

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ա. ԱԼԵԳՍԱՆՅԱՆ

ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ

ԵՐԵՎԱՆ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

2006

ՀՏԴ 512.64 (07)
ԳՄԴ 22.143 y73
Ա 296

*Երաշխավորված է տպագրության Երևանի պետական Համալսարանի
Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի
խորհրդի կողմից*

Ալեքսանյան Ա.

Գծային Հանրահաշիվ, Եր., Երևանի Համալս. Հրատ., էջ. 171

*Դասագիրքն ամփոփում է վերջին տասնամյակում Հեղինակի կողմից
ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի
ֆակուլտետում կարդացվող դասախոսությունները: Ֆակուլտետի
ուսումնական պլանով հաստատված «Հանրահաշիվ» առարկայի
ծրագիրը հիմնված է Հեղինակի այս և «Հանրահաշիվ (խմբեր,
օղակներ, դաշտեր)» դասագրքերում ներառված նյութի վրա:*

Ա $\frac{1602040000}{704(02) - 2006}$

ԳՄԴ 22.143 y73

ISBN 5-8084-0808-3
2006թ.

© Ա.Ալեքսանյան,

Գծային տարածություններ

Դիցուք L -ը բազմություն է, իսկ K -ն կամ իրական թվերի $\mathbb{R}$ դաշտն է, կամ էլ կոմպլեքս թվերի $\mathbb{C}$ դաշտը: Շարադրվող նյութը և արդյունքները հիմնականում համընկնում են $\mathbb{R}$ և $\mathbb{C}$ դաշտերի (և ընդհանրապես կամայական դաշտի) դեպքում, ուստի մենք կօգտագործենք դաշտի K նշանակումը, ծածկելով միանգամից $\mathbb{R}$ և $\mathbb{C}$ դաշտերի դեպքերը: Բոլոր այն դեպքերում, երբ արդյունքները տարբեր են $\mathbb{R}$ -ի և $\mathbb{C}$ -ի համար հատուկ կնշենք, թե որ դաշտն ի նկատի ունենք:

Ընդունված է ասել, որ L բազմության վրա սահմանված է գումարման գործողություն, եթե գոյություն ունի այնպիսի $L \times L \rightarrow L$ արտապատկերում, որ բավարարում է հետևյալ պայմաններին ($L \times L$ -ի (a, b) տարրին համապատասխանող L -ի տարրը նշանակված է $a + b$ -ով).

- $(a + b) + c = a + (b + c)$
- $a + b = b + a$
- L -ում գոյություն ունի մի տարր, որը նշանակվում է 0 -ով, որ յուրաքանչյուր $a \in L$ համար $a + 0 = 0 + a = a$
- $\forall a \in L \exists b \in L, a + b = b + a = 0$

Նաև ասում են, որ L -ի վրա սահմանված է K դաշտի թվերով բազմապատկման գործողություն, եթե գոյություն ունի մեկ այլ արտապատկերում $K \times L \rightarrow L$ ($K \times L$ -ի (λ, a) տարրին համապատասխանող տարրը նշանակված է λa -ով), որ բավարարում է

$$\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$$

$$1a = a$$

պայմաններին:

Սահմանում. L բազմությունը կոչվում է գծային տարածություն K դաշտի նկատմամբ, եթե նրա վրա սահմանված են գումարման և թվով բազմապատկման գործողություններ, որոնք բավարարում են

$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$$

$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$$

պայմաններին:

Նշուրին է ստուգել, որ $0a = 0$, $\lambda 0 = 0$ և $(-1)a = -a$:

Իսկապես՝

$$a + 0a = 1a + 0a = (1 + 0)a = 1a = a,$$

ուստի

$$0a = 0, \lambda a + \lambda 0 = \lambda(a + 0) = \lambda a \Rightarrow \lambda 0 = 0,$$

և

$$a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0a = 0 \Rightarrow (-1)a = -a:$$

Նաև, եթե $\lambda a = 0$, ապա $\lambda = 0$ կամ $a = 0$. Իրոք, եթե $\lambda \neq 0$, ապա

$$0 = \lambda^{-1}(\lambda a) = (\lambda^{-1}\lambda)a = 1a = a:$$

Սահմանում. L գծային տարածության M ենթաբազմությունը կոչվում է գծային ենթատարածություն (կամ պարզապես ենթատարածություն), եթե

1. $a, b \in M \Rightarrow a + b \in M$ (այսինքն M -ը փակ է գումարման նկատմամբ)

2. $\lambda \in K, a \in M \Rightarrow \lambda a \in M$ (այսինքն M -ը փակ է թվով բազմապատկման նկատմամբ)

Այս երկու պայմանները կարելի է փոխարինել մեկ համարժեք պայմանով

$$\lambda, \mu \in K, a, b \in M \Rightarrow \lambda a + \mu b \in M$$

Օրինակներ

1. $K[x]$ -ը՝ բոլոր բազմանդամների բազմությունը, որոնց գործակիցները K դաշտից են գծային տարածությունն է K -ի նկատմամբ:
2. $K[x]$ -ի բոլոր n -ից ոչ բարձր կարգի բազմանդամները ենթատարածություն են կազմում $K[x]$ -ում:
3. Հարթության վեկտորները գծային տարածություն են կազմում իրական թվերի դաշտի նկատմամբ, իսկ որևէ վեկտորին կոլինեար վեկտորների բազմությունը ենթատարածություն է կազմում այդ տարածության մեջ:
4. $(n \times m)$ -չափանի իրական տարրերով մատրիցները կազմում են գծային տարածություն իրական թվերի դաշտի նկատմամբ, իսկ վերին եռանկյունաձև մատրիցները կազմում են ենթատարածություն:
5. $(0, 1)$ միջակայքում որոշված անընդհատ ֆունկցիաների բազմությունը գծային տարածություն է իրական թվերի դաշտի նկատմամբ, իսկ նույն հատվածում ածանցելի ֆունկցիաները կազմում են ենթատարածություն:
6. Բուլյան ֆունկցիաների ժեգալկինի բազմանդամները կազմում են գծային տարածություն $F_2 = \{0, 1\}$ երկու էլեմենտանոց պարզ դաշտի նկատմամբ, իսկ գծային ֆունկցիաները կազմում են ենթատարածություն:
7. n -չափանի թվային վեկտորների գծային տարածությունը K դաշտի նկատմամբ սահմանվում է հետևյալ կերպ. $V_n(K) \equiv \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in K, i = 1, \dots, n\}$, իսկ բոլոր վեկտորները, որոնց համար $\alpha_1 = 0$ կազմում են

Էնթատարածություն:

Գծային անկախություն

L գծային տարածության $a_1, a_2, \dots, a_m$ տարրերի (էլեմենտների) գծային կոմբինացիա է կոչվում հետևյալ արտահայտությունը՝ $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m$, որում $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ գործակիցները K դաշտի կամայական տարրեր են:

Սահմանում. L գծային տարածության $a_1, a_2, \dots, a_m$ տարրերը (կամ տարրերի համակարգը) կոչվում են գծորեն անկախ, եթե $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = 0$ պայմանից հետևում է, որ $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$:

Այսինքն գծորեն անկախ տարրերի գծային կոմբինացիան կարող է զրոյական լինել միայն և միայն այն դեպքում, երբ բոլոր գործակիցները զրոյական են:

Անվերջ բազմությունը կլինի գծորեն անկախ, եթե նրա կամայական վերջավոր ենթաբազմությունը գծորեն անկախ է:

L գծային տարածության $a_1, a_2, \dots, a_m$ տարրերը (կամ տարրերի համակարգը) կլինեն գծորեն կախյալ, եթե կգտնվեն $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$, ոչ բոլորը հավասար 0, այնպիսին, որ $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = 0$:

Նկատենք, որ կամայական համակարգ, որ պարունակում է զրոյական տարրը գծորեն կախյալ է: Մեկ ոչ զրոյական տարրից բաղկացած համակարգը գծորեն անկախ է: Գծորեն անկախ համակարգի և ոչ մի տարր չի արտահայտվում համակարգի մնացած տարրերի և ոչ մի գծային կոմբինացիայով:

Օրինակներ

1. $V_n(K)$ տարածության մեջ ընտրենք հետևյալ թվային վեկտորների համակարգը.

$$\{(\underbrace{1, 0, 0, \dots, 0}_n), (\underbrace{0, 1, 0, \dots, 0}_n), (\underbrace{0, 0, 1, 0, \dots, 0}_n), \dots, (\underbrace{0, \dots, 0, 1}_n)\}$$

Այս համակարգը գծորեն անկախ է:

2. $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n$ բազմանդամների համակարգը գծորեն անկախ է:

3. $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots$ բազմանդամների անվերջ համակարգը գծորեն անկախ է:

4. $(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, 3, 4)$ համակարգը գծորեն կախյալ է, քանի որ

$$(2, 3, 4) = (1, 1, 1) + (1, 2, 3):$$

Գծային թաղանթ

Սահմանում. L գծային տարածության M ենթաբազմության գծային թաղանթ է կոչվում M -ի տարրերից կազմված բոլոր հարավոր գծային կոմբինացիաների բազմությունը:

Գծային թաղանթը կնշանակենք հետևյալ կերպ՝ M^* : Ահմայտ է, որ M^* -ը գծային ենթատարածություն է L -ում:

Դիցուք տրված է L գծային տարածության ենթատարածությունների կամայական (վերջավոր կամ անվերջ) բազմություն: Նյութին է ստուգել, որ այդ ենթատարածությունների հատումը (որը դատարկ չէ, քանի որ պարունակում է զրոյական տարրը) նորից գծային ենթատարածություն է L -ում:

$L(M)$ -ով նշանակենք L գծային տարածության M ենթաբազմությունը պարունակող բոլոր ենթատարածությունների բազմությունը: Քանի որ $M \subseteq M^*$, ապա $M^* \in L(M)$ և ուրեմն
$$\bigcap_{H \in L(M)} H \subseteq M^*:$$

Մյուս կողմից, եթե $H \in L(M)$, ապա $M^* \subseteq H$, քանի որ $M \subseteq H$ և H -ը պարունակում է իր տարրերի բոլոր գծային կոմբինացիաները: Հետևաբար, $M^* \subseteq \bigcap_{H \in L(M)} H$, և ուրեմն $M^* = \bigcap_{H \in L(M)} H$:

Այսպիսով ստացանք, որ բազմության գծային թաղանթը դա այդ բազմությունն իր մեջ պարունակող ամենափոքր գծային ենթատարածությունն է:

Բազիս

Սահմանում. L գծային տարածության B ենթաբազմությունը կոչվում է տարածության բազիս, եթե

1. B -ն գծորեն անկախ է
2. $B^* = L$

Փաստորեն բազիսի տարրերի գծային կոմբինացիայով կարելի է արտահայտել L -ի կամայական տարր, և դա հնարավոր չէ անել B -ի կամայական սեփական ենթաբազմության միջոցով: Բազիսի միջոցով ներկայացումը միակն է: Դիցուք երկու գծային կոմբինացիա ներկայացնում են միևնույն տարրը: Այդ երկու ներկայացումներում մասնակցում են վերջավոր քանակությամբ տարրեր B -ից, որոնց կնշանակենք $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ -ով: Ուստի այդ երկու ներկայացումները կարող ենք գրել որպես $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ բազմության տարրերի գծային կոմբինացիաներ և, ուրեմն, $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_k a_k$: Հետևաբար,

$$(\lambda_1 - \mu_1)a_1 + \dots + (\lambda_k - \mu_k)a_k = 0$$

և $a_1, a_2, \dots, a_k$ -ի անկախությունից բխում է, որ

$$(\lambda_1 - \mu_1) = (\lambda_2 - \mu_2) = \dots = (\lambda_k - \mu_k) = 0$$

և

$$\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \dots, \lambda_k = \mu_k:$$

Թեորեմ 1.

Եթե գծային տարածությունն ունի գոնե մեկ վերջավոր բազիս, ապա բոլոր բազիսները վերջավոր են

և ունեն միևնույն հզորությունը:

Ապացույց. Դիցուք $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ -ն L տարածության վերջավոր բազիսն է և B -ն մեկ այլ բազիս է: Վերցնենք մեկ տարր B բազիսից և նշանակենք այն b_1 -ով: Քանի որ A -ն բազիս է, ապա b_1 -ը կարելի է ներկայացնել այդ բազիսի միջոցով՝

$$b_1 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n \quad (1)$$

ընդ որում առանց ընդհանրությունը կորցնելու կարող ենք համարել, որ $\lambda_1 \neq 0$ (բոլոր λ -ները չեն կարող միաժամանակ 0 լինել): Այստեղից ստանում ենք՝

$$a_1 = \lambda_1^{-1} b_1 - \lambda_1^{-1} \lambda_2 a_2 - \dots - \lambda_1^{-1} \lambda_n a_n \quad (2)$$

Համոզվենք այժմ, որ $\{b_1, a_2, \dots, a_n\}$ համակարգը նույնպես բազիս է: Իրոք, $a_1, \dots, a_n$ -ի կամայական գծային կոմբինացիայում a_1 -ը կփոխարինենք (2)-ով և կստանանք $b_1, a_2, \dots, a_n$ -ի գծային կոմբինացիա: Այսինքն, $A^* = \{b_1, a_2, \dots, a_n\}^*$: Ստուգենք $\{b_1, a_2, \dots, a_n\}$ -ի գծորեն անկախությունը.

$$\mu_1 b_1 + \mu_2 a_2 + \dots + \mu_n a_n = 0 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Համաձայն (1)-ի}}$$

$$\mu_1 (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n) + \mu_2 a_2 + \dots + \mu_n a_n = 0 \Rightarrow$$

$$\mu_1 \lambda_1 a_1 + (\mu_1 \lambda_2 + \mu_2) a_2 + \dots + (\mu_1 \lambda_n + \mu_n) a_n = 0:$$

Քանի որ $a_1, \dots, a_n$ -ը գծորեն անկախ է, ապա $\mu_1 \lambda_1 = 0$, $\mu_1 \lambda_i + \mu_i = 0$, $i = 2, 3, \dots, n$: Բայց $\lambda_1 \neq 0$ ուրեմն $\mu_1 = 0$ և $\mu_i = 0$, $i = 2, 3, \dots, n$, այսինքն բոլոր μ_i -րը հավասար են 0-ի և $\{b_1, a_2, \dots, a_n\}$ -ն գծորեն անկախ է:

Այսպիսով, մենք կարողացանք b_1 -ով փոխարինել a_i -ից մեկը և ստացանք մի նոր բազիս: Ցույց տանք թե ինչպես կարելի է այդ պրոցեսը շարունակել:

Դիցուք արդեն մի քանի b_i -ներ ենք տեղադրել a_i -րի փոխարեն և ստացել ենք նոր բազիս՝

$$\{b_1, \dots, b_k, a_{k+1}, \dots, a_n\} \quad (3)$$

որտեղ $k < n$:

Նշենք, որ B -ն չի կարող սրանով սպառվել, քանի որ այդ դեպքում $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ և a_{k+1} -ը չի պատկանում B^* -ին (դա հետևում է (3)-ի գծային անկախությունից), ուրեմն B -ն բազիս չէ: Ուստի B -ն չի սպառվել:

Վերցնենք մեկ նոր տարր B -ից, որ (3)-ից չէ և նշանակենք այն b_{k+1} -ով: Պարզ է, որ b_{k+1} -ը արտահայտվում է (3)-ի միջոցով.

$$b_{k+1} = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_k b_k + \gamma_{k+1} a_{k+1} + \gamma_{k+2} a_{k+2} + \dots + \gamma_n a_n \quad (4)$$

Ահնհայտ է, որ γ_i -ից առնվազն մեկը զրո չէ: Հակառակ դեպքում B -ի տարրերը կլինեն գծորեն կախյալ: Կարող ենք համարել, որ $\gamma_{k+1} \neq 0$: Աժմ ստանում ենք

$$a_{k+1} = -\gamma_{k+1}^{-1} \beta_1 b_1 - \dots - \gamma_{k+1}^{-1} \beta_k b_k + \gamma_{k+1}^{-1} b_{k+1} - \gamma_{k+1}^{-1} \gamma_{k+2} a_{k+2} - \dots - \gamma_{k+1}^{-1} \gamma_n a_n \quad (5)$$

Ապացուցենք, որ $\{b_1, \dots, b_k, b_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n\}$ -ը բազիս է: (5)-ից հետևում է, որ

$$\{b_1, \dots, b_k, b_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n\}^* = \{b_1, \dots, b_k, a_{k+1}, \dots, a_n\}^*:$$

Եթե

$$\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_k b_k + \lambda_{k+1} b_{k+1} + \mu_{k+2} a_{k+2} + \dots + \mu_n a_n = 0,$$

ապա, օգտվելով (4)-ից, ստանում ենք՝

$$(\lambda_1 + \lambda_{k+1} \beta_1) b_1 + \dots + (\lambda_k + \lambda_{k+1} \beta_k) b_k + \lambda_{k+1} \gamma_{k+1} a_{k+1} +$$

$$(\mu_{k+2} + \lambda_{k+1} \gamma_{k+2}) a_{k+2} + \dots + (\mu_n + \lambda_{k+1} \gamma_n) a_n = 0:$$

Քանի որ (3)-ը բազիս է, ապա բոլոր գործակիցները զրոյական են՝ $\lambda_{k+1} \gamma_{k+1} = 0$, $\lambda_i + \lambda_{k+1} \beta_i = 0$, $\mu_j + \lambda_{k+1} \gamma_j = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$, $j = k+2, k+3, \dots, n$: Բայց $\gamma_{k+1} \neq 0$, ուստի $\lambda_{k+1} = 0$ և $\lambda_i = 0$, $\mu_j = 0$,

$i = 1, 2, \dots, k, j = k + 2, k + 3, \dots, n$, այսինքն

$$\{b_1, \dots, b_k, b_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n\}$$

Համակարգը գծորեն անկախ է:

Շարունակելով պրոցեսը, A -ի բոլոր տարրերը կփոխարինենք B -ի տարրերով և կստանանք տարածության նոր բազիս՝ $\{b_1, \dots, b_n\}$: Եթե $B \neq \{b_1, \dots, b_n\}$, ապա B -ում այլ տարրեր էլ կան և բազիսի հատկություններից հետևում է, որ այդ տարրերը չեն արտահայտվում գծորեն $b_1, \dots, b_n$ -ով, ինչն անհնարին է: Ուրեմն $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, B -ն վերջավոր է և $|B| = |A|$: Թեորեմն ապացուցված է:

Հարկ է նշել, որ թեորեմը ճիշտ է նաև անվերջ բազիսի դեպքում, այսինքն՝ գծային տարածության բոլոր բազիսներն ունեն միևնույն հզորությունը:

Սահմանում. L գծային տարածության չափը դա նրա բազիսի տարրերի հզորությունն է: Չափը նշանակվում է հետևյալ կերպ՝ $\dim(L)$: Եթե $\dim(L)$ -ը վերջավոր է, ապա տարածությունը կոչվում է վերջավոր չափանի:

Այս պահից ի վեր մենք կդիտարկենք միայն վերջավոր չափանի գծային տարածությունները:

Թեորեմ 2.

Եթե M -ը L գծային տարածության ենթատարածությունն է, ապա

1. M -ի կամայական բազիս կարելի է ընդլայնել

մինչև L -ի բազիս $\dim(M) \leq \dim(L)$

2. $\dim(M) = \dim(L) \Leftrightarrow M = L$

Ապացույց. Դիցուք $\{a_1, \dots, a_m\}$ -ը M ենթատարածության բազիսն է: Եթե $M = L$, ապա $\{a_1, \dots, a_m\}$ -ը նաև L -ի բազիսն է: Եթե $M \subset L$, ապա կգտնվի մեկ տարր, որը չի պատկանում M -ին: Նշանակենք այդ տարրը a_{m+1} -ով՝ $a_{m+1} \in L \setminus M$: Պարզ է, որ $\{a_1, \dots, a_m, a_{m+1}\}$ համակարգը գծորեն անկախ է և նրա գծային թաղանթը $m+1$ չափանի ենթատարածություն է, որի մեջ պարունակվում է M -ը: Նշանակենք այն M_1 -ով: Եթե $M_1 \subset L$, ապա նույն եղանակով կգտնվի $a_{m+2} \in L \setminus M_1$ և կկառուցենք $M_2 = \{a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, a_{m+2}\}^*$: Պարզ է, որ $M \subset M_1 \subset M_2$ և $\dim(M) < \dim(M_1) < \dim(M_2)$: Քանի որ L -ը վերջավոր չափանի է, այս պրոցեսը վերջավոր քանակությամբ քայլերից հետո կհանգեցնի L -ին, այսինքն կստանանք

$M \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_k = \{a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{m+k}\}^* = L$
 և $\{a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{m+k}\}$ -ը L -ի բազիսն է:

Հետևանք.

Ամեն մի գծային տարածություն ունի բազիս:

Անցման մատրիցը

Դիցուք $\{e_1, \dots, e_n\}$ -ը L դժային տարածության (K դաշտի նկատմամբ) բազիսն է: Կամայական $x \in L$ ներկայացվում է բազիսի միջոցով $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$: Նշանակենք $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ և

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}, \text{ ապա } x\text{-ի բազիսային ներկայացումը կարտագրվի}$$

Հետևյալ ձևով՝ $x = \Lambda \varepsilon$:

$\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ վեկտորը կանվանենք $x \in L$ տարրի կոորդինատային վեկտոր ε բազիսում:

$$\text{Դիցուք } \varepsilon = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \text{ և } \mathcal{D} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \text{ և } L\text{-ի երկու բազիսներ են:}$$

Յուրաքանչյուր d'_i -ն ունի ներկայացում ε բազիսում $d'_i = \alpha_{i1} e_1 + \dots + \alpha_{in} e_n$, $i = 1, \dots, n$: Ստացվում է հետևյալ $n \times n$ -չափանի մատրիցը՝

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

որը կանվանենք բազիսից բազիս անցման մատրից, քանի որ $\mathcal{D} = T\varepsilon$:

Դիցուք Q -ն $\mathcal{D}$ -ից ε -ին անցման մատրիցն է, այսինքն՝ $\varepsilon = Q\mathcal{D}$: Պարզ է, որ $\varepsilon = QT\varepsilon$ և $E\varepsilon = QT\varepsilon$, որտեղ E -ն միավոր մատրիցն է (անկյունագծի

տարրերը հավասար են 1-ի, իսկ մնացածը զրոյական են): Ստանում ենք՝ $(E - QT)\varepsilon = 0$ և, քանի որ ε -ի տարրերը գծորեն անկախ են $E - QT = 0$: Իսկապես, նշանակենք β_{ij} -ով $E - QT$ -ի տարրերը: Յուրաքանչյուր $i \in \{1, \dots, n\}$ համար կստանանք $\beta_{i1}e_1 + \dots + \beta_{in}e_n = 0$: Հետևաբար $\beta_{i1} = \dots = \beta_{in} = 0$: Ուստի $E - QT = 0$ և $E = QT$: Վերջին հավասարումից ստացվում է, որ T և Q մատրիցները իրար հակադարձ են, հետևաբար չվերասերված (այսինքն $\det \neq 0$) են և $Q = T^{-1}$:

Դիցուք ε -ն բազիս է և $T = (\alpha_{ij})_{n \times n}$ չվերասերված մատրից է: Բազմապատկենք T -ն ε -ով և ստացված սյունը նշանակենք $\mathcal{D}$ -ով: Այսինքն

$$T\varepsilon = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = \mathcal{D}:$$

Եթե $\mathcal{D}^* \neq L$, ապա $\mathcal{D}$ -ի տարրերը գծորեն կախյալ են և $\dim(\mathcal{D}^*) < n$: Բայց

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = T^{-1}\mathcal{D}$$

և ամեն մի e_i -ին արտահայտվում է $\mathcal{D}$ -ի տարրերի գծային կոմբինացիայով, ուստի $\varepsilon \subseteq \mathcal{D}^*$ և $\varepsilon^* \subseteq \mathcal{D}^*$: Վերջին հարաբերությունից ստացվում է, որ $\dim(\varepsilon^*) \leq \dim(\mathcal{D}^*) < n$: Սա հակասում է $\dim(\varepsilon^*) = n$ պայմանին, որն ակնհայտորեն բխում է ε -ի բազիս լինելուց: Ասպիսով, $\dim(\mathcal{D}^*) = n$ և $\mathcal{D}$ -ն էլ բազիս է:

Ամփոփելով վերն ապացույցածր, ստանում ենք հետևյալ պնդումը.

ա) կամայական երկու բազիս իրար են կապված անցման մատրիցով,

բ) չվերասերված մատրիցով բազմապատկված բազիսը նորից բազիս է:

Դիցուք ε -ն ու $\mathcal{D}$ -ն բազիսներ են, $\varepsilon = T\mathcal{D}$ և x -ի բազիսային ներկայացումն է ε բազիսում $x = \Lambda\varepsilon$: Գտնենք x -ի բազիսային ներկայացումը $\mathcal{D}$ -ում $x = \Lambda\varepsilon = \Lambda(T\mathcal{D}) = (\Lambda T)\mathcal{D}$: Քանի որ բազիսային ներկայացումը միարժեք է, ապա x -ի կոորդինատները $\mathcal{D}$ -ում դա ΛT -են:

Այսպիսով գծային տարածություն տարրի կոորդինատային վեկտորը նոր բազիսում ստանալու համար անհրաժեշտ է հին բազիսում կոորդինատային վեկտորը բազմապատկել բազիսից բազիս անցման մատրիցով:

Ենթատարածությունների գումարը

Ինչպես արդեն նշել ենք, գծային տարածության ենթատարածությունների կամայական ընտանիքի հատումը նորից գծային ենթատարածություն է: Այն ամենամեծ (ըստ ներդրվածության) ենթատարածությունն է, որ պարունակվում է տրված ընտանիքի յուրաքանչյուր ենթատարածության մեջ:

Ենթատարածությունների միավորումը սակայն, բացի բացառիկ դեպքերից, (երբ մեկ ենթատարածությունն ընկած է մյուսի մեջ) չի հանդիսանում գծային տարածություն: Պարզ է, որ ամենափոքր ենթատարածությունը, որն ընդգրկում է երկու ենթատարածությունների միավորումը, դա միավորման գծային թաղանթն է:

Դիցուք L_1 և L_2 գծային ենթատարածություններ են L գծային տարածության մեջ: Ստուգենք այժմ, որ $L_1 \cup L_2$ բազմության գծային թաղանթը համընկնում է հետևյալ գծային ենթատարածության հետ

$$L_1 + L_2 = \{a + b \mid a \in L_1, b \in L_2\},$$

որը կոչվում է L_1 և L_2 գծային ենթատարածությունների գումար:

Եթե $a_1 + b_1$ և $a_2 + b_2$ պատկանում են $L_1 + L_2$ -ին, ապա

$$\lambda(a_1 + b_1) + \mu(a_2 + b_2) = \underbrace{(\lambda a_1 + \mu a_2)}_{\in L_1} + \underbrace{(\lambda b_1 + \mu b_2)}_{\in L_2} \in L_1 + L_2$$

և $L_1 + L_2$ -ը գծային ենթատարածություն է:

Համոզվենք, որ $(L_1 \cup L_2)^* = L_1 + L_2$: Ունենք $L_1 + L_2 \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$, քանի որ $a + b \in L_1 + L_2$ հանդիսանում է $L_1 \cup L_2$ բազմության տարրերի գծային կոմբինացիա: Մյուս կողմից $L_1 \cup L_2$ բազմության տարրերի կամայական գծային կոմբինացիա ունի

Հետևյալ տեսքը՝

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k + \beta_1 y_1 + \dots + \beta_m y_m,$$

որտեղ $x_i \in L_1$ և $y_j \in L_2$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, m$: Ակնհայտ է, որ

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k \in L_1 \text{ և } \beta_1 y_1 + \dots + \beta_m y_m \in L_2,$$

ուստի և

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k + \beta_1 y_1 + \dots + \beta_m y_m = a + b \in L_1 + L_2$$

$$\text{և } (L_1 \cup L_2)^* \subseteq L_1 + L_2:$$

Թեորեմ 3.

L գծային տարածության L_1 և L_2 ենթատարածությունների համար ստույգ է

$$\dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2)$$

Ապացույց. Դիցուք $e_1, \dots, e_n$ -ը $L_1 \cap L_2$ -ի բազիսն է: Համաձայն Թեորեմ 2-ի այդ բազիսը կարող ենք ընդլայնել մինչև L_1 -ի բազիսը՝ $e_1, \dots, e_n, a_1, \dots, a_k$ և համապատասխանաբար L_2 -ի բազիսը՝ $e_1, \dots, e_n, b_1, \dots, b_m$: Եթե մեզ հաջողվի կառուցել $L_1 + L_2$ -ի մի բազիս, որը պարունակում է $n + k + m$ տարր, ապա թեորեմն ապացուցված կլինի: Ապացուցենք, որ

$$e_1, \dots, e_n, a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_m$$

համակարգը $L_1 + L_2$ -ի բազիսն է: Սկզբից ստուգենք, որ այս համակարգի գծային թաղանթը համընկնում է $L_1 + L_2$ -ի հետ: Ակնհայտ է, որ

$$e_1, \dots, e_n, a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_m$$

համակարգի թաղանթն ընկած է $L_1 + L_2$ -ի մեջ: Դիցուք $x + y \in L_1 + L_2$, $x \in L_1$ և $y \in L_2$: Պարզ է, որ x -ը կարելի ստանալ $e_1, \dots, e_n, a_1, \dots, a_k$ համակարգի գծային կոմբինացիայով, իսկ y -ը՝

$e_1, \dots, e_n, b_1, \dots, b_m$ -ի գծային կոմբինացիայով: Այս երկու գծային կոմբինացիաների գումարը տալիս է $x + y$ տարրի ներկայացումը $e_1, \dots, e_n, a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_m$ Համակարգի գծային կոմբինացիայով, ուստի

$$(L_1 + L_2)^* = \{e_1, \dots, e_n, a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_m\}^*:$$

Մնաց ապացուցել, որ

$$e_1, \dots, e_n, a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_m$$

Համակարգը գծորեն անկախ է: Դիցուք

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_m b_m = 0:$$

Վերջին արտահայտությունն արտագրենք Հետևյալ կերպ՝

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = -\lambda_1 e_1 - \dots - \lambda_n e_n - \beta_1 b_1 - \dots - \beta_m b_m:$$

Այս արտահայտության ձախ մասը պատկանում է L_1 -ին, իսկ աջը՝ L_2 -ին, ուստի երկու մասերում էլ գրված է $L_1 \cap L_2$ -ի միջնույն տարրը:

Այդ տարրի ներկայացումը $e_1, \dots, e_n$ բազիսում միակն է, այն միակն է նաև $e_1, \dots, e_n, b_1, \dots, b_m$ բազիսում: Բայց $e_1, \dots, e_n$ բազիսում ներկայացումը նաև Հանդիսանում է $e_1, \dots, e_n, b_1, \dots, b_m$ բազիսում ներկայացում, ուստի

$$-\lambda_1 e_1 - \dots - \lambda_n e_n - \beta_1 b_1 - \dots - \beta_m b_m$$

գծային կոմբինացիայում բոլոր β_i գործակիցները զրոյական են և

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = -\lambda_1 e_1 - \dots - \lambda_n e_n:$$

Այստեղից Հետևում է՝

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$$

և քանի որ $e_1, \dots, e_n, a_1, \dots, a_k$ -ը բազիս է L_1 -ի Համար, ապա $\alpha_i = 0$ և $\lambda_j = 0$: Այսպիսով ապացուցեցինք, որ

$$e_1, \dots, e_n, a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_m\text{-ը}$$

$L_1 + L_2$ -ի բազիսն է և թեորեմն ապացուցվեց:

Թեորեմ 2-ից հետևում է, որ երբ $\dim(L_1 \cap L_2) = 0$ (սա համարժեք է $L_1 \cap L_2 = \{0\}$ պայմանին) $L_1 + L_2$ -ի բազիսը ստացվում է L_1 -ի բազիսին L_2 բազիսի կցագրմամբ և

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2):$$

Այդ դեպքում ասում են, որ $L_1 + L_2$ գումարն ուղիղ է և օգտվում են $L_1 \dot{+} L_2$ նշանակումից:

Նկատենք, որ ուղիղ գումարի դեպքում, գումարի տարրի ներկայացումը L_1 և L_2 ենթատարածությունների տարրերի գումարի տեսքով միակն է: Իսկապես,

$$a_1 + b_1 = a_2 + b_2 \Rightarrow a_1 - a_2 = b_2 - b_1$$

ու հավասարման երկու մասերն էլ պատկանում են $L_1 \cap L_2$ -ին, ուստի դրանք զրոյական են:

Ֆակտոր-տարածություն

Դիցուք M -ը L գծային տարածության ենթատարածությունն է:

Սահմանում. $x + M = \{x + m \mid m \in M\}$ բազմությունը կոչվում է **Հարակից դաս ըստ M ենթաբազմության**:

Քանի որ $0 \in M$, ապա $x \in x + M$:

Հարակից դասերի Հիմնական Հատկություններն են.

1. $x + M = y + M \Leftrightarrow x - y \in M$
2. $(x + M) \cap (y + M) \neq \emptyset \Rightarrow x + M = y + M$

Ապացուցենք առաջին Հատկությունը: Եթե $x + M = y + M$, ապա $x \in y + M$, $x = y + m$ և $x - y = m \in M$: (Քանի որ M -ը գծային ենթատարածություն է, ապա $x - y \in M \Leftrightarrow y - x \in M$, և $x - y \in M$ և $y - x \in M$ պայմանները կամ բավարարված են միաժամանակ կամ էլ միաժամանակ չեն բավարարված:) Եթե այժմ $x - y \in M$, ապա $x - y = \tilde{m} \in M$ և $x = y + \tilde{m}$: Վերցնենք կամայական տարր $x + M$ դասից՝ $x + m = y + (\tilde{m} + m) \in y + M$: Ուստի՝ $x + M \subseteq y + M$: Մյուս կողմից՝ $y = x - \tilde{m}$ և $y + m = x + (-\tilde{m} + m) \in x + M$: Ուստի՝ $y + M \subseteq x + M$ և առաջին Հատկությունը ապացուցված է:
Մասնավորապես ստանում ենք, որ $x + M = M \Leftrightarrow x \in M$:

Ստուգենք երկրորդ Հատկությունը: Դիցուք $z \in (x + M) \cap (y + M)$: Ունենք, որ $z = x + m_1$ և $z = y + m_2$: Ուրեմն՝ $x + m_1 = y + m_2$ և $x - y = m_2 - m_1 \in M$: Համաձայն առաջին Հատկությանը՝

$$x + M = y + M:$$

Այսպիսով ստանում ենք, որ L գծային տարածությունը տրոհված է Հարակից դասերի ըստ M ենթատարածության: Յուրաքանչյուր տարր

պատկանում է Հարակից դասի ($x \in x + M$) և տարբեր դասերը չեն հատվում, ուստի L -ը չհատվող Հարակից դասերի միավորում է: Նկատենք նաև, որ յուրաքանչյուր Հարակից դաս կարելի է $1 - 1$ համապատասխանության մեջ դնել M -ի հետ: Իսկապես $m \in L$ համապատասխանեցնենք $x + m$ տարրին $x + M$ դասից: Քանի որ $x + m_1 = x + m_2$ պայմանից բխում է $m_1 = m_2$, ապա դա $1 - 1$ համապատասխանությունն է:

Նշանակենք L/M -ով ըստ M -ի բոլոր Հարակից դասերի բազմությունը: Սահմանենք $x + M$ և $y + M$ Հարակից դասերի գումարը որպես $(x + y) + M$: Այս սահմանումը կոռեկտ է: Իսկապես, եթե $x + M = x_1 + M$ և $y + M = y_1 + M$, ապա ըստ սահմանման

$$(x + M) + (y + M) = (x + y) + M$$

և

$$(x_1 + M) + (y_1 + M) = (x_1 + y_1) + M:$$

Ունենք, որ $x - x_1 \in M$ և $y - y_1 \in M$, ուստի

$$(x + y) - (x_1 + y_1) = (x - x_1) + (y - y_1) \in M$$

և

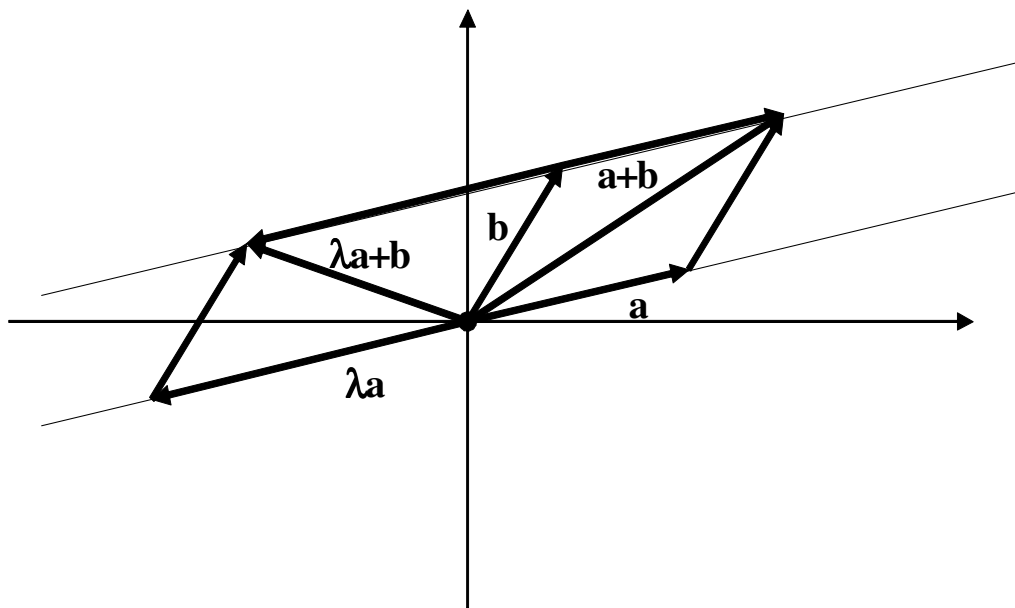
$$(x + y) + M = (x_1 + y_1) + M:$$

Սահմանենք $x + M$ Հարակից դասի λ թվով բազմապատկումը որպես $\lambda x + M$: Այս սահմանումը նույնպես կոռեկտ է: Եթե $x_1 \in x + M$, ապա $x - x_1 \in M$ և $\lambda x - \lambda x_1 = \lambda(x - x_1) \in M$: Նյութին է ստուգել, որ L/M -ը սահմանված գումարան և թվով բազմապատկման գործողություններով բավարարում է գծային տարածության սահմանմանը: Այսուհետև L/M -ը կանվանենք ֆակտոր-տարածություն M -ի նկատմամբ:

Օրինակներ

1. Դիտարկենք Հարթության մեջ գտնվող վեկտորների

բազմությունը, որը գծային տարածություն է վեկտորների գումարման և թվով բազմապատկման գործողությունների նկատմամբ: Ֆիքսած $\mathbf{a}$ վեկտորին կոլինեար վեկտորների բազմությունը կազմում է ենթատարածություն: $\mathbf{b}$ և $\mathbf{c}$ վեկտորները կապական են միևնույն Հարակից դասին ըստ $\mathbf{a}$ -ին կոլինեար վեկտորների ենթատարածությանը միայն և միայն եթե $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ վեկտորը լինի կոլինեար $\mathbf{a}$ -ին: Այսինքն, Հարակից դասը, որ ծնված է $\mathbf{b}$ վեկտորով դա Հետևյալ բազմությունն է $\{\mathbf{b} + \lambda \mathbf{a} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$: $\mathbf{a}$ -ին կոլինեար բոլոր վեկտորները, որոնց սկզբնակետը կոորդինատային Համակարգի սկիզբն է, գտնվում են միևնույն ուղղի վրա, որն անցնում է 0 կետով: Ստորև բերված նկարից երևում է, որ $\{\mathbf{b} + \lambda \mathbf{a} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ բազմության բոլոր վեկտորների ծայրակետերն ընկած են միևնույն ուղղի վրա, որը զուգահեռ է $\mathbf{a}$ -ով որոշված ուղղին: Պարզ է, որ կամայական վեկտոր, որի սկզբնակետը 0-ն է, իսկ ծայրակետն ընկած է նշված ուղղի վրա պատկանում է $\{\mathbf{b} + \lambda \mathbf{a} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ բազմությանը: Ուստի ըստ $\mathbf{a}$ -ին կոլինեար վեկտորների ենթատարածությանը Հարակից դասերը միարժեքորեն որոշվում են $\mathbf{a}$ -ին զուգահեռ ուղիղներով յուրաքանչյուր ուղղին Համապատասխանում է մեկ Հարակից դաս:



2. Դիցուք տրված է n անհայտով m գծային Հավասարումների

[illegible][illegible]

3. Դիցուք $\mathbb{R}[x]$ -ը իրական գործակիցներով բոլոր բազմանդամների գծային տարածությունն է, իսկ M -ը $x^2 + 1$ բազմանդամի պատիկների բազմությունն է $M = \{(x^2 + 1)h(x) \mid h(x) \in \mathbb{R}[x]\}$: Դիտարկենք M -ը $\mathbb{R}[x]$ -ում: Երկու բազմանդամ կլինեն միևնույն չափի դասից ըստ M -ի միայն և միայն այն դեպքում, երբ դրանց տարբերությունը պատկանում է M -ին, այսինքն $f(x) - g(x) = (x^2 + 1)h(x)$: Սա

անկախ է: Դիցուք՝

$$\mu_1(d_1 + M) + \dots + \mu_k(d_k + M) = 0 + M:$$

Հետևաբար, $\mu_1 d_1 + \dots + \mu_k d_k \in M$ և կգտնվեն այնպիսի $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, որ

$$\mu_1 d_1 + \dots + \mu_k d_k = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n:$$

Վերջին հավասարությունը կարտագրենք որպես

$$\mu_1 d_1 + \dots + \mu_k d_k - \lambda_1 e_1 - \dots - \lambda_n e_n = 0$$

և օգտվելով $e_1, \dots, e_n, d_1, \dots, d_k$ բազիսի հատկություններից կստանանք՝

$$\mu_1 = \dots = \mu_k = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0,$$

այսինքն, $\mu_1 = \dots = \mu_k = 0$ և համակարգի գծորեն անկախությունն ապացուցված է: Ապացուցված է նաև թեորեմը:

n -չափանի տարածությունների իզոմորֆիզմը

Դիցուք L -ը n -չափանի գծային տարածություն է K դաշտի նկատմամբ: Ընտրենք մի որևէ բազիս

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} :$$

Ինչպես գիտենք, յուրաքանչյուր տարր $x \in L$ միարժեքորեն ներկայացվում է այդ բազիսում $x = \Lambda \mathcal{E}$: Ճիշտ է նաև հակառակը՝ բազիսային տարրերի կամայական գծային կոմբինացիան տալիս է մի տարր L -ում: Այսպիսով, ստանում ենք փոխմիարժեք համապատասխանեցում L -ի և

$$V_n(K) \equiv \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \mid \lambda_i \in K, i = 1, \dots, n\} \text{-ի}$$

միջև՝

$$x \in L \leftrightarrow \Lambda \in V_n(K)$$

Դյուրին է ստուգել, որ եթե $x \leftrightarrow \Lambda$ և $y \leftrightarrow \Gamma$ ապա $x + y \leftrightarrow \Lambda + \Gamma$ և $\alpha x \leftrightarrow \alpha \Lambda$: Այսինքն, L -ը և $V_n(K)$ -ն որպես գծային տարածություններ իրարից չեն տարբերվում: Ադպիսի գծային տարածությունները կոչվում են իզոմորֆ:

Ամեն մի n -չափանի գծային տարածություն K դաշտի նկատմամբ իզոմորֆ է n -չափանի թվային վեկտորական տարածությանը:

Գծային օպերատորներ

Դիցուք L_1 -ը և L_2 -ը գծային տարածություններ են միևնույն K դաշտի նկատմամբ: $A : L_1 \rightarrow L_2$ արտապատկերումը կոչվում է գծային օպերատոր, եթե

$$A(x + y) = Ax + Ay$$

$$A(\lambda x) = \lambda Ax$$

Վերջին երկու պայմանները կարելի է փոխարինել մեկ համարժեքով.
 $A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay$:

Օրինակներ

1. $L_1 = L_2$ Հարթության վեկտորների գծային տարածությունն է. օպերատորը ամեն մի վեկտորը բազմապատկում է λ թվով:
2. $L_1 = L_2$ Հարթության վեկտորների գծային տարածությունն է. օպերատորը ամեն մի վեկտորը պտտում է կոորդինատային համակարգի սկզբնակետի շուրջ α անկյունով:
3. $L_1 = R_n[x]$ - իրական գործակիցներով n -ից փոքր կամ հավասար աստիճանի բազմանդամների բազմությունը, $L_2 = R_{n-1}[x]$: $A = \frac{d}{dx}$ - ածանցման գործողությունն է:
4. $L_1 = R_n[x]$, $L_2 = R_{n+1}[x]$, օպերատորը ինտեգրման գործողությունն է:
5. $L_1 = V_n(K)$, $L_2 = V_m(K)$, A -ն $n \times m$ -չափանի մատրից է, որի տարրերը K -ից են.

$$A(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)A \in V_m(K)$$

արտապատկերումը գծային օպերատոր է:

Գծային օպերատորի միջուկը և պատկերը

Յուրաքանչյուր $A : L_1 \rightarrow L_2$ գծային օպերատորի հետ կապվում են երկու ենթատարածություններ՝ միջուկը և պատկերը համապատասխանաբար L_1 -ում և L_2 -ում:

Գծային օպերատորի միջուկը սահմանվում է հետևյալ կերպ՝ $\ker A = \{x \in L_1 \mid Ax = 0\}$:

Գծային օպերատորի սահմանումից անմիջապես հետևում է, որ $A0 = 0$ և միջուկը երբեք դատարկ չէ: Միջուկը ենթատարածություն է L_1 -ում. $x, y \in \ker A \Rightarrow Ax = Ay = 0$ և

$$A(\lambda x + \mu y) = A(\lambda x) + A(\mu y) = \lambda Ax + \mu Ay =$$

$$\lambda 0 + \mu 0 = 0 \Rightarrow \lambda x + \mu y \in \ker A:$$

Պատկերը սահմանվում է որպես՝

$$\operatorname{Im} A = \{y \in L_2 \mid \exists x \in L_1, Ax = y\}$$

և այն հանդիսանում է ենթատարածություն L_2 -ում: Իսկապես, եթե $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} A$, ապա $\exists x_1, x_2 \ Ax_1 = y_1, Ax_2 = y_2$, ուստի

$$A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda Ax_1 + \mu Ax_2 = \lambda y_1 + \mu y_2$$

և $\lambda y_1 + \mu y_2 \in \operatorname{Im} A$:

Այսուհետ, երբ հարմար կգտնենք, կհամարենք, որ $L_2 = \operatorname{Im} A$:

Դիտարին է ստուգել, որ

$$Ax_1 = Ax_2 \Leftrightarrow A(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1 - x_2 \in \ker A \Leftrightarrow x_1 + \ker A = x_2 + \ker A$$

(այսինքն, x_1 -ը և x_2 -ը միևնույն հարակից դասից են ըստ միջուկի): Ուրեմն, A գծային օպերատորը միևնույն հարակից դասի (ըստ միջուկի) տարրերը տանում է պատկերի նույն տարրի մեջ, իսկ տարրեր

Հարակից դասերի տարրերը անցնում են տարբեր տարրերի մեջ: Այսպիսով, ստանում ենք փոխմիարժեք Համապատասխանում $L_1/\ker A$ ֆակտոր-տարածություն $\text{Im } A$ միջև, որն իզոմորֆիզմ է (դա բխում է օպերատորի գծայնությունից): Իրոք, նշանակենք $\mathcal{B}$ -ով Հետևյալ արտապատկերումը $L_1/\ker A$ -ից $\text{Im } A$ -ի վրա

$$\mathcal{B}(x + \ker A) = Ax$$

Այս $\mathcal{B}$ օպերատորը պարզ է, որ փոխմիարժեքորեն արտապատկերում է $L_1/\ker A$ -ն $\text{Im } A$ -ի վրա: Այն գծային օպերատոր է.

$$\mathcal{B}(\lambda(x + \ker A) + \mu(y + \ker A)) = \mathcal{B}((\lambda x + \ker A) + (\mu y + \ker A)) =$$

$$\mathcal{B}(((\lambda x + \mu y) + \ker A)) = A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay =$$

$$\lambda \mathcal{B}(x + \ker A) + \mu \mathcal{B}(y + \ker A):$$

Ուստի՝ $L_1/\ker A$ -ն իզոմորֆ է $\text{Im } A$ -ն:

Թեորեմ 5.

Դիցուք $A : L_1 \rightarrow L_2$ գծային օպերատոր է: $L_1/\ker A$ ֆակտոր-տարածությունը իզոմորֆ է $\text{Im } A$ պատկերին:

Թեորեմ 6.

$A : L_1 \rightarrow L_2$ գծային օպերատորի համար ստույգ է

$$\dim \ker A + \dim \text{Im } A = \dim L_1$$

Ապացույց. Քանի որ $L_1/\ker A$ իզոմորֆ է $\text{Im } A$ -ին, ապա

$$\dim \text{Im } A = \dim L_1/\ker A = \dim L_1 - \dim \ker A$$

Համաձայն Թեորեմ 4-ի:

Դժվար չէ նկատել, որ գծային օպերատորը կլինի փոխմիարժեք

միայն այն դեպքում, երբ միջուկը բաղկացած է մեկ տարրից՝ զրոյից և, ուստի, $\dim \ker A = 0$:

Դիցուք $A : L_1 \rightarrow L_2$ գծային օպերատոր է: Ընտրենք բազիս L_1 -ում $\{e_1, \dots, e_n\}$: Ահրառենք օպերատորը բազիսային տարրերին՝ $\{Ae_1, \dots, Ae_n\}$: Ակնհայտ է, որ ստացված համակարգի գծային թաղանթը համընկնում է պատկերի հետ: Իսկապես, եթե $y \in \operatorname{Im} A$, ապա $\exists x \in L_1$ որ $Ax = y$: x -ի բազիսային ներկայացումից $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ հեշտովթյամբ կստանանք y -ի ներկայացումը $y = \lambda_1 Ae_1 + \dots + \lambda_n Ae_n$: Պարզ է նաև, որ գծային օպերատորը միարժեքորեն որոշվում է $\{Ae_1, \dots, Ae_n\}$ համակարգով: Իրոք, եթե $\{e_1, \dots, e_n\}$ -ը բազիս է և հայտնի են $Ae_1, \dots, Ae_n$ -ը, ապա $\forall x \in L_1$ համար Ax -ի արժեքը պետք է լինի՝ $\lambda_1 Ae_1 + \dots + \lambda_n Ae_n$, որտեղ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ -ը x -ի բազիսային կոորդինատներն են: Նկատենք, որ $Ae_1, \dots, Ae_n$ -ի արժեքները իրարից անկախ են և կարող են ընդունել կամայական արժեքներ L_2 -ից:

Գծային օպերատորի ներկայացումը մատրիցով

Դիցուք $A : L_1 \rightarrow L_2$ գծային օպերատոր է և $\dim L_1 = n$, $\dim L_2 = m$: Արդեն գիտենք, որ L_1 -ը իզոմորֆ է $V_n(K)$ -ին, իսկ L_2 -ը՝ $V_m(K)$ -ին: Եթե L_1 -ում ֆիքսված է ε_1 բազիսը, իսկ L_2 -ում՝ ε_2 -ը, ապա L_1 և L_2 տարածությունների և $V_n(K)$ ու $V_m(K)$ վեկտորական տարածությունների միջև համապատասխանաբար հաստատվում են փոխմիարժեք արտապատկերումներ, որոնք իրականացնում են վերը նշված իզոմորֆիզմները:

Ստացվում է հետևյալ դիագրամը.

$$\begin{array}{ccccc} A : & L_1 & \rightarrow & L_2 \\ & \varepsilon_1 \updownarrow & & \varepsilon_2 \updownarrow \\ ? : & V_n(K) & \rightarrow & V_m(K) \end{array}$$

Փորձենք այժմ կառուցել մի այնպիսի գծային օպերատոր $? : V_n(K) \rightarrow V_m(K)$, որը կդարձնի կոմուտատիվ վերը նշված դիագրամը, այսինքն, եթե $x \in L_1$ տարրից սկսենք և շարժվենք դիագրամի սլաքներով, ապա անկախ ընտրած ճանապարհից միշտ կհասնենք Ax -ին:

Դիցուք x -ի ներկայացումը ε_1 բազիսում հետևյալն է $x = \Lambda \varepsilon_1$: Հաշվենք $Ax = A(\Lambda \varepsilon_1) = \Lambda A \varepsilon_1$: Արտահայտենք $A \varepsilon_1$ -ը ε_2 բազիսում: Ամեն մի $i = 1, \dots, m$ համար ներկայացնենք ε_2 բազիսում $A e_i$ -ն $A e_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{im}) \varepsilon_2$: Ապա համար A մատրիցը հետևյալ կերպ՝

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i1} & \dots & \alpha_{im} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix} :$$

Պարզ է, որ $A\varepsilon_1 = A\varepsilon_2$ և $Ax = A(\Lambda\varepsilon_1) = \Lambda A\varepsilon_1 = \Lambda(A\varepsilon_2) = (\Lambda A)\varepsilon_2$:

Այժմ պահանջվող անհայտ ? : $V_n(K) \rightarrow V_m(K)$ օպերատորը կարելի է կառուցել A մատրիցի միջոցով

$$\begin{array}{ccc} A : & L_1 & \rightarrow L_2 \\ & \varepsilon_1 \quad \updownarrow & \varepsilon_2 \quad \updownarrow \\ A : & V_n(K) & \rightarrow V_m(K) \end{array}$$

Իսկապես, Ax -ը ստանալու համար վերցնենք x -ի ներկայացումը ε_1 բազիսում $\Lambda\varepsilon_1$, հետո կիրառենք Λ -ին A մատրիցով որոշվող օպերատորը և կստանանք ΛA վեկտորը, որը ε_2 բազիսում Ax -ի կորդինատային վեկտորն է $(\Lambda A)\varepsilon_2 = Ax$: Այսպիսով տեսնում ենք, որ դիագրամը կոմուտատիվ է:

A մատրիցը կոչվում է A գծային օպերատորի ներկայացում ε_1 և ε_2 բազիսներում և օպերատորը ներկայացված է A մատրիցով, եթե $A\varepsilon_1 = A\varepsilon_2$:

Դժվար չէ նկատել, որ A մատրիցի տեսքը կախված է ընտրված ε_1 և ε_2 բազիսներից: Պարզենք, թե ինչպես կփոխվի մատրիցը, եթե ընտրենք այլ բազիսներ: Դիցուք T_1 -ը և T_2 -ը նոր բազիսներին անցման մատրիցներն են՝ $\varepsilon_1 = T_1\mathcal{D}_1$ և $\varepsilon_2 = T_2\mathcal{D}_2$: Ստանում ենք՝

$$A\mathcal{D}_1 = A(T_1^{-1}\varepsilon_1) = T_1^{-1}(A\varepsilon_1) =$$

$$T_1^{-1}(A\varepsilon_2) = T_1^{-1}(AT_2\mathcal{D}_2) = (T_1^{-1}AT_2)\mathcal{D}_2,$$

ուրեմն A օպերատորի ներկայացումը $\mathcal{D}_1$ և $\mathcal{D}_2$ բազիսներում $T_1^{-1}AT_2$ մատրիցն է (այդ մատրիցը կոչվում է A մատրիցին նման մատրից): Այն դեպքում, երբ $L_1 = L_2$ կարող ենք վերցնել $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ և կստանանք $T_1 = T_2 = T$: Նոր բազիսում A մատրիցը կվերածվի $T^{-1}AT$ մատրիցի, որը կոչվում է A մատրիցին համալուծ:

Գծային Հանրահաշվի կարևորագույն խնդիրներից մեկը այնպիսի բազիս կառուցելու խնդիրն է, որում տրված գծային օպերատորի մատրիցն ունի "պարզագույն" տեսքը:

Գծային օպերատորի ռանգը

Սահմանում. $A : L_1 \rightarrow L_2$ գծային օպերատորի ռանգ է կոչվում պատկերի չափը և այն նշանակվում է հետևյալ կերպ՝ $\text{rank} A = \dim \text{Im} A$:

Դիցուք $A : L_1 \rightarrow L_2$ գծային օպերատորը ներկայացված է A մատրիցով, այսինքն կոմուտատիվ է հետևյալ դիագրամը.

$$\begin{array}{ccccc} A : & L_1 & \rightarrow & L_2 \\ & \varepsilon_1 \uparrow & & \varepsilon_2 \uparrow \\ A : & V_n(K) & \rightarrow & V_m(K) \end{array}$$

Քանի որ L_2 -ը և $V_m(K)$ -ն իզոմորֆ են, ապա $\text{Im } A$ -ն իզոմորֆ է $\text{Im } A$ -ին և

$$\text{rank } A = \dim \text{Im } A = \dim \text{Im } A:$$

Հեշտ է տեսնել, որ $\text{Im } A$ -ն դա A մատրիցի տողերի (որոնք դիտարկվում են որպես $V_m(K)$ -ի տարրեր) համակարգի գծային թաղանթն է: Իսկապես, $\text{Im } A = \{\Lambda A \mid \Lambda \in V_n(K)\}$ և, եթե $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, ΛA -ն հավասար է A մատրիցի տողերի գծային կոմբինացիային, որի գործակիցներն են $\lambda_1, \dots, \lambda_n$: Ահմայատ է, որ $\dim \text{Im } A$ -ն հավասար է A մատրիցի տողերի գծային թաղանթի չափին, որն իր հերթին հավասար է մատրիցի տողերի գծորեն անկախ առավելագույն համակարգի հզորությունը՝ մատրիցի ռանգին: Հետևաբար,

$$\text{rank } A = \dim \text{Im } A = \text{rank } A$$

և գծային օպերատորի ռանգը համընկնում է նրան ներկայացնող մատրիցի ռանգի հետ:

Սիլվեստրի անհավասարությունները

Դիցուք տրված են երկու գծային օպերատորներ $A : L_1 \rightarrow L_2$ և $B : L_2 \rightarrow L_3$ (նկատենք, որ բոլոր նշված տարածությունները սահմանված են միևնույն դաշտի նկատմամբ): Դիտարկենք մի նոր արտապատկերում, որ ստացվում է A -ի և B -ի հաջորդական կիրառմամբ: Նշանակենք այդ օպերատորը AB -ով, այսինքն $AB : L_1 \rightarrow L_3$ և $(AB)x = B(Ax)$: Համոզվենք, որ AB -ն նույնպես գծային օպերատոր է.

$$(AB)(\lambda x + \mu y) = B(A(\lambda x + \mu y)) \quad \underbrace{=}_{\text{քանի որ } A\text{-ն գծային է}}$$

$$B(\lambda Ax + \mu Ay) \quad \underbrace{=}_{\text{քանի որ } B\text{-ն գծային է}} \quad \lambda B(Ax) + \mu B(Ay) = \lambda(AB)x + \mu(AB)y:$$

Կառուցված AB գծային օպերատորը կոչվում է A -ի և B -ի արտադրյալ:

Դիցուք L_1 -ում, L_2 -ում և L_3 -ում ընտրվել են բազիսներ և կառուցվել են A -ի և B -ի ներկայացումները A և B մատրիցներով համապատասխանաբար: Ուրեմն կոմուտատիվ է հետևյալ դիագրամը.

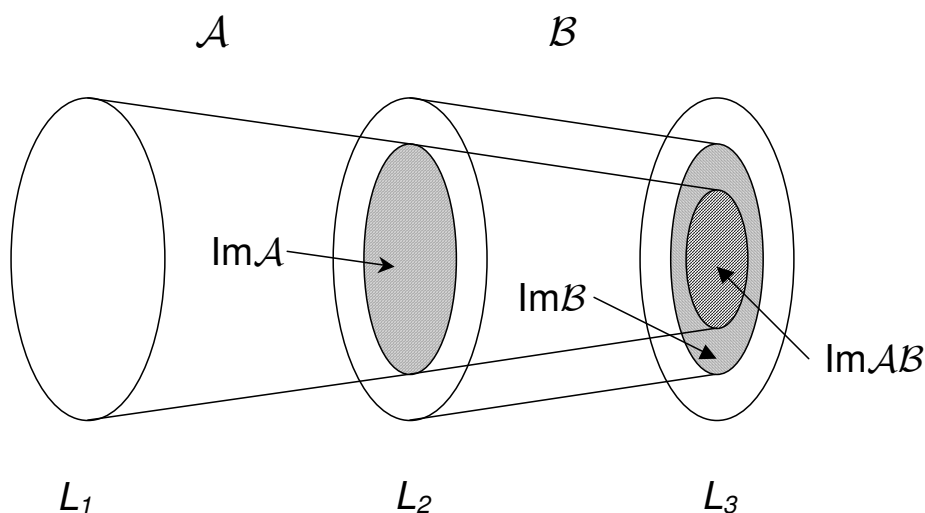
$$\begin{array}{ccccc} & A & & B & \\ L_1 & \rightarrow & L_2 & \rightarrow & L_3 \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ V_n(K) & \rightarrow & V_m(K) & \rightarrow & V_k(K) \\ & A & & B & \end{array}$$

Դժվար չէ նկատել, որ AB օպերատորը ներկայացվում է AB մատրիցով.

Եթե $x \in L_1$ և նրա կորդինատային վեկտորն է $\Lambda \in V_n(K)$, ապա

$\Lambda(AB) = (\Lambda A)B$ -ն $(AB)x$ -ի կոորդինատային վեկտորն է $V_k(K)$ -ում:

Այժմ փորձենք գնահատել $\text{rank}(AB)$ -ի մեծությունը: Հաջորդաբար կիրառենք A -ն ու B -ն: Կստանանք հետևյալ պատկերը՝



Ունենք որ, $\text{Im } A \subseteq L_2$, $\text{Im } AB \subseteq \text{Im } B \subseteq L_3$: Նկատենք, որ թեորեմ 6-ից հետևում է, որ գծային օպերատորի պատկերի չափը (այսինքն ռանգը) չի գերազանցում օպերատորի որոշման տիրույթ հանդիսացող տարածության չափին: Պարզ է, որ $\dim \text{Im } AB \leq \dim \text{Im } B$ և $\text{rank}(AB) \leq \text{rank } B$: Նկարից երևում է (և դա հեշտությամբ ստուգվում է), որ B օպերատորի սահմանափակումը $\text{Im } A$ -ի վրա նույնպես գծային օպերատոր է, որը $\text{Im } A$ -ն տանում է $\text{Im } AB$ -ի վրա, ուստի $\dim \text{Im } AB \leq \dim \text{Im } A$ և $\text{rank}(AB) \leq \text{rank } A$:

Այսպիսով ստացանք ռանգի վերին գնահատականը.

$$\begin{aligned} \text{rank}(AB) &\leq \text{rank } A \\ \text{rank}(AB) &\leq \text{rank } B \end{aligned} \tag{6}$$

Ստորին գնահատական ստանալու համար կառուցենք հետևյալ գծային օպերատորը.

$$\mathcal{B}^* : L_2/\text{Im } \mathcal{A} \rightarrow \text{Im } \mathcal{B}/\text{Im } \mathcal{A}\mathcal{B}$$

$$\mathcal{B}^*(x + \text{Im } \mathcal{A}) = \mathcal{B}x + \text{Im } \mathcal{A}\mathcal{B}, \text{ բոլոր } x \in L_2 \text{ համար:}$$

Համոզվենք, որ $\mathcal{B}^*$ -ն գծային օպերատոր է: Դիցուք $(x_1 + \text{Im } \mathcal{A})$ և $(x_2 + \text{Im } \mathcal{A}) \in L_2/\text{Im } \mathcal{A}$:

Ունենք

$$\mathcal{B}^*((x_1 + \text{Im } \mathcal{A}) + (x_2 + \text{Im } \mathcal{A})) = \mathcal{B}^*((x_1 + x_2) + \text{Im } \mathcal{A}) =$$

$$\mathcal{B}(x_1 + x_2) + \text{Im } \mathcal{A}\mathcal{B} = (\mathcal{B}x_1 + \mathcal{B}x_2) + \text{Im } \mathcal{A}\mathcal{B} =$$

$$(\mathcal{B}x_1 + \text{Im } \mathcal{A}\mathcal{B}) + (\mathcal{B}x_2 + \text{Im } \mathcal{A}\mathcal{B}) = \mathcal{B}^*(x_1 + \text{Im } \mathcal{A}) + \mathcal{B}^*(x_2 + \text{Im } \mathcal{A}):$$

Նույնպես, եթե $(x + \text{Im } \mathcal{A}) \in L_2/\text{Im } \mathcal{A}$, ապա

$$\mathcal{B}^*(\lambda(x + \text{Im } \mathcal{A})) = \mathcal{B}^*(\lambda x + \text{Im } \mathcal{A}) = \mathcal{B}(\lambda x) + \text{Im } \mathcal{A}\mathcal{B} =$$

$$\lambda \mathcal{B}x + \text{Im } \mathcal{A}\mathcal{B} = \lambda(\mathcal{B}x + \text{Im } \mathcal{A}\mathcal{B}) = \lambda \mathcal{B}^*(x + \text{Im } \mathcal{A}):$$

Ստուգենք այժմ, որ

$$\text{Im } \mathcal{B}^* = \text{Im } \mathcal{B}/\text{Im } \mathcal{A}\mathcal{B}:$$

Եթե $(y + \text{Im } \mathcal{A}\mathcal{B}) \in \text{Im } \mathcal{B}/\text{Im } \mathcal{A}\mathcal{B}$, ապա $y \in \text{Im } \mathcal{B}$ և $\exists x \in L_2$ որ $\mathcal{B}x = y$:

Ստանում ենք՝

$$\mathcal{B}^*(x + \text{Im } \mathcal{A}) = \mathcal{B}x + \text{Im } \mathcal{A}\mathcal{B} = y + \text{Im } \mathcal{A}\mathcal{B}$$

և

$$y + \text{Im } \mathcal{A}\mathcal{B} \in \text{Im } \mathcal{B}^*:$$

Քանի որ $\mathcal{B}^*$ -ն գծային օպերատոր է, ապա

$$\dim(\text{Im } \mathcal{B}/\text{Im } \mathcal{A}\mathcal{B}) \leq \dim(L_2/\text{Im } \mathcal{A})$$

և համաձայն Թեորեմ 4-ի ստանում ենք՝

$$\dim \text{Im } \mathcal{B} - \dim \text{Im } \mathcal{A}\mathcal{B} \leq \dim L_2 - \dim \text{Im } \mathcal{A},$$

այսինքն՝

$$\text{rank } \mathcal{B} - \text{rank } (\mathcal{A}\mathcal{B}) \leq \dim L_2 - \text{rank } \mathcal{A}:$$

Ստացանք Հետևյալ ստորին գնահատականը

$$\text{rank} A + \text{rank} B - \dim L_2 \leq \text{rank}(AB) \quad (7)$$

Միավորելով (6) և (7) գնահատականները ստանում ենք՝

Թեորեմ 7. (Սիլվեստրի անհավասարությունները)

$$\text{rank}(AB) \leq \text{rank} A$$

$$\text{rank}(AB) \leq \text{rank} B$$

$$\text{rank} A + \text{rank} B - \dim L_2 \leq \text{rank}(AB)$$

Եթե A և B օպերատորները ներկայացված են $n \times m$ և $m \times k$ չափանի A և B մատրիցներով, Համապատասխանաբար (ինչպես նշել էինք վերը), ապա Սիլվեստրի անհավասարությունները մատրիցների Համար կոռնենան Հետևյալ տեսքը.

$$\text{rank}(AB) \leq \text{rank} A$$

$$\text{rank}(AB) \leq \text{rank} B$$

$$\text{rank} A + \text{rank} B - m \leq \text{rank}(AB)$$

Եթե A մատրիցը չվերասերված է, ապա $n = m = \text{rank} A$ և

$$\text{rank} A + \text{rank} B - m = \text{rank} B \leq \text{rank}(AB) \leq \text{rank} B,$$

ուստի՝

$$\text{rank}(AB) = \text{rank} B:$$

Եթե B մատրիցը չվերասերված է, ապա $m = k = \text{rank} B$ և

$$\text{rank} A + \text{rank} B - m = \text{rank} A \leq \text{rank}(AB) \leq \text{rank} A$$

Հետևաբար՝

$$\text{rank}(AB) = \text{rank}A:$$

Թեորեմ 8.

Չվերասերված մատրիցով բազմապատկելիս մատրիցը չի փոխում իր ռանգը:

Ինչպես տեսել էինք, տարբեր բազիսներում միևնույն օպերատորի մատրիցային ներկայացումները իրար հետ կապված են հետևյալ կերպ՝ $T_1^{-1}AT_2$: Քանի որ A -ն և $T_1^{-1}AT_2$ -ն միևնույն օպերատորի ներկայացումներն են, ապա դրանց ռանգերը համընկնում են: Դա նույնպես հաստատվում է Թեորեմ 8-ով, որովհետև T_1 -ը և T_2 -ը անցման մատրիցներ են և, ուրեմն, չվերասերված են:

ԳԺԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

Դիցուք K դաշտում տրված է n անհայտով m հատ գծային
հավասարումների համակարգ

[illegible]

Լուծել համակարգը նշանակում է գտնել բոլոր լուծումները, եթե համակարգն ունի լուծում: Հեշտ է տեսնել, որ (8) համակարգը կարելի է ներկայացնել մատրիցային լեզվով: Եթե նշանակենք $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ և

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & & \alpha_{m2} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix},$$

ապա Համակարգը կգրվի Հետևյալ կերպ՝

$$xA = \beta \quad (9)$$

Ինչպես գիտենք, xA -ն իրենից ներկայացնում է A մատրիցի տողերի գծային կոմբինացիա, որի գործակիցները $x_1, \dots, x_n$ -են: Ուրեմն, (9) համակարգն ունի լուծում միայն և միայն այն դեպքում, երբ $\beta \in \text{Im } A$, եթե A մատրիցը դիտարկենք որպես գծային օպերատոր, որ գործում է $V_n(K)$ -ի վրա և արժեքներ է ընդունում $V_m(K)$ -ում: Որպեսզի ստուգենք $\beta \in \text{Im } A$ պայմանը, կառուցենք այսպես կոչված ընդլայնված մատրիցը՝

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{m2} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{mn} \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_m \end{pmatrix} :$$

Ահնհայտ է, որ վերջին տողը կլինի գծորեն անկախ մնացածից միայն, երբ $\text{rank} A < \text{rank} \tilde{A}$: Հակառակ դեպքում, երբ $\text{rank} A = \text{rank} \tilde{A}$, վերջին տողը կարտահայտվի գծորեն մնացածով և $\beta \in \text{Im} A$:

Թեորեմ 9. (Կրոնեկեր-Կապելլի)

Որպեսզի $xA = \beta$ համակարգն ունենա լուծում (լինի համատեղ), անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\text{rank} A = \text{rank} \tilde{A}$:

Ֆիքսած $\beta \in \text{Im} A$ համար (9) համակարգի լուծումները կազմում են հարակից դաս $V_n(K)$ -ում ըստ $\ker A$ -ի, ուստի (9) համակարգն ունի միակ լուծում միայն և միայն այն դեպքում, երբ հարակից դասերը կազմված են մեկ տարրից, այսինքն երբ $\dim \ker A = 0$, ինչը համարժեք է $\ker A = \{0\}$ պայմանին:

$xA = 0$ համակարգը կոչվում է $xA = \beta$ -ին համապատասխանող համասեռ համակարգ: Ահնհայտ է, որ $xA = 0$ համասեռ համակարգի լուծումները $\ker A$ -ի տարրերն են: Ուրեմն, որպեսզի ստանանք (9) համակարգի բոլոր լուծումները բավական է գտնել համասեռ համակարգի լուծումները (այսինքն գտնել միջուկի $\ker A$ -ի որևէ բազիս, քանի որ $\dim \ker A = n - \text{rank} A$ բավական է գտնել համասեռ համակարգի $n - \text{rank} A$ հատ անկախ լուծում) և գտնել (9) համակարգի որևէ մեկ մասնավոր լուծում: Համակարգի բոլոր լուծումների հարակից դասը ստանալու համար բավական կլինի մասնավոր լուծմանը գումարել հերթով համասեռ համակարգի բոլոր լուծումները (միջուկի

բազիսի բոլոր գծային կոմբինացիաները):

$x A = 0$ Համասեռ Համակարգն ունի ոչ զրոյական լուծում միայն երբ $n - \text{rank} A \neq 0$, ինչը Համարժեք է $< n$ պայմանին: Եթե A մատրիցը քառակուսի է, վերջին պայմանը Համարժեք է $\det A = 0$ պայմանին:

լուծման Գառուսի ալգորիթմը

Տրված է n անհայտով m գծային հավասարումների համակարգը՝

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{m1}x_1 + \dots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{array} \right.$$

Գառուսի ալգորիթմը բաղկացած է երկու փուլից՝ "ուղիղ փուլից" և "Հետադարձ փուլից":

Ուղիղ փուլ (Համակարգի բերումը սեղանաձև տեսքի)

Նյութին է ստուգել, որ եթե Համակարգի որևէ Հավասարում բազմապատկենք թվով և գումարենք այն մեկ այլ Հավասարմանը, ապա ստացված Համակարգը կլինի Համարժեք սկզբնականին:

Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք համարել, որ $\alpha_{11} \neq 0$: Իրոք, եթե $\alpha_{11} = 0$, ապա կգտնվի $\alpha_{1i} \neq 0$, $i = 2, \dots, n$: Հակառակ դեպքում առաջին հավասարման ձախ մասը նույնաբար զրո է և առաջին հավասարումը կամ անհեական է (այն ունի $0 = 0$ տեսքը) կամ համակարգն անհամատեղ է (առաջին հավասարումը $0 = \beta_1 \neq 0$ տեսքի է): Վերանվանելով x_1 և x_i անհայտները համակարգի առաջին և i -րդ սյունները, կտեղափոխենք և նոր համակարգում կունենանք՝ $\alpha_{11} \neq 0$: Պարզ է, որ նոր համակարգի լուծումը հեշտությամբ կվերածվի սկզբնական համակարգի լուծմանը:

Այսպիսով համարում ենք, որ $\alpha_{11} \neq 0$: Յուրաքանչյուր $i \in \{2, \dots, n\}$ համար բազմապատկենք առաջին հավասարումը $\frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{11}}$ -ով և գումարենք i -րդ հավասարմանը: Նյութին է ստուգել, որ i -րդ հավասարման x_1 -ի գործակիցը կզրոյացվի: Այսինքն, համակարգը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha'_{22}x_2 + \dots + \alpha'_{2n}x_n = \beta'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_{m2}x_2 + \dots + \alpha'_{mn}x_n = \beta'_m \end{array} \right.$$

Եթե որևէ հավասարման ձախ մասը զրոյացվել է, իսկ աջը ոչ, ապա համակարգն անհամատեղ է և արգորիթմը վերջացնում է աշխատանքը: Եթե կան հավասարումներ, որ ձախ մասը զրո է և աջ մասն էլ է զրո, ապա այդպիսի բոլոր հավասարումներն անեական են և ստացվում են առաջին հավասարումից թվով բազմապատկմամբ: Այդ հավասարումները հեռացվում են համակարգից:

Ինչպես նշել էինք վերը, կարող ենք ենթադրել, որ $\alpha'_{22} \neq 0$ (անհրաժեշտության դեպքում կվերանվանենք որոշ անհայտները) և բազմապատկելով երկրորդ հավասարումը $\frac{\alpha'_{i2}}{\alpha'_{22}}$ գործակցով հանենք այն i -րդ հավասարումից, $i = 3, \dots, n$: Արդյունքում բոլոր հավասարումներում, սկսած երրորդից, x_2 -ի գործակիցը կզրոյանա: Շարունակելով պրոցեսը կամ կպարզվի, որ համակարգն անհամատեղ է և արգորիթմը կվերջացնի աշխատանքը, կամ էլ համակարգը "ուղիղ փուլի" ընթացքում կբերվի հետևյալ սեղանաձև տեսքի.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1k}x_k + \alpha_{1k+1}x_{k+1} + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2k}x_k + \alpha_{2k+1}x_{k+1} + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_{kk}x_k + \alpha_{kk+1}x_{k+1} + \dots + \alpha_{kn}x_n = \beta_k \end{array} \right. \quad (10)$$

որտեղ $k \leq n$, $\alpha_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, k$: Թեև Համակարգի գործակիցները և աջ մասերը փոխվել են, Հարմարություն Համար մենք նրանց կրկին նշանակել ենք α -ներով և β -ներով: Փաստորեն, մենք որոշեցինք Համակարգի մատրիցի ռանգը և այն հավասար է k -ի:

Հետադարձ փուլ

Նյութին է ստուգել, որ, եթե ֆիքսենք $x_{k+1}, \dots, x_n$ անհայտների արժեքները, ապա մնացած $x_1, \dots, x_k$ անհայտները կորոշվեն միարժեքորեն: Իսկապես, վերջին հավասարումից միարժեքորեն որոշվում է x_k -ն: Ապա իմանալով x_k -ն, նախորդ հավասարումից կստանանք x_{k-1} -ը և այսպես շարունակելով կհասնենք x_1 -ին:

Պարզ է, որ $k = n$ դեպքում $x_{k+1}, \dots, x_n$ անհայտները չկան և Համակարգն ունի միակ լուծում, որը ստացվում էրը նշված եղանակով:

Եթե $k < n$ Համակարգն ունի մեկից ավելի լուծում և, ինչպես տեսել էինք, բոլոր լուծումները ստանալու համար հարկավոր է գտնել Համասեռ Համակարգի լուծումները, այսինքն $n - k$ հատ գծորեն անկախ լուծում (որոնք կազմում են միջուկի բազիսը) և մեկ մասնավոր լուծում: Դիտարկենք (10) Համակարգին Համապատասխանող Համասեռ Համակարգը.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1k}x_k + \alpha_{1k+1}x_{k+1} + \dots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2k}x_k + \alpha_{2k+1}x_{k+1} + \dots + \alpha_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{kk}x_k + \alpha_{kk+1}x_{k+1} + \dots + \alpha_{kn}x_n = 0 \end{array} \right.$$

Վերագրենք $x_{k+1}, \dots, x_n$ անհայտներին

$$\underbrace{(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)}_{n-k \text{ հատ}}$$

արժեքները և գտնենք միարժեքորեն որոշված $x_1, \dots, x_k$ -ները և կստանանք համասեռ համակարգի $n - k$ հատ լուծում:

$$\begin{aligned} &(\gamma_{11}, \dots, \gamma_{1k}, 1, 0, 0, \dots, 0) \\ &(\gamma_{21}, \dots, \gamma_{2k}, 0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ &(\gamma_{(n-k)1}, \dots, \gamma_{(n-k)k}, 0, 0, 0, \dots, 1) \end{aligned}$$

Այս լուծումները գծորեն անկախ են, քանի որ, եթե $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}$ գործակիցներով դրանց գծային կոմբինացիան՝

$$\left(\sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \gamma_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \gamma_{ik}, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-k} \right)$$

հավասար է զրոյի, ուրեմն զրո են $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}$:

Այս գտնված $n - k$ հատ համասեռ համակարգի գծորեն անկախ լուծումները կոչվում են համակարգի ֆունդամենտալ լուծումներ և դրանք կազմում են համապատասխան միջուկի բազիսը:

(10) Համակարգի մասնավոր լուծումը գտնելու համար վերագրենք $x_{k+1}, \dots, x_n$ անհայտներին զրոյական արժեքներ և գտնենք համապատասխան $x_1, \dots, x_k$ -ները: Համակարգի ընդհանուր լուծումը կստանանք մասնավոր լուծմանը գումարելով ֆունդամենտալ

լուծումների գծային կոմբինացիաները:

Գաուսի ալգորիթմի միջոցով շատ հարմար է նաև գտնել տրված մատրիցի հակադարձը: Դիցուք A -ն քառակուսի չվերասերված մատրից է: Կազմենք ֆորմալ գծային հավասարումների համակարգ $xA = \beta$, որտեղ β -ն $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ ֆորմալ սիմվոլների վեկտոր է (դրանց հետ վարվում ենք այնպես, ինչպես անհայտների նշանների հետ): Կիրառենք Գաուսի ալգորիթմի "ուղիղ փուլը" և համակարգը կբերվի եռանկյունաձև տեսքի, ընդ որում հավասարումների աջ մասերում կառաջանան $\beta_1, \dots, \beta_n$ սիմվոլների գծային կոմբինացիաները: Հաջորդաբար գտնենք $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$ անհայտները, որոնք կարտահայտվեն $\beta_1, \dots, \beta_n$ սիմվոլների գծային կոմբինացիաներով: Այսինքն, կստանանք $x = \beta B$ և, ուրեմն, $B = A^{-1}$, քանի որ $x = (xA)B = x(AB) \Rightarrow AB = E$:

Գծային օպերատորի սեփական արժեքները և սեփական վեկտորները

Այս պահից սկսած դիտարկելու ենք $A : L \rightarrow L$ տեսակի օպերատորներ, որտեղ որոշման և արժեքների տիրույթները նույն գծային տարածություններն են։ Դրանով մենք չենք կորցնում ընդհանրությունը, քանի որ $A : L_1 \rightarrow L_2$ դեպքում կարող ենք սահմանափակվել $L_2 = \text{Im } A$ դեպքով և $\dim L_2 \leq \dim L_1$ ։ Ուրեմն, L_1 -ը իզոմորֆ է $V_n(K)$ -ին, իսկ L_2 -ը՝ $V_m(K)$ -ին, որտեղ $m \leq n$ ։ Պարզ է, որ A -ն կարող ենք ներկայացնել մատրիցով, որն արտապատկերում է $V_n(K)$ -ն $V_m(K)$ -ի մեջ։

Դիցուք $A : L \rightarrow L$ գծային օպերատոր է։ λ թիվը K դաշտից կոչվում է A օպերատորի սեփական արժեք, եթե գոյություն ունի ոչ զրոյական $x \in L$, որ $Ax = \lambda x$ ։ x -ը կոչվում է λ -ին համապատասխանող սեփական վեկտոր։

Օրինակներ

1. L -ը հարթության վեկտորներն են. օպերատորը յուրաքանչյուր վեկտոր բազմապատկում է 3-ով։ 3-ը սեփական արժեք է, իսկ կամայական ոչ զրոյական վեկտոր սեփական վեկտոր է։

2. L -ը հարթության վեկտորներն են. օպերատորը յուրաքանչյուր վեկտոր վերլուծում է ըստ միավոր օրտերի (ըստ բազիսի) և ապա առաջին կորդինատը բազմապատկում է 3-ով, իսկ երկրորդը՝ 5-ով։ 3-ը և 5-ը սեփական արժեքներ են, իսկ

կորդինատային առանցքներին զուգահեռ վեկտորները՝ սեփական վեկտորներ:

3. L -ը Հարթության վեկտորներն են. օպերատորը յուրաքանչյուր վեկտոր պտտում է կորդինատային Համակարգի սկզբնակետի շուրջ 90° անկյունով: Օպերատորը չունի և ոչ մի իրական սեփական արժեք:

Միևնույն λ սեփական արժեքին Համապատասխանող սեփական վեկտորները (և զրոյական տարրը) կազմում են գծային ենթատարածություն: Իսկապես, նշանակենք

$$M(\lambda) = \{x \mid Ax = \lambda x\}:$$

Դիցուք $x_1, x_2 \in M(\lambda)$: Ստուգենք, որ $\alpha x_1 + \beta x_2 \in M(\lambda)$: Ունենք՝

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2 = \alpha \lambda x_1 + \beta \lambda x_2 = \lambda(\alpha x_1 + \beta x_2)$$

և $\alpha x_1 + \beta x_2 \in M(\lambda)$:

Սեփական արժեքները և վեկտորները անմիջականորեն կապված են մատրիցի պարզեցման խնդրի հետ՝ եթե տրված է $A : L \rightarrow L$ գծային օպերատորի ներկայացումը A մատրիցով որևէ բազիսում, ապա մեկ այլ բազիսում օպերատորը ներկայացվում է $T^{-1}AT$ մատրիցով, որտեղ T -ն անցման մատրիցն է.

մատրիցի պարզեցման խնդիրն այնպիսի բազիսի կառուցումն է, որում մատրիցը ստանում է Հարավորին չափ "պարզ" տեսք (օրինակ, անկյունագծային կամ եռանկյունաձև, կամ Համարյա բոլոր տարրերը զրոյական են):

Դիցուք

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

L տարածությունն այնպիսի բազիս է, որ յուրաքանչյուր e_i -ն սեփական վեկտոր է A -ի համար, որ համապատասխանում է λ_i սեփական արժեքին: Օպերատորի ներկայացումն այդ բազիսում ստացվում է հետևյալ կերպ՝

$$\begin{aligned} A\varepsilon &= \begin{pmatrix} Ae_1 \\ \vdots \\ Ae_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 e_1 \\ \vdots \\ \lambda_n e_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \varepsilon \end{aligned}$$

Այստեղից անմիջապես հետևում է, որ

մատրիցը կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի միայն և միայն այն դեպքում, երբ գծային տարածությունն ունի բազիս կազմված օպերատորի սեփական վեկտորներից:

Թեորեմ 10.

Զույգ առ զույգ իրարից տարբեր $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ սեփական

արժեքներին Համապատասխանող $e_1, \dots, e_m$ սեփական վեկտորները գծորեն անկախ են:

Ապացույց. Կիրառենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդն ըստ m -ի:

Եթե $m = 1$, ապա e_1 -ը լինելով սեփական վեկտոր զրոյական չէ և, ուստի, e_1 -ը գծորեն անկախ Համակարգ է:

Ենթադրենք, որ թեորեմի պնդումը ճիշտ է բոլոր m -րի Համար, որոնք $\leq n$, ապացուցենք պնդումը n -ի Համար:

Դիցուք $e_1, \dots, e_n$ -ը $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ սեփական արժեքներին Համապատասխանող սեփական վեկտորներ են և $i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$: Ահնհայտ է, որ $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0$ պայմանից բխում է՝

$$A(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 A e_1 + \dots + \alpha_n A e_n =$$

$$\alpha_1 \lambda_1 e_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n e_n = 0$$

և

$$\lambda_1 \alpha_1 e_1 + \lambda_1 \alpha_2 e_2 + \dots + \lambda_1 \alpha_n e_n = 0:$$

Իրարից հանենք վերջին երկու Հավասարությունները և կստանանք՝

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)e_2 + \dots + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_1)e_n = 0: \quad (11)$$

Սակայն $e_2, \dots, e_n$ -ը բավարարում են ինդուկցիայի ենթադրությանը և, ուրեմն, գծորեն անկախ են: Ուստի, (11)-ի գործակիցները զրո են: Քանի որ $\lambda_i \neq \lambda_1$, $i = 2, \dots, n$, ապա $\alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$: Քանի որ $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0$, ապա նաև $\alpha_1 = 0$ և թեորեմն ապացուցված է:

Դիցուք $A : L \rightarrow L$ գծային օպերատոր է: Նշանակենք $\mathcal{I}$ -ով միավոր գծային օպերատորը, այսինքն $\mathcal{I} : L \rightarrow L$ և $\mathcal{I}x = x$ բոլոր $x \in L$ Համար: Հեշտությամբ ստուգվում է, որ $A - \lambda \mathcal{I} : L \rightarrow L$ օպերատորը, որը $x \in L$ տանում է $Ax - \lambda \mathcal{I}x$ -ի մեջ (այսինքն, $(A - \lambda \mathcal{I})x = Ax - \lambda x$) գծային

օպերատոր է:

Այն փաստը, որ λ -ն A -ի սեփական արժեքն է և ոչ զրոյական x -ը Համապատասխան սեփական վեկտորն է, կարելի է արձանագրել նաև հետևյալ կերպ.

λ -ն A -ի սեփական արժեքն է, եթե կգտնվի ոչ զրոյական $x \in L$ այնպիսին, որ $(A - \lambda I)x = 0$:

Վերջին պայմանը նշանակում է, որ $A - \lambda I$ օպերատորի միջուկը պարունակում է ոչ զրոյական տարր և $\dim \ker(A - \lambda I) > 0$: Ղյուրին է Համոզվել, որ եթե A մատրիցը A օպերատորի որևէ ներկայացում է ε բազիսում, ապա $A - \lambda E$ մատրիցը (որտեղ E -ն միավոր մատրիցն է) $A - \lambda I$ օպերատորի ներկայացումն է: Ուստի, $(A - \lambda I)x = 0$ պայմանը Համարժեք է $\Lambda(A - \lambda E) = 0$ պայմանին, որտեղ Λ -ն x -ի կորդինատային վեկտորն է ε բազիսում: Այստեղից հետևում է, որ λ թիվը Հանդիսանում է սեփական արժեք A օպերատորի Համար միայն և միայն այն դեպքում, երբ քառակուսի մատրիցով $\Lambda(A - \lambda E) = 0$ գծային Համասեռ Հավասարումների Համակարգը (այստեղ Λ -ն դիտարկվում է որպես անհայտների վեկտոր) ունի ոչ զրոյական լուծում: Ինչպես գիտենք, դա Հնարավոր է միայն, եթե $\det(A - \lambda E) = 0$: Նկատենք, որ վերջին պայմանը դա Հանրահաշվային Հավասարում է, որի արմատ է Հանդիսանում λ -ն: Իսկապես, դիցուք

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

ապա

$$\det(A - \theta E) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \theta & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \theta & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - \theta \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^n \theta^n + (-1)^{n-1} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ii} \right) \theta^{n-1} + \dots + \det A$$

և ստացանք n -րդ աստիճանի բազմանդամ θ փոփոխականից: Ուստի, λ -ն սեփական արժեք է միայն և միայն այն դեպքում, երբ λ -ն

$\det(A - \theta E) = (-1)^n \theta^n + (-1)^{n-1} (\alpha_{11} + \dots + \alpha_{nn}) \theta^{n-1} + \dots + \det A$ բազմանդամի արմատն է: $\det(A - \theta E)$ բազմանդամը կոչվում է A օպերատորի կամ A մատրիցի բնութագրիչ բազմանդամ: Ընդունված է նաև ասել, որ λ -ն, որը A օպերատորի սեփական արժեքն է, նաև A մատրիցի սեփական արժեքն է: Պարզ է, որ սեփական արժեքների քանակը n -ից չատ լինել չի կարող:

Քանի որ բնութագրիչ բազմանդամը սահմանվում է A օպերատորը ներկայացնող մատրիցի միջոցով, անհրաժեշտ է ստուգել, որ արդյունքը կախված չէ կոնկրետ ներկայացումից: Իսկապես, դիցուք A մատրիցը A օպերատորի ներկայացումն է $\mathcal{E}$ բազիսում, այսինքն $A\mathcal{E} = A\mathcal{E}$, իսկ $T^{-1}AT$ -ն ներակայացումն է նոր բազիսում (այստեղ T -ն բազիսից բազիս անցման մատրիցն է): Քանի որ

$$T^{-1}(A - \theta E)T = T^{-1}AT - \theta E$$

ստանում ենք՝

$$\det(A - \theta E) = \det T^{-1} \det(A - \theta E) \det T =$$

$$\det(T^{-1}(A - \theta E)T) = \det(T^{-1}AT - \theta E),$$

այսինքն A և $T^{-1}AT$ մատրիցների բնութագրիչ բազմանդամները

Հավասար են:

Վերադառնալով օպերատորի մատրիցի պարզեցման խնդրին, Հարկ է նկատել, որ միանգամից պարզ է, որ չի կարելի հույս ունենալ, թե իրական թվերի դաշտի դեպքում բոլոր մատրիցները կարելի է բերել անկյունագծային կամ գոնե եռանկյունաձև տեսքի: Իսկապես,

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ մատրիցի բնութագրիչ բազմանդամը $\theta^2 + 1$ -ն է, որը

չունի իրական արմատ (և Համապատասխան օպերատորը չունի սեփական արժեք): Դժվար չէ ստուգել, որ սա Հարթույթյան վեկտորների տարածության 90° -ով պտույտի օպերատորի մատրիցն է: Եթե որևէ բազիսում այս մատրիցը բերվի եռանկյունաձև տեսքի,

ապա $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$, ապա այն կունենա a և b իրական սեփական

արժեքներ: Ընդհանրապես պարզ է, որ եթե մատրիցը եռանկյունաձև է, ապա նրա անկյունագծային տարրերը նրա բոլոր սեփական արժեքներն են:

Բազմանդամային մատրիցների Սմիթի նորմալ տեսքը

Դիցուք $K[\theta]$ -ն K դաշտից գործակիցներով θ փոփոխականից կախված բոլոր բազմանդամների բազմությունն է։ Բազմանդամային մատրից ասելով կհասկանանք քառակուսի մատրից, որի տարրերը $K[\theta]$ -ից են։ Այդպիսի մատրիցներին կիրառելի են այսպես կոչված տարրական գործողությունները։ Մենք կտարբերենք ըստ տողերի և ըստ սյուների սահմանված տարրական գործողությունները։

Ըստ տողերի (սյուների) տարրական գործողություններն են.

- երկու տարբեր տողերը (սյուները) տեղերով փոխելը,
- տողը (սյունը) K դաշտի ոչ զրոյական տարրով բազմապատկելը,
- $K[\theta]$ -ից բազմանդամով բազմապատկված տողը (սյունը) մեկ այլ տողին (սյանը) գումարելը։

Սահմանում. $f(\theta) \in K[\theta]$ բազմանդամը կոչվում է նորմավորված, եթե θ -ի ամենաբարձր աստիճանի գործակիցը հավասար է 1-ի։

Թեորեմ 1.1. (Սմիթի նորմալ տեսքի մասին)

Կամայական բազմանդամային $n \times n$ չափանի մատրից տողերի և սյուների տարրական գործողություններով բերվում է հետևյալ տեսքի.

$$\begin{pmatrix} g_1(\theta) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & g_r(\theta) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

որտեղ $g_1(\theta), \dots, g_r(\theta) \in K[\theta]$ նորմավորված բազմանդամներ են, $0 \leq r \leq n$ և $g_i(\theta)$ -ն $g_{i+1}(\theta)$ -ի բաժանարարն է, $i = 1, 2, \dots, r-1$:

Ապացույց. Նկարագրենք մի ալգորիթմ, որը տրված բազմանդամային մատրիցը բերում է նշված տեսքի:

Ստորև կնկարագրենք տարրական գործողությունների մի հաջորդականություն, որը կիրառելով $A = (\alpha_{ij})_{n \times n}$ մատրիցին, որում $\alpha_{11} \neq 0$, կստանանք կամ մի $B = (\beta_{ij})_{n \times n}$ մատրից, որում $\beta_{11} \neq 0$ և $\deg \beta_{11} < \deg \alpha_{11}$, կամ էլ

$$C = \left(\begin{array}{c|ccc} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & C^* & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

տեսքի C մատրիցը, որտեղ $\gamma_1 \in K[\theta]$ նորմավորված բազմանդամ է, որի վրա առանց մնացորդի բաժանվում են C^* մատրիցի բոլոր տարրերը:

Դիցուք տրված է ոչ զրոյական $A = (\alpha_{ij})_{n \times n}$ մատրիցը: Կարող ենք համարել, որ $\alpha_{11} \neq 0$ (հակառակ դեպքում դրան կհասնենք տողերի և/կամ սյուների համապատասխան տեղափոխություններով): A -ին կիրառելով տարրական գործողությունների վերը նշված

Հաջորդականությունը վերջավոր քայլերից հետո կհասնենք C տեսքի մատրիցի, քանի որ Հակառակ դեպքում կստանանք բնական թվերի ($\deg \beta_{11}$ -րի) անվերջ նվազող Հաջորդականություն: Ստանալով C մատրիցը կանգ ենք առնում, եթե $C^* = 0$: Հակառակ դեպքում կիրառում ենք վերը նշված գործողությունների Հաջորդականությունը C^* մատրիցին և այսպես շարունակ, մինչև որ ստանանք անկյունագծային մատրից: Այդ մատրիցի անկյունագծային տարրերը նորմավորում ենք բազմապատկելով տողերը K դաշտի Համապատասխան թվերով և ստանում ենք թեորեմի պնդման մեջ նշված մատրիցը: Նշենք, որ C^* մատրիցին կիրառած որևէ տարրական գործողություն Համապատասխանում է C մատրիցի նույն տողերի (սյունների) տարրական գործողությանը, որը չի փոխում C -ի առաջին տողի և առաջին սյան տարրերը: C^* մատրիցին կիրառած որևէ տարրական գործողության արդյունքում C^* մատրիցի որոշ տարրեր փոխարինվում են C^* մատրիցի տարրերի գծային կոմբինացիաներով, ուստի նոր ստացված տարրեր նույնպես առանց մնացորդի բաժանվում են γ_1 -ի վրա:

Այժմ նկարագրենք վերը նշված տարրական գործողությունների Հաջորդականությունը, որը կիրառում ենք ոչ զրոյական $A = (\alpha_{ij})_{n \times n}$ մատրիցին, որում $\alpha_{11} \neq 0$:

Դեպք 1. Եթե առաջին տողում կգտնվի α_{1j} , $j > 1$, որ $\deg \alpha_{1j} < \deg \alpha_{11}$, ապա տեղերով փոխելով առաջին և j -րդ սյուները ստանում ենք վերը նշված B տեսքի մատրիցը:

Դեպք 2. Նույնն է ինչ որ Դեպք 1-ը կիրառված առաջին սյանը առաջին տողի փոխարեն:

Դեպք 3. Առաջին տողում կգտնվի α_{11} -ի վրա չբաժանվող α_{1j} , $j > 1$: Կիրառելով մնացորդով բաժանումը, ստանում ենք՝

$\alpha_{1j} = \alpha_{11}\lambda + \mu$, որտեղ $\mu \neq 0$ և $\deg \mu < \deg \alpha_{11}$: Բազմապատկենք առաջին սյունը $-\lambda$ բազմանդամով և գումարենք այն j -րդ սյանը: Տեղերով փոխենք առաջին և j -րդ սյունները: Աստացվի վերը նշված B տեսքի մատրիցը:

Դեպք 4. Առաջին սյունում կգտնվի α_{11} -ի վրա չբաժանվող α_{i1} , $i > 1$: Դեպք 3-ին համապատասխան ստանում ենք B տեսքի մատրիցը, վերցնելով տողերի փոխարեն սյունները և սյունների փոխարեն տողերը:

Դեպք 5. Առաջին տողի և առաջին սյան բոլոր տարրերը բաժանվում են առանց մնացորդի α_{11} -ի վրա: Ուրեմն, $\alpha_{1j} = \alpha_{11}\lambda_j$, $j = 2, \dots, n$: Առաջին սյունը բազմապատկում ենք $-\lambda_j$ բազմանդամով և գումարում ենք այն j -րդ սյանը: Արդյունքում առաջին տողի j -րդ տարրը դարձնում ենք զրոյական: Այսինքն առաջին տողի բոլոր տարրերը, բացի α_{11} -ից, դառնում են զրոյական: Նմանապես զրոյական ենք դարձնում առաջին սյան բոլոր տարրերը, բացի α_{11} -ից: Ասպիսով, մատրիցը բերվում է

$$E = \left(\begin{array}{c|ccc} \varepsilon_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & E^* & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

տեսքին: Եթե E^* -ի բոլոր տարրերն առանց մնացորդի բաժանվում են ε_{11} -ի վրա, ապա ստացել ենք C տեսքի մատրիցը: Հակառակ դեպքում կգտնվի ε_{ij} , $i, j > 1$, որ չի բաժանվում ε_{11} -ի վրա: Գումարելով i -րդ տողն առաջինին անցնում ենք Դեպք 1-ին:

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 11-ում մատրիցի նշված տեսքը կոչվում է բազմանդամային մատրիցի Սմիթի նորմալ տեսք:

Օրինակ

Սմիթի նորմալ տեսքի բերենք Հետևյալ բազմանդամային մատրիցը՝

$$\begin{pmatrix} \theta - 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \theta - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \theta & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \theta - 2 \end{pmatrix}$$

Համաձայն Դեպք 2-ի տեղափոխում ենք առաջին և երկրորդ տողերը՝

$$\begin{pmatrix} 1 & \theta - 1 & 0 & 0 \\ \theta - 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \theta & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \theta - 2 \end{pmatrix}$$

Տեղի ունի Դեպք 5-ը: Չրոյացնում ենք առաջին տողի $\theta - 1$ տարրը՝

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \theta - 2 & -(\theta - 1)(\theta - 2) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \theta & 1 \\ -1 & \theta - 2 & -1 & \theta - 2 \end{pmatrix}$$

Չրոյացնենք առաջին սյան վերջին տարրը՝

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \theta - 2 & -(\theta - 1)(\theta - 2) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \theta & 1 \\ 0 & \theta - 2 & -1 & \theta - 2 \end{pmatrix}$$

Հետո զրոյացնում ենք առաջին սյան երկրորդ տարրը՝

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\theta - 1)(\theta - 2) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \theta & 1 \\ 0 & \theta - 2 & -1 & \theta - 2 \end{pmatrix}$$

Ստացանք C տեսքի մատրից, որի համար

$$C^* = \begin{pmatrix} -(\theta - 1)(\theta - 2) & 0 & 0 \\ 1 & \theta & 1 \\ \theta - 2 & -1 & \theta - 2 \end{pmatrix}$$

և C^* -ի բոլոր տարրերը բաժանվում են 1-ի վրա:

Այժմ՝ նույն ալգորիթմը կիրառում ենք C^* -ին: Համաձայն Դեպք 2-ի տեղափոխում ենք առաջին և երկրորդ սողերը՝

$$\begin{pmatrix} 1 & \theta & 1 \\ -(\theta - 1)(\theta - 2) & 0 & 0 \\ \theta - 2 & -1 & \theta - 2 \end{pmatrix}$$

Ստացանք Դեպք 5-ը: Չրոյացնում ենք առաջին սյան երկրորդ և երրորդ տարրերը՝

$$\begin{pmatrix} 1 & \theta & 1 \\ 0 & \theta(\theta - 1)(\theta - 2) & (\theta - 1)(\theta - 2) \\ \theta - 2 & -1 & \theta - 2 \end{pmatrix}$$

և

$$\begin{pmatrix} 1 & \theta & 1 \\ 0 & \theta(\theta-1)(\theta-2) & (\theta-1)(\theta-2) \\ 0 & -1-\theta(\theta-2) & 0 \end{pmatrix}$$

Այժմ զրոյացնում ենք առաջին տողի երկրորդ և երրորդ տարրերը՝

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \theta(\theta-1)(\theta-2) & (\theta-1)(\theta-2) \\ 0 & -1-\theta(\theta-2) & 0 \end{pmatrix}$$

և

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta(\theta-1)(\theta-2) & (\theta-1)(\theta-2) \\ 0 & -1-\theta(\theta-2) & 0 \end{pmatrix}$$

Այժմ ստացանք Հերթական C տեսքի մատրից, որի C^* -ի բոլոր տարրերը բաժանվում են 1-ի վրա: Ուստի, ալգորիթմը կիրառում ենք Հետևյալ մատրիցին՝

$$\begin{pmatrix} \theta(\theta-1)(\theta-2) & (\theta-1)(\theta-2) \\ -(\theta-1)^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Տեղի ունի Դեպք 1-ը, ուստի տեղափոխում ենք առաջին և երկրորդ սյուները՝

$$\begin{pmatrix} (\theta-1)(\theta-2) & \theta(\theta-1)(\theta-2) \\ 0 & -(\theta-1)^2 \end{pmatrix}$$

Հանգեցինք Դեպք 5-ին: Չրոյացնում ենք առաջին տողի երկրորդ տարրը՝

$$\begin{pmatrix} (\theta - 1)(\theta - 2) & 0 \\ 0 & -(\theta - 1)^2 \end{pmatrix}$$

Քանի որ $-(\theta - 1)^2$ տարրը չի բաժանվում $(\theta - 1)(\theta - 2)$ -ի վրա, գումարում ենք երկրորդ տողը առաջինին և անցնում ենք Դեպքեր 1-5-ի ստուգմանը՝

$$\begin{pmatrix} (\theta - 1)(\theta - 2) & -(\theta - 1)^2 \\ 0 & -(\theta - 1)^2 \end{pmatrix}$$

Դեպքեր 1,2-ը տեղի չունեն։ Տեղի ունի Դեպք 3-ը՝ $-(\theta - 1)^2 = (\theta - 1)(\theta - 2)(-1) + (1 - \theta)$ ։ Ուստի, երկրորդ սյանը գումարում ենք առաջինը բազմապատկված 1-ով՝

$$\begin{pmatrix} (\theta - 1)(\theta - 2) & -(\theta - 1) \\ 0 & -(\theta - 1)^2 \end{pmatrix}$$

և Հետո տեղափոխում ենք սյուները՝

$$\begin{pmatrix} -(\theta - 1) & (\theta - 1)(\theta - 2) \\ -(\theta - 1)^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ստացանք Դեպք 5-ը։ Ջրոյացնենք սկզբից առաջին տողի երկրորդ տարրը՝

$$\begin{pmatrix} -(\theta - 1) & 0 \\ -(\theta - 1)^2 & (\theta - 2)(\theta - 1)^2 \end{pmatrix}$$

Հետո զրոյացնենք առաջին սյան երկրորդ տարրը՝

$$\begin{pmatrix} -(\theta - 1) & 0 \\ 0 & (\theta - 2)(\theta - 1)^2 \end{pmatrix}$$

Ստացվեց վերջնական C տեսքի մատրիցը։ Բազմապատկելով

առաջին տողը -1 -ով, նորմավորենք $-(\theta - 1)$ տարրը՝

$$\begin{pmatrix} (\theta - 1) & 0 \\ 0 & (\theta - 2)(\theta - 1)^2 \end{pmatrix}$$

Սկզբնական մատրիցի Սմիթի նորմալ տեսքը հետևյալն է՝

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\theta - 1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\theta - 1)^2(\theta - 2) \end{pmatrix}$$

Նկատենք, որ տարրական գործողությունները կարելի է իրականացնել սկզբնական մատրիցը հատուկ տեսքի մատրիցներով բազմապատկելով:

Դիցուք տրված է բազմանդամային A մատրիցը, որում հարկավոր է տեղերով փոխել առաջին և երկրորդ տողերը: Աառուցենք հետևյալ մատրիցը՝

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Դիտարին է ստուգել, որ բազմապատկելով $P_{12}A$ տեղափոխում ենք A -ի առաջին և երկրորդ տողերը, իսկ բազմապատկելով AP_{12} տեղափոխում ենք A -ի առաջին և երկրորդ սյուները: Նմանապես, յուրաքանչյուր $s \neq t$, $1 \leq s, t \leq n$ համար սահմանենք $P_{st} = (\alpha_{ij})_{n \times n}$ մատրիցը, որում $\alpha_{st} = \alpha_{ts} = 1$, $\alpha_{ii} = 1$ բոլոր $i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{s, t\}$ և մնացած բոլոր

տարրերը զրոյական են: Անհայտ է, որ բազմապատկելով $P_{st}A$, տեղափոխում ենք A -ի s -րդ և t -րդ տողերը, իսկ բազմապատկելով AP_{st} , տեղափոխում ենք A -ի s -րդ և t -րդ սյունները: Այսպիսով, P_{st} մատրիցով ձախից բազմապատկումը տեղափոխում է մատրիցի տողերը, իսկ աջից բազմապատկումը՝ սյունները: Նյուրին է ստուգել, որ $P_{st}^{-1} = P_{st}$:

Դիտարկենք այժմ տողի (սյան) բազմապատկումը K դաշտի ոչ զրոյական λ թվով: Կառուցենք M_k մատրիցը, որը տարբերվում է միավոր $n \times n$ չափանի E մատրիցից միայն նրանով, որ k -րդ անկյունագծային տարրը հավասար է λ թվին: Բազմապատկելով ձախից $M_k A$, բազմապատկում ենք λ -ով A -ի k -րդ տողը, իսկ բազմապատկելով աջից՝ $A M_k$ բազմապատկում ենք λ -ով A -ի k -րդ սյունը: Նկատենք, որ $M_k^{-1} = M_k$:

Կառուցենք $N_{k,m}(g)$ մատրիցը, որտեղ $1 \leq k < m \leq n$ հետևյալ կերպ՝ $N_{k,m}(g)$ -ի տարրերը համընկնում են միավոր E մատրիցի տարրերի հետ, միայն m -րդ տողի և k -րդ սյան հատման տեղում գտնվող տարրը հավասար է $g(\theta) \in K[\theta]$:

$$\begin{array}{ccc}
 & k & \dots & m \\
 & \downarrow & & \downarrow \\
 k \rightarrow & \left(\begin{array}{ccccccc}
 1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & \vdots & \ddots & & & \\
 m \rightarrow & & g(\theta) & \dots & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Պարզ է, որ բազմապատկելով $N_{s,t}(g)A$, տրված A մատրիցի s -րդ տողը բազմապատկվում է $g(\theta)$ բազմանդամով և գումարվում t -րդ տողին, իսկ բազմապատկելով $AN_{t,s}(g)$, տրված A մատրիցի s -րդ սյունը բազմապատկվում է $g(\theta)$ բազմանդամով և գումարվում t -րդ սյանը: Ղյուպին է ստուգել, որ $N_{k,m}^{-1}(g) = N_{k,m}(-g)$:

Այսպիսով,

տարրական գործողությունները տողերի (սյունների) նկատմամբ իրացվում են A մատրիցին ձախից (աջից) վերը նշված չվերասերված մատրիցների բազմապատկմամբ:

Ձախից բազմապատկող մատրիցների արտադրյալը նշանակենք P -ով, իսկ աջից՝ Q -ով: Ահնհայտ է, որ այդ մատրիցները չվերասերված են: Այժմ թերեւմ 1 1-ը կարելի է վերաձևակերպել հետևյալ կերպ.

Թերեւմ 1 2.

Կամայական բազմանդամային $n \times n$ չափանի A մատրիցի համար կգտնվեն չվերասերված $n \times n$ չափանի P և Q բազմանդամային մատրիցներ, որ PAQ մատրիցը Սմիթի նորմալ տեսքի է:

Այժմ հետազոտենք Սմիթի նորմալ տեսքի միակուլթյան հարցը: Դիցուք $n \times n$ չափանի A մատրիցը Սմիթի նորմալ տեսքի է

$$A = \begin{pmatrix} g_1(\theta) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & g_r(\theta) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Ինչպես գիտենք, $f(\theta), g(\theta) \in K[\theta]$ **բազմանդամների** $h(\theta) = (f(\theta), g(\theta))$ **ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը սահմանվում է** K -ից **ոչ զրոյական արտադրիչի ճշտությամբ՝** $\lambda h(\theta)$ -ը **նորից** $f(\theta)$ **և** $g(\theta)$ **բազմանդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է:** Սակայն **գոյություն ունի միակ նորմավորված ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար:**

Հաշվենք A **մատրիցի բոլոր 1-չափանի մինորների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը:** Քանի որ $g_i(\theta)$ -ն $g_{i+1}(\theta)$ -ի բաժանարարն է, դյուրին է տեսնել, որ դա $g_1(\theta)$ -ն է: Նմանապես բոլոր 2-չափանի մինորների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը կլինի $g_1(\theta)g_2(\theta)$ -ը: 3-չափանի մինորների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը կլինի $g_1(\theta)g_2(\theta)g_3(\theta)$ -ը և այսպես շարունակ: r -չափանի մինորների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը կլինի $g_1(\theta)\dots g_r(\theta)$ -ը և, եթե $r < n$, ապա ավելի մեծ չափի բոլոր մինորները զրոյական են: Նկատենք, որ բոլոր $g_1(\theta)\dots g_i(\theta)$, $i \leq r$, արտադրյալները նորմավորված են:

Դյուրին է նկատել, որ

- **տողը (սյունը)** K **դաշտի ոչ զրոյական տարրով բազմապատկելը**
- $K[\theta]$ -ից **բազմանդամով բազմապատկված տողը (սյունը) մեկ այլ տողին (սյանը) գումարելը**

տարրական գործողությունները կիրառված բազմանդամային մատրիցին կամ չեն փոխում մինորների արժեքները, կամ դրանք բազմապատկում են դաշտի ոչ զրոյական թվերով: Ուստի, մատրիցի որևէ ֆիքսված չափի բոլոր մինորների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը չի փոխվի:

Դիտարկենք տողերի/սյունների տեղափոխության դեպքը: Ֆիքսված չափի մինորները կամ պարունակում են երկու տեղափոխվող տողեր/սյուններ, կամ պարունակում են տեղափոխվող տողերից/սյուններից միայն մեկը, կամ էլ չեն պարունակում այդ տողեր/սյուններ: Առաջին դեպքում փոխվում է միայն մինորի արժեքի նշանը (այսինքն մինորը բազմապատկվում է դաշտի ոչ զրոյական թվով), իսկ վերջին դեպքում մինորի արժեքն ընդհանրապես չի փոխվում: Եթե մինորը պարունակում է տեղափոխվող տողերից/սյուններից միայն մեկը, ապա դրա արժեքը դառնում է հավասար մեկ այլ նույն չափանի մինորի արժեքին՝ այն մինորի, որը պարունակում է մյուս տեղափոխվող տողը/սյունը և որի մնացած բոլոր տողեր/սյունները համընկնում են դիտարկվող մինորի տողերի/սյունների հետ: Ակնհայտ է, որ տրված չափանի մինորների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը չի փոխվի:

Հետևաբար, A մատրիցի բոլոր 1-չափանի մինորների նորմավորված ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը որոշված է միարժեքորեն և դա $g_1(\theta)$ -ն է: 2-չափանի մինորների նորմավորված ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը նույնպես որոշված է միարժեքորեն և դա $g_1(\theta)g_2(\theta)$ -ն է, այսինքն $g_2(\theta)$ -ն էլ է որոշված միարժեքորեն, քանի որ $g_2(\theta) = \frac{g_1(\theta)g_2(\theta)}{g_1(\theta)}$: Նմանապես համոզվում ենք, որ բոլոր

$g_1(\theta), \dots, g_r(\theta)$ բազմանդամներն որոշված են միարժեքորեն: Ուրեմն, տարրական գործողությունների ինչպիսի հաջորդականությամբ էլ որ A մատրիցը բերվի Սմիթի նորմալ տեսքի, այդ տեսքը միշտ կստացվի նույնը:

$g_1(\theta), \dots, g_r(\theta)$ բազմանդամները կոչվում են A մատրիցի ինվարիանտ գործակիցներ:

Թեորեմ 13. (Սմիթի նորմալ տեսքի միակությունը)

Մատրիցի Սմիթի նորմալ տեսքը որոշված է միարժեքորեն:

Ինվարիանտ Էնթալարածություններ

Դիցուք $A : L \rightarrow L$ գծային օպերատոր է: L տարածության L_1 էնթալարածությունը կոչվում է ինվարիանտ A օպերատորի նկատմամբ (կամ ուղղակի ինվարիանտ, երբ պարզ է, թե որ օպերատորը նկատի ունենք), եթե $x \in L_1 \Rightarrow Ax \in L_1$:

Օրինակ, գիտենք որ $M(\lambda) = \{x \mid Ax = \lambda x\}$ էնթալարածություն է L -ում: Այն ինվարիանտ է, քանի որ, եթե $x \in M(\lambda)$, ապա $Ax = \lambda x$ և $A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda(Ax)$, այսինքն $Ax \in M(\lambda)$:

Ահնհայտ է, որ A օպերատորի սահմանափակումը L_1 վրա նույնպես գծային օպերատոր է:

Ենթադրենք այժմ, որ $L = L_1 \dot{+} L_2$, L_1 և L_2 էնթալարածությունները ինվարիանտ են A -ի նկատմամբ: Քանի որ գումարն ուղիղ է, ամբողջ տարածության բազիսը կարող ենք կազմել միավորելով էնթալարածությունների բազիսները, այսինքն, եթե ε_1 -ը և ε_2 -ը համապատասխանաբար L_1 -ի և L_2 -ի բազիսներն են, ապա

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

ամբողջ L տարածության բազիսն է: Նշանակենք A -ով այդ բազիսում A օպերատորի ներկայացումը՝ $A\mathcal{E} = A\mathcal{E}$, իսկ A_1 -ով և A_2 -ով A -ի ներկայացումները համապատասխանաբար ε_1 և ε_2 բազիսներում, գիտարկելով A -ի սահմանափակումները L_1 -ի և L_2 -ի վրա՝ $A\mathcal{E}_1 = A_1\mathcal{E}_1$ և $A\mathcal{E}_2 = A_2\mathcal{E}_2$: Պարզ է որ՝

$$A \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} = A\mathcal{E} = \mathcal{A}\mathcal{E} = \begin{pmatrix} A\mathcal{E}_1 \\ A\mathcal{E}_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} A_1 \varepsilon_1 \\ A_2 \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix},$$

Հետևաբար,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

այսինքն, օպերատորի մատրիցը տրոհվում է բլոկերի և այդ բլոկերը Համապատասխանում են օպերատորի ներկայացումներին ինվարիանտ տարածություններում և մատրիցի պարզեցման խնդիրը բերվում է նույն խնդրին ընդհանուր դեպքում ավելի փոքր ինվարիանտ ենթատարածությունում: Պարզ է նաև, որ այս դատողությունն ուժի մեջ է, երբ ուղիղ գումարում գումարելիների թիվը երկուսից ավելին է: Այժմ կփորձենք պարզել, թե ինչպես կարելի է տարածությունը տրոհել ինվարիանտ ենթատարածությունների:

Վերացնող և միջինալ բազմանդամներ

Դիցուք $A : L \rightarrow L$ գծային օպերատոր է, որտեղ L -ը գծային տարածություն է K դաշտի նկատմամբ, իսկ $K[\theta]$ -ն K դաշտից գործակիցներով θ փոփոխականից կախված բոլոր բազմանդամների բազմությունն է: Դիցուք $f(\theta) = \alpha_0 + \alpha_1\theta + \alpha_2\theta^2 + \dots + \alpha_m\theta^m \in K[\theta]$:

Նշանակենք $f(A) = \alpha_0\mathcal{I} + \alpha_1A + \alpha_2A^2 + \dots + \alpha_mA^m$, $\mathcal{I}$ -ով նշանակելով միավոր օպերատորը: Դիտարին է ստուգել, որ $f(A)$ -ն գծային օպերատոր է և այն սահմանվում է հետևյալ կերպ՝

$$f(A)x = \alpha_0x + \alpha_1(Ax) + \alpha_2(A^2x) + \dots + \alpha_m(A^mx),$$

որտեղ $A^kx = A(\dots(A(Ax))\dots)$ - A օպերատորի k հանգումը (կանգամ) կիրառումն է: Ուրեմն, $f(A) : L \rightarrow L$: Ահնհայտ է նաև, որ $f(A)g(A) = g(A)f(A)$ կամայական $f(\theta), g(\theta) \in K[\theta]$ համար:

Սահմանում. $f(\theta) \in K[\theta]$ կոչվում է վերացնող բազմանդամ L գծային տարածության x տարրի համար, եթե $f(A)x = 0$:

Դիցուք $x \in L$: Նշանակենք $F(x)$ -ով x տարրի բոլոր վերացնող բազմանդամների բազմությունը $K[\theta]$ -ում: Պարզ է, որ այն դատարկ չէ, քանի որ զրոյական բազմանդամը վերացնող է բոլոր տարրերի համար:

Եթե $x = 0$, ապա $F(x) = K[\theta]$:

Եթե $x \neq 0$, ապա $F(x)$ -ը չի պարունակում և ոչ մի 0 աստիճանի բազմանդամ: Դիցուք $n = 1 + \dim L$: Եթե բոլոր $x, Ax, A^2x, \dots, A^{n-1}x$ տարրերը տարբեր են, ապա դրանք գծորեն կախված են և կգտնվեն $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in K$, որ

$$\alpha_0x + \alpha_1(Ax) + \alpha_2(A^2x) + \dots + \alpha_{n-1}(A^{n-1}x) = 0,$$

այսինքն, $f(\theta) = \alpha_0 + \alpha_1\theta + \alpha_2\theta^2 + \dots + \alpha_{n-1}\theta^{n-1}$ ոչ զրոյական

բազմանդամը վերացնող է x տարրի համար: Եթե $x, Ax, A^2x, \dots, A^{n-1}x$ տարրերը տարբեր չեն, ապա $A^p x = A^q x$, որտեղ $n > p > q \geq 0$: Այս դեպքում $\theta^p - \theta^q$ կլինի ոչ զրոյական վերացնող բազմանդամ x տարրի համար:

Նշանակենք $f(\theta)$ -ով $F(x)$ -ի փոքրագույն դրական աստիճանի բազմանդամներից որևէ մեկը: Դիցուք $0 \neq g(\theta) \in F(x)$: Բաժանենք $g(\theta)$ -ն $f(\theta)$ -ի վրա՝ $g(\theta) = f(\theta)h(\theta) + r(\theta)$: Կամ $r(\theta) \equiv 0$, կամ $0 \leq \deg r < \deg f$: Պարզ է, որ $r(\theta) \in F(x)$, քանի որ $r(A) = g(A) - f(A)h(A)$: Եթե $r(\theta) \neq 0$, ապա $\deg r > 0$ և $f(\theta)$ -ի աստիճանը ամենափոքրը չէ $F(x)$ -ում: Ուստի, $r(\theta) \equiv 0$ և $F(x)$ -ի յուրաքանչյուր բազմանդամ առանց մնացորդի բաժանվում է $f(\theta)$ -ի վրա:

Այսպիսով տեսանք, որ $F(x)$ -ը կամ համընկնում է ամբողջ $K[\theta]$ -ի հետ, կամ էլ $F(x)$ -ը կազմված է $F(x)$ -ում պարունակվող ամենափոքր դրական աստիճան ունեցող նորմավորված բազմանդամին բոլոր պատիկ բազմանդամներից: Այդ բազմանդամը՝ $F(x)$ -ում ամենափոքր դրական աստիճան ունեցող նորմավորված բազմանդամը, կոչվում է x տարրի մինիմալ բազմանդամ:

Եթե $f(\theta)$ բազմանդամը վերացնող է գծային տարածության բոլոր տարրերի համար, ապա այն կոչվում է տարածության վերացնող բազմանդամ: Տարածության վերացնող բազմանդամների բազմությունը համընկնում է ամբողջ $K[\theta]$ -ի հետ միայն, երբ այդ տարածությունը զրո չափանի է: Մնացած բոլոր դեպքերում վերացնող բազմանդամների բազմությունը չի պարունակում և ոչ մի 0 աստիճանի բազմանդամ և կազմված է այդ բազմության ամենափոքր դրական աստիճան ունեցող նորմավորված բազմանդամին բոլոր պատիկ

բազմանդամներից (սա ապացուցվում է $F(x)$ -ի դեպքի նման): Այդ բազմանդամը տարածության վերացնող բազմանդամների բազմության ամենափոքր դրական աստիճան ունեցող նորմավորված բազմանդամը, կոչվում է տարածության մինիմալ բազմանդամ:

Ցույց տանք, որ միշտ գոյություն ունի տարածության ոչ զրոյական վերացնող բազմանդամ: Դիցուք L -ը գծային տարածություն է K դաշտի նկատմամբ և $n = \dim L$: Ելուրին է ստուգել, որ բոլոր գծային օպերատորների բազմությունը, որոնք արտապատկերում են L -ը L -ի մեջ կազմում է գծային տարածություն: Իսկապես, եթե $B : L \rightarrow L$ և $C : L \rightarrow L$, ապա $B + C : L \rightarrow L$ օպերատորը սահմանվում է որպես $(B + C)x = Bx + Cx$, իսկ $\lambda B : L \rightarrow L$ օպերատորը որպես $(\lambda B)x = \lambda Bx$: Ֆիքսելով որևէ ε բազիս, ստանում ենք օպերատորների ներկայացումները $n \times n$ չափանի մատրիցներով, ընդ որում, եթե B -ն ներկայացվում է B մատրիցով, իսկ C -ն C -ով, ապա $B + C$ -ն ներկայացվում է $B + C$ -ով և λB -ն λB -ով: Ուստի, $\alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_m A^m$ օպերատորը, որտեղ $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$ և I -ն նույնաբար (միավոր) օպերատորն է, ներկայացվում է $\alpha_0 E + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_m A^m$ մատրիցով (E -ն միավոր մատրիցն է): Դիտարկենք $E, A, \dots, A^{n^2}$ մատրիցները: Եթե դրանց մեջ չկան կրկնվողներ, ապա քանի որ $n \times n$ չափանի մատրիցների գծային տարածությունը n^2 չափանի է, $E, A, \dots, A^{n^2}$ մատրիցները գծորեն կախված են և կգտնվեն $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n^2} \in K$, որ

$$\alpha_0 E + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_{n^2} A^{n^2} = 0:$$

Հետևաբար, $\alpha_0 I + \alpha_1 A + \dots + \alpha_{n^2} A^{n^2} = 0$ և $\alpha_0 + \alpha_1 \theta + \alpha_2 \theta^2 + \dots + \alpha_{n^2} \theta^{n^2}$ -ն տարածության ոչ զրոյական վերացնող

բազմանդամ է: Եթե $A^p = A^q$, որտեղ $n^2 > p > q \geq 0$, ապա $A^p = A^q$ և $\theta^p - \theta^q$ -ն կլինի ոչ զրոյական վերացնող բազմանդամ տարածության համար:

Դիցուք $e_1, \dots, e_n$ -ը L տարածության բազիսն է և $f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)$ համապատասխանաբար $e_1, \dots, e_n$ տարրերի մինիմալ բազմանդամներն են: Եթե $f(\theta)$ -ն տարածության մինիմալ բազմանդամն է, ապա այն վերացնող է ամեն մի e_i համար և ուստի բաժանվում է առանց մնացորդի յուրաքանչյուր $f_i(\theta)$ -ի վրա $i = 1, 2, \dots, n$: Ուրեմն, $f(\theta)$ -ն բաժանվում է նաև $f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)$ բազմանդամների ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկի վրա: Մյուս կողմից, քանի որ $f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)$ բազմանդամների ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը պատիկ է յուրաքանչյուր $f_i(\theta)$ -ին, ապա այն վերացնող է յուրաքանչյուր e_i համար: Այստեղից անմիջապես ստանում ենք, որ տարածության մինիմալ բազմանդամը համընկնում է $f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)$ բազմանդամների նորմալորված ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկի հետ:

Ցիկլիկ Էնթատարածություններ

Դիցուք $A : L \rightarrow L$ գծային օպերատոր է, $e \in L$, $f(\theta) = \alpha_0 + \alpha_1\theta + \dots + \alpha_{m-1}\theta^{m-1} + \theta^m$ -ը e -ի մինիմալ բազմանդամն է և $\deg f(\theta) = m$: Ելուրին է ստուգել, որ $e, Ae, A^2e, \dots, A^{m-1}e$ Համակարգը գծորեն անկախ է, քանի որ Հակառակ դեպքում կգտնվեր e տարրի վերացնող բազմանդամ, որի կարգը փոքր է m -ից: Պարզ է նաև, որ

$$A^m e = -\alpha_0 e - \alpha_1 Ae - \dots - \alpha_{m-1} A^{m-1} e \quad (12)$$

Նշանակենք $L(e)$ -ով Հետևյալ բազմությունը՝ $\{g(A)e \mid g(\theta) \in K[\theta]\}$: Ակնհայտ է, որ $L(e)$ -ն գծային Էնթատարածություն է L -ում: Բաժանենք $g(\theta)$ -ն $f(\theta)$ մինիմալ բազմանդամի վրա՝ $g(\theta) = f(\theta)h(\theta) + r(\theta)$, որտեղ կամ $r(\theta)$ -ն զրոյական բազմանդամն է, կամ էլ $\deg r(\theta) < m$: Ուստի, $r(A)e$ պատկանում է $e, Ae, A^2e, \dots, A^{m-1}e$ Համակարգի գծային թաղանթին և

$$L(e) = \{e, Ae, A^2e, \dots, A^{m-1}e\}^*:$$

Ակնհայտ է, որ $\dim L(e) = m$ և $L(e)$ -ն ինվարիանտ Էնթատարածություն է (դա անմիջապես հետևում է (12)-ից):

$L(e)$ Էնթատարածությունը կոչվում է ցիկլիկ Էնթատարածություն ծնված e տարրով: Ցիկլիկ Էնթատարածության չափը Հավասար է նրա ծնիչի (e -ի) մինիմալ բազմանդամի աստիճանին: Պարզ է, որ մինիմալ բազմանդամի աստիճանն ավելի մեծ չէ, քան $\dim L$ -ը:

Ստորև կտեսնենք, որ գծային տարածությունը միշտ կարելի է տրոհել ցիկլիկ Էնթատարածությունների:

Օպերատորի բնութագրիչ մատրիցի "վերացնող" Հատկությունը

Դիցուք $A : L \rightarrow L$ գծային օպերատոր է K թվային դաշտի նկատմամբ:

Ֆիքսենք L տարածության որևէ բազիս՝

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

և դիցուք՝

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

մատրիցը A օպերատորի ներկայացումն է այդ բազիսում, այսինքն՝
 $A\mathcal{E} = A\mathcal{E}$ և $Ae_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}e_j$, $i = 1, 2, \dots, n$: Դիտարկենք A -ի բնութագրիչ
 մատրիցը՝

$$A - \theta E = \begin{pmatrix} \alpha_{11} - \theta & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \theta & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - \theta \end{pmatrix}$$

Այս մատրիցի տողերն ունեն հետևյալ հատկությունը: Դիտարկենք
 i -րդ տողը որպես n հատ բազմանդամների հավաքածուն՝
 $v_i \equiv (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ii-1}, \alpha_{ii} - \theta, \alpha_{ii+1}, \dots, \alpha_{in})$: Այդ հավաքածուից կազմենք

օպերատորների հետևյալ n -յակը՝

$$(\alpha_{i-1}\mathcal{I}, \dots, \alpha_{i-1}\mathcal{I}, \alpha_{ii}\mathcal{I} - \mathcal{A}, \alpha_{i+1}\mathcal{I}, \dots, \alpha_{in}\mathcal{I})$$

և բազմապատկենք այն որպես մատրից $\mathcal{E}$ սյունով

$$v_i \mathcal{E} = (\alpha_{i-1}\mathcal{I}, \dots, \alpha_{i-1}\mathcal{I}, \alpha_{ii}\mathcal{I} - \mathcal{A}, \alpha_{i+1}\mathcal{I}, \dots, \alpha_{in}\mathcal{I}) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \quad (13)$$

$$- \mathcal{A}e_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}e_j = 0$$

Նշանակենք $K^n[\theta]$ -ով $K[\theta]$ -ից բազմանդամների բոլոր n -յակների բազմությունը: Սահմանենք $\mathcal{F}(n, \theta, \mathcal{E})$ բազմությունն որպես

$$\mathcal{F}(n, \theta, \mathcal{E}) = \{(f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)) \in K^n[\theta] \mid (f_1(\mathcal{A}), \dots, f_n(\mathcal{A}))\mathcal{E} = 0\}$$

Պարզ է, որ $(f_1(\mathcal{A}), \dots, f_n(\mathcal{A}))\mathcal{E} = 0$ պայմանը համարժեք է

$$(f_1(\mathcal{A}), \dots, f_n(\mathcal{A}))\mathcal{E} = f_1(\mathcal{A})e_1 + \dots + f_n(\mathcal{A})e_n = 0$$

պայմանին: (13)-ից ստանում ենք, որ բնութագրիչ մատրիցի յուրաքանչյուր տող պատկանում է $\mathcal{F}(n, \theta, \mathcal{E})$ բազմությանը՝ $v_i \in \mathcal{F}(n, \theta, \mathcal{E})$, $i = 1, 2, \dots, n$:

Պնդում 14.

Յուրաքանչյուր $(f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)) \in \mathcal{F}(n, \theta, \mathcal{E})$ համար կգտնվի

$$(g_1(\theta), \dots, g_n(\theta)) \in K^n[\theta],$$

որ

$$(f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)) = \sum_{i=1}^n g_i(\theta)v_i$$

ուստի,

$$\mathcal{F}(n, \theta, \varepsilon) = \left\{ \sum_{i=1}^n g_i(\theta) v_i \mid (g_1(\theta), \dots, g_n(\theta)) \in K^n[\theta] \right\}$$

Ապացույց. Նախ ապացուցենք, որ յուրաքանչյուր $(f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)) \in K^n[\theta]$ համար կգտնվեն $(g_1(\theta), \dots, g_n(\theta)) \in K^n[\theta]$ և $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in V_n(K)$, որ

$$(f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)) = \sum_{i=1}^n g_i(\theta) v_i + (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (14)$$

(14)-ը կապացուցենք ինդուկցիայով, ըստ $\max\{\deg f_1, \dots, \deg f_n\}$ -ի: Եթե $\max\{\deg f_1, \dots, \deg f_n\} = 0$, ապա $(f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)) \in V_n(K)$ և վերցնելով $g_i(\theta) = 0$ բոլոր $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ համար ստանում ենք (14)-ը:

Ենթադրենք այժմ, որ (14)-ը ստույգ է բոլոր $(f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)) \in K^n[\theta]$ համար, որ $\max\{\deg f_1, \dots, \deg f_n\} < m$: Դիցուք $(f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)) \in K^n[\theta]$ և $\max\{\deg f_1, \dots, \deg f_n\} = m$: Բաժանենք $f_i(\theta)$ -ն $\alpha_{ii} - \theta$ -ի վրա՝ $f_i(\theta) = h_i(\theta)(\alpha_{ii} - \theta) + \beta_i$, որտեղ $\beta_i \in K$: Ստանում ենք՝

$$\begin{aligned} (0, \dots, 0, f_i, 0, \dots, 0) &= (0, \dots, 0, h_i(\alpha_{ii} - \theta) + \beta_i, 0, \dots, 0) = \\ &h_i(\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ii-1}, \alpha_{ii} - \theta, \alpha_{ii+1}, \dots, \alpha_{in}) + \\ &(-\alpha_{i1} h_i, \dots, -\alpha_{ii-1} h_i, \beta_i, -\alpha_{ii+1} h_i, \dots, -\alpha_{in} h_i) = \\ &h_i v_i + (-\alpha_{i1} h_i, \dots, -\alpha_{ii-1} h_i, \beta_i, -\alpha_{ii+1} h_i, \dots, -\alpha_{in} h_i) \end{aligned}$$

Քանի որ $\deg h_i(\theta) = \deg f_i(\theta) - 1$, ապա

$$(-\alpha_{i1} h_i, \dots, -\alpha_{ii-1} h_i, \beta_i, -\alpha_{ii+1} h_i, \dots, -\alpha_{in} h_i)$$

հավաքածուի յուրաքանչյուր տարրի աստիճանը փոքր է $\deg f_i(\theta)$ -ից: Հետևաբար՝

$$(f_1, \dots, f_n) = \sum_{i=1}^n h_i v_i + \sum_{i=1}^n (-\alpha_{i-1} h_i, \dots, -\alpha_{i-1} h_i, \beta_i, -\alpha_{i+1} h_i, \dots, -\alpha_n h_i) =$$

$$\sum_{i=1}^n h_i(\theta) v_i + (t_1(\theta), \dots, t_n(\theta)),$$

որտեղ $\deg t_i(\theta) < m$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$: Համաձայն ինդուկտիվ
էնթադրության, $k_1(\theta), \dots, k_n(\theta) \in K^n[\theta]$ և
 $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in V_n(K)$, որ

$$(t_1(\theta), \dots, t_n(\theta)) = \sum_{i=1}^n k_i(\theta) v_i + (\lambda_1, \dots, \lambda_n):$$

Ուստի՝

$$(f_1, \dots, f_n) = \sum_{i=1}^n h_i(\theta) v_i + \sum_{i=1}^n k_i(\theta) v_i + (\lambda_1, \dots, \lambda_n) =$$

$$\sum_{i=1}^n (h_i(\theta) + k_i(\theta)) v_i + (\lambda_1, \dots, \lambda_n) =$$

$$\sum_{i=1}^n g_i(\theta) v_i + (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

և (14)-ն ապացուցված է:

Ահիջայտ է, որ $\sum_{i=1}^n g_i(\theta) v_i \in \mathcal{F}(n, \theta, \varepsilon)$, քանի որ ըստ (13)-ի $v_i \varepsilon = 0$:

Դիցուք այժմ $(f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)) \in \mathcal{F}(n, \theta, \varepsilon)$: Համաձայն (14)-ի՝

$$(f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)) = \sum_{i=1}^n g_i(\theta) v_i + (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Ունենք՝ $(f_1(\mathcal{A}), \dots, f_n(\mathcal{A})) \varepsilon = 0$, ուրեմն՝

$$\sum_{i=1}^n g_i(\mathcal{A}) v_i \varepsilon + (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \varepsilon = 0$$

Սակայն համաձայն (13)-ի, $v_i \varepsilon = 0$ և $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \varepsilon = 0$: Բազիսային

տարրերի գծային անկախությունից հետևում է, որ $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ և

$$(f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)) = \sum_{i=1}^n g_i(\theta) v_i$$

Պնդումն ապացուցված է:

Տարածության տրոհումը ցիկլիկ էնթատարածությունների

Դիցուք $A : L \rightarrow L$ գծային օպերատոր է K թվային դաշտի նկատմամբ:

Ֆիքսենք L տարածության որևէ բազիս՝

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

և յուրաքանչյուր

$$(f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)) \in K^n[\theta]$$

բազմանդամների n -յակին համապատասխանեցնենք L տարածության

$$(f_1(\mathcal{A}), \dots, f_n(\mathcal{A}))\mathcal{E} = f_1(\mathcal{A})e_1 + \dots + f_n(\mathcal{A})e_n$$

տարրը:

Դիտարկենք հետևյալ բազմությունը՝

$$\{f_1(\mathcal{A})e_1 + \dots + f_n(\mathcal{A})e_n \mid (f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)) \in K^n[\theta]\}$$

Քանի որ կամայական $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in V_n(K)$ համար $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n[\theta]$, ապա վերը նշված բազմությունը համընկնում է L տարածության հետ՝

$$L = \{f_1(\mathcal{A})e_1 + \dots + f_n(\mathcal{A})e_n \mid (f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)) \in K^n[\theta]\} \quad (15)$$

Համաձայն Պնդումի 4-ի, $f_1(\mathcal{A})e_1 + \dots + f_n(\mathcal{A})e_n = 0$ միայն և միայն այն դեպքում, երբ կգտնվի $(g_1(\theta), \dots, g_n(\theta)) \in K^n[\theta]$ այնպիսի, որ

$$(f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)) = \sum_{i=1}^n g_i(\theta)v_i, \text{ որտեղ } v_i\text{-ն } \mathcal{E} \text{ բազիսում } \mathcal{A} \text{ օպերատորի}$$

$\mathcal{A}$ մատրիցով ներկայացմանը համապատասխանող բնութագրիչ

մատրիցի i -րդ տողն է, այսինքն $A - \theta E$ մատրիցի i -րդ տողը:
Նկատենք, որ

$$(f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)) = \sum_{i=1}^n g_i(\theta) v_i$$

պայմանը Համարժեք է

$$(f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)) = (g_1(\theta), \dots, g_n(\theta))(A - \theta E) \quad (16)$$

պայմանին:

Ըստ Թեորեմ 2-ի, կգտնվեն այնպիսի չվերասերված բազմանդամային մատրիցներ P և Q (որոնց տարրերը $K[\theta]$ -ից են), որ $P(A - \theta E)Q$ մատրիցը Սմիթի նորմալ տեսքի է: Քանի որ P և Q մատրիցները չվերասերված են, ապա դրանց դետերմինանտները (որոնք բազմանդամային մատրիցների դեպքում բազմանդամներ են) K դաշտի թվեր են: Իսկապես, ունենք $PP^{-1} = E \Rightarrow \det P \det P^{-1} = 1$: Ուստի, $\det P$ և $\det P^{-1}$ բազմանդամներն ունեն Հակադարձ և, ուրեմն, դրանք զրո աստիճանի բազմանդամներ են, այսինքն K դաշտի ոչ զրոյական թվեր: Նույնը ճիշտ է Q -ի դեպքում: Հետևաբար, $\det P \det(A - \theta E) \det Q$ բազմանդամի աստիճանը նույնն է ինչ որ բնութագրիչ բազմանդամինը՝ $\det(A - \theta E)$ -ի աստիճանը, որը Հավասար է n -ի: Այստեղից ստացվում է, որ $P(A - \theta E)Q$ մատրիցի Սմիթի նորմալ տեսքը չի պարունակում զրոյական տարրեր, քանի որ $\det P \det(A - \theta E) \det Q$ -ն անկյունագծային տարրերի արտադրյալն է: Ուրեմն, $P(A - \theta E)Q$ մատրիցն ունի Հետևյալ անկյունագծային տեսքը՝

$$D = P(A - \theta E)Q = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & d_1(\theta) & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & d_{n-r}(\theta) \end{pmatrix}$$

որտեղ բոլոր անկյունագծային բաղմանդամները նորմավորված են, $d_{i+1}(\theta)$ -ն առանց մնացորդի բաժանվում է $d_i(\theta)$ -ի վրա, $i = 1, \dots, n-r-1$, և

$$\sum_{i=1}^{n-r} \deg d_i(\theta) = n \quad (17)$$

Սխմ(16)-ը կարող ենք արտագրել հետևյալ կերպ՝

$$(f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)) = (g_1(\theta), \dots, g_n(\theta))P^{-1}DQ^{-1}$$

Ահնհայտ է, որ կամայական $(h_1(\theta), \dots, h_n(\theta)) \in K^n[\theta]$ համար կգտնվի միակ $(g_1(\theta), \dots, g_n(\theta)) \in K^n[\theta]$, որ

$$(h_1(\theta), \dots, h_n(\theta)) = (g_1(\theta), \dots, g_n(\theta))P^{-1}:$$

Ուստի

$$K^n[\theta] = \{(g_1(\theta), \dots, g_n(\theta))P^{-1} \mid (g_1(\theta), \dots, g_n(\theta)) \in K^n[\theta]\}$$

Այսպիսով, $f_1(\mathcal{A})e_1 + \dots + f_n(\mathcal{A})e_n = 0$ միայն և միայն այն դեպքում, երբ կգտնվի $(h_1(\theta), \dots, h_n(\theta)) \in K^n[\theta]$ այնպիսի, որ

$$(f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)) = (h_1(\theta), \dots, h_n(\theta))DQ^{-1}$$

Այսինքն, Պնդում 4-ի

$$\mathcal{F}(n, \theta, \varepsilon) = \{(f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)) \in K^n[\theta] \mid (f_1(\mathcal{A}), \dots, f_n(\mathcal{A}))\varepsilon = 0\}$$

բաղմովյունը կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ՝

$$\mathcal{F}(n, \theta, \varepsilon) = \{(h_1(\theta), \dots, h_n(\theta))DQ^{-1} \mid (h_1(\theta), \dots, h_n(\theta)) \in K^n[\theta]\}$$

Նշանակենք՝

$$\mathcal{E}^* = Q^{-1}(\mathcal{A})\mathcal{E} = \begin{pmatrix} e_1^* \\ \vdots \\ e_n^* \end{pmatrix},$$

$e_i^* = q_{i1}(\mathcal{A})e_1 + \dots + q_{in}(\mathcal{A})e_n$, որտեղ $q_{i1}(\theta), \dots, q_{in}(\theta)$ -ն Q^{-1} -ի i -րդ ստորին է, $i = 1, \dots, n$: Պարզ է, որ

$$(f_1(\mathcal{A}), \dots, f_n(\mathcal{A}))Q\mathcal{E}^* = 0 \Leftrightarrow (f_1(\mathcal{A}), \dots, f_n(\mathcal{A}))\mathcal{E} = 0$$

և

$$\begin{aligned} & \{(f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)) \mid (f_1(\mathcal{A}), \dots, f_n(\mathcal{A}))\mathcal{E}^* = 0\} = \\ & \{(f_1(\theta), \dots, f_n(\theta))Q \mid (f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)) \in \mathcal{F}(n, \theta, \mathcal{E})\} = \\ & \{(h_1(\theta), \dots, h_n(\theta))D \mid (h_1(\theta), \dots, h_n(\theta)) \in K^n[\theta]\} \end{aligned}$$

Ստացանք, որ՝

$$(h_1(\mathcal{A}), \dots, h_n(\mathcal{A}))D\mathcal{E}^* = 0$$

բոլոր $(h_1(\theta), \dots, h_n(\theta)) \in K^n[\theta]$: Ճիշտ է նաև հակառակը՝ եթե

$$(f_1(\mathcal{A}), \dots, f_n(\mathcal{A}))\mathcal{E}^* = 0$$

որևէ $(f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)) \in K^n[\theta]$ համար, ապա կգտնվի միակ $(h_1(\theta), \dots, h_n(\theta)) \in K^n[\theta]$, որ

$$(f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)) = (h_1(\theta), \dots, h_n(\theta))D:$$

Ունենք՝

$$(h_1(\theta), \dots, h_n(\theta))D = (h_1(\theta), \dots, h_r(\theta), h_{r+1}(\theta)d_1(\theta), \dots, h_n(\theta)d_{n-r}(\theta)),$$

ուստի՝

$$(h_1(\mathcal{A}), \dots, h_n(\mathcal{A}))D(\mathcal{A})\mathcal{E}^* =$$

$$h_1(\mathcal{A})e_1^* + \dots + h_r(\mathcal{A})e_r^* + h_{r+1}(\mathcal{A})d_1(\mathcal{A})e_{r+1}^* + \dots + h_n(\mathcal{A})d_{n-r}(\mathcal{A})e_n^* = 0$$

Ֆիքսելով $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, վերցնենք $h_i(\theta) \equiv 1$ և $h_j(\theta) \equiv 0$ բոլոր $j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i\}$ համար: Ստանում ենք՝ $e_i^* = 0$ բոլոր

$i \in \{1, 2, \dots, r\}$ Համար $d_i(A)e_{r+i}^* = 0$ բոլոր $i \in \{r+1, \dots, n\}$ Համար: Ուստի, $d_1(\theta), \dots, d_{n-r}(\theta)$ -ն Համապատասխանաբար $e_{r+1}^*, \dots, e_n^*$ տարրերի վերացնող բազմանդամներն են:

Դիցուք $f_{r+i}(\theta)$ -ն e_{r+i}^* տարրի որևէ վերացնող բազմանդամն է, $i = 1, \dots, n-r$, ապա

$$(1, \dots, 1, f_{r+1}(A), \dots, f_n(A))\varepsilon^* = 0$$

և կգտնվի $(h_1(\theta), \dots, h_n(\theta))$, որ

$$(1, \dots, 1, f_{r+1}(\theta), \dots, f_n(\theta)) = (h_1(\theta), \dots, h_n(\theta))D = \\ (h_1(\theta), \dots, h_r(\theta), h_{r+1}(\theta)d_1(\theta), \dots, h_n(\theta)d_{n-r}(\theta))$$

Այսինքն, $h_1(\theta) = \dots = h_r(\theta) \equiv 1$ և $f_{r+i}(\theta) = h_{r+i}(\theta)d_i(\theta)$ բոլոր $i = 1, \dots, n-r$ Համար: Քանի որ $f_{r+i}(\theta)$ -ն բաժանվում է $d_i(\theta)$ -ի վրա առանց մնացորդի, ապա $d_i(\theta)$ -ն e_{r+i}^* տարրի մինիմալ վերացնող բազմանդամն է: Նաև, քանի որ $d_{n-r}(\theta)$ -ն բաժանվում է բոլոր $d_i(\theta)$ -ի վրա, $d_{n-r}(\theta)$ -ն վերացնող բազմանդամ է բոլոր $e_{r+1}^*, \dots, e_n^*$ -ի Համար:

Դիտարկենք այժմ հետևյալ բազմությունը՝

$$\{(f_1(A), \dots, f_n(A))\varepsilon^* \mid (f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)) \in K^n[\theta]\}$$

Պարզ է, որ՝

$$(f_1(A), \dots, f_n(A))\varepsilon^* = (f_1(A), \dots, f_n(A))Q^{-1}\varepsilon$$

և

$$(f_1(A), \dots, f_n(A))\varepsilon = (f_1(A), \dots, f_n(A))Q\varepsilon^*,$$

ուստի՝

$$\{(f_1(A), \dots, f_n(A))\varepsilon^* \mid (f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)) \in K^n[\theta]\} = \\ \{(f_1(A), \dots, f_n(A))\varepsilon \mid (f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)) \in K^n[\theta]\} \underbrace{=} L$$

Համաձայն (15)

Սա նշանակում է, որ L տարածություն կամայական տարր կարելի է ներկայացնել $(f_1(A), \dots, f_n(A))\varepsilon^* = f_{r+1}(A)e_{r+1}^* + \dots + f_n(A)e_n^*$ տեսքով:

Հիշենք, որ e տարրով ծնված ցիկլիկ ենթատարածությունը սահմանել էինք որպես $L(e) = \{g(A)e \mid g(\theta) \in K[\theta]\}$, հետևաբար ստացել ենք, որ

$$L = L(e_{r+1}^*) + \dots + L(e_n^*) \quad (18)$$

Ինչպես գիտենք ցիկլիկ ենթատարածության չափը հավասար է ծնիչ տարրի մինիմալ վերացնող բազմանդամի աստիճանին, ուստի $\dim L(e_{r+i}^*) = \deg d_i(\theta)$, $i = 1, \dots, n - r$: Համաձայն (17)-ի, $\sum_{i=1}^{n-r} \deg d_i(\theta) = n = \dim L$, ուրեմն (18)-ում գումարն ուղիղ է

$$L = L(e_{r+1}^*) \dot{+} \dots \dot{+} L(e_n^*)$$

Վերը նկատել էինք, որ $d_{n-r}(\theta)$ -ն վերացնող բազմանդամ է բոլոր $e_{r+1}^*, \dots, e_n^*$ -ի համար, ուստի այն վերացնող է L -ի համար՝

$$\begin{aligned} d_{n-r}(A)(f_{r+1}(A)e_{r+1}^* + \dots + f_n(A)e_n^*) &= \\ f_{r+1}(A)d_{n-r}(A)e_{r+1}^* + \dots + f_n(A)d_{n-r}(A)e_n^* &= 0 \end{aligned}$$

Այն մինիմալ վերացնողն է L -ի համար, քանի որ տարածության վերացնող բազմանդամը վերացնող է նաև e_n^* -ի համար:

Քանի որ բոլոր $d_i(\theta)$ բազմանդամները նորմավորված են, դրանց արտադրյալը նույնպես նորմավորված է և հավասար է $\det P \det(A - \theta E) \det Q$: Ուրեմն, նորմավորված է նաև $\det P \det(A - \theta E) \det Q$ բազմանդամը: Քանի որ $\det(A - \theta E)$ -ի θ -ի ամենամեծ աստիճանի գործակիցը $(-1)^n$ է, ապա $\det P \det Q = \pm 1$: Հետևաբար, բնութագրիչ բազմանդամը վերացնող է ամբողջ տարածության համար և $\det(A - AE)$ օպերատորը զրոյական է: Այս վերջին պնդումը հայտնի է որպես Համիլտոն-Քելիի թեորեմ:

Ամփոփենք վերը շարադրվածը հետևյալ թեորեմի տեսքով:

Թեորեմ 15.

Դիցուք $A : L \rightarrow L$ գծային օպերատոր է և $f(\theta)$ -ն L -ի մինիմալ բազմանդամն է: L տարածությունը կարելի է այնպես տրոհել վերջավոր քանակությամբ ցիկլիկ ենթատարածությունների՝

$$L = L_1 \dot{+} L_2 \dot{+} \dots \dot{+} L_k,$$

որ, եթե $\psi_1(\theta), \dots, \psi_k(\theta)$ -ն համապատասխանաբար $L_1, \dots, L_k$ -ի մինիմալ բազմանդամներն են, ապա $f(\theta) = \psi_1(\theta)$ և $\psi_i(\theta)$ -ն բաժանվում է առանց մնացորդի $\psi_{i+1}(\theta)$ -ի վրա, $i = 1, 2, \dots, k-1$:

Ապացույց. Վերցնենք $k = n - r$,

$$\begin{aligned} L_1 &= L(e_n^*), \dots, L_k = L(e_{r+1}^*), \\ \psi_1(\theta) &= d_{n-r}(\theta), \dots, \psi_k(\theta) = d_{r+1}(\theta): \end{aligned}$$

Հետևանք.

Գծային տարածության մեջ գոյություն ունի մեկ տարր, որի մինիմալ բազմանդամը համընկնում է ամբողջ տարածության մինիմալ բազմանդամի հետ:

Ապացույց. Այդ տարրը e_n^* -ն է:

Տարածության տրոհումը ինվարիանտ էնթալպիայի

փոխադարձաբար պարզ մինիմալ բազմանդամներով

Թեորեմ 16.

Դիցուք $A : L \rightarrow L$ գծային օպերատոր է, $f(\theta)$ -ն L տարածության մինիմալ բազմանդամն է և $f(\theta) = \varphi_1(\theta)\varphi_2(\theta)$, որտեղ $\varphi_1(\theta)$ -ն և $\varphi_2(\theta)$ -ն նորմավորված փոխադարձաբար պարզ բազմանդամներ են:

Գոյություն ունի L տարածության այնպիսի $L = L_1 \dot{+} L_2$ տրոհում ինվարիանտ էնթալպիայի, որ $\varphi_1(\theta)$ -ն L_1 և $\varphi_2(\theta)$ -ն L_2 էնթալպիայի մինիմալ բազմանդամներն են:

Ապացույց. Համաձայն Էվրիդեսի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար գտնելու ալգորիթմի, կգտնվեն $\psi_1(\theta)$ և $\psi_2(\theta)$ բազմանդամներ, որ

$$1 = \varphi_1(\theta)\psi_1(\theta) + \varphi_2(\theta)\psi_2(\theta) \quad (19)$$

Նշանակենք, $B_1 = \varphi_2(A)\psi_2(A)$ և $B_2 = \varphi_1(A)\psi_1(A)$: (19)-ից անմիջապես ստանում ենք, որ

$$I = B_1 + B_2, \quad (20)$$

որտեղ I -ն միավոր օպերատորն է:

Դիցուք $x \in L$, կիրառենք Հաջորդաբար B_1 և B_2 օպերատորները՝

$$\begin{aligned} B_1(B_2x) &= \varphi_2(A)\psi_2(A)(\varphi_1(A)\psi_1(A))x = \\ \psi_1(A)\psi_2(A)\varphi_1(A)\varphi_2(A)x &= \psi_1(A)\psi_2(A)f(A)x = 0 \end{aligned}$$

քանի որ $f(\theta)$ -ն տարածություն միջինմալ բազմանդամն է: Նույն ձևով ստանում ենք՝ $B_2(B_1x) = 0$ և ուրեմն՝

$$B_1B_2 = B_2B_1 = 0 \quad (21)$$

Բազմապատկենք (20)-ի աջ և ձախ մասերը B_1 -ով, կստանանք $B_1 = B_1^2 + B_1B_2$ և հաշվի առնելով (21)-ը՝ $B_1 = B_1^2$: Պարզ է, որ նույն կերպ կստանանք $B_2 = B_2^2$, ուստի

$$\begin{aligned} B_1 &= B_1^2 \\ B_2 &= B_2^2 \end{aligned} \quad (22)$$

Եթե $y \in \text{Im } B_1$, ապա կգտնվի $x \in L$, որ $B_1x = y$, ուրեմն

$$B_1y = B_1(B_1x) = B_1^2x \quad \underbrace{\quad}_{\text{Համաձայն (22)}} \quad B_1x = y$$

և B_1 օպերատորը գործում է $\text{Im } B_1$ վրա որպես միավոր օպերատոր:

Եթե $y \in \text{Im } B_2$, ապա կգտնվի $x \in L$, որ $B_2x = y$ և

$$B_1y = B_1(B_2x) = (B_1B_2)x \quad \underbrace{\quad}_{\text{Համաձայն (21)}} \quad 0:$$

Այսպիսով B_1 և B_2 օպերատորները գործում են իրենց պատկերների վրա որպես միավոր օպերատորներ, իսկ միմյանց պատկերների վրա՝ որպես զրոյական օպերատորներ:

Սահմանենք՝ $L_1 = \text{Im } B_1$ և $L_2 = \text{Im } B_2$: Նախ ստուգենք, որ $L = L_1 + L_2$: Եթե $x \in L$, ապա կիրառելով (20)-ը ստանում ենք՝ $x = \mathcal{I}x = B_1x + B_2x$, որտեղ ակնհայտորեն $B_1x \in L_1$, իսկ $B_2x \in L_2$: Համոզվենք այժմ, որ գումարն ուղիղ է: Դիցուք $y \in L_1 \cap L_2$: Կգտնվեն x_1 և x_2 այնպիսի, որ $B_1x_1 = y = B_2x_2$: Կիրառենք B_1 օպերատորը՝

$\mathcal{B}_1(\mathcal{B}_1x_1) = \mathcal{B}_1(\mathcal{B}_2x_2):$ **Ունենք՝** $\mathcal{B}_1(\mathcal{B}_1x_1) = \mathcal{B}_1^2x_1 = \mathcal{B}_1x_1$ **և**
 $\mathcal{B}_1(\mathcal{B}_2x_2) = (\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2)x_2 = 0:$ **Ուստի՝** $y = \mathcal{B}_1x_1 = 0$ **և** $L_1 \cap L_2 = \{0\},$
Հետևաբար ենթատարածությունների գումարն ուղիղ է:

Համոզվենք, որ L_1 և L_2 ենթատարածություններն ինվարիանտ են:
Դիցուք $y \in L_1 = \text{Im } \mathcal{B}_1:$ Ագտնվի $x \in L$, որ $\mathcal{B}_1x = y:$ Ուրեմն՝

$$\mathcal{A}y = \mathcal{A}\mathcal{B}_1x \quad \underbrace{\quad}_{\text{քանի որ } \mathcal{B}_1\text{-ը բազմանդամ է } \mathcal{A}\text{-ից}} \quad \mathcal{B}_1\mathcal{A}x \in \text{Im } \mathcal{B}_1 = L_1:$$

Նմանապես ստուգվում է L_2 -ի ինվարիանտ լինելը:

Մնաց ապացուցենք, որ $\varphi_1(\theta)$ -ն L_1 և $\varphi_2(\theta)$ -ն L_2 ենթատարածությունների մինիմալ բազմանդամներն են:

Դիցուք $y \in L_1 = \text{Im } \mathcal{B}_1:$ Ագտնվի $x \in L$, որ $\mathcal{B}_1x = y:$ Ահրառենք $\varphi_1(\mathcal{A})$ -ն y -ին՝

$$\begin{aligned} \varphi_1(\mathcal{A})y &= \varphi_1(\mathcal{A})\mathcal{B}_1x = \varphi_1(\mathcal{A})\varphi_2(\mathcal{A})\psi_2(\mathcal{A})x = \\ \psi_2(\mathcal{A})\varphi_1(\mathcal{A})\varphi_2(\mathcal{A})x &= \psi_2(\mathcal{A})f(\mathcal{A})x = 0 \end{aligned}$$

Ուրեմն, $\varphi_1(\theta)$ -ն L_1 -ի վերացնող բազմանդամ է: Նույն ձևով ստուգվում է, որ $\varphi_2(\theta)$ -ն L_2 -ի վերացնող բազմանդամ է:

Դիցուք $\tilde{\varphi}_1(\theta)$ -ն L_1 -ի վերացնող բազմանդամ է: Նյութին է ստուգել, որ $\tilde{\varphi}_1(\theta)\varphi_2(\theta)$ -ն հանդիսանում է L տարածության վերացնող բազմանդամ: Եթե $x \in L$, ապա $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$ և

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1(\mathcal{A})\varphi_2(\mathcal{A})x &= \tilde{\varphi}_1(\mathcal{A})\varphi_2(\mathcal{A})(x_1 + x_2) = \\ \varphi_2(\mathcal{A})\tilde{\varphi}_1(\mathcal{A})x_1 + \tilde{\varphi}_1(\mathcal{A})\varphi_2(\mathcal{A})x_2 &= 0, \end{aligned}$$

քանի որ $\tilde{\varphi}_1(\mathcal{A})x_1 = 0$ և $\varphi_2(\mathcal{A})x_2:$ Սակայն $f(\theta)$ -ն տարածության մինիմալ բազմանդամն է, ուստի $\tilde{\varphi}_1(\theta)\varphi_2(\theta)$ -ն բաժանվում է առանց մնացորդի $f(\theta)$ -ի վրա՝

$$\tilde{\varphi}_1(\theta)\varphi_2(\theta) = \varphi_1(\theta)\varphi_2(\theta)\phi(\theta)$$

և

$$(\tilde{\varphi}_1(\theta) - \varphi_1(\theta)\phi(\theta))\varphi_2(\theta) = 0:$$

Քանի որ $\varphi_2(\theta)$ զրոյական չէ, ապա $\tilde{\varphi}_1(\theta) = \varphi_1(\theta)\phi(\theta)$ և $\tilde{\varphi}_1(\theta)$ -ն բաժանվում է առանց մնացորդի $\varphi_1(\theta)$ -ի վրա: Ուստի, $\varphi_1(\theta)$ -ն L_1 -ի միջնակ բազմանդամն է: Նմանապես $\varphi_2(\theta)$ -ն L_2 -ի միջնակ բազմանդամն է: Թեորեմն ապացուցված է:

**Տարածությունը տրոհումը ցիկլիկ
էնթալթարածությունների, որոնց մինիմալ
բազմանդամներն անվերածելի
բազմանդամների աստիճաններ են**

Թեորեմ 17.

Գծային տարածությունը ցիկլիկ է միայն և միայն այն դեպքում, երբ նրա մինիմալ բազմանդամի աստիճանը հավասար է նրա չափին:

Ապացույց. Դիցուք մինիմալ բազմանդամի աստիճանը m է, իսկ տարածության չափը՝ n :

Եթե $m = n$, ապա $e, Ae, \dots, A^{m-1}e$ համակարգը (որտեղ e -ն այն տարրն է, որի մինիմալ բազմանդամը դա տարածության մինիմալ բազմանդամն է) տարածության բազիսն է: Ուստի, տարածությունը ցիկլիկ է:

Եթե տարածությունը ցիկլիկ է, ապա այն ունի ծնիչ՝ e և $e, Ae, \dots, A^{n-1}e$ համակարգը տարածության բազիսն է: Պարզ է, որ e -ի մինիմալ բազմանդամի աստիճանը առնվազն n է: Մյուս կողմից ակնհայտ է, որ տարրի մինիմալ բազմանդամի աստիճանը տարածության չափից մեծ չէ, ուրեմն՝ $n = m$:

Հետևանք.

Եթե $f(\theta)$ -ն ցիկլիկ n -չափանի գծային տարածության

մինիմալ բազմանդամն է, ապա օպերատորի բնութագրիչ բազմանդամը հավասար է $(-1)^n f(\theta)$:

Ապացույց. Համաձայն թեորեմ 17-ի, $\deg f(\theta) = n$: Մյուս կողմից, եթե համաձայն թեորեմ 15-ի տրոհենք տարածությունը ցիկլիկ ենթատարածությունների՝ $L = L_1 \dot{+} L_2 \dot{+} \dots \dot{+} L_k$, ապա կստանանք, որ այդ տարածությունների մինիմալ բազմանդամների արտադրյալը՝ $\psi_1(\theta) \dots \psi_k(\theta)$ հավասար է $(-1)^n$ գործակցի ճշտությամբ բնութագրիչ բազմանդամին: Քանի որ այդ մինիմալ բազմանդամների մեջ է նաև տարածության մինիմալ բազմանդամը՝ $\psi_1(\theta) = f(\theta)$, որի աստիճանը հավասար է վերը նշված արտադրյալի աստիճանին, ապա, բացի $f(\theta)$ -ից, մնացած բազմանդամները հաստատուն են և համապատասխան ենթատարածությունները զրոյական են: Այսինքն՝ $k = 1, L = L_1$ և

$$(-1)^n \psi_1(\theta) \dots \psi_k(\theta) = (-1)^n f(\theta):$$

Թեորեմ 18.

Եթե գծային տարածությունը ցիկլիկ է և տրոհված է ենթատարածությունների, ապա այդ ենթատարածությունները ևս ցիկլիկ են և նրանց մինիմալ բազմանդամները փոխադարձաբար պարզ են:

Փոխադարձաբար պարզ մինիմալ բազմանդամներով ցիկլիկ ենթատարածությունների ուղիղ գումարը ցիկլիկ ենթատարածություն է:

Ապացույց. Նախ ապացուցենք թեորեմի առաջին մասը: Դիցուք L ցիկլիկ տարածությունը տրոհված է ենթատարածությունների

$$L = L_1 \dot{+} L_2 \dot{+} \dots \dot{+} L_k, \dim L = n, \dim L_i = n_i, i = 1, 2, \dots, k:$$

Նշանակենք $\psi(\theta)$ -ով L -ի մինիմալ բազմանդամը, $\deg \psi(\theta) = m$, և $\psi_i(\theta)$ -ով L_i -ի մինիմալ բազմանդամը, $\deg \psi_i(\theta) = m_i$, $i = 1, 2, \dots, k$:
Պարզ է, որ՝

$$m \leq n \text{ և } m_i \leq n_i, i = 1, 2, \dots, k \quad (23)$$

Նյութին է համոզվել, որ $\psi(\theta)$ -ն $\psi_1(\theta), \dots, \psi_k(\theta)$ բազմանդամների ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկն է: Իսկապես, $\psi(\theta)$ -ն պետք է բաժանվի յուրաքանչյուր $\psi_i(\theta)$ -ի վրա և բոլոր բազմանդամները նորմավորված են, ուստի տարածություն մինիմալ բազմանդամը $\psi_1(\theta), \dots, \psi_k(\theta)$ բազմանդամների ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկն է: Ուրեմն՝ $m \leq m_1 + \dots + m_k$ և $m = m_1 + \dots + m_k$ միայն այն դեպքում, երբ $\psi_1(\theta), \dots, \psi_k(\theta)$ բազմանդամները փոխադարձաբար պարզ են:

Պարզ է, որ՝

$$m \leq m_1 + \dots + m_k \leq n_1 + \dots + n_k = n \quad (24)$$

Քանի որ L -ը ցիկլիկ է, ապա $m = n$ և (24)-ում բոլոր տեղերում հավասարությունն տեղի ունի: (23)-ից հետևում է, որ $m_i = n_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, ուստի բոլոր L_i -րը ցիկլիկ են և $\psi_1(\theta), \dots, \psi_k(\theta)$ բազմանդամները փոխադարձաբար պարզ են:

Ապացուցենք թեորեմի երկրորդ մասը: Ունենք՝ $m_i = n_i$, $i = 1, 2, \dots, k$ և $m = m_1 + \dots + m_k$, ուստի՝

$$m = m_1 + \dots + m_k = n_1 + \dots + n_k = n$$

և տարածությունը ցիկլիկ է:

Թեորեմ 19.

Տարածությունը չի կարելի տրոհել ինվարիանտ ենթատարածությունների միայն և միայն այն դեպքում,

երբ այն ցիկլիկ է և նրա մինիմալ բազմանդամն անվերածելի բազմանդամի աստիճան է:

Ապացույց. Եթե տարածությունը ցիկլիկ է, նրա մինիմալ բազմանդամն անվերածելի բազմանդամի աստիճան է և տարածությունը տրոհված է ենթատարածությունների, որոնց քանակը մեկից ավելին է, ապա Համաձայն Թեորեմ 18-ի այդ ենթատարածությունների մինիմալ բազմանդամները փոխադարձաբար պարզ են և տարածության մինիմալ բազմանդամը այդ փոխադարձաբար պարզ բազմանդամների արտադրյալն է: Սա Հակասում է այն բանին, որ տարածության մինիմալ բազմանդամն անվերածելի բազմանդամի աստիճան է:

Եթե տարածության մինիմալ բազմանդամն անվերածելի բազմանդամի աստիճան չէ, ապա այն առնվազն երկու փոխադարձաբար պարզ բազմանդամների արտադրյալ է: Այդ դեպքում տարածությունը կարելի է տրոհել ինվարիանտ տարածությունների Համաձայն Թեորեմ 16-ի:

Եթե տարածությունը ցիկլիկ չէ, ապա այն կարելի է տրոհել մեկից ավելի ցիկլիկ ենթատարածությունների ըստ Թեորեմ 15-ի: Թեորեմն ապացուցված է:

Դիցուք L գծային տարածությունը տրոհված է ցիկլիկ ենթատարածությունների Համաձայն Թեորեմ 15-ի $L = L_1 \dot{+} \dots \dot{+} L_k$, $\psi_1(\theta), \dots, \psi_k(\theta)$ բազմանդամները Համապատասխան մինիմալ բազմանդամներն են, որոնց Համար $\psi_{i+1}(\theta)$ -ն $\psi_i(\theta)$ -ի բաժանարարն է, $i = 1, 2, \dots, k-1$: Վերածենք այդ բազմանդամները անվերածելի արտադրիչների

$$\begin{aligned}
\psi_1(\theta) &= \varphi_1^{\alpha_1}(\theta)\varphi_2^{\alpha_2}(\theta)\dots\varphi_p^{\alpha_p}(\theta) \\
\psi_2(\theta) &= \varphi_1^{\beta_1}(\theta)\varphi_2^{\beta_2}(\theta)\dots\varphi_p^{\beta_p}(\theta) \\
&\vdots \\
\psi_k(\theta) &= \varphi_1^{\varepsilon_1}(\theta)\varphi_2^{\varepsilon_2}(\theta)\dots\varphi_p^{\varepsilon_p}(\theta) \\
\alpha_j &\geq \beta_j \geq \dots \geq \varepsilon_j, j = 1, 2, \dots, p
\end{aligned}$$

Այժմ համաձայն թեորեմ 16-ի կտրուկներ L_1 -ը ինվարիանտ են թատարածությունների, որոնք կլինեն ցիկլիկ և նրանց մինիմալ բազմանդամները կլինեն $\varphi_1^{\alpha_1}(\theta)$ -ը, $\varphi_2^{\alpha_2}(\theta)$ -ը ... $\varphi_p^{\alpha_p}(\theta)$ -ը: Նման ձևով կտրուկներ մնացած L_i -ները և L տարածությունը կտրուկի ցիկլիկ են թատարածությունների, որոնց մինիմալ բազմանդամները կլինեն անվերածելի բազմանդամների աստիճաններ: Այսպիսով ապացուցեցինք հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 20.

Գծային տարածությունը միշտ կարելի է տրուկել ցիկլիկ են թատարածությունների, որոնց մինիմալ բազմանդամները կլինեն անվերածելի բազմանդամների աստիճաններ:

Գծային օպերատորի մատրիցի նորմալ տեսքը

Դիցուք $A : L \rightarrow L$ գծային օպերատոր է և L -ը տրոհված է ինվարիանտ ենթատարածությունների՝ $L = L_1 \dot{+} \dots \dot{+} L_k$, $\dim L_i = n_i$, $i = 1, 2, \dots, k$,

$$\dim L = n = \sum_{i=1}^k n_i:$$

Եթե $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ -ն Համապատասխանաբար $L_1, \dots, L_k$ ենթատարածությունների բազիսների տարրերից կազմված սյուններն են, ապա՝

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_k \end{pmatrix}$$

ամբողջ L տարածության բազիսն է: Ինչպես գիտենք, A օպերատորի ներկայացումը ε բազիսում ունի հետևյալ տեսքը՝

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_k \end{pmatrix} \quad (25)$$

այսինքն օպերատորի մատրիցը տրոհված է բլոկերի որոնք, բացի անկյունագծային բլոկերից, զրոյական են, իսկ անկյունագծայինները $n_1, n_2, \dots, n_k$ չափանի $A_1, A_2, \dots, A_k$ մատրիցներ են՝ A օպերատորի ներկայացումները $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ բազիսներում Համապատասխանաբար:

Դիցուք L -ը տրոհված է ցիկլիկ ենթատարածությունների ըստ Թեորեմ 15-ի՝

$$L = L_1 \dot{+} L_2 \dot{+} \dots \dot{+} L_k$$

և $\psi_1(\theta), \dots, \psi_k(\theta)$ -ն Համապատասխանաբար $L_1, \dots, L_k$ -ի մինիմալ բազմանդամներն են: Նկարագրենք (25) ներկայացման i -րդ անկյունագծային բլոկը, այսինքն A_i մատրիցը: L_i ենթատարածության մեջ ընտրենք e տարրը, որի մինիմալ բազմանդամը Համընկնում է $\psi_i(\theta)$ -ի հետ: Դիցուք $\psi_i(\theta) = \theta^{n_i} + \alpha_{i1}\theta^{n_i-1} + \dots + \alpha_{in_i-1}\theta + \alpha_{in_i}$: Պարզ է, որ $e, Ae, \dots, A^{n_i-1}e$ Համակարգը L_i -ի բազիսն է և՛

$$\varepsilon_i = \begin{pmatrix} e \\ Ae \\ \vdots \\ A^{n_i-1}e \end{pmatrix} :$$

Պարզ է նաև, որ՝

$$A^{n_i}e = -\alpha_{i1}A^{n_i-1}e - \dots - \alpha_{in_i-1}Ae - \alpha_{in_i}e:$$

Այժմ գտնենք օպերատորի ներկայացումը ε_i բազիսում, այսինքն կառուցենք A_i մատրիցը այնպես, որ $A\varepsilon_i = A_i\varepsilon_i$: Նյութին է ստուգել, որ՝

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\mathcal{E}_i &= \begin{pmatrix} \mathcal{A}e \\ \mathcal{A}^2e \\ \mathcal{A}^3e \\ \vdots \\ \mathcal{A}^{n_i-1}e \\ \mathcal{A}^{n_i}e \end{pmatrix} = \\
&\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_{in_i} & -\alpha_{in_i-1} & -\alpha_{in_i-2} & -\alpha_{in_i-3} & \dots & -\alpha_{i1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \mathcal{A}e \\ \mathcal{A}^2e \\ \vdots \\ \mathcal{A}^{n_i-2}e \\ \mathcal{A}^{n_i-1}e \end{pmatrix} \\
&\stackrel{L}{=} \\
A_i &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_{in_i} & -\alpha_{in_i-1} & -\alpha_{in_i-2} & -\alpha_{in_i-3} & \dots & -\alpha_{i1} \end{pmatrix} \quad (26)
\end{aligned}$$

Այսպիսով՝

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_k \end{pmatrix}$$

բաղիտում օպերատորի մատրիցի անկյունագծային բլոկերն (26)

տեսքի են: Այս դեպքում ասում են, որ մատրիցը բերված է առաջին

բնական նորմալ տեսքի: Մատրիցի առաջին բնական նորմալ տեսքը միակն է անկյունագծային բլոկերի տեղափոխության ճշտությամբ: Դա անմիջապես բխում է բնութագրիչ մատրիցի Սմիթի նորմալ տեսքի միակությունից (Թեորեմ 13), որից հետևում է $\psi_1(\theta), \dots, \psi_k(\theta)$ բազմանդամների (ինվարիանտ գործակիցների) միակությունը:

Համաձայն Թեորեմ 17-ի հետևանքի, A_i մատրիցի բնութագրիչ բազմանդամը հավասար է

$$\det(A_i - \theta E) = (-1)^{n_i} \psi_i(\theta):$$

Ինչպես գիտենք, նաև՝

$$\det(A - \theta E) = \prod_{i=1}^k (-1)^{n_i} \psi_i(\theta) = (-1)^n \psi_1(\theta) \dots \psi_k(\theta):$$

Նման ձևով, օգտվելով տարածության տրոհումից, ըստ Թեորեմ 20-ի, կստանանք մատրիցների ներկայացման երկրորդ բնական նորմալ տեսքը:

Մատրիցի առաջին կամ երկրորդ բնական տեսքերը կառուցելու համար բավական է Սմիթի նորմալ տեսքի բերել օպերատորի բնութագրիչ մատրիցը և ստանալ ինվարիանտ գործակիցները՝ $\psi_1(\theta), \dots, \psi_k(\theta)$ բազմանդամները:

Մատրիցի ժորդանյան նորմալ տեսքը

Այժմ ենթադրենք, որ K դաշտը, որի նկատմամբ կառուցված է L գծային տարածությունը կոմպլեքս թվերի դաշտն է, այսինքն՝ $K = \mathbb{C}$:

Դիցուք $A : L \rightarrow L$ գծային օպերատոր է և L գծային տարածությունը տրոհված է ցիկլիկ ենթատարածությունների, համաձայն Թեորեմ 15-ի՝ $L = L_1 \dot{+} \dots \dot{+} L_k$, $\psi_1(\theta), \dots, \psi_k(\theta)$ բազմանդամները համապատասխան մինիմալ բազմանդամներն են, որոնց համար $\psi_{i+1}(\theta)$ -ն $\psi_i(\theta)$ -ի բաժանարարն է, $i = 1, 2, \dots, k-1$: Վերածենք այդ բազմանդամները անվերածելի արտադրիչների, որոնք կլինեն գծային, քանի որ կոմպլեքս դաշտում բոլոր բազմանդամները վերլուծվում են գծային արտադրիչների

$$\psi_1(\theta) = (\theta - \lambda_1)^{\alpha_1} (\theta - \lambda_2)^{\alpha_2} \dots (\theta - \lambda_p)^{\alpha_p}$$

$$\psi_2(\theta) = (\theta - \lambda_1)^{\beta_1} (\theta - \lambda_2)^{\beta_2} \dots (\theta - \lambda_p)^{\beta_p}$$

$$\vdots$$

$$\psi_k(\theta) = (\theta - \lambda_1)^{\varepsilon_1} (\theta - \lambda_2)^{\varepsilon_2} \dots (\theta - \lambda_p)^{\varepsilon_p}$$

$$\alpha_j \geq \beta_j \geq \dots \geq \varepsilon_j, j = 1, 2, \dots, p$$

Այժմ, համաձայն Թեորեմ 16-ի, կտրոհենք L_1 -ը ինվարիանտ ենթատարածությունների, որոնք կլինեն ցիկլիկ և նրանց մինիմալ բազմանդամները կլինեն $(\theta - \lambda_1)^{\alpha_1}$ -ը, $(\theta - \lambda_2)^{\alpha_2}$ -ը, ..., $(\theta - \lambda_p)^{\alpha_p}$ -ը: Նման ձևով կտրոհենք մնացած L_i -ները և L տարածությունը կտրոհվի ցիկլիկ ենթատարածությունների, որոնց մինիմալ բազմանդամները կլինեն անվերածելի բազմանդամների աստիճաններ:

Այսպիսով, կատանանք A օպերատորի մատրիցը երկրորդ բնական նորմալ տեսքով: Փորձենք ավելի պարզեցնել այդ մատրիցի տեսքը:

Փաստորեն մենք ունենք L տարածության մի տրոհում ցիկլիկ ենթատարածությունների $L = L_1 \dot{+} \dots \dot{+} L_m$, այնպիսին, որ ամեն մի L_i -ի

մինիմալ բազմանդամն ունի հետևյալ տեսքը՝ $(\theta - \lambda)^s$, որտեղ $\lambda \in K$:
 Դիցուք e -ն L_i -ի այն տարրն է, որի մինիմալ բազմանդամը $(\theta - \lambda)^s$ -ն է:
 Կառուցենք L_i -ի հետևյալ բազիսը՝ $e, (A - \lambda I)e, \dots, (A - \lambda I)^{s-1}e$: Սա
 իսկապես բազիս է, քանի որ գծորեն անկախ համակարգ է (հակառակ
 դեպքում կստանայինք s -ից փոքր աստիճանի վերացնող բազմանդամ):
 Նշանակենք $e_1 = (A - \lambda I)^{s-1}e$, $e_2 = (A - \lambda I)^{s-2}e, \dots, e_{s-1} = (A - \lambda I)e$,
 $e_s = e$ և

$$\varepsilon_i = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_s \end{pmatrix} :$$

Պարզ է, որ $(A - \lambda I)e_1 = 0$ և $Ae_1 = \lambda e_1$, $(A - \lambda I)e_2 = e_1$ և
 $Ae_2 = \lambda e_2 + e_1, \dots, (A - \lambda I)e_s = e_{s-1}$ և $Ae_s = \lambda e_s + e_{s-1}$: Ուրեմն՝

$$A\varepsilon_i = \begin{pmatrix} Ae_1 \\ Ae_2 \\ Ae_3 \\ \vdots \\ Ae_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda e_1 \\ \lambda e_2 + e_1 \\ \lambda e_3 + e_2 \\ \vdots \\ \lambda e_s + e_{s-1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_s \end{pmatrix} = A_i \varepsilon_i$$

Այսինքն, ε_i բազիսում մատրիցի բոլոր անկյունագծային տարրերը
 հավասար են λ -ի, անկյունագծին զուգահեռ ներքևի շարքի տարրերը
 մեկեր են, իսկ մնացած տարրերը՝ զրոներ: Այսպիսի մատրիցը կոչվում

է λ սեփական արժեքին Համապատասխանող s -րդ կարգի ժորդանյան վանդակ (մատրիցի տեսքից անմիջապես երևում է, որ λ -ն սեփական արժեք է): Մենք արդեն ստացել էինք, որ $\det(A - \lambda E) = (-1)^n \psi_1(\lambda) \dots \psi_k(\lambda)$, ուստի $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ թվերը A օպերատորի բոլոր սեփական արժեքներն են և λ_i -ի պատիկությունը Հավասար է

$$\alpha_i + \beta_i + \dots + \varepsilon_i = m_i, i = 1, 2, \dots, p$$

և

$$\sum_{i=1}^p m_i = n = \dim L:$$

Ամեն մի λ_i -ի A մատրիցում կՀամապատասխանի մեկ α_i -րդ կարգի ժորդանյան վանդակ, մեկ β_i -րդ կարգի ժորդանյան վանդակ ... մեկ ε_i -րդ կարգի ժորդանյան վանդակ: Բոլոր λ_i -ին Համապատասխանող վանդակների կարգերի գումարը կլինի Հավասար m_i :

Վերը նկարագրված ժորդանյան վանդակներից բաղկացած մատրիցը կոչվում է ժորդանյան նորմալ ձևի մատրից: Ասինքն, կամայական A մատրից կոմպլեքս թվերի դաշտում բերվում է ժորդանյան նորմալ տեսքի՝ կգտնվի T չվերասերված անցման մատրից՝ այնպիսին, որ $T^{-1}AT$ -ն ժորդանյան նորմալ տեսքի է:

Մատրիցի ժորդանյան նորմալ տեսքը միակն է վանդակների տեղափոխության ճշտությամբ: Դա անմիջապես հետևում է ինվարիանտ գործակիցների և տարածության մինիմալ բազմանդամի միակությունից:

Նկատենք, որ s -րդ կարգի ժորդանյան վանդակը կարելի է գրել հետևյալ կերպ.

$$\lambda E_s + H_s$$

որտեղ E_s -ը միավոր s չափանի մատրիցն է, իսկ H_s -ը այսպես կոչված "տեղաշարժի" s չափանի մատրիցն է՝

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Դիտարին է ստուգել, որ H_s^2 մատրիցում մեկերի շարքը տեղաշարժված է մի շարք ներքև H_s -ի համեմատ, H_s^3 -ում՝ երկու շարք և այլն: Հետևաբար՝

$$\text{rank}(H_s^p) = \begin{cases} s-p, & \text{երբ } 0 < p \leq s \\ 0, & \text{երբ } p > s \end{cases} :$$

Սահմանում. $A : L \rightarrow L$ գծային օպերատորի միջուկի չափը կոչվում է օպերատորի դեֆեկտ և նշանակվում է $\text{def}A$:

Պարզ է, որ $\text{def}A = \dim L - \text{rank}A$ (տես Թեորեմ 6-ը): Քանի որ օպերատորի ռանգը համընկնում է օպերատորը ներկայացնող մատրիցի ռանգի հետ, ապա կարող ենք սահմանել նաև n -չափանի A մատրիցի դեֆեկտը որպես՝

$$\text{def}A = n - \text{rank}A:$$

Տեղաշարժի մատրիցի համար կատանանք՝

$$\operatorname{def}(H_s^p) = \begin{cases} p, & \text{երբ } 0 \leq p \leq s \\ s, & \text{երբ } p > s \end{cases} :$$

Դիցուք $A : L \rightarrow L$ գծային օպերատորը ներկայացված է A մատրիցով, $\dim L = n$ և $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ -ը օպերատորի բոլոր սեփական արժեքներն են, որոնց պատիկովժյունները Համապատասխանաբար $k_1, \dots, k_m$ թվերն են: Պարզ է, որ $\sum_{i=1}^m k_i = n$:

Նշանակենք $d_s^{(p)}$ -ով $\operatorname{def}(A - \lambda_s E)^p$ -ն, $\mu_s^{(p)}$ -ով λ_s սեփական արժեքին Համապատասխանող p -չափանի Ժորդանյան վանդակների քանակը A -ի Ժորդանյան նորմալ ձևի մատրիցում և, վերջապես, μ_s -ով λ_s սեփական արժեքին Համապատասխանող բոլոր Ժորդանյան վանդակների քանակը A -ի Ժորդանյան նորմալ ձևի մատրիցում: Ահնհայտ է, որ $\mu_s = \sum_{p=1}^{k_s} \mu_s^{(p)}$ և $d_s^{(0)} = 0$:

Թեորեմ 2.1.

$$\mu_s^{(m)} = 2d_s^{(m)} - d_s^{(m+1)} - d_s^{(m-1)}$$

Ապացույց. Հաշվենք $(A - \lambda_s E)^m$ մատրիցի դեֆեկտը երբ $m > 0$: Նշանակենք J -ով A մատրիցի Ժորդանյան տեսքի մատրիցը: Ուստի, գոյություն ունի T անցման մատրիցը, որի Համար $J = T^{-1}AT$: Հետևաբար, $J - \lambda_s E = T^{-1}(A - \lambda_s E)T$ և $(J - \lambda_s E)^m = T^{-1}(A - \lambda_s E)^m T$: Թեորեմ 8-ից ստանում ենք, որ $\operatorname{def}(J - \lambda_s E)^m = \operatorname{def}(A - \lambda_s E)^m$: Ուստի, $d_s^{(m)} = \operatorname{def}(J - \lambda_s E)^m$: Դիտարին է Համոզվել, որ $(J - \lambda_s E)^m$ մատրիցի դեֆեկտը Հավասար է նրա անկյունագծային բլոկերի Ժորդանյան վանդակների դեֆեկտների գումարին, իսկ անկյունագծային բլոկերը $J - \lambda_s E$ -ի անկյունագծային

բլոկերի m -րդ աստիճաններն են: Ամեն մի ժորդանյան վանդակ $J - \lambda_s E$ մատրիցում, որը Համապատասխանում է որևէ λ_i սեփական արժեքի ունի Հետևյալ տեսքը

$$\begin{pmatrix} \lambda_i - \lambda_s & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i - \lambda_s & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_i - \lambda_s \end{pmatrix}$$

ուստի, երբ $i \neq s$ այդ վանդակի դեֆեկտը զրո է, իսկ $i = s$ դեպքում այդ վանդակը Համընկնում է Համապատասխան տեղաշարժի H մատրիցի Հետ: Եթե նշանակենք $p_1, \dots, p_{\mu_s}$ -ով λ_s -ին Համապատասխանող ժորդանյան վանդակների չափերը J մատրիցում,

$$\text{ապա } \sum_{i=1}^{\mu_s} p_i = k_s \text{ և}$$

$$d_s^{(m)} = \text{def}(J - \lambda_s E)^m = \sum_{i=1}^{\mu_s} \text{def} H_{p_i}^m$$

Գիտենք, որ՝

$$\text{def}(H_f^g) = \begin{cases} g, & \text{երբ } 0 \leq g \leq f \\ f, & \text{երբ } g > f \end{cases} :$$

Ուստի, եթե $g \geq 1$, ապա՝

$$\text{def} H_{p_i}^g = \begin{cases} \text{def} H_{p_i}^{g-1} + 1, & \text{երբ } 0 \leq g - 1 < p_i \\ \text{def} H_{p_i}^{g-1}, & \text{երբ } g - 1 \geq p_i \end{cases}$$

և

$$d_s^{(g)} = \sum_{i=1}^{\mu_s} \text{def} H_{p_i}^g = \sum_{i=1}^{\mu_s} \text{def} H_{p_i}^{g-1} + \sum_{\substack{j=1 \\ 0 \leq g-1 < j}}^{\mu_s} \mu_s^{(j)} = d_s^{(g-1)} + \mu_s - \sum_{i=1}^{g-1} \mu_s^{(i)} \quad (27)$$

Տեղադրենք (27)-ի մեջ $g = m + 1$ և $g = m$, կստանանք՝

$$d_s^{(m+1)} = d_s^{(m)} + \mu_s - \sum_{i=1}^m \mu_s^{(i)}$$

$$d_s^{(m)} = d_s^{(m-1)} + \mu_s - \sum_{i=1}^{m-1} \mu_s^{(i)}$$

Երկրորդ Հավասարումից Հանենք առաջինը և կստանանք թեորեմի պնդումը: Թեորեմն ապացուցված է:

Այսպիսով, Թեորեմ 21-ի օգնությամբ կարելի է կառուցել A մատրիցի Ժորդանյան վանդակները և, ուստի, Ժորդանյան նորմալ ձևը (իհարկե, եթե գտնված են բոլոր սեփական արժեքները և նրանց պատկերվածությունները): Եթե Հարկավոր է գտնել նաև Ժորդանյան բազիսին անցման մատրիցը՝ T -ն, ապա այն գտնվում է $TJ = AT$ պայմանից, որն իրենից ներկայացնում է գծային Հավասարումների Համակարգ, եթե T մատրիցի տարրերը դիտարկենք որպես անհայտներ:

Օրինակ

Կառուցենք Հետևյալ մատրիցի Ժորդանյան նորմալ տեսքը, կառուցելով դրա բնութագրիչ մատրիցի Սմիթի նորմալ տեսքը՝

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Կառուցենք մատրիցի բնութագրիչ մատրիցը՝

$$A - \theta E = \begin{pmatrix} 2 - \theta & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 - \theta & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\theta & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 - \theta \end{pmatrix}$$

և համաձայն Թեորեմ 1 1-ի Սմիթի նորմալ տեսքը՝

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\theta - 1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\theta - 1)^2(\theta - 2) \end{pmatrix}$$

Հետևաբար, ինվարիանտ գործակիցներն են՝
 $\psi_1(\theta) = (\theta - 1)^2(\theta - 2)$ **և** $\psi_2(\theta) = (\theta - 1)$: Այս բազմանդամների
 յուրաքանչյուր անվերաժելի (տվյալ դեպքում գծային) արտադրիչին
 համապատասխանում է մեկ Ժորդանյան վանդակ՝ $(\theta - 1)^2$ -ին $\lambda = 1$
 սեփական արժեքին համապատասխանող մեկ հատ 2-չափանի
 վանդակ, $(\theta - 2)$ -ին՝ $\lambda = 2$ սեփական արժեքին համապատասխանող
 մեկ հատ 1-չափանի վանդակ **և** $(\theta - 1)$ -ին $\lambda = 1$ սեփական արժեքին
 համապատասխանող մեկ հատ 1-չափանի վանդակ: Ուստի, մատրիցի
 Ժորդանյան նորմալ տեսքը հետևյալն է՝

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Կառուցենք այժմ նույն մատրիցի ժորդանյան նորմալ տեսքը, օգտվելով Թեորեմ 21-ի $\mu_s^{(m)} = 2d_s^{(m)} - d_s^{(m+1)} - d_s^{(m-1)}$ բանաձևից: Տեսանք, որ մատրիցի սեփական արժեքներն են $\lambda = 1$, որի պատիկությունը Հավասար է 3-ի և $\lambda = 2$, որի պատիկությունը Հավասար է 1-ի:

Կազմենք $A - E$ մատրիցը և Հաշվենք դրա աստիճանները՝

$$A - E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - E)^2 = (A - E)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Նյութին է տեսնել, որ՝

$$\text{rank}(A - E) = 2$$

և

$$\text{rank}(A - E)^2 = (A - E)^3 = 1,$$

ուստի $d^{(1)} = 4 - 2 = 2$, $d^{(2)} = d^{(3)} = 4 - 1 = 3$: Ստանում ենք, որ՝

$$\mu^{(1)} = 2d^{(1)} - d^{(0)} - d^{(2)} = 2 \times 2 - 0 - 3 = 1$$

և

$$\mu^{(2)} = 2d^{(2)} - d^{(1)} - d^{(3)} = 2 \times 3 - 2 - 3 = 1;$$

Քանի որ $\mu^{(1)} + 2\mu^{(2)} = 1 + 2 = 3$ Հավասար է $\lambda = 1$ -ի պատիկությունը, ապա ժորդանյան նորմալ տեսքում կան $\lambda = 1$ սեփական արժեքին համապատասխանող մեկ հատ 1-չափանի վանդակ և մեկ հատ 2-չափանի վանդակ:

Կազմենք $A - 2E$ մատրիցը և հաշվենք դրա աստիճանները՝

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$(A - 2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Պարզ է, որ՝

$$\text{rank}(A - 2E) = 3$$

և

$$\text{rank}(A - 2E)^2 = 3,$$

ուստի $d^{(1)} = 4 - 3 = 1$, $d^{(2)} = 4 - 3 = 1$: Ստանում ենք, որ՝

$$\mu^{(1)} = 2d^{(1)} - d^{(0)} - d^{(2)} = 2 \times 1 - 0 - 1 = 1$$

և

$$\mu^{(2)} = 2d^{(2)} - d^{(1)} - d^{(3)} = 2 \times 1 - 1 - 1 = 0:$$

Ուրեմն, ժորդանյան նորմալ տեսքում կա $\lambda = 2$ սեփական արժեքին

Համապատասխանող մեկ Հատ 1-չափանի վանդակ: Դա Համընկնում է այդ սեփական արժեքի պատիկություն Հետ: Ուրեմն, մատրիցի ժորդանյան տեսքը Հետևյալն է

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Մատրիցի ժորդանյան նորմալ տեսքն իրական թվերի դաշտի դեպքում

Երբ հիմնական դաշտը, որի նկատմամբ է սահմանված L գծային տարածությունը, իրական թվերի դաշտն է, այսինքն, $K = R$, գծային օպերատորի մատրիցը ընդհանուր դեպքում չի կարելի բերել եռանկյունաձև և, ուստի, ժորդանյան նորմալ տեսքի, սակայն միշտ կարելի է կառուցել մի բազիս, որում մատրիցը կունենա բավականին պարզ տեսք, որը համարվում է ժորդանյան նորմալ տեսքի անալոգն իրական թվերի դաշտի համար:

Դիցուք $K = R$, $A : L \rightarrow L$ գծային օպերատոր է, L -ը տրոհված է ինվարիանտ ցիկլիկ ենթատարածությունների ըստ Թեորեմ 20-ի և ամեն մի ենթատարածության մինիմալ բազմանդամն անվերածելի բազմանդամի աստիճան է: Իրական թվերի դաշտի նկատմամբ անվերածելի բազմանդամներն են գծային բազմանդամները և քառակուսային այն բազմանդամները, որոնց դիսկրիմինանտը բացասական է: Ուստի, L -ի տրոհման ենթատարածությունների մինիմալ բազմանդամները կարող են ունենալ հետևյալ երկու տեսքերից մեկը՝ $(\theta - \lambda)^s$, որտեղ $\lambda \in K$, կամ էլ $((\theta - \sigma)^2 + \tau^2)^s$, որտեղ σ -ն և τ -ն իրական թվեր են, ընդ որում $\tau > 0$: Առաջին դեպքում, երբ մինիմալ բազմանդամը $(\theta - \lambda)^s$ -ն է, քանի որ λ -ն իրական է, ապա տվյալ ենթատարածությանը կհամապատասխանեն ժորդանյան վանդակներ: Երկրորդ դեպքում ժորդանյան վանդակներ չի կարելի կառուցել և մենք կվարվենք այլ կերպ:

Ուրեմն դիցուք տրված է M ցիկլիկ ենթատարածությունը, որը մասնակցում է L -ի տրոհմանը և որի մինիմալ բազմանդամն է $((\theta - \sigma)^2 + \tau^2)^p$ -ը, որտեղ σ -ն և τ -ն իրական թվեր են, ընդ որում $\tau > 0$: Քանի որ M -ը ինվարիանտ է A -ի նկատմամբ, ապա A -ն

Նույնպես գծային օպերատոր է M -ի վրա՝ $A : M \rightarrow M$:

Դիտարկենք $B : M \rightarrow M$ գծային օպերատորը, որը սահմանվում է որպես $B = A - \sigma I$, որտեղ I -ն նույնաբար օպերատորն է: Պարզ է, որ B -ի նկատմամբ M ենթատարածության մինիմալ բազմանդամը կլինի $(\theta^2 + \tau^2)^p$ բազմանդամը: Եթե A մատրիցը ներկայացնում է A -ն որևէ բազիսում, ապա $A - \sigma E$ մատրիցը ներկայացնում է B -ն: Ուստի, եթե կառուցենք B -ի որևէ պարզ ներկայացում B մատրիցով, ապա հեշտությամբ դրանից կանցնենք A -ի ներկայացմանը $A = B + \sigma E$ բանաձևով:

Այսպիսով, փորձենք գտնել Ժորդանյան վանդակների անալոգը B օպերատորի մատրիցի համար:

Կրկնենք, որ $B : M \rightarrow M$, $\dim M = n$ և մինիմալ բազմանդամն է $(\theta^2 + \tau^2)^p$ բազմանդամը, որտեղ $\tau > 0$:

Ֆիքսենք որևէ բազիս՝ $e_1, \dots, e_n$ և դրանով իսկ սահմանենք M -ի և

$$V_n(R) = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_j \in R, j = 1, 2, \dots, n\}$$

միջև իզոմորֆիզմ: M -ի կամայական x տարրին կհամապատասխանի $e_1, \dots, e_n$ բազիսում նրա $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ ներկայացման կորդինատային վեկտորը $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ -ը: Բազիսային e_j տարրին կհամապատասխանի

$$(0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-րդ տեղ}}, 0, \dots, 0)$$

վեկտորը: Պարզ է, որ

$$V_n(R) \subseteq V_n(\mathbb{C}) = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_j \in \mathbb{C}, j = 1, 2, \dots, n\}:$$

Դիտարկենք, որ $e_1, \dots, e_n$ տարրերին համապատասխանող վեկտորները $V_n(R)$ -ում գծորեն անկախ են նաև $V_n(\mathbb{C})$ -ում և կազմում են բազիս: Ուստի, մենք կարող ենք ընդլայնել M -ը մինչև մի գծային տարածություն $\mathbb{C}$ -ի նկատմամբ հետևյալ կերպ: Ֆորմալ ձևով

ավելացնենք M -ին բոլոր αe_j արտադրյալները, որտեղ $\alpha \in \mathbb{C}$, և կազմենք ստացված բազմություն M -ի նկատմամբ: Աստանանք Հետևյալ բազմությունը՝

$$\tilde{M} = \{\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \mid \alpha_j \in \mathbb{C}, j = 1, 2, \dots, n\},$$

որը Հանդիսանում է գծային տարածություն $\mathbb{C}$ -ի նկատմամբ և իզոմորֆ է $V_n(\mathbb{C})$ -ին, ուստի $\dim \tilde{M} = n$: Եթե $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ -ը իրական են, ապա $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \in M$: Պարզ է, որ իմաստ ունի խոսել $\tilde{M}$ տարածության տարրի Համալուծի մասին՝ եթե $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \in \tilde{M}$, ապա $\bar{x} = \bar{\alpha}_1 e_1 + \dots + \bar{\alpha}_n e_n$: Եթե $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \in M$, ապա $x = \bar{x}$: Նկատենք, որ e_j բազիսային տարրի կորդինատներն են՝

$$0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-րդ տեղ}}, 0, \dots, 0$$

և իսկապես $e_j = \bar{e}_j$:

Այժմ տարածենք $\mathcal{B}$ օպերատորի գործողությունը ամբողջ $\tilde{M}$ վրա: Նշանակենք $\tilde{\mathcal{B}}$ -ով ընդլայնված օպերատորը՝ $\tilde{\mathcal{B}} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$, որը գործում է Հետևյալ կերպ՝ եթե $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \in \tilde{M}$, ապա $\tilde{\mathcal{B}}x = \alpha_1 \mathcal{B}e_1 + \dots + \alpha_n \mathcal{B}e_n$: Ակնհայտ է, որ $\tilde{\mathcal{B}}$ -ն գծային օպերատոր է $\tilde{M}$ -ի վրա $\mathbb{C}$ դաշտի նկատմամբ և $\tilde{\mathcal{B}}$ -ի սահմանափակումը M վրա Համընկնում է $\mathcal{B}$ -ի Հետ: Նոր օպերատորի Համար $(\theta^2 + \tau^2)^p$ բազմանդամը կլինի վերացնող: Իսկապես,

$$(\mathcal{B}^2 + \tau^2 \mathcal{I})^p x = \sum_{k=1}^n \alpha_k (\mathcal{B}^2 + \tau^2 \mathcal{I})^p e_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k (\mathcal{B}^2 + \tau^2 \mathcal{I})^p e_k,$$

քանի որ $e_j \in M$: Ակնհայտ է, որ $(\mathcal{B}^2 + \tau^2 \mathcal{I})^p e_j = 0$, ուստի $(\mathcal{B}^2 + \tau^2 \mathcal{I})^p x = 0$: Իրականում, $(\theta^2 + \tau^2)^p$ բազմանդամը կլինի մինիմալ $\tilde{\mathcal{B}}$ -ի Համար: Իսկապես, դիցուք $h(\theta) = (\theta - i\tau)^s (\theta + i\tau)^t$ բազմանդամը $(\theta^2 + \tau^2)^p = (\theta - i\tau)^p (\theta + i\tau)^p$ բազմանդամի սեփական բաժանարարն

է (այսինքն $s + t < 2p$) և վերացնող է $\mathfrak{B}$ -ի Համար: Ղյուրին է տեսնել, որ $h(\theta) = h_1(\theta) + ih_2(\theta)$, որտեղ $h_1(\theta)$ և $h_2(\theta)$ բազմանդամներից առնվազն մեկը զրոյական չէ: Նշանակենք e -ով M -ի այն տարրը, որի մինիմալ բազմանդամը Համընկնում է ամբողջ տարածություն մինիմալ բազմանդամի՝ $(\theta^2 + \tau^2)^p$ Հետ: Ակնհայտ է, որ

$$0 = h(\mathfrak{B})e = h_1(\mathfrak{B})e + ih_2(\mathfrak{B})e = h_1(\mathcal{B})e + ih_2(\mathcal{B})e$$

և

$$h_1(\mathcal{B})e = h_2(\mathcal{B})e = 0:$$

Քանի որ $\deg h_1(\theta), \deg h_2(\theta) \leq \deg h(\theta) < 2p$, ապա e -ի Համար ստանում ենք իրական գործակիցներով վերացնող բազմանդամ, որի աստիճանը փոքր է $2p$ -ից, ինչն անհնար է:

Քանի որ $(\theta^2 + \tau^2)^p = (\theta - i\tau)^p(\theta + i\tau)^p$, ապա մինիմալ բազմանդամը ներկայացված է փոխադարձաբար պարզ բազմանդամների արտադրյալի տեսքով (այսուհետև i -ն կօգտագործենք բացառապես կեղծ միավորը նշանակելու Համար): Ահրառենք Թեորեմ 16-ը և տրոհենք $\tilde{M}$ -ը երկու ինվարիանտ (պարզ է, որ ցիկլիկ) ենթատարածությունների, որոնց մինիմալ բազմանդամներն են $(\theta - i\tau)^p$ և $(\theta + i\tau)^p$: Աստանանք $\tilde{M} = L^- \dot{+} L^+$ և $(\theta - i\tau)^p$ -ը մինիմալ է L^- -ի Համար, իսկ $(\theta + i\tau)^p$ -ը՝ L^+ -ի: Տեղի ունի հետևյալ Հատկությունը՝

$$\begin{aligned} (\mathfrak{B} - i\tau\mathcal{I})^p x &= 0 \Leftrightarrow x \in L^- \\ (\mathfrak{B} + i\tau\mathcal{I})^p x &= 0 \Leftrightarrow x \in L^+ \end{aligned} \tag{28}$$

Իսկապես, $x \in L^- \Rightarrow (\mathfrak{B} - i\tau\mathcal{I})^p x = 0$ և $x \in L^+ \Rightarrow (\mathfrak{B} + i\tau\mathcal{I})^p x = 0$ Հետևում են $(\theta - i\tau)^p$ և $(\theta + i\tau)^p$ բազմանդամների մինիմալությունից: Քանի որ $(\theta - i\tau)^p$ և $(\theta + i\tau)^p$ բազմանդամները փոխադարձաբար պարզ են, ապա կգտնվեն $\phi_1(\theta)$ և $\phi_2(\theta) \in \mathbb{C}[\theta]$, որ

$$1 = \phi_1(\theta)(\theta - i\tau)^p + \phi_2(\theta)(\theta + i\tau)^p$$

և, ուստի,

$$\mathcal{I} = \phi_1(\mathcal{B})(\mathcal{B} - i\tau\mathcal{I})^p + \phi_2(\mathcal{B})(\mathcal{B} + i\tau\mathcal{I})^p:$$

Դիցուք $x = x^- + x^+ \in \tilde{M}$, **որտեղ** $x^- \in L^-, x^+ \in L^+$ **և**
 $(\mathcal{B} - i\tau\mathcal{I})^p x = 0$, **ապա՝**

$$0 = (\mathcal{B} - i\tau\mathcal{I})^p x = \underbrace{(\mathcal{B} - i\tau\mathcal{I})^p x^-}_{=0} + (\mathcal{B} - i\tau\mathcal{I})^p x^+ = (\mathcal{B} - i\tau\mathcal{I})^p x^+:$$

Այսու կողմից՝

$$x^+ = \mathcal{I}x^+ = \phi_1(\mathcal{B})(\mathcal{B} - i\tau\mathcal{I})^p x^+ + \phi_2(\mathcal{B})(\mathcal{B} + i\tau\mathcal{I})^p x^+ = 0,$$

ուրեմն, $x = x^-$ **և** $x \in L^-$: **Այսինքն ապացուցեցինք, որ՝**

$$(\mathcal{B} - i\tau\mathcal{I})^p x = 0 \Rightarrow x \in L^-:$$

Նման ձևով կստանանք՝ $(\mathcal{B} + i\tau\mathcal{I})^p x = 0 \Rightarrow x \in L^+$ **և (28)-ը**
ապացուցված է:

Հեշտ է նկատել, որ $(\mathcal{B} - i\tau\mathcal{I})^p x = 0$ **Հավասարման մեջ անցնելով**
Համալուծ տարրերին ստանում ենք $(\mathcal{B} + i\tau\mathcal{I})^p \bar{x} = 0$ **պայմանը և**
Հակառակը՝ $(\mathcal{B} + i\tau\mathcal{I})^p x = 0$ **պայմանից** $(\mathcal{B} - i\tau\mathcal{I})^p \bar{x} = 0$ **պայմանը:**
Այսինքն $x \in L^- \Leftrightarrow \bar{x} \in L^+$ **և** $\dim L^- = \dim L^+ = m$: **Անմիջապես**
ստանում ենք, որ՝

$$n = \dim \tilde{M} = \dim L^- + \dim L^+ = 2m,$$

այսինքն $\tilde{M}$ -ի **չափը զույգ թիվ է:**

Կառուցենք L^- **տարածության Ժորդանյան բազիսը՝** $d_1, \dots, d_m$, **որի**
Համար տեղի ունի՝

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}d_1 &= i\tau d_1 \\
\mathbb{B}d_2 &= i\tau d_2 + d_1 \\
&\vdots \\
\mathbb{B}d_j &= i\tau d_j + d_{j-1} \\
&\vdots \\
\mathbb{B}d_m &= i\tau d_m + d_{m-1}
\end{aligned}$$

Պարզ է, որ L^+ -ի ժորդանյան բազիսը դա L^- -ի ժորդանյան բազիսի Համալուծն է $\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_m$, որի Համար տեղի ունի՝

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}\bar{d}_1 &= -i\tau\bar{d}_1 \\
\mathbb{B}\bar{d}_2 &= -i\tau\bar{d}_2 + \bar{d}_1 \\
&\vdots \\
\mathbb{B}\bar{d}_j &= -i\tau\bar{d}_j + \bar{d}_{j-1} \\
&\vdots \\
\mathbb{B}\bar{d}_m &= -i\tau\bar{d}_m + \bar{d}_{m-1}
\end{aligned}$$

Սահմանենք M տարածության տարրերի Հետևյալ Համակարգը՝

$$\begin{aligned}
f_j &= \frac{1}{2}(d_j + \bar{d}_j) \\
g_j &= \frac{1}{2i}(d_j - \bar{d}_j)
\end{aligned} \tag{29}$$

$j = 1, 2, \dots, m$:

Ահնայտ է, որ $f_j, g_j \in M$, $j = 1, 2, \dots, m$: Հետևյալ կարելի է շրջել (29) բանաձևերը՝

$$\begin{aligned}
d_j &= f_j + ig_j \\
\bar{d}_j &= f_j - ig_j
\end{aligned} \tag{30}$$

$j = 1, 2, \dots, m$:

Ստացված (29) և (30) բանաձևերից Հետևում է, որ $\{d_1, \dots, d_m, \bar{d}_1, \dots, \bar{d}_m\}$ և $\{f_1, g_1, f_2, g_2, \dots, f_m, g_m\}$ Համակարգերի

գծային թաղանթները $\tilde{M}$ -ում Համընկնում են, ուստի $\{f_1, g_1, f_2, g_2, \dots, f_m, g_m\}$ Համակարգը $\tilde{M}$ -ի բազիսն է կազմված M -ի (այսինքն իրական) տարրերից: Տեսնենք այժմ, թե ինչ տեսք ունի $\mathfrak{B}$ օպերատորի մատրիցը $f_1, g_1, f_2, g_2, \dots, f_m, g_m$ բազիսում՝

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{B}f_1 &= \frac{1}{2}(\mathfrak{B}d_1 + \mathfrak{B}\bar{d}_1) = \frac{1}{2}(i\tau d_1 - i\tau\bar{d}_1) = -\tau \frac{1}{2i}(d_1 - \bar{d}_1) = -\tau g_1 \\
 \mathfrak{B}g_1 &= \frac{1}{2i}(\mathfrak{B}d_1 - \mathfrak{B}\bar{d}_1) = \frac{1}{2i}(i\tau d_1 + i\tau\bar{d}_1) = \tau \frac{1}{2}(d_1 + \bar{d}_1) = \tau f_1 \\
 \mathfrak{B}f_2 &= \frac{1}{2}(\mathfrak{B}d_2 + \mathfrak{B}\bar{d}_2) = \frac{1}{2}(i\tau d_2 - i\tau\bar{d}_2) + \frac{1}{2}(d_1 + \bar{d}_1) = -\tau g_2 + f_1 \\
 \mathfrak{B}g_2 &= \frac{1}{2i}(\mathfrak{B}d_2 - \mathfrak{B}\bar{d}_2) = \frac{1}{2i}(i\tau d_2 + i\tau\bar{d}_2) + \frac{1}{2i}(d_1 - \bar{d}_1) = \tau f_2 + g_1 \\
 &\vdots \\
 \mathfrak{B}f_j &= \frac{1}{2}(\mathfrak{B}d_j + \mathfrak{B}\bar{d}_j) = \frac{1}{2}(i\tau d_j - i\tau\bar{d}_j) + \frac{1}{2}(d_{j-1} + \bar{d}_{j-1}) = -\tau g_j + f_{j-1} \\
 \mathfrak{B}g_j &= \frac{1}{2i}(\mathfrak{B}d_j - \mathfrak{B}\bar{d}_j) = \frac{1}{2i}(i\tau d_j + i\tau\bar{d}_j) + \frac{1}{2i}(d_{j-1} - \bar{d}_{j-1}) = \tau f_j + g_{j-1} \\
 &\vdots \\
 \mathfrak{B}f_m &= \frac{1}{2}(\mathfrak{B}d_m + \mathfrak{B}\bar{d}_m) = \frac{1}{2}(i\tau d_m - i\tau\bar{d}_m) + \frac{1}{2}(d_{m-1} + \bar{d}_{m-1}) = -\tau g_m + f_{m-1} \\
 \mathfrak{B}g_m &= \frac{1}{2i}(\mathfrak{B}d_m - \mathfrak{B}\bar{d}_m) = \frac{1}{2i}(i\tau d_m + i\tau\bar{d}_m) + \frac{1}{2i}(d_{m-1} - \bar{d}_{m-1}) = \tau f_m + g_{m-1}
 \end{aligned}$$

Այսինքն՝

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{B}f_1 \\ \mathfrak{B}g_1 \\ \mathfrak{B}f_2 \\ \mathfrak{B}g_2 \\ \vdots \\ \mathfrak{B}f_j \\ \mathfrak{B}g_j \\ \vdots \\ \mathfrak{B}f_m \\ \mathfrak{B}g_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\tau & 0 & 0 & & & \\ \tau & 0 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & -\tau & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & \tau & 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 & 0 & -\tau & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & \tau & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & 0 & 0 & -\tau \\ & & & & & & 0 & 1 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \\ f_2 \\ g_2 \\ \vdots \\ f_j \\ g_j \\ \vdots \\ f_m \\ g_m \end{pmatrix}$$

Քանի որ մատրիցի տարրերը իրական թվեր են, ուստի այն

հերկայացնում է նաև $\mathcal{B}$ օպերատորը M տարածության վրա:

Վերադառնալով $\mathcal{A}$ օպերատորին և հաշվի առնելով, որ $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \sigma \mathcal{I}$ ստանում ենք մատրիցի վերջնական տեսքը՝

$$\begin{pmatrix} \sigma & -\tau & 0 & 0 & & & & & \\ \tau & \sigma & 0 & 0 & & & & & \\ 1 & 0 & \sigma & -\tau & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & \tau & \sigma & 0 & 0 & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & 0 & \sigma & -\tau & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 1 & \tau & \sigma & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & 1 & 0 & \sigma & -\tau \\ & & & & & & & & & 0 & 1 & \tau & \sigma \end{pmatrix}$$

Այս մատրիցը հանդիսանում է Ժորդանյան վանդակի անալոգը և կոչվում է իրական Ժորդանյան վանդակ:

Օրինակ

Կառուցենք՝

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

մատրիցի իրական Ժորդանյան տեսքը:

Դիտարին է հաշվել մատրիցի բնութագրիչ բազմանդամի տեսքը՝ $(\theta^2 + 1)^2$: Ուստի, տարածության միջինմալ բազմանդամը կամ $\theta^2 + 1$ -ն է, կամ էլ $(\theta^2 + 1)^2$ -ն: Եթե $\theta^2 + 1$ -ը վերացնող է, ապա $A^2 + E = 0$,

տակայն դա այդպես չէ: Որեւէ, մինիմալ բազմանդամը $(\theta^2 + 1)^2$ -ն է:
 Այս բազմանդամի համար $\sigma = 0$, $\tau = 1$, ուստի իրական Ժորդանյան
 տեսքը կլինի հետևյալը՝

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Ունիտար և էվքլիդեսյան տարածություններ

Այսուհետև հիմնական K դաշտը կլինի կամ իրական թվերի դաշտը՝ R -ը, կամ էլ կոմպլեքս թվերի դաշտը՝ $\mathbb{C}$ -ն:

Դիցուք L -ը գծային տարածություն է $K = \mathbb{C}$ դաշտի նկատմամբ: α կոմպլեքս թվի համալուծը կնշանակենք $\bar{\alpha}$ -ով: Դիցուք A -ն մատրից է, որի տարրերը կոմպլեքս թվեր են, A^* -ով կնշանակենք համալուծ մատրիցը, որը ստացվում է A -ից այն շրջելով (տրանսպոնացնելով) և բոլոր թվերը համալուծներով փոխարինելով: Իրական թվերի դեպքում համալուծ մատրիցը համընկնում է շրջվածի հետ:

Սահմանում. Դիցուք տրված է $L \times L \rightarrow K$ արտապատկերումը: Նշանակենք $(a, b) \in L$ կարգավորված զույգին համապատասխանող թիվը (a, b) -ով: $L \times L \rightarrow K$ արտապատկերումը կոչվում է սկալյար արտադրյալ, եթե

1. $(a, b) = \overline{(b, a)}$
2. $(a + b, c) = (a, c) + (b, c)$
3. $(\lambda a, b) = \lambda(a, b)$
4. (a, a) -ն իրական թիվ է և $(a, a) \geq 0$, բացի այդ $(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

Դիտարին է համոզվել, որ

$$(a, b + c) = (a, b) + (a, c):$$

Իսկապես,

$$(a, b + c) = \overline{(b + c, a)} = \overline{(b, a)} + \overline{(c, a)} = (a, b) + (a, c):$$

Նույն ձևով կստանանք՝ $(a, \lambda b) = \overline{(\lambda b, a)} = \bar{\lambda} \overline{(b, a)} = \bar{\lambda}(a, b):$

Նաև պարզ է, որ եթե $a = 0$ կամ $b = 0$, ապա $(a, b) = 0$:

Սահմանման 4-րդ պայմանը կոչվում է **դրականորեն որոշվածություն** պայման:

Իրական թվերի դաշտի դեպքում սկալար արտադրյալի սահմանումը կարտագրվի հետևյալ կերպ.

1. $(a, b) = (b, a)$
2. $(a + b, c) = (a, c) + (b, c)$
3. $(\lambda a, b) = \lambda(a, b)$
4. $(a, a) \geq 0$, բացի այդ $(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

Սահմանում. L գծային տարածությունը կոմպլեքս թվերի (իրական թվերի) նկատմամբ կոչվում է **ունիտար (Էվրլիդեսյան), եթե այդ տարածության մեջ կարելի է սահմանել սկալար արտադրյալ:**

Դիցուք L -ը ունիտար տարածություն է, $\dim L = n$ և

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \text{ է}$$

տարածության բազիսն է: Եթե $x, y \in L$, ապա $x = \Lambda \varepsilon$ և $y = \Upsilon \varepsilon$, որտեղ $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ և $\Upsilon = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$: Հաշվենք (x, y) սկալար արտադրյալն օգտվելով նրա սահմանման 2 և 3 պայմաններից՝

$$(\Lambda \varepsilon, \Upsilon \varepsilon) = (\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n, \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_n e_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \bar{\gamma}_j (e_i, e_j):$$

Նշանակենք A -ով $n \times n$ չափանի մատրիցը, որի i, j -րդ տարրը (e_i, e_j) -ն է: Դիցուքին է ստուգել, որ $(x, y) = \Lambda A \Upsilon^*$: Էվրլիդեսյան տարածության

Համար՝ $(x, y) = \Lambda A Y^T$: Փաստորեն սկալյար արտադրյալը Հաշվելու Համար բավական է իմանալ (e_i, e_j) թվերը՝ A մատրիցը:

Այժմ փորձենք L տարածությունից Համար սահմանել սկալյար արտադրյալ, օգտվելով $(x, y) = \Lambda A Y^*$ բանաձևից, ընտրելով A մատրիցն այնպես, որ բավարարվեն սկալյար արտադրյալի 1 - 4 պայմանները:

A մատրիցի տարրերը նշանակենք α_{ij} նշաններով: Սահմանենք՝ $(e_i, e_j) = \alpha_{ij}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$: Քանի որ Համաձայն 1 պայմանի $(e_i, e_j) = \overline{(e_j, e_i)}$, ապա $\alpha_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$, այսինքն $A = A^*$: Այսպիսի մատրիցը կոչվում է **ինքնահամալուծ**: Այժմ սահմանենք սկալյար արտադրյալը կամայական $x, y \in L$ Համար Հետևյալ կերպ.

$(x, y) = \Lambda A Y^*$, որտեղ Λ -ն և Y -ն x -ի և y -ի կորդինատային վեկտորներն են $\mathcal{E}$ բազիսում: Ստուգենք 1 - 4 պայմանները.

1. $(x, y) = \Lambda A Y^* = (Y A^* \Lambda^*)^* = \overline{(Y A \Lambda^*)} = \overline{(y, x)}$
2. $(x + y, z) = (\Lambda + Y) A \Omega^* = \Lambda A \Omega^* + Y A \Omega^* = (x, z) + (y, z)$
3. $(\lambda x, y) = (\lambda) A Y^* = \lambda (\Lambda A Y^*) = \lambda (x, y)$

Այսպիսով առաջին երեք պայմանները բավարարված են: Անցնենք վերջին՝ դրականորեն որոշվածության պայմանի ստուգմանը: Նախ Համոզվենք, որ (x, x) -ը իրական թիվ է: Դա ակնհայտ է, քանի որ Համաձայն առաջին պայմանի $(x, x) = \overline{(x, x)}$: Չորրորդ պայմանի մնացած պահանջները հատկապես են.

կամայական x -ի Համար $(x, x) \geq 0$ և $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, այսինքն՝

$$\Lambda \neq 0 \Rightarrow \Lambda A \Lambda^* > 0 \text{ և } \Lambda A \Lambda^* = 0 \Leftrightarrow \Lambda = 0 \quad (31)$$

(31) պայմանին բավարարող մատրիցները կոչվում են **դրականորեն որոշված մատրիցներ**:

Մենք ապացուցեցինք, որ

սկալյար արտադրյալը ունիտար տարածությունում ֆիքսված բազիսի դեպքում միարժեքորեն որոշվում է ինքնաՀամալուծ, դրականորեն որոշված A մատրիցով $(x, y) = \Lambda A \Upsilon^*$ բանաձևով, որտեղ Λ -ն և Υ -ն x -ի և y -ի կոորդինատային վեկտորներն են ε բազիսում:

Իրական դաշտի դեպքում ինքնաՀամալուծության պայմանը փոխարինվում է սիմետրիկության պայմանով:

ԻնքնաՀամալուծ և դրականորեն որոշված մատրիցի օրինակ է միավոր մատրիցը: Իսկապես ակնհայտ է, որ այն ինքնաՀամալուծ է: Ապա պարզ է, որ

$$\Lambda E \Lambda^* = \Lambda \Lambda^* = \lambda_1 \bar{\lambda}_1 + \dots + \lambda_n \bar{\lambda}_n = |\lambda_1|^2 + \dots + |\lambda_n|^2 \geq 0$$

և

$$\Lambda \Lambda^* = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \Leftrightarrow \Lambda = 0:$$

Նկատենք, որ այն դեպքում, երբ $A = E$ միավոր մատրիցն է, ստանում ենք՝

$$(x, y) = \Lambda \Upsilon^* = \lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_n \bar{v}_n$$

(իրական թվերի դեպքում $(x, y) = \Lambda \Upsilon^T = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$) Հայտնի բանաձևերը սկալյար արտադրյալի Համար, որոնք ինչպես պարզեցինք սկալյար արտադրյալ սահմանելու միակ բանաձևերը չեն:

ԻնքնաՀամալուծ և դրականորեն որոշված մատրիցների բազմազանությունն անվերջ է: Դիտարկենք այդպիսի մատրիցների կառուցման եղանակը: Դիցուք B -ն մի քառակուսի մատրից է կոմպլեքս թվերի դաշտի նկատմամբ, որի Համար $\det B \neq 0$: Նշանակենք $A = BB^*$: Համոզվենք, որ A -ն ինքնաՀամալուծ է.

$$A^* = (BB^*)^* = ((B^*)^*)B^* = BB^* = A:$$

Այժմ ստուգենք դրականորեն որոշվածությունը: Ունենք, որ

$$\Lambda A \Lambda^* = \Lambda(BB^*)\Lambda^* = (\Lambda B)E(B^*\Lambda^*) = (\Lambda B)E(\Lambda B)^*:$$

Եթե $\Lambda \neq 0$, ապա $\Lambda B \neq 0$, քանի որ $\det B \neq 0$ և $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ անհայտներով $\Lambda B = 0$ գծային համասեռ հավասարումների համակարգն ունի միակ $\Lambda = 0$ լուծումը: Ուստի՝

$$\Lambda A \Lambda^* = (\Lambda B)E(\Lambda B)^* \geq 0,$$

քանի որ միավոր մատրիցը դրականորեն որոշված է: Նաև, եթե $\Lambda \neq 0$, ապա՝

$$\Lambda A \Lambda^* = (\Lambda B)E(\Lambda B)^* > 0,$$

քանի որ $\Lambda B \neq 0$ և միավոր մատրիցը դրականորեն որոշված է:

Սահմանում. $x \in L$ տարրի նորմ (կամ երկարություն) կոչվում է $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ իրական թիվը:

Ահնհայտ է, որ $\|x\| \geq 0$ և $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$: Բացի այս հատկությունից նորմն ունի նաև հետևյալ հիմնական հատկությունները.

$$1. \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$2. |(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$$

Առաջին հատկությունը ստուգվում է ուղղակիորեն՝

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{|\lambda|^2 (x, x)} = |\lambda| \|x\|:$$

Երկրորդ հատկությունը հայտնի է որպես Կոշի - Բունիակովսկու անհավասարություն: Ապացուցենք այն: Ունենք՝

$$\|x - \lambda y\|^2 = (x - \lambda y, x - \lambda y) \geq 0, \quad (32)$$

որտեղ $x, y \in L$ և $\lambda \in K$: Բացելով փակագծերը ստանում ենք՝

$$(x, x) - \lambda(y, x) - \bar{\lambda}(x, y) + \lambda\bar{\lambda}(y, y) \geq 0: \quad (33)$$

Երբ $y = 0$ Կոշի - Բունիակովսկու անհավասարությունն ակնհայտորեն բավարարված է, ուստի դիտարկենք $y \neq 0$ դեպքը և (33)-ում ընտրենք $\lambda = \frac{(x, y)}{(y, y)}$: Ստացվում է՝

$$(x, x) - \frac{(x, y)\overline{(x, y)}}{(y, y)} \geq 0$$

և, վերջապես,

$$\|x\|^2 \|y\|^2 = (x, x)(y, y) \geq (x, y)\overline{(x, y)} = |(x, y)|^2:$$

Դիտարկենք ստուգել, որ (32)-ում $\|x - \lambda y\|^2 = 0 \Leftrightarrow x = \lambda y$, ուստի Կոշի - Բունիակովսկու անհավասարությունը դառնում է հավասարություն միայն, եթե $x = \lambda y$, այսինքն՝ x և y տարրերը գծորեն կախված են:

Օգտվելով նորմից, կարելի է սահմանել ունիտար (էվերլիդեսյան) տարածության տարրերի միջև հեռավորության գաղափարը որպես $\rho(x, y) = \|x - y\| \geq 0$: Հեռավորությունը բավարարում է հետևյալ ստանդարտ պայմաններին.

1. $\rho(x, x) = 0$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Վերջին պայմանը եռանկյան անհավասարությունն է: Մյն հետևում է Կոշի - Բունիակովսկու անհավասարությունից.

$\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|$ անհավասարությունը համարժեք է

$$\sqrt{(x - z, x - z)} \leq \sqrt{(x - y, x - y)} + \sqrt{(y - z, y - z)}$$

անհավասարությանը, որն իր հերթին համարժեք է

$$\sqrt{(a+b, a+b)} \leq \sqrt{(a, a)} + \sqrt{(b, b)}$$

անհավասարությունը, որտեղ $a = x - y$, $b = y - z$: Քառակուսի բարձրացնելով անհավասարությունը ստանում ենք՝

$$(a+b, a+b) \leq (a, a) + (b, b) + 2\sqrt{(a, a)(b, b)},$$

$$(a, a) + (a, b) + (b, a) + (b, b) \leq (a, a) + (b, b) + 2\sqrt{(a, a)(b, b)}$$

և

$$\operatorname{Re}(a, b) \leq \sqrt{(a, a)(b, b)} \quad (34)$$

որտեղ Re -ն նշանակում է թվի իրական մասը: Բայց (34)-ը հեշտությամբ հետևում է Կոշի - Բունիակովսկու անհավասարությունից, քանի որ ակնհայտորեն $\operatorname{Re}(a, b) \leq \sqrt{|(a, b)|}$ և $\sqrt{|(a, b)|} \leq \sqrt{\|a\|} \sqrt{\|b\|}$:

Օրթոնորմալ բազիսներ

Սահմանում. Ունիտար տարածության x և y տարրերը կոչվում են **օրթոգոնալ**, եթե $(x, y) = 0$: Օրթոգոնալությունը նշանակվում է հետևյալ կերպ՝ $x \perp y$:

Սահմանումից հետևում է, որ զրոյական տարրը համարվում է օրթոգոնալ բոլոր տարրերին: Սկալյար արտադրյալի դրականորեն որոշվածությունից ստացվում է, որ միայն զրոյական տարրն է ինքն իրեն օրթոգոնալ:

Դիցուք $e_1, \dots, e_k \in L$ ունիտար տարածությանը և ոչ մի e_i , $i = 1, \dots, k$, զրոյական չէ: Ապացուցենք, որ եթե $e_1, \dots, e_k$ համակարգի տարրերը զույգ առ զույգ օրթոգոնալ են (այսինքն՝ $i \neq j \Rightarrow (e_i, e_j) = 0$), ապա համակարգը գծորեն անկախ է: Իրոք, եթե $\sum_{i=1}^k \lambda_i e_i = 0$, ապա սկալյար բազմապատկելով հավասարության երկու մասերը e_j -ով կստանանք՝

$$0 = \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i e_i, e_j \right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (e_i, e_j) = \lambda_j (e_j, e_j):$$

Բայց՝ $(e_j, e_j) > 0$, ուրեմն՝ $\lambda_j = 0$: Քանի որ j -ն կամայական է, ապա $\lambda_j = 0, j = 1, \dots, k$:

Համակարգը կոչվում է օրթոգոնալ, եթե $i \neq j \Rightarrow (e_i, e_j) = 0$:

Եթե տրված է $e_1, \dots, e_n$ օրթոգոնալ համակարգը, որի տարրերը ոչ զրոյական են և $\dim L = n$, այդ համակարգը տարածության բազիսն է:

Սահմանում. Ունիտար տարածության բազիսը կոչվում է

օրթոգոնալ, եթե այն օրթոգոնալ համակարգ է, և այն կոչվում է նորմավորված, եթե նրա յուրաքանչյուր տարրի նորմը հավասար է մեկի:

Բազիսը կոչվում է օրթոնորմալ կամ օրթոնորմավորված, եթե այն օրթոգոնալ է և նորմավորված:

Այսինքն օրթոնորմավորված $e_1, \dots, e_k$ համակարգի համար ունենք՝

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } i = j \\ 0, & \text{եթե } i \neq j \end{cases} :$$

Պարզ է, որ x և y տարրերի, որոնց կորդինատային վեկտորներն են $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ -ը և $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ -ը տրված բազիսում, սկալար արտադրյալը տրվում է $\lambda_1\mu_1 + \dots + \lambda_n\mu_n$ բանաձևով միայն և միայն այն դեպքում, երբ բազիսը օրթոնորմալ է:

Նշույին է տեսնել, որ եթե $e_1, \dots, e_k$ համակարգում չկան զրոյական տարրեր, ապա՝

$$\|e_1\|^{-1}e_1, \dots, \|e_k\|^{-1}e_k$$

համակարգը նորմավորված է: Ուստի, եթե տրված է օրթոգոնալ բազիս, ապա այն հեշտությամբ կարելի է նորմավորել, քանի որ, եթե $e_1, \dots, e_k$ համակարգն օրթոգոնալ է, ապա օրթոգոնալ է նաև $\|e_1\|^{-1}e_1, \dots, \|e_k\|^{-1}e_k$ համակարգը:

Օրթոնորմալ բազիսները գեկարայան ուղղանկյուն կորդինատային համակարգերի ընդհանրացումն են բազմաչափ տարածությունների համար:

Թեորեմ 22.

Ունիտար տարածությունում միշտ գոյություն ունի

օրթոգոնալ բազիս:

Ապացույց. Վերցնենք որևէ բազիս՝ $e_1, \dots, e_n$ և փորձենք ձևափոխել այն օրթոգոնալ բազիսի: Դրանից հետո ակնհայտ ձևով կնորմավորենք ստացված բազիսը և թեորեմը կապացուցվի:

$e_1, \dots, e_n$ բազիսը կանվանենք **հին բազիս:**

Կառուցենք նոր, օրթոգոնալ բազիս, որի տարրերը կնշանակենք $d_1, \dots, d_n$ -ով:

Վերցնենք $d_1 = e_1$: Այժմ վերցնենք $d_2 = e_2 + \lambda_1 d_1$ և ընտրենք λ_1 -ն այնպես, որ d_2 -ը լինի օրթոգոնալ d_1 -ին.

$$(d_2, d_1) = (e_2, d_1) + \lambda_1 (d_1, d_1) = 0$$

Պարզ է, որ ընտրելով λ_1 -ը հավասար $-\frac{(e_2, d_1)}{(d_1, d_1)}$ -ի ստանում ենք՝ $(d_2, d_1) = 0$: Պարզ է նաև, որ $d_2 \neq 0$, քանի որ e_1, e_2 համակարգը գծորեն անկախ է:

Անենք ինդուկտիվ ենթադրություն, որ արդեն կառուցել ենք ոչ զրոյական տարրերի $d_1, \dots, d_k$, $k < n$, համակարգն այնպես, որ բոլոր $i, j \in \{1, \dots, k\}$ համար տեղի ունի՝ $i \neq j \Rightarrow (d_i, d_j) = 0$ և ամեն մի d_i -ն e_i -ի և $d_1, \dots, d_{i-1}$ -րի գծային կոմբինացիան է: Ցույց տանք, որ այդ համակարգը կարող ենք ընդլայնել ավելացնելով d_{k+1} -ը, պահպանելով համակարգի նշված հատկությունը:

Վերցնենք՝

$$d_{k+1} = e_{k+1} + \alpha_1 d_1 + \dots + \alpha_k d_k$$

և ընտրենք $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ թվերն այնպես, որ $(d_{k+1}, d_i) = 0$ բոլոր $i = 1, \dots, k$: Կամայական j -ի համար բաղմապատկենք d_{k+1} -ն d_j -ով

$$(d_{k+1}, d_j) = (e_{k+1}, d_j) + \sum_{i=1}^k \alpha_i (d_i, d_j) = (e_{k+1}, d_j) + \alpha_j (d_j, d_j):$$

Վերցնելով $\alpha_j = -\frac{(e_{k+1}, d_j)}{(d_j, d_j)}$ ստանում ենք՝ $(d_{k+1}, d_j) = 0, j = 1, \dots, k$:

Պարզ է, որ $d_{k+1} \neq 0$, քանի որ $d_{k+1} = e_{k+1} + \alpha_1 d_1 + \dots + \alpha_k d_k$, և փոխարինելով $d_1, \dots, d_k$ -ը նրանց արտահայտություններով $e_1, \dots, e_k$ տարրերի գծային կոմբինացիաներով կստանանք՝ $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}$ տարրերի գծային կոմբինացիա, որի մեջ e_{k+1} -ի գործակիցը 1 է, իսկ $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}$ համակարգը գծորեն անկախ է: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմի ապացույցի մեջ օգտագործված ալգորիթմը կոչվում է Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման պրոցես:

Եթե տրված է $e_1, \dots, e_k$ օրթոնորմալ համակարգը և $k < \dim L = n$, ապա մենք կարող ենք ընդլայնել այդ համակարգը մինչև տարածության բազիսը՝ $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$: Ստացված բազիսին կիրառենք Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման պրոցեսը սկսած e_{k+1} -ից և կստանանք օրթոնորմալ բազիս, որը պարունակում է $e_1, \dots, e_k$ համակարգը: Այսպիսով՝

օրթոնորմալ համակարգը կարելի է ընդլայնել, նոր տարրեր ավելացնելով, մինչև ամբողջ տարածության օրթոնորմալ բազիս:

Սկալյար արտադրյալը սահմանելիս արդեն նկատել էինք, որ եթե սակյար արտադրյալը տրված է A մատրիցով, որի համար՝

$$(A)_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

ապա՝

$$(x, y) = \Lambda Y^* = \lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_n \bar{v}_n$$

(իրական թվերի դեպքում $(x, y) = \Lambda Y^T = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$) և սկալյար արտադրյալը սահմանվում է Հայտնի բանաձևերով: Օրթոնորմալ բազիսի դեպքում՝

$$(A)_{ij} = (e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} :$$

Ուստի միայն և միայն օրթոնորմալ բազիսի դեպքում է, որ սկալյար արտադրյալը տրվում է Հայտնի

$$(x, y) = \Lambda Y^* = \lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_n \bar{v}_n$$

(իրական թվերի դեպքում՝ $(x, y) = \Lambda Y^T = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$) բանաձևերով:

Դիցուք $e_1, \dots, e_n$ -ն օրթոնորմալ բազիս է n -չափանի L ունիտար (էվլիդեսյան) տարածությունում: Եթե $x \in L$, ապա $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$: Բազմապատկելով e_k -ով և օգտվելով $i \neq k \Rightarrow (e_k, e_i) = 0$ պայմանից, ստանում ենք՝

$$(x, e_k) = \alpha_k (e_k, e_k) = \alpha_k, k = 1, \dots, n:$$

Փաստորեն (x, e_k) -ն x -ի $\mathfrak{S}$ ուրյեի գործակիցն է:

Դիցուք $e_1, \dots, e_k$ -ն օրթոնորմալ համակարգ է n -չափանի L ունիտար (էվլիդեսյան) տարածությունում և $k < n$: Ընդլայնենք համակարգը մինչև ամբողջ տարածության օրթոնորմալ բազիս՝ $e_1, \dots, e_n$: Կամայական x -ի համար L -ից ունենք՝

$$x = (x, e_1)e_1 + \dots + (x, e_n)e_n = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$$

ուստի՝

$$(x, x) = \alpha_1 \bar{\alpha}_1 + \dots + \alpha_n \bar{\alpha}_n = |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2:$$

Այս հավասարությունը կոչվում է Պարսելալի

Հավասարություն: Քանի որ $(x, e_i) = \alpha_i$, ապա՝

$$(x, x) \geq \alpha_1 \bar{\alpha}_1 + \dots + \alpha_k \bar{\alpha}_k = |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_k|^2:$$

Այս անհավասարությունը կոչվում է Բեսսելի անհավասարություն:

Ունիտար (օրթոգոնալ) մատրիցներ

Դիցուք

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \text{ և } \varepsilon' = \begin{pmatrix} \acute{e}_1 \\ \acute{e}_2 \\ \vdots \\ \acute{e}_n \end{pmatrix}$$

միևնույն ունիտար L տարածության օրթոնորմալ բազիսներ են, իսկ T -ն նրանց միջև անցման մատրիցն է, այսինքն՝

$$\varepsilon' = T\varepsilon \quad (35)$$

Նշանակենք T մատրիցի տարրերը α_{ij} -ներով: (35)-ից ստացվում է, որ

$$(\acute{e}_i, \acute{e}_j) = \left(\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} e_k, \sum_{m=1}^n \alpha_{jm} e_m \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \alpha_{ik} \bar{\alpha}_{jm} (e_k, e_m) = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \bar{\alpha}_{jk} \quad (36)$$

Դիտարկենք i -րդ և j -րդ տողերի սկալյար արտադրյալն է, ուստի

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \bar{\alpha}_{jk} = (\acute{e}_i, \acute{e}_j) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } i = j \\ 0, & \text{եթե } i \neq j \end{cases},$$

այսինքն մատրիցի տողերը կազմում են օրթոնորմալ բազիս: Սա նշանակում է, որ $TT^* = E$ և ուրեմն $T^{-1} = T^*$:

Սահմանում. T մատրիցը կոչվում է ունիտար, եթե $T^{-1} = T^*$: Համարժեք սահմանում է մատրիցը ունիտար է, եթե նրա տողերը կազմում են օրթոնորմալ բազիս:

Իրական թվերի դաշտի դեպքում անալոգ ձևով սահմանվում է

օրթոգոնալ մատրիցը, որի համար $T^{-1} = T^T$:

Օրթոգոնալ մատրիցով են իրականացվում հարթության պտույտները և որևէ ուղղի (որն անցնում է կորդինատային համակարգի սկզբնակետով) նկատմամբ սիմետրիկ անդրադարձումը: Օրթոգոնալ են նաև տեղափոխության մատրիցները՝ 0,1-մատրիցները, որոնց յուրաքանչյուր տող և սյուն պարունակում են ճիշտ մեկ հատ 1:

Ունիտար T մատրիցի համար տեղի ունի՝ $\det T \det T^* = 1$ և ուստի $|\det T|^2 = 1$, այսինքն $|\det T| = 1$:

(36) Հավասարությունից հետևում է նաև, որ եթե ε բազիսը օրթոնորմալ է, իսկ T անցման մատրիցն ունիտար է, ապա $\varepsilon' = T\varepsilon$ բազիսը նույնպես օրթոնորմալ է:

Այսպիսով ստացանք, որ՝

օրթոնորմալ բազիսից օրթոնորմալ բազիս անցման մատրիցները դրանք ունիտար մատրիցներն են:

Օրթոգոնալ լրացում

Դիցուք L -ն ունիտար տարածություն է, $\dim L = n$ և M -ը նրա ոչ դատարկ ենթատարածություն է: Ասում են, որ $x \in L$ օրթոգոնալ է M -ին (նշանակում են $x \perp M$), եթե x -ն օրթոգոնալ է M -ի բոլոր տարրերին:

Նշանակենք՝

$$M^\perp = \{x \in L \mid x \perp M\}:$$

Այս բազմությունը կոչվում է M բազմության օրթոգոնալ լրացում: Օրթոգոնալ լրացումը գծային ենթատարածություն է: Իսկապես, եթե $x, y \in M^\perp$ և $z \in M$, ապա՝

$$(\lambda x + \mu y, z) = \lambda \underbrace{(x, z)}_{=0} + \mu \underbrace{(y, z)}_{=0} = 0,$$

ուստի, $\lambda x + \mu y \in M^\perp$:

Թեորեմ 23.

Եթե L_1 -ը L ունիտար տարածության ենթատարածությունն է, ապա՝

$$L_1 \dot{+} L_1^\perp = L$$

Ապացույց. Ակնհայտ է, որ $L_1 \cap L_1^\perp = \{0\}$ և $L_1 + L_1^\perp$ գումարն ուղիղ է: Դիցուք $e_1, \dots, e_k$ -ը L_1 -ի օրթոնորմալ բազիսն է, իսկ $e_{k+1}, \dots, e_s$ -ը $L_1^\perp$ -ինը, ուստի $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_s$ համակարգը $L_1 \dot{+} L_1^\perp$ -ի օրթոնորմալ բազիսն է: Եթե $s = \dim L$, ապա թեորեմն ապացուցված է: Եթե $s < \dim L$, ապա $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_s$ բազիսը կարող ենք ընդլայնել մինչև L -ի օրթոնորմալ բազիսը՝ $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_s, e_{s+1}, \dots, e_n$: Պարզ է, որ $e_{s+1} \in L_1 \cap L_1^\perp$, քանի որ

e_{s+1} -ն օրթոգոնալ է $e_1, \dots, e_k$ և $e_{k+1}, \dots, e_s$ բազիսներին: Այստեղից հետևում է, որ $e_{s+1} = 0$, ինչը հակասում է այն բանին, որ e_{s+1} -ը բազիսային տարր է: Թերորեն ապացուցված է:

Հետևանք.

$$L_1^{\perp\perp} = L_1$$

Իսկապես, ակնհայտ է, որ $L_1 \subseteq L_1^{\perp\perp}$: Ստուգենք, որ $L_1^{\perp\perp} \subseteq L_1$: Դիցուք $x \in L_1^{\perp\perp}$: Համաձայն թերեմ 23-ի $x = x_1 + x_2$, որտեղ $x_1 \in L_1$ իսկ $x_2 \in L_1^\perp$: Հաշվենք $(x_2, x) = (x_2, x_1) + (x_2, x_2)$: Այժմ՝ $(x_2, x) = 0$, քանի որ x -ը $L_1^{\perp}$ -ի օրթոգոնալ լրացումից է: Ակնհայտորեն՝ $(x_2, x_1) = 0$, ուստի և $(x_2, x_2) = 0$ և $x_2 = 0$: Ստանում ենք, որ $x = x_1$, ուրեմն $x \in L_1$:

Թերեմ 24.

L ունիտար տարածություն L_1 և L_2 ենթատարածությունների համար տեղի ունի՝

$$(L_1 + L_2)^\perp = L_1^\perp \cap L_2^\perp$$

$$(L_1 \cap L_2)^\perp = L_1^\perp + L_2^\perp$$

Ապացույց. Դիտարին է տեսնել, որ բանաձևերը երկակի են և մեկը մյուսից ստացվում է կիրառելով օրթոգոնալ լրացման գործողությունը և թերեմ 23-ի հետևանքը: Ուստի, բավական է ապացուցել բանաձևերից մեկը: Ապացուցենք $(L_1 + L_2)^\perp = L_1^\perp \cap L_2^\perp$ բանաձևը: Մենք միշտ կօգտվենք այն ակնհայտ փաստից, որ կամայական M_1 և M_2 ենթատարածությունների համար ճիշտ է $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow M_2^\perp \subseteq M_1^\perp$:

Սկզբից ապացուցենք, որ $(L_1 + L_2)^\perp \subseteq L_1^\perp \cap L_2^\perp$: Քանի որ $L_1 \subseteq L_1 + L_2$, ապա $(L_1 + L_2)^\perp \subseteq L_1^\perp$ և նույն ձևով $(L_1 + L_2)^\perp \subseteq L_2^\perp$ և, հետևաբար, $(L_1 + L_2)^\perp \subseteq L_1^\perp \cap L_2^\perp$:

Ապացուցենք այժմ, որ $L_1^\perp \cap L_2^\perp \subseteq (L_1 + L_2)^\perp$: Ունենք, որ $L_1^\perp \cap L_2^\perp \subseteq L_1^\perp$ և $L_1^\perp \cap L_2^\perp \subseteq L_2^\perp$, ուրեմն՝ $L_1 \subseteq (L_1^\perp \cap L_2^\perp)^\perp$ և $L_2 \subseteq (L_1^\perp \cap L_2^\perp)^\perp$: Պարզ է, որ նաև՝ $L_1 + L_2 \subseteq (L_1^\perp \cap L_2^\perp)^\perp$: Այստեղից ստանում ենք՝ $(L_1^\perp \cap L_2^\perp)^{\perp\perp} = L_1^\perp \cap L_2^\perp \subseteq (L_1 + L_2)^\perp$:

Համալուծ օպերատոր

Դիցուք տրված է $A : L \rightarrow L$ գծային օպերատորը n -չափանի L ունիտար (էվքլիդեսյան) տարածությունում: Ֆիքսենք որևէ ε օրթոնորմալ բազիս և կստանանք A օպերատորի ներկայացումը այդ բազիսում, այսինքն կստանանք A մատրիցը, որի Համար $A\varepsilon = A\varepsilon$ և կոմուտատիվ է Հետևյալ դիագրամը՝

$$\begin{array}{ccccc} A : & L & \rightarrow & L \\ & \varepsilon \downarrow & & \varepsilon \downarrow \\ A : & V_n(K) & \rightarrow & V_n(K) \end{array}$$

Սահմանենք մի նոր օպերատոր $B : L \rightarrow L$ այնպես, որ լինի կոմուտատիվ ստորև բերված դիագրամը՝

$$\begin{array}{ccccc} B : & L & \rightarrow & L \\ & \varepsilon \downarrow & & \varepsilon \downarrow \\ A^* : & V_n(K) & \rightarrow & V_n(K) \end{array}$$

որտեղ A^* -ը A մատրիցի Համալուծն է, այսինքն ստացվում է A -ից շրջելով (տրանսպոնացնելով) և տարրերը Համալուծներով փոխարինելով: Ահնհայտ է, որ այս ձևով սահմանվում է գծային օպերատոր, որը գործում է այսպես.

տրված $x \in L$ Համար Bx -ը Հաշվում ենք Հետևյալ կերպ՝ վերցնում ենք x -ի բազիսային ներկայացումը $x = \Lambda\varepsilon$ և Հաշվում ենք $Bx = (\Lambda A^*)\varepsilon$:

Դյուրին է ստուգել, որ B օպերատորը գծային է.

$$x_1, x_2 \in L, x_1 = \Lambda^1\varepsilon, x_2 = \Lambda^2\varepsilon \Rightarrow Bx_1 = (\Lambda^1 A^*)\varepsilon, Bx_2 = (\Lambda^2 A^*)\varepsilon$$

և

$$\begin{aligned}\lambda x_1 + \mu x_2 &= (\lambda \Lambda^1 + \mu \Lambda^2) \varepsilon \Rightarrow \mathcal{B}(\lambda x_1 + \mu x_2) = ((\lambda \Lambda^1 + \mu \Lambda^2) A^*) \varepsilon = \\ &= ((\lambda \Lambda^1) A^* + (\mu \Lambda^2) A^*) \varepsilon = (\lambda \Lambda^1) A^* \varepsilon + (\mu \Lambda^2) A^* \varepsilon = \\ &= \lambda ((\Lambda^1) A^* \varepsilon) + \mu ((\Lambda^2) A^* \varepsilon) = \lambda \mathcal{B}x_1 + \mu \mathcal{B}x_2\end{aligned}$$

Դիտարինք ε նաև տեսնել, որ $\mathcal{B}$ օպերատորի և կամայական $x, y \in L$ համար տեղի ունի՝

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{B}y)$$

Իսկապես, դիցուք ε բազիսում $x = \Lambda \varepsilon$, $y = \Upsilon \varepsilon$: Ունենք՝ $\mathcal{A}x = (\Lambda A) \varepsilon$ և $\mathcal{B}y = (\Upsilon A^*) \varepsilon$: Այժմ՝ $(\mathcal{A}x, y) = (\Lambda A) \Upsilon^* =$

$$(x, \mathcal{B}y) = \Lambda (\Upsilon A^*)^* = \Lambda (A \Upsilon^*) = (\Lambda A) \Upsilon^* = (\mathcal{A}x, y):$$

Այժմ կողմից $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{B}y)$ պայմանից բխում է, որ եթե ε բազիսում A օպերատորի ներկայացումը A մատրիցն է, ապա $\mathcal{B}$ օպերատորի ներկայացումը A^* է: Ապացուցենք դա: Դիցուք $\mathcal{B}$ օպերատորի ներկայացումը դա B մատրիցն է և $\mathcal{B} \varepsilon = B \varepsilon$: Դիցուք նաև $x = \Lambda \varepsilon$, $y = \Upsilon \varepsilon$: Այժմ՝

$$(\Lambda A) \Upsilon^* = (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{B}y) = \Lambda (\Upsilon B)^* = \Lambda (B^* \Upsilon^*) = (\Lambda B^*) \Upsilon^*$$

և ուրեմն՝

$$0 = (\Lambda A - \Lambda B^*) \Upsilon^* = (\Lambda (A - B^*)) \Upsilon^*:$$

Քանի որ $x, y \in L$ կամայական են վերջնենք $y = (\Lambda (A - B^*)) \varepsilon$, կստանանք՝

$$(\Lambda (A - B^*)) (\Lambda (A - B^*))^* = 0$$

և հետևաբար՝ $\Lambda (A - B^*) = 0$: Վերջին հավասարությունը տեղի ունի կամայական Λ -ի համար, ուստի $A - B^* = 0$ և $A = B^*$ ինչը համարժեք է $A^* = B$ պայմանին:

Սահմանում. L ունիտար (էվքլիդեսյան) տարածությունում գործող A գծային օպերատորի համալուծ օպերատոր է կոչվում A^* գծային

օպերատորը, որի Համար տեղի ունի

$$\forall x, y \in L \quad (Ax, y) = (x, A^*y):$$

Փաստորեն, մենք արդեն վերն ապացուցել ենք, որ կամայական A գծային օպերատորի Համալուծ օպերատորը գոյություն ունի և օրթոնորմալ բազիսում Համալուծ օպերատորը ներկայացվում է Համալուծ մատրիցով (իրական թվերի դեպքում էվքլիդեսյան տարածություններում Համալուծ մատրիցը փոխարինվում է շրջվածով):

Համալուծ օպերատորը սահմանվում է միարժեքորեն: Իսկապես, եթե

$$(Ax, y) = (x, A_1^*y) = (x, A_2^*y),$$

ապա $(x, (A_1^ - A_2^*)y) = 0$ և քանի որ x -ը կամայական է*

$$((A_1^* - A_2^*)y, (A_1^* - A_2^*)y) = 0:$$

Ուստի, $(A_1^ - A_2^*)y = 0$ բոլոր $y \in L$ Համար և $A_1^* - A_2^* = 0$ ու $A_1^* = A_2^*$:*

Դիտարին է ստուգել հետևյալ Հատկությունները.

- 1.** $(A^*)^* = A$
- 2.** $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$
- 3.** $(A + B)^* = A^* + B^*$
- 4.** $(AB)^* = B^* A^*$

Նորմալ օպերատորներ

Սահմանում. L ունիտար (էվքլիդեսյան) տարածությունում գործող A գծային օպերատորը կոչվում է **Նորմալ**, եթե այն տեղափոխելի է իր Համալուծի հետ, այսինքն՝

$$AA^* = A^*A$$

Այստեղից միանգամից բխում է, որ օպերատորը նորմալ է միայն և միայն այն դեպքում, երբ A օպերատորի ներկայացումն օրթոնորմալ բազիսում բավարարում է $AA^* = A^*A$ պայմանին:

Նշույին է տեսնել, որ կամայական $f(\theta)$, $g(\theta) \in K[\theta]$ բազմանդամների համար տեղի ունի՝

$$f(A)g(A^*) = g(A^*)f(A):$$

Թեորեմ 25.

Դիցուք A -ն նորմալ օպերատոր է

1. λ -ն A -ի սեփական արժեքն է $\Leftrightarrow \bar{\lambda}$ -ն A^* -ի սեփական արժեքն է

2. x -ը λ սեփական արժեքին համապատասխանող A -ի սեփական վեկտորն է $\Leftrightarrow x$ -ը $\bar{\lambda}$ սեփական արժեքին համապատասխանող A^* -ի սեփական վեկտորն է

3. տարբեր սեփական արժեքներին

**Համապատասխանող սեփական վեկտորները
օրթոգոնալ են:**

Ապացույց. Դիցուք x -ը λ սեփական արժեքին Համապատասխանող A -ի սեփական վեկտորն է, այսինքն՝

$$(A - \lambda I)x = 0, x \neq 0$$

(այստեղ I -ն միավոր օպերատորն է և $I^* = I$): Պարզ է, որ $(A^* - \bar{\lambda}I)^* = A - \lambda I$ և

$$\begin{aligned} 0 &= ((A - \lambda I)x, (A - \lambda I)x) = \\ &= ((A - \lambda I)x, (A^* - \bar{\lambda}I)^*x) = ((A^* - \bar{\lambda}I)((A - \lambda I)x), x) = \\ &= ((A^* - \bar{\lambda}I)(A - \lambda I)x, x) = ((A - \lambda I)(A^* - \bar{\lambda}I)x, x) = \\ &= ((A^* - \bar{\lambda}I)x, (A - \lambda I)^*x) = ((A^* - \bar{\lambda}I)x, (A^* - \bar{\lambda}I)x) \end{aligned}$$

Ուրեմն՝ $(A^* - \bar{\lambda}I)x = 0$ և մենք ապացուցեցինք **1** և **2** պնդումները:

Ապացուցենք 3-ը: Դիցուք $Ax = \lambda x, x \neq 0, Ay = \mu y, y \neq 0$ և $\lambda \neq \mu$:
Այժմ՝

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, y) = (Ax, y) = (x, A^*y) = (x, \bar{\mu}y) = \mu(x, y)$$

և $(\lambda - \mu)(x, y) = 0$: Քանի որ $\lambda \neq \mu$, ապա վերջին Հավասարությունից ստանում ենք, որ $(x, y) = 0$: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 26.

Կամայական A նորմալ օպերատորի Համար L ունիտար (կոմպլեքս թվային դաշտի նկատմամբ) տարածության մեջ գոյություն ունի օրթոնորմալ բազիս կազմված սեփական վեկտորներից:

Ապացույց. A օպերատորի բնութագրիչ բազմանդամն անապայման ունի արմատ՝ λ_1 , ուստի գոյություն ունի $e_1 \neq 0$, որ $Ae_1 = \lambda_1 e_1$: **Այժմ՝**

e_1 -ով ծնված էնթատարածությունը նշանակենք L_1 -ով: Պարզ է, որ $\dim L_1 = 1$: Ապացուցենք, որ $L_1^\perp$ -ն ինվարիանտ է A -ի նկատմամբ: Դիցուք $x \in L_1^\perp$, ապա՝

$$(e_1, Ax) = (A^*e_1, x) = (\bar{\lambda}_1 e_1, x) = \bar{\lambda}_1 (e_1, x) = 0$$

և ուստի՝ $Ax \in L_1^\perp$: Ահնհայտ է, որ $\dim L_1^\perp = \dim L - 1$:

Քանի որ $L_1^\perp$ -ն ինվարիանտ է A -ի նկատմամբ, ապա A -ն գծային նորմալ օպերատոր է $L_1^\perp$ -ի վրա և վերը նշված եղանակով $L_1^\perp$ -ում կգտնվի A -ի սեփական վեկտոր e_2 , որով ծնված էնթատարածությունը $L_1^\perp$ -ում կնշանակենք L_2 -ով, և $L_2^\perp$ -ը կլինի ինվարիանտ A -ի նկատմամբ: Դյուրին է տեսնել, որ $(e_1, e_2) = 0$ և $L_1^\perp$ -ում $\dim L_2^\perp = \dim L_1^\perp - 1$: Հարունակելով այս պրոցեսը կստանանք $e_1, \dots, e_{\dim L}$ զույգ առ զույգ օրթոգոնալ սեփական վեկտորների (և ուստի ոչ զրոյական) մի համակարգ, որը կկազմի L տարածության բազիս: Մնում է հայտնի եղանակով նորմալիզացնել վեկտորները, որ նրանց նորմերը դառնան հավասար 1-ի: Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք.

Գոյություն ունի օրթոնորմալ բազիս, որում նորմալ օպերատորը ներկայացվում է անկյունագծային մատրիցով:

Նորմալ օպերատորներն էվքլիդեսյան տարածություններում

Տեսնենք այժմ, թե ինչ տեսքի մատրիցով է ներկայացվում նորմալ օպերատորն էվքլիդեսյան տարածությունում, այսինքն, երբ թվային դաշտն իրական թվերի դաշտն է: Ճիշտ այնպես, ինչպես վարվեցինք իրական Ժորդանյան նորմալ ձևի կառուցման ժամանակ, ներդնենք մեր էվքլիդեսյան n -չափանի L տարածությունը համապատասխան n -չափանի կոմպլեքս տարածության մեջ: Ավելի ստույգ, ֆիքսենք L -ում որևէ օրթոնորմալ բազիս՝ $e_1, \dots, e_n$: L -ը կլինի իզոմորֆ

$$V_n(R) = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in R, i = 1, 2, \dots, n\}$$

տարածությամբ: Պարզ է, որ՝

$$V_n(R) \subset V_n(\mathbb{C}) = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

և

$$L \subset \tilde{L} = \{\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \mid \alpha_j \in \mathbb{C}, j = 1, 2, \dots, n\}:$$

Ահնհայտորեն, $V_n(\mathbb{C})$ -ն իզոմորֆ է $\tilde{L}$ -ին: Ղյուրին է ստուգել, որ $e_1, \dots, e_n$ -ն օրթոնորմալ բազիս է նաև $\tilde{L}$ -ում: Հարունակենք սկալյար արտադրյալը L -ից մինչև $\tilde{L}$ հետևյալ կերպ՝ եթե $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ և $y = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$, ապա $(x, y) = \alpha_1 \bar{\beta}_1 + \dots + \alpha_n \bar{\beta}_n$: Երբ $x, y \in L$ սկալյար արտադրյալը համընկնում է L -ի սկալյար արտադրյալի հետ: A օպերատորը շարունակենք $\tilde{L}$ -ի վրա հետևյալ կերպ՝ եթե $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \in \tilde{L}$, ապա $Ax = \alpha_1 A e_1 + \dots + \alpha_n A e_n$ (ղյուրին է տեսնել, որ նման ձևով կարելի է շարունակել կամայական գծային օպերատոր, որ սահմանված է L -ի վրա): Ահնհայտ է, որ դա գծային օպերատոր է: Հարունակված օպերատորը նշանակենք B -ով: Ահնհայտ է, որ $B = A$ L -ի վրա: Հարունակենք նաև A^* օպերատորը և նշանակենք դրա շարունակությունը B_1 -ով: Ցույց տանք, որ B_1 -ը

Համընկնում է B^* -ի Հետ: Իսկապես, դիցուք $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ և $y = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$, ապա՝

$$\begin{aligned} (Bx, y) &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i B e_i, y \right) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i A e_i, \sum_{j=1}^n \beta_j e_j \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \bar{\beta}_j (A e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \bar{\beta}_j (e_i, A^* e_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \bar{\beta}_j (e_i, B_1 e_j) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^n \beta_j B_1 e_j \right) = (x, B_1 y) \end{aligned}$$

Համալուծ օպերատորի միակուլթյունից ստանում ենք, որ $B_1 = B^*$: Ապացուցենք այժմ, որ B օպերատորը նույնպես նորմալ է: Իրոք, կամայական $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \in \tilde{L}$ Համար ունենք՝

$$\begin{aligned} B^* B x &= B^* \sum_{i=1}^n \alpha_i B e_i = B^* \sum_{i=1}^n \alpha_i A e_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i B^* (A e_i) \stackrel{\text{քանի որ } A e_i \in L}{=} \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i A^* A e_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i A A^* e_i = A \sum_{i=1}^n \alpha_i A^* e_i = B \sum_{i=1}^n \alpha_i B^* e_i = B B^* x \end{aligned}$$

Նկատենք նաև, որ եթե

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

օրթոնորմալ բազիսում A օպերատորը ներկայացված է A իրական մատրիցով, ապա B օպերատորը ներկայացված է այդ նույն մատրիցով, իսկ B^* օպերատորը A^T մատրիցով: Իսկապես,

$$B \mathcal{E} = \begin{pmatrix} B e_1 \\ \vdots \\ B e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A e_1 \\ \vdots \\ A e_n \end{pmatrix} = A \mathcal{E} = A \mathcal{E}$$

և

$$B^* \varepsilon = A^* \varepsilon = A^T \varepsilon:$$

Դիցուք $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \in \tilde{L}$ տարրը B օպերատորի սեփական վեկտորն է, որ Համապատասխանում է λ սեփական արժեքին: Նշանակենք $\Lambda = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ և $x = \Lambda \varepsilon$: Քանի որ $Bx = \lambda x$, ապա $\Lambda A = \lambda \Lambda$: Նշանակենք A մատրիցի տարրերը β_{ij} նշաններով: ΛA վեկտորի j -րդ տարրը Հավասար է $\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_{ij} = \lambda \alpha_j$: Վերջին առնչության մեջ անցնենք Համալուծներին Հաշվի առնելով, որ β_{ij} թվերն իրական են: Կստանանք $\sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_i \beta_{ij} = \bar{\lambda} \bar{\alpha}_j$, ինչը Համարժեք է $\bar{\Lambda} A = \bar{\lambda} \bar{\Lambda}$ առնչությանը: Սա նշանակում է, որ $B\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$: Այսինքն, եթե $x \in \tilde{L}$ տարրը B օպերատորի λ սեփական արժեքին Համապատասխան սեփական վեկտորն է, ապա $\bar{x}$ -ը B օպերատորի սեփական վեկտորն է, որ Համապատասխանում է $\bar{\lambda}$ -ին:

Համաձայն Թեորեմ 26-ի և դրա Հետևանքի $\tilde{L}$ ունիտար տարածության մեջ գոյություն ունի օրթոնորմալ բազիս կազմված B օպերատորի սեփական վեկտորներից: Այդ բազիսում B օպերատորի մատրիցը կունենա Հետևյալ անկյունագծային տեսքը՝

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \bar{\lambda}_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda_m & & \\ & & & & \bar{\lambda}_m & \\ & & & & & \lambda_{2m+1} \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (37)$$

որտեղ $i = 1, 2, \dots, m$ Համար λ_i -ն կոմպլեքս թիվ է և $\lambda_i \neq \bar{\lambda}_i$, մնացած

$\lambda_{2m+1}, \dots, \lambda_n$ թվերն իրական են: Ընդ որում $\lambda_i, \bar{\lambda}_i$ զույգերը $i = 1, 2, \dots, m$ Համար դասավորված են այնպես, որ $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} \cap \{\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m\} = \emptyset$: Ուստի,

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, m\} \Rightarrow \lambda_i \neq \bar{\lambda}_j:$$

Օրթոնորմալ բազիսի տարրերը նշանակենք հետևյալ կերպ՝

$$d_1, h_1, \dots, d_m, h_m, c_{2m+1}, \dots, c_n:$$

Ունենք՝ $Bd_i = \lambda_i d_i, Bh_i = \bar{\lambda}_i h_i, i = 1, 2, \dots, m$ և

$$Bc_{2m+1} = \lambda_{2m+1} c_{2m+1}, \dots, Bc_n = \lambda_n c_n:$$

Դիտարկենք՝

$$d_1, \bar{d}_1, \dots, d_m, \bar{d}_m, c_{2m+1}, \dots, c_n$$

Համակարգը: Ապացուցենք, որ այս Համակարգը ևս օրթոնորմալ բազիս է: Ահնհայտ է, որ $\|x\| = \|\bar{x}\|$ կամայական x -ի Համար $\tilde{L}$ -ից: Ուստի՝

$$d_1, \bar{d}_1, \dots, d_m, \bar{d}_m, c_{2m+1}, \dots, c_n$$

Համակարգը նորմավորված է և չի պարունակում զրայական տարրեր: Քանի որ $i \neq j \Rightarrow (d_i, d_j) = 0$ և $(\bar{d}_i, \bar{d}_j) = (\bar{d}_i, \bar{d}_j)$, ապա $i \neq j \Rightarrow (\bar{d}_i, \bar{d}_j) = 0$: Վերը ստացել ենք, որ

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} \cap \{\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m\} = \emptyset,$$

ուստի, Համաձայն Թեորեմ 25-ի 3-րդ կետի, ստանում ենք, որ $i, j \in \{1, 2, \dots, m\} \Rightarrow (d_i, \bar{d}_j) = 0$: Վերջապես, քանի որ $\{\lambda_{2m+1}, \dots, \lambda_n\} \cap \{\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m\} = \emptyset$, ապա կրկին Համաձայն Թեորեմ 25-ի 3-րդ կետի՝ $(\bar{d}_i, c_j) = 0$: Այսպիսով՝

$$d_1, \bar{d}_1, \dots, d_m, \bar{d}_m, c_{2m+1}, \dots, c_n$$

Համակարգն օրթոնորմավորված է և չի պարունակում զրոյական տարր, ուստի այն օրթոնորմալ բազիս է: Ունենք, որ $Bd_i = \lambda_i d_i, B\bar{d}_i = \bar{\lambda}_i \bar{d}_i, i = 1, 2, \dots, m$, ուրեմն այս բազիսում ևս B օպերատորի

մատրիցը կունենա վերը նշված անկյունագծային տեսքը: Ակնհայտ է, որ $\tilde{L}$ -ը Հանդիսանում է բազիսային տարրերով ծաված 1-չափանի ինվարիանտ ենթատարածությունների ուղիղ գումար: Նաև $d_j, \bar{d}_j$ զույգերով ծաված 2-չափանի ենթատարածությունները կլինեն ինվարիանտ և դրանց ուղիղ գումարը $C_{2m+1}, \dots, C_n$ տարրերով ծաված 1-չափանի ինվարիանտ ենթատարածությունների հետ կլինի Հավասար $\tilde{L}$ -ին:

Դիտարկենք այժմ որևէ $\lambda_j \neq \bar{\lambda}_j$ զույգը $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ և Համապատասխանող $d_j, \bar{d}_j$ սեփական վեկտորները: Հարմարության համար նշանակենք $\lambda_j = \lambda$, $\bar{\lambda}_j = \bar{\lambda}$, $d_j = d$ և $\bar{d}_j = \bar{d}$: Դիցուք $\lambda = \sigma + i\tau$, ընդ որում պարզ է, որ $\tau \neq 0$ և միշտ կարող ենք վերցնել $\tau > 0$: Հիշեցնենք, որ $\mathcal{B}d = \lambda d$, $\mathcal{B}\bar{d} = \bar{\lambda}\bar{d}$ և $(d, \bar{d}) = 0$, $\|d\| = \|\bar{d}\| = 1$: Փոխարինենք d և $\bar{d}$ տարրերը Համապատասխանաբար $\sqrt{2}d$ և $\sqrt{2}\bar{d}$ տարրերով: Դրանց համար տեղի ունի $\mathcal{B}(\sqrt{2}d) = \lambda(\sqrt{2}d)$, $\mathcal{B}(\sqrt{2}\bar{d}) = \bar{\lambda}(\sqrt{2}\bar{d})$ և $(\sqrt{2}d, \sqrt{2}\bar{d}) = 0$, $\|\sqrt{2}d\| = \|\sqrt{2}\bar{d}\| = \sqrt{2}$: Ուստի, եթե բազիսում $d_j, \bar{d}_j$ զույգը փոխարինենք $\sqrt{2}d_j, \sqrt{2}\bar{d}_j$ զույգով $\mathcal{B}$ օպերատորի մատրիցի տեսքը կմնա անփոփոխ (բազիսը կմնա օրթոգոնալ, բայց ոչ նորմավորված): Աառուցենք $f = \frac{1}{2}(d + \bar{d})$ և $g = \frac{1}{2i}(d - \bar{d})$ տարրերը: Պարզ է, որ $d = f + ig$, $\bar{d} = f - ig$ և $d, \bar{d}$ Համակարգի թաղանթը և f, g Համակարգի թաղանթը Համընկնում են: Ակնհայտ է, որ f, g տարրերը էվրլիդեսյան L տարածությունից են, ուստի $\mathcal{B}f = Af$ և $\mathcal{B}g = Ag$: Դրանք օրթոգոնալ են քանի որ՝

$$\begin{aligned} (f, g) &= -\frac{1}{4i}(d + \bar{d}, d - \bar{d}) = \\ &= -\frac{1}{4i}((d, d) - (d, \bar{d}) + (\bar{d}, d) - (\bar{d}, \bar{d})) = 0: \end{aligned}$$

Նաև՝

$$(f, f) = \frac{1}{4}(d + \bar{d}, d + \bar{d}) = \frac{1}{4}((d, d) + (\bar{d}, \bar{d})) = 1$$

և նմանապես՝

$$(g, g) = -\frac{1}{4i^2}(d - \bar{d}, d - \bar{d}) = \frac{1}{4}((d, d) + (\bar{d}, \bar{d})) = 1:$$

Վերջապես՝

$$\begin{aligned} \mathcal{A}f &= \frac{1}{2}\mathcal{A}(d + \bar{d}) = \frac{1}{2}(\mathcal{A}d + \mathcal{A}\bar{d}) = \frac{1}{2}(\lambda d + \bar{\lambda}\bar{d}) = \\ &= \frac{1}{2}((\sigma + i\tau)d + (\sigma - i\tau)\bar{d}) = \frac{1}{2}(\sigma d + \sigma\bar{d} + i\tau d - i\tau\bar{d}) = \\ &= \sigma\frac{1}{2}(d + \bar{d}) - \tau\frac{1}{2i}(d - \bar{d}) = \sigma f - \tau g \end{aligned}$$

և

$$\begin{aligned} \mathcal{A}g &= \frac{1}{2i}\mathcal{A}(d - \bar{d}) = \frac{1}{2i}(\mathcal{A}d - \mathcal{A}\bar{d}) = \frac{1}{2i}(\lambda d - \bar{\lambda}\bar{d}) = \\ &= \frac{1}{2i}((\sigma + i\tau)d - (\sigma - i\tau)\bar{d}) = \frac{1}{2i}(\sigma d - \sigma\bar{d} + i\tau d + i\tau\bar{d}) = \\ &= \sigma\frac{1}{2i}(d - \bar{d}) + i\tau\frac{1}{2i}(d + \bar{d}) = \sigma f + \tau g: \end{aligned}$$

Այսպիսով՝

$$\mathcal{B}f = \mathcal{A}f = \sigma f - \tau g$$

$$\mathcal{B}g = \mathcal{A}g = \sigma f + \tau g$$

և

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}f \\ \mathcal{B}g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A}f \\ \mathcal{A}g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & -\tau \\ \tau & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

Ստացանք, որ f, g համակարգը դա իրական օրթոնորմալ բազիս է $d, \bar{d}$ զույգով ծնված 2-չափանի ինվարիանտ էնթալպիայի համար և

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$$

տեսքի վանդակը (37) մատրիցում կփոխարինվի

$$\begin{pmatrix} \sigma & -\tau \\ \tau & \sigma \end{pmatrix} \quad (38)$$

տեսքի վանդակով:

Վերցնենք այժմ կամայական $c_j \in \{c_{2m+1}, \dots, c_n\}$ և λ_j -ն Համապատասխան սեփական արժեքն է (37) մատրիցում: Ինչպես գիտենք, $\bar{c}_j$ տարրը նույնպես $\mathcal{B}$ օպերատորի սեփական վեկտորն է, որ Համապատասխանում է $\bar{\lambda}_j = \lambda_j$ իրական սեփական արժեքին: Ուրեմն, $\bar{c}_j$ -ն պատկանում է $c_{2m+1}, \dots, c_n$ տարրերով ծնված 1-չափանի օրթոգոնալ ենթատարածություններից մեկին:

Դիցուք $\bar{c}_j = \mu c_j$: Պարզ է, որ $\|\bar{c}_j\| = \|c_j\|$ և $|\mu| = 1$, այսինքն $\mu = e^{i\varphi}$: Ստանում ենք՝ $e^{i\varphi/2} c_j = e^{-i\varphi/2} \bar{c}_j$ և $\overline{e^{i\varphi/2} c_j} = e^{-i\varphi/2} \bar{c}_j = e^{i\varphi/2} c_j$, ուստի $e^{i\varphi/2} c_j$ տարրն իրական է, այսինքն պատկանում է L -ին: Նորմավորենք $e^{i\varphi/2} c_j$ -ն և $\tilde{L}$ -ի բազիսում փոխարինենք c_j -ն $e^{i\varphi/2} c_j$ -ով: Պարզ է, որ $\mathcal{B}(e^{i\varphi/2} c_j) = \lambda_j(e^{i\varphi/2} c_j)$ և (37) մատրիցը չի փոխվում:

Դիցուք $\bar{c}_j = \mu c_k$, որտեղ $j \neq k$: Ինչպես գիտենք, $\mathcal{B}c_j = \lambda_j c_j$ և $\mathcal{B}\bar{c}_j = \lambda_j \bar{c}_j$, քանի որ $\lambda_j = \bar{\lambda}_j$: Մյուս կողմից՝ $\mathcal{B}c_k = \lambda_k c_k$: Սակայն $\bar{c}_j = \mu c_k$, ուստի $\lambda_j = \lambda_k$: Քանի որ $(c_j, c_k) = 0$, c_j -ն և $\bar{c}_j$ -ն գծորեն անկախ են: Վերցնենք $f = \frac{1}{2}(\sqrt{2} c_j + \sqrt{2} \bar{c}_j)$ և $g = \frac{1}{2i}(\sqrt{2} c_j - \sqrt{2} \bar{c}_j)$: Ահնհայտ է, որ f, g Համակարգը նույնպես գծորեն անկախ է, քանի որ $\sqrt{2} c_j = f + ig$, $\sqrt{2} \bar{c}_j = f - ig$ և $\sqrt{2} c_j, \sqrt{2} \bar{c}_j$ և f, g Համակարգերի թաղանթները նույնն են: Պարզ է նաև, որ f, g տարրերը էվլիդեսյան L տարածությունից են, ուստի $\mathcal{B}f = Af$ և $\mathcal{B}g = Ag$:

Ունենք, որ՝ $(\sqrt{2} c_j, \sqrt{2} \bar{c}_j) = 0$ և $\|\sqrt{2} c_j\| = \|\sqrt{2} \bar{c}_j\| = \sqrt{2}$:
Ուրեմն՝

$$(f, g) = -\frac{1}{4i}(\sqrt{2}c_j + \sqrt{2}\bar{c}_j, \sqrt{2}c_j - \sqrt{2}\bar{c}_j) = \\ -\frac{1}{4i}((\sqrt{2}c_j, \sqrt{2}c_j) - (\sqrt{2}\bar{c}_j, \sqrt{2}\bar{c}_j)) = 0:$$

Նաև՝

$$(f, f) = \frac{1}{4}(\sqrt{2}c_j + \sqrt{2}\bar{c}_j, \sqrt{2}c_j + \sqrt{2}\bar{c}_j) = \\ \frac{1}{4}((\sqrt{2}c_j, \sqrt{2}c_j) + (\sqrt{2}\bar{c}_j, \sqrt{2}\bar{c}_j)) = 1$$

և նմանապես՝

$$(g, g) = -\frac{1}{4i^2}(\sqrt{2}c_j - \sqrt{2}\bar{c}_j, \sqrt{2}c_j - \sqrt{2}\bar{c}_j) = \\ \frac{1}{4}((\sqrt{2}c_j, \sqrt{2}c_j) + (\sqrt{2}\bar{c}_j, \sqrt{2}\bar{c}_j)) = 1:$$

Ուրեմն f, g Համակարգն օրթոնորմավորված է: Վերջապես՝

$$\mathcal{B}f = \frac{1}{2}\mathcal{B}(\sqrt{2}c_j + \sqrt{2}\bar{c}_j) = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\mathcal{B}c_j + \sqrt{2}\mathcal{B}\bar{c}_j) = \\ \frac{1}{2}(\sqrt{2}\lambda_j c_j + \sqrt{2}\lambda_j \bar{c}_j) = \lambda_j f$$

և նմանապես $\mathcal{B}g = \lambda_j g$: $\tilde{L}$ -ի օրթոնորմալ բազիսում կփոխարինենք c_j, c_k զույգը f, g զույգով ստանալով նորից օրթոնորմալ բազիս, որում (37)

մատրիցի տեսքը մնում է անփոփոխ:

Այսպիսով տեսանք, որ $\tilde{L}$ -ում գոյություն ունի իրական օրթոնորմալ բազիս, որում $\mathcal{B}$ օպերատորի մատրիցն ունի (37) տեսքը: Քանի որ բազիսը իրական է և իրական է մատրիցը, ապա ակնհայտորեն բազիսը կլինի նաև L տարածության բազիս և (37) մատրիցը կներկայացնի A օպերատորը:

Փաստորեն մենք ապացուցեցինք Հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 27.

Էվբրիդեյան (իրական դաշտի նկատմամբ) տարածությունում նորմալ օպերատորի համար գոյություն ունի օրթոնորմալ բազիս, որում օպերատորի մատրիցը բերվում է հետևյալ տեսքի՝

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & -\tau_1 & & & & \\ \tau_1 & \sigma_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \sigma_m & -\tau_m & \\ & & & \tau_m & \sigma_m & \\ & & & & & \lambda_{2m+1} & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

որտեղ $\lambda_1 = \sigma_1 + i\tau_1$, $\lambda_2 = \sigma_1 - i\tau_1, \dots, \lambda_{2m-1} = \sigma_m + i\tau_m$, $\lambda_{2m} = \sigma_m - i\tau_m$, $\lambda_{2m+1}, \dots, \lambda_n$ թվերը A օպերատորի բոլոր սեփական արժեքներն են, ընդ որում՝ $\tau_j > 0, j = 1, 2, \dots, m$:

Հիմնվելով այս թեորեմի վրա կարելի է տալ նորմալ օպերատորների գործողության երկրաչափական իմաստի բովանդակալից մեկնաբանությունը Էվբրիդեյան տարածության դեպքում: Նյութին է տեսնել, որ

$$\begin{pmatrix} \sigma & -\tau \\ \tau & \sigma \end{pmatrix}$$

մատրիցը կարելի է գրել հետևյալ կերպ՝

$$\sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} & -\frac{\tau}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \\ \frac{\tau}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} & \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \end{pmatrix} = |\lambda| \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

որտեղ $\cos \varphi = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}$, $\sin \varphi = \frac{\tau}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} > 0$: Հայտնի է, որ այս տեսակի մատրիցները "պտտում" են Հարթությունը φ անկյունով և $|\lambda|$ անգամ "ձգում" են այն: Սա նշանակում է, որ L տարածությունը տրոհվում է մի շարք փոխուղղահայաց Հարթությունների և ուղիղների: Օպերատորը "ձգում" և "պտտում" է այդ Հարթությունները, իսկ ուղիղները միայն "ձգում" է:

Ունիտար (օրթոգոնալ) օպերատորներ

Սահմանում. L ունիտար (օրթոգոնալ) տարածությունում գործող A գծային օպերատորը կոչվում է ունիտար (օրթոգոնալ), եթե բոլոր $x \in L$ համար տեղի ունի՝

$$(Ax, Ax) = (x, x) \quad (39)$$

Այսինքն, ունիտար օպերատորը պահպանում է տարրերի երկարությունները (նորմերը): Ապացուցենք, որ այն պահպանում է նաև տարրերի միջև "անկյունները": Ավելի ստույգ, ապացուցենք, որ (39)-ը համարժեք է հետևյալ պայմանին՝

$$\forall x, y \in L \quad (Ax, Ay) = (x, y) \quad (40)$$

Պարզ է, որ (39)-ը բխում է (40)-ից: Ապացուցենք, որ (40)-ը (39)-ի հետևանքն է:

Դիցուք $x, y \in L$ կամայական տարրեր են: Ունենք՝

$$(A(x+y), A(x+y)) = (x+y, x+y),$$

ուրեմն՝

$$\begin{aligned} (Ax, Ax) + (Ax, Ay) + (Ay, Ax) + (Ay, Ay) = \\ (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) \end{aligned}$$

և

$$(Ax, Ay) + (Ay, Ax) = (x, y) + (y, x) \quad (41)$$

Ունենք նաև՝

$$(A(x+iy), A(x+iy)) = (x+iy, x+iy)$$

և

$$\begin{aligned} (Ax, Ax) - i(Ax, Ay) + i(Ay, Ax) - i^2(Ay, Ay) = \\ (x, x) - i(x, y) + i(y, x) - i^2(y, y): \end{aligned}$$

Այստեղից ստանում ենք՝

$$(Ax, Ay) - (Ay, Ax) = (x, y) - (y, x) \quad (42)$$

Եթե տարածությունը օրթոգոնալ է (այսինքն թվային դաշտը իրական է), ապա (41)-ը կարտագրենք որպես $2(Ax, Ay) = 2(x, y)$ և (40)-ը ստույգ է:

Եթե տարածությունը ունիտար է (թվային դաշտը կոմպլեքս է), ապա գումարելով իրար (41)-ը և (42)-ը կստանանք (40)-ը:

Այսպիսով տեսնում ենք, որ որպես ունիտար (օրթոգոնալ) օպերատորի սահմանում կարելի է վերցնել նաև (40)-ը:

Դիցուք A -ն ունիտար է: Ուրեմն՝

$$(x, y) = (Ax, Ay) = (x, A^*Ay) \text{ և } (x, (\mathcal{I} - A^*A)y) = 0$$

կամայական $x, y \in L$ համար: Մասնավորապես, երբ $x = (\mathcal{I} - A^*A)y$ ստանում ենք՝

$$((\mathcal{I} - A^*A)y, (\mathcal{I} - A^*A)y) = 0$$

և $(\mathcal{I} - A^*A)y = 0$ բոլոր $y \in L$ համար: Սա նշանակում է, որ $A^*A = \mathcal{I}$ և $A^* = A^{-1}$: Նաև ստանում ենք, որ $A^*A = AA^*$ և A օպերատորը նորմալ է:

Մյուս կողմից, եթե $A^* = A^{-1}$, ապա $A^*A = \mathcal{I}$ և $(x, x) = (x, A^*Ax) = (Ax, Ax)$ և օպերատորը ունիտար է: Ուստի՝

1. A օպերատորն ունիտար է $\Leftrightarrow A^* = A^{-1}$

2. ունիտար օպերատորը նորմալ է:

Դիցուք $\mathcal{E}$ -ն L տարածության օրթոնորմալ բազիսն է և A -ն A օպերատորի ներկայացումն է այդ բազիսում: $A^* = A^{-1}$ պայմանից անմիջապես բխում է, որ $A^* = A^{-1}$ և ուրեմն A մատրիցն ունիտար (օրթոգոնալ) է: Քանի որ արդեն պարզել ենք, որ ունիտար մատրիցներն օրթոնորմալ բազիսից օրթոնորմալ բազիս անցման

մատրիցներն են, ապա դժվար չէ կռահել, որ այդ նույն հատկությամբ են օժտված ունիտար օպերատորները: Իսկապես, դիցուք

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}:$$

Ունենք $(e_i, e_j) = (Ae_i, Ae_j)$, ուստի՝

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \Leftrightarrow (Ae_i, Ae_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}:$$

Դյուրին է նկատել, որ ունիտար օպերատորների բազմությունը (միևնույն L -ի վրա սահմանված) կազմում է խումբ օպերատորների բազմապատկման (հաջորդաբար կիրառման) գործողության նկատմամբ: Այսինքն, միավոր օպերատորը ունիտար է, ունիտար օպերատորների արտադրյալն ունիտար օպերատոր է՝

$$(x, x) = (Ax, Ax) = (B(Ax), B(Ax)) = (ABx, ABx)$$

և A^{-1} -ն ունիտար է՝

$$(x, x) = (Ax, Ax) \Rightarrow (A^{-1}x, A^{-1}x) = (x, x):$$

Դիցուք A -ն ունիտար օպերատոր է և λ -ն նրա սեփական արժեքն է: Գոյություն ունի $x \neq 0$, որ $Ax = \lambda x$: Հետևաբար՝

$$(x, x) = (Ax, Ax) = (\lambda x, \lambda x) = \lambda \bar{\lambda}(x, x)$$

և $|\lambda| = 1$: Սա նշանակում է, որ իրական թվերի դաշտի դեպքում $\lambda = \pm 1$, իսկ կոմպլեքս թվերի դաշտի դեպքում $\lambda = \sigma + i\tau$, $\sigma^2 + \tau^2 = 1$:

Ունիտար (օրթոգոնալ) օպերատորի սեփական

արժեքների մոդուլը հավասար է մեկի:

Քանի որ ունիտար օպերատորը նորմալ է, ապա թեորեմ 26-ը կձևակերպվի հետևյալ կերպ.

կամայական ունիտար A մատրիցի համար գոյություն ունի ունիտար Q մատրից, այնպիսի, որ $Q^{-1}AQ$ -ն ունի անկյունագծային տեսք և անկյունագծային տարրերի մոդուլը հավասար է 1-ի:

Իրական թվերի դաշտի դեպքում, այսինքն էրբ օպերատորն օրթոգոնալ է, կվարվենք այնպես, ինչպես նորմալ օպերատորների դեպքում: Ֆիքսելով L էվրիդեսյան տարածության մեջ $e_1, \dots, e_n$ օրթոնորմալ բազիսը կընդլայնենք L էվրիդեսյան տարածությունը մինչև $\tilde{L}$ ունիտար տարածությունը: Ինչպես գիտենք՝

$$L = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in R, i = 1, \dots, n\}$$

և

$$\tilde{L} = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, n\}:$$

Հայտնի եղանակով ընդլայնենք A օրթոգոնալ օպերատորը մինչև $\tilde{L}$ -ի վրա սահմանված օպերատոր, որը նշանակենք B -ով: Եթե $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \in \tilde{L}$, ապա $Bx = \sum_{j=1}^n \alpha_j A e_j$: Պարզ է, որ L տարածության վրա B -ն համընկնում է A -ի հետ:

Ցույց տանք, որ B օպերատորն ունիտար է: Դիցուք $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \in \tilde{L}$:

Ունենք՝

$$\begin{aligned}
(Bx, Bx) &= \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j A e_j, \sum_{k=1}^n \alpha_k A e_k \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \bar{\alpha}_k (A e_j, A e_k) = \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \bar{\alpha}_k (e_j, e_k) = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j, \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right) = (x, x)
\end{aligned}$$

Այժմ, Համաձայն Թեորեմ 27-ի ստանում ենք.

Կամայական օրթոգոնալ A մատրիցի Համար գոյություն ունի օրթոգոնալ Q մատրից, այնպիսի, որ $Q^{-1}AQ$ մատրիցը կազմված է անկյունագծային բլոկերից, որոնք կամ 1-չափանի են և Հավասար են ± 1 , կամ էլ 2-չափանի են և ունեն (43) տեսքը՝

$$\begin{pmatrix} \sigma & -\tau \\ \tau & \sigma \end{pmatrix} \quad (43)$$

որտեղ $\sigma^2 + \tau^2 = 1$:

Ահնհայտ է, որ (43) տեսքի մատրիցը կարելի է վերարտադրել որպես՝

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

որտեղ $\sin \varphi \neq 0$:

Հեռմիտյան (Սիմետրիկ) օպերատորներ

Սահմանում. L ունիտար (օրթոգոնալ) տարածությունում գործող A գծային օպերատորը կոչվում է **Հեռմիտյան (սիմետրիկ)**, եթե բոլոր $x, y \in L$ համար տեղի ունի՝

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad (44)$$

Ահնհայտ է, որ $A^* = A$ և A -ն նորմալ օպերատոր է:

Դիցուք՝

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \text{-ն}$$

օրթոնորմալ բազիս է և A -ն A օպերատորի ներկայացումն է այդ բազիսում, այսինքն $A\varepsilon = A\varepsilon$: Քանի որ՝ $A^* = A$, ապա $A^* = A$ և A մատրիցը ինքնահամալուծ է: Պարզ է, որ $A^* = A$ պայմանից հետևում է $A^* = A$ պայմանը, ուստի՝

օրթոնորմալ բազիսներում **Հեռմիտյան (սիմետրիկ)** օպերատորներին **Համապատասխանում են** **ինքնահամալուծ (սիմետրիկ) մատրիցները**:

Դիտարին է ստուգել, որ՝

1. Եթե A -ն և B -ն **Հեռմիտյան (սիմետրիկ)** են, ապա **Հեռմիտյան (սիմետրիկ)** են նաև $A + B$ -ն և λA -ն
2. Եթե A -ն և B -ն **Հեռմիտյան (սիմետրիկ)** են, ապա

AB -ն Հեռմիտյան (սիմետրիկ) է $\Leftrightarrow AB = BA$

Դիցուք A -ն Հեռմիտյան (սիմետրիկ) օպերատոր է և λ -ն նրա սեփական արժեքն է, իսկ x -ը Համապատասխան սեփական վեկտորն է:
Տեղի ունի՝

$$\lambda(x, x) = (\lambda x, x) = (Ax, x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}(x, x):$$

Հետևաբար, $\lambda = \bar{\lambda}$, այսինքն՝

Հեռմիտյան (սիմետրիկ) օպերատորի սեփական արժեքներն իրական թվեր են:

Եթե գծային տարածությունն էվքլիդեսյան է և A օպերատորը սիմետրիկ, ապա ընդլայնված ունիտար տարածությունում ընդլայնված B օպերատորը Հեռմիտյան է: Իսկապես,

$$\begin{aligned} (Bx, y) &= \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j A e_j, \sum_{k=1}^n \beta_k e_k \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \bar{\beta}_k (A e_j, e_k) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \bar{\beta}_k (e_j, A e_k) = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j, \sum_{k=1}^n \beta_k A e_k \right) = (x, By) \end{aligned}$$

Վերջին նկատառումից, այն փաստից, որ Հեռմիտյան (սիմետրիկ) օպերատորը նորմալ է և Թեորեմներ 23 և 24-ից ստանում ենք, որ

կամայական Հեռմիտյան (սիմետրիկ) օպերատորի Համար գոյություն ունի օրթոնորմալ բազիս կազմված սեփական վեկտորներից և կամայական ինքնահամալուծ (սիմետրիկ) A մատրիցի Համար գոյություն ունի այնպիսի ունիտար (օրթոգոնալ) Q մատրից, որ $Q^{-1}AQ$ մատրիցն

անկյունագծային է և իրական:

Ինչպես արդեն պարզել ենք, սկալյար արտադրյալը ֆիքսված բազիսի դեպքում տրվում է ինքնաՀամալուծ (կամ սիմետրիկ իրական դաշտի դեպքում) դրականորեն որոշված մատրիցով: Նշել էինք, որ այդպիսի մատրից կարելի է կառուցել վերցնելով BB^* արտադրյալը, որտեղ B -ն չվերասերված մատրից է: Վերը շարադրվածից ինքնաՀամալուծ (սիմետրիկ) օպերատորների վերաբերյալ հետևում է, որ, եթե A -ն ինքնաՀամալուծ (սիմետրիկ) դրականորեն որոշված մատրից է, ապա միշտ կգտնվի չվերասերված B մատրից այնպիսին, որ $A = BB^*$: Իրոք, քանի որ A -ն ինքնաՀամալուծ (սիմետրիկ) է, ապա կգտնվի ունիտար (օրթոգոնալ) Q մատրից, որ $Q^{-1}AQ$ -ն անկյունագծային է, այսինքն՝

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

որտեղ λ_i իրական են, $i = 1, \dots, n$: Պարզ է, որ $Q^{-1}AQ = Q^*AQ$ և, եթե $\Lambda \neq 0$, ապա՝

$$\Lambda Q^{-1}AQ\Lambda^* = \Lambda Q^*AQ\Lambda^* = \Lambda Q^*A(\Lambda Q^*)^*:$$

Քանի որ Q -ն չվերասերված է, եթե $\Lambda \neq 0$, ապա $\Lambda Q^* \neq 0$ և A -ի դրականորեն որոշվածությունից ստանում ենք, որ $\Lambda Q^*A(\Lambda Q^*)^* > 0$: Ուստի, $Q^{-1}AQ$ -ն դրականորեն որոշված է: Նյութին է համոզվել, որ $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$: Իսկապես, եթե, օրինակ, $\lambda_1 \leq 0$, ապա $\Lambda = (1, 0, \dots, 0) \neq 0$ և $\Lambda Q^{-1}AQ\Lambda^* = \lambda_1 \leq 0$, ինչը հակասում է $Q^{-1}AQ$ -ի դրականորեն որոշվածությանը: Այժմ նշանակենք

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Ահազայտ է, որ $C^* = C$, $\det C > 0$ և $Q^{-1}AQ = CC^*$: Այստեղից անմիջապես հետևում է, որ՝

$$A = QCC^*Q^{-1} = QCC^*Q^* = (QC)(QC)^* = BB^*,$$

որտեղ $B = QC$ և $\det B \neq 0$:

Քառակուսային ձևեր

Սահմանում. Հեռմիտյան քառակուսային ձև է կոչվում $x_1, \dots, x_n$ փոփոխականների կոմպլեքս գործակիցներով հետևյալ տեսքի երկրորդ կարգի բազմանդամը՝

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_i \bar{x}_j,$$

որի գործակիցները բավարարում են $\alpha_{ij} = \bar{\alpha}_{ji}$ պայմանին ($i, j = 1, \dots, n$):

Իրական քառակուսային ձև է կոչվում $x_1, \dots, x_n$ փոփոխականների իրական գործակիցներով հետևյալ տեսքի երկրորդ կարգի բազմանդամը՝

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j:$$

Իրական քառակուսային ձևերի դեպքում միշտ կարելի է համարել, որ $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, $i, j = 1, \dots, n$: Իսկապես, վերարտադրենք $f(x_1, \dots, x_n)$ -ի երկու հետևյալ անդամների գումարը՝

$$\alpha_{ij} x_i x_j + \alpha_{ji} x_j x_i = \frac{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}{2} x_i x_j + \frac{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}{2} x_j x_i$$

և դրանով հավասարեցնենք $x_i x_j$ -ի և $x_j x_i$ -ի գործակիցները:

Քառակուսային ձևին (անկախ այն բանից թե դա հեռմիտյան է, թե իրական) համապատասխանեցնենք գործակիցներից կազմված $A = (\alpha_{ij})_{n \times n}$ մատրիցը: Պարզ է, որ հեռմիտյան քառակուսային ձևի մատրիցը կլինի ինքնահամալուծ, իսկ իրականինը՝ սիմետրիկ:

Նշանակենք $\mathbf{x}$ -ով փոփոխականների վեկտորը՝ $(x_1, \dots, x_n)$: Պարզ է,

որ քառակուսային ձևը կարելի է գրել մատրիցների արտադրյալի տեսքով՝

$$f(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}A\mathbf{x}^*$$

Հեռմիտյան դեպքում՝

$$f(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}A\mathbf{x}^T$$

իրական դեպքում:

Դիցուք ունենք փոփոխականների մեկ այլ Համակարգ՝ $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, որը գծայնորեն կապված է հնի հետ, այսինքն գոյություն ունի մի չվերասերված մատրից $Q = (q_{ij})_{n \times n}$ (որի տարրերը K դաշտից են, $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) այնպիսին, որ $\mathbf{x} = \mathbf{y}Q$: Քառակուսային ձևը նոր փոփոխականների Համակարգում կստանա հետևյալ տեսքը՝

$$\mathbf{x}A\mathbf{x}^* = (\mathbf{y}Q)A(\mathbf{y}Q)^* = (\mathbf{y}Q)A(Q^*\mathbf{y}^*) = \mathbf{y}(QAQ^*)\mathbf{y}^*, \text{ եթե } K = \mathbb{C}$$

$$\mathbf{x}A\mathbf{x}^T = (\mathbf{y}Q)A(\mathbf{y}Q)^T = (\mathbf{y}Q)A(Q^T\mathbf{y}^T) = \mathbf{y}(QAQ^T)\mathbf{y}^T, \text{ եթե } K = \mathbb{R}$$

Այսինքն, նոր փոփոխականներին անցման դեպքում քառակուսային ձևի A մատրիցը ձևափոխվում է QAQ^* կամ QAQ^T բանաձևով, որտեղ Q -ն նոր փոփոխականների անցման մատրիցն է:

Հայտնի է, որ Հարթության մեջ երկրորդ կարգի կորերը (էլիպսը, հիպերբոլը, պարաբոլը) նաև եռաչափ տարածությունում երկրորդ կարգի մակերևույթները տրվում են երկրորդ կարգի բազմանդամների միջոցով: Ճիշտ է նաև հակառակը՝ կամայական երկրորդ կարգի երկու կամ երեք փոփոխականի բազմանդամ կարելի փոփոխականների գծային ձևափոխությամբ բերել Հայտնի կորերի կամ մակերևույթների Հավասարումներին: Երկրաչափորեն դա նշանակում է, որ կորդինատային Համակարգի Հարմար ընտրությամբ բազմանդամը կարելի է բերել ստանդարտ (կանոնական) պարզ տեսքի (օրինակ,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2$ էլիպսի դեպքում): Պարզվում է, որ նման արդյունք կարելի է ստանալ նաև n փոփոխականի քառակուսային ձևերի համար: Համաձայն Թեորեմ 23-ի հեռմիտյան կամ սիմետրիկ օպերատորների համար միշտ գոյություն ունի ունիտար կամ օրթոգոնալ Q մատրից, այնպիսին, որ A մատրիցը բերվում է անկյունագծային տեսքի, այսինքն՝

$$QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

որտեղ λ_i թվերը A մատրիցի սեփական արժեքներն են (հիշենք, որ դրանք միշտ իրական են): Քանի որ Q մատրիցը ունիտար (օրթոգոնալ) է, ապա $Q^* = Q^{-1}$ ($Q^T = Q^{-1}$): Դա նշանակում է, որ միշտ կարելի է անցնել նոր փոփոխականների այնպես, որ քառակուսային ձևը ստանա հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{aligned} \lambda_1 y_1 \bar{y}_1 + \lambda_2 y_2 \bar{y}_2 + \dots + \lambda_k y_k \bar{y}_k, \text{ եթե } K = \mathbb{C} \\ \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_k y_k^2, \text{ եթե } K = \mathbb{R} \end{aligned} \quad (45)$$

որտեղ $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ -ն A մատրիցի բոլոր ոչ զրոյական սեփական արժեքներն են: Նկատենք, որ $k = \text{rank} A$ և ոչ զրոյական գումարելիների քանակը կանոնական տեսքում կլինի հավասար k :

(45) տեսքի քառակուսային ձևերը կոչվում են կանոնական ձևեր (տեսքեր):

Այսպիսով ապացուցեցինք հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 28.

Կամայական քառակուսային δ -և փոփոխականների ունիտար կամ օրթոգոնալ δ -և փոփոխություններ բերվում է (45) կանոնական տեսքի, որտեղ k -ն քառակուսային δ -ի մատրիցի ռանգն է, իսկ $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ -ն A մատրիցի բոլոր ոչ զրոյական սեփական արժեքներն են:

Կոմպլեքս դաշտի դեպքում, կատարելով $z_i = \sqrt{\lambda_i} y_i$, $i = 1, \dots, k$ փոփոխականների δ -և փոփոխություններ, (որն ընդհանուր դեպքում ունիտար չէ) կանոնական տեսքի քառակուսային δ -ը կբերենք

$$z_1 \bar{z}_1 + \dots + z_k \bar{z}_k$$

տեսքին, որը կոչվում է նորմալ տեսք:

Դիցուք իրական թվերի դաշտի դեպքում կանոնական տեսքում առաջին m սեփական արժեքները դրական են, իսկ մնացածը՝ բացասական: Կատարենք փոփոխականների հետևյալ δ -և փոփոխություններ՝ (որն ընդհանուր դեպքում օրթոգոնալ չէ)

$$z_i = \sqrt{\lambda_i} y_i, \quad i = 1, \dots, m \quad \text{և} \quad z_i = \sqrt{-\lambda_i} y_i, \quad i = m+1, \dots, k$$

և քառակուսային δ -ը կբերվի հետևյալ տեսքին՝

$$z_1^2 + \dots + z_m^2 - z_{m+1}^2 - \dots - z_k^2$$

Թեորեմ 29. (Իներցիայի օրենքը)

Իրական քառակուսային δ -ը փոփոխականների ինչպիսի δ -և փոփոխությամբ էլ որ բերվի (45) կանոնական տեսքին, դրական և բացասական

անդամների քանակները չեն փոխվի և միշտ կլինեն
Հավասար Համապատասխանաբար m -ին և k -ին:

Ապացույց. Դիցուք՝

$$\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_m y_m^2 - \lambda_{m+1} y_{m+1}^2 - \dots - \lambda_k y_k^2$$

տեսքի քառակուսային ձևը ($\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, k$) փոփոխականների

$y = xQ$ ձևափոխությամբ բերվել է նաև՝

$$\mu_1 z_1^2 + \dots + \mu_s z_s^2 - \mu_{s+1} z_{s+1}^2 - \dots - \mu_k z_k^2$$

տեսքին ($\mu_i > 0$, $i = 1, \dots, k$) և $m < s$: Ահնհայտ է, որ եթե՝

$$\begin{aligned} \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_m y_m^2 - \lambda_{m+1} y_{m+1}^2 - \dots - \lambda_k y_k^2 = \\ \mu_1 z_1^2 + \dots + \mu_s z_s^2 - \mu_{s+1} z_{s+1}^2 - \dots - \mu_k z_k^2 \end{aligned}$$

Հավասարության մեջ y_i փոփոխականները փոխարինենք $z_1, \dots, z_n$ -րի
արտահայտություններով, ապա կստանանք նույնություն: Արտագրենք
այդ նույնությունը՝

$$\begin{aligned} \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_m y_m^2 + \mu_{s+1} z_{s+1}^2 + \dots + \mu_k z_k^2 = \\ \mu_1 z_1^2 + \dots + \mu_s z_s^2 + \lambda_{m+1} y_{m+1}^2 + \dots + \lambda_k y_k^2 \end{aligned} \quad (46)$$

Կազմենք $z_1, \dots, z_n$ փոփոխականներով գծային Հավասարումների
Հետևյալ Համակարգը (քանի որ y_i -րն արտահայտված են $z_1, \dots, z_n$ -րի
միջոցով)

$$y_1 = 0, \dots, y_m = 0, z_{s+1} = 0, \dots, z_n = 0 \quad (47)$$

Այս Համակարգը Համասեռ է և Հավասարումների քանակը խիստ
փոքր է անհայտների քանակից՝ $m + n - s < n$ (քանի որ $m < s$): Ուստի,
գոյություն ունի (47) Համակարգի ոչ զրոյական լուծում՝

$$z_1 = \beta_1, \dots, z_s = \beta_s, z_{s+1} = 0, \dots, z_n = 0 \quad (48)$$

Տեղադրելով այդ լուծումը (46)-ի մեջ ստանում ենք՝

$$\mu_1\beta_1^2 + \dots + \mu_s\beta_s^2 + \lambda_{m+1}y_{m+1}^2 + \dots + \lambda_k y_k^2 = 0:$$

Բայց $\lambda_i > 0, \mu_i > 0 \quad (i = 1, \dots, k)$, ուրեմն՝

$$\beta_1 = \dots = \beta_s = y_{m+1} = \dots = y_k = 0:$$

Սակայն $\beta_1 = \dots = \beta_s = 0$ պայմանը հակասում է (48)-ի ոչ զրոյական լինելուն: Թեորեմն ապացուցված է:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Мальцев А.И., **Основы линейной алгебры**, "Наука", Москва, 1970
2. Курош А.Г., **Курс высшей алгебры**, "Наука", Москва, 1971
3. Гельфанд И.М., **Лекции по линейной алгебре**, "Наука", Москва, 1971
4. С.Ленг. **Алгебра**, "Мир", Москва 1968