

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ա. Ա. ԶՈՒԲԱՐՅԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ
ՏՐԱՄԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

(ուսումնական ձեռնարկ)

ԵՐԵՎԱՆ
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿԶՈՒԹՅՈՒՆ
2025

ՀՏԴ 510.6(07)
ԳՄԴ 22.12g7
Չ 810

*Հրատարակության է երաշխավորել
ԲԵՀ գիտական խորհուրդը:*

Չուբարյան Ա. Ա.

Չ 810 Մաթեմատիկական տրամաբանություն (ուսումնական
ձեռնարկ) / Ա. Ա. Չուբարյան: -Եր., ԵՊՀ հրատ., 2025,
114 էջ:

Առաջարկվող ձեռնարկում քննարկված են մաթեմատիկական տրամաբանության հիմնադրույթները, որոնք ուղեկցվում են օգտակար պարզաբանումներով և վարժություններով: Ձեռնարկը նախատեսված է մաթեմատիկական ուղղվածություններով տարբեր ֆակուլտետների բակալավրիատի ուսանողների համար:

ՀՏԴ 510.6(07)
ԳՄԴ 22.12g7

ISBN 978-5-8084-2713-6
<https://doi.org/10.46991/YSUPH/9785808427136>

© ԵՊՀ հրատ., 2025
© Չուբարյան Ա. Ա., 2025

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՀԵՂԻՆԱԿԻ ԽՈՍՔ.....	5
ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ.....	7
 ԳԼՈՒԽ 1. ԱՍՈՒՅԹԱՅԻՆ ՀԱՇՎԻ Տ ՀԱՄԱԿԱՐԳԸ.....	11
Հիմնական գաղափարներ	12
Արտածման լրացուցիչ կանոններ	15
«Հրաշալի» բանաձևեր	18
Տրամաբանական գործողությունների ներմուծման և արտաքսման օժանդակ կանոններ.....	27
Հենասույթների սխեմաների անկախությունը	28
Լրացումներ.....	32
 ԳԼՈՒԽ 2. ՊՐԵԴԻԿԱՏԱՅԻՆ ՀԱՇԻՎ P.....	37
Նախնական գաղափարներ	38
Մեկնաբանություն	42
Դեդուկցիայի թեորեմը պրեդիկատային հաշվի համար	47
Ծավալիչների ներմուծման ու արտաքսման կանոններ	49
Արտածման օժանդակ Choice կանոն (C-կանոն)	50
Նախաձավալչային տեսք.....	52
 ԳԼՈՒԽ 3. ՖՈՐՄԱԼ ԹՎԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ.....	57
Հիմնական գաղափարներ	57
Արտածման լրացուցիչ կանոններ	60
Մետաթեորեմ	68
Նոր հարաբերությունների ներմուծում.....	70
Քանոդդի ու մնացորդի միակության բանաձևը	71
Ֆունկցիաների ու պրեդիկատների ներկայացումները S-ում	73

Ֆորմալ համակարգերի օբյեկտների գյուղեյան համարակալում.....	81
Գյուղելի պրեդիկատը.....	84
Գյուղելի թեորեմները ոչ լրիվության մասին.....	88
ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ.....	91
ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ	92
Հարցաշար.....	109
Резюме	111
Summary	112

ՀԵՂԻՆԱԿԻ ԽՈՍՔ

Ուսումնական ձեռնարկը կազմված է ավելի քան հիսուն տարվա ընթացքում «Կիրառական մաթեմատիկա» մասնագիտությամբ սովորող բակալավրիատի ուսանողների համար մեկ կիսամյակ կարդացվող «Մաթեմատիկական տրամաբանություն» առարկայի դասախոսությունների հիման վրա: Այն պարունակում է գրականության ցանկում նշված հայտնի դասագրքերի դասական մաթեմատիկական տրամաբանությանը վերաբերող հիմնադրույթների սեղմ շարադրանքը, ինչպես նաև «Պարզաբանումներ» բաժինները, որոնք առաջացել են որպես պատասխաններ ուսանողների կողմից տրված ու առաջին հայացքից զարմանալի թվացող հարցերի հիման վրա: Ուսումնական ձեռնարկը ներառում է նաև խնդիրների ու վարժությունների թեմատիկ խմբաքանակներ, որոնք կարող են կիրառվել գործնական պարապմունքների, ինչպես նաև միջանկյալ ու ամփոփիչ քննությունների ընթացքում ուսանողներին տրվող առաջադրանքների համար:

Ձեռնարկը գործածողները պետք է ծանոթ լինեն բուլյան ֆունկցիաների ու բազմությունների տեսությունների, ինչպես նաև ալգորիթմների տեսության հիմնադրույթներին:

Հարկ եմ համարում նշել, որ որոշ օտարալեզու «աքսիոմ», «քվանտոր» հանրահայտ տերմինների փոխարեն ձեռնարկում կիրառվում են վաղամեծիկ մաթեմատիկոս Աշոտ Մաշուրյանի կողմից ներմուծված հայերեն տարբերակները՝ «հենասույթ», «ծավալիչ»:

Դասախոսությունների գրառումները, լրացումները կատարվել են տարբեր տարիներին Երևանի պետական համալսարանում սովորող ուսանողների կողմից, ինչի համար հայտնում եմ խորին շնորհակալություն:

Հատուկ շնորհակալություն եմ հայտնում նաև ֆիզիկա-
մաթեմատիկական գիտությունների դոկտոր, պրոֆեսոր Յու-
րի Մովսիսյանին, դոցենտներ Լիլիթ Դաշտոյանին, Աննա Հո-
վակիմյանին, ինչպես նաև Հռիփսիմե Մովսեսյանին օգտակար
դիտողությունների ու խորհուրդների համար:

Անահիտ Չուբարյան

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Տրամաբանությունը, ամենատարածված սահմանման համաձայն, ճիշտ դատողություններ կատարելու մեթոդ է, հմտություն: Եթե այդ դատողությունների շրջանակում կիրառվում է մաթեմատիկական որոշակի համակարգ, ապա կարելի է խոսել մաթեմատիկական տրամաբանության մասին: Եթե մենք նեղացնենք մաթեմատիկական տրամաբանության ոլորտը, ապա կարելի է ասել, որ այդ առարկայի հիմնական նպատակն է տալ «մաթեմատիկական ապացույց» գաղափարի ճշգրիտ սահմանումը: Յուրաքանչյուր անթերի, անբասիր սահմանումն անգամ չի կարող տալ ճշգրիտ պատկերացում ուսումնասիրվող առարկայի վերաբերյալ: Մաթեմատիկական տրամաբանության մասին լիարժեք պատկերացում ստանալու համար պետք է սկսել դրա ուսումնասիրությունը:

Հայտնի է, որ տրամաբանությունը ընկած է բոլոր այլ գիտությունների հիմքում, սակայն դեռ Արիստոտելի¹ կողմից ձևակերպված տրամաբանական հիմնական կանոնների ինքնաակնհայտությունը չէր տրամադրում դրանց առավել խորքային ուսումնասիրմանը ընդհուպ մինչև XIX դարավերջը, երբ գիտության տարբեր բնագավառներում սկսեցին հայտնաբերվել, այսպես կոչված, պարադոքսներ (հակասականություններ, տարիմաստություններ), այնպիսի պնդումներ որոնց և՛ «ճիշտ», և՛ «սխալ» լինելը հանգեցնում են հակասության: Դրանցից առավել հետաքրքիր իրողություններին կարելի է ծանոթանալ գրականության ցանկի դասագրքերի նախաբաններում: Սկսվեցին մշակվել այդ պարադոքսների չեզոքացման, լուծման ուղիներ, ինչը հանգեցրեց տրամաբանական կանոն-

¹ **Արիստոտել** – հունական դասական փիլիսոփայության խոշորագույն ներկայացուցիչներից մեկը, Ալեքսանդր Մակեդոնացու ուսուցիչը:

ների յուրահատկությունների առավել խորը ուսումնասիրմանը, ինչն էլ նպաստեց տրամաբանության՝ խիստ մաթեմատիկական առարկայի վերափոխմանը, ըստ որի՝ ձևավորվեց «Մաթեմատիկական տրամաբանություն» առարկան, որն իր հերթին սկսվեց կիրառվել մաթեմատիկական տարբեր առարկաների դրույթների առավել խստացման, դրանց նոր հատկությունների հայտնաբերման նպատակով: Այսպիսով՝ «մաթեմատիկական տրամաբանություն» բառակապակցությունում գործածված ածականն ունի երկու իմաստ. նախ տրամաբանությունը ձևակերպվել է որպես գուտ *մաթեմատիկական* առարկա, ապա դրանում ձևակերպված տրամաբանական խիստ կանոնները կիրառվեցին *մաթեմատիկական* տարբեր առարկաների հատկությունների առավել ճշգրիտ շարադրանքում:

«Մաթեմատիկական տրամաբանություն» առարկայի իմացությունը առավել անհրաժեշտ դարձնելու համար դիտարկենք երկու խնդիր՝ մեկը՝ կենցաղային, մյուսը՝ մաթեմատիկական:

Իսպանացի հանրահայտ վիպասան **Միգել դե Սերվանտեսն** իր հոչակավոր «Հնարամիտ ասպետ Դոն Կիխոտ Լամանչեցին» արկածային վեպում նկարագրում է մի դրվագ, երբ Դոն Կիխոտը իր հավատարիմ համհարզ Սանչո Պանսայի հետ հայտնվում է մարդակեր ու իրենց խոսքի տեր ավագանների մոտ, որոնք մինչ գոհերին սպանելը որոշում են մի փոքր զվարճանալ: Դիմելով պատանդներին՝ ասում են, որ իրենք արդեն որոշել են՝ իրենց մոտ ընդունված մահապատժի երկու եղանակներից որ մեկը պետք է կիրառեն, իսկ պատանդները պետք է կռահեն կիրառվող եղանակը.

- եթե ճիշտ կռահեն, ապա կկախեն,
- եթե սխալ կռահեն, ապա կայրեն խարույկի վրա:

Այս պատասխաններից մեկը փրկում է պատանդներին: Ո՞րն էր պատասխանը, և ինչո՞ւ այն փրկեց:

Տրամաբանության որոշ օրենքների ոչ խորքային, մակերեսային իմացությունը կարող է հանգեցնել ոչ ճիշտ եզրահանգումների:

Օրինակ՝ դիտարկենք հետևյալ տեսքի արտահայտությունը՝

$$\forall x A(x) \supset A(t),$$

որում x -ի ու t -ի արժեքները բնական թվեր են, իսկ $A(x)$ -ը որոշակի պնդում է բնական թվերի վերաբերյալ: Թվում է, թե այս արտահայտության արժեքը միշտ իրոք ճիշտ է, եթե ցանկացած x բնական թվի համար $A(x)$ պնդումը ճիշտ է, ապա տեղադրելով x -ի փոխարեն որևէ t թիվ՝ այդ պնդումը պետք է մնա ճիշտ, իսկ եթե ոչ բոլոր բնական թվերի համար է $A(x)$ -ը ճիշտ, ապա իմպլիկացիայի սահմանմանը համաձայն՝ տրված արտահայտությունը կրկին ճիշտ է: Այսպիսով՝ ստացվում է՝ նշված արտահայտության արժեքը միշտ ճիշտ է: Սակայն, եթե որպես $A(x)$ ընտրենք $\exists y(x < y)$ արտահայտությունը, որում y նույնպես բնական թիվ է, և $<$ նիշը հայտնի «փոքր» լինելն է, իսկ որպես t ընտրենք $y + 1$ -ը, ապա կստանանք $\forall x \exists y(x < y) \supset \exists y(y + 1 < y)$ արտահայտությունը, որը սխալ է: Ինչո՞ւ է այդպիսի տեղադրությունը անթույլատրելի:

Սույն ձեռնարկում կպարզաբանվեն դիտարկված խնդիրների լուծման համար անհրաժեշտ տրամաբանական կանոնների նրբությունները:

Վերջին երկու-երեք տասնամյակներում առավել կարևորվել է մաթեմատիկական տրամաբանության ուսումնասիրությունը արհեստական բանականության ստեղծման խնդիրներին առնչվող հետազոտություններում, քանի որ արհեստա-

կան բանականությանը նախնառաջ պետք է սովորեցնել մտածել, տրամաբանել, այն էլ ճիշտ տրամաբանել:

Առաջարկված ձեռնարկում շարադրված տեսության բաղադրիչ մասերն են՝ ասույթային հաշիվը, պրեդիկատային հաշիվը, ֆորմալ թվաբանությունը, որն ավարտվում է Գյոդելի² կողմից 1931 թ. ապացուցված և առ այսօր մաթեմատիկական բոլոր արդյունքներում լավագույնը համարվող ֆորմալ թվաբանության ոչ լրիվության մասին հանրահոշակ թեորեմով:

Մեկ կիսամյակի սղության պատճառով որոշ թեորեմների ապացույցները չեն տրվում, սակայն բերվում են հղումները, որոնցում այդ ապացույցները կատարված են:

Ձեռնարկն ավարտվում է որոշակի թեմաներին վերաբերող վարժությունների խմբաքանակներով, ինչպես նաև առարկայի օրինակելի հարցաշարով:

² **Կուրտ Գյոդել** (Kurt Gödel; 1906-1978) – ավստրիացի մաթեմատիկոս, տրամաբան, փիլիսոփա, որը հայտնի է իր կողմից ձևակերպված և ապացուցված տեսությունների ոչ լրիվության մասին հանրահայտ թեորեմներով, որոնք լիովին փոխեցին պատկերացումները մաթեմատիկայի հիմունքների վերաբերյալ:

ԳԼՈՒԽ 1. ԱՍՈՒՅԹԱՅԻՆ ՀԱՇՎԻ Տ ՀԱՄԱԿԱՐԳԸ

Տրամաբանության վերածումը խիստ մաթեմատիկական առարկայի կսկսենք իր ամենապարզ ճյուղից՝ ասույթներին վերաբերող տրամաբանությունից: **Ասույթը** այնպիսի պարզ պնդում է, որի բովանդակության վերաբերյալ կարելի է միաբժեք որոշել՝ այն ճիշտ է, թե ոչ: Օրինակ՝

- Երևանը Հայաստանի մայրաքաղաքն է:
- Այսօր փետրվարի 30-ն է:

Իսկ, օրինակ, $x < 0$ արտահայտությունը ասույթ չէ, քանի որ նրա ճիշտ կամ սխալ լինելը կախված է x -ի արժեքից:

Պարզ ասույթներից առավել բարդերը կարելի է ստանալ՝ կիրառելով տրամաբանական հայտնի ֆունկցիաները՝ կոնյունկցիա (և), դիզյունկցիա (կամ), իմպլիկացիա (եթե, ապա), ժխտում և այլն: Կիրառված տրամաբանական գործողությունների ճշտության աղյուսակների հիման վրա կարելի է որոշել տրված բարդ արտահայտության արժեքը. արդյո՞ք այն **նույնաբանություն է** (միշտ ճիշտ է՝ անկախ իր պարզ բաղադրիչների արժեքներից), **հակասություն է** (միշտ սխալ է անկախ իր պարզ բաղադրիչների արժեքներից), կամ ո՛չ մեկն է, ո՛չ էլ մյուսը: Այդ նույն խնդիրը կարելի է լուծել նաև այլ, այսպես կոչված, հենասույթային (աքսիոմատիկ) եղանակով՝ կառուցելով համապատասխան ֆորմալ համակարգ, տեսություն:

T **ֆորմալ (հենասույթային) տեսությունը** համարվում է որոշված, եթե.

1. տրված է իր **լեզուն՝ այբուբենը**՝ որոշակի սիմվոլների հաշվելի բազմությունը, և այդ այբուբենի որոշակի բառերի բազմությունը, որոնք կոչվում են **բանաձևեր**,

2. առանձնացված է T տեսության բանաձևերի որոշակի բազմություն, որոնք կոչվում են տեսության **հենասույթներ**,

3. տրված են T տեսության բանաձևերի միջև վերջավոր թվով հարաբերություններ, որոնք կոչվում են այդ տեսության **արտածման կանոններ**:

Հիմնական գաղափարներ

Դիտարկենք ասույթային հաշվի Σ համակարգի բաղադրիչները:

I. Լեզու

1. Այբուբեն

- ա. p_i ամբողջ դրական ինդեքսներով տրամաբանական փոփոխականներ,
- բ. $\supset$ (իմպլիկացիա) և $\neg$ (ժխտում),
- գ. $()$ զույգ փակագծեր:

2. Բանաձևեր (բառեր)

- ա. Ցանկացած p_i տրամաբանական փոփոխական բանաձև է:
- բ. Եթե A -ն ու B -ն բանաձևեր են, ապա $(A \supset B)$ -ն բանաձև է:
- գ. Եթե A -ն բանաձև է, ապա $(\neg A)$ -ն բանաձև է:
- դ. Այլ բանաձևեր չկան:

II. Հենասույթներ (աքսիոմներ)

Ասույթային հաշվի ցանկացած A, B, C բանաձևերի համար հետևյալ տեսքի բանաձևերը հենասույթներ են.

1. $A \supset (B \supset A)$,
2. $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$,
3. $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$:

III. Արտածման կանոնը (դատողության կանոնը) modus ponens (m.p.)

$$\frac{A, A \supset B}{B}$$

(A և $A \supset B$ բանաձևերից կիրառելով m.p. կանոնը՝ ստացվում է B բանաձևը):

Մահմանում

$A_1, A_2, \dots, A_n$ բանաձևերի վերջավոր հաջորդականությունը կոչվում է **արտածում** Σ համակարգում, եթե յուրաքանչյուր A_i ($1 \leq i \leq n$) կա՛մ հենասույթ է, կա՛մ ստացվում է նախորդներից m.p. կանոնով:

Մահմանում

A բանաձևն **արտածվում է** Σ համակարգում (գրառումն է՝ $\vdash_{\Sigma} A$), եթե Σ համակարգում գոյություն ունի գոնե մեկ արտածում, որի վերջին բանաձևը A -ն է:

Օրինակ՝ $\vdash_{\Sigma} A \supset A$:

- 1) $A \supset ((A \supset A) \supset A)$ հենասույթ 1,
- 2) $(A \supset (A \supset A)) \supset ((A \supset ((A \supset A) \supset A)) \supset (A \supset A))$ հենասույթ 2,
- 3) $A \supset (A \supset A)$ հենասույթ 1,
- 4) $(A \supset ((A \supset A) \supset A)) \supset (A \supset A)$ m.p. (3, 2),
- 5) $A \supset A$ m.p.(1, 4):

Պարզաբանում

- p_i փոփոխականներ ընդունում են երկու արժեք՝ ճիշտ կամ սխալ (կամ թվայնացված՝ համապատասխանաբար 1 կամ 0):
- Ընտրված $\supset$ ու $\neg$ տրամաբանական գործողությունների փոխարեն կարող են ընտրվել ուրիշներ, որոնք կկազմեն ֆունկցիոնալ լրիվ համակարգ:

- Փակագծերի առկայությունը բանաձևերի սահմանումներում խիստ անհրաժեշտ է, քանի որ դրանցով որոշվում է գործողությունների կիրառման հերթականությունը: Որոշ դեպքերում, երբ գործողությունների կիրառումների հաջորդականությունը ակնհայտ է, գրառումները չծանրաբեռնելու համար կարող ենք դրանք չգրել, ինչպես, օրինակ, հենասույթներում բացակայում են արտաքին փակագծերը:
- Համակարգում առկա են ոչ թե երեք հենասույթներ, այլ անվերջ թվով հենասույթներ, քանի որ գրվածները հենասույթների սխեմաներ են: Նաև նշենք, որ ներկայացված բանաձևերից յուրաքանչյուրը նույնաբանություն է, ինչպես նաև նշված արտածման կանոնը, կիրառվելով նույնաբանությունների նկատմամբ, տալիս է նույնպես նույնաբանություն:
- Հենասույթներից յուրաքանչյուրը «ցուցադրում է» որոշակի հայտնի մաթեմատիկական պնդում.

1. առաջինը արտահայտում է իմպլիկացիայի սահմանման կետերից մեկը. եթե իմպլիկացիայի հետևանքը ճիշտ է, ապա իմպլիկացիայի արժեքը ճիշտ է;

Հաշվի առնելով $x \& y \rightarrow z$ և $x \supset (y \supset z)$ արտահայտությունների համարժեքությունը՝

2. եթե երկրորդ հենասույթում անտեսենք A բանաձևի երկրորդ մուտքը, ապա հենասույթը արտահայտում է իմպլիկացիայի տրանզիտիվությունը,
3. երրորդը ներկայացնում է հակասող ենթադրությամբ ապացույցների էությունը. A պնդումն ապացուցելու համար ենթադրում ենք, որ այն սխալ է

(Δ իշտ է $\neg A$ -ն), և եթե այդ նախապայմանից ստանում ենք հակասություն, ապա Δ իշտ է A -ն:

- Ֆորմալ տեսության «արտածում» գաղափարը ընդունված «ապացույց» գաղափարի հոմանիշն է;
- $A \supset A$ բանաձևի արտածմանը մասնակցած յուրաքանչյուր բանաձևի աջից առկա են նշումներ, որոնք հիմնավորում են տվյալ բանաձևի առկայությունը արտածման մեջ:
- $A \supset A$ բանաձևի արտածումը ցուցադրում է, որ նույնիսկ այսքան պարզ բանաձևի արտածման որոնումը դյուրին չէ:
- Հետագայում «կհարստացնենք» նկարագրված համակարգը նոր օժանդակ կանոններով, որոնք կհեշտացնեն այս կամ այն բանաձևերի արտածման գործընթացը:

Արտածման լրացուցիչ կանոններ

Ենթադրենք՝ $\Gamma = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ բանաձևերի բազմություն է: Կասենք, որ A բանաձևն **արտածվում է Γ նախադրյալներից** /ն./, եթե կարելի է նշել $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ բանաձևերի այնպիսի վերջավոր հաջորդականություն, որ $\forall i, (1 \leq i \leq n)$ համար A_i -ն՝

- 1) կա՛մ հենասույթ է,
- 2) կա՛մ Γ բազմությունից է,
- 3) կա՛մ ստացվում է նախորդներից m.p. կանոնով:

Թեորեմ (դեդուկցիայի թեորեմը ասույթային հաշվի համար)

Եթե Γ -ից ու A -ից արտածվում է B ՝ $\Gamma, A \vdash_{\Sigma} B$, ապա Γ -ից արտածվում է $A \supset B$ ՝ $\Gamma \vdash_{\Sigma} A \supset B$:

Ապացույց

$\Gamma, A \vdash_{\Sigma} B$, հետևաբար սահմանման համաձայն՝

$$\Gamma, A \vdash_{\Sigma} B_1$$

$$\dots \vdash_{\Sigma} B_2,$$

...

$$\dots \vdash_{\Sigma} B_n$$

որում B_i -ն կա՛մ հենասույթ է, կա՛մ Γ բազմությունից է, կա՛մ A բանաձևն է, կա՛մ ստացվում է նախորդներից մ.թ. կանոնով և $B_n = B$:

$B_1, B_2, \dots, B_n$ բանաձևերի յուրաքանչյուրի առջևից ավելացնենք $A \supset$:

$$A \supset B_1$$

$$A \supset B_2 \tag{1}$$

...

$$A \supset B_n$$

Այս հաջորդականությունը կարող է այլևս արտածում չլինել: Յուրաքանչյուր $(A \supset B_i)$ բանաձևից առաջ ավելացնենք այնպիսի բանաձևեր, որ (1)-ը դառնա արտածում միայն Γ նախադրյալներից:

1. Եթե B_i -ն հենասույթ է կամ Γ բազմությունից է, ապա $A \supset B_i$ -ից առաջ ավելացնենք՝

B_i հենասույթ կամ նախադրյալ,

$B_i \supset (A \supset B_i)$ հենասույթ 1,

որոնցից $A \supset B_i$ -ն ստացվում է մ.թ. կանոնով:

2. Եթե $B_i = A$, ապա $A \supset B_i$ -ից առաջ ավելացնենք $A \supset A$ բանաձևի արտածման առաջին չորս բանաձևերը:

3. Եթե B_i -ն ստացվել է նախորդներից մ.թ. կանոնով, այսինքն՝ սկզբնական արտածման մեջ առկա էին հետևյալ բանաձևերը՝

$$B_j \ j < i$$

$$B_j \supset B_i$$

$$B_i \ m.p.$$

Հետևաբար, ըստ 1. և 2. կետերի, լրացված հաջորդականությունում ունենք $A \supset B_j$ և $(A \supset (B_j \supset B_i))$ բանաձևերը: $A \supset B_i$ -ից առաջ ավելացնենք.

$$(A \supset B_j) \supset ((A \supset (B_j \supset B_i)) \supset (A \supset B_i)) \text{ հենասույթ 2 ու}$$

$$(A \supset (B_j \supset B_i)) \supset (A \supset B_i) \ m.p. \text{ և կատանանք}$$

$$A \supset B_i \ m.p.$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտորդություն

- Եթե B -ն Γ -ից ու A -ից արտածվում է n քայլում, ապա $A \supset B$ -ն արտածվում է Γ -ից ոչ ավելին, քան $2(n - 1) + 4 + n = 3n + 2$ քայլում:
- Դեդուկցիայի թեորեմի ապացուցման մեջ էական դեր է խաղում երկրորդ հենասույթի A բանաձևի երկրորդ մուտքը:
- Դեդուկցիայի թեորեմը օգտակար է $A \supset B$ տեսքի բանաձևերի արտածման համար. A -ն վերցվում է որպես նախադրյալ, որից արտածվում է B -ն:
- $U \supset U$ տեսքի բանաձև արտածելու համար չի կարելի կիրառել դեդուկցիայի թեորեմը, քանի որ վերջինիս ապացույցը հիմնված է $U \supset U$ տեսքի արտածման վրա: Մասնավորապես, անթույլատրելի է հետևյալ՝

$$(A \supset (\neg B \supset C)) \supset (A \supset (\neg B \supset C))$$

բանաձևի հետևյալ արտածումը.

$$(A \supset (\neg B \supset C)), A \vdash_{\Sigma} (\neg B \supset C)$$

$$(A \supset (\neg B \supset C)), A, \neg B \vdash_{\Sigma} C$$

$(A \supset (\neg B \supset C)), A, \neg B \vdash_{\Sigma} A$ ն.

$(A \supset (\neg B \supset C)), A, \neg B \vdash_{\Sigma} (A \supset (\neg B \supset C))$ ն.

$(A \supset (\neg B \supset C)), A, \neg B \vdash_{\Sigma} \neg B \supset C$ *m.p.*

$(A \supset (\neg B \supset C)), A, \neg B \vdash_{\Sigma} \neg B$ ն.

$(A \supset (\neg B \supset C)), A, \neg B \vdash_{\Sigma} C$ *m.p.*

Երկու օժանդակ կանոններ՝ սիլլոգիզմներ

Սիլլոգիզմ 1

$A \supset B$ և $B \supset C$ նախադրյալներից արտածվում է $A \supset C$:

Համաձայն դեդուկցիայի թեորեմի՝ բավական է $A \supset B$ -ից, $B \supset C$ -ից և A -ից արտածել C ՝ $A \supset B, B \supset C, A \vdash_{\Sigma} C$

 $\vdash_{\Sigma} A$ ն.

$\vdash_{\Sigma} A \supset B$ ն.

$\vdash_{\Sigma} B$ *m.p.*

$\vdash_{\Sigma} B \supset C$ ն.

$\vdash_{\Sigma} C$ *m.p.*

Սիլլոգիզմ 2

B և $A \supset (B \supset C)$ նախադրյալներից արտածվում է $A \supset C$:

Համաձայն դեդուկցիայի թեորեմի՝ բավական է B -ից, $A \supset (B \supset C)$ -ից և A -ից արտածել C ՝ $B, A \supset (B \supset C), A \vdash_{\Sigma} C$

 $\vdash_{\Sigma} A$ ն.

$\vdash_{\Sigma} A \supset (B \supset C)$ ն.

$\vdash_{\Sigma} B \supset C$ *m.p.*

$\vdash_{\Sigma} B$ ն.

$\vdash_{\Sigma} C$ *m.p.*

«Հրաշալի» բանաձևեր

Պնդում

A, B ցանկացած բանաձևերի համար ներքոհիշյալ «**հրաշալի**» բանաձևերը (հ.բ.) արտածվում են Σ համակարգում:

(a) $\neg \neg B \supset B$

- (b) $B \supset \neg\neg B$
 (c) $\neg A \supset (A \supset B)$
 (c)* $A \supset (\neg A \supset B)$
 (d) $(\neg B \supset \neg A) \supset (A \supset B)$
 (e) $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$
 (f) $A \supset (\neg B \supset \neg(A \supset B))$
 (g) $(A \supset B) \supset ((\neg A \supset B) \supset B)$

Ապացույց

(a) $\vdash_{\Sigma} \neg\neg B \supset B$.

- | | |
|--|-----------------|
| 1. $(\neg B \supset \neg B) \supset ((\neg B \supset \neg\neg B) \supset B)$ | հենասույթ 3 |
| 2. $\neg B \supset \neg B$ | արտածված բանաձև |
| 3. $(\neg B \supset \neg\neg B) \supset B$ | մ.բ. |
| 4. $\neg\neg B \supset (\neg B \supset \neg\neg B)$ | հենասույթ 1 |
| 5. $\neg\neg B \supset B$ | սիլլոգիզմ 1 |

(b) $\vdash_{\Sigma} B \supset \neg\neg B$

- | | |
|--|-------------|
| 1. $(\neg\neg B \supset B) \supset ((\neg\neg B \supset \neg B) \supset \neg\neg B)$ | հենասույթ 3 |
| 2. $\neg\neg B \supset \neg B$ | հ.բ. (a) |
| 3. $(\neg\neg B \supset B) \supset \neg\neg B$ | սիլլոգիզմ 2 |
| 4. $B \supset (\neg\neg B \supset B)$ | հենասույթ 1 |
| 5. $B \supset \neg\neg B$ | սիլլոգիզմ 1 |

(c) $\vdash_{\Sigma} \neg A \supset (A \supset B)$

- | | |
|-----------------------------------|-------------|
| 1. $\neg A$ | ն. |
| 2. A | ն. |
| 3. $A \supset (\neg B \supset A)$ | հենասույթ 1 |

- | | |
|---|-------------|
| 4. $\neg A \supset (\neg B \supset \neg A)$ | հենասույթ 1 |
| 5. $\neg B \supset A$ | մ.թ. |
| 6. $\neg B \supset \neg A$ | մ.թ. |
| 7. $(\neg B \supset A) \supset ((\neg B \supset \neg A) \supset B)$ | հենասույթ 3 |
| 8. $(\neg B \supset A) \supset B$ | մ.թ. |
| 9. B | մ.թ. |

Մնում է երկու անգամ կիրառել դեդուկցիայի թեորեմը:
Ակնհայտ է, որ (c)*-ը արտածվում է նույն կերպ, ինչ (c):
(d) $\vdash_{\Sigma} (\neg B \supset \neg A) \supset (A \supset B)$

- | | |
|---|-------------|
| 1. $\neg B \supset \neg A$ | ն. |
| 2. A | ն. |
| 3. $(\neg B \supset A) \supset ((\neg B \supset \neg A) \supset B)$ | հենասույթ 3 |
| 4. $A \supset (\neg B \supset A)$ | հենասույթ 1 |
| 5. $\neg B \supset A$ | մ.թ. |
| 6. $(\neg B \supset \neg A) \supset B$ | մ.թ. |
| 7. B | մ.թ. |

Մնում է երկու անգամ կիրառել դեդուկցիայի թեորեմը:
(e) $\vdash_{\Sigma} (A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$

- | | |
|--|-------------|
| 1. $A \supset B$ | ն. |
| 2. $\neg\neg A \supset A$ | հ.թ. (a) |
| 3. $\neg\neg A \supset B$ | սիլլոգիզմ 1 |
| 4. $B \supset \neg\neg B$ | հ.թ. (b) |
| 5. $\neg\neg A \supset \neg\neg B$ | սիլլոգիզմ 1 |
| 6. $(\neg\neg A \supset \neg\neg B) \supset (\neg B \supset \neg A)$ | հ.թ. (d) |
| 7. $(\neg B \supset \neg A)$ | մ.թ. |

Մնում է կիրառել դեդուկցիայի թեորեմը:

(g) $\vdash_{\Sigma} (A \supset B) \supset ((\neg A \supset B) \supset B)$.

1. $A \supset B$	ն.
2. $\neg A \supset B$	ն.
3. $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$	հ.բ. (e)
4. $\neg B \supset \neg A$	մ.բ.
5. $(\neg A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$	հ.բ. (e)
6. $\neg B \supset \neg A$	մ.բ.
7. $(\neg B \supset \neg A) \supset ((\neg B \supset \neg A) \supset B)$	հենասույթ 3
8. $(\neg B \supset \neg A) \supset B$	մ.բ.
9. B	մ.բ.

Մնում է երկու անգամ կիրառել դեդուկցիայի թեորեմը:

Պարզաբանում

Այս «հրաշալի» բանաձևերից յուրաքանչյուրը կարևոր դեր են խաղալու հետագա դիտարկումներում, և դրանցից յուրաքանչյուրը իր հերթին ներկայացնում է դասական տրամաբանության որոշակի դրույթ.

ա) $\neg A \supset A$ և $A \supset \neg \neg A$ բանաձևերը «նշում» են, որ յուրաքանչյուր պնդման կրկնակի ժխտումը համարժեք է այդ պնդմանը,

բ) $\neg A \supset (A \supset B)$ և $A \supset (\neg A \supset B)$ բանաձևերը «նշում» են, որ եթե համակարգում հնարավոր լինի արտաձել որևէ A պնդումն ու նրա ժխտումը, ապա կարտածվի կամայական B պնդումը, որն կարող է լինել անհեթեթություն, $\neg A \supset (A \supset B)$ բանաձևը նշում է նաև իմպլիկացիայի սահմանման ևս մեկ կետը. եթե $A \supset B$ իմպլիկացիայի A նախապայմանը սխալ է, այսինքն՝ $\neg A$ -ն ճիշտ է, ապա $A \supset B$ -ն ճիշտ է:

գ) $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$ և $(\neg B \supset \neg A) \supset (A \supset B)$ բանաձևերը «նշում» են իմպլիկացիայի ու ժխտման փոխհարաբերությունները,

դ) $A \supset (\neg B \supset \neg(A \supset B))$ բանաձևը «նշում» է իմպլիկացիայի «սխալ» արժեք ընդունելու պայմանը,

ե) $(A \supset B) \supset ((\neg A \supset B) \supset B)$ բանաձևը «նշում» է, որ եթե որևէ պնդում կարող է ստացվել երկու իրար հակասող նախապայմաններից, ապա այն «կապ չունի» դրանց հետ:

Թեորեմ (ասույթային Σ համակարգի անհակասելիության և լրիվության մասին)

1. Σ համակարգում արտածվող կամայական բանաձև նույնաբանություն է:
2. Կամայական նույնաբանություն արտածվում է Σ համակարգում:

Ապացույց 1

Դիցուք Σ -ում արտածվում է A բանաձևը: Ապացուցենք, որ այն նույնաբանություն է:

Ըստ սահմանման՝ գոյություն ունի բանաձևերի այնպիսին վերջավոր հաջորդականություն՝ $A_1, A_2, \dots, A_n$, որում յուրաքանչյուր A_i , $1 \leq i \leq n$ կա՛մ հենասույթ է, կա՛մ ստացվում է նախորդներից $m.p.$ կանոնով: Հենասույթներից յուրաքանչյուրը նույնաբանություն է, իսկ նույնաբանությունների նկատմամբ $m.p.$ -ը կիրառելով՝ ստացվում է նույնաբանություն, հետևաբար A_n -ը, որը A -ն է նույնաբանություն է:

Ապացույց 2

Թեորեմի երկրորդ կետն ապացուցելու համար ապացուցենք մի օժանդակ պնդում (լեմմա):

Կալմարի³ լեմմա

Դիցուք $A(p_1, p_2, \dots, p_n)$ բանաձև է, որում մասնակցում են $p_1, p_2, \dots, p_n$ տրամաբանական փոփոխականները, և $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ որևէ հավաքածու է n -չափանի միավոր խորա-

³ **Լաւր Կալմար (1905-1976)** – հունգարացի մաթեմատիկոս, որի հիմնական հետազոտությունները վերաբերում են կիրեննետիկայի մաթեմատիկական պրոբլեմներին, մաթեմատիկական մեքենաների տեսությանը, մաթեմատիկական տրամաբանությանը, ծրագրավորման տեսությանը:

նարդից՝ E^n -ից: Այդ դեպքում $p_1^{\sigma_1}, p_2^{\sigma_2}, \dots, p_n^{\sigma_n}$ նախադրյալներից արտածվում է $A^{A(\sigma_1, \dots, \sigma_n)}$.

$$p_1^{\sigma_1}, p_2^{\sigma_2}, \dots, p_n^{\sigma_n} \vdash_{\Sigma} A^{A(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)},$$

որում՝

$$p_i^{\sigma_i} = \begin{cases} p_i, & \sigma_i = 1 \\ \neg p_i, & \sigma_i = 0 \end{cases}:$$

Ապացույց

Ապացույցը կատարենք մակաձման եղանակով՝ ըստ A -ի մեջ մտնող բոլոր տրամաբանական նշանների քանակի: Ենթադրենք՝ A -ում տրամաբանական նշանների քանակը k է:

Մակաձման հիմք

Եթե $k = 0$, ապա $A = p_i$: Եթե $\sigma_i = 0$ կամ $\sigma_i = 1$, ապա համապատասխանաբար $\neg p_i \vdash_{\Sigma} \neg p_i$ ու $p_i \vdash_{\Sigma} p_i$:

Մակաձման ենթադրությունը

Ենթադրենք՝ k -ն չգերազանցող քանակով տրամաբանական նշաններ պարունակող բոլոր բանաձևերի համար պնդումը ճիշտ է:

Մակաձման քայլ

Ապացուցենք $k + 1$ հատ նշաններ պարունակող բանաձևերի համար: Եթե A -ում $k + 1$ հատ նշաններ կան, ապա հնարավոր են հետևյալ երկու դեպքերը.

ա) A -ն $\neg A_1$ տեսքի է,

A_1 -ը պարունակում է k հատ նշան, հետևաբար նրա համար պնդումը ճիշտ է: Վերցնենք $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ հավաքածու.

$$A(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \begin{cases} 1 & \Rightarrow A_1(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 0 \quad (i) \\ 0 & \Rightarrow A_1(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 1 \quad (ii) \end{cases}:$$

(i) ենթադրեալով, համաձայն ենթադրության,

$$p_1^{\sigma_1}, p_2^{\sigma_2}, \dots, p_n^{\sigma_n} \vdash_{\Sigma} \neg A_1$$

բայց $\neg A_1$ -ը հենց A -ն է:

(ii) ենթադրեալում, համաձայն ենթադրության,

$$\begin{aligned} p_1^{\sigma_1}, p_2^{\sigma_2}, \dots, p_n^{\sigma_n} &\vdash_{\Sigma} A_1 \\ &\vdots \\ &\vdash_{\Sigma} A_1 \supset \neg \neg A_1 \text{ h.p. (b)} \\ &\vdash_{\Sigma} \neg \neg A_1 \text{ m.p.} \end{aligned}$$

բայց $\neg \neg A_1$ -ը հենց $\neg A$ -ն է:

p) A -ն $A_1 \supset A_2$ տեսքի է: A_1 -ը և A_2 -ը պարունակում են առավելագույնը k հատ նշան, հետևաբար նրանց համար պնդումը ճիշտ է: Վերցնենք $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ հավաքածուն: Հնարավոր են հետևյալ երեք ենթադրաբերքը՝

$$\begin{aligned} (i) \quad A_1(\sigma) &= 0 & A(\sigma) &= 1, \\ (ii) \quad A_1(\sigma) &= 1, A_2(\sigma) = 0 & A(\sigma) &= 0, \\ (iii) \quad A_2(\sigma) &= 1 & A(\sigma) &= 1: \end{aligned}$$

(i) ենթադրեալում, համաձայն ենթադրության,

$$\begin{aligned} p_1^{\sigma_1}, \dots, p_n^{\sigma_n} &\vdash_{\Sigma} \neg A_1 \\ &\vdots \\ &\vdash_{\Sigma} \neg A_1 \supset (A_1 \supset A_2) && \text{h.p. (c)} \\ &\vdash_{\Sigma} A_1 \supset A_2 && \text{m.p.} \end{aligned}$$

բայց $A_1 \supset A_2$ -ը հենց A -ն է:

(ii) ենթադրեալում, համաձայն ենթադրության,

$$\begin{aligned} p_1^{\sigma_1}, \dots, p_n^{\sigma_n} &\vdash_{\Sigma} A_1 \\ &\vdash_{\Sigma} \neg A_2 \\ &\vdots \\ &\vdash_{\Sigma} A_1 \supset (\neg A_2 \supset \neg(A_1 \supset A_2)) && \text{h.p. (f)} \\ &\vdash_{\Sigma} \neg A_2 \supset \neg(A_1 \supset A_2) && \text{m.p.} \\ &\vdash_{\Sigma} \neg(A_1 \supset A_2) && \text{m.p.} \end{aligned}$$

բայց $\neg(A_1 \supset A_2)$ -ը հենց $\neg A$ -ն է:

(iii) ենթադրեալում, համաձայն ենթադրության,

$$p_1^{\sigma_1}, \dots, p_n^{\sigma_n} \vdash_{\Sigma} A_2$$

$$\vdash_{\Sigma} A_2 \supset (A_1 \supset A_2) \quad \text{հենասույթ 1.}$$

$$\vdash_{\Sigma} A_1 \supset A_2 \quad \text{m.p.}$$

Բայց $A_1 \supset A_2$ -ը հենց A -ն է:

Լեմման ապացուցված է:

Վերադառնանք թեորեմի երկրորդ կետի ապացույցին:

Ապացույց 2

Ունենք, որ $A(p_1, \dots, p_n) \equiv 1$:

Համաձայն Կալմարի լեմմայի՝ կամայական $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ համար $p_1^{\sigma_1}, \dots, p_n^{\sigma_n} \vdash_{\Sigma} A$:

Ապացույցը ցուցադրենք $n = 3$ -ի համար: $A(p_1, \dots, p_n) \equiv 1$

$p_1 \quad p_2 \quad p_3$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad \{ |p_1, |p_2, |p_3 \vdash_{\Sigma} A$$

$$0 \quad 0 \quad 1 \quad \{ |p_1, |p_2, p_3 \vdash_{\Sigma} A$$

$$0 \quad 1 \quad 0 \quad \{ |p_1, p_2, |p_3 \vdash_{\Sigma} A$$

$$0 \quad 1 \quad 1 \quad \{ |p_1, p_2, p_3 \vdash_{\Sigma} A$$

$$1 \quad 0 \quad 0 \quad \{ p_1, |p_2, |p_3 \vdash_{\Sigma} A$$

$$1 \quad 0 \quad 1 \quad \{ p_1, |p_2, p_3 \vdash_{\Sigma} A$$

$$1 \quad 1 \quad 0 \quad \{ p_1, p_2, |p_3 \vdash_{\Sigma} A$$

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad \{ p_1, p_2, p_3 \vdash_{\Sigma} A$$

Առաջին զույգի հետ կատարենք հետևյալը՝

$$|p_1, |p_2 \vdash_{\Sigma} |p_3 \supset A \text{ դեդուկցիայի թեորեմ}$$

$$|p_1, |p_2 \vdash_{\Sigma} p_3 \supset A \text{ դեդուկցիայի թեորեմ}$$

:

$$\vdash_{\Sigma} (p_3 \supset A) \supset ((|p_3 \supset A) \supset A) \quad \text{հբ (g).}$$

$$\vdash_{\Sigma} (|p_3 \supset A) \supset A \quad \text{m.p.}$$

$$\vdash_{\Sigma} A \quad \text{m.p.}$$

Հետևաբար $|p_1, |p_2 \vdash_{\Sigma} A$, այսինքն՝ հաջորդվեց ազատվել երրորդ նախադրյալից:

Մյուս երեք գույգերի հետ նույն գործողությունները կատարելով ու կրկին գուգավորելով՝ կստանանք.

$$\begin{cases} |p_1, |p_2 \vdash_{\Sigma} A \\ |p_1, p_2 \vdash_{\Sigma} A' \\ p_1, |p_2 \vdash_{\Sigma} A : \\ p_1, p_2 \vdash_{\Sigma} A : \end{cases}$$

Սրանց հետև կատարելով նույն գործողությունները՝ կստանանք.

$$\begin{cases} |p_1 \vdash_{\Sigma} A : \\ p_1 \vdash_{\Sigma} A : \end{cases}$$

Սրանց հետև կատարելով նույն գործողությունները՝ կստանանք, որ արտածվում է A -ն: Այս գործողությունների ցուցադրումից պարզ երևում է, որ դրանք հաջորդաբար կարելի է կիրառել n -ի կամայական արժեքի համար:

Թեորեմն ապացուցված է:

Մահմանում

Ֆորմալ (ձևայնացված) համակարգը կոչվում է **անհակասելի** (պարզ անհակասելի), եթե ոչ մի A բանաձևի համար հնարավոր չէ այդ համակարգում արտածել $\neg A$, և՛ $\neg\neg A$:

Մահմանում

Ֆորմալ համակարգը կոչվում է **լրիվ**, եթե ցանկացած ճիշտ պնդում (նույնաբանությունը ասության ինչ-որ հաշվում) նրանում արտածվում է:

Մահմանում

Ֆորմալ համակարգը կոչվում է **լուծելի**, եթե գոյություն ունի այնպիսի մի ալգորիթմ, որի միջոցով կամայական A բանաձևի համար կարելի է ստուգել՝ այն արտածվում է տվյալ համակարգում, թե ոչ:

Հետևանքներ թեորեմից

1. Ասույթային հաշվի Σ համակարգն անհակասելի է (բխում է թեորեմի առաջին կետի պնդումից):

2. Ասույթային հաշվի Σ համակարգը լրիվ է (բխում է թեորեմի երկրորդ կետի պնդումից):

3. Ասույթային հաշվի Σ համակարգը լուծելի է (ալգորիթմը հետևյալն է. ստուգվում է բանաձևի նույնաբանություն լինել կամ չլինելը):

Տրամաբանական գործողությունների ներմուծման և արտաքսուման օժանդակ կանոններ

Այսուհետ կկիրառենք ևս երկու տրամաբանական նշաններ՝ $\&$ (կոնյունկցիա) ու $\vee$ (դիզյունկցիա)՝ որպես հետևյալ բանաձևերի կրճատ նշանակումներ՝

$$A \& B \equiv \neg(A \supset \neg B), A \vee B \equiv \neg A \supset B:$$

Հետևյալ աղյուսակի «ներմուծում» սյունյակում ներկայացված է տրված արտաքին նշանով բանաձևի արտածման եղանակը, իսկ «արտաքսում» սյունյակում նշվում է, թե ինչ կարելի է արտածել տրված արտաքին նիշով բանաձևից:

Տրամաբանական նշաններ (կապեր)	Ներմուծում	Արտաքսում
$\supset$	$\frac{\Gamma, A \vdash_{\Sigma} B}{\Gamma \vdash_{\Sigma} A \supset B}$ Դեդուկցիայի թեորեմ	$\Gamma, A, A \supset B \vdash_{\Sigma} B$ modus ponens
$\&$	$1. \frac{\Gamma \vdash_{\Sigma} A \text{ և } \Gamma \vdash_{\Sigma} B}{\Gamma \vdash_{\Sigma} A \& B}$	$2. \Gamma, A \& B \vdash_{\Sigma} A$ $\Gamma, A \& B \vdash_{\Sigma} B$

$\vee$	3. $\frac{\Gamma \vdash_{\Sigma} A \text{ կամ } \Gamma \vdash_{\Sigma} B}{\Gamma \vdash_{\Sigma} A \vee B}$	4. $\frac{\Gamma, A \vdash_{\Sigma} C \text{ և } \Gamma, B \vdash_{\Sigma} C}{\Gamma, A \vee B \vdash_{\Sigma} C}$
$\neg$	5. $\frac{\Gamma, A \vdash_{\Sigma} B \text{ և } \Gamma, A \vdash_{\Sigma} \neg B}{\Gamma \vdash_{\Sigma} \neg A}$	6. $\frac{\Gamma, \neg A \vdash_{\Sigma} B \text{ և } \Gamma, \neg A \vdash_{\Sigma} \neg B}{\Gamma \vdash_{\Sigma} A}$ Հենասույթ 3

Այս կանոնների կիրառումը հիմնավորելու համար բավական է ցույց տալ, որ.

1. $\vdash_{\Sigma} A \supset (B \supset A \& B)$ այսինքն՝ $\vdash_{\Sigma} A \supset (B \supset \neg(A \supset \neg B))$,
2. $\vdash_{\Sigma} A \& B \supset A$ այսինքն՝ $\vdash_{\Sigma} \neg(A \supset \neg B) \supset A$,
 $\vdash_{\Sigma} A \& B \supset B$ այսինքն՝ $\vdash_{\Sigma} \neg(A \supset \neg B) \supset B$,
3. $\vdash_{\Sigma} A \supset A \vee B$ այսինքն՝ $\vdash_{\Sigma} A \supset (\neg A \supset B)$ հ.բ. (c)*,
 $\vdash_{\Sigma} B \supset A \vee B$ այսինքն՝ $\vdash_{\Sigma} B \supset (\neg A \supset B)$ հենասույթ 1,
4. $\vdash_{\Sigma} (A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$,
այսինքն՝ $\vdash_{\Sigma} (A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((\neg A \supset B) \supset C))$,
5. $\vdash_{\Sigma} (A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$:

Այսպիսով՝ բավական է ապացուցել **bold-ով** նշված հինգ բանաձևերը (կատարել ինքնություն), ապա կիրառել m.p. կանոնը մեկ կամ երկու անգամ:

Հենասույթների սխեմաների անկախությունը

Բոլոր հենասույթների M ենթաբազմությունը կոչվում է **անկախ**, եթե M բազմության որևէ հենասույթ չի կարող արտածվել տվյալ տեսության արտաձման կանոններով M-ին չպատկանող հենասույթներից:

Թեորեմ

Σ համակարգի հենասույթների սխեմաներից յուրաքանչյուրով տրվող հենասույթների բազմությունը անկախ է:

Ապացույց

Քանի որ այս համակարգում ունենք հենասույթների երեք սխեմաներ, ապա բոլոր հենասույթների բազմությունը տրոհված է երեք չհատվող ենթաբազմությունների: Ակնհայտ է, որ բոլոր հնարավոր արտածումների հատարկմամբ այդ երեք ենթաբազմությունների անկախության հարցը լուծել հնարավոր չէ: Մենք կկիրառենք այլ եղանակ. հենասույթների սխեմաներից յուրաքանչյուր ընտրվածի համար կնկարագրվի որոշակի «տարբերակվող հատկություն», որով օժտված կլինեն մյուս երկու սխեմաների բոլոր հենասույթները, *m. p.* կանոնի կիրառումը կպահպանի այդ հատկությունը, իսկ տվյալ սխեմայի ոչ բոլոր հենասույթներն են բավարարելու այդ հատկությանը: Այդպիսով՝ կապացուցվի, որ ընտրված սխեմայի բոլոր հենասույթների բազմությունը անկախ է մյուս երկու սխեմաների հենասույթների բազմություններից:

ա) Սկսենք հենասույթների երրորդ սխեմայից, քանի որ միայն նրանում է արտաքուստ առկա ժխտման նիշը: Σ համակարգի յուրաքանչյուր A բանաձևի համար $h(A)$ -ով նշանակենք այն բանաձևը, որ ստացվում է A -ից՝ նրանում բոլոր ժխտման նիշերը ջնջելով: A նույնաբանությունը կանվանենք «**լավ**», եթե $h(A)$ -ն նույնպես նույնաբանություն է: Դժվար չէ համոզվել, որ $h(A)$ արտապատկերման համար ստույգ են հետևյալ պնդումները.

- $h(A \supset B) = h(A) \supset h(B)$,
- $h(\neg A) = h(A)$,

- $m.p.$ կանոնի կիրառումը պահպանում է «**լալ**» լինելու հատկությունը,
- եթե A -ն առաջին սխեմայի կամայական հենասույթ է, ապա $h(A)$ -ն նույնաբանություն է,
- եթե A -ն երկրորդ սխեմայի կամայական հենասույթ է, ապա $h(A)$ -ն նույնաբանություն է:

Սակայն երրորդ սխեմայի ոչ բոլոր հենասույթներն են «**լալ**»-ը: Օրինակ, եթե A -ն հետևյալ հենասույթն է $A: (\neg p_1 \supset p_1) \supset ((\neg p_1 \supset \neg p_1) \supset \neg p_1)$, ապա $h(A)$ -ն $(p_1 \supset p_1) \supset ((p_1 \supset p_1) \supset p_1)$ բանաձևն է, որն ընդունում է 0 արժեքը $p_1 = 0$ -ի համար: Այսպիսով՝ հենասույթների **երրորդ սխեման անկախ է առաջին երկուսից**:

Առաջին ու երկրորդ սխեմաների հենասույթների բազմությունների անկախության ապացուցման համար «տարբերակվող հատկությունները» սահմանենք՝ հիմնվելով բազմարժեք տրամաբանության վրա:

բ) Հենասույթների առաջին սխեմայի անկախության ապացուցման նպատակով դիտարկենք կամայական A և B բանաձևերի ժխտման ու իմպլիկացիայի արժեքների համար եռարժեք տրամաբանության հետևյալ աղյուսակները.

A	$\neg A$	A	B	$A \supset B$
0	1	0	0	0
1	1	1	0	2
2	0	2	0	0
		0	1	2
		1	1	2
		2	1	0
		0	2	2
		1	2	0
		2	2	0

Ակնհայտ է, որ բանաձևի փոփոխականների 0, 1, 2 արժեքներից կազմված կամայական հավաքածուի համար նշված աղյուսակներով միարժեքորեն որոշվում է բանաձևի արժեքը: Բանաձևը կանվանենք «լավ», եթե այն ընդունում է միայն 0 արժեքը: Դժվար չէ համոզվել, որ երկրորդ ու երրորդ սխեմաների յուրաքանչյուր հենասույթ «լավ» է, *m.p.* կանոնի կիրառումը պահպանում է «լավ» լինելու հատկությունը, հետևաբար երկրորդ ու երրորդ սխեմաների հենասույթներից արտածվող յուրաքանչյուր բանաձև պետք է լինի «լավ», սակայն առաջին սխեմայի հենասույթ հանդիսացող $p_1 \supset (p_2 \supset p_1)$ բանաձևը «լավ» չէ, քանի որ $p_1 = 1$ ու $p_2 = 2$ արժեքների համար ընդունում է 2 արժեքը:

զ) Հենասույթների երկրորդ սխեմայի անկախության ապացուցման նպատակով դիտարկենք կամայական A և B բանաձևերի ժխտման ու իմպլիկացիայի արժեքների համար եռարժեք տրամաբանության հետևյալ աղյուսակները.

A	$\neg A$	A	B	$A \supset B$
0	1	0	0	0
1	0	1	0	0
2	1	2	0	0
		0	1	2
		1	1	2
		2	1	0
		0	2	1
		1	2	0
		2	2	0

Այստեղ ևս բանաձևը կանվանենք «լավ», եթե այն ընդունում է միայն 0 արժեքը: Դժվար չէ համոզվել, որ առաջին ու երրորդ սխեմաների յուրաքանչյուր հենասույթ «լավ» է, *m.p.*

կանոնի կիրառումը պահպանում է «լավը» լինելու հատկությունը, հետևաբար առաջին ու երրորդ սխեմաների հենասույթներից արտածվող յուրաքանչյուր բանաձև պետք է լինի լավը, սակայն երկրորդ սխեմայի հենասույթ հանդիսացող $(p_1 \supset p_2) \supset ((p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset (p_1 \supset p_3))$ բանաձևը «լավը» չէ, քանի որ $p_1 = 1, p_2 = 0$ և $p_3 = 1$ արժեքների համար ընդունում է 2 արժեքը:

Այսպիսով՝ թեորեմն ամբողջությամբ ապացուցվեց:

Հետաքրքիր է, որ այս թեորեմը փաստում է երեք հենասույթների սխեմաներով արտահայտված մաթեմատիկական որոշակի դրույթների մեկը մյուսներով արտահայտելու անհնարինության հանգամանքը:

Այսպիսով՝ ավարտեցինք ասույթային հաշվի ուսումնասիրությունը, որին հենվելով՝ հետայսու կդիտարկենք առավել ընդգրկուն և բարդ տեսություններ:

Լրացումներ

Չնայած Σ համակարգը բավականին պարզ է, գոյություն ունեն ասույթային այլ համակարգեր, որոնցում նույնքան հեշտ է աշխատել, ինչքան Σ համակարգում (տե՛ս [1], էջ 48-51):

1 ու $\supset$ նշանների փոխարեն կարող ենք գործածել տրամաբանական կապերի ֆունկցիոնալ լրիվ այլ խմբեր:

Դիտարկենք օրինակներ:

L_1 : Տրամաբանական կապերն են $\vee$ և $\neg$, իսկ $A \supset B$ ծառայում է որպես կրճատ գրելաձև $\neg A \vee B$ համար:

Չորս հենասույթների սխեմաներն են՝

1. $A \vee A \supset A$,
2. $A \supset A \vee B$,
3. $A \vee B \supset B \vee A$,
4. $(B \supset C) \supset (A \vee B \supset A \vee C)$:

Միակ արտաձման կանոնը *modus ponens* -ն է:

L₂: Տրամաբանական կապերն են & և $\neg$, իսկ $A \supset B$ կրճատ նշանակումն է $\neg(A \& \neg B)$ համար: Երեք հենասույթների սխեմաներն են՝

1. $A \supset (A \& A)$,
2. $(A \& B) \supset A$,
3. $(A \supset B) \supset (\neg(B \& C) \supset \neg(C \& A))$:

Միակ արտաձման կանոնն է *modus ponens* -ը:

L₃: Այս համակարգը շատ նման է Σ համակարգին: Տարբերությունն այն է, որ երեք հենասույթների սխեմաների փոխարեն (A1)-(A3) այստեղ առկա է ընդամենը երեք հստակ, տրամաբանական փոփոխականներով տրված, հենասույթ՝

1. $p_1 \supset (p_2 \supset p_1)$,
2. $(p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_1 \supset p_3))$,
3. $(\neg p_2 \supset \neg p_1) \supset ((\neg p_2 \supset p_1) \supset p_2)$:

սակայն բացի *modus ponens*-ից՝ կա արտաձման ևս մեկ՝ **տեղադրման** կանոնը, որը թույլ է տալիս փոխարինել կամայական բանաձևում ցանկացած փոփոխականի բոլոր մուտքերը որևէ այլ բանաձևով:

L₄: Տրամաբանական կապերն են՝ $\supset$, &, $\vee$ և $\neg$: Արտաձման միակ կանոնը՝ *modus ponens*: Հենասույթները տրվում են հետևյալ սխեմաներով՝

1. $A \supset (B \supset A)$,
2. $(A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset B) \supset (A \supset C))$,
3. $A \& B \supset A$,
4. $A \& B \supset B$,
5. $A \supset (B \supset (A \& B))$,
6. $A \supset (A \vee B)$,
7. $B \supset (A \vee B)$,
8. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$,

$$9. (A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A),$$

$$10. \neg \neg A \supset A:$$

$$A \equiv B \text{ նույնն է, ինչ } ((A \supset B) \& (B \supset A)):$$

Վարժություններ

1. Ապացուցել, որ.

$$(a) A \supset B \vdash_{L_1} C \vee A \supset C \vee B,$$

$$(b) \vdash_{L_1} (A \supset B) \supset ((C \supset A) \supset (C \supset B)),$$

$$(c) C \supset A, A \supset B \vdash_{L_1} C \supset B,$$

$$(d) \vdash_{L_1} A \supset A \text{ (այսինքն՝ } \vdash_{L_1} \neg \neg A \vee A),$$

$$(e) \vdash_{L_1} A \vee \neg A,$$

$$(f) \vdash_{L_1} A \supset \neg \neg A,$$

$$(g) \vdash_{L_1} \neg B \supset (B \supset C),$$

$$(h) \vdash_{L_1} A \vee (B \vee C) \supset ((B \vee (A \vee C)) \vee A),$$

$$(i) \vdash_{L_1} (B \vee (A \vee C)) \vee A \supset B \vee (A \vee C),$$

$$(j) \vdash_{L_1} A \vee (B \vee C) \supset B \vee (A \vee C),$$

$$(k) \vdash_{L_1} (A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C)),$$

$$(l) \vdash_{L_1} (C \supset A) \supset ((A \supset B) \supset (C \supset B)),$$

$$(m) A \supset (B \supset C), A \supset B \vdash_{L_1} A \supset (A \supset C),$$

$$(n) A \supset (B \supset C), A \supset B \vdash_{L_1} A \supset C,$$

$$(o) \text{ եթե } \Gamma, A \vdash_{L_1} B, \text{ ապա } \Gamma \vdash_{L_1} A \supset B \text{ (դեդուկցիայի թեորեմ),}$$

$$(p) B \supset A, \neg B \supset A \vdash_{L_1} A,$$

$$(q) \vdash_{L_1} A \text{ այն և միայն այն դեպքում, երբ } A\text{-ն նույնաբանություն է:}$$

2. Ապացուցել, որ.

$$(a) A \supset B, B \supset C \vdash_{L_2} \neg(\neg C \& A),$$

$$(b) \vdash_{L_2} \neg(A \& A),$$

$$(c) \vdash_{L_2} \neg \neg A \supset A,$$

$$(d) \vdash_{L_2} \neg(A \& B) \supset (B \supset \neg A),$$

- (e) $\vdash_{L_2} A \supset \neg \neg A$,
- (f) $\vdash_{L_2} (A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$,
- (g) $\neg A \supset \neg B \vdash_{L_2} B \supset A$,
- (h) $A \supset B \vdash_{L_2} C \& A \supset B \& D$,
- (i) $A \supset B, B \supset C, C \supset D \vdash_{L_2} A \supset D$,
- (j) $\vdash_{L_2} A \supset A$,
- (k) $\vdash_{L_2} A \& B \supset B \& A$,
- (l) $A \supset B, B \supset C \vdash_{L_2} A \supset C$,
- (m) $A \supset B, C \supset D \vdash_{L_2} A \& C \supset B \& D$,
- (n) $B \supset C \vdash_{L_2} A \& B \supset A \& C$,
- (o) $\vdash_{L_2} (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \& B) \supset C)$,
- (p) $\vdash_{L_2} ((A \& B) \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))$,
- (q) $A \supset B, A \supset (B \supset C) \vdash_{L_2} A \supset C$,
- (r) $\vdash_{L_2} A \supset (B \supset A \& B)$,
- (s) $\vdash_{L_2} A \supset (B \supset A)$,
- (t) եթե $\Gamma, A \vdash_{L_2} B$, ու $\Gamma \vdash_{L_2} A \supset B$ (դեդուկցիայի թեորեմ),
- (u) $\vdash_{L_2} (\neg A \supset A) \supset A$,
- (v) $A \supset B, \neg A \supset B \vdash_{L_2} B$,
- (w) $\vdash_{L_2} A$ այն և միայն այն դեպքում, երբ A -ն նույնաբանություն է:

3. Ապացուցել, որ.

- (a) $\vdash_{L_4} A \supset A$,
- (b) եթե $\Gamma, A \vdash_{L_4} B$, ու $\Gamma \vdash_{L_4} A \supset B$ (դեդուկցիայի թեորեմ),
- (c) $A \supset B, B \supset C \vdash_{L_4} A \supset C$,
- (d) $\vdash_{L_4} (A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$,
- (e) $B, \neg B \vdash_{L_4} C$,
- (f) $\vdash_{L_4} B \supset \neg \neg B$,
- (g) $\vdash_{L_4} \neg B \supset (B \supset C)$,
- (h) $\vdash_{L_4} B \supset (\neg C \supset \neg (B \supset C))$,
- (i) $\vdash_{L_4} \neg B \supset (\neg C \supset \neg (B \vee C))$,

(j) $\vdash_{L_4} (\neg B \supset A) \supset ((B \supset A) \supset A)$,

(k) $\vdash_{L_4} A$ այն և միայն այն դեպքում, երբ A -ն նույնաբանություն է:

Աստվթային հաշվի համար կարող են կառուցվել համակարգեր նաև միայն մեկ հենաստյոթի սխեմայով:

Օրինակ, եթե մենք վերցնում ենք $\neg$ և $\supset$, ապա միայն *modus ponens* կանոնով բավարար է հետևյալ հենաստյոթի սխեման (Մերեդիտ).

$$[((A \supset B) \supset (\neg C \supset \neg D)) \supset E] \supset [(E \supset A) \supset (D \supset A)]:$$

Այս տեսակի մեկ այլ օրինակ կարող է ծառայել Նիկոդի համակարգը, որում օգտագործվում է միակ գործողությունը՝ Շեֆերի ֆունկցիա (ժխտումների դիզունկցիա) տրամաբանական կապը: Հենաստյոթի սխեման է.

$$(A|(B|C))|\{[D|(B|D)]|[E|B]|((A|E)|(A|E))\},$$

և միակ արտաձման կանոնով՝ C -ն հետևում է A -ից և $A|(B|C)$ -ից (Նիկոդ):

ԳԼՈՒԽ 2. ՊՐԵԴԻԿԱՏԱՑԻՆ ՀԱՇԻՎ P

Նախ պարզ օրինակի վրա համոզվենք ասույթային հաշվի անբավարար լինելու մեջ որոշ ճիշտ դատողություններ կատարելու հարցում: Դիտարկենք հետևյալ երեք պարզ ասույթները.

1. Արմենը Անուշի եղբայրն է:
2. Սուրենը Անուշի եղբայրն է:
3. Արմենն ու Սուրենը եղբայրներ են:

Ակնհայտ է, որ առաջին երկուսի ճշմարիտ լինելուց բխում է երրորդի ճշմարտությունը: Եթե փորձենք այդ եզրահանգումը ներկայացնել ասույթային հաշվի $p_1 \& p_2 \supset p_3$ բանաձևի տեսքով, ապա դժվար չէ տեսնել, որ այն նույնաբանություն չէ, քանի որ տրամաբանական փոփոխականները ասույթային հաշվում ընդունում են արժեքներն իրարից անկախ, իսկ դիտարկված ասույթներում առկա են կրկնվող անձինք, հետևաբար փոփոխականների արժեքները պետք է լինեն փոխկապակցված: Դիտարկված պնդումները իրականում որոշակի հարաբերություններ են, այսինքն՝ պրեդիկատներ.

$P_1(x, y)$ ՝ « x -ը y -ի եղբայրն է»,

$P_2(x, y)$ ՝ « x -ը և y -ը եղբայրներ են»,

որոնց օգտագործմամբ կարելի է համոզվել, որ x, y, z փոփոխականների կամայական արժեքների համար $P_1(x, y) \& P_1(z, y) \supset P_2(x, z)$ բանաձևի արժեքը ճիշտ է:

Նշենք նաև այլ հանգամանք: Հաճախ մենք գործածում ենք «կամայական բնական թվի համար» արտահայտությունը, որը նշանակում է «1-ի համար», «2-ի համար», «3-ի համար» և այդպես շարունակ, սակայն հնարավոր չէ բանաձևում ունենալ անվերջ քանակությամբ & նիշը, ինչը ստիպում է ֆորմալ տեսությունում ներգրավել $\forall$ ընդհանրության ծավալիչ նիշը:

Այսպիսով՝ անհրաժեշտ է դառնում էապես հարստացնել ասույթային հաշիվը:

Նախնական գաղափարներ

P պրեդիկատային հաշվի սահմանումը

I. Լեզու

1. Այբուբեն

ա. $\supset \vee ()$,

բ. $a_i, 1 \leq i$ առարկայական հաստատուններ, որոնց բազմությունը կարող է լինել դատարկ, վերջավոր ու անվերջ,

գ. $x_i, i \geq 1$ առարկայական փոփոխականներ, որոնց բազմությունը պետք է լինի միայն անվերջ,

դ. $f_i^{l_i}, i \geq 1$ ֆունկցիոնալ փոփոխականներ, որոնցում l_i -ն ցույց է տալիս ֆունկցիայի չափողականությունը՝ փոփոխականների քանակը: Ֆունկցիոնալ փոփոխականների բազմությունը կարող է լինել դատարկ, վերջավոր ու անվերջ: Եթե ֆունկցիոնալ փոփոխականների բազմությունը դատարկ է, ապա պրեդիկատային հաշիվը կոչվում է **մաքուր** պրեդիկատային հաշիվ:

ե. $P_i^{k_i}, i \geq 1$, պրեդիկատային փոփոխականներ, որոնցում k_i -ն ցույց է տալիս հարաբերության չափողականությունը: Պրեդիկատային փոփոխականների բազմությունը չի կարող լինել դատարկ: Այն կարող է լինել վերջավոր կամ անվերջ:

2. Թերմ

ա. Ցանկացած a_i առարկայական հաստատուն թերմ է:

բ. Ցանկացած x_i առարկայական փոփոխական թերմ է:

գ. Եթե $f_i^{l_i}$ ֆունկցիոնալ փոփոխական է, և $t_1, t_2, \dots, t_{l_i}$ թերմեր են, ապա $f_i^{l_i}(t_1, t_2, \dots, t_{l_i})$ -ն թերմ է:

դ. Այլ թերմեր չկան:

3. Տարրական բանաձև

Եթե $P_i^{k_i}$ պրեդիկատային փոփոխական է և $t_1, t_2, \dots, t_{k_i}$ թերմեր են, ապա $P_i^{k_i}(t_1, t_2, \dots, t_{k_i})$ -ն տարրական բանաձև է:

4. Բանաձև

ա. Տարրական բանաձևը բանաձև է:

բ. Եթե A -ն և B -ն բանաձևեր են, ապա $(A \supset B)$ -ն բանաձև է:

գ. Եթե A -ն բանաձև է, ապա $(\neg A)$ -ն բանաձև է:

դ. Եթե A -ն բանաձև է և x_i -ն առարկայական փոփոխական է, ապա $(\forall x_i A)$ -ն բանաձև է (այս դեպքում A -ն ծավալիչի ազդեցության տիրույթ է):

ե. Այլ բանաձևեր չկան:

Պարզաբանում

Մենտա- (հունարեն *μετά-*) բարդ բառերի մասնիկը շատ բազմիմաստ է, մասնավորապես որպես անցում այլ իրավիճակի, որպես փոխակերպում: Մեր դասընթացում, ֆորմալ տեսությունների փոփոխականներից, թերմերից, բանաձևերից, թեորեմներից բացի, կգործածենք նաև փոփոխականներ, թերմեր, բանաձևեր, թեորեմներ գաղափարները տեսությունից դուրս, որոնք կանվանենք մետափոփոխականներ, մետաթերմեր, մետաբանաձևեր, մետաթեորեմներ: Յուրաքանչյուր անգամ դա չշեշտելու համար ֆորմալ տեսության փոփոխականները կգրենք են **թեք**, իսկ տեսությունից դուրս, այսինքն՝ մետափոփոխականները՝ **ուղիղ**: Բնականաբար, տեսության թերմերը, բանաձևերը ստանում են թեք, իսկ մետաթերմերը, մետաբանաձևերը՝ ուղիղ գրառումներ: Ֆորմալ տեսության թեորեմներ են տեսության մեջ արտածված բանաձևերը

(դրանցով արտահայտված պնդումները), իսկ ֆորմալ տեսությունից դուրս իրեն իսկ որոշակի հատկությունների մասին պնդումները մետաթեորեմներ են, օրինակ՝ պնդումների տեսության լրիվության, անհակասելիության, լուծելիության և որևէ այլ հատկությունների վերաբերյալ:

Նշված գաղափարները լավ պատկերացնելու համար դիտարկենք դեռ դպրոցից հայտնի հետևյալ բանաձևը՝ $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$: Աջ մասում տեղադրելով բոլոր փակագծերը որոշակի եղանակով՝ կստանանք $(x^2 + ((2(xy)) + y^2))$: Ներմուծենք f_1^2, f_2^2, f_3^1 ֆունկցիոնալ ու P_1^2 պրեդիկատային փոփոխականները հետևյալ ֆունկցիաների ու պրեդիկատի համար.

$$f_1^2(x, y) \text{՝ } x + y, \quad f_2^2(x, y) \text{՝ } x \cdot y, \quad f_3^1(x) \text{՝ } x^2, \quad P_1^2(t_1, t_2) \text{՝ } t_1 = t_2:$$

Դժվար չէ համոզվել, որ մենք ունենք հետևյալ տարրական բանաձևը.

$$P_1^2 \left(f_3^1 \left(f_1^2(x_1, x_2) \right), \quad f_1^2 \left(f_3^1(x_1), f_2^2 \left(2, f_2^2(x_1, x_2) \right), f_3^1(x_2) \right) \right):$$

Մինչ հենասույթների սահմանումը ներմուծենք մի քանի գաղափարներ:

Սահմանում

x_i փոփոխականի **մուտքը** տվյալ A բանաձևում կոչվում է **կապված**, եթե այն կամ անմիջապես ծավալիչից հետո է կամ գտնվում է ըստ այդ փոփոխականի ծավալիչի ազդեցության տիրույթում:

Սահմանում

Փոփոխականի **մուտքը** կոչվում է **ազատ**, եթե այն կապված չէ:

Մահմանում

Փոփոխականը կոչվում է **ազատ** A բանաձևում, եթե այն այդ բանաձևում ունի գոնե մեկ ազատ մուտք:

Մահմանում

Բանաձևը կոչվում է **փակ**, եթե այն չունի ոչ մի ազատ փոփոխական:

Մահմանում

t թերմն **ազատ է** $A(x)$ բանաձևում x փոփոխականի փոխարեն **տեղադրման համար**, եթե x -ն $A(x)$ -ում ազատ է, և t թերմը չի պարունակում այնպիսի փոփոխական, ըստ որի՝ ծավալիչի ազդեցության տիրույթում գտնվում է x -ի ազատ մուտքը $A(x)$ -ում:

Օրինակ՝ հետևյալ՝

$$\forall x_3 (\forall x_1 (P_1^2(x_1, x_2) \supset \neg P_1^2(x_3, x_2))) \supset \forall x_2 P_1^2(x_1, x_2))$$

բանաձևում x_1 -ի առաջին ու երկրորդ մուտքերը կապված են, իսկ երրորդը՝ ազատ:

x_2 -ի առաջին ու երկրորդ մուտքերը ազատ են, իսկ երրորդն ու չորրորդը՝ կապված:

x_3 -ի երկու մուտքերը կապված են:

Այսպիսով՝ x_1 ու x_2 փոփոխականները ազատ են տրված բանաձևում, քանի որ ունեն ազատ մուտքեր, իսկ x_3 -ը ազատ չէ:

$t = x_1 + 1$ թերմը ազատ է տեղադրման համար միայն x_1 -ի փոխարեն, իսկ $t = x_1 + x_2$ ոչ մի փոփոխականի փոխարեն տեղադրման համար ազատ չէ:

Մեկնաբանություն

Յուրաքանչյուր բանաձև որոշակի իմաստ է ընդունում, երբ հայտնի են նրա մեջ եղած նիշերի իմաստները:

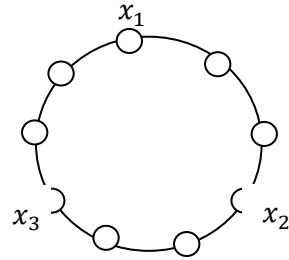
Օրինակ՝

ա) $x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$,

- եթե այս արտահայտության փոփոխականների արժեքները թվեր են, կետը ընկալվում է որպես բազմապատկում, = նիշը՝ որպես թվերի հավասարություն, ապա բանաձևը միշտ ճիշտ է,
- եթե այս արտահայտության փոփոխականների արժեքները մատրիցներ են, կետը ընկալվում է որպես բազմապատկում, = նիշը՝ որպես մատրիցների հավասարություն, ապա բանաձևը ոչ միշտ է ճիշտ:

բ) $x_1 < x_2 \supset (x_2 < x_3 \supset x_1 < x_3)$ և $x_1 < x_2 \supset (x_2 < x_3 \supset x_3 < x_1)$,

- եթե այս արտահայտություններում փոփոխականների արժեքները թվեր են, < նիշ ասելով՝ հասկանում ենք թվերի համեմատման գործողությունը, ապա առաջին բանաձևը միշտ ճիշտ է, իսկ երկրորդը՝ սխալ,



- եթե այս արտահայտություններում փոփոխականների արժեքները աջից բերված պատկերի շրջանագծի վրայի կետեր են, < նիշը հասկացվում է հետևյալ կերպ. երկրորդ կետը գտնվում է առաջինից ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ շրջանագծի մեկ երրորդի հեռավորու-

թյամբ, ապա առաջին բանաձևը սխալ է, իսկ երկրորդը՝ ճիշտ:

Սահմանում

Ենթադրենք M -ն ինչ-որ բանաձևերի բազմություն է: Այս բազմության համար **մեկնաբանություն** ասելով՝ կհասկանանք հետևյալը.

1. ընտրված է առարկայական դաշտը,
2. եթե M -ի բանաձևերում առկա են առարկայական հաստատուններ, ապա պետք է նշել, թե դրանցից յուրաքանչյուրը առարկայական դաշտից որ մեկն է,
3. եթե M -ի բանաձևերում առկա են ֆունկցիոնալ փոփոխականներ, ապա պետք է նշել, թե ընտրված առարկայական դաշտի տարրերի վրա ինչ ֆունկցիաներ են համապատասխանում դրանցից յուրաքանչյուրին,
4. պրեդիկատային փոփոխականներից յուրաքանչյուրին պետք է համապատասխանացնել ինչ-որ հարաբերություն:

Սահմանում

Բանաձևը կոչվում է ***հրազործելի*** տվյալ մեկնաբանության համար, եթե գոյություն ունի նրա ազատ առարկայական փոփոխականների արժեքների այնպիսի հավաքածու, որ բանաձևն ընդունում է ճիշտ արժեք:

Սահմանում

Բանաձևը կոչվում է ***նույնաբանություն*** տվյալ մեկնաբանության համար, եթե նրա ազատ առարկայական փոփոխականների արժեքների կամայական հավաքածուի համար բանաձևն ընդունում է ճիշտ արժեք:

Մահմանում

Բանաձևը կոչվում է **հակասություն** տվյալ մեկնաբանության համար, եթե նրա ազատ առարկայական փոփոխականների արժեքների կամայական հավաքածուի համար բանաձևն ընդունում է սխալ արժեք:

Օրինակ՝ ենթադրենք M -ը պարունակում է միայն

$$P_1^2(f_1^2(x_1, f_2^2(x_2, x_3)), f_2^2(f_1^2(x_1, x_2), f_1^2(x_1, x_3)), a_1))$$

բանաձևը: Դիտարկենք տարբեր մեկնաբանություններ:

Մեկնաբանություն I

1. Որպես առարկայական դաշտ վերցնենք N -ը՝ բնական թվերն ու 0-ն:

2. Միակ a_1 առարկայական հաստատունին վերագրենք 0 արժեքը:

3. f_1^2 և f_2^2 ֆունկցիոնալ փոփոխականներին համապատասխանաբար վերագրենք $x \cdot y$ և $x + y$ երկտեղանի թվաբանական ֆունկցիաները:

4. P_1^2 պրեդիկատային փոփոխականին համապատասխանեցնենք $t_1 = t_2$ թվաբանական հարաբերությունը:

Այս դեպքում բանաձևը ստանում է հետևյալ տեսքը՝

$$x_1 \cdot (x_2 + x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + 0:$$

Այս մեկնաբանության համար բանաձևը նույնաբանություն է:

Մեկնաբանություն II

1. Որպես առարկայական դաշտ վերցնենք N -ը՝ բնական թվերն ու 0-ն:

2. Միակ a_1 առարկայական հաստատունին վերագրենք 0 արժեքը:

3. f_1^2 և f_2^2 ֆունկցիոնալ փոփոխականներին համապատասխանեցնենք $x + y$ և $x \cdot y$ երկտեղանի թվաբանական ֆունկցիաները:

4. P_1^2 պրեդիկատային փոփոխականին համապատասխանեցնենք $t_1 = t_2$ թվաբանական հարաբերությունը:

Այս դեպքում բանաձևը ստանում է հետևյալ տեսքը՝

$$x_1 + x_2 \cdot x_3 = (x_1 + x_2) \cdot (x_1 + x_3) \cdot 0:$$

Այս մեկնաբանության համար բանաձևն իրագործելի է:

Մեկնաբանություն III

1. Որպես առարկայական դաշտ վերցնենք N -ը՝ բնական թվերը ու 0-ն:

2. Միակ a_1 առարկայական հաստատունին վերագրենք 0 արժեքը:

3. f_1^2 և f_2^2 ֆունկցիոնալ փոփոխականներին համապատասխանեցնենք $x \cdot y$ և $x + y$ երկտեղանի թվաբանական ֆունկցիաները:

4. P_1^2 պրեդիկատային փոփոխականին համապատասխանեցնենք $t_1 > t_2$ թվաբանական հարաբերությունը:

Այս դեպքում բանաձևը ստանում է հետևյալ տեսքը՝

$$x_1 \cdot (x_2 + x_3) > x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + 0:$$

Այս մեկնաբանության համար բանաձևը հակասություն է:

Սահմանում

Բանաձևը կոչվում է *համապիտանիորեն ճիշտ*, եթե կամայական մեկնաբանության համար այն նույնաբանություն է: Օրինակ՝ $A \supset A$:

Բնական է, որ հենասույթները պետք է լինեն համապիտանիորեն ճիշտ բանաձևեր:

Շարունակենք պրեդիկատային հաշվի նկարագրությունը:

II. Հենասույթներ

Պրեդիկատային հաշվի ցանկացած A, B, C բանաձևերի համար հետևյալ տիպի բանաձևերը հենասույթներ են.

1. $A \supset (B \supset A)$,
2. $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$,
3. $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$,
4. $\forall x A(x) \supset A(t)$ * (եթե t թերմն ազատ է տեղադրման համար A -ում x -ի փոխարեն),
5. $\forall x (A \supset B) \supset (A \supset \forall x B)$ ** (եթե x -ը A -ում ազատ չէ):

Դիտողություն

Ուշադրություն դարձնենք, որ առաջին երեք սխեմաներով տրված հենասույթները ակնհայտորեն համապիտանորեն ճիշտ են, մինչդեռ չորրորդ ու հինգերորդ սխեմաներում առկա են սահմանափակումներ, որոնք բավարար են համապատասխան հենասույթների համապիտանիորեն ճիշտ լինելու համար: Վերհիշենք նախաբանում բերված երկրորդ օրինակը, որում բավարարված չէ չորրորդ սխեմայի սահմանափակումը տեղադրվող թերմի վերաբերյալ, ինչի պատճառով տեղադրման արդյունքում ստացված բանաձևի արժեքը սխալ է:

III. Արտածման կանոններ

1. *modus ponens*

$$\frac{A, A \supset B}{B}$$

2. *Gen (Generalization)* ընդհանրացման կանոն

$$\frac{A(x)}{\forall x A(x)}$$

Այս համակարգում հանգունորեն սահմանվում են արտաձման, արտաձեղիության, նախադրյալներից արտաձման գաղափարները:

Սահմանված համակարգը բոլոր այլ ֆորմալ տեսությունների տրամաբանական հիմքն է, սակայն յուրաքանչյուր առանձին համակարգ կարող է ունենալ նաև իր սեփական հետաույթները:

Դեդուկցիայի թեորեմը պրեդիկատային հաշվի համար թեորեմ

Եթե Γ -ից և A -ից պրեդիկատային հաշվում արտաձվում է B -ն, այսինքն՝ $\Gamma, A \vdash_P B$, և այդ արտաձման մեջ չի կիրառվել *Gen* կանոնը՝ ըստ A -ի որևէ ազատ փոփոխականի, ապա Γ -ից արտաձվում է $A \supset B$:

Այսինքն՝

$$\frac{\Gamma, A \vdash_P B}{\Gamma \vdash_P A \supset B}$$

Ապացույց

$\Gamma, A \vdash_P B$, ապա ըստ սահմանման՝

$$\begin{array}{c} \Gamma, A \vdash_P B_1 \\ B_2 \\ \dots\dots\dots \\ B_n \end{array}$$

որում յուրաքանչյուր B_i կա՛մ հենասույթ է, կա՛մ Γ բազմությունից է, կա՛մ A բանաձևն է, կա՛մ ստացվում է նախորդներից *m.p.* կա՛մ *Gen* կանոններով, և $B_n = B$:

$B_1, B_2, \dots, B_i, \dots, B_n$ բանաձևերի առջևից ավելացնենք $A \supset$:

$$\begin{array}{c} A \supset B_1 \\ A \supset B_2 \\ \dots \\ A \supset B_n \end{array} \tag{1}$$

Ստացվածը արդեն կարող է արտածում չլինել: Ավելացնենք այնպիսի բանաձևեր, որ (1)-ը դառնա արտածում միայն Γ նախադրյալներից:

1. Եթե B_i -ն հենասույթ է կամ Γ բազմությունից է, ապա $(A \supset B_i)$ -ից առաջ ավելացնենք.

$\vdash_P B_i$ նախադրյալ է Γ -ից կամ հենասույթ ու

$\vdash_P B_i \supset (A \supset B_i)$ հենասույթ 1 և կստանանք

$\vdash_P (A \supset B_i) m.p.$:

2. Եթե $B_i = A$, ապա $A \supset B_i$ -ից առաջ ավելացնենք $A \supset A$ բանաձևի արտածման չորս բանաձևերը, որոնք այստեղ ևս արտածվում են, քանի որ այդ արտածման մեջ օգտագործվում են առաջին, երկրորդ հենասույթների սխեմաներն ու $m.p.$ կանոնը, որոնք պրեդիկատային համակարգում ևս առկա են:

3. Եթե B_i -ն ստացվել է նախորդներից $m.p.$ կանոնով, այսինքն՝ սկզբնական արտածման մեջ առկա են.

$$\vdash_P B_j \quad j < i$$

$$\vdash_P B_j \supset B_i$$

$$\vdash_P B_i m.p.,$$

ապա, ըստ ապացույցի 1. և 2. կետերի, ունենք $A \supset B_j$ և $A \supset (B_j \supset B_i)$ բանաձևերը: Կստանանք.

$\vdash_P (A \supset B_i)$, որում $j < i$ ՝ ըստ 1, 2 կետերի,

$\vdash_P A \supset (B_j \supset B_i)$ ՝ ըստ 1, 2 կետերի և, ավելացնելով,

$\vdash_P (A \supset B_j) \supset ((A \supset (B_j \supset B_i)) \supset (A \supset B_i))$ հենասույթ 2,

ու

$\vdash_P ((A \supset (B_j \supset B_i)) \supset (A \supset B_i)) m.p.$, կստանանք

$\vdash_P (A \supset B_i) m.p.$:

4. Եթե B_i -ն ստացվել է նախորդից *Gen* կանոնով, այսինքն՝ սկզբնական արտածման մեջ առկա են՝ $B_k, k < i$ և $B_i \equiv \forall x B_k$, ապա ըստ 1, 2 և 3 կետերի՝ ունենք $A \supset B_k$ բանաձևը: $A \supset B_i$ -ից առաջ ավելացնենք

$$\forall x(A \supset B_k) \text{ Gen և}$$

$$\forall x(A \supset B_k) \supset (A \supset \forall x B_k) \text{ ** հենասույթ 5:}$$

Հիշեցնենք, որ ** սահմանափակումը պահանջում է, որ x -ը A -ում ազատ չլինի, ինչի պատճառով առկա է թեորեմի ձևակերպման սահմանափակումը:

Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն

Դեդուկցիայի թեորեմը ասությանյին հաշվում լրացուցիչ արտաձման կանոն էր, ինչի հիման վրա ներմուծվեցին նաև օժանդակ այլ կանոններ՝ սիլլոգիզմները, տրամաբանական գործողությունների ներմուծման ու արտաքսման կանոնները: Հաշվի առնելով, որ ասությանյին հաշվում դրանց հիմնավորումներում չի կիրառվել *Gen* կանոնը, կարող ենք պնդել, որ բոլոր այդ կանոնները առանց որևէ սահմանափակման կիրառելի են նաև պրեդիկատային հաշվում, հետևաբար ասությանյին հաշվում նույնաբանություն հանդիսացող բանաձևերում տրամաբանական փոփոխականները տարրական բանաձևերով փոխարինելով (նույները՝ նույներով, տարբերները՝ տարբերներով) կստանանք պրեդիկատային հաշվի բանաձևեր, որոնք ակնհայտորեն կարտածվեն պրեդիկատային հաշվում:

Ծավալիչների ներմուծման ու արտաքսման կանոններ

Այս համակարգում առկա է $\forall$ - ընդհանրության ծավալիչը, $\exists$ - գոյության ծավալիչը ներմուծենք հետևյալ բնական եղանակով՝ $\exists x A(x) \equiv \neg \forall x \neg A(x)$:

Ծավալիչ	Ներմուծում	Արտաքսում
$\forall$	$\frac{A(x)}{\forall x A(x)}$ Правило Gen	$1. \frac{\forall x A(x)}{A(t)} *$

$\exists$	2. $\frac{A(t)}{\exists x A(x)} *$	3. $\frac{\exists x A(x)}{A(x)} **$
-----------	------------------------------------	-------------------------------------

Հիմնավորենք 1-3 կանոնները՝ հաշվի առնելով դրանցում նշված սահմանափակումները:

1. $\forall x A(x) \vdash_P A(t)$

$\vdash_P \forall x A(x)$	նախադրյալ
$\vdash_P \forall x A(x) \supset A(t) *$	հենասույթ 4
$\vdash_P A(t)$	<i>m. p.</i>

2. $A(t) \vdash_P \neg \forall x \neg A(x)$

Ժխտման ներմուծման կանոնի համաձայն՝	
$A(t), \forall x \neg A(x) \vdash_P \forall x \neg A(x)$	նախադրյալ
$\vdash_P \neg A(t) * \forall$	արտաքսում
$\vdash_P A(t)$	նախադրյալ
$A(t) \vdash_P \neg \forall x \neg A(x) \neg$	ներմուծում

3. $\neg \forall x \neg A(x) \vdash_P A(x)$

$\neg \forall x \neg A(x), \neg A(x) \vdash_P \neg A(x)$	նախադրյալ
$\vdash_P \forall x \neg A(x) \text{ Gen } \text{ըստ } A\text{-ի ազատ փոփոխականի}$	
$\vdash_P \neg \forall x \neg A(x)$	նախադրյալ
$\neg \forall x \neg A(x) \vdash_P A(x) \neg$	արտաքսում

ինչի համար կիրառվում են դեդուկցիայի թեորեմը արտածված երկու հակադիր բանաձևերի նկատմամբ և երրորդ հենասույթը, դրանից էլ առաջանում է ** սահմանափակումը:

Արտածման օժանդակ Choice կանոն (C-կանոն)

Մաթեմատիկական ապացույցներում հաճախ կիրառվում են հետևյալ տիպի դատողություններ: Ենթադրենք՝ ապացուցվել է $\exists x A(x)$ տեսքի պնդումը, և դիցուք b -ն այնպիսի մի օբյեկտ է, որի համար տեղի ունի $A(b)$: Շարունակելով հետագա դատողություններում $A(b)$ -ի օգտագործումը, այսինքն՝

կատարելով ընտրություն (Choice)՝ գալիս ենք մի վերջնական պնդմանը, որն այդ կամայականորեն ընտրված b -ն չի պարունակում, հետևաբար դրանից կախված չէ: Արտածումներում $\exists x A(x)$ բանաձևից անցումը $A(b)$ -ին կոչվում է **C-կանոն**: Դժվար չէ ապացուցել, որ C-կանոնի կիրառմամբ արտածումների վրա դնելով որոշակի բնական սահմանափակումներ՝ կարելի է այն վերածել նույն եզրափակիչ բանաձևի արտածմանը առանց C-կանոնի կիրառման (տե՛ս [1]):

Օրինակներով ցուցադրենք որոշակի բանաձևի C-կանոնի կիրառմամբ ու նույն բանաձևի առանց C-կանոնի կիրառմամբ արտածումները:

Ենթադրենք պետք է ապացուցել, որ.

$\exists x(B(x) \supset C(x)), \forall x B(x) \vdash \exists x C(x)$:

C-կանոնի կիրառմամբ՝

1. $\exists x(B(x) \supset C(x))$ նախադրյալ

2. $B(b) \supset C(b)$ C-կանոն

3. $\forall x B(x)$ նախադրյալ

4. $B(b) \vee$ արտաքսում *

5. $C(b)$ *m.p.*

$\exists x C(x) \exists$ ներմուծում **

Դիտարկենք առանց C-կանոնի կիրառման արտածումը:

Արտածելու համար $\exists x C(x)$, այսինքն՝ $\neg \forall x \neg C(x)$, բավական է առանց ժխտման վերցնել որպես նախադրյալ և գալ հակասության:

1. $\forall x B(x)$ նախադրյալ

2. $\forall x \neg C(x)$ նախադրյալ

3. $B(x) \vee$ * արտաքսում

4. $\neg C(x) \vee$ * արտաքսում

6. $\forall x \neg(B(x) \supset C(x)) \vee$ ներմուծում, այսպիսով՝

7. $\forall x B(x), \forall x \neg C(x) \vdash \forall x \neg(B(x) \supset C(x))$

8. $\forall x B(x) \vdash \forall x \neg C(x) \supset \forall x \neg (B(x) \supset C(x))$ դեդուկցիայի թեորեմ

9. $\forall x B(x) \vdash \neg \forall x \neg (B(x) \supset C(x)) \supset \neg \forall x \neg C(x)$ արտաձել համապիտանիորեն ճիշտ $(C \supset B) \supset (\neg B \supset \neg C)$ հրաշալի բանաձևը և կիրառել m.p.

10. $\forall x B(x) \vdash \exists x (B(x) \supset C(x)) \supset \exists x C(x)$ նույն բանաձևի կրճատ գրառումը

11. $\exists x (B(x) \supset C(x)), \forall x B(x) \vdash \exists x (B(x) \supset C(x))$ նախադրյալ

12. $\exists x (B(x) \supset C(x)), \forall x B(x) \vdash \exists x C(x)$ m.p.

Նշված օրինակների դիտարկմամբ համոզվում ենք, որ C -կանոնի կիրառումը, ինչպես յուրաքանչյուր օժանդակ կանոնի կիրառում, կրճատում է արտաձման քայլերի քանակը:

Նախաձավալային տեսք

Սահմանում

Տարբեր x_i և x_j փոփոխականների համար $A(x_i)$ ու $A(x_j)$ բանաձևերը կոչվում են **հանգունակ**, եթե $A(x_i)$ -ն ունի x_i փոփոխականի ազատ մուտքերը ճիշտ այն տեղերում, որտեղ $A(x_j)$ -ն ունի x_j փոփոխականի ազատ մուտքերը:

Պնդում (կապված փոփոխականի վերանվանման կանոն - կփվ)

Եթե $A(x_i)$ և $A(x_j)$ բանաձևերը հանգունակ են, և $\vdash_P \forall x_i A(x_i)$, ապա $\vdash_P \forall x_j A(x_j)$:

Ապացույց

$\vdash_P \forall x_i A(x_i)$

$\vdash_P \forall x_i A(x_i) \supset A(x_j)$ հենասույթ 4 (* սահմանափակումը տեղի ունի)

$\vdash_P A(x_j)$ m.p.

$\vdash_P \forall x_j A(x_j)$ Gen.

Մահմանում

Կասենք, որ A բանաձևն ունի *նախաձավալչային կառուցվածք*, եթե այն հետևյալ տեսքի է՝ $Rx_{i_1}Rx_{i_2}\cdots Rx_{i_k}B$, որում $R \in \{\forall, \exists\}$, $k \geq 0$, $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ իրարից տարբեր փոփոխականներ են, և B բանաձևը ծավալիչ չի պարունակում:

Պնդում

Կամայական A բանաձևի համար գոյություն ունի այնպիսի A' նախաձավալչային կառուցվածքի բանաձև, որ $\vdash_P A \equiv A'$:

Այս պնդումն ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ, որ պրեդիկատային հաշվում արտածվում են հետևյալ բանաձևերը, որոնցում y -ն ազատ չէ $n' \geq A(x)$ -ում, $n' \geq B$ -ում.

1. $\forall x A(x) \supset B \equiv \exists y (A(y) \supset B)$,
2. $B \supset \forall x A(x) \equiv \forall y (B \supset A(y))$,
3. $\exists x A(x) \supset B \equiv \forall y (A(y) \supset B)$,
4. $B \supset \exists x A(x) \equiv \exists y (B \supset A(y))$,
5. $\neg \forall x A(x) \equiv \exists x \neg A(x)$,
6. $\neg \exists x A(x) \equiv \forall x \neg A(x)$:

Քանի որ $A \equiv B$ կրճատ նշանակում է $(A \supset B) \& (B \supset A)$ բանաձևը, հաշվի առնելով $\&$ -ի ներմուծման կանոնը՝ 1-ին բանաձևի համար, օրինակ, արտածենք.

$$(\forall x A(x) \supset B) \supset \exists y (A(y) \supset B)$$

և հաշվի առնենք $\exists$ ծավալիչը ներկայացնող բանաձևը՝

$$\forall x A(x) \supset B \vdash_P \neg \forall y \neg (A(y) \supset B):$$

Ժխտման ներմուծման կանոնի համաձայն՝ բավական է $\forall x A(x) \supset B, \forall y \neg (A(y) \supset B)$ նախադրյալներից արտածել մեկը մյուսի ժխտումը հաղիսացող բանաձևեր:

$$\forall x A(x) \supset B, \forall y \neg (A(y) \supset B) \vdash_P \forall y \neg (A(y) \supset B) \text{ նախադրյալ}$$

$$\forall x A(x) \supset B, \forall y \neg (A(y) \supset B) \vdash_P \neg (A(y) \supset B) \text{ } \forall\text{-ի արտաքսում}$$

... արտաձենք համապիտանիորեն ճիշտ բանաձև
 $\neg(A \supset B) \supset A \& \neg B$

$\forall x A(x) \supset B, \forall y \neg(A(y) \supset B) \vdash_P \neg(A(y) \supset B) \supset A(y) \& \neg B$

$\forall x A(x) \supset B, \forall y \neg(A(y) \supset B) \vdash_P A(y) \& \neg B \text{ m.p.}$

$\forall x A(x) \supset B, \forall y \neg(A(y) \supset B) \vdash_P \neg B$ & արտաքսում

$\forall x A(x) \supset B, \forall y \neg(A(y) \supset B) \vdash_P A(y) \&$ արտաքսում

$\forall x A(x) \supset B, \forall y \neg(A(y) \supset B) \vdash_P \forall y A(y) \text{ Gen}$

....

$\forall x A(x) \supset B, \forall y \neg(A(y) \supset B) \vdash_P \forall x A(x)$ կփվ

$\forall x A(x) \supset B, \forall y \neg(A(y) \supset B) \vdash_P \forall x A(x) \supset B$ նախադրյալ

$\forall x A(x) \supset B, \forall y \neg(A(y) \supset B) \vdash_P B \text{ m.p.}$

Առաջարկվում է մնացած բանաձևերը արտաձել ինքնու-
 թույն՝ յուրաքանչյուրի համար արտաձման ընթացքում ընտ-
 րելով համապատասխան որոշակի համապիտանիորեն ճիշտ
 բանաձևը:

Ի լրումն 1-6 բանաձևերի՝ նշենք նաև համապատասխան
 բանաձևերը &-ի և $\vee$ -ի համար, որոնցից յուրաքանչյուրում y
 փոփոխականը ազատ չէ $n' \supset A(x)$ -ում, $n' \supset B$ -ում.

1. $\forall x A(x) \& B \equiv \forall y (A(y) \& B)$,

2. $\forall x A(x) \vee B \equiv \forall y (A(y) \vee B)$,

3. $\exists x A(x) \& B \equiv \exists y (A(y) \& B)$,

4. $\exists x A(x) \vee B \equiv \exists y (A(y) \vee B)$:

Համակարգի հիմնական հատկությունները

Թեորեմ

Պրեդիկատային հաշիվն անհակասելի է:

Ապացույց

Կամայական A բանաձևի համար սահմանենք $h(A)$ պատ-
 կեր հետևյալ եղանակով.

ա) բանաձևում ջնջվում են բոլոր ծավալիչներն իրենց կից փոփոխականներով ու փակագծերով,

բ) բանաձևում ջնջվում են բոլոր թերմերն իրենց հետ զուգակցվող ստորակետերով ու փակագծերով,

գ) ջնջվում են պրեդիկատային փոփոխականների վերին ինդեքսները, և մեծատառ P -երը դառնում են փոքրատառ p ՝ նույն ստորին ինդեքսով:

$$\text{Օրինակ՝ } h\left(\forall x_1 P_1^3(x_2, a_1, x_1) \supset P_2^1(x_2)\right) = (\neg p_1 \supset p_2):$$

Ակնհայտորեն $h(A)$ -ն ասույթային հաշվի բանաձև է.

1. $h(\neg A) = \neg h(A)$,
2. $h(A \supset B) = h(A) \supset h(B)$,
3. $h(\forall x A) = h(A)$:

Պրեդիկատային հաշվի 1-5 հենասույթների h -պատկերնե-րը նույնաբանություններ են (ասույթային հաշվի իմաստով): Եթե $h(A)$ -ն և $h(A \supset B)$ -ն նույնաբանություններ են, ապա $h(B)$ -ն ևս նույնաբանություն է: Եթե $h(A)$ -ն նույնաբանություն է, ապա նույնաբանություն է նաև $h(\forall x A)$ -ն: Հետևաբար, եթե A բանաձևն արտածվում է պրեդիկատային հաշվում, ապա $h(A)$ -ն նույնաբանություն է ասույթային հաշվում: Հետևաբար, եթե որևէ B բանաձևի համար արտածվեին B ու $\neg B$, ապա կստացվեր, որ $h(B)$ -ն ու $h(\neg B)$ -ն նույնաբանություններ են, ինչը հնարավոր չէ:

Թերոբեմն ապացուցված է:

Օգտագործելով յուրաքանչյուր բանաձևի համարժեք նախածավալչային տեսքի բերելու հանգամանքը, ծավալիչների արտաքսման կանոնները, ինչպես նաև մեկնաբանությունների մի շարք հետաքրքիր հատկությունները՝ ապացուցվում են ներքոհիշյալ պնդումները:

Գլուխի թերթերը պրեդիկատային հաշվի լրիվության մասին

Պրեդիկատային հաշվում արտածվում են այն և միայն այն բանաձևերը, որոնք համապիտանիորեն ճիշտ են (առանց ապացույցի):

Հայտնի են այս թերթերի բազմաթիվ տարբեր ապացույցներ (մասնավորապես [1], էջ 89), որոնցում նշված են նաև այլ ապացույցների հղումները:

Թերթեր

Պրեդիկատային հաշիվը լուծելի չէ (առանց ապացույցի):

ԳԼՈՒԽ 3. ՖՈՐՄԱԼ ԹՎԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Հիմնական գաղափարներ

I. Լեզու

1. Այբուբեն

ա. $\supset, \neg, \forall, ()$

բ. a_1 միակ առարկայական հաստատուն՝ 0:

գ. x_i առարկայական փոփոխականներ

դ. f_1^1, f_2^2 , և f_3^2 ֆունկցիոնալ փոփոխականներ, որոնց համապատասխանում են $x + 1$ (կրճատ՝ x'), $x + y$ և $x \cdot y$ ֆունկցիաները:

ե. P_1^2 միակ պրեդիկատային փոփոխական, որին համապատասխանում է $t = r$ հարաբերությունը:

2. Թերմ

Հանգումորեն, ինչպես պրեդիկատային հաշվում:

Միայն մասնակցում են $a_1, x_i, f_1^1, f_2^2, f_3^2$:

3. Տարրական բանաձև

Հանգումորեն, ինչպես պրեդիկատային հաշվում միայն P_1^2 -ի մասնակցությամբ:

4. Բանաձև

Հանգումորեն, ինչպես պրեդիկատային հաշվում:

II. Հենասույթներ

Ֆորմալ թվաբանության բանաձևերով ներկայացվող պրեդիկատային հաշվի տրամաբանական հենասույթներին՝

1. $A \supset (B \supset A)$,
2. $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$,
3. $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$,
4. $\forall x A(x) \supset A(t)$ *,
5. $\forall x (A \supset B) \supset (A \supset \forall x B)$ **,

ավելացվում են հետևյալ սեփական հենասույթները (u.h.).

1. $x_1 = x_2 \supset (x_1 = x_3 \supset x_2 = x_3)$
2. $x_1 = x_2 \supset x'_1 = x'_2$
3. $x'_1 = x'_2 \supset x_1 = x_2$
4. $0 \neq x'_1$ ֆորմալ գրառումը՝ $\neg P_1^2(a_1, f_1^1(x_1))$
5. $x_1 + 0 = x_1$
6. $x_1 + x'_2 = (x_1 + x_2)'$
7. $x_1 \cdot 0 = 0$
8. $x_1 \cdot x'_2 = x_1 \cdot x_2 + x_1$
9. Մակաձման հենասույթ (սխեմա)

$$A(0) \supset (\forall x(A(x) \supset A(x')) \supset \forall x A(x))$$

III. Արտաձման կանոններ

1. modus ponens $\frac{A, A \supset B}{B}$,

2. Gen՝ ընդհանրացման կանոն $\frac{A(x)}{\forall x A(x)}$:

Պարզաբանում

• 1-8 սեփական հենասույթները սխեմաներ չեն, այլ բանաձևեր են, և դրանք նույնպես հեշտությամբ հիշվում են իրենցով ներկայացվող իմաստով.

- 1-ը հավասարման տրանզիտիվության մի տարբերակը,
- 2, 3-ը, որ երկու բնական թվերի հավասարությունից հետևում է դրանց հաջորդների հավասարությունը և հակառակը,
- 4-ը նշում է, որ զրոն ոչ մի թվի հաջորդը չէ,
- 5, 6-ը պարզագույն կարգընթաց եղանակով սահմանում են գումարման գործողությունը,
- 7, 8-ը պարզագույն կարգընթաց եղանակով սահմանում են բազմապատկման գործողությունը,
- 9. նկարագրում է ապացուցման մակաձման եղանակը:

• Սեփական հենասույթների գրառումները **պայմանական գրառումներ են:**

Ուշադրություն դարձնենք հետևյալին.

Ֆորմալ գրառում	Պայմանական գրառում	Մեկնաբանություն
$f_1^1(x_1)$	x_1'	$x_1 + 1$
$f_2^2(x_1, x_2)$	$x_1 + x_2$	$x_1 + x_2$
$f_3^2(x_1, x_2)$	$x_1 \cdot x_2$	$x_1 \cdot x_2$
$P_1^2(x_1, x_2)$	$x_1 = x_2$	$x_1 = x_2$

Սեփական հենասույթ 6-ի պայմանական գրառումն է՝
 $x_1 + x_2' = (x_1 + x_2)'$, իսկ ֆորմալ գրառումը՝
 $P_1^2(f_2^2(x_1, f_1^1(x_2)), f_1^1(f_2^2(x_1, x_2)))$:

Բնական է, որ նման գրառումները կլինեին դժվարընկալելի:

Սահմանում

1-8 սեփական հենասույթների **թերմային պատկերները** (թ.պ.) ստացվում են՝ դրանցում x_1, x_2, x_3 փոփոխականների փոխարեն տեղադրելով թերմեր:

Պնդում

1.-8. սեփական հենասույթների թերմային պատկերներն արտածվում են ֆորմալ թվաբանությունում՝ **S** համակարգում:

Ապացույց

Ցուցադրենք ապացույցը, օրինակ, ս.հ. 3.-ի համար:

$$\begin{aligned} \vdash_S x_1' &= x_2' \supset x_1 = x_2 && \text{ս.հ. 3} \\ \vdash_S \forall x_1 (x_1' &= x_2' \supset x_1 = x_2) && \text{Gen} \\ \vdash_S t' &= x_2' \supset t = x_2 && \forall\text{-ի արտաքսում} \end{aligned}$$

$\vdash_S \forall x_2 (t' = x'_2 \supset t = x_2) \text{ Gen}$
 $\vdash_S t' = r' \supset t = r \quad \forall\text{-ի արտաքսում}$

Արտաձման լրացուցիչ կանոններ

1. 'ի ներմուծում

$$\frac{t = r}{t' = r'}$$

$t = r \vdash_S t = r \supset t' = r' \text{ u.h.2. թ.պ.}$

$\vdash_S t = r \quad \text{նախադրյալ}$
 $\vdash_S t' = r' \quad m.p.$

2. 'ի արտաքսում

$$\frac{t' = r'}{t = r}$$

$t' = r' \vdash_S t' = r' \supset t = r \text{ u.h.3.թ.պ.}$

$\vdash_S t' = r' \quad \text{նախադրյալ}$
 $\vdash_S t = r \quad m.p.$

3. Հավասարման տեղափոխելիություն (կոմուտատիվություն)

$$\frac{t = r}{r = t}$$

Նախ արտաձենք $t = t$ բանաձևը:

$\vdash_S t + 0 = t \supset (t + 0 = t \supset t = t) \text{ u.h.1.թ.պ.}$

$\vdash_S t + 0 = t \quad \text{u.h.5.թ.պ.}$

$\vdash_S t + 0 = t \supset t = t \quad m.p.$

$\vdash_S t = t \quad m.p.$

1. $t = r \vdash_S t = r \supset (t = t \supset r = t) \text{ u.h.1.թ.պ.}$

2. $\vdash_S t = r \quad \text{նախադրյալ}$

- | | |
|-----------------------------------|-----------------|
| 3. $\vdash_s t = t \supset r = t$ | <i>m.p.</i> 2,1 |
| 4. $\vdash_s t = t$ | արտածված բանաձև |
| 5. $\vdash_s r = t$ | <i>m.p.</i> 4,3 |

4. **Տրանզիտիվության տարբերակներ** (իսկությունը ապացուցել ինքնուրույն)

$$\frac{t = r \quad r = s}{t = s} \quad \frac{t = r \quad t = s}{r = s} \quad \frac{t = r \quad s = r}{t = s} \quad \frac{t = r \quad s = t}{r = s}$$

5. Մակաձման օժանդակ կանոն

$$\frac{\vdash_s A(0) \text{ և } A(x) \vdash_s A(x')}{\vdash_s \forall x A(x), \text{ ապա նաև } \vdash_s A(t)} *$$

- | | |
|--|------------------------|
| 1. $\vdash_s A(0)$ | նախապայման |
| 2. $A(x) \vdash_s A(x')$ | նախապայման |
| 3. $\vdash_s A(x) \supset A(x')$ | դեդ.թ. |
| 4. $\vdash_s A(0) \supset (\forall x (A(x) \supset A(x'))) \supset \forall x A(x)$ | ս.հ.9. |
| 5. $\vdash_s \forall x (A(x) \supset A(x')) \supset \forall x A(x)$ | <i>m.p.</i> 1,4 |
| 6. $\vdash_s \forall x (A(x) \supset A(x'))$ | <i>Gen</i> 3 |
| 7. $\vdash_s \forall x A(x)$ | <i>m.p.</i> 5,6 |
| 8. $\vdash_s A(t)$ | $\forall$ -ի արտաքսում |

Առաջարկվում է **S** համակարգում ինքնուրույն արտածել հետևյալ տասնհինգ բանաձևերը, որոնցում t, r և s -ը կամայական թերմեր են.

1. $t = r \supset t + s = r + s,$
2. $t = 0 + t,$
3. $t' + r = (t + r)',$
4. $t + r = r + t,$
5. $t = r \supset s + t = s + r,$
6. $(t + r) + s = t + (r + s),$

7. $t \cdot (r + s) = t \cdot r + t \cdot s,$
8. $(r + s) \cdot t = r \cdot t + s \cdot t,$
9. $t + s = r + s \supset t = r,$
10. $t = r \supset t \cdot s = r \cdot s,$
11. $0 = 0 \cdot t,$
12. $t' \cdot r = t \cdot r + r,$
13. $t \cdot r = r \cdot t,$
14. $t = r \supset s \cdot t = s \cdot r,$
15. $(t \cdot r) \cdot s = t \cdot (r \cdot s):$

Պայմանավորվենք նշանակել $\bar{n} = \overbrace{(\dots((0)')'\dots)'}^n$:

Առաջարկվում է S համակարգում ինքնուրույն արտածել հետևյալ ինը բանաձևերը.

1. $t + \bar{1} = t',$
2. $t \cdot \bar{1} = t, \quad 2'. t \cdot \bar{2} = t + t,$
3. $t + s = 0 \supset t = 0 \& s = 0,$
4. $t \neq 0 \supset (s \cdot t = 0 \supset s = 0),$
5. $t + s = \bar{1} \supset (t = 0 \& s = \bar{1} \vee t = \bar{1} \& s = 0),$
6. $t \cdot s = \bar{1} \supset t = \bar{1} \& s = \bar{1},$
7. $t \neq 0 \supset \exists x(t = x'),$
8. $s \neq 0 \supset (t \cdot s = r \cdot s \supset t = r),$
9. $t \neq 0 \supset (t \neq \bar{1} \supset \exists x(t = (x')')):$

Որպես օրինակներ դիտարկենք նշված բանաձևերից մի քանիսի արտածումները.

1. $t = r \supset t + s = r + s$

Արտածման համար կկիրառենք մակաձման եղանակը: Քանի որ մակաձումն ըստ թերմի անարդյունավետ է, դիտարկենք նշված բանաձևի նախապատկերը փոփոխականներով՝

$x_1 = x_2 \supset (x_1 + x_3 = x_2 + x_3)$ նշանակելով այն $A(x_3)$ ՝ ընդգծելու համար, որ մակաձումը կատարվելու է ըստ x_3 փոփոխականի:

Հիշեցնենք մակաձման օժանդակ կանոնը.

$$\frac{\vdash_s A(0), A(x) \vdash_s A(x')}{\vdash_s \forall x A(x)} :$$

ա) Ցույց տանք, որ $\vdash_s A(0)$, այսինքն՝

$$\vdash_s x_1 = x_2 \supset (x_1 + 0 = x_2 + 0)$$

$$x_1 = x_2 \vdash_s x_1 + 0 = x_2 + 0$$

$$\vdash_s x_1 + 0 = x_1 \text{ u.h.5}$$

$$\vdash_s \mathbf{x_2 + 0 = x_2 \text{ u.h.5 թ.պ.}}$$

$$\vdash_s x_1 = x_2 \text{ նախադրյալ}$$

$$\vdash_s x_1 + 0 = x_2 = \text{տրանզ.}$$

$$\vdash_s x_1 + 0 = x_2 + 0 = \text{տրանզ.}$$

և դեդուկցիայի թեորեմ

$$\vdash_s x_1 = x_2 \supset (x_1 + 0 = x_2 + 0)$$

բ) $A(x_3) \vdash A((x_3)')$

$$x_1 = x_2 \supset x_1 + x_3 = x_2 + x_3 \vdash_s x_1 = x_2 \supset x_1 + (x_3)' = x_2 + (x_3)'$$

$$x_1 = x_2 \supset x_1 + x_3 = x_2 + x_3, x_1 = x_2 \vdash_s x_1 + (x_3)' = x_2 + (x_3)'$$

$$A(x_3), x_1 = x_2 \vdash_s \mathbf{x_1 + (x_3)' = (x_1 + x_3)'} \text{ u.h.6 թ.պ.}$$

$$\vdash_s \mathbf{x_2 + (x_3)' = (x_2 + x_3)'} \text{ u.h.6 թ.պ.}$$

$$\vdash_s x_1 = x_2 \supset x_1 + x_3 = x_2 + x_3 \text{ նախադրյալ}$$

$$\vdash_s x_1 = x_2 \text{ նախադրյալ}$$

$$\vdash_s x_1 + x_3 = x_2 + x_3 \text{ m.p.}$$

$$\vdash_s (x_1 + x_3)' = (x_2 + x_3)' \text{ -ի ներմուծում}$$

$$\vdash_s x_1 + (x_3)' = (x_2 + x_3)' = \text{տրանզ.}$$

$$\vdash_s x_1 + (x_3)' = x_2 + (x_3)' = \text{տրանզ.}$$

$$\vdash_s A(x_3) \supset A((x_3)') \text{ դեդուկցիա}$$

$$\vdash_s \forall x_3 A(x_3) \text{ մակաձման օժանդակ կանոն}$$

$$\vdash_s \forall x_3 A(x_3) \supset A(s) \forall - \text{ի արտ. *}$$

$$\vdash_s x_1 = x_2 \supset x_1 + s = x_2 + s \text{ A(s) m. p.}$$

Ապա երկու անգամ կիրառելով *Gen.* կանոնը ըստ x_1 և ըստ x_2 փոփոխականների և երկու անգամ արտաքսելով ընդհանրության ծավալիչները՝ տեղադրում ենք համապատասխանաբար t և r : Նշենք, որ $*$ սահմանափակումը տեղի ունի, քանի որ $A(x_3)$ բանաձևը ոչ մի ծավալիչ չի պարունակում:

Կարևոր դիտողություն: Վերը բերված արտածումների մի մասը ունի ճշտգրման կարիք, քանի որ **bold** նշված բանաձևերը թերմային պատկերներ են, որոնց արտածումների համար բազմիցս կիրառվում է *Gen* կանոնը՝ ըստ x_1 , x_2 կամ x_3 փոփոխականների, հետևաբար այլևս անթույլատրելի է դեդուկցիայի կիրառումը այդ փոփոխականները պարունակող բանաձևերի նկատմամբ: Այս իրավիճակը շտկելու համար բավական է նշված բանաձևի նախապատկերում նշել, օրինակ, x_4 , x_5 և x_6 փոփոխականները, սակայն գրառումները հեշտացնելու համար հետագայում ևս կդիտարկենք նախապատկերներում x_1 , x_2 և x_3 փոփոխականները:

$$2. \quad t + s = 0 \supset t = 0 \& s = 0$$

$$x_1 + x_2 = 0 \supset (x_1 = 0 \& x_2 = 0) \text{ A}(x_2)$$

$$x_1 + 0 = 0 \supset (x_1 = 0 \& 0 = 0) \text{ A}(0)$$

$$\mathbf{u)} \quad \vdash_s x_1 + 0 = 0 \supset (x_1 = 0 \& 0 = 0)$$

$$x_1 + 0 = 0 \vdash_s x_1 = 0 \& 0 = 0$$

$$x_1 + 0 = 0 \vdash_s 0 = 0 \text{ արտածված բանաձև}$$

$$\vdash_s x_1 + 0 = 0 \text{ նախադրյալ}$$

$$\vdash_s x_1 + 0 = x_1 \text{ u.h.5}$$

$$\vdash_s x_1 = 0 \text{ տրանզ.}$$

$$\vdash_s x_1 = 0 \& 0 = 0 \&-ի ներմուծում$$

$$\vdash_s x_1 + 0 = 0 \supset (x_1 = 0 \& 0 = 0) \text{ դեդուկցիայի թեորեմ}$$

p) $A(x_2) \vdash_s A((x_2)')$

$$x_1 + x_2 = 0 \supset (x_1 = 0 \& x_2 = 0) \vdash_s x_1 + (x_2)' = 0 \supset (x_1 = 0 \& (x_2)' = 0)$$

$$x_1 + x_2 = 0 \supset (x_1 = 0 \& x_2 = 0), x_1 + (x_2)' = 0 \vdash_s x_1 = 0 \& (x_2)' = 0$$

Նկատենք, որ **bold** նշված արտածվելիքը «սխալ պնդում» է, հետևաբար կփորձենք նախադրյալներից գալ հակասություն, ինչից էլ կկարողանանք արտածել այդ բանաձևը:

$$\begin{aligned} A(x_2), x_1 + (x_2)' = 0 &\vdash_s x_1 + (x_2)' = 0 \text{ նախադրյալ} \\ &\vdash_s x_1 + (x_2)' = (x_1 + x_2)' \text{ u.h..6} \\ &\vdash_s (x_1 + x_2)' = 0 \text{ m.p.} \\ &\vdash_s 0 = (x_1 + x_2)' = \text{կոմուտ.} \\ &\vdash_s \neg (0 = (x_1 + x_2)') \text{ u.h.4 թ. պ.} \end{aligned}$$

Արտածվեց հակասություն, հետևաբար օգտագործելով այստեղ ևս արտածվող $U \supset (U \supset F)$ բանաձևը՝ կկարողանանք արտածել ցանկացած F , ինչը մեր դեպքում **bold** բանաձևն է:

Կարևոր է նկատել, որ $A(x_2)$ **նախադրյալը չօգտագործվեց** $A(x_2)'$ -ի արտածման համար, ինչը փաստում է, որ մակաձման եղանակով ապացույցներում n -ի համար պնդման իսկությունը կարող է չօգտագործվել այդ նույն պնդման իսկությունը $n + 1$ -ի համար ապացուցելիս:

$$3. t + s = \bar{1} \supset (t = 0 \& s = \bar{1} \vee t = \bar{1} \& s = 0)$$

$$x_1 + x_2 = \bar{1} \supset (x_1 = 0 \& x_2 = \bar{1} \vee x_1 = \bar{1} \& x_2 = 0) A(x_2)$$

$$\mathbf{u)} \vdash_s x_1 + 0 = \bar{1} \supset (x_1 = 0 \& 0 = \bar{1} \vee x_1 = \bar{1} \& 0 = 0) A(0)$$

$$\vdash_s x_1 + 0 = \bar{1} \vdash_s (x_1 = \mathbf{0} \& \mathbf{0} = \bar{1} \vee x_1 = \bar{1} \& 0 = 0) A(0)$$

Բանաձևերի դիզյունկցիան արտածելու համար բավական է արտածել դրանցից որևէ մեկը, բայց **bold** նշվածը «սխալ պնդում» է, հետևաբար, պետք է՝

$$x_1 + 0 = \bar{1} \vdash_s x_1 = \bar{1} \& 0=0$$

$$x_1 + 0 = \bar{1} \vdash_s x_1 + 0 = \bar{1} \text{ նախադրյալ}$$

$$\vdash_s x_1 + 0 = x_1 \text{ u.h.5}$$

$$\vdash_s x_1 = \bar{1} = \text{տրանզ.}$$

$$\vdash_s 0=0 \text{ բանաձև}$$

$$\vdash_s x_1 = \bar{1} \& 0=0 \&-ի ներք.$$

$$\vdash_s x_1=0 \& 0=\bar{1} \vee x_1=\bar{1} \& 0=0 \vee-ի ներք.$$

$$\vdash_s A(0) \text{ դեդուկցիա}$$

$$\mathbf{p)} A(x_2) \vdash_s A((x_2)')$$

$$A(x_2) \vdash_s x_1+(x_2)' = \bar{1} \supset (x_1 = 0 \& (x_2)' = \bar{1} \vee x_1 = \bar{1} \& (x_2)' = 0)$$

$$A(x_2), x_1+(x_2)' = \bar{1} \vdash_s (x_1 = 0 \& (x_2)' = \bar{1} \vee x_1 = \bar{1} \& (x_2)' = 0)$$

Այստեղ **ևս bold** նշվածը «սխալ պնդում» է, հետևաբար պետք է՝

$$A(x_2), x_1+(x_2)' = \bar{1} \vdash_s x_1 + (x_2)' = \bar{1} \text{ նախադրյալ}$$

$$\vdash_s x_1+(x_2)' = (x_1+x_2)' \text{ u.h.6}$$

$$\vdash_s (x_1+x_2)' = \bar{1} = \text{տրանզ.}:$$

Նշենք, որ $\bar{1} = (0)'$

$$\vdash_s x_1+x_2=0 \text{ '-ի արտաբերում}$$

$$\vdash_s x_1+x_2=0 \supset x_1=0 \& x_2=0 \text{ արտածված բանաձև}$$

$$\vdash_s x_1=0 \& x_2=0 \text{ m.p.}$$

$$\vdash_s x_1=0 \&-ի արտաբերում$$

$$\vdash_s x_2=0 \&-ի արտաբերում$$

$$\vdash_s (x_2)' = (0)' = \text{'-ի ներմուծում}$$

$$\vdash_s x_1=0 \& (x_2)' = \bar{1} \&-ի ներք.$$

$$\vdash_s x_1 = 0 \& (x_2)' = \bar{1} \vee x_1=0 \& (x_2)' = \bar{1} \vee-ի ներք.$$

և ըստ դեդուկցիայի թեորեմի՝

$$\vdash_s x_1+(x_2)' = \bar{1} \supset x_1 = 0 \& (x_2)' = \bar{1} \vee x_1=0 \& (x_2)' = \bar{1} :$$

Այստեղ ևս հարկ է նշել, որ $A(x_2)$ նախադրյալը չօգտագործվեց $A((x_2)')$ բանաձևի արտածման համար:

$$4. \neg(t = 0) \supset \exists x(t = x') *$$

$$\neg(x_1 = 0) \supset \exists x_2(x_1 = (x_2)') A(x_1)$$

$$\mathbf{w}) \vdash_s \neg(0 = 0) \supset \exists x_2(0 = (x_2)') A(0)$$

$$\neg(0 = 0) \vdash_s \exists x_2(0 = (x_2)')$$

Նշենք, որ այստեղ նախադրյալում «հիմարություն» է, ինչից կարելի է արտածել ամեն ինչ, իրոք.

$$\neg(0 = 0) \vdash_s 0 = 0 \text{ արտածված բանաձև,}$$

$$\neg(0 = 0) \vdash_s \neg(0 = 0) \text{ նախադրյալ:}$$

Ստացանք հակասություն, հետևաբար օգտագործելով այստեղ ևս արտածվող $\neg(\neg U \supset F)$ բանաձևը՝ կկարողանանք արտածել ցանկացած F , ինչն այս դեպքում $\exists x_2(0 = (x_2)')$ բանաձևն է:

$$\mathbf{p}) A(x_1) \vdash_s A((x_1)')$$

$$\neg(x_1 = 0) \supset \exists x_2(x_1 = (x_2)') \vdash_s \neg((x_1)' = 0) \supset \exists x_2((x_1)' = (x_2)')$$

$$A(x_1), \neg((x_1)' = 0) \vdash_s \exists x_2((x_1)' = (x_2)')$$

$$A(x_1), \neg((x_1)' = 0) \vdash_s (x_1)' = (x_1)' \text{ արտածված բանաձև,}$$

$$A(x_1), \neg((x_1)' = 0) \vdash_s \exists x_2((x_1)' = (x_2)') * \exists\text{-ի ներմուծում:}$$

Վերհիշենք $\exists$ ծավալիչի ներմուծման կանոնը. $A(t)$ -ից արտածվում է $\exists x A(x)$, եթե t թերմը ազատ է տեղադրման համար x -ի փոխարեն $A(x)$ -ում: Նշենք, որ x_1 թերմը ազատ է տեղադրման համար x_2 -ի փոխարեն $(x_1)' = (x_2)'$ -ում: Նշենք, որ նախադրյալներից ոչ մեկը չօգտագործվեց: Կարևոր է նաև նշել, որ $*$ սահմանափակումը անհրաժեշտ է, քանի որ հետագայում t թերմը x_1 -ի փոխարեն տեղադրելիս պետք է հաշվի առնել, որ այն պետք է ազատ լինի տեղադրման համար, մասնավորապես չի կարելի տեղադրել, օրինակ, $((x_2)')$ թերմը:

Մետաթեորեմ

Հիշեցնենք, որ **մետա** մասնիկը նշանակում է տեսություն-նից դուրս տեսության մասին:

Թեորեմ

Ցանկացած m ու n բնական թվերի համար.

1. եթե $m \neq n$, ապա $\vdash_s \bar{m} \neq \bar{n}$,

2 $\vdash_s \overline{m \cdot n} = \bar{m} \cdot \bar{n}$

$\vdash_s \overline{m + n} = \bar{m} + \bar{n}$:

Ապացույց 1

$m \neq n \Rightarrow m > n$ կամ $m < n$: Ենթադրենք՝ $m < n$:

Պետք է արտածել $\neg(\bar{m} = \bar{n})$: :

$$\begin{aligned} \bar{m} = \bar{n} &\vdash_s \overbrace{(\dots((0)')'\dots)'}^m = \overbrace{(\dots((0)')'\dots)'}^n \text{ նախադրյալ} \\ &\vdash_s \overbrace{(\dots((0)')'\dots)'}^{m-1} = \overbrace{(\dots((0)')'\dots)'}^{n-1} \text{ '-ի արտաքսում} \\ &\vdots \\ &\vdash_s 0 = \overbrace{(\dots((0)')'\dots)'}^{n-m} \text{ '-ի արտաքսում} \\ &\vdash_s 0 \neq \overbrace{(\dots((0)')'\dots)'}^{n-m-1} \text{ ' u.h.4.թ.պ.} \\ &\vdash_s \neg(\bar{m} = \bar{n}) \text{ } \neg\text{-ման ներմուծում} \end{aligned}$$

Ապացույց 2

Ապացուցենք մականման եղանակով՝ ըստ m -ի.

ա) $m = 0$: Պետք է ապացուցենք, որ.

$$\vdash_s \overline{0 + n} = \bar{0} + \bar{n}$$

$$\vdash_s \bar{n} = 0 + \bar{n}$$

$$\vdash_s x_1 + 0 = x_1 \quad \text{u.h.5.}$$

$$\vdash_s x_1 + 0 = 0 + x_1 \quad \text{բանաձև}$$

$$\vdash_s x_1 = 0 + x_1 = -\text{ի} \quad \text{տրանզիտիվություն}$$

$$\vdash_s \forall x_1 (x_1 = 0 + x_1) \quad \text{Gen}$$

$$\vdash_s \bar{n} = 0 + \bar{n} \text{ } \forall\text{-ի} \quad \text{արտաքսում}$$

բ) Ենթադրենք՝

$\vdash_s \overline{m + n} = \overline{m} + \overline{n}$, ապացուցենք, որ.

$\vdash_s \overline{m + 1 + n} = \overline{m + 1} + \overline{n}$ կամ այլ զրառումով՝

$\vdash_s \overline{(m + n)'} = \overline{m'} + \overline{n}$

$\vdash_s \overline{m + n} = \overline{m} + \overline{n}$ մականձման ենթադրություն

$\vdash_s \overline{(m + n)'} = (\overline{m} + \overline{n})'$ -ի ներմուծում

$\vdash_s \overline{(m + n)'} = (\overline{m} + \overline{n})'$ կամ այլ զրառումով՝

$\vdash_s (\overline{m})' + \overline{n} = (\overline{m} + \overline{n})'$ բանաձև

$\vdash_s \overline{(m + n)'} = (\overline{m})' + \overline{n} =$ տրանզ.

Օգտվելով ապացուցվածից՝ ինքնուրույն ապացուցել, որ
 $\vdash_s \overline{m \cdot n} = \overline{m} \cdot \overline{n}$:

Թեորեմն ապացուցված է:

Հաշվի առնելով " = " հարաբերության կոմուտատիվությունը, որպես մետաթեորեմի պնդում կհամարենք նաև, որ
 $\vdash_s \overline{m + n} = \overline{m + n}$ և $\vdash_s \overline{m \cdot n} = \overline{m \cdot n}$

Երկու օրինակներով ցուցադրենք մետաթեորեմի օգտակարությունը.

1. $(t + \overline{2}) + \overline{5} = t + \overline{7}$

$\vdash_s (t + \overline{2}) + \overline{5} = t + (\overline{2} + \overline{5})$ բանաձև

$\vdash_s \overline{2} + \overline{5} = \overline{2 + 5}$ կամ $\overline{2} + \overline{5} = \overline{7}$ մետաթեորեմ

$\vdash_s \overline{2} + \overline{5} = \overline{7} \supset t + (\overline{2} + \overline{5}) = t + \overline{7}$ բանաձև

$\vdash_s t + (\overline{2} + \overline{5}) = t + \overline{7} m.p.$

$\vdash_s (t + \overline{2}) + \overline{5} = t + \overline{7} =$ տրանզ

2. $\overline{2}(t + \overline{3}) = \overline{2}t + \overline{6}$

$\vdash_s \overline{2}(t + \overline{3}) = \overline{2}t + \overline{2 \cdot 3}$ բանաձև

$\vdash_s \overline{2 \cdot 3} = \overline{2 \cdot 3}$ կամ $\overline{2 \cdot 3} = \overline{6}$ մետաթեորեմ

$\vdash_s \overline{2 \cdot 3} = \overline{6} \supset \overline{2}t + \overline{2 \cdot 3} = \overline{2}t + \overline{6}$ բանաձև

$\vdash_s \overline{2}t + \overline{2 \cdot 3} = \overline{2}t + \overline{6} m.p.$

$\vdash_s \overline{2}(t + \overline{3}) = \overline{2}t + \overline{6} =$ տրանզ.

Նոր հարաբերությունների ներմուծում

Պայմանավորվենք նշանակել.

$$t < s : \exists x(x \neq 0 \& t + x = s),$$

$$t \leq s : t = s \vee t < s,$$

$$t > s : s < t,$$

$$t \geq s : s \leq t:$$

Առաջարկվում է S համակարգում ինքնուրույն արտածել հետևյալ տասը բանաձևերը.

1. $\neg(t < t),$

2. $t < s \supset (s < r \supset t < r),$

3. $t < s \supset t + r < s + r,$

4. $t \leq t,$

5. $0 \leq t,$

6. $0 < t',$

7. $t < r \supset t' \leq r,$

8. $t \leq r \supset t < r',$

9. $t < t',$

10. $t = r \vee t < r \vee t > r:$

Սահմանենք t/s . t -ն բաժանվում է s -ի՝ $\exists x(t = s \cdot x):$

Առաջարկվում է S համակարգում ինքնուրույն արտածել հետևյալ յոթ թեորեմները.

1. $t/t,$

2. $t/\bar{1},$

3. $0/t,$

4. $t/s \& s/r \supset t/r,$

5. $t/s \& s/t \supset t = s,$

6. $t/s \supset (r \cdot t)/s,$

7. $t/s \& r/s \supset (t + r)/s:$

Որպես օրինակներ արտածենք հետևյալ երկու բանաձևերը.

1. $t < t'$
 $\vdash_s \exists x(x \neq 0 \& t + x = t')$
 $\vdash_s t + \bar{1} = t'$ քանաձև
 $\vdash_s \bar{1} \neq 0$ քանաձև
 $\vdash_s \bar{1} \neq 0 \& t + \bar{1} = t'$ & ներմուծում
 $\vdash_s \exists x(x \neq 0 \& t + x = t')$ $\exists$ ներմուծում
2. $t/s \& s/r \vdash_s t/r$
 $t/s \& s/r \vdash_s t/s \& s/r$ նախադրյալ
 $\vdash_s \exists x_1(t = sx_1) \&$ արտաքսում
 $\vdash_s \exists x_2(s = rx_2) \&$ արտաքսում
 $\vdash_s t = sa_1$ Choice
 $\vdash_s s = ra_2$ Choice
 $\vdash_s s = ra_2 \supset sa_1 = (ra_2)a_1$ քանաձև
 $\vdash_s sa_1 = (ra_2)a_1$ m.p.
 $\vdash_s (ra_2)a_1 = r(a_2a_1)$ քանաձև
 $\vdash_s sa_1 = r(a_2a_1) =$ տրանզ.
 $\vdash_s t = r(a_2a_1) =$ տրանզ.
 $\vdash_s \exists x_3(t = rx_3)$ $\exists$ ներմուծում

Քանորդի ու մնացորդի միակության քանաձևը
 Նշանակենք

$$\exists_1 x A(x) \text{ ' } \exists x A(x) \& \forall x \forall y (A(x) \& A(y) \supset x = y):$$

S համակարգում արտածենք քանորդի ու մնացորդի միակության քանաձևը.

$$\vdash_s y \neq 0 \supset \exists_1 u \exists_1 v (x = y \cdot u + v \& v < y):$$

Նախ ցույց տանք, որ.

$$\vdash_s y \neq 0 \supset \exists u \exists v (x = y \cdot u + v \& v < y) \equiv A(x)$$

$$\vdash_s A(0)$$

$$y \neq 0 \vdash_s 0 = y \cdot 0 + 0 \& 0 < y:$$

Ենթադրենք՝ $x = y \cdot u + v$ & $v < y$, սխեմատիկորեն ապացուցենք, որ.

$$x' = y \cdot u_1 + v_1 \text{ & } v_1 < y:$$

$$x = y \cdot u + v \text{ բանաձևում անցնենք ' -ի.}$$

$$x' = (y \cdot u + v)' = y \cdot u + v', \quad \text{երբեք } v < y \Rightarrow v' < y \cdot v \cdot v' = y:$$

$$\text{Երբեք } v' < y, \text{ ապա որպես } u_1 \text{ կվերցնենք } u, \text{ որպես } v_1 \text{՝ } v' \text{ -ը:}$$

$$\text{Երբեք } v' = y, \text{ ապա ստանում ենք } x' = y \cdot (u + \bar{1}), \text{ հետևաբար որպես } u_1 \text{ կվերցնենք } u + \bar{1}, \text{ որպես } v_1 \text{՝ } 0:$$

$$\text{Ցույց տանք միակությունը: Ենթադրենք.}$$

$$x = y \cdot u_1 + v_1 \text{ և } x = y \cdot u_2 + v_2 \text{ (*)}$$

$$\text{Արտածվելիք բանաձևերի ցուցակում առկա է } u_1 = u_2 \vee u_1 < u_2 \vee u_1 > u_2 \text{ բանաձևը:}$$

$$\text{Երբեք } u_1 < u_2, \text{ ապա՝ } u_1 + w = u_2 \text{ & } (w \neq 0)$$

$$y \cdot (u_1 + w) = y \cdot u_2$$

$$y \cdot u_1 + y \cdot w = y \cdot u_2$$

$$y \cdot u_1 + y \cdot w + (v_1 + v_2) = y \cdot u_2 + (v_1 + v_2)$$

$$x + y \cdot w + v_2 = x + v_1$$

$$y \cdot w + v_2 = v_1:$$

$$\text{Ստացվեց, որ } y < v_1, \text{ ինչը հնարավոր չէ: Հանգումորեն, } u_1 > u_2 \text{ դեպքում ևս կգանք հակասության, հետևաբար } u_1 = u_2:$$

$$\text{Երբեք } u_1 = u_2, \text{ ապա } y \cdot u_1 = y \cdot u_2, \text{ և (*) -ից ստանում ենք, որ } v_1 = v_2:$$

Կարելի է շարունակել նորանոր ֆունկցիաների ու հարաբերությունների ներմուծումը այս համակարգում, սակայն հաջորդիվ ներկայացվող դրույթի համաձայն՝ կնկարագրվի ֆունկցիաների և հարաբերությունների որոշակի լայն դասի ներմուծման միասնական հնարավորությունը:

Ֆունկցիաների ու պրեդիկատների ներկայացումները $\mathbf{S}$ -ում

Սահմանում

Կասենք, որ $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ հարաբերությունն *արտահայտվում է* $\mathbf{S}$ -ում եթե գոյություն ունի $\mathbf{S}$ -ի n հատ ազատ փոփոխականներով $A_p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ բանաձև, որը կամայական $k_1, k_2, \dots, k_n$ բնական թվերի համար բավարարում է հետևյալ պայմանները.

$$\begin{aligned} \text{եթե } P(k_1, k_2, \dots, k_n) = \Delta, & \text{ ապա } \vdash_S A_p(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \dots, \overline{k_n}), \\ \text{եթե } P(k_1, k_2, \dots, k_n) = \cup, & \text{ ապա } \vdash_S \neg A_p(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \dots, \overline{k_n}): \end{aligned}$$

Սահմանում

Կասենք, որ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ թվաբանական ֆունկցիան *ներկայացվում է* $\mathbf{S}$ -ում, եթե գոյություն ունի $\mathbf{S}$ -ի $n + 1$ հատ ազատ փոփոխականներով $A_f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ բանաձև, որը կամայական $k_1, k_2, \dots, k_n, l$ բնական թվերի համար բավարարում է հետևյալ պայմանը.

$$\begin{aligned} \text{եթե } f(k_1, k_2, \dots, k_n) = l, & \text{ ապա } \vdash_S A_f(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \dots, \overline{k_n}, \overline{l}) \\ \vdash_S \exists_1 x_{n+1} A_f(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \dots, \overline{k_n}, x_{n+1}) & (1): \end{aligned}$$

Նկատենք, որ ֆունկցիայի ներկայացումը, ըստ էության, փոխարինվում է ֆունկցիոնալ հարաբերության արտահայտմամբ:

Եթե (1)-ը փոխարինվում է հետևյալով՝

$$\vdash_S \exists_1 x_{n+1} A_f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}),$$

ապա ֆունկցիան կոչվում է *էապես ներկայացվող*:

Պնդում

Եթե ֆունկցիան էապես է ներկայացվում $\mathbf{S}$ -ում, ապա այն ներկայացվում է $\mathbf{S}$ -ում:

Ապացույցն ակնհայտ է. հաջորդաբար կիրառվում են Gen և $\forall$ -ի արտաքսման կանոնները՝ ըստ $x_1, x_2, \dots, x_n$ փոփոխականների:

Օրինակներ՝

1. $O(x) = 0$,
2. $S(x) = x + 1$,
3. $\bar{S}(x) = x \div 1$,
4. $I_m^n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_m, 1 \leq m \leq n$ (պրոյեկտման ֆունկցիա):

Դժվար չէ ապացուցել, որ վերը նշված ֆունկցիաները կարելի է ներկայացնել S -ում հետևյալ բանաձևերի միջոցով, որոնցում առկա են բոլոր փոփոխականները, նույնիսկ ոչ էականները, որպես ազատ փոփոխականները.

1. $A_0(x_1, x_2): x_1 = x_1 \& x_2 = 0$,
2. $A_S(x_1, x_2): x_2 = x_1'$,
3. $A_{\bar{S}}(x_1, x_2): x_1 = 0 \& x_2 = 0 \vee x_1 \neq 0 \& x_2' = x_1$,
4. $A_{I_m^n}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}): x_{n+1} = x_m \& x_1 = x_1 \& \dots \& x_n = x_n$:

Թեորեմ

Կամայական ընդհանուր կարգընթաց հարաբերություն (պրեդիկատ) արտահայտվում է S -ում, և կամայական ընդհանուր կարգընթաց ֆունկցիա ներկայացվում է S -ում:

Մինչ թեորեմի ապացույցին անցնելը ծանոթանանք լրացուցիչ նյութերին:

Չինական թեորեմ

Կամայական $x_1, x_2, \dots, x_n$ բնական թվերի և փոխադարձաբար պարզ $y_1, y_2, \dots, y_n$ բնական թվերի համար $\exists z \text{ rm}(z, y_i) = \text{rm}(x_i, y_i) \ 1 \leq i \leq n$:

Ապացույցը տե՛ս, օրինակ [1], էջ 191:

Դիտարկենք Գյոդելի կոդից ներմուծված հետևյալ՝ առաջին հայացքից տարօրինակ

$\beta(x_1, x_2, x_3) = \text{rm}(x_1, 1 + (1 + x_3) \cdot x_2)$ ֆունկցիան, որն օժտված է չափազանց հետաքրքիր հատկությամբ.

Պնդում

Կամայական $k_0, k_1, \dots, k_n$ հաջորդականության համար գոյություն ունեն այնպիսի b և c թվեր, որ կամայական $0 \leq i \leq n$ համար $\beta(b, c, i) = k_i$:

Ապացույց

Նշանակենք $m = \max\{n, k_0, k_1, \dots, k_n\}$: Որպես c վերցնենք $m!$ թիվը: Կազմենք հետևյալ u_i թվերը՝ $u_i = 1 + (1 + i) \cdot c, 0 \leq i \leq n$:

u_i թվերը փոխադարձաբար պարզ են: Ենթադրենք հակառակը. u_i -ն ու u_j -ն ունեն ընդհանուր բաժանարար, հետևաբար ունեն ընդհանուր պարզ բաժանարար՝ p : Որոշակիության համար ենթադրենք, որ $j > i$: $u_j - u_i = (j - i) \cdot c$ տարբերությունը բաժանվում է p -ի վրա:

ա) Ենթադրենք c -ն առանց մնացորդի բաժանվում է p -ի վրա: $u_i = 1 + (1 + i) \cdot c$. Քանի որ u_i -ն ու c -ն առանց մնացորդի բաժանվում են p -ի վրա, ապա 1 -ը ևս առանց մնացորդի բաժանվում է p -ի վրա, ինչը հնարավոր չէ:

բ) Ենթադրենք $(j - i)$ -ն առանց մնացորդի բաժանվում է p -ի վրա:

Քանի որ $0 \leq j - i \leq n$, $m \geq n$ և $c = m!$, ապա c -ն պարունակում է $(j - i)$ արտադրիչը: Ստացվեց հակասություն. u_i թվերը փոխադարձաբար պարզ են:

Կիրառենք չինական թեորեմը $k_0, k_1, \dots, k_n$ բնական թվերի ու փոխադարձաբար պարզ $u_0, u_1, \dots, u_n$ բնական թվերի նկատմամբ՝

$\exists b \text{ } rm(b, u_i) = rm(k_i, u_i), \quad 0 \leq i \leq n: \quad \text{Նկատենք,} \quad \text{որ}$
 $rm(k_i, u_i) = k_i$, քանի որ $k_i < u_i$, հետևաբար.

$$k_i = rm(b, 1 + (1 + i) \cdot c) = \beta(b, c, i) :$$

Պնդումն ապացուցվեց:

Դժվար չէ համոզվել, որ ֆորմալ թվաբանության համակարգում Գյոդելի ֆունկցիան ներկայացվում է հետևյալ $Bt(x_1, x_2, x_3, x_4)$ բանաձևով.

$$\exists u(x_1 = (\bar{1} + (\bar{1} + x_3) \cdot x_2) \cdot u + x_4 \& x_4 < \bar{1} + (\bar{1} + x_3) \cdot x_2):$$

Արդեն կարող ենք անցնել թեորեմի ապացուցմանը:

Նախ ցույց կտանք, որ յուրաքանչյուր ընդհանուր կարգընթաց ֆունկցիա ներկայացվում է S -ում: Այս պնդումն ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ, որ.

ա) հենքային ֆունկցիաները ներկայացվում են S -ում,

բ) ընդհանուր կարգընթաց ֆունկցիաների կառուցման համար օգտագործվող յուրաքանչյուր հիմնական գործողության կիրառումը ֆորմալ թվաբանությունում ներկայացվող ֆունկցիաների նկատմամբ տալիս է ֆորմալ թվաբանությունում ներկայացվող ֆունկցիա:

ա) Կետի պնդման հիմնավորումը տրվել է օրինակներում:

բ) Կետի պնդման հիմնավորումը տանք յուրաքանչյուր գործողության համար առանձին միևնույն սխեմայով. տրված է (են) ֆունկցիան (ֆունկցիաները), որի (որոնց) նկատմամբ կիրառվում է գործողությունը, և դրան (դրանց) ներկայացնող բանաձևը (բանաձևերը), ապա նշվում է գործողության արդյունքը, և կառուցվում է այն ներկայացնող բանաձևը՝ ապահովելով ներկայացման սահմանման առաջին կետը, իսկ վերջում բացատրվում է սահմանման երկրորդ կետի իրականացումը:

Դիտարկենք գործողությունները:

1) Ոչ էական փոփոխականների ներմուծում

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad A_f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$$

.....

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_k) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$A_h(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_k, x_{n+1})$$

$$A_f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \& y_1 = y_1 \& \dots \& y_k = y_k$$

Կարևոր է նկատել, որ գործողությունների կիրառմամբ ստացվող ֆունկցիան ներկայացնող բանաձևի համար և այստեղ ու հաջորդիվ շարադրվող դեպքերում առաջին պայմանը հեշտությամբ ապացուցվում է:

2) Տեղադրություն

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad A_f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$$

$$g(y_1, y_2, \dots, y_k) \quad A_g(y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1})$$

.....

$$h(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, y_1, y_2, \dots, y_k, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

$$= f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, g(y_1, y_2, \dots, y_k), x_{i+1}, \dots, x_n)$$

$\forall k_1, k_2, \dots, k_{i-1}, m_1, m_2, \dots, m_k, k_{i+1}, \dots, k_n, l$ թվերի համար:

Եթե $h(k_1, k_2, \dots, k_{i-1}, m_1, m_2, \dots, m_k, k_{i+1}, \dots, k_n) = l$, ապա

$\exists l_1$ այնպիսի, որ $g(m_1, m_2, \dots, m_k) = l_1$ և

$f(k_1, k_2, \dots, k_{i-1}, l_1, k_{i+1}, \dots, k_n) = l$, հետևաբար որպես

$A_h(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, y_1, y_2, \dots, y_k, x_{i+1}, \dots, x_n)$ բանաձև կարելի է դիտարկել՝

$$\exists z(A_g(y_1, y_2, \dots, y_k, z) \& A_f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})):$$

Հաճախ դիտարկվում է կանոնական տեղադրություն.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad A_f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$$

$$g_i(y_1, y_2, \dots, y_k) \quad i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad A_i(y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1}):$$

.....

$$h(y_1, y_2, \dots, y_k)$$

$$= f(g_1(y_1, y_2, \dots, y_k), g_2(y_1, y_2, \dots, y_k), \dots, g_n(y_1, y_2, \dots, y_k))$$

$\forall m_1, m_2, \dots, m_k, l$ թվերի համար, եթե $h(m_1, m_2, \dots, m_k) = l$, ապա պետք է գոյություն ունենան $l_i, i \in \{1, \dots, n\}$ այնպիսի

թվեր, որ $g_i(m_1, m_2, \dots, m_k) = l_i$ և $f(l_1, l_2, \dots, l_n) = l$, հետևաբար որպես $A_h(y_1, y_2, \dots, y_k, x_{n+1})$ բանաձև կարող ենք դիտարկել.

$$\exists z_1 \exists z_2 \dots \exists z_n (A_1(y_1, y_2, \dots, y_k, z_1) \& \dots \& A_n(y_1, y_2, \dots, y_k, z_n)) \\ \& A_f(z_1, z_2, \dots, z_n, x_{n+1}):$$

3) Պարզագույն անդրադարձում

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad A_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \\ \beta(x_1, x_2, \dots, x_n, y, z) \quad A_\beta(x_1, x_2, \dots, x_n, y, z, x_{n+1})$$

.....

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \quad A_f(x_1, x_2, \dots, x_n, y, x_{n+1})$$

Քանի որ $f(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) = \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$ և

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, y + 1) = \beta(x_1, x_2, \dots, x_n, y, f(x_1, x_2, \dots, x_n, y))$$

ապա $\forall m_1, m_2, \dots, m_n, l, k$ թվերի համար, եթե $f(m_1, m_2, \dots, m_n, l) = k$, ապա պետք է գոյություն ունենան այնպիսի $k_0, k_1, \dots, k_l$, որ.

$$f(m_1, m_2, \dots, m_n, 0) = \alpha(m_1, m_2, \dots, m_n) = k_0$$

$$f(m_1, m_2, \dots, m_n, 1) = \beta(m_1, m_2, \dots, m_n, 0, k_0) = k_1$$

...

$$f(m_1, m_2, \dots, m_n, i + 1) = \beta(m_1, m_2, \dots, m_n, i, k_i) = k_{i+1}$$

...

$$f(m_1, m_2, \dots, m_n, l) = \beta(m_1, m_2, \dots, m_n, l - 1, k_{l-1}) = k_l = k:$$

Կարծես, ինչպես կանոնավոր տեղադրության համար, այս դեպքում ևս կարելի է $A_f(x_1, x_2, \dots, x_n, y, x_{n+1})$ բանաձևը սկսել $\exists z_0 \exists z_1 \dots \exists z_l$ նախաձավալիչների խմբով, սակայն այս դեպքում բանաձևը չի ունենա նախապես ֆիքսված որոշակի երկարություն, քանի որ նրա երկարությունը կփոփոխվի՝ l -ի մեծությունից կախված:

Այս պարագայում օգնության է գալիս Գյոդելի $\beta(x_1, x_2, x_3)$ ֆունկցիան, ավելի ստույգ՝ այդ ֆունկցիան ներկայացնող $Bt(x_1, x_2, x_3, x_4)$ բանաձևը, իրոք, $k_0, k_1, \dots, k_l$ թվերի գոյության փոխարեն կարելի փաստել b և c այնպիսի թվերի գոյությունը,

որ կամայական $0 \leq i \leq n$ համար $\beta(b, c, i) = k_i$, հետևաբար որպես $A_f(x_1, x_2, \dots, x_n, y, x_{n+1})$ բանաձև կարող ենք դիտարկել հետևյալ բանաձևը՝

$$\begin{aligned} & \exists u \exists v [(\exists w Bt(u, v, 0, w) \& A_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n, w)) \& \\ & \& \forall t (t < y \supset \exists w_1 \exists w_2 (Bt(u, v, t, w_1) \& Bt(u, v, t', w_2) \& \\ & \& A_\beta(x_1, x_2, \dots, x_n, t, w_1, w_2)) \& Bt(u, v, y, x_{n+1})], \end{aligned}$$

որում u -ն օգտագործվում է b -ի, v -ն՝ c -ի, w -ն՝ k_0 -ի, t -ն՝ i -ի, w_1 -ն՝ k_i -ի, w_2 -ն՝ k_{i+1} -ի, y -ն՝ l -ի, x_{n+1} -ն k -ի փոխարեն:

Կարևոր դիտողություն: Բոլոր վերոհիշյալ դեպքերում գործողության արդյունքում ստացված ֆունկցիաները ներկայացնող բանաձևերում որպես այդ ֆունկցիաների արժեք նշվում է x_{n+1} փոփոխականը, որը ներկայացնում է նաև գործողության հիմքում եղած մեկ կամ երկու ֆունկցիաների արժեքը (արժեքները), հետևաբար այդ փոփոխականի արժեքի միակությունը վերջնական բանաձևում ապահովվում է նրա միակությամբ սկզբնական ֆունկցիան ներկայացնող բանաձևում և այդ տեղի գոյության ծավալի դուրսբերմամբ դեպի ամբողջ բանաձևի սկզբնամաս՝ նախածավալչային տեսքի կառուցման օրենքներին համաձայն:

3) Նվազագույնի որոնում

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \quad A_\phi(x_1, x_2, \dots, x_n, y, x_{n+1})$$

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mu_y(\phi(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0)$$

$\forall m_1, m_2, \dots, m_n, l$ թվերի համար եթե $\psi(m_1, m_2, \dots, m_n) = l$, ապա l -ը այն նվազագույն թիվն է, որ $\phi(m_1, m_2, \dots, m_n, l) = 0$:

Հետևաբար, որպես

$A_\psi(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ բանաձև կարելի է դիտարկել հետևյալ բանաձևը՝

$$A_\phi(x_1, x_2, \dots, x_n, y, 0) \& \forall t (t < y \supset \neg A_\phi(x_1, x_2, \dots, x_n, t, 0))$$

Դիտողություն: Ի տարբերություն նախորդ դեպքերի՝ այստեղ $A_\psi(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ բանաձևում ստացված ֆունկցիայի արժեքը ներկայացնում է y փոփոխականը, ոչ թե x_{n+1} , որը ներկայացնում է սկզբնական ֆունկցիայի արժեքը, հետևաբար այստեղ ուրույն եղանակով է ապացուցվում y -ի արժեքի միակությունը հակասող ենթադրությամբ (առավել մանրամասն տես՝ [1]-ում):

Թեորեմի պնդումը ընդհանուր կարգընթաց պրեդիկատների S -ում արտահայտման վերաբերյալ կրիի հետևյալից.

Լեմմա

$P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ պրեդիկատը արտահայտվում է S -ում այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա բնութագրիչ ֆունկցիան՝ $\mathcal{X}_P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ -ը, ներկայացվում է S -ում:

1. Եթե $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ պրեդիկատը արտահայտվում է

$A_P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ բանաձևով, ապա $\mathcal{X}_P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ֆունկցիան ներկայացվում է հետևյալ՝ $B_P(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ ՝
 $(A_P(x_1, x_2, \dots, x_n) \& x_{n+1} = 0) \vee (\neg A_P(x_1, x_2, \dots, x_n) \& x_{n+1} = 1)$
 բանաձևով:

Եթե $\forall k_1, k_2, \dots, k_n P(k_1, k_2, \dots, k_n) = 0$, ապա $\mathcal{X}_P(k_1, k_2, \dots, k_n) = 0$, հետևաբար

$\vdash A_P(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \dots, \overline{k_n})$, ըստ պայմանի՝

$\vdash 0 = 0$ բանաձև,

$\vdash A_P(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \dots, \overline{k_n}) \& 0 = 0$ & ներմ.

$\vdash (A_P(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \dots, \overline{k_n}) \& 0 = 0) \vee (\neg A_P(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \dots, \overline{k_n}) \& 0 = 1)$

$\vee$ ներմ.

Եթե $\forall k_1, k_2, \dots, k_n P(k_1, k_2, \dots, k_n) = 1$, ապա $\mathcal{X}_P(k_1, k_2, \dots, k_n) = 1$, հետևաբար

$\vdash \neg A_P(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \dots, \overline{k_n})$, ըստ պայմանի՝

$\vdash \overline{1} = \overline{1}$ բանաձև

$\vdash \neg A_P(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \dots, \overline{k_n}) \& \overline{1} = \overline{1} \quad \& \text{ ներք.}$
 $\vdash (A_P(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \dots, \overline{k_n}) \& \overline{1} = 0) \vee (\neg A_P(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \dots, \overline{k_n}) \& \overline{1} = \overline{1})$
 $\vee \text{ ներք.}:$

2. Եթե $\mathcal{X}_P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ֆունկցիան ներկայացվում է
 $B_P(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ բանաձևով, ապա $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$
 պրեդիկատը արտահայտվում է
 $A_P(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \backslash \quad B_P(x_1, x_2, \dots, x_n, 0)$ բանաձևով:
 Իրոք, եթե $\forall k_1, k_2, \dots, k_n, l, \mathcal{X}_P(k_1, k_2, \dots, k_n) = l$ և $l = 0$ կամ $l = 1$.
 Եթե $\mathcal{X}_P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, ապա $P(k_1, k_2, \dots, k_n) = 0$, ինչը
 համապատասխանում է՝

$$\vdash B_P(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \dots, \overline{k_n}, 0)$$

Եթե $\mathcal{X}_P(k_1, k_2, \dots, k_n) = 1$, ապա $P(k_1, k_2, \dots, k_n) = 1$, հետևա-
 բար պետք է

$$\vdash \neg B_P(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \dots, \overline{k_n}, 0),$$

և ժխտման ներմուծման կանոնի համաձայն պետք է
 $B_P(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \dots, \overline{k_n}, 0)$ բանաձևից արտածել հակասություն՝
 $B_P(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \dots, \overline{k_n}, 0) \vdash B_P(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \dots, \overline{k_n}, 0)$ նախադրյալ
 $\dots \vdash B_P(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \dots, \overline{k_n}, \overline{1})$, քանի որ $\mathcal{X}_P(k_1, k_2, \dots, k_n) = 1$
 $\dots \vdash B_P(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \dots, \overline{k_n}, \overline{1}) \& B_P(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \dots, \overline{k_n}, 0) \quad \& \text{ ներք.}$
 $\dots \vdash B_P(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \dots, \overline{k_n}, \overline{1}) \& B_P(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \dots, \overline{k_n}, 0) \supset (0 = \overline{1})$
 x_{n+1} -ի միակության շնորհիվ
 $\dots \vdash 0 = \overline{1} \text{ m. p.}$
 $\dots \vdash \neg (0 = \overline{1})$ և հ. 4 թ. պ.:
 Այսպիսով՝ թեորեմն ամբողջությամբ ապացուցվեց:

**Ֆորմալ համակարգերի օբյեկտների գյուղեղյան հա-
 մարակալում**

$$g(\forall) = 1, g() = 3, g()) = 5, g(\supset) = 7, g(\neg) = 9, g(.) = 11$$

$$g(a_i) = 5 + 8i, g(x_i) = 7 + 8i, g(f_i^j) = 9 + 8 \cdot 2^i \cdot 3^j,$$

$$g(p_k^l) = 11 + 8 \cdot 2^k \cdot 3^l$$

$u_0, u_1, \dots, u_m$ բառի /**թերմի կամ բանաձևի**/ համարը՝

$$g(u_0, u_1, \dots, u_m) = p_0^{g(u_0)} \cdot p_1^{g(u_1)} \cdot \dots \cdot p_m^{g(u_m)}$$

որտեղ p_i -ն i -րդ պարզ թիվն է:

Եթե ունենք $A_0 A_1 \dots A_k$ բառերի /բանաձևերի/ հաջորդականությունը /**արտածումներ**/, ապա.

$$g(A_0 A_1 \dots A_k) = p_0^{g(A_0)} \cdot p_1^{g(A_1)} \cdot \dots \cdot p_m^{g(A_m)}$$

Ուշադրություն

1. Այբուբենի բոլոր տառերի համարները կենտ են:
2. Բոլոր բառերի (թերմերի, տարրական բանաձևերի, բանաձևերի) համարները գույգ թվեր են, և դրանց ներկայացման մեջ բոլոր պարզ թվերի աստիճանները կենտ են:
3. Բոլոր արտածումների համարները գույգ թվեր են, և դրանց ներկայացման մեջ բոլոր պարզ թվերի աստիճանները նույնպես գույգ են:

Օրինակներ՝

$$g(a_7) = 5 + 8 \cdot 7 = 61$$

$$g(x_2) = 7 + 8 \cdot 2 = 23$$

2^{15} -ը x_1 փոփոխականից կազմված թերմի համարն է:

$$g(p_1^2(x_1, x_2)) = 2^{11+8 \cdot 2^1 \cdot 3^2} \cdot 3^3 \cdot 5^{15} \cdot 7^{11} \cdot 11^{23} \cdot 13^5$$

Սեփական հենասույթ 6-ի պայմանական գրառումը՝

$$x_1 + x_2' = (x_1 + x_2)'$$

Դրա գրառումը համակարգում՝

$$\begin{aligned}
& P_1^2(f_2^2(x_1, f_1^1(x_2)), f_1^1(f_2^2(x_1, x_2))) \\
& g\left(P_1^2\left(f_2^2(x_1, f_1^1(x_2)), f_1^1\left(f_2^2(x_1, x_2)\right)\right)\right) \\
& = 2^{155} \cdot 3^3 \cdot 5^{9+8 \cdot 4 \cdot 9} \cdot 7^3 \cdot 11^{15} \cdot 13^{11} \cdot \\
& 17^{9+8 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 19^3 \dots (1)
\end{aligned}$$

Համարակալումների հեշտացման գործողություն

Կասենք՝ x թիվը ներկայացնում է $a_0, a_1, \dots, a_m$ թվերի հաջորդականությունը, եթե $x = (p_0)^{a_0} (p_1)^{a_1} \dots (p_m)^{a_m}$, և, համապատասխանաբար, y թիվը ներկայացնում է $b_0, b_1, \dots, b_n$ թվերի հաջորդականությունը, եթե $y = (p_0)^{b_0} (p_1)^{b_1} \dots (p_n)^{b_n}$:

Ներմուծենք $x * y = (p_0)^{a_0} (p_1)^{a_1} \dots (p_m)^{a_m} (p_{m+1})^{b_0} (p_{m+2})^{b_1} \dots (p_{m+n+1})^{b_n}$, որում, վերհիշելով ավգորիթների տեսությունից հայտնի $lh(x)$ և $(x)_i$ պարզագույն կարգընթաց ֆունկցիաները, ունենք.

$m = lh(x) - 1, n = lh(y) - 1, (x)_i = a_i, (y)_i = b_i$, հետևաբար

$$x * y = x \cdot (p_{lh(x)}) \exp(y)_0 \cdot (p_{lh(x)+1}) \exp(y)_1 \dots \cdot (p_{lh(x)+lh(y)}) \exp(y)_{lh(y)-1}$$

Ֆունկցիան ևս պարզագույն կարգընթաց է, և այն օգտագործելով՝ (1)-ը կարելի է գրել շատ ավելի պարզ.

$$2^{155} 3^3 5^{9+8 \cdot 4 \cdot 9} * 2^3 3^{15} 5^{11} * 2^{9+8 \cdot 2 \cdot 3} 3^3 5^{7+8 \cdot 2} \dots$$

Հարցեր

Արդյո՞ք հաջորդիվ բերվող թվերից յուրաքանչյուրը ֆորմալ թվաբանության որևէ օբյեկտի համար է.

42, 155, 15, 167, 23, 57, 58, 153, 244, 159,

$2^{57} 7^5 \cdot 27 \cdot 5^{23}$,

$2^{37} 5^{37} 15^{11} 3^{13} 13^{17} 11^{19} 5^{72} 23^{29} 15^{31} 5^{37} 41^{54} 3^5 (*)$,

$2 \exp 2^{37} 5^{37} 15^{11} 3^{13} 13^{17} 11^{19} 5^{72} 23^{29} 15^{31} 5^{37} 41^{54} 3^5 (**)$:

Գլոբելի պրեդիկատը

Գլոբելը ներմուծել է հետևյալ պրեդիկատը.

$W(u,v) = \Delta \Leftrightarrow u=g(A(x_1))$, որում x_1 փոփոխականը ազատ է
A բանաձևում և

$v= g(B_0, B_1, \dots, B_n)$, որում $B_0, B_1, \dots, B_n$ բանաձևերի հաջորդականությունը $A(\bar{u})$ բանաձևի արտաձումն է:

Δ -ի շտ է արդյոք, թե՞ ոչ $W(u,v)$ պրեդիկատը հաջորդիվ բերվող թվերի գույգերի համար:

(42, 10056008)

(900, 900000000)

(701, 5000000230000032000)

(4678236, 3908)

Դժվար չէ համոզվել, որ գոյություն ունի պարզ ու արդյունավետ եղանակ յուրաքանչյուր u, v թվերի համար՝ $W(u,v)$ պրեդիկատի արժեքը գտնելու համար, հետևաբար, ըստ Չյուրչի, թեզի այն կարգընթաց է:

$W(u,v)$ պրեդիկատի կարգընթացության ֆորմալ ապացույցը կրիսի հետևյալ մի շարք պրեդիկատների ու ֆունկցիաների կարգընթացությունից: Դրանց հապավումները բերվում են անգլերեն, և մի մասի կարգընթացությունը ապացուցված է դրանց կարգընթաց ներկայացումներով: Բոլոր անհրաժեշտ ֆունկցիաների ու պրեդիկատների, ինչպես նաև դրանց կարգընթացության ապացույցներին կարելի է ծանոթանալ, օրինակ, [1] դասագրքի ռուսերեն տարբերակի 158-160-րդ էջերում:

Հապավումների ցանկ

Fml – formula – բանաձև

Vbl – variable – փոփոխական

Proof – proof – արտաձում

Free – free – ազատ

Sub – Substitution – տեղադրություն

Res – result – արդյունք

Neg– negation – ժխտում

Fml(u)=ճ այն և միայն այն դեպքում, երբ **u**-ն որևէ բանաձևի գյոդելյան համար է,

Elemfml(u)=ճ այն և միայն այն դեպքում, երբ **u**-ն որևէ ստորական բանաձևի գյոդելյան համար է,

Freevbl(u,x)=ճ այն և միայն այն դեպքում, երբ **u**-ն որևէ բանաձևի գյոդելյան համար է, իսկ **x**-ը՝ նրա ազատ փոփոխականի գյոդելյան համար,

Term(t) =ճ այն և միայն այն դեպքում, երբ **t**-ն որևէ թերմի գյոդելյան համար է,

Ax(x) =ճ այն և միայն այն դեպքում, երբ **x**-ը որևէ հենասույթի գյոդելյան համար է,

Axi(x) =ճ այն և միայն այն դեպքում, երբ **x**-ը **i**-րդ հենասույթի գյոդելյան համար է,

Funcvbl(x)=ճ այն և միայն այն դեպքում, երբ **x**-ը որևէ ֆունկցիոնալ փոփոխականի գյոդելյան համար է.

$$\exists y < x \exists z < x (x = 9 + 8 \cdot 2^y \cdot 3^z)$$

Predvbl(x) =ճ այն և միայն այն դեպքում, երբ **x**-ը որևէ պրեդիկատային փոփոխականի գյոդելյան համար է.

$$\exists y < x \exists z < x (x = 11 + 8 \cdot 2^y \cdot 3^z):$$

Vbl(x) =ճ այն և միայն այն դեպքում, երբ **x**-ը որևէ առարկայական փոփոխականի գյոդելյան համար է.

$$\exists y < x (x = 7 + 8 \cdot y):$$

Subfree(x,y,t) = ճ այն և միայն այն դեպքում, երբ **t** գյոդեյան համար ունեցող թերմը ազատ է տեղադրման համար **y** գյոդեյան համար ունեցող բանաձևում **x** գյոդեյան համար ունեցող առարկայական փոփոխականի փոխարեն:

Proffml(x,y) = ճ այն և միայն այն դեպքում, երբ **y**-ը **x** գյոդեյան համար ունեցող բանաձևի արտաձման գյոդեյան համար է:

Ressub(y,x,t) = **y** գյոդեյան համար ունեցող արտահայտությունում **x** գյոդեյան համարով առարկայական փոփոխականի փոխարեն **t** գյոդեյան համար ունեցող թերմի տեղադրման արդյունքի համարն է:

Argfuncvbl(x) = $((x \div 9) / 8)$: Ֆունկցիան ներկայացնում է **x** գյոդեյան համար ունեցող ֆունկցիոնալ փոփոխականի արգումենտների քանակը:

Negfml(x) = $2^{3^9 \cdot x^{25}}$ ֆունկցիան ներկայացնում է **x** գյոդեյան համար ունեցող բանաձևի ժխտման գյոդեյան համարը:

MP(x,y, z) = ճ այն և միայն այն դեպքում, երբ **z**-ը **x** ու **y** գյոդեյան համարներ ունեցող բանաձևերի նկատմամբ *մ.ք.* կանոնի կիրառմամբ ստացված բանաձևի գյոդեյան համարն է.

$$y = 2^{3^x} \cdot x^{2^7 \cdot z^{2^5}} \& \text{Fml}(x) \& \text{Fml}(y) \& \text{Fml}(z):$$

Gen(x,y) = ճ այն և միայն այն դեպքում, երբ **y**-ը **x** գյոդեյան համար ունեցող բանաձևի նկատմամբ *Gen* կանոնի կիրառման արդյունքի գյոդեյան համար է:

Proof(v) = ճ այն և միայն այն դեպքում, երբ **v**-ն որևէ արտաձման գյոդեյան համար է.

$$\begin{aligned} & \exists z < v (A x(z) \& v = 2^z) \vee \exists x < v \exists y < v \exists z < v \exists u < v (\text{Proof}(z) \& \\ & v = z \cdot (p_{lh(z)})^u \& \text{MP}((z)_x, (z)_y, u) \vee \exists x < v \exists y < v \exists z < v (\text{Proof}(z) \& v = z \cdot (p_{lh(z)})^x \& \\ & \text{Gen}(x, (z)_y) \vee \exists x < v \exists z < v (\text{Proof}(z) \& v = z \cdot (p_{lh(z)})^x \& A x(x)): \end{aligned}$$

Proffml(x,y) = ճ այն և միայն այն դեպքում, երբ **y**-ը **x** գյոդեյան համար ունեցող բանաձևի արտաձման գյոդեյան համար է:

Քանի որ $W(u, v)$ պրեդիկատը կարգընթաց է, հետևաբար գոյություն ունի S -ի՝ երկու ազատ փոփոխականներով $W(x_1, x_2)$ բանաձև, որը կամայական u և v թվերի համար բավարարում է հետևյալ պայմանները.

եթե $W(u, v) = \mathcal{A}$, ապա $\vdash_s W(\bar{u}, \bar{v}) (*)$,

եթե $W(u, v) = \mathcal{B}$, ապա $\vdash_s W(\bar{u}, \bar{v})$:

Սրա հիման վրա կառուցենք հետևյալ բանաձևը.

$$A(x_1) \equiv \forall x_2 W(x_1, x_2) (1):$$

Ենթադրենք՝ $u = g(A(x_1))$: u -ի թերմային պատկերը տեղադրենք (1)-ում.

$$A(\bar{u}) \equiv \forall x_2 W(\bar{u}, x_2):$$

Այս բանաձևի իմաստը հետևյալն է. կամայական արտածման համար ճիշտ չէ, որ այդ արտածումը $A(\bar{u})$ -ի արտածումն է, բայց $A(\bar{u})$ -ը հենց ինքն այդ բանաձևն է, հետևաբար այդ բանաձևը ինքն իր մասին պնդում է, որ չի արտածվում:

Այս պնդման ճշմարտացիությանը կհամոզվենք հաջորդիվ:

Գյոդելի թեորեմները ոչ լրիվության մասին

Թեորեմ 1

Եթե S -ն անհակասելի է, ապա S -ում չի արտածվում $A(\bar{u})$ -ը:

Ապացույց

Ենթադրենք հակառակը. S -ի անհակասելիության պարագայում $A(\bar{u})$ -ն արտածվում է S -ում, հետևաբար կարելի է նշել այդ բանաձևերի արտաձման բանաձևերի հաջորդականություն, որ.

$$v=g \left\{ \begin{array}{l} \vdash_s B_0 \\ \vdash_s B_1 \\ \vdots \\ \vdash_s \forall x_2 W(\bar{u}, x_2) \end{array} \right. (2):$$

Եթե կա արտաձում, ապա գոյություն ունի արտաձման գյոդելյան համարը՝ v , հետևաբար $W(u,v)=X$ և $(*)$ -ի համաձայն՝

$$\vdash_s W(\bar{u}, \bar{v})$$

$$\vdash_s W(\bar{u}, \bar{v}) \quad 2) \text{-ից } \forall \text{-ի արտաքսում,}$$

ինչը հակասում է S -ի անհակասելիության պայմանին, հետևաբար $A(\bar{u})$ -ի արտաձեղիության վերաբերյալ ենթադրությունը սխալ էր:

Թեորեմն ապացուցված է:

Ֆորմալ տեսության համար **Consis** (անհակասելիություն) նով նշանակենք հետևյալ բանաձևը.

$$\forall x \forall y \forall z [(Fml(x) \& Proof_{fml}(x,y) \& Proof_{fml}(Neg_{fml}(x),z)) :$$

Գյոդելի թեորեմ 2 $Consis_S$ չի արտածվում S -ում:

Այսինքն՝ թվաբանության անհակասելիությունը իր իսկ միջոցներով չի ապացուցվում:

Ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ.

$$\vdash_S Consis_S \text{ ենթադրություն}$$

...

$\vdash_S \text{Consis}_S \supset A(\bar{u})$ թեորեմ 1-ի ապացուցման ֆորմալ ներկայացում

$\vdash_S A(\bar{u}) \text{ m.p.},$

ինչը հակասում է առաջին թեորեմին:

Թեորեմ

Ֆորմալ թվաբանությունն անհակասելի է:

(Առանց ապացույցի, քանի որ նախորդ թեորեմի պնդման համաձայն՝ այս պնդումը պետք է ապացուցվի առավել բարդ տեսությունում, որի սահմանման ու ուսումնասիրման համար պետք կլինի լրացուցիչ ժամանակ (տե՛ս, օրինակ [1], ռուսերեն տարբերակի 282-295-րդ էջերում)):

Հետևանք թեորեմներից

Ֆորմալ թվաբանությունը լրիվ չէ:

Իրոք, նախորդ երկու թեորեմներում ապացուցվել է երկու ճիշտ պնդումների արտածելիության անհնարինությունը ֆորմալ թվաբանության մեջ:

Պարզաբանում

ա) Այստեղ շարադրված է Գյոդելի՝ գրականությունից հայտնի առաջին թեորեմի միայն առաջին պնդումը $A(\bar{u})$ -ի չարտածվելու մասին, և ոչինչ ասված չէ այդ բանաձևի ժխտման վերաբերյալ: Հարցն այն է, որ մեզ մոտ ֆորմալ տեսության լրիվությունը սահմանվել է «ադապտացված» տարբերակով՝ որպես այդ համակարգում յուրաքանչյուր «ճիշտ» բանաձևի արտածելիության փաստ, մինչդեռ գրականությունում ընդունված է ոչ լրիվության այլ սահմանում, որպես այնպիսի փակ բանաձևի գոյություն, որ ո՛չ ինքն, ո՛չ էլ իր ժխտումը այդ համակարգում չեն արտածվում: Մեկ կիսամյակի ժամաքանակի սղության պատճառով օմեգա-անհակասելիության գաղափարին չանդրադառնալու համար կամ Ռոսսերի նմանությամբ առավել բարդ այլ բանաձև չներմուծելու համար ընտրվել է Գյոդելի թեորեմի այս «ադապտացված» տարբերակը, որից ևս բխում է համակարգի ոչ լրիվ լինելը:

բ) Դեռ նախաքանում նշվել էր, որ Գյոդեղի՝ 1931 թվականին ապացուցված առաջին թեորեմն առ այսօր համարվում է լավագույնը մաթեմատիկական բոլոր պնդումների շարքում: Թվում է, թե ինչ մի առանձնապես հայտնություն է արվել. Չէ՞ որ թվաբանությունը մաթեմատիկական ամենաթույլ տեսությունն է, և նրա լրիվ չլինելու հանգամանքը կարելի էր համարել սպասելի, սակայն, եթե ուշադրություն դարձնենք մի քանի կարևոր հանգամանքների վրա.

- թվաբանությունը ընկած է մաթեմատիկական բոլոր առարկաների հիմքում,
- յուրաքանչյուր կարգընթաց պրեդիկատ արտահայտվում է ֆորմալ թվաբանությունում,
- գյոդեղյան համարակալումը սահմանվել էր ոչ միայն թվաբանության, այլ կամայական ֆորմալ տեսության համար, հետևաբար Գյոդեղի պրեդիկատը կարգընթաց է դրանցից յուրաքանչյուրում:

Նշված երեք պնդումներից բխում է, որ **յուրաքանչյուր անհակասելի մաթեմատիկական տեսությունում** ա) կարելի է կառուցել բանաձև, որն ինքն իր մասին կհայտնի իրեն իսկ այդ տեսությունում չարտածվելու վերաբերյալ, և բ) այդ տեսության անհակասելիությունը իր իսկ միջոցումներով ապացուցել հնարավոր չէ:

Բնական է, որ որևէ հակասելի տեսությունը անիմաստ մի բան է, քանի որ դրանում հնարավոր է արտածել ամեն մի անհեթեթություն:

Փաստորեն՝ Գյոդեղի թեորեմի արժեքն այն է, որ ինչպիսի նոր անհակասելի մաթեմատիկական տեսություն էլ հետագայում կառուցվի, միևնույնն է, կգտնվի մեկ ճշմարիտ պնդում, որն այդ տեսության միջոցներով չի կարող ապացուցվել: Այսպիսով՝ մաթեմատիկական ունի անվերջ զարգանալու հնարավորություն:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. Лавров И. А., Максимова Л. Л., Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов, Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
2. Elliott Mendelson, Introduction to mathematical logic (Discrete Mathematics and its Applications), sixth edition, © 2015 by Taylor & Francis Group, LLC CRC Press is an imprint of Taylor & Francis Group.
3. S.C.Kleene, Introduction to metamathematics (Dover books on mathematics), ISBN-13978-0923891572, 2012.
4. S.C.Kleene, Mathematical logic (Dover books on mathematics), ISBN-13, 978-0486425337, 2021.
5. Weili Chen, The Way of Machine Thinking: Volume 1: Rules of Universal Language and Fundamental Math, ISBN13, 979-8860709904, 2023.

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Ա. Նշված բանաձևերի ու հավաքածուների համար ցուցադրել
Կալմարի լեմմայի պնդման իրավացիությունը.

1. $p_1 \supset ((\neg p_3 \supset p_2) \supset \neg p_1)$ (0,0,0)
2. $\neg p_1 \supset ((\neg p_3 \supset p_2) \supset p_1)$ (0,0,1)
3. $(p_1 \supset \neg p_3) \supset \neg (p_2 \supset p_1)$ (0,1,0)
4. $p_1 \supset \neg (p_3 \supset (p_2 \supset \neg p_1))$ (0,1,1)
5. $\neg (p_1 \supset (p_3 \supset \neg p_2)) \supset p_1$ (1,0,0)
6. $((p_1 \supset \neg p_3) \supset \neg p_2) \supset p_1$ (1,0,1)
7. $(p_1 \supset \neg p_3) \supset (p_2 \supset \neg p_1)$ (1,1,0)
8. $p_1 \supset (\neg p_3 \supset \neg (p_2 \supset p_1))$ (1,1,1)
9. $(\neg p_1 \supset (p_3 \supset \neg p_2)) \supset p_1$ (1,1,1)
10. $\neg ((p_1 \supset \neg p_3) \supset \neg p_2) \supset p_1$ (1,1,0)
11. $p_1 \supset ((\neg p_3 \supset p_2) \supset \neg p_1)$ (1,0,1)
12. $\neg p_1 \supset ((\neg p_3 \supset p_2) \supset p_1)$ (1,0,0)
13. $(p_1 \supset \neg p_3) \supset \neg (p_2 \supset p_1)$ (0,1,1)
14. $p_1 \supset \neg (p_3 \supset (p_2 \supset \neg p_1))$ (0,1,0)
15. $\neg (p_1 \supset (p_3 \supset \neg p_2)) \supset p_1$ (0,0,1)
16. $((p_1 \supset \neg p_3) \supset \neg p_2) \supset p_1$ (0,0,0)
17. $(p_1 \supset \neg p_3) \supset (p_2 \supset \neg p_1)$ (0,0,1)
18. $p_1 \supset (\neg p_3 \supset \neg (p_2 \supset p_1))$ (0,1,1)
19. $(\neg p_1 \supset (p_3 \supset \neg p_2)) \supset p_1$ (1,0,0)
20. $\neg ((p_1 \supset \neg p_3) \supset \neg p_2) \supset p_1$ (1,0,1)
21. $\neg ((p_1 \supset \neg p_3) \supset \neg p_2) \supset p_1$ (0,1,0)
22. $(p_1 \supset \neg p_3) \supset \neg (p_2 \supset p_1)$ (0,1,1)
23. $p_1 \supset ((\neg p_3 \supset p_2) \supset \neg p_1)$ (0,0,1)
24. $\neg p_1 \supset ((\neg p_3 \supset p_2) \supset p_1)$ (0,1,1)

25. $p_1 \supset (p_3 \supset (p_2 \supset p_1))$ (1,1,1)
26. $\neg (p_1 \supset (p_3 \supset p_2)) \supset p_1$ (0,0,0)
27. $((p_1 \supset p_3) \supset p_2) \supset p_1$ (1,1,0)
28. $(p_1 \supset p_3) \supset (p_2 \supset p_1)$ (0,1,0)
29. $p_1 \supset (\neg p_3 \supset (p_2 \supset p_1))$ (1,0,1)
30. $(\neg p_1 \supset (p_3 \supset p_2)) \supset p_1$ (1,1,0)
31. $\neg ((p_1 \supset p_3) \supset p_2) \supset p_1$ (1,0,1)
32. $p_1 \supset ((\neg p_3 \supset p_2) \supset p_1)$ (1,0,0)
33. $\neg p_1 \supset ((\neg p_3 \supset p_2) \supset p_1)$ (0,0,0)
34. $(p_1 \supset p_3) \supset \neg (p_2 \supset p_1)$ (0,1,0)
35. $p_1 \supset (p_3 \supset (p_2 \supset p_1))$ (0,1,1)
36. $\neg (p_1 \supset (p_3 \supset p_2)) \supset p_1$ (1,0,1)
37. $((p_1 \supset p_3) \supset p_2) \supset p_1$ (0,0,1)
38. $(p_1 \supset p_3) \supset (p_2 \supset p_1)$ (0,0,0)
39. $p_1 \supset (\neg p_3 \supset (p_2 \supset p_1))$ (0,1,0)
40. $(\neg p_1 \supset (p_3 \supset p_2)) \supset p_1$ (1,0,1)
41. $\neg ((p_1 \supset p_3) \supset p_2) \supset p_1$ (1,0,0)
42. $p_1 \supset ((\neg p_3 \supset p_2) \supset p_1)$ (1,0,1)
43. $\neg p_1 \supset ((\neg p_3 \supset p_2) \supset p_1)$ (1,0,1)
44. $(p_1 \supset p_3) \supset \neg (p_2 \supset p_1)$ (1,1,0)
45. $p_1 \supset (p_3 \supset (p_2 \supset p_1))$ (1,1,1)
46. $\neg (p_1 \supset (p_3 \supset p_2)) \supset p_1$ (0,0,0)
47. $((p_1 \supset p_3) \supset p_2) \supset p_1$ (0,0,1)
48. $(p_1 \supset p_3) \supset (p_2 \supset p_1)$ (0,1,0)
49. $p_1 \supset (\neg p_3 \supset (p_2 \supset p_1))$ (0,1,1)
50. $(\neg p_1 \supset (p_3 \supset p_2)) \supset p_1$ (0,1,1)
51. $\neg ((p_1 \supset p_3) \supset p_2) \supset p_1$ (0,1,0)
52. $p_1 \supset ((\neg p_3 \supset p_2) \supset p_1)$ (0,0,1)
53. $\neg p_1 \supset ((\neg p_3 \supset p_2) \supset p_1)$ (0,0,0)

54. $(p_1 \supset \neg p_3) \supset \neg (p_2 \supset p_1)$ $(1, 1, 1)$
55. $p_1 \supset \neg (p_3 \supset (p_2 \supset \neg p_1))$ $(1, 1, 0)$
56. $\neg (p_1 \supset (p_3 \supset \neg p_2)) \supset p_1$ $(1, 0, 1)$
57. $((p_1 \supset \neg p_3) \supset \neg p_2) \supset p_1$ $(1, 0, 0)$
58. $(p_1 \supset \neg p_3) \supset (p_2 \supset \neg p_1)$ $(1, 0, 1)$
59. $p_1 \supset (\neg p_3 \supset \neg (p_2 \supset p_1))$ $(1, 1, 1)$
60. $(\neg p_1 \supset (p_3 \supset \neg p_2)) \supset p_1$ $(0, 0, 0)$
61. $\neg ((p_1 \supset \neg p_3) \supset \neg p_2) \supset p_1$ $(0, 0, 1)$

Բ. Արտածել Σ ասույթային հաշվում.

1. $\neg(A \supset \neg C) \supset ((\neg C \supset B) \supset (C \supset A))$
2. $\neg B \supset (C \supset (B \supset \neg A))$
3. $(\neg A \& B) \supset (\neg A \supset B) \& (B \supset \neg A)$
4. $\neg B \supset ((A \vee B) \vee \neg A)$
5. $\neg A \supset (A \vee B \supset B)$
6. $(A \supset B) \supset ((B \supset \neg C) \supset (C \supset \neg A))$
7. $(\neg A \vee B) \& C \supset (\neg A \& C) \vee (B \& C)$
8. $(A \vee B) \& (A \vee C) \supset A \vee (B \& C)$
9. $(A \supset B) \supset (A \& C \supset B \& C)$
10. $(A \supset \neg B) \supset (\neg(A \supset B) \vee \neg A)$
11. $(A \supset (B \supset C \vee \neg C))$
12. $A \vee (B \vee C) \supset B \vee (A \vee C)$
13. $C \supset (A \supset (\neg B \supset A \& \neg B))$
14. $B \supset (\neg A \& B \supset (B \supset \neg A))$
15. $\neg B \supset (\neg C \supset \neg(B \vee C))$
16. $\neg(A \& B) \supset (\neg A \vee \neg B)$
17. $(B \supset C) \supset ((B \supset \neg C) \supset (\neg C \supset \neg B))$
18. $(A \supset \neg B) \supset (C \vee A \supset C \vee \neg B)$
19. $(A \vee B \& \neg B) \supset A$
20. $((A \vee B) \& ((A \supset C) \& (B \supset C))) \supset C$
21. $\neg(B \supset \neg C) \supset ((\neg C \supset A) \supset (C \supset B))$
22. $\neg A \supset (B \supset (A \supset \neg C))$
23. $(\neg B \& B) \supset (\neg A \supset B) \& (B \supset \neg A)$
24. $\neg B \supset ((A \vee C) \vee \neg A)$
25. $\neg A \supset (A \vee C \supset C)$
26. $(A \supset B) \supset ((B \supset \neg D) \supset (D \supset \neg A))$
27. $(\neg A \vee D) \& C \supset (\neg A \& C) \vee (D \& C)$
28. $(A \vee B) \& (A \vee D) \supset A \vee (B \& D)$
29. $(B \supset A) \supset (B \& C \supset A \& C)$

30. $(A \supset \neg C) \supset (\neg(A \supset C) \vee \neg A)$
31. $(D \supset (B \supset C \vee \neg C))$
32. $A \vee (B \vee A) \supset B \vee (A \vee C)$
33. $D \supset (A \supset (\neg B \supset A \& \neg B))$
34. $B \supset (\neg C \& B \supset (B \supset \neg C)) \neg A \supset (\neg C \supset \neg(A \vee C))$
35. $\neg(A \& C) \supset (\neg A \vee \neg C)$
36. $(A \supset C) \supset ((A \supset \neg C) \supset (\neg C \supset \neg A))$
37. $(A \supset \neg B) \supset (D \vee A \supset D \vee \neg B)$
38. $(C \vee B \& \neg B) \supset C$
39. $((A \vee D) \& ((A \supset C) \& (D \supset C))) \supset C$
40. $\neg(A \supset \neg C) \supset (D \supset (C \supset A))$
41. $\neg B \supset (C \supset (B \supset \neg A))$
42. $(\neg A \& B) \supset (\neg A \supset B) \& (B \supset \neg A)$
43. $\neg B \supset ((A \vee B) \vee \neg A)$
44. $\neg A \supset (A \vee B \supset B)$
45. $(A \supset B) \supset ((B \supset \neg C) \supset (C \supset \neg A))$
46. $(\neg A \vee B) \& C \supset (\neg A \& C) \vee (B \& C)$
47. $(A \vee B) \& (A \vee C) \supset A \vee (B \& C)$
48. $(A \supset B) \supset (A \& C \supset B \& C)$
49. $(A \supset \neg B) \supset (\neg(A \supset B) \vee \neg A)$
50. $(A \supset (B \supset C \vee \neg C))$
51. $A \vee (B \vee C) \supset B \vee (A \vee C)$
52. $C \supset (A \supset (\neg B \supset A \& \neg B))$
53. $B \supset (\neg A \& B \supset (B \supset \neg A))$
54. $\neg B \supset (\neg C \supset \neg(B \vee C))$
55. $\neg(A \& B) \supset (\neg A \vee \neg B)$
56. $(B \supset C) \supset ((B \supset \neg C) \supset (\neg C \supset \neg B))$
57. $(A \supset \neg B) \supset (C \vee A \supset C \vee \neg B)$
58. $(A \vee B \& \neg B) \supset A$
59. $((A \vee B) \& ((A \supset C) \& (B \supset C))) \supset C$
60. $A \& \neg A \supset B \vee \neg B$

Գ. Բերել երեք տիպի մեկնաբանություններ, որոնցում տրված բանաձևը ա) իրագործելի է, սակայն նույնաբանություն չէ, բ) նույնաբանություն է, գ) հակասություն է: Եթե դրանցից որևէ մեկը հնարավոր չէ, հիմնավորել պատճառը.

1. $(\forall x_1 P_{\mathcal{P}^2}(x_1, x_2)) \& P_{\mathcal{P}^2}(f_1^1(a_1), x_2) \supset \forall x_1 P_{\mathcal{P}^2}(x_1, x_2)$
2. $x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y \cdot x \cdot z$
3. $\forall x_1 P_{\mathcal{P}^3}(x_1, f_1^1(x_3), x_2) \supset P_2^1(f_1^1(x_3))$
4. $x + y \cdot z = y + x \cdot z$
5. $\forall x_1 P_{\mathcal{P}^2}(x_1, x_2) \vee P_2^1(f_1^1(a_2)) \supset \forall x_1 P_{\mathcal{P}^2}(x_1, x_2) \vee P_2^1(f_1^1(a_2))$
6. $(x + y) \cdot z = x \cdot y \cdot z$
7. $\exists x_1 (\forall x_2 P_{\mathcal{P}^2}(x_1, x_2))$
8. $x = y \& y = z \supset x = z$
9. $(\forall x_1 P_{\mathcal{P}^2}(x_1, x_2)) \supset P_{\mathcal{P}^2}(f_1^2(x_3, a_2), x_2)$
10. $x + y = z \supset x + z = y$
11. $\forall x_1 (P_{\mathcal{P}^2}(x_1, x_2) \supset P_{\mathcal{P}^2}(x_1, f_1^1(x_2)))$
12. $x + y = z \supset x = z \& y = z$
13. $(\forall x_1 P_{\mathcal{P}^2}(x_1, x_2)) \supset P_{\mathcal{P}^2}(f_1^1(x_3), x_2) \vee (\forall x_1 P_{\mathcal{P}^2}(x_1, x_2))$
14. $x = y \vee x = z \supset y = z$
15. $\exists x_1 (\forall x_2 P_{\mathcal{P}^2}(x_1, x_2))$
16. $x \cdot y \cdot z = x \vee x \cdot y \cdot z = y \vee x \cdot y \cdot z = z$
17. $(\forall x_1 P_{\mathcal{P}^2}(x_1, x_2)) \supset (P_{\mathcal{P}^2}(f_1^1(x_3), x_2) \supset \forall x_1 P_{\mathcal{P}^2}(x_1, x_2))$
18. $x \cdot y \cdot z = x \vee x \cdot y \cdot z = y \vee x \cdot y \cdot z = z \supset (x = y = z = 1)$
19. $\forall x_1 (P_{\mathcal{P}^2}(x_1, x_2) \supset \neg P_{\mathcal{P}^2}(x_1, f_1^1(x_2)))$

20. $x \cdot y \cdot z = x \& x \cdot y \cdot z = y \& x \cdot y \cdot z = z$
21. $\neg(P_{\mathcal{F}}^2(x_1, x_2) \supset P_{\mathcal{F}}^2(f_1^1(x_1), f_1^1(x_2)))$
22. $x=y=z \supset xy=xz=yz$
23. $(\forall x_1 P_{\mathcal{F}}^2(x_2, x_1)) \supset P_{\mathcal{F}}^2(x_2, f_{\mathcal{F}}^2(x_3, x_2))$
24. $(x=y \cdot z) \supset (x=y) \vee (x=z)$
25. $\exists x_1 P_{\mathcal{F}}^2(x_1, x_2) \supset \neg(\forall x_3 P_{\mathcal{F}}^3(x_1, x_2, x_3))$
26. $(x < y) \supset (x \cdot y \geq x \cdot x)$
27. $(\forall x_1 P_{\mathcal{F}}^2(x_1, x_2)) \& \neg P_{\mathcal{F}}^2(f_1^1(x_3), x_2) \supset \forall x_1 P_{\mathcal{F}}^2(x_1, x_2)$
28. $\neg((x+y)+\alpha = x +(\alpha+y))$
29. $(\forall x_1 P_{\mathcal{F}}^2(x_1, x_2)) \supset (\neg P_{\mathcal{F}}^2(f_1^1(x_3), x_2) \supset \exists x_1 P_{\mathcal{F}}^2(x_1, x_2))$
30. $(x < y) \supset (x+y \geq x+x)$
31. $P_{\mathcal{F}}^2(f_1^1(x_3), x_2) \supset (\neg \forall x_1 P_{\mathcal{F}}^2(x_1, x_2) \supset P_{\mathcal{F}}^2(f_1^1(x_3), x_2))$
32. $(\forall x_1 P_{\mathcal{F}}^2(x_1, x_2)) \supset (P_{\mathcal{F}}^2(f_1^1(x_3), x_2)) \supset \neg P_{\mathcal{F}}^2(x_3, x_2)$
33. $P_{\mathcal{F}}^2(f_1^1(x_3), x_2) \& (\neg \forall x_1 P_{\mathcal{F}}^2(x_1, x_2)) \supset P_{\mathcal{F}}^2(f_1^1(x_3), x_2)$
34. $P_{\mathcal{F}}^2(x_1, x_2) \supset \neg P_{\mathcal{F}}^2(f_1^1(x_1), f_1^1(x_2))$
35. $\neg P_{\mathcal{F}}^2(f_1^1(x_3), x_2) \supset (\forall x_1 P_{\mathcal{F}}^2(x_1, x_2)) \vee \neg P_{\mathcal{F}}^2(f_1^1(x_3), x_2)$
36. $\neg(P_{\mathcal{F}}^2(x_1, x_2) \supset P_{\mathcal{F}}^2(f_1^1(x_1), f_1^1(x_2)))$
37. $P_{\mathcal{F}}^2(f_1^1(x_3), x_2) \supset P_{\mathcal{F}}^2(f_1^1(x_3), x_2) \& (\neg \forall x_1 P_{\mathcal{F}}^2(x_1, x_2))$
38. $\neg P_{\mathcal{F}}^2(f_1^1(x_1), f_1^1(x_2)) \supset P_{\mathcal{F}}^2(x_1, x_2)$
39. $(\forall x_1 P_{\mathcal{F}}^2(x_1, x_2) \vee \neg P_{\mathcal{F}}^2(f_1^1(x_3), x_2)) \supset P_{\mathcal{F}}^2(f_1^1(x_3), x_2)$
40. $\neg(P_{\mathcal{F}}^2(x_1, x_2) \supset P_{\mathcal{F}}^2(f_1^1(x_1), f_1^1(x_2)))$
41. $\forall x_1 P_{\mathcal{F}}^2(x_1, x_2) \supset (\forall x_1 \neg P_{\mathcal{F}}^2(x_1, x_2)) \& P_{\mathcal{F}}^2(f_1^1(a_1), x_2) x_2$

42. $\neg P_2^1(f_1^1(x_3)) \supset \forall x_1 P_1^3(x_1, f_1^1(x_3), x_2)$
43. $\forall x_1 P_1^2(x_1, x_2) \vee P_2^1(f_1^1(a_2)) \supset \forall x_1 P_1^2(x_1, x_2) \vee \neg P_2^1(f_1^1(a_2))$
44. $\exists x_1 (\forall x_2 P_1^2(x_1, x_2)) \supset \neg P_1^2(f_1^2(x_3, a_2), x_2)$
45. $\neg P_1^2(f_1^2(x_3, a_2), x_2) \supset (\forall x_1 P_1^2(x_1, x_2))$
46. $P_2^2(x_1, f_1^1(x_2)) \supset \neg \forall x_1 (P_1^2(x_1, x_2))$
47. $P_2^2(f_1^1(x_3), x_2) \vee (\forall x_1 P_1^2(x_1, x_2)) \supset \neg (\forall x_1 P_1^2(x_1, x_2))$
48. $(\forall x_1 \neg P_1^2(x_1, x_2)) \supset \neg \exists x_1 (\forall x_2 P_1^2(x_1, x_2))$
49. $(P_2^2(f_1^1(x_3), x_2) \supset \forall x_1 P_1^2(x_1, x_2)) \supset (\neg \forall x_1 P_1^2(x_1, x_2))$
50. $\neg P_2^2(x_1, f_1^1(x_2)) \supset \neg \forall x_1 (P_1^2(x_1, x_2))$
51. $P_1^2(x_2, f_1^2(x_3, x_2)) \supset \neg (\forall x_1 P_1^2(x_2, x_1))$
52. $\neg \exists x_1 P_1^2(x_1, x_2) \supset \neg (\forall x_3 P_2^3(x_1, x_2, x_3))$
53. $\forall x_1 P_1^2(x_1, x_2) \supset \neg (\forall x_1 P_1^2(x_1, x_2)) \& \neg P_2^2(f_1^1(x_3), x_2)$
54. $\neg \exists x_1 P_1^2(x_1, x_2) \supset (\forall x_1 P_1^2(x_1, x_2)) \supset (\neg P_2^2(f_1^1(x_3), x_2))$
55. $(P_2^2(f_1^1(x_3), x_2) \supset (\neg \forall x_1 P_1^2(x_1, x_2))) \supset \neg P_2^2(f_1^1(x_3), x_2)$
56. $\neg P_1^2(x_3, x_2) \supset (\neg \forall x_1 P_1^2(x_1, x_2)) \supset (P_2^2(f_1^1(x_3), x_2))$
57. $\neg P_2^2(f_1^1(x_3), x_2) \supset P_2^2(f_1^1(x_3), x_2) \& (\neg \forall x_1 P_1^2(x_1, x_2))$
58. $\neg P_1^2(f_1^1(x_1), f_1^1(x_2)) \supset \neg P_1^2(x_1, x_2)$
59. $(\forall x_1 P_1^2(x_1, x_2) \vee \neg P_2^2(f_1^1(x_3), x_2)) \supset P_2^2(f_1^1(x_3), x_2)$
60. $\neg (P_1^2(x_1, x_2) \supset \neg P_1^2(f_1^1(x_1), f_1^1(x_2)))$

Դ. Բերել նախաձավալչային տեսքի.

1. $(\forall x_1 P_{f^2}(x_1, x_2)) \& P_{f^2}(f_1^1(a_1), x_2) \supset \forall x_1 P_{f^2}(x_1, x_2)$
2. $\forall x_1 P_{f^3}(x_1, f_1^1(x_3), x_2) \supset \exists x_3 P_{f^2}(f_1^1(x_3))$
3. $\forall x_1 P_{f^2}(x_1, x_2) \vee P_{f^2}(f_1^1(a_2)) \supset \forall x_1 P_{f^2}(x_1, x_2) \vee P_{f^2}(f_1^1(a_2))$
4. $\exists x_1 (\forall x_2 P_{f^2}(x_1, x_2)) \supset \exists x_3 P_{f^2}(f_1^1(x_3))$
5. $(\forall x_1 P_{f^2}(x_1, x_2)) \supset \exists x_2 P_{f^2}(f_{f^2}(x_3, a_2), x_2)$
6. $\forall x_1 (P_{f^2}(x_1, x_2) \supset \exists x_1 P_{f^2}(x_1, f_1^1(x_2)))$
7. $(\forall x_1 P_{f^2}(x_1, x_2)) \supset P_{f^2}(f_1^1(x_3), x_2) \vee (\forall x_1 P_{f^2}(x_1, x_2))$
8. $\exists x_1 (\forall x_2 P_{f^2}(x_1, x_2)) \supset \exists x_3 P_{f^2}(x_1, x_2, x_3)$
9. $(\forall x_1 P_{f^2}(x_1, x_2)) \supset (P_{f^2}(f_1^1(x_3), x_2) \supset \forall x_1 P_{f^2}(x_1, x_2))$
10. $\exists x_3 P_{f^2}(x_1, x_2, x_3) \& (P_{f^2}(x_1, x_2) \supset \exists x_3 P_{f^2}(x_1, f_1^1(x_2)))$
11. $(\forall x_1 P_{f^2}(x_2, x_1)) \supset \exists x_3 P_{f^2}(x_2, f_{f^2}(x_3, x_2))$
12. $\exists x_1 P_{f^2}(x_1, x_2) \supset \exists x_3 P_{f^2}(x_1, x_2, x_3)$
13. $(\forall x_1 P_{f^2}(x_1, x_2)) \& \exists P_{f^2}(f_1^1(x_3), x_2) \supset \forall x_1 P_{f^2}(x_1, x_2)$
14. $(\forall x_1 P_{f^2}(x_1, x_2)) \supset (\exists P_{f^2}(f_1^1(x_3), x_2) \supset \exists x_1 P_{f^2}(x_1, x_2))$
15. $\exists x_2 P_{f^2}(f_1^1(x_3), x_2) \supset (\forall x_1 P_{f^2}(x_1, x_2) \supset P_{f^2}(f_1^1(x_3)))$
16. $(\forall x_1 P_{f^2}(x_1, x_2)) \supset (P_{f^2}(f_1^1(x_3), x_2) \supset \exists x_2 P_{f^2}(x_3, x_2))$
17. $P_{f^2}(f_1^1(x_3), x_2) \& (\forall x_1 P_{f^2}(x_1, x_2) \supset P_{f^2}(f_1^1(x_3), x_2))$
18. $\exists x_2 P_{f^2}(x_1, x_2) \supset \forall x_1 P_{f^2}(f_1^1(x_1), f_1^1(x_2))$
19. $\exists x_2 P_{f^2}(f_1^1(x_3), x_2) \supset (\forall x_1 P_{f^2}(x_1, x_2) \vee P_{f^2}(f_1^1(x_3)))$
20. $\exists x_2 (P_{f^2}(x_1, x_2) \supset (\forall x_1 P_{f^2}(f_1^1(x_1), f_1^1(x_2))))$

21. $\forall x_1 P_{\tau^2}(x_1, x_2) \vee P_2^1(f_1^1(a_2)) \supset \forall x_1 P_{\tau^2}(x_1, x_2) \vee \neg P_2^1(f_1^1(a_2))$
22. $\exists x_1 (\forall x_2 P_{\tau^2}(x_1, x_2)) \supset \neg P_{\tau^2}(f_{\tau^2}(x_3, a_2), x_2)$
23. $\neg P_{\tau^2}(f_{\tau^2}(x_3, a_2), x_2) \supset (\forall x_1 P_{\tau^2}(x_1, x_2))$
24. $P_2^2(x_1, f_1^1(x_2)) \supset \neg \forall x_1 (P_{\tau^2}(x_1, x_2))$
25. $P_2^2(f_1^1(x_3), x_2) \vee (\forall x_1 P_{\tau^2}(x_1, x_2)) \supset \neg (\forall x_1 P_{\tau^2}(x_1, x_2))$
26. $(\forall x_1 \neg P_{\tau^2}(x_1, x_2)) \supset \neg \exists x_1 (\forall x_2 P_{\tau^2}(x_1, x_2))$
27. $(P_2^2(f_1^1(x_3), x_2) \supset \forall x_1 P_{\tau^2}(x_1, x_2)) \supset (\neg \forall x_1 P_{\tau^2}(x_1, x_2))$
28. $\neg P_2^2(x_1, f_1^1(x_2)) \supset \neg \forall x_1 (P_{\tau^2}(x_1, x_2))$
29. $P_{\tau^2}(x_2, f_{\tau^2}(x_3, x_2)) \supset \neg (\forall x_1 P_{\tau^2}(x_2, x_1))$
30. $\neg \exists x_1 P_{\tau^2}(x_1, x_2) \supset \neg (\forall x_3 P_2^3(x_1, x_2, x_3))$
31. $\forall x_1 P_{\tau^2}(x_1, x_2) \supset \neg (\forall x_1 P_{\tau^2}(x_1, x_2)) \& \neg P_2^2(f_1^1(x_3), x_2)$
32. $\neg \exists x_1 P_{\tau^2}(x_1, x_2) \supset (\forall x_1 P_{\tau^2}(x_1, x_2)) \supset (\neg P_2^2(f_1^1(x_3), x_2))$
33. $(P_2^2(f_1^1(x_3), x_2) \supset (\neg \forall x_1 P_{\tau^2}(x_1, x_2))) \supset \neg P_2^2(f_1^1(x_3), x_2)$
34. $\neg P_{\tau^2}(x_3, x_2) \supset (\neg \forall x_1 P_{\tau^2}(x_1, x_2)) \supset (P_2^2(f_1^1(x_3), x_2))$
35. $\neg P_2^2(f_1^1(x_3), x_2) \supset P_2^2(f_1^1(x_3), x_2) \& (\neg \forall x_1 P_{\tau^2}(x_1, x_2))$
36. $\neg P_{\tau^2}(f_1^1(x_1), f_1^1(x_2)) \supset \neg P_{\tau^2}(x_1, x_2)$
37. $(\forall x_1 P_{\tau^2}(x_1, x_2) \vee \neg P_2^2(f_1^1(x_3), x_2)) \supset P_2^2(f_1^1(x_3), x_2)$
38. $\neg (P_{\tau^2}(x_1, x_2) \supset \neg P_{\tau^2}(f_1^1(x_1), f_1^1(x_2)))$
39. $\neg P_2^1(f_1^1(x_3)) \supset \forall x_1 P_{\tau^3}(x_1, f_1^1(x_3), x_2)$
40. $P_2^2(x_1, f_1^1(x_2)) \supset \neg \forall x_1 (P_{\tau^2}(x_1, x_2))$
41. $P_2^2(f_1^1(x_3), x_2) \vee (\forall x_1 P_{\tau^2}(x_1, x_2)) \supset \neg (\forall x_1 P_{\tau^2}(x_1, x_2))$

42. $(\forall x_1 \neg P^2(x_1, x_2)) \supset \neg \exists x_1 (\forall x_2 P^2(x_1, x_2))$
43. $(P^2(f_1^1(x_3), x_2) \supset \forall x_1 P^2(x_1, x_2)) \supset (\neg \forall x_1 P^2(x_1, x_2))$
44. $\neg P^2(x_1, f_1^1(x_2)) \supset \neg \forall x_1 (P^2(x_1, x_2))$
45. $P^2(x_2, f_1^2(x_3, x_2)) \supset \neg (\forall x_1 P^2(x_2, x_1))$
46. $\neg \exists x_1 P^2(x_1, x_2) \supset \neg (\forall x_3 P^3(x_1, x_2, x_3))$
47. $\forall x_1 P^2(x_1, x_2) \supset (\neg (\forall x_1 P^2(x_1, x_2)) \& \neg P^2(f_1^1(x_3), x_2))$
48. $\neg \exists x_1 P^2(x_1, x_2) \supset (\forall x_1 P^2(x_1, x_2)) \supset (\neg P^2(f_1^1(x_3), x_2))$
49. $(P^2(f_1^1(x_3), x_2) \supset (\neg \forall x_1 P^2(x_1, x_2)) \supset \neg P^2(f_1^1(x_3), x_2))$
50. $\neg P^2(x_3, x_2) \supset (\neg \forall x_1 P^2(x_1, x_2)) \supset (P^2(f_1^1(x_3), x_2))$
51. $\neg P^2(f_1^1(x_3), x_2) \supset P^2(f_1^1(x_3), x_2) \& (\neg \forall x_1 P^2(x_1, x_2))$
52. $\neg P^2(f_1^1(x_1), f_1^1(x_2)) \supset \neg \forall P^2(x_1, x_2)$
53. $(\forall x_1 P^2(x_1, x_2) \vee \neg P^2(f_1^1(x_3), x_2)) \supset P^2(f_1^1(x_3), x_2)$
54. $\neg \forall (P^2(x_1, x_2) \supset \neg P^2(f_1^1(x_1), f_1^1(x_2)))$
55. $P^2(f_1^1(x_3), x_2) \& (\neg \forall x_1 P^2(x_1, x_2)) \supset P^2(f_1^1(x_3), x_2)$
56. $\neg \exists P^2(x_1, x_2) \supset \neg P^2(f_1^1(x_1), f_1^1(x_2))$
57. $\neg P^2(f_1^1(x_3), x_2) \supset (\forall x_1 P^2(x_1, x_2)) \vee \neg P^2(f_1^1(x_3), x_2)$
58. $\neg (P^2(x_1, x_2) \supset \neg \exists P^2(f_1^1(x_1), f_1^1(x_2)))$
59. $P^2(f_1^1(x_3), x_2) \supset P^2(f_1^1(x_3), x_2) \& (\neg \forall x_1 P^2(x_1, x_2))$
60. $\neg \exists P^2(f_1^1(x_1), f_1^1(x_2)) \supset P^2(x_1, x_2)$
61. $(\forall x_1 P^2(x_1, x_2) \vee \neg P^2(f_1^1(x_3), x_2)) \supset P^2(f_1^1(x_3), x_2)$

Ե. Արտածել ֆորմալ թվաբանությունում.

1. $t = r \supset \bar{1} + t' = r''$
2. $ts = 0 \& s = t' \supset t = 0$
3. $(t' + r') + s' = (t + (r + s))'''$
4. $t'' + \bar{3} = t' + \bar{4}$
5. $\neg(t + s = 0) \supset \neg(t = s)$
6. $t < s \supset (s = r \supset t < r)$
7. $t' + \bar{3} = (t + \bar{1})'''$
8. $r = 0 \& t < s \supset tr = sr$
9. $\bar{3}t + \bar{1} = (\bar{2}t)' + t$
10. $(t + r)'' = t' + r'$
11. $r < s \& s < t \supset r + \bar{2} \leq t$
12. $(t'' + \bar{1})' = t + \bar{4}$
13. $t = r' \supset t < r + \bar{2}$
14. $t' + r = r' + t$
15. $t + s = r \supset t' + s' = r''$
16. $t \leq s \& s \leq t \supset t = s$
17. $t''' + \bar{2} = t'' + \bar{3}$
18. $\neg(t = s) \supset \neg(t + s = 0)$
19. $t' + (r' + s') = ((t + r) + s)'''$
20. $\bar{2}t + \bar{3} = (t)''' + t$
21. $\bar{3}t + \bar{4} = (\bar{2}t)'''' + t$
22. $t = r \supset \bar{2} + t' = r'''$
23. $ts = 0 \& s = t'' \supset t = 0$
24. $(t'' + r') + s' = (t + (r + s))''''$
25. $t'' + \bar{4} = t' + \bar{5}$
26. $\neg(t + s = 0) \supset \neg(t' = s')$
27. $t < s \supset (s = r' \supset t < r')$
28. $t'' + \bar{3} = (t + \bar{1})''''$
29. $r = 0 \& t' < s \supset t'r = sr$
30. $\bar{3}t + \bar{2} = (\bar{2}t)' + t'$

31. $(t + r)''' = t'' + r'$
32. $r < s \& s' < t \supset r + \bar{3} \leq t$
33. $(t'' + \bar{2})' = t + \bar{5}$
34. $t = r' \supset t < r + \bar{3}$
35. $t'' + r = r'' + t$
36. $t' + s = r \supset t' + s' = r'$
37. $t' \leq s \& s \leq t' \supset t' = s$
38. $t''' + \bar{2} = t' + \bar{4}$
39. $\neg(t' = s') \supset \neg(t + s = 0)$
40. $t + (r' + s') = ((t + r) + s)''$
41. $\bar{2}t + \bar{4} = (t)'''' + t$
42. $\bar{3}t + \bar{2} = (\bar{2}t)'' + t$
43. $t = r \supset \bar{2} + t' = r'''$
44. $ts = 0 \& s = t'' \supset t = 0$
45. $(t' + r') + s''' = (t + (r + s))'''$
46. $t'' + \bar{3} = t''' + \bar{2}$
47. $\neg(t + s = 0) \supset \neg(t'' = s'')$
48. $t < s \supset (s = r'' \supset t' < r''')$
49. $t' + \bar{4} = (t + \bar{3})'''$
50. $r = 0 \& t < s'' \supset tr = sr$
51. $\bar{3}t + \bar{2} = (\bar{2}t)' + t'$
52. $(t' + r)'' = t' + r''$
53. $r < s \& s < t \supset r + \bar{3} \leq t'$
54. $(t'' + \bar{3})' = t' + \bar{4}$
55. $t = r' \supset t < r + \bar{3}$
56. $t' + r'' = r' + t''$
57. $t + s = r \supset t' + s = r'$
58. $t \leq s' \& s' \leq t \supset t = s'$
59. $t'' + \bar{2} = t + \bar{4}$
60. $\neg(t + s' = 0)$

2. Կառուցել հետևյալ ֆունկցիան S -ում ներկայացնող բանաձևը.

1. $F(x, y) = x^2 + 3!y$
2. $F(x, y, z) = y^2 + 3rm(x, z)$
3. $F(x, y) = \max(2x, 3y^2)$
4. $F(x, y, z) = \min(x, y + 1, z + 2)$
5. $F(x, y) = |x - 2y|$
6. $F(x, y, z) = rm(xz, 3y)$
7. $F(x) = \mu_y(x + 5y \geq 40)$
8. $F(x, y, z) = \max(rm(x, y), 3z)$
9. $F(x, y) = 8x + sg(y)$
10. $F(x, y, z) = 2xy \dot{-} z$
11. $F(x) = \mu_y(|x - 2y| = 0)$
12. $F(x, y, z) = [xy/2z]$
13. $F(x, z) = \mu_y(|xz - y| = 0)$
14. $F(x, y, z) = 2xy \dot{-} 3z$
15. $F(x, y, z) = \min(rm(x, z), y)$
16. $F(x, y) = sg|3x - 2y|$
17. $F(x, y, z) = [xz/3y]$
18. $F(x, y) = \mu_z(|2xy - z| = 0)$
19. $F(x, y, z) = [x/y] + 3z$
20. $F(x, y) = \min([x/2], [y/3])$
21. $F(x, y, z) = \min(\max(y, z), x)$
22. $F(x, y) = 4x^2 + 3!y$
23. $F(x, y, z) = 5y^2 + 3rm(x, z)$
24. $F(x, y) = \max(2x, 32y^2)$
25. $F(x, y, z) = \min(x, y + 31, z + 2)$
26. $F(x, y) = |x - 32y|$
27. $F(x, y, z) = rm(7xz, 3y)$
28. $F(x) = \mu_y(x + 5y \geq 409)$

29. $F(x, y, z) = \max(2\text{rm}(x, y), 3z)$
30. $F(x, y) = 18x + \text{sg}(y)$
31. $F(x, y, z) = 2xy \dot{-} 3z$
32. $F(x) = \mu_y (|4x - 2y| = 0)$
33. $F(x, y, z) = [3xy/2z]$
34. $F(x, z) = \mu_y (|xz - 2y| = 0)$
35. $F(x, y, z) = 2xy \dot{-} 3z$
36. $F(x, y, z) = \min(\text{rm}(x, z), y)$
37. $F(x, y) = \text{sg}|3x - 2y|$
38. $F(x, y, z) = [xz/3y]$
39. $F(x, y) = \mu_z (|2xy - z| = 0)$
40. $F(x, y, z) = 7[x/y] + 3z$
41. $F(x, y) = \min([x/2], [y/13])$
42. $F(x, y, z) = \min(\max(y, z), 5x)$
43. $F(x, y) = x^2 + 4!y$
44. $F(x, y, z) = 7y^2 + 3\text{rm}(x, z)$
45. $F(x, y) = \max(21x, 13y^2)$
46. $F(x, y, z) = \min(x, y + 71, z + 2)$
47. $F(x, y) = |5x - 2y|$
48. $F(x, y, z) = \text{rm}(11xz, 3y)$
49. $F(x) = \mu_y (x + 5y \geq 40)$
50. $F(x, y, z) = \max(\text{rm}(x, 2y), 3z)$
51. $F(x, y) = 18x + \text{sg}(y)$
52. $F(x, y, z) = 2xy \dot{-} 5z$
53. $F(x, y, z) = \min(\text{rm}(x, z), 7y)$
54. $F(x, y) = \text{sg}|3x - 2y|$
55. $F(x, y, z) = [xz/3y]$
56. $F(x, y) = \mu_z (|3xy - z| = 0)$
57. $F(x, y, z) = [x/2y] + 3z$
58. $F(x, y) = \min([x/2], [y/5])$
59. $F(x, y, z) = \min(\max(y, z), 7x)$

- 60. $F(x, y) = 5x^2 + 3!y$
- 61. $F(x, y, z) = y^2 + 3\text{rm}(x, 2z)$
- 62. $F(x, y) = \max(12x, 3y^2)$
- 63. $F(x, y, z) = \min(x + 3, y + 1, z + 2)$
- 64. $F(x, y) = |7x - 12y|$

Է. Հստ գյողելյան համարի՝ վերականգնել ֆորմալ տեսության օրէկտը (եթե գոյություն ունի).

1. 443	20. 2021	39. 2007	58. 503
2. 1500	21. 349	40. 2009	59. 7411
3. 2034	22. 241	41. 1986	60. 2025
4. 666	23. 2331	42. 1991	
5. 2299	24. 749	43. 1961	
6. 428	25. 729	44. 1966	
7. 87456	26. 3000	45. 1992	
8. 691	27. 1946	46. 1995	
9. 1500	28. 1948	47. 2002	
10. 2034	29. 1952	48. 2014	
11. 666	30. 1919	49. 214	
12. 2299	31. 1912	50. 202	
13. 428	32. 1931	51. 209	
14. 87456	33. 1906	52. 207	
15. 3276	34. 1942	53. 198	
16. 71	35. 1953	54. 201	
17. 59	36. 1964	55. 1962	
18. 2691	37. 1969	56. 1973	
19. 489	38. 1978	57. 2015	

Հարցաշար

1. Ֆորմալ տեսության սահմանումը (լեզու, հենասույթներ, արտաձման կանոններ), հիմնական հատկությունները (անհակասելիություն, լրիվություն, լուծելիություն)
2. Ասույթային հաշվի սահմանումը, հատկությունները
3. Դեդուկցիայի թեորեմը ասույթային հաշվում
4. Կալմարի լեմմա
5. Թեորեմ ասույթային հաշվի լրիվության վերաբերյալ
6. Թեորեմ ասույթային հաշվի անհակասելիության վերաբերյալ
7. Ասույթային հաշվի հենասույթների անկախությունը
8. Պրեդիկատային հաշվի սահմանումը, հատկությունները
9. Մեկնաբանություն, իրագործելիություն, հակասություն, նույնաբանություն, համապիտանորեն ճիշտ բանաձևեր, օրինակներ
10. Դեդուկցիայի թեորեմը պրեդիկատային հաշվում
11. Թեորեմ պրեդիկատային հաշվի անհակասելիության վերաբերյալ
12. Ֆորմալ թվաբանության սահմանումը, հատկությունները
13. Նոր հարաբերությունների ներմուծում S-ում
14. Մետաթեորեմ բնական թվերի անհավասարության, գումարի ու արտադրյալի ներկայացման վերաբերյալ S-ում
15. Պրեդիկատների արտահայտում ու ֆունկցիաների ներկայացում S-ում
16. Հիմքային ֆունկցիաների ներկայացումը ֆորմալ թվաբանությունում, օրինակներ
17. Գյոդելի ֆ-ի հատկությունն ու ներկայացումը S-ում

18. Ոչ էական փոփոխականների ներմուծման գործողության արդյունքի ներկայացումը ֆորմալ թվաբանությունում
19. Տեղադրման գործողության արդյունքի ներկայացումը ֆորմալ թվաբանությունում
20. Պարզագույն անդրադարձման արդյունքի ներկայացումը ֆորմալ թվաբանությունում
21. Նվագագույնի որոնման գործողության արդյունքի ներկայացումը ֆորմալ թվաբանությունում
22. Կարգընթաց պրեդիկատների արտահայտումը ֆորմալ թվաբանությունում
23. Ֆորմալ տեսության օբյեկտների համարակալումն ըստ Գյոդելի
24. Գյոդելի առաջին թեորեմը ֆորմալ թվաբանության ոչ լրիվության վերաբերյալ
25. Գյոդելի երկրորդ թեորեմն ու թվաբանության անհակասելիության ոչ արտաձելիությունը նրանում

Резюме

Математическая логика

Анаит Чубарян

Данное пособие представляет собой расширенное воспроизведение записей полугодового курса лекций по математической логике, читаемого автором студентам, обучающимся на факультетах с математической направленностью.

Пособие содержит сжатое изложение основ классической математической логики. Составляющими частями изложенной в данном пособии теории являются: исчисление высказываний, исчисление предикатов и формальная арифметика, которая завершается знаменитой теоремой Гёделя о неполноте арифметики, а также комментарии, появившихся как разъяснения на задаваемые студентами, на первый взгляд, странные вопросы.

Пособие содержит также тематические подборки задач и упражнений, которые могут быть использованы как для практических занятий, так и на письменных и устных экзаменах.

Предполагается, что основной материал данного пособия будет легко усвоен любым обладателем математического мышления, однако желательно, чтобы он был знаком с основами теории булевых функций, теории множеств, а также теории алгоритмов.

Summary

Mathematical Logic

Anahit Chubaryan

This textbook is prepared on the basis of the author's one-semester lecture notes reflecting the Mathematical Logic course for undergraduate and graduate students of mathematical or applied mathematical departments.

This book is a compact introduction to many of the important topics of classical mathematical logic, comprising natural and unrestricted theoretic methods. It covers propositional logic, predicate calculus, and axiomatic arithmetic. The major results of Gödel about the incompleteness of formal systems are also given in an adapted version.

The textbook also contains many exercises, which can be used for practical tasks and exams. This book should be of interest to introductory courses for students of mathematics, philosophy, computer science, and electrical engineering.

I believe that the essential parts of the book can be read with ease by anyone with some experience in abstract mathematical thinking. There is, however, no specific prerequisite, but some knowledge of Boolean functions, set theory, and algorithm theory can be useful.

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԱՆԱՀԻՏ ԱՐՏԱՇԵՍԻ ԶՈՒԲԱՐՅԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ
ՏՐԱՄԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

(ուսումնական ձեռնարկ)

Համակարգչային ձևավորումը՝ Կ. Չալաբյանի
Կազմի ձևավորումը՝ Ա. Պատվականյանի
Խմբագրումը՝ Մ. Հովհաննիսյանի

Հեղինակը հաստատում է, որ ծանոթ է «ԵՊՀ գրահրատարակչական քաղաքականությանը», և գրքում առկա փաստերը, դիրքորոշումները, կարծիքները շարադրված են հեղինակային իրավունքի և էթիկայի սիջազգայնորեն ընդունված սկզբունքների պահպանմամբ:

Ստորագրված է տպագրության՝ 30.05.2025:

Չափսը՝ 60x84 ¹/₁₆: Տպ. մամուլը՝ 7:

Տպաքանակը՝ 100:

ԵՊՀ հրատարակչություն
ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1
www.publishing.y-su.am