղղահայաց են:

4.16. Դիցուք x_i -ն i -րդ մասնիկի շեղումն է հավասարակշռության դիրքից ($i = 1, 2$): Համակարգի Լագրանժի ֆունկցիան տրվում է հետևյալ արտահայտությամբ՝

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2} [x_1^2 + (x_1 - x_2)^2], \quad (4.6)$$

իսկ շարժման հավասարումները հետևյալն են՝

$$m\ddot{x}_1 + k(2x_1 - x_2) = 0, \quad m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0 :$$

Դրանցում տեղադրելով $x_i = A_i \cos(\omega t + \varphi)$ ՝ կստանանք հանրահաշվական հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$(-m\omega^2 + 2k) A_1 - kA_2 = 0, \quad -kA_1 + (-m\omega^2 + k) A_2 = 0 : \quad (4.7)$$

Վերջինս ունի ոչ զրոյական լուծում, եթե համապատասխան որոշիչը հավասար է զրոյի, այսինքն՝

$$(-m\omega^2 + 2k) (-m\omega^2 + k) - k^2 = 0, \quad (4.8)$$

որտեղից $\omega_{1,2}$ սեփական հաճախությունների համար ստանում ենք

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2} \frac{k}{m} :$$

Նշենք, որ (4.8) առնչությունը հաշվի առնելու դեպքում (4.7)-ում բերված երկու հավասարումներից միայն մեկն է անկախ: Այժմ, տեղադրելով $\omega_{1,2}$ -ի արժեքները (4.7)-ում՝ կստանանք հետևյալ առնչությունները լայնությունների միջև՝

$$A_1 = \frac{2}{\sqrt{5} + 1} A_2 \equiv A, \quad \text{երբ } \omega = \omega_1, \\ A_1 = -\frac{2}{\sqrt{5} - 1} A_2 \equiv B, \quad \text{երբ } \omega = \omega_2 :$$

Այսպիսով, համակարգի ազատ տատանումները բերվում են հետևյալ տեսքի՝

$$x_1 = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \quad (4.9)$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} B \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \quad (4.10)$$

որտեղ A , B , φ_1 , φ_2 գործակիցները որոշվում են սկզբնական պայմաններից:

Ստացված (4.9)-(4.10) տատանումներն ամբողջությամբ

նկարագրում են համակարգի շարժումը: Սակայն մի շարք խնդիրներ լուծելիս ավելի հարմար է օգտվել նորմալ կոորդինատներից, օրինակ՝ հարկադրական տատանումներ ներառող խնդիրներում, խոտորումների տեսությունում, քվանտային մեխանիկայի անցում կատարելիս: Դա պայմանավորված է նրանով, որ q_i , $i = 1, 2$, նորմալ կոորդինատների հետևյալ սահմանմամբ՝

$$x_1 = q_1 + q_2, \quad x_2 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} q_1 - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} q_2,$$

(4.6) լագրանժիանը ներկայացվում է քառակուսիների գումարի տեսքով՝

$$L = \frac{5 + \sqrt{5}}{4} m (\dot{q}_1^2 - \omega_1^2 q_1^2) + \frac{5 - \sqrt{5}}{4} m (\dot{q}_2^2 - \omega_2^2 q_2^2),$$

իսկ այդ կոորդինատներին համապատասխանող շարժման հավասարումներն անջատվում են՝

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0 :$$

Նմանատիպ կերպով երկու փոխազդող մարմինների շարժման խնդիրը բերվում է իներցիայի կենտրոնի ազատ շարժման և տրված ուժային դաշտում բերված զանգվածով մասնիկի շարժման խնդիրներին:

4.17. Շարժման հավասարումներն են՝

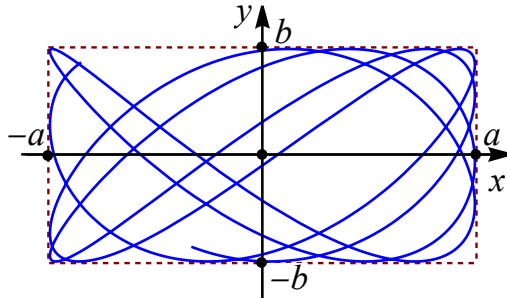
$$x = a \cos(\omega_1 t + \varphi), \quad y = b \cos(\omega_2 t + \psi),$$

որտեղ a, b, φ, ψ հաստատունները որոշվում են սկզբնական պայմաններից: Հետագիծն ամբողջությամբ ընկած է

$$-a \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b,$$

ուղղանկյան ներսում: Մասնավորապես, նկ.47-ում պատկերված է $4\pi \leq t \leq 15\pi$ ժամանակահատվածին համապատասխանող հետագիծը

պարամետրերի հետևյալ արժեքների դեպքում $\varphi = 0, \psi = \frac{\pi}{6}, \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$:



Նկ. 47

Ընդհանուր դեպքում հետագիծը «լցնում» է ամբողջ ուղղանկյունը: Մասնավորապես, եթե $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ հարաբերությունն իռացիոնալ թիվ է, ապա հետագիծն անցնում է ուղղանկյան բոլոր կետերի մոտով անվերջ մոտենալով դրանցից յուրաքանչյուրին: Այս դեպքում մասնիկի շարժումը պարբերական չէ, չնայած կոորդինատային առանցքների վրա մասնիկի պրոյեկցիան կատարում է պարբերական շարժում: Իսկ եթե $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ հարաբերությունը ռացիոնալ թիվ է ($l\omega_1 = n\omega_2$, որտեղ l -ը և n -ը բնական թվեր են), ապա հետագիծը փակ կոր է, որը հայտնի է որպես *Լիսսաժուի պատկեր*: Այս դեպքում շարժումը պարբերական է՝ $\frac{2\pi n}{\omega_1}$ պարբերությամբ:

- 4.18.** ա) $x_{1,2} = \frac{\nu}{2} \left[\frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1} \pm \frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2} \right]$, մասնավորապես $k_1 \ll k$ դեպքում տատանումները նման են բարախումների՝

$$x_1 = \frac{v}{\omega} \cos(\varepsilon t) \sin(\omega t), \quad x_2 = -\frac{v}{\omega} \sin(\varepsilon t) \cos(\omega t):$$

բ) $x_{1,2} = \frac{a}{2} [\cos(\omega_1 t) \pm \cos(\omega_2 t)]$, մասնավորապես $k_1 \ll k$ դեպքում

$$x_1 = a \cos(\varepsilon t) \cos(\omega t), \quad x_2 = a \sin(\varepsilon t) \sin(\omega t) :$$

Ամենուրեք օգտագործված են հետևյալ նշանակումները՝

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{2k_1 + k}{m}, \quad \varepsilon = \frac{k_1}{2k} \omega_1, \quad \omega = \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2) :$$

4.19. Դիցուք x_1 -ը և x_2 -ը, համապատասխանաբար, m_1 և m_2 զանգվածով մասնիկների շեղումներն են հավասարակշռության դիրքից: Օգտագործելով $\sqrt{m_1}x_1 = x$ և $\sqrt{m_2}x_2 = y$ նշանակումները՝ համակարգի Լագրանժի ֆունկցիան կներկայացվի

$$L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - \frac{\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2}{2} + \alpha xy$$

տեսքով, որտեղ արված են հետևյալ նշանակումները՝

$$\omega_1^2 = \frac{k_1 + k_2}{m_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{k_2 + k_3}{m_2}, \quad \alpha = \frac{k_2}{\sqrt{m_1 m_2}} :$$

Տարբեր սահմանային դեպքերում պատասխանը հնարավոր է պարզել առանց հավասարումները լուծելու: Օրինակ, եթե $k_1 = k_2 = k_3 = k$ և $m_1 \ll m_2$, ապա հնարավոր է ստանալ $\Omega_1^2 = \frac{3k}{2m_2}$ շատ ցածր հաճախությամբ $x_1 = \frac{x_2}{2}$ նորմալ տատանումներ (որտեղ m_1 մասնիկը կարծես զսպանակի մի մասն է, իսկ m_2 մասնիկը կարծես տատանվում է երկու զսպանակների միջև՝ ձախիմը $\frac{k}{2}$, իսկ աջինը k կոշտությամբ), ինչպես նաև $\Omega_2^2 = \frac{2k}{m_1}$ շատ բարձր հաճախությամբ նորմալ տատանումներ (որտեղ m_2 մասնիկը գրեթե դադարի վիճակում է): Երկրորդ մասնիկի տատանումների լայնույթը կարելի է որոշել, նրա շարժումը դիտարկելով որպես հարկադրական՝ բարձր հաճախությամբ արտաքին kx_1 ուժի ազդեցությամբ (տե՛ս [2], (22.4) բանաձևը). այդ

կերպ ստացվում է $x_2 = -\frac{m_1 x_1}{2m_2}$:

4.20. Շարժման հավասարումը հետևյալն է՝

$$\ddot{x} + x = x^2 :$$

Այս հավասարման առաջին մոտավորությամբ (առանց աջ մասի) լուծումն է՝

$$x_1 = A \cos(t + \alpha),$$

այսինքն՝ ստացվում է սովորական հարմոնիկ (ներդաշնակ) տատանում: Տեղադրելով $x = x_1 + x_2$ ու աջ մասում անտեսելով x_2 պարունակող անդամները՝ կստանանք

$$\ddot{x}_2 + x_2 = x_1^2 :$$

Տեղադրելով այստեղ x_1 -ի արտահայտությունը՝ կստանանք

$$\ddot{x}_2 + x_2 = A^2 \cos^2(t + \alpha) = \frac{A^2}{2} [1 + \cos(2t + 2)] :$$

Այստեղից երևում է, որ x_2 -ը, այսինքն՝ տատանումների անհարմոնիկ մասը, ներկայացվում է որպես $\frac{A^2}{2}$ և $\frac{A^2}{2} \cos(2t + 2)$ արտաքին ուժերին համապատասխանող հարկադրական տատանումների վերադրում: Այդպիսի տատանումներ դիտարկվել են խնդիր 4.12-ում, որտեղից կստանանք՝

$$x_2 = \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{6} \cos(2t + 2) :$$

ԳԼՈՒԽ 5

ՊԻՆԴ ՄԱՐՄՆԻ ՇԱՐԺՈՒՄ

5.1. Իներցիայի գլխավոր մոմենտները հետևյալն են՝

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{\mu} \sum_{a < b} m_a m_b I_{ab}^2, \quad I_3 = 0,$$

որտեղ μ -ն մոլեկուլի զանգվածն է, իսկ գումարումը կատարվում է ըստ մոլեկուլի կազմում գտնվող ատոմների բոլոր զույգերի, ընդ որում, գումարման մեջ յուրաքանչյուր զույգը հաշվարկվում է միայն մեկ անգամ: Մասնավորապես, երկատոմ մոլեկուլի դեպքում գումարի մեջ մտնում է ընդամենը մեկ անդամ, այսինքն՝

$$I_1 = I_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2,$$

որը երկու ատոմների բերված զանգվածի և այդ ատոմների հեռավորության քառակուսու արտադրյալն է:

5.2. ա) Իներցիայի C կենտրոնը գտնվում է եռանկյան հիմքից $x_2 = \frac{m_2 h}{\mu}$ բարձրության վրա (տե՛ս նկ.22): Այստեղ h -ը եռանկյան հիմքին տարված բարձրության երկարությունն է, իսկ μ -ն՝ մոլեկուլի զանգվածը: Համապատասխան իներցիայի մոմենտները հետևյալն են՝

$$I_1 = \frac{2m_1 m_2}{\mu} h^2, \quad I_2 = \frac{m_1}{2} a^2, \quad I_3 = I_1 + I_2 :$$

բ) Իներցիայի կենտրոնը գտնվում է բուրգի բարձրության վրա, հիմքից $x_3 = \frac{m_2 h}{\mu}$ հեռավորության վրա (տե՛ս նկ.23): Համապատասխան

իներցիայի մոմենտները հետևյալն են՝

$$I_1 = I_2 = \frac{3m_1m_2}{\mu}h^2 + \frac{m_1}{2}a^2, \quad I_3 = m_1a^2 :$$

Մասնավորապես, $m_1 = m_2$, $h = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ դեպքում ստանում ենք

$$I_1 = I_2 = I_3 = m_1a^2$$

իներցիայի մոմենտներով կանոնավոր քառանիստ մոլեկուլ:

5.3. ա) Անտեսելով ձողի հաստությունը՝ կստանանք

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{12}\mu l^2, \quad I_3 = 0 :$$

բ) Հաշվելով

$$I_1 + I_2 + I_3 = 2\rho \int r^2 dV$$

գումարը՝ կստանանք

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5}\mu R^2 :$$

գ) x_3 առանցքն ուղղելով զլանի առանցքով՝ կստանանք

$$I_1 = I_2 = \frac{\mu}{4} \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right), \quad I_3 = \frac{\mu}{2} R^2 :$$

դ) x_1, x_2, x_3 առանցքներն ուղղելով, համապատասխանաբար, ուղղանկյուն զուգահեռանիստի a, b, c կողերի երկայնքով՝ կստանանք

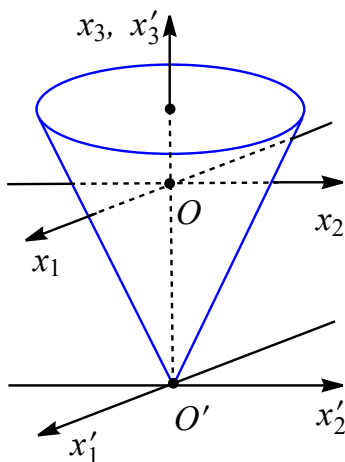
$$I_1 = \frac{\mu}{12} (b^2 + c^2), \quad I_2 = \frac{\mu}{12} (c^2 + a^2), \quad I_3 = \frac{\mu}{12} (a^2 + b^2) :$$

ե) Ստորև ներկայացվում է Շտեյների թեորեմը.

Դիցուք μ զանգվածով մարմինը պտտվում է իր իներցիայի կենտրոնով անցնող z առանցքի նկատմամբ: Այդ առանցքի նկատմամբ մարմնի իներցիայի մոմենտը կնշանակենք I_c -ով: Եթե մարմինը սկսի պտտվել մի նոր՝ z' առանցքի նկատմամբ, որը գուգահեռ է z առանցքին, իսկ այդ առանցքների միջև հեռավորությունը a է, ապա մարմնի I իներցիայի մոմենտն այդ նոր առանցքի նկատմամբ կապված է I_c -ի հետ հետևյալ առնչությամբ՝

$$I = I_c + \mu a^2 : \quad (5.1)$$

Կոնի դեպքում հարմար է նախ հաշվել I'_{ik} իներցիայի մոմենտի թենզորը x'_i , $i = 1, 2, 3$, առանցքների նկատմամբ, որոնց սկզբնակետը համընկնում է կոնի գագաթի հետ (տե՛ս նկ.48): Հաշվարկը հեշտությամբ



Նկ. 48

կատարվում է գլանային կոորդինատային համակարգում: Արդյունքում

ստացվում է՝

$$I'_1 = I'_2 = \frac{3}{20}\mu(R^2 + 4h^2), \quad I'_3 = \frac{3}{10}\mu R^2 :$$

Կարելի է ցույց տալ, որ կոնի իներցիայի կենտրոնը գազաթից $a = \frac{3h}{4}$ հեռավորության վրա է: Շտեյների թեորեմի (5.1) բանաձևից ստացվում է՝

$$I_1 = I_2 = I'_1 - \mu a^2 = \frac{3}{20}\mu\left(R^2 + \frac{h^2}{4}\right), \quad I_3 = I'_3 = \frac{3}{10}\mu R^2 :$$

զ) Էլիպսոիդի իներցիայի կենտրոնը համընկնում է նրա երկրաչափական կենտրոնի հետ, իսկ իներցիայի գլխավոր առանցքները՝ նրա երկրաչափական առանցքների հետ: Նկատենք, որ $x = a\xi$, $y = b\eta$, $z = c\zeta$ կոորդինատային ձևափոխությամբ ինտեգրումը, ըստ Էլիպսոիդի ծավալի, բերվում է ինտեգրման ըստ սֆերայի ծավալի, քանի որ Էլիպսոիդի մակերևույթի հավասարումը՝

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

բերվում է միավոր սֆերայի մակերևույթի հավասարմանը՝

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 :$$

Արդյունքում, x առանցքի նկատմամբ իներցիայի մոմենտի համար ստացվում է

$$\begin{aligned} I_1 &= \rho \iiint (y^2 + z^2) dx dy dz = \rho abc \iiint (b^2\eta^2 + c^2\zeta^2) d\xi d\eta d\zeta \\ &= \frac{1}{2}abc(b^2 + c^2)I', \end{aligned}$$

որտեղ I' -ը միավոր շառավղով գնդի իներցիայի մոմենտն է: Հաշվի առնելով, որ Էլիպսոիդի ծավալը հավասար է $\frac{4\pi}{3}abc$, իներցիայի

մոմենտների համար կստանանք

$$I_1 = \frac{\mu}{5} (b^2 + c^2), \quad I_2 = \frac{\mu}{5} (a^2 + c^2), \quad I_3 = \frac{\mu}{5} (a^2 + b^2) :$$

5.4. Դիցուք l -ը ճոճանակի իներցիայի կենտրոնի և պտտման առանցքի հեռավորությունն է, իսկ α , β , γ -ն՝ իներցիայի գլխավոր առանցքների և պտտման առանցքի կազմած անկյունները: Որպես փոփոխական կոորդինատ կներմուծենք φ -ն՝ ուղղաձիգ առանցքի և իներցիայի կենտրոնից պտտման առանցքին տարված ուղղահայացի կազմած անկյունը: Իներցիայի կենտրոնի արագությունը՝ $V = l\dot{\varphi}$ է, իսկ անկյունային արագության պրոյեկցիաները իներցիայի գլխավոր առանցքների վրա՝ $\dot{\varphi} \cos \alpha$, $\dot{\varphi} \cos \beta$, $\dot{\varphi} \cos \gamma$: Համարելով, որ φ անկյունը փոքր է՝ պոտենցիալ էներգիայի համար կստանանք

$$U = \mu gl (1 - \cos \varphi) \approx \frac{\mu gl}{2} \varphi^2 :$$

Ուստի Լագրանժի ֆունկցիան ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$L = \frac{\mu l^2}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} (I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \cos^2 \beta + I_3 \cos^2 \gamma) \dot{\varphi}^2 - \frac{\mu gl}{2} \varphi^2 :$$

Այստեղից էլ ստացվում է տատանումների հաճախությունը՝

$$\omega^2 = \frac{\mu gl}{\mu l^2 + I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \cos^2 \beta + I_3 \cos^2 \gamma} :$$

5.5. Ուղղաձիգի և գլանի իներցիայի կենտրոնից գլանի առանցքին տարված ուղղահայացի կազմած անկյունը նշանակենք φ -ով (տե՛ս նկ.24): Գլանի շարժումը ժամանակի յուրաքանչյուր պահի կարելի է դիտարկել զուտ որպես պտույտ ակնթարթային առանցքի նկատմամբ, որը անշարժ հարթության հետ գլանի հպման գիծն է: Ընդ որում, այդ պտույտի անկյունային արագությունը $\dot{\varphi}$ է (բոլոր զուգահեռ առանցքների նկատմամբ պտտման անկյունային արագությունը միևնույնն

է): Իներցիայի կենտրոնը գտնվում է ակնթարթային առանցքից $\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos \varphi}$ հեռավորության վրա, հետևաբար այն շարժվում է $V = \dot{\varphi} \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos \varphi}$ արագությամբ: Ուստի լրիվ կինետիկ էներգիան տրվում է հետևյալ արտահայտությամբ՝

$$T = \frac{\mu}{2} (a^2 + R^2 - 2aR \cos \varphi) \dot{\varphi}^2 + \frac{I}{2} \dot{\varphi}^2,$$

որտեղ I -ն գլանի առանցքով ուղղված առանցքի նկատմամբ գլխավոր իներցիայի մոմենտն է:

5.6. Ուղղաձիգի և երկու գլանների կենտրոններն իրար միացնող ուղղի կազմած անկյունը նշանակենք φ -ով (տե՛ս նկ.25): Գործող գլանի իներցիայի կենտրոնը գտնվում է նրա առանցքի վրա, իսկ նրա արագությունը՝ $V = (R - a) \dot{\varphi}$ է: Համապատասխան անկյունային արագությունը կարելի է հաշվարկել որպես զուտ պտտման արագություն այն ակնթարթային առանցքի նկատմամբ, որը համընկնում է գլանների շփման գծի հետ: Այն հավասար է

$$\Omega = \frac{V}{a} = \frac{R - a}{a} \dot{\varphi} :$$

Այսպիսով, գործող գլանի կինետիկ էներգիան տրվում է հետևյալ արտահայտությամբ՝

$$T = \frac{\mu}{2} (R - a)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{I_3}{2} \frac{(R - a)^2}{a^2} \dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4} \mu (R - a)^2 \dot{\varphi}^2,$$

որտեղ I_3 -ը գլանի իներցիայի մոմենտն է իր սեփական առանցքի նկատմամբ (տե՛ս խնդիր 5.3(գ)):

5.7. OA ուղղի (կոնի և հարթության հպման գծի) և հարթության մեջ գտնվող որևէ անշարժ ուղղության միջև կազմած անկյունը նշանակենք θ -ով (տե՛ս նկ.26): Իներցիայի կենտրոնը գտնվում է կոնի առանցքի վրա, իսկ նրա արագությունը՝ $V = a \dot{\theta} \cos \alpha$ է, որտեղ 2α -ն կոնի

զագաթի անկյունն է, իսկ α -ն՝ կոնի իներցիայի կենտրոնի և զագաթի հեռավորությունը: Պտտման անկյունային արագությունը որոշվում է որպես OA ակնթարթային առանցքի շուրջ մաքուր պտույտի արագություն՝

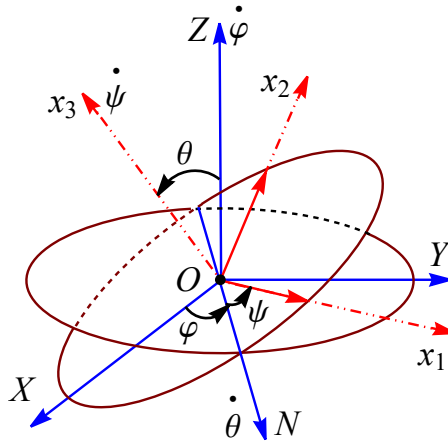
$$\Omega = \frac{V}{a \sin \alpha} = \dot{\theta} \cot \alpha :$$

Իներցիայի գլխավոր առանցքներից մեկը՝ x_3 -ը, համընկնում է կոնի առանցքի հետ, իսկ մյուս առանցքը՝ x_2 -ը, կընտրենք այնպես, որ ուղղահայաց լինի կոնի առանցքին և OA ուղղին: Այդ դեպքում OA ուղղին զուգահեռ ուղղված $\vec{\Omega}$ վեկտորի պրոյեկցիաները իներցիայի գլխավոր առանցքների վրա հավասար կլինեն $\Omega \sin \alpha$, 0 , $\Omega \cos \alpha$: Արդյունքում, պահանջվող կինետիկ էներգիայի համար կստանանք

$$\begin{aligned} T &= \frac{\mu a^2}{2} \dot{\theta}^2 \cos^2 \alpha + \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 \cos^2 \alpha + \frac{I_3 \cos^4 \alpha}{2 \sin^2 \alpha} \dot{\theta}^2 \\ &= \frac{3\mu h^2}{40} \dot{\theta}^2 (1 + 5 \cos^2 \alpha) , \end{aligned}$$

որտեղ h -ը կոնի բարձրությունն է, իսկ I_1 -ը, I_2 -ը և a -ն որոշված են խնդիր 5.3(ե)-ում:

5.8. Պինդ մարմնի շարժումը կարելի է նկարագրել նրա իներցիայի կենտրոնի 3 կոորդինատների և այն 3 անկյունների միջոցով, որոնցով որոշվում է պինդ մարմնի հետ կապված x_1, x_2, x_3 կոորդինատային առանցքների դիրքը X, Y, Z անշարժ կոորդինատային համակարգում: Տվյալ խնդրում մեզ հետաքրքրում են միայն կոորդինատային առանցքների կազմած անկյունները, ուստի կընդունենք, որ երկու կոորդինատային համակարգերի սկզբնակետերը համընկնում են (տե՛ս նկ.49): Շարժվող $x_1 x_2$ հարթությունը հատում է անշարժ XY հարթությանը ON ուղղով, որն ընդունված է անվանել *հանգույցների գիծ*: Ակնհայտ է, որ այդ գիծն ուղղահայաց է ինչպես Z , այնպես էլ x_3 առանցքին: Որպես այդ գծի դրական ուղղություն կընդունենք $\vec{e}_z \times \vec{e}_3$ վեկտորական արտադրյալի



Նկ. 49

ուղղությունը (այստեղ $\vec{e}_z$ -ը և $\vec{e}_3$ -ը, համապատասխանաբար, Z և x_3 առանցքների միավոր վեկտորներն են): x_1, x_2, x_3 առանցքների դիրքը X, Y, Z առանցքների նկատմամբ տրվում է հետևյալ անկյունների միջոցով θ -ն Z և x_3 առանցքների կազմած անկյունն է, φ -ն՝ X և ON առանցքների կազմած անկյունը, և ψ -ն՝ ON և x_1 առանցքների կազմած անկյունը: Դրանք հայտնի են որպես *Էյլերի անկյուններ*: φ և ψ անկյունները որոշվում են աջ ձեռքի կանոնով, համապատասխանաբար, Z և x_3 առանցքների նկատմամբ: Էյլերի անկյունների արժեքներն ընկած են հետևյալ տիրույթներում՝ $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi, \psi \leq 2\pi$:

Նշենք, որ θ և $\varphi - \frac{\pi}{2}$ անկյունները, համապատասխանաբար, x_3 -ի ուղղությունը նկարագրող բևեռային և ազիմուտային անկյուններն են X, Y, Z առանցքների նկատմամբ: Մյուս կողմից, θ և $\frac{\pi}{2} - \psi$ անկյունները, համապատասխանաբար, Z -ի ուղղությունը նկարագրող բևեռային և ազիմուտային անկյուններն են x_1, x_2, x_3 առանցքների նկատմամբ:

Այժմ $\vec{\Omega}$ անկյունային արագության՝ x_1, x_2, x_3 շարժական

առանցքներով ուղղված բաղադրիչներն արտահայտենք E -ի անկյունների և դրանց ածանցյալների միջոցով: Դրա համար անհրաժեշտ է պրոյեկտել $\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$ անկյունային արագություններն այդ առանցքների վրա: $\dot{\theta}$ անկյունային արագությունն ուղղված է ON հանգույցների գծով, իսկ նրա x_1, x_2, x_3 -բաղադրիչներն են՝

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta} \cos \psi, \quad \dot{\theta}_2 = -\dot{\theta} \sin \psi, \quad \dot{\theta}_3 = 0 :$$

$\dot{\varphi}$ անկյունային արագությունն ուղղված է Z առանցքի երկայնքով, հետևաբար x_3 առանցքի վրա նրա պրոյեկցիան հավասար է $\dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi} \cos \theta$, իսկ $x_1 x_2$ հարթության վրա պրոյեկցիան՝ $\dot{\varphi} \sin \theta$: Պրոյեկտելով վերջինս x_1 և x_2 առանցքների վրա՝ կստանանք

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi, \quad \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi :$$

Իսկ $\dot{\psi}$ անկյունային արագությունն ուղղված է x_3 առանցքի երկայնքով: Արդյունքում $\vec{\Omega}$ -ի բաղադրիչների համար կստանանք՝

$$\Omega_1 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi,$$

$$\Omega_2 = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi,$$

$$\Omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} :$$

Տվյալ խնդրում դիտարկվող համաչափ հոլի իներցիայի մոմենտները կապված են հետևյալ առնչությամբ՝ $I_1 = I_2 \neq I_3$: Համարելով, որ x_1, x_2, x_3 առանցքները համընկնում են հոլի իներցիայի գլխավոր առանցքների հետ, հոլի պտտական կինետիկ էներգիան կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$T_{\text{պտ}} = \frac{I_1}{2} \left(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \right) + \frac{I_3}{2} \left(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \right)^2 :$$

Այս արտահայտությունը կարելի է ստանալ նաև ավելի հեշտ եղանակով,

եթե օգտվենք համաչափ հոլի այն հատկությունից, որ x_1, x_2 իներցիայի գլխավոր առանցքները կարելի է ուղղել x_3 առանցքին ուղղահայաց հարթության մեջ կամայական կերպով: Եթե համարենք, որ x_1 -ը համընկնում է ON հանգույցների զծի հետ, այսինքն՝ $\psi = 0$, ապա $\vec{\Omega}$ -ի բաղադրիչները կներկայացվեն ավելի պարզ տեսքով՝

$$\Omega_1 = \dot{\theta}, \quad \Omega_2 = \dot{\varphi} \sin \theta, \quad \Omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} :$$

Այժմ ուսումնասիրենք ազատ համաչափ հոլի շարժումը վերը նշված Էյլերի անկյունների միջոցով: Դիցուք Z առանցքն ուղղված է հոլի հաստատուն $\vec{M}$ իմպուլսի մոմենտի ուղղությամբ, շարժական կոորդինատային համակարգի x_3 առանցքն ուղղված է հոլի առանցքով, իսկ x_1 առանցքը համընկնում է ժամանակի տվյալ պահին հանգույցների զծի հետ: Արդյունքում, $\vec{M}$ վեկտորի $M_i = I_i \Omega_i$ ($i = 1, 2, 3$) բաղադրիչների համար կստանանք՝

$$M_1 = I_1 \dot{\theta}, \quad M_2 = I_2 \dot{\varphi} \sin \theta, \quad M_3 = I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) :$$

Մյուս կողմից հաշվի առնելով, որ x_1 առանցքը (հանգույցների զիծը) ուղղահայաց է Z առանցքին՝ կստանանք

$$M_1 = 0, \quad M_2 = M \sin \theta, \quad M_3 = M \cos \theta :$$

Ստացված արտահայտությունները հավասարեցնելով իրար՝ կստանանք հետևյալ հավասարումները՝

$$\dot{\theta} = 0, \quad I_1 \dot{\varphi} = M, \quad I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) = M \cos \theta, \quad (5.2)$$

որտեղից էլ՝

$$\theta = \text{const}, \quad \varphi = \frac{Mt}{I_1}, \quad \psi = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \varphi \cos \theta : \quad (5.3)$$

Այստեղ ինտեգրման հաստատուններն ընտրվել են համապատասխան սկզբնական պայմաններով:

Ստացած հավասարումներից առաջինը ցույց է տալիս, որ հողի առանցքը միշտ նույն անկյամբ է թեքված $\vec{M}$ -ի նկատմամբ, իսկ երկրորդը նշանակում է, որ հողի առանցքը պտտվում է $\vec{M}$ -ի շուրջ հաստատուն $\frac{M}{I_1}$ անկյունային արագությամբ (այդ շարժումը կոչվում է *ռեգուլյար պրեցեսիա*): (5.2)-ի երրորդ հավասարումը ցույց է տալիս, որ հողը պտտվում է իր սեփական առանցքի շուրջ $\Omega_3 = \frac{M \cos \theta}{I_3}$ անկյունային արագությամբ:

5.9. Որպես շարժվող և անշարժ կոորդինատների ընդհանուր սկզբնակետ կվերցնենք հողի անշարժ O կետը, իսկ Z առանցքը կուղղենք ուղղաձիգ դեպի վեր (տե՛ս նկ.27): Ծանրության ուժի դաշտում հողի Լագրանժի ֆունկցիան կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$L = \frac{I_1 + \mu l^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - \mu g l \cos \theta,$$

որտեղ μ -ն հողի զանգվածն է, իսկ l -ը՝ հպման կետի և իներցիայի կենտրոնի միջև հեռավորությունը:

Այստեղ ψ և φ կոորդինատները ցիկլային են, հետևաբար շարժման ինտեգրալներից երկուսն են՝

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = \text{const} \equiv M_3, \quad (5.4)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = (I_1' \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\varphi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta = \text{const} \equiv M_z, \quad (5.5)$$

որտեղ կատարված է $I_1' = I_1 + \mu l^2$ նշանակումը, իսկ p_ψ և p_φ մեծությունները O կետի նկատմամբ որոշված պտտական մոմենտի բաղադրիչներն են, համապատասխանաբար, x_3 և Z առանցքների

վրա: Բացի այդ, պահպանվում է նաև էներգիան՝

$$E = \frac{I'_1}{2} \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right) + \frac{I_3}{2} \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \right)^2 + \mu g l \cos \theta : \quad (5.6)$$

(5.4)-(5.5) հավասարումներից կստանանք

$$\dot{\varphi} = \frac{M_z - M_3 \cos \theta}{I'_1 \sin^2 \theta}, \quad (5.7)$$

$$\dot{\psi} = \frac{M_3}{I_3} - \cos \theta \frac{M_z - M_3 \cos \theta}{I'_1 \sin^2 \theta} : \quad (5.8)$$

(5.6)-ում տեղադրելով $\dot{\varphi}$ -ը և $\dot{\psi}$ -ը՝ կստանանք

$$E' = \frac{I'_1}{2} \dot{\theta}^2 + U_{\text{էֆ}}(\theta),$$

որտեղ արված են հետևյալ նշանակումները՝

$$E' = E - \frac{M_3^2}{2I_3} - \mu g l, \quad U_{\text{էֆ}}(\theta) = \frac{(M_z - M_3 \cos \theta)^2}{2I'_1 \sin^2 \theta} - \mu g l (1 - \cos \theta) :$$

Այստեղից որոշելով $\dot{\theta}$ -ը և անջատելով փոփոխականները՝ կստանանք

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{I'_1} (E' - U_{\text{էֆ}}(\theta))}} :$$

Ստացվածը էլիպտական ինտեգրալ է: Այնուհետև, (5.7)-(5.8) հավասարումների միջոցով ψ և φ անկյունները ներկայացվում են որպես θ -ից կախված ֆունկցիաների ինտեգրալներ:

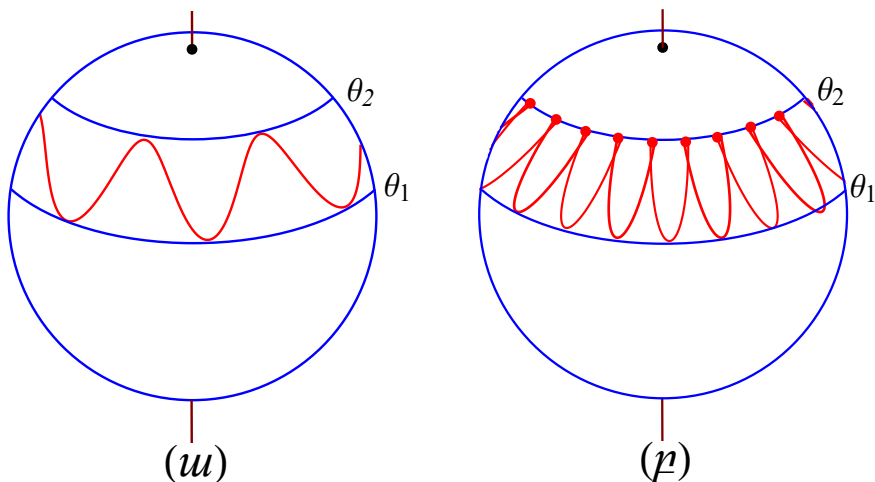
Շարժման ընթացքում θ անկյան փոփոխման տիրույթը որոշվում է $E' \geq U_{\text{էֆ}}(\theta)$ պայմանից: Երբ θ -ն ձգտում է 0-ի կամ π -ի, $U_{\text{էֆ}}(\theta)$ ֆունկցիան ձգտում է $+\infty$ -ի (եթե $M_3 \neq M_z$), իսկ θ -ի նշված արժեքների միջև ընկած տիրույթում $U_{\text{էֆ}}(\theta)$ ֆունկցիան ունի մինիմում: Հետևաբար $E' = U_{\text{էֆ}}(\theta)$ հավասարումն ունի երկու արմատներ, որոնցով որոշվում

են ուղղաձիգի նկատմամբ հողի առանցքի թեքության սահմանային արժեքները՝ θ_1 և θ_2 :

θ_1 -ից θ_2 միջակայքում θ -ի արժեքը փոփոխելիս $\dot{\varphi}$ ածանցյալի նշանը փոփոխվում է այն և միայն այն դեպքում, երբ $(M_z - M_3 \cos \theta)$ տարբերության նշանը փոփոխվում է այդ միջակայքում: Եթե վերջինիս նշանը չի փոփոխվում, ապա հողի առանցքը մոնոտոն կերպով պրեցեսիայի է ենթարկվում ուղղաձիգի նկատմամբ, միաժամանակ կատարելով վերովար տատանողական շարժում: Այդ տատանողական շարժումը կոչվում է *նուտացիա* (տե՛ս նկ.50(ա), որտեղ կորով պատկերված է հողի առանցքի գծած հետագիծն այն սֆերայի մակերևույթին, որի կենտրոնը գտնվում է հողի անշարժ կետում): Եթե $\dot{\varphi}$ -ի նշանը փոփոխվում է, ապա երկու սահմանային շրջանագծերի վրա պրեցեսիաներն ունեն հակառակ ուղղություններ, և արդյունքում ուղղաձիգի շուրջ հողի առանցքի պտտման հետագիծը բաղկացած է հանգույցներից (տե՛ս նկ.51): Համապատասխան եռաչափ մոդելը պատկերված է նկ.52-ում: Եվ վերջապես, եթե θ_1 , θ_2 անկյուններից որևէ մեկը $(M_z - M_3 \cos \theta)$ տարբերության զրոն է, ապա $\dot{\varphi}$ -ը և $\dot{\theta}$ -ը միաժամանակ հավասարվում են զրոյի համապատասխան սահմանային շրջանագծի վրա, իսկ սֆերայի հետ առանցքի հատման կետի հետագիծն ընդունում է նկ.50(բ)-ում պատկերված տեսքը:

5.10. $\theta = 0$ դեպքում x_3 և Z առանցքները համընկնում են, այնպես որ $M_3 = M_z$, $E' = 0$: Այդ առանցքի նկատմամբ պտույտը կլինի կայուն, եթե $\theta = 0$ արժեքը $U_{\text{էֆ}}(\theta)$ ֆունկցիայի մինիմումն է: θ -ի փոքր արժեքների դեպքում

$$U_{\text{էֆ}} \approx \left(\frac{M_3^2}{8I_1'} - \frac{\mu g l}{2} \right) \theta^2,$$



Նկ. 50

որտեղից ստացվում է կայունության պայմանը՝

$$M_3^2 > 4I_1' \mu g l,$$

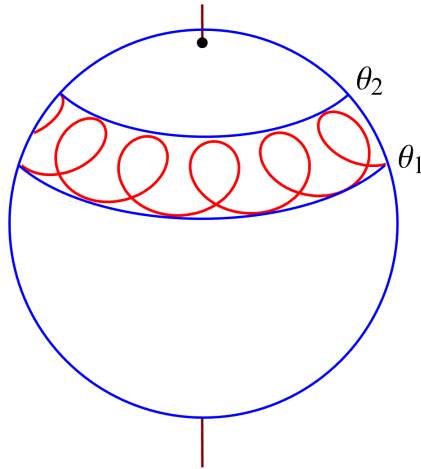
կամ

$$\Omega_3^2 > \frac{4I_1' \mu g l}{I_3^2} :$$

5.11. Առաջին մոտավորությամբ, ծանրության ուժի դաշտն անտեսելու դեպքում, հոլի առանցքն ազատ պրեցեսիա է կատարում $\vec{M}$ իմպուլսի մոմենտի ուղղության շուրջ, որը տվյալ դեպքում համապատասխանում է հոլի նուտացիային: Ընդ որում, այդ պրեցեսիայի անկյունային արագությունն է՝

$$\vec{\Omega}_u = \frac{\vec{M}}{I_1'} : \quad (5.9)$$

Հաջորդ մոտավորությամբ $\vec{M}$ իմպուլսի մոմենտը դանդաղ



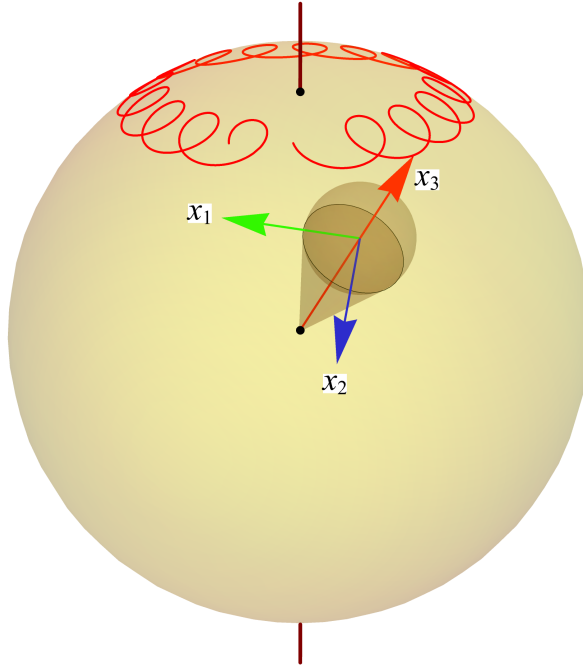
Նկ. 51

պրեցեսիա է կատարում ուղղաձիգ ուղղության նկատմամբ (տե՛ս նկ.53): Այդ պրեցեսիայի արագությունը որոշելու համար

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K}$$

ճշգրիտ շարժման հավասարումը կմիջինացնենք ըստ նուտացիայի պարբերության: Հողի վրա ազդող ծանրության ուժի մոմենտը հավասար է $\vec{K} = \mu l (\vec{n}_3 \times \vec{g})$, որտեղ $\vec{n}_3$ -ը հողի առանցքով ուղղված միավոր վեկտորն է: Համաչափությունից հետևում է, որ $\vec{K}$ -ի՝ ըստ «նուտացիայի կոնի» միջինացման արդյունքում $\vec{n}_3$ -ը փոխարինվում է $\vec{M}$ -ի ուղղությամբ իր բաղադրիչով՝ $\frac{\vec{M}}{M} \cos \alpha$ -ով, որտեղ α -ն $\vec{M}$ -ի և հողի առանցքի միջև կազմած անկյունն է: Արդյունքում ստացվում է հետևյալ հավասարումը՝

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\frac{\mu l \cos \alpha}{M} (\vec{g} \times \vec{M}) :$$



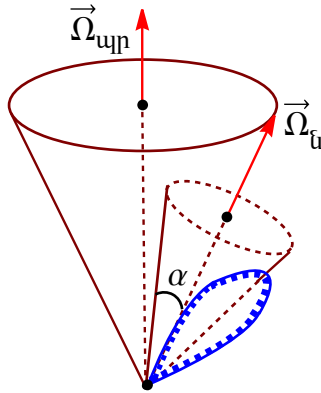
Նկ. 52

Վերջինս նշանակում է, որ $\vec{M}$ վեկտորը պրեցեսիա է կատարում $\vec{g}$ ուղղության (ուղղաձիգի) նկատմամբ՝

$$\vec{\Omega}_{\text{սր}} = -\frac{\mu l \cos \alpha}{M} \vec{g} \quad (5.10)$$

միջին անկյունային արագությամբ, որը շատ փոքր է $\vec{\Omega}_{\text{Ե-ից}}$:

Տվյալ մոտավորությամբ (5.9) և (5.10) բանաձևերի մեջ մտնող M և $\cos \alpha$ մեծությունները հաստատուն են, չնայած ճշգրիտ շարժման ինտեգրալներ չեն: Միևնույն մոտավորությամբ նրանք կապված են E և M_3 խիստ պահպանվող մեծությունների հետ հետևյալ



Նկ. 53

առնչություններով՝

$$M_3 = M \cos \alpha, \quad E \approx \frac{M^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{I_3} + \frac{\sin^2 \alpha}{I'_1} \right) :$$

5.12. Էյլերի պտտման թեորեմի համաձայն՝ ցանկացած պտույտ կարելի է ներկայացնել երեք անկյունների միջոցով: Այսինքն՝ կամայական $\hat{A}$ պտույտի մատրիցը (պտույտի մատրիցի սահմանման համար տե՛ս [7], Գլուխ 4) կարելի է ներկայացնել

$$\hat{A} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \hat{B} \hat{C} \hat{D}$$

տեսքով, որտեղ $\hat{D}, \hat{C}, \hat{B}$ մատրիցները ներկայացնում են (x, y, z) կոորդինատային համակարգի երեք հաջորդական պտույտները (տե՛ս նկ.54):

Առաջին պտույտը տեղի է ունենում z -առանցքի շուրջ, φ -անկյամբ (պտույտի մատրիցը $\hat{D}$ -ն է): Պտույտի արդյունքում x, y առանցքները

վերածվում են x', y' -ի: Այնուհետև առանցքները պտտվում են x' -ի նկատմամբ θ անկյունով (պտույտի մատրիցը $\widehat{C}$ -ն է), որի արդյունքում z առանցքը վերածվում է z' -ի: Եվ երրորդ պտույտը համապատասխանում է z' -ի նկատմամբ ψ անկյունով պտույտին (պտույտի մատրիցը $\widehat{B}$ -ն է): Նշված երեք հաջորդական պտույտներին համապատասխանող θ, φ, ψ անկյունները հենց Էյլերի անկյուններն են: Հաշվի առնելով, որ $\widehat{D}, \widehat{C}, \widehat{B}$ մատրիցները հետևյալն են՝

$$\widehat{D} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$\widehat{B} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\hat{A}$ մատրիցի բաղադրիչների համար կատանանք՝

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \cos \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi, \\
 a_{12} &= \cos \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \sin \psi, \\
 a_{13} &= \sin \psi \sin \theta, \\
 a_{21} &= -\sin \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \cos \psi, \\
 a_{22} &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi, \\
 a_{23} &= \cos \psi \sin \theta, \\
 a_{31} &= \sin \theta \sin \varphi, \\
 a_{32} &= -\sin \theta \cos \varphi, \\
 a_{33} &= \cos \theta :
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

5.13. Խնդիր 5.12-ում որոշված (5.11) բաղադրիչներով $\hat{A}$ մատրիցը, ինչպես նաև նույն խնդրում ներմուծված $\hat{B}$ մատրիցը ներկայացնելով հետևյալ տեսքով՝

$$\begin{aligned}
 \hat{A} &= \left(\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3 \right), \\
 \hat{B} &= \left(\hat{B}_1, \hat{B}_2, \hat{B}_3 \right),
 \end{aligned}$$

և հաշվի առնելով, որ

$$\begin{aligned}
 \hat{\Omega}_\varphi &= \hat{A}_3 \dot{\varphi} = \begin{pmatrix} \sin \psi \sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \dot{\varphi}, \\
 \hat{\Omega}_\theta &= \hat{B}_1 \dot{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ -\sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\theta},
 \end{aligned}$$

$$\widehat{\Omega}_\psi = \widehat{B}_3 \dot{\psi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dot{\psi},$$

անկյունային արագության Ω_i , $i = 1, 2, 3$, բաղադրիչներից կազմված $\widehat{\Omega}$ մատրիցի համար կստանանք

$$\widehat{\Omega} = \widehat{\Omega}_\varphi + \widehat{\Omega}_\theta + \widehat{\Omega}_\psi = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{pmatrix},$$

հետևաբար

$$\Omega_1 = \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi,$$

$$\Omega_2 = \dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi,$$

$$\Omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} :$$

5.14. Տե՛ս [7], Գլուխ 4:

5.15. Դիցուք x_1, x_2, x_3 կոորդինատային համակարգը կոշտ կապված է ազատ պտտվող համաչափ հողի հետ, ընդ որում, կոորդինատների սկզբնակետը համընկնում է հողի անշարժ իներցիայի կենտրոնի հետ: Էյլերի հավասարումներն ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$\dot{\Omega}_1 + \frac{I_3 - I_2}{I_1} \Omega_2 \Omega_3 = 0,$$

$$\dot{\Omega}_2 + \frac{I_1 - I_3}{I_2} \Omega_3 \Omega_1 = 0,$$

$$\dot{\Omega}_3 + \frac{I_2 - I_1}{I_3} \Omega_1 \Omega_2 = 0 :$$

Հաշվի առնելով, որ $I_1 = I_2$, երրորդ հավասարումից կստանանք $\dot{\Omega}_3 = 0$, այսինքն՝ $\Omega_3 = \text{const}$: Այնուհետև առաջին երկու հավասարումները

կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\dot{\Omega}_1 = -\omega\Omega_2, \quad \dot{\Omega}_2 = \omega\Omega_1,$$

որտեղ ներմուծված է

$$\omega = \Omega_3 \frac{I_3 - I_1}{I_1}$$

հաստատուն մեծությունը:

Ստացված հավասարումներից երկրորդը բազմապատկելով i -ով և գումարելով առաջինին՝ կստանանք

$$\frac{d}{dt} (\Omega_1 + i\Omega_2) = i\omega (\Omega_1 + i\Omega_2),$$

որտեղից էլ՝

$$\Omega_1 + i\Omega_2 = Ae^{i\omega t + i\alpha},$$

որտեղ A -ն և α -ն հաստատուններ են: Համարելով, որ $t = 0$ պահին $\Omega_2 = 0$, կստանանք $\alpha = 0$: Արդյունքում՝

$$\Omega_1 = A \cos(\omega t), \quad \Omega_2 = A \sin(\omega t):$$

Ստացված արդյունքը ցույց է տալիս, որ հոլի առանցքին ուղղահայաց հարթության վրա անկյունային արագության պրոյեկցիան պտտվում է այդ նույն հարթության մեջ ω անկյունային արագությամբ, մնալով մոդուլով անփոփոխ՝ $\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} = A$: Հաշվի առնելով նաև, որ Ω_3 -ը հաստատուն է, կարող ենք եզրակացնել, որ $\vec{\Omega}$ վեկտորը ω անկյունային արագությամբ հավասարաչափ պտտվում է հոլի առանցքի շուրջ՝ մնալով մոդուլով անփոփոխ: Հաշվի առնելով $\vec{\Omega}$ և $\vec{M}$ վեկտորների բաղադրիչների միջև գոյություն ունեցող $M_i = I_i \Omega_i$, $i = 1, 2, 3$ առնչությունները՝ կարող ենք ասել, որ նմանատիպ շարժում է իրականացնում նաև $\vec{M}$ իմպուլսի մոմենտը:

5.16. Գնդի համընթաց շարժման արագությունը (կենտրոնի արագությունը) նշանակենք $\vec{V}$ -ով, իսկ նրա պտտման անկյունային արագությունը՝ $\vec{\Omega}$ -ով: Հարթության հետ գնդի հպման կետի արագությունը կարելի է որոշել $\vec{v} = \vec{V} + (\vec{\Omega} \times \vec{r})$ ընդհանուր բանաձևում տեղադրելով $\vec{r} = -a\vec{n}$, որտեղ $\vec{n}$ -ը հպման կետում գլորման հարթության նորմալի միավոր վեկտորն է: Կապի հավասարումը ստացվում է հպման կետում սահքի բացակայության պայմանից, այսինքն՝ տրվում է հետևյալ տեսքով՝

$$\vec{V} - a(\vec{\Omega} \times \vec{n}) = 0: \quad (5.12)$$

Ըստ Դալամբերի սկզբունքի՝ յուրաքանչյուր հավող մարմնի համար գրվում են հետևյալ հավասարումները՝

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{f}, \quad \frac{d\vec{M}}{dt} = \sum (\vec{r} \times \vec{f}), \quad (5.13)$$

ընդ որում, $\vec{f}$ ուժերի մեջ ներառվում են նաև ռեակցիայի ուժերը, որոնք նախօրոք անհայտ են և որոշվում են շարժման հավասարումները լուծելիս:

Հարթության հետ գնդի հպման կետում ռեակցիայի ուժը նշանակելով $\vec{R}$ -ով՝ (5.13) հավասարումները կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\mu \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} + \vec{R}, \quad (5.14)$$

$$I \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \vec{K} - a(\vec{n} \times \vec{R}), \quad (5.15)$$

որտեղ հաշվի է առնված այն, որ $\vec{P} = \mu \vec{V}$, և որ գնդային հողի համար $\vec{M} = I \vec{\Omega}$: Կապի (5.12) հավասարումն ածանցելով ըստ ժամանակի՝

կատանանք

$$\dot{\vec{V}} = a \left(\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{n} \right) :$$

Տեղադրելով սա (5.14) հավասարման մեջ և (5.15)-ի միջոցով արտաբերելով $\dot{\vec{\Omega}}$ -ը՝ կատանանք

$$\frac{I}{a\mu} \left(\vec{F} + \vec{R} \right) = \vec{K} \times \vec{n} - a \vec{R} + a \vec{n} \left(\vec{n} \vec{R} \right),$$

որով ռեակցիայի ուժն արտահայտվում է $\vec{F}$ -ի և $\vec{R}$ -ի միջոցով: Գրելով այս հավասարման երկու կողմերի բաղադրիչները (xy հարթությունը վերցնելով գլորման հարթությունում) և հաշվի առնելով, որ $I = \frac{2}{5}\mu a^2$ (տե՛ս խնդիր 5.3 (բ))՝ կատանանք

$$\begin{aligned} R_x &= \frac{5}{7a} K_y - \frac{2}{7} F_x, \\ R_y &= -\frac{5}{7a} K_x - \frac{2}{7} F_y, \\ R_z &= -F_z : \end{aligned}$$

Տեղադրելով այս արտահայտությունները (5.14)-ում՝ կատանանք շարժման հավասարումները, որտեղ ներառված են միայն տրված արտաքին ուժը և ուժի մոմենտը.

$$\begin{aligned} \frac{dV_x}{dt} &= \frac{5}{7\mu} \left(F_x + \frac{K_y}{a} \right), \\ \frac{dV_y}{dt} &= \frac{5}{7\mu} \left(F_y - \frac{K_x}{a} \right) : \end{aligned}$$

Անկյունային արագության Ω_x , Ω_y բաղադրիչներն արտահայտվում են V_x -ով և V_y -ով (5.12) կապի հավասարման միջոցով, իսկ Ω_z -ի համար համապատասխան հավասարումը ստացվում է (5.15) հավասարման z -բաղադրիչից՝

$$\frac{2}{5}\mu a^2 \frac{d\Omega_z}{dt} = K_z :$$

5.17. Չողի կշիռը ներկայացվում է որպես նրա կենտրոնի վրա կիրառված P ուժ, որն ուղղված է ուղղաձիգով դեպի վար: R_B և R_C ռեակցիայի ուժերն ուղղված են, համապատասխանաբար, ուղղաձիգով դեպի վեր և ձողին ուղղահայաց, իսկ թելի լարվածությունն ուղղված է B -ից դեպի A : Լուծելով հավասարակշռության հավասարումները՝ կստանանք

$$R_C = \frac{Pl}{4h} \sin(2\alpha), \quad R_B = P - R_C \sin \alpha, \quad T = R_C \cos \alpha :$$

5.18. Թելերի T_A և T_B լարվածություններն ուղղված են, համապատասխանաբար, A -ից D և B -ից C : Իսկ R_A և R_B ռեակցիաներն ուղղահայաց են համապատասխան հարթություններին: Հավասարակշռության հավասարումները լուծելով՝ կստանանք

$$R_B = P, \quad T_B = \frac{P}{2} \cot \alpha,$$

$$R_A = T_B \sin \beta, \quad T_A = T_B \cos \beta :$$

5.19. A կետում թելի T լարվածությունն ուղղված է A -ից դեպի B , իսկ B կետում B -ից դեպի A : A և B կետերում R_A և R_B ռեակցիաներն ուղղահայաց են հենման հարթությանը: Եթե AC ձողի վրա ազդող ռեակցիայի ուժը նշանակենք $\vec{R}_C$ -ով, ապա BC ձողի վրա ազդող ռեակցիայի ուժը կլինի $-\vec{R}_C$: BC ձողի վրա ազդող $\vec{R}_B$, $\vec{T}$ և $-\vec{R}_C$ ուժերի մոմենտների գումարի զրո լինելու պայմանից ստացվում է, որ $\vec{R}_C$ վեկտորն ուղղված է BC -ի երկայնքով: Գրելով հավասարակշռության մյուս պայմանները ձողերից յուրաքանչյուրի համար՝ կստանանք

$$R_A = \frac{3}{4}F, \quad R_B = \frac{F}{4}, \quad R_C = \frac{F}{4 \sin \alpha}, \quad T = \frac{1}{4}F \cot \alpha,$$

որտեղ $\alpha = \angle CAB$:

5.20. Եթե $U = -m \vec{g} \vec{r}$ ծանրության ուժի դաշտում, որտեղ $\vec{g}$ -ն ծանրու-

թյան ուժին համապատասխանող արագացման վեկտորն է, անտեսենք կենտրոնախույս ուժը, որը ներառում է $\vec{\Omega}$ -ի քառակուսի, ապա շարժման հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\dot{\vec{v}} = 2 \left(\vec{v} \times \vec{\Omega} \right) + \vec{g} : \quad (5.16)$$

Այս հավասարումը կարելի է լուծել հաջորդական մոտավորություններով: Այդ նպատակով լուծումը կփնտրենք $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ տեսքով, որտեղ $\vec{v}_1$ -ը $\dot{\vec{v}}_1 = \vec{g}$ հավասարման լուծումն է, այսինքն՝ $\vec{v}_1 = \vec{g}t + \vec{v}_0$ ($\vec{v}_0$ -ն սկզբնական արագությունն է): (5.16) հավասարման մեջ տեղադրելով $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ և աջ կողմում թողնելով միայն $\vec{v}_2$ -ը՝ կստանանք հավասարում $\vec{v}_2$ -ի համար՝

$$\dot{\vec{v}}_2 = 2 \left(\vec{v}_1 \times \vec{\Omega} \right) = 2t \left(\vec{g} \times \vec{\Omega} \right) + 2 \left(\vec{v}_0 \times \vec{\Omega} \right) :$$

Ինտեգրելով վերջինս՝ կստանանք

$$\vec{r} = \vec{h} + \vec{v}_0 t + \frac{gt^2}{2} + \frac{t^3}{2} \left(\vec{g} \times \vec{\Omega} \right) + t^2 \left(\vec{v}_0 \times \vec{\Omega} \right), \quad (5.17)$$

որտեղ $\vec{h}$ -ը մարմնի սկզբնական դիրքի վեկտորն է:

Եթե z առանցքն ուղղենք ուղղաձիգով դեպի վեր, իսկ x առանցքը՝ միջօրեականով դեպի բևեռ, ապա

$$g_x = g_y = 0, \quad g_z = -g, \quad \Omega_x = \Omega \cos \lambda, \quad \Omega_y = 0, \quad \Omega_z = \Omega \sin \lambda,$$

որտեղ λ -ն լայնությունն է (որոշակիության համար՝ հյուսիսային): (5.17) արտահայտության մեջ տեղադրելով $\vec{v}_0 = 0$, կստանանք

$$x = 0, \quad y = -\frac{t^3}{3} g \Omega \cos \lambda :$$

Այստեղ հաշվի առնելով, որ անկման ժամանակահատվածը հավասար է

$$t \approx \sqrt{\frac{2h}{g}}, \text{ի վերջո կստանանք}$$

$$x = 0, \quad y = -\frac{1}{3} \left(\frac{2h}{g} \right)^{3/2} g \Omega \cos \lambda,$$

ընդ որում, y -ի բացասական արժեքները համապատասխանում են դեպի արևելք շեղմանը:

5.21. Կոորդինատների xz հարթությունը կընտրենք այնպիսին, որ $\vec{v}_0$ -ն ընկած լինի նրա մեջ: Սկզբնական բարձրությունը կհամարենք $h = 0$: Կողմնային (հորիզոնական) շեղումը տրվում է հետևյալ արտահայտությամբ (տե՛ս խնդիր 5.20, (5.17) բանաձև.)՝

$$y = -\frac{t^3}{3} g \Omega_x + t^2 (\Omega_x v_{0z} - \Omega_z v_{0x}),$$

կամ հաշվի առնելով $t \approx \frac{2v_{0z}}{g}$ թռիչքի ժամանակահատվածը՝

$$y = \frac{4v_{0z}^2}{g^2} \left(\frac{1}{3} \Omega_x v_{0z} - \Omega_z v_{0x} \right):$$

5.22. Անտեսելով ճոճանակի ուղղաձիգ շեղումը որպես երկրորդ կարգի փոքր մեծություն՝ կարելի է համարել, որ մարմինը շարժվում է xy հորիզոնական հարթության մեջ: Անտեսելով Ω^2 պարունակող անդամները՝ շարժման հավասարումները կընդունեն հետևյալ տեսքը՝

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 2\Omega_z \dot{y}, \quad \ddot{y} + \omega^2 y = -2\Omega_z \dot{x},$$

որտեղ ω -ն ճոճանակի տատանման հաճախությունն է՝ Երկրի պտույտը հաշվի չառնելու դեպքում: Երկրորդ հավասարումը բազմապատկելով i -ով և գումարելով առաջինին՝ կստանանք մեկ հավասարում՝

$$\ddot{\xi} + 2i\Omega_z \dot{\xi} + \omega^2 \xi = 0,$$

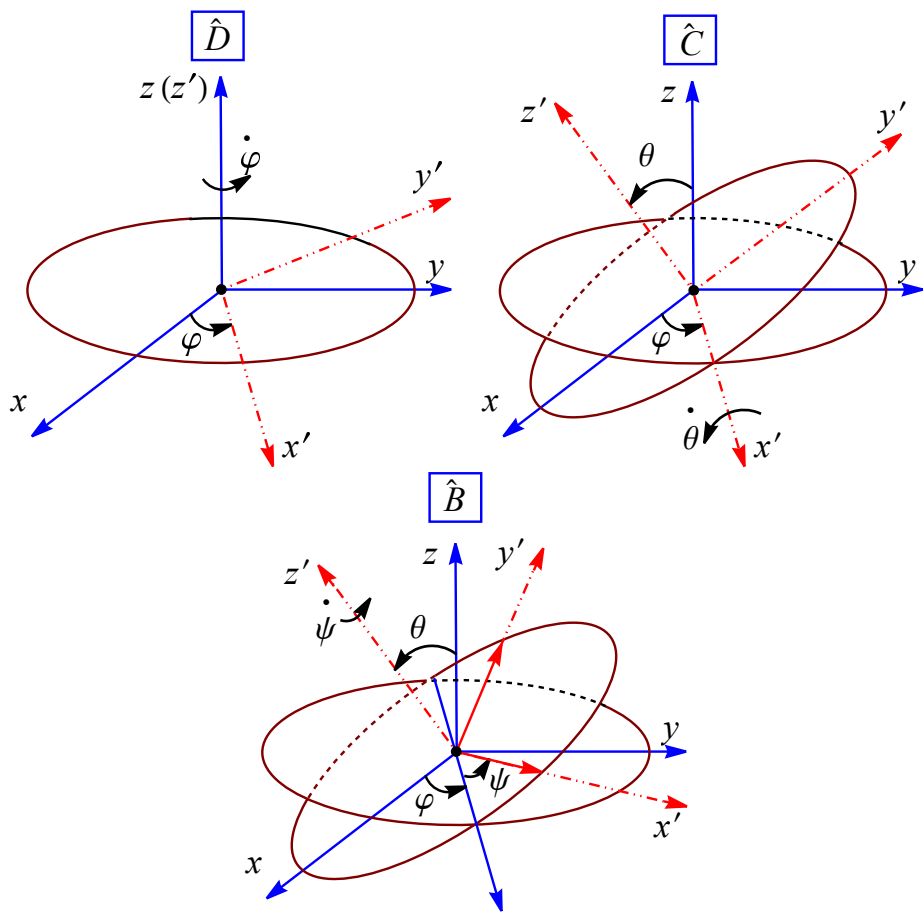
որը գրված է $\xi = x + iy$ կոմպլեքս մեծության համար: $\Omega_z \ll \omega$ դեպքում այս հավասարման լուծումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\xi = e^{-i\Omega_z t} (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}),$$

կամ որ նույնն է՝

$$x + iy = e^{-i\Omega_z t} (x_0 + iy_0),$$

որտեղ $x_0(t)$ և $y_0(t)$ ֆունկցիաները նկարագրում են ճոճանակի հետագիծը՝ Երկրի պտույտը հաշվի չառնելու դեպքում: Հետևաբար այդ պտույտը հաշվի առնելը հանգեցնում է ուղղաձիգ առանցքի շուրջ Ω_z անկյունային արագությամբ հետագծի պտտմանը:



Ул. 54

ԳԼՈՒԽ 6

ԿԱՆՈՆԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

6.1. Համիլտոնի հավասարումները հետևյալն են՝

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} :$$

$$\text{ա) Պատ.՝} \begin{cases} \dot{r} = p_r, & \dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{r^3 \sin^2 \theta}, \\ \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{r^2 \sin^2 \theta}, & \dot{p}_\theta = \frac{p_\theta^2 \cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta} - \cos \theta : \end{cases}$$

$$\text{բ) Պատ.՝} \begin{cases} \dot{u} = \frac{p_u}{u^2 + v^2}, & \dot{p}_u = \frac{u(p_u^2 + p_v^2)}{(u^2 + v^2)^2} - 1, \\ \dot{v} = \frac{p_v}{u^2 + v^2}, & \dot{p}_v = \frac{v(p_u^2 + p_v^2)}{(u^2 + v^2)^2} : \end{cases}$$

$$\text{գ) Պատ.՝} \dot{r} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \quad \dot{p} = -1:$$

$$\text{դ) Պատ.՝} \dot{x} = \frac{p_y}{tx^2y}, \quad \dot{y} = \frac{p_x}{tx^2y}, \quad \dot{p}_x = \frac{2p_x p_y}{tx^3y}, \quad \dot{p}_y = \frac{p_x p_y}{tx^2y^2}:$$

$$\text{ե) Պատ.՝} \dot{r} = p - r^2, \quad \dot{p} = 2r(p - r^2):$$

$$\text{զ) Պատ.՝} \dot{x} = p[\lambda(p^2 + \omega^2 x^2) + 1], \quad \dot{p} = -\omega^2 x[\lambda(p^2 + \omega^2 x^2) + 1]:$$

6.2. Համիլտոնի ֆունկցիան հետևյալն է՝

$$H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L,$$

ընդ որում, բոլոր արագությունները պետք է արտահայտել իմպուլսների և կոորդինատների միջոցով:

ա) Տեղադրելով

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}, \quad p_z = m\dot{z}$$

առնչությունները էներգիայի

$$E = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z),$$

բանաձևում՝ կատանանք

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z) :$$

բ) Տեղադրելով

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2}, \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

առնչությունները էներգիայի

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + U(r, \phi, z),$$

բանաձևում՝ կատանանք

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} + p_z^2 \right) + U(r, \phi, z) :$$

գ) Տեղադրելով

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2 \theta}$$

առնչությունները էներգիայի բանաձևում՝ կատանանք

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r, \theta, \varphi) :$$

դ) Օգտվելով

$$p = \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad v = \frac{cp}{\sqrt{m^2 c^2 + p^2}}$$

և

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc}{\sqrt{m^2 c^2 + p^2}}$$

առնչություններից՝ կատանանք

$$H = pv - L = c\sqrt{m^2 c^2 + p^2} :$$

ե) Ինդիր 3.2-ում ստացված (3.4) արտահայտությամբ տրվող լագրանժիանին համապատասխանող էներգիան գրենք հետևյալ տեսքով՝

$$E = \frac{m}{2} \sum_i \vec{v}_i^2 - \frac{m^2}{2(M + nm)} \left(\sum_i \vec{v}_i \right)^2 + U,$$

որտեղ $\vec{r}_i$ -ի փոխարեն տեղադրված է $\vec{v}_i$: Իմպուլսի համար կատանանք՝

$$\vec{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = m \vec{v}_i - \frac{m^2}{M + nm} \sum_k \vec{v}_k :$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$\sum_i \vec{p}_i = m \sum_i \vec{v}_i - \frac{nm^2}{M + nm} \sum_i \vec{v}_i = \frac{Mm}{M + nm} \sum_i \vec{v}_i,$$

$$\vec{v}_i = \frac{\vec{p}_i}{m} + \frac{m}{M + nm} \sum_k \vec{v}_k = \frac{\vec{p}_i}{m} + \frac{1}{M} \sum_k \vec{p}_k :$$

Տեղադրելով այս առնչությունները E -ի մեջ՝ կստանանք

$$H = \frac{1}{2m} \sum_i \vec{p}_i^2 + \frac{1}{2M} \left(\sum_i \vec{p}_i \right)^2 + U : \quad (6.1)$$

զ) Օգտվելով

$$p_y = x\dot{y}, \quad p_x = \frac{1}{\dot{x}}$$

առնչություններից՝ կստանանք

$$H = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - L = 1 + \frac{p_y^2}{2x} + \ln p_x :$$

է) Պատ.՝

$$H = \frac{p^2}{2(1+2\beta x)} + \frac{\omega^2 x^2}{2} + \alpha x^3 :$$

Մասնավորապես, փոքր տատանումների դեպքում ($|\alpha x| \ll \omega^2$, $|\beta x| \ll 1$) ստացվում է

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} + \alpha x^3 - \beta x p^2 + 2\beta^2 x^2 p^2 - \dots,$$

որտեղ հարմոնիկ օսցիլյատորի համիլտոնիանին գումարված է α -ից և β -ից գծային օրենքով կախված $\delta H = \alpha x^3 - \beta x p^2$ մասը, որը կապված է համապատասխան Լագրանժի ֆունկցիայում ավելացված δL մասի հետ $\delta H = -\delta L$ առնչությամբ:

6.3. ա) Լագրանժի ֆունկցիան է՝

$$L = \sum_k p_k \dot{q}_k - H = \sum_k p_k \frac{\partial H}{\partial p_k} - H,$$

ընդ որում, իմպուլսներն անհրաժեշտ է փոխարինել արագություններով:

Արդյունքում կստանանք

$$L = \frac{\dot{r}^2 \theta^2}{2} + \frac{\dot{\theta}^2 r^2 \sin^2 \theta}{2} - r :$$

բ) Պատ.՝ $L = \ln(\dot{x} - 1) + \frac{\dot{y}^2}{2} + 1:$

գ) Պատ.՝ $L = \dot{x}\dot{y} - \frac{\dot{y}^2 t}{2}:$

6.4. Պատ.՝ $H = \frac{p^2}{2m} - \vec{\Omega} (\vec{r} \times \vec{p}) + U:$

6.5. Դիցուք $\vec{\varepsilon}$ -ն անվերջ փոքր տեղափոխության վեկտորն է, ընդ որում,

$$\vec{r}_a \rightarrow \vec{r}'_a = \vec{r}_a + \vec{\varepsilon}, \quad \vec{p}_a \rightarrow \vec{p}'_a = \vec{p}_a$$

ձևափոխության արդյունքում Համիլտոնի ֆունկցիան մնում է անփոփոխ, այսինքն՝

$$H(\vec{r}_a, \vec{p}_a) = H(\vec{r}'_a, \vec{p}'_a) :$$

Այստեղից ստացվում է $\sum_a \frac{\partial H}{\partial \vec{r}_a} = 0$: Օգտագործելով Համիլտոնի հավասարումը՝ կստանանք

$$\dot{\vec{P}} = \sum_a \dot{\vec{p}}_a = - \sum_a \frac{\partial H}{\partial \vec{r}_a} = 0,$$

հետևաբար

$$\vec{P} = \text{const} :$$

Անվերջ փոքր $\vec{\delta\varphi}$ պտույտի դեպքում

$$\vec{r}_a \rightarrow \vec{r}'_a = \vec{r}_a + (\vec{\delta\varphi} \times \vec{r}_a), \quad \vec{p}_a \rightarrow \vec{p}'_a = \vec{p}_a + (\vec{\delta\varphi} \times \vec{p}_a),$$

$$H(\vec{r}_a, \vec{p}_a) = H(\vec{r}'_a, \vec{p}'_a),$$

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_a \left\{ \frac{\partial H}{\partial \vec{r}_a} (\vec{\delta\varphi} \times \vec{r}_a) + \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_a} (\vec{\delta\varphi} \times \vec{p}_a) \right\} \\
&= \sum_a \left\{ -\dot{\vec{p}}_a (\vec{\delta\varphi} \times \vec{r}_a) + \dot{\vec{r}}_a (\vec{\delta\varphi} \times \vec{p}_a) \right\} \\
&= -\vec{\delta\varphi} \sum_a \frac{d}{dt} (\vec{r}_a \times \vec{p}_a),
\end{aligned}$$

կամ որ նույնն է՝

$$\vec{M} = \sum_a (\vec{r}_a \times \vec{p}_a) = \text{const} :$$

6.6. ա) Պատ.՝

$$\begin{aligned}
\vec{p}(t) &= \vec{p} + \vec{F}t, \\
\vec{r}(t) &= \vec{r} + \frac{\vec{p}t}{m} + \frac{\vec{F}t^2}{2m} :
\end{aligned}$$

բ) Պատ.՝

$$\begin{aligned}
p(t) &= p \cos(\omega t) - m\omega q \sin(\omega t), \\
q(t) &= q \cos(\omega t) + \frac{p}{m\omega} \sin(\omega t) :
\end{aligned}$$

6.7. ա) Պատ.՝

$$\begin{aligned}
\{M_i, x_j\} &= - \sum_k e_{ijk} x_k, \\
\{M_i, p_j\} &= - \sum_k e_{ijk} p_k, \\
\{M_i, M_j\} &= - \sum_k e_{ijk} M_k,
\end{aligned}$$

որտեղ e_{ijk} -ն լրիվ անտիսիմետրիկ թենզոր է, որի ոչ զրոյական

բաղադրիչներն են՝

$$e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1,$$

$$e_{132} = e_{321} = e_{213} = -1 :$$

բ) Պատ.՝

$$\left\{ \vec{a} \cdot \vec{p}, \vec{b} \cdot \vec{r} \right\} = \vec{a} \cdot \vec{b},$$

$$\begin{aligned} \left\{ \vec{a} \cdot \vec{M}, \vec{b} \cdot \vec{r} \right\} &= \left\{ \sum_i a_i M_i, \sum_j b_j x_j \right\} = \sum_{ij} a_i b_j \{M_i, x_j\} \\ &= - \sum_{ijk} a_i b_j e_{ijk} x_k = - \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \vec{r}, \end{aligned}$$

$$\left\{ \vec{a} \cdot \vec{M}, \vec{b} \cdot \vec{M} \right\} = - \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \vec{M} :$$

գ) Պատ.՝

$$\left\{ \vec{M}, \vec{r} \cdot \vec{p} \right\} = 0,$$

$$\left\{ \vec{p}, r^n \right\} = n \vec{r} r^{n-2},$$

$$\left\{ \vec{p}, (\vec{a} \cdot \vec{r})^2 \right\} = 2 \vec{a} (\vec{a} \cdot \vec{r}) :$$

6.8. ա) Պատ.՝ $\{M_i, \Lambda_{jk}\} = - \sum_l e_{ijl} \Lambda_{lk} - \sum_l e_{ikl} \Lambda_{lj} :$

բ) Պատ.՝ $\{\Lambda_{jk}, \Lambda_{il}\} = \delta_{ij} M_{lk} + \delta_{ik} M_{lj} + \delta_{jl} M_{ik} + \delta_{kl} M_{ij},$ որտեղ
 $M_{lk} = p_k x_l - p_l x_k :$

6.9. Սկալյար ֆունկցիան կարող է կախված լինել $\vec{r}$ և $\vec{p}$ վեկտորների բաղադրիչներից միայն $\vec{r}^2$, $\vec{p}^2$, $\vec{r} \cdot \vec{p}$ կոմբինացիաների միջոցով:
 Ուստի

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial \varphi}{\partial (\vec{r}^2)} 2 \vec{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial (\vec{p} \cdot \vec{r})} \vec{p},$$

և նույնը $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{p}}$ համար՝ $\vec{r} \rightleftharpoons \vec{p}$ տեղափոխությամբ: Պահանջվող առնչությունը կարելի է ստանալ՝ օգտագործելով Պուասոնի փակագծերի սահմանումը և հաշվի առնելով ածանցման կանոնները:

6.10. Համիլտոն-Յակոբիի դիֆերենցիալ հավասարումը, որով որոշվում է S գործողությունը, ստացվում է հետևյալ կերպ. $H(p_k, q_k, t)$ Համիլտոնի ֆունկցիայում p_k իմպուլսները փոխարինվում են $\frac{\partial S}{\partial q_k}$ ածանցյալներով, և ստացված արտահայտությունը հավասարեցվում է գործողության ըստ t -ի ածանցյալին՝ բացասական նշանով, այսինքն՝ $-\frac{\partial S}{\partial t}$ -ին: Այդ հավասարման լուծման արդյունքում ստացվող ըստ q_k -երի ածանցյալները p_k իմպուլսներն են, իսկ ըստ t -ի ածանցյալը էներգիան է՝ բացասական նշանով: Հետագծի հավասարումները ստացվում են, երբ ըստ հավասարման պարամետրերի (դրանց քանակը հավասար է ազատության աստիճանների թվին) ածանցյալները հավասարեցվում են նոր հաստատունների:

ա) Ազատ մասնիկի դեպքում Համիլտոնի ֆունկցիան է՝

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m},$$

իսկ Համիլտոն-Յակոբիի հավասարումն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 :$$

Եթե H -ը բացահայտ կախված չէ ժամանակից, այսինքն՝ էներգիան պահպանվում է, ապա $\frac{\partial S}{\partial t} = -E$ հավասարումից հետևում է, որ t -ն մտնում է S -ի մեջ $-Et$ տեսքով: Նմանապես, $\frac{\partial S}{\partial q_k} = p_k$ հավասարումից հետևում է, որ ցիկլային կոորդինատները մտնում են S -ի մեջ $p_k q_k$ տեսքով: Տվյալ դեպքում $E = \text{const}$, իսկ x, y, z կոորդինատները ցիկլային

են: Հետևաբար

$$S = p_x x + p_y y + p_z z - Et :$$

Տեղադրելով այս արտահայտությունը Համիլտոնի հավասարման մեջ՝ կստանանք

$$E = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} :$$

Ածանցելով S -ն ըստ p_x, p_y, p_z հաստատունների և հավասարեցնելով x_0, y_0, z_0 նոր հաստատուններին՝ կստանանք

$$x = x_0 + \frac{p_x}{m}t, \quad y = y_0 + \frac{p_y}{m}t, \quad z = z_0 + \frac{p_z}{m}t :$$

բ) Համիլտոնի ֆունկցիան է՝

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2},$$

իսկ Համիլտոն-Յակոբիի հավասարումն է՝

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} x^2 = 0 :$$

Տեղադրելով $S = -Et + f(x)$ ՝ կստանանք

$$\left(\frac{df}{dx} \right)^2 = 2E - x^2,$$

որտեղից էլ՝

$$f(x) = \int \sqrt{2E - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{2E - x^2} + E \arcsin \frac{x}{\sqrt{2E}} :$$

Տեղադրելով S -ի մեջ՝ կստանանք

$$S = \frac{x}{2} \sqrt{2E - x^2} + E \arcsin \frac{x}{\sqrt{2E}} - Et :$$

Ածանցելով սա ըստ հաստատուն E -ի և հավասարեցնելով $-t_0$ -ի՝

կստանանք

$$t - t_0 = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2E}}$$

կամ

$$x = \sqrt{2E} \sin (t - t_0) :$$

զ) Եթե x առանցքն ուղղված է դաշտի ուղղությամբ, ապա Համիլտոնի ֆունկցիան հետևյալն է՝

$$H = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - x :$$

Այստեղ y և z կոորդինատները ցիկլային են, հետևաբար

$$S = -Et + p_y y + p_z z + f(x) :$$

Այժմ $f(x)$ -ը որոշելու նպատակով անհրաժեշտ է այս արտահայտությունը տեղադրել Համիլտոն-Յակոբիի հետևյալ հավասարման մեջ՝

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] - x = 0 :$$

Արդյունքում կստանանք՝

$$f(x) = \int \sqrt{2E - p_y^2 - p_z^2 + 2x} dx = \frac{1}{3} (2E - p_y^2 - p_z^2 + 2x)^{3/2} ,$$

որտեղից է՝

$$S = -Et + p_y y + p_z z + \frac{1}{3} (2E - p_y^2 - p_z^2 + 2x)^{3/2} :$$

Աձանցելով սա ըստ E -ի և հավասարեցնելով հաստատուն p_{0x} -ին՝ կստանանք

$$x = x_0 + p_{0x} t + \frac{t^2}{2} ,$$

որտեղ $x_0 = \frac{p_{0x}^2 + p_y^2 + p_z^2}{2} - E$ անդամը սկզբնական կոորդինատն է:
Ածանցելով S -ի արտահայտությունն ըստ p_y -ի՝ կստանանք

$$y = y_0 + p_y \sqrt{2E - p_y^2 - p_z^2 + 2x} :$$

Նմանապես որոշվում է z կոորդինատը:

դ) Համիլտոնի ֆունկցիան է՝

$$H = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) + \frac{1}{r},$$

իսկ Համիլտոն-Յակոբիի հավասարումն է՝

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + \frac{1}{r} = 0 :$$

Քանի որ φ -ն ցիկլային կոորդինատ է, հետևաբար S -ը կփնտրենք հետևյալ տեսքով՝

$$S = -Et + p_\varphi \varphi + f(r) :$$

Տեղադրելով այն հավասարման մեջ՝ $f(r)$ -ի համար կստանանք

$$f(r) = \int \sqrt{2E - \frac{2}{r} - \frac{p_\varphi^2}{r^2}} dr :$$

Հաշվելով ինտեգրալը՝ կստանանք

$$S = -Et + p_\varphi \varphi + \sqrt{2Er^2 - 2r - p_\varphi^2} - p_\varphi \arccos \frac{p_\varphi^2/r + 1}{\sqrt{2Ep_\varphi^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{2E}} \operatorname{arccosh} \frac{2Er - 1}{\sqrt{2Ep_\varphi^2 + 1}} :$$

Ստացված արտահայտությունն ածանցելով ըստ p_φ -ի և ըստ E -ի, և հավասարեցնելով հաստատունների՝ կգտնենք r -ի և φ -ի կախումը t -ից:

ե) Գլանային կոորդինատային համակարգում Համիլտոնի ֆունկցիան հետևյալն է՝

$$H = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2 \right) + \frac{1}{r},$$

որտեղից էլ՝

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{1}{r} = 0 :$$

Քանի որ z -ը և φ -ն ցիկլային կոորդինատներ են, ապա

$$S = -Et + p_\varphi \varphi + p_z z + f(r) :$$

Այստեղ $f(r)$ -ը կորոշվի՝ S -ի արտահայտությունը հավասարման մեջ տեղադրելով: Արդյունքում կստանանք

$$f(r) = \int \sqrt{(2E - p_z^2) - \frac{2}{r} - \frac{p_\varphi^2}{r^2}} dr,$$

այսինքն՝

$$S = -Et + p_\varphi \varphi + p_z z + \sqrt{(2E - p_z^2) r^2 - 2r - p_\varphi^2} - p_\varphi \arccos \frac{p_\varphi^2/r - 1}{\sqrt{(2E - p_z^2) p_\varphi^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{2E - p_z^2}} \operatorname{arccosh} \frac{(2E - p_z^2) r - 1}{\sqrt{(2E - p_z^2) p_\varphi^2 + 1}} :$$

Ստացված արտահայտությունն ածանցելով ըստ p_φ -ի և ըստ E -ի, t -ի և φ -ի համար կստանանք միևնույն հավասարումները, ինչ նախորդ դեպքում, իսկ ըստ p_z -ի ածանցելիս կստանանք

$$z + z_0 = p_z (t + t_0) :$$

զ) Սֆերիկ կոորդինատային համակարգում Համիլտոնի ֆունկցիան

հետևյալն է՝

$$H = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + \frac{1}{r},$$

որտեղից էլ՝

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + \frac{1}{r} = 0 :$$

S -ը կփնտրենք

$$S = -Et + p_\varphi \varphi + f(r) + F(\theta)$$

տեսքով: Տեղադրելով վերջինս հավասարման մեջ՝ կստանանք

$$2Er^2 - 2r - r^2 \left(\frac{df}{dr} \right)^2 = \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} + \left(\frac{dF}{d\theta} \right)^2 :$$

Աջ մասում գրված արտահայտությունը կախված է միայն θ -ից, իսկ ձախ մասում գրվածը՝ r -ից: Ուստի երկու կողմերն էլ հավասար են միևնույն α հաստատունին: Արդյունքում կստանանք

$$f(r) = \int \sqrt{2E - \frac{2}{r} - \frac{\alpha}{r^2}} dr$$

և

$$F(\theta) = \int \sqrt{\alpha - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta}} d\theta :$$

Ինտեգրալները հաշվելով՝ կստանանք

$$\begin{aligned} S = & -Et + p_\varphi \varphi + \sqrt{2Er^2 - 2r - \alpha} \\ & - \sqrt{\alpha} \arccos \frac{\alpha/r - 1}{\sqrt{2E\alpha + 1}} - \frac{1}{\sqrt{2E}} \operatorname{arccosh} \frac{2Er - 1}{\sqrt{2E\alpha + 1}} \\ & + \sqrt{\alpha} \arccos \frac{\sqrt{\alpha} \cos \theta}{\sqrt{\alpha - p_\varphi^2}} + \frac{p_\varphi}{2} \arcsin \frac{2 \csc^2 \theta \cdot p_\varphi^2 - (\alpha + p_\varphi^2)}{\alpha - p_\varphi^2} : \end{aligned}$$

Ածանցելով այս արտահայտությունն ըստ E, p_φ, α -ի և հավասարեցնելով նոր հաստատունների՝ կստանանք շարժման օրենքները:

6.11. Անկման կտրվածքն է՝

$$\sigma = \begin{cases} \pi R^2 + \frac{\pi a}{E} \cos \alpha, & a \cos \alpha > -ER^2, \\ 0, & a \cos \alpha < -ER^2, \end{cases}$$

որտեղ α -ն $\vec{v}_\infty$ -ի և $\vec{a}$ -ի կազմած անկյունն է:

6.12. Ֆինիտ շարժման հավասարումը (երբ մասնիկը չի ընկնում կենտրոնի վրա) հետևյալ տեսքն ունի՝

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos f(\theta),$$

որտեղ

$$p = \frac{\beta}{m\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2E\beta}{m\alpha^2}}, \quad f(\theta) = \int \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{2ma}{\beta} \cos \theta}},$$

իսկ E և β հաստատունները բավարարում են $-\frac{m\alpha^2}{2\beta} < E < 0$ և $\beta > 0$ անհավասարություններին:

Եթե $0 < \beta < 2ma$, ապա հետագիծը «զցնում» է $r_1 \leq r \leq r_2$ և $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ անհավասարություններով տրվող տիրույթը, որտեղ $r_{1,2} = \frac{p}{1 \pm e}$, $\theta_1 = \arcsin\left(\frac{\beta}{2ma}\right)$, $\theta_2 = 2\pi - \theta_1$: Հետագիծը կլինի փակ, եթե

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{2ma}{\beta} \cos \theta}} = \pi \frac{n}{l},$$

որտեղ n -ը և l -ն ամբողջ թվեր են:

Եթե $\beta = 2ma$, ապա

$$f(\theta) = \sqrt{2} \ln \tan \frac{\theta}{4} + C_1,$$

և հետագիծն ընկած է $r_1 \leq r \leq r_2$ օղակի ներսում:

Եթե $\beta > 2ma$, ապա հետագիծը լցնում է $r_1 \leq r \leq r_2$ օղակը:
Մասնավորապես, եթե $\beta \gg 2ma$, ապա

$$f(\theta) = \theta + \zeta \sin \theta + \frac{3}{4} \zeta^2 \theta + \frac{3}{8} \zeta^2 \sin(2\theta) + C_2, \quad (6.2)$$

որտեղ $\zeta = \frac{ma}{\beta}$: Վերջինս նկարագրում է պրեցեսիա կատարող թույլ դեֆորմացված էլիպս, որի դեֆորմացիայի բնույթը պայմանավորված է իր կողմնորոշմամբ: (6.2) հավասարությունը ճիշտ է, երբ $\zeta^{-2} \gtrsim \theta \gtrsim \arccos(-\zeta^{-2})$: Համապատասխան հետագիծը կլինի փակ, եթե

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{2ma}{\beta} \cos \theta}} = 2\pi \frac{n}{l} :$$

Բաժին III

ՀԱՎԵԼՎԱԾՆԵՐ

ՀԱՎԵԼՎԱԾ 1

ՎԵԿՏՈՐԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶ

Դասական մեխանիկայում և դասական էլեկտրադինամիկայում հանդիպող ֆիզիկական մեծությունները ժամանակից և տարածական կոորդինատներից կախված ֆունկցիաներ են: Այդ մեծությունների տարածական փոփոխությունները նկարագրելու համար անհրաժեշտ է կատարել համապատասխան կոորդինատային համակարգի ընտրություն:

Ցանկացած կետ կամ վեկտոր կարելի է դիտարկել կամայական կորագիծ կոորդինատային համակարգում, ընդ որում, վերջինս կարող է լինել օրթոգոնալ կամ ոչ օրթոգոնալ: *Օրթոգոնալ* է կոչվում այն կոորդինատային համակարգը, որի կոորդինատային առանցքները (կորերը) փոխուղղահայաց են:

Ոչ օրթոգոնալ կոորդինատային համակարգերի հետ աշխատելը դժվար է, և դրանք կիրառական նշանակություն գրեթե չունեն: Օրթոգոնալ կոորդինատային համակարգի օրինակներ են դեկարտյան, գլանային, սֆերիկ, կոնական, էլիպսոիդային կոորդինատային համակարգերը: Որևէ խնդիր լուծելիս համապատասխան կոորդինատային համակարգի ճիշտ ընտրությամբ կարելի է զգալիորեն հեշտացնել խնդրի լուծման պրոցեսը: Ստորև կդիտարկենք երեք առավել հայտնի կոորդինատային համակարգերը՝ դեկարտյան, գլանային և սֆերիկ:

Դեկարտյան համակարգ

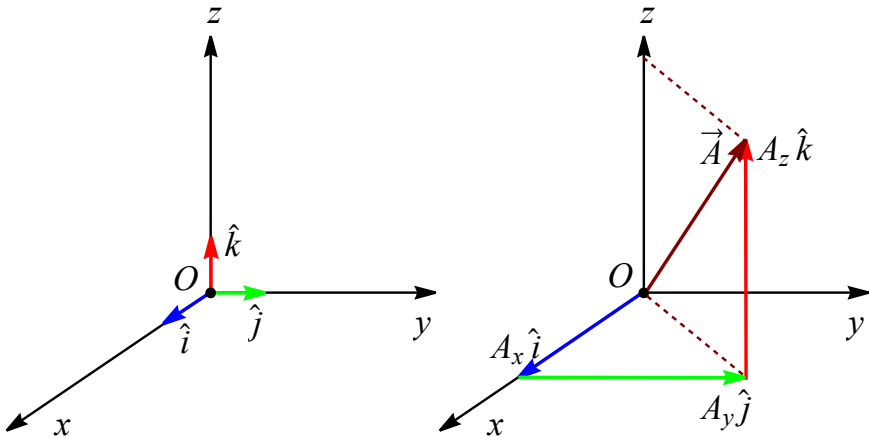
Դեկարտյան կոորդինատային համակարգում կամայական P կետի դիրքը կարելի է նկարագրել (x, y, z) կոորդինատներով (տե՛ս նկ.55):

Կոորդինատների փոփոխման տիրույթներն են՝

$$-\infty < x < \infty,$$

$$-\infty < y < \infty,$$

$$-\infty < z < \infty :$$



Նկ. 55

Կամայական $\vec{A}$ վեկտոր կարելի է նկարագրել (A_x, A_y, A_z) թվերի եռյակով հետևյալ կերպ՝

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}, \quad (\leq 1.1)$$

որտեղ $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ վեկտորները, համապատասխանաբար, x -, y - և z -ուղղություններով միավոր վեկտորներն են (որդեր): Նմանապես, P կետի շառավիղ վեկտորի համար կարելի է գրել

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} :$$

Երկարության dl տարրի (*զծային տարր* կամ *զծային էլմենտ*) քառակուսին

տրվում է հետևյալ արտահայտությամբ՝

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

իսկ համապատասխան ծավալային տարրն է՝

$$dV = dxdydz :$$

Վեկտորական հանրահաշիվ

Այստեղ բերված են վեկտորների սկալյար և վեկտորական արտադրյալների սահմանումները և հիմնական հատկությունները: Կամայական

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \text{ և } \vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

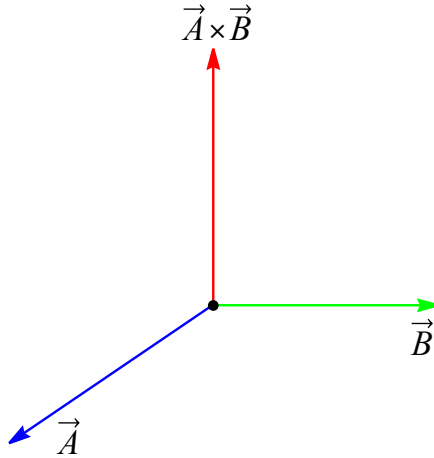
վեկտորների սկալյար արտադրյալը սահմանվում է որպես

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{A} = AB \cos \alpha = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z,$$

որտեղ α -ն $\vec{A}$ և $\vec{B}$ վեկտորների կազմած անկյունն է:

$\vec{A}$ և $\vec{B}$ վեկտորների վեկտորական արտադրյալը սահմանվում է որպես $\vec{A} \times \vec{B}$ վեկտոր, որի բացարձակ մեծությունը հավասար է այդ վեկտորներով կառուցված զուգահեռագծի մակերեսին, իսկ ուղղությունը որոշվում է աջ ձեռքի կանոնով (տե՛ս նկ.56), այսինքն՝

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \alpha,$$



Նկ. 56

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k},$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} :$$

$\vec{A}$, $\vec{B}$ և $\vec{C}$ երեք վեկտորների խառը արտադրյալը սահմանվում է որպես մի սկալյար, որը հավասար է այդ վեկտորներով կառուցված զուգահեռանիստի ծավալին, այսինքն՝

$$\vec{A} (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} (\vec{A} \times \vec{B}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$= -\vec{B} (\vec{A} \times \vec{C}) = -\vec{A} (\vec{C} \times \vec{B}) :$$

$\vec{A}$, $\vec{B}$ և $\vec{C}$ երեք վեկտորների կրկնակի վեկտորական արտադրյալը որոշվում

Է «BAC-CAB» կանոնով, այսինքն՝

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = -(\vec{B} \times \vec{C}) \times \vec{A} :$$

Եթե $\vec{A}$ և $\vec{B}$ վեկտորները և φ սկալյարը t սկալյարից կախված ֆունկցիաներ են, ապա օգտվելով սովորական ածանցման կանոններից՝ կստանանք

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{A} + \vec{B}) &= \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{B}}{dt}, \\ \frac{d}{dt} (\varphi \vec{A}) &= \varphi \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \vec{A}, \\ \frac{d}{dt} (\vec{A} \cdot \vec{B}) &= \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt}, \\ \frac{d}{dt} (\vec{A} \times \vec{B}) &= \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}, \end{aligned}$$

և այլն:

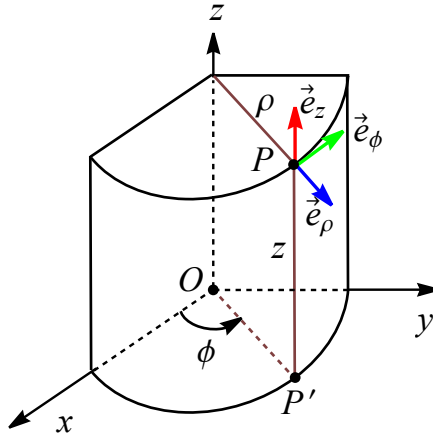
Գլանային համակարգ

Գլանային կոորդինատային համակարգից հարմար է օգտվել այնպիսի խնդիրներում, որտեղ առկա է առանցքային համաչափություն:

Գլանային կոորդինատային համակարգում կամայական P կետի դիրքը կարելի է նկարագրել (ρ, ϕ, z) կոորդինատներով (տե՛ս նկ.57): Նկար 57-ից երևում է, թե ինչպես են սահմանվում տարածական կոորդինատները. ρ -ն P կետով անցնող զլանի շառավիղն է կամ P կետի շառավղային հեռավորությունը z առանցքից, ϕ -ն xy հարթությունում ազիմուտային անկյունն է՝ հաշվարկված x առանցքից, իսկ z -ը նույնն է, ինչ դեկարտյան կոորդինատային

համակարգում: Կոորդինատների փոփոխման տիրույթներն են՝

$$\begin{aligned} 0 &\leq \rho < \infty, \\ 0 &\leq \phi < 2\pi, \\ -\infty &< z < \infty : \end{aligned}$$



Նկ. 57

Կամայական $\vec{A}$ վեկտոր կարելի է նկարագրել (A_ρ, A_ϕ, A_z) թվերի եռյակով հետևյալ կերպ՝

$$\vec{A} = A_\rho \vec{e}_\rho + A_\phi \vec{e}_\phi + A_z \vec{e}_z, \quad (\leq 1.2)$$

որտեղ $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$ վեկտորները, համապատասխանաբար, ρ -, ϕ - և z - ուղղություններով միավոր վեկտորներն են (տե՛ս նկ.57). $\vec{e}_\rho$ -ն ուղղված է ρ -ի անման ուղղությամբ, $\vec{e}_\phi$ -ն՝ ϕ անկյան անման ուղղությամբ, իսկ $\vec{e}_z$ -ը՝ z առանցքի դրական ուղղությամբ: $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$ միավոր վեկտորները փոխուղղահայաց են, քանի որ տվյալ կոորդինատային համակարգը

օրթոգոնալ է: Այսպիսով՝

$$\begin{aligned}\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho &= \vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_\phi = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1, \\ \vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\phi &= \vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_\rho = 0, \\ \vec{e}_\rho \times \vec{e}_\phi &= \vec{e}_z, \\ \vec{e}_\phi \times \vec{e}_z &= \vec{e}_\rho, \\ \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho &= \vec{e}_\phi,\end{aligned}$$

որտեղ վերջին երեք առնչությունները միմյանց հետ կապված են ցիկլային տեղափոխությամբ: Նմանապես, շառավիղ վեկտորի համար կարելի է գրել, որ

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z :$$

Դեկարտյան (x, y, z) և գլանային (ρ, ϕ, z) կոորդինատները միմյանց հետ կապված են հետևյալ առնչություններով (տե՛ս նկ.58)՝

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z \quad (\text{Հ1.3})$$

կամ

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arctan \frac{y}{x}, \quad z = z : \quad (\text{Հ1.4})$$

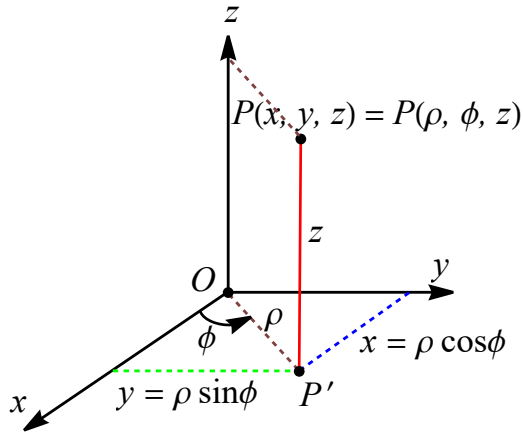
Այստեղ (Հ1.4) առնչությունները նկարագրում են դեկարտյանից գլանայինի անցումը, իսկ (Հ1.3)-ը՝ հակառակը: Գծային տարրը տրվում է հետևյալ արտահայտությամբ՝

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2,$$

իսկ համապատասխան ծավալային տարրը՝

$$dV = \rho d\rho d\phi dz :$$

Կարելի է նկատել, որ $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ և $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$ միավոր վեկտորները միմյանց



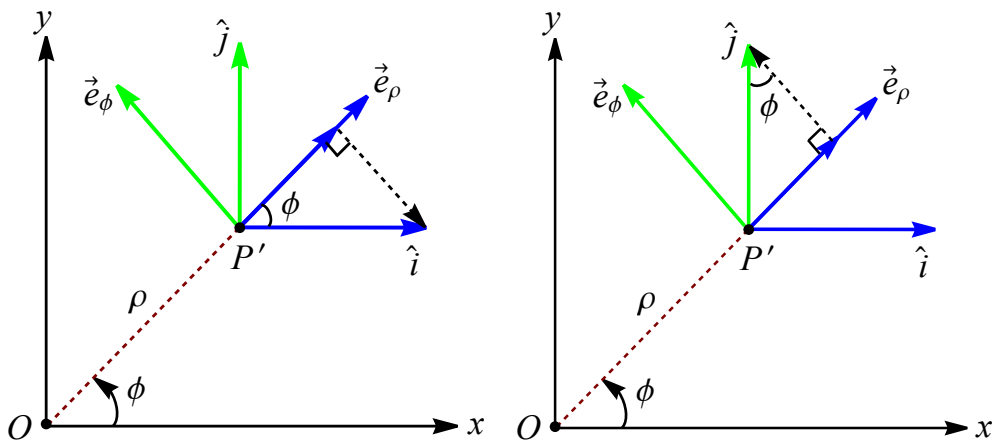
Նկ. 58

հետ կապված են հետևյալ առնչություններով (տե՛ս նկ.59)՝

$$\begin{aligned}\hat{i} &= \cos \phi \vec{e}_\rho - \sin \phi \vec{e}_\phi, \\ \hat{j} &= \sin \phi \vec{e}_\rho + \cos \phi \vec{e}_\phi, \\ \hat{k} &= \vec{e}_z,\end{aligned}\tag{Հ1.5}$$

կամ

$$\begin{aligned}\vec{e}_\rho &= \cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}, \\ \vec{e}_\phi &= -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}, \\ \vec{e}_z &= \hat{k}:\end{aligned}\tag{Հ1.6}$$



Նկ. 59

Կամայական $\vec{A}$ վեկտորի (A_x, A_y, A_z) և (A_ρ, A_ϕ, A_z) բաղադրիչների միջև կապը կարելի է ստանալ՝ տեղադրելով (Հ1.5) առնչությունները (Հ1.1) հավասարման մեջ: Արդյունքում կստանանք

$$\vec{A} = (A_x \cos \phi + A_y \sin \phi) \vec{e}_\rho + (-A_x \sin \phi + A_y \cos \phi) \vec{e}_\phi + A_z \vec{e}_z$$

կամ, հաշվի առնելով (Հ1.2) հավասարումը, կստանանք

$$A_\rho = A_x \cos \phi + A_y \sin \phi,$$

$$A_\phi = -A_x \sin \phi + A_y \cos \phi,$$

$$A_z = A_z :$$

Դեկարտյանից գլանային կոորդինատներին անցնելիս $\vec{A}$ վեկտորի բաղադրիչների ձևափոխությունը մատրիցական տեսքով հետևյալն է՝

$$\begin{pmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}, \quad (\text{Հ1.7})$$

իսկ հակառակը որոշվում է հետևյալ կերպ՝

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{pmatrix},$$

կամ տեղադրելով (Հ1.6) առնչությունները (Հ1.2) հավասարման մեջ, որի արդյունքում ստացվում է

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{pmatrix} : \quad (\text{Հ1.8})$$

Նշենք, որ (Հ1.7) և (Հ1.8) առնչությունները կարելի է ստանալ նաև միավոր վեկտորների սկալյար արտադրյալներից կազմված ձևափոխության մատրիցի միջոցով: Օրինակ՝

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{i} \cdot \vec{e}_\rho & \hat{i} \cdot \vec{e}_\phi & \hat{i} \cdot \vec{e}_z \\ \hat{j} \cdot \vec{e}_\rho & \hat{j} \cdot \vec{e}_\phi & \hat{j} \cdot \vec{e}_z \\ \hat{k} \cdot \vec{e}_\rho & \hat{k} \cdot \vec{e}_\phi & \hat{k} \cdot \vec{e}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{pmatrix} : \quad (\text{Հ1.9})$$

Մֆերիկ համակարգ

Մֆերիկ (գնդային, գնդոլորտային) կոորդինատային համակարգից հարմար է օգտվել այնպիսի խնդիրներում, որտեղ առկա է սֆերիկ համաչափություն:

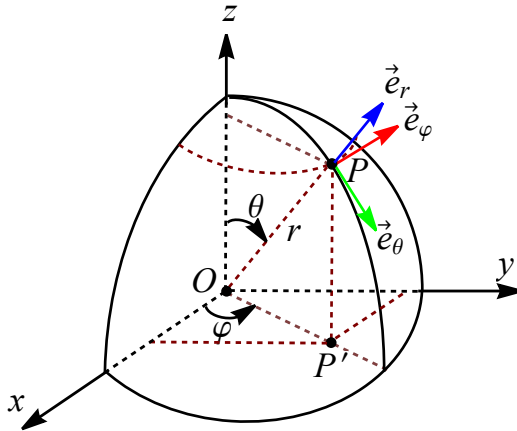
Մֆերիկ կոորդինատային համակարգում կամայական P կետի դիրքը կարելի է նկարագրել (r, θ, φ) թվերի եռյակով (տե՛ս նկ.60): Նկար 60-ից երևում է, որ r -ը կոորդինատների սկզբնակետից P կետի ունեցած հեռավորությունն է կամ, որ նույնն է, P կետով անցնող այն սֆերայի շառավիղը, որի կենտրոնը գտնվում է սկզբնակետում, θ -ն z առանցքի և P կետի շառավիղ վեկտորի կազմած բևեռային անկյունն է, իսկ φ -ն նույն ազիմուտային անկյունն է

ինչ գլանային կոորդինատային համակարգում: Կոորդինատների փոփոխման տիրույթներն են՝

$$0 \leq r < \infty,$$

$$0 \leq \theta \leq \pi,$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi :$$



Նկ. 60

Կամայական $\vec{A}$ վեկտոր կարելի է նկարագրել $(A_r, A_\theta, A_\varphi)$ թվերի եռյակով հետևյալ կերպ՝

$$\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\varphi \vec{e}_\varphi, \quad (\text{Հ1.10})$$

որտեղ $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ վեկտորները, համապատասխանաբար, r -, θ - և φ - ուղղություններով միավոր վեկտորներն են (տե՛ս նկ.60). $\vec{e}_r$ -ն ուղղված է շառավղի երկայնքով կամ, որ նույնն է, r -ի աճման ուղղությամբ, $\vec{e}_\theta$ -ն՝ θ անկյան աճման ուղղությամբ, իսկ $\vec{e}_\varphi$ -ն՝ φ անկյան աճման ուղղությամբ: $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ միավոր վեկտորները փոխուղղահայաց են, քանի որ տվյալ

կոորդինատային համակարգը օրթոգոնալ է: Այսպիսով՝

$$\begin{aligned}\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r &= \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi = 1, \\ \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta &= \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_r = 0, \\ \vec{e}_r \times \vec{e}_\theta &= \vec{e}_\varphi, \\ \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\varphi &= \vec{e}_r, \\ \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r &= \vec{e}_\theta,\end{aligned}$$

որտեղ վերջին երեք առնչությունները միմյանց հետ կապված են ցիկլային տեղափոխությամբ: Նմանապես, P կետի շառավիղ վեկտորի համար կարելի է գրել

$$\vec{r} = r \vec{e}_r :$$

Դեկարտյան (x, y, z) և սֆերիկ (r, θ, φ) կոորդինատները միմյանց հետ կապված են հետևյալ առնչություններով (տե՛ս նկ.61)՝

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (\text{Հ1.11})$$

կամ

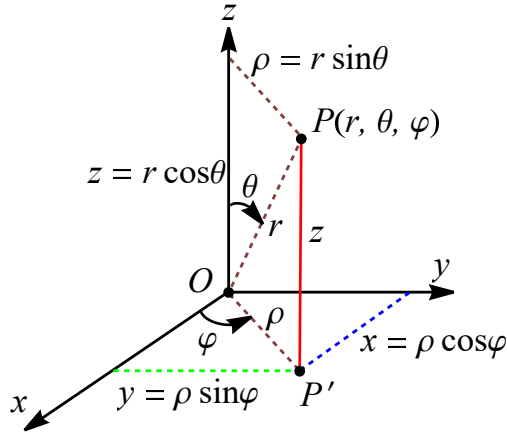
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x} : \quad (\text{Հ1.12})$$

Այստեղ (Հ1.12) առնչությունները նկարագրում են անցումը դեկարտյանից սֆերիկի, իսկ (Հ1.11)-ը՝ հակառակը: Գծային տարրը տրվում է հետևյալ արտահայտությամբ՝

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

իսկ համապատասխան ծավալային տարրը՝

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi :$$



Նկ. 61

Նշենք, որ $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ և $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ միավոր վեկտորները միմյանց հետ կապված են հետևյալ առնչություններով՝

$$\begin{aligned}\hat{i} &= \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_r + \cos \theta \cos \varphi \vec{e}_\theta - \sin \varphi \vec{e}_\varphi, \\ \hat{j} &= \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_r + \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_\theta + \cos \varphi \vec{e}_\varphi, \\ \hat{k} &= \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta\end{aligned}\quad (\leq 1.13)$$

կամ

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \sin \theta \cos \varphi \hat{i} + \sin \theta \sin \varphi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}, \\ \vec{e}_\theta &= \cos \theta \cos \varphi \hat{i} + \cos \theta \sin \varphi \hat{j} - \sin \theta \hat{k}, \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} : \end{aligned}\quad (\leq 1.14)$$

Կամայական $\vec{A}$ վեկտորի (A_x, A_y, A_z) և $(A_r, A_\theta, A_\varphi)$ բաղադրիչների միջև կապը կարելի է ստանալ՝ տեղադրելով (≤ 1.13) առնչությունները (≤ 1.1)

հավասարման մեջ: Արդյունքում կստանանք՝

$$\begin{aligned}\vec{A} &= (A_x \sin \theta \cos \varphi + A_y \sin \theta \sin \varphi + A_z \cos \theta) \vec{e}_r \\ &+ (A_x \cos \theta \cos \varphi + A_y \cos \theta \sin \varphi - A_z \sin \theta) \vec{e}_\theta \\ &+ (-A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi) \vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

կամ, հաշվի առնելով (Հ1.10) հավասարումը,

$$\begin{aligned}A_r &= A_x \sin \theta \cos \varphi + A_y \sin \theta \sin \varphi + A_z \cos \theta, \\ A_\theta &= A_x \cos \theta \cos \varphi + A_y \cos \theta \sin \varphi - A_z \sin \theta, \\ A_\varphi &= -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi :\end{aligned}$$

Դեկարտյանից սֆերիկ կոորդինատների անցնելիս $\vec{A}$ վեկտորի բաղադրիչների ձևափոխությունը մատրիցական տեսքով հետևյալն է՝

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}, \quad (\text{Հ1.15})$$

իսկ հակառակը՝

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{pmatrix} :$$

Արդյունքում ստացվում է

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{pmatrix} : \quad (\text{Հ1.16})$$

Միևնույն արդյունքը կստացվի նաև (Հ1.14) առնչությունները (Հ1.10) հավասարման մեջ տեղադրելիս: Նշենք, որ (Հ1.15) և (Հ1.16) առնչությունները

կարելի է ստանալ նաև միավոր վեկտորների սկալյար արտադրյալներից կազմված ձևափոխության մատրիցի միջոցով: Օրինակ՝

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_r \cdot \hat{i} & \vec{e}_r \cdot \hat{j} & \vec{e}_r \cdot \hat{k} \\ \vec{e}_\theta \cdot \hat{i} & \vec{e}_\theta \cdot \hat{j} & \vec{e}_\theta \cdot \hat{k} \\ \vec{e}_\varphi \cdot \hat{i} & \vec{e}_\varphi \cdot \hat{j} & \vec{e}_\varphi \cdot \hat{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} : \quad (\leq 1.17)$$

Կամայական օրթոգոնալ կոորդինատային համակարգ

Դեկարտյան x, y, z կոորդինատային համակարգում կամայական կետի շառավիղ վեկտորի դիֆերենցիալը ներկայացվում է որպես

$$d\vec{r} = \hat{i}dx + \hat{j}dy + \hat{k}dz,$$

որտեղ $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ միավոր վեկտորներն օժտված են հետևյալ հատկություններով՝

$$\hat{i}^2 = \hat{j}^2 = \hat{k}^2 = 1, \quad \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0 :$$

Այժմ դիտարկենք կամայական u_1, u_2, u_3 կոորդինատային համակարգ և պարզենք դրա հատկությունները: Դիցուք դեկարտյան x, y, z կոորդինատները ներմուծված u_1, u_2, u_3 նոր կոորդինատներից կախված որոշակի ֆունկցիաներ են.

$$x = x(u_1, u_2, u_3),$$

$$y = y(u_1, u_2, u_3),$$

$$z = z(u_1, u_2, u_3) :$$

Դեկարտյան և կամայական օրթոգոնալ կոորդինատային համակարգերի կոորդինատների միջև փոխմիարժեք կապն ապահովվում է

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} > 0$$

պայմանով: Դեկարտյան կոորդինատների

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial x}{\partial u_3} du_3, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial y}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial y}{\partial u_3} du_3, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial z}{\partial u_3} du_3, \end{aligned}$$

դիֆերենցիալները բազմապատկենք, համապատասխանաբար, $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ -ով և գումարենք իրար.

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \left(\frac{\partial x}{\partial u_1} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial u_1} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial u_1} \hat{k} \right) du_1 \\ &+ \left(\frac{\partial x}{\partial u_2} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial u_2} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial u_2} \hat{k} \right) du_2 \\ &+ \left(\frac{\partial x}{\partial u_3} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial u_3} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial u_3} \hat{k} \right) du_3 : \end{aligned}$$

Մյուս կողմից, $d\vec{r}$ -ը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$d\vec{r} = h_1 \vec{e}_1 du_1 + h_2 \vec{e}_2 du_2 + h_3 \vec{e}_3 du_3 :$$

Պահանջելով, որ $\vec{e}_i$ -երը լինեն միավոր վեկտորներ, այսինքն՝

$$\vec{e}_1^2 = \vec{e}_2^2 = \vec{e}_3^2 = 1,$$

և լինեն փոխուղահայաց՝

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0,$$

կստանանք՝

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u_1} \frac{\partial x}{\partial u_2} + \frac{\partial y}{\partial u_1} \frac{\partial y}{\partial u_2} + \frac{\partial z}{\partial u_1} \frac{\partial z}{\partial u_2} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial u_1} \frac{\partial x}{\partial u_3} + \frac{\partial y}{\partial u_1} \frac{\partial y}{\partial u_3} + \frac{\partial z}{\partial u_1} \frac{\partial z}{\partial u_3} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} \frac{\partial x}{\partial u_3} + \frac{\partial y}{\partial u_2} \frac{\partial y}{\partial u_3} + \frac{\partial z}{\partial u_2} \frac{\partial z}{\partial u_3} &= 0,\end{aligned}$$

և

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}\right)^2}, \quad (\leq 1.18)$$

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_2}\right)^2}, \quad (\leq 1.19)$$

$$h_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_3}\right)^2} : \quad (\leq 1.20)$$

Ստացված h_i , $i = 1, 2, 3$, մեծությունները հայտնի են որպես *Լամերի գործակիցներ*:

Արդյունքում երկարության և ծավալային տարրերի համար կստանանք

$$dl^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2 \quad (\leq 1.21)$$

և

$$dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 : \quad (\leq 1.22)$$

Վեկտորական և սկալյար դաշտեր: Գրադիենտ

Վեկտորական (սկալյար) դաշտ է կոչվում տարածության այն տիրույթը, որի յուրաքանչյուր կետին համապատասխանում է որոշակի վեկտորի (սկալյարի) արժեք: Քանի որ դաշտի յուրաքանչյուր կետ որոշվում է իր $\vec{R}$ շառավիղ

վեկտորով, հետևաբար վեկտորական կամ սկալյար դաշտը նկարագրվում է, համապատասխանաբար, որոշակի $\vec{A}(\vec{R})$ վեկտորական ֆունկցիայով կամ $\varphi(\vec{R})$ սկալյար ֆունկցիայով: $\vec{A}(\vec{R})$ և $\varphi(\vec{R})$ ֆունկցիաները, բացի $\vec{R}$ -ից, կարող են կախված լինել նաև ինչ-որ սկալյար արգումենտներից, օրինակ՝ ժամանակից: Այստեղ ենթադրվում է, որ $\vec{A}(\vec{R})$ և $\varphi(\vec{R})$ ֆունկցիաներն անընդհատ են, ինչպես նաև ածանցելի են ըստ բոլոր արգումենտների:

Դիտարկենք $\varphi(\vec{R}) = \varphi(x, y, z)$ ֆունկցիայով նկարագրվող սկալյար դաշտը: Դիցուք որոշակի P_0 կետում φ սկալյարի արժեքը φ_0 է: Ենթադրենք, որ որոշակի $\vec{s}$ վեկտորի ուղղությամբ $\vec{ds}$ տեղափոխության արդյունքում P_0 կետից հասնում ենք P կետին, որտեղ φ սկալյարի արժեքը φ_s է: Այդ տեղափոխության արդյունքում φ -ի փոփոխությունը հավասար է $d\varphi = \varphi_s - \varphi_0$: Այդ $d\varphi$ փոփոխության և $\vec{ds}$ տեղափոխության բացարձակ արժեքի հարաբերության սահմանը նշանակվում է $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ -ով և կոչվում է « P_0 կետում $\vec{s}$ ուղղությամբ φ սկալյարի ածանցյալ».

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{\varphi_s - \varphi_0}{ds} : \quad (\leq 1.23)$$

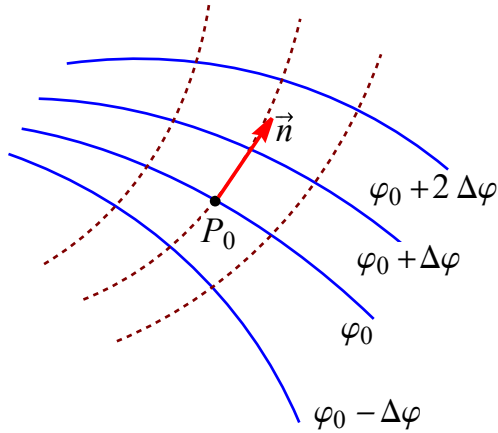
Ակնհայտ է, որ այս ածանցյալի արժեքն էապես կախված է $\vec{s}$ ուղղության ընտրությունից, և որ այն ոչ մի դեպքում չի կարելի շփոթել ըստ s սկալյար պարամետրի սովորական մասնակի ածանցյալի հետ:

$\vec{s}$ ուղղությունից $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ -ի կախվածությունն ուսումնասիրելու նպատակով դիտարկենք դաշտի այն կետերը, որտեղ φ -ի արժեքները համընկնում են և հավասար են, օրինակ, φ_0 -ի: Ընդհանուր դեպքում այդ կետերի համախումբը որոշակի մակերևույթ է, որը կոչվում է *մակարդակի մակերևույթ* կամ *համապոտենցիալ մակերևույթ*: Անալիտիկորեն այդ մակերևույթը բնութագրվում է

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_0$$

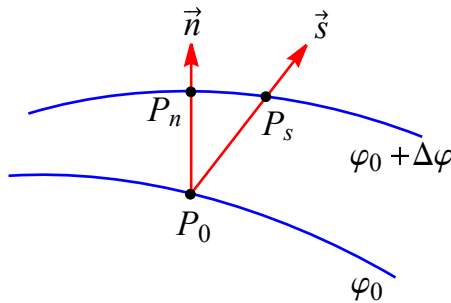
հավասարմամբ:

Նկ.62-ում պատկերված են φ սկալյարի $\varphi_0, \varphi_0 + \Delta\varphi, \varphi_0 + 2\Delta\varphi, \dots$,



Նկ. 62

արժեքներին համապատասխանող համապոտենցիալ մակերևույթների՝ նկարի հարթությամբ հատույթները: $\varphi = \varphi_0$ համապոտենցիալ մակերևույթի նորմալը (φ -ի անման ուղղությամբ) նշանակենք $\vec{n}$ -ով, և ցույց տանք, որ այդ նորմալի ուղղությամբ $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ ածանցյալի միջոցով կարելի է որոշել կամայական $\vec{s}$ ուղղությամբ φ սկալյարի ածանցյալը:



Նկ. 63

Դիցուք $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$ համապոտենցիալ մակերևույթը հատվում է $\vec{n}$ նորմալի հետ P_n , իսկ $\vec{s}$ վեկտորի հետ՝ P_s կետում (տե՛ս նկ.63): Ակնհայտ է,

որ φ սկալյարի արժեքներն այդ երկու կետերում համընկնում են, ընդ որում,

$$P_0 P_s = \frac{P_0 P_n}{\cos \alpha},$$

որտեղ α -ն $\vec{s}$ և $\vec{n}$ վեկտորների կազմած անկյունն է: Նկատենք, որ P_0 կետում

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)_0 = \lim_{P_0 P_s \rightarrow 0} \frac{\varphi_s - \varphi_0}{P_0 P_s} = \cos \alpha \lim_{P_0 P_n \rightarrow 0} \frac{\varphi_n - \varphi_0}{P_0 P_s} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_0 \cos \alpha :$$

Ուստի կամայական կետում կունենանք

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cos \alpha : \quad (\leq 1.24)$$

Այն վեկտորը, որի բացարձակ արժեքը հավասար է $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ և ուղղված է համապատենցիալ մակերևույթի նորմալով φ -ի աճման ուղղությամբ, կոչվում է φ սկալյարի գրադիենտ՝

$$\text{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \vec{n} : \quad (\leq 1.25)$$

Հետևաբար (≤ 1.24) հավասարումը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = |\text{grad} \varphi| \cos \alpha = \text{grad}_s \varphi : \quad (\leq 1.26)$$

Վերջինս ցույց է տալիս, որ $\vec{s}$ ուղղությամբ φ -ի աճանցյալը հավասար է φ -ի գրադիենտի վեկտորի՝ $\vec{s}$ ուղղության վրա պրոյեկցիային: Մասնավորապես, եթե ներմուծենք (x, y, z) դեկարտյան կոորդինատային համակարգը, որի առանցքներով ուղղված միավոր վեկտորները $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ օրթերն են, ապա (≤ 1.26) հավասարումից կստանանք

$$\text{grad}_x \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \text{grad}_y \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \text{grad}_z \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (\leq 1.27)$$

այսինքն՝

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k}, \\ |\operatorname{grad}\varphi| &= \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}:\end{aligned}$$

(Հ1.26)-ից հետևում է, որ գրադիենտի $\vec{n}$ ուղղությունը համընկնում է φ սկալյարի ամենաարագ անման ուղղության հետ, իսկ $-\vec{n}$ ուղղությունը՝ ամենաարագ նվազման ուղղության հետ: Իսկ $\vec{n}$ -ին ուղղահայաց ուղղությամբ, այսինքն՝ համապատենցիալ մակերևույթի շոշափողի երկայնքով φ -ի արժեքն ընդհանրապես չի փոփոխվում, այսինքն՝ $\frac{\partial\varphi}{\partial s} = 0$:

Այսպիսով, եթե հայտնի է φ սկալյարի դաշտը, ապա այդ դաշտի յուրաքանչյուր կետում կարելի է որոշել $\operatorname{grad}\varphi$ վեկտորը, որն ուղղահայաց է այդ սկալյարի համապատենցիալ մակերևույթներին: Եթե կառուցենք համապատենցիալ մակերևույթների *օրթոգոնալ հետագծերի* համակարգը, այսինքն՝ այդ մակերևույթներին ուղղահայաց գծերի համակարգը (նկ.62-ում այդ գծերը պատկերված են կետագծերով), ապա դաշտի յուրաքանչյուր կետում գրադիենտի ուղղությունը կհամընկնի այդ գծերի ուղղության հետ: Այդ պատճառով համապատենցիալ մակերևույթների օրթոգոնալ հետագծերը կոչվում են *գրադիենտի գծեր*: Ընդ որում, համապատենցիալ մակերևույթների բաշխվածության խտության միջոցով կարելի է մոտավոր պատկերացում կազմել գրադիենտի բացարձակ արժեքի վերաբերյալ:

Նկատենք նաև, որ եթե φ սկալյարն արտահայտվում է որպես մեկ այլ ψ սկալյարից կախված ֆունկցիա, այսինքն՝ $\varphi = f(\psi)$, ընդ որում, ψ -ն նույնպես կազմում է որոշակի սկալյար դաշտ, ապա ածանցման $\vec{s}$ ուղղության կամայական ընտրության դեպքում ստանում ենք

$$\operatorname{grad}_s\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\partial\varphi}{\partial\psi} \frac{\partial\psi}{\partial s} = \frac{\partial\varphi}{\partial\psi} \operatorname{grad}_s\psi,$$

այսինքն՝

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi(\psi)}{\partial\psi} \text{grad}\psi, \quad (\leq 1.28)$$

ինչը համապատասխանում է բարդ ֆունկցիայի ածանցման հայտնի բանաձևին:

Նշենք, որ գլանային և սֆերիկ կոորդինատային համակարգերում ψ սկալյարի գրադիենտը տրվում է, համապատասխանաբար,

$$\text{grad}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\phi} \vec{e}_\phi + \frac{\partial\psi}{\partial z} \vec{e}_z \quad (\leq 1.29)$$

և

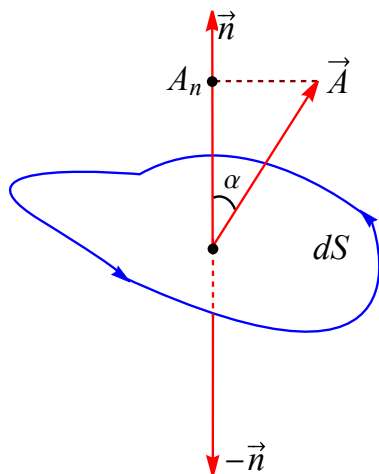
$$\text{grad}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \vec{e}_\varphi \quad (\leq 1.30)$$

արտահայտություններով:

Վեկտորի հոսքը մակերևույթով: Դիվերգենցիա

Այժմ դիտարկենք $\vec{A}(\vec{R})$ ֆունկցիայով նկարագրվող վեկտորական դաշտը: Այդ վեկտորական դաշտում մտովի առանձնացնենք dS մակերեսով անվերջ փոքր մակերևույթ (այնքան փոքր, որ դրա բոլոր կետերում $\vec{A}$ վեկտորի ուղղությունը և բացարձակ արժեքն էապես չեն փոփոխվում): Նշված մակերևույթին ուղղահայաց ուղղի վրա առանձնացնենք դրական և բացասական ուղղություններ, և $\vec{n}$ նորմալն ուղղենք դրական ուղղությամբ: Մակերևույթի կոնտուրի դրական շրջանցման ուղղությունը կորոշվի նորմալի ուղղությամբ՝ խցանահանի կանոնով, այսինքն՝ այնպես, որ $\vec{n}$ վեկտորի սլաքի ծայրից դիտելիս կոնտուրի շրջանցումն ուղղված լինի ժամսլաքի շարժմանը հակառակ (տե՛ս նկ.64): Այս դեպքում կասենք, որ մակերևույթի նորմալը և կոնտուրը կազմում են *աջ համակարգ*: dS մակերևույթով $\vec{A}$ վեկտորի հոսքը սահմանվում է որպես

$$dN = \vec{A} \cdot \vec{n} dS = A \cos \alpha dS = A_n dS,$$

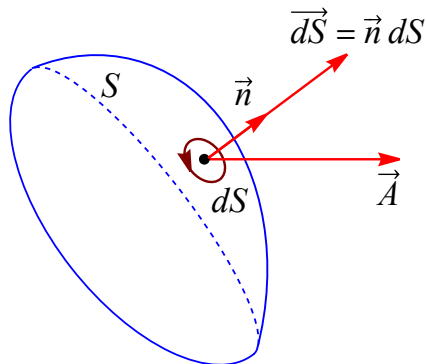


Նկ. 64

որտեղ A -ն $\vec{A}$ վեկտորի բացարձակ արժեքն է dS մակերևույթի վրա, իսկ A_n -ը՝ այդ վեկտորի պրոյեկցիան $\vec{n}$ ուղղության վրա: dS մակերևույթը վերցված է անվերջ փոքր, որպեսզի $\vec{A}$ վեկտորն այդ մակերևույթի վրա համարվի հաստատուն:

Վերջավոր մակերևույթով վեկտորի հոսքը սահմանելու համար անհրաժեշտ է այդ մակերևույթը տրոհել անվերջ փոքր dS մակերևույթների այնպես, որ $\vec{A}$ վեկտորն այդ մակերևույթներից յուրաքանչյուրի վրա լինի հաստատուն, իսկ մակերևույթները հնարավոր լինի համարել հարթ (տե՛ս նկ.65): S մակերևույթի կողմերից մեկը կհամարենք ներքին, իսկ մյուսը՝ արտաքին, և համապատասխան կերպով կընտրենք dS տարրերից յուրաքանչյուրի արտաքին նորմալի ուղղությունը: S մակերևույթով $\vec{A}$ վեկտորի հոսքը սահմանվում է որպես այդ մակերևույթի բոլոր dS տարրերով $A_n dS$ հոսքերի հանրահաշվական գումար: Այդ գումարը համարժեք է հետևյալ որոշյալ ինտեգրալին՝

$$N = \iint_S A_n dS,$$



Նկ. 65

և կոչվում է *ինտեգրալ ըստ S մակերևույթի*: Այն նշանակվում է կրկնակի ինտեգրալով, քանի որ մակերևույթը երկչափ է (ունի երկու չափողականություն): Վերոնշյալ ինտեգրալի հակիրճ գրելաձևը հետևյալն է՝

$$N = \int_S A_n dS :$$

Ստորև հենց այդ գրելաձևն է օգտագործվելու, ընդ որում, բոլոր մակերևույթային ինտեգրալներում ինտեգրման տարրը նշանակվելու է dS -ով:

Հաճախ անհրաժեշտ է լինում որոշել վեկտորի հոսքը որևէ փակ մակերևույթով, օրինակ՝ սֆերայով, խորանարդի մակերևույթով և այլն: Փակ S մակերևույթով ինտեգրալը կնշանակենք $\oint_S$ նշանով, իսկ այդ մակերևույթով սահմանափակված ծավալը՝ V -ով: Այժմ դիտարկենք որևէ f սկալյար մեծություն, որը $\vec{A}$ վեկտորից կախված անընդհատ ֆունկցիա է: Փոխուղղահայաց հարթությունների համակարգի միջոցով V ծավալը տրոհենք անվերջ փոքր $dV = dx dy dz$ ծավալով խորանարդաձև տարրերի այնպես, որ դրանցից յուրաքանչյուրում f սկալյարը լինի հաստատուն: Չնայած, ընդհանուր դեպքում, եզրային ծավալային տարրերը խորանարդաձև չեն, բայց դրանց հետագա հաջորդական տրոհումների արդյունքում կարելի է

հասնել նրան, որ եզրային տարրերի արտաքին սահմանները մեծ ճշտությամբ համընկնեն տրված S մակերևույթի հետ: f սկալյարի *ինտեգրալն ըստ V ծավալի* սահմանվում է որպես $f dV$ մեծությունների գումար.

$$\sum f dV = \iiint_V f dV :$$

Այն նշանակվում է եռակի ինտեգրալով, քանի որ ծավալը եռաչափ է: Վերոնշյալ ինտեգրալի հակիրճ գրելաձևը հետևյալն է՝

$$\int_V f dV :$$

Ստորև հենց այդ գրելաձևն է օգտագործվելու, ընդ որում, բոլոր ծավալային ինտեգրալներում ինտեգրման տարրը նշանակվելու է dV -ով:

Պարզվում է, որ եթե $\vec{A}$ վեկտորը տարածական կոորդինատներից կախված անընդհատ ֆունկցիա է, ապա $\oint_S A_n dS$ մակերևույթային ինտեգրալը կարելի է ներկայացնել որպես ծավալային ինտեգրալ: Դա վեկտորական անալիզի կարևորագույն թեորեմներից մեկն է՝ Գաուսի թեորեմը: *Գաուսի թեորեմը* տրվում է հետևյալ հավասարությամբ՝

$$N = \oint_S A_n dS = \int_V \operatorname{div} \vec{A} dV, \quad (\leq 1.31)$$

որտեղ ներմուծվել է

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

մեծությունը, որը կոչվում է $\vec{A}$ *վեկտորի դիվերգենցիա*: (≤ 1.31) առնչությունը նշանակում է, որ *կանայրական փակ S մակերևույթով $\vec{A}$ վեկտորի հոսքը հավասար է այդ $\vec{A}$ վեկտորի դիվերգենցիայի ինտեգրալին ըստ V ծավալի*:

Եթե S մակերևույթն այնքան փոքր է, որ նրա ներսում գտնվող բոլոր կետերում $\operatorname{div} \vec{A}$ մեծությունը կարելի է համարել հաստատուն, ապա (≤ 1.31) հավասարության աջ մասում կարելի է $\operatorname{div} \vec{A}$ -ն դուրս բերել ինտեգրալի նշանի

տակից: Ուստի կարելի է գրել հետևյալ առնչությունը՝

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S A_n dS}{\Delta V} : \quad (\leq 1.32)$$

Այս առնչությամբ տրվում է դիվերգենցիայի սահմանումը. վեկտորական դաշտի տվյալ կետում $\vec{A}$ վեկտորի դիվերգենցիան հավասար է այն սահմանին, որին ձգտում է այդ կետը ներառող կամայական S մակերևույթով $\vec{A}$ վեկտորի հոսքի և այդ մակերևույթով սահմանափակված ΔV ծավալի հարաբերությունը, երբ $\Delta V \rightarrow 0$:

Նշենք, որ գլանային և սֆերիկ կոորդինատային համակարգերում $\vec{A}$ վեկտորի դիվերգենցիան տրվում է, համապատասխանաբար,

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\leq 1.33)$$

և

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad (\leq 1.34)$$

արտահայտություններով:

Վեկտորի ցիրկուլյացիա: Ռոտոր

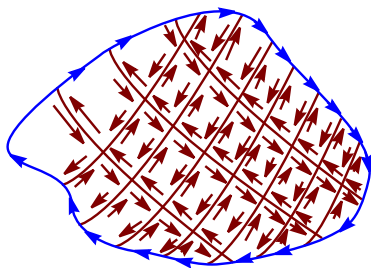
Դիցուք $\vec{A}(\vec{R})$ վեկտորական դաշտում տրված է որոշակի L կոր, ընդ որում, նշված է այդ կորի շրջանցման դրական ուղղությունը: Տրոհենք L կորն անվերջ փոքր $\vec{ds}$ տարրերի, որոնց ուղղությունները համընկնում են կորի դրական շրջանցման ուղղության հետ, և $\vec{ds}$ տարրերից յուրաքանչյուրը սկալյար բազմապատկենք դաշտի համապատասխան կետում $\vec{A}$ վեկտորի արժեքով: Ստացված բոլոր $\vec{A} \cdot \vec{ds} = A_s ds$ արտադրյալների գումարը $ds \rightarrow 0$ սահմանում կոչվում է $\vec{A}$ վեկտորի *գծային ինտեգրալ ըստ L կորի*՝

$$\int_L \vec{A} \cdot \vec{ds} = \int_L A_s ds :$$

Մասնավորապես, եթե L կորը փակ է, ապա գծային ինտեգրալը կնշանակենք $\oint_L$ նշանով և կանվանենք L կորով $\vec{A}$ վեկտորի ցիռկուլյացիա՝

$$C(\vec{A}) = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{s} = \oint_L A_s ds : \quad (\leq 1.35)$$

Դիտարկենք կամայական ձև և չափեր ունեցող L կոնտուր: Այդ կոնտուրի վրա կառուցենք որևէ S մակերեսով մակերևույթ այնպես, որ L -ը հանդիսանա այդ S մակերևույթի սահմանային կոնտուրը: Ընդ որում, S մակերևույթի արտաքին կողմը պետք է ընտրել այնպես, որ կոնտուրի դրական ուղղության հետ միասին կազմի աջ համակարգ: Այնուհետև զուգահեռ կորերի երկու



Նկ. 66

փոխուղղահայաց համակարգերով S մակերևույթը տրոհենք անվերջ փոքր $dS = dxdy$ էլեմենտների այնպես, որ դրանք հնարավոր լինի համարել հարթ մակերևույթներ (տե՛ս նկ.66): dS մակերևույթի արտաքին նորմալը կնշանակենք $\vec{n}$ -ով:

Պարզվում է, որ եթե S մակերևույթի բոլոր կետերում $\vec{A}$ վեկտորը տարածական կոորդինատներից կախված անընդհատ և ածանցելի ֆունկցիա է, ապա $\oint_L A_s ds$ գծային ինտեգրալը կարելի է ներկայացնել որպես մակերևույթային ինտեգրալ: Այդ ձևափոխությունը տրվում է հետևյալ առնչությամբ՝

$$C = \oint_L A_s ds = \int_S \text{rot}_n \vec{A} dS, \quad (\leq 1.36)$$

որը հայտնի է որպես *Ստոքսի թեորեմ*: Այստեղ ներմուծված $\text{rot } \vec{A}$ վեկտորը կոչվում է $\vec{A}$ *վեկտորի ռոտոր*, որի դեկարտյան բաղադրիչները հետևյալն են՝

$$\text{rot}_x \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \text{rot}_y \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \text{rot}_z \vec{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} : \quad (\leq 1.37)$$

Նկատենք, որ դեկարտյան կոորդինատային համակարգում $\text{rot } \vec{A}$ վեկտորը կարելի է ներկայացնել հետևյալ որոշիչի տեսքով՝

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} : \quad (\leq 1.38)$$

(≤ 1.36) հավասարությամբ տրվող Ստոքսի թեորեմի էությունը հետևյալն է. *փակ L կորով $\vec{A}$ վեկտորի ցիրկուլյացիան հավասար է այդ կորի վրա հենված S մակերևույթով $\vec{A}$ վեկտորի ռոտորի հոսքին*: Մասնավորապես, (≤ 1.36) առնչությունից հետևում է, որ

$$\oint_S \text{rot}_n \vec{A} dS = 0,$$

քանի որ փակ S մակերևույթի դեպքում L կոնտուրը վերածվում է կետի, որի համար $C = 0$:

Եթե S մակերևույթն այնքան փոքր է, որ այն կարելի է համարել հարթ և նրա բոլոր կետերում $\text{rot } \vec{A}$ վեկտորը՝ հաստատուն, ապա (≤ 1.36) հավասարության աջ մասում կարելի է $\text{rot } \vec{A}$ -ն դուրս բերել ինտեգրալի նշանի տակից: Ուստի ստացվում է հետևյալ առնչությունը՝

$$\text{rot}_n \vec{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L A_s ds}{\Delta S} : \quad (\leq 1.39)$$

Այս առնչությունը նշանակում է, որ վեկտորական դաշտի տվյալ P կետում որոշակի $\vec{n}$ ուղղության վրա $\text{rot } \vec{A}$ վեկտորի պրոյեկցիան հավասար է այն սահմանին, որին ձգտում է P կետով անցնող և $\vec{n}$ -ին ուղղահայաց

կամայական ΔS մակերևույթի սահմանային կոնտուրով $\vec{A}$ վեկտորի ցիրկուլյացիայի և այդ ΔS մակերևույթի մակերեսի հարաբերությունը, երբ $\Delta S \rightarrow 0$:

Նշենք նաև, որ գլանային և սֆերիկ կոորդինատային համակարգերում $\vec{A}$ վեկտորի ռոտորը տրվում է, համապատասխանաբար,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{A} = & \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho \\ & + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\phi \\ & + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial (\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \vec{e}_z \end{aligned} \quad (\leq 1.40)$$

և

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{A} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) \vec{e}_\theta \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi \end{aligned} \quad (\leq 1.41)$$

արտահայտություններով:

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Հ1.1. Ապացուցել հետևյալ նույնությունները.

- ա) $\text{grad}(\varphi\psi) = \varphi \text{grad}\psi + \psi \text{grad}\varphi$,
- բ) $\text{div}(\varphi \vec{A}) = \varphi \text{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \text{grad}\varphi$,
- գ) $\text{rot}(\varphi \vec{A}) = \varphi \text{rot} \vec{A} - \vec{A} \times \text{grad}\varphi$,
- դ) $\text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{B}$,
- ե) $\text{rot}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \text{div} \vec{B} - \vec{B} \text{div} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$,
- զ) $\text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times \text{rot} \vec{B} + \vec{B} \times \text{rot} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$,
- է) $\vec{C} \cdot \text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot (\vec{C} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{B} \cdot (\vec{C} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$,
- ը) $(\vec{C} \cdot \vec{\nabla})(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times (\vec{C} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - \vec{B} \times (\vec{C} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$,
- թ) $(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \vec{B} = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{B} \text{div} \vec{A}$,
- ժ) $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \text{rot} \vec{C} = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{C} - \vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{C}$,
- ի) $(\vec{A} \times \vec{\nabla}) \times \vec{B} = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{A} \times \text{rot} \vec{B} - \vec{A} \text{div} \vec{B}$,
- լ) $(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \text{div} \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - \vec{A} \times \text{rot} \vec{B} - \vec{B} \times \text{rot} \vec{A}$.

Հ1.2. Հաշվել հետևյալ ֆունկցիաների գրադիենտները (r -ը շառավիղ վեկտորի բացարձակ արժեքն է).

- ա) r ,
- բ) r^n , որտեղ $n = \text{const}$,
- գ) $\vec{a} \cdot \vec{r}$, որտեղ $\vec{a}$ -ն հաստատուն վեկտոր է,
- դ) $\vec{A}(r) \cdot \vec{r}$,
- ե) $\vec{A}(r) \cdot \vec{B}(r)$,
- զ) $\frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3}$, որտեղ $\vec{a}$ -ն հաստատուն վեկտոր է:

Հ1.3. Որոշել գրադիենտի բաղադրիչները հետևյալ կոորդինատային համակարգերում.

- ա) գլանային՝ (ρ, ϕ, z) ,
- բ) սֆերիկ՝ (r, θ, φ) ,
- գ) կամայական օրթոգոնալ:

Հ1.4. Հաշվել հետևյալ վեկտորների դիվերգենցիաները ($\vec{a}$ -ն և $\vec{b}$ -ն հաստատուն վեկտորներ են).

- ա) $\vec{r}$,
- բ) $\varphi(r) \vec{r}$,
- գ) $(\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{b}$,
- դ) $(\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{r}$,
- ե) $\vec{a} \times \vec{r}$,
- զ) $\varphi(r) (\vec{a} \times \vec{r})$,
- է) $\vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{r})$:

Հ1.5. Գտնել $\operatorname{div}(\varphi(r) \vec{r}) = 0$ հավասարմանը բավարարող $\varphi(r)$ ֆունկցիան:

Հ1.6. Ստանալ դիվերգենցիայի արտահայտությունը հետևյալ կոորդինատային համակարգերում.

- ա) գլանային՝ (ρ, ϕ, z) ,
- բ) սֆերիկ՝ (r, θ, φ) ,
- գ) կամայական օրթոգոնալ կոորդինատային համակարգ:

Հ1.7. Հաշվել հետևյալ վեկտորների ռոտորները ($\vec{a}$ -ն և $\vec{b}$ -ն հաստատուն վեկտորներ են).

- ա) $\vec{r}$,
- բ) $\varphi(r) \vec{r}$,
- գ) $(\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{b}$,
- դ) $(\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{r}$,
- ե) $\vec{a} \times \vec{r}$,
- զ) $\varphi(r) \vec{a} \times \vec{r}$,
- է) $\vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{r})$:

Հ1.8. Ապացուցել, որ եթե $\vec{A}^2 = \text{const}$, ապա $(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} = -\vec{A} \times \text{rot } \vec{A}$:

Հ1.9. Որոշել ռոտորի բաղադրիչները հետևյալ կոորդինատային համակարգերում.

ա) գլանային՝ (ρ, ϕ, z) ,

բ) սֆերիկ՝ (r, θ, φ) ,

գ) կամայական օրթոգոնալ:

Հ1.10. Օգտագործելով սֆերիկ կոորդինատային համակարգում ռոտորի տեսքը՝ հաշվել

$$\text{rot} \frac{\vec{a} \times \vec{r}}{r^3}$$

արտահայտությունը, որտեղ $\vec{a}$ -ն հաստատուն վեկտոր է:

Հ1.11. Որոշել $\Delta \vec{A}$ վեկտորի բաղադրիչները հետևյալ կոորդինատային համակարգերում.

ա) գլանային՝ (ρ, ϕ, z) ,

բ) սֆերիկ՝ (r, θ, φ) :

Հ1.12. Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները ($\vec{a}$ -ն հաստատուն վեկտոր է, իսկ $\vec{n}$ -ը՝ տրված մակերևույթի նորմալի միավոր վեկտորը).

ա) $\oint \vec{r} (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS$,

բ) $\oint (\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{n} dS$:

Հ1.13. $\int (\text{grad } \varphi \cdot \text{rot } \vec{A}) dV$ ծավալային ինտեգրալը ներկայացնել մակերևույթային ինտեգրալի տեսքով:

Հ1.14. Հետևյալ մակերևույթային ինտեգրալները ներկայացնել ծավալային ինտեգրալի տեսքով՝ ըստ մակերևույթի ներսում պարփակված ծավալի ($\vec{a}$ -ն և $\vec{b}$ -ն հաստատուն վեկտորներ են, իսկ $\vec{n}$ -ը՝ տրված մակերևույթի նորմալի միավոր վեկտորը).

$$\text{ш)} \oint \vec{n} \varphi dS,$$

$$\text{р)} \oint (\vec{n} \times \vec{a}) dS,$$

$$\text{q)} \oint (\vec{n} \cdot \vec{b}) \vec{a} dS:$$

ՊԱՏՃԱՍԽԱՆՆԵՐ ԵՎ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ

Հ1.1. Նույնություններն ապացուցելիս հարմար է օգտագործել $\vec{\nabla}$ օպերատորը, օգտվելով ածանցման և վեկտորների բազմապատկման կանոններից, առանց կոորդինատային առանցքների վրա համապատասխան պրոյեկցիաներին անցնելու: Ընդ որում, անհրաժեշտ է հաշվի առնել հետևյալ երկու կանոնները.

- $\vec{\nabla}$ օպերատորով պետք է հերթով ազդել նրանից հետո գրված յուրաքանչյուր սկալյար և վեկտորական մեծության վրա,
- $\vec{\nabla}$ օպերատորի հետ պետք է վարվել այնպես, ինչպես սովորական վեկտորների հետ, սակայն չի կարելի փոխատեղել $\vec{\nabla}$ օպերատորը և այն մեծությունը, որի վրա այդ $\vec{\nabla}$ օպերատորն ազդում է: Շփոթմունքից խուսափելու համար կարելի է $\vec{\nabla}$ օպերատորին ավելացնել ինդեքս, օրինակ՝ $\vec{\nabla}_\varphi$ կամ $\vec{\nabla}_{\vec{A}}$, որով կնշվի այն մեծությունը, որի վրա ազդում է $\vec{\nabla}$ օպերատորը:

ա) Ապացույց՝

$$\text{grad}(\varphi\psi) = \vec{\nabla}(\varphi\psi) = \varphi\vec{\nabla}_\psi\psi + \psi\vec{\nabla}_\varphi\varphi = \varphi\text{grad}\psi + \psi\text{grad}\varphi :$$

բ) Ապացույց՝

$$\text{div}(\varphi\vec{A}) = \vec{\nabla}(\varphi\vec{A}) = \vec{A} \cdot \vec{\nabla}_\varphi\varphi + \varphi\vec{\nabla}_{\vec{A}}\vec{A} = \vec{A} \cdot \text{grad}\varphi + \varphi\text{div}\vec{A} :$$

գ) Ապացույց՝

$$\begin{aligned} \text{rot}(\varphi\vec{A}) &= \vec{\nabla} \times (\varphi\vec{A}) = \varphi(\vec{\nabla}_{\vec{A}} \times \vec{A}) + \vec{\nabla}_\varphi\varphi \times \vec{A} \\ &= \varphi\text{rot}\vec{A} + \text{grad}\varphi \times \vec{A} : \end{aligned}$$

դ) Ապացույց՝

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{\nabla}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{\nabla}_{\vec{A}}(\vec{A} \times \vec{B}) + \vec{\nabla}_{\vec{B}}(\vec{A} \times \vec{B}) \\ &= \vec{B} \cdot (\vec{\nabla}_{\vec{A}} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla}_{\vec{B}} \times \vec{B}) \\ &= \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B} : \end{aligned}$$

Այստեղ կատարված է վեկտորների ցիկլային տեղափոխություն: Երկրորդ անդամում անհրաժեշտ է նախօրոք փոխել վեկտորական արտադրյալի արտադրիչների տեղերը, հակառակ դեպքում ցիկլային տեղափոխության ընթացքում կխախտվեր վերը նշված կանոններից երկրորդը. $\vec{B}$ վեկտորը կհայտնվեր $\vec{\nabla}_{\vec{B}}$ օպերատորից առաջ:

ե) Ապացույց՝

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{\nabla} \times [\vec{A} \times \vec{B}] \\ &= \vec{\nabla}_{\vec{A}} \times (\vec{A} \times \vec{B}) + \vec{\nabla}_{\vec{B}} \times (\vec{A} \times \vec{B}) \\ &= (\vec{\nabla}_{\vec{A}} \vec{B}) \vec{A} - (\vec{\nabla}_{\vec{A}} \vec{A}) \vec{B} + (\vec{\nabla}_{\vec{B}} \vec{B}) \vec{A} - (\vec{\nabla}_{\vec{B}} \vec{A}) \vec{B} \\ &= (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{A}}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{B}}) \vec{B} + \vec{A} (\vec{\nabla}_{\vec{B}} \vec{B}) - \vec{B} (\vec{\nabla}_{\vec{A}} \vec{A}) \\ &= (\vec{B} \operatorname{grad}) \vec{A} - (\vec{A} \operatorname{grad}) \vec{B} + \vec{A} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{B} \operatorname{div} \vec{A}, \end{aligned}$$

որտեղ $(\vec{A} \operatorname{grad}) \equiv (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})$ -ը սկալյար դիֆերենցիալ օպերատոր է՝

$$(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) = A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z} :$$

զ) Ապացույց՝

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= \vec{\nabla}_{\vec{A}}(\vec{A} \cdot \vec{B}) + \vec{\nabla}_{\vec{B}}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \\&= (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{A}})\vec{A} + \vec{B} \times (\vec{\nabla}_{\vec{A}} \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{B}})\vec{B} + \vec{A} \times (\vec{\nabla}_{\vec{B}} \times \vec{B}) \\&= (\vec{B} \operatorname{grad})\vec{A} + (\vec{A} \operatorname{grad})\vec{B} + \vec{B} \times \operatorname{rot}\vec{A} + \vec{A} \times \operatorname{rot}\vec{B} : \end{aligned}$$

Հ1.2. ա) Պատ.՝ $\operatorname{grad} r = \frac{\vec{r}}{r} :$

բ) Պատ.՝ $\operatorname{grad} r^n = nr^{n-2}\vec{r} :$

գ) Պատ.՝ $\operatorname{grad}(\vec{a} \cdot \vec{r}) = \vec{a} :$

դ) Պատ.՝ $\operatorname{grad}(\vec{A}(r) \cdot \vec{r}) = \vec{A}(r) + \frac{\vec{r}}{r}(\vec{A}'(r) \cdot \vec{r}) :$

ե) Պատ.՝ $\operatorname{grad}(\vec{A}(r) \cdot \vec{B}(r)) = \frac{\vec{r}}{r}(\vec{A}'(r) \cdot \vec{B}(r) + \vec{A}(r) \cdot \vec{B}'(r)) :$

զ) Պատ.՝ $\operatorname{grad} \frac{(\vec{a} \cdot \vec{r})}{r^3} = \frac{1}{r^3} \left[\vec{a} - \frac{3\vec{r}}{r^2}(\vec{a} \cdot \vec{r}) \right] :$

Հ1.3. ա) Գլանային կոորդինատային համակարգում գրադիենտի բաղադրիչներն են՝

$$\begin{aligned}(\vec{\nabla} f)_{\rho} &= \frac{\partial f}{\partial \rho}, \\(\vec{\nabla} f)_{\phi} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi}, \\(\vec{\nabla} f)_z &= \frac{\partial f}{\partial z},\end{aligned}$$

հետևաբար

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{e}_{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{e}_{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z :$$

բ) Սֆերիկ կոորդինատային համակարգում գրադիենտի բաղադրիչներն են՝

րիչներն են՝

$$\begin{aligned}(\vec{\nabla} f)_r &= \frac{\partial f}{\partial r}, \\(\vec{\nabla} f)_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \\(\vec{\nabla} f)_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi},\end{aligned}$$

հետևաբար

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi :$$

զ) Կամայական օրթոգոնալ q_1, q_2, q_3 կոորդինատային համակարգում զծային տարրը ներկայացվում է հետևյալ արտահայտությամբ՝

$$dl^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2,$$

իսկ ծավալային տարրը՝

$$dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3,$$

որտեղ

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$$

գործակիցները կոորդինատներից կախված ֆունկցիաներ են (հայտնի են որպես *Լամնի գործակիցներ*): Գրադիենտի բաղադրիչներն են՝

$$\left(\vec{\nabla} f\right)_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} :$$

Հ1.4. ա) Պատ.՝ $\operatorname{div} \vec{r} = 3 :$

բ) Պատ.՝ $\operatorname{div} (\varphi(r) \vec{r}) = r\varphi'(r) + 3\varphi(r) :$

գ) Պատ.՝ $\operatorname{div} \left((\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{b} \right) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) :$

դ) Պատ.՝ $\operatorname{div}((\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{r}) = 4(\vec{a} \cdot \vec{r}) :$

ե) Պատ.՝ $\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{r}) = 0 :$

զ) Պատ.՝ $\operatorname{div}(\varphi(r)(\vec{a} \times \vec{r})) = 0 :$

է) Պատ.՝ $\operatorname{div}(\vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{r})) = -2(\vec{a} \cdot \vec{r}) :$

Հ1.5. Պատ.՝ $\varphi(r) = \frac{\text{const}}{r^3} :$

Հ1.6. ա) Պատ.՝ $\vec{\nabla} \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} :$

բ) Պատ.՝ $\vec{\nabla} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} :$

գ) Պատ.՝ $\vec{\nabla} \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 A_3) \right] :$

Հ1.7. ա) Պատ.՝ $\operatorname{rot} \vec{r} = 0 :$

բ) Պատ.՝ $\operatorname{rot}(\varphi(r) \vec{r}) = 0 :$

գ) Պատ.՝ $\operatorname{rot}((\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{b}) = (\vec{a} \times \vec{b}) :$

դ) Պատ.՝ $\operatorname{rot}((\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{r}) = (\vec{a} \times \vec{r}) :$

ե) Պատ.՝ $\operatorname{rot}(\vec{a} \times \vec{r}) = 2\vec{a} :$

զ) Պատ.՝ $\operatorname{rot}(\varphi(r)(\vec{a} \times \vec{r})) = \vec{a}(2\varphi(r) + r\varphi'(r)) - (\vec{a} \cdot \vec{r}) \frac{\vec{r}}{r} \varphi'(r) :$

է) Պատ.՝ $\operatorname{rot}(\vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{r})) = 3(\vec{r} \times \vec{a}) :$

Հ1.8. Հեշտ է ցույց տալ, որ հավասարության ձախ մասը ներկայացվում է $\vec{e}_j A_i \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$ տեսքով, որտեղ $\vec{e}_j$, $j = 1, 2, 3$, վեկտորները միավոր վեկտորներն են, իսկ ըստ կրկնվող ինդեքսների կատարվում է գումարում: Հավասարության աջ մասի համար ստացվում է՝

$$-(\vec{A} \times \operatorname{rot} \vec{A}) = \vec{e}_i \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial(A^2)}{\partial x_i} + A_m \frac{\partial A_i}{\partial x_m} \right),$$

որտեղ օգտագործվել են հետևյալ հայտնի առնչությունները՝

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{e}_i \varepsilon_{ijk} A_j B_k,$$

$$\text{rot}_i \vec{A} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j},$$

$$\varepsilon_{jik} \varepsilon_{jmn} = \delta_{im} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{km} :$$

Հ1.9. ա) Գլանային կոորդինատային համակարգում ռոտորի բաղադրիչներն են՝

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_\rho &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}, \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_\phi &= \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}, \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial (\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) : \end{aligned}$$

բ) Սֆերիկ կոորդինատային համակարգում ռոտորի բաղադրիչներն են՝

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right), \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_\theta &= \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right), \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_\varphi &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) : \end{aligned}$$

գ) Կամայական օրթոգոնալ կոորդինատային համակարգում ռոտորը հետևյալ տեսքն ունի՝

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A} &\equiv (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\vec{e}_1}{h_2 h_3} & \frac{\vec{e}_2}{h_1 h_3} & \frac{\vec{e}_3}{h_1 h_2} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} = \frac{\vec{e}_1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (h_2 A_2) \right] \\ &\quad - \frac{\vec{e}_2}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 A_1) \right] + \frac{\vec{e}_3}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 A_1) \right] : \end{aligned}$$

Հ1.10. Ենթադրելով, որ $\vec{a}$ վեկտորն ուղղված է z առանցքի երկայնքով և անցնելով $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$ օրթերով սֆերիկ կոորդինատային համակարգի՝ կատանանք

$$\text{rot} \frac{(\vec{a} \times \vec{r}')}{r^3} = \frac{a}{r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta) :$$

Հ1.11. Հարմար է օգտվել հետևյալ նույնությունից՝

$$\Delta \vec{A} = -\text{rot rot } \vec{A} + \text{grad div } \vec{A} :$$

ա) Գլանային կոորդինատային համակարգում $\Delta \vec{A}$ վեկտորի բաղադրիչներն են՝

$$\begin{aligned} (\Delta \vec{A})_\rho &= \Delta A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}, \\ (\Delta \vec{A})_\phi &= \Delta A_\phi - \frac{A_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}, \\ (\Delta \vec{A})_z &= \Delta A_z, \end{aligned}$$

հետևաբար

$$\begin{aligned}\Delta \vec{A} = & \left(\Delta A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \vec{e}_\rho \\ & + \left(\Delta A_\phi - \frac{A_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \vec{e}_\phi + \Delta A_z \vec{e}_z : \end{aligned}$$

բ) Սֆերիկ կոորդինատային համակարգում $\Delta \vec{A}$ վեկտորի բաղադրիչներն են՝

$$\begin{aligned}(\Delta \vec{A})_r &= \Delta A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}, \\ (\Delta \vec{A})_\theta &= \Delta A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}, \\ (\Delta \vec{A})_\varphi &= \Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}, \end{aligned}$$

հետևաբար

$$\begin{aligned}\Delta \vec{A} = & \left(\Delta A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r \\ & + \left(\Delta A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_\theta \\ & + \left(\Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_\varphi : \end{aligned}$$

Հ1.12. Այստեղ հարմար է նախ դիտարկել ինտեգրալների և կամայական հաստատուն $\vec{c}$ վեկտորի սկալյար արտադրյալները.

$$\begin{aligned}\vec{c} \cdot \oint \vec{r} (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS &= \oint (\vec{c} \cdot \vec{r}) a_n dS = \int \operatorname{div} ((\vec{c} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{a}) dV \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{c}) \int dV = (\vec{a} \cdot \vec{c}) V : \end{aligned}$$

Քանի որ $\vec{c}$ -ն կամայական վեկտոր է, հետևաբար

$$\oint \vec{r} (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS = \vec{a} V: \text{ Նմանապես } \oint (\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{n} dS = \vec{a} V:$$

$$\text{Հ1.13. Պատասխան. } \int (\text{grad} \varphi \cdot \text{rot} \vec{A}) dV = \oint (\vec{A} \times \text{grad} \varphi) d\vec{S} = \oint (\varphi \cdot \text{rot} \vec{A}) d\vec{S} :$$

$$\text{Հ1.14. ա) Պատասխան. } \oint \vec{n} \varphi dS = \int \text{grad} \varphi dV :$$

$$\text{բ) Պատասխան. } \oint (\vec{n} \times \vec{a}) dS = \int \text{rot} \vec{a} dV :$$

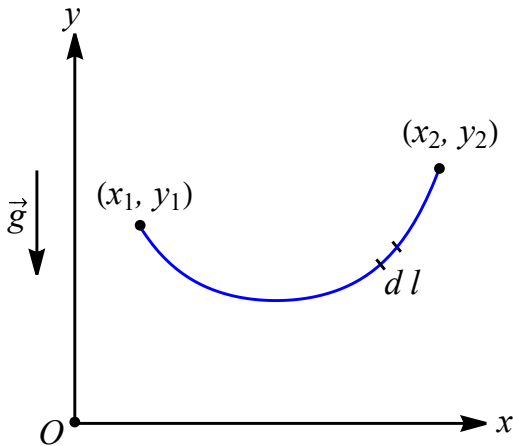
$$\begin{aligned} \text{գ) Պատասխան. } \oint (\vec{n} \cdot \vec{b}) \vec{a} dS &= \int (\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) \vec{a} dV \\ &= \int (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} dV + \int \vec{a} (\text{div} \vec{b}) dV : \end{aligned}$$

ՀԱՎԵԼՎԱԾ 2

ՎԱՐԻԱՑԻՈՆ ՀԱՇԻՎ

Բազմաթիվ խնդիրների լուծման անհրաժեշտությունը նպաստել է վարիացիոն հաշվի ստեղծմանը: Դիտարկենք դրանցից երկուսը:

1. Ծանր համասեռ պարանի ծայրերն ամրացված են (x_1, y_1) և (x_2, y_2) կոորդինատներով կետերում՝ ծանրության ուժի համասեռ դաշտում (տե՛ս նկ. 67): Պետք է գտնել հավասարակշռության վիճակում պարանի ձևը որոշող $y(x)$ ֆունկցիան:



Նկ. 67

Ելնում ենք պոտենցիալ էներգիայի մինիմումի պայմանից: Պարանի $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2(x)}dx$ տարրի զանգվածն է՝ $dm = \gamma dl$ (γ -ն պարանի զծային խտությունն է), իսկ պոտենցիալ էներգիան՝

$$dU = \gamma g y \sqrt{1 + y'^2(x)} dx :$$

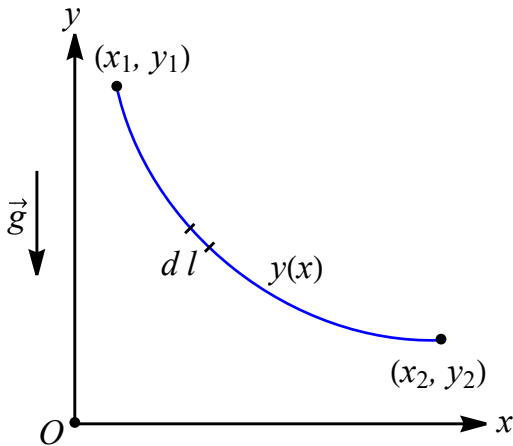
Այստեղ $y = 0$ -ն պոտենցիալ էներգիայի զրոյական մակարդակն է:

Լրիվ պոտենցիալ էներգիան հավասար է՝

$$U = \gamma g \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} dx :$$

Յուրաքանչյուր $y(x)$ ֆունկցիային համապատասխանում է U -ի որոշակի արժեք: Անհրաժեշտ է գտնել այն ֆունկցիան, որն ապահովում է U -ի մինիմումը:

2. Մարմինը սկսում է շարժումը առաջին կետից ինչ-որ $y(x)$ կորով, որն անցնում է երկրորդ կետով (տե՛ս նկ.68): Գտնել բոլոր հնարավոր կորերից այն, որը մարմինն անցնում է ամենավերջին ժամանակահատվածում: Ծանրության ուժի դաշտը համասեռ է, շփումն անտեսվում է:



Նկ. 68

Հետագծի dl հատվածը մարմինն անցնում է

$$dt = \frac{\sqrt{1 + y'^2} dx}{v(y)}$$

Ժամանակում: Արագությունը որոշվում է էներգիայի պահպանման օրենքից:

Արդյունքում լրիվ ժամանակի համար ստանում ենք

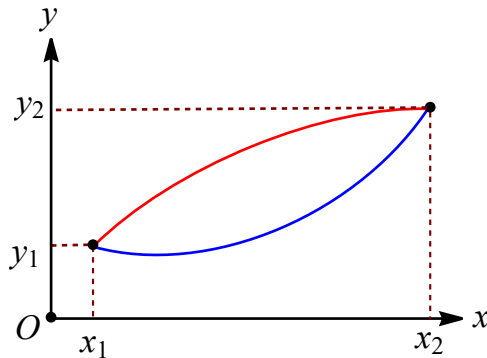
$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2} dx}{\sqrt{2g(y_1 - y)}} :$$

Եվ այս դեպքում պետք է գտնել այն $y(x)$ ֆունկցիան, որին համապատասխանում է փոքրագույն T -ն:

Ընդհանուր դեպքում գործ ունենք մի որոշակի ինտեգրալի հետ՝

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x) dx,$$

որի արժեքը կախված է $y(x)$ ֆունկցիայի տեսքից: Բոլոր կորերն անցնում են (x_1, y_1) և (x_2, y_2) կետերով (տե՛ս նկ.69): Յուրաքանչյուր $y(x)$ -ին համապատասխանում է I -ի որոշակի արժեք: Այդպիսի I ինտեգրալը կոչվում է ֆունկցիոնալ: Կարելի է ասել, որ ֆունկցիոնալը ֆունկցիա է $y(x)$ ֆունկցիայի տեսքից: Անհրաժեշտ է գտնել այն $y(x)$ ֆունկցիան, որի դեպքում ֆունկցիոնալն ունի էքստրեմում:

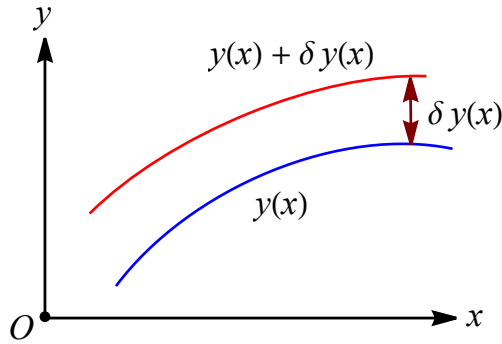


Նկ. 69

Այժմ բերենք որոշ սահմանումներ և հատկություններ:

Ֆունկցիայի վարիացիան ֆունկցիայի տեսքի անվերջ փոքր և կամայական փոփոխություն է (տե՛ս նկ.70): Այստեղ $\delta y(x)$ վարիացիան նույն x -ին

համապատասխանող ֆունկցիաների տարբերությունն է:



Նկ. 70

Վարիացիայի հատկությունները

ա) $\delta C = 0$ (C -ն հաստատուն է),

բ) $\delta(Cy) = C\delta y$,

գ) $\delta(C_1y_1 + C_2y_2 + \dots) = C_1\delta y_1 + C_2\delta y_2 + \dots$,

դ) $\delta(y_1y_2) = y_1\delta y_2 + y_2\delta y_1$,

ե) $\delta y' = \frac{d}{dx}\delta y$,

զ) $\delta \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta F(y, y', x) dx$:

Հաշվենք F ֆունկցիայի փոփոխությունը, որը պայմանավորված է y -ի վարիացիայով.

$$\begin{aligned} \Delta F &= F(y + \delta y, y' + \delta y', x) - F(y, y', x) \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \delta y^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \delta y'^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' \right) + \dots : \end{aligned}$$

Աջ մասում առաջին գումարելին զծային ֆունկցիա է վարիացիաներից և

կոչվում է F -ի վարիացիա՝

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' :$$

Ֆունկցիոնալի վարիացիայի համար կատանանք

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx :$$

Հետագա շարադրանքի համար բերենք մի կարևոր պնդում: Ունենք $f(x) y(x)$ արտադրյալից որոշակի ինտեգրալ՝

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x) y(x) dx :$$

Եթե կամայական $y(x)$ ֆունկցիաների համար $I = 0$, ապա $f(x) \equiv 0$:

Վերջինս կարելի է նաև ընդհանրացնել՝ վերցնելով ինտեգրալ $\sum_{i=1}^n f_i(x) y_i(x)$ գումարից: Եթե բոլոր անկախ y_i ֆունկցիաների դեպքում $I = 0$, ապա բոլոր f_i -երը նույնաբար հավասար են զրոյի:

Հիմնական թեորեմ

$I[y]$ ֆունկցիոնալի էքստրեմումի պայմանն ապահովող $y(x)$ ֆունկցիան որոշվում է

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx = 0 \quad (\text{Հ2.1})$$

պահանջից:

Հիշենք, որ $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$, քանի որ բոլոր կորերն անցնում են նույն երկու կետերով: Նկատի ունենանք, որ δy -ը և $\delta y'$ -ը անկախ չեն ($\delta y' = \frac{d}{dx} \delta y$): Ուստի (Հ2.1)-ում երկրորդ գումարելին կձևափոխենք մասերով ինտեգրելու

նպատակով

$$\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' = \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d}{dx} \delta y = \frac{d}{dx} \left(\delta y \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \delta y \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} :$$

Լրիվ ածանցյալով գումարելին ինտեգրվում է, արդյունքում

$$\delta I = \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx = 0,$$

որտեղից, քանի որ δy -ը կամայական է, ստանում ենք

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 : \quad (\text{Հ2.2})$$

Սա *Էյլերի հավասարումն* է, որը $y(x)$ ֆունկցիայի համար երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարում է: Լուծելով այդ հավասարումը՝ կստանանք

$$\begin{cases} y = y(x, C_1, C_2), \\ y' = y'(x, C_1, C_2), \end{cases} \quad (\text{Հ2.3})$$

որտեղ C_1 -ը և C_2 -ը ինտեգրման հաստատուններ են:

Հաշվի առնելով, որ

$$\begin{cases} y(x_1) = y(x_1, C_1, C_2), \\ y(x_2) = y(x_2, C_1, C_2), \end{cases}$$

կարող ենք որոշել C_1 և C_2 հաստատունները և տեղադրել (Հ2.3) լուծման մեջ:

Հեշտ է ընդհանրացնել խնդրի լուծումն այն դեպքում, երբ կա մի քանի անկախ y_i ֆունկցիա՝

$$F = F(y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n, x),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) :$$

Ստանում ենք n հատ երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների

համակարգ:

Նկատենք, որ Էյլերի հավասարումը կարելի է գրել նաև հետևյալ տեսքով՝

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0,$$

որտեղ ինդեքսում նշված փոփոխականին համապատասխանում է F -ի մասնակի ածանցյալն ըստ այդ փոփոխականի:

Այժմ դիտարկենք որոշ պարզագույն դեպքեր, երբ Էյլերի հավասարումը հնարավոր է ինտեգրել:

1) F -ը կախված չէ y' -ից՝

$$F = F(x, y) :$$

Տվյալ դեպքում Էյլերի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$F_y(x, y) = 0,$$

քանի որ $F_{y'} = 0$: Ստացված հավասարման լուծումը գերծ է անորոշ հաստատուններից, հետևաբար ընդհանուր դեպքում կարող է չբավարարել $y(x_0) = y_0$ և $y(x_1) = y_1$ եզրային պայմաններին: Այսինքն՝ ընդհանուր դեպքում դիտարկվող վարիացիոն խնդիրը լուծում չունի: Լուծում կարող է գոյություն ունենալ միայն բացառիկ դեպքերում, երբ $F_y(x, y) = 0$ կորն անցնում է (x_0, y_0) և (x_1, y_1) եզրային կետերով:

2) F ֆունկցիան զծային կախվածություն ունի y' -ից՝

$$F(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y',$$

այսինքն՝

$$I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \left[M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} \right] dx :$$

Էյլերի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y} y' - \frac{d}{dx} N(x, y) = 0$$

կամ

$$\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y} y' - \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} y' = 0,$$

որտեղից է՝

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0 :$$

Վերջինս, ինչպես նախորդ դեպքում, վերջավոր, այլ ոչ թե դիֆերենցիալ հավասարում է: Ընդհանուր դեպքում $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$ կորը չի բավարարում եզրային պայմաններին, հետևաբար վարիացիոն խնդիրը, որպես կանոն, չունի լուծում անընդհատ ֆունկցիաների դասում: Եթե $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \equiv 0$, ապա $Mdx + Ndy$ արտահայտությունը ճշգրիտ դիֆերենցիալ է և

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \left(M + N \frac{dy}{dx} \right) dx = \int_{x_0}^{x_1} (Mdx + Ndy)$$

ինտեգրալի արժեքը կախված չէ ինտեգրման ճանապարհից. I ֆունկցիոնալի արժեքը հաստատուն է բոլոր թույլատրելի կորերի վրա: Արդյունքում վարիացիոն խնդրի իմաստը կորում է:

3) F -ը կախված է միայն y' -ից՝

$$F = F(y') :$$

Տվյալ դեպքում Էյլերի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$F_{y'y'} y'' = 0,$$

քանի որ $F_y = F_{xy'} = F_{yy'} = 0$: Ուստի կամ $y'' = 0$, կամ $F_{y'y'} = 0$: Եթե $y'' = 0$, ապա $y = C_1 x + C_2$ կորերը կազմում են երկպարամետրային ուղիղների ընտանիք: Իսկ եթե $F_{y'y'}(y') = 0$ հավասարումն ունի մեկ կամ մի քանի $y' = k_i$

իրական արմատներ, ապա $y = k_i x + C$: Ստացվում է մեկպարամետրային ուղիղների ընտանիք, որը ներառված է նախորդ՝ $y = C_1 x + C_2$ ուղիղների ընտանիքում: Այսպիսով, տվյալ դեպքում լուծումներ են բոլոր $y = C_1 x + C_2$ ուղիղները:

4) F -ը կախված է միայն x -ից և y' -ից՝

$$F = F(x, y') :$$

Այս դեպքում Էյլերի հավասարումն է՝ $\frac{d}{dx} F_{y'}(x, y') = 0$, հետևաբար առաջին ինտեգրալն է՝

$$F_{y'}(x, y') = C_1 :$$

Ջանի որ վերջինս առաջին կարգի հավասարում է, որը չի պարունակում y , ապա այն կարելի է լուծել՝ որոշելով y' -ը և ինտեգրելով, կամ էլ ներմուծելով համապատասխան պարամետր:

5) F -ը կախված է միայն y -ից և y' -ից՝

$$F = F(y, y') :$$

Էյլերի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝ $F_y - F_{yy'} y' - F_{y'y'} y'' = 0$, քանի որ $F_{xy'} = 0$: Եթե ստացված հավասարումը բազմապատկենք y' -ով, ապա հավասարման ձախ մասը կվերածվի լրիվ դիֆերենցիալի՝ $\frac{d}{dx} (F - y' F_{y'})$: Իրոք՝

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (F - y' F_{y'}) &= F_y y' + F_{y'} y'' - y'' F_{y'} - F_{yy'} y'^2 - F_{y'y'} y' y'' \\ &= y' (F_y - F_{yy'} y' - F_{y'y'} y'') : \end{aligned}$$

Հետևաբար Էյլերի հավասարման մեկ անգամ ինտեգրման արդյունքում կստանանք

$$F - y' F_{y'} = C_1 :$$

Վերջինս կոչվում է *Բեդտրամիի նույնություն*: Այն բացահայտ չի պարունակում

x , հետևաբար այն կարելի է լուծել՝ ստանալով y' -ը և փոփոխականներն անջատելով, կամ էլ ներմուծելով համապատասխան պարամետր:

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Հ2.1. Որոշել այն կորերը, որոնց վրա հետևյալ ֆունկցիոնալները կարող են ունենալ էքստրեմում.

ա) $I[y(x)] = \int_0^{\pi/2} [(y')^2 - y^2] dx, y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$

բ) $I[y(x)] = \int_0^1 [(y')^2 + 12xy] dx, y(0) = 0, y(1) = 1,$

գ) $I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx, y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1,$

դ) $I[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + x^2 y') dx, y(0) = 0, y(1) = a,$

ե) $I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y + xy') dx$ կամ $I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y dx + x dy),$
 $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1,$

զ) $x_0 \leq x \leq x_1$ տիրույթում $y(x)$ կորի երկարությունը,

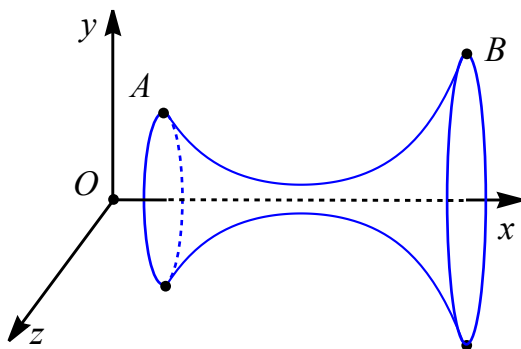
է) $y(x)$ կորի երկայնքով $A(x_0, y_0)$ կետից մինչև $B(x_1, y_1)$ կետը մասնիկի հասնելու $t[y(x)]$ ժամանակահատվածը, եթե մասնիկի արագությունը կախված է միայն y' -ից,

ը) նույնը, ինչ նախորդ դեպքում, երբ արագությունը հավասար է x -ի:

Հ2.2. Որոշել տրված A և B եզրային կետերով այն կորը, որն արագիսների առանցքի շուրջ պտտելու արդյունքում կառաջացնի նվազագույն մակերեսով մակերևույթ (*պտտման փոքրագույն մակերևույթի* խնդիր, տե՛ս նկ.71):

Հ2.3. Հավելվածում շարադրված առաջին խնդրի համար գրել էյլերի հավասարումը և լուծել այն:

Հ2.4. Նույնը՝ երկրորդ խնդրի համար:



Նկ. 71

ՊԱՏՃԱՍԽԱՆՆԵՐ ԵՎ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ

Հ2.1. ա) Տվյալ դեպքում Էյլերի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$y'' + y = 0,$$

որի ընդհանուր լուծումը հետևյալն է՝

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x :$$

Օգտվելով եզրային պայմանից՝ կստանանք $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, հետևաբար ֆունկցիոնալն ունի էքստրեմում միայն $y = \sin x$ կորի վրա:

բ) Էյլերի հավասարումը հետևյալն է՝

$$y'' - 6x = 0,$$

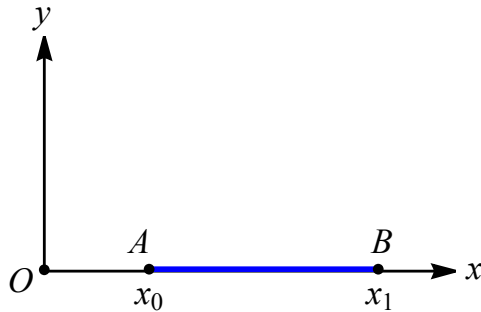
որտեղից ստանում ենք

$$y = x^3 + C_1 x + C_2 :$$

Եզրային պայմաններից կստանանք $C_1 = C_2 = 0$, հետևաբար էքստրե-

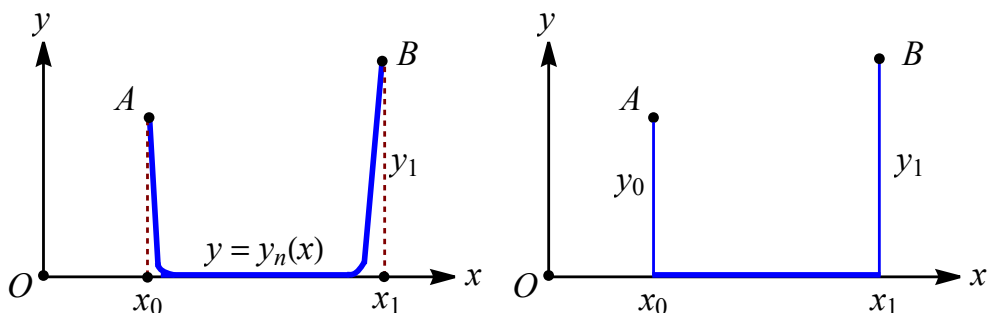
մումն առկա է միայն $y = x^3$ կորի վրա:

զ) Էլերի հավասարումն է $y = 0$: Այդ էքստրեմալն անցնում է եզրային կետերով միայն այն դեպքում, երբ $y_0 = y_1 = 0$ (տե՛ս նկ.72): Երբ



Նկ. 72

$y_0 = y_1 = 0$, ակնհայտ է, որ $y = 0$ ֆունկցիան հանդիսանում է $I[y(x)]$ ֆունկցիոնալի մինիմումը, քանի որ $I[y(x)] \geq 0$, ընդ որում, $I = 0$, երբ $y = 0$: Իսկ երբ y_0 և y_1 թվերից գոնե մեկը զրոյից տարբեր է, գոյություն չունի որևէ անընդհատ ֆունկցիա (կոր), որի վրա ֆունկցիոնալն ունենա մինիմում: Վերջինս հասկանալի է, քանի որ կարելի է ընտրել այնպիսի անընդհատ $y_n(x)$ ֆունկցիաների հաջորդականություն, որոնց գրաֆիկները բաղկացած են (x_0, y_0) կետերից դեպի արբանյակների առանցքն ավելի ու ավելի կտրուկ իջնող կորից, այնուհետև արբանյակների առանցքի մի հատվածից, որը մոտավորապես համընկնում է (x_0, x_1) հատվածի հետ, և վերջում, x_1 կետի մոտակայքում, կտրուկ դեպի (x_1, y_1) կետը բարձրացող կորից (տե՛ս նկ.73):



Նկ. 73

Ակնհայտ է, որ այսպիսի հաջորդականությամբ կորերի վրա ֆունկցիոնալի արժեքները որքան ասես քիչ են տարբերվում զրոյից, և հետևաբար, ֆունկցիոնալի արժեքների ստորին սահմանը հավասար է զրոյի: Սակայն այդ ստորին սահմանին հնարավոր չէ հասնել անընդհատ կորի միջոցով, քանզի ցանկացած անընդհատ և զրոյից տարբերվող $y = y(x)$ կորի համար $\int_{x_0}^{x_1} y^2(x) dx > 0$: Ֆունկցիոնալի արժեքների այդ ստորին սահմանն ի հայտ է գալիս հետևյալ խզվող ֆունկցիայի վրա՝

$$y(x) = \begin{cases} y_0, & x = x_0, \\ 0, & x_0 < x < x_1, \\ y_1, & x = x_1 : \end{cases}$$

դ) Էյլերի հավասարումն է՝

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0,$$

որտեղ $M = y^2$, $N = x^2$ կամ, որ նույնն է,

$$y - x = 0 :$$

Առաջին եզրային պայմանը $y(0) = 0$, բավարարվում է, սակայն երկրորդ պայմանը բավարարվում է միայն $a = 1$ դեպքում: Իսկ եթե $a \neq 1$, ապա

գոյություն չունի եզրային պայմաններին բավարարող լուծում:

ե) Էյլերի հավասարումը վերածվում է $1 = 1$ նույնության: Ենթաինտեգրալային արտահայտությունը լրիվ դիֆերենցիալ է, իսկ ինտեգրալի արժեքը կախված չէ ինտեգրման ճանապարհից՝

$$I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} d(xy) = x_1 y_1 - x_0 y_0 :$$

Ուստի վարիացիոն խնդիրն իմաստ չունի:

զ) Կորի երկարությունը տրվում է

$$l[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

ֆունկցիոնալով, որն ունի էքստրեմում $y = C_1 x + C_2$ ուղիղների վրա:

է) Հաշվի առնելով, որ $\frac{ds}{dt} = v(y')$ արագությունը կախված է միայն y' -ից, $t[y(x)]$ ժամանակահատվածը կարող ենք ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$t[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(y')} dx,$$

քանի որ

$$dt = \frac{ds}{v(y')} = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(y')} dx :$$

Այսպիսով, $t[y(x)]$ -ն ունի էքստրեմում $y = C_1 x + C_2$ ուղիղների վրա, քանզի ենթաինտեգրալային ֆունկցիան կախված է միայն y' -ից:

ը) Քանի որ $\frac{ds}{dt} = v = x$, ապա $dt = \frac{ds}{x}$ և

$$t[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{x} dx :$$

Էյլերի հավասարումն է՝

$$F_{y'} = C_1,$$

որի առաջին ինտեգրալը հետևյալն է՝

$$\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}} = C_1 :$$

Վերջինս հարմար է լուծել՝ ներմուծելով t պարամետրը որպես $y' = \tan t$, որի արդյունքում կստանանք

$$x = \frac{1}{C_1} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{C_1} \sin t$$

կամ

$$x = \overline{C}_1 \sin t,$$

որտեղ $\overline{C}_1 = \frac{1}{C_1}$: Ուստի

$$\frac{dy}{dx} = \tan t,$$

$$\Rightarrow dy = \tan t dx = \overline{C}_1 \sin t dt :$$

Ինտեգրելով վերջինս՝ կստանանք

$$y = -\overline{C}_1 \cos t + C_2 :$$

Հետևաբար

$$x = \overline{C}_1 \sin t, \quad y - C_2 = -\overline{C}_1 \cos t,$$

որտեղից էլ արտաքսելով t -ն, ստանում ենք

$$x^2 + (y - C_2)^2 = \overline{C}_1^2 :$$

Վերջինս այնպիսի շրջանագծերի ընտանիք է, որոնց կենտրոնները գտնվում են օրդինատների առանցքի վրա:

Հ2.2. Պատման մակերևույթի մակերեսը տրվում է հետևյալ արտահայ-

տուրքամբ՝

$$S[y(x)] = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} dx :$$

Այստեղ ենթաինտեգրալային ֆունկցիան կախված է միայն y -ից և y' -ից, ուստի կարող ենք օգտվել Բելտրամիի նույնությունից՝

$$F - y' F_{y'} = C_1,$$

որը տվյալ դեպքում ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$y \sqrt{1 + y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1$$

կամ, որ նույնն է,

$$\frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1 : \quad (\leq 2.4)$$

Ներմուծենք t պարամետրը որպես $y' = \sinh t$, որտեղից կստացվի $y = C_1 \cosh t$ և

$$dx = \frac{dy}{y'} = C_1 dt,$$

$$\Rightarrow x = C_1 t + C_2 :$$

Այսպիսով, պահանջվող կորի հավասարումը, գրված պարամետրական տեսքով, հետևյալն է՝

$$x = C_1 t + C_2,$$

$$y = C_1 \cosh t :$$

Արտաքսելով t պարամետրը՝ կստանանք

$$y = C_1 \cosh \frac{x - C_2}{C_1} :$$

Այս կորերի ընտանիքի պտույտի արդյունքում առաջացած

մակերևույթներն անվանում են *կատենոիդներ* (տե՛ս նկարը խնդրի պայմանում): C_1 և C_2 հաստատունների արժեքները որոշվում են եզրային A և B կետերով և, կախված այդ կետերի դիրքից, լուծումների քանակը կարող է լինել 0, 1 կամ 2:

Հ2.3. Պոտենցիալ էներգիան տրվում է

$$U = \gamma g \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

արտահայտությամբ: Ենթաինտեգրալային արտահայտությունը կախված չէ x -ից, ուստի Բելտրամիի նույնությունից օգտվելով՝ կստանանք (Հ2.4) հավասարումը, ինչպես նախորդ խնդրում: Վերջինս կարելի է ինտեգրել միևնույն ձևով:

Հ2.4. Նյութական կետի շարժման արագությունն է $\frac{dl}{dt} = \sqrt{2g(y_1 - y)}$, որտեղից որոշվում է $A(x_1, y_1)$ կետից դեպի $B(x_2, y_2)$ կետը հասնելու ժամանակահատվածը՝

$$T[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y_1 - y}} dx, \quad y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2 :$$

Օգտվելով Բելտրամիի նույնությունից՝ կստանանք

$$\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y_1 - y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{(y_1 - y)(1 + y'^2)}} = C,$$

որտեղից էլ՝

$$(y_1 - y)(1 + y'^2) = \frac{1}{C^2} \equiv C_1 :$$

Ներմուծելով նոր u պարամետր որպես $y' = \cot u$ ՝ կստանանք

$$y_1 - y = \frac{C_1}{1 + \cot^2 u} = C_1 \sin^2 u = \frac{C_1}{2} (1 - \cos(2u)),$$

հետևաբար

$$dx = \frac{dy}{y'} = -\frac{2C_1 \sin u \cos u du}{\cot u} = -2C_1 \sin^2 u du = -C_1 (1 - \cos(2u)) du,$$

և ինտեգրելով վերջինս՝

$$x = -C_1 \left(u - \frac{\sin(2u)}{2} \right) + C_2 = -\frac{C_1}{2} (2u - \sin(2u)) + C_2 :$$

Ուստի պահանջվող կորի հավասարումը, գրված պարամետրական տեսքով, կլինի

$$x - C_2 = -\frac{C_1}{2} (2u - \sin(2u)), \quad y = y_1 - \frac{C_1}{2} (1 - \cos(2u)) :$$

և նշանակելով $2u \equiv -u_1$ ՝ կստանանք

$$x - C_2 = \frac{C_1}{2} (u_1 - \sin u_1), \quad y - y_1 = -\frac{C_1}{2} (1 - \cos u_1) : \quad (\S 2.5)$$

Եթե ի սկզբանե կոորդինատների սկզբնակետը վերցնեինք A կետում, Ox առանցքն ուղղեինք հորիզոնական ուղղությամբ, իսկ Oy -ը՝ ուղղաձիգով դեպի վար, ապա կստացվեր $C_2 = 0$ և հետագիծը կներկայացվեր *ցիկլոիդների* ընտանիքի հավասարման ընդհանուր տեսքով՝

$$\begin{aligned} x &= \frac{C_1}{2} (u_1 - \sin u_1), \\ y &= \frac{C_1}{2} (1 - \cos u_1) : \end{aligned}$$

Գրականություն

- [1] Ռ.Մ. Ավագյան և այլք, *Տեսական ֆիզիկայի խնդիրների ժողովածու* (Երևանի համալսարանի հրատարակչություն, Երևան, 1981):
- [2] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теоретическая физика: Том 1. Механика* (Наука, Москва, 1988):
- [3] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Л.В. Розенкевич, *Задачи по теоретической физике: Часть 1. Механика* (ГНТИУ, Харьков, 1935):
- [4] И.Е. Тамм, *Основы теории электричества* (Физматлит, Москва, 2003):
- [5] В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин, *Сборник задач по электродинамике* (РХД, Москва, 2002):
- [6] Л.Э. Эльсгольц, *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление* (Наука, Москва, 1969):
- [7] H. Goldstein, C.P. Poole, J.L. Safko, *Classical Mechanics* (3rd Edition) (Addison-Wesley, 2001):
- [8] G.L. Kotkin, V.G. Serbo, *Exploring classical mechanics: A collection of 350+ solved problems for students, lecturers, and researchers* (Oxford University Press, New York, 2020):
- [9] *Handbook of Mathematical Functions*, edited by M. Abramowitz, I.A. Stegun (Dover, New York, 1972):

SUMMARY

Avagyan R.M, Saharian A.A., Petrosyan T.A.

Problems in theoretical mechanics

Among the courses of theoretical physics, the subject “Classical mechanics” occupies a special place. It is the first in the series and introduces fundamental ideas and laws that are being used later in the courses “Classical electrodynamics”, “Quantum mechanics”, “Statistical physics”, “Quantum field theory”, and “Classical theory of gravitation”. The most important ones are the principle of least action, conservation laws, canonical transformations, the Hamiltonian formulation of the description of the dynamics of physical systems, and the patterns of the dynamics of oscillatory systems. A necessary component for the successful understanding of the course is the application of the laws and research methods outlined during the lectures in solving specific problems. This book includes more than 130 problems of varying complexity, some of which are taken from various books known in the literature. During the selection of problems, the many-year experience of teaching the subject “Classical mechanics” at the Chair of Theoretical Physics named after Academician Guren Sahakyan of Yerevan State University was taken into account. Problems are accompanied by solutions for effective self-work. Instructions are given for uncomplicated problems, and detailed solutions are provided for relatively complex ones.

The authors are grateful to the lecturers of the Chair of Theoretical Physics named after academician Guren Sahakyan for detailed discussions and useful advice, they warmly thank the reviewers Professor L. Aslanyan and Professor L. Grigoryan for valuable remarks.

РЕЗЮМЕ

Авакян Р.М., Саарян А.А., Петросян Т.А.

Сборник задач по теоретической механике

Среди курсов теоретической физики особое место занимает предмет «Классическая механика». Он является первым в серии и знакомит с фундаментальными идеями и законами, которые используются в дальнейшем в курсах «Классическая электродинамика», «Квантовая механика», «Статистическая физика», «Квантовая теория поля» и «Классическая теория гравитации». Важнейшими из них являются принцип наименьшего действия, законы сохранения, канонические преобразования, гамильтонова формулировка описания динамики физических систем и закономерности динамики колебательных систем. Необходимым компонентом успешного понимания курса является применение изложенных на лекциях законов и методов исследования при решении конкретных задач. В эту книгу включено более 130 задач различной сложности, некоторые из которых взяты из различных книг, известных в литературе. При выборе задач был учтен многолетний опыт преподавания предмета «Классическая механика» на кафедре теоретической физики ЕГУ имени академика Гургена Саакяна. Задачи сопровождаются решениями для эффективной самостоятельной работы. Для простых задач даются указания, а для относительно сложных приведены подробные решения.

Авторы благодарны преподавателям кафедры теоретической физики имени академика Гургена Саакяна за подробные обсуждения и полезные советы, благодарят рецензентов профессора Л. Асланяна и профессора Л. Григоряна за ценные замечания.

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ՌՈԼԱՆԴ ԱՎԱԳՑԱՆ, ԱՐԱՄ ՄԱՀԱՐՅԱՆ,
ՏԻՋՐԱՆ ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

ՏԵՍԱԿԱՆ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԺՈՂՈՎԱԾՈՒ

Հրատ. պատ. խմբագիր՝ Լ. Հովհաննիսյան
Համակարգչային ձևավորումը՝ Կ. Չալաբյանի
Կազմի ձևավորումը՝ Ա. Պատվականյանի
Հրատ. սրբագրումը՝ Ա. Գույումջյանի

Հեղինակը հաստատում է, որ ծանոթ է «ԵՊՀ գրահրատարակչական քաղաքականությանը», և գրքում առկա փաստերը, դիրքորոշումները, կարծիքները շարադրված են հեղինակային իրավունքի և էթիկայի միջազգայնորեն ընդունված սկզբունքների պահպանմամբ:

Տպագրված է «ՔՈՓԻ ՓՐԻՆԹ» ՍՊԸ-ում:
Ք. Երևան, Խորենացի 4-րդ նրբ., 69 տուն

Ստորագրված է տպագրության՝ 02.05.2024:
Չափսը՝ 60x84 ¹/₁₆: Տպ. մամուլը՝ 15.25:
Տպաքանակը՝ 100:

ԵՊՀ հրատարակչություն
ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1
www.publishing.ysu.am