

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Կ. Վ. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ

ՏԵՍԱԿԱՆ
ԵՎ ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ
ՎԻՃԱԿԱԳՐՈՒԹՅԱՆ
ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐ

Մաս 2

Վիճակագրական վարկածների ստուգում:
Գծային ռեգրեսիա

ԵՐԵՎԱՆ

ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿԶՈՒԹՅՈՒՆ

2025

ՀՏԴ 311(075.8)

ԳՄԴ 60.6g73

Գ 316

Հրատարակության է երաշխավորել

ԵՊՀ գիտական խորհուրդը:

Դասագիրքը նվիրում եմ որդուս՝

Վահանի հիշատակին:

Գիտական խմբագիր՝

Ֆիզ-մաթ. գիտությունների դոկտոր, պրոֆեսոր **Օհանյան Վ. Կ.**

Գրախոսներ՝

Ֆիզ-մաթ. գիտությունների դոկտոր, պրոֆեսոր **Արամյան Ռ. Հ.**

Ֆիզ-մաթ. գիտությունների թեկնածու, դոցենտ **Կակոյան Ա. Վ.**

Գասպարյան Կ. Վ.

Գ 316 Տեսական և կիրառական վիճակագրության հիմունքներ / Կ. Վ.

Գասպարյան - Եր.: ԵՊՀ հրատ., 2025. Մաս 2: Վիճակագրական

վարկածների ստուգում: Գծային ռեգրեսիա - 342 էջ:

Դասագրքի երկրորդ մասը նվիրված է պարամետրական և ոչ պարամետրական վիճակագրական վարկածների տեսությանը և զույգային ու բազմաչափ գծային ռեգրեսիոն անալիզի հարցերին: Ներառված տեսական նյութը ուղեկցվում է յուրաքանչյուր թեմային վերաբերող օրինակներով և խնդիրներով:

Դասագիրքը նախատեսված է մաթեմատիկայի և մեխանիկայի (ներառյալ ակտուարական և ֆինանսական մաթեմատիկայի), ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետների բակալավրիատի և մագիստրատուրայի ուսանողների համար: Այն կարող է օգտակար լինել նաև ԵՊՀ-ի տնտեսագիտության և կառավարման ֆակուլտետի ուսանողներին և բոլոր այն մասնագետներին, որոնք նպատակ ունեն իրենց հետազոտություններում օգտագործել վիճակագրական խորացված մեթոդները:

ՀՏԴ 311(075.8)

ԳՄԴ 60.6g73

ISBN 978-5-8084-2732-7

<https://doi.org/10.46991/YSUPH/9785808427327>

© ԵՊՀ հրատ., 2025

© Կ. Վ. Գասպարյան, 2025

K. V. GASPARYAN

**Foundations of Theoretical
and
Applied Statistics
Part 2**

К. В. ГАСПАРЯН

**Основы теоретической и
прикладной статистики
Часть 2**

Ереван - Yerevan
Издательство ЕГУ / YSU Press
2025

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԱԽԱԲԱՆ	8
Գլուխ 8. Վիճակագրական վարկածների ստուգում	10
§ 8.1. Անհրաժեշտ սահմանումներ: Ոչ ռանդոմիզացված և ռանդոմիզացված հայտանիշներ.....	10
§ 8.2. I և II սերի սխալներ.....	13
§ 8.3. Վարկածների ստուգման խնդրի դրվածք	16
<i>Խնդիրներ</i>	<i>21</i>
Գլուխ 9. Պարամետրական վարկածներ	23
§ 9.1. Երկու պարզ վարկածի ստուգում: Նեյման-Պիրսոնի ճշմարտանմանության հարաբերության հայտանիշը	23
§ 9.2. Նեյման – Պիրսոնի ճշմարտանմանության հարաբերության հայտանիշի սահմանային հատկությունները	31
<i>Խնդիրներ</i>	<i>36</i>
§ 9.3. Միակողմանի բարդ վարկածների ստուգում Մոնոտոն ճշմարտանմանության հարաբերությունով բաշխումներ	38
<i>Խնդիրներ</i>	<i>44</i>
§ 9.4. Պարզ վարկածի ստուգում ընդդեմ երկկողմանի բարդ երկընտրանքային վարկածի.....	45
<i>Խնդիրներ</i>	<i>55</i>
§ 9.5. Վարկածների ստուգում և միջակայքային գնահատականներ	57
<i>Խնդիրներ</i>	<i>68</i>

§ 9.6. Ճշմարտանմանության հարաբերության հայտանիշը և դրա որոշ կիրառությունները	69
<i>Խնդիրներ</i>	94
Գլուխ 10. Ոչ պարամետրական վարկածներ.....	96
§ 10.1. Համաձայնության հայտանիշներ	96
§ 10.1.1. Պիրսոնի χ² հայտանիշ.....	98
§ 10.1.2. χ² հայտանիշ: Բարդ վարկածի ստուգում.....	104
<i>Խնդիրներ</i>	109
§ 10.1.3. Կոլմոգորովի հայտանիշ.....	110
<i>Խնդիրներ</i>	115
§ 10.2. Համասեռության հայտանիշներ	116
§ 10.2.1. Սմիռնովի համասեռության հայտանիշ.....	116
§ 10.2.2. χ² համասեռության հայտանիշ	120
§ 10.2.3. Քանորդիչների և նշանների հայտանիշներ	125
§ 10.2.4. Ման – Ուիտնիի ռանգային U հայտանիշ	129
§ 10.3. Անկախության հայտանիշներ.....	135
§ 10.3.1. χ² անկախության հայտանիշ	136
§ 10.3.2. Սպիռմենի հայտանիշ.....	140
§ 10.3.3. Քենդալի հայտանիշ.....	146
<i>Խնդիրներ</i>	149
§ 10.4. Պատահականության հայտանիշ	150
§ 10.5. Երկու պատահական մեծությունների միջև կորելյացիոն կապը ստուգող հայտանիշ	152
<i>Խնդիրներ</i>	158
Գլուխ 11. Երկու փոփոխականով գծային ռեգրեսիոն մոդել	159
§ 11.1. Նվազագույն քառակուսիների գնահատականներ.....	159
<i>Խնդիրներ</i>	161
§ 11.2. Գաուս - Մարկովի թեորեմ	162
<i>Խնդիրներ</i>	171
§ 11.3. Մնացորդային ցրվածք	171

§ 11.4. Ռեգրեսիայի գործակիցների ճշմարտանմանության մաքսիմումի գնահատականները.....	174
§ 11.5. Դետերմինացիայի գործակից.....	176
<i>Խնդիրներ</i>	180
§ 11.6. Մնացորդային ցրվածքի վիճակագրական հատկությունը....	180
<i>Խնդիր</i>	183
§ 11.7. Նվազագույն քառակուսիների գնահատականների հատկությունները	183
§ 11.8. Ռեգրեսիայի պարամետրերի վերաբերյալ միջակայքային գնահատում և վարկածների ստուգում	185
<i>Խնդիր</i>	189
§ 11.9. Ցրվածքների վերլուծություն (դիսպերսիոն անալիզ) ռեգրեսիոն մոդելներում (<i>ANOVA</i>).....	190
<i>Խնդիր</i>	194
§ 11.10. Կանխատեսումներ ռեգրեսիոն մոդելներում.....	195
<i>Խնդիր</i>	206
Գլուխ 12. Բազմաչափ գծային ռեգրեսիոն մոդելներ.....	207
§ 12.1. Նվազագույն քառակուսիների եղանակ	207
<i>Խնդիրներ</i>	212
§ 12.2. Գաուս – Մարկովի թեորեմ.....	213
<i>Խնդիրներ</i>	215
§ 12.3. Նվազագույն քառակուսիների գնահատականների հատկությունները	215
<i>Խնդիրներ</i>	219
§ 12.4. Կախյալ փոփոխականի վարիացիան: R^2 դետերմինացիայի գործակից	220
<i>Խնդիր</i>	223
§ 12.5. Վարկածների ստուգում և միջակայքային գնահատում	223
<i>Խնդիրներ</i>	239
§ 12.6. Կանխատեսումներ ռեգրեսիոն մոդելներում.....	240
<i>Խնդիրներ</i>	251

§ 12.7. Ստոխաստիկ ռեգրեսորներ	251
<i>Խնդիր</i>	257
§ 12.8. Ընդհանրացված նվազագույն քառակուսիների եղանակ	257
<i>Խնդիրներ</i>	264
§ 12.9. Հասանելի ընդհանրացված նվազագույն քառակուսիների եղանակ	264
§ 12.10. Գծային սահմանափակումների պայմանների դեպքում ընդհանրացված ռեգրեսիոն մոդելների համար վարկածների ստուգում	267
<i>Խնդիրներ</i>	275
Հավելված I. Որոշ գաղափարներ մատրիցների տեսությունից.....	277
Հավելված II. Որոշ գաղափարներ հավանականությունների տեսությունից.....	293
 Բաշխումների աղյուսակներ	307
Օգտագործված գրականության ցանկ	325
Համառոտագրություններ	327
Ընդհանուր մաթեմատիկական որոշ նշանակումներ.....	329
Օգտագործվող տերմինների հայ -անգլերեն -ռուսերեն բառարան.....	331
Դասագրքի I-ին մասում հայտնաբերված վրիպակներ	336
SUMMARY	340
РЕЗЮМЕ	341

ՆԱԽԱԲԱՆ

Դասագրքի առաջին մասում (1 – 7 գլուխներ) բերված էին նմուշային մեթոդի նկարագրությունը և գնահատման տեսությունը: Երկրորդ մասը նվիրված է վիճակագրական վարկածների ստուգմանը և զույգային ու բազմաչափ գծային ռեգրեսիաներին վերաբերող հարցերին:

Դասագրքի երկրորդ մասի 8-րդ գլխում ներառված են վիճակագրական վարկածների ստուգմանը վերաբերող ընդհանուր գաղափարները:

9-րդ գլուխը նվիրված է պարամետրական վարկածներին, որտեղ ներառված են երկու պարզ վարկածների ստուգմանը վերաբերող Նեյման - Պիրսոնի ճշմարտանմանության հարաբերության հայտանիշը, բարդ վարկածների ստուգման խնդիրները, վարկածների ստուգման և միջակայքային գնահատականների միջև կապը, երկու նմուշին վերաբերող բարդ վարկածների ստուգման խնդիրները: Այդ գլուխը եզրափակում է բարդ վարկածների ստուգման ճշմարտանմանության հարաբերության հայտանիշը՝ մի շարք կիրառական օրինակներով, որոնց թվում՝ նորմալ մոդելներին վերաբերող միագործոն ցրվածքների վերլուծությունը (ANOVA):

10-րդ գլուխը նվիրված է ոչ պարամետրական վարկածներին: Դիտարկված են՝ համաձայնության, համասեռության, անկախության, պատահականության հայտանիշները և կորելյացիայի գործակցի նշանակալիությունը ստուգող հայտանիշը:

Եզրափակիչ՝ 11-րդ և 12-րդ գլուխներում ներառված են զույգային և բազմաչափ գծային ռեգրեսիաներին վերաբերող հարցերը: Նշենք նաև, որ 11-րդ և 12-րդ գլուխները «Տնտեսաչափություն» առարկայի հիմնական ներածական մասն են: Այնպես որ, դասագիրքը կարող է օգտակար լինել ինչպես «Ակտուարական և ֆինանսական մաթեմատիկա», «Կիրառական վիճակագրություն և տվյալների գիտություն», այնպես էլ «Հավանականու-

թյունների տեսություն և մաթեմատիկական վիճակագրություն» մասնագիտություններով սովորող ուսանողներին:

Դասագիրքը եզրափակվում է երկու հավելվածով, որի առաջին մասում բերվում են մատրիցների տեսությանը վերաբերող անհրաժեշտ գաղափարները, իսկ երկրորդում՝ դիտարկվում են պատահական մատրիցները ու բազմաչափ նորմալ բաշխումները և դրանց կարևոր հատկությունները: Վերջնամասում ներկայացված են անհրաժեշտ բաշխումների աղյուսակները:

Նշենք բակալավրիատի ուսանողների կիսամյակային դասընթացի համար առաջարկվող գրքի հետևյալ պարագրաֆները (սկիզբը տե՛ս գրքի I-ին մասում)

«*Մաթեմատիկական վիճակագրություն*»՝ գլուխ 8, գլուխ 9 §§ 9.1 (9.2), 9.3 – 9.7, գլուխ 10, §§ 10.1, 10.5, գլուխ 11, §§ 11.1, 11.2, գլուխ 12 §§ 12.1, 12.2:

«*Կիրառական վիճակագրություն*»՝ գլուխ 8, գլուխ 9 §§ 9.3 – 9.5, գլուխ 10 §§ 10.1 – 10.3, 10.5, գլուխ 11 §§ 11.1, 11.2, գլուխ 12 §§ 12.1, 12.2:

«*Տնտեսաչափություն*»՝ գլուխներ 11 և 12:

Դասագրքում բերված օրինակաները և խնդիրները վերցված են [4], [5], [7], [11], [13], [16] և [18] գրքերից:

Հեղինակը խորին շնորհակալություն է հայտնում գիտական խմբագիր պրոֆեսոր Վիկտոր Օհանյանին բազմաթիվ դիտողություններ և կարևոր ցուցումներ տալու համար: Շնորհակալություն է հայտնում նաև գրախոսներին արժեքավոր դիտողությունների համար, ինչպես նաև «Հավանականությունների տեսության և մաթեմատիկական վիճակագրության» ամբիոնի աշխատողներին գրքում նկատած մի շարք վրիպումների համար:

Կարեն Գասպարյան
Երևան, 2025

Գլուխ 8

Վիճակագրական վարկածների ստուգում

Ի տարբերություն դասագրքի առաջին մասում տրված գնահատման տեսության, որտեղ նմուշի միջոցով կառուցվում էին անհայտ պարամետրերի համար կետային և միջակայքային գնահատականները, դասագրքի երկրորդ մասի վիճակագրական վարկածների ստուգման բաժնում վարկածների ստուգումը կատարվում է որոշակի վիճականիների օգնությամբ, որոնց ընդունած արժեքը, համեմատելով որոշակի կրիտիկական (եզրային) արժեքների հետ, վարկածները հերքվում են կամ ընդունվում:

§ 8.1. Անհրաժեշտ սահմանումներ: Ոչ ռանդոմիզացված և ռանդոմիզացված հայտանիշներ

Փորձի ընթացքում դիտվող պատահական մեծության *բաշխման տեսքի* կամ *բնութագրիչների* վերաբերյալ ցանկացած ենթադրություն կոչվում է **վիճակագրական վարկած**: Այն անվանվում է **հիմնական** կամ **գրոյական վարկած** և նշանակվում $\mathbb{H}_0$ -ով: Հիմնական վարկածին հակադրվող վարկածը կոչվում է **երկրնտրանքային** կամ **մրցող վարկած** և նշանակվում $\mathbb{H}_1$ -ով: Վարկածը կոչվում է **պարզ**, եթե այն միարժեք է որոշում պատահական մեծության բաշխումը և **բարդ**՝ հակառակ դեպքում:

§ պատահական մեծության $P = P_\xi$ **բաշխման տեսքի** վերաբերյալ վարկած է կոչվում $\mathbb{H}_0: P \in \mathcal{P}_0$ տեսք ունեցող վարկածը, որտեղ $\mathcal{P}_0$ -ն որոշակի «**թույլատրելի**» $\mathcal{P}$ բաշխումների դասի ենթադաս է: Որպես երկրնտրանքային վարկած դիտարկվում է $\mathbb{H}_1: P \in \mathcal{P}_1$ վարկածը, որտեղ $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0$:

**§ 8.1. Անհրաժեշտ սահմանումներ: Ոչ ռանդոմիզացված և
ռանդոմիզացված հայտանիշներ**

$\mathbb{H}_0 : P \in \mathcal{P}_0$ վարկածը կոչվում է **պարամետրական**, եթե բաշխումների $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta \subset \mathcal{R}\}$ դասը պարամետրական է: Այդ դեպքում $\mathcal{P}_0$ և $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0$ դասերը կարելի է ներկայացնել

$$\mathcal{P}_0 = \{P_\theta, \theta \in \Theta_0\} \text{ և } \mathcal{P}_1 = \{P_\theta, \theta \in \Theta_1\} \quad (\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1, \Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset)$$

տեսքով, իսկ $\mathbb{H}_0$ և $\mathbb{H}_1$ վարկածները կգրվեն հետևյալ կերպ՝

$$\mathbb{H}_0 : \theta \in \Theta_0 \text{ և } \mathbb{H}_1 : \theta \in \Theta_1:$$

Ենթադրվում է, որ պարամետրական Θ բազմության և բաշխումների $\mathcal{P}$ դասի միջև տեղի ունի *փոխմիարժեք համապատասխանություն*՝

$$P_\theta : \Theta \Leftrightarrow \mathcal{P} \quad (\theta_1 \neq \theta_2 \in \Theta \Leftrightarrow P_{\theta_1} \neq P_{\theta_2}):$$

$\mathbb{H}_0 : \theta \neq \theta_0$ վարկածը ($\theta_0 \in \mathcal{R}$) կոչվում է **երկկողմանի բարդ վարկած**, իսկ $\mathbb{H}_0^- : \theta < \theta_0$ և $\mathbb{H}_0^+ : \theta > \theta_0$ վարկածները՝ **միակողմանի** (համապատասխանաբար՝ **ձախակողմյան** և **աջակողմյան**) **բարդ վարկածներ**:

Օրինակ 8.1: Ենթադրենք հիմնական վարկածն է՝ ξ պատահական մեծությունը բաշխված է որոշակի ֆիքսված m_0 միջինով և $\sigma^2 = 1$ ցրվածքով *նորմալ* օրենքով՝ $\mathbb{H}_0 : P_\xi \sim \mathcal{N}(m_0, 1)$, իսկ երկրնորանքային վարկածը՝ $\mathbb{H}_1 : P_\xi \sim \mathcal{N}(m, 1)$, որտեղ $m \neq m_0$: Այստեղ $\mathbb{H}_0$ -ն **պարզ** վարկած է, իսկ $\mathbb{H}_1$ -ը՝ **բարդ**: Որպես «թույլատրելի» բաշխումների դաս՝ վերցնենք *նորմալ* բաշխումների $\mathcal{P} = \mathcal{N}(m, 1)$ դասը, որտեղ $m \in \mathcal{R}$: Որպես $\mathcal{P}_0$ դաս դիտարկենք $\mathcal{P}_0 = \mathcal{N}(m_0, 1)$ դասը, իսկ $\mathcal{P}_1$ դաս՝ $\mathcal{P}_1 = \mathcal{N}(m, 1)$, որտեղ $m \in \mathcal{R} \setminus \{m_0\}$: $\mathbb{H}_0$ վարկածը կարելի է ներկայացնել $\mathbb{H}_0 : m = m_0$ տեսքով ($\Theta_0 = \{m_0\}$), իսկ $\mathbb{H}_1$ -ը՝ $\mathbb{H}_1 : m \neq m_0$ տեսքով ($\Theta_1 = \mathcal{R} \setminus \{m_0\}$):

Ստուգել $\mathbb{H}_0 : P \in \mathcal{P}_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : P \in \mathcal{P}_1$ երկրնորանքայինի նշանակում է ξ պատահական մեծությանը համապատասխանող $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ (պատահական) նմուշի ընդունած $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ արժեքի հիման վրա, որը համաձայնեցվում է $\mathbb{H}_0$ վարկածի հետ, կայացնել d_0 *որոշում*՝ **ընդունել** այդ վարկածը կամ, հակառակ դեպքում, ընդունել d_1 *որոշում*՝ **հերքել** այդ վարկածը, այսինքն՝ ընդունել $\mathbb{H}_1$ վարկածը:

$\mathcal{X}^n = \underbrace{\mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \dots \times \mathcal{X}}_n$ նմուշային տարածության ($\mathcal{X} = \xi(\Omega)$) կամայական չափելի $\delta : \mathcal{X}^n \rightarrow \{d_0, d_1\}$ արտապատկերում $\{d_0, d_1\}$ որոշումների բազմությունը կոչվում է $\mathbb{H}_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$ -ի ստուգման **ոչ ռանդոմիզացված (ոչ պատահական) հայտանիշ** (**δ հայտանիշ**):

δ արտապատկերումն առաջացնում է $\mathcal{X}^n$ տարածության տրոհում՝

$$\mathcal{X}^n = \mathcal{X}_0 \cup \mathcal{X}_1, \quad \mathcal{X}_0 \cap \mathcal{X}_1 = \emptyset:$$

$\mathcal{X}_1 = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n : \delta(\mathbf{x}) = d_1\}$ բազմությունը կոչվում է ոչ ռանդոմիզացված հայտանիշին համապատասխանող **կրիտիկական տիրույթ**, իսկ $\mathcal{X}_0 = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n : \delta(\mathbf{x}) = d_0\}$ բազմությունը՝ **թույլատրելի տիրույթ**: $\varphi(\mathbf{x}) = 1_{\mathcal{X}_1}(\mathbf{x})$ ֆունկցիան կոչվում է հայտանիշի **կրիտիկական ֆունկցիա**: Այսպիսով, եթե $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_1$ ($\varphi(\mathbf{x}) = 1$), ապա ընդունվում է d_1 որոշում՝ **հերքել** $\mathbb{H}_0$ վարկածը: Հակառակ դեպքում, երբ $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_0$ -ին, կասենք, որ $\mathbf{x}$ արժեքը **չի հակասում** $\mathbb{H}_0$ վարկածին և ընդունվում է d_0 որոշումը:

$\mathbb{H}_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$ -ի ստուգման **հայտանիշը** կոչվում է **ռանդոմիզացված**, եթե նմուշի ընդունած $\mathbf{x}$ արժեքի հիման վրա $\mathbb{H}_0$ վարկածը **հերքելու** (d_1) կամ **ընդունելու** (d_0) որոշումների միջև ընտրությունը կատարվում է A և $\bar{A}$ երկու ելքով լրացուցիչ փորձի (**ռանդոմիզացիայի**) օգնությամբ, ընդ որում, այդ ընտրության հավանականությունը կախված է $\mathbf{x}$ -ից՝

$$\varphi(\mathbf{x}) := P(\delta(\mathbf{X}) = d_1 | \mathbf{X} = \mathbf{x}), \quad 1 - \varphi(\mathbf{x}) = P(\delta(\mathbf{X}) = d_0 | \mathbf{X} = \mathbf{x}):$$

(Այստեղ $P(\cdot | \cdot)$ -ը պայմանական հավանականության նշանն է): Եթե փորձն ավարտվում է A ելքով, ապա ընդունվում է d_1 որոշումը, հակառակ դեպքում՝ d_0 որոշումը: $\varphi(\mathbf{x})$ պայմանական հավանականությունը կոչվում է **ռանդոմիզացված հայտանիշի կրիտիկական ֆունկցիա**: Մասնավորապես, **ոչ ռանդոմիզացված** հայտանիշի դեպքում $\varphi(\mathbf{x})$ ֆունկցիան ընդունում է միայն 0 և 1 արժեքներ, և $\varphi(\mathbf{x}) = 1_{\mathcal{X}_1}(\mathbf{x})$:

Օրինակ 8.2: Դիցուք $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\theta, 25)$ նմուշ է անհայտ θ միջինով *նորմալ* բաշխումների դասից: Ստուգվում է $\mathbb{H}_0$: $\theta \leq 15$ վարկածն ընդդեմ

$\mathbb{H}_1$: $\theta > 15$ երկրնտրանքային: Որպես հայտանիշի **կրիտիկական տի-րույթ**՝ դիտարկենք $\mathcal{X}_1 = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n: \bar{\mathbf{x}} > 15 + 5/\sqrt{n}\}$ բազմությունը: Պարզ է, որ $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbb{1}_{\mathcal{X}_1}(\mathbf{x})$ կրիտիկական ֆունկցիայով հայտանիշը կլինի **ոչ ռանդոմիզացված**:

Դիցուք $\mathbf{X} \sim P$ որոշակի «թույլատրելի» բաշխումների $\mathcal{P}$ դասից P բաշխմանը համապատասխանող նմուշ է: $\varphi(\mathbf{x})$ կրիտիկական ֆունկցիայով **ռանդոմիզացված** հայտանիշի **հզորության ֆունկցիա** կոչվում է $\mathcal{P}$ դասի վրա որոշված՝

$$\begin{aligned} W_\varphi(P) &= E_P[\varphi(\mathbf{X})] = E_P[P(\delta(\mathbf{X}) = d_1 | \mathbf{X})] = E_P\left(E_P(\mathbb{1}_{(\delta(\mathbf{X})=d_1)} | \mathbf{X})\right) = \\ &= E_P(\mathbb{1}_{(\delta(\mathbf{X})=d_1)}) = P(\delta(\mathbf{X}) = d_1) \end{aligned}$$

ֆունկցիոնալը, որը ցույց է տալիս $\mathbb{H}_0$ վարկածը հերքելու հավանականությունը (այստեղ օգտագործվել են պայմանական մաթեմատիկական սպասման հատկությունները (տե՛ս *Ширяев* [14])):

Ոչ ռանդոմիզացվածի դեպքում **հզորության ֆունկցիան** կլինի՝

$$W_\varphi(P) = E_P[\varphi(\mathbf{X})] = P(\mathbf{X} \in \mathcal{X}_1) = P(\delta(\mathbf{X}) = d_1):$$

$W_\varphi(P)$ հզորության ֆունկցիան, դիտարկված **երկրնտրանքային** բաշխումների $\mathcal{P}_1$ դասի վրա, կոչվում է **հայտանիշի հզորություն**, որը ցույց է տալիս երկրնտրանքային վարկածը հերքելու հավանականությունը:

§ 8.2. I և II սեռի սխալներ

Դիտարկենք $\mathbb{H}_0: P \in \mathcal{P}_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: P \in \mathcal{P}_1$ երկրնտրանքայինի ստուգման հարցը: Այդ խնդիրը լուծելու ընթացքում հայտանիշի կիրառումը կարող է հանգեցնել **երկու տեսակի սխալների**՝

$\mathbb{H}_0$ վարկածը «**հերքելու**» որոշումն ընդունելը, երբ այն **իրականում ճիշտ** է, կոչվում է **I սեռի սխալ**: $\mathbb{H}_0$ վարկածն «**ընդունելու**» որոշումն կայացնելը, երբ այն **իրականում տեղի չունի**, կոչվում է **II սեռի սխալ**:

Ռանդոմիզացված դեպքում I և II սեռի սխալի հավանականությունները ներկայացվում են հետևյալ ձևով՝

I սեռի սխալի հավանականությունը՝

$$\alpha_{\varphi}(P) := W_{\varphi}(P) = E_P[\varphi(\mathbf{X})] = P(\delta(\mathbf{X}) = d_1), \quad P \in \mathcal{P}_0,$$

II սեռի սխալի հավանականությունը՝

$$\beta_{\varphi}(P) := 1 - W_{\varphi}(P) = P(\delta(\mathbf{X}) = d_0), \quad P \in \mathcal{P}_1:$$

Ոչ ռանդոմիզացվածի դեպքում I և II սեռի սխալի հավանականությունները կլինեն՝

I սեռի սխալի հավանականությունը՝

$$\alpha_{\varphi}(P) = P(\mathbf{X} \in \mathcal{X}_1), \quad \mathbf{X} \sim P \in \mathcal{P}_0,$$

II սեռի սխալի հավանականությունը՝

$$\beta_{\varphi}(P) = P(\mathbf{X} \in \mathcal{X}_0), \quad \mathbf{X} \sim P \in \mathcal{P}_1:$$

Դիտողություն: Վարկածների ստուգումը ցանկալի է կատարել այնպես, որ I և II սեռի սխալի $\alpha_{\varphi}(P)$ և $\beta_{\varphi}(P)$ հավանականությունները լինեն հնարավորինս փոքր: Սակայն, նմուշի ֆիքսված ծավալի դեպքում սովորաբար անհնարին է լինում միաժամանակ փոքրացնել այդ երկու հավանականությունները:

Հայտանիշի չափ կոչվում է

$$\alpha = \sup_{P \in \mathcal{P}_0} \alpha_{\varphi}(P)$$

մեծությունը:

Օրինակ 8.3: Դիտարկենք օրինակ 8.2-ում բերված հայտանիշը: Գտնենք այդ հայտանիշի **հզորությունը** և I ու II սեռի սխալի հավանականությունները:

Հայտանիշի **հզորության ֆունկցիան** կլինի՝

$$W_{\varphi}(\theta) = P_{\theta}(\mathbf{X} \in \mathcal{X}_1) = P_{\theta}(\bar{\mathbf{X}} > 15 + 5/\sqrt{n}) = 1 - P_{\theta}(\bar{\mathbf{X}} \leq 15 + 5/\sqrt{n}):$$

Քանի որ

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathbb{N}(\theta, 25/n), \quad \text{ապա} \quad \frac{\bar{\mathbf{X}} - \theta}{5} \sqrt{n} \sim \mathbb{N}(0, 1),$$

և **հայտանիշի հզորության** համար ($\theta > 15$) կստանանք՝

$$W_{\varphi}(\theta) = 1 - \Phi\left(\frac{15 + 5/\sqrt{n} - \theta}{5/\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(1 - \frac{\theta - 15}{5}\sqrt{n}\right) > 1 - \Phi(1) \approx 0.16 :$$

Հեշտ է տեսնել, որ **հայտանիշի չափը** հավասար է

$$\alpha = \sup_{\theta \leq 15} W_{\varphi}(\theta) = 1 - \Phi(1) \approx 0.16,$$

այնպես որ, **I սեռի սխալի հավանականությունը** կլինի՝

$$\alpha_{\varphi}(\theta) = P_{\theta}(\mathbf{X} \in \mathcal{X}_1) \leq 0.16 \quad (\theta \leq 15):$$

II սեռի սխալի հավանականության համար ($\theta > 15$) կստանանք՝

$$\beta_{\varphi}(\theta) = P_{\theta}(\mathbf{X} \in \mathcal{X}_0) = P_{\theta}(\bar{\mathbf{X}} \leq 15 + 5/\sqrt{n}) = \Phi\left(1 - \frac{\theta - 15}{5}\sqrt{n}\right) < \Phi(1) \approx 0.84:$$

Օրինակ 8.4: Դիցուք $\mathbf{X} = (X_1) \sim N(\theta, \sigma_0^2)$ ($\theta \in \mathcal{R}$, $\sigma_0 > 0$ ֆիքսված է) մեկ ծավալի նմուշ է: Քննարկենք $\mathbb{H}_0: \theta = 0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: \theta = 1$ երկընտրանքային վարկածի ստուգման խնդիրը:

Որպես ոչ ռանդոմիզացված հայտանիշի **կրիտիկական ֆունկցիա** դիտարկենք

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } x > c \\ 0, & \text{եթե } x \leq c \end{cases}$$

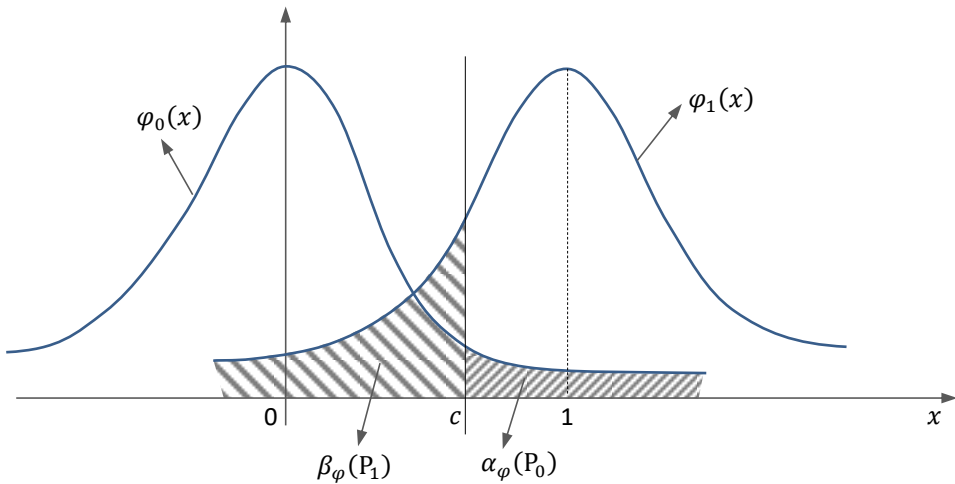
ֆունկցիան, որտեղ $c \in \mathcal{R}$ որոշակի հաստատուն թիվ է:

I և II սեռի սխալի հավանականությունները կլինեն՝

$$\alpha_{\varphi}(P_0) = P_0(X_1 \in \mathcal{X}_1) = P_0(X_1 > c), \quad \beta_{\varphi}(P_1) = P_1(X_1 \in \mathcal{X}_0) = P_1(X_1 \leq c),$$

որտեղ P_0 -ն համապատասխանում է $N(0, \sigma_0^2)$ բաշխմանը, իսկ P_1 -ը՝ $N(1, \sigma_0^2)$:

Այդ վարկածներին համապատասխանող $\varphi_0(x)$ և $\varphi_1(x)$ բաշխումների խտության ֆունկցիաների գծապատկերներն ունեն հետևյալ տեսքը՝



c թիվն աճելուն զուգահեռ I սեռի սխալի $\alpha_\varphi(P_0)$ հավանականությունը փոքրանում է, իսկ II սեռի սխալի $\beta_\varphi(P_1)$ հավանականությունը, ընդհակառակն՝ մեծանում, այնպես որ, **միաժամանակ** փոքրացնել այդ երկու մեծությունները **հնարավոր չէ**:

Այդ դժվարությունը հաղթահարելու համար առաջարկվում է դիտարկել վարկածների ստուգման խնդրի մեկ ուրիշ դրվածք:

§ 8.3. Վարկածների ստուգման խնդրի դրվածք

Դիցուք $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \sim P$ նմուշը համապատասխանում է բաշխումների $\mathcal{P}$ դասից որոշակի P բաշխմանը և $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$ -ն, $\mathcal{P}$ դասի ենթադաս է ($\mathcal{P}_1 = \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0$):

Ստուգվում է

$$\mathbb{H}_0 : P \in \mathcal{P}_0 \text{ վարկածն ընդդեմ } \mathbb{H}_1 : P \in \mathcal{P}_1 \text{ երկընտրանքայինը:} \quad (8.1)$$

Դիցուք α -ն ($0 < \alpha < 1$) 0-ին բավականաչափ «մոտ» որոշակի թիվ է, որն անվանվում է **նշանակալիության մակարդակ** (սովորաբար $\alpha = 0.05, 0.01, 0.001$):

Դիտարկենք I սեռի սխալը α մակարդակը չգերազանցող **ռանդոմիզացված δ -հայտանիշների դասը**՝

$$\mathbb{K}_\alpha = \{\delta: \alpha_\varphi(P) \leq \alpha \text{ բոլոր } P \in \mathcal{P}_0\}:$$

$\varphi^*(\mathbf{x})$ կրիտիկական ֆունկցիայով $\mathbb{K}_\alpha$ դասից այն δ^* հայտանիշը, որի համար

$$\beta_\varphi(P) = 1 - W_\varphi(P)$$

II սեռի սխալի հավանականությունը բոլոր $P \in \mathcal{P}_1$ -ից **փոքրագույնն** է (կամ $W_\varphi(P)$ հզորությունը՝ **մեծագույնը**), կոչվում է **օպտիմալ** կամ **հավասարաչափ** (ըստ բոլոր բաշխումների համար $\mathcal{P}_1$ դասից) **առավել հզոր (ՀԱՀ) հայտանիշ**:

Այսպիսով, $\varphi^*(\mathbf{x})$ կրիտիկական ֆունկցիայով **օպտիմալ հայտանիշը** բավարարում է հետևյալ պայմանները՝

$$\begin{cases} W_{\varphi^*}(P) = E_P[\varphi^*(\mathbf{X})] \leq \alpha, \text{ բոլոր } P \in \mathcal{P}_0 \\ W_{\varphi^*}(P) = \sup_{\delta \in \mathbb{K}_\alpha} W_\delta(P), \text{ բոլոր } P \in \mathcal{P}_1 \end{cases} :$$

$\varphi(\mathbf{x})$ կրիտիկական ֆունկցիայով $\mathbb{K}_\alpha$ դասից այն հայտանիշը, որը բոլոր երկրնստրանքային բաշխումների համար **հերքում** է $\mathbb{H}_0$ վարկածը հայտանիշի α չափը **գերազանցող** հավանականությամբ, այսինքն՝

$$\begin{cases} W_\varphi(P) \leq \alpha, \text{ բոլոր } P \in \mathcal{P}_0 \\ W_\varphi(P) \geq \alpha, \text{ բոլոր } P \in \mathcal{P}_1 \end{cases} ,$$

կոչվում է **անշեղ հայտանիշ**:

Հայտանիշը կոչվում է **ունակ**, եթե

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_\varphi(P) = 1, \text{ բոլոր } P \in \mathcal{P}_1:$$

Օրինակ 8.5: Կրկին դիտարկենք օրինակ 8.2-ում բերված ոչ ռանդոմիզացված հայտանիշը: Գտնենք **հայտանիշի չափը**, **հզորությունը** և ստուգենք **անշեղությունն** ու **ունակությունը**: Բերենք նաև հզորության ֆունկցիայի գրաֆիկը, երբ $n = 25$ -ի:

Օրինակ 8.3-ից հետևում է, որ **հայտանիշի չափը** $\alpha \approx 0.16$, իսկ **հզորությունը**, երբ $\theta > 15$ (այսինքն՝ բոլոր երկրնստրանքների դեպքում),

$W_\varphi(\theta) > 0.16$: Այնպես որ հայտանիշն **անշեղ** է: Մյուս կողմից՝ **հզորության ֆունկցիայի**

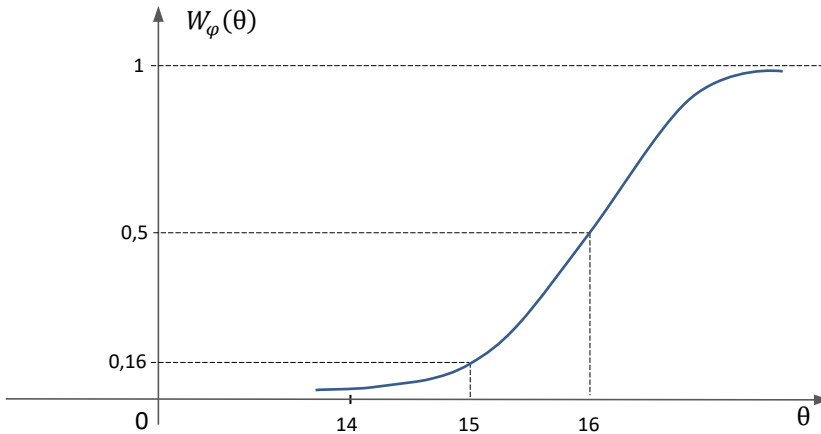
$$W_\varphi(\theta) = 1 - \Phi\left(1 - \frac{\theta - 15}{5}\sqrt{n}\right)$$

ներկայացումից բխում է, որ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_\varphi(\theta) = 1, \text{ երբ } \theta > 15,$$

հետևաբար՝ հայտանիշը նաև **ունակ** է:

$W_\varphi(\theta)$ **հզորության ֆունկցիայի** գծապատկերն ունի հետևյալ տեսքը ($n = 25$)՝



(8.1) վարկածները ստուգման հայտանիշի $\mathcal{X}_1$ **կրիտիկական տիրույթը** սովորաբար տրվում է որոշակի $T(\mathbf{X}) \in \mathcal{R}$ վիճականու միջոցով և ունի հետևյալ տեսքերից մեկը՝

$$\{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n : T(\mathbf{x}) < c\}, \{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n : T(\mathbf{x}) > c\} \quad (8.2)$$

կամ

$$\{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n : (T(\mathbf{x}) < c_1) \cup (T(\mathbf{x}) > c_2), c_1 < c_2\}:$$

Այս ներկայացումներում մասնակցող $T_n = T(\mathbf{X})$ վիճականին կոչվում է **հայտանիշի վիճականի**, իսկ c , c_1 և c_2 թվերը՝ **կրիտիկական կամ եզրային արժեքներ**:

Հայտանիշի T_n վիճականին կոչվում է **ոչ պարամետրական** կամ **բաշխումից «ազատ»** (ասիմպտոտիկ **ոչ պարամետրական**), եթե դրա H բաշխումը (կամ ասիմպտոտիկ բաշխումը) **կախված չէ** $P \in \mathcal{P}$ բաշխումներից, այսինքն՝

$$\mathbb{G}^T(B) := P(T(\mathbf{X}) \in B) = H(B)$$

բոլոր $P \in \mathcal{P}$ -ից և բոլոր $B \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$ **բորելյան** բազմությունների համար

$$\left(\text{կամ } T_n \xrightarrow{d} H, n \rightarrow \infty \right):$$

Վարկածների ստուգման (8.1) խնդիրը լուծելու համար պետք է գտնվեն հայտանիշի **ոչ պարամետրական** կամ **ասիմպտոտիկ ոչ պարամետրական** վիճականին և տվյալ α նշանակալիության մակարդակի համար այնպիսի $c = c_\alpha$ **կրիտիկական** կամ **ասիմպտոտիկ կրիտիկական եզր**, որ բոլոր $P \in \mathcal{P}_0$ բաշխումների համար բավարարվի

$$P(\mathbf{X} \in \mathcal{X}_{1\alpha}) \leq \alpha \quad (8.3)$$

պայմանը (այստեղ $\mathcal{X}_{1\alpha}$ կրիտիկական տիրույթն ունի (8.2)-ում նշված տեսքերից մեկը):

Այսպիսով, **վարկածների ստուգումը** կատարվում է հետևյալ կերպ.

Եթե $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ նմուշի դիտված $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ արժեքը պատկանում է (8.3) պայմանը բավարարող կրիտիկական տիրույթին՝ $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_{1\alpha}$, ապա $\mathbb{H}_0$ վարկածը α նշանակալիության մակարդակով **հերքվում** է, ընդ որում, եթե վարկածը **իրականում ճիշտ** է ($P \in \mathcal{P}_0$), ապա հերքումը կատարվում է α -ի արժեքը **չգերազանցող** հավանականությամբ: Ընդհակառակն, եթե դիտված արժեքը պատկանում է թույլատրելի տիրույթին՝ $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_{0\alpha}$, ապա համարվում է, որ $\mathbf{x}$ արժեքը α մակարդակով **համաձայնեցվում** է $\mathbb{H}_0$ վարկածի հետ, և վարկածն **ընդունվում** է:

Վարկածների ստուգումը կարելի է կատարել՝ օգտագործելով նաև այսպես կոչված **P - արժեքի** գաղափարը:

P - արժեք կամ **հասանելի նշանակալիության մակարդակ** (**P - Value** (**P-V**)) կոչվում է նշանակալիության մակարդակի այն **փոքրագույն**

արժեքը, որի դեպքում հայտանիշի $T_n = T(\mathbf{X})$ վիճականին **հերքում** է $\mathbb{H}_0$ վարկածը:

Այլ կերպ ասած՝ պարամետրական վարկածները ստուգման ժամանակ $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում ($\mathbb{H}_0 : P \in \mathcal{P}_0$) **P - արժեքը** սահմանվում է հետևյալ կերպ՝

ա) **աջակողմյան** $\mathbb{H}_1^+ : \theta > \theta_0$ (**ձախակողմյան** $\mathbb{H}_1^- : \theta < \theta_0$) երկրնորանքային վարկածի դեպքում՝

$$\begin{aligned} P-V &= P(\mathbf{X} \in \mathcal{X}_1) = P(T_n > t_0) = H((t_0, \infty)) \\ (P-V &= P(\mathbf{X} \in \mathcal{X}_1) = P(T_n < t_0) = H((-\infty, t_0))), \end{aligned}$$

բ) **երկկողմանի** $\mathbb{H}_1 : \theta \neq \theta_0$ երկրնորանքային վարկածի դեպքում՝

$$\begin{aligned} P-V &= 2 \min \{P(T_n < t_0), P(T_n > t_0)\} = 2 \min \{H((-\infty, t_0)), H((t_0, \infty))\} \\ (P-V &= 2H((t_0, \infty))), \text{ եթե } H \text{ բաշխումը } \mathbf{h}\text{ամաչափ է } 0 \text{ կետի նկատմամբ}, \end{aligned}$$

որտեղ՝ $T_n \sim H$ ՝ H բաշխում ունեցող **ոչ պարամետրական վիճականին** է, իսկ $t_0 = T_n(\mathbf{x})$ -ը՝ $T_n(\mathbf{X})$ վիճականու ընդունած արժեքը, երբ փորձի ընթացքում $\mathbf{X}$ նմուշն ընդունում է $\mathbf{x}$ արժեքը ($\mathbf{X}(\omega_0) = \mathbf{x}$):

Այսպիսով, եթե տվյալ α նշանակալիության մակարդակի համար $P-V < \alpha$, ապա $\mathbb{H}_0$ վարկածը **հերքվում** է, հակառակ դեպքում՝ **չի հերքվում**:

Օրինակ 8.6: Օրինակ 8.2-ի պայմաններում գտնենք $\mathbb{H}_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$ երկրնորանքայինի ստուգող ոչ ռանդոմիզացված **հայտանիշի վիճականին** և c_α ($\alpha = 0.16$) **կրիտիկական եզրն** այնպես, որ $P_\theta(\mathbf{X} \in \mathcal{X}_1) \leq \alpha$, երբ $\theta \leq 15$:

Քանի որ $T(\mathbf{X}) = \frac{\bar{X} - \theta}{5} \sqrt{n} \sim N(0, 1)$, ապա $T(\mathbf{X})$ հայտանիշի վիճականին **ոչ պարամետրական** է: Մյուս կողմից, օրինակ 8.3-ից ունենք՝

$$P_\theta(\mathbf{X} \in \mathcal{X}_1) = P_\theta\left(\frac{\bar{X} - \theta}{5} \sqrt{n} > 1\right) \leq 0.16, \text{ երբ } \theta \leq 15,$$

որտեղից՝ $c_\alpha = 1$:

Խնդիրներ

8.1. Դիցուք $X \sim N(\theta, 1)$ նմուշ է նորմալ բաշխումից: Ստուգվում է $H_0: \theta = 0$ վարկածն ընդդեմ $H_1: \theta = 1$ երկընտրանքայինի: H_0 վարկածը հերքվում է, եթե $X_{(n)} \geq 3$: Գտնել **I** և **II սեռի սխալի հավանականությունները**:

Պատասխան՝

$$\alpha_\varphi(\theta) = 1 - (1 - \Phi(3))^n \approx 1 - 0.99865^n, \quad \beta_\varphi(\theta) = (1 - \Phi(2))^n \approx 0.977^n:$$

8.2. Դիտարկվում է երկու վարկած. H_0 -ն, որ նմուշային արժեքներն ունեն նորմալ բաշխում, և H_1 -ը, որ այդ արժեքները բաշխված են Պուասոնի օրենքով: Կառուցել **հայտանիշ**, որի **I** և **II սեռի սխալի հավանականությունները** լինեն հավասար 0-ի:

Պատասխան՝ H_0 վարկածը *հերքվում է*, եթե նմուշի *գոնե մեկ* արժեքն *ամբողջ թիվ է*:

8.3. Դիցուք $X \sim \text{III}(\lambda)$ նմուշ է Պուասոնի բաշխումից: Դիտարկվում է $H_0: \lambda = 1$ վարկածն ընդդեմ $H_1: \lambda = 3$ երկընտրանքայինի: δ - հայտանիշն ընդունում է H_0 վարկածը, եթե $X_{(n)} \leq 1$, և ընդունում H_1 -ը, եթե $X_{(n)} > 1$: Գտնել նմուշի այն **նվազագույն ծավալը**, որի դեպքում δ - հայտանիշի հզորությունը **գերազանցի** տվյալ γ ($0 < \gamma < 1$) թիվը:

Պատասխան՝ $n_0 = \left\lceil \frac{\ln(1-\gamma)}{\ln 4-3} \right\rceil + 1$:

8.4. Դիցուք $X \sim U(0, \theta)$ նմուշ է $[0, \theta]$ միջակայքում *հավասարաչափ* բաշխումից: Ստուգվում է $H_0: \theta = 2$ վարկածն ընդդեմ H_1^+ : $\theta > 2$ երկընտրանքայինի: Ենթադրենք H_0 վարկածը **հերքվում է**, եթե $X_{(n)} \geq c$: Գտնել c -ի այն **արժեքը**, որի դեպքում **I սեռի սխալի հավանականությունը** լինի հավասար α -ի: Գտնել **հզորության ֆունկցիան** և ստուգել հայտանիշի **անշեղությունը** և **ունակությունը**:

Պատասխան՝ $c_\alpha = 2(1 - \alpha)^{1/n}$, $W_\varphi(\theta) = 1 - \left(\frac{c}{\theta}\right)^n$, հայտանիշն *անշեղ է* և *ունակ*:

8.5. Դիցուք $\mathbf{X} = (X_1)$ -ը մեկ ծավալի նմուշ է

$$f_{\theta}(x) = \theta x^{\theta-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(x), \quad \theta > 0$$

խտության ֆունկցիա ունեցող բաշխումից: Ստուգվում է $\mathbb{H}_0^-: \theta \leq 1$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+: \theta > 1$ երկընտրանքայինի: Գտնել **հայտանիշի չափը** և **հզորության ֆունկցիան**, եթե $\mathbb{H}_0$ վարկածը **հերքվում** է $X_1 \geq 1$, $(0 < \varepsilon \ll 1)$ դեպքում: Ստուգել հայտանիշի **անշեղությունը**:

Պատասխան՝ $\alpha = \varepsilon$, $W_{\varphi}(\theta) = 1 - (1 - \varepsilon)^{\theta}$, հայտանիշն **անշեղ** է:

Գլուխ 9

Պարամետրական վարկածներ

*Պարամետրական վարկածները անհայտ պարամետրի իրական արժեքի վերաբերյալ վարկածներ են, որոնց ստուգման համար **օպտիմալ** և **ասիմպտոտիկ օպտիմալ** հայտանիշների կառուցման հիմքում ընկած է Ջ. Նեյմանի և Է. Պիրսոնի ներմուծած ճշմարտանմանության հարաբերության մեթոդը:*

§ 9.1. Երկու պարզ վարկածի ստուգում: Նեյման-Պիրսոնի ճշմարտանմանության հարաբերության հայտանիշը

Դիցուք $\mathbf{X} \sim P \in \mathcal{P}$ նմուշը համապատասխանում է երկու բաշխումից բաղկացած $\mathcal{P} = \{P_0, P_1\}$ դասից որոշակի բաշխմանը: Ենթադրենք $f_0(x)$ -ը ($p_0(x)$ -ը) և $f_1(x)$ -ը ($p_1(x)$ -ը)՝ P_0 և P_1 բաշխումների խտություններն են, եթե ξ -ն բացարձակ անընդհատ պատահական մեծություն է (կամ $p_i(x) = P_i(\xi = x)$, $i = 1, 2$ հավանականությունները, եթե ξ -ն *դիսկրետ* է): Պահանջվում է կատարել ընտրություն $\mathbb{H}_0 : P = P_0$ և $\mathbb{H}_1 : P = P_1$ երկու պարզ վարկածների միջև:

Ճշմարտանմանության հարաբերության ֆունկցիա է կոչվում

$$\lambda = \lambda(\mathbf{x}) = \frac{f_1(\mathbf{x})}{f_0(\mathbf{x})} \left(\frac{p_1(\mathbf{x})}{p_0(\mathbf{x})} \right), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n$$

ֆունկցիան, որտեղ

$$f_j(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f_j(x_i) \quad \left(p_j(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n p_j(x_i) \right), \quad j = 0, 1,$$

P_j բաշխումների ճշմարտանմանության ֆունկցիաներն են:

Ճշմարտանմանության հարաբերության վիճականի է կոչվում

$$\Lambda = \Lambda(\mathbf{X}) = \frac{f_1(\mathbf{X})}{f_0(\mathbf{X})} \left(\frac{p_1(\mathbf{X})}{p_0(\mathbf{X})} \right), \quad \mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$$

պատահական մեծությունը:

Ճշմարտանմանության հարաբերության (ՃՀ) հայտանիշ կոչվում է

$$\varphi^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } \lambda > c \\ \varepsilon, & \text{եթե } \lambda = c \quad (0 < \varepsilon < 1, c > 0) \\ 0, & \text{եթե } \lambda < c \end{cases} \quad (9.1)$$

կրիտիկական ֆունկցիայով **ռանդոմիզացված հայտանիշը**:

$\mathbb{H}_0: P = P_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: P = P_1$ երկընտրանքային վարկածի ստուգման վերաբերյալ ճիշտ է հետևյալ կարևոր արդյունքը (տե՛ս **Лемма [9]**)՝

Թեորեմ 9.1 (Նեյման - Պիրսոնի ֆունդամենտալ լեմմա): Տրված α ($0 < \alpha < 1$) նշանակալիության մակարդակի համար ($P_0(\Lambda > 0) \geq \alpha$ պայմանի դեպքում) գոյություն ունեն այնպիսի $c_\alpha > 0$ և ε_α ($0 \leq \varepsilon_\alpha \leq 1$) թվեր, որ φ^* կրիտիկական ֆունկցիայով **ՃՀ հայտանիշը** (տե՛ս (9.1) -ը, որտեղ $c = c_\alpha, \varepsilon = \varepsilon_\alpha$) α չափ ունեցող

$$\mathbb{K}_\alpha^0 = \{\delta: W_\varphi(P_0) = \alpha\}$$

հայտանիշների դասում **օպտիմալ է (առավել հզոր)**, այսինքն՝

$$\begin{cases} W_{\varphi^*}(P_0) = E_0[\varphi^*(\mathbf{X})] = \alpha, \end{cases} \quad (9.2)$$

$$\begin{cases} W_{\varphi^*}(P_1) = \sup_{\delta \in \mathbb{K}_\alpha^0} W_\varphi(P_1), \end{cases} \quad (9.3)$$

որտեղ՝ $E_0 := E_{P_0}$: Բացի այդ, φ^* հայտանիշն **անշեղ** է, այսինքն՝ $W_{\varphi^*}(P_1) > \alpha$:

Թեորեմում բերված c_α և ε_α թվերը

$$E_0[\varphi^*(\mathbf{X})] = P_0(\Lambda > c) + \varepsilon P_0(\Lambda = c) = \alpha \quad (9.4)$$

հավասարման (տե՛ս (9.2)-ը) լուծումներն են:

**§ 9.1. Երկու պարզ վարկածի ստուգում: Նեյման-Պիրսոնի ճշմարտանմանության
հարաբերության հայտանիշը**

Ա պ ա ց ու ց ու մ: Նախ ցույց տանք, որ (9.4) հավասարումն ըստ c -ի և ε -ի ունի լուծումներ, և գտնենք այդ լուծումները: Ակնհայտ է, որ

$$g(c) := P_0(\Lambda \geq c) = P_0(f_1(\mathbf{X}) \geq cf_0(\mathbf{X}))$$

ֆունկցիան $(0, \infty)$ միջակայքում ձախից անընդհատ և աջից սահման ունեցող մոնոտոն նվազող ֆունկցիա է (քանի որ $1 - g(c) = P_0(\Lambda < c) = F_0(c)$ ֆունկցիան Λ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան է): Այստեղից պարզ է, որ

$$g(+\infty) = 1 - F_0(+\infty) = 1,$$

և, ըստ պայմանի,

$$g(0+) = 1 - F_0(0+) = P_0(\Lambda > 0) \geq \alpha:$$

Հետևաբար՝ գոյություն ունի այնպիսի $c_\alpha > 0$ թիվ, որ

$$g(c_\alpha + 0) < \alpha \leq g(c_\alpha): \quad (9.5)$$

Այնուհետև, տեղադրելով (9.4) հավասարման մեջ $c = c_\alpha$, և նշանակելով

$$\Delta^+ g(c_\alpha) = g(c_\alpha) - g(c_\alpha + 0) = P_0(\Lambda = c_\alpha),$$

կստանանք՝

$$W_{\varphi^*}(P_0) = P_0(\Lambda > c_\alpha) + \varepsilon P_0(\Lambda = c_\alpha) = g(c_\alpha + 0) + \varepsilon \Delta^+ g(c_\alpha) = \alpha:$$

Այստեղից, եթե $\Delta^+ g(c_\alpha) \neq 0$, կունենանք՝

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\alpha - g(c_\alpha + 0)}{\Delta^+ g(c_\alpha)}: \quad (9.6)$$

Հակառակ դեպքում, եթե $\Delta^+ g(c_\alpha) = P_0(\Lambda = c_\alpha) = 0$, ընդունենք $\varepsilon_\alpha = 0$: Այնպես որ (9.4) հավասարումն ընդունում է $g(c_\alpha) = \alpha$ տեսքը, այսինքն՝ c_α -ն Λ պատահական մեծության α մակարդակով կրիտիկական եզրն է:

Այժմ ցույց տանք (9.3) հատկությունը, այսինքն՝ որ $\varphi(\mathbf{x})$ կրիտիկական ֆունկցիայով ցանկացած $\delta \in \mathbb{K}_\alpha^0$ հայտանիշի համար ճիշտ է

$$W_\varphi(P_1) \leq W_{\varphi^*}(P_1)$$

անհավասարությունը:

Դիտարկենք հետևյալ ինտեգրալը ($d\mathbf{x} = dx_1 \times \dots \times dx_n$)՝

$$J = \int_{\mathcal{X}^n} (\varphi^*(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})) (f_1(\mathbf{x}) - c_\alpha f_0(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = J_1 + J_2,$$

որտեղ

$$J_1 = \int_{\{\mathbf{x} : \varphi^*(\mathbf{x}) > \varphi(\mathbf{x})\}} (\varphi^*(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})) (f_1(\mathbf{x}) - c_\alpha f_0(\mathbf{x})) d\mathbf{x},$$

$$J_2 = \int_{\{\mathbf{x} : \varphi^*(\mathbf{x}) < \varphi(\mathbf{x})\}} (\varphi^*(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})) (f_1(\mathbf{x}) - c_\alpha f_0(\mathbf{x})) d\mathbf{x}:$$

Կրիտիկական ֆունկցիայի սահմանումից հետևում է, որ

$$\{\mathbf{x} : \varphi^*(\mathbf{x}) > \varphi(\mathbf{x})\} = \{\mathbf{x} : \varphi^*(\mathbf{x}) > \varphi(\mathbf{x}) \geq 0\} \subset \{\mathbf{x} : \varphi^*(\mathbf{x}) > 0\}:$$

Այնուհետև (9.1)-ից ունենք՝

$$\{\mathbf{x} : \varphi^*(\mathbf{x}) > 0\} \subset \{\mathbf{x} : f_1(\mathbf{x}) \geq c_\alpha f_0(\mathbf{x})\},$$

այնպես որ՝ $J_1 \geq 0$:

Նման ձևով ակնհայտ ներդրումներից՝

$$\begin{aligned} \{\mathbf{x} : \varphi^*(\mathbf{x}) < \varphi(\mathbf{x})\} &= \{\mathbf{x} : \varphi^*(\mathbf{x}) < \varphi(\mathbf{x}) \leq 1\} \subset \{\mathbf{x} : \varphi^*(\mathbf{x}) < 1\} \subset \\ &\subset \{\mathbf{x} : f_1(\mathbf{x}) \leq c_\alpha f_0(\mathbf{x})\} \end{aligned}$$

հետևում է, որ $J_2 \geq 0$: Այսպիսով ստացվեց, որ $J = J_1 + J_2 \geq 0$, այսինքն՝

$$E_1[\varphi^*(\mathbf{X}) - \varphi(\mathbf{X})] \geq c_\alpha E_0[\varphi^*(\mathbf{X}) - \varphi(\mathbf{X})] = 0 \quad (E_1 = E_{P_1}),$$

որտեղից՝

$$W_{\varphi^*}(P_1) \geq W_{\varphi}(P_1):$$

Հետևաբար, թեորեմի առաջին մասն ապացուցված է:

Այժմ, որպես հայտանիշ վերցնելով $\varphi^*(\mathbf{X}) \equiv \alpha$ կրիտիկական ֆունկցիայով հայտանիշը, կստանանք՝

$$W_{\varphi^*}(P_1) \geq W_{\alpha}(P_1) = \alpha,$$

այսինքն՝ φ^* հայտանիշն **անշեղ** է:

Օրինակ 9.1: Դիցուք $\mathbf{X} \sim N(\theta, \sigma^2)$: Դիտարկենք $\mathbb{H}_0: \theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: \theta = \theta_1$ երկընտրանքայինի ստուգման խնդիրը, որտեղ $\theta_1 > \theta_0$: Պահանջվում է՝

ա) α նշանակալիության մակարդակով կառուցել այդ վարկածները ստուգող **առավել հզոր** հայտանիշը և գտնել **II սեռի սխալի հավանականությունը**,

բ) գտնել **հայտանիշի հզորությունը** և ստուգել դրա **ունակությունը**,

գ) գտնել նմուշի այն **նվազագույն ծավալը**, որի դեպքում I սեռի սխալի հավանականությունը հավասարվի α -ին, իսկ II սեռի սխալի հավանականությունը չգերազանցի որոշակի β -ի արժեքը ($0 < \beta < 1$):

Համաձայն պայմանի՝ $P_i = P_{\theta_i}$, $i = 0, 1$ բաշխումների խտություններն ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$f_i(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \theta_i)^2\right\}, \quad i = 0, 1,$$

որտեղից ճշմարտանմանության հարաբերության վիճականին կլինի՝

$$\Lambda = \Lambda(\mathbf{X}) = \frac{f_1(\mathbf{X})}{f_0(\mathbf{X})} = \exp\left\{\frac{n\bar{X}}{\sigma^2}(\theta_1 - \theta_0) - \frac{n}{2\sigma^2}(\theta_1^2 - \theta_0^2)\right\}:$$

Այստեղից, համաձայն **Նեյման - Պիրսոնի** թեորեմի, $\theta_1 > \theta_0$ պայմանից հետևում է, որ կրիտիկական տիրույթն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\mathcal{X}_1 = \{\mathbf{x} : \lambda \geq c\} = \{\mathbf{x} : \bar{x} \geq c_1\}, \quad c_1 := \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta_1) + \frac{\sigma^2 \ln c}{n(\theta_1 - \theta_0)}:$$

Քանի որ Λ վիճականու $G_0^\Lambda(B) = P_0(\Lambda \in B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{R}_+)$ բաշխումն անընդհատ է ($\bar{X} \sim N(\theta, \sigma^2/n)$), այսինքն՝ բոլոր $c > 0$ թվերի համար $P_0(\Lambda = c) = 0$, ապա $\mathcal{X}_1$ կրիտիկական տիրույթն ունեցող ճշմարտանմանության հարաբերության հայտանիշը կլինի **ոչ ռանդոմիզացված**:

ա) Գտնենք $c_1 := c_1(\alpha)$ կրիտիկական եզրն այնպես, որ I սեռի սխալի հավանականությունը լինի հավասար α -ի: Եթե ճիշտ է $\mathbb{H}_0$ վարկածը, ապա $\bar{X} \sim N(\theta_0, \sigma^2/n)$ և I սեռի սխալի հավանականությունը կլինի հավասար

$$\begin{aligned}\alpha_{\varphi}(\theta_0) &= P_0(\bar{X} \geq c_1) = P_0\left(\frac{\bar{X} - \theta_0}{\sigma} \sqrt{n} \geq \frac{c_1 - \theta_0}{\sigma} \sqrt{n}\right) = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{c_1 - \theta_0}{\sigma} \sqrt{n}\right): \end{aligned}$$

$\alpha_{\varphi}(\theta_0) = \alpha$ պայմանից հետևում է, որ

$$\frac{c_1 - \theta_0}{\sigma} \sqrt{n} = z_{\alpha}, \text{ որտեղից } c_1 = \theta_0 + z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} :$$

Այսպիսով, ըստ **Նեյման – Պիրսոնի** թեորեմի,

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ \mathbf{x} : \frac{\bar{X} - \theta_0}{\sigma} \sqrt{n} \geq z_{\alpha} \right\} = \left\{ \mathbf{x} : \bar{X} \geq c_1 = \theta_0 + z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$$

կրիտիկական տիրույթով հայտանիշը α մակարդակով որոնելի առավել հզոր հայտանիշն է:

Այժմ դիցուք ճիշտ է H_1 վարկածը: Այսինքն՝ $\bar{X} \sim N(\theta_1, \sigma^2/n)$, ուստի H սեռի սխալի հավանականությունը հավասար է

$$\begin{aligned}\beta_{\varphi}(\theta_1) &= P_1(\bar{X} < c_1) = P_1\left(\frac{\bar{X} - \theta_1}{\sigma} \sqrt{n} < \frac{c_1 - \theta_1}{\sigma} \sqrt{n}\right) = \Phi\left(\frac{c_1 - \theta_1}{\sigma} \sqrt{n}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{\theta_0 - \theta_1}{\sigma} \sqrt{n} + z_{\alpha}\right): \end{aligned}$$

բ) Հայտանիշի հզորությունը հավասար է

$$W_{\varphi}(\theta_1) = 1 - \beta_{\varphi}(\theta_1) = \Phi\left(\frac{\theta_1 - \theta_0}{\sigma} \sqrt{n} - z_{\alpha}\right),$$

որտեղից $\theta_1 > \theta_0$ պայմանից կհետևի, որ $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_{\varphi}(\theta_1) = 1$, այսինքն՝ հայտանիշն **ունակ** է:

$$\text{գ) } \beta_{\varphi}(\theta_1) = \Phi\left(\frac{\theta_0 - \theta_1}{\sigma} \sqrt{n} + z_{\alpha}\right) = \beta$$

պայմանից բխում է՝

$$\frac{\theta_0 - \theta_1}{\sigma} \sqrt{n} + z_{\alpha} = z_{1-\beta} = -z_{\beta},$$

որտեղից՝

$$n_0 = \left\lceil \left(\frac{z_{\alpha} + z_{\beta}}{\theta_1 - \theta_0} \sigma \right)^2 \right\rceil + 1$$

**§ 9.1. Երկու պարզ վարկածի ստուգում: Նեյման-Պիրսոնի ճշմարտանմանության
հարաբերության հայտանիշը**

(այստեղ $[a]$ -ն a թվի ամբողջ մասն է): Այսպիսով, $n > n_0$ դեպքում $\beta_\varphi(\theta_1) \leq \beta$:

Օրինակ 9.2 (տե՛ս [4]): Դիցուք $\mathbf{X} \sim \text{Ber}(\theta)$ նմուշ է «հաջողության» θ ($0 < \theta < 1$) հավանականությունով *Բեռնուլիի* բաշխումից: Դիտարկենք $\mathbb{H}_0: \theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: \theta = \theta_1$ ($\theta_1 > \theta_0$) երկընտրանքային վարկածը ստուգման խնդիրը: Պահանջվում է՝

ա) α նշանակալիության մակարդակով կառուցել այդ վարկածները ստուգող **Նեյման-Պիրսոնի առավել հզոր** հայտանիշը,

բ) գտնել այդ հայտանիշի **հզորությունը**:

Երբ $\theta = \theta_j$, $j = 0, 1$, $\xi \sim \text{Ber}(\theta_j)$ պատահական մեծության բաշխման օրենքն է՝

$$p_j(x) = P_j(\xi = x) = \theta_j^x (1 - \theta_j)^{1-x}, \quad x = 0, 1,$$

որտեղից ճշմարտանմանության հարաբերության վիճականու համար կստանանք՝

$$\begin{aligned} \Lambda = \Lambda(\mathbf{X}) &= \frac{p_1(\mathbf{X})}{p_0(\mathbf{X})} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{n \cdot \bar{X}} \left(\frac{1 - \theta_1}{1 - \theta_0}\right)^{n - n \cdot \bar{X}} = \\ &= \left[\frac{\theta_1(1 - \theta_0)}{\theta_0(1 - \theta_1)}\right]^{n \cdot \bar{X}} \left(\frac{1 - \theta_1}{1 - \theta_0}\right)^n : \end{aligned} \quad (9.7)$$

Քանի որ $g(\theta) = \frac{\theta}{1 - \theta}$ ֆունկցիան $(0, 1)$ միջակայքում աճող է, ուստի՝

$$\frac{g(\theta_1)}{g(\theta_0)} = \frac{\theta_1(1 - \theta_0)}{\theta_0(1 - \theta_1)} > 1, \quad \theta_1 > \theta_0,$$

այնպես որ $\lambda(\mathbf{x}) \geq c$ անհավասարությունը համարժեք է $n \bar{x} \geq c_1$ պայմանին (տե՛ս (9.7)-ը), որտեղ

$$c_1 := \frac{\ln c + n \ln \frac{1 - \theta_0}{1 - \theta_1}}{\ln \frac{\theta_1(1 - \theta_0)}{\theta_0(1 - \theta_1)}} :$$

Այսպիսով, α նշանակալիության մակարդակով **Նեյման – Պիրսոնի** հայտանիշի **կրիտիկական տիրույթը** կլինի՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n: n\bar{\mathbf{x}} \geq c_1(\alpha)\}:$$

$c_1 = c_1(\alpha)$ կրիտիկական եզրը գտնելու համար նկատենք, որ $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում՝

$$T = n \bar{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bin}(\theta_0, n):$$

Այժմ, որպես c_1 -ի արժեք, վերցնենք T վիճականու $(1 - \alpha)$ մակարդակով քանորդիչը, որը բավարարում է հետևյալ (տե՛ս (9.5)) պայմանը՝

$$\mathbb{G}^T(c_1) \leq 1 - \alpha < \mathbb{G}^T(c_1 + 0),$$

որտեղ $\mathbb{G}^T(x) = P_0(T < x)$:

Այս պայմանը համարժեք է հետևյալ անհավասարությանը ($B(c; n, \theta_0) = \mathbb{G}^T(c)$)՝

$$P_0(T > c_1) < \alpha \leq P_0(T \geq c_1) \quad (1 - B(c_1 + 1; n, \theta_0) < \alpha \leq 1 - B(c_1; n, \theta_0))$$

կամ

$$\alpha'' = \sum_{m=c_1+1}^n C_n^m \theta_0^m (1 - \theta_0)^{n-m} < \alpha \leq \sum_{m=c_1}^n C_n^m \theta_0^m (1 - \theta_0)^{n-m} = \alpha' :$$

Եթե $\alpha' = \alpha$, ապա α չափ ունեցող $\mathcal{X}_{1\alpha} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n: n\bar{\mathbf{x}} \geq c_1(\alpha)\}$ կրիտիկական տիրույթով **Նեյման – Պիրսոնի** հայտանիշը **ոչ ռանդոմիզացված** է, ընդ որում **I սեռի սխալի հավանականությունը** կլինի հավասար

$$\alpha_\varphi(\theta_0) = P_0(T \geq c_1(\alpha)) = \alpha' = \alpha,$$

իսկ հզորությունը՝

$$W_\varphi(\theta_1) = P_1(T \geq c_1(\alpha)) = \sum_{m=c_1(\alpha)}^n C_n^m \theta_1^m (1 - \theta_1)^{n-m} :$$

$\alpha' > \alpha$ դեպքը նշանակում է, որ հայտանիշի α' չափը (I սեռի սխալի հավանականությունը) մեծ է α -ից: Որպեսզի ստանանք առավել հզոր հայտանիշը, որի չափը լինի **ճշգրիտ** հավասար α -ին, հայտանիշը պետք է **ռանդոմիզացվի**: Նշանակենք՝

**§ 9.2. Նեյման – Պիրսոնի ճշմարտանմանության
հարաբերության հայտանիշի սահմանային հատկությունները**

$$q_0 = P_0(T = c_1(\alpha)) = C_n^{c_1(\alpha)} \theta_0^{c_1(\alpha)} (1 - \theta_0)^{n - c_1(\alpha)},$$

և սահմանենք հետևյալ կրիտիկական ֆունկցիան՝

$$\varphi^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{երբ } T > c_1(\alpha) \\ \varepsilon_\alpha = \frac{q_0 + \alpha - \alpha'}{q_0}, & \text{երբ } T = c_1(\alpha) : \\ 0, & \text{երբ } T < c_1(\alpha) \end{cases}$$

Այսպիսով, $\mathbb{H}_0$ վարկածը **կհերքվի**, երբ $T > c_1(\alpha)$, և **չի հերքվի**, երբ $T < c_1(\alpha)$: $T = c_1(\alpha)$ դեպքում $\mathbb{H}_0$ վարկածը **հերքվում** է ε_α հավանականությամբ և **չի հերքվում** $1 - \varepsilon_\alpha$ հավանականությամբ: $\varphi^*(\mathbf{x})$ կրիտիկական ֆունկցիայով հայտանիշի **I սեռի սխալի հավանականությունը** կլինի հավասար

$$\begin{aligned} \alpha_{\varphi^*}(\theta_0) &= E_0[\varphi^*(\mathbf{X})] = P_0(T > c_1(\alpha)) + \varepsilon_\alpha P_0(T = c_1(\alpha)) = \\ &= \alpha' - q_0 + \frac{q_0 + \alpha - \alpha'}{q_0} q_0 = \alpha, \end{aligned}$$

իսկ **հզորությունը**՝

$$\begin{aligned} W_{\varphi^*}(\theta_1) &= E_1[\varphi^*(\mathbf{X})] = \\ &= \sum_{m=c_1(\alpha)+1}^n C_n^m \theta_1^m (1 - \theta_1)^{n-m} + \\ &+ (q_0 + \alpha - \alpha') \left(\frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^{c_1(\alpha)} \left(\frac{1 - \theta_1}{1 - \theta_0} \right)^{n - c_1(\alpha)} : \end{aligned}$$

**§ 9.2. Նեյման – Պիրսոնի ճշմարտանմանության
հարաբերության հայտանիշի սահմանային
հատկությունները**

Պարզության համար կոդիտարկենք **ոչ ռանդոմիզացված** դեպքը, այսինքն՝ երբ $\mathbb{H}_0: P = P_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: P = P_1$ երկընտրանքայինի ստուգման համար կիրառվող $\Lambda = \Lambda(\mathbf{X})$ **ճշմարտանմանության հարաբերության վիճականու** բաշխումն **անընդհատ** է: Այդ դեպքում $\varphi^*(\mathbf{x})$ կրիտիկական ֆունկցիան կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\varphi^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{երբ } \lambda \geq c_\alpha \\ 0, & \text{երբ } \lambda < c_\alpha \end{cases} \quad (9.8)$$

Եթե Λ վիճականու $G_i^\Lambda(B) = P_i(\Lambda \in B), i = 0, 1, B \in \mathcal{B}(\mathcal{R}_+)$ բաշխումների ճշգրիտ տեսքը **հայտնի** է, ապա անմիջապես գտնվում են ինչպես Π սեռի սխալի հավանականությունը՝

$$\beta_\varphi^*(P_1) = 1 - W_\varphi^*(P_1) = P_1(\Lambda < c_\alpha),$$

այնպես էլ c_α կրիտիկական եզրը, որի միջոցով, օգտվելով **Նեյման - Պիրսոնի** թեորեմից, ստուգվում են վերը նշված վարկածները: Այսպիսով,

$$P_0(\Lambda > c) = \alpha$$

հավասարումը լուծվում է ըստ c -ի, իսկ Π սեռի սխալի հավանականությունը կլինի՝

$$\beta_\varphi^*(P_1) = P_1(\Lambda < c_\alpha):$$

Հակառակ դեպքում, այդ խնդիրը լուծելու համար կիրառվում է **ասիմպտոտիկ մոտեցումը** (տե՛ս *Ивченко, Медведев* [4]):

Կասենք, որ հայտանիշն ունի **ասիմպտոտիկ α չափ**, եթե

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_\varphi(P_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_0[\varphi(\mathbf{X})] = \alpha:$$

Այն $c_\alpha(n)$ թիվը, որի դեպքում մեծ n -երի համար

$$P_0(\Lambda > c_\alpha(n)) \approx \alpha,$$

կոչվում է Λ վիճականու **ասիմպտոտիկ կրիտիկական արժեք** (կամ **ասիմպտոտիկ կրիտիկական եզր**):

Թեորեմ 9.2: *Նեյման - Պիրսոնի թեորեմի օգնությամբ կառուցված $\varphi^*(\mathbf{x})$ կրիտիկական ֆունկցիայով (տե՛ս (9.8)-ը) ոչ ռանդոմիզացված հայտանիշը բավարարում է հետևյալ հատկությունները՝*

1. այն ունի ասիմպտոտիկ α չափ, որին համապատասխանող $c_\alpha(n)$ ասիմպտոտիկ կրիտիկական եզրը որոշվում է հետևյալ բանաձևից՝

$$c_\alpha(n) = \exp \{ n\mu_0 + z_\alpha \sigma_0 \sqrt{n} \} (\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha), \quad (9.9)$$

որտեղ $\mu_0 = E_0[\ln \lambda(X_1)], \sigma_0^2 = \text{var}_0[\ln \lambda(X_1)],$

2. հայտանիշի II սեռի սխալի հավանականությունը մեծ n -երի դեպքում ներկայացվում է

$$\beta_{\varphi^*}(P_1) = P_1(\Lambda < c_{\alpha}(n)) \sim \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_1} \sqrt{n} + z_{\alpha} \frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right) \quad (9.10)$$

տեսքով, որտեղ $\mu_1 = E_1[\ln \lambda(X_1)]$, $\sigma_1^2 = \text{var}_1[\ln \lambda(X_1)]$,

3. φ^* հայտանիշն ունակ է, այսինքն՝

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} W_{\varphi^*}(P_1) = 1:$$

Թեորեմն ապացուցելու համար անհրաժեշտ է հետևյալ լեմման՝

Լեմմա 9.1: P_0 և P_1 բաշխումների $f_0(x)$ և $f_1(x)$ խտության ֆունկցիաները բավարարում են հետևյալ անհավասարությանը՝

$$\int f_0(x) \ln f_0(x) dx \geq \int f_0(x) \ln f_1(x) dx : \quad (9.11)$$

Այսպիսով, ունենք (9.11)-ին համարժեք

$$\int f_0(x) \ln \frac{f_1(x)}{f_0(x)} dx \leq 0$$

անհավասարությունը: Օգտվելով $\ln(1+x) \leq x$ (երբ $x > -1$) անհավասարությունից, որտեղ հավասարության նշանը տեղի ունի միայն, երբ $x = 0$, կստանանք՝

$$\ln \frac{f_1(x)}{f_0(x)} = \ln \left(1 + \left(\frac{f_1(x)}{f_0(x)} - 1 \right) \right) \leq \frac{f_1(x)}{f_0(x)} - 1:$$

Այսպիսով, ունենք՝

$$\begin{aligned} & \int f_0(x) \ln \frac{f_1(x)}{f_0(x)} dx \leq \\ & \leq \int f_0(x) \left(\frac{f_1(x)}{f_0(x)} - 1 \right) dx = \int f_1(x) dx - \int f_0(x) dx = 0 : \end{aligned}$$

Թեև նրա մ. 9.2-ի ապացուցում: Գտնենք $\varphi^*(\mathbf{x})$ կրիտիկական ֆունկցիայով ոչ ռանդոմիզացված հայտանիշի I և II սեռի սխալի հավանականությունները՝

$$\alpha_{\varphi^*}(P_0) = P_0(\Lambda > c_{\alpha}(n)) \text{ և } \beta_{\varphi^*}(P_1) = P_1(\Lambda < c_{\alpha}(n)):$$

Նշանակենք՝

$$\mathcal{S}_n = \ln \Lambda = \ln \prod_{i=1}^n \frac{f_1(X_i)}{f_0(X_i)} = \sum_{i=1}^n Z_i, \quad Z_i = \ln \frac{f_1(X_i)}{f_0(X_i)}, \quad i = 1, \dots, n:$$

Ենթադրենք՝ վերջավոր են հետևյալ մոմենտները՝

$$\mu_i = E_i[Z_1] = \int f_i(x) \ln \frac{f_1(x)}{f_0(x)} dx < \infty, \quad \sigma_i^2 = \text{var}_i[Z_1] < \infty, \quad i = 0, 1:$$

Համաձայն **Չեֆիշևի մեծ թվերի օրենքի**՝ այստեղից հետևում են զուգամիտությունները՝

$$\frac{1}{n} \mathcal{S}_n \xrightarrow{P_0} \mu_0, \quad \frac{1}{n} \mathcal{S}_n \xrightarrow{P_1} \mu_1, \quad \text{երբ } n \rightarrow \infty,$$

այսինքն՝ մեծ n -ի համար $\frac{1}{n} \mathcal{S}_n$ պատահական մեծության P_0 բաշխումը «կուտակված» է μ_0 կետի շրջակայքում, իսկ P_1 բաշխումը՝ μ_1 կետի շրջակայքում, ընդ որում, համաձայն լեմմա 9.1-ի, $\mu_0 < 0$, $\mu_1 > 0$ ($\sigma_i^2 > 0$), $P_0 \neq P_1$:

Այժմ $\mathbb{H}_i$, $i = 0, 1$ վարկածը բավարարվելու դեպքում կիրառելով **ԿՄԹ**-ը՝ կստանանք՝

$$\frac{\mathcal{S}_n - n\mu_i}{\sigma_i \sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, 1), \quad n \rightarrow \infty,$$

որտեղից մեծ n -ի համար կունենանք հետևյալ մոտարկումները՝

$$\begin{aligned} \alpha_{\varphi^*}(P_0) &= P_0(\Lambda \geq c) = P_0(\mathcal{S}_n \geq \ln c) = P_0\left(\frac{\mathcal{S}_n - n\mu_0}{\sigma_0 \sqrt{n}} \geq \frac{\ln c - n\mu_0}{\sigma_0 \sqrt{n}}\right) \sim \\ &\sim 1 - \Phi\left(\frac{\ln c - n\mu_0}{\sigma_0 \sqrt{n}}\right): \end{aligned} \quad (9.12)$$

$$\text{Համարելով } 1 - \Phi\left(\frac{\ln c - n\mu_0}{\sigma_0 \sqrt{n}}\right) = \alpha, \text{ այսինքն՝ } \frac{\ln c - n\mu_0}{\sigma_0 \sqrt{n}} = z_{\alpha},$$

կստանանք

$$c = c_{\alpha}(n) = \exp \{n\mu_0 + z_{\alpha} \sigma_0 \sqrt{n}\}:$$

Հետևաբար, հայտանիշն ունի $c_\alpha(n)$ ասիմպտոտիկ կրիտիկական եզրով ասիմպտոտիկ α չափ:

Այժմ, մեծ n -երի դեպքում գտնենք $c_\alpha(n)$ եզրին համապատասխանող **II սեռի սխալի հավանականությունը**՝

$$\begin{aligned}\beta_{\varphi^*}(P_1) &= P_1(\mathcal{S}_n < \ln c_\alpha(n)) = \\ &= P_1\left(\frac{\mathcal{S}_n - n\mu_1}{\sigma_1\sqrt{n}} < \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_1}\sqrt{n} + z_\alpha\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right) \sim \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_1}\sqrt{n} + z_\alpha\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right): \end{aligned}$$

Մյուս կողմից՝ այստեղից հետևում է, որ $W_{\varphi^*}(P_1) = 1 - \beta_{\varphi^*}(P_1) \rightarrow 1$, երբ $n \rightarrow \infty$, այսինքն՝ հայտանիշն **ունակ** է:

Օրինակ 9.3: Դիցուք $X \sim \text{Ber}(\theta)$ նմուշ է θ «հաջողության» հավանականությամբ *Բեռնուլիի* բաշխումների դասից: Դիտարկենք $\mathbb{H}_0: \theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: \theta = \theta_1$ երկընտրանքայինի ստուգման խնդիրը, որտեղ $\theta_1 > \theta_0$:

Պահանջվում է՝

ա) կառուցել այդ վարկածները ստուգող **ասիմպտոտիկ α չափ** ունեցող հայտանիշը և գտնել **II սեռի սխալի հավանականությունը**,

բ) գտնել X նմուշի այն **նվազագույն n_0 ծավալը**, որի դեպքում **I և II սեռի սխալի հավանականությունները** լինեն հավասար համապատասխանաբար α և β թվերին:

X նմուշի մեծ n ծավալի դեպքում, համաձայն **Մուսկր – Լապլասի** ինտեգրալային սահմանային թեորեմի, $c_\alpha(n)$ ասիմպտոտիկ կրիտիկական եզրը (տե՛ս օրինակ՝ 9.2 -ը) գտնվում է հետևյալ պայմանից՝

$$\begin{aligned}\alpha_\varphi(\theta_0) &= P_0\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq c_\alpha(n)\right) = P_0\left(\frac{n(\bar{X} - \theta_0)}{\sqrt{n\theta_0(1 - \theta_0)}} \geq \frac{c_\alpha(n) - n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0(1 - \theta_0)}}\right) \sim \\ &\sim 1 - \Phi\left(\frac{c_\alpha(n) - n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0(1 - \theta_0)}}\right) = \alpha, \end{aligned}$$

որտեղից, համեմատելով (9.9)-ի և (9.12)-ի հետ, ստանում ենք՝

$$c_\alpha(n) = n\theta_0 + z_\alpha \sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)}:$$

Այստեղից՝ α չափ ունեցող **ասիմպտոտիկ կրիտիկական տիրույթը** կլինի՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ \mathbf{x} : \frac{\bar{\mathbf{x}} - \theta_0}{\sqrt{\theta_0(1-\theta_0)}} \sqrt{n} \geq z_\alpha \right\}:$$

Այժմ գտնենք մեծ n -երի դեպքում **II սեռի սխալի հավանականությունը**՝

$$\begin{aligned} \beta_\varphi(\theta_1) &= P_1 \left(\sum_{i=1}^n X_i < c_\alpha(n) \right) \sim \Phi \left(\frac{c_\alpha(n) - n\theta_1}{\sqrt{n\theta_1(1-\theta_1)}} \right) = \\ &= \Phi \left(\frac{\theta_0 - \theta_1}{\sqrt{\theta_1(1-\theta_1)}} \sqrt{n} + z_\alpha \sqrt{\frac{\theta_0(1-\theta_0)}{\theta_1(1-\theta_1)}} \right) \end{aligned}$$

(համեմատել (9.10)-ի հետ): Այստեղից՝

$$\Phi \left(\frac{c_\alpha(n) - n\theta_1}{\sqrt{n\theta_1(1-\theta_1)}} \right) = \beta$$

պայմանից, կստանանք՝

$$c_\alpha(n) = n\theta_0 + z_\alpha \sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)} = n\theta_1 - z_\beta \sqrt{n\theta_1(1-\theta_1)},$$

որտեղից՝ **նվազագույն n_0 ծավալը**, որի դեպքում **I և II սեռի սխալի հավանականությունները** լինեն համապատասխանաբար հավասար α և β թվերին, կլինի՝

$$n_0 = \left\lceil \left(\frac{z_\alpha \sqrt{\theta_0(1-\theta_0)} + z_\beta \sqrt{\theta_1(1-\theta_1)}}{\theta_1 - \theta_0} \right)^2 \right\rceil + 1$$

($[a]$ -ն a թվի ամբողջ մասն է):

Խնդիրներ

9.1. Դիցուք $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(m, \theta^2)$: Ստուգվում է $\mathbb{H}_0: \theta^2 = \theta_0^2$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: \theta^2 = \theta_1^2$ երկընտրանքայինի, եթե $\theta_1^2 > \theta_0^2$ ($\theta_1^2 < \theta_0^2$):

ա) Կառուցել այդ վարկածները ստուգող α չափ ունեցող **առավել հզոր Նեյման – Պիրսոնի** հայտանիշը,

բ) գտնել **I** և **II սեռի սխալի հավանականությունները**,

գ) ստուգել հայտանիշի **անշեղությունը**:

Պատասխան՝ 1. ($\theta_1^2 > \theta_0^2$), ա) $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ \mathbf{x} : \frac{1}{\theta_0^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 \geq \chi_{\alpha}^2(n) \right\}$,

բ) $\alpha_{\varphi}(\theta_0) = \alpha$, $\beta_{\varphi}(\theta_1) = H_n \left(\frac{\theta_0^2}{\theta_1^2} \chi_{\alpha}^2(n) \right)$,

գ) հայտանիշն **անշեղ** է:

2. ($\theta_1^2 < \theta_0^2$), ա) $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ \mathbf{x} : \frac{1}{\theta_0^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(n) \right\}$,

բ) $\alpha_{\varphi}(\theta_0) = \alpha$, $\beta_{\varphi}(\theta_1) = 1 - H_n \left(\frac{\theta_0^2}{\theta_1^2} \cdot \chi_{1-\alpha}^2(n) \right)$, գ) հայտանիշն **անշեղ** է:

9.2. Դիցուք $\mathbf{X} \sim \mathbb{I}(\theta)$, $\theta > 0$ նմուշ է **Պուասոնի** բաշխումից: Կառուցել $\mathbb{H}_0: \theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: \theta = \theta_1$ երկընտրանքայինի ստուգող, α չափ ունեցող **Նեյման – Պիրսոնի** հայտանիշը ($\theta_1 > \theta_0$): Գտնել հայտանիշի **հզորությունը**:

Ցուցում՝ տե՛ս օրինակ՝ 9.2 -ը:

Պատասխան՝ α չափ ունեցող Նեյման – Պիրսոնի հայտանիշի կրիտիկական տիրույթն է $\mathcal{X}_{1\alpha} = \{ \mathbf{x} \in \mathcal{X}^n : T = n\bar{x} \geq c_1(\alpha) \}$, որտեղ $c_1 = c_1(\alpha)$ -ն բավարարում է

$$\alpha'' = 1 - \Pi_{\theta_0}(c_1 + 1) < \alpha \leq 1 - \Pi_{\theta_0}(c_1) = \alpha'$$

պայմանը: $\alpha' = \alpha$ դեպքում այն կլինի **նշ ռանդոմիզացված**,

$$W_{\varphi^*}(\theta_1) = 1 - \Pi_{\theta_1}(c_1):$$

$\alpha < \alpha'$ դեպքում հայտանիշը ռանդոմիզացված է

$$\varphi^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{երբ } T > c_1 \\ \varepsilon_{\alpha} = \frac{\alpha - \alpha''}{\alpha' - \alpha''}, & \text{երբ } T = c_1 \\ 0, & \text{երբ } T < c_1 \end{cases}$$

կրիտիկական ֆունկցիայով, հզորությունը՝

$$W_{\varphi^*}(\theta_1) = \left(1 - \Pi_{\theta_1}(c_1 + 1) \right) + (\alpha - \alpha'') \left(\frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^{c_1} e^{-n(\theta_1 - \theta_0)}:$$

9.3. Դիցուք $\mathbf{X} \sim \mathbb{I}(\theta)$, $\theta > 0$: Կառուցել $\mathbb{H}_0: \theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: \theta = \theta_1$ երկընտրանքայինի ստուգող **ասիմպտոտիկ** α չափ ունեցող

հայտանիշը և գտնել դրա **հզորությունը**, երբ $\theta_1 > \theta_0$: Ինչ տեղի կունենա $\theta_1 < \theta_0$ դեպքում:

Ցուցում՝ տե՛ս օրինակ՝ 9.3 -ը:

Պատասխան՝ 1. $\theta_1 > \theta_0$ ՝ $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ \mathbf{x} : \frac{\bar{x} - \theta_0}{\sqrt{\theta_0}} \sqrt{n} \geq z_\alpha \right\}$, $W_\varphi(\theta_1) \sim \Phi \left(\frac{\theta_1 - \theta_0}{\sqrt{\theta_1}} \sqrt{n} - z_\alpha \sqrt{\frac{\theta_0}{\theta_1}} \right)$ մեծ n -ի դեպքում,

2. $\theta_1 < \theta_0$ ՝ $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ \mathbf{x} : \frac{\bar{x} - \theta_0}{\sqrt{\theta_0}} \sqrt{n} \leq -z_\alpha \right\}$, $W_\varphi(\theta_1) \sim \Phi \left(\frac{\theta_0 - \theta_1}{\sqrt{\theta_1}} \sqrt{n} - z_\alpha \sqrt{\frac{\theta_0}{\theta_1}} \right)$:

§ 9.3. Միակողմանի բարդ վարկածների ստուգում

Մոնոտոն ճշմարտանմանության հարաբերությունով բաշխումներ

Դիցուք $\mathbf{X} \sim P_\theta \in \mathcal{P}$ նմուշը համապատասխանում է բաշխումների $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta \subset \mathcal{R}\}$ դասից P_θ բաշխմանը: Դիտարկենք վարկածների ստուգման խնդիրը, երբ $\mathbb{H}_0$ և $\mathbb{H}_1$ վարկածները **միակողմանի բարդ վարկածներ** են,

$\mathbb{H}_0^-: \theta \leq \theta_0$ ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+: \theta > \theta_0$ կամ $\mathbb{H}_0^+: \theta \geq \theta_0$ ընդդեմ $\mathbb{H}_1^-: \theta < \theta_0$:

Կասենք, որ բաշխումների $\mathcal{P}$ դասն ունի **մոնոտոն ճշմարտանմանության հարաբերություն**, եթե գոյություն ունի այնպիսի $T(\mathbf{x})$ ֆունկցիա ($\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n$), որ բոլոր $\theta, \theta' \in \Theta$ -ից պարամետրերի համար ($\theta > \theta'$)՝

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{f_\theta(\mathbf{x})}{f_{\theta'}(\mathbf{x})} \left(\frac{p_\theta(\mathbf{x})}{p_{\theta'}(\mathbf{x})} \right):$$

Ճշմարտանմանության հարաբերությունը $T(\mathbf{x})$ -ի նկատմամբ **մոնոտոն ֆունկցիա** է (որոշակիության համար կհամարենք, որ $\lambda(\mathbf{x})$ -ը $T(\mathbf{x})$ -ի նկատմամբ **մոնոտոն աճող** ֆունկցիա է): Սահմանումից հետևում է, որ կամայական $c > 0$ և $\theta > \theta'$ թվերի համար, ճիշտ է

$$(\mathbf{x} : \lambda(\mathbf{x}) \geq c) \Leftrightarrow (\mathbf{x} : T(\mathbf{x}) \geq c_1)$$

համարժեքությունը, որտեղ $c_1 = c_1(n, c, \theta, \theta')$:

Օրինակ 9.4: Դիցուք $X \sim N(\theta, \sigma^2)$, $\theta \in \mathcal{R}$: Ստուգենք, ունի՞ արդյոք, այդ դասը **մոնոտոն ճշմարտանմանության հարաբերություն**, թե՛ ոչ:

Ցանկացած $\theta, \theta' \in \mathcal{R}$ -ից ($\theta > \theta'$) պարամետրերի համար **ճշմարտանմանության հարաբերությունը** կլինի հավասար (տե՛ս օրինակ 9.1-ը)

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{f_{\theta}(\mathbf{x})}{f_{\theta'}(\mathbf{x})} = \exp \left\{ \frac{n\bar{x}}{\sigma^2} (\theta - \theta') - \frac{n}{2\sigma^2} (\theta^2 - (\theta')^2) \right\},$$

այնպես, որ

$$(\mathbf{x} : \lambda(\mathbf{x}) \geq c) \Leftrightarrow (\mathbf{x} : \bar{x} \geq c_1), \quad c_1 = \frac{1}{2}(\theta + \theta') + \frac{\sigma^2 \ln c}{n(\theta - \theta')} :$$

Հետևաբար, բաշխումների $N(\theta, \sigma^2)$ դասն ունի **մոնոտոն ճշմարտանմանության հարաբերություն**, որտեղ $T(\mathbf{x}) = \bar{x}$:

Մոնոտոն ճշմարտանմանության հարաբերություն ունեցող դասերի համար ճիշտ է **հավասարաչափ առավել հզոր** (ՀԱՀ) հայտանիշի գոյության վերաբերյալ հետևյալ պնդումը (տե՛ս **Боровков** [1])՝

Թեորեմ 9.3: Դիցուք $X \sim P_{\theta} \in \mathcal{P}$ և $\mathcal{P}$ դասն ունի **մոնոտոն ճշմարտանմանության հարաբերություն** ըստ $T(\mathbf{x})$ ֆունկցիայի: Այդ դեպքում՝

1. $\mathbb{K}_{\alpha} = \{\delta : \alpha_{\varphi}(\theta) \leq \alpha, \theta \leq \theta_0\}$ հայտանիշների դասում գոյություն ունի $\mathbb{H}_0^- : \theta \leq \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+ : \theta > \theta_0$ երկրորդանքայինը ստուգող

$$\varphi^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } T(\mathbf{x}) > c_1 \\ \varepsilon, & \text{եթե } T(\mathbf{x}) = c_1 \\ 0, & \text{եթե } T(\mathbf{x}) < c_1 \end{cases} \quad (9.13)$$

կրիտիկական ֆունկցիայով **օպտիմալ** (ՀԱՀ) **ճշմարտանմանության հարաբերության հայտանիշ** (ՃՀՀ), որտեղ $c_1 := c_1(\alpha) \in \mathcal{R}$ և $\varepsilon := \varepsilon(\alpha)$ թվերը ($0 < \varepsilon < 1$) որոշվում են հետևյալ պայմանից՝

$$E_0[\varphi^*(\mathbf{X})] = P_0(T(\mathbf{X}) > c_1) + \varepsilon P_0(T(\mathbf{X}) = c_1) = \alpha \quad (9.14)$$

($P_0 := P_{\theta_0}$, $E_0 := E_{P_0}$):

2. $W_{\varphi^*}(\theta) = E_{\theta}[\varphi^*(\mathbf{X})]$ **հզորության ֆունկցիան** բոլոր θ -ների համար $W_{\varphi^*}(\theta) < 1$ պայմանը բավարարող **խիստ մոնոտոն աճող ֆունկցիա** է:

3. Բոլոր $\theta' \in \Theta$ համար $\mathbb{H}'_0 : \theta \leq \theta'$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}'_1 : \theta > \theta'$ երկրնորանքայինի ստուգող (9.13) կրիտիկական ֆունկցիայով **ճշմարտանմանության հարաբերության հայտանիշն օպտիմալ** է $\mathbb{K}' := \mathbb{K}_{\alpha'}$ դասում, որտեղ $\alpha' = W_{\varphi^*}(\theta')$:

4. φ^* կրիտիկական ֆունկցիայով **ճշմարտանմանության հարաբերության հայտանիշը** կամայական $\theta < \theta_0$ համար **մինիմալացնում** է $\mathbb{K}_{\alpha}$ դասում $W_{\varphi^*}(\theta) = E_{\theta}[\varphi^*(\mathbf{X})]$ ֆունկցիան (**I սեռի սխալը**):

Ա պ ա ց ու ց ու մ (1 – 3): Նախ դիտարկենք $\mathbb{H}_0 : \theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \theta = \theta_1$ ($\theta_1 > \theta_0$) երկրնորանքայինի ստուգման խնդիրը: Համաձայն **Նեյման – Պիրսոնի** թեորեմի՝ այդ վարկածները ստուգող **առավել հզոր ՃՀՀ**-ն ունի (9.13) տեսքը, որտեղ $\lambda(\mathbf{x}) > c_{\alpha}$ պայմանը փոխարինվում է $T(\mathbf{x}) > c_1$ պայմանով, իսկ $c_1 = c_1(\alpha)$ և $\varepsilon = \varepsilon_{\alpha}$ թվերը որոշվում են (9.14) պայմանից: Քանի որ c_1 և ε թվերը (9.14) հավասարությունից որոշվում են **միարժեք** ձևով, ապա $\theta'' > \theta'$ պայմանը բավարարող ցանկացած $\theta', \theta'' \in \Theta$ արժեքների համար $\mathbb{H}'_0 : \theta = \theta'$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}'_1 : \theta = \theta''$ երկրնորանքայինի ստուգող φ^* հայտանիշը կլինի **առավել հզոր** $\mathbb{K}' = \mathbb{K}_{\alpha'}$ դասում, որտեղ $\alpha' := W_{\varphi^*}(\theta') = E_{\theta'}[\varphi^*(\mathbf{X})]$: Այստեղից և **Նեյման – Պիրսոնի** թեորեմից (տե՛ս **անշեղության** պայմանը) հետևում է $W_{\varphi^*}(\theta'') > W_{\varphi^*}(\theta') = \alpha'$ պայմանը, այնպես որ $W_{\varphi^*}(\theta)$ ֆունկցիան **խիստ մոնոտոն աճող** է: Հետևաբար՝ կստանանք՝

$$W_{\varphi^*}(\theta) = E_{\theta}[\varphi^*(\mathbf{X})] \leq \alpha, \text{ երբ } \theta \leq \theta_0: \quad (9.15)$$

(9.15) պայմանը բավարարող հայտանիշների $\mathbb{K}_{\alpha}$ դասը պատկանում է

$$\mathbb{K}_{\alpha}^0 = \{\delta: E_{\delta}[\varphi(\mathbf{X})] = \alpha\}$$

դասին: Սակայն, քանի որ **ՃՀՀ**-ը մաքսիմալացնում է $W_{\varphi}(\theta_1)$ ֆունկցիան $\mathbb{K}_{\alpha}^0$ դասում ($\sup_{\varphi \in \mathbb{K}_{\alpha}^0} W_{\varphi}(\theta_1)$), ապա այն կմաքսիմալացնի $W_{\varphi}(\theta_1)$ հզորությունը նաև $\mathbb{K}_{\alpha}$ դասում: Մնում է միայն նկատել, որ **առավել հզոր φ^* ՃՀՀ**-ը **կախում չունի** θ_1 -ի ընտրությունից, այնպես որ այն կլինի **հավա-**

սարաչափ առավել հզոր բոլոր $\theta > \theta_0$ -ների համար: Այսպիսով, 1 – 3 պնդումներն ապացուցվեցին:

4-րդ պնդումը հետևում է 1 – 3 պնդումներից, եթե այն կիրառվի $\mathbb{H}_0^+$: $\theta \geq \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^-$: $\theta < \theta_0$ երկընտրանքայինի վարկածը ստուգման խնդրի համար: Այդ վարկածները ստուգող $\tilde{\mathbb{K}}_{1-\alpha} = \{\tilde{\delta}: E_\theta[\tilde{\varphi}(\mathbf{X})] \leq 1 - \alpha\}$ դասում **հավասարաչափ առավել հզոր** հայտանիշը կունենա $\tilde{\varphi}^* = 1 - \varphi^*$ տեսքը, իսկ $1 - W_{\varphi^*}(\theta) = E_\theta[\tilde{\varphi}^*(\mathbf{X})]$ **հզորության ֆունկցիան** բոլոր $\theta < \theta_0$ համար կլինի **մաքսիմալ**, այսինքն՝ $W_{\varphi^*}(\theta)$ ֆունկցիան կլինի **մինիմալ**:

Դիտողություն 9.1: Մոնոտոն ճշմարտանմանության հարաբերություն ունեցող $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta \subset \mathcal{R}\}$ դասի համար $\mathbb{H}_0^+$: $\theta \geq \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^-$: $\theta < \theta_0$ երկընտրանքայինի ստուգող **հավասարաչափ առավել հզոր** հայտանիշի կրիտիկական ֆունկցիան ունի

$$\varphi^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{երբ } T(\mathbf{x}) < c_1 \\ \varepsilon, & \text{երբ } T(\mathbf{x}) = c_1 \\ 0, & \text{երբ } T(\mathbf{x}) > c_1 \end{cases} \quad (9.16)$$

տեսքը, որտեղ

$$E_0[\varphi^*(\mathbf{X})] = P_0(T(\mathbf{X}) < c_1) + \varepsilon P_0(T(\mathbf{X}) = c_1) = \alpha, \quad (9.17)$$

(տե՛ս թեորեմ 9.3-ի 4-րդ կետը):

Դիտողություն 9.2: $\mathbb{H}_0$: $\theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+$: $\theta > \theta_0$ (կամ $\mathbb{H}_1^-$: $\theta < \theta_0$) երկընտրանքայինը ստուգող **հավասարաչափ առավել հզոր** հայտանիշն ունի նույն՝ (9.13) – (9.14) տեսքը (համապատասխանաբար, (9.16) – (9.17) տեսքը):

Ցուցային (Էքսպոնենտական) դասեր

Մոնոտոն ճշմարտանմանության հարաբերություն ունեցող բաշխումների դասի կարևոր մասնավոր դեպքն է $\mathcal{E} = \{P_\theta, \theta \in \Theta \subset \mathcal{R}\}$ **ցուցային դասը**, որի համար P_θ բաշխման $f_\theta(x)$ խտության ֆունկցիան ($p_\theta(x)$ հավանականությունը) ներկայացվում է հետևյալ տեսքով՝

$$f_{\theta}(x) (p_{\theta}(x)) = h(x) \exp \{A(\theta)S(x) + B(\theta)\}, \quad x \in \mathcal{X} :$$

Իրոք, եթե $\mathbf{X} \sim P_{\theta} \in \mathcal{E}$ **ցուցային դասից** բաշխմանը համապատասխանող նմուշ է, ապա $\lambda(\mathbf{x})$ **ճշմարտանմանության հարաբերությունը** բոլոր $\theta > \theta'$ -ի համար կներկայացվի

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{f_{\theta}(\mathbf{x})}{f_{\theta'}(\mathbf{x})} \left(\frac{p_{\theta}(\mathbf{x})}{p_{\theta'}(\mathbf{x})} \right) = \exp\{(A(\theta) - A(\theta'))T(\mathbf{x}) + n(B(\theta) - B(\theta'))\}$$

տեսքով,և այն կլինի մոնոտոն կախված $T(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n S(x_i)$ ֆունկցիայից, եթե $A(\theta)$ -ն **մոնոտոն ֆունկցիա** է:

Այսպիսով, **ցուցային դասերի** համար թեորեմ 9.3-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

Թեորեմ 9.4: Դիցուք $\mathbf{X} \sim P_{\theta} \in \mathcal{E}$, որտեղ $A(\theta)$ -ն **մոնոտոն ֆունկցիա** է: Այդ դեպքում $\mathbb{K}_{\alpha}$ դասում գոյություն ունի $\mathbb{H}_0^{-} : \theta \leq \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^{+} : \theta > \theta_0$ երկընտրանքայինի ստուգող **հավասարաչափ առավել հզոր (օպտիմալ) ճշշ.** ընդ որում, եթե $A(\theta)$ -ն **մոնոտոն աճող ֆունկցիա** է, ապա հայտանիշն ունի (9.13) տեսքը, իսկ եթե այն **մոնոտոն նվազող է՝** (9.16) տեսքը:

Եթե $\mathbb{K}_{\alpha}$ դասում ստուգվում է $\mathbb{H}_0^{+} : \theta \geq \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^{-} : \theta < \theta_0$ երկընտրանքայինի, ապա **հավասարաչափ առավել հզոր (օպտիմալ) ճշշ.**-ն ունի (9.16) տեսքը, եթե $A(\theta)$ -ն **մոնոտոն աճող է**, և կունենա (9.13) տեսքը, եթե այն **մոնոտոն նվազող է**:

Օրինակ 9.5: Դիցուք $\mathbf{X} \sim N(m, \theta^2)$ և ստուգվում է $\mathbb{H}_0^{-} : \theta^2 \leq \theta_0^2$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^{+} : \theta^2 > \theta_0^2$ երկընտրանքայինի:

Քանի որ $N(m, \theta^2)$ դասը **ցուցային դաս** է՝

$$f_{\theta}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 - \frac{n}{2} \ln \theta^2 \right\},$$

որտեղ $T(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2$, իսկ $A(\theta) = -\frac{1}{2\theta^2}$ աճող ֆունկցիա է, ապա α չափ ունեցող **հավասարաչափ առավել հզոր (օպտիմալ)** հայտանիշը (որը

ոչ ռանդոմիզացված է), տրվում է $\mathcal{X}_{1\alpha} = \{\mathbf{x} : T(\mathbf{x}) \geq c_1\}$ կրիտիկական տիրույթի միջոցով:

$c_1 = c_1(\alpha)$ կրիտիկական եզրը գտնելու համար նկատենք, որ $\frac{1}{\theta^2} T(\mathbf{X}) \sim \mathbb{H}^2(n)$, այնպես որ $E_0[\varphi^*(\mathbf{X})] = P_0(T(\mathbf{X}) \geq c_1) = \alpha$ պայմանից կատանանք՝ $c_1 = \theta_0^2 \chi_{\alpha}^2(n)$:

$\mathbb{H}_0^+$: $\theta^2 \geq \theta_0^2$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^-$: $\theta^2 < \theta_0^2$ երկընտրանքայինի ստուգման կրիտիկական տիրույթը, կլինի $\mathcal{X}_{1\alpha} = \{\mathbf{x} : T(\mathbf{x}) \leq c_1\}$ բազմությունը, որտեղ $c_1 = \theta_0^2 \chi_{1-\alpha}^2(n)$:

Օրինակ 9.6: Ենթադրենք որոշակի արտադրատեսակ ենթարկվում է **նմուշային հսկողության**, ընդ որում, այդ արտադրատեսակի յուրաքանչյուր անդամ, անկախ մյուսներից, θ հավանականությամբ կարող է լինել խոտանված: Դիցուք n հատ արտադրատեսակ ստուգելուց հետո ստացվել է $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ նմուշը, որտեղ $X_i = 1$, եթե i -րդ ստուգված արտադրատեսակն ունի **խոտան** և $X_i = 0$, եթե այն **որակյալ** է (այսինքն՝ $\mathbf{X} \sim \text{Ber}(\theta)$ նմուշ է *Բեռնուլիի* բաշխումից): Պահանջվում է ստուգել $\mathbb{H}_0^+$: $\theta \geq \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^-$: $\theta < \theta_0$ երկընտրանքայինի, որտեղ θ_0 -ն անորակ արտադրատեսակի «**կրիտիկական**» (**թույլատրելի**) թիվն է (հետևաբար, եթե $\mathbb{H}_0^+$ վարկածն ընդունվի, երբ $\mathbf{X}(\omega_0) = \mathbf{x}$, ապա արտադրությունը պետք է դադարեցվի):

Անորակ արտադրանքների $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bin}(\theta, n)$ պատահական թիվն ունի *բինոմիալ* բաշխում: *Բեռնուլիի* մոդելը **ցուցային** է՝

$$\begin{aligned} p_{\theta}(\mathbf{x}) &= P_{\theta}(\mathbf{X} = \mathbf{x}) = \theta^{T(\mathbf{x})} (1 - \theta)^{n - T(\mathbf{x})} = \\ &= \exp \left\{ \left(\ln \frac{\theta}{1 - \theta} \right) T(\mathbf{x}) + n \ln(1 - \theta) \right\}, \end{aligned}$$

որտեղ $A(\theta) = \ln \frac{\theta}{1 - \theta}$ **աճող** ֆունկցիա է: Հետևաբար, գոյություն ունի $\mathbb{H}_0^+$: $\theta \geq \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^-$: $\theta < \theta_0$ մրցող վարկածի ստուգող, α չափ ունեցող **օպտիմալ** (ՀԱՀ) **հայտանիշ**, որը որոշվում է $\mathcal{X}_{1\alpha} = \{\mathbf{x} : T(\mathbf{x}) \leq c_1(\alpha)\}$ կրիտիկական տիրույթով ($c_1(\alpha)$ **կրիտիկական եզրը** գտնվում է ինչպես օրինակ 9.2 -ում):

Խնդիրներ

9.4. Դիցուք $X \sim N(\theta, \sigma^2)$: Կառուցել՝ ա) $\mathbb{H}_0^-: \theta \leq \theta_0$ վարկաձև ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+: \theta > \theta_0$ և բ) $\mathbb{H}_0^+: \theta \geq \theta_0$ վարկաձև ընդդեմ $\mathbb{H}_1^-: \theta < \theta_0$ երկընտրանքայինի ստուգող α չափ ունեցող **հավասարաչափ առավել հզոր հայտանիշներ**: Գտնել այդ հայտանիշների **հզորության ֆունկցիաները** և ստուգել դրանց **ունակությունն ու անշեղությունը**:

Ցուցում՝ բերել դասը *ցուցալին* տեսքի, օգտվելով թեորեմ 9.4-ից:

Պատասխան՝ ա) $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ \mathbf{x} : \frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\bar{\mathbf{x}} - \theta_0) > z_\alpha \right\}$, $W_\varphi(\theta) = \Phi\left(\frac{\theta - \theta_0}{\sigma} \sqrt{n} - z_\alpha\right)$,

բ) $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ \mathbf{x} : \frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\bar{\mathbf{x}} - \theta_0) < -z_\alpha \right\}$, $W_\varphi(\theta) = \Phi\left(\frac{\theta_0 - \theta}{\sigma} \sqrt{n} - z_\alpha\right)$:

9.5. $X \sim \text{Bin}(\theta, k)$ նմուշի միջոցով կառուցել α չափ ունեցող **ասիմպտոտիկ ՀԱՀ հայտանիշներ** հետևյալ վարկաձևերը ստուգելու համար՝ ա) $\mathbb{H}_0^-: \theta \leq \theta_0$ ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+: \theta > \theta_0$, բ) $\mathbb{H}_0^+: \theta \geq \theta_0$ ընդդեմ $\mathbb{H}_1^-: \theta < \theta_0$:

Ցուցում՝ տե՛ս օրինակ 9.6-ը:

Պատասխան՝ ա) $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ \mathbf{x} : \frac{\bar{\mathbf{x}} - k\theta_0}{\sqrt{k\theta_0(1-\theta_0)}} \sqrt{n} \geq z_\alpha \right\}$,

բ) $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ \mathbf{x} : \frac{\bar{\mathbf{x}} - k\theta_0}{\sqrt{k\theta_0(1-\theta_0)}} \sqrt{n} \leq -z_\alpha \right\}$:

9.6. Դիցուք $X \sim \text{III}(\theta)$, $\theta > 0$: Կառուցել α չափ ունեցող **հավասարաչափ առավել հզոր հայտանիշներ** հետևյալ վարկաձևերը ստուգելու համար՝ ա) $\mathbb{H}_0^-: \theta \leq \theta_0$ ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+: \theta > \theta_0$ և բ) $\mathbb{H}_0^+: \theta \geq \theta_0$ ընդդեմ $\mathbb{H}_1^-: \theta < \theta_0$:

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 9.2-ը:

Պատասխան՝

$$\text{ա) } \varphi^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{երբ } T(\mathbf{x}) > c_1(\alpha) \\ \varepsilon_\alpha = \frac{\alpha - \alpha''}{\alpha' - \alpha''}, & \text{երբ } T(\mathbf{x}) = c_1(\alpha), \\ 0, & \text{երբ } T(\mathbf{x}) < c_1(\alpha) \end{cases}$$

որտեղ $\alpha'' := 1 - \Pi_{n\theta_0}(c_1(\alpha) + 1) < \alpha \leq 1 - \Pi_{n\theta_0}(c_1(\alpha)) := \alpha'$,

**§ 9.4. Պարզ վարկածի ստուգում ընդդեմ երկկողմանի բարդ
երկրնտրանքային վարկածի**

$$p) \varphi^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } T(\mathbf{x}) < c_1(\alpha) \\ \frac{\alpha - \alpha''}{\alpha' - \alpha''}, & \text{եթե } T(\mathbf{x}) = c_1(\alpha), \\ 0, & \text{եթե } T(\mathbf{x}) > c_1(\alpha) \end{cases}$$

որտեղ $\alpha'' = \Pi_{n\theta_0}(c_1(\alpha)) < \alpha \leq \Pi_{n\theta_0}(c_1(\alpha) + 1) = \alpha' :$

9.7. Նախորդ խնդրի պայմաններում կառուցել **ասիմպտոտիկ α չափ ունեցող հավասարաչափ առավել հզոր հայտանիշները:**

Ցուցում՝ տե՛ս խնդիր 9.3-ը:

Պատասխան՝

$$ա) \mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ \mathbf{x} : \frac{\bar{x} - \theta_0}{\sqrt{\theta_0}} \sqrt{n} \geq z_\alpha \right\}, \quad p) \mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ \mathbf{x} : \frac{\bar{x} - \theta_0}{\sqrt{\theta_0}} \sqrt{n} \leq -z_\alpha \right\}:$$

9.8. Դիցուք $\mathbf{X} \sim \mathcal{U}(0, \theta)$, $\theta > 0$: Կառուցել α չափ ունեցող **հավասարաչափ առավել հզոր հայտանիշներ** հետևյալ վարկածները ստուգելու համար՝ ա) $\mathbb{H}_0^-: \theta \leq \theta_0$ ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+: \theta > \theta_0$ և բ) $\mathbb{H}_0^+: \theta \geq \theta_0$ ընդդեմ $\mathbb{H}_1^-: \theta < \theta_0$:

Ցուցում՝ նկատել, որ $\mathcal{U}(0, \theta)$ դասն ունի *մոնոտոն ճշմարտանմանության հարաբերություն* ըստ $T(\mathbf{x}) = x_{(n)}$ ֆունկցիայի և կիրառել թեորեմ 9.4-ը:

Պատասխան՝ ա) $\mathcal{X}_{1\alpha} = \{ \mathbf{x} : T(\mathbf{x}) \geq \theta_0 \sqrt[n]{1 - \alpha} \}$, բ) $\mathcal{X}_{1\alpha} = \{ \mathbf{x} : T(\mathbf{x}) \leq \theta_0 \sqrt[n]{\alpha} \}$:

**§ 9.4. Պարզ վարկածի ստուգում ընդդեմ երկկողմանի բարդ
երկրնտրանքային վարկածի**

Դիցուք $\mathbf{X} \sim P_\theta \in \mathcal{E}$ նմուշ է **ցուցչային դասին** պատկանող P_θ բաշխումից, և դիտարկվում է

$$\mathbb{H}_0 : \theta = \theta_0 \text{ վարկածն ընդդեմ } \mathbb{H}_1 : \theta \neq \theta_0 \quad (9.18)$$

երկկողմանի բարդ երկրնտրանքայինի ստուգման խնդիրը: Պարզվում է, որ այդ վարկածները ստուգող, α չափ ունեցող **հավասարաչափ առավել հզոր հայտանիշ գոյություն չունի:**

Բրոք, ենթադրենք P_θ բաշխման $f_\theta(x)$ խտության ֆունկցիան՝ բացարձակ անընդհատ դեպքում, կամ $p_\theta(x)$ հավանականության ֆունկցիան՝ դիսկրետ դեպքում, ունի հետևյալ ներկայացումը՝

$$f_\theta(x) (p_\theta(x)) = h(x) \exp\{A(\theta)S(x) + B(\theta)\}: \quad (9.19)$$

Դիցուք $A(\theta)$ -ն աճող ֆունկցիա է, իսկ $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n S(X_i)$ վիճականու $G_\theta^T(B) = \mathbb{P}_\theta(T(\mathbf{X}) \in B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$ բաշխումը բոլոր $\theta \in \Theta$ -ների համար **բացարձակ անընդհատ** է: Ըստ թեորեմ 9.4-ի՝ $\mathbb{H}_0 : \theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \theta > \theta_0$ մրցող վարկածի ստուգող **ոչ ռանդոմիզացված հավասարաչափ առավել հզոր (ՀԱՀ) հայտանիշը** α չափ ունեցող

$$\mathbb{K}_\alpha^0 = \{\delta : E_0[\varphi(\mathbf{X})] = \alpha\}$$

հայտանիշների դասում, տրվում է $\mathcal{X}_{1\alpha}^+ = \{\mathbf{x} : T(\mathbf{x}) \geq c_\alpha\}$ կրիտիկական տիրույթով, իսկ $\mathbb{H}_1 : \theta < \theta_0$ մրցող վարկածի դեպքում՝ $\mathcal{X}_{1\alpha}^- = \{\mathbf{x} : T(\mathbf{x}) \leq c_\alpha\}$ կրիտիկական տիրույթով: Այնպես որ $\varphi^+(\mathbf{x}) = \mathbb{1}_{\mathcal{X}_{1\alpha}^+}(\mathbf{x})$ կրիտիկական ֆունկցիայով հայտանիշը կլինի **հավասարաչափ առավել հզոր** բոլոր $\theta > \theta_0$ համար, իսկ $\varphi^-(\mathbf{x}) = \mathbb{1}_{\mathcal{X}_{1\alpha}^-}(\mathbf{x})$ հայտանիշը՝ **հավասարաչափ առավել հզոր** բոլոր $\theta < \theta_0$ համար: Այստեղից հետևում է, որ **գոյություն չունի** α չափ ունեցող **հավասարաչափ առավել հզոր հայտանիշ**, որը լուծի (9.18) խնդիրը **միաժամանակ բոլոր** θ -ների ($\theta \neq \theta_0$) համար:

Պարզվում է, որ այդ խնդիրն ունի լուծում, եթե $\mathbb{K}_\alpha^0$ դասը **նեղացվի**, և խնդիրը դիտարկվի $\mathbb{K}_\alpha^0$ դասի

$$\tilde{\mathbb{K}}_\alpha^0 = \{\delta \in \mathbb{K}_\alpha^0 : E_\theta[\varphi(\mathbf{X})] \geq \alpha, \theta \neq \theta_0\}$$

անշեղ հայտանիշների ենթադասում:

Վերը նշված $\varphi^+(\mathbf{x})$ և $\varphi^-(\mathbf{x})$ կրիտիկական ֆունկցիաներով հայտանիշները **չեն կարող** լինել **անշեղ**, քանի որ $E_\theta[\varphi^+(\mathbf{X})] < \alpha$, երբ $\theta < \theta_0$, $E_\theta[\varphi^-(\mathbf{X})] < \alpha$, երբ $\theta > \theta_0$ և $E_0[\varphi^\pm(\mathbf{X})] = \alpha$ (համաձայն թեորեմ 9.3-ի՝ $E_\theta[\varphi^+(\mathbf{X})]$ ֆունկցիան **խիստ մոնոտոն աճող** է, իսկ $E_\theta[\varphi^-(\mathbf{X})]$ ֆունկցիան՝ **խիստ մոնոտոն նվազող**):

Թեորեմ 9.5: Դիցուք $\mathbf{X} \sim P_\theta \in \mathcal{E}$ նմուշ է **ցուցային դասին** պատկանող P_θ բաշխումից, և բավարարվում են ռեգուլյարության ($\mathbf{R}$)-պայմանները (տե՛ս [15]-ի սահմանում 6.2-ը): Եթե (9.19) ներկայացման մեջ մասնակցող $A(\theta)$ ֆունկցիան **խիստ մոնոտոն աճող** է, ապա α չափ ունեցող **անշեղ հայտանիշների** $\tilde{\mathbb{K}}_\alpha^0$ դասում գոյություն ունի

$$\mathbb{H}_0 : \theta = \theta_0 \text{ վարկածն ընդդեմ } \mathbb{H}_1 : \theta \neq \theta_0$$

երկրնսորանքայինի ստուգող օպտիմալ (ՀԱՀ) հայտանիշը, որն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\varphi^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{երթե } T(\mathbf{x}) < c_1 \text{ կամ } T(\mathbf{x}) > c_2 \\ \varepsilon_i, & \text{երթե } T(\mathbf{x}) = c_i, \ i = 1, 2 \\ 0, & \text{երթե } c_1 < T(\mathbf{x}) < c_2 \end{cases}, \quad (9.20)$$

որտեղ $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n S(X_i)$, իսկ c_i և $\varepsilon_i, i = 1, 2$ հաստատունները որոշվում են

$$E_0(\varphi^*(\mathbf{X}) - \alpha) = 0 \quad \text{և} \quad E_0[(\varphi^*(\mathbf{X}) - \alpha) T(\mathbf{X})] = 0 \quad (9.21)$$

պայմաններից:

Դիտողություն 9.3: Դիցուք $\theta = \theta_0$ դեպքում $T = T(\mathbf{X})$ վիճականու $G_0^T(B) = P_0(T \in B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$ բաշխումը **համաչափ** է որոշակի $b \in \mathcal{R}$ կետի նկատմամբ, այսինքն՝

$$G_0^T(b+x+0) + G_0^T(b-x) = 1, \text{ կամ } P_0(T < b-x) = P_0(T > b+x), x \in \mathcal{R}$$

$$(G_0^T(x) = P_0(T < x), T = T(\mathbf{X}) \text{ վիճականու բաշխման ֆունկցիան է):}$$

Ենթադրենք, բացի այդ, (9.20) տեսքի $\varphi^*(\mathbf{x})$ կրիտիկական ֆունկցիան նույնպես **համաչափ** է $b \in \mathcal{R}$ կետի նկատմամբ, որտեղից կհետևի, որ $b = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)$ և $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$: Հեշտ է տեսնել, որ (9.20) պայմանը բավարարող $\varphi^*(\mathbf{X})$ ֆունկցիան կբավարարի նաև (9.21) պայմանը: Իրոք,

$$E_0[T(\mathbf{X})\varphi^*(\mathbf{X})] = E_0[(T(\mathbf{X}) - b)\varphi^*(\mathbf{X})] + bE_0[\varphi^*(\mathbf{X})] = \alpha b = \alpha E_0[T(\mathbf{X})]$$

(այստեղ $E_0[(T - b)\varphi^*(\mathbf{X})] = 0$, քանի որ $T(\mathbf{X})$ վիճականին և $\varphi^*(\mathbf{X})$ կրիտիկական ֆունկցիան **համաչափ** են b կետի նկատմամբ, իսկ $E_0[T(\mathbf{X})] = b$): Այսպիսով, $\varphi^*(\mathbf{x})$ կրիտիկական ֆունկցիայի (9.20) ներկայացման մեջ մասնակցող c_i և $\varepsilon_i, i = 1, 2$ հաստատունները որոշվում են

$$E_0[\varphi^*(\mathbf{X})] = P_0(T < c_1) + P_0(T > c_2) + 2\varepsilon P_0(T = c_1) = \alpha$$

պայմանից: Այստեղից, քանի որ $P_0(T > c_2) = P_0(T < c_1)$, ապա c_1 և ε թվերը գտնելու համար կստանանք՝ ($c > 0$)

$$P_0(T < c_1) + \varepsilon P_0(T = c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad (9.22)$$

հավասարումը: Մասնավորապես, $b = 0$ դեպքի համար $c_1 = -c_2 := -c$ ($c > 0$) և $\varphi^*(\mathbf{x})$ կրիտիկական ֆունկցիան կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\varphi^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } |T(\mathbf{x})| > c \\ \varepsilon, & \text{եթե } |T(\mathbf{x})| = c : \\ 0, & \text{եթե } |T(\mathbf{x})| < c \end{cases}$$

Անընդհատ $T(\mathbf{X})$ վիճականիների դեպքում (երբ $\theta = \theta_0$) **ոչ ռանդոմիզացված** հայտանիշի կրիտիկական ֆունկցիան կլինի՝

$$\varphi^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } |T(\mathbf{x})| \geq c \\ 0, & \text{եթե } |T(\mathbf{x})| < c \end{cases} \quad (9.23)$$

որտեղ $c > 0$ **կրիտիկական եզրը** որոշվում է հետևյալ պայմանից՝

$$P_0(T < -c) = P_0(T > c) = \frac{\alpha}{2} \quad (9.24)$$

Թեորեմ 9.5-ը ապացուցելու համար անհրաժեշտ են հետևյալ լեմմաները (տե՛ս **Боровков** [1])՝

Լեմմա 9.6: *Դիցուք $\mathbf{X} \sim P_\theta \in \mathcal{E}$, և բավարարվում են ռեգուլյարության ($\mathbf{R}$)-պայմանները: Այդ դեպքում բոլոր $\theta \in \Theta$ -ների համար $E_\theta[\varphi^2(\mathbf{X})] \leq c$ պայմանը բավարարող $\mathbb{K}_\alpha^0$ դասից ցանկացած անշեղ հայտանիշ բավարարում է հետևյալ հատկությունները՝*

$$E_0[\varphi(\mathbf{X}) - \alpha] = 0 \quad \text{և} \quad (9.25)$$

$$E_0[(\varphi(\mathbf{X}) - \alpha)T(\mathbf{X})] = 0, \quad (9.26)$$

որտեղ
$$T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n S(X_i) \quad (E_0(\cdot) := E_{\theta_0}(\cdot)) :$$

Հաջորդ լեմման **Նեյման – Պիրսոնի ֆունդամենտալ լեմմայի** ընդհանրացումն է:

Լեմմա 9.7: *Դիցուք $f_0(\mathbf{x}), f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})$ -ը $\mathcal{X}^n$ բազմության վրա որոշված ինտեգրելի բորելյան ֆունկցիաներ են: Նշանակենք Φ_α -ով բոլոր այն $\varphi(\mathbf{x})$ կրիտիկական ֆունկցիաների դասը, որոնք որոշակի α_i ($0 < \alpha_i < 1$), $i = 0, \dots, m-1$ թվերի համար բավարարում են հետևյալ պայմանները*

$$\int_{\mathcal{X}^n} \varphi(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \alpha_i : \quad (9.27)$$

Այդ դեպքում՝ $\varphi^0(\mathbf{x}) \in \Phi_\alpha$ կրիտիկական ֆունկցիան, որի համար

$$\int_{\mathcal{X}^n} \varphi^0(\mathbf{x}) f_m(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

ինտեգրալն ընդունում է իր **մեծագույն արժեքը**, ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\varphi^0(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } f_m(\mathbf{x}) > \sum_{i=0}^{m-1} k_i f_i(\mathbf{x}) \\ 0, & \text{եթե } f_m(\mathbf{x}) < \sum_{i=0}^{m-1} k_i f_i(\mathbf{x}) \end{cases}, \quad (9.28)$$

որտեղ k_i , $i = 0, \dots, m-1$ հաստատունները որոշվում են (9.27) պայմաններին:

Լե մ մ ա 9.6-ի ա պ ա ց ու ց ու մ: Ըստ պայմանի՝ ցանկացած $\varphi \in \mathbb{R}_\alpha^0$ կրիտիկական ֆունկցիայի համար $W_\varphi(\theta)$ հզորության ֆունկցիան $\theta = \theta_0$ կետում ընդունում է իր **փոքրագույն** արժեքը: Մյուս կողմից, քանի որ բավարարվում են (R) -պայմանները, և բոլոր $\theta \in \Theta$ -ների համար $E_\theta[\varphi^2(\mathbf{X})] \leq c$, ապա (տե՛ս [15]-ի լեմմա 6.5-ը) $W_\varphi(\theta)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է, և տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$W'_\varphi(\theta) = \int_{\mathcal{X}^n} \varphi(\mathbf{x}) f'_\theta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = E_\theta[\varphi(\mathbf{X}) U(\mathbf{X}, \theta)],$$

որտեղ $U(\mathbf{X}, \theta) = L'_\theta(\mathbf{X}) = [\ln f_\theta(\mathbf{X})]' \mathbf{X}$ նմուշի **ներդրման ֆունկցիան** է: Այնպես որ $\theta = \theta_0$ կետում $W_\varphi(\theta)$ ֆունկցիայի **փոքրագույն** α արժեքն ընդունելու անհրաժեշտ պայմանը կլինի՝

$$W_\varphi(\theta_0) = \alpha \quad \text{և} \quad W'_\varphi(\theta_0) = 0, \quad (9.29)$$

որը համարժեք է

$$E_0[\varphi(\mathbf{X})] = \alpha \quad \text{և} \quad E_0[\varphi(\mathbf{X}) U(\mathbf{X}, \theta_0)] = 0 \quad (9.30)$$

հավասարություններին:

Քանի որ $\mathbf{X} \sim P_\theta \in \mathcal{E}$ նմուշը համապատասխանում է (9.19) **ցուցային դասից** P_θ բաշխմանը, ապա **լոգարիթմական ճշմարտանմանության ֆունկցիան** կլինի հավասար

$$L_\theta(\mathbf{X}) = \ln f_\theta(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n \ln h(X_i) + A(\theta)T(\mathbf{X}) + \ln C(\theta),$$

որտեղ

$$T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n S(X_i), \quad C(\theta) = \exp\{nB(\theta)\}:$$

Այստեղից՝

$$U(\mathbf{X}, \theta) = L'_\theta(\mathbf{X}) = A'(\theta)T(\mathbf{X}) + \frac{C'(\theta)}{C(\theta)},$$

և քանի որ

$$E_\theta U(\mathbf{X}, \theta) = 0 \text{ (տե՛ս [15]-ի լեմմա 6.5-ը),}$$

ապա

$$\frac{C'(\theta)}{C(\theta)} = -A'(\theta) E_\theta[T(\mathbf{X})]:$$

Մյուս կողմից՝

$$E_\theta[\varphi(\mathbf{X})U(\mathbf{X}, \theta)] = A'(\theta) E_\theta[\varphi(\mathbf{X})T(\mathbf{X})] - A'(\theta) E_\theta[\varphi(\mathbf{X})]E_\theta[T(\mathbf{X})],$$

այնպես որ (9.30) պայմանները բերվում են (9.25) և (9.26) տեսքի ($\theta = \theta_0$):

Լ ե մ մ ա 9.7-ի ա պ ա ց ու ց ու մ: Նշանակենք՝

$$G_i(\varphi) = \int_{\mathcal{X}^n} \varphi(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad i = 0, \dots, m:$$

Որպեսզի $G_i(\varphi) = \alpha_i$, $i = 0, \dots, m-1$ պայմանները բավարարող $\varphi \in \Phi_\alpha$ կրիտիկական ֆունկցիայի համար $G_m(\varphi)$ ֆունկցիոնալն ընդունի իր **մեծագույն** արժեքը, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն **մաքսիմալացնի**

$$\mathcal{J}(\varphi) = G_m(\varphi) - \sum_{i=0}^{m-1} k_i G_i(\varphi)$$

ֆունկցիոնալը որոշակի $k_i, i = 0, \dots, m-1$ հաստատունների դեպքում

$$\left(\sum_{i=0}^{m-1} k_i G_i(\varphi) \text{ արժեքն այստեղ } \mathbf{\Phi\text{իքսված է}} \right):$$

Այսպիսով, բավարար է, որ φ -ն **մաքսիմալացնի**

$$J(\varphi) = \int_{\mathcal{X}^n} \left[f_m(\mathbf{x}) - \sum_{i=0}^{m-1} k_i f_i(\mathbf{x}) \right] \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

ֆունկցիոնալը: Ներկայացնելով այն հետևյալ տեսքով՝

$$J(\varphi) = \int_{f_m - \sum k_i f_i > 0} \left[f_m - \sum_{i=0}^{m-1} k_i f_i \right] \varphi d\mathbf{x} + \int_{f_m - \sum k_i f_i < 0} \left[f_m - \sum_{i=0}^{m-1} k_i f_i \right] \varphi d\mathbf{x}$$

և հաշվի առնելով $0 \leq \varphi(\mathbf{x}) \leq 1$ պայմանը՝ այստեղից կարելի է եզրակացնել, որ $J(\varphi)$ ֆունկցիոնալն ընդունում է իր **մեծագույն** արժեքը, երբ $\varphi^0(\mathbf{x}) \in \Phi_\alpha$ ֆունկցիան ունի (9.28) տեսքը: $k_i, i = 0, \dots, m-1$ հաստատուններն այդ ներկայացման մեջ (ինչպես նաև $\varphi^0(\mathbf{x})$ ֆունկցիայի արժեքները

$$\left(\mathbf{x} : f_m(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{m-1} k_i f_i(\mathbf{x}) \right)$$

«եզրային» բազմության վրա) անհրաժեշտ է ընտրել այնպես, որ բավարարվեն (9.27) պայմանները:

Թե նրա մ 9.5-ի ապացուցում: Վերցնենք ցանկացած $\theta \neq \theta_0$ արժեք և դիտարկենք (9.25), (9.26) պայմանների դեպքում $W_\varphi(\theta) = E_\theta[\varphi(\mathbf{X})]$ հզորության ֆունկցիայի **մաքսիմալացման** խնդիրը: Համաձայն լեմմա 9.7-ի, վերցնելով $m = 2, f_0 = f_{\theta_0}, f_1 = T f_{\theta_0}, f_2 = f_\theta, \alpha_0 = \alpha, \alpha_1 = \alpha E_0[T(\mathbf{X})]$, կարելի է եզրակացնել, որ $W_\varphi(\theta)$ ֆունկցիան իր **մեծագույն** արժեքն ընդունում է

$$\varphi^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{երբ } f_\theta(\mathbf{x}) > k_0 f_{\theta_0}(\mathbf{x}) + k_1 T(\mathbf{x}) f_{\theta_0}(\mathbf{x}) \\ 0, & \text{երբ } f_\theta(\mathbf{x}) < k_0 f_{\theta_0}(\mathbf{x}) + k_1 T(\mathbf{x}) f_{\theta_0}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (9.31)$$

ֆունկցիայի վրա:

Մյուս կողմից, քանի որ $P_\theta \in \mathcal{E}$ բաշխումը պատկանում է **ցուցային դասին**, ապա

$$f_\theta(\mathbf{x}) < k_0 f_{\theta_0}(\mathbf{x}) + k_1 T(\mathbf{x}) f_{\theta_0}(\mathbf{x})$$

անհավասարությունը կարելի է ներկայացնել հետևյալ ձևով՝

$$\frac{C(\theta)}{C(\theta_0)} \exp\{(A(\theta) - A(\theta_0)) T(\mathbf{x})\} < k_0 + k_1 T(\mathbf{x}):$$

Կամայական $c_1 < c_2$ թվերի համար միշտ կարելի է ընտրել այնպիսի k_0 և k_1 թվեր, որ այդ անհավասարությունը լինի համարժեք $c_1 < T(\mathbf{x}) < c_2$ անհավասարությանը: Այստեղից հետևում է, որ (9.20) տեսք ունեցող $\varphi^*(\mathbf{x})$ հայտանիշը **մաքսիմալացնում** է (9.25), (9.26) պայմանների դեպքում $W_\varphi(\theta) = E_\theta[\varphi(\mathbf{X})]$ հզորության ֆունկցիան, եթե c_i , ε_i , $i = 1, 2$ թվերը (9.20)-ում վերցվեն այնպես, որ բավարարվեն (9.25), (9.26) պայմանները: Ակնհայտ է, որ φ^* կրիտիկական ֆունկցիայով հայտանիշն **անշեղ օպտիմալ (ՀԱՀ)** հայտանիշ է, քանի որ (9.25), (9.26) պայմանները բավարարող հայտանիշների դասը պարունակում է $\tilde{\mathbb{K}}_\alpha^0$ դասը (լեմմա 9.6): Այսպիսով, φ^* կրիտիկական ֆունկցիան մաքսիմալացնում է $W_\varphi(\theta)$ հզորության ֆունկցիան նաև $\tilde{\mathbb{K}}_\alpha^0$ դասում:

Օրինակ 9.7: Դիցուք $\mathbf{X} \sim N(\theta, \sigma^2)$ և ստուգվում է

$$\mathbb{H}_0 : \theta = \theta_0 \text{ վարկածն ընդդեմ } \mathbb{H}_1 : \theta \neq \theta_0$$

երկկողմանի երկընտրանքային վարկածի:

Այդ դասին համապատասխանող խտության ֆունկցիան բերվում է

$$f_\theta(x) = h(x) \exp\{A(\theta)S(x) + B(\theta)\}, x \in \mathcal{R}$$

ցուցային տեսքի, որտեղ

$$h(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}, A(\theta) = \frac{\theta}{\sigma^2}, B(\theta) = -\frac{\theta^2}{2\sigma^2}, S(x) = x:$$

Քանի որ $A(\theta)$ ֆունկցիան **խիստ մոնոտոն աճող** է, ապա, ըստ թեորեմ 9.5-ի, այդ վարկածները ստուգող **ոչ ռանդոմիզացված օպտիմալ (ՀԱՀ) անշեղ** հայտանիշի կրիտիկական տիրույթը կունենա հետևյալ տեսքը՝

**§ 9.4. Պարզ վարկածի ստուգում ընդդեմ երկկողմանի բարդ
երկրևորանքային վարկածի**

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{\mathbf{x} : T(\mathbf{x}) < c_1 \cup T(\mathbf{x}) > c_2\},$$

որտեղ $T(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i$: Հաշվի առնելով, որ $\mathbb{H}_0$ վարկածի դեպքում $T(\mathbf{X}) \sim \mathbb{N}(n\theta_0, n\sigma^2)$ վիճականին *համաչափ* է բաշխված $b = n\theta_0$ կետի նկատմամբ, ապա, համաձայն դիտողություն 9.3-ի, $c_1 + c_2 = 2n\theta_0$ և c_1 հաստատունը որոշվում է $P_0(T < c_1) = \frac{\alpha}{2}$ պայմանից: Այստեղից կստանանք՝

$$\begin{aligned} P_0(T < c_1) &= P_0(\bar{\mathbf{X}} < c_1/n) = P_0\left(\frac{\bar{\mathbf{X}} - \theta_0}{\sigma} \sqrt{n} < \frac{\frac{c_1}{n} - \theta_0}{\sigma} \sqrt{n}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{\frac{c_1}{n} - \theta_0}{\sigma} \sqrt{n}\right) = \frac{\alpha}{2}, \end{aligned}$$

որտեղից՝

$$\frac{\frac{c_1}{n} - \theta_0}{\sigma} \sqrt{n} = -z_{\alpha/2},$$

այնպես որ՝

$$c_1 = n\theta_0 - \sqrt{n} \sigma z_{\alpha/2}, \quad c_2 = n\theta_0 + \sqrt{n} \sigma z_{\alpha/2} : \quad (9.32)$$

Ներկայացնենք $\mathcal{X}_{1\alpha}$ կրիտիկական տիրույթը

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ \mathbf{x} : \left| \frac{\bar{\mathbf{X}} - \theta_0}{\sigma} \sqrt{n} \right| > z_{\alpha/2} \right\}$$

տեսքով: Հգորության ֆունկցիայի համար կստանանք՝

$$\begin{aligned} W_{\varphi^*}(\theta) &= P_{\theta}(\mathbf{X} \in \mathcal{X}_{1\alpha}) = P_{\theta}(\bar{\mathbf{X}} < c_1/n \cup \bar{\mathbf{X}} > c_2/n) = \\ &= P_{\theta}\left(\frac{\bar{\mathbf{X}} - \theta_0}{\sigma} \sqrt{n} < \frac{\frac{c_1}{n} - \theta_0}{\sigma} \sqrt{n}\right) + P_{\theta}\left(\frac{\bar{\mathbf{X}} - \theta_0}{\sigma} \sqrt{n} > \frac{\frac{c_2}{n} - \theta_0}{\sigma} \sqrt{n}\right): \end{aligned}$$

Տեղադրելով այստեղ (9.32)-ից c_1 -ի և c_2 -ի արժեքները և հաշվի առնելով, որ $\bar{\mathbf{X}} \sim \mathbb{N}(\theta, \sigma^2/n)$, կստանանք՝

$$W_{\varphi^*}(\theta) = \Phi\left(\frac{\theta_0 - \theta}{\sigma} \sqrt{n} - z_{\alpha/2}\right) + \Phi\left(\frac{\theta - \theta_0}{\sigma} \sqrt{n} - z_{\alpha/2}\right):$$

Այս ներկայացումից հետևում է, որ $W_{\varphi^*}(\theta)$ հզորության ֆունկցիան **համաչափ** է $\theta = \theta_0$ կետի նկատմամբ, ընդ որում այդ կետում այն ընդունում է իր **փոքրագույն**՝ $W_{\varphi^*}(\theta) = \alpha$ արժեքը: Բացի այդ, $W_{\varphi^*}(\theta) > \alpha$, երբ $\theta \neq \theta_0$, այն **խիստ աճող** է, երբ $\theta > \theta_0$, և **խիստ նվազող**, երբ $\theta < \theta_0$ ու $W_{\varphi^*}(\theta) \rightarrow 1$, երբ $|\theta| \rightarrow \infty$:

Օրինակ 9.8: Այժմ ենթադրենք $\mathbf{X} \sim \mathbb{N}(m, \theta^2)$ և ստուգենք $\mathbb{H}_0 : \theta^2 = \theta_0^2$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \theta^2 \neq \theta_0^2$ երկկողմանի երկընտրանքայինի:

Բերենք մոդելը **ցուցչային** տեսքի (տե՛ս (9.19)), որտեղ $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $A(\theta) = -\frac{1}{2\theta^2}$, $B(\theta) = -\ln \theta$, $S(x) = (x - m)^2$:

Մյուս կողմից՝ $T(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2$, և քանի որ $A(\theta)$ -ն խիստ մոնոտոն աճող ֆունկցիա է, ապա, ըստ թեորեմ 9.5-ի, **ոչ ռանդոմիզացված օպտիմալ (ՀԱՀ) անշեղ** հայտանիշի կրիտիկական տիրույթը կլինի

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{\mathbf{x} : T(\mathbf{x}) < c_1 \cup T(\mathbf{x}) > c_2\}, \quad (9.33)$$

բազմությունը, որտեղ c_1 և c_2 հաստատունները բավարարում են (9.21) կամ համարժեք $W_{\varphi}(\theta_0) = \alpha$ և $W'_{\varphi}(\theta_0) = 0$ պայմանները (տե՛ս լեմմա 9.6-ի ապացուցումը):

Այստեղից՝ քանի որ $\mathbb{H}_0$ վարկածի դեպքում՝

$$(1/\theta_0^2) T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - m}{\theta_0} \right)^2 \sim \mathbb{H}^2(n), \text{ ապա}$$

$$W_{\varphi}(\theta_0) = P_0(T < c_1) + P_0(T > c_2) = H_n(c_1/\theta_0^2) + 1 - H_n(c_2/\theta_0^2) = \alpha, \quad (9.34)$$

$$W'_{\varphi}(\theta_0) = c_1 h_n(c_1/\theta_0^2) - c_2 h_n(c_2/\theta_0^2) = 0, \quad (9.35)$$

որտեղ $H_n(x)$ -ը և $h_n(x)$ -ը n ազատության աստիճաններով **χ^2 բաշխում** ունեցող պատահական մեծության՝ համապատասխանաբար բաշխման և խտության ֆունկցիաներն են (տե՛ս [15]-ի § 2.2-ը):

Այժմ, վերցնելով c_1 և c_2 թվերն այնպես, որ $H_n(c_1/\theta_0^2) = \alpha_1$ և $1 - H_n(c_2/\theta_0^2) = \alpha_2$, որտեղ $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ ($0 < \alpha < 1$), այստեղից և (9.35) պայմաններից կստանանք՝

**§ 9.4. Պարզ վարկածի ստուգում ընդդեմ երկկողմանի բարդ
երկրնտրանքային վարկածի**

$$c_1 = \theta_0^2 \chi_{1-\alpha_1}^2(n), \quad c_2 = \theta_0^2 \chi_{\alpha_2}^2(n),$$

$$\chi_{1-\alpha_1}^2(n) h_n(\chi_{1-\alpha_1}^2(n)) = \chi_{\alpha_2}^2(n) h_n(\chi_{\alpha_2}^2(n)),$$

կամ՝

$$\frac{\chi_{\alpha_2}^2(n)}{\chi_{1-\alpha_1}^2(n)} = \exp \left\{ \left(\chi_{\alpha_2}^2(n) - \chi_{1-\alpha_1}^2(n) \right) / 2 \right\}$$

$$\left(h_n(x) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \quad x \in \mathcal{R} \right):$$

Այս պայմաններով c_1 և c_2 հաստատունները, ինչպես նաև $\chi_{1-\alpha_1}^2(n)$ և $\chi_{\alpha_2}^2(n)$ կրիտիկական արժեքները որոշվում են միարժեք ձևով: Օրինակ, $\alpha = 0.05$ նշանակալիության մակարդակի համար ստացվում են հետևյալ արժեքները՝

n	$\chi_{1-\alpha_1}^2(n)$	$\chi_{\alpha_2}^2(n)$
5	0.99	14.37
10	3.52	21.73
20	9.96	35.23 :

$\varphi^*(\mathbf{x})$ կրիտիկական ֆունկցիայով **օպտիմալ (ՀԱՀ) անշեղ** հայտանիշին համապատասխանող $\mathcal{X}_{1\alpha}$ կրիտիկական տիրույթը (տե՛ս (9.33)) կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{\mathbf{x} : T(\mathbf{x}) < \theta_0^2 \chi_{1-\alpha_1}^2(n) \cup T(\mathbf{x}) > \theta_0^2 \chi_{\alpha_2}^2(n)\}:$$

Հայտանիշի **հզորության ֆունկցիան** կլինի՝

$$W_{\varphi^*}(\theta) = P_{\theta}(T < c_1) + P_{\theta}(T > c_2) =$$

$$= H_n \left(\left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^2 \chi_{1-\alpha_1}^2(n) \right) + 1 - H_n \left(\left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^2 \chi_{\alpha_2}^2(n) \right):$$

Այստեղից հետևում է, որ $\lim_{|\theta| \rightarrow \infty} W_{\varphi^*}(\theta) = 1$:

Խնդիրներ

9.9. Դիցուք $\mathbf{X} \sim \mathbb{E}(\theta)$, ($\theta > 0$) նմուշ է **ցուցային** բաշխումից: Կառուցել $\mathbb{H}_0 : \theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \theta \neq \theta_0$ երկրնտրանքայինի ստուգող, α չափ ունեցող **ՀԱՀ (օպտիմալ) անշեղ** հայտանիշը: Գտնել հայտանիշի **հզորության ֆունկցիան**:

Ցուցում՝ Բերել բաշխումը *ցուցային* տեսքի և օգտվել թեորեմ 9.5-ից:

Պատասխան՝ $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ \mathbf{x} : \frac{1}{2\theta_0} \chi_{\alpha_2}^2(2n) \leq \sum_{i=1}^n x_i \leq \frac{1}{2\theta_0} \chi_{1-\alpha_1}^2(2n) \right\},$

$$W_{\varphi^*}(\theta) = H_{2n} \left(\frac{\theta}{\theta_0} \chi_{1-\alpha_1}^2(2n) \right) - H_{2n} \left(\frac{\theta}{\theta_0} \chi_{\alpha_2}^2(2n) \right), \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha:$$

9.10. $\mathbf{X} \sim \text{Ber}(\theta)$ նմուշի միջոցով կառուցել $\mathbb{H}_0 : \theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \theta \neq \theta_0$ երկընտրանքային վարկածը ստուգող α **չափ** ունեցող **ՀԱՀ (օպտիմալ) անշեղ** հայտանիշը:

Ցուցում՝ Բերել բաշխումը *ցուցային* տեսքի՝ օգտվելով թեորեմ 9.5-ից:

Պատասխան՝
$$\varphi^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } T(\mathbf{x}) < c_1 \text{ կամ } T(\mathbf{x}) > c_2 \\ \varepsilon_i, & \text{եթե } T(\mathbf{x}) = c_i, \quad i = 1, 2 \\ 0, & \text{եթե } c_1 < T(\mathbf{x}) < c_2 \end{cases},$$

$T(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i$, իսկ c_i և $\varepsilon_i, i = 1, 2$ թվերը գտնվում են հետևյալ պայմաններից՝

$$B(c_2; n, \theta_0) - B(c_1 + 1; n, \theta_0) + \sum_{i=1}^2 (1 - \varepsilon_i) [B(c_i + 1; n, \theta_0) - B(c_i; n, \theta_0)] = 1 - \alpha,$$

$$B(c_2 - 1; n - 1, \theta_0) - B(c_1; n - 1, \theta_0) + \sum_{i=1}^2 (1 - \varepsilon_i) [B(c_i; n - 1, \theta_0) - B(c_i - 1; n - 1, \theta_0)] = 1 - \alpha:$$

9.11. Դիցուք $\mathbf{X} \sim \text{Ber}(\theta)$: Կառուցել $\mathbb{H}_0 : \theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \theta \neq \theta_0$ մրցող վարկածի ստուգող, **ասիմպտոտիկ α չափ** ունեցող **ՀԱՀ (օպտիմալ) անշեղ** հայտանիշը: Գտնել նաև հայտանիշի **հզորության ֆունկցիան**:

Ցուցում՝ օգտվել *Մոսավր-Լապլասի ինտեգրալային սահմանային* թեորեմից՝

$$Z_n = \frac{\bar{x} - \theta_0}{\sqrt{\theta_0(1 - \theta_0)}} \sqrt{n} \xrightarrow{d} N(0, 1), \text{ երբ } n \rightarrow \infty,$$

և օրինակ 9.3 -ից:

Պատասխան՝ $\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ \mathbf{x} : \left| \frac{\bar{x} - \theta_0}{\sqrt{\theta_0(1 - \theta_0)}} \sqrt{n} \right| \geq z_{\alpha/2} \right\},$

$$W_{\varphi^*}(\theta) = \Phi \left(\frac{\theta_0 - \theta}{\sqrt{\theta_0(1 - \theta_0)}} \sqrt{n} - z_{\alpha/2} \right) + \Phi \left(\frac{\theta - \theta_0}{\sqrt{\theta_0(1 - \theta_0)}} \sqrt{n} - z_{\alpha/2} \right)$$

§ 9.5. Վարկածների ստուգում և միջակայքային գնահատականներ

Պարամետրի վերաբերյալ պարզ վարկածները ստուգելու և այդ պարամետրի համար վստահության միջակայքեր կառուցելու խնդիրների միջև գոյություն ունի սերտ կապ:

Դիցուք $\mathbf{X}$ -ը $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta \subset \mathcal{R}\}$ բաշխումների դասից P_θ բաշխմանը համապատասխանող նմուշ է: Դիտարկենք որոշակի $\theta_0 \in \Theta$ արժեքի համար α նշանակալիության մակարդակով $\mathbb{H}_0 : \theta = \theta_0$ վարկածը ստուգող $\mathcal{X}_{1\alpha}(\theta_0)$ կրիտիկական տիրույթով որևէ հայտանիշ: Այդ հայտանիշի **թույլատրելի** տիրույթը նշանակենք $\mathcal{X}_{0\alpha}(\theta_0) = \bar{\mathcal{X}}_{1\alpha}(\theta_0)$ -ով: Այսպիսով, տվյալ α -ի համար $\mathcal{X}^n$ նմուշային տարածությունում տրվում է $\{\mathcal{X}_{0\alpha}(\theta) \subset \mathcal{X}^n, \theta \in \Theta\}$ ենթաբազմությունների դասը:

Կամայական $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n$ նմուշային կետի համար սահմանենք

$$G_\gamma(\mathbf{x}) = \{\theta : \mathbf{x} \in \mathcal{X}_{0\alpha}(\theta)\} \subset \Theta, \quad \gamma = 1 - \alpha$$

բազմությունը: Այսպիսով, Θ պարամետրական բազմության մեջ առաջանում է $\{G_\gamma(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathcal{X}^n\}$ բազմությունների ընտանիքը:

Այժմ դիտարկենք $G_\gamma(\mathbf{X})$ պատահական բազմությունը: Քանի որ $\{\theta \in G_\gamma(\mathbf{X})\}$ և $\{\mathbf{X} \in \mathcal{X}_{0\alpha}(\theta)\}$ պատահույթներն ըստ կառուցման համարժեք են, ապա՝

$$P_\theta(\theta \in G_\gamma(\mathbf{X})) = P_\theta(\mathbf{X} \in \mathcal{X}_{0\alpha}(\theta)) = \gamma,$$

այնպես որ, $G_\gamma(\mathbf{X})$ բազմությունը Θ -ի համար γ մակարդակով **վստահության միջակայք** է: Ճիշտ է նաև հակառակ պնդումը՝ եթե θ պարամետրի համար տրված է γ մակարդակով վստահության միջակայքերի $\{G_\gamma(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathcal{X}^n\}$ ընտանիքը, ապա $\mathcal{X}_{0\alpha}(\theta_0) = \{\mathbf{x} : \theta_0 \in G_\gamma(\mathbf{x})\}$ բազմությունը $\alpha = 1 - \gamma$ նշանակալիության մակարդակով $\mathbb{H}_0 : \theta = \theta_0$ վարկածը ստուգող հայտանիշի **թույլատրելի տիրույթ** է:

Այսպիսով, θ պարամետրի համար վստահության միջակայքերի կառուցման և պարզ վարկածների ստուգման խնդիրները **փոխադարձաբար հա-**

կադարձ են: Եթե որոշ մոդելի համար լուծվում է այդ խնդիրներից մեկը, ապա վերը նշված եղանակով լուծվում է նաև մյուսը:

Նշենք այստեղ, որ **հավասարաչափ առավել հզոր (օպտիմալ) հայտանիշին** նրա գոյության դեպքում համապատասխանում է այսպես կոչված **առավել ճշգրիտ վստահության միջակայքը** (այսինքն, որի երկարությունը տվյալ մակարդակով բոլոր վստահության միջակայքերի մեջ **փոքրագույնն** է (տե՛ս *Боровков* [1])):

Մեկ նմուշի դեպքը

Օրինակ 9.9: Դիցուք $X \sim N(\theta, \sigma^2)$: Ստուգենք α նշանակալիության մակարդակով $\mathbb{H}_0: \theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: \theta \neq \theta_0$ երկընտրանքայինի:

Համաձայն օրինակ 7.10-ի (տե՛ս [15]-ը)՝ $\gamma = 1 - \alpha$ մակարդակով **առավել ճշգրիտ** վստահության միջակայքը θ պարամետրի համար $G_\gamma(\mathbf{x}) = \left(\bar{x} \mp \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \right)$ -ն է: Այնպես որ, $\mathbb{H}_0$ վարկածը ստուգող α չափ ունեցող հայտանիշի **թույլատրելի տիրույթը** $\mathcal{X}_{0\alpha}(\theta_0) = \left\{ \mathbf{x}: |\bar{x} - \theta_0| \frac{\sqrt{n}}{\sigma} < z_{\alpha/2} \right\}$ բազմությունն է: Այսպիսով, α չափ ունեցող **հավասարաչափ առավել հզոր անշեղ** հայտանիշի կրիտիկական տիրույթը $\mathcal{X}_{1\alpha}(\theta_0) = \left\{ \mathbf{x}: |\bar{x} - \theta_0| \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \geq z_{\alpha/2} \right\}$ բազմությունն է: Հետևաբար, եթե $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_{1\alpha}(\theta_0)$, ապա α նշանակալիության մակարդակով $\mathbb{H}_0$ վարկածը **հերքվում** է: Եթե $\mathbf{x} \notin \mathcal{X}_{1\alpha}(\theta_0)$, $\mathbf{X}$ նմուշի $\mathbf{x}$ արժեքը **չի հակասում** $\mathbb{H}_0$ վարկածին և այն ընդունվում է:

Օրինակ 9.10: Ստուգենք $X \sim N(\theta, \sigma^2)$ նմուշի միջոցով α նշանակալիության մակարդակով $\mathbb{H}_0: \theta = \theta_0$ պարզ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+: \theta > \theta_0$ միակողմանի մրցող վարկածի:

θ պարամետրի համար օգտվենք $\gamma = 1 - \alpha$ մակարդակով $G_\gamma(\mathbf{x}) = \left\{ \theta: \theta > \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha \right\}$ **ստորին** վստահության միջակայքից (տե՛ս [15]-ի օրինակ 7.46 -ը): Այստեղից կստանանք, որ α մակարդակով վարկածը

ստուգող հայտանիշի **թույլատրելի տիրույթը** $\mathcal{X}_{0\alpha}(\theta_0) = \left\{ \mathbf{x} : (\bar{\mathbf{x}} - \theta_0) \frac{\sqrt{n}}{\sigma} < z_\alpha \right\}$ բազմությունն է: Այնպես որ, $\mathcal{X}_{1\alpha}(\theta_0) = \left\{ \mathbf{x} : (\bar{\mathbf{x}} - \theta_0) \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \geq z_\alpha \right\}$ բազմությունը կլինի $\mathbb{H}_0: \theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+: \theta > \theta_0$ երկընտրանքայինի ստուգող α նշանակալիության մակարդակով **հավասարաչափ առավել հզոր** հայտանիշի **կրիտիկական տիրույթը**:

Դիտողություն 9.4: Վերը նշված եղանակը, որը հիմնված էր վստահության միջակայքերի և պարզ վարկածների ստուգման միջև կապի վրա, կարելի է օգտագործել նաև այն դեպքում, երբ պահանջվում է ստուգել վարկած (կամ ստանալ միջակայքային գնահատական) **բազմաչափ** $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{R}^k$ ($k > 1$) պարամետրի որոշ $\boldsymbol{\theta}^1 \in \mathcal{R}^m$ ($m < k$) ենթավեկտորի վերաբերյալ ($\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}^1, \boldsymbol{\theta}^2)$, $\boldsymbol{\theta}^2 \in \mathcal{R}^{k-m}$): Այդ դեպքում $\boldsymbol{\theta}^2$ վեկտորը կոչվում է «**խանգարող**» պարամետր:

Օրինակ 9.11: Դիցուք $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\theta_1, \theta_2^2)$: Պահանջվում է α նշանակալիության մակարդակով ստուգել $\mathbb{H}_0: \theta_1 = \theta_{10}$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: \theta_1 \neq \theta_{10}$ երկընտրանքային վարկածի (այստեղ $\theta_2 > 0$ -ն «**խանգարող**» պարամետր է):

Համաձայն օրինակ 7.45-ի (տե՛ս [15]-ը)՝ $\gamma = 1 - \alpha$ վստահության մակարդակով **առավել ճշգրիտ** երկկողմանի վստահության միջակայքը θ_1 պարամետրի համար $G_\gamma(\mathbf{x}) = \left(\bar{\mathbf{x}} \mp \frac{s}{\sqrt{n-1}} t_{\alpha/2}(n-1) \right)$ -ն է, որտեղ s -ը նմուշային ստանդարտ շեղումն է, իսկ $t_{\alpha/2}(n-1)$ -ը՝ $T(n-1)$ բաշխման $\alpha/2$ մակարդակով կրիտիկական արժեքը: Այժմ կիրառելով վերը նշված մեթոդը՝ կստանանք, որ α չափ ունեցող **ՀԱՀ** և **անշեղ** հայտանիշը տրվում է $\mathcal{X}_{1\alpha}(\theta_{10}) = \left\{ \mathbf{x} : |\bar{\mathbf{x}} - \theta_{10}| \frac{\sqrt{n-1}}{s} \geq t_{\alpha/2}(n-1) \right\}$ կրիտիկական տիրույթի միջոցով:

Երկու նմուշի դեպքը

Հաճախ անհրաժեշտ է լինում **համեմատել նորմալ** բաշխում ունեցող երկու նմուշի միջինները և ցրվածքները:

ա) Միջինների համեմատություն (տե՛ս [15], § 7.5)

Օրինակ 9.12: Դիցուք $\mathbf{X}_n \sim \mathcal{N}(\theta_X, \sigma_X^2)$ և $\mathbf{Y}_m \sim \mathcal{N}(\theta_Y, \sigma_Y^2)$ ($\theta_X \in \mathcal{R}, \theta_Y \in \mathcal{R}$) **հայտնի** ցրվածքներով ($\sigma_X > 0, \sigma_Y > 0$) **միմյանցից անկախ նորմալ** բաշխումների դասերից n և m ծավալի նմուշներ են: Նշանակենք $\tau = \theta_X - \theta_Y$: Ստուգենք α մակարդակով $\mathbb{H}_0 : \tau = \tau_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \tau \neq \tau_0$ երկընտրանքայինի:

Քանի որ

$$\bar{\mathbf{X}} \sim \mathcal{N}\left(\theta_X, \frac{\sigma_X^2}{n}\right), \quad \bar{\mathbf{Y}} \sim \mathcal{N}\left(\theta_Y, \frac{\sigma_Y^2}{m}\right),$$

և $\bar{\mathbf{X}}$ -ն ու $\bar{\mathbf{Y}}$ -ն անկախ են, ապա $\bar{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{Y}} \sim \mathcal{N}(\tau, \sigma^2)$, որտեղ

$$\sigma^2 = \text{var}(\bar{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{Y}}) = \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}:$$

Այստեղից կստանանք՝

$$Z = \frac{\bar{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{Y}} - \tau}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

որտեղից՝ $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha = \gamma$, այնպես որ՝

$$G_\gamma(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m) = \{\tau: \tau \in (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}} \mp \sigma z_{\alpha/2})\}$$

առավել ճշգրիտ վստահության միջակայքն է:

Հետևաբար, վերը նշված α նշանակալիության մակարդակով վարկածները ստուգող **հավասարաչափ առավել հզոր** հայտանիշի կրիտիկական տիրույթը կլինի՝ $\mathcal{X}_{1\alpha}(\tau_0) = \{(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m) : |z_0| \geq z_{\alpha/2}\}$, որտեղ

$$z_0 = \frac{\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}} - \tau_0}{\sigma}:$$

Մասնավորապես, α նշանակալիության մակարդակով $\mathbb{H}_0 : \theta_X = \theta_Y$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \theta_X \neq \theta_Y$ երկընտրանքայինի ստուգող **ՀԱՀ հայտանիշը** կունենա

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m) : \left| \frac{\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}}{\sigma} \right| \geq z_{\alpha/2}\}$$

կրիտիկական տիրույթը:

Օրինակ 9.13: Դիցուք $\mathbf{X}_n \sim \mathbb{N}(\theta_X, \theta^2)$ և $\mathbf{Y}_m \sim \mathbb{N}(\theta_Y, \theta^2)$ ($\theta_X \in \mathcal{R}, \theta_Y \in \mathcal{R}$)
անհայտ և հավասար θ^2 ($\theta > 0$) ցրվածքներով նորմալ բաշխումների դա-
սերից վերցված **միմյանցից անկախ** նմուշներ են: α նշանակալիության
մակարդակով ստուգենք $\mathbb{H}_0: \tau = \tau_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: \tau \neq \tau_0$
երկրորդայինի, որտեղ $\tau = \theta_X - \theta_Y$:

Գտնենք τ պարամետրի համար $\gamma = 1 - \alpha$ մակարդակով վստահու-
թյան միջակայքը (տե՛ս [15]-ի օրինակ 7.50-ը):

Համաձայն պայմանների՝ ունենք՝

$$\frac{\bar{\mathbf{X}} - \theta_X}{\theta} \sim \mathbb{N}(0, 1/n) \quad \text{և} \quad \frac{\bar{\mathbf{Y}} - \theta_Y}{\theta} \sim \mathbb{N}(0, 1/m),$$

որտեղից՝

$$\frac{\bar{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{Y}} - \tau}{\theta} \sim \mathbb{N}\left(0, \frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right),$$

այնպես որ՝

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \frac{\bar{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{Y}} - \tau}{\theta} \sim \mathbb{N}(0, 1):$$

Մյուս կողմից, համաձայն **Ֆիշերի** թեորեմի (տե՛ս [15]-ի թեորեմ 7.38-ը),

$$\frac{nS_X^2}{\theta^2} \sim \mathbb{H}^2(n-1), \quad \frac{mS_Y^2}{\theta^2} \sim \mathbb{H}^2(m-1),$$

որտեղ

$$S_X^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{\mathbf{X}})^2, \quad S_Y^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{\mathbf{Y}})^2$$

նմուշային ցրվածքներն են, և քանի որ $\mathbf{X}_n$ և $\mathbf{Y}_m$ նմուշները **միմյանցից**
անկախ են, ապա

$$\chi_{n+m-2}^2 = \frac{1}{\theta^2} (nS_X^2 + mS_Y^2) \sim \mathbb{H}^2(n+m-2):$$

Այնուհետև, **Ստյուդենտի (t -)** բաշխման սահմանումից կհետևի, որ

$$T = T_{n+m-2} = \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{1}{n+m-2} \chi_{n+m-2}^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{nm}{n+m}} (\bar{X} - \bar{Y} - \tau)}{\sqrt{\frac{1}{n+m-2}} \sqrt{nS_X^2 + mS_Y^2}} \sim T(n+m-2)$$

կենտրոնական վիճականին վերը նշված վարկածները ստուգող հայտանիշի վիճականին է: Ներկայացնենք այն

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \tau}{S_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$$

տեսքով, որտեղ

$$S_p^2 = \frac{n}{n+m-2} S_X^2 + \frac{m}{n+m-2} S_Y^2$$

վիճականին կոչվում է դիտարկվող նորմալ մոդելների ընդհանուր θ^2 ցրվածքի համար **միավորված** («pooled») գնահատական: Դժվար չէ տեսնել, որ S_p^2 վիճականին **անշեղ** և **խիստ ունակ** գնահատական է θ^2 պարամետրի համար:

Այսպիսով, **առավել ճշգրիտ** $\gamma = 1 - \alpha$ մակարդակով **վստահության միջակայքը** τ պարամետրի համար կլինի՝

$$G_\gamma(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m) = \left\{ \tau: \tau \in \left(\bar{x} - \bar{y} \mp \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} S_p t_{\alpha/2}(n+m-2) \right) \right\}:$$

Այստեղից հետևում է, որ α նշանակալիության մակարդակով $\mathbb{H}_0: \tau = \tau_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: \tau \neq \tau_0$ երկընտրանքայինի ստուգող **ՀԱՀ** հայտանիշը կունենա հետևյալ **կրիտիկական տիրույթը**՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha}(\tau_0) = \{(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m): |t_0| \geq t_{\alpha/2}(n+m-2)\},$$

որտեղ

$$t_0 = T(\omega_0) = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \tau_0}{s_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}, \quad s_p^2 = \frac{n}{n+m-2} s_X^2 + \frac{m}{n+m-2} s_Y^2 :$$

Մասնավոր դեպքում, երբ $\tau_0 = 0$, α նշանակալիության մակարդակով $\mathbb{H}_0$: $\theta_X = \theta_Y$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$: $\theta_X \neq \theta_Y$ երկընտրանքայինի ստուգող **ՀԱՀ** հայտանիշը կունենա հետևյալ **կրիտիկական տիրույթը**՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ (x_n, y_m) : \left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \right| \geq t_{\alpha/2}(n+m-2) \right\} :$$

Օրինակ 9.14 (Բերենս–Ֆիշերի պրոբլեմ (տե՛ս Леман [9])): Դիտարկենք $\mathbf{X}_n \sim N(\theta_{1X}, \theta_{2X}^2)$ և $\mathbf{Y}_m \sim N(\theta_{1Y}, \theta_{2Y}^2)$ ($\theta_{1X} \in \mathcal{R}$, $\theta_{1Y} \in \mathcal{R}$, $\theta_{2X} > 0$, $\theta_{2Y} > 0$) **անհայտ և տարբեր** ցրվածքներով *նորմալ* բաշխումներից **միմյանցից անկախ** նմուշներ: $\mathbb{H}_0$: $\tau = \tau_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$: $\tau \neq \tau_0$ երկընտրանքայինը ($\tau = \theta_{1X} - \theta_{1Y}$) ստուգելուն վերաբերող խնդիրը հայտնի է որպես **Բերենս – Ֆիշերի պրոբլեմ**:

Պարզվում է (տե՛ս **Montgomery, Runger** [23]), որ այս խնդիրը լուծելու համար որպես հայտանիշի վիճականի կարելի է վերցնել՝

$$T = T_{n,m} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \tau}{S_0 \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \left(S_0^2 = \frac{S_X^2}{n-1} + \frac{S_Y^2}{m-1} \right),$$

պատահական մեծությունը, որը «*մոտարկվում*» է ν ազատությունների աստիճանով **Ստյուդենտի** բաշխումով՝ $T \sim T(\nu)$, որտեղ

$$\nu = \frac{s_0^4}{\frac{[s_X^2/(n-1)]^2}{n-1} + \frac{[s_Y^2/(m-1)]^2}{m-1}}, \quad S_0(\omega_0) = s_0:$$

Այնպես որ, α նշանակալիության մակարդակով $\mathbb{H}_0$: $\tau = \tau_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$: $\tau \neq \tau_0$ երկընտրանքայինի ստուգող հայտանիշի **կրիտիկական տիրույթը** կլինի

$$\mathcal{X}_{1\alpha}(\tau_0) = \left\{ (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m) : \left| \frac{\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}} - \tau_0}{s_0 \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \right| \geq t_{\alpha/2}(v) \right\}$$

բազմությունը:

Մասնավորապես, α նշանակալիության մակարդակով $\mathbb{H}_0 : \theta_{1X} = \theta_{1Y}$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \theta_{1X} \neq \theta_{1Y}$ երկընտրանքայինի ստուգող հայտանիշի կրիտիկական տիրույթը

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m) : \left| \frac{\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}}{s_0 \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \right| \geq t_{\alpha/2}(v) \right\}$$

բազմությունն է:

Ասիմպտոտիկ դեպք

Հաճախ պահանջվում է **մեծ ծավալի** նմուշների դեպքում ստուգել երկու **անհայտ** բաշխումների **միջինների** վերաբերյալ վարկածը:

Օրինակ 9.15: Դիցուք $\mathbf{X}_n$ -ը և $\mathbf{Y}_m$ -ը որոշակի (**անհայտ**) բաշխումներից վերցված **միմյանցից անկախ** նմուշներ են: Այդ բաշխումների **անհայտ միջինները** նշանակենք $\theta_X = E(\mathbf{X}_1)$ և $\theta_Y = E(\mathbf{Y}_1)$ ու դիտարկենք $\tau = \theta_X - \theta_Y$ տարբերությունը: **Մեծ** n և m ծավալի ($n, m > 30$) նմուշների դեպքում ստուգենք α մակարդակով $\mathbb{H}_0 : \tau = \tau_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \tau \neq \tau_0$ երկընտրանքայինի:

Համաձայն **ԿՍԹ**-ի՝ տեղի ունեն հետևյալ ըստ բաշխման զուգամիտությունները՝

$$\sqrt{n} (\bar{\mathbf{X}} - \theta_X) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_X^2) \quad \text{և} \quad \sqrt{m} (\bar{\mathbf{Y}} - \theta_Y) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_Y^2), \quad n \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow \infty,$$

որտեղ $\sigma_X^2 = \text{var}(\mathbf{X})$, $\sigma_Y^2 = \text{var}(\mathbf{Y})$: Այստեղից հետևում է, որ

$$\frac{\bar{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{Y}} - \tau}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0, 1), \quad n \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow \infty, \quad (9.36)$$

որտեղ $\sigma^2 = \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}$:

Նշանակենք՝

$$S^2 = \frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}, \quad S_X^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad S_Y^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2:$$

Օգտվելով **անընդհատության թեորեմներից** (տե՛ս [15], թեորեմ Հ. 2.2)՝
հեշտ է տեսնել, որ (9.36)-ից բխում է հետևյալ զուգամիտությունը՝

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_{n,m} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \tau}{S} \xrightarrow{d} N(0,1), \quad n \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow \infty: \quad (9.37)$$

(9.37) զուգամիտությունը նշանակում է, որ $\mathbf{Z}$ վիճականին **ասիմպտոտիկ ոչ պարամետրական** է: Այսինքն՝ τ պարամետրի համար կարելի է գտնել $\gamma = 1 - \alpha$ մակարդակով **ասիմպտոտիկ վստահության միջակայքը**՝

$$P(|\mathbf{Z}| < z_{\alpha/2}) \rightarrow \gamma, \quad n \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow \infty,$$

որտեղից՝

$$G_\gamma(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m) = \{\tau: \tau \in (\bar{x} - \bar{y} \mp Sz_{\alpha/2})\}:$$

Այնպես որ, α նշանակալիության մակարդակով $\mathbb{H}_0: \tau = \tau_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: \tau \neq \tau_0$ երկրնորանքայինի ստուգող **ասիմպտոտիկ հայտանիշի կրիտկական տիրույթը** կտրվի

$$\mathcal{X}_{1\alpha}(\tau_0) = \{(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m): |z_0| \geq z_{\alpha/2}\}$$

տեսքով, որտեղ $z_0 = \mathbf{Z}(\omega_0) = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \tau_0}{s}, \quad s^2 = \frac{s_x^2}{n} + \frac{s_y^2}{m}:$

Մասնավոր դեպքում $\mathbb{H}_0: \theta_X = \theta_Y$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: \theta_X \neq \theta_Y$ մրցող վարկածի ստուգող α նշանակալիության մակարդակով հայտանիշի **կրիտկական տիրույթը** կլինի հետևյալ բազմությունը՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m): \left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s} \right| \geq z_{\alpha/2}\}:$$

Օրինակ 9.16: Դիցուք $\mathbf{X}_n \sim \text{Ber}(\theta_X)$ և $\mathbf{Y}_m \sim \text{Ber}(\theta_Y)$ **անհայտ** θ_X և θ_Y պարամետրերով ($0 < \theta_X < 1, 0 < \theta_Y < 1$) *Բենուլիի* բաշխումների դասերից վերցված **միմյանցից անկախ** նմուշներ են: Նմուշների **մեծ** n և m ծավալների դեպքում α նշանակալիության մակարդակով ստուգենք $\mathbb{H}_0: \theta_X = \theta_Y$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: \theta_X \neq \theta_Y$ երկրնորանքայինի:

Համաձայն *Մուսկր - Լապլասի* ինտեգրալային սահմանային թեորեմի՝ մեծ n -երի և m -երի դեպքում ճիշտ են հետևյալ սահմանային ներկայացումները՝

$$\frac{\bar{X} - \theta_X}{\sqrt{\theta_X(1 - \theta_X)}} \sim N(0, 1/n) \text{ և } \frac{\bar{Y} - \theta_Y}{\sqrt{\theta_Y(1 - \theta_Y)}} \sim N(0, 1/m): \quad (9.38)$$

Այժմ, ենթադրելով, որ H_0 վարկածը ճիշտ է, այսինքն՝ $\theta_X = \theta_Y = \theta$, (9.38)-ից, կստանանք՝

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \theta(1 - \theta)}} \xrightarrow{d} N(0, 1), \quad n \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow \infty:$$

Այնուհետև, վերցնելով որպես θ պարամետրի գնահատական

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}_{n,m} = \frac{n}{n+m} \bar{X} + \frac{m}{n+m} \bar{Y}$$

վիճականին (որն **անշեղ** և **խիստ ունակ** գնահատական է θ -ի համար), կստանանք հետևյալ զուգամիտությունը՝

$$Z_{n,m} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \theta(1 - \theta)}} \xrightarrow{d} N(0, 1), \quad n \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow \infty,$$

այսինքն՝ $Z_{n,m}$ -ը **ասիմպտոտիկ ոչ պարամետրական վիճականի** է:

Այնպես որ **ասիմպտոտիկ α չափ** ունեցող հայտանիշը կտրվի

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{1\alpha}(\tau_0) &= \{(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m): |z_{n,m}| \geq z_{\alpha/2}\}, \quad z_{n,m} = \mathbf{Z}_{n,m}(\omega_0) = \\ &= \frac{\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \theta(1 - \theta)}} \end{aligned}$$

կրիտիկական տիրույթի միջոցով:

բ) Ցրվածքների համեմատություն

Օրինակ 9.17: Դիցուք $\mathbf{X}_n \sim N(\theta_{1X}, \theta_{2X}^2)$ և $\mathbf{Y}_m \sim N(\theta_{1Y}, \theta_{2Y}^2)$ ($\theta_{1X} \in \mathcal{R}$, $\theta_{1Y} \in \mathcal{R}$, $\theta_{2X} > 0$, $\theta_{2Y} > 0$) *նորմալ* բաշխումների դասերից վերցված

**§ 9.5. Վարկածների ստուգում և միջակայքային
գնահատականներ**

միայնացից անկախ նմուշներ են: α նշանակալիության մակարդակով գտնենք $\mathbb{H}_0 : \theta_{2X}^2 = \theta_{2Y}^2$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \theta_{2X}^2 \neq \theta_{2Y}^2$ երկընտրանքային ստուգող հայտանիշը (տե՛ս [15]-ի օրինակ 7.51-ը):

Համաձայն **Ֆիշերի** թեորեմի (տե՛ս [15]-ի թեորեմ 7.38-ը)՝ ունենք՝

$$\chi_{n-1}^2 = \frac{(n-1)S_{0X}^2}{\theta_{2X}^2} \sim \mathbb{H}^2(n-1), \quad \chi_{m-1}^2 = \frac{(m-1)S_{0Y}^2}{\theta_{2Y}^2} \sim \mathbb{H}^2(m-1),$$

որտեղ

$$S_{0X}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad S_{0Y}^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2$$

անշեղ նմուշային ցրվածքներն են: **Ֆիշեր - Մենդելկորի** (F -) բաշխման սահմանումից (տե՛ս [15]-ի § 2.4-ը) կստանանք՝

$$S_{n-1,m-1} = \frac{\frac{1}{n-1} \chi_{n-1}^2}{\frac{1}{m-1} \chi_{m-1}^2} = \frac{S_{0X}^2}{S_{0Y}^2} \cdot \frac{\theta_{2Y}^2}{\theta_{2X}^2} \sim \mathbb{S}(n-1, m-1):$$

Այստեղից, նշանակելով $\tau = \frac{\theta_{2X}^2}{\theta_{2Y}^2}$, գտնենք τ -ի համար $\gamma = 1 - \alpha$ մակարդակով **կենտրոնական վստահության միջակայքը**:

$$P \left(S_{1-\alpha/2}(n-1, m-1) \leq S_{n-1,m-1} \leq S_{\alpha/2}(n-1, m-1) \right) = \gamma$$

պայմանից հետևում է, որ

$$G_\gamma(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m) = \left\{ \tau : \tau \in \left(\frac{S_{0X}^2}{S_{0Y}^2} S_{1-\alpha/2}(m-1, n-1), \frac{S_{0X}^2}{S_{0Y}^2} S_{\alpha/2}(m-1, n-1) \right) \right\} \text{ը}$$

որոնելի վստահության միջակայքն է: Եվ քանի որ $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում $\frac{S_{0X}^2}{S_{0Y}^2} \sim \mathbb{S}(n-1, m-1)$, ապա α նշանակալիության մակարդակով վարկածը ստուգող հայտանիշի **կրիտիկական տիրույթը** կլինի՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m) : \frac{S_{0X}^2}{S_{0Y}^2} \leq S_{1-\alpha/2}(n-1, m-1) \cup \frac{S_{0X}^2}{S_{0Y}^2} \geq S_{\alpha/2}(n-1, m-1) \right\}:$$

Խնդիրներ

9.12. Դիցուք $\mathbf{X} \sim N(m, \theta^2)$: α նշանակալիության մակարդակով ստուգել $\mathbb{H}_0 : \theta^2 = \theta_0^2$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \theta^2 \neq \theta_0^2$ երկընտրանքայինի:

Ցուցում՝ օգտվել [15]-ի օրինակ 7.43-ից և օրինակ 9.8-ից:

Պատասխան՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha}(\theta_0) = \left\{ \mathbf{x} : \frac{1}{\theta_0^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 < \chi_{1-\alpha_1}^2(n) \cup \frac{1}{\theta_0^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 > \chi_{\alpha_2}^2(n) \right\}$$

հայտանիշի կրիտիկական տիրույթն է, որտեղ $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ և $\frac{\chi_{\alpha_2}^2(n)}{\chi_{1-\alpha_1}^2(n)} = \exp\left\{\frac{1}{n}(\chi_{\alpha_2}^2(n) - \chi_{1-\alpha_1}^2(n))\right\}$:

9.13. Դիցուք $\mathbf{X} \sim N(\theta_1, \theta_2^2)$: α նշանակալիության մակարդակով գտնել $\mathbb{H}_0 : \theta_1 = \theta_{10}$ պարզ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+ : \theta_1 > \theta_{10}$ ($\mathbb{H}_1^- : \theta_1 < \theta_{10}$) բարդ միակողմանի երկընտրանքայինի ստուգող **ՀԱՀ** հայտանիշը:

Ցուցում՝ օգտվել ([15]-ի օրինակ 7.48-ից):

Պատասխան՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha}(\theta_{10}) = \left\{ \mathbf{x} : (\bar{x} - \theta_{10}) \frac{\sqrt{n}}{s} > t_{\alpha}(n-1) \right\}, \quad (\mathcal{X}_{1\alpha}(\theta_{10})) = \left\{ \mathbf{x} : (\bar{x} - \theta_{10}) \frac{\sqrt{n}}{s} < -t_{\alpha}(n-1) \right\}:$$

9.14. Դիցուք $\mathbf{X} \sim \mathcal{U}(0, \theta)$ ($\theta > 0$) նմուշ է $[0, \theta]$ միջակայքում *հավասարաչափ* բաշխումից: α նշանակալիության մակարդակով գտնել $\mathbb{H}_0 : \theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \theta \neq \theta_0$ երկընտրանքայինի ստուգող **ՀԱՀ** հայտանիշը:

Ցուցում՝ օգտվել ([15] -ի օրինակ 7.19-ից):

Պատասխան՝ $\mathcal{X}_{1\alpha} = \{\mathbf{x} : x_{(n)} \leq \theta_0 \sqrt[n]{\alpha} \cup x_{(n)} \geq \theta_0\}$:

9.15. Դիցուք $\mathbf{X}_n \sim N(\theta_{1X}, \theta_{2X}^2)$ և $\mathbf{Y}_n \sim N(\theta_{1Y}, \theta_{2Y}^2)$ անհայտ պարամետրերով *նորմալ* բաշխումների դասերից վերցված **միմյանցից անկախ** և **միևնույն ծավալ** ունեցող նմուշներ են: α նշանակալիության մակարդակով ստուգել հետևյալ վարկածները՝

ա) $\mathbb{H}_0 : \tau = \tau_0$ ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \tau \neq \tau_0$,

**§ 9.6. Ճշմարտանմանության հարաբերության հայտանիշը և
դրա որոշ կիրառությունները**

բ) $\mathbb{H}_0 : \tau = \tau_0$ ընդդեմ $\mathbb{H}_1^- : \tau < \tau_0$,

գ) $\mathbb{H}_0 : \tau = \tau_0$ ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+ : \tau > \tau_0$, որտեղ $\tau = \theta_{1X} - \theta_{1Y}$:

Ցուցում՝ օգտվել ([15]-ի օրինակ 7.52-ից):

Պատասխան՝

ա) $\mathcal{X}_{1\alpha} = \{(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) : |t_0| \geq t_{\alpha/2}(n-1)\}$,

բ) $\mathcal{X}_{1\alpha}^- = \{(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) : t_0 \leq -t_{\alpha}(n-1)\}$,

գ) $\mathcal{X}_{1\alpha}^+ = \{(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) : t_0 \geq t_{\alpha}(n-1)\}$, որտեղ $t_0 = \frac{\bar{z} - \tau_0}{s_z} \sqrt{n-1}$,

$$s_z^2 = \frac{1}{n} \sum (z_i - \bar{z})^2, \quad \bar{z} = \bar{x} - \bar{y}, \quad z_i = x_i - y_i:$$

**§ 9.6. Ճշմարտանմանության հարաբերության հայտանիշը և
դրա որոշ կիրառությունները**

Դիցուք $\mathbf{X} \sim P_{\theta} \in \mathcal{P}$ ՝ P_{θ} բաշխմանը համապատասխանող n ծավալի նմուշ է: Ենթադրենք P_{θ} բաշխումը *բացարձակ անընդհատ* է (կամ *դիսկրետ*): Դիտարկենք

$$\mathbb{H}_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \subset \mathcal{R}^k \text{ ընդդեմ } \mathbb{H}_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 \subset \mathcal{R}^k \quad (k \geq 1) \quad (9.39)$$

բարդ վարկածների ստուգման խնդիրը, որտեղ

$$\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta \subset \mathcal{R}^k, \quad \Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset:$$

Ճշմարտանմանության հարաբերություն (ՃՀ) վիճականի (տե՛ս § 9.1) կոչվում է հետևյալ պատահական մեծությունը՝

$$\Lambda = \Lambda(\mathbf{X}) = \frac{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1} f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X})}{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X})} \left(\frac{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1} p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X})}{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X})} \right):$$

Դիտարկենք Λ -ին համարժեք

$$\Lambda' = \Lambda'(\mathbf{X}, \Theta_0) = \frac{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X})}{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X})} \left(\frac{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X})}{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X})} \right) \quad (\Lambda' = \max(1, \Lambda))$$

վիճականին և առավել հաճախ կիրառվող հետևյալ վիճականին՝

$$\bar{\Lambda} = \bar{\Lambda}(\mathbf{X}, \theta_0) = 1/\Lambda'(\mathbf{X}, \theta_0) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} f_{\theta}(\mathbf{X})}{\sup_{\theta \in \Theta} f_{\theta}(\mathbf{X})} \left(\frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} p_{\theta}(\mathbf{X})}{\sup_{\theta \in \Theta} p_{\theta}(\mathbf{X})} \right): \quad (9.40)$$

(9.39) վարկածների ստուգման խնդրին համապատասխանող

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \mathcal{X}_{1\alpha}(\theta_0) = \{\mathbf{x} : \bar{\lambda}(\mathbf{x}, \theta_0) \leq c_{\alpha}\} \left(\bar{\Lambda}(\mathbf{X}(\omega_0), \theta_0) = \bar{\lambda}(\mathbf{x}, \theta_0) \right) \quad (9.41)$$

կրիտիկական տիրույթով տրվող հայտանիշը կոչվում է **ճշմարտանմանության հարաբերության (ՃՀ) հայտանիշ**, որտեղ $c = c_{\alpha}$ կրիտիկական եզրն ընտրվում է այնպես, որ հայտանիշն ունենա տվյալ α ($0 < \alpha < 1$) չափ՝

$$\mathbb{P}_{\theta}(\mathbf{X} \in \mathcal{X}_{1\alpha}) = \int_{\mathcal{X}_{1\alpha}} f_{\theta}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = P_{\theta}(\bar{\Lambda} \leq c_{\alpha}) = \alpha, \quad \theta \in \Theta_0:$$

Ի տարբերություն **Նեյման - Պիրսոնի** հայտանիշի (տե՛ս թեորեմ 9.1-ը)՝ **ՃՀ** հայտանիշը, սովորաբար, **օպտիմալ** չէ, սակայն որոշ պայմանների դեպքում այն **ասիմպտոտիկ օպտիմալ** է:

Դիտողություն 9.5: 1. $\mathcal{X}_{1\alpha}$ կրիտիկական տիրույթի (9.41) տեսքը բացատրվում է հետևյալ կերպ՝ եթե $\mathbf{X}(\omega_0) = \mathbf{x}$ դեպքում $\mathbb{H}_0$ վարկածը **հերքվում** է, ապա (9.40) արտահայտության հայտարարը կընդունի համարիչից «մեծ» արժեք, հետևաբար՝ $\bar{\Lambda}(\mathbf{X}, \theta_0)$ վիճականին կընդունի համապատասխանաբար «փոքր» $\bar{\lambda}(\mathbf{x}) = \bar{\lambda}(\mathbf{x}, \theta_0)$ արժեք:

2. **ՃՀ** հայտանիշի կիրառման դժվարությունը բացատրվում է այն հանգամանքով, որ *փոքր n*-երի դեպքում, սովորաբար, անհնարին է լինում գտնել $\bar{\Lambda}$ վիճականու բաշխման **ճշգրիտ** տեսքը:

Փոքր նմուշների դեպք

Օրինակ 9.18: Դիցուք դիտվում է $\mathbf{X} \sim N(\theta_1, \theta_2^2)$ նմուշը: α նշանակալիության մակարդակով **ՃՀ** հայտանիշի օգնությամբ ստուգենք

$$\mathbb{H}_0 : \theta_1 = \theta_{10} \quad \text{վարկածն ընդդեմ} \quad \mathbb{H}_1 : \theta_1 \neq \theta_{10}$$

երկընտրանքայինի (θ_2 -ը «**խանգարող**» պարամետր է):

Խնդրին համապատասխանող պարամետրական բազմություններն են՝

$$\Theta = \{\theta = (\theta_1, \theta_2) : -\infty < \theta_1 < \infty, \theta_2 > 0\},$$

**§ 9.6. Ճշմարտանմանության հարաբերության հայտանիշը և
դրա որոշ կիրառությունները**

$\Theta_0 = \{\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2): \theta_1 = \theta_{10}, \theta_2 > 0\}$, $\Theta_1 = \{\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2): \theta_1 \neq \theta_{10}, \theta_2 > 0\}$:

$\mathbf{X}$ նմուշին համապատասխանող **Ճշմարտանմանության ֆունկցիան** է՝

$$f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X}) = (2\pi)^{-n/2} (\theta_2^2)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\theta_2^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \theta_1)^2 \right\}:$$

Հայտնի է (տե՛ս [15]-ի օրինակ 5.51-ը), որ

$$\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X}) = f_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(\mathbf{X}),$$

որտեղ $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\bar{\mathbf{X}}, S^2)$ -ն $\boldsymbol{\theta}$ պարամետրի **ՃՄ գնահատականն** է, և $f_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(\mathbf{X}) = (2\pi e S^2)^{-n/2}$:

Մյուս կողմից պարզ է, որ

$$\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X}) = (2\pi e S_1^2)^{-n/2}, \text{ որտեղ } S_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \theta_{10})^2:$$

Այժմ, օգտվելով $S_1^2 = S^2 + (\bar{\mathbf{X}} - \theta_{10})^2$ ներկայացումից, կստանանք՝

$$\bar{\Lambda} = \left(\frac{S_1^2}{S^2} \right)^{-n/2} = \left(1 + \frac{(\bar{\mathbf{X}} - \theta_{10})^2}{S^2} \right)^{-n/2} = \left(1 + \frac{T_{n-1}^2}{n-1} \right)^{-n/2},$$

որտեղ, ըստ **Մայրուղենտի** թեորեմի (տե՛ս [15])՝

$$T_{n-1} = \frac{\bar{\mathbf{X}} - \theta_{10}}{S} \cdot \sqrt{n-1} \sim \mathbb{T}(n-1):$$

Այստեղից՝

$$(\bar{\Lambda} \leq c) = (t_{n-1}^2 \geq c_1^2) = (|t_{n-1}| \geq c_1), \quad \bar{\Lambda} = \bar{\Lambda}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0), \quad t_{n-1} = T_{n-1}(\omega_0),$$

այնպես որ α նշանակալիության մակարդակով **ՃՀ հայտանիշի** կրիտիկական եզրն է $c_1 = t_{\alpha/2}(n-1)$: Այսպիսով, **ՃՀ հայտանիշի կրիտիկական տիրույթը** համընկնում է օրինակ 9.11-ում ստացված՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha}(\theta_{10}) = \left\{ \mathbf{x} : |\bar{\mathbf{x}} - \theta_{10}| \frac{\sqrt{n-1}}{S} \geq t_{\alpha/2}(n-1) \right\}$$

ՀԱՀ հայտանիշի կրիտիկական տիրույթի հետ:

Օրինակ 9.19: $\mathbf{X} \sim \mathbb{N}(\theta_1, \theta_2^2)$ նմուշի միջոցով, օգտվելով **ՃՀ հայտանիշից**, α նշանակալիության մակարդակով ստուգենք $\mathbb{H}_0: \theta_2 = \theta_{20}$ վար-

կաձն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \theta_2 \neq \theta_{20}$ երկընտրանքայինի (θ_1 -ը «խանգարող» պարամետր է):

Այստեղ՝ $\Theta = \{\theta = (\theta_1, \theta_2) : \theta_1 \in \mathcal{R}, \theta_2 > 0\}$, $\Theta_0 = \{\theta_0 = (\theta_1, \theta_{20}) : \theta_1 \in \mathcal{R}\}$:

Հեշտ է տեսնել (համեմատել օրինակ 9.18-ի հետ), որ

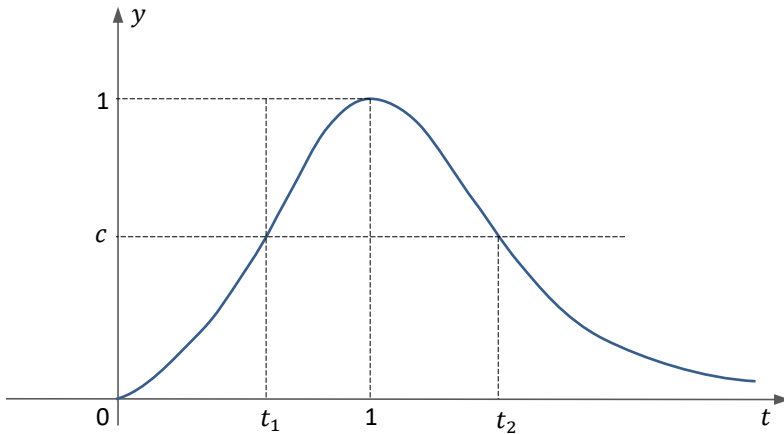
$$\sup_{\theta \in \Theta} f_{\theta}(\mathbf{X}) = f_{\hat{\theta}}(\mathbf{X}) = (2\pi e S^2)^{-n/2},$$

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} f_{\theta}(\mathbf{X}) = (2\pi \theta_{20}^2)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{n}{2\theta_{20}^2} S^2 \right\}:$$

Այստեղից կատանանք՝

$$\bar{\Lambda} = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} f_{\theta}(\mathbf{X})}{\sup_{\theta \in \Theta} f_{\theta}(\mathbf{X})} = (T e^{-T+1})^{n/2}, \quad T = \frac{S^2}{\theta_{20}^2}:$$

$y = t e^{-t+1}$ ֆունկցիայի գրաֆիկի տեսքից՝



հեշտ է նկատել, որ $(\bar{\lambda} \leq c)$, $0 < c < 1$ բազմությունը համարժեք է $(t \leq t_1 \cup t \geq t_2)$ բազմությանը, այնպես որ α չափ ունեցող **ՃՀ** հայտանիշի **կրիտիկական տիրույթը** կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$X_{1\alpha}(\theta_0) = \left\{ \mathbf{x} : \frac{s^2}{\theta_{20}^2} \leq t_1 \cup \frac{s^2}{\theta_{20}^2} \geq t_2 \right\}, \quad s = S(\omega_0), \quad 0 < t_1 < t_2 :$$

Ըստ **Ֆիշերի** թեորեմի (տե՛ս [15])՝ $\chi_{n-1}^2 = \frac{ns^2}{\theta_2^2} \sim \mathbb{H}^2(n-1)$ և հայտա-
նիշի **հզորության ֆունկցիան** կլինի

$$\begin{aligned} W_\varphi(\theta) &= P_\theta \left(\frac{S^2}{\theta_{20}^2} \leq t_1 \cup \frac{S^2}{\theta_{20}^2} \geq t_2 \right) = \\ &= P_\theta \left(\frac{S^2}{\theta_2^2} \leq \frac{\theta_{20}^2}{\theta_2^2} t_1 \right) + 1 - P_\theta \left(\frac{S^2}{\theta_2^2} \leq \frac{\theta_{20}^2}{\theta_2^2} t_2 \right) = \\ &= H_{n-1} \left(\frac{n\theta_{20}^2}{\theta_2^2} t_1 \right) + 1 - H_{n-1} \left(\frac{n\theta_{20}^2}{\theta_2^2} t_2 \right), \quad \text{որտեղ } H_{n-1}(t) = P(\chi_{n-1}^2 < t): \end{aligned}$$

Եթե $\mathbb{H}_0$ վարկածը ճիշտ է, ապա, վերցնելով $t_1 = \frac{1}{n} \chi_{1-\alpha_1}^2(n-1)$,
 $t_2 = \frac{1}{n} \chi_{\alpha_2}^2(n-1)$, $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, կստանանք՝ $W_\varphi(\theta_0) = \alpha$:

Այսպիսով, **ՃՀ հայտանիշի կրիտիկական տիրույթն** ընդունում է
հետևյալ տեսքը՝

$$X_{1\alpha}(\theta_0) = \left\{ \mathbf{x} : \frac{ns^2}{\theta_{20}^2} \leq \chi_{1-\alpha_1}^2(n-1) \cup \frac{ns^2}{\theta_{20}^2} \geq \chi_{\alpha_2}^2(n-1) \right\}:$$

Որպեսզի հայտանիշը լինի **անշեղ**, պետք է պահանջել, որ $W'_\varphi(\theta_0) = 0$,
այսինքն՝

$$\begin{aligned} W'_\varphi(\theta_0) &= \chi_{1-\alpha_1}^2(n-1)h_{n-1} \left(\chi_{1-\alpha_1}^2(n-1) \right) - \\ &- \chi_{\alpha_2}^2(n-1)h_{n-1} \left(\chi_{\alpha_2}^2(n-1) \right) = 0: \end{aligned}$$

Օրինակ 9.20: Դիցուք $\mathbf{X} \sim \mathbb{E}(\theta)$ նմուշ է վերցված *ցուցային* բաշխում-
ների դասից: α նշանակալիության մակարդակով **ՃՀ հայտանիշի** օգնու-
թյամբ ստուգենք $\mathbb{H}_0^- : \theta \leq \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1^+ : \theta > \theta_0$ երկընտրան-
քայինի:

Խնդրին համապատասխանող պարամետրական բազմություններն
են՝

$$\Theta = \{\theta: \theta > 0\}, \Theta_0 = \{\theta: 0 < \theta \leq \theta_0\}, \Theta_1 = \{\theta: \theta > \theta_0\}:$$

Ակնհայտ է, որ

$$f_{\hat{\theta}}(\mathbf{X}) = \sup_{\theta \in \Theta} f_{\theta}(\mathbf{X}) = \sup_{\theta \in \Theta} \left[\theta^n \exp \left\{ -\theta \sum_{i=1}^n X_i \right\} \right] = (\bar{\mathbf{X}})^{-n} e^{-n},$$

որտեղ $\hat{\theta} = (\bar{\mathbf{X}})^{-1}$ -ը θ պարամետրի **ՃՄ գնահատականն** է:

Մյուս կողմից՝ ունենք՝

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} f_{\theta}(\mathbf{X}) = \sup_{0 < \theta \leq \theta_0} [\theta^n \exp\{-\theta n \bar{\mathbf{X}}\}] = \begin{cases} (\bar{\mathbf{X}})^{-n} e^{-n}, & \text{երբ } (\bar{\mathbf{X}})^{-1} \leq \theta_0 \\ \theta_0^n e^{-\theta_0 n \bar{\mathbf{X}}}, & \text{երբ } (\bar{\mathbf{X}})^{-1} > \theta_0 \end{cases}:$$

Այստեղից $\bar{\Lambda}$ վիճականու համար կստանանք հետևյալ ներկայացումը՝

$$\bar{\Lambda} = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} f_{\theta}(\mathbf{X})}{\sup_{\theta \in \Theta} f_{\theta}(\mathbf{X})} = \begin{cases} 1, & \text{երբ } (\bar{\mathbf{X}})^{-1} \leq \theta_0 \\ (\theta_0 e \bar{\mathbf{X}})^n e^{-\theta_0 n \bar{\mathbf{X}}}, & \text{երբ } (\bar{\mathbf{X}})^{-1} > \theta_0 \end{cases}:$$

$\mathbb{H}_0^-$ վարկածը **կհերքվի**, երբ $\bar{\lambda} \leq c$, որտեղ c -ն ($0 < c < 1$) կրիտիկական եզրն է: Այսինքն՝ այն կհերքվի, երբ

$$(\bar{\mathbf{x}})^{-1} > \theta_0 \text{ և } (\theta_0 \bar{\mathbf{x}})^n e^{-\theta_0 n \bar{\mathbf{x}}} \leq c:$$

Նշանակենք՝ $y = \theta_0 \bar{\mathbf{x}}$, և, նկատենք, որ $g(y) = y^n e^{-n(y-1)}$ ֆունկցիան ընդունում է իր **մեծագույն** արժեքը $y = 1$ դեպքում: Այսպիսով, $y < 1$ և $y^n e^{-n(y-1)} \leq c$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $y \leq k$ ($0 < k < 1$): Այնպես որ $\mathcal{X}_{1\alpha} = \{\mathbf{x} : \theta_0 \bar{\mathbf{x}} \leq k\}$, որտեղ α նշանակալիության մակարդակի համար k թիվը գտնվում է

$$\alpha = P_{\theta_0}(\theta_0 \bar{\mathbf{X}} \leq k) = P_{\theta_0} \left(\sum_{i=1}^n X_i \leq \frac{nk}{\theta_0} \right) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{nk} x^{n-1} e^{-x} dx$$

պայմանից, որտեղ $\mathbb{H}_0^-$ վարկածը բավարարվելու դեպքում $\sum_{i=1}^n X_i$ վիճականին ունի $\Gamma(\theta_0, n)$ **էռլանգի** բաշխում (nk արժեքը գտնվում է աղյուսակ Ա 10-ից):

Նկատենք, որ

$$P_{\theta}(\theta_0 \bar{\mathbf{X}} \leq k) \leq P_{\theta_0}(\theta_0 \bar{\mathbf{X}} \leq k) = \alpha, \quad \theta \leq \theta_0:$$

Օրինակ 9.21: Միագործոն ցրվածքային վերլուծություն (*One – way ANOVA*):

$$\text{Դիցուք } \mathbf{X}_j = (X_{j1}, \dots, X_{jn_j}) \sim \mathcal{N}(\theta_{j1}, \theta_2^2), \quad j = 1, \dots, k, \quad \sum_{j=1}^k n_j = n$$

նորմալ բաշխումների համախմբություններից վերցված **միմյանցից անկախ** նմուշներ են: Կառուցենք α նշանակալիության մակարդակով

$$\mathbb{H}_0 : \theta_{11} = \dots = \theta_{k1} := \theta_1^0 \text{ վարկածն ընդդեմ}$$

$$\mathbb{H}_1 : \text{ **նչ բոլոր** } \theta_{j1}\text{-երի միմյանց հավասար լինելու, } j = 1, \dots, k$$

երկրնտրանքայինի ստուգող **համասեռության** վերաբերյալ **ՃՀ հայտանիշը**:

Այդ վարկածները ստուգման խնդրին համապատասխանող պարամետրական բազմություններն են՝

$$\Theta = \mathcal{R}^k \times (0, +\infty) \subset \mathcal{R}^{k+1}, \quad \Theta_0 = \mathcal{R} \times (0, +\infty) \subset \mathcal{R}^2:$$

Սահմանենք հետևյալ **նմուշային ցրվածքները**՝
խմբային՝

$$S_j^2 = \frac{1}{n_j} \sum_{m=1}^{n_j} (X_{jm} - \bar{\mathbf{X}}_j)^2, \quad \bar{\mathbf{X}}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{m=1}^{n_j} X_{jm}, \quad j = 1, \dots, k,$$

ներխմբային՝

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k n_j S_j^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^{n_j} (X_{jm} - \bar{\mathbf{X}}_j)^2,$$

$$S_0^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^{n_j} (X_{jm} - \bar{\mathbf{X}}_j)^2,$$

միջխմբային՝

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k n_j (\bar{\mathbf{X}}_j - \bar{\mathbf{X}})^2,$$

$$\hat{S}_0^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^k n_j (\bar{X}_j - \bar{X})^2, \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^{n_j} X_{jm},$$

ընդհանուր՝

$$\tilde{S}^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^{n_j} (X_{jm} - \bar{X})^2:$$

X_j նմուշի ճշմարտանմանության ֆունկցիան կլինի՝

$$f_{\theta}(X_j) = \prod_{m=1}^{n_j} f_{\theta}(X_{jm}) = (2\pi)^{-n_j/2} (\theta_2^2)^{-n_j/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\theta_2^2} \sum_{m=1}^{n_j} (X_{jm} - \theta_{j1})^2 \right\},$$

իսկ ընդհանուր $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$ նմուշի ճշմարտանմանության ֆունկցիան՝

$$f_{\theta}(\mathbf{X}) = \prod_{j=1}^k f_{\theta}(X_j) = (2\pi)^{-n/2} (\theta_2^2)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\theta_2^2} \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^{n_j} (X_{jm} - \theta_{j1})^2 \right\}:$$

Համաձայն խնդիր 5.65-ի (տե՛ս [15])՝ $\theta = (\theta_{11}, \dots, \theta_{k1}, \theta_2)$ պարամետրի ճՄ գնահատականը $\hat{\theta} = (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k, S)$ վիճականին է, այնպես որ

$$\begin{aligned} f_{\hat{\theta}}(\mathbf{X}) &= \sup_{\theta \in \Theta} f_{\theta}(\mathbf{X}) = (2\pi)^{-n/2} (S^2)^{-n/2} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{n}{2S^2} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k n_j \frac{1}{n_j} \sum_{m=1}^{n_j} (X_{jm} - \bar{X}_j)^2 \right\} = (2\pi e S^2)^{-n/2}: \end{aligned}$$

$\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում տվյալները կարելի է դիտարկել որպես n ծավալի $\mathbf{X}$ նմուշ $N(\theta_1^0, \theta_2^0)$ համախմբությունից, հետևաբար՝

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} f_{\theta}(\mathbf{X}) = (2\pi e \tilde{S}^2)^{-n/2},$$

և ճՀ վիճականին կլինի հավասար

$$\bar{\Lambda} = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} f_{\theta}(\mathbf{X})}{\sup_{\theta \in \Theta} f_{\theta}(\mathbf{X})} = \left(\frac{\tilde{S}^2}{S^2} \right)^{-n/2}: \quad (9.42)$$

Մյուս կողմից՝ ներկայացնելով

$$\begin{aligned} n\tilde{S}^2 &= \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^{n_j} (X_{jm} - \bar{\mathbf{X}})^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^{n_j} (X_{jm} - \bar{\mathbf{X}}_j)^2 + \sum_{j=1}^k n_j (\bar{\mathbf{X}}_j - \bar{\mathbf{X}})^2 = \\ &= nS^2 + (k-1)\hat{S}_0^2, \end{aligned}$$

կստանանք՝

$$\bar{\Lambda} = \left(\frac{\tilde{S}^2}{S^2} \right)^{-n/2} = \left(1 + \frac{k-1}{n-k} \frac{\hat{S}_0^2}{S_0^2} \right)^{-n/2} : \quad (9.43)$$

ՃՀ հայտանիշը **հերքում** է $\mathbb{H}_0$ վարկածը, եթե $\bar{\lambda} \leq c$ ($\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(\mathbf{x}, \Theta_0) = \bar{\Lambda}(\mathbf{X}(\omega_0), \Theta_0)$), այսինքն՝ եթե

$$F_n = \left(\frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^k n_j (\bar{\mathbf{X}}_j - \bar{\mathbf{X}})^2 \right) / \left(\frac{1}{n-k} \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^{n_j} (X_{jm} - \bar{\mathbf{X}}_j)^2 \right) = \frac{\hat{S}_0^2}{S_0^2} \quad (9.44)$$

վիճականու f_n արժեքը **որոշակի** c հաստատունի դեպքում բավարարում է $f_n \geq c$ պայմանը, ապա c թիվն ընտրվում է այնպես, որ $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում $P_0(F_n \geq c_1) = \alpha$: F_n վիճականին կոչվում է **ցրվածքների հարաբերություն** կամ **F – վիճականի**: Նկատենք, որ **F – վիճականու** համարիչն ու հայտարարն **անկախ** պատահական մեծություններ են (տե՛ս [15]-ի թեորեմ 7.38-ը): Բացի այդ (տե՛ս **Боровков** ([2] Глава 1, § 4), $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում՝

$$\frac{1}{\theta_2^2} \sum_{j=1}^k n_j (\bar{\mathbf{X}}_j - \bar{\mathbf{X}})^2 \sim \mathbb{H}^2(k-1):$$

Այնուհետև ունենք՝

$$\frac{1}{\theta_2^2} \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^{n_j} (X_{jm} - \bar{\mathbf{X}}_j)^2 \sim \mathbb{H}^2(n-k),$$

քանի որ, ըստ **Ֆիշերի** թեորեմի (տե՛ս [15]-ի թեորեմ 7.38-ը),

$$\chi_{n_j-1}^2 = \frac{1}{\theta_2^2} \sum_{m=1}^{n_j} (X_{jm} - \bar{X}_j)^2 \sim \mathbb{H}^2(n_j - 1),$$

որտեղից՝

$$\sum_{j=1}^k \chi_{n_j-1}^2 \sim \mathbb{H}^2\left(\sum_{j=1}^k (n_j - 1)\right) = \mathbb{H}^2(n - k):$$

Այսպիսով, $\mathbb{H}_0$ վարկածի դեպքում $\mathbf{F}$ – **վիճականին** ունի $(k - 1)$ և $(n - k)$ ազատության աստիճաններով **Ֆիշեր – Մենդելկորի $\mathbf{F}$ -բաշխում**՝ $F_n \sim \mathcal{S}(k - 1, n - k)$: Հետևաբար, վերը նշված c_1 հաստատունը կլինի հավասար $\mathbf{F}$ - **բաշխման** α մակարդակով կրիտիկական եզրին՝

$$c_1 = S_\alpha(k - 1, n - k),$$

այսինքն՝ կրիտիկական տիրույթը

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{\mathbf{x} : f_n \geq S_\alpha(k - 1, n - k)\}$$

բազմությունն է, $f_n = F_n(\omega_0)$:

Դիտողություն 9.6: Միագործոն ցրվածքային վերլուծությունը վերաբերում է այն դեպքերին, երբ կատարվում են **տարբեր նմուշներին** համապատասխանող **որոշակի գործոնի** դիտումներ: Օրինակ, կատարվում են հետազոտություններ՝ որոշելու համար մարդու արյան մեջ խոլեստերինի պարունակության մակարդակի կախվածությունը նրա աշխատանքի բնույթից (**գործոն**):

Դիտարկենք նախորդ օրինակի մասնավոր դեպքը, երբ $k = 2$ -ի:

Օրինակ 9.22: Դիցուք $\mathbf{X}_1 \sim \mathcal{N}(\theta_{11}, \theta_2^2)$ և $\mathbf{X}_2 \sim \mathcal{N}(\theta_{21}, \theta_2^2)$ **միմյանցիկ անկախ**, համապատասխանաբար n_1 և n_2 ծավալի նմուշներ են, և ստուգվում է $\mathbb{H}_0 : \theta_{11} = \theta_{21} := \theta_1^0$ **համասեռության** վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \theta_{11} \neq \theta_{21}$ երկընտրանքայինի:

Համաձայն (9.43)-ի՝ **ՀՀ վիճականին** ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\bar{\Lambda} = \left(1 + \frac{n_1(\bar{X}_1 - \bar{X})^2 + n_2(\bar{X}_2 - \bar{X})^2}{\sum (X_{1j} - \bar{X}_1)^2 + \sum (X_{2j} - \bar{X}_2)^2} \right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}, \quad \bar{X} = \frac{n_1\bar{X}_1 + n_2\bar{X}_2}{n_1 + n_2}: \quad (9.45)$$

Ձևափոխենք $\bar{\Lambda}$ արտահայտության կոտորակի համարիչը՝

$$\begin{aligned} & n_1(\bar{X}_1 - \bar{X})^2 + n_2(\bar{X}_2 - \bar{X})^2 = \\ &= \frac{n_1}{(n_1 + n_2)^2} (n_2\bar{X}_1 - n_2\bar{X}_2)^2 + \frac{n_2}{(n_1 + n_2)^2} (n_1\bar{X}_2 - n_1\bar{X}_1)^2 = \\ &= \frac{1}{(n_1 + n_2)^2} [n_1n_2^2(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^2 + n_2n_1^2(\bar{X}_2 - \bar{X}_1)^2] = \frac{n_1n_2}{n_1 + n_2} (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^2: \end{aligned}$$

Նշանակենք՝

$$T = \frac{\sqrt{\frac{n_1n_2}{n_1 + n_2}} (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{\frac{1}{n_1 + n_2 - 2} [\sum (X_{1j} - \bar{X}_1)^2 + \sum (X_{2j} - \bar{X}_2)^2]}}: \quad (9.46)$$

Քանի որ $\bar{X}_1 \sim N(\theta_{11}, \theta_2^2/n_1)$, $\bar{X}_2 \sim N(\theta_{21}, \theta_2^2/n_2)$, ապա $\mathbb{H}_0$ վարկածի դեպքում ունենք՝

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(0, \theta_2^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\right),$$

այնպես որ՝ $\xi_0 = \frac{1}{\theta_2} \sqrt{\frac{n_1n_2}{n_1 + n_2}} (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \sim N(0, 1)$:

Մյուս կողմից, ըստ **Ֆիշերի** թեորեմի՝

$$\begin{aligned} \chi_{n_1-1}^2 &= \frac{1}{\theta_2^2} \sum_{j=1}^{n_1} (X_{1j} - \bar{X}_1)^2 \sim \mathbb{H}^2(n_1 - 1), \\ \chi_{n_2-1}^2 &= \frac{1}{\theta_2^2} \sum_{j=1}^{n_2} (X_{2j} - \bar{X}_2)^2 \sim \mathbb{H}^2(n_2 - 1): \end{aligned}$$

Հետևաբար, (9.46)-ի հայտարարում կստանանք՝

$$\theta_2 \sqrt{\frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \chi_{n_1+n_2-2}^2}, \quad \chi_{n_1+n_2-2}^2 = \chi_{n_1-1}^2 + \chi_{n_2-1}^2 :$$

Այսպիսով, (9.46)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$T = \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \chi_{n_1+n_2-2}^2}},$$

և քանի որ ξ_0 -ն **անկախ** է $\chi_{n_1+n_2-2}^2$ պատահական մեծությունից ([15, թեորեմ 7.38]), ապա $T \sim \mathbb{T}(n_1 + n_2 - 2)$:

Այժմ (9.45)-ը ներկայացնենք հետևյալ ձևով՝

$$\bar{\Lambda} = \left(1 + \frac{T^2}{n_1 + n_2 - 2}\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} :$$

Հետևաբար՝ α նշանակալիության մակարդակով **ՃՀ հայտանիշի** կրիտիկական տիրույթը կլինի՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{\mathbf{x} : \bar{\lambda} \leq c\} = \{\mathbf{x} : |t| \geq t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)\}, \quad \bar{\lambda} = \bar{\Lambda}(\omega_0), \quad t = T(\omega_0),$$

որը համընկնում է օրինակ 9.13-ում ստացված տիրույթի հետ:

Օրինակ 9.23: Դիցուք $\mathbf{X}_1 \sim \mathbb{N}(\theta_{11}, \theta_{12}^2)$ և $\mathbf{X}_2 \sim \mathbb{N}(\theta_{21}, \theta_{22}^2)$ **միմյանցից անկախ**, համապատասխանաբար n_1 և n_2 ծավալի նմուշներ են, և ստուգվում է $\mathbb{H}_0 : \theta_{12}^2 = \theta_{22}^2 := \theta_{02}^2$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \theta_{12}^2 \neq \theta_{22}^2$ երկընտրանքայինի:

Պարամետրական բազմություններն են՝

$$\Theta = \mathcal{R}^2 \times \mathcal{R}_+^2 \subset \mathcal{R}^4, \quad \Theta_0 = \mathcal{R} \times (0, +\infty) \subset \mathcal{R}^3:$$

$(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$ միացյալ նմուշի **ՃՀմարտանմանության ֆունկցիան** կլինի՝

$$f_{\Theta}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = (2\pi)^{-n/2} (\theta_{12}^2)^{-n_1/2} (\theta_{22}^2)^{-n_2/2} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\theta_{12}^2} \sum_{i=1}^{n_1} (X_{1i} - \theta_{11})^2 - \frac{1}{2\theta_{22}^2} \sum_{i=1}^{n_2} (X_{2i} - \theta_{21})^2 \right\} \quad (n = n_1 + n_2):$$

**§ 9.6. Ճշմարտանմանության հարաբերության հայտանիշը և
դրա որոշ կիրառությունները**

Կարելի է ցույց տալ, որ $\theta = (\theta_{11}, \theta_{21}, \theta_{12}^2, \theta_{22}^2)$ պարամետրի **ՃՄ գնահատականը** $\hat{\theta} = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, S_1^2, S_2^2)$ վիճականին է: Այնպես որ՝

$$f_{\hat{\theta}}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \sup_{\theta \in \Theta} f_{\theta}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = (2\pi e)^{-n/2} (S_1^2)^{-n_1/2} (S_2^2)^{-n_2/2},$$

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} f_{\theta}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = (2\pi e \tilde{S}^2)^{-n/2}, \quad \tilde{S}^2 = \frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n} :$$

Այստեղից՝

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda} &= \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} f_{\theta}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)}{\sup_{\theta \in \Theta} f_{\theta}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)} = \frac{(S_1^2)^{n_1/2} (S_2^2)^{n_2/2}}{(\tilde{S}^2)^{n/2}} = \\ &= \left(\frac{n S_1^2}{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2} \right)^{n_1/2} \left(\frac{n S_2^2}{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2} \right)^{n_2/2} = \\ &= \frac{(n)^{n/2}}{(n_1)^{n_1/2} (n_2)^{n_2/2}} \cdot \frac{(S_1^2)^{n_1/2}}{\left(S_1^2 + \frac{n_2}{n_1} \cdot S_2^2 \right)^{n_1/2}} \cdot \frac{(S_2^2)^{n_2/2}}{\left(\frac{n_1}{n_2} S_1^2 + S_2^2 \right)^{n_2/2}} = \\ &= \frac{(n)^{n/2}}{(n_1)^{n_1/2} (n_2)^{n_2/2}} \left(\frac{n_1 - 1}{n_2 - 1} \right)^{n_1/2} (F)^{n_1/2} \left(1 + \frac{n_1 - 1}{n_2 - 1} F \right)^{-n/2}, \quad (9.47) \end{aligned}$$

որտեղ

$$F = \frac{n_1(n_2 - 1)S_1^2}{n_2(n_1 - 1)S_2^2} \sim \mathbb{S}(n_1 - 1, n_2 - 1):$$

(9.47) ներկայացումից դժվար չէ տեսնել, որ $\bar{\Lambda} \leq c$ անհավասարությանը համարժեք է $(F \leq c_1) \cup (F \geq c_2)$ պայմանը ($c_1 < c_2$), և քանի որ **F** – **վիճականին** ունի $(n_1 - 1)$ և $(n_2 - 1)$ ազատության աստիճաններով **Ֆիշեր – Մենդելզորի (F –) քաշխում**, ապա α չափ ունեցող կրիտիկական տիրույթը կլինի՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{ \mathbf{x} : f \leq S_{1-\alpha_1}(n_1 - 1, n_2 - 1) \cup f \geq S_{\alpha_2}(n_1 - 1, n_2 - 1) \}, \alpha = \alpha_1 + \alpha_2,$$

որտեղ f -ը **F** – **վիճականու** արժեքն է, երբ $\mathbf{X}_1(\omega_0) = \mathbf{x}_1$, $\mathbf{X}_2(\omega_0) = \mathbf{x}_2$:

Ասիմպտոտիկ դեպք

Ինչպես վերը նշվեց, հաճախ հնարավոր չի լինում գտնել $\bar{\Lambda}$ վիճականու **ճշգրիտ բաշխումը**, սակայն որոշ պայմանների դեպքում գտնվում է $T_n = -2 \ln \bar{\Lambda}$ վիճականու **ասիմպտոտիկ բաշխումը** (տե՛ս [4]):

Թեորեմ 9.6: Դիցուք $\mathbf{X} \sim P_{\theta} \in \mathcal{P}$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_k) \in \Theta \subset \mathcal{R}^k$: Ստուգվում է

$$\mathbb{H}_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \text{ պարզ վարկածն ընդդեմ } \mathbb{H}_1 : \boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0 \quad (9.48)$$

երկկողմանի բարդ երկընտրանքայինի, որտեղ $\boldsymbol{\theta}_0 = (\theta_{01}, \dots, \theta_{0k}) \in \Theta$ տիրույթի որոշակի ներքին կետ է: Այդ դեպքում, եթե բաշխումների $\mathcal{P}$ դասը բավարարում է **(RR)** – պայմանները (տե՛ս [15]-ի սահմանում 6.59-ը), և ճիշտ է $\mathbb{H}_0$ վարկածը, ապա

$$T_n = -2 \ln \bar{\Lambda}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} \mathbb{H}^2(k), \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\text{որտեղ } \bar{\Lambda}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}_0) = \frac{f_{\boldsymbol{\theta}_0}(\mathbf{X})}{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X})} \left(\frac{p_{\boldsymbol{\theta}_0}(\mathbf{X})}{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X})} \right):$$

Թեորեմից բխում է, որ **մեծ** n -երի դեպքում α նշանակալիության մակարդակով **ՃՀ հայտանիշը** որոշվում է

$$\mathcal{X}_{1\alpha}(\boldsymbol{\theta}_0) = \{\mathbf{x} : -2 \ln \bar{\lambda}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) \geq \chi_{\alpha}^2(k)\}$$

ասիմպտոտիկ կրիտիկական տիրույթի միջոցով, որտեղ $\bar{\lambda}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0)$ -ն $\bar{\Lambda}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}_0)$ վիճականու արժեքն է, երբ $\mathbf{X}(\omega_0) = \mathbf{x}$:

Ապացուցում: **(RR)** – պայմանները բավարարվելու դեպքում, երբ տեղի ունի $\mathbb{H}_0$ վարկածը, թեորեմ 6.61-ից (տե՛ս [15]) հետևում է $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ **ՃՄ-ի գնահատականի ունակությունը**՝

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n \xrightarrow{P_{\boldsymbol{\theta}_0}} \boldsymbol{\theta}_0, \quad n \rightarrow \infty : \quad (9.49)$$

Վերլուծենք $L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X}) = \ln f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X})$ լոգարիթմական ճշմարտանմանության ֆունկցիան $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n = (\hat{\theta}_{n1}, \dots, \hat{\theta}_{nk})$ **ՃՄ գնահատականի** շրջակայքում **Թեյլորի** շարքի և դիտարկենք դրա արժեքը $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ կետում՝

$$L_{\theta_0}(\mathbf{X}) = L_{\hat{\theta}_n}(\mathbf{X}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 L_{\theta_n^*}(\mathbf{X})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} (\hat{\theta}_{ni} - \theta_{0i})(\hat{\theta}_{nj} - \theta_{0j}),$$

որտեղ $|\theta_n^* - \theta_0| < |\hat{\theta}_n - \theta_0|$: (9.50)

Այստեղից՝ $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում կստանանք՝

$$\begin{aligned} -2 \ln \bar{A}(\mathbf{X}, \theta_0) &= 2 [L_{\hat{\theta}_n}(\mathbf{X}) - L_{\theta_0}(\mathbf{X})] = \\ &= -\frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 L_{\theta_n^*}(\mathbf{X})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \sqrt{n} (\hat{\theta}_{ni} - \theta_{0i})(\hat{\theta}_{nj} - \theta_{0j}) \sqrt{n} : \end{aligned} \quad (9.51)$$

Կիրառելով **անընդհատության** թեորեմը [տե՛ս [15]-ի թեորեմ 2. 2.1-ը] և հաշվի առնելով $\frac{\partial^2 L_{\theta}(\mathbf{X})}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$ ֆունկցիայի անընդհատությունը, $\theta_n^* \xrightarrow{P_{\theta_0}} \theta_0$ պայմանից, երբ $n \rightarrow \infty$ (տե՛ս՝ (9.49) և (9.50)), կհետևեն

$$\frac{\partial^2 L_{\theta_n^*}(\mathbf{X})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \xrightarrow{P_{\theta_0}} \frac{\partial^2 L_{\theta_0}(\mathbf{X})}{\partial \theta_i \partial \theta_j}, \quad i, j = 1, \dots, k$$

զուգամիտությունները: Այստեղից, համաձայն **Խինչինի մեծ թվերի օրենքի** (տե՛ս [15]-ի թեորեմ 1.34-ը և դիտողություն 6.60-ը), կստանանք՝

$$\frac{1}{n} \frac{\partial^2 L_{\theta_0}(\mathbf{X})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \frac{\partial U_i(X_m, \theta_0)}{\partial \theta_j} \xrightarrow{P_{\theta_0}} E_{\theta_0} \left[\frac{\partial U_i(X_1, \theta_0)}{\partial \theta_j} \right] = -I_{ij}(\theta_0), \quad (9.52)$$

$$L_{\theta_0}(\mathbf{X}) = \sum_{m=1}^n \ln f_{\theta_0}(X_m), \quad U_i(X_m, \theta_0) = \frac{\partial}{\partial \theta_i} [\ln f_{\theta_0}(X_m)]:$$

Մյուս կողմից՝ **(RR)** - պայմաններից (տե՛ս [15]-ի թեորեմ 6.61-ը) բխում է

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} \boldsymbol{\eta}_0 \sim N_k(\mathbf{0}, [I(\theta_0)]^{-1}), \quad n \rightarrow \infty$$

զուգամիտությունը, որտեղ

$$I(\theta_0) = \|I_{ij}^n(\theta_0)\|_{i,j=1}^k = \left\| E_{\theta_0} \left[\frac{\partial L_{\theta_0}(\mathbf{X})}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial L_{\theta_0}(\mathbf{X})}{\partial \theta_j} \right] \right\|_{i,j=1}^k$$

Ֆիշերի տեղեկատվական (ինֆորմացիոն) մատրիցն է: Այսպիսով, (9.51)-ից, (9.52)-ից և **անընդհատության** թեորեմից (տե՛ս [15]-ի թեորեմ Հ. 2.2-ը) կստանանք՝

$$-2 \ln \bar{L}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} \boldsymbol{\eta}_0 \mathbb{I}(\boldsymbol{\theta}_0) \boldsymbol{\eta}_0^T, \quad n \rightarrow \infty,$$

որտեղից, ըստ թեորեմ Հ. 34-ի, $\boldsymbol{\eta}_0 \mathbb{I}(\boldsymbol{\theta}_0) \boldsymbol{\eta}_0^T \sim \mathbb{H}^2(k)$, և թեորեմն ապացուցվեց:

Դիտողություն 9.7: Թեորեմ 9.6-ի ապացույցից հետևում է, որ որպես (9.48) վարկածը ստուգող α նշանակալիության մակարդակով կրիտիկական տիրույթ կարելի է դիտարկել նաև

$$\mathcal{X}'_{1\alpha}(\boldsymbol{\theta}_0) = \{\mathbf{x} : T'_n = \boldsymbol{\eta}_n \mathbb{I}(\boldsymbol{\theta}_0) \boldsymbol{\eta}_n^T \geq \chi^2_{\alpha}(k)\}$$

կամ

$$\mathcal{X}''_{1\alpha}(\boldsymbol{\theta}_0) = \{\mathbf{x} : T''_n = \boldsymbol{\eta}_n \mathbb{I}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n) \boldsymbol{\eta}_n^T \geq \chi^2_{\alpha}(k)\}$$

բազմությունները, որտեղ $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$ -ը $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{R}$ պարամետրի **ՃՄ գնահատականն** է,

$$\boldsymbol{\eta}_n = \sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} \boldsymbol{\eta}_0 \sim \mathbb{N}_k(\mathbf{0}, [\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1}), \text{ երբ } n \rightarrow \infty:$$

Ցույց տանք, որ **ՃՀ հայտանիշն ունակ է և ասիմպտոտիկ անշեղ:** Նշանակենք $\varphi_0(\mathbf{x}) = \mathbb{1}_{\mathcal{X}_{1\alpha}(\boldsymbol{\theta}_0)}(\mathbf{x})$ -ով **ՃՀ հայտանիշի** կրիտիկական ֆունկցիան:

Թեորեմ 9.7: (RR) - պայմանները բավարարվելու դեպքում ՃՀ հայտանիշն ունակ է, այսինքն՝ բոլոր $\boldsymbol{\theta}$ -ների ($\boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0$) համար

$$W_{\varphi_0}(\boldsymbol{\theta}) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty:$$

Ա պ ա ց ու ց ու մ: Դիցուք $\mathbf{X} \sim P_{\boldsymbol{\theta}} \in \mathcal{P}$, որտեղ $\mathcal{P} = \{P_{\boldsymbol{\theta}} : \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathcal{R}\}$ (պարզության համար կդիտարկենք **սկայյաթ** $\boldsymbol{\theta}$ պարամետրի դեպքը):

Վերցնենք կամայական ֆիքսված $\boldsymbol{\theta}_1 \in \Theta$ ներքին կետ, որտեղ $\boldsymbol{\theta}_1 \neq \boldsymbol{\theta}_0$: Ներկայացնենք $\bar{L}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}_0)$ վիճականին

$$\bar{\Lambda}(\theta_0) = \bar{\Lambda}(\mathbf{X}, \theta_0) = \frac{f_{\theta_0}(\mathbf{X})}{f_{\hat{\theta}_n}(\mathbf{X})} = \frac{f_{\theta_1}(\mathbf{X})}{f_{\hat{\theta}_n}(\mathbf{X})} \cdot \frac{f_{\theta_0}(\mathbf{X})}{f_{\theta_1}(\mathbf{X})} = \bar{\Lambda}(\theta_1) \Lambda^{-1}$$

տեսքով, որտեղ

$$\Lambda = \frac{f_{\theta_1}(\mathbf{X})}{f_{\theta_0}(\mathbf{X})}, \quad \bar{\Lambda}(\theta_1) = \bar{\Lambda}(\mathbf{X}, \theta_1):$$

Այստեղից ունենք՝

$$-2 \ln \bar{\Lambda}(\theta_0) = -2 \ln \bar{\Lambda}(\theta_1) + n V_n, \quad (9.53)$$

որտեղ

$$V_n = \frac{2}{n} \ln \Lambda = \frac{2}{n} [L_{\theta_1}(\mathbf{X}) - L_{\theta_0}(\mathbf{X})] = 2 \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l(X_i, \theta_1) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l(X_i, \theta_0) \right]$$

$$(l(X_i, \theta_k) := \ln f_{\theta_k}(X_i), \quad k = 0, 1):$$

Դիտարկենք $H(\theta) = E_\theta[l(X_1, \theta)]$ ֆունկցիան: Համաձայն **մեծ թվերի օրենքի**՝ $\mathbb{H}_1: \theta = \theta_1$ վարկածը բավարարվելու դեպքում ճիշտ են

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l(X_i, \theta_1) \xrightarrow{P_{\theta_1}} H(\theta_1), \quad n \rightarrow \infty$$

զուգամիտությունները: Այնուհետև (տե՛ս **(RR)**-պայմանները) ունենք

$$\frac{d^j H(\theta)}{d\theta^j} = E_\theta \left[\frac{d^j}{d\theta^j} (l(X_1, \theta)) \right], \quad j = 1, 2,$$

որտեղ (տե՛ս [15, դիտողություն 6.36])

$$\frac{dH(\theta)}{d\theta} |_{\theta=\theta_1} = E_{\theta_1}[l'(X_1, \theta_1)] = 0, \quad \frac{d^2 H(\theta)}{d\theta^2} |_{\theta=\theta_1} = -\mathbb{I}(\theta_1) < 0,$$

այնպես որ $\theta = \theta_1$ կետում $H(\theta)$ ֆունկցիան ընդունում է իր **մեծագույն** արժեքը, և

$$V_n \xrightarrow{P_{\theta_1}} 2 [H(\theta_1) - H(\theta_0)] > 0, \quad n \rightarrow \infty:$$

Մյուս կողմից, ըստ թեորեմ 9.6 -ի, ունենք՝

$$-2 \ln \bar{\Lambda}(\theta_1) \xrightarrow{d} \mathbb{H}^2(1), \text{ երբ } n \rightarrow \infty:$$

Այսպիսով, (9.53)-ից հետևում է, որ $\mathbb{H}_1: \theta = \theta_1$ վարկածը բավարարվելու դեպքում $-2 \ln \bar{\Lambda}(\theta_0)$ վիճականին, ըստ P_{θ_1} բաշխման, **անսահման աճում** է, երբ $n \rightarrow \infty$: Այնպես որ՝

$$W_{\varphi_0}(\theta_1) = P_{\theta_1}(-2 \ln \bar{\Lambda}(\theta_0) \geq \chi_\alpha^2(1)) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty,$$

այսինքն՝ հայտանիշն **ունակ** է:

Դիտողություն 9.8: 9.6 և 9.7 թեորեմներից ստանում ենք՝

$$W_{\varphi_0}(\theta) = E_\theta[\varphi_0(\mathbf{X})] \rightarrow Z(\theta) = \begin{cases} \alpha, & \text{երբ } \theta = \theta_0 \\ 1, & \text{երբ } \theta \neq \theta_0 \end{cases}, \quad n \rightarrow \infty,$$

որտեղից, մասնավորապես, հետևում է **ՃՀ հայտանիշի ասիմպտոտիկ անշեղությունը**:

Այժմ դիցուք ստուգվում է $\mathbb{H}_0$ **բարդ վարկածը**՝

$$\mathbb{H}_0: \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \subset \Theta \quad (\Theta \subseteq \mathcal{R}^k, \dim \Theta = k), \quad (9.54)$$

$$\Theta_0 = \{\boldsymbol{\theta} \in \Theta: \boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}'), \quad \boldsymbol{\theta}_0 \in \mathcal{R}^{k-r}, \quad \boldsymbol{\theta}' \in \mathcal{R}^r\}, \quad 0 < r < k, \dim \Theta_0 = r,$$

որտեղ $\boldsymbol{\theta}_0$ -ն ֆիքսված է: Ճիշտ է թեորեմ 9.6-ի հետևյալ ընդհանրացումը (տե՛ս *Кендалл, Стьюарт* [6])՝

Թեորեմ 9.8: Դիցուք $\mathbf{X} \sim P_\theta \in \mathcal{P}$, և ստուգվում է (9.54) բարդ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$ երկրնտրանքայինի: Այդ դեպքում եթե $\mathcal{P}$ դասը բավարարում է **(RR)** – պայմանները, և ճիշտ է $\mathbb{H}_0$ վարկածը, ապա

$$T_n = -2 \ln \bar{\Lambda} \xrightarrow{d} \mathbb{H}^2(k-r), \quad n \rightarrow \infty,$$

որտեղ $\bar{\Lambda} = \bar{\Lambda}(\mathbf{X}, \Theta_0) = \frac{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X})}{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X})} \left(\frac{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X})}{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X})} \right):$

Թեորեմ 9.8-ում բերված α մակարդակով **ՃՀ հայտանիշը** որոշվում է

$$\chi_{1\alpha} = \{\mathbf{x}: -2 \ln \bar{\lambda}(\mathbf{x}, \Theta_0) \geq \chi_\alpha^2(k-r)\}$$

ասիմպտոտիկ կրիտիկական տիրույթով:

Օրինակ 9.24: Դիցուք $\mathbf{X} \sim \mathbb{N}(\theta_1, \theta_2^2)$: Ստուգենք $\mathbb{H}_0 : \theta_2 = \theta_{20}, \theta_1 \in \mathcal{R}$ բարդ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \theta_2 \neq \theta_{20}, \theta_1 \in \mathcal{R}$ բարդ երկընտրանքայինի (θ_1 -ը «խանգարող» պարամետր է):

Ունենք՝ $\Theta = \mathcal{R} \times (0, +\infty)$, $\Theta_0 = \{\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \Theta : \theta_1 \in \mathcal{R}, \theta_2 = \theta_{20}\}$, այնպես որ՝

$$\bar{\Lambda} = \bar{\Lambda}(\mathbf{X}, \Theta_0) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} f_{\theta}(\mathbf{X})}{f_{\hat{\theta}_n}(\mathbf{X})} = \left(\frac{S^2}{\theta_{20}^2} \right)^{n/2} \exp \left\{ -\frac{n}{2} \left(\frac{S^2}{\theta_{20}^2} - 1 \right) \right\}, \text{ և}$$

$$-2 \ln \bar{\Lambda} = n \left(\frac{S^2}{\theta_{20}^2} - 1 \right) - n \ln \left[1 + \left(\frac{S^2}{\theta_{20}^2} - 1 \right) \right]:$$

Այժմ, հաշվի առնելով, որ $\mathbb{H}_0$ վարկածի դեպքում $S^2 \xrightarrow{P} \theta_{20}^2$, երբ $n \rightarrow \infty$, և այնուհետև վերլուծելով $\ln \left[1 + \left(\frac{S^2}{\theta_{20}^2} - 1 \right) \right]$ ըստ **Թեյլորի** շարքի, կստանանք՝ $-2 \ln \bar{\Lambda} \approx \frac{n}{2} \left(\frac{S^2}{\theta_{20}^2} - 1 \right)^2$:

Կիրառելով, վերջապես, թեորեմ 9.8 -ը, որտեղ $k = 2, r = 1$, **ՃՀ հայտանիշի ասիմպտոտիկ կրիտիկական տիրույթը** կլինի հավասար՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ \mathbf{x} : \frac{n}{2} \left(\frac{S^2}{\theta_{20}^2} - 1 \right)^2 \geq \chi_{\alpha}^2(1) \right\}:$$

Կրկին դիտարկենք **միագործոն ցրվածքային վերլուծության** մոդելը (տե՛ս օրինակ՝ 9.21-ը):

Օրինակ 9.25: Դիցուք $\mathbf{X}_j = (X_{j1}, \dots, X_{jn_j}) \sim \mathbb{N}(\theta_{j1}, \theta_j^2)$, $j = 1, \dots, k$, $\sum_{j=1}^k n_j = n$ նորմալ բաշխումների համախմբություններից վերցված **միմյանցից անկախ** նմուշներ են: Կառուցենք α նշանակալիության մակարդակով

$\mathbb{H}_0 : \theta_{11} = \dots = \theta_{k1} := \theta_1^0$ վարկածն ընդդեմ

$\mathbb{H}_1 : \mathbf{n}_j$ բոլոր θ_{j1} -երը միմյանց հավասար են, $j = 1, \dots, k$

երկընտրանքայինի ստուգող **համասեռության** վերաբերյալ **ասիմպտոտիկ ՃՀ հայտանիշը**:

Պարամետրական բազմություններն այստեղ հետևյալն են՝

$$\Theta = \mathcal{R}^k \times (0, +\infty) \subset \mathcal{R}^{k+1}, \quad \Theta_0 = \mathcal{R} \times (0, +\infty) \subset \mathcal{R}^2,$$

այնպես որ, համաձայն թեորեմ 9.8-ի, $\mathbb{H}_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$ երկընտրանքայինի ստուգող α նշանակալիության մակարդակով **ասիմպտոտիկ ՃՀ հայտանիշի կրիտիկական տիրույթը** կունենա հետևյալ տեսքը (տե՛ս (9.42))՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{\mathbf{x} : n(\ln(\tilde{s}^2) - \ln(s^2)) \geq \chi_\alpha^2(k-1)\} :$$

Օրինակ 9.26 (բազմանդամային բաշխում): Կատարվում է n անկախ փորձ, որտեղ յուրաքանչյուրում i հայտ է գալիս **լրիվ խումբ** կազմող $A_1, \dots, A_r$ պատահույթներից որևէ մեկը: Սահմանենք հետևյալ պատահական մեծությունը՝

$$\xi(\omega) = \sum_{i=1}^r i \mathbb{1}_{A_i}(\omega) \quad (\xi(\omega) = i, \text{ եթե } \omega \in A_i):$$

Դիտարկենք A_i պատահույթների i հայտ գալու

$$p_\theta(i) = P_\theta(\xi = i) := \theta_i =$$

$$= \prod_{j=1}^r \theta_j^{\mathbb{1}_{\{j\}}(i)} \left(\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r), 0 < \theta_j < 1, \sum_{j=1}^r \theta_j = 1 \right) \quad (9.55)$$

(**անհայտ**) հավանականությունները, որտեղ

$$\mathbb{1}_{\{j\}}(i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{եթե } i = j \\ 0, & \text{եթե } i \neq j \end{cases}$$

$$\left(\text{նկատենք, որ } \sum_{j=1}^r \theta_j = 1 \text{ պայմանից բխում է, որ } \boldsymbol{\theta} \in \mathcal{R}^{r-1} \right):$$

Դիցուք $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ -ը ξ պատահական մեծությանը համապատասխանող նմուշն է: Նշանակենք

$$v_j^* = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{j\}}(X_i) \text{ -ով}$$

$\mathbf{X}$ նմուշում « j » արժեքի հաճախությունը:

Հայտնի է, որ $\mathbf{v}^* = (v_1^*, \dots, v_r^*)$ պատահական վեկտորն ունի *բազմանդամային (պոլինոմական)* բաշխում ($\mathbf{v}^* \sim \mathbb{M}(n; \boldsymbol{\theta})$)՝

$$P_{\boldsymbol{\theta}}(v_1^* = m_1, \dots, v_r^* = m_r) = \frac{n!}{m_1! \dots m_r!} \prod_{i=1}^r \theta_i^{m_i}, \quad \sum_{i=1}^r m_i = n, \quad m_i \in \mathcal{N} \cup \{0\},$$

իսկ $v_j^* \sim \mathbb{B}in(\theta_j, n)$, $j = 1, \dots, r$ ունեն *բինոմական* բաշխումներ:

Դիտարկենք որպես նմուշ $\mathbf{v}^*$ վեկտորը: **ՃՀ հայտանիշի** օգնությամբ ստուգենք

$\mathbb{H}_0: \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: \boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}^0$ երկընտրանքայինի, որտեղ

$$\boldsymbol{\theta}^0 = (\theta_1^0, \dots, \theta_r^0), \quad 0 < \theta_i^0 < 1, \quad i = 1, \dots, r, \quad \sum_{i=1}^r \theta_i^0 = 1$$

պայմանները բավարարող հայտնի վեկտոր է:

Հայտնի է (տե՛ս [15]-ի խնդիր 5.62-ը), որ $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ վեկտորի **ՃՄ գնահատականը** $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_r)$ վիճականին է, որտեղ $\hat{\theta}_j = v_j^*/n$, $j = 1, \dots, r$, այնպես որ $\bar{\Lambda} = \bar{\Lambda}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}^0)$ **ՃՀ վիճականու** արժեքը, երբ $\mathbf{X}(\omega_0) = \mathbf{x}$, կլինի՝

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}^0) = \frac{p_{\boldsymbol{\theta}^0}(\mathbf{x})}{p_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(\mathbf{x})} = \left(\prod_{i=1}^r (\theta_i^0)^{m_i} \right) / \left(\prod_{i=1}^r \left(\frac{m_i}{n} \right)^{m_i} \right) = \prod_{i=1}^r \left(\frac{n\theta_i^0}{m_i} \right)^{m_i},$$

որտեղ $p_{\boldsymbol{\theta}^0}(\mathbf{x}) = P_{\boldsymbol{\theta}^0}(v_1^* = m_1, \dots, v_r^* = m_r)$, $p_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(\mathbf{x}) = \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x})$:

Այստեղից՝

$$-2 \ln \bar{\lambda} = 2 \sum_{i=1}^r m_i \ln \frac{m_i}{n\theta_i^0}:$$

Համաձայն թեորեմ 9.6-ի՝ **ՃՀ հայտանիշի** α չափ ունեցող **ասիմպտոտիկ կրիտիկական տիրույթը**

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ \mathbf{x} : t_n = 2 \sum_{i=1}^r m_i \ln \frac{m_i}{n\theta_i^0} \geq \chi_{\alpha}^2(r-1) \right\}$$

բազմությունն է: Համաձայն դիտողություն 9.7-ի՝ այդ տիրույթին համար-
ժեք տիրույթն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\mathcal{X}'_{1\alpha} = \{\mathbf{x} : T'_n = \boldsymbol{\eta}_n \mathbb{I}(\boldsymbol{\theta}^0) \boldsymbol{\eta}_n^T \geq \chi^2_{\alpha}(r-1)\},$$

որտեղ $\boldsymbol{\eta}_n = \sqrt{n} (\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}^0)$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ -ը $\boldsymbol{\theta}$ պարամետրի **ՃՄ գնահատականն** է, իսկ $\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta}^0)$ -ն՝

$$\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta}) = \|\mathbb{I}_{ij}(\boldsymbol{\theta})\|_{i,j=1}^r, \quad \mathbb{I}_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = -E_{\boldsymbol{\theta}} \left[\frac{\partial^2 \ln p_{\boldsymbol{\theta}}(\xi)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right]$$

Ֆիշերի տեղեկատվական մատրիցի արժեքը $\boldsymbol{\theta}^0$ կետում:

Գտնենք $\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta}^0)$ մատրիցը: Ներկայացնենք (9.55)-ը հետևյալ ձևով՝

$$p_{\boldsymbol{\theta}}(x) = P_{\boldsymbol{\theta}}(\xi = x) := \theta_x = \prod_{j=1}^{r-1} \theta_j^{\mathbb{1}_{\{j\}}(x)} \left(1 - \sum_{i=1}^{r-1} \theta_i \right)^{\mathbb{1}_{\{r\}}(x)}, \quad x = 1, \dots, r,$$

որտեղից

$$\ln p_{\boldsymbol{\theta}}(x) = \sum_{j=1}^{r-1} \mathbb{1}_{\{j\}}(x) \ln \theta_j + \mathbb{1}_{\{r\}}(x) \ln \left(1 - \sum_{i=1}^{r-1} \theta_i \right): \quad (9.56)$$

Այժմ, ածանցելով (9.56)-ում ստացված արտահայտությունը սկզբում
ըստ θ_i -ի, այնուհետև ըստ θ_j -ի, կստանանք՝

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p_{\boldsymbol{\theta}}(x)}{\partial \theta_i} &= \mathbb{1}_{\{i\}}(x) \frac{1}{\theta_i} - \mathbb{1}_{\{r\}}(x) \frac{1}{\theta_r}, \\ \frac{\partial^2 \ln p_{\boldsymbol{\theta}}(x)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} &= \begin{cases} -\mathbb{1}_{\{i\}}(x) \frac{1}{\theta_i^2} - \mathbb{1}_{\{r\}}(x) \frac{1}{\theta_r^2}, & i = j \\ -\mathbb{1}_{\{r\}}(x) \frac{1}{\theta_r^2}, & i \neq j \end{cases}, \end{aligned}$$

որտեղից՝

$$\mathbb{I}_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = -E_{\boldsymbol{\theta}} \left[\frac{\partial^2 \ln p_{\boldsymbol{\theta}}(\xi)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right] = P_{\boldsymbol{\theta}}(\xi = i) \frac{1}{\theta_i^2} + P_{\boldsymbol{\theta}}(\xi = r) \frac{1}{\theta_r^2} = \frac{1}{\theta_i} + \frac{1}{\theta_r}, \quad i = j,$$

$$\mathbb{I}_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = P_{\boldsymbol{\theta}}(\xi = r) \frac{1}{\theta_r^2} = \frac{1}{\theta_r}, \quad i \neq j,$$

$$\mathbb{I}_{ij}(\boldsymbol{\theta}^0) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_i^0} + \frac{1}{\theta_r^0}, & i = j \\ \frac{1}{\theta_r^0}, & i \neq j \end{cases} :$$

Այնուհետև, ի նկատի ունենալով, որ $\hat{\theta}_j = v_j^*/n$, $j = 1, \dots, r$, կստանանք՝

$$\begin{aligned} T'_n &= \boldsymbol{\eta}_n \mathbb{I}(\boldsymbol{\theta}^0) \boldsymbol{\eta}_n^T = \\ &= n \left[\sum_{j=1}^{r-1} \left(\frac{1}{\theta_j^0} + \frac{1}{\theta_r^0} \right) \left(\frac{v_j}{n} - \theta_j^0 \right)^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{r-1} \frac{1}{\theta_r^0} \left(\frac{v_i}{n} - \theta_i^0 \right) \left(\frac{v_j}{n} - \theta_j^0 \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\theta_r^0} \sum_{j=1}^{r-1} \frac{(v_j - n\theta_j^0)^2}{n} + \frac{1}{\theta_r^0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{r-1} \frac{(v_i - n\theta_i^0)(v_j - n\theta_j^0)}{n} + \sum_{j=1}^{r-1} \frac{(v_j - n\theta_j^0)^2}{n\theta_j^0} = \\ &= \frac{1}{n\theta_r^0} \left[\sum_{j=1}^{r-1} (v_j - n\theta_j^0) \right]^2 + \sum_{j=1}^{r-1} \frac{(v_j - n\theta_j^0)^2}{n\theta_j^0} = \\ &= \frac{(v_r - n\theta_r^0)^2}{n\theta_r^0} + \sum_{j=1}^{r-1} \frac{(v_j - n\theta_j^0)^2}{n\theta_j^0} := \hat{\chi}_n^2 : \end{aligned}$$

Այսպիսով՝

$$\mathcal{X}'_{1\alpha} = \left\{ \mathbf{x} : \hat{\chi}_n^2 = \sum_{j=1}^r \frac{(v_j - n\theta_j^0)^2}{n\theta_j^0} \geq \chi_\alpha^2(r-1) \right\}$$

տիրույթը $\mathcal{X}_{1\alpha}$ **ասիմպտոտիկ կրիտիկական տիրույթին** համարժեք է:

Ղիտոդություն 9.9: 1. Նման ձևով, ինչպես օրինակ 9.26-ում, կարելի է ցույց տալ, որ մեծ n -ի դեպքում $\mathcal{X}_{1\alpha}$ տիրույթին համարժեք (տե՛ս ղիտոդություն 9.7-ը)

$$\mathcal{X}''_{1\alpha} = \{ \mathbf{x} : T''_n = \boldsymbol{\eta}_n \mathbb{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) \boldsymbol{\eta}_n^T \geq \chi_\alpha^2(r-1) \}$$

տիրույթը բերվում է

$$\mathcal{X}'_{1\alpha} = \left\{ \mathbf{x} : T''_n = \hat{\chi}_n^2 = \sum_{j=1}^r \frac{(v_j - n\theta_j^0)^2}{v_j} \geq \chi_{\alpha}^2(r-1) \right\}$$

տեսքի (տե՛ս խնդիր 9.18-ը):

2. Օրինակ 9.26-ում ստացված $\hat{\chi}_n^2$ վիճականին **Կ. Պիրսոնի** կոդվից ներմուծած հայտնի **χ^2 վիճականին** է, որը հետագայում կսահմանվի՝ հիմնվելով այլ մոտեցումների վրա (տե՛ս § 10.1), և կապացուցվի, որ այն ունի $(r-1)$ ազատության աստիճաններով սահմանային **χ^2 բաշխում**: Այստեղ **Պիրսոնի թեորեմը**, փաստորեն, ստացվեց որպես **բազմանդամային մոդելի** համար կիրառված **ՃՀ** եղանակի հետևանք:

Օրինակ 9.27: $\mathbf{X} \sim \text{Ber}(\theta)$ *Բեննուլիի* բաշխումից վերցված նմուշի միջոցով ստուգենք $\mathbb{H}_0 : \theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \theta \neq \theta_0$ երկընտրանքայինի:

ՃՀ վիճականին այս օրինակի համար կլինի՝

$$\bar{\Lambda} = \bar{\Lambda}(\mathbf{X}, \{\theta_0\}) = \frac{p_{\theta_0}(\mathbf{X})}{p_{\hat{\theta}_n}(\mathbf{X})} = \frac{\theta_0^{n\bar{X}}(1-\theta_0)^{n(1-\bar{X})}}{(\bar{X})^{n\bar{X}}(1-\bar{X})^{n(1-\bar{X})}} :$$

Այստեղից՝

$$-2 \ln \bar{\Lambda}(\mathbf{x}) = -2n \left[\bar{x} \ln \frac{\theta_0}{\bar{x}} + (1-\bar{x}) \ln \frac{1-\theta_0}{1-\bar{x}} \right] :$$

Օգտելով օրինակ 9.26-ից՝ **ՃՀ հայտանիշի**

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{ \mathbf{x} : -2 \ln \bar{\Lambda}(\mathbf{x}) > \chi_{\alpha}^2(1) \}$$

ասիմպտոտիկ կրիտիկական տիրույթը կարելի է փոխարինել համարժեք

$$\mathcal{X}'_{1\alpha} = \{ \mathbf{x} : \hat{\chi}_n^2 > \chi_{\alpha}^2(1) \}$$

տիրույթով, քանի որ այս դեպքում՝

$$v^* = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bin}(\theta, n) = \mathbb{M}(n; \theta, 1-\theta), \quad r=2 \text{ և}$$

$$\hat{\chi}_n^2 = \frac{(v - n\theta_0)^2}{n\theta_0} + \frac{(n - v - n(1-\theta_0))^2}{n(1-\theta_0)} = \frac{(v - n\theta_0)^2}{n\theta_0(1-\theta_0)} = n \frac{(\bar{x} - \theta_0)^2}{\theta_0(1-\theta_0)} :$$

Օրինակ 9.28: Դիցուք՝

$$\mathbf{X}_j = (X_{j1}, \dots, X_{jn_j}) \sim \text{Ber}(\theta_j), \quad j = 1, \dots, k, \quad \sum_{j=1}^k n_j = n$$

Բերնուլիի բաշխումներ ունեցող միմյանցից անկախ նմուշներ են:
Ստուգենք՝

$$\mathbb{H}_0 : \theta_1 = \dots = \theta_k := \theta^0 \text{ վարկածն ընդդեմ}$$

$\mathbb{H}_1 : \mathbf{\theta}$ բոլոր θ_j -երը միմյանց հավասար են, $j = 1, \dots, k$
երկրորդական վարկածի, երբ $n_j \rightarrow \infty$:

Այս խնդրին համապատասխանող պարամետրական բազմություններն են՝

$$\Theta = \{\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_k) : 0 < \theta_j < 1, \quad j = 1, \dots, k\}, \\ \Theta_0 = \{\boldsymbol{\theta} \in \Theta : \theta_1 = \dots = \theta_k = \theta^0\}:$$

$\mathbf{X}_j$, $j = 1, \dots, k$ նմուշների ճշմարտանմանության ֆունկցիաներն են՝

$$p_{\theta_j}(\mathbf{X}_j) = \prod_{m=1}^{n_j} p_{\theta_j}(X_{jm}) = (\theta_j)^{n_j \bar{X}_j} (1 - \theta_j)^{n_j (1 - \bar{X}_j)}, \quad \bar{X}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{m=1}^{n_j} X_{jm} :$$

Քանի որ $\mathbf{X}_j$ նմուշները միմյանցից անկախ են ($j = 1, \dots, k$), ապա $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_k)$ ընդհանուր նմուշի ճշմարտանմանության ֆունկցիայի համար կստանանք՝

$$p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X}) = \prod_{j=1}^k p_{\theta_j}(\mathbf{X}_j) = \prod_{j=1}^k (\theta_j)^{n_j \bar{X}_j} (1 - \theta_j)^{n_j (1 - \bar{X}_j)}, \quad \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_k):$$

Այստեղից, հաշվի առնելով, որ $\mathbf{X}_j \sim \text{Ber}(\theta_j)$ նմուշների համար $\hat{\theta}_j = \bar{X}_j$, ունենք՝

$$\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X}) = \prod_{j=1}^k \sup_{0 < \theta_j < 1} p_{\theta_j}(\mathbf{X}_j) = \prod_{j=1}^k (\bar{X}_j)^{n_j \bar{X}_j} (1 - \bar{X}_j)^{n_j (1 - \bar{X}_j)}:$$

Մյուս կողմից՝

$$\begin{aligned}\sup_{\theta \in \Theta_0} p_{\theta}(\mathbf{X}) &= \sup_{0 < \theta^0 < 1} (\theta^0)^{n\bar{X}} (1 - \theta^0)^{n(1-\bar{X})} = \\ &= (\bar{X})^{n\bar{X}} (1 - \bar{X})^{n(1-\bar{X})} \left(\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k n_j \bar{X}_j \right): \end{aligned}$$

Այսպիսով, **ՃՀ վիճականին** կլինի՝

$$\bar{\Lambda} = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} p_{\theta}(\mathbf{X})}{\sup_{\theta \in \Theta} p_{\theta}(\mathbf{X})} = \prod_{j=1}^k \left(\frac{\bar{X}}{\bar{X}_j} \right)^{n_j \bar{X}_j} \left(\frac{1 - \bar{X}}{1 - \bar{X}_j} \right)^{n_j (1 - \bar{X}_j)},$$

որտեղից **ասիմպտոտիկ կրիտիկական տիրույթի** համար կստանանք՝

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{1\alpha} &= \left\{ \mathbf{x} : 2 \sum_{j=1}^k n_j [\bar{x}_j (\ln \bar{x}_j - \ln \bar{x}) + (1 - \bar{x}_j) (\ln(1 - \bar{x}_j) - \ln(1 - \bar{x}))] \geq \right. \\ &\quad \left. \geq \chi_{\alpha}^2(k - 1) \right\}: \end{aligned}$$

Խնդիրներ

9.16. Դիցուք $\mathbf{X} \sim \Pi(\theta)$ ($\theta > 0$) նմուշ է *Պուասոնի* բաշխումից: Ստուգել $\mathbb{H}_0 : \theta = \theta_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \theta \neq \theta_0$ երկընտրանքայինի:

Ցուցում՝ օգտվել ([15]-ի օրինակ 7.31)-ից և դիտողություն 9.7-ից:

Պատասխան՝ *ասիմպտոտիկ կրիտիկական տիրույթներն են՝*

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{1\alpha} &= \left\{ \mathbf{x} : 2n \left[\theta_0 - \bar{x} - \bar{x} \ln \frac{\theta_0}{\bar{x}} \right] > \chi_{\alpha}^2(1) \right\} \text{ կամ} \\ \mathcal{X}'_{1\alpha} &= \left\{ \mathbf{x} : \frac{|\bar{x} - \theta_0|}{\sqrt{\theta_0}} \sqrt{n} \geq z_{\alpha/2} \right\}: \end{aligned}$$

9.17. $\mathbf{X}_n \sim \mathbb{E}(\theta_1)$ և $\mathbf{Y}_m \sim \mathbb{E}(\theta_2)$ ($\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$) միմյանցից անկախ *ցուցային* բաշխումների դասերից n և m ծավալի նմուշներ են: Կառուցել $\mathbb{H}_0 : \theta_1 = \theta_2$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \theta_1 \neq \theta_2$ երկընտրանքայինի ստուգող **ասիմպտոտիկ ՃՀ հայտանիշը**:

Պատասխան՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m) : 2 \left[\ln \frac{n^n m^m}{(n+m)^{n+m}} - n \ln T_1 - m \ln T_2 \right] \geq \chi_{\alpha}^2(1) \right\},$$

որտեղ

$$T_1 = \sum_{i=1}^n X_i / \left[\sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^m Y_i \right], \quad T_2 = \sum_{i=1}^m Y_i / \left[\sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^m Y_i \right]:$$

9.18. $\mathbf{v}^* = (v_1^*, \dots, v_r^*) \sim \mathbb{M}(n; \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r))$ բազմանդամային բաշխումից նմուշի միջոցով ստուգել $\mathbb{H}_0: \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: \boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}^0$ երկընտրանքայինի, օգտվելով **ՃՀ հայտանիշի** կրիտիկական տիրույթին համարժեք $\mathcal{X}_{1\alpha}''$ տիրույթից (տե՛ս դիտողություն 9.7-ը):

Ցուցում՝ տե՛ս օրինակ 9.26-ը:

Պատասխան՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha}'' = \left\{ \mathbf{x}: \hat{\chi}_n^2 = \sum_{j=1}^r \frac{(v_j - n\theta_j^0)^2}{v_j} \geq \chi_{\alpha}^2(r-1) \right\}:$$

9.19. Դիցուք $\mathbf{X}_j \sim \mathbb{N}(\theta_j, \sigma_j^2)$, $j = 1, \dots, k$ միմյանցից անկախ n_j ծավալ ունեցող *նորմալ* բաշխումների դասերից նմուշներ են: Կառուցել $\mathbb{H}_0: \theta_1 = \dots = \theta_k = \theta^0$ **համասեռության** վարկածը ստուգող **ասիմպտոտիկ ՃՀ հայտանիշը**:

Պատասխան՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ \mathbf{x}: \sum_{j=1}^k \frac{n_j}{\sigma_j^2} (s_{0j}^2 - s_j^2) \geq \chi_{\alpha}^2(k-1) \right\}, \quad n = \sum_{j=1}^k n_j, \quad s_{0j}^2 = \frac{1}{n_j} \sum_{m=1}^{n_j} (x_{jm} - \theta^0)^2,$$

$$s_j^2 = \frac{1}{n_j} \sum_{m=1}^{n_j} (x_{jm} - \bar{\mathbf{x}}_j)^2, \quad \bar{\mathbf{x}}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{m=1}^{n_j} x_{jm}, \quad \mathbf{x}_j = (x_{j1}, \dots, x_{jn_j}):$$

Գլուխ 10

Ոչ պարամետրական վարկածներ

Ի տարբերություն պարամետրական վարկածների տեսության մոտեցման, որը ենթադրում էր, որ տեսական բաշխումը վերջավոր թվով պարամետրերի ճշտությամբ հայտնի է, ոչ պարամետրական վարկածների տեսությունում տեսական բաշխման ֆունկցիոնալ տեսքը անհայտ է:

§ 10.1. Համաձայնության հայտանիշներ

Դիցուք $\mathbf{X}$ -ը P_ξ բաշխում ունեցող ξ պատահական մեծության n ծավալի նմուշ է, իսկ P_0 -ն՝ որոշակի թույլատրելի բաշխումների $\mathcal{P}$ դասին պատկանող հայտնի բաշխում: Հաճախ պահանջվում է ստուգել

$$\mathbb{H}_0 : P_\xi = P_0 \quad (10.1)$$

պարզ վարկածն ընդդեմ

$$\mathbb{H}_1 : P_\xi = P \neq P_0, \quad P \in \mathcal{P} \quad (10.2)$$

բարդ երկընտրանքային վարկածի: Այլ կերպ ասած՝ պահանջվում է ստուգել՝ **համաձայնեցվո՞ւմ** են, արդյոք, $\mathbf{X}$ նմուշի ընդունած արժեքները $\mathbb{H}_0$ վարկածի հետ, թե՞ **ոչ**: Այդ վարկածը ստուգող հայտանիշի կառուցումը հիմնված է P_n^* **նմուշային բաշխման** (տե՛ս [15, § 4.4]) և P_0 բաշխման միջև որոշակի $d(P_n^*, P_0)$ **«հեռավորության»** վրա:

Դիցուք տվյալ α նշանակալիության մակարդակի համար գոյություն ունի այնպիսի $c = c_\alpha > 0$ թիվ, որ

$$P_0(d(P_n^*, P_0) > c_\alpha) = \alpha : \quad (10.3)$$

Հայտանիշի կրիտիկական ֆունկցիան կառուցվում է հետևյալ ձևով՝

$$\varphi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } d(P_n^*, P_0) > c_\alpha \\ 0, & \text{եթե } d(P_n^*, P_0) \leq c_\alpha \end{cases} :$$

Պարզ է, որ α **չափ** ունեցող φ **հայտանիշը** տրվում է

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{\mathbf{x} : d(P_n^*, P_0) > c_\alpha\}$$

կրիտիկական տիրույթի միջոցով:

Եթե (10.3) պայմանը փոխարինվի

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_0(d(P_n^*, P_0) > c_\alpha) = \alpha \quad (10.4)$$

պայմանով, ապա հայտանիշը կունենա **ասիմպտոտիկ α չափ** (տե՛ս § 9.2):

(10.3) և (10.4) պայմանները բավարարող φ հայտանիշները կոչվում են **համաձայնության հայտանիշներ**:

Դիտողություն 10.1: (10.3) պայմանը փաստորեն նշանակում է, որ $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում $d(P_n^*, P_0)$ վիճականու H բաշխումը **կախված չէ** («ազատ» է) P_0 բաշխումից, այն **ոչ պարամետրական** է (տե՛ս § 8.3), այսինքն՝

$$P_0(d(P_n^*, P_0) > c_\alpha) = H(c_\alpha, \infty) = \alpha,$$

որտեղ c_α թիվը H բաշխման α մակարդակով կրիտիկական արժեքն է:

(10.4) պայմանը նշանակում է, որ $d(P_n^*, P_0)$ վիճականին **ասիմպտոտիկ ոչ պարամետրական** է, իսկ c_α -ն H բաշխման α մակարդակով ասիմպտոտիկ կրիտիկական արժեքն է:

Դիտողություն 10.2: Բացի (10.3) կամ (10.4) պայմաններից, որոնք տեղի ունեն, երբ բավարարվում է $\mathbb{H}_0$ վարկածը, և ցույց են տալիս **I սեռի սխալի հավանականությունը**, համաձայնության հայտանիշներից պահանջվում է նաև, որ $\mathbb{H}_1$ վարկածի դեպքում բավարարվի

$$d(P_n^*, P_0) \xrightarrow{P} \infty, \quad n \rightarrow \infty \quad (P \in \mathcal{P} \setminus \{P_0\})$$

պայմանը, ինչը նշանակում է, որ կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար

$$P(d(P_n^*, P_0) < \varepsilon) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty : \quad (10.5)$$

Դիտողություն 10.3: Վերցնելով (10.5) արտահայտությունում $\varepsilon = c_\alpha$ -ի՝ կարելի է եզրակացնել, որ համաձայնության հայտանիշներն **ունակ** են, ուստի և՛ **ասիմպտոտիկ անշեղ** (տե՛ս § 8.3):

Դիտարկենք **համաձայնության հայտանիշների** մի քանի կարևոր օրինակներ:

§ 10.1.1. Պիրսոնի χ^2 հայտանիշ

Դիցուք $\mathbf{X}$ -ը P_ξ բաշխում ունեցող ξ պատահական մեծության նմուշ է, իսկ $P_0 \in \mathcal{P}$ -ն՝ որոշակի **հայտնի** բաշխում:

Ստուգվում է (10.1) **պարզ** վարկածն ընդդեմ (10.2) **բարդ** երկրնտրանքայինի: Հայտանիշը հիմնված է վիճակագրական տվյալների **խմբավորման մեթոդի** վրա:

Ենթադրենք ξ պատահական մեծության $\mathcal{X} = \xi(\Omega)$ արժեքների բազմությունը (**գլխավոր համախմբությունը**) տրոհված է r հատ $\Delta_j = [z_{j-1}, z_j)$ միջակայքերի՝

$$\mathcal{X} = \bigcup_{j=1}^r \Delta_j, \quad \Delta_i \cap \Delta_k = \emptyset, \quad i \neq k,$$

որտեղ

$$-\infty \leq a = z_0 < z_1 < \dots < z_{r-1} < z_r = b \leq +\infty \quad (\mathcal{X} = [a, b]):$$

Սովորաբար տրոհման z_i կետերն ընտրում են այնպես, որ

$$p_i^0 := P_0(\xi \in \Delta_i) = F_0(z_i) - F_0(z_{i-1}) = \frac{1}{r},$$

որտեղ

$$F_0(z_i) = P_0(\xi < z_i), \quad \sum_{i=1}^r p_i^0 = 1:$$

Նշանակենք՝

$$v_j^* = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\Delta_j}(X_i) = nP_n^*(\Delta_j), \quad j = 1, \dots, r,$$

Δ_j միջակայքերի նմուշային հաճախությունները:

Դիտողություն 10.4: v_j^* հաճախությունները բացատրվում են $\mathbf{X}$ նմուշով կամ փորձի արդյունքներով: Ի տարբերություն v_j^* -ների, np_j^0 հաճախությունները որոշվում են P_0 բաշխման միջոցով՝ **անկախ $\mathbf{X}$ նմուշից**:

Դիտողություն 10.5: Նկատենք, որ $\mathbb{H}_0 : \mathbf{X} \sim P_0$ վարկածի դեպքում $\mathbf{v}^* = (v_1^*, \dots, v_r^*)$ վեկտորն ունի բազմանդամային բաշխում՝ $\mathbf{v}^* \sim \mathbb{M}(n; p_1^0, \dots, p_r^0)$,

$$\sum_{i=1}^r v_i = n, \quad v_i = v_i^*(\omega_0):$$

Այսպիսով, $\mathbb{H}_0$ վարկածը կարելի է փոխարինել $\mathbb{H}'_0 : \mathbf{v}^* \sim \mathbb{M}(n; p_1^0, \dots, p_r^0)$ վարկածով, ուստի՝ $\mathbb{H}'_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում v_j^* հաճախությունները պետք է «մոտ» լինեն **սպասվող** $E(v_j^*) = np_j^0$ ($v_j^* \sim \text{Bin}(p_j^0, n)$) հաճախություններին:

Կ. Պիրսոնը առաջարկել է որպես P_n^* և P_0 բաշխումների միջև **շեղման չափ** («հեռավորություն») դիտարկել հետևյալ վիճականին (χ^2 **վիճականի**)՝

$$\hat{\chi}_n^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(v_i^* - np_i^0)^2}{np_i^0} = \sum_{i=1}^r \frac{(v_i^*)^2}{np_i^0} - n : \quad (10.6)$$

Թեորեմ 10.1 (Կ. Պիրսոն): $\mathbb{H}_0$ (կամ $\mathbb{H}'_0$) վարկածը բավարարվելու դեպքում տեղի ունի հետևյալ գույքամիտությունը՝

$$\hat{\chi}_n^2 \xrightarrow{d} \mathbb{H}^2(r-1), \quad n \rightarrow \infty:$$

Համաձայն **Պիրսոնի թեորեմի**՝ $\hat{\chi}_n^2$ վիճականու սահմանային բաշխումը **անկախ** է P_0 բաշխումից:

Թեորեմ 10.1-ից հետևում է նաև, որ տրված α նշանակալիության մակարդակի համար տեղի ունի

$$P_0(\hat{\chi}_n^2 \geq \chi_{\alpha}^2(r-1)) \rightarrow P(\chi_{r-1}^2 \geq \chi_{\alpha}^2(r-1)) = \alpha, \quad n \rightarrow \infty$$

զուգամիտությունը, որտեղ $\chi_{r-1}^2 \sim \mathbb{H}^2(r-1)$ -ը՝ $(r-1)$ ազատության աստիճաններով χ^2 բաշխում ունեցող պատահական մեծություն է, իսկ $\chi_\alpha^2(r-1)$ -ը՝ դրա α մակարդակով կրիտիկական արժեքը:

Կարելի է տեսնել (խնդիր 10.2), որ **Պիքսոնի** հայտանիշը

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } \hat{\chi}_n^2 > \chi_\alpha^2(r-1) \\ 0, & \text{եթե } \hat{\chi}_n^2 \leq \chi_\alpha^2(r-1) \end{cases}$$

կրիտիկական ֆունկցիայով **համաձայնության հայտանիշ** է (բավարարվում են (10.4) և (10.5) պայմանները):

Թեորեմ 10.1-ը ապացուցելու համար անհրաժեշտ է հետևյալ լեմման, որը բխում է **բազմաչափ ԿՍԹ**-ից (տե՛ս [15]-ի թեորեմ 1.39 -ը):

Լեմմա 10.1: Եթե $\mathbf{v}^* = (v_1^*, \dots, v_r^*) \sim \mathbb{M}(n; p_1^0, \dots, p_r^0)$ -ը **բազմանդամային բաշխում** ունեցող վեկտոր է, ապա ճիշտ է հետևյալ զուգամիտությունը՝

$$\frac{\mathbf{v}^* - n\mathbf{p}^0}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathbb{N}_r(\mathbf{0}, \Sigma), \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\mathbf{p}^0 = (p_1^0, \dots, p_r^0), \quad \mathbf{0} \in \mathbb{R}^r, \quad \Sigma = \|\sigma_{ij}\|_{i,j=1}^r,$$

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}p_i^0 - p_i^0p_j^0 = \begin{cases} p_i^0(1-p_i^0), & \text{եթե } i=j \\ -p_i^0p_j^0, & \text{եթե } i \neq j \end{cases}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{եթե } i=j \\ 0, & \text{եթե } i \neq j \end{cases}$$

Կրոնեկերի սիմվոլն է:

Ապացուցում: Ներկայացնենք՝ $\mathbf{v}^* = \sum_{i=1}^n X_i$ տեսքով, որտեղ $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{ir})$, $X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{եթե } i\text{-րդ փորձում ի հայտ է եկել } A_j \text{ պատահույթը} \\ 0, & \text{հակառակ դեպքում} \end{cases},$

այնպես որ $v_k^* = \sum_{i=1}^n X_{ik}$:

Պարզ է, որ $v_k^* \sim \text{Bin}(p_k^0, n)$ և $E(v_k^*) = np_k^0$: Մյուս կողմից, քանի որ $X_{ij} \sim \text{Ber}(p_j^0)$, ապա՝

$$E(X_{ij}) = p_j^0, \quad \text{cov}(X_{ik}, X_{im}) = E(X_{ik}X_{im}) - E(X_{ik})E(X_{im}) = \delta_{km}p_k^0 - p_k^0p_m^0:$$

Այժմ լեմման բխում է բազմաչափ ԿՍԹ-ից:

Թե նրեմի ապացուցում: Ներկայացնենք՝

$$\hat{\chi}_n^2 = \sum_{k=1}^r \frac{(v_k^* - np_k^0)^2}{np_k^0} = \sum_{k=1}^r \left[\frac{v_k^* - np_k^0}{\sqrt{np_k^0}} \right]^2$$

և նշանակենք $\boldsymbol{\eta}_n = (\eta_1^n, \dots, \eta_r^n)$, որտեղ

$$\eta_k^n = \frac{v_k^* - np_k^0}{\sqrt{np_k^0}} = \frac{\tilde{v}_k - n\sqrt{p_k^0}}{\sqrt{n}}, \quad \tilde{v}_k = \frac{1}{\sqrt{p_k^0}} v_k^* = \frac{1}{\sqrt{p_k^0}} \sum_{i=1}^n X_{ik}, \quad \tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_r):$$

Սահմանենք

$$\tilde{\mathbf{X}}_i = \left(\frac{1}{\sqrt{p_1^0}} X_{i1}, \dots, \frac{1}{\sqrt{p_r^0}} X_{ir} \right), \quad i = 1, \dots, n$$

պատահական վեկտորներ այնպես, որ

$$\tilde{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{X}}_i \quad \text{և} \quad \tilde{X}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{p_j^0}} X_{ij}, \quad j = 1, \dots, r:$$

Այստեղից կստանանք՝

$$\begin{aligned} E(\tilde{X}_{ij}) &= \frac{1}{\sqrt{p_j^0}} E(X_{ij}) = \sqrt{p_j^0}, \quad \text{cov}(\tilde{X}_{ik}, \tilde{X}_{im}) = \frac{1}{\sqrt{p_k^0 p_m^0}} \text{cov}(X_{ik}, X_{im}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{p_k^0 \cdot p_m^0}} (\delta_{km} p_k^0 - p_k^0 p_m^0) = \delta_{km} - \sqrt{p_k^0 p_m^0} : \end{aligned}$$

Համաձայն լեմմա 10.1-ի՝ ունենք՝

$$\boldsymbol{\eta}_n \xrightarrow{d} \tilde{\boldsymbol{\eta}} \sim N_r(\mathbf{0}, \tilde{\Sigma}), \quad n \rightarrow \infty,$$

որտեղ $\tilde{\sigma}_{ij} = \delta_{ij} - \sqrt{p_i^0 p_j^0}$, $\tilde{\Sigma} = \|\tilde{\sigma}_{ij}\|_{i,j=1}^r$: Այնպես որ, $\tilde{\eta}$ վեկտորի բնութագրիչ ֆունկցիան կլինի

$$\varphi_{\tilde{\eta}}(\mathbf{t}) = \mathbb{E}\left[e^{i\mathbf{t}\tilde{\eta}^T}\right] = e^{-\frac{1}{2}\mathbf{t}\tilde{\Sigma}\mathbf{t}^T}, \quad \mathbf{t} \in \mathcal{R}^r:$$

Մյուս կողմից, ունենք՝

$$\mathbf{t}\tilde{\Sigma}\mathbf{t}^T = \sum_{i,j=1}^r \tilde{\sigma}_{ij} t_i t_j = \sum_{i,j=1}^r t_i \left(\delta_{ij} - \sqrt{p_i^0 p_j^0} \right) t_j = \sum_{i=1}^r t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^r t_i \sqrt{p_i^0} \right)^2:$$

Այժմ սահմանենք **օրթոգոնալ** $\mathbb{C}$ մատրից հետևյալ ձևով՝

$$\mathbb{C} = \begin{vmatrix} \sqrt{p_1^0} & c_{12} & \dots & c_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sqrt{p_r^0} & c_{r2} & \dots & c_{rr} \end{vmatrix}:$$

Դիտարկենք $\mathbf{X}^0 = \tilde{\eta}\mathbb{C}$ վեկտորը, որի բնութագրիչ ֆունկցիան է

$$\varphi_{\mathbf{X}^0}(\mathbf{u}) = \mathbb{E}\left[e^{i\mathbf{u}\mathbf{X}_0^T}\right] = \mathbb{E}\left[e^{i\mathbf{u}\mathbb{C}^T\tilde{\eta}^T}\right], \quad \mathbf{u} \in \mathcal{R}^r:$$

Կատարելով $\mathbf{t} = \mathbf{u}\mathbb{C}^T$ ($\mathbf{u} = \mathbf{t}\mathbb{C}$) փոփոխականի փոխարինում՝ կստանանք՝

$$\varphi_{\mathbf{X}^0}(\mathbf{u}) = \mathbb{E}\left[e^{i\mathbf{t}\tilde{\eta}^T}\right] = \varphi_{\tilde{\eta}}(\mathbf{t}) = e^{-\frac{1}{2}\mathbf{t}\tilde{\Sigma}\mathbf{t}^T}:$$

Նկատելով, որ $u_1 = \sum_{i=1}^r t_i \sqrt{p_i^0}$ և $\sum_{i=1}^r t_i^2 = \sum_{i=1}^r u_i^2$, ունենք՝

$$\mathbf{t}\tilde{\Sigma}\mathbf{t}^T = \sum_{i=1}^r t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^r t_i \sqrt{p_i^0} \right)^2 = \sum_{i=1}^r u_i^2 - u_1^2 = \sum_{i=2}^r u_i^2,$$

այնպես որ՝

$$\varphi_{\mathbf{X}^0}(\mathbf{u}) = \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=2}^r u_i^2\right\}:$$

Այստեղից հետևում է, որ $X_1^0, X_2^0, \dots, X_r^0$ պատահական մեծություններն **անկախ** են, ընդ որում, $\text{var}(X_1^0) = 0$, իսկ $X_2^0, \dots, X_r^0 \sim \mathbb{N}(0,1)$ **ստանդարտ նորմալ** բաշխում ունեցող պատահական մեծություններ են: Իրոք՝

$$\begin{aligned} \text{var}(X_1^0) &= \text{var}\left(\sum_{i=1}^r \sqrt{p_i^0} \tilde{\eta}_i\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^r \sqrt{p_i^0} \tilde{\eta}_i\right)^2 = \sum_{i,j=1}^r \sqrt{p_i^0 p_j^0} \mathbb{E}(\tilde{\eta}_i \tilde{\eta}_j) = \\ &= \sum_{i,j=1}^r \sqrt{p_i^0 p_j^0} (\delta_{ij} - \sqrt{p_i^0 p_j^0}) = \sum_{i=1}^r p_i^0 - \sum_{i,j=1}^r p_i^0 p_j^0 = \\ &= 1 - \left(\sum_{i=1}^r p_i^0\right) \left(\sum_{j=1}^r p_j^0\right) = 0: \end{aligned}$$

Հետևաբար, $X_1^0 = 0$ P - h.h., իսկ $X_2^0, \dots, X_r^0 \sim \mathbb{N}(0,1)$ և **անկախ** են, այնպես որ՝

$$\hat{\chi}_n^2 = \sum_{k=1}^r [\eta_k^n]^2 \xrightarrow{d} \sum_{k=1}^r [\tilde{\eta}_k]^2 = \sum_{k=2}^r [X_k^0]^2 \sim \mathbb{H}^2(r-1)$$

(զուգամիտությունը բխում է $\boldsymbol{\eta}_n \xrightarrow{d} \tilde{\boldsymbol{\eta}}$ պայմանից և **անընդհատության** թեորեմից):

Օրինակ 10.1: Մետաղադրամը 4040 անգամ նետումից 2048 անգամ բացվել է «գերբը»: Համապատասխանում է, արդյոք, 0.05 նշանակալիության մակարդակով այդ տվյալները մետաղադրամի «**համաչափության**» վերաբերյալ վարկածին:

Նշանակենք A -ով մետաղադրամի մեկ նետման դեպքում «գերբը» բացվելու պատահույթը: $\xi = 1_A$ պատահական մեծությունն ունի $p = P(A)$ անհայտ պարամետրով *Բերնուլիի* բաշխում: Պահանջվում է ξ պատահական մեծությանը համապատասխանող $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \sim \text{Ber}(p)$ նմուշի ընդունած $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ արժեքի հիման վրա ($v_1 = \sum_{i=1}^n x_i = 2048$) ստուգել $\mathbb{H}_0: p = \frac{1}{2}$ մետաղադրամի «**համաչափության**» վերաբերյալ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: p \neq \frac{1}{2}$ երկընտրանքային վարկածի:

Այսպիսով, ունենք՝

$$\mathcal{X} = \{0,1\}, \quad r = 2, \quad n = 4040, \quad v_1^* = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bin}(p, n), \quad v_1 = 2048,$$

$$v_2 = 1992, \quad p_1^0 = p_2^0 = \frac{1}{2}:$$

Պիրսոնի χ^2 վիճականին կրնդունի հետևյալ արժեքը՝

$$\hat{\chi}_n^2 = \frac{(v_1 - np_1^0)^2}{np_1^0} + \frac{(v_2 - np_2^0)^2}{np_2^0} \approx 0.776:$$

0.05 նշանակալիության մակարդակի համար $\chi_{0.05}^2(1) = 3.843$ (տե՛ս աղ-
յուսակ Ա 3-ը): Այսպիսով՝

$$0.776 = \hat{\chi}_n^2 < \chi_{0.05}^2(1) = 3.843$$

պայմանից հետևում է, որ փորձի արդյունքները 0.05 մակարդակով **չեն**
հակասում մետադադրամի «**համաչափության**» վերաբերյալ վարկածին:

§ 10.1.2. χ^2 հայտանիշ: Բարդ վարկածի ստուգում

Դիցուք պահանջվում է ստուգել վարկած, որ ξ պատահական մեծու-
թյան P բաշխումը պատկանում է որոշակի $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$ բաշխումների դասին:
Ենթադրենք $\mathcal{P}$ դասը *պարամետրական* է, $\theta \in \Theta$ և $\mathcal{P}_0 = \{P_\theta : \theta \in \Theta_0 \subset \mathcal{R}^k,$
 $k \geq 1\}$, $\Theta_0 \subset \Theta$:

Այսպիսով, ξ պատահական մեծության $\mathbf{X}$ նմուշի միջոցով պետք է
ստուգել

$$\mathbb{H}_0 : \mathbf{X} \sim P_\theta \in \mathcal{P}_0 \text{ վարկածն ընդդեմ } \mathbb{H}_1 : \mathbf{X} \sim P_\theta \notin \mathcal{P}_0 \quad (10.7)$$

երկրնտրանքայինի:

Ենթադրենք ξ պատահական մեծության $\mathcal{X} = \xi(\Omega) = [a, b] \subseteq \mathcal{R}$ ար-
ժեքների բազմությունը տրոհված է r հատ $\Delta_j = [z_{j-1}, z_j)$ միջակայքերի՝

$$\mathcal{X} = \bigcup_{j=1}^r \Delta_j, \quad \Delta_i \cap \Delta_k = \emptyset, \quad i, k = 1, \dots, r:$$

Նշանակենք՝

$$v_j^* = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\Delta_j}(X_i) = nP_n^*(\Delta_j) - n\mu, \quad j = 1, \dots, r,$$

Δ_j միջակայքերի նմուշային հաճախությունները, $\mathbf{v}^* = (v_1^*, \dots, v_r^*)$ -ով՝ հաճախությունների վեկտորը:

ξ պատահական մեծության Δ_j միջակայքերում գտնվելու հավանականություններն են՝

$$p_j(\boldsymbol{\theta}) = P_{\boldsymbol{\theta}}(\xi \in \Delta_j) = F_{\boldsymbol{\theta}}(z_j) - F_{\boldsymbol{\theta}}(z_{j-1}), \quad F_{\boldsymbol{\theta}}(x) = P_{\boldsymbol{\theta}}(\xi < x),$$

այնպես որ, χ^2 վիճականին կլինի կախված անհայտ $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ պարամետրից՝

$$\hat{\chi}_n^2(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^r \frac{(v_j^* - np_j(\boldsymbol{\theta}))^2}{np_j(\boldsymbol{\theta})} = \sum_{j=1}^r \frac{(v_j^*)^2}{np_j(\boldsymbol{\theta})} - n : \quad (10.8)$$

Որպեսզի այն կիրառվի (10.7) վարկածները ստուգելու համար, անհրաժեշտ է գնահատել $\boldsymbol{\theta}$ պարամետրը:

Դիտարկենք

$$\mathbf{v}^* = (v_1^*, \dots, v_r^*) \sim \mathbb{M}(n; p_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, p_r(\boldsymbol{\theta}))$$

վեկտորի ճշմարտանմանության ֆունկցիան՝

$$p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{v}) = P_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{v}^* = \mathbf{v}) = P_{\boldsymbol{\theta}}(v_1^* = v_1, \dots, v_r^* = v_r) = \frac{n!}{v_1! \dots v_r!} \prod_{j=1}^r [p_j(\boldsymbol{\theta})]^{v_j},$$

$$\sum_{j=1}^r v_j = n, \quad \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_r):$$

Բազմանդամային ճշմարտանմանության հավասարումների համակարգ կոչվում է հետևյալ համակարգը՝

$$\frac{\partial}{\partial \theta_m} L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{v}) = 0, \quad m = 1, \dots, k, \quad (10.9)$$

որտեղ

$$L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{v}) := \ln p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{v}) = \ln \frac{n!}{v_1! \dots v_r!} + \sum_{j=1}^r v_j \ln p_j(\boldsymbol{\theta}) - \ln$$

բազմանդամային լոգարիթմական ճշմարտանմանության ֆունկցիան է, ուստի (10.9) համակարգը կընդունի

$$\frac{\partial}{\partial \theta_m} L_{\theta}(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^r \frac{v_j}{p_j(\theta)} \cdot \frac{\partial p_j(\theta)}{\partial \theta_m} = 0, \quad m = 1, \dots, k \quad (10.10)$$

տեսքը:

$\Theta_0 \subset \mathcal{R}^k$ բազմությունից արժեքներ ընդունող այն $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_k)$ վիճականին, որի դեպքում $p_{\theta}(\mathbf{v})$ (կամ $L_{\theta}(\mathbf{v})$) ֆունկցիան ընդունում է իր մեծագույն արժեքը, և որը բավարարում է (10.10) պայմանները, կոչվում է **բազմանդամային ճշմարտանմանության մաքսիմումի գնահատական**:

Տեղադրելով այդ գնահատականը $p_j(\theta)$ ֆունկցիաներում θ պարամետրի փոխարեն և նշանակելով $\tilde{p}_j = p_j(\tilde{\theta})$ ՝ (10.8) վիճականին կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\hat{\chi}_n^2(\tilde{\theta}) = \sum_{j=1}^r \frac{(v_j^* - n\tilde{p}_j)^2}{n\tilde{p}_j} = \sum_{j=1}^r \frac{(v_j^*)^2}{n\tilde{p}_j} - n : \quad (10.11)$$

Թեորեմ 10.2 (*Ֆիշեր (տե՛ս Kramep [8])*): Ղիցուք $p_j(\theta)$, $j = 1, \dots, r$ ֆունկցիաները բոլոր $\theta \in \Theta_0 \subset \mathcal{R}^k$ -ների համար ($k < r - 1$) բավարարում են հետևյալ պայմանները՝

$$1. \quad p_j(\theta) \geq c > 0, \quad p_j(\theta) \in C^{(2)}(\Theta_0), \quad 2. \quad \text{rank} \left\| \frac{\partial p_j(\theta)}{\partial \theta_i} \right\|_{i,j=1}^{k,r} = k,$$

և ճիշտ է $\mathbb{H}_0$ վարկածը: Այդ դեպքում տեղի ունի

$$\hat{\chi}_n^2(\tilde{\theta}) \xrightarrow{d} \mathbb{H}^2(r - k - 1), \quad n \rightarrow \infty$$

զուգամիտությունը, որտեղ $\tilde{\theta}$ -ը Θ -ի բազմանդամային ՃՄ գնահատականն է:

Ըստ թեորեմ 10.2-ի՝ $\hat{\chi}_n^2(\tilde{\theta})$ վիճականու սահմանային բաշխումն **անկախ** է P_θ բաշխումից (վիճականին **ասիմպտոտիկ ոչ պարամետրական** է), այնպես որ տրված α նշանակալիության մակարդակի համար ճիշտ է

$$P_\theta(\hat{\chi}_n^2(\tilde{\theta}) \geq \chi_\alpha^2(r-k-1)) \rightarrow P(\chi_{r-k-1}^2 \geq \chi_\alpha^2(r-k-1)) = \alpha, \quad n \rightarrow \infty$$

զուգամիտությունը: Այսպիսով, χ^2 **հայտանիշի** α նշանակալիության մակարդակով **ասիմպտոտիկ կրիտիկական տիրույթը** կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{\mathbf{x} : \hat{\chi}_n^2(\tilde{\theta}) \geq \chi_\alpha^2(r-k-1)\}:$$

Օրինակ 10.2: Երկու երեխա ունեցող 2020 ընտանիքներում կատարված հետազոտությունը պարզել է, որ դրանցից 527-ն ունեն 2 տղա, 476-ը՝ 2 աղջիկ, իսկ մնացած 1017 ընտանիքներում կան տարբեր սեռի երեխաներ: Կարելի՞ է, արդյոք, 0.05 մակարդակով համարել, որ երկու երեխա ունեցող ընտանիքներում տղաների թիվը բաշխված է **բինոմական** օրենքով:

Պահանջվում է ստուգել $H_0: \xi \sim \text{Bin}(\theta, 2)$ վարկած, որ երկու երեխա ունեցող ընտանիքներում տղաների ξ թիվն ունի **բինոմական** բաշխում: Այսինքն՝

$$P_\theta(\xi = x) = C_2^x \theta^x (1-\theta)^{2-x}, \quad x = 0, 1, 2,$$

որտեղ $\theta = P(A)$ -ն տղա երեխա (A պատահույթ) ունենալու հավանականությունն է: Նշանակենք՝

$$p_0(\theta) = P_\theta(\xi = 0) = (1-\theta)^2, \quad p_1(\theta) = P_\theta(\xi = 1) = 2\theta(1-\theta),$$

$$p_2(\theta) = P_\theta(\xi = 2) = \theta^2:$$

Գտնենք θ պարամետրի համար $\tilde{\theta}$ **բազմանդամային ՃՄ գնահատականը**:

Բազմանդամային ճշմարտանմանության հավասարումը կլինի՝

$$L'_\theta(\mathbf{v}) = \sum_{j=0}^2 \frac{v_j}{p_j(\theta)} p'_j(\theta) = 0,$$

որտեղ՝

$$v_0 = 476, v_1 = 1017, v_2 = 527, p'_0(\theta) = -2(1 - \theta), p'_1(\theta) = 2 - 4\theta, \\ p'_2(\theta) = 2\theta:$$

Այսպիսով՝

$$-\frac{2v_0}{1 - \theta} + \frac{1 - 2\theta}{\theta(1 - \theta)} v_1 + \frac{2v_2}{\theta} = 0,$$

որտեղից կստանանք՝

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{2n}(v_1 + 2v_2) \approx 0.513,$$

$$\tilde{p}_0 = p_0(\tilde{\theta}) = (1 - \tilde{\theta})^2 \approx 0.237, \tilde{p}_1 = p_1(\tilde{\theta}) = 2\tilde{\theta}(1 - \tilde{\theta}) \approx 0.5,$$

$$\tilde{p}_2 = p_2(\tilde{\theta}) = \tilde{\theta}^2 \approx 0.263:$$

Այժմ հաշվենք χ^2 վիճականու արժեքը՝

$$\chi_n^2(\tilde{\theta}) = \sum_{j=0}^2 \frac{(v_j - n\tilde{p}_j)^2}{n\tilde{p}_j} = \frac{7.5}{478.74} + \frac{49}{1010} + \frac{18.15}{531.26} \approx 0.098,$$

որտեղ՝

$$n = 2020, r = 3, n\tilde{p}_0 = 478.74, n\tilde{p}_1 = 1010, n\tilde{p}_2 = 531.3, r - k - 1 = 1,$$

$$\chi_{\alpha}^2(r - k - 1) = \chi_{0.05}^2(1) = 3.843:$$

Այսպիսով՝

$$0.098 = \chi_n^2(\tilde{\theta}) < \chi_{0.05}^2(1) = 3.843,$$

այնպես որ $\mathbb{H}_0$ վարկածը **չի հերքվում**, տվյալները **համաձայնեցվում** են այն վարկածի հետ, որ տղաների թիվը երկու երեխա ունեցող ընտանիքներում չի հակասում **բինոմիալ** օրենքին:

Խնդիրներ

10.1. Ապացուցել *Պիրսոնի* թեորեմը $r = 2$ դեպքի համար:

Ցուցում՝ օգտվել *Մուլլր – Լապլասի* ինտեգրալային սահմանային թեորեմից:

10.2. Ապացուցել, որ $\mathbb{H}'_0 : \mathbf{v}^* \sim \mathbb{M}(n, p_1^0, \dots, p_r^0)$ վարկածը ստուգող *Պիրսոնի* հայտանիշը **համաձայնության** հայտանիշ է:

Ցուցում՝ օգտվել այն փաստից, որ $\mathbb{H}'_1 : \mathbf{v}^* \sim \mathbb{M}(n, p_1^0, \dots, p_r^0)$ մրցող վարկածի դեպքում գոյություն ունի $k \leq r$ թիվ այնպիսին, որ $p_k \neq p_k^0$ և

$$\frac{(v_k^* - np_k)^2}{np_k} = \frac{n}{p_k} \left(\frac{v_k^*}{n} - p_k \right)^2 \xrightarrow{P} \infty, \quad n \rightarrow \infty:$$

10.3. Օգտվելով հավասար երկարությամբ $\Delta_j = [(j-1)h, jh)$, $j = 1, \dots, r-1$, $\Delta_r = [(r-1)h, \infty)$ միջակայքերի խմբավորման մեթոդից (h -ը և r -ը տրված են)՝ կառուցել $\mathbb{H}_0 : \mathbf{X} \sim \mathbb{E}(\theta)$ վարկածը (θ -ն *անհայտ* է) ստուգող *Պիրսոնի* χ^2 **համաձայնության հայտանիշը**:

Ցուցում՝ նախ գտնել θ պարամետրի *բազմանդամային* $\mathcal{U}$ գնահատականը՝

$$\hat{\theta}_n = -\frac{1}{h} \ln \hat{z}_n, \quad \hat{z}_n = \left(\sum_{j=1}^r j v_j - n \right) / \left(\sum_{j=1}^r j v_j - v_r \right):$$

Պատասխան՝ $\mathbb{H}_0$ վարկածը հերքվում է,

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_n^2 &= \sum_{j=1}^r \frac{v_j^2}{n \hat{p}_j} - n \geq \chi_{\alpha}^2(r-2), \text{ որտեղ } \hat{p}_j = \hat{z}_n^{j-1} (1 - \hat{z}_n), \quad j = 1, \dots, r-1, \hat{p}_r = \\ &= \hat{z}_n^{r-1}: \end{aligned}$$

10.4. 8002 անկախ փորձեր կատարելիս **լրիվ խումբ** կազմող A, B և C պատահույթները ի հայտ են եկել, համապատասխանաբար, 2014, 5008 և 980 անգամ: Հիշտ է, արդյոք, 0.05 նշանակալիության մակարդակով հետևյալ վարկածը՝

$$\mathbb{H}_0 : P(A) = 0.5 - 2\theta, \quad P(B) = 0.5 + \theta, \quad P(C) = \theta \quad (0 < \theta < 0.25):$$

Ցուցում՝ գտնել θ պարամետրի *բազմանդամային* $\mathcal{U}$ գնահատականը:

Պատասխան՝ վարկածը չի *հերքվում*, համաձայնությունը չափն է (P -արժեքը (P -V) ≈ 0.65):

§ 10.1.3. Կոլմոգորովի հայտանիշ

$\mathbb{H}_0: \mathbf{X} \sim P = P_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: \mathbf{X} \sim P \neq P_0$

երկրնստրանքայինի ստուգող **համաձայնության** մեկ այլ հայտանիշ է **Կոլմոգորովի հայտանիշը**: Ենթադրվում է, որ P_0 բաշխմանը համապատասխանող $F_0(x)$ բաշխման ֆունկցիան **անընդհատ** է:

Որպես հայտանիշի վիճականի դիտարկվում է **Կոլմոգորովի վիճականին՝**

$$D_n = D(\mathbf{X}) = \sup_{x \in \mathcal{R}} |F_n^*(x) - F_0(x)|:$$

Համաձայն **Գլխկենկոյի** թեորեմի (տե՛ս [15]-ի թեորեմ 4.32-ը)՝ $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում $D_n \rightarrow 0$ P -h.h., երբ $n \rightarrow \infty$:

Որպես **նմուշային** P_n^* և **տեսական** P_0 բաշխումների միջև հեռավորություն դիտարկվում է

$$d_K(P_n^*, P_0) := \sqrt{n} D_n = \sqrt{n} \sup_{x \in \mathcal{R}} |F_n^*(x) - F_0(x)|$$

վիճականին:

Թեորեմ 10.3 (Կոլմոգորովի): Դիցուք ճիշտ է $\mathbb{H}_0$ վարկածը: Այդ դեպքում տեղի ունի ըստ բաշխման հետևյալ զուգամիտությունը՝

$$\sqrt{n} D_n \xrightarrow{d} \mathbb{K}, \quad n \rightarrow \infty,$$

որտեղ $\mathbb{K}$ -ն **Կոլմոգորովի բաշխումն** է:

Կոլմոգորովի բաշխում ունեցող ξ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$K(x) = P(\xi < x) = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2} \right) \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x), \quad x \in \mathcal{R}:$$

$K(x)$ ֆունկցիայի համար կազմված են աղյուսակներ (տե՛ս աղյուսակ Ա 11): Գործնականում արդեն $n \geq 20$ -ի դեպքում $P(\sqrt{n} D_n < x)$ հավանականությունները, անկախ $F_0(x)$ բաշխման ֆունկցիայից, բավականաչափ

«լավ» մոտարկվում են $K(x)$ ֆունկցիայով՝ d_K վիճականին **ասիմպտոտիկ ոչ պարամետրական** է:

Թեորեմ 10.3 -ից բխում է, որ $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում տրված α նշանակալիության մակարդակի համար ճիշտ է

$$P_0(\sqrt{n} D_n \geq \lambda_\alpha) \rightarrow P(\xi \geq \lambda_\alpha) = 1 - K(\lambda_\alpha) = \alpha, \quad n \rightarrow \infty$$

գուգամիտությունը, որտեղ λ_α -ն **Կոլմոգորովի** բաշխման α մակարդակով **ասիմպտոտիկ կրիտիկական արժեքն** է (եզրը): Այսպիսով, **Կոլմոգորովի հայտանիշի** α նշանակալիության մակարդակով **ասիմպտոտիկ կրիտիկական տիրույթը**

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{\mathbf{x} : \sqrt{n} D(\mathbf{x}) \geq \lambda_\alpha\}, \quad \text{երբ } n \geq 20$$

բազմությունն է: Հեշտ է տեսնել (խնդիր 10.5), որ **Կոլմոգորովի հայտանիշը**

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{երբ } \sqrt{n} D(\mathbf{x}) \geq \lambda_\alpha \\ 0, & \text{երբ } \sqrt{n} D(\mathbf{x}) < \lambda_\alpha \end{cases}$$

կրիտիկական ֆունկցիայով **համաձայնության հայտանիշ** է:

Դիտողություն 10.7: Գործնականում $D(\mathbf{x})$ -ի արժեքը հաշվարկվում է

$$\begin{aligned} D(\mathbf{x}) &= \sup_{x \in \mathcal{R}} |F_n(x) - F_0(x)| = \\ &= \max_{1 \leq k \leq n} \{|F_n(x_{(k)}) - F_0(x_{(k)})|, |F_n(x_{(k+1)}) - F_0(x_{(k)})|\} \end{aligned} \quad (10.12)$$

բանաձևի օգնությամբ, որտեղ $F_n(x_{(k)}) = \frac{k-1}{n}$:

Պարզվում է, որ $D(\mathbf{X})$ վիճականին ոչ միայն **ասիմպտոտիկ ոչ պարամետրական** է (թեորեմ 10.3), այլև նույնիսկ **ոչ պարամետրական**:

Թեորեմ 10.4 (Կոլմոգորով): Եթե ճիշտ է $\mathbb{H}_0 : \mathbf{X} \sim P_0$ վարկածը, և $F_0(x)$ բաշխման ֆունկցիան **անընդհատ** է, ապա D_n վիճականու բաշխումը **ցանկացած** $n \geq 1$ -ի համար **կախված չէ** P_0 բաշխումից:

Այսպիսով: Ենթադրենք՝ $F_0(a) = 0, F_0(b) = 1$ և $0 < F_0(x) < 1$ բոլոր $x \in (a, b)$ -ից, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, այսինքն՝ (a, b) միջակայքը P_0 բաշխման **կրիչն** է ($N_{P_0} = (a, b)$): Նշանակենք՝ $B = \{x \in (a, b): F_0(x) < F_0(x + \varepsilon) \text{ բոլոր բավականաչափ փոքր } \varepsilon > 0 \text{ թվերի համար}\}$ -ով $F_0(x)$ ֆունկցիայի «**աճի**» կետերը: Հեշտ է տեսնել, որ կամայական $y \in (0, 1)$ -ից թվի համար գոյություն ունի **միակ** $x \in B$ -ից կետ այնպիսին, որ $F_0(x) = y$, այսինքն՝ $F_0(x)$ բաշխման ֆունկցիան B բազմության վրա **հակադարձելի** է: Նշանակենք՝ $x = F_0^{-1}(y)$:

Դիտարկենք $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \sim P_0$ նմուշի համար $U_i = F_0(X_i)$, $i = 1, \dots, n$ պատահական մեծությունները, որոնք **անկախ** են, քանի որ անկախ են $X_1, \dots, X_n$ պատահական մեծությունները:

Մյուս կողմից, U_i պատահական մեծությունները բաշխված են **հավասարաչափ** օրենքով $[0, 1]$ միջակայքում՝ $U_i \sim \mathcal{U}(0, 1)$: Իրոք՝

$$F_{U_i}(y) = P_0(U_i < y) = P_0(X_i < F_0^{-1}(y)) = F_0(F_0^{-1}(y)) = y$$

բոլոր $y \in (0, 1)$ համար: Այժմ ներկայացնենք D_n վիճականին

$$\begin{aligned} D_n &= \sup_{x \in \mathcal{R}} |F_n^*(x) - F_0(x)| = \sup_{x \in B} |F_n^*(x) - F_0(x)| = \\ &= \sup_{0 < y < 1} |F_n^*(F_0^{-1}(y)) - y| \end{aligned} \quad (10.13)$$

տեսքով, որտեղ $y = F_0(x)$ և $x = F_0^{-1}(y) \in B$: Մյուս կողմից, քանի որ

$$F_n^*(F_0^{-1}(y)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{(-\infty, F_0^{-1}(y))}(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{(-\infty, y)}(U_i) = \tilde{F}_n^*(y),$$

որտեղ $\tilde{F}_n^*(y)$ -ը $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n)$ նմուշի բաշխման ֆունկցիան է, ապա (10.13)-ից կստանանք՝

$$D_n = \sup_{0 < y < 1} |\tilde{F}_n^*(y) - y|,$$

այսինքն՝ D_n վիճականու բաշխումը **կախված չէ** $F_0(x)$ բաշխման ֆունկցիայից:

Դիտողություն 10.8: Ի նկատի ունենալով D_n վիճականու **ոչ պարամետրական** լինելու հատկությունը՝ կազմված է այդ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիայի աղյուսակը (տե՛ս աղյուսակ Ա 12-ը), որտեղ որպես P_0 բաշխում է դիտարկվել $[0,1]$ միջակայքում **հավասարաչափ** բաշխումը:

Նշանակենք D_n վիճականու **կրիտիկական արժեքը** $d_\alpha(n)$ -ով, այսինքն՝

$$P(D_n \geq d_\alpha(n)) = \alpha:$$

$n \geq 20$ -ի դեպքում λ_α կրիտիկական արժեքը գործնականորեն քիչ է տարբերվում $\sqrt{n} d_\alpha(n)$ մեծությունից:

Որոշակի α նշանակալիության մակարդակների համար λ_α **կրիտիկական արժեքներն** են՝

$$\lambda_{0.2} = 1.08, \lambda_{0.1} = 1.23, \lambda_{0.05} = 1.36, \lambda_{0.02} = 1.52, \lambda_{0.01} = 1.63: \quad (10.14)$$

Օրինակ 10.3: $\alpha = 0.2$ մակարդակի և նմուշի $n = 20$ ծավալի դեպքում ունենք $\sqrt{20} d_{0.2}(20) \approx 1.036$, այն ժամանակ, երբ $\lambda_{0.2} = 1.08$: (10.14)-ում բերված մնացած α մակարդակների համար կատարված հաշվարկները ցույց են տալիս, որ $|\Delta_\alpha| = |\sqrt{n} d_\alpha(n) - \lambda_\alpha|$ **բացարձակ սխալներն** ունեն մոտավորապես 0.005 կարգ:

Օգտվելով **Կոլմոգորովի** 10.3 և 10.4 թեորեմներից՝ ստանանք **X** նմուշին համապատասխանող **անընդհատ** $F(x)$ բաշխման ֆունկցիայի **ճշգրիտ և ասիմպտոտիկ վստահության միջակայքերը**:

Թեորեմ 10.3-ից հետևում է, որ բոլոր $x \in \mathcal{R}$ -երի համար ճիշտ է

$$P\left(F_n^*(x) - \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n}} < F(x) < F_n^*(x) + \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow 1 - \alpha, \quad n \rightarrow \infty$$

գուգամիտությունը: Այսինքն՝ $(1 - \alpha)$ մակարդակով **ասիմպտոտիկ վստահության միջակայքը** $F(x)$ ֆունկցիայի համար $\left(F_n^*(x) \mp \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n}}, \forall x \in \mathcal{R}\right)$ միջակայքն է:

Նմանապես, թեորեմ 10.4 -ից **բոլոր** $x \in \mathcal{R}$ -ից՝ կստանանք՝

$$P(F_n^*(x) - d_\alpha(n) < F(x) < F_n^*(x) + d_\alpha(n)) = 1 - \alpha, \quad n \geq 1,$$

ուստի $(1 - \alpha)$ մակարդակով **վստահության միջակայքը** $F(x)$ ֆունկցիայի համար $(F_n^*(x) \mp d_\alpha(n), \forall x \in \mathcal{R})$ միջակայքն է:

Այստեղից, օգտվելով վարկածների ստուգման **վստահության միջակայքերի** եղանակից, $\mathbb{H}_0$ վարկածը կստուգվի հետևյալ կերպ՝

α նշանակալիության մակարդակով $\mathbb{H}_0$ վարկածը **չի հերքվի**, եթե բոլոր k -երի ($k = 1, \dots, n - 1$) համար՝

ասիմպտոտիկ դեպքում՝

$$F_n(x_{(k+1)}) - \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n}} < F_0(x_{(k)}) < F_n(x_{(k)}) + \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n}}, \quad (10.15)$$

$n < 20$ դեպքում՝

$$F_n(x_{(k+1)}) - d_\alpha(n) < F_0(x_{(k)}) < F_n(x_{(k)}) + d_\alpha(n), \quad (10.16)$$

և, համապատասխանաբար, այն **չհերքվի**, եթե գոնե մեկ k -ի համար այս անհավասարությունները խախտվեն:

Օրինակ 10.4: Աղյուսակ Ա 7-ից վերցված են $n = 10$ ծավալ ունեցող **նորմալ «պատահական թվեր»** (տե՛ս աղյուսակի Ա 7-ի վերջին սյունը)՝

$$\begin{array}{ccccc} -0.261, & -0.357, & 1.827, & 0.535, & -2.056, \\ -0.392, & -2.832, & -0.362, & -1.040, & 0.089: \end{array}$$

0.1 նշանակալիության մակարդակով **Կոլմոգորովի հայտանիշի** օգնությամբ ստուգենք վարկած, որ այդ թվերը $N(0,1)$ **ստանդարտ նորմալ** բաշխված պատահական մեծության արժեքներ են:

Վերադասավորենք աճման կարգով այդ թվերը (կազմենք **վարիացիոն շարքը**) և լրացնենք հետևյալ աղյուսակը՝

k	$x_{(k)}$	$\frac{k}{n} - d_\alpha(n)$	$F_0(x_{(k)})$	$\frac{k-1}{n} + d_\alpha(n)$
1	-2.832	-0.2687	0.0023	0.3687
2	-2.056	-0.1687	0.02	0.4687

§ 10.1.3. Կոլմոգորովի հայտանիշ

3	-1.040	-0.0687	0.1492	0.5687
4	-0.392	0.0313	0.3483	0.6687
5	-0.357	0.1313	0.3605	0.7687
6	-0.261	0.2313	0.3974	0.8687
7	0.089	0.3313	0.5359	0.9687
8	0.362	0.4313	0.6413	1.0687
9	0.535	0.5313	0.7037	1.1687
10	1.827	0.6313	0.9662	1.2687

Այստեղ՝ $n = 10$, $d_\alpha(n) = d_{0.1}(10) = 0.3687$ (տե՛ս աղյուսակ Ա 12-ը), $F_n(x_{(k)}) = \frac{k-1}{n}$, $F_0(x_{(k)}) = \Phi(x_{(k)})$:

Նկատելով, որ բոլոր $x_{(k)}$ -երի համար բավարարվում են (10.16) պայմանները՝ եզրակացնում ենք, որ 0.1 մակարդակով $N(0,1)$ նորմալ բաշխվածության վերաբերյալ վարկածը **չի հերքվում**:

Խնդիրներ

10.5. Ապացուցել, որ *Կոլմոգորովի հայտանիշը համաձայնության հայտանիշ է*:

Ցուցում՝ օգտվել *Կոլմոգորովի* թեորեմներից:

10.6. Դիցուք $X \sim P_0$ նմուշ է P_0 բաշխումից, որտեղ $F_0(x) = P_0(\xi < x)$ բաշխման ֆունկցիան **անընդհատ** է: Սահմանենք հետևյալ վիճականին (ω^2 վիճականի)՝

$$\omega_n^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (F_n^*(x) - F_0(x))^2 dF_0(x):$$

Ցույց տալ, որ ω^2 վիճականին **ոչ պարամետրական** է և գտնել $E[\omega_n^2]$ միջինը:

Ցուցում՝ կատարել $y = F_0(x)$ փոփոխականի փոխարինում և օգտվել թեորեմ 10.4-ից:

Պատասխան՝ $E[\omega_n^2] = \frac{1}{6n}$:

§ 10.2. Համասեռության հայտանիշներ

Վիճակագրության կիրառություններում շատ կարևոր է լինում ստուգել ստացված վիճակագրական տվյալների **համասեռությունը**, այսինքն պարզել տարբեր պայմաններում ստացված $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ և $\mathbf{Y}_m = (Y_1, \dots, Y_m)$ նմուշների **միևնույն բաշխում** ունենալու հարցը: Այդպիսի խնդիրներ առաջանում են, օրինակ, որոշ ապրանքի **որակը վերահսկելու** ժամանակ, երբ տարբեր պայմաններում ստացված նմուշների միջոցով պահանջվում է ստուգել, փոխվե՞լ է, թե՛ ոչ այդ ապրանքի որակը:

Ընդհանուր արմամբ խնդիրը դրվում է հետևյալ կերպ.

Դիցուք $\mathbf{X}_n \sim P_1$ -ը և $\mathbf{Y}_m \sim P_2$ -ը՝ համապատասխանաբար, $F_1(x)$ և $F_2(x)$ բաշխման ֆունկցիաներով P_1 և P_2 անհայտ բաշխումներից վերցված **միմյանցից անկախ** նմուշներ են: Պահանջվում է ստուգել

$\mathbb{H}_0 : F_1(x) \equiv F_2(x) (= F_0(x))$ **համասեռության** վարկածն

ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : F_1(x) \neq F_2(x)$ երկընտրանքային վարկածի, կամ

$\mathbb{H}_0 : P_1 \equiv P_2 (= P_0)$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : P_1 \neq P_2$:

Դիտարկենք այդ խնդիրը լուծման համար մի քանի հայտանիշ:

§ 10.2.1. Սմիռնովի համասեռության հայտանիշ

Դիցուք ստուգվում է **համասեռության** $\mathbb{H}_0$ վարկածը, երբ $F_1(x)$ և $F_2(x)$ բաշխման ֆունկցիաներն **անընդհատ** են: Հայտանիշը հիմնված է

$$D_{nm} = D(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_m) = \sup_{x \in \mathcal{R}} |F_{1n}^*(x) - F_{2m}^*(x)|$$

Սմիռնովի վիճակաճառ հատկության վրա, որտեղ $F_{1n}^*(x)$ -ը և $F_{2m}^*(x)$ -ը, համապատասխանաբար, $\mathbf{X}_n$ և $\mathbf{Y}_m$ նմուշների բաշխման ֆունկցիաներն են: Եթե ճիշտ է $\mathbb{H}_0$ վարկածը, ապա ըստ **Գլիվենկոյի** թեորեմի (տե՛ս [15]-ի

թեորեմ 4.32-ը՝ $F_{1n}^*(x)$ և $F_{2m}^*(x)$ բաշխման ֆունկցիաները բոլոր $x \in \mathcal{R}$ -ի համար **ունակ** գնահատականներ են $F_0(x)$ տեսական բաշխման ֆունկցիայի համար, այնպես, որ D_{nm} վիճականին չպետք է **էապես տարբերվի** զրոյից ($D_{nm} \xrightarrow{P} 0$), երբ n և $m \rightarrow \infty$: Այսպիսով, D_{nm} վիճականու **համեմատաբար «մեծ»** արժեքները պետք է վկայեն $\mathbb{H}_0$ վարկածի դեմ:

Տեղի ունի հետևյալ կարևոր պնդումը (տե՛ս **Боробков** [2])՝

Թեորեմ 10.5 (Սմիռնով): Եթե $F_0(x)$ բաշխման ֆունկցիան **անընդհատ** է, ապա $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում ճիշտ է հետևյալ գուգամիտությունը՝

$$\sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{nm} \xrightarrow{d} \mathbb{K}, \quad n \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow \infty, \quad \frac{n}{m} \rightarrow c > 0:$$

Համաձայն **Սմիռնովի** թեորեմի՝

$$P_0 \left(\sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{nm} \geq \lambda_\alpha \right) \rightarrow P(\xi \geq \lambda_\alpha) = 1 - K(\lambda_\alpha) = \alpha,$$

որտեղ λ_α -ն **Կուլմոգորովի** բաշխում ունեցող ξ պատահական մեծության α մակարդակով **ասիմպտոտիկ կրիտիկական արժեքն** է: Այսպիսով, **Սմիռնովի** հայտանիշը տրվում է հետևյալ **ասիմպտոտիկ կրիտիկական տիրույթով** ($n, m > 20$)՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m) : \sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{nm} \geq \lambda_\alpha \right\}:$$

Պարզվում է (տե՛ս [2]), որ **Սմիռնովի** D_{nm} վիճականին, ինչպես և **Կուլմոգորովի** D_n վիճականին, **ոչ պարամետրական** է (բաշխումից «ազատ»):

Թեորեմ 10.6 (Սմիռնով): Եթե $F_0(x)$ ֆունկցիան **անընդհատ** է, ապա $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում D_{nm} **վիճականու բաշխումը** (ցանկացած $n \geq 1$ և $m \geq 1$ համար) **կախված չէ** P_0 բաշխումից:

Օրինակ 10.5: Երկու հաստոցի արտադրանքից վերցվել են յուրաքանչյուրը 60 դետալից բաղկացած երկու նմուշ, որոնց չափման արդ-

յունքները (մմ-ով) ներկայացված են «**ցողուն և տերևներ**» տեսքով (տե՛ս **Հարությունյան** [17])՝

I հաստոց

14.1 4 4 8

14.2 0 4 4 8 8 8 8 9

14.3 0 1 2 3 4 5 5 5 6 6 7 8 8

14.4 1 2 2 3 3 3 6 6 7 7 7 8 8 8 9

14.5 0 0 1 4 4 4 6 6 6 8 8

14.6 0 4 4 6 6 9

14.7 0 2 3

14.8 –

14.9 5

II հաստոց

14.1 1 2 5 6 6 7

14.2 3 3 3 4 4 5 5 8

14.3 0 0 1 3 5 5 6 6 6 6 6 6 7 8 8 8 8 9

14.4 0 2 4 6 6 6 8 8 8

14.5 0 0 0 1 1 1 3 3 4 4 5 5 5 6

14.6 0 8 9

14.7 –

14.8 –

14.9 –

0.05 նշանակալիության մակարդակով ստուգենք վարկած, որ այդ հաստոցների համար կատարված չափումների շեղումները իրական արժեքից բաշխված են **միևնույն օրենքով**:

x_n և y_n նմուշների համար կազմենք ($\sum v_i$) **կուտակված բացարձակ հաճախությունների** աղյուսակը («**ցողունի**» 14 արժեքն աղյուսակում նշված չէ).

x_n			–.14	–.18		–.20	–.24	–.28	
$\sum v_i$			0	2		3	4	6	
y_n	–.11	–.12	–.15	–.16	–.17	–.23	–.24	–.25	–.28
$\sum v_i$	0	1	2	3	5	6	9	11	13

x_n	–.29	–.30	–.31	–.32	–.33	–.34	–.35	–.36	–.37
$\sum v_i$	10	11	12	13	14	15	16	19	21
y_n		–.30	–.31		–.33		–.35	–.36	–.37
$\sum v_i$		14	16		17		18	20	26

§ 10.2. Համասեռության հայտանիշներ

x_n	-.38		-.41	-.42	-.43	-.46	-.47	-.48	-.49
$\sum v_i$	22		24	25	27	30	32	35	38
y_n	-.38	-.39	-.40	-.42	-.44	-.46		-.48	
$\sum v_i$	27	32	33	34	35	36		39	

x_n	-.50	-.51		-.54		-.56	-.58	-.60	-.64
$\sum v_i$	39	41		42		45	48	49	51
y_n	-.50	-.51	-.53	-.54	-.55	-.56		-.60	
$\sum v_i$	42	45	48	50	52	56		57	

-.66	-.69	-.70	-.72	-.73	-.75	> .75
53	55	56	57	58	59	60
-.68	-.69	> .69				
58	59	60				

Աղյուսակից դժվար չէ տեսնել, որ կուտակված բացարձակ հաճախությունների **առավելագույն տարբերությունն** է $56 - 45 = 11$, որը համապատասխանում է $[14.55, 14.56)$ միջակայքին: Այսպիսով, $D_{nn} = \frac{11}{60} \approx 0.183$, և քանի որ

$$\sqrt{\frac{n}{2}} D_{nn} = \sqrt{30} \cdot 0.183 \approx 1.0023 < 1.36 = \lambda_{0.05},$$

ապա, համաձայն **Սմիռնովի հայտանիշի**, կարելի է համարել, որ տվյալները համապատասխանում են դետալների չափումների շեղումները իրական արժեքից **միևնույն օրենքով** բաշխված լինելու վարկածին:

§ 10.2.2. χ^2 համասեռության հայտանիշ

Ի տարբերություն *Սմիռնովի հայտանիշի*, որի միջոցով համեմատվում էր միայն *երկու* նմուշ, այս մեթոդը թույլ է տալիս միաժամանակ հետազոտել ցանկացած վերջավոր թվով նմուշներ:

Այսպիսով, ենթադրենք կատարվել են k հատ $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k$ **անկախ փորձերի սերիաներ**, որտեղ յուրաքանչյուր j -րդ սերիա բաղկացած է n_j հատ դիտումներից, $j = 1, \dots, k$: Դիցուք յուրաքանչյուր $\mathcal{U}_j$ սերիային համապատասխանում է s տարբեր x_i , $i = 1, \dots, s$ արժեքներ ընդունող $\xi_j \sim P_j$ պատահական մեծություն, և $\mathbf{X}_j = (X_{j1}, \dots, X_{jn_j})$ այդ պատահական մեծության հետ կապված նմուշն է: Նշանակենք v_{ij}^* -ով $\mathbf{X}_j$ վեկտորի x_i արժեքն ընդունող X_{jm} , $m = 1, \dots, n_j$ անդամների (պատահական) թիվը՝

$$v_{ij}^* = \sum_{m=1}^{n_j} \mathbb{1}_{\{x_i\}}(X_{jm}), \quad \sum_{i=1}^s v_{ij} = n_j, \quad \sum_{j=1}^k n_j = n :$$

Պահանջվում է ստուգել $\mathbb{H}_0$ վարկած, որ բոլոր փորձերը կատարվել են **միևնույն** $\xi \sim P$ պատահական մեծության նկատմամբ, այսինքն՝ ստուգել վարկած, որ

$$\mathbb{H}_0 : P_j = P, \quad j = 1, \dots, k \quad \text{կամ} \quad \mathbb{H}_0 : F_j(x) = F(x), \quad j = 1, \dots, k$$

(այստեղ $F_j(x)$ բաշխման ֆունկցիան համապատասխանում է ξ_j պատահական մեծությանը, իսկ $F(x)$ -ը՝ ξ -ին):

Նշանակելով $p_{ij} = P_j(\xi_j = x_i)$, $i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, k$ և $p_i = P(\xi = x_i)$ ՝ $\mathbb{H}_0$ վարկածը կարելի է ներկայացնել հետևյալ ձևով՝

$$\mathbb{H}_0 : p_{ij} = p_i, \quad i = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, k \quad \left(\sum_{i=1}^s p_i = 1 \right): \quad (10.17)$$

Քանի որ $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում $v_{ij}^* \sim \text{Bin}(n_j, p_i)$, ապա $E(v_{ij}^*) = n_j p_i$, և, համաձայն **Պիրսոնի χ^2 մեթոդի**, որպես **փորձնական և տեսական** բաշխումների շեղման չափ պետք է վերցվի χ^2 վիճականին՝

$$\hat{\chi}_n^2(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^k \frac{(v_{ij}^* - n_j p_i)^2}{n_j p_i}, \quad \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_s): \quad (10.18)$$

Սակայն, քանի որ p_i , $i = 1, \dots, s$ հավանականություններն **անհայտ** են, ուստի որպեսզի կիրառվի $\hat{\chi}_n^2(\mathbf{p})$ վիճականին, անհրաժեշտ է **գնահատել** p_i պարամետրերը:

Լեմմա 10.2: $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում p_i պարամետրերի ($i = 1, \dots, s$) ըստ միացյալ n ծավալի $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_k)$ նմուշի **ՃՄ գնահատականները**

$$\hat{p}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k v_{ij}^*$$

վիճականներն են:

Ա պ ա ց ու ց ու մ: $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_k)$ նմուշին համապատասխանող **Ճշմարտանմանության ֆունկցիան** կլինի

$$f_{\mathbf{p}}(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^s \prod_{j=1}^k p_i^{v_{ij}^*} = \prod_{i=1}^s p_i^{v_{i\cdot}^*},$$

որտեղ $v_{i\cdot}^* = \sum_{j=1}^k v_{ij}^*:$

Գտնենք լոգարիթմական Ճշմարտանմանության ֆունկցիան՝

$$L_{\mathbf{p}}(\mathbf{X}) = \ln f_{\mathbf{p}}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^s v_{i\cdot}^* \ln p_i:$$

Հաշվի առնելով

$$\sum_{i=1}^s p_i = 1$$

պայմանը՝ կազմենք $H(p_1, \dots, p_s; \lambda)$ **լագրանժիանը**՝

$$H(p_1, \dots, p_s; \lambda) = L_{\mathbf{p}}(\mathbf{X}) - \lambda \left(\sum_{i=1}^s p_i - 1 \right):$$

Էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանները կհանգեցնեն հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{v_{i.}^*}{p_i} - \lambda = 0, & i = 1, \dots, s \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^s p_i - 1 = 0 \end{cases},$$

որտեղից՝

$$p_i = \frac{v_{i.}^*}{\lambda}, \text{ և, քանի որ } \sum_{i=1}^s p_i = 1, \text{ ապա } \sum_{i=1}^s \frac{v_{i.}^*}{\lambda} = 1, \text{ այսինքն՝ } \hat{\lambda} = \sum_{i=1}^s v_{i.}^* = n,$$

$$\text{այնպես որ՝ } \hat{p}_i = \frac{v_{i.}^*}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k v_{ij}^* : \quad \blacksquare$$

Այսպիսով, **հայտանիշի վիճականին** ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\hat{\chi}_n^2(\hat{\mathbf{p}}) = n \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^k \frac{(v_{ij}^* - n_j v_{i.}^*/n)^2}{n_j v_{i.}^*} = n \left(\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^k \frac{(v_{ij}^*)^2}{n_j v_{i.}^*} - 1 \right) : \quad (10.18)$$

Տեղի ունի (տե՛ս **Крамєр** [8]) հետևյալ պնդումը՝

Թեորեմ 10.7: $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում ճիշտ է

$$\hat{\chi}_n^2(\hat{\mathbf{p}}) \xrightarrow{d} \mathbb{H}^2((s-1)(k-1))$$

զուգամիտությունը :

$\mathbb{H}_0$ վարկածը ստուգող, α չափ ունեցող χ^2 **հայտանիշի կրիտիկական տիրույթը** կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{\mathbf{x} : \hat{\chi}_n^2(\hat{\mathbf{p}}) > \chi_\alpha^2((s-1)(k-1))\}:$$

Դիտողություն 10.9: Այժմ դիցուք պահանջվում է ստուգել **պարամետրական** տեսք ունեցող

$$\mathbb{H}_0 : p_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = p_i(\boldsymbol{\theta}), \quad i = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, k \quad \left(\sum_{i=1}^s p_i(\boldsymbol{\theta}) = 1 \right)$$

համասեռության վարկածը, որտեղ $\theta \in \Theta \subset \mathcal{R}^r (r \geq 1)$, $p_{ij}(\theta) = P_\theta(X_j = x_i)$:

Ենթադրելով, որ $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվում է, և, դիտարկելով տվյալները որպես $v_1^*, \dots, v_s^*$ խմբային հաճախություններով միացյալ նմուշ, պետք է գտնել θ պարամետրի $\hat{\theta}$ բազմանդամային ՃՄ գնահատականը: Այնուհետև որպես հայտանիշի վիճականի դիտարկել (10.18) բանաձևով որոշվող $\hat{\chi}_n^2(\hat{\mathbf{p}})$ վիճականին, որտեղ $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_s)$ ($p_i = p_i(\theta)$ պարամետրական ֆունկցիաները փոխարինել $\hat{p}_i = p_i(\hat{\theta})$ գնահատականներով): Թեորեմ 10.7-ը կփոխարինվի հետևյալ թեորեմով՝

Թեորեմ 10.8: $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում ճիշտ է

$$\hat{\chi}_n^2(\hat{\mathbf{p}}) \xrightarrow{d} \mathbb{H}^2((s-1)k-r), \quad n \rightarrow \infty$$

զուգամիտությունը:

Մասնավոր դեպքեր

1. $s = 2$ ($i = 1, 2$, $j = 1, \dots, k$):

Դիցուք ξ_j -երը, $j = 1, \dots, k$ յուրաքանչյուրը 0 և 1 արժեք ընդունող անկախ *Բերնուլիի* պատահական մեծություններ են: Նշանակենք՝ $A = (\xi_j = 1)$ -ով **հաջողությունը** և $\bar{A} = (\xi_j = 0)$ -ով՝ **անհաջողությունը**:

Համասեռության $\mathbb{H}_0 : p_{ij} = p_i$ վարկածը նշանակում է, որ բոլոր $\mathcal{U}_j$ ($j = 1, \dots, k$) փորձերի սերիաներում A պատահույթն ունի ի հայտ գալու միևնույն հաստատուն (**անհայտ**) $P(A) = p_1 = p$ ($\mathbb{P}(\bar{A}) = p_2 = q = 1 - p$) հավանականությունը:

Համաձայն լեմմա 10.2-ի՝ p պարամետրի ՃՄ գնահատականը

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k v_j^*$$

վիճականին է, որտեղ $v_j^* = v_{1j}^*$ -ը A պատահույթի ի հայտ գալու (**պատահական**) թիվն է փորձերի j -րդ $\mathcal{U}_j$ սերիայում: $\hat{\chi}_n^2(\hat{p})$ վիճականին (տե՛ս (10.18)) կներկայացվի հետևյալ ձևով (տե՛ս խնդիր 10.7-ը)՝

$$\begin{aligned}\hat{\chi}_n^2(\hat{p}) &= n \sum_{j=1}^k \frac{(v_{1j}^*)^2}{n_j v_{1\cdot}^*} + n \sum_{j=1}^k \frac{(v_{2j}^*)^2}{n_j v_{2\cdot}^*} - n = \\ &= \frac{1}{\hat{p}} \sum_{j=1}^k \frac{(v_j^*)^2}{n_j} + \frac{1}{\hat{q}} \sum_{j=1}^k \frac{(n_j - v_j^*)^2}{n_j} - n = \frac{1}{\hat{p}\hat{q}} \sum_{j=1}^k \frac{(v_j^*)^2}{n_j} - n \frac{\hat{p}}{\hat{q}} \quad (10.19)\end{aligned}$$

($v_{1\cdot}^* = n\hat{p}$, $v_{2\cdot}^* = n\hat{q}$, $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, $v_{1j}^* = v_j^*$, $v_{2j}^* = n_j - v_j^*$):

2. $k = 2$ ($i = 1, \dots, s$, $j = 1, 2$):

Երկու նմուշի դեպքում $\mathbb{H}_0 : p_{ij} = p_i$ վարկածը ստուգող $\hat{\chi}_n^2(\hat{\mathbf{p}})$ վիճակահանի կրնդունի հետևյալ տեսքը (տե՛ս խնդիր 10.8-ը)՝

$$\hat{\chi}_n^2(\hat{\mathbf{p}}) = n_1 n_2 \sum_{i=1}^s \frac{1}{v_{i1}^* + v_{i2}^*} \left(\frac{v_{i1}^*}{n_1} - \frac{v_{i2}^*}{n_2} \right)^2 : \quad (10.20)$$

Նշանակելով՝ $\omega_i = \frac{v_{i1}^*}{v_{i1}^* + v_{i2}^*}$, $\omega = \frac{n_1}{n_1 + n_2}$ ՝ (10.20) բանաձևը կրերվի

$$\hat{\chi}_n^2(\hat{\mathbf{p}}) = \frac{1}{\omega(1-\omega)} \left(\sum_{i=1}^s \omega_i v_{i1}^* - \omega n_1 \right) \quad (10.21)$$

տեսքի (տե՛ս խնդիր 10.9):

Օրինակ 10.6: Ուսումնասիրվում է որոշակի դեղամիջոցի ազդեցությունը՝ կախված նրա կիրառման երեք եղանակից: Փորձարկման արդյունքները բերվում են հետևյալ աղյուսակում՝

Կիրառման եղանակ \ Ազդեցություն	I	II	III
Դրական	15	19	18
Բացասական	26	25	22

0.05 նշանակալիության մակարդակով ստուգել դեղամիջոցի ազդեցության կախվածությունը նրա կիրառման եղանակից:

Այստեղ $s = 2$, $k = 3$: $\chi_n^2(\hat{p})$ վիճականին հավասար է (տե՛ս (10.19))

§ 10.2.3. Քանորդիչների և նշանների հայտանիշներ

$$\chi_n^2(\hat{p}) = \frac{1}{\hat{p}\hat{q}} \sum_{j=1}^3 \frac{(v_j)^2}{n_j} - n \frac{\hat{p}}{\hat{q}},$$

որտեղ՝

$$v_1 = 15, v_2 = 19, v_3 = 18, n_1 = 41, n_2 = 44, n_3 = 40, n = 125,$$

$$\hat{p} = \frac{1}{n} (v_1 + v_2 + v_3) = 0.416, \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.584 :$$

Հետևաբար՝

$$\chi_n^2(\hat{p}) = \frac{1}{0.416 \cdot 0.584} \cdot \left(\frac{15^2}{41} + \frac{19^2}{44} + \frac{18^2}{40} \right) - 125 \cdot \frac{0.416}{0.584} \approx 0.66 :$$

Քանի որ $\chi_n^2(\hat{p}) \approx 0.66 < 5.992 = \chi_{0.05}^2(2)$, ապա 0.05 մակարդակով դեղամիջոցի ազդեցությունը **կախված չէ** նրա կիրառման եղանակից: Իրական **հասանելի նշանակալիության մակարդակը** $P-V = P(\chi_2^2 \geq 0.66) \approx 0.7$, որտեղ χ_2^2 -ն 2 ազատության աստիճաններով χ^2 **բաշխում** ունեցող պատահական մեծություն է: Այստեղից կարելի է եզրակացնել, որ մոտավորապես 30 % դեպքերում պետք է սպասել, որ դեղամիջոցի ազդեցությունը կլինի **կախված** նրա կիրառման եղանակից:

§ 10.2.3. Քանորդիչների և նշանների հայտանիշներ

Քանորդիչների հայտանիշ

Դիցուք $\mathbf{X} \sim P \in \mathcal{P}$ ՝ P բաշխումով ξ պատահական մեծության նմուշ է, որտեղ $\mathcal{P}$ դասի բաշխումներին համապատասխանող $F(x) \in \mathcal{F}$ բաշխման ֆունկցիաներն **անընդհատ** են: Դիտարկենք

$$\mathbb{H}_0: F(\zeta_i) = p_i, \quad i = 1, \dots, r-1$$

բարդ վարկածը, որտեղ $-\infty < \zeta_1 < \dots < \zeta_{r-1} < \infty$, $0 < p_1 < \dots < p_{r-1} < 1$ **տրված** թվեր են (ζ_i -երը $F(x)$ բաշխման ֆունկցիայի p_i մակարդակով **քանորդիչներն** են (տե՛ս [15], սահմանում 1.14)): $\mathbb{H}_0$ վարկածը **բարդ** է, որովհետև այն պարունակում է նշված քանորդիչներ ունեցող բոլոր անընդհատ $F(x) \in \mathcal{F}$ բաշխման ֆունկցիաները:

Նշանակենք՝

$$\Delta_j = [\zeta_{j-1}, \zeta_j), \quad j = 1, \dots, r, \quad \text{որտեղ } \zeta_0 = -\infty, \zeta_r = \infty, \quad v_j^* = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\Delta_j}(X_i) :$$

Այսպիսով, $\mathbb{H}_0$ վարկածն առաջացնում է $\mathcal{X} = \xi(\Omega)$ տարածության տրոհում՝

$$\mathcal{X} = \bigcup_{j=1}^r \Delta_j, \quad \Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset, \quad i \neq j:$$

$\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում $\mathbf{v}^*$ վեկտորն ունի **բազմանդամային բաշխում**՝ $\mathbf{v}^* = (v_1^*, \dots, v_r^*) \sim \mathbb{M}(n; p_1^0, \dots, p_r^0)$, որտեղ $p_i^0 = p_i - p_{i-1}$, $i = 1, \dots, r$, $p_0 = 0$, $p_r = 1$:

Մյուս կողմից, $\mathbb{H}_0$ վարկածը համարժեք է

$$\mathbb{H}'_0 : P(\xi \in \Delta_j) = p_j^0, \quad j = 1, \dots, r$$

վարկածին, այնպես որ այն ստուգելու համար կարելի է կիրառել

$$\hat{\chi}_n^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(v_i^* - np_i^0)^2}{np_i^0} \xrightarrow{d} \mathbb{H}^2(r-1), \quad n \rightarrow \infty \quad (10.22)$$

զուգամիտության վրա հիմնված χ^2 **համաձայնության հայտանիշը**:

Հետևաբար, տվյալ α նշանակալիության մակարդակի համար **քանոր-դիչների հայտանիշը** որոշվում է

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{\mathbf{x} : \hat{\chi}_n^2 \geq \chi_{\alpha}^2(r-1)\}$$

կրիտիկական տիրությունով:

Նշանների հայտանիշ և համասեռություն

Նշանների հայտանիշ անվանվում է $r = 2$, $p = 1/2$ դեպքին համապատասխանող **քանորդիչների հայտանիշը**: Եվ այսպես, դիցուք $\mathbf{X} \sim F$ նմուշը համապատասխանում է **անընդհատ** բաշխման ֆունկցիաների $\mathcal{F}$ դասից $F = F(x)$ բաշխման ֆունկցիային, և ստուգվում է

$$\mathbb{H}_0 : F(\zeta_1) = 1/2, \quad -\infty < \zeta_1 < \infty$$

վարկածը, որտեղ $\zeta_1 = x_{med}$ -ը $F(x)$ բաշխման ֆունկցիայի **միջնարժեքն** է (**մեդիանը**): Վարկածը ստուգող (10.22) $\hat{\chi}_n^2$ վիճականին այս դեպքում կրն-դունի հետևյալ տեսքը՝

$$\hat{\chi}_n^2 = \frac{2}{n} \left(v_1^* - \frac{n}{2} \right)^2 + \frac{2}{n} \left(v_2^* - \frac{n}{2} \right)^2 = \frac{4}{n} \left(v_1^* - \frac{n}{2} \right)^2,$$

որտեղ

$$v_1^* = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{(-\infty, \zeta_1)}(X_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{(-\infty, 0)}(X_i - \zeta_1)$$

վիճականին ցույց է տալիս $(-\infty, \zeta_1)$ միջակայքում ընկած X_i նմուշային արժեքների թիվը կամ **բացասական արժեքներ** ընդունող $X_i - \zeta_1$ անդամ-ների թիվը, $i = 1, \dots, n$: Այնպես որ **նշանների հայտանիշը** տրվում է

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ \mathbf{x} : \frac{4}{n} \left(v_1 - \frac{n}{2} \right)^2 \geq \chi_{\alpha}^2(1) \right\} \quad (10.23)$$

կրիտիկական տիրույթի միջոցով:

Այժմ այս հայտանիշը կիրառենք **համասեռության** վերաբերյալ վար-կածը ստուգելու համար:

Դիցուք $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})_n = ((X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n))$ երկչափ $\mathbf{U} = (\xi, \eta)$ պատահա-կան վեկտորին համապատասխանող նմուշ է: Պահանջվում է ստուգել $\mathbb{H}_0$ վարկած, որ ξ և η պատահական մեծություններն **անկախ** են և **միատեսակ** բաշխված, այսինքն՝ ստուգել

$$\mathbb{H}_0 : F_{\mathbf{U}}(x, y) = F(x) \cdot F(y),$$

վարկածը, որտեղ $F(x)$ -ը որոշակի անընդհատ բաշխման ֆունկցիա է:

Վարկածը ստուգելու համար կառուցենք $Z_i = X_i - Y_i$, $i = 1, \dots, n$ պատահական մեծությունները: Եթե $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվում է, ապա տեղի ունի հետևյալ պայմանը՝

$$\begin{aligned} P(Z_i < 0) &= \int_{(x-y < 0)} dF_U(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dF(x) \int_x^{+\infty} dF(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - F(x)) dF(x) \\ &= \frac{1}{2} = P(Z_i > 0), \end{aligned}$$

և $\mathbb{H}_0$ վարկածը բերվում է

$$\mathbb{H}'_0 : F_Z(0) = 1/2$$

համարժեք տեսքի: Այս դեպքում

$$v_1^* = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{(-\infty, 0)}(Z_i),$$

և α նշանակալիության մակարդակով կրիտիկական տիրույթը կլինի

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ \mathbf{x} : \frac{4}{n} \left(v_1 - \frac{n}{2} \right)^2 \geq \chi_\alpha^2(1) \right\} :$$

Դիտողություն: Հայտանիշի հիմնական թերությունն այն է, որ հայտանիշը «**ոչ տնտեսաբար**» է օգտագործում տվյալներում առկա տեղեկատվությունը, և այդ պատճառով այն նպատակահարմար է կիրառել վիճակագրական վերլուծության սկզբնական փուլում: Բացի այդ, հայտանիշը կիրառվում է միայն **հավասար ծավալ** ունեցող նմուշների համար:

Օրինակ 10.7: Ստորև բերված են 40 տարիների ընթացքում Մոսկվա (x) և Յարոսլավլ (y) քաղաքների՝ հունիս ամսվա ընթացքում գրանցված օդի միջին ջերմաստիճաններին վերաբերող տվյալները՝

x	12.0	12.0	12.0	12.0	12.8	13.8	13.1	13.0	13.9	14.2
y	10.8	11.3	12.0	13.0	10.9	10.0	11.5	13.0	10.1	10.0
x	14.0	14.0	13.9	15.0	14.9	14.9	16.0	15.0	15.5	15.9
y	10.0	12.0	12.4	11.0	13.0	14.2	13.8	16.0	13.9	14.7
x	16.0	15.9	16.0	16.9	17.2	16.9	16.9	17.0	16.8	17.5
y	13.0	15.0	16.0	12.9	13.9	14.8	15.0	16.0	17.0	16.0
x	18.0	18.0	18.1	18.4	19.2	19.3	20.0	20.1	14.0	14.0
y	14.0	14.8	16.0	17.8	15.0	16.1	17.0	17.7	14.8	15.2

0.05 մակարդակով ստուգել այդ տվյալների՝ **միևնույն բաշխումներն** ունեցող ξ և η պատահական մեծությունների արժեքներ լինելու վարկածը:

Օրինակում բերված $x_i - y_i$ տարբերությունների բացասական արժեքների v_1 թիվը հավասար է $v_1 = 5$, ուստի, հաշվի առնելով (10.23)-ը, կստանանք՝

$$\hat{\chi}_n^2 = \frac{4}{n} \left(v_1 - \frac{n}{2} \right)^2 = \frac{4}{40} (5 - 20)^2 = \frac{1}{10} \cdot 225 = 22.5 > 3.843 = \chi_{0.05}^2(1):$$

Հետևաբար, 0.05 նշանակալիության մակարդակով վարկածը **հերքվում է**:

§ 10.2.4. Ման – Ուիտնիի ռանգային Ս հայտանիշ

Հավասար ծավալ ունեցող $\mathbf{X}$ և $\mathbf{Y}$ երկու նմուշների համար այս հայտանիշը առաջին անգամ դիտարկել է **Ուիլկոկսոնը** : **Տարբեր ծավալի** նմուշների համար այն ընդհանրացրել են **Մանը** և **Ուիտնին** : Հայտանիշը պատկանում է այսպես կոչված **ռանգային հայտանիշների** ցանկին:

$\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ նմուշի X_i -րդ անդամի **ռանգ** կոչվում է $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ **վարիացիոն շարքում** այդ անդամի զբաղեցրած տեղի R_i **համարը**:

Դիցուք $\mathbf{X}_n \sim F_1$ և $\mathbf{Y}_m \sim F_2$ **միմյանցից անկախ** նմուշներ են: Ենթադրենք, բացի այդ, որ համապատասխան $F_1(x)$ և $F_2(x)$ բաշխման ֆունկցիաներն **անընդհատ** են: Դիտարկվում է

$\mathbb{H}_0 : F_1(x) \equiv F_2(x)$ **համասեռության** վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : F_1(x) \neq F_2(x)$ երկրնորանքայինի:

Կազմենք $(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_m) = (X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m)$ **միացյալ նմուշը** և դրա վարիացիոն շարքը: Դիցուք $R_1, \dots, R_n$ -ը **միացյալ նմուշում** $X_1, \dots, X_n$ անդամների **ռանգերն** են:

$T = \sum_{i=1}^n R_i$ վիճականին, որը ցույց է տալիս այն տեղերի համարների (ռանգերի) գումարը, որը զբաղեցնում են միացյալ վարիացիոն շարքում $\mathbf{X}_n$ նմուշի անդամները, կոչվում է **Ուիլկոկսոնի վիճականի**:

$(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_m)$ միացյալ նմուշի վարիացիոն շարքի համար սահմանենք հետևյալ պատահական մեծությունները՝

$$Z_{rs} = \begin{cases} 1, & \text{երբ } X_r < Y_s \\ 0, & \text{երբ } X_r \geq Y_s \end{cases} :$$

$$U = U(n, m) = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^m Z_{rs}$$

վիճականին, որը ցույց է տալիս այն դեպքերի թիվը, երբ միացյալ վարիացիոն շարքում $\mathbf{X}_n$ նմուշի անդամները նախորդում են $\mathbf{Y}_m$ նմուշի անդամներին, կոչվում է **Ման - Ուիտնիի U վիճականի** կամ ուղղակի **U վիճականի**:

Կարելի է ցույց տալ, որ T և U վիճականիների միջև տեղի ունի հետևյալ կապը՝

$$T + U = nm + \frac{n(n+1)}{2} : \quad (10.24)$$

U վիճականու միջինը և **ցրվածքը** հավասար են (տե՛ս խնդիր 10.10):

$$E(U) = nma,$$

$$\text{var}(U) = nm[a + (n-1)b + (m-1)c - (n+m-1)a^2], \quad (10.25)$$

որտեղ

$$a = P(X_1 < Y_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x) dF_2(x), \quad b = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1^2(x) dF_2(x),$$

$$c = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - F_2(x))^2 dF_1(x):$$

Մասնավորապես, $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = c = \frac{1}{3} \quad \text{և} \quad E(U) = \frac{nm}{2}, \quad \text{var}(U) = \frac{nm(n+m+1)}{12} :$$

ԿՄԹ-ից բխում է հետևյալ պնդումը (տե՛ս **Кендалл, Стъюарт** [6])՝

Թեորեմ 10.9 (Ման – Ուիտնի): $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում ճիշտ է

$$\sqrt{\frac{12}{nm(n+m+1)}} \left(U - \frac{nm}{2} \right) \xrightarrow{d} \mathbb{N}(0,1), \quad n, m \rightarrow \infty$$

գուցամիտությունը:

Թեորեմը գործնականում կարելի է կիրառել, երբ $n, m \geq 4$ և $n+m \geq 20$:

Դիտողություն 10.10: $\mathbb{H}_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: a \neq \frac{1}{2}$ -ի մրցող վարկածը ստուգող ունակ հայտանիշն ունի հետևյալ **ասիմպտոտիկ կրիտիկական տիրույթ** (մեծ n -երի և m -երի դեպքում)՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m) : \left| u(n, m) - \frac{nm}{2} \right| \geq \sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}} z_{\alpha/2} \right\},$$

որտեղ $u(n, m)$ -ը $U(n, m)$ վիճականու արժեքն է, երբ $\mathbf{X}_n(\omega_0) = \mathbf{x}_n$ և $\mathbf{Y}_m(\omega_0) = \mathbf{y}_m$:

Դիտողություն 10.11: Համապատասխան միակողմանի հայտանիշները կլինեն՝

$$\mathbb{H}_1^- : a < \frac{1}{2} \quad \text{երկրնտրանքային վարկածի դեպքում՝}$$

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m) : u(n, m) \leq t_{\alpha}^-(n, m)\}$$

ասիմպտոտիկ կրիտիկական տիրույթով հայտանիշը, և

$$\mathbb{H}_1^+ : a > \frac{1}{2}$$

երկրնտրանքային վարկածի դեպքում՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m) : u(n, m) \geq t_{\alpha}^+(n, m)\}$$

ասիմպտոտիկ կրիտիկական տիրույթով հայտանիշը, որտեղ

$$t_{\alpha}^{\mp}(n, m) = \frac{nm}{2} \mp \sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}} \cdot z_{\alpha} :$$

Օրինակ 10.8: 0.1 նշանակալիության մակարդակով ստուգենք որոշ ընկերության տղամարդկանց և կանանց աշխատողների միջև **տարիքային նշանակալի տարբերության** վերաբերյալ վարկածը՝ հիմք ընդունելով հետևյալ տվյալները՝

Տարիքը (տղամարդիկ, x_n)	31	25	38	33	42	40	44	26	43	35
Տարիքը (կանայք, y_n)	44	30	34	47	35	32	35	47	48	34

Կազմենք տվյալների **վարիացիոն շարքերը**՝

$x^{(n)}$	25	26	31	33	35	38	40	42	43	44
$y^{(n)}$	30	32	34	34	35	35	44	47	47	48

(10.26)

Այնուհետև գտնենք երկու եղանակով **Ման – Ուիտնիի Ս վիճականու** արժեքը՝ նախապես կառուցելով $\mathbf{z}^{(2n)} = (\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{y}^{(n)})$ միացյալ նմուշի **վարիացիոն շարքը**։

$\mathbf{z}^{(2n)}$ միացյալ նմուշի վարիացիոն շարքն է՝

25	26	30	31	32	33	34	34	35	35	35	38	40	42	43	44	44	47	47	48

I եղանակ

Օգտվենք $u = n^2 + \frac{n(n-1)}{2} - t$ բանաձևից (տե՛ս (10.24)), որտեղ $T(\omega_0) = t$ -ն և $U(\omega_0) = u$ -ն **Ուիլկոկսոնի** և **Ման-Ուիտնիի վիճականիներ**ի արժեքներն են։ Գտնենք

$$T = \sum_{i=1}^n R_i \text{ վիճականու } t = \sum_{i=1}^n r_i \text{ արժեքը, որտեղ } r_i = R_i(\omega_0) - \text{երը}$$

x_i արժեքների **ռանգերն** են $z^{(2n)}$ միացյալ նմուշի վարիացիոն շարքում:
Ունենք՝

$$\begin{array}{cccccccccccc} t = & 4 & + & 1 & + & 12 & + & 6 & + & 14 & + & 13 & + & 16.5 & + & 2 & + & 15 & + & 10 = & 93.5: \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ x_n & 31 & & 25 & & 38 & & 33 & & 42 & & 40 & & 44 & & 26 & & 43 & & 35: \end{array}$$

Օրինակը շարունակելու համար բերենք հետևյալ դիտողություն:

Դիտողություն 10.12: Տարբեր նմուշների **համընկնող արժեքների ռանգը** միացյալ նմուշի վարիացիոն շարքում հավասար է այդ շարքում տվյալ արժեքներին համապատասխանող տեղերի համարների **թվաբանական միջինին**:

Օրինակ, x_n նմուշի 44 արժեքի r_7 **ռանգը** միացյալ նմուշի վարիացիոն շարքում կլինի հավասար $r_7 = \frac{16+17}{2} = 16.5$, իսկ 35 արժեքի **ռանգը**՝

$$\begin{aligned} r_{10} &= \frac{9+10+11}{3} = 10: \text{ Այսպիսով, } t = 93.5, \text{ ուստի } u = n^2 + \frac{n(n-1)}{2} - t = \\ &= 10^2 + \frac{10 \cdot 9}{2} - 93.5 = \mathbf{61.5}: \end{aligned}$$

II եղանակ

Այժմ հաշվենք **Ս վիճականու** u արժեքը՝ օգտվելով սահմանումից, այսինքն՝ հաշվենք այն բոլոր դեպքերի թիվը, երբ x_n նմուշի անդամները **նախորդում** են միացյալ նմուշի վարիացիոն շարքում y_n նմուշի անդամներին:

Վարիացիոն շարքերի (10.26) ներկայացումից հեշտ է տեսնել, որ այդ դեպքերի թիվը x_n նմուշի յուրաքանչյուր անդամի համար կլինի հավասար՝

31-ը՝ 9 դեպք (44, 34, 47, 35, 32, 35, 47, 48, 34) , 25-ը՝ 10 դեպք, 38-ը՝ 4 դեպք (44, 47, 47, 48), 33-ը՝ 8, 42-ը՝ 4, 40-ը՝ 4, 44-ը՝ 3.5, 26-ը՝ 10, 43-ը՝ 4, 35-ը՝ 5:

$$\text{Այսպիսով՝ } u = 9 + 10 + 4 + 8 + 4 + 4 + 3.5 + 10 + 4 + 5 = \mathbf{61.5}:$$

Նշենք այստեղ, որ 44 արժեքը նախորդում է միացյալ նմուշի վարիացիոն շարքում y_n նմուշի 44, 47, 47, 48 արժեքներին: Չորս արժեքների փոխարեն վերցվում է 3.5-ը, քանի որ 44 արժեքը կրկնվում է երկու նմուշներում: Նույն ձևով 35 արժեքը նախորդում է y_n նմուշի 35, 35, 44, 47, 47, 48 արժեքներին: Կրկնվող 35 արժեքը վերցվում է մեկ անգամ, ուստի քանակը հավասար 5-ի:

Այժմ ստուգենք վարկածը:

Քանի որ $u = 61.5$, $\frac{nm}{2} = \frac{n^2}{2} = 50$, կատանանք՝

$$u(n, m) - \frac{nm}{2} = u - \frac{n^2}{2} = 11.5 :$$

Մյուս կողմից՝

$$\sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}} = \sqrt{175} \approx 13.23, \quad z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.645 \quad \text{և}$$

$$\sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}} z_{\alpha/2} \approx 21.761:$$

Այստեղից՝

$$u(n, m) - \frac{nm}{2} = 11.5 < 21.761 = \sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}} z_{\alpha/2},$$

հետևաբար վարկածը **չի հերքվում**, այսինքն՝ տղամարդկանց և կանանց միջև 0.1 մակարդակով տարիքային **նշանակալի տարբերություն չկա**:

Խնդիրներ

10.7. Ապացուցել (10.19)) բանաձևը:

10.8. Ապացուցել (10.20) բանաձևը:

10.9. Ապացուցել (10.21) բանաձևը:

10.10. Ապացուցել (10.25) բանաձևերը:

§ 10.3. Անկախության հայտանիշներ

Դիցուք տրված է **անհայտ** $F_Z(x, y)$ բաշխման ֆունկցիայով $\mathbf{Z} = (X, Y)$ պատահական վեկտորի $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})_n = ((X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n))$ նմուշը: Պահանջվում է ստուգել X և Y պատահական մեծությունների **անկախության** վերաբերյալ վարկածը՝

$$\mathbb{H}_0 : F_Z(x, y) \equiv F_X(x) \cdot F_Y(y): \quad (10.27)$$

§ 10.3.1. χ^2 անկախության հայտանիշ

Դիցուք Z -ը **դիսկրետ** պատահական վեկտոր է, ընդ որում X պատահական մեծությունն ընդունում է $a_1, \dots, a_s$ տարբեր արժեքներ, իսկ Y -ը՝ $b_1, b_2, \dots, b_k$ արժեքներ: Եթե s և k ծավալները բավականաչափ **մեծ** են, կամ եթե X -ը և Y -ը **անընդհատ** պատահական մեծություններ են, նշանակենք՝ $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_s$ -ով X պատահական մեծության արժեքների բազմության տրոհումը միջակայքերի, իսկ $\Delta''_1, \Delta''_2, \dots, \Delta''_k$ -ով՝ Y -ի արժեքների տրոհումը: Այնուհետև նշանակենք v_{ij} -ով $(X, Y)_n$ նմուշում (a_i, b_j) , $i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, k$ զույգերի թիվը (կամ $\Delta'_i \times \Delta'_j$ բազմություններում պարունակվող (X_i, Y_i) զույգերի թիվը), այնպես որ $\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^k v_{ij} = n$:

X և Y պատահական մեծությունների **զուգակցության կամ երկու մուտքով աղյուսակ** է կոչվում հետևյալ աղյուսակը՝

$X \backslash Y$	b_1 (Δ''_1)	b_2 (Δ''_2)		b_k (Δ''_k)	$v_{i.} = \sum_{j=1}^k v_{ij}$
$a_1(\Delta'_1)$	v_{11}	v_{12}		v_{1k}	$v_{1.}$
$a_2(\Delta'_2)$	v_{21}	v_{22}		v_{2k}	$v_{2.}$
.	.	.		.	.
.	.	.		.	.
$a_s(\Delta'_s)$	v_{s1}	v_{s2}		v_{sk}	$v_{s.}$
$v_{.j} = \sum_{i=1}^s v_{ij}$	$v_{.1}$	$v_{.2}$		$v_{.k}$	$\sum_{i=1}^s v_{i.} = \sum_{j=1}^k v_{.j} = n$

Նշանակենք՝

$$p_{ij} = P(X = a_i, Y = b_j) \left(\text{կամ } p_{ij} = P(X \in \Delta'_i, Y \in \Delta'_j) \right),$$

$$p_{i.} = P(X = a_i) \left(\text{կամ } p_{i.} = P(X \in \Delta'_i) \right),$$

$$p_{.j} = P(Y = b_j) \left(\text{կամ } p_{.j} = P(Y \in \Delta'_j) \right):$$

$$\text{Պարզ է, որ } p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^k p_{ij}, p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^s p_{ij}:$$

Օգտվելով այս նշանակումներից՝ **անկախության** $\mathbb{H}_0$ վարկածը կներկայացվի

$$\mathbb{H}_0 : p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}, \quad (10.28)$$

տեսքով, որտեղ

$$\sum_{i=1}^s p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^k p_{\cdot j} = 1:$$

Այստեղից հետևում է, որ $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում $sk -$ չափանի պատահական հաճախությունների $\mathbf{v}^* = (v_{11}^*, \dots, v_{sk}^*)$ վեկտորն ունի $\mathbb{M}(n; \mathbf{p})$ բազմանդամային բաշխում, որտեղ $\mathbf{p} = (p_{ij} = p_{i\cdot} p_{\cdot j}, i = 1, \dots, s, j = 1, \dots, k)$:

Քանի որ

$$\sum_{i=1}^s p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^k p_{\cdot j} = 1,$$

ապա $\mathbf{p}$ վեկտորը որոշվում է $(p_{1\cdot}, \dots, p_{(s-1)\cdot}, p_{\cdot 1}, \dots, p_{\cdot (k-1)})$ պարամետրերով (պարամետրերի թիվը $r = s + k - 2$):

Այժմ գնահատենք $\mathbf{p}$ պարամետրը:

Լեմմա 3: $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում p_{ij} պարամետրերի $\tilde{p}_{ij}$ բազմանդամային $\mathcal{L}\mathcal{U}$ գնահատականները հավասար են

$$\tilde{p}_{ij} = \frac{1}{n^2} v_{i\cdot} v_{\cdot j}, \quad i = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, k:$$

Ա պ ա ճ ու ճ ու մ: $\mathbf{v}^* = (v_{11}^*, \dots, v_{sk}^*) \sim \mathbb{M}(n; \mathbf{p})$ վեկտորի **ճշմարտանմանության ֆունկցիան** $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում կլինի հավասար՝

$$p(\mathbf{v}) = P(\mathbf{v}^* = \mathbf{v}) = P(v_{11}^* = v_{11}, \dots, v_{sk}^* = v_{sk}) = \frac{(sk)!}{v_{11}! \dots v_{sk}!} \prod_{i=1}^s \prod_{j=1}^k (p_{ij})^{v_{ij}} =$$

$$= \frac{(sk)!}{v_{11}! \dots v_{sk}!} \prod_{i=1}^s (p_{i\cdot})^{v_{i\cdot}} \prod_{j=1}^k (p_{\cdot j})^{v_{\cdot j}}, \quad \mathbf{v} = (v_{11}, \dots, v_{sk}):$$

Բազմանդամային լոգարիթմական ճշմարտանմանության ֆունկցիայի համար կատանանք՝

$$L_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = \ln p(\mathbf{v}) = \ln \frac{(sk)!}{v_{11}! \dots v_{sk}!} + \sum_{i=1}^s v_{i\cdot} \ln p_{i\cdot} + \sum_{j=1}^k v_{\cdot j} \ln p_{\cdot j}:$$

Այժմ կազմենք լագրանժիանը՝

$$H(p_{i\cdot}, p_{\cdot j}; \lambda_1, \lambda_2) = L_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) - \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^s p_{i\cdot} - 1 \right) - \lambda_2 \left(\sum_{j=1}^k p_{\cdot j} - 1 \right):$$

Էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանները հանգեցնում են հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial p_{i\cdot}} = \frac{v_{i\cdot}}{p_{i\cdot}} - \lambda_1 = 0, i = 1, \dots, s, \\ \frac{\partial H}{\partial p_{\cdot j}} = \frac{v_{\cdot j}}{p_{\cdot j}} - \lambda_2 = 0, j = 1, \dots, k, \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = \sum_{i=1}^s p_{i\cdot} - 1 = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = \sum_{j=1}^k p_{\cdot j} - 1 = 0, \end{cases}$$

որտեղից՝

$$p_{i\cdot} = \frac{v_{i\cdot}}{\lambda_1}, \quad p_{\cdot j} = \frac{v_{\cdot j}}{\lambda_2}, \quad \sum_{i=1}^s p_{i\cdot} = 1, \quad \sum_{j=1}^k p_{\cdot j} = 1,$$

ուստի

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \frac{v_{i\cdot}}{\lambda_1} = 1 &\Rightarrow \tilde{\lambda}_1 = \sum_{i=1}^s v_{i\cdot} = n \text{ և } \tilde{p}_{i\cdot} = \frac{v_{i\cdot}}{n}, \\ \sum_{j=1}^k \frac{v_{\cdot j}}{\lambda_2} = 1 &\Rightarrow \tilde{\lambda}_2 = \sum_{j=1}^k v_{\cdot j} = n \text{ և } \tilde{p}_{\cdot j} = \frac{v_{\cdot j}}{n}: \end{aligned}$$

Այստեղից կատանանք՝

$$\tilde{p}_{ij} = \tilde{p}_i \cdot \tilde{p}_j = \frac{1}{n^2} v_i \cdot v_j : \quad \blacksquare$$

$\mathbb{H}_0$ վարկածը ստուգելու համար կազմենք **Պիքսոնի χ^2 վիճականին**

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_n^2(\tilde{\mathbf{p}}) &= \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^k \frac{(v_{ij} - n\tilde{p}_{ij})^2}{n\tilde{p}_{ij}} = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^k \frac{\left(v_{ij} - \frac{v_i \cdot v_j}{n}\right)^2}{\frac{v_i \cdot v_j}{n}} = \\ &= n \left(\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^k \frac{v_{ij}^2}{v_i \cdot v_j} - 1 \right): \end{aligned} \quad (10.29)$$

Համաձայն 10.2 **Ֆիշերի** թեորեմի՝ $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում ճիշտ է

$$\hat{\chi}_n^2(\tilde{\mathbf{p}}) \xrightarrow{d} \mathbb{H}^2(N - r - 1), \quad n \rightarrow \infty$$

գուգամիտությունը, որտեղ $N = sk$, $r = s + k - 2$, այնպես որ՝

$$N - r - 1 = sk - (s + k - 2) - 1 = (s - 1)(k - 1):$$

Այսպիսով, α նշանակալիության մակարդակով (10.28) վարկածը ստուգող **ասիմպտոտիկ կրիտիկական տիրույթը** կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y})_n : \chi_n^2(\tilde{\mathbf{p}}) \geq \chi_\alpha^2((s - 1)(k - 1))\}:$$

Դիտողություն 10.12: Կարելի է ցույց տալ (տե՛ս խնդիր 10.11-ը), որ $s = k = 2$ դեպքում $\chi_n^2(\tilde{p})$ վիճականին կներկայացվի հետևյալ ձևով՝

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_n^2(\tilde{\mathbf{p}}) &= n \left(\frac{v_{11}}{v_1} - \frac{v_{12}}{v_2} \right)^2 \frac{v_1 \cdot v_2}{v_1 \cdot v_2} = n \frac{(v_{11}v_{22} - v_{12}v_{21})^2}{v_1 \cdot v_2 \cdot v_1 \cdot v_2} = \\ &= n^3 \frac{\left(v_{11} - \frac{v_1 \cdot v_1}{n}\right)^2}{v_1 \cdot v_2 \cdot v_1 \cdot v_2} \end{aligned} \quad (10.30):$$

Օրինակ 10.9: Փորձի ընթացքում յուրաքանչյուր անձ դասակարգվել է ըստ երկու հատկանիշի՝ աչքերի և մազերի գույնի: Ըստ առաջին՝ X_1 հատկանիշի՝ անձը կարող է պատկանել a_1 , a_2 կամ a_3 խմբերից մեկին, իսկ

ըստ երկրորդ՝ X_2 հատկանիշի՝ b_1, b_2, b_3 կամ b_4 խմբերից մեկին: 6800 անձի երկու հատկանիշի զուգակցության աղյուսակն ունի հետևյալ տեսքը՝

Աչքերի գույնը	Մազերի գույնը				
	b_1	b_2	b_3	b_4	Σ
a_1	1768	807	189	47	2811
a_2	946	1387	746	53	3132
a_3	115	438	288	16	857
Σ	2829	2632	1223	116	6800

0.05 նշանակալիության մակարդակով ստուգենք X_1 և X_2 հատկանիշների **անկախության** վերաբերյալ վարկածը:

Համաձայն (10.29) բանաձևի՝ χ^2 **վիճականին** ներկայացվում է

$$\chi_n^2(\tilde{\mathbf{p}}) = n \left(\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^k \frac{v_{ij}^2}{v_{i \cdot} v_{\cdot j}} - 1 \right)$$

տեսքով, որտեղ $s = 3$, $k = 4$, $n = 6800$: Կատարելով հաշվարկները՝ կստանանք՝

$$\chi_n^2(\tilde{\mathbf{p}}) \approx 1074 > 12.592 = \chi_{0.05}^2(6)$$

և անկախության վարկածը **հերքվում** է:

§ 10.3.2. Սպիրմենի հայտանիշ

Կիրառություններում, երբ պետք է լինում ստուգել **որակական հատկանիշների անկախությունը**, հաճախ օգտագործվում են **ռանգային հայտանիշները**, որոնցից առավել հայտնի է **Սպիրմենի հայտանիշը**:

Դիցուք տրված է X և Y պատահական մեծությունների երկչափ $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})_n = ((X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n))$ նմուշը: Նշանակենք R_i -ով X_i անդամների ռանգերը $\mathbf{X}_n$ նմուշում, S_i -ով՝ Y_i անդամների ռանգերը $\mathbf{Y}_n$ նմուշում:

Այնուհետև վերադասավորենք ռանգերի (R_i, S_i) , $i = 1, \dots, n$ զույգերն ըստ R_i ռանգերի *աճման* կարգի՝ նշանակելով $(1, T_1), (2, T_2), \dots, (n, T_n)$ -ով ստացված զույգերը ($R_i := i$):

Սպիտմենի ռանգային կորելյացիայի գործակից (Spearman's ρ coefficient) կամ **Սպիտմենի վիճականի** կոչվում է $R_1, \dots, R_n$ և $S_1, \dots, S_n$ ռանգերի միջև **կորելյացիայի գործակիցը**՝

$$r_S^* = \sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})(S_i - \bar{S}) / \sqrt{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2 \sum_{i=1}^n (S_i - \bar{S})^2} : \quad (10.31)$$

Դիտողություն 10.13: Քանի որ $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n)$ և $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_n)$ ռանգերը ներկայացնում են $1, \dots, n$ թվերի որոշ **տեղափոխություններ**, ապա հեշտ է տեսնել, որ

$$\begin{aligned} \bar{R} = \bar{S} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i = \frac{n+1}{2}, \quad \sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2 = \sum_{i=1}^n (S_i - \bar{S})^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n i^2 - n \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 = \frac{n(n^2 - 1)}{12} : \end{aligned}$$

Այսպիսով, r_S^* գործակիցը կրեքվի հետևյալ տեսքի՝

$$r_S^* = \frac{12}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n \left(i - \frac{n+1}{2} \right) \left(T_i - \frac{n+1}{2} \right) :$$

Դիտողություն 10.14: r_S^* **վիճականին** կարելի է ներկայացնել նաև հետևյալ ձևով (տե՛ս խնդիր 10.12-ը)՝

$$r_S^* = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n (R_i - S_i)^2 = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n (i - T_i)^2 : \quad (10.32)$$

Դիցուք տեղի ունի անկախության $\mathbb{H}_0 : F_Z(x, y) \equiv F_X(x) \cdot F_Y(y)$ վարկածը: Այդ դեպքում (տե՛ս խնդիր 10.13-ը)՝

$$E(T_i) = \frac{n+1}{2}, \quad E(r_S^*) = 0, \quad \text{var}(r_S^*) = \frac{1}{n-1} :$$

Դիտողություն 10.15: (10.32) բանաձևից անմիջապես երևում է, որ $R_i = S_i$, $i = 1, \dots, n$ դեպքում $r_S^* = 1$, իսկ $T_i = n - i + 1$ -ի դեպքում (**հակա-դիր ռանգեր**)՝ $r_S^* = -1$: Ընդհանուր դեպքում՝ $|r_S^*| \leq 1$: $|r_S^*|$ -ի **մեկին մոտ** ընդունած արժեքները վկայում են, որ $\mathbb{H}_0$ **անկախության** վարկածը տեղի չունի:

Դիտողություն 10.16: r_S^* վիճականու **ճշգրիտ բաշխումը** $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում **ոչ պարամետրական** է (**բաշխումից «ազատ»**) և **համաչափ** 0 կետի նկատմամբ: α նշանակալիության մակադակով այդ վարկածը ստուգող **Սպիլմենի հայտանիշի** երկկողմանի **կրիտիկական տիրույթն** ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y})_n : |r_S| \geq s_{\alpha/2}(n)\},$$

որտեղ $s_{\alpha/2}(n)$ -ը r_S^* վիճականու բաշխման $\alpha/2$ մակարդակով կրիտիկական եզրն է, որի արժեքները, երբ $n = 4, \dots, 30$, բերված են աղյուսակ Ա 13-ում:

Տեղի ունեն հետևյալ թեորեմներ, որոնք կիրառվում են $\mathbb{H}_0$ վարկածը ստուգելու համար **մեծ n** -երի դեպքում (տե՛ս **Кендалл, Стьюарт** [6])՝

Թեորեմ 10.10: $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում ճիշտ է

$$\sqrt{n-1} r_S^* \xrightarrow{d} N(0,1), \quad n \rightarrow \infty$$

գույզամիտությունը:

Թեորեմ 10.11: Դիցուք ճիշտ է $\mathbb{H}_0$ վարկածը: Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալ գույզամիտությունը՝

$$\sqrt{\frac{n-2}{1-(r_S^*)^2}} r_S^* \xrightarrow{d} T(n-2), \quad n \rightarrow \infty:$$

Թեորեմ 10.11-ում նշված գույզամիտությունը բավականաչափ «արագ» է, այնպես որ համապատասխան հայտանիշը կարելի է կիրառել արդեն, երբ $n \geq 10$:

Դիտողություն 10.17: 10.10 և 10.11 թեորեմներից բխում է, որ α մակարդակով **ասիմպտոտիկ կրիտիկական տիրույթներն** ունեն համապատասխանաբար հետևյալ տեսքը՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y})_n : \sqrt{n-1} |r_S| \geq z_{\alpha/2}\},$$

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y})_n : \sqrt{\frac{n-2}{1-r_S^2}} |r_S| \geq t_{\alpha/2}(n-2) \right\}$$

Օրինակ 10.10: Երկու դասախոս (100 բալային համակարգով) գնահատել են նույն առարկայից 12 ուսանողի գիտելիքը: Արդյունքում ստացվել են հետևյալ տվյալներ՝

Ուսանողներ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
I -ին դասախոս	46	65	93	74	85	95	77	42	81	91	55	67
II -րդ դասախոս	40	61	95	71	79	98	88	45	75	94	60	72

(10.33)

0.01 նշանակալիության մակարդակով ստուգենք այդ գնահատականների միջև **անկախության** վերաբերյալ վարկածը:

Կառուցենք վարիացիոն շարքերը՝ թվանշանները դասավորելով *նվազման* կարգով՝

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
I -ին դասախոս	95	93	91	85	81	77	74	67	65	55	46	42
II -րդ դասախոս	98	95	94	88	79	75	72	71	61	60	45	40

(10.34)

Գտնենք այդ վարիացիոն շարքերում (10.33)-ում բերված գնահատականների համապատասխան ռանգերը՝

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
R^1	11	9	2	7	4	1	6	12	5	3	10	8
R^2	12	9	2	8	5	1	4	11	6	3	10	7
$(R^1 - R^2)^2$	1	0	0	1	1	0	4	1	1	0	0	1

(10.35)

Օրինակ, $R_1^1 = 11$ ռանգը համապատասխանում է (10.33)-ում բերված I-ին դասախոսի 1-ին ուսանողի 46 բալին, որը համապատասխանում է (10.34) վարիացիոն շարքերում I-ին դասախոսին համապատասխանող 11-րդ տեղին:

Այժմ հաշվենք **Սպիտմենի ռանգային կորելյացիայի գործակիցը՝**

$$r_s = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n (R_i^1 - R_i^2)^2 = 1 - \frac{6}{12 \cdot 143} \cdot 10 \approx 0.965:$$

Աղյուսակ Ա 13 -ից ստանում ենք, որ $s_{\alpha/2}(n) = s_{0.005}(12) = 0.7273$: Հետևաբար՝ $r_s > s_{\alpha/2}(n)$, որտեղից եզրակացնում ենք, որ գնահատականների միջև առկա է նշանակալի **ռանգային կորելյացիոն կապ**, և անկախության $\mathbb{H}_0$ վարկածը **հերքվում է**:

Նույն եզրակացության կարելի է հանգել, եթե օգտվենք թեորեմ 10.11 -ից: Իրոք, ունենք՝

$$\sqrt{\frac{n-2}{1-r_s^2}} |r_s| = \sqrt{\frac{10}{0.0688}} \cdot 0.965 \approx 11.634,$$

և քանի որ $t_{0.005}(10) = 3.169$, ապա $\mathbb{H}_0$ վարկածը կրկին **հերքվում է**:

Դիտողություն 10.18: Դիցուք հատկանիշներն ունեն **համընկնող ռանգեր**: Այդ դեպքում **ռանգային կորելյացիայի գործակիցը** հաշվարկվում է հետևյալ բանաձևի օգնությամբ (տե՛ս *Gibbons, Chakraborti* [19])՝

$$r_s = \frac{\frac{1}{6}(n^3 - n) - \sum (R_i^1 - R_i^2)^2 - T_1 - T_2}{\sqrt{\frac{1}{6}(n^3 - n) - 2T_1} \sqrt{\frac{1}{6}(n^3 - n) - 2T_2}}, \quad (10.36)$$

$$T_1 = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{m_1} (n_{1i}^3 - n_{1i}), \quad T_2 = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{m_2} (n_{2i}^3 - n_{2i}), \quad m_1\text{-ը և } m_2\text{-ը I-ին և II-րդ}$$

հատկանիշների համընկնող ռանգերի խմբերի թվերն են, n_{1i} -ն և n_{2i} -ն՝ I-ին և II-րդ հատկանիշների i -րդ խմբի ռանգերի **կրկնությունների** թվերը:

Օրինակ 10.11: Ստորև բերված են համակարգիչներով հազեցվածության և աշխատանքի արդյունավետության վերաբերյալ 12 միատեսակ կազմակերպությունների ռանգերը՝

Կազմակերպություններ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Հազեցվածությունը համակարգիչներով (R_i^1)	1	2	3.5	3.5	6	6	6	8.5	8.5	10	11	12
Արդյունավետությունը (R_i^2)	2	4	1	6	3	6	9.5	9.5	12	8	11	6

0.05 նշանակալիության մակարդակով ստուգենք H_0 վարկածը, որ համակարգիչներով հազեցվածությունը **չի ազդում** այդ կազմակերպությունների աշխատանքի արդյունավետության վրա, ընդդեմ H_1 երկընտրանքային այն վարկածի, որ այդ հատկանիշների միջև կա **դրական կորելյացիոն կապ**:

Ըստ համակարգչային **հազեցվածության** գործոնի՝ կստանանք՝

$$m_1 = 3, \quad n_{11} = n_{12} = 2, \quad n_{13} = 3,$$

որտեղից՝ $T_1 = \frac{1}{12} (2 \cdot (2^3 - 2) + (3^3 - 3)) = 3:$

Ըստ **արդյունավետության** գործոնի՝

$$m_2 = 2, \quad n_{21} = 2, \quad n_{22} = 3, \quad \text{որտեղից՝ } T_2 = \frac{1}{12} ((2^3 - 2) + (3^3 - 3)) = 2.5:$$

Մյուս կողմից՝

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{12} (R_i^1 - R_i^2)^2 &= (-1)^2 + (-2)^2 + 2.5^2 + (-2.5)^2 + 3^2 + 0 + (-3.5)^2 \\ &+ (-1)^2 + (-3.5)^2 + 2^2 + 0 + 6^2 = 92: \end{aligned}$$

Այսպիսով, (10.36) բանաձևից կստանանք՝

$$r_S = \frac{\frac{1}{6}(12^3 - 12) - 92 - 3 - 2.5}{\sqrt{\frac{1}{6}(12^3 - 12) - 2 \cdot 3} \sqrt{\frac{1}{6}(12^3 - 12) - 2 \cdot 2.5}} \approx 0.672 :$$

Այժմ, ըստ թեորեմ 10.11-ի, միակողմանի կրիտիկական տիրույթը կլինի՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ (x, y)_n : \sqrt{\frac{n-2}{1-r_S^2}} \cdot r_S \geq t_\alpha(n-2) \right\}:$$

Այստեղից՝

$$\sqrt{\frac{10}{1-0.672^2}} \cdot 0.672 \approx 2.87 > t_{0.05}(10) = 1.812 ,$$

և $\mathbb{H}_0$ վարկածը **հերքվում** է հոգուտ $\mathbb{H}_1$ վարկածի:

§ 10.3.3. Քենդալի հայտանիշ

Հաջորդ հայտնի ռանգային հայտանիշն առաջարկել է **Քենդալը** [6]:

Դիցուք $(1, T_1), (2, T_2), \dots, (n, T_n)$ -ը $\mathbf{X}_n$ և $\mathbf{Y}_n$ նմուշների համապատասխանող **ռանգերի** զույգերն են:

Q վիճականի կոչվում է $Q = \sum_{i=1}^n T_i'$ պատահական մեծությունը, որտեղ T_i' , T_i ռանգին համապատասխանող «**ինվերսիան**» է, այսինքն՝ $(T_1, \dots, T_n)$ շարքում T_i -ից աջ գտնվող այն ռանգերի թիվը, որը T_i արժեքից **փոքր** է:

Q վիճականին նկարագրում է T_i ռանգերի «**ինվերսիաների**» («**անկարգավորվածությունների**») թիվը: Պարզ է, որ $0 \leq Q \leq \frac{n(n-1)}{2}$, ընդ որում՝ $Q = 0$ դեպքը վկայում է «**անկարգավորվածությունների**» բացակայության մասին, այսինքն՝ $T_1 < T_2 < \dots < T_n$: Եվ ընդհակառակն՝ $Q = \frac{n(n-1)}{2}$

դեպքը համապատասխանում է $T_n < T_{n-1} < \dots < T_1$ **հակառակ** դասավորությանը:

Քենդալի ռանգային կորելյացիայի գործակից (Kendall's τ coefficient) կոչվում է

$$r_K^* = 1 - \frac{4Q}{n(n-1)}$$

վիճականին: $r_K = 1$, եթե $Q = 0$, և $r_K = -1$, երբ $Q = \frac{n(n-1)}{2}$: Ընդհանուր դեպքում՝ $|r_K| \leq 1$: Հայտնի է (տե՛ս **Кендалл, Стьюарт** [6]), որ $\mathbb{H}_0$: $F_Z(x, y) \equiv F_X(x) \cdot F_Y(y)$ ($Z = (X, Y)$) **անկախության վարկածը** բավարարվելու դեպքում՝

$$E(r_K^*) = 0, \quad \text{var}(r_K^*) = \frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}:$$

Դիտողություն 10.19: r_K^* վիճականու **ճշգրիտ բաշխումը** $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում **ոչ պարամետրական է** (բաշխումից «ազատ») և **համաչափ 0** կետի նկատմամբ: α նշանակալիության մակարդակով այդ վարկածը ստուգող **Քենդալի հայտանիշի երկկողմանի կրիտիկական տիրույթն** ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y})_n : |r_K| \geq k_{\alpha/2}(n)\},$$

որտեղ $k_{\alpha/2}(n)$ -ը r_K^* վիճականու **ճշգրիտ բաշխման** $\alpha/2$ մակարդակով կրիտիկական եզրն է, որի արժեքները, երբ $n = 4, \dots, 10$, բերված են աղյուսակ Ա 14-ում:

Տեղի ունի հետևյալ սահմանային հատկությունը (տե՛ս **Кендалл, Стьюарт** [6])՝

Թեորեմ 10.12 (Քենդալ): $\mathbb{H}_0$ վարկածի դեպքում ճիշտ է

$$\sqrt{\frac{9n(n-1)}{2(2n+5)}} r_K^* \xrightarrow{d} N(0,1), \quad n \rightarrow \infty$$

զուգամիտությունը:

$\mathbb{H}_0$ վարկածը ստուգող α մակարդակով երկկողմանի ասիմպտոտիկ հայտանիշը կունենա հետևյալ կրիտիկական տիրույթը՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y})_n : \sqrt{\frac{9n(n-1)}{2(2n+5)}} |r_K| \geq z_{\alpha/2} \right\}:$$

Օրինակ 10.12: Գեղեցկության մրցույթին մասնակցել են 10 օրիորդ: Մասնակիցների գրաված տեղերը, ըստ ժյուրիի և հանդիսատեսի կարծիքների, բերված են հետևյալ աղյուսակում՝

Մասնակիցներ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Հանդիսատեսի սահմանած տեղերը	10	7	8	2	5	1	6	3	9	4
Ժյուրիի սահմանած տեղերը	8	2	9	6	4	5	3	7	10	1

0.05 նշանակալիության մակարդակով ստուգել ժյուրիի անդամների և հանդիսատեսների կարծիքների միջև **անկախության** վերաբերյալ $\mathbb{H}_0$ վարկածն ընդդեմ կարծիքների միջև **դրական կորելյացիա** ունենալու $\mathbb{H}_1$ երկընտրանքային վարկածի:

Վերադասավորենք հանդիսատեսի կողմից տրված տեղերն ըստ աճման կարգի և գտնենք ժյուրիի կողմից տրված տեղերի «ինվերսիաները»՝

Մասնակիցներ	6	4	8	10	5	7	2	3	9	1
Հանդիսատեսի տված տեղերը	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ժյուրիի տված տեղերը (T_i)	5	6	7	1	4	3	2	9	10	8
Ինվերսիաների թիվը (T'_i)	4	4	4	0	2	1	0	1	1	0

Օրինակ, ժյուրիի անդամների կողմից տրված $T_1 = 5$ -րդ տեղին համապատասխանող T'_1 «ինվերսիան» կլինի հավասար 4-ի, քանի որ T_i ռանգերի շարքում $T_1 = 5$ արժեքից փոքր, աջ կողմում՝ ընկած են 1, 4, 3, 2 ռանգերը:

Այժմ հաշվենք «ինվերսիաների» ընդհանուր թիվը (Q վիճականու արժեքը)՝

$$Q = \sum_{i=1}^n T'_i = 17:$$

Այսպիսով, **Քենդալի ռանգային կորելյացիայի գործակիցը** կլինի՝

$$r_K = 1 - \frac{4Q}{n(n-1)} = 1 - \frac{4 \cdot 17}{10 \cdot 9} \approx 0.244:$$

Այստեղից՝ քանի որ $k_{0.025}(10) = 0.551$ (տե՛ս աղյուսակ Ա.14.-ը), ապա $r_K < k_{\alpha/2}(n)$ և **անկախության** $\mathbb{H}_0$ վարկածը **չի հերքվում**:

Խնդիրներ

10.11. Ապացուցել, որ X և Y պատահական մեծությունների անկախությունը ստուգող (10.29) վիճականին $s = k = 2$ դեպքում ունի (10.30) համարժեք ներկայացումները:

10.12. Ցույց տալ, որ **Սպիռմենի ռանգային կորելյացիայի r_S^* գործակիցը** ներկայացվում է (10.32) տեսքով:

10.13. Գտնել անկախության $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում **Սպիռմենի ռանգային կորելյացիայի r_S^* գործակցի** $E(r_S^*)$ միջինը և $\text{var}(r_S^*)$ ցրվածքը:

Պատասխան՝ $E(r_S^*) = 0$, $\text{var}(r_S^*) = \frac{1}{n-1}$:

§ 10.4. Պատահականության հայտանիշ

Որոշ դեպքերում վիճակագրական խնդիրներ լուծելիս հարկ է լինում ստուգել վարկած, որ փորձի ընթացքում ստացված $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ դիտումների վեկտորը որոշակի P բաշխմանը համապատասխանող **պատահական նմուշ է**, այսինքն՝ որ $\mathbf{X}$ վեկտորի X_i անդամներն **անկախ** և **միատեսակ բաշխված** պատահական մեծություններ են: Դա նշանակում է, որ պահանջվում է ստուգել

$$\mathbb{H}_0 : F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = F(x_1) \dots F(x_n), \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n$$

վարկածը, որտեղ $F(x)$ -ը P բաշխմանը համապատասխանող բաշխման ֆունկցիան է:

$\mathbb{H}_0$ վարկածը ստուգելու համար օգտվենք այն պայմանից, որ պատահականության վարկածը բավարարվելու դեպքում $\mathbf{X}$ վեկտորի X_i անդամները պետք է լինեն «**հավասարահնարավոր**», այսինքն՝ ոչ մի իմաստով **կարգավորված** չլինեն: Հետևաբար՝ $\mathbb{H}_0$ վարկածը բնութագրվում է «**լիովին անկարգավորվածությամբ**»: Դա նշանակում է, որ $\mathbb{H}_0$ վարկածի ստուգումը պետք է կառուցել «**անկարգավորվածության**» աստիճանը նկարագրող վիճականիների օգնությամբ: Այդպիսի վիճականիներից մեկն է $\mathbf{X}$ նմուշում «**ինվերսիաների**» Q_n թիվը: Հիշենք, որ $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_n)$ նմուշի X_i և X_j անդամները կազմում են «**ինվերսիա**», եթե $i < j$ պայմանից հետևում է **կարգային վիճականիների** համար $X_{(i)} > X_{(j)}$ պայմանը:

Նշանակենք՝

$$Q_n = Q(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i \text{ -ով } \mathbf{X} \text{ նմուշի «ինվերսիաների» թիվը,}$$

որտեղ η_i -ն X_i նմուշային անդամին համապատասխանող «**ինվերսիաների**» թիվն է: Q_n վիճականին նկարագրում է դիտումների «**անկարգավորվածությունների**» չափը:

Տեղի ունի հետևյալ արդյունքը (տե՛ս *Кендалл, Стьюарт* [6])՝

Թեորեմ 10.13: $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում ճիշտ է

$$\tilde{Q}_n = \frac{6}{n^{3/2}} \left(Q_n - \frac{n(n-1)}{4} \right) \xrightarrow{d} \mathbb{N}(0, 1), \quad n \rightarrow \infty \quad (10.37)$$

գուգամիտությունը:

$\mathbb{H}_0$ վարկածը ստուգող α նշանակալիության մակարդակով **ասիմպտոտիկ կրիտիկական տիրույթը** կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ \mathbf{x} : \left| Q_n - \frac{n(n-1)}{4} \right| \frac{6}{n^{3/2}} \geq z_{\alpha/2} \right\}:$$

(10.37) բանաձևում բերված գուգամիտությունը բավականաչափ «արագ» է, այնպես որ հայտանիշը կարելի է կիրառել, երբ $n \geq 10$ -ից:

Օրինակ 10.13: Վերցնենք $[0,1]$ միջակայքում **հավասարաչափ** բաշխված «**պատահական թվերի**» Ա 6. աղյուսակի վերնի 6-րդ տողից 12 հատ թիվ: 0.05 նշանակալիության մակարդակով ստուգենք այդ թվերի **պատահականության** վերաբերյալ **վարկածը**:

Վերցված թվերն են՝

0.3407 0.2768 0.5036 0.6973 0.6170 0.6581 0.3398 0.8556 0.4557 0.1824
0.0635 0.3034: (10.38)

Վերադասավորենք այդ թվերն աճման կարգով (կազմենք վարիացիոն շարքը)՝

0.0635 0.1824 0.2768 0.3034 0.3398 0.3407 0.4557 0.5036 0.6170 0.6581
0.6973 0.8556: (10.39)

(10.38) «պատահական թվերի» հաջորդականության «**ինվերսիաների**» Q_n թիվը հաշվելու համար գտնենք յուրաքանչյուր X_i անդամի «**ինվերսիաների**» η_i թիվը: Օրինակ՝ $X_1 = 0.3407$ նմուշային անդամը վարիացիոն շարքում գտնվում է 6-րդ տեղում՝ $X_{(6)} = 0.3407$: Քանի որ (10.38) շարքում

0.3407 թվից աջ գտնվում են (10.39) վարիացիոն շարքի $X_{(6)} = 0.3407$ թվի ձախ կողմում գտնվող բոլոր 5 թվերը, ուստի $\eta_1 = 5$ -ի: Նման ձևով գտնում ենք՝

$$\eta_2 = 2, \eta_3 = 5, \eta_4 = 7, \eta_5 = \eta_6 = 5, \eta_7 = 3, \eta_8 = 4, \eta_9 = 3, \eta_{10} = 1, \eta_{11} = 0:$$

Այսպիսով, «պատահական թվերի» հաջորդականության «ինվերսիաների» թիվը կլինի՝

$$Q_{12} = \sum_{i=1}^{11} \eta_i = 40:$$

Այնպես որ՝

$$\tilde{Q}_{12} = \left(40 - \frac{12 \cdot 11}{4}\right) \cdot \frac{6}{12^{3/2}} = 7 \cdot \frac{6}{12\sqrt{12}} \approx 1.01:$$

Հաշվի առնելով, որ $z_{0.005} = 2.575$, ունենք $\tilde{Q}_{12} = 1.01 < 2.575 = z_{0.005}$,
և պատահականության վերաբերյալ $\mathbb{H}_0$ վարկածը չի հերքվում:

Խնդիր

10.14. Պատահականության վարկածը բավարարվելու դեպքում $Q_n = \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i$ «ինվերսիաների» թվի համար գտնել միջինը՝ $E(Q_n)$ և ցրվածքը՝ $\text{var}(Q_n)$:

Ցուցում՝ նկատել, որ $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ -ը *անկախ* պատահական մեծություններ են, և $P(\eta_i = k) = 1/(n - i + 1)$, $k = 0, \dots, n - i$:

$$\text{Պատասխան՝ } E(Q_n) = \frac{n(n-1)}{4}, \text{ var}(Q_n) = \frac{n(n-1)(2n+5)}{72}:$$

§ 10.5. Երկու պատահական մեծությունների միջև կորելյացիոն կապը ստուգող հայտանիշ

Դիցուք տրված են (X, Y) պատահական վեկտորը և դրան համապատասխանող $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})_n = ((X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n))$ նմուշը: ρ -ով նշանակենք այդ պատահական մեծությունների կորելյացիայի գործակիցը՝

$$\rho = \rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{var}(X)}\sqrt{\text{var}(Y)}},$$

իսկ $r_{X,Y}$ -ով՝ նմուշային կորելյացիայի գործակիցը՝

$$r_{X,Y} = \frac{S_{XY}^2}{S_X S_Y},$$

որտեղ

$$S_{XY}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \bar{X} \bar{Y}$$

նմուշային կովարիացիան է, իսկ S_X -ը և S_Y -ը՝ նմուշային ստանդարտ շեղումները:

Կարելի է ցույց տալ (տե՛ս *Крамеп* [8]), որ $E(r_{X,Y}) = \rho$, $\text{var}(r_{X,Y}) = c \frac{\rho^2}{4n}$, որտեղ c -ն որոշակի հաստատուն է: Այս պայմաններից հետևում է, որ $r_{X,Y} \xrightarrow{P} \rho$, երբ $n \rightarrow \infty$:

Սովորաբար պատահական նմուշի թվային իրագործումը դիսկրետ (X,Y) վեկտորի դեպքում ներկայացված է լինում (a_i, b_j) , $i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, k$ զույգերի և համապատասխան v_{ij} հաճախությունների **զուգակցության աղյուսակի** միջոցով (տե՛ս § 10.3.1): Անընդհատ (X,Y) պատահական վեկտորի դեպքում (a_i, b_j) զույգերը X և Y պատահական մեծությունների արժեքների բազմության տրոհումներին համապատասխանող Δ'_i և Δ'_j միջակայքերի միջնակետերն են:

Համապատասխան (թվային) **նմուշային բնութագրիչները** կլինեն՝

նմուշային միջինը և ցրվածքը՝

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s v_{i.} a_i, \quad s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s v_{i.} (a_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s v_{i.} a_i^2 - (\bar{x})^2,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k v_{.j} b_j, \quad s_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k v_{.j} (b_j - \bar{y})^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k v_{.j} b_j^2 - (\bar{y})^2,$$

նմուշային կովորիացիան և կորելյացիայի գործակիցը՝

$$s_{xy}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^k v_{ij} a_i b_j - \bar{x} \bar{y},$$

$$r_{x,y} = \frac{s_{xy}^2}{s_x s_y} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^k v_{ij} a_i b_j - n \bar{x} \bar{y} \right) / \left(\sqrt{\sum_{i=1}^s v_{i.} a_i^2 - n(\bar{x})^2} \right) \left(\sqrt{\sum_{j=1}^k v_{.j} b_j^2 - n(\bar{y})^2} \right): \quad (10.40)$$

Թեորեմ 10.14 (տե՛ս *Крaмep* [8]): $\mathbb{H}_0 : \rho = 0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում

$$T_{n-2} = \sqrt{n-2} \frac{r_{x,y}}{\sqrt{1 - r_{x,y}^2}}$$

վիճականին ունի $(n-2)$ ազատության աստիճաններով **Ստյուդենտի բաշխում**:

Դիտողություն 10.20: Թեորեմ 10.14 -ից հետևում է, որ $\mathbb{H}_0 : \rho = 0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \rho \neq 0$ երկընտրանքայինի ստուգող α նշանակալիության մակարդակով կրիտիկական տիրույթն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y})_n : |t_{n-2}| > t_{\alpha/2}(n-2)\} =$$

$$= \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y})_n : |r_{x,y}| > \frac{t_{\alpha/2}(n-2)}{\sqrt{t_{\alpha/2}^2(n-2) + n-2}} \right\},$$

որտեղ t_{n-2} -ը T_{n-2} վիճականու արժեքն է՝ $T_{n-2}(\omega_0) = t_{n-2}$, իսկ $t_{\alpha/2}(n-2)$ -ը՝ դրա $\alpha/2$ -մակարդակով կրիտիկական եզրը:

Դիտողություն: Եթե α նշանակալիության մակարդակով $\mathbb{H}_0$ վարկածը չի հերքվում, ապա ասում են, որ **կորելյացիոն կապը** X և Y պատահական

**§ 10.5. Երկու պատահական մեծությունների միջև
կորելյացիոն կապը ստուգող հայտանիշ**

մեծությունների միջև α մակարդակով **նշանակալի չէ**: Հակառակ դեպքում (երբ տեղի ունի $\mathbb{H}_1$ վարկածը) այդ կապը α մակարդակով **նշանակալի է**:

Գործնական կիրառությունների համար հաճախ օգտագործվում է **Ֆիշերի** կողմից ներմուծված այսպես կոչված «**Ֆիշերի z - ձևափոխությունը**»:

Նշանակենք՝

$$z_n = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + r_{X,Y}}{1 - r_{X,Y}}, \quad \zeta = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \rho}{1 - \rho} :$$

Ճիշտ է հետևյալ սահմանային թեորեմը (տե՛ս **Крaмep** [8])՝

Թեորեմ 10.15 (Ֆիշեր): Դիցուք $(X, Y)_n$ -ը նմուշ է, որը համապատասխանում է **երկչափ նորմալ բաշխմանը**: $\mathbb{H}_0 : \rho = \rho_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում ճիշտ է հետևյալ զուգամիտությունը՝

$$z'_n = \sqrt{n-3} \left(z_n - \zeta - \frac{\rho_0}{2(n-1)} \right) \xrightarrow{d} \mathbb{N}(0, 1), \quad n \rightarrow \infty$$

(այստեղ բերված մոտարկումը բավականաչափ «լավն է», երբ $n > 10$ -ից):

Օրինակ 10.14: Դիցուք $(X, Y)_n$ -ը **երկչափ նորմալ** բաշխումից վերցված նմուշ է, որտեղ $n = 103$, $r_{X,Y} = 0.5$: Պահանջվում է 0.01 նշանակալիության մակարդակով ստուգել $\mathbb{H}_0 : \rho = 0.6$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \rho < 0.6$ երկընտրանքայինի:

Ըստ տվյալների՝ ունենք՝ $z_n = \frac{1}{2} \ln 3$, $\zeta = \frac{1}{2} \ln 4$, $\frac{\rho_0}{2(n-1)} = \frac{0.6}{2 \cdot 102} = 0.003$, այնպես որ՝ $z'_n = -1.468$, $z_{0.01} = 2.326$: Այսպիսով, քանի որ $z'_n = -1.468 > -2.326 = -z_{0.01}$, ուստի, համաձայն թեորեմ 10.15-ի, $\mathbb{H}_0$ վարկածը **չի հերքվում**:

Օրինակ 10.15: Ըստ (X, Y) պատահական վեկտորի $n = 100$ ծավալ ունեցող նմուշի՝ ստացված է հետևյալ **զուգակցության աղյուսակը**՝

	x					
y	100	105	110	115	120	125
35	4	—	6	7	8	3
45	5	5	2	10	—	—
55	6	7	—	—	2	3
65	—	6	5	4	—	2
75	5	1	2	4	3	—

Գտնել նմուշային կորելյացիայի գործակիցը և 0.05 նշանակալիության մակարդակով ստուգել $H_0 : \rho = 0$ վարկածն ընդդեմ $H_1 : \rho \neq 0$ երկընտրանքայինի:

Նմուշային կորելյացիայի գործակիցը (տե՛ս (10.40)) հավասար է

$$r_{x,y} = \left(\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^k v_{ij} a_i b_j - n \bar{x} \bar{y} \right) / n s_x s_y :$$

Այժմ կատարենք հետևյալ ձևափոխությունը՝ $u_j = \frac{a_j - m_1}{h_1}$, $v_i = \frac{b_i - m_2}{h_2}$:

Պարզ է, որ

$$r_{u,v} = r_{x,y}, \quad \bar{x} = \bar{u} h_1 + m_1, \quad \bar{y} = \bar{v} h_2 + m_2, \quad s_x = s_u h_1, \quad s_y = s_v h_2 :$$

Կառուցենք $U = \frac{x - m_1}{h_1}$ և $V = \frac{y - m_2}{h_2}$ պատահական մեծությունների համար **գուգակցության աղյուսակը**, վերցնելով $m_1 = 115$, $m_2 = 55$, $h_1 = 5$, $h_2 = 10$.

	u						
v	-3	-2	-1	0	1	2	v_i
-2	4	—	6	7	8	3	28
-1	5	5	2	10	—	—	22
0	6	7	—	—	2	3	18
1	—	6	5	4	—	2	17
2	5	1	2	4	3	—	15
v_j	20	19	15	25	13	8	100

**§ 10.5. Երկու պատահական մեծությունների միջև
կորելյացիոն կապը ստուգող հայտանիշ**

Գտնենք U և V պատահական մեծությունների նմուշային կորելյացիայի գործակիցը.

$$r_{u,v} = \left(\sum_{i,j} v_{ij} u_j v_i - n \bar{u} \bar{v} \right) / n s_u s_v, \quad i = 1, \dots, 5, \quad j = 1, \dots, 6,$$

որտեղ

$$\sum_{i,j} v_{ij} u_j v_i = \sum_i v_i \left(\sum_j v_{ij} u_j \right):$$

$$\sum_j v_{1j} u_j = -4, \quad \sum_j v_{2j} u_j = -27,$$

$$\sum_j v_{3j} u_j = -24, \quad \sum_j v_{4j} u_j = -13, \quad \sum_j v_{5j} u_j = -16,$$

այնպես որ՝

$$\sum_{i,j} v_{ij} u_j v_i = -10:$$

Մյուս կողմից՝ կստանանք՝

$$\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_j v_{.j} u_j = -0.84, \quad \bar{v} = \frac{1}{n} \sum_i v_i \cdot v_i = -0.31,$$

$$s_u^2 = \frac{1}{n} \sum_j v_{.j} u_j^2 - (\bar{u})^2 = 2.45, \quad s_v^2 = \frac{1}{n} \sum_i v_i \cdot v_i^2 - (\bar{v})^2 = 2.01,$$

$$s_u = 1.57, \quad s_v = 1.42:$$

Այսպիսով, վերջնական կունենանք՝

$$r_{u,v} = r_{x,y} = \frac{-10 - 100 \cdot (-0.84) \cdot (-0.31)}{100 \cdot 1.57 \cdot 1.42} = -\frac{36.04}{222.94} = -0.162:$$

Այժմ ստուգենք $H_0 : \rho = 0$ վարկածն ընդդեմ $H_1 : \rho \neq 0$ երկընտրանքայինի: Եթե տեղի ունի H_0 վարկածը, ապա, ըստ թեորեմ 10.14-ի, α մակարդակով $\mathcal{X}_{1,\alpha}$ կրիտիկական տիրույթն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\mathcal{X}_{1,\alpha} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y})_n : |t_{n-2}| > t_{\alpha/2}(n-2)\}:$$

Ըստ այս օրինակի՝ T_{n-2} վիճականու արժեքն է՝

$$t_{n-2} = \sqrt{n-2} \frac{r_{x,y}}{\sqrt{1-r_{x,y}^2}} = -\sqrt{98} \cdot \frac{0.162}{\sqrt{0.973}} \approx -1.63,$$

և քանի որ $t_{0.025}(98) = 1.98$, ապա $\mathbb{H}_0$ վարկածը **չի հերքվում**, և **կորելյացիոն կապը** X և Y պատահական մեծությունների միջև 0.05 մակարդակով նշանակալի չէ:

Խնդիրներ

10.15. Դիցուք $(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1)_{n_1}$ -ը և $(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_2)_{n_2}$ -ը *համատեղ նորմալ* բաշխված (X_1, Y_1) և (X_2, Y_2) պատահական վեկտորների n_1 և n_2 ծավալի **միմյանցից անկախ** նմուշներ են: α նշանակալիության մակարդակով ստուգել $\mathbb{H}_0 : \rho_1 = \rho_2 (= \rho_0)$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \rho_1 \neq \rho_2$ երկընտրանքայինի, որտեղ $\rho_1 = \rho_{X_1, Y_1}$ -ը և $\rho_2 = \rho_{X_2, Y_2}$ -ը կորելյացիայի գործակիցներն են:

Պատասխան՝ հայտանիշի *կրիտիկական տիրույթն է՝*

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)_{n_1}, (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)_{n_2} : |z_{n_1, n_2}| > z_{\alpha/2}\},$$

$$\mathbb{Z}_{n_1, n_2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n_1-3} + \frac{1}{n_2-3}}} (z_1 - z_2) - \frac{\rho_0}{2} \left(\frac{1}{n_1-1} - \frac{1}{n_2-1} \right), \quad \mathbb{Z}_{n_1, n_2}(\omega_0) = z_{n_1, n_2},$$

$$z_i = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + r_{X_i, Y_i}}{1 - r_{X_i, Y_i}},$$

իսկ r_{X_i, Y_i} -երը ($i = 1, 2$) նմուշային կորելյացիայի գործակիցներն են:

10.16. Դիցուք $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})_n$ -ը *համատեղ նորմալ* բաշխում ունեցող պատահական վեկտորի 46 ծավալի նմուշ է: Նմուշային կորելյացիայի գործակցի համար ստացվել է $r_{x,y} = 0.7928$ արժեքը: 0.05 նշանակալիության մակարդակով ստուգել $\mathbb{H}_0 : \rho = 0.9$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \rho < 0.9$ մրցող վարկածի:

Ցուցում՝ օգտվել թեորեմ 10.15-ից:

Պատասխան՝ վարկածը *հերքվում է*:

Գլուխ 11

Երկու փոփոխականով գծային ռեգրեսիոն մոդել

Ռեգրեսիա հասկացությունը առաջին անգամ գործածել է անգլիացի վիճակագիր **Ֆրենսիս Գալտոնը**, որը, ուսումնասիրելով 205 ամուսնական զույգ և նրանց 930 չափահաս երեխա, նկատել էր, որ այն երեխաները, որոնց ծնողների միջին հասակը մեծ է տվյալ բնակչության միջին հասակից, ավելի ցածրահասակ են լինում, քան իրենց ծնողները: Եվ ընդհակառակն, երեխաները, որոնց ծնողների միջին հասակը բնակչության միջին հասակից ցածր է, ծնողներից ավելի բարձրահասակ են: Այդ երևույթը նա անվանել էր «**ռեգրեսիա**» դեպի բնակչության հասակի միջին արժեքը:

§ 11.1. Նվազագույն քառակուսիների գնահատականներ

Դիտողություն 11.1: Ռեգրեսիոն տեսությունում ընդունված է վեկտորները (նմուշները) դիտարկել որպես **սյունակ վեկտորներ**:

Դիցուք դիտվում են X և Y փոփոխականների (X_i, Y_i) , $i = 1, \dots, n$ զույգերը: Պահանջվում է $f(X) = a + bX$, $a, b \in \mathcal{R}$ գծային ֆունկցիայի միջոցով

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^n (Y_i - (a + bX_i))^2$$

արտահայտության մինիմումի իմաստով լավագույն ձևով մոտարկել (X_i, Y_i) , $i = 1, \dots, n$ կետերը, այսինքն՝ $f(X) = a + bX$, $a \in \mathcal{R}$, $b \in \mathcal{R}$ գծային ֆունկցիաների դասում գտնել այն $\hat{f}(X) = \hat{a} + \hat{b}X$ ֆունկցիան, որը մինիմալացնի $F(a, b)$ քառակուսիների գումարը: (Այդ տիպի խնդիրներ առաջին անգամ դիտարկել է **Գաուսը**, իսկ մեթոդը անվանվել է **նվազագույն քառակուսիների եղանակ**):

Մինիմումի անհրաժեշտ պայմաններից՝

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n (Y_i - a - bX_i) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n X_i (Y_i - a - bX_i) = 0, \end{cases}$$

ստանում ենք այսպես կոչված **նորմալ** հավասարումների համակարգը՝

$$\begin{cases} an + b \sum X_i = \sum Y_i, \\ a \sum X_i + b \sum X_i^2 = \sum X_i Y_i, \end{cases} \quad (11.1)$$

որի լուծումներն են (պարզության համար այստեղ և հետագայում գումարի նշանի ինդեքսները բաց են թողնվում, եթե $i = 1, \dots, n$)՝

$$\hat{b} = \frac{n \sum X_i Y_i - (\sum X_i)(\sum Y_i)}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} = \frac{S_{XY}^2}{S_X^2} = r_{X,Y} \frac{S_Y}{S_X}, \quad (11.2)$$

$$\hat{a} = \bar{Y} - \hat{b}\bar{X}, \quad \mathbf{X} = \|X_1, \dots, X_n\|^T, \quad \mathbf{Y} = \|Y_1, \dots, Y_n\|^T: \quad (11.3)$$

$\hat{a}$ և $\hat{b}$ լուծումները կոչվում են a և b պարամետրերի **նվազագույն քառակուսիների (ՆՔ) գնահատականներ**: Այսպիսով, $\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}X$ -ը որոնելի ուղիղն է:

Պարզ է, որ $\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}X$ ուղիղն անցնում է $(\bar{X}, \bar{Y})$ կետով այնպես, որ այդ ուղիղի հավասարումը կարելի է ներկայացնել նաև հետևյալ տեսքով՝

$$\hat{Y} - \bar{Y} = \hat{b}(X - \bar{X}): \quad (11.4)$$

Հեշտ է տեսնել, որ

$$\bar{\hat{Y}} = \frac{1}{n} \sum \hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{b}\bar{X} = \bar{Y}, \quad \hat{\mathbf{Y}} = \|\hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_n\|^T: \quad (11.5)$$

Կատարենք փոփոխականների փոխարինում՝ նշանակելով՝

$$x_i = X_i - \bar{X}, \quad y_i = Y_i - \bar{Y}: \quad (11.6)$$

Այդ դեպքում

$$F(a, b) = \sum (y_i - (a + bx_i))^2$$

արտահայտության մինիմալացման խնդիրը հանգեցնում է հետևյալ գնահատականներին՝

$$\hat{a} = 0 \text{ (քանի որ } \bar{x} = \bar{y} = 0), \quad \hat{b} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = r_{x,y} \frac{s_y}{s_x}, \quad (11.7)$$

և գնահատվող ուղղի հավասարումը կլինի

$$\hat{y} = \hat{b}x: \quad (11.8)$$

Օրինակ 11.1: (X_i, Y_i) , $i = 1, \dots, 16$ դիտումների միջոցով ստացվել են հետևյալ արժեքները՝

$$\sum X_i^2 = 657, \quad \sum X_i Y_i = 492, \quad \sum Y_i = 64, \quad \sum X_i = 96:$$

Գտնենք (X_i, Y_i) , $i = 1, \dots, 16$ կետերի միջին քառակուսային իմաստով «նվազագույն» մոտարկող $\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}X$ ուղղի հավասարումը:

(11.2) և (11.3) բանաձևերից կստանանք a և b պարամետրերի համար **նվազագույն քառակուսիների գնահատականները**՝

$$\hat{b} = \frac{16 \cdot 492 - 96 \cdot 64}{16 \cdot 657 - 96^2} = \frac{4}{3}, \quad \hat{a} = \frac{64}{16} - \frac{96}{16} \cdot \frac{4}{3} = -4:$$

Այնպես որ որոնելի ուղիղը (տե՛ս (11.4)) կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\hat{Y} = 4 + \frac{4}{3}(X - 6) = \frac{4}{3}X - 4:$$

Խնդիրներ

11.1. Ապացուցել, որ $\mathbf{e} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}$ վեկտորը **օրթոգոնալ** է $\mathbf{1} = \left\| \underbrace{1, \dots, 1}_n \right\|^T$ և $\mathbf{X} = \|X_1, \dots, X_n\|^T$ վեկտորներին ($\mathbf{e} = \|e_1, \dots, e_n\|^T$, $\mathbf{Y} = \|Y_1, \dots, Y_n\|^T$, $\hat{\mathbf{Y}} = \|\hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_n\|^T$):

11.2. Գտնել նվազագույն քառակուսիների եղանակով $f(X) = a + \frac{b}{X}$ ($a, b \in \mathcal{R}$) ֆունկցիաների դասում (X_i, Y_i) , $i = 1, \dots, n$ կետերի «լավագույն» մոտարկումը:

Պատասխան՝

$$\hat{b} = \frac{n \sum \frac{Y_i}{X_i} - (\sum Y_i) \left(\sum \frac{1}{X_i} \right)}{n \sum \frac{1}{X_i^2} - \left(\sum \frac{1}{X_i} \right)^2}, \quad \hat{a} = \bar{Y} - \left(\frac{1}{n} \sum \frac{1}{X_i} \right) \hat{b} :$$

§ 11.2. Գաուս - Մարկովի թեորեմ

Այժմ դիցուք տրված է (X, Y) **պատահական** վեկտորը, որին համապատասխանում է $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ **պատահական** նմուշը, ընդ որում՝ Y պատահական մեծության ըստ X_i -երի **պայմանական մաթեմատիկական սպասումները**՝ $E(Y|X_i) := f(X_i)$, կախված են X_i -երից գծային ձևով՝ $f(X_i) = a + bX_i$, ուստի Y_i -երը կարելի է ներկայացնել

$$Y_i = E(Y|X_i) + \varepsilon_i = a + bX_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (11.9)$$

տեսքով: Այստեղ ε_i -երը $E(Y|X_i)$ արժեքներից Y_i -երի «տատանումները» նկարագրող պատահական մեծություններ են:

Y_i և X_i պատահական մեծությունների միջև (11.9) ներկայացումով տրվող կապը կոչվում է **գծային ռեգրեսիոն մոդել**: X_i պատահական մեծությունն անվանվում է **ռեգրեսոր (սլոնգիտոր)**, Y_i պատահական մեծությունը՝ «**արձագանք**», իսկ ε_i -ն՝ ռեգրեսիայի **սխալ** կամ «**աղմուկ**»: $f(x) = E(Y|x) := E(Y|X = x)$ ֆունկցիան ($x \in \mathcal{R}$) կոչվում է **ռեգրեսիայի ֆունկցիա**:

Եթե X -ը, $X_1, \dots, X_n$ արժեքներ ընդունող **ոչ պատահական** փոփոխական է, ապա (11.9) ներկայացման մեջ մասնակցող X_i ռեգրեսորն անվանվում է **բացատրող (անկախ)** փոփոխական, իսկ Y_i «արձագանքը»՝ **բացատրվող (կախյալ)** փոփոխական:

Հետագայում (11.9) **գծային ռեգրեսիոն մոդելի** վրա կդրվեն հետևյալ **(H) պայմանները՝**

H 1. X_i -երը **ոչ պատահական** մեծություններ են,

H 2. $E(\varepsilon_i) = 0$, $\text{var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$, $i = 1, \dots, n$,

$\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$:

Որոշ դեպքերում **H 2.** պայմանը կփոխարինվի հետևյալ պայմանով՝

H 3. $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$, $i = 1, \dots, n$ սխալները միևնույն ցրվածքով **համատեղ նորմալ** օրենքով բաշխված **անկախ** պատահական մեծություններ են:

H 1. և **H 3.** պայմանները բավարարող ռեգրեսիոն մոդելները կոչվում են **նորմալ գծային ռեգրեսիոն մոդելներ**:

$\text{var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$, $i = 1, \dots, n$ պայմանը բավարարող (11.9) ռեգրեսիոն մոդելները կոչվում են **համասեռ մոդելներ**:

Այժմ դիտարկենք (11.9) մոդելին համապատասխանող $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ նմուշի միջոցով a, b և σ^2 պարամետրերի **կետային գնահատման** հարցը:

Նշանակենք՝

$$\mathcal{L}_\theta^0(\mathbf{Y}) = \{\theta^* : \theta^* = \sum c_i Y_i, \quad c_i \in \mathcal{R}, \quad E_\theta(\theta^*) = \theta\} \text{ -ով}$$

որոշակի θ պարամետրի **գծային** (ըստ Y_i -երի) **անշեղ գնահատականների** դասը:

Գծային ռեգրեսիոն մոդելների համար ճիշտ է հետևյալ ֆունդամենտալ արդյունքը՝ (11.3)

Թեորեմ 11.1 (Գաուս – Մարկով): *Դիցուք (11.9) մոդելը բավարարում է H 1., H 2. պայմանները: Այդ դեպքում a և b պարամետրերի նվազագույն քառակուսիների $\hat{a}$ և $\hat{b}$ գնահատականները (տե՛ս (11.2), (11.3)) օպտիմալ են (ունեն նվազագույն ցրվածքներ) համապատասխանաբար $\mathcal{L}_a^0(\mathbf{Y})$ և $\mathcal{L}_b^0(\mathbf{Y})$ դասերում:*

Լեմմա 11.1. *Ճիշտ են հետևյալ առնչությունները՝*

$$\begin{aligned} \text{ա) } \sum \omega_i &= 0, \quad \text{բ) } \sum \omega_i^2 = \frac{1}{\sum x_i^2}, \quad \text{գ) } \sum \omega_i x_i = \sum \omega_i X_i = 1, \\ \text{դ) } \sum \omega_i y_i &= \sum \omega_i Y_i, \quad \text{որտեղ } \omega_i := \frac{x_i}{\sum x_j^2} \text{ (տե՛ս (11.6))}: \end{aligned}$$

Ա պ ա ց ու ց ու մ:

Հետևում է՝ ա) $\sum x_i = 0$ պայմանից,

$$\text{բ) } \sum \omega_i^2 = \left(\frac{1}{\sum x_i^2} \right)^2 \sum x_i^2 = \frac{1}{\sum x_i^2},$$

$$\text{գ) } \sum \omega_i x_i = \sum \omega_i X_i - \bar{X} \sum \omega_i = \sum \omega_i X_i,$$

$$\text{մյուս կողմից՝ } \sum \omega_i x_i = \left(\frac{1}{\sum x_j^2} \right) \sum x_i^2 = 1,$$

դ) ակնհայտ է (տե՛ս գ) կետը):

Լեմմա 11.2: **H 1.** *և* **H 2.** *պայմանների դեպքում՝* $\hat{a} \in \mathcal{L}_a^0(\mathbf{Y})$, $\hat{b} \in \mathcal{L}_b^0(\mathbf{Y})$ *և*

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{a}) &= \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{\sum X_i^2}{\sum x_i^2}, \quad \text{var}(\hat{b}) = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}, \\ \text{cov}(\hat{a}, \hat{b}) &= -\frac{\sigma^2 \bar{X}}{\sum x_i^2}: \end{aligned} \quad (11.10)$$

Ա պ ա ց ու ց ու մ: Նախ ցույց տանք, որ $\hat{a}$ և $\hat{b}$ գնահատականները **գծային** են ըստ Y_i -երի: Ներկայացնենք b պարամետրի գնահատականը հետևյալ ձևով՝

$$\hat{b} = \frac{S_{XY}^2}{S_X^2} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \sum \omega_i y_i = \sum \omega_i (Y_i - \bar{Y}) = \sum \omega_i Y_i:$$

a պարամետրի գնահատականը կարտահայտվի

$$\hat{a} = \bar{Y} - \hat{b} \bar{X} = \sum \left(\frac{1}{n} - \bar{X} \omega_i \right) Y_i$$

տեսքով: Այնպես որ, $\hat{a}$ և $\hat{b}$ վիճականիները գծային ձևով են ներկայացվում Y_i -ի միջոցով:

Այժմ ցույց տանք $\hat{a}$ և $\hat{b}$ գնահատականների **անշեղությունը**: Համաձայն (11.9)-ի և լեմմա 11.1-ի՝

$$\hat{b} = \sum \omega_i Y_i = \sum \omega_i (a + bX_i + \varepsilon_i) = b + \sum \omega_i \varepsilon_i: \quad (11.11)$$

Այստեղից կատանանք՝

$$E(\hat{b}) = b + \sum \omega_i E(\varepsilon_i) = b, \text{ այսինքն՝ } \hat{b} \in \mathcal{L}_b^0(\mathbf{Y}):$$

Մյուս կողմից՝ ունենք՝

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \sum \left(\frac{1}{n} - \bar{X} \omega_i \right) Y_i = \sum \left(\frac{1}{n} - \bar{X} \omega_i \right) (a + bX_i + \varepsilon_i) = a - a\bar{X} \sum \omega_i + b\bar{X} - \\ &\quad - b\bar{X} \sum \omega_i X_i + \sum \left(\frac{1}{n} - \bar{X} \omega_i \right) \varepsilon_i = a + \sum \left(\frac{1}{n} - \bar{X} \omega_i \right) \varepsilon_i, \end{aligned} \quad (11.12)$$

որտեղից՝ $E(\hat{a}) = a$ և $\hat{a} \in \mathcal{L}_a^0(\mathbf{Y})$:

Գտնենք $\hat{a}$ և $\hat{b}$ գնահատականների ցրվածքները: Համաձայն (11.11)-ի՝

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{b}) &= E(\hat{b} - b)^2 = E\left(\sum \omega_i \varepsilon_i\right)^2 = E\left(\sum \omega_i^2 \varepsilon_i^2 + \sum_{i \neq j} \omega_i \omega_j \varepsilon_i \varepsilon_j\right) = \\ &= \sigma^2 \sum \omega_i^2 + \sum_{i \neq j} \omega_i \omega_j E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}: \end{aligned}$$

Մյուս կողմից՝ համաձայն (11.12)-ի՝

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{a}) &= E(\hat{a} - a)^2 = \sigma^2 \sum \left(\frac{1}{n} - \bar{X} \omega_i \right)^2 = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + (\bar{X})^2 \sum \omega_i^2 - \frac{2\bar{X}}{n} \sum \omega_i \right) \\ &= \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{X})^2}{\sum x_i^2} \right) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{n(\bar{X})^2 + \sum (X_i - \bar{X})^2}{\sum x_i^2} = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{\sum X_i^2}{\sum x_i^2}: \end{aligned}$$

Դժվար չէ ստանալ նաև (11.10) ներկայացումը (տե՛ս խնդիր 11.3-ը):

Գ ա ու ս – Մ ա ր կ ո վ ի թ ե ո ր ե մ ի ա պ ա ց ու ց ու մ: Ցույց տանք, որ $\hat{a}$ և $\hat{b}$ գնահատականներն **օպտիմալ** են համապատասխանաբար $\mathcal{L}_a^0(\mathbf{Y})$ և $\mathcal{L}_b^0(\mathbf{Y})$ դասերում: Դիցուք

$$\tilde{b} = \sum c_i Y_i \text{ և } \tilde{a} = \sum d_i Y_i,$$

b և a պարամետրերի համապատասխանաբար $\mathcal{L}_b^0(\mathbf{Y})$ և $\mathcal{L}_a^0(\mathbf{Y})$ դասերից որոշակի գնահատականներ են: Գտնենք c_i և d_i գործակիցների այնպիսի արժեքներ, որ $\text{var}(\tilde{b})$ և $\text{var}(\tilde{a})$ ցրվածքներն ընդունեն իրենց նվազագույն արժեքները:

Սկզբում դիտարկենք $\tilde{b} = \sum c_i Y_i$ գնահատականի դեպքը: Քանի որ Y_i -երը բավարարում են (11.9) մոդելին, ապա

$$\tilde{b} = \sum c_i Y_i = a \sum c_i + b \sum c_i X_i + \sum c_i \varepsilon_i, \quad (11.13)$$

որտեղից՝

$$E(\tilde{b}) = a \sum c_i + b \sum c_i X_i :$$

$\tilde{b} \in \mathcal{L}_b^0(\mathbf{Y})$ պայմանից հետևում է, որ $E(\tilde{b}) = b$, այսինքն՝

$$a \sum c_i + b \left(\sum c_i X_i - 1 \right) = 0 \quad (11.14)$$

ցանկացած $a, b \in \mathcal{R}$ -ից: Վերցնելով մասնավորապես $a = 0, b = 1$ և այնուհետև՝ $a = 1, b = 0$ ՝ (11.14)-ից կստանանք՝

$$\sum c_i = 0 \text{ և } \sum c_i X_i = 1: \quad (11.15)$$

Մյուս կողմից՝ (11.13)-ից ունենք՝

$$\text{var}(\tilde{b}) = \sum c_i^2 \text{var}(\varepsilon_i) = \sigma^2 \sum c_i^2 :$$

Այժմ գտնենք (11.15) սահմանափակումների դեպքում $\text{var}(\tilde{b})$ ցրվածքի պայմանական մինիմումը: Ներմուծենք

$$H(c_1, \dots, c_n; \lambda, \mu) = \sum c_i^2 - \lambda \sum c_i - \mu \left(\sum c_i X_i - 1 \right)$$

Լագրանժի ֆունկցիան: $H(c_1, \dots, c_n; \lambda, \mu)$ ֆունկցիայի էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը հանգեցնում է հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial c_i} = 2c_i - \lambda - \mu X_i = 0, & i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (11.16)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial \lambda} = - \sum c_i = 0, \end{cases} \quad (11.17)$$

$$\begin{cases} - \frac{\partial H}{\partial \mu} = \sum c_i X_i - 1 = 0 : \end{cases} \quad (11.18)$$

(11.16) հավասարումներից կստանանք՝

$$c_i = \frac{1}{2}(\lambda + \mu X_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (11.19)$$

որտեղից՝

$$0 = \sum c_i = \frac{1}{2} \left(\lambda n + \mu \sum X_i \right),$$

այնպես որ՝ $\lambda = -\mu \bar{X}$: Տեղադրելով կրկին λ -ի այս արժեքը (11.19) բանաձևի մեջ կստանանք՝

$$c_i = \frac{\mu}{2} (X_i - \bar{X}) = \frac{\mu}{2} x_i:$$

Բազմապատկելով այս արտահայտության ձախ և աջ մասերը X_i -ով, գումարելով ($i = 1, \dots, n$) և օգտվելով (11.18)-ից՝ կստանանք՝

$$\mu = \frac{2}{\sum x_i X_i} = \frac{2}{\sum x_i (x_i + \bar{X})} = \frac{2}{\sum x_i^2},$$

որտեղից՝

$$c_i = \frac{\mu}{2} x_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2} = \omega_i:$$

Այսպիսով, ունենք՝

$$\tilde{b} = \sum \omega_i Y_i = \hat{b}:$$

Այժմ դիտարկենք

$$\tilde{a} = \sum d_i Y_i \text{ գնահատականը:}$$

$Y_i = a + bX_i + \varepsilon_i$ պայմանից ունենք՝

$$\tilde{a} = a \sum d_i + b \sum d_i X_i + \sum d_i \varepsilon_i, \quad (11.20)$$

որտեղից՝

$$E(\tilde{a}) = a \sum d_i + b \sum d_i X_i :$$

$E(\tilde{a}) = a$ պայմանից բոլոր $a, b \in \mathcal{R}$ -ից կստանանք՝

$$a \left(\sum d_i - 1 \right) + b \sum d_i X_i = 0:$$

Մասնավորապես՝ $a = 0, b = 1$ և $a = 1, b = 0$ դեպքերի համար կստանանք համապատասխանաբար հետևյալ պայմանները՝

$$\sum d_i = 1 \text{ և } \sum d_i X_i = 0: \quad (11.21)$$

Մյուս կողմից՝ (11.20)-ից ունենք՝

$$\text{var}(\tilde{a}) = \sum d_i^2 \text{var}(\varepsilon_i) = \sigma^2 \sum d_i^2 :$$

Գտնենք (11.21) սահմանափակումների դեպքում $\text{var}(\tilde{a})$ ցրվածքի **պայմանական մինիմումը**:

Դիտարկենք **լագրանժիանը**՝

$$H(d_1, \dots, d_n; \lambda, \mu) = \sum d_i^2 - \lambda \left(\sum d_i - 1 \right) - \mu \sum d_i X_i :$$

$H(d_1, \dots, d_n; \lambda, \mu)$ ֆունկցիայի էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմաններից կստանանք՝

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial d_i} = 2d_i - \lambda - \mu X_i = 0, & i = 1, \dots, n \\ -\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \sum d_i - 1 = 0, \\ -\frac{\partial H}{\partial \mu} = \sum d_i X_i = 0: \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} d_i = \frac{1}{2}(\lambda + \mu X_i), & i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (11.22)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum d_i = 1, \end{cases} \quad (11.23)$$

$$\begin{cases} \sum d_i X_i = 0: \end{cases} \quad (11.24)$$

Գումարելով (11.22) արտահայտության ձախ և աջ մասերը և, հաշվի առնելով (11.23) պայմանը, կստանանք՝

$$1 = \sum d_i = \frac{1}{2} \left(\lambda n + \mu \sum X_i \right),$$

որտեղից՝ $\lambda = \frac{2}{n} - \mu \bar{X}$: Տեղադրելով այս արժեքը (11.22) բանաձևի մեջ՝ կստանանք՝

$$d_i = \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \mu x_i:$$

Բազմապատկելով այս արտահայտության ձախ և աջ մասերը X_i -ով և գումարելով (հաշվի առնելով (11.24) պայմանը)՝ կունենանք՝

$$0 = \sum d_i X_i = \bar{X} + \frac{\mu}{2} \sum x_i X_i,$$

որտեղից՝

$$\mu = -\frac{2 \bar{X}}{\sum x_i X_i} = -\frac{2 \bar{X}}{\sum x_i^2},$$

այնպես որ՝

$$d_i = \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \mu x_i = \frac{1}{n} - \frac{\bar{X} x_i}{\sum x_i^2} = \frac{1}{n} - \bar{X} \omega_i \quad \text{և}$$

$$\tilde{a} = \sum d_i Y_i = \sum \left(\frac{1}{n} - \bar{X} \omega_i \right) Y_i = \hat{a} :$$

Այսպիսով, թեորեմն ապացուցված է:

Նվազագույն քառակուսիների $\hat{a}$ և $\hat{b}$ գնահատականների ունակությունը

Թեորեմ 11.2: *Դիցուք տեղի ունեն **H 1.** և **H 2.** պայմանները, և*

$$\sum x_i^2 \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty \quad \text{և} \quad \sum X_i^2 = O\left(\sum x_i^2\right):$$

*Այդ դեպքում (11.9) ռեգրեսիոն մոդելի a և b պարամետրերի $\hat{a} = (\hat{a}_n)_{n \geq 1}$ և $\hat{b} = (\hat{b}_n)_{n \geq 1}$ նվազագույն քառակուսիների գնահատականներն **ունակ** են, այսինքն՝*

$$\hat{a}_n \xrightarrow{P} a \quad \text{և} \quad \hat{b}_n \xrightarrow{P} b, \quad n \rightarrow \infty:$$

Ա պ ա ց ու ց ու մ: Համաձայն **Գաուս – Մարկովի** թեորեմի՝ (11.9) մոդելի a և b պարամետրերի $\hat{a}_n$ և $\hat{b}_n$ նվազագույն քառակուսիների գնահատականներն անշեղ են, այսինքն՝

$$E(\hat{a}_n) = a \quad \text{և} \quad E(\hat{b}_n) = b :$$

Մյուս կողմից՝ ըստ լեմմա 11.2 -ի՝

$$\text{var}(\hat{a}_n) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{\sum X_i^2}{\sum x_i^2}, \quad \text{var}(\hat{b}_n) = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} :$$

Այսպիսով՝

$$\text{var}(\hat{a}_n) \rightarrow 0 \quad \text{և} \quad \text{var}(\hat{b}_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

այնպես որ, օգտվելով գնահատականների **ունակության հայտանիշից** (տե՛ս [15]-ի հետևանք 5.21-ը), կստանանք՝

$$\hat{a}_n \xrightarrow{P} a \quad \text{և} \quad \hat{b}_n \xrightarrow{P} b, \quad n \rightarrow \infty:$$

Խնդիրներ

11.3. Ապացուցել (11.10) բանաձևը:

11.4. Դիցուք տրված է H 1. և H 2. պայմանները բավարարող (11.9) մոդելը, որտեղ $X_i = i$, $i = 1, \dots, 6$: Դիտարկենք b պարամետրի

$$\tilde{b} = \frac{1}{8} (Y_6 + Y_5 - Y_2 - Y_1)$$

գնահատականը: Գտնել այդ գնահատականի ցրվածքը և համեմատել նվազագույն քառակուսիների $\hat{b}$ գնահատականի ցրվածքի հետ:

Պատասխան՝ $\text{var}(\tilde{b}) = \frac{\sigma^2}{17.5}$, $\text{var}(\hat{b}) = \frac{\sigma^2}{16}$:

§ 11.3. Մնացորդային ցրվածք

Գնահատենք (11.9) ռեգրեսիոն մոդելի ε_i սխալների σ^2 ցրվածքը:

Ռեգրեսիայի մնացորդներ կոչվում են

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - \hat{a} - \hat{b}X_i = y_i - \hat{b}x_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (11.25)$$

վիճականիները:

Դիտողություն 11.2: Պետք է տարբերել e_i մնացորդները ռեգրեսիայի ε_i սխալներից: (11.9) ռեգրեսիոն մոդելի ε_i սխալները, ինչպես և e_i մնացորդները, պատահական մեծություններ են: Սակայն, ի տարբերություն սխալների, մնացորդները արտահայտվում են Y_i դիտումների միջոցով (տե՛ս (11.25)):

Նկատենք (տե՛ս (11.5)), որ

$$\sum e_i = \sum (Y_i - \hat{Y}_i) = n\bar{Y} - n\bar{\hat{Y}} = 0: \quad (11.26)$$

Թեորեմ 11.3: Դիցուք բավարարվում են H 1. և H 2. պայմանները: Այդ դեպքում

$$s^2 := \widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n-2} \sum e_i^2 \quad (11.27)$$

վիճականին σ^2 ցրվածքի համար անշեղ գնահատական է:

s^2 վիճականին կոչվում է **մնացորդային ցրվածք**, իսկ $s = \sqrt{s^2}$ վիճականին՝ **մնացորդային միջին քառակուսային** (կամ **ստանդարտ**) **շեղում**: Միջին քառակուսային շեղումը նկարագրում է ռեգրեսիայի ուղղի շուրջ (X_i, Y_i) , $i = 1, \dots, n$ դիտվող արժեքների կուտակվածության աստիճանը:

Թե ուրեմի ապացում: Դիտարկենք ռեգրեսիայի մնացորդների $\sum e_i^2$ քառակուսիների գումարը: Միջինացնելով $Y_i = a + bX_i + \varepsilon_i$ դիտումներն ըստ՝ $i = 1, \dots, n$ ՝ կստանանք՝

$$\bar{Y} = a + b\bar{X} + \bar{\varepsilon}, \quad (11.28)$$

որտեղ

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{n} \sum \varepsilon_i :$$

Այստեղից կստանանք՝

$$y_i = Y_i - \bar{Y} = bx_i + (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}):$$

Որտեղից՝

$$e_i = y_i - \hat{b}x_i = -(\hat{b} - b)x_i + (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}) \text{ և } \quad (11.29)$$

$$\sum e_i^2 = (\hat{b} - b)^2 \sum x_i^2 + \sum (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2 - 2(\hat{b} - b) \sum x_i (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}):$$

Այժմ հաշվենք $E(\sum e_i^2)$ մաթեմատիկական սպասումը:

Ունենք՝

$$E\left((\hat{b} - b)^2 \sum x_i^2\right) = \left(\sum x_i^2\right) \text{var}(\hat{b}) = \left(\sum x_i^2\right) \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} = \sigma^2,$$

$$E\left(\sum (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2\right) = E\left(\sum \varepsilon_i^2 - n(\bar{\varepsilon})^2\right) = n\sigma^2 - n \text{var}(\bar{\varepsilon})^2 = (n - 1) \sigma^2:$$

Այնուհետև (տե՛ս (11.11))՝

$$E\left((\hat{b} - b) \sum x_j (\varepsilon_j - \bar{\varepsilon})\right) = E\left(\left(\sum_i \omega_i \varepsilon_i\right) \left(\sum_j x_j (\varepsilon_j - \bar{\varepsilon})\right)\right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= E\left(\sum_{i,j} \omega_i x_j \varepsilon_i \varepsilon_j\right) - E\left(\left(\sum_i \omega_i \varepsilon_i\right) \bar{\varepsilon}\left(\sum_j x_j\right)\right) = \sum (\omega_i x_i E(\varepsilon_i^2)) = \\
 &= \sigma^2 \sum \omega_i x_i = \sigma^2:
 \end{aligned}$$

Այսպիսով՝

$$E\left(\sum e_i^2\right) = (n-2) \sigma^2,$$

և որպես σ^2 ցրվածքի գնահատական վերցնելով (11.27)-ում սահմանված s^2 վիճականին՝ կստանանք՝ $E(s^2) = \sigma^2$:

Ունակություն

Թեորեմ 11.4: *Դիցուք բավարարվում են H 1. և H 2. պայմանները, և*

$$\text{var}\left(\sum e_i^2\right) = o(n^2): \quad (11.30)$$

Այդ դեպքում $s^2 = (s_n^2)_{n \geq 1}$ -ն ունակ գնահատական է σ^2 պարամետրի համար՝

$$s_n^2 \xrightarrow{P} \sigma^2, \quad n \rightarrow \infty:$$

Ապացուցում: Քանի որ

$$\text{var}(s_n^2) = \frac{1}{(n-2)^2} \text{var}\left(\sum e_i^2\right),$$

ապա (11.30) պայմանից հետևում է, որ $\text{var}(s_n^2) \rightarrow 0$, երբ $n \rightarrow \infty$: Հաշվի առնելով $E(s_n^2) = \sigma^2$ հատկությունը (թեորեմ 11.3-ը) և ունակության հայտանիշը (տե՛ս [15]-ի հետևանք 5.21-ը)՝ կստանանք՝ $s_n^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$, երբ $n \rightarrow \infty$:

Դիտողություն 11.3: Քանի որ գործնականում ռեգրեսիայի ε_i սխալների σ^2 ցրվածքը անհայտ է, ապա, վերցնելով որպես դրա գնահատական s^2 մնացորդային ցրվածքը, կարելի է ստանալ նվազագույն քառակու-

սիների գնահատականների $\text{var}(\hat{a})$ և $\text{var}(\hat{b})$ ցրվածքների և $\text{cov}(\hat{a}, \hat{b})$ կովարիացիայի գնահատականները (տե՛ս լեմմա 11.2)՝

$$s_{\hat{a}}^2 := \widehat{\text{var}}(\hat{a}) = \frac{s^2}{n} \cdot \frac{\sum X_i^2}{\sum x_i^2} = s^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{X})^2}{\sum x_i^2} \right), \quad (11.31)$$

$$s_{\hat{b}}^2 := \widehat{\text{var}}(\hat{b}) = \frac{s^2}{\sum x_i^2}, \quad (11.32)$$

$$\widehat{\text{cov}}(\hat{a}, \hat{b}) = -\frac{s^2 \bar{X}}{\sum x_i^2}: \quad (11.33)$$

§ 11.4. Ռեգրեսիայի գործակիցների ճշմարտանմանության մաքսիմումի գնահատականները

Դիցուք $Y_i = a + bX_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n$ մոդելը բավարարում է **H 1.**, **H 3.** պայմանները, այսինքն՝ ունենք նորմալ զծային ռեգրեսիոն մոդել: Գտնենք a , b և σ^2 պարամետրերի ճշմարտանմանության մաքսիմումի գնահատականները:

Թեորեմ 11.5: *Նորմալ զծային ռեգրեսիոն մոդելի a , b և σ^2 պարամետրերի $\hat{a}_{ML}$, $\hat{b}_{ML}$ և $\widehat{\sigma}_{ML}^2$ ՃՄ գնահատականները հետևյալ վիճականիներն են՝*

$$\hat{a}_{ML} = \bar{Y} - \hat{b}_{ML} \bar{X} = \hat{a}, \quad \hat{b}_{ML} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \hat{b},$$

$$\widehat{\sigma}_{ML}^2 = \frac{1}{n} \sum e_i^2 = \left(1 - \frac{2}{n}\right) s^2$$

$\hat{a}_{-p}$ և $\hat{b}_{-p}$ **չ** գնահատականներն են, իսկ s^2 -ն՝ մնացորդային ցրվածքը:

Ա պ ա ց ու ց ու մ: Քանի որ դիտվող մոդելի ε_i , $i = 1, \dots, n$ սխալներն անկախ պատահական մեծություններ են, ապա անկախ են նաև $Y_i \sim \mathcal{N}(a + bX_i, \sigma^2)$ դիտումները: $\mathbf{Y} = \|Y_1, \dots, Y_n\|^T$ նմուշի ճշմարտանմանության ֆունկցիան կլինի՝

$$f_{\theta}(\mathbf{Y}) = \prod f_{\theta}(Y_i) = (2\pi)^{-n/2} (\sigma^2)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum (Y_i - a - bX_i)^2 \right\},$$

որտեղ $\theta = (a, b, \sigma^2)$ -ն անհայտ պարամետրն է, իսկ $f_{\theta}(y_i)$ -ն՝ Y_i պատահական մեծությունների խտության ֆունկցիան: Այստեղից **լոգարիթմական ճշմարտանմանության ֆունկցիայի** համար կստանանք հետևյալ ներկայացումը՝

$$L_{\theta}(\mathbf{Y}) = \ln f_{\theta}(\mathbf{Y}) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum (Y_i - a - bX_i)^2,$$

ուստի մաքսիմումի անհրաժեշտ պայմաններից կստանանք՝

$$\begin{cases} \frac{\partial L_{\theta}(\mathbf{Y})}{\partial a} = \frac{1}{\sigma^2} \sum (Y_i - a - bX_i) = 0, \\ \frac{\partial L_{\theta}(\mathbf{Y})}{\partial b} = \frac{1}{\sigma^2} \sum X_i (Y_i - a - bX_i) = 0, \\ \frac{\partial L_{\theta}(\mathbf{Y})}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum (Y_i - a - bX_i)^2 = 0: \end{cases} \quad (11.34)$$

Այս համակարգի առաջին երկու հավասարումից կստանանք (11.1) **նորմալ հավասարումների համակարգը**, որի լուծումը տալիս է

$$\hat{b}_{ML} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \hat{b}, \quad \hat{a}_{ML} = \bar{Y} - \hat{b}_{ML} \bar{X} = \hat{a},$$

որտեղ $\hat{a}_{ML}$ -ը և $\hat{b}_{ML}$ -ը a և b պարամետրերի **ՃՄ գնահատականներն** են, իսկ $\hat{a}$ -ը և $\hat{b}$ -ը՝ **նվազագույն քառակուսիների գնահատականները**:

Մյուս կողմից՝ (11.34) համակարգի երրորդ հավասարումից կստանանք՝

$$\widehat{\sigma^2}_{ML} = \frac{1}{n} \sum (Y_i - \hat{a} - \hat{b}X_i)^2 = \frac{1}{n} \sum e_i^2 = \left(1 - \frac{2}{n}\right) s^2,$$

σ^2 պարամետրի **ՃՄ գնահատականը**: Պարզ է, որ $E(\hat{b}_{ML}) = b$ և $E(\hat{a}_{ML}) = a$, այսինքն՝ $\hat{b}_{ML}$ -ը և $\hat{a}_{ML}$ -ը **անշեղ գնահատականներ** են b և a պարամետրերի համար, իսկ $E(\widehat{\sigma^2}_{ML}) = \left(1 - \frac{2}{n}\right) \sigma^2$:

§ 11.5. Դետերմինացիայի գործակից

Գտնենք (11.9) ռեգրեսիոն մոդելի $\bar{Y}$ միջինի նկատմամբ կախյալ փոփոխականի վարիացիան: Համաձայն (11.6)-ի, (11.8)-ի և (11.25)-ի՝ ունենք՝

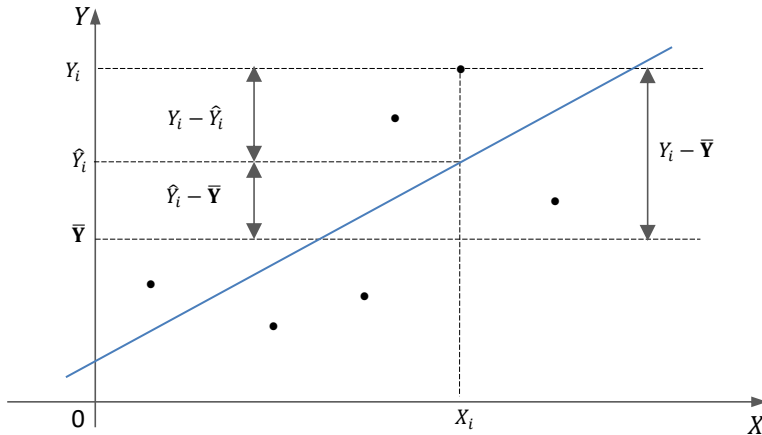
$$\sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum y_i^2 = \sum (e_i + \hat{\delta}x_i)^2 = \sum (\hat{y}_i)^2 + \sum e_i^2 + 2\hat{\delta} \sum x_i e_i: \quad (11.35)$$

Մյուս կողմից, համաձայն (11.7)-ի, կստանանք՝

$$\sum x_i e_i = \sum x_i (y_i - \hat{\delta}x_i) = \sum (x_i y_i - \hat{\delta}x_i^2) = 0, \quad (11.36)$$

այնպես որ, հաշվի առնելով (11.5) պայմանը, (11.35)-ը կներկայացվի հետևյալ ձևով՝

$$\sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2: \quad (11.37)$$



Այս վերլուծությունը նշանակում է, որ Y փոփոխականի ամբողջ վարիացիան՝

$$TSS := \sum (Y_i - \bar{Y})^2 \text{ (Total Sum of Squares),}$$

տրոհվում է երկու մասի՝ $\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}X$ ռեգրեսիայի հավասարումով «բացատրվող»՝

$$RSS := \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 \text{ (Regression Sum of Squares)}$$

և ռեգրեսիայի հավասարումով «չբացատրվող»

$$ESS := \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \text{ (Error Sum of Squares):}$$

Ռեգրեսիայի հավասարումով «բացատրվող» ամբողջ վարիացիայի մասը՝

$$R^2 = \frac{RSS}{TSS} = \frac{\sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}, \quad (11.38)$$

կոչվում է ղետերմինացիայի գործակից:

Դիտողություն 11.4: Հեշտ է տեսնել (տե՛ս § 10.5), որ

$$R^2 = \frac{\sum (\hat{y}_i)^2}{\sum y_i^2} = (\hat{b})^2 \frac{\sum x_i^2}{\sum y_i^2} = \frac{(\sum x_i y_i)^2}{\sum x_i^2 \sum y_i^2} = r_{X,Y}^2,$$

այսինքն՝ ղետերմինացիայի գործակիցը հավասար է X և Y փոփոխականների նմուշային կորելյացիայի գործակցի քառակուսուն:

Դիտողություն 11.5: (11.37) վարիացիայի վերլուծությունը կարելի է ներկայացնել նաև

$$TSS = RSS + ESS$$

տեսքով, որտեղից ղետերմինացիայի գործակիցը կլինի հավասար

$$R^2 = 1 - \frac{ESS}{TSS}: \quad (11.39)$$

(11.39) ներկայացումից հետևում է, որ

$$0 \leq R^2 \leq 1:$$

$R^2 = 1$ պայմանը նշանակում է, որ $Y_i = \hat{Y}_i$, $i = 1, \dots, n$, այսինքն՝ բոլոր դիտվող (X_i, Y_i) կետերը պատկանում են ռեգրեսիայի ուղղին (պարզագույն մոտարկում):

Մյուս եզրային արժեքը՝ $R^2 = 0$, նշանակում է, որ $\hat{Y}_i = \bar{Y}$, $i = 1, \dots, n$, այսինքն՝ համեմատությամբ $\hat{Y}_i = \bar{Y}$, $i = 1, \dots, n$ **ակնհայտ** կանխատեսումների ռեգրեսիան ոչ մի լրացուցիչ տեղեկատվություն չի տալիս, X_i -երի արժեքները **չեն լավացնում** կանխատեսումները:

Լեմմա 11.3: *Տեղի ունի մնացորդների քառակուսիների գումարի համար հետևյալ ներկայացումը՝*

$$ESS = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum Y_i^2 - \hat{a} \sum Y_i - \hat{b} \sum X_i Y_i :$$

Ա պ ա ց ու ց ու մ: Ներկայացնենք մնացորդների քառակուսիների գումարը հետևյալ ձևով՝

$$\begin{aligned} \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 &= \sum (Y_i - (\hat{a} + \hat{b}X_i))^2 = \\ &= \sum Y_i^2 - \sum Y_i(\hat{a} + \hat{b}X_i) + \sum (\hat{a} + \hat{b}X_i)(\hat{a} + \hat{b}X_i - Y_i): \end{aligned}$$

Մյուս կողմից՝

$$\begin{aligned} \sum (\hat{a} + \hat{b}X_i)(\hat{a} + \hat{b}X_i - Y_i) &= \\ &= \sum \hat{Y}_i(\hat{Y}_i - Y_i) = \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})(\hat{Y}_i - Y_i) + \sum \bar{Y}(\hat{Y}_i - Y_i): \end{aligned}$$

Այժմ նկատելով, որ

$$\sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 + 2 \sum (Y_i - \hat{Y}_i)(\hat{Y}_i - \bar{Y}) + \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2,$$

(11.37) պայմանից կատանանք՝

$$\sum (Y_i - \hat{Y}_i)(\hat{Y}_i - \bar{Y}) = 0:$$

Բացի այդ (տե՛ս (11.26))՝

$$\sum \bar{Y}(\hat{Y}_i - Y_i) = -\bar{Y} \sum e_i = 0:$$

Այսպիսով՝

$$\sum (\hat{a} + \hat{b}X_i)(\hat{a} + \hat{b}X_i - Y_i) = 0 \quad \text{և}$$

$$\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum Y_i^2 - \sum Y_i(\hat{a} + \hat{b}X_i) = \sum Y_i^2 - \hat{a} \sum Y_i - \hat{b} \sum X_i Y_i :$$

Օրինակ 11.2: Ըստ օրինակ 11.1-ի տվյալների, հաշվի առնելով նաև, որ $\sum Y_i^2 = 526$, գտնենք R^2 դետերմինացիայի գործակիցը, s^2 մնացորդային ցրվածքն ու s_a^2 և s_b^2 վիճականիները:

Համաձայն լեմմա 11.3-ի՝ ունենք՝

$$ESS = \sum Y_i^2 - \hat{a} \sum Y_i - \hat{b} \sum X_i Y_i :$$

Հետևաբար (տե՛ս օրինակ 11.1-ը)՝

$$ESS = 526 + 4 \cdot 64 - \frac{4}{3} \cdot 492 = 126,$$

$$TSS = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum Y_i^2 - n(\bar{Y})^2 = 526 - 256 = 270,$$

այնպես որ՝

$$RSS = TSS - ESS = 270 - 126 = 144:$$

Այստեղից՝

$$R^2 = \frac{RSS}{TSS} = \frac{144}{270} \approx 0.5333, s^2 = \frac{1}{n-2} ESS = \frac{126}{14} = 9,$$

որտեղից՝

$$s_a^2 = \frac{s^2}{n} \cdot \frac{\sum X_i^2}{\sum X_i^2 - n(\bar{X})^2} = \frac{9}{16} \cdot \frac{657}{657 - 16 \cdot 36} = \frac{73}{16} = 4.5625,$$

$$s_b^2 = \frac{s^2}{\sum X_i^2 - n(\bar{X})^2} \approx 0.1111:$$

Խնդիրներ

11.5. Դիցուք $Y_i = a + bX_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n$ ռեգրեսիոն մոդելի պարամետրերը գնահատվում են նվազագույն քառակուսիների եղանակով: Ցույց տալ, որ R^2 դետերմինացիայի գործակցի համար ճիշտ են հետևյալ համարժեք ներկայացումները՝

$$\text{ա) } R^2 = \frac{(\sum x_i y_i)^2}{\sum x_i^2 \sum y_i^2}, \quad \text{բ) } R^2 = \hat{b} \frac{\sum x_i y_i}{\sum y_i^2}, \quad \text{գ) } R^2 = \frac{(\sum \hat{y}_i y_i)^2}{(\sum \hat{y}_i^2)(\sum y_i^2)},$$

$$\text{դ) } R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2}:$$

11.6. Դիցուք տրված է հաստատունի վրա ռեգրեսիոն մոդելը՝

$$Y_i = a + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n:$$

ա) Գտնել a պարամետրի նվազագույն քառակուսիների գնահատականը, դրա ցրվածքը և ռեգրեսիայի ε_i սխալների $\sigma^2 = \text{var}(\varepsilon_i)$ ցրվածքի անշեղ գնահատականը,

բ) գտնել R^2 դետերմինացիայի գործակցը:

$$\text{Պատասխան՝ ա) } \hat{a} = \bar{Y}, \quad \text{var}(\hat{a}) = \frac{\sigma^2}{n}, \quad \widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n-1} \sum (Y_i - \bar{Y})^2, \quad \text{բ) } R^2 = 0:$$

11.7. Տրված է առանց ազատ անդամի գծային ռեգրեսիոն մոդելը՝

$$Y_i = bX_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n:$$

Գտնել b պարամետրի նվազագույն քառակուսիների գնահատականը, դրա ցրվածքը և ռեգրեսիայի ε_i սխալների $\sigma^2 = \text{var}(\varepsilon_i)$ ցրվածքի անշեղ գնահատականը:

$$\text{Պատասխան՝ } \hat{b} = \frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2}, \quad \text{var}(\hat{b}) = \frac{\sigma^2}{\sum X_i^2}, \quad \widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n-1} \sum e_i^2:$$

§ 11.6. Մնացորդային ցրվածքի վիճակագրական հատկությունը

Այստեղ և հետագայում կդիտարկվեն նորմալ գծային ռեգրեսիոն մոդելներ:

Թեորեմ 11.6: *Դիցուք*

$$Y_i = a + bX_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

գծային ռեգրեսիոն մոդելը բավարարում է H 1. և H 3. պայմանները: Այդ դեպքում

$$\chi_{n-2}^2 = \frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum e_i^2 \sim \mathbb{H}^2(n-2)$$

վիճականին ունի $(n-2)$ ազատության աստիճաններով χ^2 բաշխում:

Այսպիսով: Ռեգրեսիայի e_i մնացորդների

$$e_i = y_i - \hat{b}x_i = \varepsilon_i - \bar{\varepsilon} - (\hat{b} - b)x_i$$

ներկայացումից (տե՛ս (11.29)), հաշվի առնելով (11.11)-ը, կստանանք՝

$$e_i = \varepsilon_i - \bar{\varepsilon} - \left(\sum \omega_j \varepsilon_j \right) x_i: \quad (11.40)$$

Այժմ կատարելով հետևյալ նշանակումները (տե՛ս դիտողություն 11.1-ը)՝

$$\mathbf{x} = \|x_1, \dots, x_n\|^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \|\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\|^T, \quad \mathbf{e} = \|e_1, \dots, e_n\|^T,$$

$$\boldsymbol{\omega} = \|\omega_1, \dots, \omega_n\|^T, \quad \mathbf{1} = \left\| \underbrace{1, \dots, 1}_n \right\|^T,$$

ներկայացնենք՝

$$\left\| \underbrace{\bar{\varepsilon}, \dots, \bar{\varepsilon}}_n \right\|^T = \left\| \begin{matrix} 1/n & \dots & 1/n \\ \dots & \dots & \dots \\ 1/n & \dots & 1/n \end{matrix} \right\| \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{n} (\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T) \boldsymbol{\varepsilon},$$

$$\left\| \left(\sum \omega_j \varepsilon_j \right) x_1, \dots, \left(\sum \omega_j \varepsilon_j \right) x_n \right\|^T = \mathbf{x} \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\varepsilon}:$$

Այսպիսով, (11.40)-ը վեկտորական տեսքով կներկայացվի հետևյալ ձևով՝

$$\mathbf{e} = \left(\mathbb{E}_n - \frac{1}{n} (\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T) - \mathbf{x} \boldsymbol{\omega}^T \right) \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{M} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (11.41)$$

(այստեղ $\mathbb{E}_n$ -ը n -չափանի միավոր մատրից է):

Հենշտ է ստուգել, որ

$$\mathbb{M} = \mathbb{E}_n - \frac{1}{n} (\mathbb{1} \cdot \mathbb{1}^T) - \mathbf{x} \boldsymbol{\omega}^T$$

մատրիցը **համաչափ** է և **իդեմպոտենտ** (պրոեկցիոն մատրից է) (տե՛ս Հ. 13), այսինքն՝

$$\mathbb{M}^T = \mathbb{M} \text{ և } \mathbb{M}^2 = \mathbb{M}:$$

Հետևաբար, χ_{n-2}^2 վիճականին կներկայացվի հետևյալ ձևով՝

$$\begin{aligned} \chi_{n-2}^2 &= \frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum e_i^2 = \frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{e}^T \mathbf{e}) = \frac{1}{\sigma^2} (\mathbb{M} \boldsymbol{\varepsilon})^T (\mathbb{M} \boldsymbol{\varepsilon}) = \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \boldsymbol{\varepsilon}^T (\mathbb{M}^T \mathbb{M}) \boldsymbol{\varepsilon} = \left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\sigma} \right)^T \mathbb{M} \left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\sigma} \right), \end{aligned}$$

որտեղ

$$\frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\sigma} \sim \mathbb{N}_n(\mathbf{0}, \mathbb{E}_n) \left(\mathbf{0} = \left\| \underbrace{0, \dots, 0}_n \right\|^T \right)$$

ստանդարտ նորմալ բաշխում ունեցող պատահական վեկտոր է (տե՛ս **H 3**. պայմանը):

Այժմ գտնենք $\mathbb{M} = \|m_{ij}\|_{i,j=1}^n$ մատրիցի **ռանգը**: $\mathbb{M}$ մատրիցի անկյունագծի տարրերն ունեն հետևյալ տեսք՝

$$m_{ii} = 1 - \frac{1}{n} - \omega_i x_i, \quad i = 1, \dots, n:$$

Համաձայն պնդում Հ. 14-ի և լեմմա 11.1-ի՝ ունենք՝

$$\text{rank}(\mathbb{M}) = \text{tr}(\mathbb{M}) = \sum m_{ii} = n - 1 - \sum \omega_i x_i = n - 2:$$

Կիրառելով այնուհետև թեորեմ Հ. 45-ը՝ վերջնական կստանանք՝

$$\chi_{n-2}^2 = \frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} = \left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\sigma} \right)^T \mathbb{M} \left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\sigma} \right) \sim \mathbb{H}^2(n-2):$$

Խնդիր

1.8. Դիցուք

$$\widehat{\sigma}_{ML}^2 = \frac{1}{n} \sum e_i^2 \text{ և } s^2 = \frac{1}{n-2} \sum e_i^2$$

(11.9) նորմալ ռեգրեսիոն մոդելի ε_i սխալների σ^2 ցրվածքի գնահատականներն են: Գտնել այդ գնահատականների ցրվածքները:

Պատասխան՝

$$\text{var}(\widehat{\sigma}_{ML}^2) = \frac{2(n-2)}{n^2} \sigma^4, \quad \text{var}(s^2) = \frac{2}{n-2} \sigma^4 :$$

§ 11.7. Նվազագույն քառակուսիների գնահատականների հատկությունները

Դիցուք դիտարկվում է (11.9) նորմալ զծային ռեգրեսիոն մոդելը, որտեղ

$$Y_i \sim N(a + bX_i, \sigma^2), \quad i = 1, \dots, n:$$

Քանի որ $\hat{a}$ և $\hat{b}$ գնահատականները զծայնորեն արտահայտվում են Y_i -երի միջոցով (տե՛ս (11.11-ը) և (11.12-ը)), ուստի նրանք նույնպես ունեն նորմալ բաշխումներ՝

$$\hat{a} \sim N(a, \sigma_a^2), \quad \hat{b} \sim N(b, \sigma_b^2),$$

որտեղ

$$\sigma_a^2 = \text{var}(\hat{a}) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{\sum X_i^2}{\sum x_i^2}, \quad \sigma_b^2 = \text{var}(\hat{b}) = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} :$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$Z(a) = \frac{\hat{a} - a}{\sigma_a} \sim N(0,1), \quad Z(b) = \frac{\hat{b} - b}{\sigma_b} \sim N(0,1): \quad (11.42)$$

Թեորեմ 11.7: Եթե (11.9) ռեգրեսիոն մոդելը բավարարում է **H 1.** և **H 3.** պայմանները, ապա

$$T_{n-2}(a) = \frac{\hat{a} - a}{s_{\hat{a}}} \sim T(n-2), \quad T_{n-2}(b) = \frac{\hat{b} - b}{s_{\hat{b}}} \sim T(n-2) \quad (11.43)$$

վիճականիներն ունեն $(n-2)$ ազատության աստիճաններով **Ստյուդենտի (t -) բաշխում**, որտեղ

$$s_{\hat{a}}^2 = \frac{s^2}{n} \cdot \frac{\sum X_i^2}{\sum x_i^2} = s^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{X})^2}{\sum x_i^2} \right),$$

$$s_{\hat{b}}^2 = \frac{s^2}{\sum x_i^2}, \quad s^2 = \frac{1}{n-2} \sum e_i^2 :$$

Թեորեմն ապացուցելու համար անհրաժեշտ է հետևյալ լեմման՝

Լեմմա 11.4: Եթե (11.9) ռեգրեսիոն մոդելը բավարարում է **H.1** և **H 3.** պայմանները, ապա $\hat{a}$ և $\hat{b}$ **նվազագույն քառակուսիների գնահատականները** s^2 վիճականույց **անկախ** են:

Ապացուցում: Քանի որ s^2 վիճականին ֆունկցիա է ռեգրեսիայի e_i մնացորդներից, ապա բավական է ապացուցել $\hat{a}$ և $\hat{b}$ վիճականիների անկախությունը e_i մնացորդներից: Համաձայն (11.11), (11.12) և (11.40) ներկայացումների՝ $\hat{a}$ ($\hat{b}$) գնահատականը և e_i -երը գծային ձևով են կախված ռեգրեսիայի ε_i սխալներից, ուստի նրանք ունեն համատեղ **նորմալ բաշխում**: Հետևաբար՝ $\hat{a}$ և $\hat{b}$ վիճականիները կլինեն **անկախ** e_i մնացորդներից, եթե նրանք լինեն **չկորելյացված** e_i -ից:

Գտնենք $\text{cov}(e_i, \hat{a})$ և $\text{cov}(e_i, \hat{b})$: Նշանակելով $\eta = \sum \omega_j \varepsilon_j$ ՝ (11.40) մնացորդը կրելով $e_i = \varepsilon_i - \bar{\varepsilon} - \eta x_i$ տեսքի, այնպես որ, համաձայն (11.10)-ի և լեմմա 11.1-ի, ունենք՝

$$\begin{aligned} \text{cov}(e_i, \hat{b}) &= E(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon} - \eta x_i)(b + \eta) = E(\varepsilon_i \eta - \bar{\varepsilon} \eta - x_i \eta^2) = \\ &= \sigma^2 \left(\omega_i - \frac{1}{n} \sum \omega_j - x_i \sum \omega_j^2 \right) = \sigma^2 \left(\omega_i - \frac{x_i}{\sum x_j^2} \right) = 0: \end{aligned}$$

Մյուս կողմից (տե՛ս (11.28)-ը)՝

**§ 11.7. Նվազագույն քառակուսիների գնահատականների
հատկությունները**

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(e_i, \hat{a}) &= \operatorname{cov}(e_i, \bar{Y} - \hat{b} \bar{X}) = \operatorname{cov}(e_i, a + b\bar{X} + \bar{\varepsilon}) - \bar{X} \operatorname{cov}(e_i, \hat{b}) = \\ &= E[(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon} - \eta x_i) \bar{\varepsilon}] = E(\varepsilon_i \bar{\varepsilon}) - E(\bar{\varepsilon})^2 - x_i E(\eta \bar{\varepsilon}) = \\ &= \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n} - \frac{x_i}{n} E\left[\left(\sum \omega_j \varepsilon_j\right)\left(\sum \varepsilon_k\right)\right] = -\frac{x_i \sigma^2}{n} \sum \omega_j = 0:\end{aligned}$$

Թե ն ր ե մ ի ա պ ա ց ու ց ու մ ը: Թեորեմ 11.6-ից ունենք՝

$$\frac{s}{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-2} \chi_{n-2}^2} :$$

Օգտվելով այնուհետև (11.42)-ից, $s_{\hat{a}}/\sigma_{\hat{a}} = s/\sigma$ հավասարությունից, լեմմա 11.4-ից և [15]-ի թեորեմ 2.13-ից՝ կստանանք՝

$$T_{n-2}(a) = \frac{(\hat{a} - a)/\sigma_{\hat{a}}}{s/\sigma} = \frac{Z(a)}{\sqrt{\frac{1}{n-2} \chi_{n-2}^2}} \sim T(n-2),$$

և նմանապես՝

$$T_{n-2}(b) = \frac{(\hat{b} - b)/\sigma_{\hat{b}}}{s/\sigma} = \frac{Z(b)}{\sqrt{\frac{1}{n-2} \chi_{n-2}^2}} \sim T(n-2):$$

**§ 11.8. Ռեգրեսիայի պարամետրերի վերաբերյալ
միջակայքային գնահատում և վարկածների ստուգում**

1. Դիցուք (11.9) ռեգրեսիոն մոդելի $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ սխալների σ^2 ցրվածքը **հայտնի** է: (11.42) պայմանից բխում է, որ $Z(a)$ -ն և $Z(b)$ -ն **կենտրոնական վիճականիներ** են (տե՛ս [15]-ի սահմանում 7.5-ը), ուստի տվյալ α նշանակալիության մակարդակով ճիշտ են հետևյալ պայմանները՝

$$P\left(\left|\frac{\hat{a} - a}{\sigma_{\hat{a}}}\right| < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha, \quad P\left(\left|\frac{\hat{b} - b}{\sigma_{\hat{b}}}\right| < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha,$$

որտեղից a և b պարամետրերի $\gamma = 1 - \alpha$ մակարդակով վստահության միջակայքերը կլինեն՝

$$P(\hat{a} - \sigma_{\hat{a}} \cdot z_{\alpha/2} < a < \hat{a} + \sigma_{\hat{a}} \cdot z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha,$$

$$P(\hat{b} - \sigma_{\hat{b}} \cdot z_{\alpha/2} < b < \hat{b} + \sigma_{\hat{b}} \cdot z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha:$$

Այստեղից՝ $\mathbb{H}_0: a = a_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: a \neq a_0$ երկընտրանքայինի ստուգող α մակարդակով **կրիտիկական տիրույթը** կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}): |z(a_0)| > z_{\alpha/2}\},$$

որտեղ $z(a_0)$ -ն, $Z(a_0)$ վիճականու թվային արժեքն է:

Նման ձևով $\mathbb{H}_0: b = b_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: b \neq b_0$ երկընտրանքայինի ստուգող հայտանիշը կունենա

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}): |z(b_0)| > z_{\alpha/2}\}$$

կրիտիկական տիրույթ:

2. Անհայտ σ^2 ցրվածքի դեպքում կօգտվենք $T_{n-2}(a)$ և $T_{n-2}(b)$ կենտրոնական վիճականիներից (տե՛ս (11.43)), որտեղից տվյալ α նշանակալիության մակարդակի համար կստանանք՝

$$P\left(\left|\frac{\hat{a} - a}{s_{\hat{a}}}\right| < t_{\alpha/2}(n-2)\right) = 1 - \alpha \text{ և } P\left(\left|\frac{\hat{b} - b}{s_{\hat{b}}}\right| < t_{\alpha/2}(n-2)\right) = 1 - \alpha,$$

այնպես որ, a և b պարամետրերի $1 - \alpha$ մակարդակով վստահության միջակայքերի համար կունենանք՝

$$P(\hat{a} - s_{\hat{a}} \cdot t_{\alpha/2}(n-2) < a < \hat{a} + s_{\hat{a}} \cdot t_{\alpha/2}(n-2)) = 1 - \alpha,$$

$$P(\hat{b} - s_{\hat{b}} \cdot t_{\alpha/2}(n-2) < b < \hat{b} + s_{\hat{b}} \cdot t_{\alpha/2}(n-2)) = 1 - \alpha:$$

$\mathbb{H}_0: a = a_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: a \neq a_0$ երկընտրանքայինի ստուգող α մակարդակով կրիտիկական տիրույթը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}): |t_{n-2}(a_0)| > t_{\alpha/2}(n-2)\}:$$

Նման ձևով $\mathbb{H}_0 : b = b_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : b \neq b_0$ երկրնորանքայինի ստուգող հայտանիշի **կրիտիկական տիրույթը** կլինի

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : |t_{n-2}(b_0)| > t_{\alpha/2}(n-2)\}$$

բազմությունը (այստեղ $t_{n-2}(a_0)$ ($t_{n-2}(b_0)$)-ն, $T_{n-2}(a_0)$ ($T_{n-2}(b_0)$)) վիճականու թվային արժեքն է):

Առավել հետաքրքրություն է ներկայացնում $\mathbb{H}_0 : b = 0$ վարկածի ստուգման խնդիրը, որի **հերքումը** տվյալ α մակարդակով նշանակում է, որ X **փոփոխականը (գործոնը) նշանակալի** ազդեցություն ունի կախյալ Y փոփոխականի վրա: Այդ վարկածը ստուգող հայտանիշի վիճականին նշանակվում է

$$t = T_{n-2}(0) = \frac{\hat{b}}{s_{\hat{b}}} \sim T(n-2) \quad (11.44)$$

և կոչվում է **վիճականի**:

3. (11.9) ռեգրեսիոն մոդելի $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ սխալների σ^2 ցրվածքի համար երկկողմանի միջակայքային գնահատականը ստանալու համար կօգտվենք թեորեմ 11.6-ից, որտեղից տվյալ α նշանակալիության մակարդակի համար կստանանք՝

$$P\left(\chi_{1-\alpha/2}^2(n-2) < \frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} < \chi_{\alpha/2}^2(n-2)\right) = 1 - \alpha,$$

ուստի σ^2 ցրվածքի $\gamma = 1 - \alpha$ մակարդակով **վստահության միջակայքի** համար կունենանք՝

$$P\left(\frac{(n-2)s^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-2)} < \sigma^2 < \frac{(n-2)s^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-2)}\right) = 1 - \alpha:$$

$\mathbb{H}_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ երկրնորանքայինի ստուգող α մակարդակով **կրիտիկական տիրույթը** կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \frac{(n-2)s^2}{\sigma_0^2} < \chi_{1-\alpha/2}^2(n-2) \cup \frac{(n-2)s^2}{\sigma_0^2} > \chi_{\alpha/2}^2(n-2)\right\}:$$

Օրինակ 11.3: Ըստ օրինակ 11.1 -ում բերված տվյալերի, ենթադրելով ռեգրեսիոն մոդելի **նորմալությունը**, գտնենք $\alpha = 0.05$ նշանակալիության մակարդակով a , b և σ^2 պարամետրերի երկկողմանի միջակայքային գնահատականները և ստուգենք $\mathbb{H}_0: a = 0$ ընդդեմ $\mathbb{H}_1: a \neq 0$, $\mathbb{H}'_0: b = 1$ ընդդեմ $\mathbb{H}'_1: b > 1$ և $\mathbb{H}''_0: \sigma^2 = 10$ ընդդեմ $\mathbb{H}''_1: \sigma^2 < 10$ երկընտրանքայինների վարկածները:

Համաձայն § 11.8 (կետ 2-ի)՝ a և b պարամետրերի համար ստացվել են $1 - \alpha$ մակարդակով հետևյալ երկկողմանի վստահության միջակայքերը՝

$$a \in \left(\hat{a} \mp s_{\hat{a}} t_{\alpha/2}(n-2) \right) \text{ և } b \in \left(\hat{b} \mp s_{\hat{b}} t_{\alpha/2}(n-2) \right),$$

որտեղ, ըստ օրինակներ 11.1-ի և 11.2-ի, ունենք՝

$$\hat{a} = -4, \quad \hat{b} = \frac{4}{3} \approx 1.33, \quad s_{\hat{a}} = 0.3425, \quad s_{\hat{b}} = \frac{1}{3} \approx 0.3333, \quad t_{0.025}(14) = 2.145:$$

Այնպես որ,

$$a^- = \hat{a} - s_{\hat{a}} t_{\alpha/2}(n-2) = -4.7347, \quad a^+ = \hat{a} + s_{\hat{a}} t_{\alpha/2}(n-2) = -3.2653,$$

$$a \in (-4.7347, -3.2653),$$

և $\mathbb{H}_0: a = 0$ վարկածը **կհերքվի**, քանի որ $0 \notin (-4.7347, -3.2653)$:

Մյուս կողմից՝

$$b^- = \hat{b} - s_{\hat{b}} t_{\alpha/2}(n-2) = -1.53, \quad b^+ = \hat{b} + s_{\hat{b}} t_{\alpha/2}(n-2) = 2.048,$$

$$b \in (-1.53, 2.048):$$

Ստուգենք $\mathbb{H}'_0: b = 1$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}'_1: b > 1$ երկընտրանքայինի: Վարկածը ստուգող α նշանակալիության մակարդակով կրիտիկական տիրույթն է

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{(x, y): t_{n-2}(b_0) > t_{\alpha}(n-2)\}:$$

Այստեղ՝

$$t_{n-2}(b_0) = \frac{\hat{b} - b_0}{s_{\hat{b}}} = \frac{4/3 - 1}{1/3} = 1, \text{ իսկ } t_{0.05}(14) = 1.761, \text{ հետևաբար՝ } \mathbb{H}'_0 \text{ վար-}$$

կածը **չի հերքվում**:

Այժմ գտնենք σ^2 ցրվածքի վստահության միջակայքը՝

$$\sigma^2 \in \left(\frac{(n-2)s^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-2)}, \frac{(n-2)s^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-2)} \right),$$

որտեղ $\chi_{0.025}^2(14) = 21.92$, $\chi_{0.975}^2(14) = 5.629$, $s^2 = 9$:

Այստեղից՝

$$(\sigma^2)^- = 5.7482, (\sigma^2)^+ = 22.3841,$$

$$\sigma^2 \in (5.7482, 22.3841):$$

Ստուգենք $\mathbb{H}_0'' : \sigma^2 = 10$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1'' : \sigma^2 < 10$ երկընտրանքայինի: Վարկածը ստուգող α նշանակալիության մակարդակով կրիտիկական տիրույթն է՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \frac{(n-2)s^2}{\sigma_0^2} < \chi_{1-\alpha}^2(n-2) \right\},$$

որտեղ

$$\frac{(n-2)s^2}{\sigma_0^2} = 12.6, \quad \chi_{0.95}^2(14) = 6.571,$$

այնպես որ, $\mathbb{H}_0''$ վարկածը չի հերքվում:

Խնդիր

11.9. Դիցուք տրված է **H 1.** և **H 3.** պայմանները բավարարող

$$Y_i = a + b \left(X_i - \frac{1}{n} \sum X_i \right) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

նորմալ գծային ռեգրեսիոն մոդելը, որի ε_i սխալներն ունեն հայտնի σ^2 ցրվածք:

Գտնել a և b պարամետրերի նվազագույն քառակուսիների գնահատականները և $1 - \alpha$ մակարդակով վստահության միջակայքերը:

Պատասխան՝

$$\hat{a} = \bar{Y}, \quad \hat{b} = \frac{S_{XY}^2}{S_X^2}, \quad a \in \left(\hat{a} \mp \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \right), \quad b \in \left(\hat{b} \mp \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2}} z_{\alpha/2} \right):$$

§ 11.9. Ցրվածքների վերլուծություն (*դիսպերսիոն անալիզ*) ռեգրեսիոն մոդելներում (*ANOVA*)

§ 11.8-ում դիտարկված (11.9) ռեգրեսիոն մոդելի X գործոնի նշանակալիության ստուգումը ($\mathbb{H}_0: b = 0$) կարելի է կատարել նաև **ցրվածքների վերլուծության** եղանակով:

Համաձայն (11.42)-ի և թեորեմ 11.6-ի՝

$$Z(b) = \frac{\hat{b} - b}{\sigma_{\hat{b}}} = \frac{\hat{b} - b}{\sigma} \left(\sum x_i^2 \right)^{1/2} \sim \mathbb{N}(0,1) \quad (Z^2(b) \sim \mathbb{H}^2(1)),$$

$$\chi_{n-2}^2 = \frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum e_i^2 \sim \mathbb{H}^2(n-2),$$

և քանի որ s^2 և $\hat{b}$ վիճականիներն **անկախ** են (լեմմա 11.4), ապա, ըստ թեորեմ 2.9-ի (տե՛ս [15])՝

$$F = \frac{Z^2(b)}{\frac{1}{n-2} \chi_{n-2}^2} = \frac{(\hat{b} - b)^2 \sum x_i^2}{\frac{1}{n-2} \sum e_i^2} \sim \mathbb{S}(1, n-2):$$

F -**վիճականին** ունի 1 և $(n-2)$ ազատության աստիճաններով **Ֆիշեր - Սնեդեկորի** (F -) բաշխում:

Այժմ, $\mathbb{H}_0: b = b_0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: b \neq b_0$ երկրնորանքայինի ստուգման համար կիրառենք կենտրոնական F - վիճականին: Եթե ճիշտ է $\mathbb{H}_0$ վարկածը, ապա

$$F_0 := \frac{(\hat{b} - b_0)^2 \sum x_i^2}{\frac{1}{n-2} \sum e_i^2} \sim \mathbb{S}(1, n-2):$$

F -վիճականին ունի 1 և $(n-2)$ ազատության աստիճաններով **Ֆիշեր - Սնեդեկորի** (F -) բաշխում, այնպես որ, α նշանակալիության մակարդակով կրիտիկական տիրույթը կլինի

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}): f_0 > S_{\alpha}(1, n-2)\}$$

բազմությունը, որտեղ $S_\alpha(1, n-2)$ -ը՝ 1 և $(n-2)$ ազատության աստիճաններով F - բաշխման α մակարդակով **կրիտիկական արժեքն** է, $f_0 = F_0(\omega_0)$:

(11.9) ռեգրեսիոն մոդելի X **գործոնի նշանակալիությունը** ստուգելու համար դիտարկվում է $\mathbb{H}_0 : b = 0$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1 : b \neq 0$ մրցող վարկածի: $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում F - վիճականին կրնդունի հետևյալ տեսքը՝

$$F_0 = \frac{(\hat{b})^2 \sum x_i^2}{\frac{1}{n-2} \sum e_i^2} \sim \mathbb{S}(1, n-2):$$

Նկատի ունենալով $\hat{y}_i = \hat{b}x_i$ ներկայացումը (տե՛ս (11.8)-ը)՝ F - վիճականին կգրվի հետևյալ համարժեք տեսքով՝

$$F_0 = \frac{\sum (\hat{y}_i)^2}{\frac{1}{n-2} \sum e_i^2} = \frac{RSS/1}{ESS/(n-2)}, \quad (11.45)$$

որտեղ ESS **մնացորդային անդամը** գտնվում է հետևյալ ներկայացումից՝

$$ESS = TSS - RSS = \sum y_i^2 - (\hat{b})^2 \sum x_i^2 :$$

F -վիճականին գտնելու համար անհրաժեշտ հաշվարկները բերվում են **ցրվածքների վերլուծության** հետևյալ **աղյուսակում** (*ANOVA - table*).

Ցրվածքների վերլուծության (ANOVA) աղյուսակ

Ցրվածքների աղբյուրը	Շեղումների քառակուսիների գումարը	Ազատությունների աստիճանը	Շեղումների քառակուսիների միջինը
1	2	3	4
Գործոն (X)	$RSS = (\hat{b})^2 \sum x_i^2$	1	$RSS/1$
Մնացորդ (e)	$ESS = \sum e_i^2$	$n - 2$	$ESS/(n - 2)$
Ընդհանուր ցրվածքը	$TSS = \sum y_i^2$	$n - 1$	$F_0 = \frac{RSS/1}{ESS/(n - 2)}$

(3)-րդ սյունակում բերված ազատությունների աստիճանը կարելի է ինտուիտիվ բացատրել ինչպես համապատասխան արտահայտություններում մասնակցող անկախ անդամների թիվը: Այսպես, $TSS = \sum y_i^2$ վիճականին որոշվում է $(n - 1)$ անկախ անդամներով՝ հաշվի առնելով $\sum y_i = 0$ պայմանը (տե՛ս (11.5)): Նման ձևով $ESS = \sum e_i^2$ վիճականին ունի $(n - 2)$ ազատության աստիճան շնորհիվ $\sum e_i = \sum x_i e_i = 0$ պայմանի (տե՛ս (11.26) և (11.36)): Վերջապես, $RSS = (\hat{b})^2 \sum x_i^2$ վիճականին կախված է միայն մեկ $\hat{b}$ անդամից:

Ամփոփելով վերոհիշյալը՝ կարելի է եզրակացնել, որ X գործոնի նշանակալիությունը ստուգելու համար գոյություն ունի **երկու** եղանակ. առաջինը հիմնված է **Է-վիճականու** վրա (տե՛ս (11.44)-ը), իսկ երկրորդը՝ **F-վիճականու**: Հեշտ է, սակայն, տեսնել, որ այս երկու եղանակները համարժեք են, քանի որ $F = t^2$:

Պարզվում է, որ այս խնդիրը լուծելու համար գոյություն ունի նաև **երրորդ** տարբերակը, որը հիմնված է կորելյացիայի գործակցի գաղափարի վրա:

Լեմմա 11.5: F - և t - վիճականիները (տե՛ս (11.44) և (11.45)) ունեն հետևյալ համարժեք ներկայացումներ՝

$$t = \frac{r \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \quad \text{և} \quad F_0 = (n-2) \frac{R^2}{1-R^2},$$

որտեղ R^2 -ն դետերմինացիայի գործակիցն է, իսկ $r = r_{X,Y}$ -ը՝ նմուշային կորելյացիայի գործակիցը:

Ապա ցուցում: Համաձայն **ամբողջ վարիացիայի** (11.37) վերլուծության՝ ունենք՝

$$\sum y_i^2 = \sum e_i^2 + \sum (\hat{y}_i)^2,$$

այնպես որ՝ R^2 **դետերմինացիայի գործակիցը** կընդունի

$$R^2 = \frac{\sum (\hat{y}_i)^2}{\sum y_i^2} = \frac{\sum (\hat{y}_i)^2}{\sum e_i^2 + \sum (\hat{y}_i)^2}$$

տեսքը, որտեղից՝

$$\frac{1}{R^2} = 1 + \frac{\sum e_i^2}{\sum (\hat{y}_i)^2} :$$

Մյուս կողմից, օգտվելով (11.45)-ից կստանանք՝

$$F_0 = (n - 2) \frac{R^2}{1 - R^2} :$$

Այնուհետև, նկատի ունենալով, որ $F_0 = t^2$ ($t = \frac{\hat{b}}{s_{\hat{b}}}$), կստանանք՝

$$t = \sqrt{F_0} = \frac{r \sqrt{n - 2}}{\sqrt{1 - r^2}} ,$$

որտեղ $r^2 = R^2$: ■

Համաձայն թեորեմ 10.14-ի՝ կորելյացիայի գործակցի նշանակալիությունը ($H_0 : \rho = 0$) ստուգող հայտանիշը համարժեք է (11.9) ռեգրեսիոն մոդելում X գործոնի նշանակալիությունը ($H_0 : b = 0$) ստուգող հայտանիշին (տե՛ս լեմմա 11.5):

Օրինակ 11.4: Ըստ օրինակ 11.1-ում բերված տվյալների (տե՛ս նաև օրինակ 11.2-ը)՝ կազմենք **ցրվածքային վերլուծության աղյուսակը** և 0.05 մակարդակով ստուգենք (11.9) գծային ռեգրեսիոն մոդելում X գործոնի նշանակալիությունը ($H_0 : b = 0$):

Ցրվածքների աղբյուրը	Շեղումների քառակուսիների գումարը	Ազատություննե- րի աստիճանը	Շեղումների քառակուսիների միջինը
1	2	3	4
Գործոն (X)	$RSS = 144$	1	$RSS/1 = 144$
Մնացորդ (e)	$ESS = 126$	14	$ESS/(n - 2) = 9$
Ընդհանուր ցրվածքը	$TSS = 270$	15	$F_0 = \frac{RSS/1}{ESS/(n - 2)} = 16$

$\mathbb{H}_0 : b = 0$ վարկածը ստուգող F - վիճականու արժեքը, համաձայն աղյուսակի, հավասար է 16-ի: Մյուս կողմից՝ 1 և 14 ազատության աստիճաններով F - բաշխման 0.05 նշանակալիության մակարդակով կրիտիկական արժեքն է $S_{0.05}(1, 14) = 4.6$ (տե՛ս աղյուսակ Ա 5-ը): Այսպիսով, $F_0 > S_{0.05}(1, 14)$ և $\mathbb{H}_0$ վարկածը **հերքվում** է, այսինքն՝ X փոփոխականն ունի **նշանակալի ազդեցություն** Y փոփոխականի վրա:

Կիրառելով t - **վիճականու** վրա հիմնված համարժեք հայտանիշը՝ կստանանք՝

$$t = \frac{\hat{b}}{s_{\hat{b}}} = \frac{4/3}{1/3} = 4 \text{ (կամ } t = \sqrt{F_0} = 4),$$

և քանի որ $t_{0.025}(14) = 2.145$, ապա $t > t_{0.025}(14)$ և $\mathbb{H}_0$ վարկածը նույնպես **հերքվում** է:

Մյուս կողմից՝ 0.05 նշանակալիության մակարդակով $\mathbb{H}_0 : b = 0$ վարկածը ստուգող հայտանիշի կրիտիկական տիրույթն ունի հետևյալ տեսքը (տե՛ս դիտողություն 10.20)՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : |t| > t_{\alpha/2}(n-2)\} = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) : |r| > \frac{t_{\alpha/2}(n-2)}{\sqrt{t_{\alpha/2}^2(n-2) + n-2}} \right\} :$$

Քանի որ $r = \sqrt{R^2} = \sqrt{0.5333} = 0.7303$ և

$$\frac{t_{\alpha/2}(n-2)}{\sqrt{t_{\alpha/2}^2(n-2) + n-2}} = \frac{2.145}{\sqrt{18.601}} = 0.497,$$

ապա $\mathbb{H}_0 : b = 0$ վարկածը **հերքվում** է:

Խնդիր

11.10. Հետազոտվում է քիմիական նյութի որոշ (Y) բնութագրիչի կախվածությունը նրա (X) ջերմաստիճանից (տվյալները բերվում են կողավորված)՝

§ 11.9. Ցրվածքների վերլուծություն (դիսպերսիոն անալիզ)
 ռեգրեսիոն մոդելներում (ANOVA)

X	- 5	- 4	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3	4	5
Y	1	5	4	7	10	8	9	13	14	13	18

ա) ստանալ (X_i, Y_i) կետերի նվազագույն քառակուսիների մինիմումի իմաստով լավագույն գծային մոտարկումը,

բ) ենթադրելով $Y_i = a + bX_i + \varepsilon_i$ մոդելի նորմալությունը՝ կառուցել ցրվածքային վերլուծության (ANOVA) աղյուսակը և ստուգել 0.05 մակարդակով ռեգրեսիայի նշանակալիությունը,

գ) գտնել 0.95 մակարդակով թեքվածության գործակցի վստահության միջակայքը:

Պատասխան՝ ա) $\hat{Y} = 9.2727 + 1.4364 X$,

բ) նշանակալի է,

գ) $b \in (1.105, 1.768)$:

§ 11.10. Կանխատեսումներ ռեգրեսիոն մոդելներում

1. Դիցուք (11.9) ռեգրեսիոն մոդելին բավարարող (X_i, Y_i), $i = 1, \dots, n$ նմուշի միջոցով պահանջվում է կանխատեսել X փոփոխականի որոշակի X_0 արժեքին համապատասխանող և այդ մոդելին բավարարող Y_0 պատահական մեծության $m_0 = E(Y_0)$ միջինը:

Դիտարկենք կետային և միջակայքային կանխատեսումների խնդիրները:

Կետային կանխատեսում

$\hat{m}_0$ կետային գնահատականը (կանխատեսումը) փնտրվում է ըստ Y_i -երի գծային անշեղ գնահատականների

$$\mathcal{L}_{m_0}^0(\mathbf{Y}) = \left\{ \hat{m}_0 : \hat{m}_0 = \sum_{i=1}^n c_i Y_i, \quad c_i \in \mathcal{R}, \quad E(\hat{m}_0) = m_0 \right\}$$

դասում այնպես, որ այն լինի օպտիմալ (ունենա նվազագույն ցրվածքը):

Թեորեմ 11.8: Ի 1. և Ի 3. պայմանների դեպքում (11.9) ռեգրեսիոն մոդելին բավարարող (X_i, Y_i) , $i = 1, \dots, n$ նմուշի միջոցով որոշակի X_0 արժեքին համապատասխանող $Y_0 = a + bX_0 + \varepsilon_0$ պատահական մեծության $m_0 = E(Y_0)$ միջինի համար **օպտիմալ $\mathcal{L}_{m_0}^0(\mathbf{Y})$ դասում $\hat{m}_0$ գնահատականը (կանխատեսումը) կլինի**

$$\hat{m}_0 = \hat{a} + \hat{b}X_0$$

վիճականին, որտեղ $\hat{a}$ -ը և $\hat{b}$ -ը, a և b պարամետրերի նվազագույն քառակուսիների գնահատականներն են, իսկ $\hat{m}_0$ -ի ցրվածքն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\text{var}(\hat{m}_0) := \sigma_{\hat{m}_0}^2 = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \right):$$

Ա պ ա գ ու գ ու մ: Ենթադրվում է, որ ε_0 պատահական սխալը բավարարում է

$$E(\varepsilon_0) = 0, \quad \text{var}(\varepsilon_0) = \sigma^2, \quad \text{cov}(\varepsilon_0, \varepsilon_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

պայմանները, այնպես որ՝

$$m_0 = E(Y_0) = a + bX_0: \quad (11.46)$$

Գտնենք m_0 -ի համար օպտիմալ $\mathcal{L}_{m_0}^0(\mathbf{Y})$ դասում $\hat{m}_0$ գնահատականը:

Դիցուք

$$\hat{m}_0 = \sum c_i Y_i, \quad \text{որտեղ } Y_i = a + bX_i + \varepsilon_i,$$

ուստի

$$\begin{aligned} \hat{m}_0 &= a \sum c_i + b \sum c_i X_i + \sum c_i \varepsilon_i \text{ և} \\ E(\hat{m}_0) &= a \sum c_i + b \sum c_i X_i : \end{aligned} \quad (11.47)$$

Այստեղից՝ $\hat{m}_0 \in \mathcal{L}_{m_0}^0(\mathbf{Y})$ այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\sum c_i = 1 \text{ և } \sum c_i X_i = X_0 : \quad (11.48)$$

Իրոք, (11.46), (11.47) և $E(\hat{m}_0) = m_0$ պայմաններից հետևում է, որ

$$a \left(\sum c_i - 1 \right) + b \left(\sum c_i X_i - X_0 \right) = 0, \quad a \in \mathcal{R}, \quad b \in \mathcal{R}:$$

Այժմ վերցնելով $a = 1$, $b = 0$ և այնուհետև $a = 0$, $b = 1$ ՝ կստանանք (11.48)-ը:

Մյուս կողմից՝ ունենք՝

$$\text{var}(\hat{m}_0) = E(\hat{m}_0 - E\hat{m}_0)^2 = E \left(\sum c_i \varepsilon_i \right)^2 = \sigma^2 \sum c_i^2 : \quad (11.49)$$

Կազմենք **Լագրանժի ֆունկցիան**՝

$$H(c_1, \dots, c_n; \lambda, \mu) = \sum c_i^2 - \lambda \left(\sum c_i - 1 \right) - \mu \left(\sum c_i X_i - X_0 \right),$$

և ներկայացնենք **պայմանական մաքսիմումի** անհրաժեշտ պայմանները՝

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial c_i} = 2c_i - \lambda - \mu X_i = 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda} = - \left(\sum c_i - 1 \right) = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial \mu} = - \left(\sum c_i X_i - X_0 \right) = 0: \end{cases} \quad (11.50)$$

(11.50) համակարգի առաջին n հավասարումներից՝ կստանանք՝

$$2 \sum c_i = n\lambda + \mu \sum X_i,$$

որտեղից, հաշվի առնելով $(n + 1)$ -րդ հավասարումը, կունենանք՝

$$\lambda = \frac{2}{n} - \mu \bar{X}:$$

Տեղադրելով այս արժեքը (11.50) համակարգի առաջին n հավասարումների մեջ՝ կստանանք՝

$$c_i = \frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{2} X_i = \frac{1}{n} + \frac{\mu}{2} x_i \quad (x_i = X_i - \bar{X}): \quad (11.51)$$

Բազմապատկելով այս հավասարումների ձախ և աջ մասերը X_i -երով, այնուհետև գումարելով և հաշվի առնելով համակարգի $(n+2)$ -րդ հավասարումը՝ կստանանք՝

$$\sum c_i X_i = \bar{X} + \frac{\mu}{2} \sum x_i X_i = X_0 ,$$

որտեղից՝

$$\mu = 2 \frac{X_0 - \bar{X}}{\sum x_i X_i} = 2 \frac{X_0 - \bar{X}}{\sum x_i^2} : \quad (11.52)$$

Այսպիսով, (11.51) -ից և (11.52)-ից ունենք՝

$$c_i = \frac{1}{n} + \frac{\mu}{2} x_i = \frac{1}{n} + \frac{x_i(X_0 - \bar{X})}{\sum x_j^2} , \quad (11.53)$$

որտեղից, նկատի ունենալով (տե՛ս լեմմա 11.2-ի ապացուցումը), որ

$$\hat{b} = \sum \omega_i Y_i ,$$

կստանանք՝

$$\begin{aligned} \hat{m}_0 &= \sum c_i Y_i = \sum \left(\frac{1}{n} + \frac{x_i(X_0 - \bar{X})}{\sum x_j^2} \right) Y_i = \\ &= \bar{Y} + \frac{X_0 \sum x_i Y_i}{\sum x_j^2} - \frac{\bar{X} \sum x_i Y_i}{\sum x_j^2} = \\ &= \bar{Y} + X_0 \sum \omega_i Y_i - \bar{X} \sum \omega_i Y_i = (\bar{Y} - \hat{b}\bar{X}) + \hat{b}X_0 = \hat{a} + \hat{b}X_0 : \end{aligned}$$

Այսպիսով, $m_0 = E(Y_0)$ միջինի **լավագույն (օպտիմալ) գծային անշեղ** գնահատականը $\hat{a} + \hat{b}X_0$ վիճականին է:

Համաձայն (11.49)-ի, (11.53)-ի և լեմմա 11.1-ի՝ $\hat{m}_0$ գնահատականի $\text{var}(\hat{m}_0)$ ցրվածքի համար կստանանք՝

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{m}_0) &= \sigma_{\hat{m}_0}^2 = \sigma^2 \sum c_i^2 = \sigma^2 \sum \left(\frac{1}{n} + \frac{x_i(X_0 - \bar{X})}{\sum x_j^2} \right)^2 = \\ &= \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} (X_0 - \bar{X}) \frac{\sum x_i}{\sum x_j^2} + (X_0 - \bar{X})^2 \frac{\sum x_j^2}{(\sum x_j^2)^2} \right) = \end{aligned}$$

$$= \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum x_j^2} \right): \quad (11.54)$$

Միջակայքային կանխատեսում

Այժմ գտնենք X_0 արժեքին համապատասխանող Y_0 պատահական մեծության $m_0 = E(Y_0)$ միջինի $\gamma = 1 - \alpha$ մակարդակով վստահության միջակայքը:

Թեորեմ 11.9: Դիցուք (11.9) ռեգրեսիոն մոդելը բավարարում է **H 1.** և **H 3.** պայմանները: Այդ դեպքում

$$t = \frac{\hat{m}_0 - m_0}{s_{\hat{m}_0}} \sim T(n - 2)$$

վիճականին ունի $(n - 2)$ ազատության աստիճաններով **Ստյուդենտի** բաշխում, որտեղ

$$s_{\hat{m}_0}^2 = s^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum x_j^2} \right):$$

Այսպիսով: Համաձայն թեորեմ 11.8-ի՝ m_0 միջինի օպտիմալ կետային գնահատականը $\hat{m}_0 = \hat{a} + \hat{b}X_0$ վիճականին է, որտեղ նվազագույն քառակուսիների $\hat{a}$ և $\hat{b}$ գնահատականները բաշխված են *նորմալ* օրենքով (տե՛ս (11.42)-ը), և քանի որ $E(\hat{m}_0) = a + bX_0$, ապա

$$\hat{m}_0 \sim N(a + bX_0, \sigma_{\hat{m}_0}^2), \quad (11.55)$$

որտեղ

$$\sigma_{\hat{m}_0}^2 = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum x_j^2} \right):$$

(11.55)-ից հետևում է, որ

$$\xi_0 = \frac{\hat{m}_0 - m_0}{\sigma_{\hat{m}_0}} \sim N(0,1), \quad m_0 = E(\hat{m}_0) = a + bX_0:$$

Մյուս կողմից՝ համաձայն թեորեմ 11.6-ի՝

$$\chi_{n-2}^2 = \frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \mathbb{H}^2(n-2),$$

որտեղից, քանի որ

$$\hat{m}_0 = \hat{a} + \hat{b}X_0 \text{ և } s^2 = \frac{1}{n-2} \sum e_i^2$$

վիճականիներն անկախ են (տե՛ս լեմմա 11.4), հետևում է

$$t = \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{1}{n-2} \cdot \chi_{n-2}^2}} \sim T(n-2):$$

Մյուս կողմից, նկատի ունենալով, որ $\frac{\sigma_{\hat{m}_0}}{\sigma} = \frac{s_{\hat{m}_0}}{s}$, կստանանք՝

$$t = \frac{(\hat{m}_0 - m_0)/\sigma_{\hat{m}_0}}{\sqrt{s^2/\sigma^2}} = \frac{\hat{m}_0 - m_0}{s_{\hat{m}_0}}: \quad \blacksquare$$

Ըստ թեորեմ 11.9-ի՝ $m_0 = E(Y_0)$ միջինի $\gamma = 1 - \alpha$ մակարդակով վստահության միջակայքը կլինի՝

$$P(\hat{m}_0 - t_{\alpha/2}(n-2) s_{\hat{m}_0} < m_0 < \hat{m}_0 + t_{\alpha/2}(n-2) s_{\hat{m}_0}) = 1 - \alpha: \quad (11.56)$$

2. Դիցուք (X_i, Y_i) , $i = 1, \dots, n$ նմուշը համապատասխանում է **H 1.** և **H 3.** պայմանները բավարարող (11.9) ռեգրեսիոն մոդելին: Ենթադրենք, բացի այդ, որ դիտված (X_0, Y_0) արժեքը նույնպես բավարարում է այդ մոդելին, այսինքն՝

$$Y_0 = a + bX_0 + \varepsilon_0, \quad (11.57)$$

որտեղ $\varepsilon_0 \sim N(0, \sigma^2)$, և այն անկախ է ε_i -երից՝ $i = 1, \dots, n$: Այդ դեպքում կանխատեսվող $\hat{Y}_0$ արժեքը կլինի (տե՛ս (11.4))՝

$$\hat{Y}_0 = \hat{a} + \hat{b}X_0 = \bar{Y} + \hat{b}x_0 \quad (x_0 = X_0 - \bar{X}), \quad (11.58)$$

որտեղ

$$\bar{Y} = a + b\bar{X} + \bar{\varepsilon} \quad \left(\bar{\varepsilon} = \frac{1}{n} \sum \varepsilon_i \right): \quad (11.59)$$

(11.57)-ից և (11.59)-ից կստանանք՝

$$Y_0 - \bar{Y} = bx_0 + \varepsilon_0 - \bar{\varepsilon},$$

որտեղից, օգտվելով (11.58)-ից, կանխատեսման սխալի համար կունենանք՝

$$e_0 = Y_0 - \hat{Y}_0 = -(\hat{b} - b)x_0 + \varepsilon_0 - \bar{\varepsilon}: \quad (11.60)$$

(11.60)-ից անմիջապես հետևում է, որ $E(e_0) = 0$, այսինքն՝ $\hat{Y}_0$ -ը $E(Y_0)$ -ի համար, ըստ Y_i -երի, **գծային** (տե՛ս (11.58)) **անշեղ գնահատական** է՝ $E(\hat{Y}_0) = E(Y_0)$:

Լեմմա 11.6: Ի 1. և Ի 3. պայմանների դեպքում (11.9) *մոդելին բավարարող կամայական* (X_0, Y_0) *գույզի համար* Y_0 *պատահական մեծության* $\hat{Y}_0 = \hat{a} + \hat{b}X_0$ *կանխատեսման* e_0 *սխալի ցրվածքը հավասար է*

$$\sigma_{e_0}^2 := \text{var}(e_0) = \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{x_0^2}{\sum x_i^2} \right):$$

Ապացուցում: Օգտվելով (11.60)-ից՝ կստանանք՝

$$\begin{aligned} \text{var}(e_0) &= E[(Y_0 - \hat{Y}_0)^2] = \\ &= E(\varepsilon_0^2) + x_0^2 E[(\hat{b} - b)^2] + E[(\bar{\varepsilon})^2] - 2x_0 E[\varepsilon_0(\hat{b} - b)] - \\ &\quad - 2E(\varepsilon_0 \bar{\varepsilon}) + 2x_0 E[(\hat{b} - b)\bar{\varepsilon}], \end{aligned}$$

որտեղ (տե՛ս (11.11)-ը)

$$\begin{aligned} E[\varepsilon_0(\hat{b} - b)] &= E\left[\varepsilon_0 \sum \omega_i \varepsilon_i\right] = \sum \omega_i E(\varepsilon_0 \varepsilon_i) = 0, \\ E(\varepsilon_0 \bar{\varepsilon}) &= E\left(\frac{\varepsilon_0}{n} \sum \varepsilon_i\right) = \frac{1}{n} \sum E(\varepsilon_0 \varepsilon_i) = 0, \\ E[(\hat{b} - b)\bar{\varepsilon}] &= E\left(\sum \omega_i \varepsilon_i\right) \left(\frac{1}{n} \sum \varepsilon_j\right) = \\ &= \frac{1}{n} \sum \omega_i E(\varepsilon_i^2) + \frac{1}{n} \sum_{i \neq j} \omega_i E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \frac{\sigma^2}{n} \sum \omega_i = 0: \end{aligned}$$

Այստեղից՝

$$\text{var}(e_0) = E(\varepsilon_0^2) + x_0^2 E[(\hat{b} - b)^2] + E[(\bar{\varepsilon})^2] = \sigma^2 + \frac{\sigma^2 x_0^2}{\sum x_i^2} + \frac{1}{n^2} \sum E(\varepsilon_i^2) =$$

$$= \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{x_0^2}{\sum x_i^2} \right):$$

Թեորեմ 11.10: **H 1.** և **H 3.** պայմանների դեպքում (11.9) մոդելին բավարարող կամայական (X_0, Y_0) զույգի համար Y_0 պատահական մեծության $\tilde{Y}_0$ կանխատեսման e_0 սխալի ցրվածքը, ըստ Y_i -երի զծային անշեղ գնահատականների,

$$\mathcal{L}_{Y_0}^0(\mathbf{Y}) = \left\{ \tilde{Y}_0 : \tilde{Y}_0 = \sum_{i=1}^n c_i Y_i, E\tilde{Y}_0 = EY_0, c_i \in \mathcal{R} \right\}$$

դասում **նվազագույնն** է, այսինքն՝ $\tilde{Y}_0$ -ը Y_0 -ի համար **օպտիմալ** գնահատական է:

Ապացուցում: Դիցուք

$$\tilde{Y}_0 = \sum c_i Y_i \in \mathcal{L}_{Y_0}^0(\mathbf{Y})$$

Y_0 պատահական մեծության համար որոշակի **անշեղ** գնահատական է, այսինքն՝

$$E(\tilde{Y}_0) = E(Y_0) = a + bX_0:$$

Այստեղից կստանանք՝

$$E(\tilde{Y}_0) = \sum c_i(a + bX_i) = a + bX_0: \quad (11.61)$$

Քանի որ (11.61)-ը տեղի ունի կամայական $a, b \in \mathcal{R}$ -ից, ապա այն ճիշտ է նաև, երբ $a = 0$, $b = 1$, և երբ $a = 1$, $b = 0$, այնպես որ (11.61)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\sum c_i X_i = X_0 \left(\sum c_i x_i = X_0 - \bar{X} \right) \text{ և } \sum c_i = 1: \quad (11.62)$$

Մյուս կողմից՝ ունենք՝

$$\begin{aligned} E[(\tilde{Y}_0 - Y_0)^2] &= E[(\tilde{Y}_0 - \hat{Y}_0)^2] + E[(\hat{Y}_0 - Y_0)^2] + \\ &+ 2E[(\tilde{Y}_0 - \hat{Y}_0)(\hat{Y}_0 - Y_0)]: \end{aligned} \quad (11.63)$$

Յույց տանք, որ

$$E[(\tilde{Y}_0 - \hat{Y}_0)(\hat{Y}_0 - Y_0)] = 0:$$

Ունենք՝

$$E[(\tilde{Y}_0 - \hat{Y}_0)(\hat{Y}_0 - Y_0)] = E(\tilde{Y}_0 \hat{Y}_0) - E(\hat{Y}_0^2) - E(\tilde{Y}_0 Y_0) + E(\hat{Y}_0 Y_0) : \quad (11.64)$$

(11.64)-ի առաջին գումարելիին (տե՛ս (11.62)-ը) կլինի՝

$$\begin{aligned} E(\tilde{Y}_0 \hat{Y}_0) &= E \left[\left(\sum c_i Y_i \right) (\hat{a} + \hat{b} X_0) \right] = E \left[\left(\sum c_i (a + b X_i + \varepsilon_i) \right) (\hat{a} + \hat{b} X_0) \right] = \\ &= E \left[\left(\sum c_i (a + b X_i) + \sum c_i \varepsilon_i \right) (\hat{a} + \hat{b} X_0) \right] = \\ &= (a + b X_0)^2 + E \left[\left(\sum c_i \varepsilon_i \right) (\hat{a} + \hat{b} X_0) \right]: \end{aligned}$$

Այնուհետև, ըստ (11.11)-ի և (11.12)-ի, ունենք՝

$$\begin{aligned} E \left[\left(\sum c_i \varepsilon_i \right) (\hat{a} + \hat{b} X_0) \right] &= \\ &= E \left\{ \left(\sum c_i \varepsilon_i \right) \left[a + \sum \left(\frac{1}{n} - \bar{\mathbf{X}} \omega_j \right) \varepsilon_j + \left(b + \sum \omega_j \varepsilon_j \right) X_0 \right] \right\} = \\ &= E \left\{ \left(\sum c_i \varepsilon_i \right) \left[a + b X_0 + (X_0 - \bar{\mathbf{X}}) \sum \omega_j \varepsilon_j + \frac{1}{n} \sum \varepsilon_j \right] \right\} = \\ &= (X_0 - \bar{\mathbf{X}}) E \left[\left(\sum c_i \varepsilon_i \right) \left(\sum \omega_j \varepsilon_j \right) \right] + \frac{1}{n} E \left[\left(\sum c_i \varepsilon_i \right) \left(\sum \varepsilon_j \right) \right] = \\ &= \sigma^2 (X_0 - \bar{\mathbf{X}}) \left(\sum c_i \omega_i \right) + \frac{\sigma^2}{n} \sum c_i : \quad (11.65) \end{aligned}$$

Այժմ նկատենք, որ

$$\sum c_i \omega_i = \frac{\sum c_i x_i}{\sum x_j^2} = \frac{\sum c_i X_i - \bar{\mathbf{X}} \sum c_i}{\sum x_j^2} = \frac{X_0 - \bar{\mathbf{X}}}{\sum x_j^2},$$

այնպես որ (11.65)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$E\left[\left(\sum c_i \varepsilon_i\right)(\hat{a} + \hat{b}X_0)\right] = \frac{\sigma^2(X_0 - \bar{X})^2}{\sum x_j^2} + \frac{\sigma^2}{n} :$$

Այսպիսով կստանանք՝

$$E(\tilde{Y}_0 \hat{Y}_0) = (a + bX_0)^2 + \frac{\sigma^2(X_0 - \bar{X})^2}{\sum x_j^2} + \frac{\sigma^2}{n} :$$

Դիտարկենք (11.64)-ի **երկրորդ** գումարելին՝

$$\begin{aligned} E(\hat{Y}_0^2) &= E(\hat{a} + \hat{b}X_0)^2 = E\left[a + \sum\left(\frac{1}{n} - \bar{X}\omega_j\right)\varepsilon_j + \left(b + \sum\omega_j\varepsilon_j\right)X_0\right]^2 = \\ &= E\left[a + bX_0 + (X_0 - \bar{X})\sum\omega_j\varepsilon_j + \frac{1}{n}\sum\varepsilon_j\right]^2 = \\ &= (a + bX_0)^2 + \frac{\sigma^2(X_0 - \bar{X})^2}{\sum x_j^2} + \frac{\sigma^2}{n} = E(\tilde{Y}_0 \hat{Y}_0): \end{aligned} \quad (11.66)$$

(11.64)-ի **երրորդ** գումարելին կլինի

$$\begin{aligned} E(\tilde{Y}_0 Y_0) &= E\left[\left(\sum c_i Y_i\right)(a + bX_0 + \varepsilon_0)\right] = \\ &= E\left[\sum c_i(a + bX_i)(a + bX_0 + \varepsilon_0) + \sum c_i \varepsilon_i(a + bX_0 + \varepsilon_0)\right] = \\ &= (a + bX_0) \sum c_i(a + bX_i) = (a + bX_0)^2 : \end{aligned}$$

(11.64)-ի **չորրորդ** գումարելիի համար դժվար չէ ստանալ՝

$$\begin{aligned} E(\hat{Y}_0 Y_0) &= E\left\{\left[a + bX_0 + (X_0 - \bar{X})\sum\omega_j\varepsilon_j + \frac{1}{n}\sum\varepsilon_j\right](a + bX_0 + \varepsilon_0)\right\} = \\ &= (a + bX_0)^2 = E(\tilde{Y}_0 Y_0): \end{aligned} \quad (11.67)$$

Այսպիսով, (11.66)-ից և (11.67)-ից վերջնական կստանանք՝

$$E[(\tilde{Y}_0 - \hat{Y}_0)(\hat{Y}_0 - Y_0)] = 0,$$

այնպես որ (11.63)-ից կհետևի

$$E[(\tilde{Y}_0 - Y_0)^2] \geq E[(\hat{Y}_0 - Y_0)^2]$$

անհավասարությունը, այսինքն՝ $\tilde{Y}_0$ -ը Y_0 -ի համար **օպտիմալ գնահատական** է:

Թեորեմ 11.11: *Դիցուք (11.9) ռեգրեսիոն մոդելը բավարարում է H 1. և H 3. պայմանները: Այդ դեպքում*

$$t = \frac{Y_0 - \hat{Y}_0}{s_{e_0}} \sim T(n-2)$$

վիճականին ունի $(n-2)$ ազատության աստիճաններով Ստյուդենտի բաշխում, որտեղ

$$s_{e_0}^2 = s^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{x_0^2}{\sum x_i^2} \right) - \bar{u}$$

e_0 մնացորդի $\sigma_{e_0}^2 = \text{var}(e_0)$ ցրվածքի գնահատականն է (տե՛ս լեմմա 11.6):

Այսպիսով: Համաձայն (11.60)-ի՝

$$e_0 = Y_0 - \hat{Y}_0 = -(\hat{b} - b)x_0 + \varepsilon_0 - \bar{\varepsilon}$$

մնացորդը բաշխված է նորմալ օրենքով՝ $e_0 \sim N(0, \sigma_{e_0}^2)$, քանի որ $\hat{b}$, ε_0 և $\bar{\varepsilon}$ վիճականիները նորմալ են բաշխված: Այստեղից՝

$$\xi_0 = \frac{Y_0 - \hat{Y}_0}{\sigma_{e_0}} \sim N(0, 1):$$

Մյուս կողմից, համաձայն լեմմա 11.6-ի՝

$$\frac{s_{e_0}^2}{\sigma_{e_0}^2} = \frac{s^2}{\sigma^2} = \frac{1}{n-2} \chi_{n-2}^2,$$

$$\text{որտեղ } s_{e_0}^2 = s^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{x_0^2}{\sum x_i^2} \right):$$

Այնուհետև նկատելով, որ s^2 և $\hat{Y}_0 = \hat{a} + \hat{b}X_0$ վիճականիներն անկախ են (տե՛ս լեմմա 11.4-ը), ունենք՝

$$t = \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{1}{n-2} \chi_{n-2}^2}} = \frac{Y_0 - \hat{Y}_0}{s_{e_0}} \sim \mathbb{T}(n-2): \quad \blacksquare$$

Համաձայն թեորեմ 11.11-ի՝ $(\hat{Y}_0 \mp t_{\alpha/2}(n-2) s_{e_0})$ միջակայքը Y_0 -ի համար $\gamma = 1 - \alpha$ մակարդակով վստահության միջակայք է, այսինքն՝

$$P(\hat{Y}_0 - t_{\alpha/2}(n-2) s_{e_0} < Y_0 < \hat{Y}_0 + t_{\alpha/2}(n-2) s_{e_0}) = 1 - \alpha : \quad (11.68)$$

Խնդիր

11.11. $Y_i = a + bX_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, 10$ զույգային զծային ռեգրեսիայի համար ստացված են հետևյալ տվյալներ՝

$$\sum Y_i = 8, \quad \sum X_i = 40, \quad \sum Y_i^2 = 26, \quad \sum X_i^2 = 200, \quad \sum X_i Y_i = 20 :$$

Դիցուք դիտվում է այդ մոդելը բավարարող որոշակի $X_0 = 10$ արժեքը: Գտնել Y_0 -ի լավագույն զծային անշեղ կանխատեսումը և գնահատել կանխատեսման ստանդարտ սխալը:

Պատասխան՝ $\hat{Y}_0 = -1$, $s_{\hat{Y}_0} = 2$:

Գլուխ 12

Բազմաչափ գծային ռեգրեսիոն մոդելներ

Զույգային գծային ռեգրեսիոն մոդելների բնական ընդհանրացումն են բազմաչափ գծային ռեգրեսիոն մոդելները, որտեղ անկախ փոփոխականների (ռեգրեսորների) թիվը $k \geq 2$ -ից:

§ 12.1. Նվազագույն քառակուսիների եղանակ

Ուսումնասիրվում է որոշակի Y պատահական մեծության կապը $X_1, \dots, X_k$ փոփոխականներից:

Y պատահական մեծության n դիտումների արդյունքում ստացված

$$Y_i = \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (n > k) \quad (12.1)$$

ներկայացումով տրվող մոդելը, որտեղ X_{ij} -երը ($i = 1, \dots, n$) X_j փոփոխականներին, $j = 1, \dots, k$, համապատասխանող դիտված արժեքներն են, կոչվում է **k-չափանի գծային ռեգրեսիոն մոդել**: X_{ij} մեծությունները կոչվում են **ռեգրեսորներ** կամ **անկախ (բացատրող)** փոփոխականներ, Y_i պատահական մեծությունները՝ **«արձագանք»** կամ **կախյալ (բացատրվող)** փոփոխականներ, ε_i -երը՝ **ռեգրեսիայի սխալներ** կամ **«աղմուկներ»**, β_j -երը ($\beta_j \in \mathcal{R}, j = 1, \dots, k$) **անհայտ** գործակիցներ են:

Հետագայում կհամարվի, որ $X_{i1} = 1, i = 1, \dots, n$:

Սովորաբար (12.1) մոդելը բավարարում է հետևյալ պայմանները՝
(H) պայմաններ՝

$$\text{H 1. } \hat{\mathbf{X}}_j = \|X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{nj}\|^T \text{-երը } (\hat{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{1} := \underbrace{\|1, \dots, 1\|_n^T}_n), \quad j = 1, \dots, k$$

գծորեն անկախ $\mathcal{R}^n$ -ում ոչ պատահական վեկտորներ են,

$$\begin{aligned} \text{H 2.} \quad & E(\varepsilon_i) = 0, \operatorname{var}(\varepsilon_i) = \sigma^2, \quad i = 1, \dots, n, \\ & \operatorname{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

այսինքն՝ ռեգրեսիայի սխալները **համասեռ** են և **չկորելյացված**:

Որոշ դեպքերում **H 2.** պայմանը կփոխարինվի հետևյալ պայմանով՝

H 3. $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$, $i = 1, \dots, n$ ՝ սխալներն **անկախ** համատեղ **նորմալ բաշխում ունեցող** պատահական մեծություններ են: (12.1) մոդելն այդ դեպքում կոչվում է **նորմալ գծային ռեգրեսիոն մոդել**:

(12.1) մոդելը և **(H)** պայմանները հարմար է ներկայացնել **մատրիցային** տեսքով: Նշանակենք՝

$Y = \|Y_1, \dots, Y_n\|^T$ -ով **դիտումների** վեկտորը, $\beta = \|\beta_1, \dots, \beta_k\|^T$ -ով՝ **գործակիցների** վեկտորը, $\varepsilon = \|\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\|^T$ -ով՝ ռեգրեսիայի **սխալների** վեկտորը, $X = \begin{vmatrix} 1 & X_{12} & \dots & X_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & X_{n2} & \dots & X_{nk} \end{vmatrix}$ -ով՝ $n \times k$ -չափանի **բացատրող փոփոխականների (ռեգրեսիոն) մատրիցը**: Այդ դեպքում (12.1) մոդելը կներկայացվի

$$Y = X\beta + \varepsilon \quad (12.2)$$

տեսքով, իսկ **(H)** պայմանները կընդունեն հետևյալ տեսքը՝

H 1. Ոչ պատահական ռեգրեսիոն X մատրիցն ունի **մաքսիմալ ռանգ** ($\operatorname{rank}(X) = k$),

$$\text{H 2. } E(\varepsilon) = \mathbf{0}_n, V(\varepsilon) = E(\varepsilon \varepsilon^T) = \sigma^2 E_n \quad (\mathbf{0}_n = \underbrace{\|0, \dots, 0\|^T}_n, \quad E_n\text{-ը միավոր}$$

մատրից է),

իսկ **լրացուցիչ պայմանը** կլինի՝

H 3. $\varepsilon \sim N(\mathbf{0}_n, \sigma^2 E_n)$ սխալների վեկտորն ունի բազմաչափ **նորմալ բաշխում**:

Նվազագույն քառակուսիների եղանակի նպատակն է գտնել β գործակիցների վեկտորն այնպես, որ այն **մինիմալացնի** $\varepsilon = Y - X\beta$ սխալների

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \sum \varepsilon_i^2 \quad (12.3)$$

քառակուսիների գումարը:

Թեորեմ 12.1: **H 1.** և **H 2.** պայմանները բավարարվելու դեպքում (12.2) մոդելի β պարամետրի նվազագույն քառակուսիների գնահատականը հավասար է

$$\hat{\beta} = (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \mathbf{Y}:$$

Ապացուցում: Ներկայացնենք (12.3)-ը հետևյալ տեսքով՝

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} &= (\mathbf{Y} - \mathbb{X}\beta)^T (\mathbf{Y} - \mathbb{X}\beta) = \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \mathbf{Y}^T \mathbb{X}\beta - \beta^T \mathbb{X}^T \mathbf{Y} + \beta^T \mathbb{X}^T \mathbb{X}\beta = \\ &= \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - 2\beta^T \mathbb{X}^T \mathbf{Y} + \beta^T \mathbb{X}^T \mathbb{X}\beta: \end{aligned} \quad (12.4)$$

Այստեղ օգտագործվեց այն փաստը, որ $\beta^T \mathbb{X}^T \mathbf{Y}$ -ը սկալյար մեծություն է, որը շրջում (տրանսպոնացում) կատարելուց հետո մնում է անփոփոխ՝

$$\beta^T \mathbb{X}^T \mathbf{Y} = (\beta^T \mathbb{X}^T \mathbf{Y})^T = \mathbf{Y}^T \mathbb{X}\beta:$$

Դիֆերենցելով (12.4)-ն ըստ β վեկտորի (տե՛ս սահմանում Հ. 25)՝ կստանանք՝

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \beta} = -2\mathbb{X}^T \mathbf{Y} + 2\mathbb{X}^T \mathbb{X}\beta: \quad (12.5)$$

Այստեղից՝ մինիմումի անհրաժեշտ պայմանից՝

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \beta} = \mathbf{0},$$

կստանանք՝

$$\mathbb{X}^T \mathbb{X}\beta = \mathbb{X}^T \mathbf{Y}: \quad (12.6)$$

Այնուհետև, համաձայն **H 1.** պայմանի և մատրիցի ռանգի՝

$$\text{rank}(\mathbb{X}^T \mathbb{X}) = \text{rank}(\mathbb{X}) = k$$

հատկության (տե՛ս Հ.5, հատկություններ) հետևում է, որ $k \times k$ -չափանի $\mathbb{X}^T \mathbb{X}$ մատրիցը **հակադարձվում** է, այնպես որ (12.6)-ից կստանանք՝

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y: \quad (12.7)$$

Ցույց տանք, որ $\hat{\beta}$ -ը մինիմալացնում է ռեգրեսիայի սխալների $\varepsilon^T \varepsilon$ քառակուսիների գումարը: Այդ նպատակով դիտարկենք հետևյալ ներկայացումը՝

$$\begin{aligned} \varepsilon^T \varepsilon &= (Y - X\beta)^T (Y - X\beta) = [(Y - X\hat{\beta}) + X(\hat{\beta} - \beta)]^T [(Y - X\hat{\beta}) + X(\hat{\beta} - \beta)] \\ &= (Y - X\hat{\beta})^T (Y - X\hat{\beta}) + (Y - X\hat{\beta})^T X(\hat{\beta} - \beta) + \\ &+ (\hat{\beta} - \beta)^T X^T (Y - X\hat{\beta}) + (\hat{\beta} - \beta)^T X^T X (\hat{\beta} - \beta): \end{aligned} \quad (12.8)$$

Այժմ, օգտվելով

$$\hat{\beta} - \beta = (X^T X)^{-1} X^T (X\beta + \varepsilon) - \beta = (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon \quad (12.9)$$

և

$$Y - X\hat{\beta} = X\beta + \varepsilon - X\hat{\beta} = \varepsilon - X(\hat{\beta} - \beta)$$

ներկայացումներից, կստանանք՝

$$(\hat{\beta} - \beta)^T X^T (Y - X\hat{\beta}) = \varepsilon^T X (X^T X)^{-1} X^T (\varepsilon - X(X^T X)^{-1} X^T \varepsilon) = 0:$$

Մյուս կողմից՝ ունենք՝

$$(Y - X\hat{\beta})^T X(\hat{\beta} - \beta) = [(\hat{\beta} - \beta)^T X^T (Y - X\hat{\beta})]^T = 0,$$

այնպես որ (12.8)-ից վերջնական կստանանք՝

$$(Y - X\beta)^T (Y - X\beta) = (Y - X\hat{\beta})^T (Y - X\hat{\beta}) + (\hat{\beta} - \beta)^T X^T X (\hat{\beta} - \beta): \quad (12.10)$$

Այստեղից, նշանակելով $z = X(\hat{\beta} - \beta)$, (12.10)-ից կստանանք՝

$$(Y - X\beta)^T (Y - X\beta) - (Y - X\hat{\beta})^T (Y - X\hat{\beta}) = z^T z \geq 0:$$

Այսպիսով, թեորեմն ապացուցվեց:

Հետևանք 12.1 (տե՛ս խնդիր 11.1): Ռեգրեսիայի մնացորդների

$$e = Y - X\hat{\beta}$$

վեկտորը օրթոգոնալ է X մատրիցի $\hat{X}_j$, $j = 1, \dots, k$ սյունակ վեկտորներին:

Ա պ ա ց ու ց ու մ: Ակնհայտ է, որ $\mathbf{X}_j^T \mathbf{e} = 0$, $j = 1, \dots, k$ պայմանները համարժեք են $\mathbf{X}^T \mathbf{e} = \mathbf{0}$ պայմանին: Այժմ, հաշվի առնելով $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ -ի (12.7) ներկայացումը, կստանանք՝

$$\mathbf{X}^T \mathbf{e} = \mathbf{X}^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{X}^T \mathbf{Y} - \mathbf{X}^T \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}^T \mathbf{Y} - \mathbf{X}^T \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y} = \mathbf{0}:$$

Հետևանք 12.2: Ռեգրեսիայի մնացորդների քառակուսիների գումարը՝

$$\mathbf{e}^T \mathbf{e} = \sum e_i^2,$$

կարելի է ներկայացնել հետևյալ ձևով՝

$$\mathbf{e}^T \mathbf{e} = (\mathbf{Y}^T - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T) \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{Y}: \quad (12.11)$$

Ա պ ա ց ու ց ու մ: Համանման սխալների քառակուսիների գումարի (12.4) ներկայացման, ունենք՝

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^T \mathbf{e} &= \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - 2 \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{Y} + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T (2 \mathbf{X}^T \mathbf{Y} - \mathbf{X}^T \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}) = \\ &= \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{Y}: \end{aligned}$$

Այստեղից, հաշվի առնելով (12.6)-ը, կստանանք (12.11)-ը:

Դիտողություն 12.1: $\boldsymbol{\beta}$ պարամետրի նվազագույն քառակուսիների գնահատականը կարելի է նաև ստանալ՝ օգտվելով երկրաչափական մոտեցումից:

Պահանջվում է մինիմալացնել ըստ $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{R}^k$ վեկտորի՝

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 = \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \sum \varepsilon_i^2 = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

ռեգրեսիայի սխալների քառակուսիների գումարը, այսինքն՝ գտնել $\mathcal{R}^n$ վեկտորական տարածության $\boldsymbol{\pi} = \{\mathbf{Y}' : \mathbf{Y}' = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta} \in \mathcal{R}^k\}$ ենթատարածությունում այնպիսի $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ վեկտոր, որ $\mathbf{e} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ վեկտորն ունենա նվազագույն երկարությունը՝

$$\inf_{\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{R}^k} \|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\|^2 = \|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}\|^2:$$

Համաձայն **Պյութագորասի** թեորեմի՝ ունենք՝

$$\begin{aligned}\|\mathbf{Y} - \mathbb{X}\boldsymbol{\beta}\|^2 &= \|\mathbf{Y} - \mathbb{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\|^2 + \|\mathbb{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbb{X}\boldsymbol{\beta}\|^2 = \|\mathbf{Y} - \mathbb{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\|^2 + \|\mathbb{X}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})\|^2 \geq \\ &\geq \|\mathbf{Y} - \mathbb{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\|^2:\end{aligned}$$

Այսինքն՝ $\mathbf{Y} - \mathbb{X}\boldsymbol{\beta}$ վեկտորն իր նվազագույն արժեքն ընդունում է այն $\boldsymbol{\beta} = \widehat{\boldsymbol{\beta}}$ արժեքի դեպքում, երբ $\mathbf{e} = \mathbf{Y} - \mathbb{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ վեկտորը **օրթոգոնալ** է $\boldsymbol{\pi}$ ենթատարածությանը, որի համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\mathbf{e}$ վեկտորը լինի օրթոգոնալ $\boldsymbol{\pi}$ ենթատարածությունը ծնող $\widehat{\mathbf{X}}_j$, $j = 1, \dots, k$ վեկտորներին, այսինքն՝ $\widehat{\mathbf{X}}_j^T \mathbf{e} = 0$ կամ $\mathbb{X}^T \mathbf{e} = 0$: Այստեղից բխում է

$$\mathbb{X}^T(\mathbf{Y} - \mathbb{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbb{X}^T \mathbf{Y} - \mathbb{X}^T \mathbb{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}$$

պայմանը, որտեղից էլ ստացվում է $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ գնահատականի (12.7) ներկայացումը:

Խնդիրներ

12.1. Դիցուք տրված է

$$\begin{aligned}Y_1 &= \beta_1 + \varepsilon_1, \\ Y_2 &= 2\beta_1 - \beta_2 + \varepsilon_2, \\ Y_3 &= \beta_1 + 2\beta_2 + \varepsilon_3\end{aligned}$$

ռեգրեսիոն մոդելը, որտեղ $E(\varepsilon_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$: Գտնել β_1 և β_2 գործակիցների նվազագույն քառակուսիների գնահատականները:

$$\text{Պատասխան՝ } \hat{\beta}_1 = \frac{1}{6}(Y_1 + 2Y_2 + Y_3), \quad \hat{\beta}_2 = \frac{1}{5}(2Y_3 - Y_2):$$

12.2. Ապացուցել, որ **H 1.** և **H 2.** պայմանները բավարարող բազմաչափ ռեգրեսիոն մոդելի համար ճիշտ են հետևյալ առնչությունները՝

$$\sum (Y_i - \hat{Y}_i) = 0, \quad \sum \hat{Y}_i (Y_i - \hat{Y}_i) = 0:$$

12.3. **H 1.** և **H 2.** պայմանները բավարարող $\mathbf{Y} = \mathbb{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ ռեգրեսիոն հավասարման $\boldsymbol{\beta}$ գործակիցների վեկտորի համար դիտարկվում է $\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = [(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} + \gamma \mathbb{E}_k] \mathbb{X}^T \mathbf{Y}$ գնահատականը: Գտնել այդ գնահատականի միջինը, կովարիացիոն մատրիցը և միջին քառակուսային շեղումների $\text{MSE}(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}) := E(\widetilde{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})(\widetilde{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})^T$ մատրիցը:

Պատասխան՝ $E(\tilde{\beta}) = \beta + \gamma \mathbb{X}^T \mathbb{X} \beta$, $V(\tilde{\beta}) = V(\hat{\beta}) + \sigma^2(2\gamma E_k + \gamma^2 \mathbb{X}^T \mathbb{X})$,
 $MSE(\tilde{\beta}) = \gamma^2 \mathbb{C} + 2\sigma^2 \gamma E_k + V(\hat{\beta})$, որտեղ $\hat{\beta}$ -ը β -ի ՆՔ գնահատականն է, իսկ $\mathbb{C} =$
 $= \mathbb{X}^T \mathbb{X} \beta \beta^T \mathbb{X}^T \mathbb{X} + \sigma^2 \mathbb{X}^T \mathbb{X}$:

§ 12.2. Գաուս – Մարկովի թեորեմ

(12.2) մոդելը բավարարող $\mathbf{Y}$ դիտումների վեկտորի համար ներմուծենք

$\mathcal{L}_{\beta}(\mathbf{Y}) =$
 $= \{\beta^*: \beta^* = \mathbf{A}\mathbf{Y}, \mathbf{A}$ -ն կամայական $k \times n$ -չափանի մատրից է, $E(\beta^*) = \beta\}$
 $\beta \in \mathcal{R}^k$ պարամետրի **զծային** (ըստ $\mathbf{Y}$ -ի) **անշեղ** գնահատականների դասը:

Թեորեմ 12.2 (Գաուս – Մարկով): Դիցուք (12.2) մոդելը բավարարում է **H 1.** և **H 2.** պայմանները: Այդ դեպքում $\beta \in \mathcal{R}^k$ պարամետրի **նվազագույն քառակուսիների** $\hat{\beta} = \|\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k\|^T$ **գնահատականը** **օպտիմալ** է $\mathcal{L}_{\beta}(\mathbf{Y})$ դասում, այսինքն՝ $\hat{\beta}$ պարամետրի **զծային** (ըստ $\mathbf{Y}$ -ի) **անշեղ** գնահատականների դասում $\hat{\beta}_j$ -ները, $j = 1, \dots, k$, **ունեն նվազագույն ցրվածքներ:**

Ապացուցում (տե՛ս [10]): Նշանակենք $\mathbf{A} = (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T$ այնպես, որ $\hat{\beta} = \mathbf{A}\mathbf{Y}$: β պարամետրի կամայական այլ **զծային անշեղ** գնահատականը ներկայացնենք

$$\beta^* = (\mathbf{A} + \mathbf{C})\mathbf{Y}$$

տեսքով, որտեղ $\mathbf{C}$ -ն **որոշակի** $k \times n$ -չափանի մատրից է:

Սկզբում ցույց տանք $\hat{\beta} = \mathbf{A}\mathbf{Y}$ գնահատականի անշեղությունը: Իրոք, նկատի ունենալով, որ

$$\mathbf{A}\mathbb{X} = \mathbf{E}_k, \quad (12.12)$$

կստանանք՝

$$E(\hat{\beta}) = E(\mathbf{A}\mathbf{Y}) = \mathbf{A}E(\mathbf{Y}) = \mathbf{A}E(\mathbb{X}\beta + \varepsilon) = \mathbf{A}(\mathbb{X}\beta + E(\varepsilon)) = \mathbf{A}\mathbb{X}\beta = \beta:$$

Մյուս կողմից, քանի որ β^* -ը β պարամետրի համար **անշեղ** գնահատական է, ապա

$$\beta = E(\beta^*) = (A + C)E(Y) = (A + C)X\beta = \beta + CX\beta:$$

Այստեղից հետևում է, որ $k \times k$ -չափանի CX մատրիցը $0_{k \times k}$ (0-ական) մատրից է՝

$$CX = 0_{k \times k}: \quad (12.13)$$

Այժմ գտնենք $\hat{\beta}$ վեկտորի կովարիացիոն մատրիցը (տե՛ս սահմանում Հ. 30-ը, հատկություն 1)՝

$$\begin{aligned} V(\hat{\beta}) &= V(AY) = AV(Y)A^T = \sigma^2(AA^T) = \sigma^2(X^T X)^{-1} X^T X [(X^T X)^{-1}]^T = \\ &= \sigma^2[(X^T X)^T]^{-1} = \sigma^2(X^T X)^{-1}: \end{aligned} \quad (12.14)$$

Մյուս կողմից, հաշվի առնելով (12.13)-ը, ունենք՝

$$\begin{aligned} V(\beta^*) &= (A + C)V(Y)(A + C)^T = \sigma^2(A + C)(A + C)^T = \\ &= \sigma^2(AA^T + CA^T + AC^T + CC^T) = \\ &= \sigma^2[(X^T X)^{-1} + CX(X^T X)^{-1} + (X^T X)^{-1}X^T C^T + CC^T] = \\ &= \sigma^2(X^T X)^{-1} + \sigma^2(CC^T): \end{aligned}$$

Այստեղից՝ քանի որ CC^T մատրիցը **ոչ բացասական որոշյալ** է ($CC^T \geq 0$), ապա

$$V(\beta^*) \geq V(\hat{\beta}) \quad (V(\beta^*) - V(\hat{\beta}) = \sigma^2(CC^T) \geq 0): \quad (12.15)$$

(12.15) պայմանը նշանակում է, որ կամայական $t \in \mathcal{R}^k$ -ից վեկտորի համար

$$t^T (V(\beta^*) - V(\hat{\beta})) t \geq 0:$$

Մասնավորապես, այս անհավասարությունը ճիշտ է

$$t(i) = \|\delta_{i1}, \dots, \delta_{ii}, \dots, \delta_{ik}\|^T, \quad i = 1, \dots, k$$

վեկտորների համար (δ_{ij} -ն՝ **Կրոնեկերի** սիմվոլն է), որտեղից էլ հետևում են

$$\text{var}(\beta_i^*) \geq \text{var}(\hat{\beta}_i), \quad i = 1, \dots, k$$

անհավասարությունները:

Խնդիրներ

12.4. Դիցուք տրված է **H 1.** և **H 2.** պայմանները բավարարող

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

գույգային գծային ռեգրեսիոն մոդելը: Ցույց տալ, որ $\hat{\beta} = (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \mathbf{Y}$ բանաձևով որոշվող նվազագույն քառակուսիների գնահատականը համընկնում է (11.2)-ում և (11.3)-ում ստացված գնահատականի հետ:

12.5. Դիցուք տրված է

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 (X_{i2} - \bar{X}_2) + \beta_3 (X_{i3} - \bar{X}_3) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

ռեգրեսիոն մոդելը, որտեղ

$$\bar{X}_j = \frac{1}{n} \sum X_{ij}, \quad j = 2, 3 \quad (E(\varepsilon) = \mathbf{0}, V(\varepsilon) = \sigma^2 \mathbb{E}_n):$$

Ցույց տալ, որ

$$\text{var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{(1 - r_{2,3}^2) \sum (X_{i2} - \bar{X}_2)^2},$$

որտեղ $\hat{\beta}_2$ -ը β_2 պարամետրի նվազագույն քառակուսիների գնահատականն է, իսկ $r_{2,3}$ -ը (X_{i2}, X_{i3}) զույգերի նմուշային կորելյացիայի գործակիցը:

§ 12.3. Նվազագույն քառակուսիների գնահատականների հատկությունները

§ 12.1-ում ապացուցվեց, որ (12.2) ռեգրեսիոն մոդելի $\mathbf{Y} \in \mathcal{R}^n$ վեկտորի $\hat{\mathbf{Y}} = \|\hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_n\|^T$ «կանխատեսվող» վեկտորը ($\boldsymbol{\pi}$ ենթատարածությունում ε_i սխալների քառակուսիների գումարի մինիմումի իմաստով լավագույն մոտարկումը) ներկայացվում է հետևյալ տեսքով՝

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbb{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbb{X}(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \mathbf{Y} := \mathbb{N} \mathbf{Y}: \quad (12.16)$$

Այստեղից հետևում է, որ N մատրիցը $\mathcal{R}^n$ տարածությունից $\pi \subset \mathcal{R}^n$ ենթատարածություն **օրթոգոնալ պրոեկտման** մատրից է (տե՛ս սահմանում Հ. 18):

Նմանապես, ներկայացնենք **ռեգրեսիայի մնացորդների** $e = Y - \hat{Y}$ վեկտորը

$$e = Y - \mathbb{X}\hat{\beta} = Y - \mathbb{X}(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T Y = (\mathbb{E}_n - N)Y := MY \quad (12.17)$$

տեսքով, որտեղից կհետևի, որ $M = \mathbb{E}_n - N$ մատրիցը $\mathcal{R}^n$ տարածությունից $\pi^\perp \subset \mathcal{R}^n$ **օրթոգոնալ լրացման** վրա **պրոեկտման** մատրից է (տե՛ս պնդում Հ. 21-ը): Ուստի

$$Y = NY + MY$$

արտահայտությունը Y վեկտորի **օրթոգոնալ վերլուծություն** է երկու վեկտորների, որտեղ $NY \in \pi$, իսկ $MY \in \pi^\perp$:

Բերենք N և M մատրիցների որոշ հատկություններ.

Թեորեմ 12.3: ա) N և M մատրիցները **համաչափ են և իդեմպոտենտ**, այսինքն՝ **պրոեկցիոն** մատրիցներ են՝

$$N = N^T, \quad N^2 = N, \quad M = M^T, \quad M^2 = M,$$

բ) $\text{rank}(N) = \text{tr}(N) = k$, $\text{rank}(M) = \text{tr}(M) = n - k$,

գ) $NX = X$, $MX = \mathbf{0}_{n \times k}$, $AM = \mathbf{0}_{k \times n}$ ($A = (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T$):

Ա պ ա զ ու զ ու մ: ա) Օգտվելով **շրջված (տրանսպոնացված) և հակադարձ** մատրիցների հատկություններից (տե՛ս Հ. 1-ի և Հ. 4-ի հատկությունները)՝ ունենք՝

$$\begin{aligned} N^T &= [\mathbb{X}(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T]^T = \mathbb{X}[(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1}]^T \mathbb{X}^T = \mathbb{X}[(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^T]^{-1} \mathbb{X}^T = \\ &= \mathbb{X}(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T = N: \end{aligned}$$

Մյուս կողմից՝

$$N^2 = \mathbb{X}(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \mathbb{X}(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T = \mathbb{X}(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T = N:$$

Նման ձևով կստանանք՝

$$M^T = (\mathbb{E}_n - N)^T = \mathbb{E}_n - N^T = \mathbb{E}_n - N = M,$$

**§ 12.3. Նվազագույն քառակուսիների գնահատականների
հատկությունները**

$$\mathbb{M}^2 = (\mathbb{E}_n - \mathbb{N})(\mathbb{E}_n - \mathbb{N}) = \mathbb{E}_n - 2\mathbb{N} + \mathbb{N}^2 = \mathbb{M}:$$

բ) Համաձայն պնդում Հ. 14-ի՝ $\text{rank}(\mathbb{N}) = \text{tr}(\mathbb{N})$: Մյուս կողմից (տե՛ս Հ. 2)՝ ունենք՝

$$\text{tr}(\mathbb{N}) = \text{tr}[\mathbb{X}(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T] = \text{tr}[\mathbb{X}^T \mathbb{X}(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1}] = \text{tr}(\mathbb{E}_k) = k:$$

Կրկին օգտվելով պնդում Հ. 14 -ից՝ կստանանք՝

$$\text{rank}(\mathbb{M}) = \text{tr}(\mathbb{M}) = \text{tr}(\mathbb{E}_n - \mathbb{N}) = n - \text{tr}(\mathbb{N}) = n - k:$$

գ) Ճիշտ են հետևյալ ակնհայտ առնչությունները՝

$$\mathbb{N}\mathbb{X} = \mathbb{X}(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \mathbb{X} = \mathbb{X},$$

$$\mathbb{M}\mathbb{X} = (\mathbb{E}_n - \mathbb{X}(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T) \mathbb{X} = \mathbb{X} - \mathbb{X} = \mathbf{0}_{n \times k},$$

$$\begin{aligned} \mathbb{A}\mathbb{M} &= (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T (\mathbb{E}_n - \mathbb{X}(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T) = \\ &= (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T - (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \mathbb{X}(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T = \mathbf{0}_{k \times n}: \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Այժմ դիտարկենք (12.2) մոդելի ε_i սխալների σ^2 **ցրվածքի գնահատման հարցը**:

Լեմմա 12.1: (12.2) *նեգրեսիայի մնացորդների e վեկտորը բավարարում է*

$$\mathbb{E}(\mathbf{e}) = \mathbf{0}, \quad \mathbb{V}(\mathbf{e}) = \sigma^2 \mathbb{M}, \quad \text{tr } \mathbb{V}(\mathbf{e}) = \sum \text{var}(e_i)$$

պայմանները:

Ա պ ա գ ու գ ու մ: Համաձայն թեորեմ 12.3-ի, Հ. 28-ի և Հ. 30-ի ունենք՝

$$\mathbb{E}(\mathbf{e}) = \mathbb{E}(\mathbb{M}\mathbf{Y}) = \mathbb{M}\mathbb{E}(\mathbf{Y}) = \mathbb{M}\mathbb{E}(\mathbb{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbb{M}\mathbb{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0},$$

$$\mathbb{V}(\mathbf{e}) = \mathbb{V}(\mathbb{M}\mathbf{Y}) = \mathbb{M}\mathbb{V}(\mathbf{Y})\mathbb{M}^T = \sigma^2 \mathbb{M}\mathbb{M}^T = \sigma^2 \mathbb{M}^2 = \sigma^2 \mathbb{M}:$$

Վերջին հավասարությունն ակնհայտ է:

Պնդում 12.1: Եթե (12.2) մոդելը բավարարում է **H 1.** և **H 2.** պայմանները, ապա

$$s^2 := \widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n-k} \mathbf{e}^T \mathbf{e} = \frac{1}{n-k} \sum e_i^2$$

վիճականին (մնացորդային ցրվածքը) կլինի անշեղ գնահատական σ^2 պարամետրի համար՝ $E(s^2) = \sigma^2$:

Ա պ ա ց ու ց ու մ: Համաձայն (12.17) ներկայացմանը և այնուհետև կիրառելով թեորեմ 12.3-ը և լեմմա 12.1-ը՝ կստանանք՝

$$E(\mathbf{e}^T \mathbf{e}) = \sum_{i=1}^n \text{var}(e_i) = \text{tr } V(\mathbf{e}) = \sigma^2 \text{tr}(\mathbb{M}) = \sigma^2(n-k):$$

$\hat{\beta}$ և s^2 գնահատականների վիճակագրական հատկությունները ստանալու համար դիտարկենք (12.2) նորմալ ռեգրեսիոն մոդելը:

Թեորեմ 12.4: Դիցուք (12.2) մոդելը բավարարում է **H 1.** և **H 3.** պայմանները: Տեղի ունեն $\hat{\beta}$ և s^2 գնահատականների հետևյալ հատկությունները՝

ա) $\hat{\beta} \sim N_k(\beta, \sigma^2(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1}),$

բ) $(\hat{\beta} - \beta)^T \mathbb{X}^T \mathbb{X} (\hat{\beta} - \beta) / \sigma^2 \sim \mathbb{H}^2(k),$

գ) $\hat{\beta}$ և s^2 գնահատականներն **անկախ** են,

դ) $(\mathbf{e}^T \mathbf{e}) / \sigma^2 = (n-k) s^2 / \sigma^2 \sim \mathbb{H}^2(n-k):$

Ա պ ա ց ու ց ու մ: ա) (12.9)-ից հետևում է, որ $\hat{\beta} = \beta + (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \boldsymbol{\varepsilon}$ վեկտորն ունի **բազմաչափ նորմալ բաշխում**, ընդ որում (տե՛ս (12.14))՝

$$E(\hat{\beta}) = \beta, \quad V(\hat{\beta}) = \sigma^2(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} :$$

բ) $(\hat{\beta} - \beta)^T \mathbb{X}^T \mathbb{X} (\hat{\beta} - \beta) / \sigma^2 = (\hat{\beta} - \beta)^T [V(\hat{\beta})]^{-1} (\hat{\beta} - \beta)$ պատահական մեծությունը, համաձայն ա) կետի և թեորեմ 2.34-ի, ունի k ազատության աստիճաններով **χ^2 բաշխում**:

գ) Համաձայն (12.17)-ի և թեորեմ 12.3-ի՝

**§ 12.3. Նվագագույն քառակուսիների գնահատականների
հատկությունները**

$$\mathbf{e} = \mathbb{M}\mathbf{Y} = \mathbb{M}(\mathbb{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbb{M}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (12.18)$$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\beta} + \mathbb{A}\boldsymbol{\varepsilon},$$

այնպես որ $\mathbf{e}$ և $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ վեկտորներն ունեն համատեղ **բազմաչափ նորմալ բաշխում**: Հետևաբար՝ այդ վեկտորների **անկախությունն** ապացուցելու համար բավարար է ցույց տալ, որ նրանք **չկորելյացված** են (տե՛ս թեորեմ Հ. 41-ը):

Համաձայն թեորեմ 12.3-ի գ) կետի՝ ունենք՝ $\mathbb{A}\mathbb{M} = \mathbf{0}_{k \times n}$: Այնպես որ, ըստ լեմմա 12.1-ի՝ $E(\mathbf{e}) = \mathbf{0}$, հետևաբար (տե՛ս (12.18))՝

$$V(\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{e}) = E[(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})\mathbf{e}^T] = E[\mathbb{A}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbb{M}] = \mathbb{A}E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T)\mathbb{M} = \sigma^2(\mathbb{A}\mathbb{M}) = \mathbf{0}_{k \times n}:$$

Այնուհետև, նկատելով, որ s^2 վիճականին **չափելի** ֆունկցիա է $\mathbf{e}$ վեկտորից, եզրակացնում ենք, որ $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ վեկտորը և s^2 վիճականին **անկախ** են:

դ) Համաձայն (12.18) ներկայացմանը և թեորեմ 12.3-ի՝ ունենք՝

$$(\mathbf{e}^T \mathbf{e})/\sigma^2 = (n - k) s^2/\sigma^2 = (\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbb{M}^T \mathbb{M} \boldsymbol{\varepsilon})/\sigma^2 = (\boldsymbol{\varepsilon}/\sigma)^T \mathbb{M}(\boldsymbol{\varepsilon}/\sigma),$$

որտեղից, կրկին կիրառելով թեորեմ 12.3-ը և թեորեմ Հ. 45-ը, կստանանք նշված հատկությունը:

Խնդիրներ

12.6. Դիցուք $Y_1, \dots, Y_n \sim N(\theta, \sigma^2)$ **անկախ նորմալ** բաշխված պատահական մեծություններ են: Ապացուցել, օգտվելով թեորեմ 12.4-ից, որ՝

ա) $\bar{Y}$ նմուշային միջինն անկախ է $Q = \sum (Y_i - \bar{Y})^2$ վիճականուց,

բ) $Q/\sigma^2 \sim \mathbb{H}^2(n - 1)$:

Ցուցում՝ ներկայացնել Y_i պատահական մեծությունները $Y_i = \theta + \varepsilon_i$ տեսքով, որտեղ $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$, $i = 1, \dots, n$ անկախ պատահական մեծություններ են:

12.7. Ապացուցել, որ (12.2) *նորմալ* ռեգրեսիոն մոդելում $\mathbf{e}^T \mathbf{e}$ և $(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})^T \mathbb{X}^T \mathbb{X} (\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})$ վիճականիներն **անկախ** են:

Ցուցում՝ տե՛ս թեորեմ 12.4-ի գ) կետի ապացույցը:

§ 12.4. Կախյալ փոփոխականի վարիացիան:

R^2 դետերմինացիայի գործակից

1. Բերենք (12.2) մոդելը բավարարող Y_i կախյալ փոփոխականների $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum Y_i$ միջինի շուրջ $\sum (Y_i - \bar{Y})^2$ վարիացիայի տրոհումը ռեգրեսիայի հավասարումով բացատրվող և ռեգրեսիայի հավասարումով չբացատրվող մասերի:

Թեորեմ 12.5: *Տեղի ունի*

$$\sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 + \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 \quad (12.19)$$

ներկայացումը:

Ապացուցում: Ներկայացնենք $\sum (Y_i - \bar{Y})^2$ վարիացիան հետևյալ ձևով՝

$$\begin{aligned} \sum (Y_i - \bar{Y})^2 &= \sum (Y_i - \hat{Y}_i + \hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 + \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \\ &+ 2 \sum (Y_i - \hat{Y}_i)(\hat{Y}_i - \bar{Y}): \end{aligned}$$

Ցույց տանք, որ վերջին գումարելին հավասար է զրոյի: Քանի որ, ըստ (12.16)-ի, $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{N}\mathbf{Y}$, ապա

$$(\hat{\mathbf{Y}})^T \hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T \mathbf{N} \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T \hat{\mathbf{Y}}: \quad (12.20)$$

Մյուս կողմից, դիֆերենցելով

$$\sum (Y_i - \beta_1 - \beta_2 X_{i2} - \dots - \beta_k X_{ik})^2$$

արտահայտությունն ըստ β_1 -ի, կստանանք նվազագույն քառակուսիների $\hat{\beta}$ գնահատականը գտնելու համար

$$\sum (Y_i - \beta_1 - \beta_2 X_{i2} - \dots - \beta_k X_{ik}) = 0$$

նորմալ հավասարումներից մեկը, կամ (տե՛ս նաև (11.5)-ը)

$$\sum (Y_i - \hat{Y}_i) = 0 \Leftrightarrow \bar{Y} = \bar{\hat{Y}}: \quad (12.21)$$

Այստեղից և (12.20)-ից կստանանք՝

$$\sum (Y_i - \hat{Y}_i)(\hat{Y}_i - \bar{Y}) = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)\hat{Y}_i = (\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}})^T \hat{\mathbf{Y}} = 0: \blacksquare$$

(12.19) վերլուծությունում

$$TSS = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 \text{ (Total Sum of Squares)}$$

նշանակում է Y_i փոփոխականների ($\bar{Y}$ միջինի շուրջ) **ամբողջ վարիացիան**,

$$RSS = \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 \text{ (Regression Sum of Squares)}$$

ռեգրեսիայով «**բացատրվող**» ամբողջ վարիացիայի, իսկ

$$ESS = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \text{ (Error Sum of Squares)}$$

ռեգրեսիայով «**չբացատրվող**» ամբողջ վարիացիայի մասը (**մնացորդային անդամը**):

Դիտողություն 12.2: Ներկայացնենք (12.19)-ը վեկտորական տեսքով՝

$$\|\mathbf{Y} - \bar{Y}\mathbf{1}\|^2 = \|\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}\|^2 + \|\hat{\mathbf{Y}} - \bar{Y}\mathbf{1}\|^2, \quad (12.22)$$

որտեղ $\bar{Y}\mathbf{1} = \left\| \underbrace{\bar{Y}, \dots, \bar{Y}}_n \right\|^T$:

Նշանակելով՝ $\mathbf{Y}_* = \mathbf{Y} - \bar{Y}\mathbf{1}$ և $\hat{\mathbf{Y}}_* = \hat{\mathbf{Y}} - \bar{Y}\mathbf{1}$ (այստեղ, ըստ (12.21)-ի, $\bar{Y} = \bar{\hat{Y}}$) (12.22)-ը կրերվի հետևյալ տեսքի՝

$$\mathbf{Y}_*^T \mathbf{Y}_* = \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \hat{\mathbf{Y}}_*^T \hat{\mathbf{Y}}_*: \quad (12.23)$$

2. Ռեգրեսիայի միջոցով դիտվող Y_i արժեքների մոտարկման «**որակը**» նկարագրող բնութագրիչ է համարվում **նմուշային բազմաչափ կորելյացիայի գործակիցը**:

Y_i և $\hat{Y}_i$, $i = 1, \dots, n$ մեծությունների միջև կորելյացիայի գործակիցը, այսինքն՝

$$R = \frac{\sum(Y_i - \bar{Y})(\hat{Y}_i - \bar{Y})}{\left\{ \sum(Y_i - \bar{Y})^2 \sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 \right\}^{1/2}} \quad (12.24)$$

մեծությունը, կոչվում է նմուշային բազմաչափ կորելյացիայի գործակից:

R^2 մեծությունը կոչվում է դետերմինացիայի գործակից:

Թեորեմ 12.6: *Դետերմինացիայի գործակիցն ունի հետևյալ ներկայացումները՝*

$$R^2 = \frac{RSS}{TSS} = \frac{\hat{\mathbf{Y}}_*^T \hat{\mathbf{Y}}_*}{\mathbf{Y}_*^T \mathbf{Y}_*} = 1 - \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{e}}{\mathbf{Y}_*^T \mathbf{Y}_*} = 1 - \frac{ESS}{TSS} : \quad (12.25)$$

Այսպիսով: Օգտվելով թեորեմ 12.5-ի ապացուցումից՝ (12.24) բանաձևի համարիչը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\sum(Y_i - \bar{Y})(\hat{Y}_i - \bar{Y}) = \sum((Y_i - \hat{Y}_i) + (\hat{Y}_i - \bar{Y}))(\hat{Y}_i - \bar{Y}) = \sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 :$$

(12.25)-ում բերված ներկայացումները բխում են (12.24)-ից և (12.23)-ից:

Դիտողություն 12.3: Ակնհայտ է, որ $0 \leq R^2 \leq 1$: Դետերմինացիայի գործակիցը, ինչպես և նմուշային բազմաչափ կորելյացիայի գործակիցը նկարագրում են ռեգրեսիոն մոդելի՝ դիտվող Y_i արժեքներին համապատասխանության «որակը»:

(12.25)-ից հետևում է

$$ESS = \sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2 = (1 - R^2) \sum(Y_i - \bar{Y})^2$$

ներկայացումը, որտեղից երևում է, որ որքան մոտ է R^2 գործակիցը մեկ արժեքին, այնքան լավ են մոտարկվում Y_i դիտվող արժեքները ռեգրեսիայի միջոցով ստացվող $\hat{Y}_i$ կանխատեսումներով:

Եթե $R^2 = 0$, ապա $RSS = 0$, որտեղից հետևում է, որ $\hat{Y}_i = \bar{Y}$, $i = 1, \dots, n$: Իսկ դա նշանակում է, որ $\bar{Y}$ «պարզագույն» կանխատեսման համեմատ ռեգրեսիան չի լավացնում կանխատեսման որակը:

**§ 12.4. Կախյալ փոփոխականի վարիացիան:
 R^2 դետերմինացիայի գործակից**

Եթե $R^2 = 1$, ապա $ESS = 0$, այսինքն՝ $\hat{Y}_i = Y_i$, բոլոր դիտվող կետերն ընկած են ռեգրեսիոն ուղղի վրա, ուստի մոդելի և դիտվող Y_i արժեքների միջև առկա է հստակ համապատասխանություն:

Դիտողություն 12.4: R^2 գործակիցն աճում է, եթե ռեգրեսորների թիվը մեծանում է, որը, սակայն, չի նշանակում ռեգրեսիայի «լավացում»: Որպեսզի վերացվի ռեգրեսորների թվի մեծանալու հետ մեկտեղ R^2 գործակցի աճելու միտումը, սահմանվում է այսպես կոչված **ճշգրտված (adjusted)** R^2 գործակից՝

$$R_{adj}^2 = 1 - \frac{(\mathbf{e}^T \mathbf{e}) / (n - k)}{(\mathbf{Y}_*^T \mathbf{Y}_*) / (n - 1)} = 1 - \frac{ESS / (n - k)}{TSS / (n - 1)} :$$

Ճշգրտված R_{adj}^2 գործակիցը սովորաբար կիրառվում է տարբեր ռեգրեսիաները համեմատելու համար, երբ դրանց ռեգրեսորների թվերը տարբեր են:

R_{adj}^2 գործակցի հատկությունները՝

1. $R_{adj}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n - 1}{n - k}$,
2. $R_{adj}^2 \leq R^2$, $k > 1$,
3. $R_{adj}^2 \leq 1$, ընդ որում՝ այն կարող է ընդունել և բացասական արժեքներ:

Խնդիր

12.8. Ապացուցել R_{adj}^2 գործակցի հատկությունները

§ 12.5. Վարկածների ստուգում և միջակայքային գնահատում

Դիտարկենք **H 1.** և **H 3.** պայմանները բավարարող (12.2) ռեգրեսիոն մոդելը: Նշանակալիության α մակարդակով ստուգենք $\boldsymbol{\beta} = \|\beta_1, \dots, \beta_k\|^T$ պարամետրին վերաբերող վարկածներ:

1. Ստուգվում է

$\mathbb{H}_0: \beta_i = \beta_{i0}$ վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1: \beta_i \neq \beta_{i0}$

երկրնորանքայինի, որտեղ $\beta_{i0} \in \mathcal{R}$ $i = 1, \dots, k$, որոշակի հաստատուն թիվ է:

Թեորեմ 12.7: Եթե $\mathbb{H}_0$ վարկածը ճիշտ է, ապա

$$T_i = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_{i0}}{\mathbb{S}_{\hat{\beta}_i}} \sim \mathbb{T}(n - k)$$

վիճականին ունի $(n - k)$ ազատության աստիճաններով **Ստյուդենտի** $(t -)$ բաշխում:

Ապա ցուցում: $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում, համաձայն թեորեմ 12.4-ի ա) կետի, ունենք՝

$$\hat{\beta} - \beta_0 \sim \mathbb{N}_k(\mathbf{0}, \sigma^2(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1}),$$

որտեղից հետևում է, որ

$$\hat{\beta}_i - \beta_{i0} \sim \mathbb{N}(0, \sigma_{\hat{\beta}_i}^2), \quad \sigma_{\hat{\beta}_i}^2 = \text{var}(\hat{\beta}_i) = \sigma^2 c_{ii}:$$

Այստեղ c_{ii} -ն $(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1}$ մատրիցի i -րդ անկյունագծային էլեմենտն է: Որպես $\text{var}(\hat{\beta}_i)$ ցրվածքի գնահատական վերցնենք

$$\mathbb{S}_{\hat{\beta}_i}^2 = \widehat{\text{var}(\hat{\beta}_i)} = \mathbb{S}^2 c_{ii} \quad \left(\mathbb{S}^2 = \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{e}}{n - k} \right)$$

վիճականին: Կրկին օգտվելով թեորեմ 12.4-ի գ) և դ) կետերից՝ կստանանք՝

$$T_i = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_{i0}}{\mathbb{S}_{\hat{\beta}_i}} = \frac{(\hat{\beta}_i - \beta_{i0})/\sigma_{\hat{\beta}_i}}{\mathbb{S}_{\hat{\beta}_i}/\sigma_{\hat{\beta}_i}} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{1}{n - k} \chi_{n-k}^2}} \sim \mathbb{T}(n - k),$$

որտեղ

$$Z = (\hat{\beta}_i - \beta_{i0})/\sigma_{\hat{\beta}_i} \sim \mathbb{N}(0, 1),$$

$$\mathbb{S}_{\hat{\beta}_i}/\sigma_{\hat{\beta}_i} = \mathbb{S}/\sigma = \sqrt{\frac{1}{n - k} \chi_{n-k}^2} \quad \left(\chi_{n-k}^2 = (n - k) \mathbb{S}^2/\sigma^2 \sim \mathbb{H}^2(n - k) \right): \quad \blacksquare$$

Օգտվելով թեորեմ 12.7-ից՝ կստանանք $\mathbb{H}_0$ վարկածը ստուգող α մակարդակով երկկողմանի կրիտիկական բազմությունը՝

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \left\{ \mathbf{x}: \left| \frac{\hat{\beta}_i - \beta_{i0}}{\mathbb{S}_{\hat{\beta}_i}} \right| \geq t_{\alpha/2}(n-k) \right\}:$$

Նկատի ունենալով ցանկացած $\beta_i \in \mathcal{R}$ պարամետրի համար

$$T_i = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\mathbb{S}_{\hat{\beta}_i}} \sim \mathbb{T}(n-k)$$

պայմանը՝ կարելի է ստանալ $\gamma = 1 - \alpha$ մակարդակով երկկողմանի վստահության միջակայքը β_i -ի համար՝

$$P\left(\beta_i \in (\hat{\beta}_i \mp t_{\alpha/2}(n-k) \mathbb{S}_{\hat{\beta}_i})\right) = 1 - \alpha:$$

Դիտողություն 12.5: Գործնականում հետաքրքրություն է ներկայացնում

$$\mathbb{H}_0: \beta_i = 0$$

վարկածը ստուգելու խնդիրը, այսինքն՝ $\hat{\mathbf{X}}_i$ գործոնի նշանակալիության ստուգման հարցը: Համապատասխան վիճականին կլինի

$$t = \frac{\hat{\beta}_i}{\mathbb{S}_{\hat{\beta}_i}},$$

որը կոչվում է t –**վիճականի** և բերվում է բոլոր վիճակագրական փաթեթներում:

$$|t| > t_{\alpha/2}(n-k)$$

պայմանը վկայում է այն մասին, որ ռեգրեսիոն մոդելում $\hat{\mathbf{X}}_i$ գործոնն ունի α մակարդակով **նշանակալի** ազդեցություն:

2. Դիցուք ստուգվում է

$$\mathbb{H}_0: \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_k = 0$$

վարկածն ընդդեմ $\mathbb{H}_1$ երկընտրանքային վարկածի, որ **ոչ բոլոր** β_i գործակիցներն են հավասար 0-ի: Այս վարկածը թույլ է տալիս ստուգել **ամբողջ ռեգրեսիայի նշանակալիության** հարցը:

Սահմանենք հետևյալ վիճականի (F – վիճականի)՝

$$F = \frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(n-k)} = \frac{RSS/(k-1)}{ESS/(n-k)} = \frac{\frac{1}{k-1} \frac{\hat{\mathbf{Y}}_*^T \hat{\mathbf{Y}}_*}{\sigma^2}}{\frac{1}{n-k} \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{e}}{\sigma^2}} :$$

Թեորեմ 12.8: $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում F - վիճականին ունի $(k-1)$ և $(n-k)$ ազատության աստիճաններով **Ֆիշեր – Սնեդեկորի (F) բաշխում**՝

$$F \sim \mathbb{S}(k-1, n-k):$$

Ապացուցում: Ցույց տանք, որ

$$\frac{\hat{\mathbf{Y}}_*^T \hat{\mathbf{Y}}_*}{\sigma^2} \sim \mathbb{H}^2(k-1):$$

Համաձայն (12.21)-ի՝ ունենք՝

$$\hat{\mathbf{Y}}_* = \hat{\mathbf{Y}} - \bar{\bar{\mathbf{Y}}} \mathbf{1} = \hat{\mathbf{Y}} - \bar{\mathbf{Y}} \mathbf{1} = \mathbf{N}\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}} \mathbf{1}: \quad (12.26)$$

Մյուս կողմից՝

$$\bar{\mathbf{Y}} \mathbf{1} = \frac{1}{n} (\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T) \mathbf{Y} = \mathbb{P} \mathbf{Y} \quad \left(\mathbb{P} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \right): \quad (12.27)$$

Քանի որ $\mathbb{P}$ մատրիցը **համաչափ** է և **իդեմպոտենտ** (պրոեկցիոն մատրից է), ապա (12.27)-ից հետևում է, որ այն $\mathbf{1}$ վեկտորի վրա **օրթոգոնալ պրոեկտման** մատրից է (թեորեմ Հ. 23-ը): Այժմ ձևափոխենք (12.26) արտահայտությունը՝

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Y}}_* &= \mathbf{N}\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}} \mathbf{1} = (\mathbf{N} - \mathbb{P})\mathbf{Y} = (\mathbf{N} - \mathbb{P})(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) = (\mathbf{N} - \mathbb{P}) \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{N} - \mathbb{P})\boldsymbol{\varepsilon} = \\ &= (\mathbf{X} - \mathbb{P}\mathbf{X})\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{N} - \mathbb{P})\boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (12.28)$$

(այստեղ օգտագործվեց $\mathbf{N}\mathbf{X} = \mathbf{X}$ հատկությունը (տե՛ս թեորեմ 12.3 գ)):

Դժվար չէ տեսնել, որ (12.28) -ում բերված $\mathbf{X}^* := \mathbf{X} - \mathbb{P}\mathbf{X}$ մատրիցի առաջին սյունը կազմված է 0-ներից: Այնպես որ, $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում, կստանանք՝

$$\mathbb{X}^* \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & X_{12}^* & \dots & X_{1k}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & X_{n2}^* & \dots & X_{nk}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot \beta_1 + X_{12}^* \cdot \beta_2 + \dots + X_{1k}^* \cdot \beta_k \\ \vdots \\ 0 \cdot \beta_1 + X_{n2}^* \cdot \beta_2 + \dots + X_{nk}^* \cdot \beta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}:$$

Հետևաբար՝ (12.28)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\hat{\mathbf{Y}}_* = (\mathbf{N} - \mathbb{P})\boldsymbol{\varepsilon}:$$

Համաձայն թեորեմ 12.3-ի՝ $\mathbf{N}$ -ը **համաչափ** և **իդեմպոտենտ** մատրից է, և $\text{tr}(\mathbf{N}) = k$: Մյուս կողմից ակնհայտ է, որ $\mathbf{N} - \mathbb{P}$ մատրիցը **համաչափ** է: Բացի այդ, պարզ է, որ

$$\mathbb{P}\mathbf{N}\mathbf{Y} = \mathbb{P}\hat{\mathbf{Y}} = \frac{1}{n}(\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T)\hat{\mathbf{Y}} = \bar{\mathbf{Y}}\mathbf{1} = \bar{\mathbf{Y}}\mathbf{1} = \mathbb{P}\mathbf{Y}:$$

Այստեղից՝ քանի որ $\mathbf{Y}$ -ը կամայական վեկտոր է $\mathcal{R}^n$ -ից, ապա

$$\mathbb{P}\mathbf{N} = \mathbb{P}: \quad (12.29)$$

Այնուհետև, օգտվելով (12.29)-ից և $\mathbf{N}$ ու $\mathbb{P}$ մատրիցների **իդեմպոտենտությունից**, կստանանք՝

$$\begin{aligned} (\mathbf{N} - \mathbb{P})^2 &= (\mathbf{N} - \mathbb{P})(\mathbf{N} - \mathbb{P}) = \mathbf{N}^2 - \mathbf{N}\mathbb{P} - \mathbb{P}\mathbf{N} + \mathbb{P}^2 = \\ &= \mathbf{N} - \mathbf{N}\mathbb{P} - \mathbb{P} + \mathbb{P} = \mathbf{N} - \mathbf{N}\mathbb{P}: \end{aligned}$$

Այստեղից, հաշվի առնելով նաև $\mathbf{N}$ և $\mathbb{P}$ մատրիցների **համաչափությունը**, կունենանք՝

$$(\mathbf{N} - \mathbb{P})^2 = \mathbf{N} - \mathbf{N}\mathbb{P} = \mathbf{N} - \mathbf{N}^T \mathbb{P}^T = \mathbf{N} - (\mathbb{P}\mathbf{N})^T = \mathbf{N} - \mathbb{P}^T = \mathbf{N} - \mathbb{P}:$$

Այսպիսով, $\mathbf{N} - \mathbb{P}$ մատրիցը **իդեմպոտենտ** է և **համաչափ**, ուստի այն **պրոեկցիոն** մատրից է, ու համաձայն պնդում Հ. 14-ի և թեորեմ 12.3-ի՝

$$\text{rank}(\mathbf{N} - \mathbb{P}) = \text{tr}(\mathbf{N} - \mathbb{P}) = \text{tr}(\mathbf{N}) - \text{tr}(\mathbb{P}) = k - 1:$$

Այժմ կիրառելով թեորեմ Հ. 45 -ը՝ կստանանք՝

$$\frac{\hat{\mathbf{Y}}_*^T \hat{\mathbf{Y}}_*}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \boldsymbol{\varepsilon}^T (\mathbf{N} - \mathbb{P})^T (\mathbf{N} - \mathbb{P}) \boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\varepsilon}/\sigma)^T (\mathbf{N} - \mathbb{P}) (\boldsymbol{\varepsilon}/\sigma) \sim \mathbb{H}^2(k - 1):$$

Մյուս կողմից, ըստ թեորեմ 12.4-ի դ) կետի՝

$$(\mathbf{e}^T \mathbf{e})/\sigma^2 \sim \mathbb{H}^2(n - k):$$

Բացի այդ, համաձայն թեորեմ 12.4-ի գ) կետի, $\mathbf{e}$ և $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ վիճականիներն **անկախ** են, այնպես որ $\mathbf{F}$ – վիճականին ունի $(k-1)$ և $(n-k)$ ազատության աստիճաններով **Ֆիշեր – Մենդելկորի** ($\mathbf{F}$ –) **բաշխում**: ■

Այսպիսով, H_0 վարկածը α նշանակալիության մակարդակով կհերքվի, եթե $\mathbf{F}$ – վիճականու ընդունած $f = F(\omega_0)$ արժեքը բավարարի

$$f > S_{\alpha}(k-1, n-k)$$

պայմանը, որտեղ $S_{\alpha}(k-1, n-k)$ -ն **$\mathbf{F}$ -բաշխման** կրիտիկական արժեքն է:

Դիտողություն 12.6: (12.29) պայմանը նշանակում է, որ $\mathbf{Y} \in \mathcal{R}^n$ վեկտորի հաջորդական **օրթոգոնալ պրոեկտումը** սկզբում $\hat{\mathbf{X}}_1, \dots, \hat{\mathbf{X}}_k$ վեկտորներով ծնված $\boldsymbol{\pi}$ հարթության վրա ($\mathbf{N}\mathbf{Y} \in \boldsymbol{\pi}$ (տե՛ս թեորեմ Հ. 24)), այնուհետև $\mathbf{1}$ վեկտորի վրա ($\mathbf{P}\mathbf{N}\mathbf{Y}$) համընկնում է $\mathbf{1}$ վեկտորի վրա $\mathbf{Y}$ վեկտորի $\mathbf{P}\mathbf{Y}$ (տե՛ս թեորեմ Հ. 23) **օրթոգոնալ պրոեկցիայի** հետ (երեք ուղղահայացների վերաբերյալ թեորեմ):

3. Այժմ դիտարկենք **ընդհանուր տեսքի գծային սահմանափակումների** վարկածը՝

$$\mathbb{H}_0: \mathbb{R}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r},$$

որտեղ $\mathbb{R}$ -ը $q \times k$ -չափանի **հայտնի** մատրից է, $\boldsymbol{\beta}$ -ն՝ ռեգրեսիոն մոդելի $k \times 1$ - չափանի **անհայտ** գործակիցների վեկտոր, $\mathbf{r}$ -ը՝ տրված $q \times 1$ -չափանի **հայտնի** հաստատունների վեկտոր:

Ընդհանրապես բնական է համարել, որ սահմանափակումների q թիվը **չի գերազանցում** պարամետրերի k թիվը, և բոլոր սահմանափակումները **գծայնորեն անկախ** են, այսինքն՝ $q \leq k$ և $\text{rank}(\mathbb{R}) = q$:

Թեորեմ 12.9: $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում

$$F = \frac{(\mathbb{R} \hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{r})^T [\mathbb{R}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbb{R}^T]^{-1} (\mathbb{R} \hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{r}) / q}{\mathbf{e}^T \mathbf{e} / (n - k)} \sim \mathcal{S}(q, n - k) \quad (12.30)$$

Ա պ ա զ ու զ ու մ: Համաձայն թեորեմ 12.4-ի ա) կետի՝ ունենք՝

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} \sim \mathbb{N}_k(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}):$$

Այստեղից (տե՛ս (Հ.37))՝ հետևում է

$$\mathbb{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{r} \sim \mathbb{N}_q(\mathbb{R}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{r}, \boldsymbol{\Sigma}),$$

որտեղ $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{V}(\mathbb{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{r}) = \mathbb{V}(\mathbb{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbb{R}\mathbb{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})\mathbb{R}^T = \sigma^2\mathbb{R}(\mathbb{X}^T\mathbb{X})^{-1}\mathbb{R}^T$: Այժմ կիրառելով թեորեմ Հ. 34-ը և հաշվի առնելով $\mathbb{H}_0$ վարկածը՝ կստանանք՝

$$\chi_q^2 = (\mathbb{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{r})^T [\mathbb{R}(\mathbb{X}^T\mathbb{X})^{-1}\mathbb{R}^T]^{-1}(\mathbb{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{r})/\sigma^2 \sim \mathbb{H}^2(q):$$

Մյուս կողմից, համաձայն թեորեմ 12.4-ի դ) կետի՝

$$\chi_{n-k}^2 = (\mathbf{e}^T\mathbf{e})/\sigma^2 \sim \mathbb{H}^2(n-k),$$

և քանի որ $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ և $\mathbf{e}$ վիճականիներն **անկախ** են (տե՛ս թեորեմ 12.4-ի գ) կետը), ապա

$$F = \frac{1}{q} \chi_q^2 / \frac{1}{n-k} \chi_{n-k}^2 \sim \mathbb{S}(q, n-k): \quad \blacksquare$$

Համաձայն թեորեմի՝ $\mathbb{H}_0$ վարկածը α նշանակալիության մակարդակով կհերքվի, եթե F – **վիճականու** ընդունած արժեքը $f > S_\alpha(q, n-k)$: Այժմ, ներկայացնելով F – **վիճականին**

$$F = \frac{(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})^T \mathbb{R}^T [\mathbb{R}(\mathbb{X}^T\mathbb{X})^{-1}\mathbb{R}^T]^{-1} \mathbb{R}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})/q}{\mathbf{e}^T\mathbf{e}/(n-k)} \sim \mathbb{S}(q, n-k)$$

տեսքով, $F < S_\alpha(q, n-k)$ պայմանով $\boldsymbol{\beta}$ պարամետրի համար որոշվում է $\gamma = 1 - \alpha$ մակարդակով **վստահության տիրույթը**:

Դիտողություն 12.7: Եթե $\mathbb{R} = \mathbb{E}_k$ ($q = k$), ապա F - **վիճականին** կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$F = \frac{(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})^T (\mathbb{X}^T\mathbb{X})(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})/k}{\mathbf{e}^T\mathbf{e}/(n-k)} \sim \mathbb{S}(k, n-k):$$

$F < S_\alpha(k, n-k)$ պայմանով որոշվող վստահության տիրույթը «**Էլիպսոիդ**» է:

Ստանանք (12.30)-ում սահմանված F – **վիճականու** մի այլ ներկայացում, որի համար անհրաժեշտ է գտնել $\mathbb{R}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r}$ գծային սահմանափա-

կումների դեպքում (12.2) ռեգրեսիոն մոդելի β պարամետրի համար նվազագույն քառակուսիների գնահատականը (տե՛ս *Седер* [13]):

Թեորեմ 12.10: $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում F – վիճականին բերվում է հետևյալ տեսքի՝

$$F = \frac{(\mathbf{e}_R^T \mathbf{e}_R - \mathbf{e}^T \mathbf{e})/q}{\mathbf{e}^T \mathbf{e}/(n - k)} \sim S(q, n - k), \quad (12.31)$$

որտեղ $\mathbf{e}_R = \mathbf{Y} - \mathbb{X} \hat{\beta}_R$ -ը $\mathbb{R} \beta = \mathbf{r}$ սահմանափակումների դեպքում **ռեգրեսիայի մնացորդն է**, իսկ $\hat{\beta}_R$ -ը՝ համապատասխան նվազագույն քառակուսիների գնահատականը:

Ա պ ա ղ ու ղ ու մ: Գտնենք $\mathbb{R} \beta = \mathbf{r}$ գծային սահմանափակումների դեպքում

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{Y} - \mathbb{X} \beta)^T (\mathbf{Y} - \mathbb{X} \beta)$$

ռեգրեսիայի սխալների քառակուսիների գումարի մինիմումը: Օգտվենք **Լագրանժի Բազմապատկիչների** մեթոդից: Դիտարկենք

$$\mathbf{q}_i^T \beta = r_i, \quad i = 1, \dots, q, \quad \mathbf{r} = \|r_1, \dots, r_q\|^T$$

գծային սահմանափակումների համակարգը, որտեղ $\mathbf{q}_i^T$ -ն $\mathbb{R}$ մատրիցի i -րդ տողն է:

Ներկայացնելով

$$\sum \lambda_i (\mathbf{q}_i^T \beta - r_i) = \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbb{R} \beta - \mathbf{r}) = (\beta^T \mathbb{R}^T - \mathbf{r}^T) \boldsymbol{\lambda}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \|\lambda_1, \dots, \lambda_q\|^T$$

տեսքով, դիտարկենք **լագրանժիանը**՝

$$H(\boldsymbol{\lambda}; \beta) = \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} + (\beta^T \mathbb{R}^T - \mathbf{r}^T) \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbb{R} \beta - \mathbf{r}):$$

Մինիմումի անհրաժեշտ պայմանը բերում է հետևյալ համակարգին (տե՛ս սահմանում Հ. 25)՝

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbb{R} \beta - \mathbf{r} = \mathbf{0}, \\ \frac{\partial H}{\partial \beta} = -2 \mathbb{X}^T \mathbf{Y} + 2 \mathbb{X}^T \mathbb{X} \beta + \mathbb{R}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}: \end{cases}$$

Նշանակելով այս համակարգի լուծումները $\hat{\beta}_R$ -ով և $\hat{\lambda}_R$ -ով՝ կստանանք՝

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_R &= (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \mathbf{Y} - \frac{1}{2} (\mathbb{X} \mathbb{X}^T)^{-1} \mathbb{R}^T \hat{\lambda}_R = \hat{\beta} - \frac{1}{2} (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{R}^T \hat{\lambda}_R, \\ &\quad - \frac{1}{2} \hat{\lambda}_R = [\mathbb{R} (\mathbb{X} \mathbb{X}^T)^{-1} \mathbb{R}^T]^{-1} (\mathbf{r} - \mathbb{R} \hat{\beta}): \end{aligned} \quad (12.32)$$

այնուհետև, տեղադրելով $\hat{\lambda}_R$ -ի այս արժեքը (12.32) բանաձևի մեջ, կունենանք՝

$$\hat{\beta}_R = \hat{\beta} + (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{R}^T [\mathbb{R} (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{R}^T]^{-1} (\mathbf{r} - \mathbb{R} \hat{\beta}): \quad (12.33)$$

$\mathbb{R} \hat{\beta} = \mathbf{r}$ սահմանափակումների դեպքում ռեգրեսիայի մնացորդը կլինի՝

$$\mathbf{e}_R = \mathbf{Y} - \mathbb{X} \hat{\beta}_R = \mathbf{Y} - \mathbb{X} \hat{\beta} - \mathbb{X} (\hat{\beta}_R - \hat{\beta}) = \mathbf{e} - \mathbb{X} (\hat{\beta}_R - \hat{\beta}):$$

Այստեղից, նկատի ունենալով $\mathbf{e}^T \mathbb{X} = \mathbf{0}^T$ պայմանը (հետևանք 12.1), կստանանք՝

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_R^T \mathbf{e}_R &= [\mathbf{e} - \mathbb{X} (\hat{\beta}_R - \hat{\beta})]^T [\mathbf{e} - \mathbb{X} (\hat{\beta}_R - \hat{\beta})] = \\ &= \mathbf{e}^T \mathbf{e} + (\hat{\beta}_R - \hat{\beta})^T \mathbb{X}^T \mathbb{X} (\hat{\beta}_R - \hat{\beta}): \end{aligned} \quad (12.34)$$

Որտեղից, օգտվելով (12.33)-ից, վերջնական կստանանք՝

$$\mathbf{e}_R^T \mathbf{e}_R - \mathbf{e}^T \mathbf{e} = (\mathbf{r} - \mathbb{R} \hat{\beta})^T [\mathbb{R} (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{R}^T]^{-1} (\mathbf{r} - \mathbb{R} \hat{\beta}) := \chi_q^2 \quad (12.35)$$

(տե՛ս թեորեմ 12.9-ի ապացույցը): Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն 12.8: Թեորեմ 12.10-ում բերված (12.31) պայմանը կարելի է ներկայացնել նաև հետևյալ տեսքով՝

$$F = \frac{(ESS_R - ESS)/q}{ESS/(n - k)} \sim \mathbb{S}(q, n - k), \quad (12.36)$$

որտեղ

$$ESS = \mathbf{e}^T \mathbf{e} = (\mathbf{Y} - \mathbb{X} \hat{\beta})^T (\mathbf{Y} - \mathbb{X} \hat{\beta})$$

առանց սահմանափակումների ռեգրեսիոն մոդելի մնացորդների քառակուսիների գումարն է, իսկ

$$ESS_R := \mathbf{e}_R^T \mathbf{e}_R = (\mathbf{Y} - \mathbb{X} \hat{\beta}_R)^T (\mathbf{Y} - \mathbb{X} \hat{\beta}_R)$$

$\mathbb{R}\beta = \mathbf{r}$ գծային սահմանափակումներով ռեգրեսիոն մոդելի մնացորդների քառակուսիների գումարը:

(12.36)-ում բերված F – վիճականին կարելի է արտահայտել նաև **դետերմինացիայի գործակիցների** միջոցով՝

$$F = \frac{(R^2 - R_R^2)/q}{(1 - R^2)/(n - k)} \sim \mathbb{S}(q, n - k),$$

որտեղ

$$R_R^2 := 1 - \frac{ESS_R}{TSS} \quad (TSS_R = TSS)$$

$\mathbb{R}\beta = \mathbf{r}$ գծային սահմանափակումներով ռեգրեսիոն մոդելի **դետերմինացիայի գործակիցն** է:

4. Այժմ ուսումնասիրենք գործնականում շատ կիրառվող ընդհանուր գծային սահմանափակումներով ռեգրեսիոն մոդելի մասնավոր դեպքը (տես՝ [10]):

Դիցուք ստուգվում է

$$\mathbb{H}_0: \beta_{k-q+1} = \beta_{k-q+2} = \dots = \beta_k = 0, \quad k > q$$

վարկածը: Պարզ է, որ այն $\mathbb{R}\beta = \mathbf{r}$ գծային սահմանափակումներով վարկածի մասնավոր դեպքն է, որտեղ

$$\mathbb{R} = \left\| \begin{array}{cc|cc} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hline & \underbrace{\quad k-q \quad} & \underbrace{\quad q \quad} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right\| = \|\mathbf{0}_{q \times (k-q)} \mathbb{E}_q\|$$

$q \times k$ -չափանի մատրից է՝ տրոհված $q \times (k - q)$ -չափանի $\mathbf{0}_{q \times (k-q)}$ 0-ական և $q \times q$ -չափանի $\mathbb{E}_q$ միավոր **բլոկ** մատրիցների, իսկ $\mathbf{r} = \mathbf{0}_{q \times 1}$ ՝ $q \times 1$ -չափանի 0-ական վեկտոր է:

Ներկայացնենք

$$\mathbb{X} = \|\mathbb{X}_1 \mathbb{X}_2\| \text{-ով}$$

$\mathbb{X}$ մատրիցի տրոհումը $n \times (k - q)$ և $n \times q$ -չափանի $\mathbb{X}_1$ և $\mathbb{X}_2$ **բլոկ մատրիցների**, $\beta_1 = \|\beta_1, \dots, \beta_{k-q}\|^T$, $\beta_2 = \|\beta_{k-q+1}, \dots, \beta_k\|^T$: $\widehat{\beta}_1$ -ով և $\widehat{\beta}_2$ -ով նշանակենք $\mathbf{Y} = \mathbb{X}_1 \beta_1 + \varepsilon$ և $\mathbf{Y} = \mathbb{X}_2 \beta_2 + \varepsilon$ ռեգրեսիոն մոդելների β_1 և β_2

գործակիցների նվազագույն քառակուսիների գնահատականները: Պարզ է, որ

$$\mathbb{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbb{X}_1\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 + \mathbb{X}_2\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2,$$

որտեղ

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 \\ \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \end{bmatrix}.$$

Այնուհետև նշանակենք՝

$$\mathbb{A} = \mathbb{X}^T \mathbb{X} = \begin{bmatrix} \mathbb{X}_1^T \\ \mathbb{X}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{X}_1 & \mathbb{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{X}_1^T \mathbb{X}_1 & \mathbb{X}_1^T \mathbb{X}_2 \\ \mathbb{X}_2^T \mathbb{X}_1 & \mathbb{X}_2^T \mathbb{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{12} \\ \mathbb{A}_{21} & \mathbb{A}_{22} \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}^{11} & \mathbb{A}^{12} \\ \mathbb{A}^{21} & \mathbb{A}^{22} \end{bmatrix},$$

որտեղ (տե՛ս թեորեմ Հ. 27-ը)

$$\mathbb{A}^{11} = (\mathbb{A}_{11} - \mathbb{A}_{12}\mathbb{A}_{22}^{-1}\mathbb{A}_{21})^{-1}, \quad \mathbb{A}^{22} = (\mathbb{A}_{22} - \mathbb{A}_{21}\mathbb{A}_{11}^{-1}\mathbb{A}_{12})^{-1},$$

$$\mathbb{A}^{12} = -\mathbb{A}_{11}^{-1}\mathbb{A}_{12}\mathbb{A}^{22}, \quad \mathbb{A}^{21} = -\mathbb{A}_{22}^{-1}\mathbb{A}_{21}\mathbb{A}^{11}:$$

Լեմմա 12.2: $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում ճիշտ է

$$\mathbf{e}_R^T \mathbf{e}_R - \mathbf{e}^T \mathbf{e} = \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2^T \mathbb{X}_2^T \mathbb{M}_1 \mathbb{X}_2 \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2$$

ներկայացումը, որտեղ $\mathbb{M}_1 = \mathbb{E}_n - \mathbb{X}_1(\mathbb{X}_1^T \mathbb{X}_1)^{-1} \mathbb{X}_1^T$ -ն պրոեկցիոն մատրից է:

Ապացուցում: Օգտվելով

$$\mathbb{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{q \times (k-q)} & \mathbb{E}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 \\ \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2 \end{bmatrix} = \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2$$

պայմանից և (12.35) ներկայացումից՝ $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում, կստանանք՝

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_R^T \mathbf{e}_R - \mathbf{e}^T \mathbf{e} &= (\mathbf{r} - \mathbb{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}})^T [\mathbb{R}(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{R}^T]^{-1} (\mathbf{r} - \mathbb{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \\ &= \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2^T [\mathbb{R}(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{R}^T]^{-1} \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2: \end{aligned} \quad (12.37)$$

Մյուս կողմից՝ ունենք՝

$$\mathbb{R}(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{R}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{q \times (k-q)} & \mathbb{E}_q \end{bmatrix} \mathbb{A}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{q \times (k-q)} \\ \mathbb{E}_q \end{bmatrix} =$$

$$= \|\mathbf{0}_{q \times (k-q)}\| \|\mathbb{E}_q\| \left\| \begin{pmatrix} \mathbb{A}^{11} & \mathbb{A}^{12} \\ \mathbb{A}^{21} & \mathbb{A}^{22} \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{q \times (k-q)} \\ \mathbb{E}_q \end{pmatrix} \right\| = \|\mathbb{A}^{21} \mathbb{A}^{22}\| \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{q \times (k-q)} \\ \mathbb{E}_q \end{pmatrix} \right\| = \mathbb{A}^{22};$$

Այստեղից՝

$$[\mathbb{R}(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{R}^T]^{-1} = (\mathbb{A}^{22})^{-1} = \mathbb{A}_{22} - \mathbb{A}_{21} \mathbb{A}_{11}^{-1} \mathbb{A}_{12},$$

այնպես որ (12.37)-ից կունենանք՝

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_R^T \mathbf{e}_R - \mathbf{e}^T \mathbf{e} &= \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2^T (\mathbb{A}^{22})^{-1} \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2 = \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2^T (\mathbb{X}_2^T \mathbb{X}_2 - \mathbb{X}_2^T \mathbb{X}_1 (\mathbb{X}_1^T \mathbb{X}_1)^{-1} \mathbb{X}_1^T \mathbb{X}_2) \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2 = \\ &= \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2^T \mathbb{X}_2^T [\mathbb{E}_n - \mathbb{X}_1 (\mathbb{X}_1^T \mathbb{X}_1)^{-1} \mathbb{X}_1^T] \mathbb{X}_2 \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2 = \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2^T \mathbb{X}_2^T \mathbb{M}_1 \mathbb{X}_2 \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2: \end{aligned}$$

$\mathbb{M}_1$ մատրիցի **համաչափությունը** և **իդեմպոտենտությունը** ապացուցվում են այնպես, ինչպես թեորեմ 12.3-ի ա) կետում: ■

$\mathbf{e}_R = \mathbf{Y} - \mathbb{X} \widehat{\boldsymbol{\beta}}_R$ վեկտորը կոչվում է $\mathbb{R} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{r}$ «**սահմանափակումներով**» (**restricted**) (12.2) ռեգրեսիայի մնացորդների վեկտոր, իսկ $\mathbf{e}^* = \mathbf{Y} - \mathbb{X}_1 \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1$ ՝ «**կարճ**» (միայն $\mathbb{X}_1$ -ի վրա) ռեգրեսիայի համար մնացորդների վեկտոր: Ընդհակառակն, $\mathbf{e} = \mathbf{Y} - \mathbb{X} \widehat{\boldsymbol{\beta}}$ -ը կոչվում է «**առանց սահմանափակումների**» («**երկար**») ռեգրեսիայի (**unrestricted**) մնացորդների վեկտոր:

Լեմմա 12.3: $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում ճիշտ է

$$\mathbf{e}_R^T \mathbf{e}_R = (\mathbf{Y} - \mathbb{X} \widehat{\boldsymbol{\beta}}_R)^T (\mathbf{Y} - \mathbb{X} \widehat{\boldsymbol{\beta}}_R) = (\mathbf{Y} - \mathbb{X}_1 \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1)^T (\mathbf{Y} - \mathbb{X}_1 \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1) = (\mathbf{e}^*)^T \mathbf{e}^*$$

հավասարությունը:

Ապացուցում: Ըստ սահմանման՝ ունենք՝

$$\mathbf{e}^* = \mathbf{Y} - \mathbb{X}_1 \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 = (\mathbb{E}_n - \mathbb{X}_1 (\mathbb{X}_1^T \mathbb{X}_1)^{-1} \mathbb{X}_1^T) \mathbf{Y} = \mathbb{M}_1 \mathbf{Y},$$

և նկատելով, որ

$$\mathbf{Y} = \mathbb{X} \widehat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{e} = \|\mathbb{X}_1 \mathbb{X}_2\| \left\| \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 \\ \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2 \end{pmatrix} \right\| + \mathbf{e} = \mathbb{X}_1 \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 + \mathbb{X}_2 \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2 + \mathbf{e},$$

ապա

$$\mathbf{e}^* = \mathbb{M}_1 \mathbf{Y} = \mathbb{M}_1 (\mathbb{X}_1 \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 + \mathbb{X}_2 \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2 + \mathbf{e}) = \mathbb{M}_1 \mathbb{X}_2 \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2 + \mathbf{e}$$

(այստեղ $\mathbb{M}_1 \mathbb{X}_1 \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 = \mathbf{0}$ և $\mathbb{M}_1 \mathbf{e} = (\mathbb{E}_n - \mathbb{X}_1 (\mathbb{X}_1^T \mathbb{X}_1)^{-1} \mathbb{X}_1^T) \mathbf{e} = \mathbf{e}$, քանի որ, ըստ հետևանք 12.1-ի, $\mathbb{X}^T \mathbf{e} = \mathbf{0}$):

Այսպիսով, վերջնական կստանանք՝

$$(\mathbf{e}^*)^T \mathbf{e}^* = (\mathbf{e} + \mathbb{M}_1 \mathbb{X}_2 \hat{\boldsymbol{\beta}}_2)^T (\mathbf{e} + \mathbb{M}_1 \mathbb{X}_2 \hat{\boldsymbol{\beta}}_2) = \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbb{M}_1 \mathbb{X}_2 \hat{\boldsymbol{\beta}}_2 + \hat{\boldsymbol{\beta}}_2^T \mathbb{X}_2^T \mathbb{M}_1^T \mathbf{e} + \\ + \hat{\boldsymbol{\beta}}_2^T \mathbb{X}_2^T \mathbb{M}_1^T \mathbb{M}_1 \mathbb{X}_2 \hat{\boldsymbol{\beta}}_2 = \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \hat{\boldsymbol{\beta}}_2^T \mathbb{X}_2^T \mathbb{M}_1^T \mathbb{M}_1 \mathbb{X}_2 \hat{\boldsymbol{\beta}}_2$$

(այստեղ $\mathbb{X}_2^T \mathbf{e} = \mathbf{0}$ և $\mathbb{M}_1$ -ը **պրոեկցիոն** մատրից է):

Այժմ ապացույցն անմիջապես հետևում է լեմմա 12.2-ից: ■

Թեորեմ 12.10-ից և լեմմա 12.3-ից կստանանք՝

Թեորեմ 12.11: $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում

$$F = \frac{((\mathbf{e}^*)^T \mathbf{e}^* - \mathbf{e}^T \mathbf{e})/q}{\mathbf{e}^T \mathbf{e}/(n-k)} \sim \mathbb{S}(q, n-k):$$

5. Դիտարկենք $\mathbb{H}_0: \mathbb{R}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r}$ զծային սահմանափակումների վարկածի ստուգման մի այլ մասնավոր դեպք՝

$$\mathbb{H}_0: \mathbf{c}^T \boldsymbol{\beta} = m \quad (m = \text{const}),$$

որտեղ $q \times k$ -չափանի $\mathbb{R}$ մատրիցը փոխարինվում է $\mathbf{c}^T = \|c_1, \dots, c_k\|$ տող վեկտորով, այսինքն՝ $q = 1$: Վարկածը ստուգվում է $\mathbb{S}(1, n-k)$ - բաշխում ունեցող F - **վիճականու** օգնությամբ (տե՛ս (12.30)):

$\mathbb{H}_0$ վարկածը կարելի է ստուգել նաև՝ օգտագործելով t - **վիճականին**: Տեղի ունի հետևյալ պնդումը՝

Թեորեմ 12.12: Եթե ճիշտ է $\mathbb{H}_0$ վարկածը, ապա

$$t = \frac{\mathbf{c}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} - m}{s \sqrt{\mathbf{c}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{c}}} \sim \mathbb{T}(n-k):$$

Ա պ ա զ ու ը մ: Քանի որ, ըստ ենթադրության, դիտարկվում է **նորմալ** ռեգրեսիոն մոդելը, ապա

$$\mathbf{c}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} \sim \mathbb{N}(\mathbf{c}^T \boldsymbol{\beta}, \sigma_{\mathbf{c}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}}^2),$$

որտեղ $\sigma_{\mathbf{c}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}}^2 := \text{var}(\mathbf{c}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{c}^T \mathbb{V}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \mathbf{c} = \sigma^2 \mathbf{c}^T (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbf{c}$:

Այստեղից՝ $\text{var}(\mathbf{c}^T \hat{\boldsymbol{\beta}})$ ցրվածքի գնահատականը կլինի

$$s_{\mathbf{c}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}}^2 := \widehat{\sigma_{\mathbf{c}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}}^2} = \widehat{\text{var}}(\mathbf{c}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}) = \widehat{\sigma^2} \mathbf{c}^T (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbf{c} = s^2 \mathbf{c}^T (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbf{c},$$

որտեղ

$$s^2 = \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{e}}{n - k} :$$

Ակնհայտ է, որ

$$\mathbf{c}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}^T \boldsymbol{\beta} \sim \mathbb{N}(0, \sigma_{\mathbf{c}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}}^2):$$

Դիտարկենք

$$\mathfrak{t} = \frac{\mathbf{c}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}^T \boldsymbol{\beta}}{s_{\mathbf{c}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}}} = \frac{(\mathbf{c}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}^T \boldsymbol{\beta}) / \sigma_{\mathbf{c}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}}}{s_{\mathbf{c}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}} / \sigma_{\mathbf{c}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}}}$$

վիճականին: Քանի որ

$$\frac{s_{\mathbf{c}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}}}{\sigma_{\mathbf{c}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}}} = \frac{s}{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n - k} \chi_{n-k}^2},$$

որտեղ (տե՛ս թեորեմ 12.4 դ))

$$\chi_{n-k}^2 = (n - k) s^2 / \sigma^2 \sim \mathbb{H}^2(n - k),$$

ապա

$$\mathfrak{t} = \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{1}{n - k} \chi_{n-k}^2}} \sim \mathbb{T}(n - k),$$

որտեղ

$$\xi_0 = \frac{\mathbf{c}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}^T \boldsymbol{\beta}}{\sigma_{\mathbf{c}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}}} \sim \mathbb{N}(0, 1):$$

Այսպիսով, թեորեմն ապացուցվեց:

Դիտողություն 12.9: Այստեղ քննարկվող դեպքի համար F – **վիճականին** (տե՛ս (12.30)) ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$F = \frac{(\mathbf{c}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{m})^T [\mathbf{c}^T (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbf{c}]^{-1} (\mathbf{c}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{m})}{s^2} \sim \mathbb{S}(1, n - k),$$

որտեղից պարզ է, որ $F = \mathfrak{t}^2$: Հետևաբար՝ $\mathbb{H}_0$ վարկածը կարելի է ստուգել՝ կիրառելով ինչպես F – **վիճականին**, այնպես էլ $\mathfrak{t}$ – **վիճականին**:

Օրինակ 12.1 (Չոուի (Chow) հայտանիշը): Դիցուք տրված է $(\mathbf{X}')_n = \|\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n\|$ և $(\mathbf{X}'')_m = \|\mathbf{X}_{n+1}, \dots, \mathbf{X}_{n+m}\|$ երկու բազմաչափ նմուշ՝ $\mathbf{X}_i = \|1, X_{i2}, \dots, X_{ik}\|^T$, $i = 1, \dots, n$, $\mathbf{X}_{n+j} = \|1, X_{n+j2}, \dots, X_{n+jk}\|^T$, $j = 1, \dots, m$: Կառուցված են այդ նմուշներին համապատասխանող **H 1.** և **H 3.** պայմանները բավարարող ռեգրեսիոն մոդելները՝

$$Y_i = \beta'_1 + \beta'_2 X_{i2} + \dots + \beta'_k X_{ik} + \varepsilon'_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (12.38)$$

$$Y_i = \beta''_1 + \beta''_2 X_{i2} + \dots + \beta''_k X_{ik} + \varepsilon''_i, \quad i = n+1, \dots, n+m, \quad (12.39)$$

որտեղ $\varepsilon'_i \sim N(0, \sigma')$ և $\varepsilon''_i \sim N(0, \sigma'')$ միմյանցից անկախ պատահական մեծություններ են: Նշանակենք համապատասխան ռեգրեսիոն մատրիցները՝

$$\mathbb{X}' = \begin{bmatrix} 1 & X_{12} & \dots & X_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & X_{n2} & \dots & X_{nk} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{X}'' = \begin{bmatrix} 1 & X_{n+12} & \dots & X_{n+1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & X_{n+m2} & \dots & X_{n+m k} \end{bmatrix},$$

և $\mathbb{X} = \begin{bmatrix} \mathbb{X}' \\ \mathbb{X}'' \end{bmatrix}$, $\mathbf{X}^{n+m} = \|\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{n+m}\|$ միացյալ նմուշին համապատասխանող բոլոր մատրիցը: Նշանակենք, բացի այդ՝

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}' &= \|\beta'_1, \dots, \beta'_k\|^T, \quad \boldsymbol{\beta}'' = \|\beta''_1, \dots, \beta''_k\|^T, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}' \\ \boldsymbol{\beta}'' \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}' &= \|\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_k\|^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon}'' = \|\varepsilon''_{n+1}, \dots, \varepsilon''_{n+m}\|^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}' \\ \boldsymbol{\varepsilon}'' \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Y}' &= \|Y_1, \dots, Y_n\|^T, \quad \mathbf{Y}'' = \|Y_{n+1}, \dots, Y_{n+m}\|^T: \end{aligned}$$

Այդ նշանակումների օգնությամբ (12.38) և (12.39) մոդելները կներկայացվեն համապատասխանաբար

$$\mathbf{Y}' = \mathbb{X}' \boldsymbol{\beta}' + \boldsymbol{\varepsilon}' \quad (1) \quad \text{և} \quad \mathbf{Y}'' = \mathbb{X}'' \boldsymbol{\beta}'' + \boldsymbol{\varepsilon}'' \quad (2) \quad (12.40)$$

տեսքով, որտեղ $\boldsymbol{\varepsilon}' \sim N_k(\mathbf{0}, \sigma'^2 \mathbf{E}_k)$ և $\boldsymbol{\varepsilon}'' \sim N_m(\mathbf{0}, \sigma''^2 \mathbf{E}_m)$ միմյանցից անկախ վեկտորներ են:

Դիտարկվում է

$$\mathbb{H}_0: \boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\beta}'', \quad \sigma' = \sigma''$$

վարկածը ստուգելու խնդիրը: Այսինքն՝ պահանջվում է պարզել՝ **նոյնն** է, թե՞ **ոչ** այդ մոդելներին համապատասխանող $\mathbf{Y}$ -ների (**արձագանքների**)

կախվածությունը **նույնատիպ** գործոններից (այսինքն՝ պարզել՝ **համընկնո՞ւմ** են, թե՞ **ոչ** այդ ռեգրեսիոն մոդելները):

Որպես օրինակ դիտարկենք **աշխատավարձի** (Y) կախվածությունը X_j , $j = 1, \dots, k$ գործոններից (ռեգրեսորներից), որոնք են, օրինակ, տարիքը, աշխատանքային ստաժը, կրթությունը և այլն: Պահանջվում է պարզել՝ տարբերվո՞ւմ է, թե՞ **ոչ** **տղամարդկանց** և **կանանց** միջև այդ կախվածությունը:

Այժմ այս խնդիրը բերենք գծային սահմանափակումների վարկածի ստուգման խնդրի տեսքին:

Առանց սահմանափակումների (**unrestricted**) ռեգրեսիան այստեղ (12.38) և (12.39) ռեգրեսիաներն են, որի համար մնացորդների քառակուսիների գումարն է՝

$$\mathbf{e}^T \mathbf{e} = (\mathbf{e}')^T \mathbf{e}' + (\mathbf{e}'')^T \mathbf{e}''$$

կամ

$$ESS = (ESS)' + (ESS)'',$$

որտեղ $\mathbf{e}' = \mathbf{Y}' - \mathbb{X}' \hat{\boldsymbol{\beta}}'$ -ը և $\mathbf{e}'' = \mathbf{Y}'' - \mathbb{X}'' \hat{\boldsymbol{\beta}}''$ -ը (12.40) ռեգրեսիաների մնացորդներն են, իսկ $\hat{\boldsymbol{\beta}}'$ -ը և $\hat{\boldsymbol{\beta}}''$ -ը՝ $\boldsymbol{\beta}'$ և $\boldsymbol{\beta}''$ պարամետրերի նվազագույն քառակուսիների գնահատականները: Պարզ է, որ $(\mathbf{e}')^T \mathbf{e}'$ անդամի ազատությունների աստիճանը հավասար է $(n - k)$ -ի, իսկ $(\mathbf{e}'')^T \mathbf{e}''$ անդամինը՝ $(m - k)$ -ի, այնպես որ $\mathbf{e}^T \mathbf{e}$ անդամի ազատությունների աստիճանը կլինի $(n - k) + (m - k) = n + m - 2k$:

$\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում $\mathbf{Y} = \mathbb{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ **սահմանափակումներով** (**restricted**) ռեգրեսիան $\boldsymbol{\beta}$ պարամետրը գնահատելուց հետո ընդունում է $\mathbf{Y} = \mathbb{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{e}_R$ տեսքը:

Նշանակենք՝ $ESS_R = \mathbf{e}_R^T \mathbf{e}_R$: Քանի որ $\mathbb{H}_0$ վարկածը պարունակում է $\boldsymbol{\beta}$ պարամետրի վերաբերյալ k հատ սահմանափակում, ապա (տե՛ս թերեմ 12.10)՝

$$F = \frac{(\mathbf{e}_R^T \mathbf{e}_R - \mathbf{e}^T \mathbf{e})/k}{\mathbf{e}^T \mathbf{e}/(n + m - 2k)} = \frac{(ESS_R - ESS)/k}{ESS/(n + m - 2k)} \sim \mathcal{S}(k, n + m - 2k):$$

Հետևաբար՝ α նշանակալիության մակարդակով $\mathbb{H}_0$ վարկածը կհերքվի, եթե F – վիճականու ընդունած արժեքը գերազանցի F – բաշխման կրիտիկական արժեքը՝

$$f > S_\alpha(k, n + m - 2k):$$

Խնդիրներ

12.9. Դիցուք տրված է $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ նորմալ ռեգրեսիոն մոդելը:

Դիտարկումների արդյունքում ստացվել են հետևյալ տվյալները՝

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 33 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 20 \\ 0 & 20 & 60 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}^T \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 132 \\ 24 \\ 92 \end{bmatrix}, \quad \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = 150:$$

ա) Ստանալ $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ռեգրեսիայի հավասարումը,

բ) ստուգել 0.05 մակարդակով β_2 գործակցի նշանակալիությունը:

Պատասխան՝ ա) $\hat{y}_i = 4 - 0.2 X_{i1} + 1.6 X_{i2}$, բ) β_2 գործակիցը նշանակալի է:

12.10. Դիտարկվում է $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ նորմալ ռեգրեսիոն մոդելը, ընդ որում՝ $\mathbb{V}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 2\mathbb{E}_n$: Հայտնի է, որ

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ և } \hat{\beta}_1 = 3, \hat{\beta}_2 = 2:$$

ա) Կառուցել 95 %-ng վստահության միջակայքը $\theta = \beta_1 + \beta_2$ պարամետրի համար,

բ) կառուցել 95 %-ng վստահության տիրույթը $\boldsymbol{\beta}$ վեկտորի համար:

Ցուցում՝ ա) օգտվել $\mathbf{c}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}^T \boldsymbol{\beta} \sim \mathbb{N}\left(0, \sigma_{\mathbf{c}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}}^2\right)$ պայմանից, որտեղ $\mathbf{c}^T = (1, 1)$,

բ) օգտվել $\hat{\boldsymbol{\beta}} \sim \mathbb{N}_k(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1})$ պայմանից:

Պատասխան՝ ա) $\theta \in (3.45, 6.55)$, բ) $\boldsymbol{\beta} \in \{(\beta_1, \beta_2)^T: 5(\beta_1 - 3)^2 + 4(\beta_1 - 3)(\beta_2 - 2) + 4(\beta_2 - 2)^2 < 11.984\}$:

12.11. Տրված է $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ նորմալ գծային ռեգրեսիոն մոդելը: Ստուգել α նշանակալիության մակարդակով հետևյալ վարկածները՝

ա) $\mathbb{H}_0: \beta_2 + \beta_3 = 1$, բ) $\mathbb{H}_0: \beta_3 = \beta_4$:

Պատասխան՝ վարկածը հերքվում է, եթե

$$|t| > t_{\alpha/2}(n-k), \quad t := T(\omega_0) \text{՝ ա) } T = \frac{\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 - 1}{S(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3)}, \quad \text{բ) } T = \frac{\hat{\beta}_3 - \hat{\beta}_4}{S(\hat{\beta}_3 - \hat{\beta}_4)} :$$

12.12. Դիտարկվում են երկու **նորմալ** գծային ռեգրեսիոն մոդելներ: Հաշվարկների արդյունքում ստացվել է՝

$$(\mathbb{X}')^T \mathbb{X}' = \begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 20 & 25 \end{bmatrix}, \quad (\mathbb{X}')^T \mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{Y}')^T \mathbf{Y}' = 30,$$

$$(\mathbb{X}'')^T \mathbb{X}'' = \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}, \quad (\mathbb{X}'')^T \mathbf{Y}'' = \begin{bmatrix} 8 \\ 20 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{Y}'')^T \mathbf{Y}'' = 24:$$

Ստուգել՝ **համընկնում** են, թե՞ **ոչ** 0.05 մակարդակով այդ երկու մոդելները:

Պատասխան՝ մոդելները համընկնում են:

§ 12.6. Կանխատեսումներ ռեգրեսիոն մոդելներում

Ռեգրեսիայի տեսության կարևոր խնդիրներից է **անկախ** փոփոխականների որոշակի արժեքների դեպքում գնահատել (կանխատեսել) **կախյալ** փոփոխականը: Տարբերվում է երկու տեսակի կանխատեսում՝ **կետային** և **միջակայքային**: **Կետային** կանխատեսման դեպքում գտնվում է կախյալ փոփոխականի համար «ճշգրիտ» գնահատականը, **միջակայքային** կանխատեսման դեպքում փնտրվում է միջակայք, որում նախապես տրված վստահության մակարդակով պետք է գտնվի կախյալ փոփոխականի իրական արժեքը: Բացի այդ, տարբերում են **ոչ պայմանական** և **պայմանական կանխատեսումների դեպք**՝ կախված այն հանգամանքից, թե անկախ փոփոխականի արժեքները ճշգրիտ հայտնի՞ են, թե՞ տրված են որոշակի սխալներով:

Դիցուք տրված է

$$\mathbf{Y} = \mathbb{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{12.41}$$

դասական ռեգրեսիոն մոդելը, որտեղ $\mathbf{Y}$ -ը՝ $n \times 1$ -չափանի **կախյալ** փոփոխականների վեկտոր է, $\mathbf{X}$ -ը՝ $n \times k$ -չափանի **անկախ** փոփոխականների մատրից, $\boldsymbol{\varepsilon}$ -ը՝ $n \times 1$ -չափանի **սխալների** վեկտոր, $\boldsymbol{\beta}$ -ն՝ $k \times 1$ -չափանի **պարամետրերի** վեկտոր:

Ենթադրվում է, որ բավարարվում են **H 1.** և **H 2.** պայմանները: Դիցուք, բացի այդ, տրված է

$$\mathbf{X}_{n+1} = \|X_{n+1,1}, \dots, X_{n+1,k}\|^T$$

բացատրող փոփոխականների վեկտոր, և հայտնի է, որ համապատասխան Y_{n+1} կախյալ փոփոխականը բավարարում է (12.41) ռեգրեսիոն մոդելը, այսինքն՝

$$Y_{n+1} = \mathbf{X}_{n+1}^T \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_{n+1}, \quad (12.42)$$

որտեղ $E(\varepsilon_{n+1}) = 0$, $\text{var}(\varepsilon_{n+1}) = \sigma^2$ և $\text{cov}(\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_j) = 0$, $j = 1, \dots, n$:

Պահանջվում է $(\mathbf{Y}, \mathbf{X}, \mathbf{X}_{n+1})$ տվյալների օգնությամբ կանխատեսել Y_{n+1} -ը:

Ոչ պայմանական կանխատեսում

Կետային կանխատեսում

Ենթադրենք, որ բացատրող փոփոխականների $\mathbf{X}_{n+1}$ վեկտորը ճշգրիտ հայտնի է:

ա) Եթե $\boldsymbol{\beta}$ և σ^2 պարամետրերի արժեքները **հայտնի** են, ապա, որպես Y_{n+1} -ի $\hat{Y} := \hat{Y}_{n+1}$ կանխատեսում, բնական է վերցնել

$$\hat{Y} = E(Y_{n+1}) = \mathbf{X}_{n+1}^T \boldsymbol{\beta}:$$

Կանխատեսման **միջին քառակուսային սխալը** հավասար է

$$\text{MSE}(\hat{Y}) = E(Y_{n+1} - \hat{Y})^2 = E(\varepsilon_{n+1}^2) = \sigma^2:$$

Եթե լրացուցիչ ենթադրենք, որ

$$\varepsilon_{n+1} = Y_{n+1} - \hat{Y} \sim N(0, \sigma^2)$$

սխալն ունի **նորմալ** բաշխում, ապա $(1 - \alpha)$ մակարդակով **կանխատեսման միջակայքը** Y_{n+1} -ի համար կլինի $(\hat{Y} - \sigma z_{\alpha/2}, \hat{Y} + \sigma z_{\alpha/2})$ միջակայքը:

բ) Այժմ դիցուք β և σ^2 պարամետրերն **անհայտ** են: Դիտարկենք (12.41) մոդելի β պարամետրի նվազագույն քառակուսիների գնահատականը և σ^2 պարամետրի անշեղ գնահատականը՝

$$\widehat{\beta} = (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \mathbf{Y} \text{ և } \widehat{\sigma^2} = s^2 = \frac{1}{n-k} \mathbf{e}^T \mathbf{e} = \frac{1}{n-k} (\mathbf{Y} - \mathbb{X} \widehat{\beta})^T (\mathbf{Y} - \mathbb{X} \widehat{\beta}):$$

Որպես Y_{n+1} -ի կետային կանխատեսում վերցնենք

$$\hat{Y} = \hat{Y}_{n+1} = \mathbf{X}_{n+1}^T \widehat{\beta} \quad (12.43)$$

վիճականին:

$\tilde{Y} = \varphi(\mathbf{Y}, \mathbb{X}, \mathbf{X}_{n+1})$ վիճականին կոչվում է **անշեղ** գնահատական Y_{n+1} -ի համար, եթե

$$E(\tilde{Y}) = E(Y_{n+1}):$$

Թեորեմ 12.13 (տե՛ս Թեորեմ 11.10): *Ըստ $\mathbf{Y}$ -ի զծային անշեղ գնահատականների՝*

$$\mathcal{L}_{Y_{n+1}}^0(\mathbf{Y}) = \{\tilde{Y} = \varphi(\mathbf{Y}, \mathbb{X}, \mathbf{X}_{n+1}): \tilde{Y} = \mathbf{c}^T \mathbf{Y} \text{ բոլոր } \mathbf{c}^T \in \mathcal{R}^n, E(\tilde{Y}) = E(Y_{n+1})\}$$

*դասում $\hat{Y} = \hat{Y}_{n+1} = \mathbf{X}_{n+1}^T \widehat{\beta}$ գնահատականը Y_{n+1} -ի համար **օպտիմալ** է նվազագույն միջին քառակուսային սխալի իմաստով, այսինքն՝*

$$E(\hat{Y} - Y_{n+1})^2 \leq E(\tilde{Y} - Y_{n+1})^2 \quad \forall \tilde{Y} \in \mathcal{L}_{Y_{n+1}}^0(\mathbf{Y}):$$

Ապացուցում: Ակնհայտ է, որ (12.43)-ում բերված $\hat{Y}$ վիճականին **անշեղ** գնահատական է Y_{n+1} -ի համար՝

$$E(\hat{Y}) = \mathbf{X}_{n+1}^T E(\widehat{\beta}) = \mathbf{X}_{n+1}^T \beta = E(Y_{n+1}):$$

Այժմ, դիցուք $\tilde{Y} \in \mathcal{L}_{Y_{n+1}}^0(\mathbf{Y})$ որոշակի **անշեղ** գնահատական է Y_{n+1} -ի համար: Պարզ է, որ

$$E(\tilde{Y}) = E(Y_{n+1}) = \mathbf{X}_{n+1}^T \beta:$$

Մյուս կողմից՝ ունենք՝

$$E(\tilde{Y}) = \mathbf{c}^T E(\mathbf{Y}) = \mathbf{c}^T \mathbb{X} \beta,$$

որտեղից՝

$$(\mathbf{X}_{n+1}^T - \mathbf{c}^T \mathbb{X})\boldsymbol{\beta} = 0:$$

Այս պայմանը տեղի ունի կամայական $\boldsymbol{\beta}$ -ի համար, եթե

$$\mathbf{c}^T \mathbb{X} = \mathbf{X}_{n+1}^T: \quad (12.44)$$

Ճիշտ է նաև հետևյալ նույնությունը՝

$$\begin{aligned} E[(\tilde{Y} - Y_{n+1})^2] &= E[(\tilde{Y} - \hat{Y})^2] + E[(\hat{Y} - Y_{n+1})^2] + \\ &+ 2E[(\tilde{Y} - \hat{Y})(\hat{Y} - Y_{n+1})]: \end{aligned} \quad (12.45)$$

Ցույց տանք, որ $E[(\tilde{Y} - \hat{Y})(\hat{Y} - Y_{n+1})] = 0$: Համաձայն (12.42)-ի և (12.43)-ի՝ ունենք՝

$$\begin{aligned} E[(\tilde{Y} - \hat{Y})(\hat{Y} - Y_{n+1})] &= \\ &= E(\mathbf{c}^T \mathbf{Y} \mathbf{X}_{n+1}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}) - E(\mathbf{X}_{n+1}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} \mathbf{X}_{n+1}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}) - E[\mathbf{c}^T \mathbf{Y} (\mathbf{X}_{n+1}^T \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_{n+1})] + \\ &+ E[\mathbf{X}_{n+1}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} (\mathbf{X}_{n+1}^T \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_{n+1})]: \end{aligned} \quad (12.46)$$

Առաջին գումարելին (12.46)-ի աջ մասում կլինի (տե՛ս (12.41), (12.44)) հավասար

$$\begin{aligned} E(\mathbf{c}^T \mathbf{Y} \mathbf{X}_{n+1}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}) &= E(\mathbf{c}^T \mathbf{Y} (\hat{\boldsymbol{\beta}})^T \mathbf{X}_{n+1}) = E(\mathbf{c}^T \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T \mathbb{X} (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbf{X}_{n+1}) = \\ &= \mathbf{c}^T [E(\mathbf{Y} \mathbf{Y}^T)] \mathbb{X} (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{c}^T (\sigma^2 \mathbb{E}_n + \mathbb{X} \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^T \mathbb{X}^T) \mathbb{X} (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbf{X}_{n+1} = \\ &= \sigma^2 \mathbf{c}^T \mathbb{X} (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbf{X}_{n+1} + \mathbf{c}^T \mathbb{X} \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^T \mathbb{X}^T \mathbb{X} (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbf{X}_{n+1} = \\ &= \sigma^2 \mathbf{X}_{n+1}^T (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbf{X}_{n+1} + \mathbf{X}_{n+1}^T \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_{n+1}: \end{aligned} \quad (12.47)$$

Երկրորդ գումարելիի համար (տե՛ս (12.9)) կստանանք՝

$$\begin{aligned} E(\mathbf{X}_{n+1}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} \mathbf{X}_{n+1}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}) &= \mathbf{X}_{n+1}^T \{E[\hat{\boldsymbol{\beta}} (\hat{\boldsymbol{\beta}})^T]\} \mathbf{X}_{n+1} = \\ &= \mathbf{X}_{n+1}^T \{E[(\boldsymbol{\beta} + (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{\beta}^T + \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbb{X} (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1})]\} \mathbf{X}_{n+1} = \\ &= \mathbf{X}_{n+1}^T (\boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^T + \sigma^2 (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1}) \mathbf{X}_{n+1} = \end{aligned}$$

$$= \mathbf{X}_{n+1}^T \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_{n+1} + \sigma^2 \mathbf{X}_{n+1}^T (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbf{X}_{n+1}: \quad (12.48)$$

Երրորդ գումարելին (տե՛ս (12.44)) կլինի

$$E[\mathbf{c}^T \mathbf{Y}(\mathbf{X}_{n+1}^T \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_{n+1})] = \mathbf{c}^T [E(\mathbf{Y})] \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{c}^T \mathbb{X} \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_{n+1}^T \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_{n+1}:$$

Չորրորդ գումարելին հավասար է

$$E[\mathbf{X}_{n+1}^T \widehat{\boldsymbol{\beta}} (\mathbf{X}_{n+1}^T \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_{n+1})] = \mathbf{X}_{n+1}^T [E(\widehat{\boldsymbol{\beta}})] \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_{n+1}^T \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_{n+1}: \quad (12.49)$$

Այժմ տեղադրելով (12.47) - (12.49) արտահայտությունները (12.46) բանաձևի մեջ՝ կստանանք՝

$$E[(\tilde{Y} - \hat{Y})(\hat{Y} - Y_{n+1})] = 0:$$

Այսպիսով (տե՛ս (12.45)), թեորեմն ապացուցված է:

Լեմմա 12.4 (տե՛ս Լեմմա 11.6-ը): Y_{n+1} -ի $\hat{Y} = \mathbf{X}_{n+1}^T \widehat{\boldsymbol{\beta}}$ գնահատականի միջին քառակուսային սխալն ունի հետևյալ ներկայացումը՝

$$\Delta^2 := \text{MSE}(\hat{Y}) = E[(Y_{n+1} - \hat{Y})^2] = \sigma^2 (1 + \mathbf{X}_{n+1}^T (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbf{X}_{n+1}): \quad (12.50)$$

Այսպիսով: Կատարելով ակնհայտ ձևափոխություններ և նկատի ունենալով $\text{cov}(\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_j) = 0, j = 1, \dots, n$ պայմանները (տե՛ս (12.9))՝ կստանանք՝

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\hat{Y}) &= E[(Y_{n+1} - \hat{Y})^2] = E[(\mathbf{X}_{n+1}^T \widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{X}_{n+1}^T \boldsymbol{\beta} - \varepsilon_{n+1})^2] = \\ &= E[(\mathbf{X}_{n+1}^T (\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) - \varepsilon_{n+1})^2] = \\ &= \mathbf{X}_{n+1}^T E[(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})^T] \mathbf{X}_{n+1} + E(\varepsilon_{n+1}^2) = \\ &= \mathbf{X}_{n+1}^T (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T [E(\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T)] \mathbb{X} (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbf{X}_{n+1} + \\ &+ E(\varepsilon_{n+1}^2) = \sigma^2 \mathbf{X}_{n+1}^T (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbf{X}_{n+1} + \sigma^2 = \sigma^2 (1 + \mathbf{X}_{n+1}^T (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbf{X}_{n+1}): \end{aligned}$$

Դիտողություն 12.10: Քանի որ σ^2 ցրվածքը սովորաբար **անհայտ** է, ապա, փոխարինելով (12.50)-ում σ^2 -ին իր s^2 գնահատականով, Y_{n+1} -ի

$\delta^2 := \widehat{\Delta^2}$ միջին քառակուսային սխալի գնահատականի համար կստանանք՝

$$\delta^2 = s^2(1 + \mathbf{X}_{n+1}^T(\mathbb{X}^T\mathbb{X})^{-1}\mathbf{X}_{n+1}): \quad (12.51)$$

Միջակայքային կանխատեսում

Թեորեմ 12.14 (տե՛ս թեորեմ 11.11-ը): Եթե (12.41) մոդելը բավարարում է **H 1.** և **H 3.** պայմանները (նորմալ ռեգրեսիոն մոդել է), և $\varepsilon_{n+1} \sim \mathbb{N}(0, \sigma^2)$, ապա

$$\mathfrak{t} = \frac{Y_{n+1} - \hat{Y}}{\delta} \sim \mathbb{T}(n - k)$$

վիճականին ունի $(n - k)$ ազատության աստիճաններով **Ստյուդենտի (t -) բաշխում**:

Ապացուցում: Ակնհայտ է, որ

$$\hat{Y} \sim \mathbb{N}(\mathbf{X}_{n+1}^T\boldsymbol{\beta}, \mathbb{V}(\hat{Y})),$$

որտեղ $\mathbb{V}(\hat{Y}) = \mathbf{X}_{n+1}^T \mathbb{V}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \mathbf{X}_{n+1} = \sigma^2 \mathbf{X}_{n+1}^T (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbf{X}_{n+1} = \Delta^2 - \sigma^2$: Այնպես որ՝

$$\hat{Y} \sim \mathbb{N}(\mathbf{X}_{n+1}^T\boldsymbol{\beta}, \Delta^2 - \sigma^2):$$

Մյուս կողմից՝

$$Y_{n+1} \sim \mathbb{N}(\mathbf{X}_{n+1}^T\boldsymbol{\beta}, \sigma^2),$$

հետևաբար՝ քանի որ $\hat{Y}$ -ը և Y_{n+1} -ը անկախ են ($\text{cov}(\hat{Y}, Y_{n+1}) = 0$), ապա

$$Y_{n+1} - \hat{Y} \sim \mathbb{N}(0, \Delta^2),$$

որտեղից՝

$$\xi_0 = \frac{Y_{n+1} - \hat{Y}}{\Delta} \sim \mathbb{N}(0, 1): \quad (12.52)$$

Այնուհետև, նկատի ունենալով (12.50)-ը և (12.51)-ը, կստանանք՝

$$\frac{\delta}{\Delta} = \frac{s}{\sigma}, \quad (12.53)$$

իսկ քանի որ (տե՛ս թեորեմ 12.4-ի դ) կետը)

$$\chi_{n-k}^2 = (n-k) \frac{s^2}{\sigma^2} \sim \mathbb{H}^2(n-k),$$

ապա

$$\frac{s}{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-k} \chi_{n-k}^2} : \quad (12.54)$$

Այժմ ցույց տանք, որ

$$Y_{n+1} - \hat{Y} = -\mathbf{X}_{n+1}^T (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) + \varepsilon_{n+1} \text{ և } s^2 = \mathbf{e}^T \mathbf{e} / (n-k)$$

վիճականիներն **անկախ** են: Իրոք, ըստ թեորեմ 12.4-ի գ) կետի, $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ գնահատականն անկախ է s^2 վիճականուց, իսկ ε_{n+1} պատահական մեծությունը անկախ է $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T$ սխալների վեկտորից ($\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_{n+1}) = 0$): Բայց, քանի որ $\mathbf{e} = \mathbf{M}\boldsymbol{\varepsilon}$, ապա ε_{n+1} -ն անկախ է $\mathbf{e}$ վեկտորից, ուստի և՛ $s^2 = \mathbf{e}^T \mathbf{e} / (n-k)$ վիճականուց: Այնուհետև, նկատելով, որ $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\varepsilon}$ վեկտորն ու ε_{n+1} պատահական մեծությունն ունեն **համատեղ նորմալ բաշխում**, ապա $Y_{n+1} - \hat{Y}$ և s^2 վիճականիներն անկախ են:

Այսպիսով, քանի որ ξ_0 և χ_{n-k}^2 պատահական մեծություններն **անկախ** են, ապա (12.52), (12.53) և (12.54)-ից բխում է՝

$$t = \frac{Y_{n+1} - \hat{Y}}{\delta} = \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{1}{n-k} \chi_{n-k}^2}} \sim \mathbb{T}(n-k):$$

Դիտողություն 12.11: Թեորեմ 12.14-ից հետևում է, որ $\gamma = 1 - \alpha$ մակարդակով **վստահության միջակայքը** Y_{n+1} -ի համար $(\hat{Y} \mp \delta t_{\alpha/2}(n-k))$ միջակայքն է, այսինքն՝

$$P(\hat{Y} - \delta t_{\alpha/2}(n-k) < Y_{n+1} < \hat{Y} + \delta t_{\alpha/2}(n-k)) = 1 - \alpha:$$

Օրինակ 12.2: Զույգային գծային ռեգրեսիոն մոդելի դեպքում, օգտվելով լեմմա 12.4-ից, ստանանք Y_{n+1} -ի և $\hat{Y}$ -ի միջև $\Delta^2 = E(Y_{n+1} - \hat{Y})^2$ միջին քառակուսային շեղման բանաձևը (տե՛ս լեմմա 11.6-ը):

Դիցուք տրված է **H 1.** և **H 2.** պայմանները բավարարող

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (12.55)$$

զույգային գծային ռեգրեսիոն մոդելը: Նշանակենք $\mathbb{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{bmatrix}$ -ով $n \times 2$ -

չափանի ռեգրեսիոն մատրիցը, $\boldsymbol{\beta} = \|\beta_1, \beta_2\|^T$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \|\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\|^T$:

Ենթադրենք, բացի այդ, որ դիտվում է որոշակի X_{n+1} արժեք, որին համապատասխանող (անհայտ) Y_{n+1} արժեքը բավարարում է (12.55) մոդելին, որտեղ $E(\varepsilon_{n+1}) = 0$, $\text{var}(\varepsilon_{n+1}) = \sigma^2$ և $\text{cov}(\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_j) = 0, j = 1, \dots, n$: Նշանակենք $\hat{\mathbb{X}}_{n+1} = \|1, X_{n+1}\|^T$:

Այժմ $\mathbf{Y} = \mathbb{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ մոդելի համար կիրառենք լեմմա 12.4 -ը:

Նախ գտնենք $(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1}$ մատրիցը: Ունենք՝

$$\mathbb{X}^T \mathbb{X} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ X_1 & \dots & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix},$$

որտեղից՝

$$(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} = \frac{1}{n^2 S_X^2} \begin{bmatrix} \sum X_i^2 & -\sum X_i \\ -\sum X_i & n \end{bmatrix}:$$

Համաձայն (12.50) բանաձևի՝ գտնենք $\Delta^2 = E[(Y_{n+1} - \hat{Y})^2]$ միջին քառակուսային շեղումը: Ունենք՝

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{X}}_{n+1}^T (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \hat{\mathbb{X}}_{n+1} &= \frac{1}{n^2 S_X^2} \|1, X_{n+1}\| \begin{bmatrix} \sum X_i^2 & -\sum X_i \\ -\sum X_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ X_{n+1} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{n^2 S_X^2} \left\| \sum X_i^2 - X_{n+1} \sum X_i, -\sum X_i + n X_{n+1} \right\| \begin{bmatrix} 1 \\ X_{n+1} \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{n^2 S_X^2} \left(\sum X_i^2 - 2 X_{n+1} \sum X_i + n X_{n+1}^2 \right) = \\
 &= \frac{1}{n^2 S_X^2} \left(\sum X_i^2 - n(\bar{X})^2 + n(\bar{X})^2 - 2nX_{n+1}\bar{X} + nX_{n+1}^2 \right) = \\
 &= \frac{1}{n^2 S_X^2} (nS_X^2 + n(X_{n+1} - \bar{X})^2) = \frac{1}{n} + \frac{(X_{n+1} - \bar{X})^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} :
 \end{aligned}$$

Այսպիսով (տե՛ս (12.50))՝

$$\Delta^2 = E \left[(Y_{n+1} - \hat{Y})^2 \right] = \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_{n+1} - \bar{X})^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \right),$$

որը համընկնում է լեմմա 11.6-ում ստացված արտահայտության հետ:

Դիտողություն 12.12: H 1. և H 3. պայմանները բավարարվելու դեպքում (12.55) **նորմալ** ռեգրեսիոն մոդելի համար թեորեմ 12.14-ի տարբերակը պնդում է, որ

$$\mathbb{T} = \frac{Y_{n+1} - \hat{Y}}{\delta} \sim \mathbb{T}(n-2),$$

որտեղ

$$\hat{Y} = \hat{\mathbf{X}}_{n+1}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} = \|1, X_{n+1}\| \begin{Bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{Bmatrix} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{n+1},$$

$$\hat{\beta}_1 = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X}, \quad \hat{\beta}_2 = \frac{\sum X_i Y_i - n \bar{X} \bar{Y}}{\sum (X_i - \bar{X})^2},$$

$$\delta = s \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_{n+1} - \bar{X})^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2}}, \quad s^2 = \frac{1}{n-2} \sum (Y_i - \hat{Y})^2 :$$

Այստեղից հետևում է, որ $\gamma = 1 - \alpha$ մակարդակով **վստահության միջակայքը** Y_{n+1} -ի համար $(\hat{Y} - \delta t_{\alpha/2}(n-2), \hat{Y} + \delta t_{\alpha/2}(n-2))$ միջակայքն է:

Պայմանական կանխատեսում

Դիտարկվում է (12.41) ռեգրեսիոն մոդելը, բայց, ի տարբերություն նախորդ դեպքի, ենթադրենք, որ $\mathbf{X}_{n+1}$ փոփոխականի արժեքը ճշգրիտ

հայտնի չէ, և այն դիտվում է որոշակի **u** պատահական սխալի ճշտությամբ, այսինքն՝

$$\mathbf{z} = \mathbf{X}_{n+1} + \mathbf{u}: \quad (12.56)$$

Կրկին համարվում է, որ $\mathbf{X}_{n+1}$ -ը բավարարում է

$$Y_{n+1} = \mathbf{X}_{n+1}^T \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_{n+1} \quad (12.57)$$

պայմանը, որտեղ $E(\varepsilon_{n+1}) = 0$, $\text{var}(\varepsilon_{n+1}) = \sigma^2$ և $\text{cov}(\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_j) = 0$, $j = 1, \dots, n$: Դիցուք (12.56)-ում մասնակցող **u** սխալը $k \times 1$ – չափանի պատահական վեկտոր է, որն **անկախ** է $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1})^T$ վեկտորից, և $E(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, $V(\mathbf{u}) = \sigma_u^2 \mathbb{E}_k$:

Որպես Y_{n+1} -ի կանխատեսում դիտարկենք

$$\hat{Y} := \hat{Y}_{n+1} = \mathbf{z}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} \quad (12.58)$$

վիճականին: Նշանակենք $e = Y_{n+1} - \hat{Y}$ -ով **կանխատեսման սխալը**:

Թեորեմ 12.15: Դիցուք տրված է (12.41) *ռեգրեսիոն մոդելը*: Y_{n+1} արժեքի $\hat{Y}$ գնահատականը (կանխատեսումը) **անշեղ** է և ունի հետևյալ միջին քառակուսային սխալ՝

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= \text{MSE}(\hat{Y}) = E[(Y_{n+1} - \hat{Y})^2] = \\ &= \sigma^2(1 + \mathbf{X}_{n+1}^T (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbf{X}_{n+1} \sigma_u^2 \text{tr}[(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1}]) + \sigma_u^2 \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\beta}: \end{aligned} \quad (12.59)$$

Ապացուցում (տե՛ս [10]): Քանի որ **u** և $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ վեկտորներն **անկախ** են, և $E(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, ապա

$$\begin{aligned} E(e) &= E(\mathbf{z}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}) - \mathbf{X}_{n+1}^T \boldsymbol{\beta} = E[(\mathbf{X}_{n+1} + \mathbf{u})^T \hat{\boldsymbol{\beta}}] - \mathbf{X}_{n+1}^T \boldsymbol{\beta} = \\ &= \mathbf{X}_{n+1}^T \boldsymbol{\beta} + E(\mathbf{u}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}) - \mathbf{X}_{n+1}^T \boldsymbol{\beta} = 0: \end{aligned}$$

Այսինքն՝ Y_{n+1} արժեքի համար (12.58)-ում սահմանված $\hat{Y}$ գնահատականն **անշեղ** է:

Մյուս կողմից, հաշվի առնելով (12.56) - (12.58) բանաձևերը և

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \boldsymbol{\varepsilon}$$

ներկայացումը, կստանանք՝

$$\begin{aligned}
 \Delta^2 &= E \left[(Y_{n+1} - \hat{Y})^2 \right] = E \left[(\mathbf{z}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{X}_{n+1}^T \boldsymbol{\beta} - \varepsilon_{n+1})^2 \right] = \\
 &= E \left\{ [(\mathbf{X}_{n+1}^T + \mathbf{u}^T) \hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{X}_{n+1}^T \boldsymbol{\beta} - \varepsilon_{n+1}]^2 \right\} = \\
 &= E \left\{ [\mathbf{X}_{n+1}^T (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) + \mathbf{u}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} - \varepsilon_{n+1}]^2 \right\} = E \left\{ [\mathbf{X}_{n+1}^T (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{u}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} - \varepsilon_{n+1}]^2 \right\} : \\
 &\quad \text{Այժմ, նկատի ունենալով } \mathbf{u}\text{-ի և } (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1})^T\text{-ի անկախությունը,} \\
 &\quad \text{այստեղից կունենանք՝} \\
 \Delta^2 &= E[\mathbf{X}_{n+1}^T (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbb{X} (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbf{X}_{n+1}] + E[\mathbf{u}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} (\hat{\boldsymbol{\beta}})^T \mathbf{u}] + E(\varepsilon_{n+1}^2) + \\
 &+ E[\mathbf{X}_{n+1}^T (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{u}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}] = \sigma^2 \mathbf{X}_{n+1}^T (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbf{X}_{n+1} + E[\mathbf{u}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} (\hat{\boldsymbol{\beta}})^T \mathbf{u}] + \sigma^2 + \\
 &+ E[\mathbf{X}_{n+1}^T (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{u}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}] : \tag{12.60}
 \end{aligned}$$

Գտնենք $E[\mathbf{u}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} (\hat{\boldsymbol{\beta}})^T \mathbf{u}]$ և $E[\mathbf{X}_{n+1}^T (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{u}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}]$ արժեքները:

$$\begin{aligned}
 E[\mathbf{u}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} (\hat{\boldsymbol{\beta}})^T \mathbf{u}] &= E\{\mathbf{u}^T [\boldsymbol{\beta} + (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \boldsymbol{\varepsilon}] [\boldsymbol{\beta}^T + \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbb{X} (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1}] \mathbf{u}\} = \\
 &= E[\mathbf{u}^T \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{u}] + \sigma^2 E[\mathbf{u}^T (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbf{u}] = E[\mathbf{u}^T \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{u}] + \sigma^2 \sum_{i,j=1}^k c_{ij} E(u_i u_j) = \\
 &= \boldsymbol{\beta}^T [E(\mathbf{u} \mathbf{u}^T)] \boldsymbol{\beta} + \sigma^2 \sum_{i=1}^k c_{ii} E(u_i^2) = \\
 &= \sigma_u^2 \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\beta} + \sigma^2 \sigma_u^2 \text{tr}[(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1}] : \tag{12.61}
 \end{aligned}$$

Այստեղ նշանակված է՝ $(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} = \|c_{ij}\|_{i,j=1}^k$: Այնուհետև ունենք՝

$$\begin{aligned}
 E[\mathbf{X}_{n+1}^T (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \boldsymbol{\varepsilon} (\hat{\boldsymbol{\beta}})^T \mathbf{u}] &= E[\mathbf{X}_{n+1}^T (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbb{X} (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbf{u}] = \\
 &= \mathbf{X}_{n+1}^T (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \{E[\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbb{X} (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbf{u}]\} = 0,
 \end{aligned}$$

քանի որ $\boldsymbol{\varepsilon}$ և $\mathbf{u}$ վեկտորներն անկախ են: Այնպես որ, (12.60)-ից և (12.61)-ից կստանանք (12.59)-ը:

Դիտողություն 12.13: Այսպիսով, համեմատելով (12.59) բանաձևը (12.50) բանաձևի հետ, կարելի է եզրակացնել, որ անկախ փոփոխականում պատահական սխալի առկայության դեպքում կանխատեսման միջին քառակուսային (12.59) սխալը մեծանում է σ_u^2 արժեքին համեմատական երկու գումարելիներով:

Խնդիրներ

12.13. Տրված են $\mathbf{Y} = \mathbb{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ նորմալ զծային ռեգրեսիոն մոդելը և Y_0 , $\mathbf{X}_0 = \|X_{01}, \dots, X_{0k}\|^T$ լրացուցիչ դիտարկումներ: Ո՞ր վիճականու օգնությամբ կարելի է ստուգել՝ բավարարո՞ւմ են, թե՞ ոչ տրված մոդելին այդ դիտարկումները:

Պատասխան՝

$$t = \frac{\hat{Y}_0 - Y_0}{\delta}, \quad \hat{Y}_0 = \mathbf{X}_0^T \hat{\boldsymbol{\beta}}, \quad \delta = s \sqrt{1 + \mathbf{X}_0^T (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbf{X}_0}, \quad s^2 = \frac{1}{n - k} (\mathbf{Y} - \mathbb{X} \hat{\boldsymbol{\beta}})^T (\mathbf{Y} - \mathbb{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}):$$

12.14. Խնդիր 12.9-ի պայմաններում գտնել Y_0 -ի կանխատեսված $\hat{Y}_0$ արժեքը, երբ $X_{02} = -4$, $X_{03} = 2$ ($X_{01} = 1$): Գտնել նաև կանխատեսման միջին քառակուսային սխալը և 95 %-ոց վստահության միջակայքը:

Պատասխան՝ $\hat{Y}_0 = 8$, $\delta^2 = 0.82$, $Y_0 \in (6.15, 9.85)$:

§ 12.7. Ստոխաստիկ ռեգրեսորներ

Նախորդ դիտարկումներում ռեգրեսորները ենթադրվում էին **ոչ պատահական**: Սակայն հաճախ հանդիպում են այնպիսի դեպքեր, երբ ռեգրեսորները **պատահական մեծություններ** են: Օրինակ, երբ չափումների արդյունքում անկախ փոփոխականների արժեքները ստացվում են պատահական սխալներով:

Եվ այսպես, դիցուք դիտվում է

$$\mathbf{Y} = \mathbb{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

գծային **ստոխաստիկ** ռեգրեսիոն մոդելը, որտեղ $\mathbf{Y}$ -ը՝ $n \times 1$ -չափանի կախյալ փոփոխականների **պատահական** վեկտոր է, $\mathbf{X}$ -ը՝ $n \times k$ -չափանի **պատահական** տարրերով մատրից, $\boldsymbol{\varepsilon}$ -ը՝ $n \times 1$ -չափանի **պատահական սխալների** վեկտոր: Ենթադրվում է, որ տեղի ունեն հետևյալ **(H) – պայմանները**՝

$$\mathbf{H\ 1.}\ E(\boldsymbol{\varepsilon}|\mathbf{X}) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{H\ 2.}\ V(\boldsymbol{\varepsilon}|\mathbf{X}) = E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T|\mathbf{X}) = \sigma^2\mathbf{I}_n,$$

$$\mathbf{H\ 3.}\ P(\text{rank}(\mathbf{X}) = k) = 1$$

(այստեղ $E(\boldsymbol{\varepsilon}|\mathbf{X})$ -ը, ըստ $\mathbf{X}$ մատրիցի **պայմանական մաթեմատիկական սպասումն** է, իսկ $V(\boldsymbol{\varepsilon}|\mathbf{X})$ -ը՝ **պայմանական կովարիացիոն մատրիցը** (տե՛ս չ. 31, չ. 32)):

Նկատենք, որ **H 1.** և **H 2.** պայմանները համարժեք են

$$\mathbf{H\ 1'.}\ E(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta},$$

$$\mathbf{H\ 2'.}\ V(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) = \sigma^2\mathbf{I}_n \text{ պայմաններին:}$$

Դիտողություն 12.14: **H 1.** և **H 2.** պայմանները վերաբերում են $\mathbf{X}$ պատահական ռեգրեսիոն մատրիցի և $\boldsymbol{\varepsilon}$ սխալների վեկտորի **համատեղ բաշխմանը**: **H 1.** պայմանից, օրինակ, հետևում է, որ $\mathbf{X}$ մատրիցի և $\boldsymbol{\varepsilon}$ վեկտորի տարրերը **չկորելյացված** են: Իրոք, $E(\boldsymbol{\varepsilon}|\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ պայմանից հետևում է, որ $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = E(E(\boldsymbol{\varepsilon}|\mathbf{X})) = \mathbf{0}$, որտեղից՝

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_{ij}, \varepsilon_m) &= E(X_{ij}\varepsilon_m) = E(X_{ij}E(\varepsilon_m|\mathbf{X})) = 0, \\ i, m &= 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k: \end{aligned}$$

Հակառակ պնդումը ճիշտ չէ: Սակայն, եթե $\mathbf{X}$ -ը և $\boldsymbol{\varepsilon}$ -ը **անկախ** են, և $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}$, $E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T) = \sigma^2\mathbf{I}_n$, ապա **H 1.** և **H 2.** պայմանները բավարարվում են:

Այժմ դիցուք

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS} := \hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Y} = \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\boldsymbol{\varepsilon}$$

$\boldsymbol{\beta}$ պարամետրի (սովորական) **նվազագույն քառակուսիների գնահատականն** է, որը գոյություն ունի $\mathbf{X}$ պատահական մատրիցի կամայական իրագործման դեպքում (**H 3.** պայման), իսկ

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k} \mathbf{e}^T \mathbf{e}$$

σ^2 ցրվածքի գնահատականը, որտեղ

$$\mathbf{e} = \mathbf{Y} - \mathbb{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbb{M}\mathbf{Y} = (\mathbb{E}_n - \mathbb{X}(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T) \mathbf{Y}$$

մնացորդների վեկտորն է:

Դիտարկենք $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ վեկտորի կովարիացիոն մատրիցը՝

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= \mathbb{E} \left[(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})^T \right] = \mathbb{E} [(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbb{X} (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1}] = \\ &= \mathbb{E} [\mathbb{E}((\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbb{X} (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} | \mathbb{X})] = \mathbb{E} \{ (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T [\mathbb{E}(\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T | \mathbb{X})] \mathbb{X} (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \} = \\ &= \sigma^2 \mathbb{E}[(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1}] \end{aligned}$$

և նշանակենք՝

$$\hat{\mathbb{V}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \hat{\sigma}^2 \mathbb{E}[(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1}] \text{-ով}$$

դրա գնահատականը:

Լեմմա 12.5: Դիցուք բավարարվում են **H 1.** – **H 3.** պայմանները: Այդ դեպքում $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, $\hat{\sigma}^2$ և $\hat{\mathbb{V}}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ գնահատականները **պայմանական** (ըստ $\mathbb{X}$ -ի) **անշեղ են**, այսինքն՝

$$\mathbb{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}} | \mathbb{X}) = \boldsymbol{\beta}, \quad \mathbb{E}(\hat{\sigma}^2 | \mathbb{X}) = \sigma^2, \quad \mathbb{E}(\hat{\mathbb{V}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) | \mathbb{X}) = \mathbb{V}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2 \mathbb{E}[(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1}]:$$

Բացի այդ, ռեգրեսիայի մնացորդների $\mathbf{e}$ վեկտորը բավարարում է

$$\mathbb{E}(\mathbf{e} | \mathbb{X}) = \mathbf{0}, \quad \mathbb{V}(\mathbf{e} | \mathbb{X}) = \mathbb{V}(\mathbf{e}) = \sigma^2 \mathbb{M}, \quad \mathbb{E}(\mathbf{e}^T \mathbf{e} | \mathbb{X}) = \mathbb{E}(\mathbf{e}^T \mathbf{e}) = \sigma^2 \text{tr}(\mathbb{M})$$

պայմանները:

Ա պ ա ղ ու ղ ու մ: Պարզ ձևափոխություններ կատարելով՝ կստանանք՝

$$\mathbb{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}} | \mathbb{X}) = \boldsymbol{\beta} + \mathbb{E}((\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \boldsymbol{\varepsilon} | \mathbb{X}) = \boldsymbol{\beta} + (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \mathbb{E}(\boldsymbol{\varepsilon} | \mathbb{X}) = \boldsymbol{\beta},$$

$$\mathbb{V}(\hat{\boldsymbol{\beta}} | \mathbb{X}) = \mathbb{V}((\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \mathbf{Y} | \mathbb{X}) = (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \mathbb{V}(\mathbf{Y} | \mathbb{X}) \mathbb{X} (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} = \sigma^2 (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1}:$$

Մյուս կողմից՝

$$E(\hat{\mathbf{V}}(\hat{\boldsymbol{\beta}})|\mathbf{X}) = E(\hat{\sigma}^2 E[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}]|\mathbf{X}) = E(\hat{\sigma}^2|\mathbf{X}) E[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}]: \quad (12.62)$$

$E(\hat{\sigma}^2|\mathbf{X})$ պայմանական մաթ. սպասումը գտնելու համար նախօրոք գտնենք՝

$$E(\mathbf{e}|\mathbf{X}) = E(\mathbf{M}\mathbf{Y}|\mathbf{X}) = \mathbf{M}E(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) = \mathbf{M}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{e}|\mathbf{X}) = \mathbf{V}(\mathbf{M}\mathbf{Y}|\mathbf{X}) = \mathbf{M}\mathbf{V}(\mathbf{Y}|\mathbf{X})\mathbf{M}^T = \sigma^2 \mathbf{M}:$$

Այստեղից կստանանք՝

$$E(\mathbf{e}^T \mathbf{e}|\mathbf{X}) = \text{tr}[\mathbf{V}(\mathbf{e}|\mathbf{X})] = \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{M}):$$

Այսպիսով (տե՛ս թեորեմ 12.3 -ը), ունենք՝

$$E(\hat{\sigma}^2|\mathbf{X}) = \frac{1}{n-k} E(\mathbf{e}^T \mathbf{e}|\mathbf{X}) = \frac{\sigma^2}{n-k} \text{tr}(\mathbf{M}) = \sigma^2:$$

Վերջնականորեն (12.62)-ից կստանանք՝

$$E(\hat{\mathbf{V}}(\hat{\boldsymbol{\beta}})|\mathbf{X}) = \sigma^2 E[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}]:$$

Հետևանք 12.3: Ի 1. – Ի 3. *պայմանները բավարարվելու դեպքում $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, $\hat{\sigma}^2$ և $\hat{\mathbf{V}}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ գնահատականներն անշեղ են համապատասխան պարամետրերի համար նաև **ոչ** պայմանական իմաստով:*

Ա պ ա ց ու ց ում: Համաձայն պայմանական մաթ.սպասման հատկությունների՝ ունենք՝

$$E(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = E[E(\hat{\boldsymbol{\beta}}|\mathbf{X})] = E(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\beta},$$

$$E(\hat{\sigma}^2) = E[E(\hat{\sigma}^2|\mathbf{X})] = E(\sigma^2) = \sigma^2,$$

$$E[\hat{\mathbf{V}}(\hat{\boldsymbol{\beta}})] = E[E(\hat{\mathbf{V}}(\hat{\boldsymbol{\beta}})|\mathbf{X})] = E[\mathbf{V}(\hat{\boldsymbol{\beta}})] = \mathbf{V}(\hat{\boldsymbol{\beta}}): \quad \blacksquare$$

Ստոխաստիկ ռեգրեսիոն մոդելի համար ճիշտ է **Փառու – Մարկովի** թեորեմի տարբերակը:

Թեորեմ 12.16 (Գաուս – Մարկով): *Դիցուք ստոխաստիկ ռեգրեսիոն մոդելը բավարարում է H 1. – H 3. պայմանները: Այդ դեպքում β պարամետրի նվազագույն քառակուսիների $\hat{\beta} = (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \mathbf{Y}$ գնահատականը β պարամետրի բոլոր գծային (ըստ $\mathbf{Y}$ -ի) պայմանական անշեղ գնահատականների*

$\mathcal{L}_{\beta}^0(\mathbf{Y}) = \{ \beta^* : \beta^* = \mathbb{A} \mathbf{Y} \text{ (}\mathbb{A} \text{-ն կամայական } k \times n \text{-չափանի մատրից է)}, E(\beta^* | \mathbb{X}) = \beta \}$ դասում ունի «նվազագույն» պայմանական $\mathbb{V}(\hat{\beta} | \mathbb{X})$ կովարիացիոն մատրիցը (այսինքն՝ $\mathbb{V}(\beta^* | \mathbb{X}) - \mathbb{V}(\hat{\beta} | \mathbb{X}) \geq \mathbf{0}$ ոչ բացասական որոշյալ մատրից է):

Թեորեմն ապացուցվում է ինչպես թեորեմ 12.2-ը, միայն այն տարբերությամբ, որ բոլոր ոչ պայմանական մաթ. սպասումները և կովարիացիոն մատրիցները պետք է փոխարինել **պայմանականներով** (տե՛ս *Greene* [20]):

Նվազագույն քառակուսիների գնահատականի ունակությունը (տե՛ս *Greene* [20]):

Թեորեմ 12.17: *Դիցուք ստոխաստիկ ռեգրեսիոն մոդելը բավարարում է H1. – H3. պայմանները, և, բացի այդ, ճիշտ են նաև հետևյալ պայմանները՝*

C 1. *գոյություն ունի*

$$\frac{1}{n} \mathbb{X}^T \mathbb{X} \xrightarrow{P} \mathbb{A}, \quad n \rightarrow \infty$$

սահմանը, որտեղ $\mathbb{A}$ -ն $k \times k$ -չափանի դրական որոշյալ մատրից է,

C 2. *գոյություն ունի նաև հետևյալ սահմանը՝*

$$\frac{1}{n} \mathbb{X}^T \boldsymbol{\varepsilon} \xrightarrow{P} \mathbf{0} \in \mathcal{R}^k, \quad n \rightarrow \infty:$$

Այդ դեպքում β պարամետրի նվազագույն քառակուսիների $\hat{\beta}$ գնահատականն ունակ է:

Ապացուցում: Ներկայացնենք $\hat{\beta}$ գնահատականը հետևյալ ձևով՝

$$\hat{\beta} = \beta + \left(\frac{1}{n} \mathbb{X}^T \mathbb{X} \right)^{-1} \left(\frac{1}{n} \mathbb{X}^T \varepsilon \right):$$

Այժմ ապացույցը բխում է անընդհատության թեորեմներից (տե՛ս [15]):

Դիտողություն 12.15: Որոշ դեպքերում **C 1.** և **C 2.** պայմանները հեշտությամբ ստուգվում են: Օրինակ, դիցուք $\mathbb{X}$ մատրիցի տողերն անկախ են և ունեն միևնույն բաշխում, ռեգրեսիայի ε_i սխալներն անկախ են և միատեսակ բաշխված, ընդ որում՝ $E(\varepsilon_i) = 0$, և, բացի այդ, $\mathbb{X}$ -ը և ε -ը անկախ են: Նշանակենք՝

$$a_{ij} = E(X_{mi}X_{mj}), \quad i, j = 1, \dots, k, \quad A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^k:$$

Այդ դեպքում, կիրառելով **մեծ թվերի օրենքը**, կստանանք՝

$$\frac{1}{n} \mathbb{X}^T \mathbb{X} \xrightarrow{P} A, \quad n \rightarrow \infty,$$

որտեղ A մատրիցը **դրական որոշյալ** է: Նմանապես, ունենք՝

$$\frac{1}{n} \mathbb{X}^T \varepsilon \xrightarrow{P} \mathbf{0}, \quad n \rightarrow \infty,$$

քանի որ

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{ij} \varepsilon_i \xrightarrow{P} E(X_{1j} \varepsilon_1) = E(X_{1j})E(\varepsilon_1) = 0, \quad j = 1, \dots, k:$$

Դիտողություն 12.16: $\hat{\beta}$ գնահատականի ունակության համար իրականում բավական է պահանջել, որ բավարարվի միայն **C 1.** պայմանը: Իրոք, օգտվելով լեմմա 12.5-ից, ունենք՝

$$V(\hat{\beta}) = \sigma^2 E[(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1}] = \frac{1}{n} \sigma^2 E \left[\left(\frac{1}{n} \mathbb{X}^T \mathbb{X} \right)^{-1} \right] \rightarrow \mathbf{0}, \quad \text{երբ } n \rightarrow \infty:$$

Մյուս կողմից, քանի որ $E(\hat{\beta}) = \beta$, ապա, օգտվելով **ունակության հայտանիշից** (տե՛ս [15]), կստանանք՝

$$\hat{\beta}_n \xrightarrow{P} \beta, \quad n \rightarrow \infty:$$

Խնդիր

12.15. Ապացուցել *Գաուս – Մարկովի* թեորեմ 12.16-ը:

Ցուցում՝ տե՛ս թեորեմ 12.2-ի ապացուցումը:

§ 12.8. Ընդհանրացված նվազագույն քառակուսիների եղանակ

Դասական ռեգրեսիոն տեսությունում ենթադրվում էր, որ պատահական սխալները չկորելյացված են և ունեն միևնույն հաստատուն ցրվածք: Այդ ենթադրությունը, սակայն, դառնում է անիմաստ, երբ գործնականում պարզվում է, որ դիտվող մեծությունները բավականաչափ անհամասեռ են: Դա նշանակում է, որ դիտվող մեծությունների, հետևաբար և ռեգրեսիայի պատահական սխալների ցրվածքները հաստատուն չեն: Այդ երևույթը կոչվում է **հետերոսկեդաստիկություն (անհամասեռություն)**՝ ի տարբերություն **հոմոսկեդաստիկության (համասեռության)**՝ տարբեր դիտումների դեպքում ցրվածքների անփոփոխության):

Այսպիսով, իմաստ ունի ուսումնասիրել ռեգրեսիոն մոդելները, որոնց համար $V(\epsilon) = \sigma^2 E_n$ պայմանը տեղի չունի:

Դիտարկվում է այսպես կոչված **ընդհանրացված ռեգրեսիոն մոդելը**՝

$$Y = X\beta + \epsilon, \quad (12.63)$$

որտեղ Y -ը՝ $n \times 1$ -չափանի կախյալ փոփոխականների վեկտոր է, X -ը՝ $n \times k$ -չափանի անկախ փոփոխականների մատրից, β -ն՝ $k \times 1$ -չափանի անհայտ պարամետրերի վեկտոր, ϵ -ը՝ $n \times 1$ -չափանի պատահական սխալների վեկտոր:

Դիցուք այնուհետև բավարարվում են հետևյալ պայմանները՝

H*1. X -ը **ոչ պատահական** մատրից է, և $\text{rank}(X) = k$,

H*2. $E(\epsilon) = 0$,

H*3. $V(\epsilon) = \sigma^2 \Omega$, որտեղ Ω -ն $n \times n$ -չափանի **դրական որոշյալ** մատրից է:

Այժմ քննարկենք (12.63) մոդելի համար **սովորական** և **ընդհանրացված նվազագույն քառակուսիների** եղանակները (տե՛ս [10]):

1. Սովորական նվազագույն քառակուսիների եղանակ

Դիցուք

$$\hat{\beta}_{OLS} := \hat{\beta} = (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \mathbf{Y}$$

β պարամետրի **սովորական նվազագույն քառակուսիների գնահատականն** է,

$$\mathbf{e} = \mathbf{Y} - \mathbb{X}\hat{\beta} = \mathbf{M}\mathbf{Y} = (\mathbb{E}_n - \mathbb{X}(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T) \mathbf{Y}$$

մնացորդների վեկտորը:

Թեորեմ 12.18: Դիցուք (12.63) մոդելը բավարարում է **H*1.** – **H*3.** Պայմանները: Այդ դեպքում ճիշտ են հետևյալ ներկայացումները՝

$$\mathbb{E}(\hat{\beta}) = \beta, \quad \mathbb{V}(\hat{\beta}) = \sigma^2 (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \mathbf{\Omega} \mathbb{X} (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1},$$

$$\mathbb{E}(\mathbf{e}) = \mathbf{0}, \quad \mathbb{V}(\mathbf{e}) = \sigma^2 \mathbf{M} \mathbf{\Omega} \mathbf{M}, \quad \mathbb{E}(\mathbf{e}^T \mathbf{e}) = \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{M} \mathbf{\Omega}):$$

Ապացուցում: Պարզ է, որ

$$\mathbb{E}(\hat{\beta}) = \beta + (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \mathbb{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \beta:$$

Մյուս կողմից (տե՛ս Հ. 30) ունենք՝

$$\mathbb{V}(\hat{\beta}) = (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \mathbb{V}(\mathbf{Y}) \mathbb{X} (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} = \sigma^2 (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \mathbf{\Omega} \mathbb{X} (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} :$$

Մնացորդների վեկտորի համար (տե՛ս Հ. 2) կստանանք՝

$$\mathbb{E}(\mathbf{e}) = \mathbf{M} \mathbb{E}(\mathbf{Y}) = \mathbf{0}, \quad \mathbb{V}(\mathbf{e}) = \mathbf{M} \mathbb{V}(\mathbf{Y}) \mathbf{M}^T = \sigma^2 \mathbf{M} \mathbf{\Omega} \mathbf{M},$$

$$\mathbb{E}(\mathbf{e}^T \mathbf{e}) = \text{tr}[\mathbb{V}(\mathbf{e})] = \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{M} \mathbf{\Omega} \mathbf{M}) = \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{M}^2 \mathbf{\Omega}) = \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{M} \mathbf{\Omega}):$$

Դիտողություն 12.17: Եթե որպես $\mathbb{V}(\hat{\beta})$ կովարիացիոն մատրիցի գնահատական դիտարկենք $\hat{\mathbb{V}}(\hat{\beta}) = \widehat{\sigma^2} (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1}$ վիճականին, որտեղ

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n - k} \mathbf{e}^T \mathbf{e},$$

ապա

$$E[\hat{\mathbf{V}}(\hat{\boldsymbol{\beta}})] = \frac{1}{n-k} [E(\mathbf{e}^T \mathbf{e})](\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} = \frac{\sigma^2}{n-k} \text{tr}(\mathbf{M}\mathbf{\Omega})(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \neq \mathbf{V}(\hat{\boldsymbol{\beta}}),$$

այնպես որ, $\mathbf{V}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ կովարիացիոն մատրիցի $\hat{\mathbf{V}}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ գնահատականն **անշեղ** չէ:

Պատահական $\mathbf{X}$ մատրիցի դեպք

Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ (12.63) մոդելում $\mathbf{X}$ մատրիցը **պատահական** է, և մոդելը բավարարում է հետևյալ պայմանները՝

$$\mathbf{H}^* \mathbf{1}'. P(\text{rank}(\mathbf{X}) = k) = 1,$$

$$\mathbf{H}^* \mathbf{2}'. E(\boldsymbol{\varepsilon}|\mathbf{X}) = \mathbf{0},$$

$\mathbf{H}^* \mathbf{3}'. V(\boldsymbol{\varepsilon}|\mathbf{X}) = \sigma^2 \mathbf{\Omega}$, որտեղ $\mathbf{\Omega}$ -ն $n \times n$ -չափանի **դրական որոշյալ** մատրից է:

Ճիշտ է ունակության վերաբերյալ թեորեմ 12.17-ի հետևյալ տարբերակը.

Թեորեմ 12.19: *Եթե, բացի $\mathbf{H}^* \mathbf{1}'$. – $\mathbf{H}^* \mathbf{3}'$. պայմաններից, տեղի ունենան հետևյալ պայմանները՝*

$$\mathbf{C}^* \mathbf{1}'. \frac{1}{n} \mathbf{X}^T \mathbf{X} \xrightarrow{P} \mathbf{A}, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\mathbf{C}^* \mathbf{2}'. \frac{1}{n} \mathbf{X}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{X} \xrightarrow{P} \mathbf{B}, \quad n \rightarrow \infty,$$

*որտեղ $\mathbf{A}$ -ն և $\mathbf{B}$ -ն որոշակի դրական որոշյալ մատրիցներ են, ապա $\boldsymbol{\beta}$ պարամետրի նվազագույն քառակուսիների $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ գնահատականն **ունակ** է:*

Ապացուցում: $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ -ի կովարիացիոն մատրիցը ներկայացնենք հետևյալ ձևով՝

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= E[(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})^T] = E\{E[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} | \mathbf{X}]\} = \\ &= E[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T E(\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T | \mathbf{X}) \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}] = \sigma^2 E[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}] = \\ &= \frac{\sigma^2}{n} E\left[\left(\frac{1}{n} \mathbf{X}^T \mathbf{X}\right)^{-1} \left(\frac{1}{n} \mathbf{X}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{X}\right) \left(\frac{1}{n} \mathbf{X}^T \mathbf{X}\right)^{-1}\right]: \end{aligned}$$

Համաձայն $\mathbf{C}^*1'$. և $\mathbf{C}^*2'$. պայմանների՝ այստեղից կստանանք՝

$$\mathbb{V}(\hat{\beta}) \rightarrow \mathbf{0}, \quad n \rightarrow \infty:$$

Մյուս կողմից, քանի որ $E(\hat{\beta}) = \beta$, ապա, կիրառելով ունակության հայտանիշը (տե՛ս [15]), եզրակացնում ենք, որ $\hat{\beta}_n \xrightarrow{P} \beta$, $n \rightarrow \infty$:

Դիտողություն 12.18: Ի տարբերություն դասական ռեգրեսիոն մոդելների՝ այդ գնահատականը **չի լինի օպտիմալ Գաուս – Մարկովի** թեորեմի իմաստով: Օպտիմալ գնահատականը ստանալու համար անհրաժեշտ է կիրառել **ընդհանրացված նվազագույն քառակուսիների եղանակը**:

2. Ընդհանրացված նվազագույն քառակուսիների եղանակ

Թեորեմ 12.20 (Այթքեն): Դիցուք տրված է (12.63) **ընդհանրացված ռեգրեսիոն մոդելը**, որը բավարարում է $\mathbf{H}^*1. - \mathbf{H}^*3$. պայմանները: Այդ դեպքում β պարամետրի բոլոր գծային (ըստ $\mathbf{Y}$ -ի) անշեղ գնահատականների դասում

$$\hat{\beta}^* = (\mathbf{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{Y} \quad (12.64)$$

գնահատականը **օպտիմալ** է (այսինքն՝ դրա կովարիանցիոն մատրիցը այդ դասում «**մոքրագույն**» է):

Ապա ց ու ց ու մ: Ներկայացնենք $\hat{\beta}^*$ գնահատականը

$$\hat{\beta}^* = (\mathbf{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} (\mathbf{X}\beta + \varepsilon) = \beta + (\mathbf{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \varepsilon$$

տեսքով, որտեղից կստանանք՝

$$E(\hat{\beta}^*) = \beta + (\mathbf{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} E(\varepsilon) = \beta,$$

այսինքն՝ $\hat{\beta}^*$ -ը **անշեղ** գնահատական է β պարամետրի համար: Նկատենք, որ $\mathbf{\Omega}^{-1}$ մատրիցը **համաչափ** է և **դրական որոշյալ**: Իրոք՝

$$(\mathbf{\Omega}^{-1})^T = (\mathbf{\Omega}^T)^{-1} = \mathbf{\Omega}^{-1}$$

և կամայական $\mathbf{t} \in \mathcal{R}^n$ -ից վեկտորի համար՝

$$\mathbf{t}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{t} = \mathbf{t}^T (\boldsymbol{\Omega}^{-1})^T \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{t} = \mathbf{s}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{s} > 0 \quad (\boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{t} := \mathbf{s}),$$

քանի որ, ըստ $\mathbf{H}^* \mathbf{3}$ պայմանի, $\boldsymbol{\Omega}$ մատրիցը **համաչափ** է և **դրական որոշյալ**:

Այժմ ցույց տանք (տե՛ս Հ. 12, հատկություն 3-ը), որ գոյություն ունի այնպիսի $n \times n$ - չափանի **չվերասերված** $\mathbb{P}$ մատրից, որ

$$\mathbb{P}^T \mathbb{P} = \boldsymbol{\Omega}^{-1}; \quad (12.65)$$

Քանի որ $\boldsymbol{\Omega}^{-1}$ -ը **համաչափ** մատրից է, ապա (տե՛ս Հ. 9) գոյություն ունի այնպիսի **օրթոգոնալ** $\mathbb{S}$ մատրից, որ $\boldsymbol{\Omega}^{-1} = \mathbb{S}^T \boldsymbol{\Lambda} \mathbb{S}$, որտեղ $\boldsymbol{\Lambda}$ -ն անկյունագծային մատրից է, որի գլխավոր անկյունագծի վրա գտնվում են $\boldsymbol{\Omega}^{-1}$ մատրիցի λ_i , $i = 1, \dots, n$ սեփական արժեքները: $\boldsymbol{\Omega}^{-1}$ մատրիցի դրական որոշյալ լինելու պայմանից հետևում է, որ $\lambda_i > 0$, այնպես որ կարելի է սահմանել

$$\boldsymbol{\Lambda}^{1/2} = \text{diag} \left(\lambda_1^{1/2}, \dots, \lambda_n^{1/2} \right)$$

մատրիցը: Այժմ, վերցնելով $\mathbb{P} = \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \mathbb{S}$, կստանանք (12.65) ներկայացումը (նկատենք այստեղ, որ այդ ներկայացումը **միակը չէ**): Այնուհետև, կիրառելով

$$\mathbf{Y} = \mathbb{X} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

հավասարության երկու մասերի վրա ձախ կողմից $\mathbb{P}$ մատրիցը, կստանանք՝

$$\mathbb{P} \mathbf{Y} = \mathbb{P} \mathbb{X} \boldsymbol{\beta} + \mathbb{P} \boldsymbol{\varepsilon} : \quad (12.66)$$

Կատարելով $\mathbf{Y}^* = \mathbb{P} \mathbf{Y}$, $\mathbb{X}^* = \mathbb{P} \mathbb{X}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbb{P} \boldsymbol{\varepsilon}$ նշանակումները՝ (12.66)-ը կրեքվի

$$\mathbf{Y}^* = \mathbb{X}^* \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (12.67)$$

տեսքի: (12.65)-ից հետևում է, որ $\boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbb{P}^{-1} = \mathbb{P}^T$, ուստի

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}^*) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{V}(\boldsymbol{\varepsilon}^*) = \mathbf{V}(\mathbb{P} \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbb{P} \mathbf{V}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbb{P}^T = \sigma^2 \mathbb{P} \boldsymbol{\Omega} (\boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbb{P}^{-1}) = \sigma^2 \mathbf{E}_n:$$

Բացի այդ, քանի որ $\mathbb{P}$ մատրիցը **չվերասերված** է, ապա $\text{rank}(\mathbb{X}^*) = \text{rank}(\mathbb{X}) = k$:

Այսպիսով, (12.67) ռեգրեսիոն մոդելը բավարարում է *Գաուս – Մարկովի* թեորեմ 12.2-ում բերված **H 1.** և **H 2.** պայմանները: Հետևաբար՝

$$\hat{\beta}^* = [(\mathbb{X}^*)^T \mathbb{X}^*]^{-1} (\mathbb{X}^*)^T \mathbb{Y}^* = (\mathbb{X}^T \mathbb{P}^T \mathbb{P} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \mathbb{P}^T \mathbb{P} \mathbb{Y} = (\mathbb{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbb{Y}$$

գնահատականը β պարամետրի անշեղ և գծային ըստ $\mathbb{Y}^*$ -ի գնահատականների դասում **օպտիմալ** է: Այժմ նկատենք, որ $\mathbb{P}$ մատրիցի **չվերասեղ-վածությունից** հետևում է, որ $\mathbb{Y}^*$ -ների նկատմամբ գծային գնահատականների դասը համընկնում է ըստ $\mathbb{Y}$ -ների գծային գնահատականների դասի հետ: Այսպիսով, թեորեմն ապացուցվեց:

Դիտողություն 12.20: 1. Քանի որ $\mathbb{V}(\mathbb{Y}) = \sigma^2 \mathbf{\Omega}$, ապա $\hat{\beta}^*$ գնահատականի (12.64) ներկայացումից կստանանք, որ դրա կովարիացիոն մատրիցը կլինի հավասար

$$\mathbb{V}(\hat{\beta}^*) = (\mathbb{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbb{V}(\mathbb{Y}) \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbb{X} (\mathbb{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbb{X})^{-1} \hat{\beta}^* = \sigma^2 (\mathbb{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbb{X})^{-1} \quad (12.68)$$

$\hat{\beta}^*$ գնահատականը հաճախ նշանակվում է $\hat{\beta}_{GLS}$ (*Generalized Least Squares*): Պարզ է, որ եթե ռեգրեսիոն մոդելը դասական է, այսինքն՝ $\mathbf{\Omega} = \mathbb{E}_n$, ապա $\hat{\beta}_{GLS} = \hat{\beta}_{OLS} = \hat{\beta}$:

2. «Ընդհանրացված նվազագույն քառակուսիների եղանակ» անվանումն ունի հետևյալ բացատրությունը.

Այթքենի թեորեմն ապացուցելիս $\hat{\beta}_{GLS}$ գնահատականը ստացվում է (12.67) մոդելում $\varphi(\beta) = (\mathbf{e}^*)^T \mathbf{e}^*$ սխալների քառակուսիների գումարը մինիմալացնելով ըստ β -ի: Ներկայացնենք $\varphi(\beta)$ -ն հետևյալ տեսքով՝

$$\begin{aligned} \varphi(\beta) &= (\mathbf{e}^*)^T \mathbf{e}^* = (\mathbb{Y}^* - \mathbb{X}^* \beta)^T (\mathbb{Y}^* - \mathbb{X}^* \beta) = (\mathbb{Y} - \mathbb{X} \beta)^T \mathbb{P}^T \mathbb{P} (\mathbb{Y} - \mathbb{X} \beta) = \\ &= (\mathbb{Y} - \mathbb{X} \beta)^T \mathbf{\Omega}^{-1} (\mathbb{Y} - \mathbb{X} \beta) = \mathbf{e}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{e} : \end{aligned}$$

Այսպիսով, (12.63) մոդելի β պարամետրի **օպտիմալ** գնահատականը գտնելու համար պետք է մինիմալացվի $\mathbf{e}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{e}$ «ընդհանրացված» սխալների քառակուսիների գումարը՝

$$\begin{aligned} \min_{\beta} (\mathbf{e}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{e}) &= \min_{\beta} \{ (\mathbb{Y} - \mathbb{X} \beta)^T \mathbf{\Omega}^{-1} (\mathbb{Y} - \mathbb{X} \beta) \} = \\ &= (\mathbb{Y} - \mathbb{X} \hat{\beta}_{GLS})^T \mathbf{\Omega}^{-1} (\mathbb{Y} - \mathbb{X} \hat{\beta}_{GLS}) = (\mathbf{e}^*)^T \mathbf{e}^* : \end{aligned}$$

Այժմ դիտարկենք (12.63) ընդհանրացված նորմալ ռեգրեսիոն մոդելի համար

$$\mathbb{H}_0 : \mathbb{R}\beta = \mathbf{r}$$

գծային սահմանափակումների առկայության վերաբերյալ վարկածը (տե՛ս § 12.5-ի կետ 3-ը): Դիցուք $\varepsilon \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{\Omega})$, որտեղ $\mathbf{\Omega}$ -ն հայտնի դրական որոշյալ մատրից է:

Ճիշտ է թեորեմ 12.9-ի հետևյալ տարբերակը՝

Թեորեմ 12.21: $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում

$$F = \frac{(\mathbb{R}\hat{\beta}^* - \mathbf{r})^T [\mathbb{R}(\mathbb{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{R}^T]^{-1} (\mathbb{R}\hat{\beta}^* - \mathbf{r}) / q}{(\mathbf{e}^*)^T \mathbf{e}^* / (n - k)} \sim \mathbb{S}(q, n - k)$$

վիճականին ունի q և $(n - k)$ ազատության աստիճաններով **Ֆիշեր - Մենդելորի** (F -) **բաշխում**, որտեղ $\mathbf{e}^* = \mathbf{Y}^* - \mathbb{X}^* \hat{\beta}^*$ -ը (12.67) ռեգրեսիայի մնացորդն է:

Թեորեմն ապացուցվում է, ինչպես թեորեմ 12.9-ը, քանի որ (12.67) մոդելը բավարարում է սովորական ռեգրեսիոն մոդելի պայմանները (պետք է նկատի ունենալ նաև (12.68) ներկայացումը): Այնուհետև $\mathbb{H}_0$ վարկածը ստուգվում է սովորական ձևով:

$\mathbb{H}_0$ վարկածը կարելի է ստուգել նաև մի այլ եղանակով, եթե կիրառենք թեորեմ 12.10-ին համարժեք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 12.22: $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում

$$F = \frac{[(\mathbf{e}_R^*)^T \mathbf{e}_R^* - (\mathbf{e}^*)^T \mathbf{e}^*] / q}{(\mathbf{e}^*)^T \mathbf{e}^* / (n - k)} \sim \mathbb{S}(q, n - k)$$

վիճականին ունի q և $(n - k)$ ազատության աստիճաններով **Ֆիշեր - Մենդելորի** (F -) **բաշխում**, որտեղ $\mathbf{e}_R^* = \mathbf{Y}^* - \mathbb{X}^* \hat{\beta}_R^*$ -ը $\mathbb{R}\beta = \mathbf{r}$ սահմանափակումների դեպքում (12.67) ռեգրեսիայի մնացորդն է, $\hat{\beta}_R^*$ -ը՝ համապատասխան նվազագույն քառակուսիների գնահատականը, իսկ $\mathbf{e}^* = \mathbf{Y}^* - \mathbb{X}^* \hat{\beta}^*$ -ը ռեգրեսիայի մնացորդն է առանց սահմանափակումների մոդելի համար:

Դիտողություն 12.21: Կարելի է ցույց տալ, որ $\mathbb{R}\beta = \mathbf{r}$ սահմանափակումներով (12.67) ռեգրեսիայի $\hat{\beta}_R^*$ նվազագույն քառակուսիների գնահատականն ունի հետևյալ ներկայացումը (տե՛ս (12.73)-ը)՝

$$\hat{\beta}_R^* = \hat{\beta}^* + (\mathbb{X}^T \Omega^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{R}^T [\mathbb{R}(\mathbb{X}^T \Omega^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{R}^T]^{-1} (\mathbf{r} - \mathbb{R}\hat{\beta}^*):$$

Նշենք այստեղ նաև այն փաստը, որ, ի տարբերություն դասական ռեգրեսիայի դեպքի, **ընդհանրացված ռեգրեսիոն մոդելի** համար

$$R^2 = 1 - \frac{(\mathbf{Y} - \mathbb{X}\hat{\beta}^*)^T (\mathbf{Y} - \mathbb{X}\hat{\beta}^*)}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}$$

դետերմինացիայի գործակիցը **չի կարող** ծառայել որպես բավարար չափանիշ մոդելն ընտրելու համար: Ընդհանուր դեպքում այն նույնիսկ կարող է ընկած չլինել $[0, 1]$ միջակայքում:

Խնդիրներ

12.16. Ապացուցել, որ $\mathbb{V}(\hat{\beta}_{OLS}, \hat{\beta}_{GLS}) = \mathbb{V}(\hat{\beta}_{GLS})$:

12.17. Ապացուցել, որ եթե $\mathbf{Y} = \mathbb{X}\beta + \varepsilon$ **ընդհանրացված ռեգրեսիոն մոդելը նորմալ է**, այսինքն՝ $\varepsilon \sim \mathbb{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \Omega)$ (Ω կովարիացիոն մատրիցը հայտնի է), ապա $\hat{\beta}_{OLS} = \hat{\beta}_{ML}$:

12.18. Դիցուք տրված է $\mathbf{Y} = \mathbb{X}\beta + \varepsilon$ **ընդհանրացված** գծային ռեգրեսիոն մոդելը, որտեղ $E(\varepsilon) = \mathbf{0}$, $\mathbb{V}(\varepsilon) = \Omega$: Ենթադրենք՝ $\hat{\beta}$ -ը β վեկտորի սովորական նվազագույն քառակուսիների գնահատականն է, և $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbb{X}\hat{\beta}$: Գտնել՝ ա) $\mathbb{V}(\hat{\mathbf{Y}})$ և $\mathbb{V}(\mathbf{e}) = \mathbb{V}(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}})$, բ) $\mathbb{V}(\mathbf{e}, \hat{\mathbf{Y}})$:

§ 12.9. Հասանելի ընդհանրացված նվազագույն քառակուսիների եղանակ

Դիցուք դիտարկվում է

$$\mathbf{Y} = \mathbb{X}\beta + \varepsilon$$

նորմալ գծային ռեգրեսիոն մոդելը, որտեղ $\varepsilon \sim \mathbb{N}_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \Omega)$:

**§ 12.9. Հասանելի ընդհանրացված նվազագույն
քառակուսիների եղանակ**

Այն դեպքում, երբ $n \times n$ -չափանի կովարիացիոն Ω մատրիցը **հայտնի** է, k -չափանի β պարամետրի համար լավագույն (**օպտիմալ**) գծային (ըստ Y -ի) անշեղ գնահատականը տրվում է

$$\hat{\beta} = (X^T \Omega^{-1} X)^{-1} X^T \Omega^{-1} Y$$

բանաձևի միջոցով (տե՛ս թեորեմ 12.20-ը), և այն ունի **նորմալ** բաշխում՝

$$\hat{\beta} \sim N_k(\beta, \sigma^2 (X^T \Omega^{-1} X)^{-1}):$$

$\hat{\beta}$ գնահատականը կոչվում է **ընդհանրացված նվազագույն քառակուսիների գնահատական**, որը կարող է ստացվել նաև՝ լուծելով

$$\min_{\beta} (Y - X\beta)^T \Omega^{-1} (Y - X\beta)$$

օպտիմալացման խնդիրը (տե՛ս դիտողություն 12.20, կետ 2):

Գործնականում, սակայն, Ω մատրիցը սովորաբար լինում է **անհայտ**: Ենթադրենք, որ հայտնի է Ω մատրիցի **կառուցվածքը**, այսինքն՝ որոշակի **փոքր** թվով $\theta_1, \dots, \theta_m$ պարամետրերից դրա ֆունկցիոնալ կախվածության **ձևը**:

Նշանակենք՝ $\theta = \|\theta_1, \dots, \theta_m\|^T$ և ենթադրենք, որ β ու (σ^2, θ) պարամետրերը **ֆունկցիոնալ անկախ** են: Դիցուք $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_n)$ -ը θ պարամետրի որոշակի **ունակ** գնահատական է, և նշանակենք՝ $\hat{\Omega} = \Omega(\hat{\theta})$:

Հասանելի ընդհանրացված նվազագույն քառակուսիների եղանակի գնահատական (**Feasible Generalised Least Squares (FGLS) Estimator**) կոչվում է հետևյալ վիճականին՝

$$\hat{\beta}_{FGLS} = (X^T \hat{\Omega}^{-1} X)^{-1} X^T \hat{\Omega}^{-1} Y$$

Թեորեմ 12.23: Դիցուք տրված է $Y = X\beta + \varepsilon$, $\varepsilon \sim N_n(0, \sigma^2 \Omega(\theta))$ **նորմալ գծային ռեգրեսիոն մոդելը**, և բավարարվում են հետևյալ պայմանները՝

$$\frac{1}{n} (X^T \hat{\Omega}^{-1} X) \xrightarrow{P} Q, \quad \frac{1}{n} (X^T \hat{\Omega}^{-1} \varepsilon) \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

որտեղ Q -ն որոշակի **չվերասերված** մատրից է: Այդ դեպքում β պարամետրի $\hat{\beta}_{FGLS}$ գնահատականն **ունակ է**:

Ա պ ա ց ու ց ու մ: Ներկայացնենք $\hat{\beta}_{FGLS}$ գնահատականը հետևյալ տեսքով՝

$$\hat{\beta}_{FGLS} = \beta + \left[\frac{1}{n} (\mathbb{X}^T \hat{\Omega}^{-1} \mathbb{X}) \right]^{-1} \left[\frac{1}{n} (\mathbb{X}^T \hat{\Omega}^{-1} \varepsilon) \right]^{-1} : \quad (12.69)$$

Այստեղից կստանանք պահանջված զուգամիտությունը:

Ճշմարտանմանության մաքսիմումի գնահատականներ

Այժմ

$$\mathbf{Y} = \mathbb{X}\beta + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim \mathbb{N}_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{\Omega}(\theta))$$

ռեգրեսիոն մոդելի համար գտնենք β , σ^2 և $\theta = \|\theta_1, \dots, \theta_m\|^T$ պարամետրերի ճշմարտանմանության մաքսիմումի գնահատականները:

$\mathbf{Y} \sim \mathbb{N}_n(\mathbb{X}\beta, \sigma^2 \mathbf{\Omega}(\theta))$ մոդելի ճշմարտանմանության ֆունկցիան (տե՛ս չ. 33) կլինի՝

$$f_{\beta, \sigma, \theta}(\mathbf{Y}) = \prod_{i=1}^n f_{\beta, \sigma, \theta}(Y_i) = (2\pi)^{-n/2} (\sigma^2)^{-n/2} |\mathbf{\Omega}|^{-1/2} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{Y} - \mathbb{X}\beta)^T \mathbf{\Omega}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbb{X}\beta) \right\},$$

որտեղ $f_{\beta, \sigma, \theta}(y)$ -ը, Y_i պատահական մեծությունների խտության ֆունկցիան է: Այնուհետև լոգարիթմական ճշմարտանմանության ֆունկցիայի համար կստանանք՝

$$L_{\beta, \sigma, \theta}(\mathbf{Y}) = \ln f_{\beta, \sigma, \theta}(\mathbf{Y}) = \\ -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) + \\ + \frac{1}{2} \ln |\mathbf{\Omega}^{-1}| - \frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{Y} - \mathbb{X}\beta)^T \mathbf{\Omega}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbb{X}\beta):$$

Կազմենք ճշմարտանմանության հավասարումների համակարգը (տե՛ս չ. 25)՝

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial L_{\beta, \sigma, \theta}(\mathbf{Y})}{\partial \beta} &= -\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} (\mathbf{Y}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{Y} - 2\beta^T \mathbb{X}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{Y} + \beta^T \mathbb{X}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbb{X} \beta) = \\ &= \frac{1}{2\sigma^2} \cdot 2\mathbb{X}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbb{X}\beta) = \mathbf{0}, \\ \frac{\partial L_{\beta, \sigma, \theta}(\mathbf{Y})}{\partial \sigma^2} &= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} (\mathbf{Y} - \mathbb{X}\beta)^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbb{X}\beta) = 0, \\ \frac{\partial L_{\beta, \sigma, \theta}(\mathbf{Y})}{\partial \theta_j} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln |\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\theta})| - \frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{Y} - \mathbb{X}\beta)^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \right) (\mathbf{Y} - \mathbb{X}\beta) = 0, \\ & \quad j = 1, \dots, m : \end{aligned} \right.$$

Այստեղից կստանանք, որ համակարգի $(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2, \hat{\theta})$ լուծումը բավարարում է հետևյալ պայմանները՝

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{\beta} &= (\mathbb{X}^T \hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \mathbf{Y}, \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} (\mathbf{e}^T \hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \mathbf{e}), \\ \frac{\mathbf{e}^T \hat{\mathbb{C}}_j \mathbf{e}}{\mathbf{e}^T \hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \mathbf{e}} &= \frac{1}{n} \left(\frac{\partial \ln |\hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}|}{\partial \theta_j} \right), \end{aligned} \right.$$

որտեղ

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} := \boldsymbol{\Omega}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \quad \hat{\mathbb{C}}_j := \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}}{\partial \theta_j}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{Y} - \mathbb{X}\hat{\beta} :$$

Կարելի է ցույց տալ, որ $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}^2$ և $\hat{\theta}$ վիճակահանիները β , σ^2 և θ պարամետրերի ճշմարտանմանության մաքսիմումի գնահատականներ են:

§ 12.10. Գծային սահմանափակումների պայմանների դեպքում ընդհանրացված ռեգրեսիոն մոդելների համար վարկածների ստուգում

1. Դիցուք դիտարկվում է

$$\mathbf{Y} = \mathbb{X}\beta + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathbb{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega}) \quad (12.70)$$

ընդհանրացված նորմալ գծային ռեգրեսիոն մոդելը, որտեղ դրական որոշյալ $n \times n$ -չափանի Ω մատրիցը հայտնի է: Պահանջվում է ստուգել

$$\mathbb{H}_0: \mathbb{R}\beta = \mathbf{r}$$

գծային սահմանափակումների վերաբերյալ $\mathbb{H}_0$ վարկածը, որտեղ β -ն՝ $k \times 1$ -չափանի անհայտ գործակիցների վեկտոր է, $\mathbb{R}$ -ը՝ հայտնի $q \times k$ -չափանի մատրից ($\text{rank}(\mathbb{R}) = q$), իսկ $\mathbf{r}$ -ը՝ հայտնի $q \times 1$ -չափանի վեկտոր ($q < k$):

Կոդիտարկենք $\mathbb{H}_0$ վարկածը ստուգելու համար տարբեր մոտեցումների վրա հիմնված երեք հայտանիշ (տե՛ս [10]):

Լեմմա 12.6: (12.70) ռեգրեսիոն մոդելի β պարամետրի ճշմարտանմանության մաքսիմումի $\hat{\beta}_{ML}$ գնահատականը համընկնում է ընդհանրացված նվազագույն քառակուսիների $\hat{\beta}_{GLS}$ գնահատականի հետ, այսինքն՝

$$\hat{\beta}_{ML} = \hat{\beta}_{GLS} = (\mathbb{X}^T \Omega^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \Omega^{-1} \mathbf{Y} :$$

Այս պատճառով: (12.70) մոդելի համար գտնենք լոգարիթմական ճշմարտանմանության ֆունկցիան (տե՛ս § 12.9)՝

$$L_{\beta}(\mathbf{Y}) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \ln|\Omega^{-1}| - \frac{1}{2} (\mathbf{Y} - \mathbb{X}\beta)^T \Omega^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbb{X}\beta):$$

Այստեղից՝ ճշմարտանմանության հավասարումը կլինի՝

$$\frac{\partial L_{\beta}(\mathbf{Y})}{\partial \beta} = \mathbb{X}^T \Omega^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbb{X}\beta) = 0, \quad (12.71)$$

որտեղից՝

$$\mathbb{X}^T \Omega^{-1} \mathbf{Y} = \mathbb{X}^T \Omega^{-1} \mathbb{X} \beta,$$

այնպես որ՝

$$\hat{\beta} := \hat{\beta}_{ML} = (\mathbb{X}^T \Omega^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \Omega^{-1} \mathbf{Y} = \hat{\beta}_{GLS}:$$

Դիտողություն 12.22: $L_{\beta}(\mathbf{Y})$ ֆունկցիայի մաքսիմալ արժեքը կլինի՝

$$L_{\beta}(\mathbf{Y}) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \ln|\mathbf{\Omega}^{-1}| - \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{e}, \quad (12.72)$$

որտեղ $\mathbf{e} = \mathbf{Y} - \mathbb{X}\hat{\beta}$ -ը (12.70) մոդելի մնացորդների վեկտորն է: Մյուս կողմից, ածանցելով (12.71) բանաձևի երկու մասերն ըստ β^T -ի (տե՛ս Ն. 25) և վերցնելով մաթ.սպասումը, կստանանք **Ֆիշերի տեղեկատվական մատրիցը** (տե՛ս [15])՝

$$\mathbb{I}(\beta) = -E\left(\frac{\partial^2 L_{\beta}(\mathbf{Y})}{\partial \beta \partial \beta^T}\right) = \mathbb{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbb{X}:$$

Այժմ գտնենք $\mathbb{R}\beta = \mathbf{r}$ սահմանափակումների դեպքում (12.70) մոդելի β պարամետրի ճշմարտանմանության մաքսիմումի $\hat{\beta}_{\mathbb{R}}$ գնահատականը:

Թեորեմ 12.24: $\mathbb{R}\beta = \mathbf{r}$ *գծային սահմանափակումներով* (12.70) *ռեգրեսիոն մոդելի ճշմարտանմանության մաքսիմումի $\hat{\beta}_{\mathbb{R}}$ գնահատականը տրվում է հետևյալ բանաձևով՝*

$$\hat{\beta}_{\mathbb{R}} = \hat{\beta} - (\mathbb{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{R}^T [\mathbb{R}(\mathbb{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{R}^T]^{-1} (\mathbb{R}\hat{\beta} - \mathbf{r}): \quad (12.73)$$

Ա պ ա ց ու ց ու մ: Դիտարկենք **Լագրանժի ֆունկցիան**՝

$$H(\beta; \lambda) = L_{\beta}(\mathbf{Y}) - \lambda^T (\mathbb{R}\beta - \mathbf{r}),$$

որտեղ $\lambda = \|\lambda_1, \dots, \lambda_q\|^T$ -ն **Լագրանժի բազմապատկիչների** վեկտորն է: Պայմանական էքստրեմումի պայմանները հանգեցնում են հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases} \frac{\partial H(\beta; \lambda)}{\partial \beta} = 0, \\ \frac{\partial H(\beta; \lambda)}{\partial \lambda} = -(\mathbb{R}\beta - \mathbf{r}) = 0, \end{cases}$$

կամ՝

$$\begin{cases} \mathbf{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta) - \mathbb{R}^T \lambda = 0, \\ \mathbb{R}\beta = \mathbf{r}: \end{cases} \quad (12.74)$$

(12.74) համակարգի լուծումները նշանակելով $\widehat{\beta}_{\mathbb{R}}$ -ով և $\widehat{\lambda}_{\mathbb{R}}$ -ով՝ կստանանք՝

$$\widehat{\beta}_{\mathbb{R}} = (\mathbb{X}^T \Omega^{-1} \mathbb{X})^{-1} (\mathbb{X}^T \Omega^{-1} \mathbf{Y} - \mathbb{R}^T \widehat{\lambda}_{\mathbb{R}}) = \widehat{\beta} - (\mathbb{X}^T \Omega^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{R}^T \widehat{\lambda}_{\mathbb{R}}: \quad (12.75)$$

Հետևաբար՝

$$\mathbf{r} = \mathbb{R} \widehat{\beta}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \widehat{\beta} - [\mathbb{R} (\mathbb{X}^T \Omega^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{R}^T]^{-1} \widehat{\lambda}_{\mathbb{R}}: \quad (12.76)$$

Արտահայտելով (12.76)-ից $\widehat{\lambda}_{\mathbb{R}}$ -ը՝ կունենանք՝

$$\widehat{\lambda}_{\mathbb{R}} = [\mathbb{R} (\mathbb{X}^T \Omega^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{R}^T]^{-1} (\mathbb{R} \widehat{\beta} - \mathbf{r}): \quad (12.77)$$

Այժմ տեղադրելով $\widehat{\lambda}_{\mathbb{R}}$ -ի այս արժեքը (12.75) բանաձևի մեջ՝ կստանանք (12.73) ներկայացումը: ■

$L_{\beta}(\mathbf{Y})$ լոգարիթմական ճշմարտանմանության ֆունկցիայի մաքսիմալ արժեքն է՝

$$L_{\widehat{\beta}_{\mathbb{R}}}(\mathbf{Y}) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \ln |\Omega^{-1}| - \frac{1}{2} \mathbf{e}_{\mathbb{R}}^T \Omega^{-1} \mathbf{e}_{\mathbb{R}}, \quad (12.78)$$

որտեղ $\mathbf{e}_{\mathbb{R}} = \mathbf{Y} - \mathbb{X} \widehat{\beta}_{\mathbb{R}}$ -ը $\mathbb{R} \widehat{\beta} = \mathbf{r}$ սահմանափակումներով (12.70) մոդելի մնացորդների վեկտորն է:

$\mathbb{H}_0$ վարկածի ստուգման հայտանիշներ

Վալդի հայտանիշը (Wald (W) test)

Վալդի հայտանիշը հիմնված է այն փաստի վրա, որ $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում $\mathbb{R} \widehat{\beta}$ վեկտորը պետք է լինի $\mathbf{r}$ վեկտորին «մոտ» (որը հետևում է $\mathbb{R} \widehat{\beta} \xrightarrow{P} \mathbb{R} \beta$ զուգամիտությունից, երբ $n \rightarrow \infty$):

Թեորեմ 12.25: *Դիցուք տրված է (12.70) ռեգրեսիոն մոդելը: $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում*

$$\mathbf{W} = (\mathbb{R} \widehat{\beta} - \mathbf{r})^T [\mathbb{R} (\mathbb{X}^T \Omega^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{R}^T]^{-1} (\mathbb{R} \widehat{\beta} - \mathbf{r}) \sim \mathbb{H}^2(q)$$

վիճականին ունի q ազատության աստիճաններով χ^2 բաշխում:

**§ 12.10. Գծային սահմանափակումների պայմանների դեպքում ընդհանրացված
ռեգրեսիոն մոդելների համար վարկածների ստուգում**

Ա պ ա ց ու ց ու մ: Լեմմա 12.6 -ից ունենք՝

$$\widehat{\beta} = (\mathbb{X}^T \Omega^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \Omega^{-1} \mathbf{Y} = \beta + (\mathbb{X}^T \Omega^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \Omega^{-1} \varepsilon :$$

Այստեղից, $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում կստանանք՝

$$\mathbb{R}\widehat{\beta} - \mathbf{r} \sim \mathbb{N}_q(\mathbf{0}, \mathbb{R}(\mathbb{X}^T \Omega^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{R}^T), \quad (12.79)$$

քանի որ

$$\mathbb{E}(\mathbb{R}\widehat{\beta} - \mathbf{r}) = \mathbb{R}\beta - \mathbf{r} = \mathbf{0},$$

$$\mathbb{V}(\mathbb{R}\widehat{\beta} - \mathbf{r}) = \mathbb{R}\mathbb{V}(\widehat{\beta})\mathbb{R}^T = \mathbb{R}(\mathbb{X}^T \Omega^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{R}^T:$$

Այժմ, կիրառելով թեորեմ Հ. 34-ը, կստանանք պահանջված պնդումը: ■

Այսպիսով, α նշանակալիության մակարդակով $\mathbb{H}_0$ վարկածը կհերքվի, եթե

$$w > \chi_\alpha^2(q) \quad (\mathbf{W}(\omega_0) = w):$$

Դիտողություն 12.23: Նշենք այստեղ, որ Վալդի հայտանիշն օգտագործում է միայն պարամետրերի վրա սահմանափակումներ չդրված մոդելի $\widehat{\beta}$ գնահատականը:

Լագրանժի բազմապատկիչների հայտանիշը

(Lagrange Multiplier (LM) test)

Լագրանժի հայտանիշը հիմնված է այն գաղափարի վրա, որ $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում, բոլոր **Լագրանժի բազմապատկիչները** պետք է լինեն հավասար զրոյի, այսինքն, և $\widehat{\lambda}_{\mathbb{R}}$ վեկտորը պետք է լինի «մոտ» զրոյին ($\widehat{\lambda}_{\mathbb{R}} \xrightarrow{P} 0$, երբ $n \rightarrow \infty$):

Թեորեմ 12.26: Դիցուք տրված է (12.70) ռեգրեսիոն մոդելը: $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում

$$\mathbf{LM} = \mathbf{e}_{\mathbb{R}}^T \Omega^{-1} \mathbb{X} (\mathbb{X}^T \Omega^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \Omega^{-1} \mathbf{e}_{\mathbb{R}} \sim \mathbb{H}^2(q) \quad (\mathbf{e}_{\mathbb{R}} = \mathbf{Y} - \mathbb{X}\widehat{\beta}_{\mathbb{R}})$$

վիճականին ունի q ազատության աստիճաններով χ^2 բաշխում:

Ա պ ա ց ու ց ու մ: $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում (12.77)-ից և (12.79)-ից կստանանք՝

$$\hat{\lambda}_{\mathbb{R}} \sim N_q(\mathbf{0}, [\mathbb{R}(\mathbb{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{R}^T]^{-1}):$$

Հետևաբար, կիրառելով թեորեմ 2.34-ը, կունենանք՝

$$\chi_q^2 = \hat{\lambda}_{\mathbb{R}}^T \mathbb{R}(\mathbb{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{R}^T \hat{\lambda}_{\mathbb{R}} \sim \mathbb{H}^2(q): \quad (12.80)$$

Այժմ, ի նկատի ունենալով (12.74)-ը, այսինքն՝ որ

$$\mathbb{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{e}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^T \hat{\lambda}_{\mathbb{R}} \quad (\mathbf{e}_{\mathbb{R}} = \mathbf{Y} - \mathbb{X} \hat{\beta}_{\mathbb{R}}),$$

կստանանք

$$\chi_q^2 = \mathbf{e}_{\mathbb{R}}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbb{X}(\mathbb{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{e}_{\mathbb{R}} = \mathbf{L} \mathbf{M}$$

համարժեք ներկայացումը:

Դիտողություն 12.24: Ի տարբերություն Վալդի հայտանիշի՝ Լագրանժի հայտանիշը օգտագործում է միայն պարամետրերի վրա սահմանափակումներ դրված մոդելի $\hat{\beta}_{\mathbb{R}}$ գնահատականները:

Ճշմարտանմանության հարաբերության հայտանիշը (տե՛ս § 9.6)
(*Likelihood Ratio (LR) test*)

Ճշմարտանմանության հարաբերության հայտանիշը օգտագործում է ինչպես սահմանափակումներով, այնպես էլ առանց սահմանափակումների ռեգրեսիոն մոդելները: Հայտանիշը հիմնված է այն փաստի վրա, որ եթե սահմանափակումները տեղի ունեն ($\mathbb{H}_0$ վարկած), ապա Ճշմարտանմանության ֆունկցիաների մաքսիմալ արժեքների հարաբերությունը սահմանափակումով և առանց սահմանափակումների ռեգրեսիաների համար պետք է լինի մեկին մոտ մեծություն՝

$$\frac{f_{\hat{\beta}_{\mathbb{R}}}(\mathbf{Y})}{f_{\hat{\beta}}(\mathbf{Y})} \xrightarrow{P} 1, \quad \text{երբ } n \rightarrow \infty:$$

Թեորեմ 12.27: Դիցուք տրված է (12.70) ռեգրեսիոն մոդելը: $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում

$$\mathbf{LR} = -2 \left(L_{\hat{\beta}_{\mathbb{R}}}(\mathbf{Y}) - L_{\hat{\beta}}(\mathbf{Y}) \right) = \mathbf{e}_{\mathbb{R}}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{e}_{\mathbb{R}} - \mathbf{e}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{e} \sim \mathbb{H}^2(q)$$

վիճականին ունի q ազատության աստիճաններով χ^2 բաշխում:

§ 12.10. Գծային սահմանափակումների պայմանների դեպքում ընդհանրացված ռեգրեսիոն մոդելների համար վարկածների ստուգում

Ա պ ա ց ու ց ու ւ: $\mathbb{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbb{R}} = \mathbb{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbb{X}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbb{R}})$ ներկայացումից հետևում է՝

$$\mathbf{e}_{\mathbb{R}} = \mathbf{e} + \mathbb{X}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbb{R}}),$$

որտեղից կստանանք՝

$$\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{e}_{\mathbb{R}} = \boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{e} + \boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbb{X}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbb{R}}): \quad (12.81)$$

Մյուս կողմից, ունենք՝

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\mathbb{R}}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{e}_{\mathbb{R}} &= [\mathbf{e}^T + (\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbb{R}})^T \mathbb{X}^T] \boldsymbol{\Omega}^{-1} [\mathbf{e} + \mathbb{X}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbb{R}})] = \\ &= \mathbf{e}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{e} + (\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbb{R}})^T \mathbb{X}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbb{X} (\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbb{R}}): \end{aligned} \quad (12.82)$$

Այստեղ օգտագործվել է հետևյալ պայմանը՝

$$\begin{aligned} \mathbb{X}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{e} &= \mathbb{X}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbb{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbb{X}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{Y} - \mathbb{X}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbb{X} \widehat{\boldsymbol{\beta}} = \\ &= \mathbb{X}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{Y} - \mathbb{X}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbb{X} (\mathbb{X}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{Y} = 0: \end{aligned}$$

Այնուհետև, (12.72), (12.78), (12.82), (12.75) և (12.80)-ից կստանանք՝

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\mathbf{R} &= \mathbf{e}_{\mathbb{R}}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{e}_{\mathbb{R}} - \mathbf{e}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{e} = (\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbb{R}})^T \mathbb{X}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbb{X} (\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbb{R}}) = \\ &= \widehat{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathbb{R}}^T \mathbb{R} (\mathbb{X}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbb{X})^{-1} (\mathbb{X}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbb{X}) (\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbb{R}}) = \widehat{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathbb{R}}^T \mathbb{R} (\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbb{R}}) = \\ &= \widehat{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathbb{R}}^T \mathbb{R} (\mathbb{X}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{R}^T \widehat{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathbb{R}} = \mathbf{L}\mathbf{M} \sim \mathbb{H}^2(q): \end{aligned} \quad (12.83)$$

Դիտողություն 12.25: (12.76) ներկայացումից հետևում է՝

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{r} &= \mathbb{R}(\mathbb{X}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{R}^T \widehat{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathbb{R}}, \\ (\mathbb{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{r})^T &= \widehat{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathbb{R}}^T \mathbb{R} (\mathbb{X}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{R}^T: \end{aligned}$$

Այնպես որ, **Վալդի W** վիճականին կներկայացվի հետևյալ տեսքով՝

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= (\mathbb{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{r})^T [\mathbb{R}(\mathbb{X}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{R}^T]^{-1} (\mathbb{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{r}) = \\ &= \widehat{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathbb{R}}^T \mathbb{R} (\mathbb{X}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{R}^T [\mathbb{R}(\mathbb{X}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{R}^T]^{-1} \mathbb{R} (\mathbb{X}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{R}^T \widehat{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathbb{R}} = \\ &= \widehat{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathbb{R}}^T \mathbb{R} (\mathbb{X}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{R}^T \widehat{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathbb{R}} = \mathbf{L}\mathbf{M}: \end{aligned}$$

Այստեղից, հաշվի առնելով նաև (12.83)-ը, կստանանք, որ այդ հայտանիշների **վիճականիները** համընկնում են, այսինքն՝ $\mathbf{L}\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{R} = \mathbf{W}$:

Այժմ դիցուք ընդհանրացված նորմալ գծային ռեգրեսիոն մոդելում Ω մատրիցն **անհայտ** է, սակայն հայտնի է այդ մատրիցի **կառուցվածքը**, այսինքն՝ $\Omega = \Omega(\theta)$ մատրիցը որոշակի ֆունկցիա է **անհայտ** m –չափանի θ պարամետրից: Այդ դեպքում տեղի ունեն **Վալդի, Լագրանժի Բազմա-պատկիչների** և **ճշմարտանմանության հարաբերության** **ասիմպտոտիկ** **հայտանիշները** (տե՛ս *Greene* [20]):

Թեորեմ 12.28: $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում ճիշտ են ըստ բաշխման հետևյալ զուգամիտությունները, երբ $n \rightarrow \infty$ ՝

$$\mathbf{W} = (\mathbb{R}\hat{\beta} - \mathbf{r})^T \left[\mathbb{R}(\mathbb{X}^T \hat{\Omega}^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{R}^T \right]^{-1} (\mathbb{R}\hat{\beta} - \mathbf{r}) \xrightarrow{d} \mathbb{H}^2(q),$$

$$\mathbf{LM} = \mathbf{e}_{\mathbb{R}}^T \hat{\Omega}_{\mathbb{R}}^{-1} \mathbb{X}(\mathbb{X}^T \hat{\Omega}_{\mathbb{R}}^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \hat{\Omega}_{\mathbb{R}}^{-1} \mathbf{e}_{\mathbb{R}} \xrightarrow{d} \mathbb{H}^2(q),$$

$$\mathbf{LR} = -2 \left(L_{\hat{\beta}_{\mathbb{R}}}(\mathbf{Y}) - L_{\hat{\beta}}(\mathbf{Y}) \right) = \mathbf{e}_{\mathbb{R}}^T \hat{\Omega}_{\mathbb{R}}^{-1} \mathbf{e}_{\mathbb{R}} - \mathbf{e}^T \hat{\Omega}^{-1} \mathbf{e} \xrightarrow{d} \mathbb{H}^2(q),$$

որտեղ $\hat{\Omega} = \Omega(\hat{\theta}) - \mathbb{V}$, $\hat{\Omega}_{\mathbb{R}} = \Omega(\hat{\theta}_{\mathbb{R}}) - \mathbb{V}$, $\hat{\beta}_{\mathbb{R}}$ -ը և $\hat{\theta}_{\mathbb{R}}$ -ը առանց սահմանափակումների մոդելի համար β և θ պարամետրերի **ճշմարտանմանության** **մաքսիմումի** **գնահատականներն** են, իսկ $\hat{\beta}_{\mathbb{R}}$ -ը և $\hat{\theta}_{\mathbb{R}}$ -ը՝ **սահմանափակումներով** **մոդելի** **համար** **ճշմարտանմանության** **մաքսիմումի** **գնահատականները**:

Թեորեմ 12.29 (Բրեուշ): $\mathbb{H}_0$ վարկածը բավարարվելու դեպքում ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\mathbf{LM} \leq \mathbf{LR} \leq \mathbf{W}:$$

Ա պ ա ց ու ց ու մ: Նկատենք, որ $\hat{\beta}$ վիճականին

$$L_{\hat{\beta}, \hat{\theta}}(\mathbf{Y}) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \ln |\hat{\Omega}^{-1}| - \frac{1}{2} (\mathbf{Y} - \mathbb{X}\hat{\beta})^T \hat{\Omega}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbb{X}\hat{\beta})$$

լոգարիթմական ճշմարտանմանության ֆունկցիայի համար **մաքսիմումի կետն** է, իսկ $\hat{\beta}_{\mathbb{R}}$ վիճականին՝ $\mathbf{R}\hat{\beta} = \mathbf{r}$ սահմանափակումների դեպքում՝

$$L_{\hat{\beta}, \hat{\theta}_{\mathbb{R}}}(\mathbf{Y}) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \ln |\hat{\Omega}_{\mathbb{R}}^{-1}| - \frac{1}{2} (\mathbf{Y} - \mathbb{X}\hat{\beta})^T \hat{\Omega}_{\mathbb{R}}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbb{X}\hat{\beta})$$

Ֆունկցիայի համար պայմանական մաքսիմումի կետը:

Այժմ սահմանենք հետևյալ երկու վեկտորը՝ $\hat{\beta}_u$ -ն, որը $L_{\beta, \hat{\theta}_R}(Y)$ ֆունկցիայի համար (ոչ պայմանական) մաքսիմումի կետն է, և $\hat{\beta}_r$ -ը՝ $\mathbb{R}\beta = r$ սահմանափակումների դեպքում $L_{\beta, \hat{\theta}}(Y)$ ֆունկցիայի պայմանական մաքսիմումի կետը: Հայտնի θ պարամետրի դեպքում նախորդ կետում ստացված արդյունքները հանգեցնում են W , LM և LR վիճականիների հետևյալ ներկայացումներին՝

$$\begin{aligned} W &= -2 \left(L_{\hat{\beta}_r, \hat{\theta}}(Y) - L_{\hat{\beta}, \hat{\theta}}(Y) \right), \\ LM &= -2 \left(L_{\hat{\beta}_R, \hat{\theta}_R}(Y) - L_{\hat{\beta}_u, \hat{\theta}_R}(Y) \right), \\ LR &= -2 \left(L_{\hat{\beta}_R, \hat{\theta}_R}(Y) - L_{\hat{\beta}, \hat{\theta}}(Y) \right): \end{aligned}$$

Այստեղից հեշտ է ստանալ, որ

$$\begin{aligned} LR - LM &= 2 \left(L_{\hat{\beta}_R, \hat{\theta}_R}(Y) - L_{\hat{\beta}_u, \hat{\theta}_R}(Y) \right) \geq 0, \\ W - LR &= 2 \left(L_{\hat{\beta}_R, \hat{\theta}_R}(Y) - L_{\hat{\beta}_r, \hat{\theta}}(Y) \right) \geq 0: \end{aligned}$$

Այսպիսով՝

$$LM \leq LR \leq W:$$

Դիտողություն 12.26: Ստացված անհավասարությունը ցույց է տալիս, որ նմուշի բավականաչափ «մեծ» հաստատուն n ծավալի համար միևնույն կրիտիկական արժեքը կիրառելու դեպքում այդ հայտանիշների նշանակալիության մակարդակը կլինի տարբեր:

Խնդիրներ

12.19. Դիցուք դիտարկվում է

$$Y = \mathbb{X}\beta + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 \Omega)$$

նորմալ գծային ռեգրեսիոն մոդելը, որտեղ համաչափ դրական որոշյալ $n \times n$ – չափանի Ω մատրիցը հայտնի է: Ցույց տալ, որ $\mathbb{R}\beta = r$ սահմանափակումների դեպքում

$$F = \frac{(\mathbb{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{r})^T [\mathbb{R}(\mathbb{X}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{R}^T]^{-1} (\mathbb{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{r})/q}{(\mathbf{Y} - \mathbb{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}})^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbb{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}})/(n-k)} \sim \mathbb{S}(q, n-k),$$

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ -ը առանց սահմանափակումների մոդելի ՃՄ գնահատականն է:

Ցուցում՝ տե՛ս թեորեմ 12.20-ը:

12.20. Գտնել $\mathbb{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS})$ համատեղ կովարիացիոն մատրիցը, որտեղ $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS} = (\mathbb{X}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{Y}$, $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS} = (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \mathbf{Y}$:

Ցուցում՝ ցույց տալ, որ

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS} = (\mathbb{X}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbb{M} \mathbf{Y}, \text{ որտեղ } \mathbb{M} = \mathbb{E}_n - \mathbb{X}(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T:$$

Պատասխան՝ $\mathbb{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS}) = \mathbf{0}$:

Հավելված I

Որոշ գաղափարներ մատրիցների տեսությունից

Ընշանակենք $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^{n,m}$ -ով $n \times m$ -չափանի (n տող և m սյունակ պարունակող) մատրիցը, $n \times m$ -չափանի **0-ական մատրիցը** կնշանակենք $\mathbf{0}_{n \times m}$ -ով: n -չափանի **0-ական** սյունակ վեկտորը կնշանակենք $\mathbf{0}_n$ -ով: $n \times n$ -չափանի **միավոր մատրիցը** կնշանակվի E_n -ով, իսկ $n \times n$ -չափանի **անկյունագծային մատրիցը**,

$$\Lambda_n = \left\| \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{array} \right\| = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n):$$

Սահմանում Հ. 1: $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^{n,m}$ մատրիցի **շրջված (տրանսպոնացված) մատրից** է կոչվում $m \times n$ -չափանի $A^T = \|a_{ji}\|_{j,i=1}^{m,n}$ մատրիցը:

Հատկություններ՝

$$(A + B)^T = A^T + B^T, (A^T)^T = A, (AB)^T = B^T A^T:$$

Սահմանում Հ. 2: Քառակուսային $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$ մատրիցի **հետք** կոչվում է նրա անկյունագծային տարրերի գումարը՝

$$\text{tr}(A) = \sum a_{ii}:$$

Հատկություններ՝

$$\text{tr}(E_n) = n, \text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A) (\alpha \in \mathbb{R}), \text{tr}(A^T) = \text{tr}(A),$$

$$\text{tr}(A \pm B) = \text{tr}(A) \pm \text{tr}(B), \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA):$$

$\mathbf{a} = \|a_1, a_2, \dots, a_n\|^T$ վեկտորի համար (այստեղ և հետագայում վեկտորները դիտարկվում են որպես **սյունակ վեկտորներ**)՝

$$\operatorname{tr}(\mathbf{a}\mathbf{a}^T) = \sum a_i^2:$$

Նշանակենք $\mathbb{A} = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$ մատրիցի **որոշիչը** (դետերմինանտը)
 $\det \mathbb{A} = |\mathbb{A}|$ -ով:

Հատկություններ՝

$$|\mathbb{A}\mathbb{B}| = |\mathbb{A}||\mathbb{B}|, \quad |\mathbb{A}_n| = \prod_{i=1}^n \lambda_i, \quad |\alpha\mathbb{A}| = \alpha^n |\mathbb{A}| \quad (\alpha \in \mathcal{R}), \quad |\mathbb{A}^T| = |\mathbb{A}|:$$

Սահմանում 2. 3: Քառակուսային $\mathbb{A}$ մատրիցը կոչվում է **չվերասերված**, եթե $|\mathbb{A}| \neq 0$: Հակառակ դեպքում, երբ $|\mathbb{A}| = 0$, $\mathbb{A}$ մատրիցը կոչվում է **վերասերված**:

Սահմանում 2. 4: Չվերասերված $\mathbb{A}$ մատրիցի **հակադարձ** մատրիցը (նշանակվում է $\mathbb{A}^{-1}$ -ով) այնպիսի մատրից է, որը բավարարում է

$$\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{E}_n$$

պայմանը:

Հատկություններ՝

$$(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A}, \quad (\mathbb{A}^{-1})^T = (\mathbb{A}^T)^{-1}, \quad |\mathbb{A}^{-1}| = |\mathbb{A}|^{-1}, \quad (\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}:$$

Սահմանում 2. 5: $n \times m$ -չափանի $\mathbb{A} = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^{n,m}$ մատրիցի **ռանգ** կոչվում է դրա մաքսիմալ գծայնորեն անկախ տողերի (կամ սյունակների) թիվը:

Հատկություններ՝

1. Եթե $\mathbb{B}$ -ն $m \times m$ - չափանի **մաքսիմալ ռանգի** մատրից է, այսինքն՝
 $\operatorname{rank}(\mathbb{B}) = m$, ապա $\operatorname{rank}(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \operatorname{rank}(\mathbb{A})$,
2. Եթե $\mathbb{C}$ - ն $n \times n$ - չափանի **մաքսիմալ ռանգի** մատրից է, այսինքն՝
 $\operatorname{rank}(\mathbb{C}) = n$, ապա $\operatorname{rank}(\mathbb{C}\mathbb{A}) = \operatorname{rank}(\mathbb{A})$
3. $\operatorname{rank}(\mathbb{A}\mathbb{A}^T) = \operatorname{rank}(\mathbb{A}^T\mathbb{A}) = \operatorname{rank}(\mathbb{A})$,
4. Եթե $n \times n$ - չափանի $\mathbb{A}$ մատրիցը **չվերասերված** է, ապա
 $\operatorname{rank}(\mathbb{A}) = n$:

Սահմանում Հ. 6: $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^n$ վեկտորը ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$) կոչվում է $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$ մատրիցի **սեփական վեկտոր**, իսկ $\lambda \in \mathcal{R}$ -ն՝ համապատասխան **սեփական արժեք**, եթե ճիշտ է

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} \quad \text{կամ} \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}_n)\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

հավասարությունը:

Սահմանում Հ. 7: $n \times n$ - չափանի $\mathbb{O}$ մատրիցը կոչվում է **օրթոգոնալ**, եթե

$$\mathbb{O}^T \mathbb{O} = \mathbb{O} \mathbb{O}^T = \mathbf{E}_n,$$

այսինքն՝ եթե $\mathbb{O}$ մատրիցի տողերը (սյունակները) օրթոգոնալ են և ունեն միավոր երկարություններ (**օրթոնորմալ** վեկտորներ են):

Հատկություններ՝

$$\mathbb{O}^T = \mathbb{O}^{-1}, \quad |\mathbb{O}| = \pm 1:$$

Համաչափ մատրիցներ

Սահմանում Հ. 8: $n \times n$ - չափանի (**քառակուսային**) $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$ մատրիցը կոչվում է **համաչափ (սիմետրիկ)**, եթե $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, այսինքն՝ եթե $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, \dots, n$:

Պնդում Հ. 9 (տե՛ս *Pao* [12]): **Համաչափ** $\mathbf{A}$ մատրիցը **օրթոգոնալ** $\mathbb{O}$ մատրիցի միջոցով «**բերվում**» է **անկյունագծային** տեսքի, այսինքն՝

$$\mathbb{O}^T \mathbf{A} \mathbb{O} = \mathbf{\Lambda}_n, \quad (\text{Հ. 1.1})$$

որտեղ **անկյունագծային** $\mathbf{\Lambda}_n(\mathbf{\Lambda})$ մատրիցի տարրերը $\mathbf{A}$ մատրիցի **սեփական արժեքներն** են:

Դիտողություն Հ. 10: (Հ. 1.1) բանաձևը կարելի է նաև ներկայացնել որպես $\mathbf{A}$ մատրիցի վերլուծություն **օրթոգոնալ** և **անկյունագծային** մատրիցների

$$\mathbf{A} = \mathbb{O} \mathbf{\Lambda} \mathbb{O}^T: \quad (\text{Հ. 1.2})$$

Հատկություններ՝

1. Եթե A -ն $n \times n$ - չափանի **համաչափ** մատրից է, ապա

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i,$$

որտեղ λ_i -երը A մատրիցի **սեփական արժեքներն** են:

Ա պ ա ց ու ց ու մ: Համաձայն (Հ. 1.2)-ի և մատրիցի հետքի հատկության՝ ունենք՝

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(\mathbb{O}A\mathbb{O}^T) = \operatorname{tr}(A\mathbb{O}^T\mathbb{O}) = \operatorname{tr}(A):$$

2. **Համաչափ** A մատրիցի **ռանգը** հավասար է նրա ոչ զրոյական **սեփական արժեքների թվին**:

Ա պ ա ց ու ց ու մ: Համաձայն (Հ. 1.2)-ի և մատրիցի ռանգի հատկությունների՝ ունենք՝

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(\mathbb{O}A\mathbb{O}^T) = \operatorname{rank}(A):$$

3. Կամայական A մատրիցի համար $A^T A$ մատրիցը **համաչափ** է՝

$$(A^T A)^T = A^T A:$$

4. Կամայական $n \times n$ - չափանի **համաչափ** A մատրիցն ունի **n հատ օրթոնորմալ սեփական վեկտոր**:

Ոչ բացասական որոշյալ մատրիցներ

Սահմանում Հ. 11: $n \times n$ - չափանի **համաչափ** $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$ մատրիցը կոչվում է **ոչ բացասական որոշյալ** և նշանակվում է $A \geq 0$, եթե բոլոր $x \in \mathcal{R}^n$ -ից վեկտորների համար

$$x^T A x = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \geq 0:$$

Հատկություններ՝

1. Եթե $A \geq 0$, ապա այդ մատրիցի **բոլոր սեփական արժեքները ոչ բացասական** են՝ $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$:

Ա պ ա ց ու ց ու մ: Դիցուք x -ը λ սեփական արժեքով սեփական վեկտոր է՝

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}:$$

Այդ դեպքում՝

$$\mathbf{x}^T \mathbb{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (\lambda \mathbf{x}) = \lambda (\mathbf{x}^T \mathbf{x}) \geq 0,$$

որտեղից հետևում է, որ $\lambda \geq 0$:

2. Ոչ բացասական որոշյալ մատրիցի հետքը ոչ բացասական է, այսինքն՝

$$\mathbb{A} \geq \mathbf{0} \Rightarrow \text{tr}(\mathbb{A}) \geq 0:$$

Ապացուցում: Քանի որ $\mathbb{A}$ -ն համաչափ մատրից է, ապա

$$\text{tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i,$$

որտեղ λ_i -երը այդ մատրիցի սեփական արժեքներն են: Մյուս կողմից, համաձայն 1-ին հատկության՝ $\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, n$:

3. Կամայական $n \times m$ - չափանի $\mathbb{A}$ մատրիցի համար $\mathbb{A}^T \mathbb{A}$ մատրիցը ոչ բացասական որոշյալ է՝ $\mathbb{A}^T \mathbb{A} \geq \mathbf{0}$:

Ապացուցում: Ցանկացած $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^m$ վեկտորի համար ունենք՝

$$\mathbf{x}^T (\mathbb{A}^T \mathbb{A}) \mathbf{x} = (\mathbb{A} \mathbf{x})^T (\mathbb{A} \mathbf{x}) = \mathbf{y}^T \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n y_i^2 \geq 0:$$

4. Որպեսզի $n \times n$ - չափանի $\mathbf{r}$ ռանգ ունեցող $\mathbb{A}$ մատրիցը լինի ոչ բացասական որոշյալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենա այնպիսի $\mathbf{r}$ ռանգ ունեցող $n \times n$ - չափանի $\mathbb{B}$ մատրից, որ $\mathbb{A} = \mathbb{B} \mathbb{B}^T$:

Ապացուցում: Ապացուցենք անհրաժեշտ պայմանը: Քանի որ $\mathbb{A}$ -ն համաչափ մատրից է, ապա, բերելով այն անկյունագծային տեսքի (տե՛ս Հ. 9), կստանանք՝

$$\mathbb{O}^T \mathbb{A} \mathbb{O} = \mathbf{\Lambda},$$

որտեղ $\mathbb{O}$ -ն օրթոգոնալ մատրից է: Այստեղից ունենք՝

$$\text{tr}(\mathbf{\Lambda}) = \text{tr}(\mathbb{O}^T \mathbb{A} \mathbb{O}) = \text{tr}(\mathbb{A} \mathbb{O} \mathbb{O}^T) = \text{tr}(\mathbb{A}):$$

Այսպիսով՝

$$\operatorname{tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n:$$

Մյուս կողմից, $\operatorname{rank}(\mathbb{A}) = r$, ուստի

$$\operatorname{tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^r \lambda_i,$$

որտեղ $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, r$: Այժմ սահմանենք հետևյալ $n \times n$ -չափանի անկյունագծային մատրից՝

$$\mathbf{\Lambda}^{1/2} = \operatorname{diag}(\lambda_1^{1/2}, \dots, \lambda_r^{1/2}, 0, \dots, 0):$$

Ներկայացնենք $\mathbb{A}$ մատրիցը հետևյալ տեսքով՝

$$\mathbb{A} = \mathbb{O} \mathbf{\Lambda} \mathbb{O}^T = \mathbb{O} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbb{O}^T = \mathbb{R} \mathbb{R}^T:$$

Օգտվելով մատրիցի ռանգին վերաբերող հատկությունից կունենանք՝

$$\operatorname{rank}(\mathbb{R}) = \operatorname{rank}(\mathbb{O} \mathbf{\Lambda}^{1/2}) = \operatorname{rank}(\mathbf{\Lambda}^{1/2}) = r:$$

Ընդհակառակն, դիցուք տեղի ունի $\mathbb{A} = \mathbb{R} \mathbb{R}^T$ ներկայացումը, որտեղ $\operatorname{rank}(\mathbb{R}) = r$: Այդ դեպքում՝

$$\operatorname{rank}(\mathbb{A}) = \operatorname{rank}(\mathbb{R}) = r:$$

Մյուս կողմից՝ կամայական $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ -ից վեկտորի համար կստանանք՝

$$\mathbf{x}^T \mathbb{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbb{R} \mathbb{R}^T \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{y} \geq 0:$$

Դրական որոշյալ մատրիցներ

Սահմանում 12: $n \times n$ -չափանի **համաչափ** $\mathbb{A} = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$ մատրիցը կոչվում է **դրական որոշյալ** և նշանակվում $\mathbb{A} > 0$, եթե բոլոր $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ -ից ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) վեկտորների համար՝

$$\mathbf{x}^T \mathbb{A} \mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j > 0:$$

Հատկություններ՝

1. Եթե $A > 0$, ապա այդ մատրիցի բոլոր սեփական արժեքները դրական են՝

$$\lambda_i > 0, \quad i = 1, \dots, n:$$

Այս անհրաժեշտ է: Դիցուք $\mathbf{x}$ -ը λ սեփական արժեքով սեփական վեկտոր է՝

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}:$$

Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալ պայմանը՝

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (\lambda \mathbf{x}) = \lambda (\mathbf{x}^T \mathbf{x}) > 0,$$

որտեղից հետևում է, որ $\lambda > 0$:

2. Դրական որոշյալ A մատրիցը չվերասերված է, այսինքն՝ $|A| \neq 0$:

Այս անհրաժեշտ է: Քանի որ A -ն համաչափ մատրից է, ապա A -ի ռանգը հավասար է այդ մատրիցի ոչ զրոյական սեփական արժեքների թվին (տես համաչափ մատրիցների 2-րդ հատկությունը)՝

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(\Lambda) = \text{tr}(\Lambda) = \sum_{i=1}^r \lambda_i, \quad \lambda_i > 0, \quad i = 1, \dots, n:$$

Այսպիսով՝

$$|A| = |\mathbb{O} \Lambda \mathbb{O}^T| = |\Lambda| = \prod_{i=1}^r \lambda_i > 0:$$

3. A մատրիցը դրական որոշյալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի այնպիսի չվերասերված $\mathbb{R}$ մատրից, որ $A = \mathbb{R} \mathbb{R}^T$:

Այս անհրաժեշտ է: Հատկությունը հետևում է ոչ բացասական որոշյալ մատրիցի 4-րդ հատկությունից, երբ $r = n$:

4. Եթե A -ն դրական որոշյալ մատրից է, ապա A^{-1} մատրիցը նույնպես դրական որոշյալ է:

Այս անհրաժեշտ է: Ներկայացնենք A^{-1} մատրիցը հետևյալ ձևով (տես 3-րդ կետը)՝

$$\mathbb{A}^{-1} = (\mathbb{R}\mathbb{R}^T)^{-1} = (\mathbb{R}^T)^{-1}\mathbb{R}^{-1} = (\mathbb{R}^{-1})^T \mathbb{R}^{-1} = \mathbb{U}\mathbb{W}^T,$$

որտեղ $\mathbb{R}$ -ը չվերասերված մատրից է: Ակնհայտ է, որ $\mathbb{U}$ մատրիցը նույն-պես չվերասերված է: Իրոք, օգտվելով շրջված և հակադարձ մատրիցի հատկություններից, կստանանք՝

$$|\mathbb{U}| = |(\mathbb{R}^{-1})^T| = |\mathbb{R}^{-1}| = |\mathbb{R}|^{-1} \neq 0:$$

5. Եթե $n \times k$ - չափանի ($k < n$) $\mathbb{A}$ մատրիցի համար $\text{rank}(\mathbb{A}) = k$, ապա $\mathbb{A}^T \mathbb{A}$ մատրիցը դրական որոշյալ է՝ $\mathbb{A}^T \mathbb{A} > 0$:

Ա պ ա ց ու ց ու մ: Կամայական $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ -ից վեկտորների համար ունենք՝

$$\mathbf{x}^T (\mathbb{A}^T \mathbb{A}) \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{y} \geq 0,$$

որտեղ $\mathbf{y}^T \mathbf{y} = 0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\mathbb{A} \mathbf{x} = \mathbf{0}$: Այստեղից՝

$$\mathbb{A} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

համակարգն ունի միայն $\mathbf{x} = 0$ լուծումը, քանի որ $\text{rank}(\mathbb{A}) = k$:

6. $\mathbb{A}$ մատրիցը դրական որոշյալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ դրա բոլոր գլխավոր միներները (ներառյալ $|\mathbb{A}|$ որոշիչը) դրական են:

Ա պ ա ց ու ց ու մ: Ապացուցենք անհրաժեշտ պայմանը: Համաձայն կետ 1-ի՝

$$|\mathbb{A}| = |\mathbb{O} \mathbb{A} \mathbb{O}^T| = |\mathbb{O}| |\mathbb{A}| |\mathbb{O}^T| = |\mathbb{A}| = \prod \lambda_i > 0:$$

Դիտարկենք հետևյալ մատրիցը՝

$$\mathbb{A}_r = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{bmatrix} \quad \text{և} \quad \mathbf{x}_r = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix}, \quad r \leq n$$

վեկտորը: Այդ դեպքում ճիշտ է հետևյալ պայմանը, որտեղ $\mathbf{x}_r \neq 0$ ՝

$$\mathbf{x}_r^T \mathbb{A}_r \mathbf{x}_r = \|\mathbf{x}_r^T, \mathbf{0}_{n-r}^T\| \mathbb{A} \|\mathbf{0}_{n-r}, \mathbf{x}_r\| > 0,$$

այսինքն՝ $\mathbb{A}_r$ -ը դրական որոշյալ մատրից է, ուստի՝ $|\mathbb{A}_r| > 0, r = 1, \dots, n$:

Բավարար պայմանի ապացույցը տե՛ս, օրինակ, **Pao** [12]:

7. Դրական որոշյալ մատրիցի բոլոր անկյունագծային տարրերը դրական են:

Ա պ ա ց ու ց ու մ: Դիտարկենք $n \times 1$ -չափանի

$$\mathbf{e}(i) = \|\delta_{i1}, \dots, \delta_{ii}, \dots, \delta_{in}\|^T, \quad i = 1, \dots, n$$

վեկտորները (δ_{ij} -ն **Կրոնեկերի** սիմվոլն է): Այդ դեպքում

$$0 < [\mathbf{e}(i)]^T \mathbb{A} \mathbf{e}(i) = a_{ii}:$$

Իդեմպոտենտ և պրոեկցիոն մատրիցներ

Սահմանում 2. 13: Քառակուսային $\mathbb{A}$ մատրիցը կոչվում է **իդեմպոտենտ**, եթե

$$\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}:$$

Համաչափ իդեմպոտենտ մատրիցը կոչվում է **պրոեկցիոն** մատրից, այսինքն՝

$$\mathbb{A}^T = \mathbb{A} \text{ և } \mathbb{A}^2 = \mathbb{A}:$$

Պնդում 2. 14: 1. **Իդեմպոտենտ** $\mathbb{A}$ մատրիցի սեփական արժեքները բաղկացած են միայն 0 և 1 թվերից:

2. **Պրոեկցիոն** $\mathbb{A}$ մատրիցի **ռանգը** հավասար է դրա **հետքին**՝

$$\text{rank}(\mathbb{A}) = \text{tr}(\mathbb{A}):$$

Ա պ ա ց ու ց ու մ: 1. Դիցուք $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^n$ -ն $\mathbb{A}$ մատրիցի սեփական վեկտորն է, իսկ $\lambda \in \mathcal{R}$ -ը՝ դրա սեփական արժեքը, այսինքն՝ ճիշտ են հետևյալ առնչությունները՝

$$\lambda \mathbf{a} = \mathbb{A} \mathbf{a} = \mathbb{A}^2 \mathbf{a} = \mathbb{A}(\lambda \mathbf{a}) = \lambda(\mathbb{A} \mathbf{a}) = \lambda^2 \mathbf{a},$$

որտեղից՝

$$(\lambda - \lambda^2)\mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ և } \lambda = 0 \text{ կամ } \lambda = 1 (\mathbf{a} \neq \mathbf{0}):$$

2. Քանի որ $\mathbf{A}$ մատրիցը համաչափ է, ապա, համաձայն համաչափ մատրիցների 2-րդ հատկության, $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{\Lambda})$: Ակնհայտ է, որ $\mathbf{\Lambda}$ մատրիցի *ռանգը* հավասար է դրա անկյունագծի *նչ զրոյական* տարրերի թվին, այսինքն՝ 1-երին հավասար սեփական արժեքների թվին, հետևաբար՝

$$\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{\Lambda}) = \text{tr}(\mathbf{\Lambda}): \quad (\text{Հ. 1.3})$$

Մյուս կողմից, օգտվելով համաչափության հատկության կետ 1-ից և պնդում Հ. 14-ի կետ 1-ից, կստանանք՝

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(\mathbf{\Lambda}): \quad (\text{Հ. 1.4})$$

Վերջապես՝ (Հ. 1.3)-ից և (Հ. 1.4)-ից հետևում է, որ $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A})$:

Պնդում Հ. 15: *Եթե $\mathbf{A}$ մատրիցը **հըեմպոտենտ** է, ապա այդպիսին է և $\mathbb{E} - \mathbf{A}$ մատրիցը:*

Ա պ ա գ ու գ ու մ: Տեղի ունեն հետևյալ ակնհայտ հավասարությունները՝

$$(\mathbb{E} - \mathbf{A})^2 = \mathbb{E} - 2\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 = \mathbb{E} - 2\mathbf{A} + \mathbf{A} = \mathbb{E} - \mathbf{A}:$$

Պնդում Հ. 16: *Պրոեկցիոն մատրիցը **նչ բացասական որոշյալ** է:*

Ա պ ա գ ու գ ու մ: Կամայական $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ վեկտորի համար ունենք՝

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^T (\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T \mathbf{y} \geq 0:$$

Օրթոգոնալ պրոեկտման մատրից (տե՛ս *Շեքեր* [13])

Դիցուք $\mathbf{\Omega} \subset \mathcal{R}^n$ էվկլիդեսյան $\mathcal{R}^n$ տարածության k -չափանի ($\dim(\mathbf{\Omega}) = k$) **ենթատարածություն** է:

Սահմանում Հ. 17: $\mathbf{\Omega} \subset \mathcal{R}^n$ ենթատարածության **օրթոգոնալ լրացում** կոչվում է

$$\Omega^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathcal{R}^n : \mathbf{v}^T \mathbf{u} = 0 \text{ բոլոր } \mathbf{u} \in \Omega\} \subset \mathcal{R}^n$$

ենթատարածությունը ($\dim(\Omega^\perp) = n - k$):

Ցանկացած $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^n$ վեկտոր **միակ ձևով** ներկայացվում է

$$\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

տեսքով, որտեղ $\mathbf{u} \in \Omega$, $\mathbf{v} \in \Omega^\perp$:

Սահմանում Հ. 18: $\mathbb{P}_\Omega \mathbf{y} = \mathbf{u}$ բանաձևով միարժեք որոշվող $n \times n$ - չափանի $\mathbb{P}_\Omega$ մատրիցը կոչվում է $\mathbf{y}$ -ի $\Omega \subset \mathcal{R}^n$ ենթատարածության վրա **օրթոգոնալ պրոեկտման մատրից**:

Թեորեմ Հ. 19: *Օրթոգոնալ պրոեկտման $\mathbb{P}_\Omega$ մատրիցը կարելի է ներկայացնել*

$$\mathbb{P}_\Omega = \mathbf{a} \mathbf{a}^T$$

տեսքով, որտեղ $n \times k$ - չափանի $\mathbf{a}$ մատրիցի սյունակները ներկայացնում են Ω ենթատարածության օրթոնորմալ բազիս:

Այս ցուցումով: Դիցուք $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in \Omega$ -ի օրթոնորմալ բազիս է, $\mathbf{a} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k]$ օրթոնորմալ $n \times k$ սյունակ վեկտորներից կազմված մատրից է: Ընդլայնենք այդ բազիսը մինչև $\mathcal{R}^n$ տարածության $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_n$ օրթոնորմալ բազիսը: Կամայական $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^n$ -ից վեկտոր կներկայացվի

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{a}_i + \sum_{i=k+1}^n c_i \mathbf{a}_i = \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

տեսքով, որտեղ $\mathbf{u} \in \Omega$, $\mathbf{v} \in \Omega^\perp$: Մյուս կողմից, քանի որ $\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j = \delta_{ij}$, ապա $\mathbf{a}_i^T \mathbf{y} = c_i$, $i = 1, \dots, n$: Հետևաբար՝

$$\mathbf{u} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k] \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \mathbf{y} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_k^T \mathbf{y} \end{bmatrix} = (\mathbf{a} \mathbf{a}^T) \mathbf{y} = \mathbb{P}_\Omega \mathbf{y} :$$

Հետևանք 20: $\mathbb{P}_\Omega$ մատրիցը համաչափ և իդեմպոտենտ (պրոեկցիոն) մատրից է:

Ապացուցում: Պարզ է, որ $\mathbb{P}_\Omega = \mathbf{a}\mathbf{a}^T$ մատրիցը համաչափ է: Մյուս կողմից՝

$$\mathbb{P}_\Omega^2 = (\mathbf{a}\mathbf{a}^T)(\mathbf{a}\mathbf{a}^T) = \mathbf{a}(\mathbf{a}^T\mathbf{a})\mathbf{a}^T = \mathbf{a}E_k\mathbf{a}^T = \mathbb{P}_\Omega:$$

Պնդում 21: $\mathbb{E}_n - \mathbb{P}_\Omega$ մատրիցը $\Omega^\perp$ տարածության վրա օրթոգոնալ պրոեկտման մատրից է:

Ապացուցում: $\mathbf{y} = \mathbb{P}_\Omega\mathbf{y} + (\mathbb{E}_n - \mathbb{P}_\Omega)\mathbf{y}$ ներկայացումից ($\mathbf{y} \in \mathcal{R}^n$) հետևում է, որ

$$\mathbf{v} = (\mathbb{E}_n - \mathbb{P}_\Omega)\mathbf{y} := \mathbf{u}' \in \Omega^\perp, \text{ իսկ } \mathbb{P}_\Omega\mathbf{y} := \mathbf{v}' \in (\Omega^\perp)^\perp = \Omega:$$

Սահմանում 22: $\mathbb{A}$ մատրիցի պատկեր ($\mathcal{R}(\mathbb{A})$) կոչվում է $\mathbb{A}$ մատրիցի սյունակներով ծնված տարածությունը:

Թեորեմ 23: Դիցուք $\mathbb{P}$ -ն պրոեկցիոն մատրից է: Այդ դեպքում այն կլինի $\mathcal{R}(\mathbb{P})$ տարածության վրա օրթոգոնալ պրոեկտման մատրից:

Ապացուցում: Ներկայացնենք կամայական $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^n$ վեկտորը

$$\mathbf{y} = \mathbb{P}\mathbf{y} + (\mathbb{E}_n - \mathbb{P})\mathbf{y} \quad (\text{Հ. 1.5})$$

տեսքով: Մյուս կողմից, քանի որ

$$(\mathbb{P}\mathbf{y})^T(\mathbb{E}_n - \mathbb{P})\mathbf{y} = \mathbf{y}^T(\mathbb{P} - \mathbb{P}^2)\mathbf{y} = 0,$$

ապա (Հ. 1.5)-ը ներկայացնում է $\mathbf{y}$ վեկտորի օրթոգոնալ անդամների տրոհում, որտեղ $\mathbb{P}\mathbf{y} \in \mathcal{R}(\mathbb{P})$:

Թեորեմ 24: Դիցուք $n \times k$ -չափանի $\mathbb{X}$ մատրիցը գծայնորեն անկախ սյունակներից կազմված մատրից է: Այդ դեպքում $\mathbb{P}_\Omega = \mathbb{X}(\mathbb{X}^T\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}^T$ մատրիցը $\Omega = \mathcal{R}(\mathbb{X}) \subset \mathcal{R}^n$ ենթատիրույթի վրա օրթոգոնալ պրոեկտման մատրից է:

Այս ցուցում: Ներկայացնենք $\mathbb{X}$ մատրիցը $\mathbb{X} = \mathbb{a}\mathbb{C}$ տեսքով, որտեղ $\mathbb{a} = \|\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\|^T$ օրթոնորմալ սյունակ վեկտորներից կազմված $n \times k$ -չափանի մատրից է ($\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ -երը $\Omega = \mathcal{R}(\mathbb{X}) \subset \mathcal{R}^n$ ենթատիրույթի բազիսն է), իսկ $\mathbb{C}$ -ն՝ $k \times k$ -չափանի չվերասերված (հակադարձելի) մատրից ($\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ բազիսից $\mathbb{X}$ մատրիցի $\hat{\mathbf{X}}_1, \dots, \hat{\mathbf{X}}_k$ սյունակներից կազմված բազիսին անցման մատրից): Այսպիսով, կստանանք (տե՛ս թեորեմ 2.19)՝

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\Omega &= \mathbb{a}\mathbf{a}^T = (\mathbb{X}\mathbb{C}^{-1})(\mathbb{C}^{-1})^T\mathbb{X}^T = (\mathbb{X}\mathbb{C}^{-1})(\mathbb{C}^T)^{-1}\mathbb{X}^T = \mathbb{X}(\mathbb{C}^T\mathbb{C})^{-1}\mathbb{X}^T = \\ &= \mathbb{X}(\mathbb{X}^T\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}^T: \end{aligned}$$

Ածանցյալ ըստ վեկտորական արգումենտի

Սահմանում 2.25: Ըստ $\mathbf{x} = \|x_1, \dots, x_n\|^T$ վեկտորական արգումենտի $\varphi(\mathbf{x})$ սկալյար ֆունկցիայի ածանցյալ կոչվում է հետևյալ վեկտորը՝

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \left\| \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right\|^T:$$

Մասնավորապես՝

$$1. \text{ Եթե } \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{a} = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad \mathbf{a} = \|a_1, \dots, a_n\|^T, \quad \text{ապա } \frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{a})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}:$$

$$2. \text{ Եթե } \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbb{A} \mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad \mathbb{A} = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n, \quad \text{ապա}$$

$$\frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbb{A} \mathbf{x})}{\partial x_m} = \sum_{j=1}^n a_{mj} x_j + \sum_{i=1}^n a_{im} x_i = ((\mathbb{A} + \mathbb{A}^T)\mathbf{x})_m,$$

այնպես որ,

$$\frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbb{A} \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = (\mathbb{A} + \mathbb{A}^T)\mathbf{x}:$$

$$\text{Եթե } \mathbb{A} \text{ մատրիցը համաչափ է, ապա } \frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbb{A} \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbb{A}\mathbf{x}:$$

Բլոկ - մատրիցներ

Սահմանում **Հ. 26:** $n \times m$ -չափանի A մատրիցը կոչվում է **բլոկ մատրից**, եթե այն տրոհված է հետևյալ մատրիցների (բլոկների)՝

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (\text{Հ. 1.6})$$

որտեղ A_{ij} -ն $n_i \times m_j$ - չափանի մատրիցներ են ($i, j = 1, 2, n = n_1 + n_2, m = m_1 + m_2$):

Գործողություններ

1. Միևնույն ձևով տրոհված

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \text{ և } B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

երկու բլոկ մատրիցների **գումար** (այսինքն՝ ենթադրվում է, որ A_{ij} և B_{ij} , $i, j = 1, 2$ մատրիցների չափերը համընկնում են) կոչվում է

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{bmatrix}$$

մատրիցը:

2. Երկու A և B բլոկ մատրիցների **արտադրյալ** մատրից կոչվում է

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

մատրիցը, եթե A_{ij} մատրիցների սյունակների թիվը և B_{jk} մատրիցների տողերի թիվը համընկնում են բոլոր $i, j, k = 1, 2$:

Բլոկ մատրիցի որոշիչը

Դիցուք $n \times n$ -չափանի A մատրիցը տրոհված է բլոկների (տե՛ս (Հ. 1.6)) այնպես, որ $n_1 \times n_1$ -չափանի A_{11} և $n_2 \times n_2$ -չափանի A_{22} մատրից-

ները հակադարձելի են: Այդ դեպքում A մատրիցի **որոշիչի** համար ճիշտ է հետևյալ բանաձևը՝

$$|A| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}| |A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}| = |A_{22}| |A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}|:$$

Մասնավոր դեպքում, երբ A_{12} և A_{21} մատրիցները 0-ական մատրիցներ են՝

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} & \mathbf{0}_{n_1 \times n_2} \\ \mathbf{0}_{n_2 \times n_1} & A_{22} \end{vmatrix}$$

(այդպիսի A մատրիցը կոչվում է **անկյունագծային բլոկ մատրից**), ապա

$$|A| = \begin{vmatrix} A_{11} & \mathbf{0}_{n_1 \times n_2} \\ \mathbf{0}_{n_2 \times n_1} & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}| |A_{22}|:$$

Բլոկ մատրիցի հակադարձ մատրիցը

Թեորեմ Հ. 27: *Դիցուք $n \times n$ -չափանի A մատրիցը տրոհված է բլոկների (տե՛ս (Հ.1.6)) այնպես, որ A_{11} -ը և A_{22} -ը քառակուսային հակադարձելի մատրիցներ են: Այդ դեպքում A մատրիցի **հակադարձ մատրիցը** որոշվում է հետևյալ բանաձևից՝*

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} A^{11} & -A_{11}^{-1} A_{12} A^{22} \\ -A_{22}^{-1} A_{21} A^{11} & A^{22} \end{vmatrix},$$

որտեղ $A^{11} = (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1}$, $A^{22} = (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1}$, A_{ij} -երը $n_i \times n_j$ -չափանի մատրիցներ են, $i, j = 1, 2$, $n_1 + n_2 = n$:

Ապացուցում: Նշանակենք՝

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{vmatrix}:$$

Ըստ սահմանման՝ ունենք $AA^{-1} = E_n$ կամ

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_{n_1} & \mathbf{0}_{n_1 \times n_2} \\ \mathbf{0}_{n_2 \times n_1} & E_{n_2} \end{vmatrix}:$$

Այստեղից, համաձայն բոլոր մատրիցների բազմապատկման կանոնի, կստանանք՝

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}A^{11} + A_{12}A^{21} & A_{11}A^{12} + A_{12}A^{22} \\ A_{21}A^{11} + A_{22}A^{21} & A_{21}A^{12} + A_{22}A^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{n_1} & \mathbf{0}_{n_1 \times n_2} \\ \mathbf{0}_{n_2 \times n_1} & E_{n_2} \end{pmatrix} :$$

Որտեղից ունենք՝

$$A_{11}A^{11} + A_{12}A^{21} = E_{n_1}, \quad (\text{Հ. 1.7})$$

$$A_{21}A^{11} + A_{22}A^{21} = E_{n_2}, \quad (\text{Հ. 1.8})$$

$$A_{11}A^{12} + A_{12}A^{22} = \mathbf{0}_{n_1 \times n_2}, \quad (\text{Հ. 1.9})$$

$$A_{21}A^{11} + A_{22}A^{21} = \mathbf{0}_{n_2 \times n_1}: \quad (\text{Հ. 1.10})$$

(Հ. 1.9) ներկայացումից կստանանք՝

$$A^{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}A^{22}:$$

Այնուհետև (Հ. 1.10)-ից կստանանք՝

$$A^{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}A^{11}:$$

Տեղադրելով ստացված արտահայտությունները համապատասխանաբար (Հ. 1.7) և (Հ. 1.8) բանաձևերի մեջ՝ կունենանք՝

$$A_{11}A^{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}A^{11} = E_{n_1},$$

$$-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}A^{22} + A_{22}A^{22} = E_{n_2}:$$

Որտեղից վերջնական կստանանք՝

$$A^{11} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1},$$

$$A^{22} = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}:$$

Հավելված II

Որոշ գաղափարներ հավանականությունների տեսությունից

Պատահական մատրից և պատահական վեկտոր

Պատահական մատրիցի մաթեմատիկական սպասումը

Դիցուք $X = \|X_{ij}\|_{i,j=1}^{n,m}$ -ը ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$) $n \times m$ -չափանի մատրից է, որի X_{ij} տարրերը պատահական մեծություններ են (**պատահական մատրից**): Ենթադրենք՝ X_{ij} պատահական մեծություններն ունեն վերջավոր մաթեմատիկական սպասումներ՝ $E|X_{ij}| < \infty$:

Սահմանում Հ. 28: X պատահական մատրիցի **մաթեմատիկական սպասում** կոչվում է

$$E(X) = \|E(X_{ij})\|_{i,j=1}^{n,m}$$

մատրիցը:

Հատկություններ՝

1. Եթե A -ն, B -ն և C -ն համապատասխանաբար $k \times n$, $m \times l$ և $k \times l$ -չափանի **ոչ պատահական մատրիցներ** են, ապա

$$E(AXB + C) = A[E(X)]B + C:$$

Մասնավորապես՝

- ա) եթե X -ը $n \times 1$ -չափանի **պատահական մատրից** է (**պատահական վեկտոր**՝ $X := \mathbf{X}$), ապա

$$E(A\mathbf{X}) = A[E(\mathbf{X})],$$

Եթե $\mathbb{X} = \mathbf{X}$ -ը $m \times 1$ -չափանի պատահական վեկտոր է, ապա

$$E(\mathbf{X}^T \mathbb{B}) = [E(\mathbf{X}^T)]\mathbb{B},$$

բ) Եթե $\mathbb{A}$ -ն և $\mathbb{B}$ -ն $n \times k$ -չափանի **ոչ** պատահական մատրիցներ են, իսկ $\mathbf{X}$ -ը և $\mathbf{Y}$ -ը՝ $k \times 1$ -չափանի պատահական վեկտորներ, ապա

$$E(\mathbb{A}\mathbf{X} + \mathbb{B}\mathbf{Y}) = \mathbb{A}[E(\mathbf{X})] + \mathbb{B}[E(\mathbf{Y})]:$$

Պատահական վեկտորի կովարիացիոն մատրից

Դիցուք $\mathbf{X} = \|X_1, X_2, \dots, X_n\|^T$ -ն և $\mathbf{Y} = \|Y_1, Y_2, \dots, Y_m\|^T$ -ն $n \times 1$ - և $m \times 1$ -չափանի պատահական վեկտորներ են:

Սահմանում Հ. 29: $\mathbf{X}$ և $\mathbf{Y}$ վեկտորների համատեղ կովարիացիոն մատրից կոչվում է հետևյալ մատրիցը՝

$$\mathbb{V}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = E[(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))(\mathbf{Y} - E(\mathbf{Y}))^T] = \|\text{cov}(X_i, Y_j)\|_{i,j=1}^{n,m}:$$

Հեշտ է տեսնել, որ

$$\mathbb{V}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = E(\mathbf{X}\mathbf{Y}^T) - [E(\mathbf{X})][E(\mathbf{Y})]^T:$$

Հատկություններ՝

1. Եթե $\mathbb{A}$ -ն և $\mathbb{B}$ -ն համապատասխանաբար $k \times n$ - և $l \times m$ -չափանի **ոչ** պատահական մատրիցներ են, իսկ $\mathbf{a}$ -ն և $\mathbf{b}$ -ն՝ համապատասխանաբար $k \times 1$ և $l \times 1$ -չափանի **ոչ** պատահական վեկտորներ, ապա

$$\mathbb{V}(\mathbb{A}\mathbf{X} + \mathbf{a}, \mathbb{B}\mathbf{Y} + \mathbf{b}) = \mathbb{A}\mathbb{V}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbb{B}^T:$$

2. Եթե $\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i, i = 1, 2, n \times 1$ -չափանի պատահական վեկտորներ են, իսկ $a_i, b_i \in \mathcal{R}$, ապա

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(a_1\mathbf{X}_1 + b_1\mathbf{Y}_1, a_2\mathbf{X}_2 + b_2\mathbf{Y}_2) &= a_1a_2 \mathbb{V}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) + a_1b_2 \mathbb{V}(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_2) + \\ &+ b_1a_2 \mathbb{V}(\mathbf{Y}_1, \mathbf{X}_2) + b_1b_2 \mathbb{V}(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2): \end{aligned}$$

Սահմանում Հ. 30: Եթե $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$, ապա $\mathbb{V}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) := \mathbb{V}(\mathbf{X})$ մատրիցը կոչվում է $\mathbf{X}$ վեկտորի կովարիացիոն մատրից:

Այսպիսով՝

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\mathbf{X}) &= E[(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))^T] = E(\mathbf{X}\mathbf{X}^T) - [E(\mathbf{X})][E(\mathbf{X})]^T = \\ &= \|\text{cov}(X_i, X_j)\|_{i,j=1}^{n,m} : \end{aligned}$$

Պարզ է, որ $\mathbb{V}(\mathbf{X})$ կովարիացիոն մատրիցի գլխավոր անկյունագծի վրա գտնվում են X_i պատահական մեծությունների $\text{var}(X_i)$ ցրվածքները, $i = 1, \dots, n$: Բացի այդ՝ ակնհայտ է, որ $\mathbb{V}(\mathbf{X})$ -ը **համաչափ մատրից** է: Եթե $n = 1$, $\mathbb{V}(\mathbf{X}) = \text{var}(X_1)$:

Հատկություններ՝

1. $\mathbb{V}(\mathbf{A}\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbb{V}(\mathbf{X})\mathbf{A}^T$:
2. Եթե $\mathbf{X}$ -ը և $\mathbf{Y}$ -ը $n \times 1$ -չափանի պատահական վեկտորներ են, իսկ $a, b \in \mathcal{R}$, ապա

$$\mathbb{V}(a\mathbf{X} + b\mathbf{Y}) = a^2 \mathbb{V}(\mathbf{X}) + 2ab \mathbb{V}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + b^2 \mathbb{V}(\mathbf{Y}) :$$

Եթե $\mathbf{X}$ և $\mathbf{Y}$ պատահական վեկտորներն **անկախ** են, ապա

$$\mathbb{V}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{0}_{n \times n}, \text{ և}$$

$$\mathbb{V}(a\mathbf{X} + b\mathbf{Y}) = a^2 \mathbb{V}(\mathbf{X}) + b^2 \mathbb{V}(\mathbf{Y}) :$$

3. $\mathbb{V}(\mathbf{X})$ մատրիցը **ոչ բացասական որոշյալ** է՝ $\mathbb{V}(\mathbf{X}) \geq 0$:

Ապացուցում: Իրոք, կամայական $\mathbf{t} = \|t_1, t_2, \dots, t_n\|^T$ վեկտորի համար ճիշտ է

$$\text{var}(\mathbf{t}^T \mathbf{X}) = \text{var}\left(\sum_{i=1}^n t_i X_i\right) \geq 0$$

անհավասարությունը: Մյուս կողմից՝

$$\mathbf{t}^T \mathbb{V}(\mathbf{X}) \mathbf{t} = \mathbb{V}(\mathbf{t}^T \mathbf{x}) = \text{var}(\mathbf{t}^T \mathbf{x}) \geq 0 :$$

Պատահական մատրիցի պայմանական մաթեմատիկական սպասում

Դիցուք $\mathbb{X} = \|X_{ij}\|_{i,j=1}^{n,k}$ -ը և $\mathbb{Y} = \|Y_{ij}\|_{i,j=1}^{m,l}$ -ը պատահական մատրիցներ են:

Սահմանում Հ. 31: $\mathbb{Y}$ մատրիցի պայմանական մաթեմատիկական սպասում ըստ $\mathbb{X}$ մատրիցի կոչվում է հետևյալ մատրիցը՝

$$E(\mathbb{Y}|\mathbb{X}) = \|E(Y_{ij}|\mathbb{X})\|_{i,j=1}^{m,l},$$

որտեղ $E(Y_{ij}|\mathbb{X}) = E(Y_{ij}|\hat{\mathbf{X}}_1, \hat{\mathbf{X}}_2, \dots, \hat{\mathbf{X}}_k)$, $\hat{\mathbf{X}}_m$ -երը, $m = 1, \dots, k$, $\mathbb{X}$ մատրիցի սյունակ վեկտորներն են:

Հատկություններ՝

1. Եթե $\mathbb{A}$ -ն **ոչ պատահական մատրից** է, ապա

$$E(\mathbb{A}|\mathbb{X}) = \mathbb{A}:$$

2. Եթե $\mathbb{Y} \leq \mathbb{Z}$ (այսինքն՝ $\mathbb{Z} - \mathbb{Y} \geq \mathbf{0}$ **ոչ բացասական որոշյալ մատրից** է), ապա

$$E(\mathbb{Y}|\mathbb{X}) \leq E(\mathbb{Z}|\mathbb{X}):$$

3. Եթե $\mathbb{A}$ -ն և $\mathbb{B}$ -ն $k \times m$ -չափանի **ոչ պատահական մատրիցներ** են, $\mathbb{C}$ -ն և $\mathbb{D}$ -ն՝ $l \times k$ -չափանի **ոչ պատահական մատրիցներ**, իսկ $\mathbb{Y}$ -ը և $\mathbb{Z}$ -ը՝ $m \times l$ -չափանի **պատահական մատրիցներ**, ապա

$$\begin{aligned} E(\mathbb{A}\mathbb{Y} + \mathbb{B}\mathbb{Z}|\mathbb{X}) &= \mathbb{A}E(\mathbb{Y}|\mathbb{X}) + \mathbb{B}E(\mathbb{Z}|\mathbb{X}), \\ E(\mathbb{Y}\mathbb{C} + \mathbb{Z}\mathbb{D}|\mathbb{X}) &= E(\mathbb{Y}|\mathbb{X})\mathbb{C} + E(\mathbb{Z}|\mathbb{X})\mathbb{D} : \end{aligned}$$

4. $E[E(\mathbb{Y}|\mathbb{X})] = E(\mathbb{Y}) :$

5. Եթե $g(\mathbb{X})$ -ը $\mathbb{X}$ **պատահական մատրիցից** որոշակի ֆունկցիա է, ապա

$$E[E(\mathbb{Y}|\mathbb{X})|g(\mathbb{X})] = E(\mathbb{Y}|\mathbb{X}) :$$

6. Եթե $g(\mathbb{X})$ -ը և $\varphi(\mathbb{X})$ -ը համապատասխանաբար $k \times m$ - և $l \times n$ -չափանի մատրիցներ են՝ կախված $\mathbb{X}$ **պատահական մատրիցից**, ապա

$$E[g(\mathbb{X})\mathbb{Y}\varphi(\mathbb{X})|\mathbb{X}] = g(\mathbb{X})E(\mathbb{Y}|\mathbb{X})\varphi(\mathbb{X}) :$$

7. Եթե $\mathbb{Y}$ և $\mathbb{X}$ **պատահական մատրիցներն անկախ** են, ապա

$$E(\mathbb{Y}|\mathbb{X}) = E(\mathbb{Y}) :$$

Պատահական վեկտորի պայմանական կովարիացիոն մատրից

Սահմանում Հ. 32: Y պատահական վեկտորի՝ ըստ պատահական X մատրիցի պայմանական կովարիացիոն $V(Y|X)$ մատրից կոչվում է հետևյալ մատրիցը՝

$$V(Y|X) = E \left[(Y - E(Y|X))(Y - E(Y|X))^T | X \right] = \\ E(YY^T | X) - E(Y|X)E(Y|X)^T :$$

Հատկություն՝

Եթե $g(X)$ -ը X պատահական մատրիցից կախված $m \times n$ - չափանի մատրից է, իսկ Y -ը՝ $n \times 1$ -չափանի պատահական վեկտոր, ապա

$$V(g(X)Y|X) = g(X)V(Y|X)[g(X)]^T :$$

Բազմաչափ նորմալ բաշխում (տե՛ս *Ըեթեր* [13])

Սահմանում Հ. 33: $X = \|X_1, \dots, X_n\|^T$ պատահական վեկտորն ունի բազմաչափ նորմալ (Գաուսի) բաշխում ($X \sim N_n(\mathbf{m}, \Sigma)$), եթե նրա խտության ֆունկցիան ներկայացվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$f(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-n/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{m})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}) \right\},$$

որտեղ $\mathbf{x} = \|x_1, \dots, x_n\|^T \in \mathcal{R}^n$, $\mathbf{m} = \|m_1, \dots, m_n\|^T \in \mathcal{R}^n$, $\Sigma > 0$ ՝ դրական որոշյալ $n \times n$ - չափանի մատրից է, և $|\Sigma| = \det(\Sigma)$:

Թեորեմ Հ. 34: Եթե $X \sim N_n(\mathbf{m}, \Sigma)$, ապա

1. $\int_{\mathcal{R}^n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$ ($d\mathbf{x} = dx_1 \times \dots \times dx_n$),

այսինքն՝ $f(\mathbf{x})$ -ը բազմաչափ խտության ֆունկցիա է:

2. $E(X) = \mathbf{m}$, $V(X) = \Sigma$:

3. $\chi_n^2 = (X - \mathbf{m})^T \Sigma^{-1} (X - \mathbf{m}) \sim \mathbb{H}^2(n)$ ՝

χ_n^2 պատահական մեծությունն ունի n ազատության աստիճաններով χ^2 բաշխում:

Այս անգամ: 1. Քանի որ Σ մատրիցը դրական որոշյալ է, ապա (տե՛ս պնդում Հ. 9) գոյություն ունի օրթոգոնալ $\mathbb{O}$ մատրից այնպիսին, որ $\mathbb{O}^T \Sigma \mathbb{O} = \Lambda$, որտեղ $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ անկյունագծային մատրից է, իսկ $\lambda_i > 0$ ՝ Σ մատրիցի սեփական արժեքներն են: Կատարենք փոփոխականի փոխարինում՝ $\mathbf{x} - \mathbf{m} = \mathbb{O}\mathbf{y}$: Այս ձևափոխության **յակոբիանը** հավասար է

$$\mathcal{J} = \det \left\| \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right\|_{i,j=1}^n = \det \mathbb{O} = \pm 1,$$

որտեղից $\mathcal{J}$ **յակոբիանի** մոդուլը կլինի հավասար $|\mathcal{J}| = 1$:

Մյուս կողմից, ունենք՝

$$\Lambda^{-1} = (\mathbb{O}^T \Sigma \mathbb{O})^{-1} = \mathbb{O}^{-1} \Sigma^{-1} \mathbb{O} = \mathbb{O}^T \Sigma^{-1} \mathbb{O},$$

այնպես որ,

$$\mathbb{O}^T \Sigma^{-1} \mathbb{O} = \text{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}):$$

Գտնենք հետևյալ ինտեգրալի արժեքը՝

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{m})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}) \right\} d\mathbf{x} &= \int_{\mathcal{R}^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbb{O}^T \Sigma^{-1} \mathbb{O} \mathbf{y} \right\} d\mathbf{y} = \\ &= \int_{\mathcal{R}} \cdots \int_{\mathcal{R}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{\lambda_i} \right\} dy_1 \cdots dy_n = \\ &= \prod_{i=1}^n \int_{\mathcal{R}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{y_i^2}{\lambda_i} \right\} dy_i = (2\pi)^{n/2} \prod_{i=1}^n (\lambda_i)^{1/2}, \end{aligned}$$

և, քանի որ

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = |\Lambda| = |\Sigma|,$$

ապա 1-ին պայմանն ապացուցվեց:

2. Քանի որ $\mathbb{O}\mathbf{Y} = \mathbf{X} - \mathbf{m}$, ապա $\mathbf{Y}$ պատահական վեկտորի խտության ֆունկցիան կլինի հավասար՝

$$g(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}(\mathbf{y}))|\mathcal{J}| = \prod_{i=1}^n (2\pi\lambda_i)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{y_i^2}{\lambda_i} \right\}, \quad \mathbf{y} = \|y_1, \dots, y_n\|^T:$$

Հետևաբար, $Y_i \sim \mathbb{N}(0, \lambda_i)$ -երը **անկախ նորմալ բաշխված** պատահական մեծություններ են: Այստեղից հետևում է, որ

$$E(\mathbf{Y}) = \mathbf{0}, V(\mathbf{Y}) = E(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T) = \mathbf{\Lambda}:$$

Այնպես որ՝

$$E(\mathbf{X} - \mathbf{m}) = E(\mathbf{O}\mathbf{Y}) = \mathbf{O}E(\mathbf{Y}) = \mathbf{0} \text{ և } E(\mathbf{X}) = \mathbf{m}:$$

Մյուս կողմից՝

$$\begin{aligned} V(\mathbf{X}) &= E[(\mathbf{X} - \mathbf{m})(\mathbf{X} - \mathbf{m})^T] = E[\mathbf{O}\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T\mathbf{O}^T] = \mathbf{O}[E(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T)]\mathbf{O}^T = \\ &= \mathbf{O}\mathbf{\Lambda}\mathbf{O}^T = \mathbf{O}(\mathbf{O}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{O})\mathbf{O}^T = \mathbf{\Sigma}: \end{aligned}$$

3. Դիտարկենք $\chi_n^2 = (\mathbf{X} - \mathbf{m})^T\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X} - \mathbf{m})$ պատահական մեծությունը, որը ձևափոխելով կրեյվի հետևյալ տեսքի՝

$$\chi_n^2 = \mathbf{Y}^T\mathbf{O}^T\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{O}\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{Y_i^2}{\lambda_i} \right) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2,$$

որտեղ $\varepsilon_i \sim \mathbb{N}(0,1)$ -ը **ստանդարտ նորմալ** բաշխում ունեցող անկախ պատահական մեծություններ են (տե՛ս կետ 2-ը): Այսպիսով, χ_n^2 պատահական մեծությունն ունի **n** ազատության աստիճաններով χ^2 բաշխում՝ $\chi_n^2 \sim \mathbb{H}^2(n)$ (տե՛ս [15], թեորեմ 2.2):

Հետևանք 2. 35: Եթե $X_i \sim \mathbb{N}(m_i, \sigma^2)$, $i = 1, \dots, n$ միևնույն ցրվածքով **նորմալ բաշխված անկախ** պատահական մեծություններ են, ապա

$$\mathbf{X} = \|X_1, \dots, X_n\|^T \sim \mathbb{N}_n(\mathbf{m}, \sigma^2\mathbb{E}_n)$$

վեկտորն ունի բազմաչափ **նորմալ բաշխում**, որտեղ $\mathbf{m} = \|m_1, \dots, m_n\|^T$:

Ապացուցում: Հստ պայմանի, ունենք $(\mathbf{x} = \|x_1, \dots, x_n\|^T)$ ՝

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^n f_i(x_i) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m_i)^2\right\} = \\ &= (2\pi)^{-n/2} |\sigma^2\mathbb{E}_n|^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{m})^T (\sigma^2\mathbb{E}_n)^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m})\right\}: \end{aligned}$$

Թեորեմ Հ. 36: $\mathbf{X} \sim \mathbb{N}_n(\mathbf{m}, \Sigma)$ վեկտորի $\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = E(e^{i\mathbf{t}^T \mathbf{X}})$ բնութագրիչ ֆունկցիան հավասար է

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \exp \left\{ i\mathbf{t}^T \mathbf{m} - \frac{1}{2} \mathbf{t}^T \Sigma \mathbf{t} \right\} = \exp \left\{ i \sum t_j m_j - \frac{1}{2} \sum \sigma_{jk} t_j t_k \right\},$$

որտեղ $\mathbf{t} = \|t_1, \dots, t_n\|^T$, $\mathbf{m} = \|m_1, \dots, m_n\|^T$, $\Sigma = \|\sigma_{jk}\|_{j,k=1}^n$, իսկ i -ն կենդ միավորն է:

Այսպիսով: Գտնենք $M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = E(e^{\mathbf{t}^T \mathbf{X}})$ մոմենտների ծնորդ ֆունկցիան, որտեղից այնուհետև կգտնենք $\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = M_{\mathbf{X}}(i\mathbf{t})$ բնութագրիչ ֆունկցիան: Դիտարկենք $\mathbf{Y} = \mathbf{X} - \mathbf{m} \sim \mathbb{N}_n(\mathbf{0}, \Sigma)$ պատահական վեկտորը և գտնենք $\mathbf{X}$ վեկտորի համար մոմենտների ծնորդ ֆունկցիան՝

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) &= E[\exp\{\mathbf{t}^T \mathbf{X}\}] = E[\exp\{\mathbf{t}^T (\mathbf{Y} + \mathbf{m})\}] = \\ &= (2\pi)^{-n/2} |\Sigma|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \Sigma^{-1} \mathbf{y} + \mathbf{t}^T (\mathbf{y} + \mathbf{m}) \right\} d\mathbf{y} = \\ &= (2\pi)^{-n/2} |\Sigma|^{-1/2} \times \\ &\times \exp \left\{ \mathbf{t}^T \mathbf{m} + \frac{1}{2} \mathbf{t}^T \Sigma \mathbf{t} \right\} \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \Sigma \mathbf{t})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{y} - \Sigma \mathbf{t}) \right\} d\mathbf{y} = \\ &= \exp \left\{ \mathbf{t}^T \mathbf{m} + \frac{1}{2} \mathbf{t}^T \Sigma \mathbf{t} \right\}, \end{aligned}$$

քանի որ

$$(2\pi)^{-n/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \Sigma \mathbf{t})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{y} - \Sigma \mathbf{t}) \right\}$$

ֆունկցիան $\mathbb{N}_n(\Sigma \mathbf{t}, \Sigma)$ բաշխում ունեցող պատահական մեծության խտության ֆունկցիան է: Բացի այդ, նկատենք, որ

$$-\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \Sigma \mathbf{t})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{y} - \Sigma \mathbf{t}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \Sigma^{-1} \mathbf{y} + \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \Sigma^{-1} \Sigma \mathbf{t} + \frac{1}{2} \mathbf{t}^T \Sigma^T \Sigma^{-1} \mathbf{y} - \frac{1}{2} \mathbf{t}^T \Sigma^T \Sigma^{-1} \Sigma \mathbf{t} = \\
 &= -\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \Sigma^{-1} \mathbf{y} + \mathbf{t}^T \mathbf{y} - \frac{1}{2} \mathbf{t}^T \Sigma \mathbf{t} :
 \end{aligned}$$

Այսպիսով՝

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = M_{\mathbf{X}}(i\mathbf{t}) = \exp \left\{ i\mathbf{t}^T \mathbf{m} - \frac{1}{2} \mathbf{t}^T \Sigma \mathbf{t} \right\} :$$

Լեմմա Հ. 37: Դիցուք $\mathbf{X} \sim N_n(\mathbf{m}, \Sigma)$, իսկ $\mathbb{C}$ -ն $p \times n$ -չափանի մատրից է ($p < n$), որի համար՝ $\text{rank}(\mathbb{C}) = p$: Այդ դեպքում՝

$$\mathbb{C}\mathbf{X} \sim N_p(\mathbb{C}\mathbf{m}, \mathbb{C}\Sigma\mathbb{C}^T):$$

Ա պ ա ղ ու ղ ու մ: Դիտարկենք $\mathbf{Y} = \mathbb{C}\mathbf{X}$ վեկտորը: Գտնենք $\mathbf{Y}$ -ի մոմենտների ծնորդ ֆունկցիան՝

$$M_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t}) = E[\exp\{\mathbf{t}^T \mathbf{Y}\}] = E[\exp\{\mathbf{t}^T \mathbb{C}\mathbf{X}\}] = E[\exp\{\mathbf{s}^T \mathbf{X}\}] =$$

$$= \exp \left\{ \mathbf{s}^T \mathbf{m} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \Sigma \mathbf{s} \right\} = \exp \left\{ \mathbf{t}^T (\mathbb{C}\mathbf{m}) + \frac{1}{2} \mathbf{t}^T (\mathbb{C}\Sigma\mathbb{C}^T) \mathbf{t} \right\},$$

որտեղ $\mathbf{t}^T \in \mathcal{R}^p$, իսկ $\mathbf{s}^T = \mathbf{t}^T \mathbb{C}$ -ն n -չափանի տող վեկտոր է: Այստեղից, եթե ցույց տանք, որ $\mathbb{C}\Sigma\mathbb{C}^T > 0$ դրական որոշյալ մատրից է, ապա կեզրակացնենք, որ $\mathbf{Y} \sim N_p(\mathbb{C}\mathbf{m}, \mathbb{C}\Sigma\mathbb{C}^T)$: Քանի որ $\Sigma > 0$ դրական որոշյալ մատրից է, ապա, համաձայն Հ. 12-ի հատկություն 3-ի, գոյություն ունի չվերասերված $n \times n$ -չափանի $\mathbb{R}$ մատրից, այնպիսին, որ $\Sigma = \mathbb{R}\mathbb{R}^T$: Այստեղից՝

$$\mathbb{C}\Sigma\mathbb{C}^T = \mathbb{C}\mathbb{R}(\mathbb{C}\mathbb{R})^T := \mathbb{B}\mathbb{B}^T,$$

որտեղ (տե՛ս Հ. 5-ի հատկություն 1)

$$\text{rank}(\mathbb{B}) = \text{rank}(\mathbb{C}\mathbb{R}) = \text{rank}(\mathbb{C}) = p :$$

Այսպիսով (տե՛ս Հ. 5-ի հատկություն 3-ը), ունենք

$$\text{rank}(\mathbb{B}\mathbb{B}^T) = \text{rank}(\mathbb{B}) = p,$$

այսինքն՝ $\mathbb{B}\mathbb{B}^T = \mathbb{C}\Sigma\mathbb{C}^T$ մատրիցը (տե՛ս Հ. 12 -ի հատկություն 5) դրական որոշյալ է:

Թեորեմ Հ. 38: Որպեսզի $\mathbf{X} = \|X_1, \dots, X_n\|^T$ վեկտորն ունենա **բազմաչափ նորմալ** բաշխում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ կամայական $\mathbf{c} \in \mathcal{R}^n$ վեկտորի համար $\mathbf{c}^T \mathbf{X}$ ($\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$) պատահական մեծությունը լինի բաշխված **նորմալ** օրենքով:

Ապացուցում: Դիցուք $\mathbf{X}$ վեկտորի համար $E(\mathbf{X}) = \mathbf{m}$, $V(\mathbf{X}) = \Sigma$: Եթե կամայական $\mathbf{c} \in \mathcal{R}^n$ -ից վեկտորի համար $Y = \mathbf{c}^T \mathbf{X}$ պատահական մեծությունը բաշխված է **նորմալ** օրենքով, ապա

$$E(Y) = \mathbf{c}^T \mathbf{m}, \text{var}(Y) = \mathbf{c}^T \Sigma \mathbf{c},$$

այնպես որ, $Y \sim N(\mathbf{c}^T \mathbf{m}, \mathbf{c}^T \Sigma \mathbf{c})$: Այստեղից Y պատահական մեծության մոմենտների ծնորդ ֆունկցիան կլինի

$$M_Y(t) = E[\exp\{tY\}] = \exp\left\{t(\mathbf{c}^T \mathbf{m}) + \frac{1}{2} (\mathbf{c}^T \Sigma \mathbf{c}) t^2\right\},$$

բոլոր $t \in \mathcal{R}$ -ից: Վերցնելով $t = 1$ ՝ կստանանք՝

$$E[\exp\{\mathbf{c}^T \mathbf{X}\}] = \exp\left\{\mathbf{c}^T \mathbf{m} + \frac{1}{2} (\mathbf{c}^T \Sigma \mathbf{c})\right\} = M_{\mathbf{X}}(\mathbf{c}),$$

որտեղից՝ $\mathbf{X} \sim N_n(\mathbf{m}, \Sigma)$: Նկատենք, որ $\text{var}(Y) = \mathbf{c}^T \Sigma \mathbf{c} > 0$, եթե $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, ուստի Σ -ն դրական որոշյալ մատրից է:

Ընդհակառակն, եթե $\mathbf{X} \sim N_n(\mathbf{m}, \Sigma)$, ապա, համաձայն լեմմա Հ. 37-ի,

$$Y = \mathbf{c}^T \mathbf{X} \sim N(\mathbf{c}^T \mathbf{m}, \mathbf{c}^T \Sigma \mathbf{c}),$$

$\mathbf{c}^T$ վեկտորի ռանգը՝ $\text{rank}(\mathbf{c}^T) = 1$:

Հատկություններ

Թեորեմ Հ. 39: $\mathbf{X} \sim N_n(\mathbf{m}, \Sigma)$ վեկտորի ցանկացած ենթավեկտոր նույնպես ունի **բազմաչափ նորմալ** բաշխում:

Ապացուցում: Զխախտելով ընդհանրությունը՝ որպես $\mathbf{X}$ վեկտորի ենթավեկտոր վերցնենք հետևյալ p - չափանի ($p < n$) $\mathbf{Y} = \|X_1, \dots, X_p\|^T$ վեկտորը: Ներկայացնենք այն

$$\mathbf{Y} = \|\mathbb{E}_p \mathbf{0}_{p \times (n-p)}\| \mathbf{X} = \mathbf{C} \mathbf{X}$$

տեսքով, որտեղ $\text{rank}(\mathbf{C}) = p$: Այստեղից, համաձայն լեմմա 37-ի՝

$$\mathbf{Y} \sim \mathbb{N}_p(\mathbf{C}\mathbf{m}, \mathbf{C}\Sigma\mathbf{C}^T),$$

որտեղ $\mathbf{C}\mathbf{m} = \|m_1, \dots, m_p\|^T$, իսկ $\mathbf{C}\Sigma\mathbf{C}^T = \Sigma_p$:

Նեոսանք 2. 40: Եթե $\mathbf{X} = \|X_1, \dots, X_n\|^T \sim \mathbb{N}_n(\mathbf{m}, \Sigma)$, ապա $X_i \sim \mathbb{N}(m_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \dots, n$:

Դիտողություն: $\mathbf{X} = \|X_1, \dots, X_n\|^T$ վեկտորի $X_i \sim \mathbb{N}(m_i, \sigma_i^2)$ անդամների նորմալ բաշխվածությունից, չի հետևում, որ $\mathbf{X}$ վեկտորն ունի $\mathbb{N}_n(\mathbf{m}, \Sigma)$ բազմաչափ նորմալ բաշխում: Դա տեղի կունենա միայն այն դեպքում, երբ $\mathbf{c}^T \mathbf{X}$ պատահական մեծությունները կամայական $\mathbf{c} \in \mathcal{R}^n$ -ից լինեն նորմալ բաշխված:

Թեորեմ 2. 41: Դիցուք $\mathbf{X} \sim \mathbb{N}_n(\mathbf{m}, \Sigma)$: Դիտարկենք $\mathbf{X}$ վեկտորի հետևյալ տրոհումը՝ $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^1 \\ \mathbf{X}^2 \end{bmatrix}$, որտեղ $\mathbf{X}^1 \in \mathcal{R}^p$, $\mathbf{X}^2 \in \mathcal{R}^{n-p}$: Որպեսզի $\mathbf{X}^1$ և $\mathbf{X}^2$ վեկտորները լինեն անկախ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\mathbb{V}(\mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2) = \mathbf{0}_{p \times (n-p)}$:

Այսպիսով: Եթե $\mathbf{X}^1$ և $\mathbf{X}^2$ վեկտորներն անկախ են, ապա անկախ են դրանց կամայական X_i^1 և X_j^2 , $i = 1, \dots, p$, $j = p + 1, \dots, n$ տարրերի զույգերը: Այնպես որ՝

$$\text{cov}(X_i^1, X_j^2) = E[(X_i^1 - m_i^1)(X_j^2 - m_j^2)] = E(X_i^1 - m_i^1) E(X_j^2 - m_j^2) = 0,$$

որտեղ $m_i^1 = E(X_i^1)$, $m_j^2 = E(X_j^2)$, այսինքն՝

$$\mathbb{V}(\mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2) = E[(\mathbf{X}^1 - \mathbf{m}^1)(\mathbf{X}^2 - \mathbf{m}^2)^T] = \mathbf{0}_{p \times (n-p)}:$$

Ընդհակառակն, դիցուք $\mathbb{V}(\mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2) = \mathbf{0}_{p \times (n-p)}$: Նշանակենք՝

$$\Sigma_{ii} = \mathbb{V}(\mathbf{X}^i) = E[(\mathbf{X}^i - \mathbf{m}^i)(\mathbf{X}^i - \mathbf{m}^i)^T], \quad i = 1, 2,$$

$$\Sigma_{12} = \mathbb{V}(\mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2) = \mathbf{0}_{p \times (n-p)}, \quad \Sigma_{21} = \mathbb{V}(\mathbf{X}^2, \mathbf{X}^1) = \mathbf{0}_{(n-p) \times p}:$$

$\mathbf{X}$ վեկտորի կովարիանսի մատրիցը կներկայացվի հետևյալ ձևով՝

$$\Sigma = \left\| \begin{array}{cc} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} \Sigma_{11} & \mathbf{0}_{p \times (n-p)} \\ \mathbf{0}_{(n-p) \times p} & \Sigma_{22} \end{array} \right\| :$$

Հեշտ է տեսնել (տե՛ս թեորեմ Հ. 27), որ

$$\Sigma^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} \Sigma_{11}^{-1} & \mathbf{0}_{p \times (n-p)} \\ \mathbf{0}_{(n-p) \times p} & \Sigma_{22}^{-1} \end{array} \right\| \text{ և } |\Sigma| = |\Sigma_{11}| |\Sigma_{22}| :$$

Այժմ դիտարկենք հետևյալ ներկայացումը՝

$$(\mathbf{X} - \mathbf{m})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{m}) = \sum_{i=1}^2 (\mathbf{X}^i - \mathbf{m}^i)^T \Sigma_{ii}^{-1} (\mathbf{X}^i - \mathbf{m}^i) := Q_1 + Q_2 :$$

Այսպիսով, $\mathbf{X}$ վեկտորի խտության ֆունկցիան կրերվի հետևյալ տեսքի՝

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= (2\pi)^{-n/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (Q_1 + Q_2) \right\} = \\ &= (2\pi)^{-(1/2)p} |\Sigma_{11}|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} Q_1 \right\} \times \\ &\times (2\pi)^{-(1/2)(n-p)} |\Sigma_{22}|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} Q_2 \right\} = f_1(\mathbf{x}_1) f_2(\mathbf{x}_2) : \end{aligned}$$

Հետևանք Հ. 42: Եթե $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}^k \end{pmatrix} \sim \mathbb{N}_n(\mathbf{m}, \Sigma)$, $\mathbf{X}^i$ -ն n_i -չափանի վեկտոր է,

և $\mathbb{V}(\mathbf{X}^i, \mathbf{X}^j) = \mathbf{0}_{n_i \times n_j}$, $i, j = 1, \dots, k$, $i \neq j$, $\sum n_i = n$, ապա $\mathbf{X}^i$ վեկտորները **համախմբովի անկախ** են: Մասնավորապես, եթե $\mathbf{X} = \|\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n\|^T \sim \mathbb{N}_n(\mathbf{m}, \Sigma)$ վեկտորի X_i , $i = 1, \dots, n$ անդամները **չկորելյացված** են, $\text{cov}(X_i, X_j) = 0$, $i \neq j$, ապա X_i պատահական մեծություններն **անկախ** են:

Թեորեմ Հ. 43: Դիցուք $\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathbb{N}_n(\mathbf{0}, \mathbb{E}_n)$: Դիտարկենք

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{a} \text{ և } \mathbf{Y} = \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{b}$$

պատահական վեկտորները, որտեղ $\mathbf{A}$ -ն՝ $p \times n$ -չափանի մատրից է, $\mathbf{B}$ -ն՝ $q \times n$ -չափանի մատրից, $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^p$, $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^q$ ՝ կամայական վեկտորներ: Այդ դեպքում $\mathbb{V}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{A}\mathbf{B}^T$: Մասնավորապես, $\mathbf{X}$ և $\mathbf{Y}$ **վեկտորներն անկախ** են այն և միայն այն դեպքում, երբ $\mathbf{A}\mathbf{B}^T = \mathbf{0}_{p \times q}$:

Այսպիսով: Համաձայն Հ. 29 հատկություն 1-ի՝ ունենք՝

$$V(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = A V(\boldsymbol{\varepsilon}) B^T = A B^T :$$

Այստեղից, օգտվելով թեորեմ Հ. 41-ից, կստանանք անկախության համար անհրաժեշտ և բավարար $A B^T = \mathbf{0}_{p \times q}$ պայմանը:

Թեորեմ Հ. 44: Դիցուք $\mathbf{X} \sim N_n(\mathbf{m}, \Sigma)$: Այդ դեպքում այն ներկայացվում է հետևյալ ձևով՝

$$\mathbf{X} = (\mathbf{O} \Lambda^{1/2}) \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{m},$$

որտեղ $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{E}_n)$, $\mathbf{O}$ -ն օրթոգոնալ մատրից է, $\Lambda = \mathbf{O}^T \Sigma \mathbf{O}$ -ն՝ անկյունագծային մատրից, որի λ_i տարրերը Σ մատրիցի սեփական արժեքներն են (համեմատել $\mathbf{X} \sim N(m, \sigma^2)$ պատահական մեծության $\mathbf{X} = \sigma \varepsilon + m$ ներկայացման հետ, որտեղ $\varepsilon \sim N(0, 1)$):

Այսպիսով: Քանի որ Σ կովարիացիոն մատրիցը **համաչափ** է և **դրական որոշյալ**, ապա դրա բոլոր սեփական արժեքները դրական են՝ $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, և գոյություն ունի (տե՛ս պնդում Հ. 9) օրթոգոնալ $\mathbf{O}$ մատրից այնպիսին, որ $\Lambda = \mathbf{O}^T \Sigma \mathbf{O}$, որտեղ Λ -ն λ_i տարրերով կազմված անկյունագծային մատրից է:

Դիցուք $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{E}_n)$ ստանդարտ **նորմալ** բաշխված պատահական վեկտոր է: Դիտարկենք $\mathbf{Y} = (\mathbf{O} \Lambda^{1/2}) \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{m}$ վեկտորը, որտեղ $\Lambda^{1/2}$ -ը $\lambda_i^{1/2}$, $i = 1, \dots, n$ տարրերով կազմված անկյունագծային մատրից է: Պարզ է, որ $\mathbf{Y}$ -ը **նորմալ** բաշխում ունեցող պատահական վեկտոր է, ընդ որում՝

$$E(\mathbf{Y}) = (\mathbf{O} \Lambda^{1/2}) E(\boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{m} = \mathbf{m},$$

$$\begin{aligned} V(\mathbf{Y}) &= E[(\mathbf{Y} - \mathbf{m})(\mathbf{Y} - \mathbf{m})^T] = E\left[(\mathbf{O} \Lambda^{1/2}) \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T (\mathbf{O} \Lambda^{1/2})^T\right] \\ &= \mathbf{O} \Lambda^{1/2} E(\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T) \Lambda^{1/2} \mathbf{O}^T = \mathbf{O} \Lambda \mathbf{O}^T = \Sigma : \end{aligned}$$

Այնպես որ՝ $\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{m}, \Sigma)$ և $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$ (ըստ բաշխման):

Թեորեմ Հ. 45: Եթե $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{E}_n)$ ստանդարտ **նորմալ** պատահական վեկտոր է, իսկ $\mathbb{M}$ -ը՝ $n \times n$ -չափանի **պրոեկցիոն մատրից**, որի համար $\text{rank}(\mathbb{M}) = r$, ապա $\chi_r^2 = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbb{M} \boldsymbol{\varepsilon}$ պատահական մեծությունն ունի r ազատության աստիճաններով **χ^2 բաշխում**՝ $\chi_r^2 \sim \mathbb{H}^2(r)$:

Ա պ ա ց ու ց ու մ: Քանի որ $\mathbb{M}$ մատրիցը համաչափ է, դիտարկենք դրա $\mathbb{M} = \mathbb{O}\mathbf{\Lambda}\mathbb{O}^T$ վերլուծությունը, որտեղ $\mathbb{O}$ -ն օրթոգոնալ մատրից է, իսկ $\mathbf{\Lambda}$ -ն՝ անկյունագծային մատրից, որի տարրերը 0-ներ են և 1-եր (տե՛ս պնդում Հ. 14), ընդ որում՝ 1 - երի թիվը հավասար է $\mathbb{M}$ մատրիցի ռանգին (այսինքն՝ r -ին):

Դիտարկենք հետևյալ պատահական մեծությունը՝

$$\chi_r^2 = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbb{M} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^T (\mathbb{O}\mathbf{\Lambda}\mathbb{O}^T) \boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbb{O}) \mathbf{\Lambda} (\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbb{O})^T = \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{\Lambda} \boldsymbol{\eta},$$

որտեղ $\boldsymbol{\eta} = \mathbb{O}^T \boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathbb{N}_n(\mathbf{0}, \mathbb{V}(\boldsymbol{\eta}))$: Հեշտ է տեսնել, որ $\mathbb{V}(\boldsymbol{\eta})$ կովարիացիոն մատրիցը հավասար է՝

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\boldsymbol{\eta}) &= \mathbb{E} \left[(\boldsymbol{\eta} - \mathbb{E}(\boldsymbol{\eta})) (\boldsymbol{\eta} - \mathbb{E}(\boldsymbol{\eta}))^T \right] = \mathbb{E}(\boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\eta}^T) = \mathbb{E}[(\mathbb{O}^T \boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbb{O})] = \\ &= \mathbb{O}^T \mathbb{E}(\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T) \mathbb{O} = \mathbb{O}^T \mathbb{E}_n \mathbb{O} = \mathbb{O}^T \mathbb{O} = \mathbb{E}_n: \end{aligned}$$

Այսպիսով, $\boldsymbol{\eta} \sim \mathbb{N}_n(\mathbf{0}, \mathbb{E}_n)$ *ստանդարտ նորմալ* պատահական վեկտոր է, որի անդամները *չկորելյացված* են, ուստի և՛ *անկախ* (տե՛ս հետևանք Հ. 42), հետևաբար՝

$$\chi_r^2 = \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{\Lambda} \boldsymbol{\eta} = \sum_{k=1}^r \eta_{i_k}^2$$

պատահական մեծությունն ունի r ազատության աստիճաններով *χ^2 բաշխում*:

Բաշխումների աղյուսակներ

Ա 1. $N(0, 1)$ – ստանդարտ նորմալ բաշխում:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad \text{ֆունկցիայի արժեքները:}$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9278	.9292	.9306	.9319
.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Ա 2. $N(0, 1)$ ստանդարտ նորմալ բաշխում:

z_α կրիտիկական արժեքները՝

$$1 - \Phi(z_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_\alpha}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1 :$$

α	0.001	0.005	0.01	0.02	0.025	0.03	0.05	0.075	0.1	0.2	0.25
z_α	3.090	2.576	2.326	2.054	1.960	1.881	1.645	1.440	1.282	0.842	0.675

$z_{\alpha/2}$ կրիտիկական արժեքները՝

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z_{\alpha/2}}^{z_{\alpha/2}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \gamma = 1 - \alpha, \quad 0 < \alpha < 1 \quad \left(\Phi(z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \right) :$$

$1 - \alpha$	0.999	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.75
$100 \alpha \%$	0.1	0.5	1	2.5	5	10	25
$\alpha/2$	0.0005	0.0025	0.005	0.0125	0.025	0.05	0.125
$z_{\alpha/2}$	3.2905	2.81	2.576	2.24	1.96	1.645	1.15

Ա 3. χ^2 բաշխում: $\chi^2_\alpha(n)$ կրիտիկական արժեքները՝

$$\frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \int_0^\infty x^{n/2-1} e^{-x/2} dx = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1:$$

α	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
n										
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.843	5.025	6.637	7.882
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.992	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.344	12.837
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.832	15.085	16.748
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.440	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.012	18.474	20.276
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.534	20.090	21.954
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.022	21.665	23.587
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.724	26.755
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.041	19.812	22.362	24.735	27.687	29.817
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.600	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.577	32.799
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.407	7.564	8.682	10.085	24.769	27.587	30.190	33.408	35.716
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.843	7.632	8.906	10.117	11.651	27.203	30.143	32.852	36.190	38.580
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.033	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.670	35.478	38.930	41.399
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.042	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.195	11.688	13.090	14.848	32.007	35.172	38.075	41.637	44.179
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.558
25	10.519	11.523	13.120	14.611	16.473	34.381	37.652	40.646	44.313	46.925
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.807	12.878	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.194	46.962	49.642
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.120	14.256	16.147	17.708	19.768	39.087	42.557	45.772	49.586	52.333
30	13.787	14.954	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
31	14.457	15.655	17.538	19.280	21.433	41.422	44.985	48.231	52.190	55.000
32	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328
33	15.814	17.073	19.046	20.866	23.110	43.745	47.400	50.724	54.774	57.646
34	16.501	17.789	19.806	21.664	23.952	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964
35	17.191	18.508	20.569	22.465	24.796	46.059	49.802	53.203	57.340	60.272

Ա 4. Մոյունդենտի (t-) Բաշխում: $t_{\alpha}(n)$ կրիտիկական արժեքները

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{t_{\alpha}(n)}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1:$$

α	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
n							
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31	636.62
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326	31.598
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

Ա 5. Ֆիշեր - Մենդելկորի (F-) բաշխում:

$S_{\alpha}(m, n)$ կրիտիկական արժեքները՝

$$\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)} m^{m/2} n^{n/2} \int_{S_{\alpha}(m,n)}^{\infty} x^{m/2-1} (n+mx)^{-\frac{m+n}{2}} dx = \alpha = 0.05:$$

m	1	2	3	4	5	6	8	10	12	15	20	∞
n												
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	238.9	241.9	243.9	245.9	248.0	254.0
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.37	19.40	19.41	19.41	19.45	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.85	8.79	8.74	8.70	8.66	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.04	5.96	5.91	5.86	5.80	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.93	4.82	4.74	4.68	4.62	4.56	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.15	4.06	4.00	3.94	3.87	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.73	3.64	3.57	3.51	3.44	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.44	3.35	3.28	3.22	3.15	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.23	3.14	3.07	3.01	2.94	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.32	3.07	2.98	2.91	2.85	2.77	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	2.95	2.85	2.79	2.72	2.65	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.85	2.75	2.69	2.62	2.54	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.77	2.67	2.60	2.53	2.46	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.70	2.60	2.53	2.46	2.39	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.64	2.54	2.48	2.40	2.33	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.59	2.49	2.42	2.35	2.28	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.55	2.45	2.38	2.31	2.23	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.51	2.41	2.34	2.27	2.19	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.48	2.38	2.31	2.23	2.16	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.45	2.35	2.28	2.20	2.12	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.42	2.32	2.25	2.18	2.10	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.40	2.30	2.23	2.15	2.07	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.37	2.27	2.20	2.13	2.05	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.36	2.25	2.18	2.11	2.03	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.34	2.24	2.16	2.09	2.01	1.71
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.27	2.16	2.09	2.01	1.93	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.18	2.08	2.00	1.92	1.84	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.10	1.99	1.92	1.84	1.75	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.02	1.91	1.83	1.75	1.66	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	1.94	1.83	1.75	1.67	1.57	1.00

$$S_{\alpha}(m, n) = S_{1-\alpha}^{-1}(n, m)$$

**Ա 6. $[0, 1]$ միջակայքում հավասարաչափ բաշխված
«սլատահական թվեր»:**

0.6548	0.1176	0.7417	0.4685	0.0950	0.5804	0.7769	0.7445
.8012	.4356	.3517	.7270	.8015	.4531	.8223	.7445
.7435	.0998	.1777	.4027	.7214	.4323	.6002	.1019
.6991	.6268	.0366	.2522	.9148	.3693	.6872	.0337
.0989	.3205	.0514	.2256	.8514	.4642	.7567	.8893
.3407	.2768	.5036	.6973	.6170	.6581	.3398	.8556
.4557	.1824	.0635	.3034	.2614	.8679	.9074	.3982
.0205	.1656	.9268	.6657	.4818	.7305	.3852	.4789
.0532	.5470	.4890	.5535	.7548	.2846	.8287	.0975
.0652	.9647	.7835	.8083	.4282	.6093	.5203	.4476
.2210	.9405	.5860	.9709	.3433	.5050	.0739	.9823
.5072	.5682	.4829	.4052	.4201	.5277	.5678	.5198
.1374	.6700	.7818	.4754	.0610	.6871	.1778	.1749
.3676	.6679	.5190	.3647	.6493	.2960	.9110	.6242
.9182	.6089	.2893	.7856	.1368	.2347	.8341	.1329
.6847	.9276	.8646	.1628	.3554	.9475	.0899	.2345
.2694	.0368	.5870	.2973	.4135	.5314	.0333	.4045
.8515	.7479	.5432	.9792	.6575	.5760	.0408	.8119
.1110	.0020	.4012	.8607	.4697	.9664	.8494	.3937
.1650	.5344	.8440	.2195	.2565	.4365	.1770	.8293
.1009	.7325	.3376	.5201	.3586	.3467	.3548	.7607
.3754	.2048	.0564	.8947	.4296	.2480	.5240	.3732
.0842	.2689	.5319	.6450	.9303	.2320	.9025	.6047
.9901	.9025	.2909	.3767	.0715	.3831	.1311	.6509
.1280	.7999	.7080	.1573	.6147	.6403	.2366	.5353
.8095	.9091	.1739	.2927	.4945	.6606	.5747	.1756
.2063	.6104	.0200	.8229	.1665	.3106	.0108	.0582
.1595	.3347	.6435	.0803	.3606	.8526	.9776	.0289
.8867	.6743	.9704	.4362	.7659	.6357	.3321	.3575
.9895	.1168	.7712	.1717	.6833	.7379	.6457	.5376

Ա 7. $N(0, 1)$ նորմալ բաշխված «պատահական թվեր»:

- 0.486	0.856	- 0.491	- 1.983	- 1.787	- 0.261
- 0.256	- 0.212	0.219	0.779	- 0.105	- 0.357
0.065	0.415	- 0.169	0.313	- 1.339	1.827
1.147	- 0.121	1.096	0.181	1.041	0.535
- 0.199	- 0.246	1.239	- 2.574	0.279	- 2.056
1.237	1.046	- 0.508	- 1.630	- 0.146	- 0.392
- 1.384	0.360	- 0.992	- 0.116	- 1.698	- 2.832
- 0.959	0.424	0.969	- 1.141	- 1.041	0.362
0.731	1.377	0.983	- 1.330	1.620	- 1.040
0.717	- 0.873	- 1.096	- 1.396	1.047	0.089
- 1.805	- 2.008	- 1.633	0.542	0.250	- 0.166
- 1.186	1.180	1.114	0.882	1.265	- 0.202
0.658	- 1.141	1.151	- 1.210	- 0.927	0.425
- 0.439	0.358	- 1.939	0.891	- 0.227	0.602
- 1.399	- 0.230	0.385	- 0.649	- 0.577	0.237
0.032	0.079	0.199	0.208	- 1.083	- 0.219
0.151	- 0.376	0.159	0.272	- 0.313	0.084
0.290	- 0.902	2.273	0.606	0.606	- 0.747
0.873	- 0.437	0.041	- 0.307	0.121	0.790
- 0.289	0.513	- 1.132	- 2.098	0.921	0.145
- 0.291	1.122	1.119	0.004	0.768	0.079
- 2.828	- 0.439	- 0.792	- 1.275	0.375	- 1.656
0.247	1.291	0.063	- 1.793	- 0.513	- 0.344
- 0.584	0.541	0.484	- 0.986	0.292	- 0.521
0.446	- 1.661	1.045	- 1.363	1.026	2.990
0.034	- 2.127	0.665	0.084	- 0.880	- 1.473
0.234	- 0.656	0.340	- 0.086	- 0.158	- 0.851
- 0.736	1.041	0.008	0.427	- 0.831	0.210
- 1.206	- 0.899	0.110	- 0.528	- 0.813	1.266
- 0.491	- 1.114	1.297	- 1.433	- 1.345	- 0.574

Ա 7. $N(0, 1)$ նորմալ բաշխված «պատահական թվեր»

(շարունակություն)

- 1.334	1.278	- 0.568	- 0.109	- 0.515	- 0.566
- 0.287	- 0.144	- 0.254	0.574	- 0.451	- 1.181
0.161	- 0.886	- 0.921	- 0.509	1.410	- 0.518
- 1.346	0.193	- 1.202	0.394	- 1.045	0.843
1.250	- 0.199	- 0.288	1.810	1.378	0.584
2.923	0.500	0.630	- 0.537	0.782	0.060
- 1.190	- 0.318	0.375	- 1.941	0.247	- 0.491
0.192	- 0.432	- 1.420	0.489	- 1.711	- 1.186
0.942	1.045	- 0.151	- 0.243	- 0.430	- 0.762
1.216	0.733	- 0.309	0.531	0.416	- 1.541
0.499	- 0.431	1.705	1.164	0.424	- 0.444
0.665	- 0.135	- 0.145	- 0.498	0.593	0.658
0.754	- 0.732	- 0.066	1.006	0.862	- 0.885
0.298	1.049	1.810	2.885	0.235	- 0.628
1.456	2.040	- 0.124	0.196	- 0.853	0.402
0.593	0.993	- 0.106	0.116	0.484	- 1.272
- 1.127	- 1.407	- 1.579	- 1.616	1.458	1.262
- 0.142	- 0.504	0.532	1.381	0.022	- 0.281
- 0.023	- 0.463	- 0.809	- 0.394	- 0.538	1.707
0.777	0.833	0.410	- 0.349	- 1.094	0.580
0.241	- 0.957	- 1.885	0.371	- 2.830	- 0.238
0.022	0.525	- 0.255	- 0.702	0.953	- 0.869
- 0.853	- 1.865	- 0.423	- 0.973	- 1.016	- 1.726
- 0.501	- 0.273	0.857	- 0.465	- 1.691	0.417
0.439	- 0.035	- 0.260	0.120	- 9.558	0.056

Ա 8. *Բինոմական* բաշխում:

$$B(x; n, p) = \sum_{k=0}^{x-1} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{ֆունկցիայի արժեքները } (x \in \mathcal{N}):$$

		<i>n</i> = 5														
<i>p</i>	0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99	
<i>x</i>																
1	.951	.774	.590	.328	.237	.168	.078	.031	.010	.002	.001	.000	.000	.000	.000	
2	.999	.977	.919	.737	.633	.528	.337	.188	.087	.031	.016	.007	.000	.000	.000	
3	1.000	.999	.991	.942	.896	.837	.683	.500	.317	.163	.104	.058	.009	.001	.000	
4	1.000	1.000	1.000	.993	.984	.969	.913	.812	.663	.472	.367	.263	.081	.023	.001	
5	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.998	.990	.969	.922	.832	.763	.672	.410	.226	.049	

		<i>n</i> = 10														
<i>p</i>	0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99	<i>x</i>
1	.904	.599	.349	.107	.056	.028	.006	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	
2	.996	.914	.736	.376	.244	.149	.046	.011	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	
3	1.000	.988	.930	.678	.526	.383	.167	.055	.012	.002	.000	.000	.000	.000	.000	
4	1.000	.999	.987	.879	.776	.650	.382	.172	.055	.011	.004	.001	.000	.000	.000	
5	1.000	1.000	.998	.967	.922	.850	.633	.377	.166	.047	.020	.006	.000	.000	.000	
6	1.000	1.000	1.000	.994	.980	.953	.834	.623	.367	.150	.078	.033	.002	.000	.000	
7	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.989	.945	.828	.618	.350	.224	.121	.013	.001	.000	
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.988	.945	.833	.617	.474	.322	.070	.012	.000	
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.989	.954	.851	.756	.624	.264	.086	.004	
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.994	.972	.944	.893	.651	.401	.096	

		<i>n</i> = 15														
<i>p</i>	0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99	<i>x</i>
1	.860	.463	.206	.035	.013	.005	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	
2	.990	.829	.549	.167	.080	.035	.005	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	
3	1.000	.964	.816	.398	.236	.127	.027	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	
4	1.000	.995	.944	.648	.461	.297	.091	.018	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	
5	1.000	.999	.987	.836	.686	.515	.217	.059	.009	.001	.000	.000	.000	.000	.000	
6	1.000	1.000	.998	.939	.832	.722	.403	.151	.034	.004	.001	.000	.000	.000	.000	
7	1.000	1.000	1.000	.982	.943	.869	.610	.304	.095	.015	.004	.001	.000	.000	.000	
8	1.000	1.000	1.000	.996	.983	.950	.787	.500	.213	.050	.017	.004	.000	.000	.000	

Ա 8. *Բինոմական* բաշխում (շարունակություն)

$n = 15$

p	0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99
x															
9	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.985	.905	.696	.390	.131	.057	.018	.000	.000	.000
10	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.966	.849	.597	.278	.148	.061	.002	.000	.000
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.991	.941	.783	.485	.314	.164	.013	.001	.000
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.982	.909	.703	.539	.352	.056	.005	.000
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.973	.873	.764	.602	.184	.036	.000
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.995	.965	.920	.833	.451	.171	.010
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.995	.987	.965	.794	.537	.140

$n = 20$

p	0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99	x
1	.818	.358	.122	.012	.003	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	
2	.983	.736	.392	.069	.024	.008	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	
3	.999	.925	.677	.206	.091	.035	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	
4	1.000	.984	.867	.411	.225	.107	.016	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	
5	1.000	.997	.957	.630	.415	.238	.051	.006	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	
6	1.000	1.000	.989	.804	.617	.416	.126	.021	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	
7	1.000	1.000	.998	.913	.786	.608	.250	.058	.006	.000	.000	.000	.000	.000	.000	
8	1.000	1.000	1.000	.968	.898	.772	.416	.132	.021	.001	.000	.000	.000	.000	.000	
9	1.000	1.000	1.000	.990	.959	.887	.596	.252	.057	.005	.001	.000	.000	.000	.000	
10	1.000	1.000	1.000	.997	.986	.952	.755	.412	.128	.017	.004	.001	.000	.000	.000	
11	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.983	.872	.588	.245	.048	.014	.003	.000	.000	.000	
12	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.995	.943	.748	.404	.113	.041	.010	.000	.000	.000	
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.979	.868	.584	.228	.102	.032	.000	.000	.000	
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.994	.942	.750	.392	.214	.087	.002	.000	.000	
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.979	.874	.584	.383	.196	.011	.000	.000	
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.994	.949	.762	.585	.370	.043	.003	.000	
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.984	.893	.775	.589	.133	.016	.000	
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.965	.909	.794	.323	.075	.001	
19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.992	.976	.931	.608	.264	.017	
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.997	.988	.878	.642	.182	

Ա 9. Պոասոնի բաշխում:

$$P_{\lambda}(x) = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{x-1} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{ֆունկցիայի արժեքները } (x \in \mathcal{N}):$$

λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
x										
1	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368
2	.995	.982	.963	.938	.910	.878	.844	.809	.772	.736
3	1.000	.999	.996	.992	.986	.977	.966	.953	.937	.920
4		1.000	1.000	.999	.998	.997	.994	.991	.945	.981
5				1.000	1.000	1.000	.999	.999	.989	.996
6							1.000	1.000	.998	.999
7									1.000	1.000

λ	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	15.0	20.0
x											
1	.135	.050	.018	.007	.002	.001	.000	.000	.000	.000	.000
2	.406	.199	.092	.040	.017	.007	.003	.001	.000	.000	.000
3	.677	.423	.238	.125	.062	.030	.014	.006	.003	.000	.000
4	.857	.647	.433	.265	.151	.082	.042	.021	.010	.000	.000
5	.947	.815	.629	.440	.285	.173	.100	.055	.029	.001	.000
6	.983	.916	.785	.616	.446	.301	.191	.116	.067	.003	.000
7	.995	.966	.889	.762	.606	.456	.313	.207	.130	.008	.000
8	.999	.988	.949	.867	.744	.599	.453	.324	.220	.018	.001
9	1.000	.996	.979	.932	.847	.729	.593	.456	.333	.037	.002
10		.999	.992	.968	.916	.830	.717	.587	.458	.070	.005
11		1.000	.997	.986	.957	.901	.816	.706	.583	.118	.011
12			.999	.995	.980	.947	.888	.803	.697	.185	.021
13			1.000	.998	.991	.973	.936	.876	.792	.268	.039
14				.999	.996	.987	.966	.926	.864	.363	.066
15				1.000	.999	.994	.983	.959	.917	.466	.105
16					.999	.998	.992	.978	.951	.568	.157
17					1.000	.999	.996	.989	.973	.664	.221
18						1.000	.998	.995	.986	.749	.297
19							1.000	.999	.993	.819	.381
20								1.000	.997	.875	.470
21									.998	.917	.559
22									.999	.947	.644
23									1.000	.967	.721

Ա 9. Պոասոնի բաշխում (շարունակություն)

λ	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	15.0	20.0
x											
24										.981	.787
25										.989	.843
26										.994	.888
27										.997	.922
28										.998	.948
29										.999	.966
30										1.000	.978
31											.987
32											.992
33											.995
34											.997
35											.999
36											.999
37											1.000

Ա 10. *Էքշանգի* բաշխում:

$$F_{1,n}(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^x t^{n-1} e^{-t} dt \quad \text{ֆունկցիայի արժեքները} \quad (1 \leq n \leq 10):$$

<i>n</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>x</i>										
1	.632	.264	.080	.019	.004	.001	.000	.000	.000	.000
2	.865	.594	.323	.143	.053	.017	.005	.001	.000	.000
3	.950	.801	.577	.353	.185	.084	.034	.012	.004	.001
4	.982	.908	.762	.567	.371	.215	.111	.051	.021	.008
5	.993	.960	.875	.735	.560	.384	.238	.133	.068	.032
6	.998	.983	.938	.849	.715	.554	.394	.256	.153	.084
7	.999	.993	.970	.918	.827	.699	.550	.401	.271	.170
8	1.000	.997	.986	.958	.900	.809	.687	.547	.407	.283
9		.999	.994	.979	.945	.884	.793	.676	.544	.413
10		1.000	.997	.990	.971	.933	.870	.780	.667	.542
11			.999	.995	.985	.962	.921	.857	.768	.659
12			1.000	.998	.992	.980	.954	.911	.845	.758
13				.999	.996	.989	.974	.946	.900	.834
14				1.000	.998	.994	.986	.968	.938	.891
15					.999	.997	.992	.982	.963	.930

Ա 11. *Կոլմոգորովի* բաշխում:

$$K(x) = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2} \right) \mathbb{1}_{[0, +\infty)}(x) \quad \text{Ֆունկցիայի արժեքները:}$$

<i>x</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
.3	.0000	.0000	.0001	.0001	.0002	.0003	.0005	.0008	.0013	.0019
.4	.0028	.0040	.0055	.0074	.0097	.0126	.0160	.0200	.0247	.0300
.5	.0361	.0428	.0503	.0585	.0675	.0772	.0876	.0987	.1104	.1228
.6	.1357	.1492	.1633	.1778	.1927	.2080	.2236	.2396	.2558	.2722
.7	.2888	.3055	.3223	.3391	.3560	.3728	.3896	.4064	.4230	.4395
.8	.4559	.4720	.4880	.5038	.5194	.5347	.5498	.5646	.5791	.5933
.9	.6073	.6209	.6343	.6474	.6601	.6725	.6846	.6965	.7079	.7191
1.0	.7300	.7406	.7508	.7608	.7704	.7798	.7889	.7976	.8061	.8143
.1	.8223	.8300	.8374	.8445	.8514	.8580	.8644	.8706	.8766	.8823
.2	.8878	.8930	.8981	.9030	.9077	.9121	.9164	.9206	.9245	.9283
.3	.9319	.9354	.9387	.9419	.9449	.9478	.9505	.9531	.9557	.9580
.4	.9603	.9625	.9646	.9665	.9684	.9702	.9719	.9735	.9750	.9764
.5	.9778	.9791	.9803	.9815	.9826	.9836	.9846	.9855	.9864	.9873
.6	.9881	.9888	.9895	.9902	.9908	.9914	.9919	.9924	.9929	.9934
.7	.9938	.9942	.9946	.9950	.9953	.9956	.9959	.9962	.9965	.9967
.8	.9969	.9972	.9974	.9975	.9977	.9979	.9980	.9982	.9983	.9984
.9	.9985	.9986	.9987	.9988	.9989	.9990	.9991	.9992	.9992	.9993
2.0	.9993	.9994	.9994	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9997	.9997
.1	.9997	.9997	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9999	.9999
.2	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
.3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
.4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Ա 12. *Կոլմոգորովի* բաշխում: $d_\alpha(n)$ կրիտիկական
արժեքները՝

$$P\left(D_n = \sup_{x \in \mathcal{R}} |F_n(x) - F(x)| \geq d_\alpha(n)\right) = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1:$$

α	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	α	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
n						n					
1	0.9000	0.9500	0.9750	0.9900	0.9950	31	0.1873	0.2141	0.2379	0.2660	0.2853
2	.6838	.7764	.8419	.9000	.9293	32	.1845	.2109	.2342	.2619	.2809
3	.5648	.6360	.7076	.7846	.8290	33	.1817	.2077	.2308	.2580	.2768
4	.4927	.5652	.6239	.6889	.7342	34	.1791	.2047	.2274	.2543	.2728
5	.4470	.5095	.5633	.6272	.6685	35	.1766	.2019	.2243	.2507	.2690
6	.4104	.4680	.5193	.5774	.6166	36	.1742	.1991	.2212	.2473	.2653
7	.3815	.4361	.4834	.5384	.5758	37	.1719	.1965	.2183	.2440	.2618
8	.3583	.4096	.4543	.5065	.5418	38	.1697	.1939	.2154	.2409	.2584
9	.3391	.3875	.4300	.4796	.5133	39	.1675	.1915	.2127	.2379	.2552
10	.3226	.3687	.4093	.4566	.4889	40	.1655	.1891	.2101	.2349	.2521
11	.3083	.3524	.3912	.4367	.4677	41	.1635	.1869	.2076	.2321	.2490
12	.2958	.3382	.3754	.4192	.4491	42	.1616	.1847	.2052	.2294	.2461
13	.2847	.3255	.3614	.4036	.4325	43	.1597	.1826	.2028	.2268	.2433
14	.2748	.3142	.3489	.3897	.4176	44	.1580	.1805	.2006	.2243	.2406
15	.2659	.3040	.3376	.3771	.4042	45	.1562	.1786	.1984	.2218	.2380
16	.2578	.2947	.3273	.3657	.3920	46	.1546	.1767	.1963	.2194	.2354
17	.2504	.2863	.3180	.3553	.3809	47	.1530	.1748	.1942	.2172	.2330
18	.2436	.2785	.3094	.3457	.3706	48	.1514	.1730	.1922	.2149	.2306
19	.2374	.2714	.3014	.3369	.3612	49	.1499	.1713	.1903	.2128	.2283
20	.2316	.2647	.2941	.3287	.3524	50	.1484	.1696	.1884	.2107	.2260
21	.2262	.2586	.2872	.3210	.3443	51	.1470	.1680	.1866	.2086	.2239
22	.2212	.2528	.2809	.3139	.3367	52	.1456	.1664	.1848	.2067	.2217
23	.2165	.2475	.2749	.3073	.3295	53	.1442	.1648	.1831	.2048	.2197
24	.2121	.2424	.2693	.3010	.3229	54	.1429	.1633	.1814	.2029	.2177
25	.2079	.2377	.2640	.2952	.3166	55	.1416	.1619	.1798	.2011	.2157
26	.2040	.2332	.2591	.2896	.3106	56	.1404	.1604	.1782	.1993	.2138
27	.2003	.2290	.2544	.2844	.3050	57	.1392	.1591	.1767	.1976	.2120
28	.1968	.2250	.2499	.2794	.2997	58	.1380	.1577	.1752	.1959	.2102
29	.1935	.2212	.2457	.2747	.2947	59	.1369	.1564	.1737	.1943	.2084
30	.1903	.2176	.2417	.2702	.2899	60	.1357	.1551	.1723	.1927	.2067

Ա 12. *Կոլմոգորովի* բաշխում: $d_{\alpha}(n)$ կրիտիկական
արժեքները (շարունակություն)

α	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	α	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
n						n					
61	0.1346	0.1539	0.1709	0.1911	0.2051	81	0.1172	0.1339	0.1487	0.1663	0.1784
62	.1336	.1526	.1696	.1896	.2034	82	.1165	.1331	.1478	.1653	.1773
63	.1325	.1514	.1682	.1881	.2018	83	.1158	.1323	.1469	.1643	.1763
64	.1315	.1503	.1669	.1867	.2003	84	.1151	.1315	.1461	.1633	.1752
65	.1305	.1491	.1657	.1853	.1988	85	.1144	.1307	.1452	.1624	.1742
66	.1295	.1480	.1644	.1839	.1973	86	.1138	.1300	.1444	.1614	.1732
67	.1286	.1469	.1632	.1825	.1958	87	.1131	.1292	.1436	.1605	.1722
68	.1277	.1459	.1620	.1812	.1944	88	.1125	.1285	.1427	.1596	.1713
69	.1268	.1448	.1609	.1799	.1930	89	.1119	.1278	.1420	.1587	.1703
70	.1259	.1438	.1598	.1786	.1917	90	.1113	.1271	.1412	.1579	.1694
71	.1250	.1428	.1586	.1774	.1903	91	.1106	.1264	.1404	.1570	.1685
72	.1241	.1418	.1576	.1762	.1890	92	.1101	.1257	.1397	.1562	.1676
73	.1233	.1409	.1565	.1750	.1878	93	.1095	.1251	.1389	.1553	.1667
74	.1225	.1399	.1554	.1738	.1865	94	.1089	.1244	.1382	.1545	.1658
75	.1217	.1390	.1544	.1727	.1853	95	.1083	.1238	.1375	.1537	.1649
76	.1209	.1381	.1534	.1716	.1841	96	.1078	.1231	.1368	.1529	.1641
77	.1201	.1372	.1524	.1705	.1829	97	.1072	.1225	.1361	.1521	.1632
78	.1194	.1364	.1515	.1694	.1817	98	.1067	.1219	.1354	.1514	.1624
79	.1186	.1355	.1505	.1683	.1806	99	.1062	.1213	.1347	.1506	.1616
80	.1179	.1347	.1496	.1673	.1795	100	.1056	.1207	.1340	.1499	.1608

Ա 13. Մպիումենի r_S^* ռանգային կորելյացիայի գործակից:

$s_\alpha(n)$ կրիտիկական արժեքները՝

$$P\left(r_S^* = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \cdot \sum_{i=1}^n (i - T_i)^2 \geq s_\alpha(n)\right) = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1 :$$

α	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
n						
4	0.8000	0.8000				
5	.7000	.8000	.9000	.9000		
6	.6000	.7714	.8286	.8857	.9429	
7	.5357	.6786	.7450	.8571	.8929	.9643
8	.5000	.6190	.7143	.8095	.8571	.9286
9	.4667	.5833	.6833	.7667	.8167	.9000
10	.4424	.5515	.6364	.7333	.7818	.8667
11	.4182	.5273	.6091	.7000	.7455	.8364
12	.3986	.4965	.5804	.6713	.7273	.8182
13	.3791	.4780	.5549	.6429	.6978	.7912
14	.3626	.4593	.5341	.6220	.6747	.7670
15	.3500	.4429	.5179	.6000	.6536	.7464
16	.3382	.4265	.5000	.5824	.6324	.7265
17	.3260	.4118	.4853	.5637	.6152	.7083
18	.3148	.3994	.4716	.5480	.5975	.6904
19	.3070	.3895	.4579	.5333	.5825	.6737
20	.2977	.3789	.4451	.5203	.5684	.6586
21	.2909	.3688	.4351	.5078	.5545	.6455
22	.2829	.3597	.4241	.4963	.5426	.6318
23	.2767	.3518	.4150	.4852	.5306	.6186
24	.2704	.3435	.4061	.4748	.5200	.6070
25	.2646	.3362	.3977	.4654	.5100	.5962
26	.2588	.3299	.3894	.4564	.5002	.5856
27	.2540	.3236	.3822	.4481	.4915	.5757
28	.2490	.3175	.3749	.4401	.4828	.5660
29	.2443	.3113	.3685	.4320	.4744	.5567
30	.2400	.3059	.3620	.4251	.4665	.5479

Ա 14. Քենդալի r_K^* ռանգային կորելյացիայի գործակից:

$k_\alpha(n)$ կրիտիկական արժեքները՝

$$P\left(r_K^* = 1 - \frac{4Q}{n(n-1)} \geq k_\alpha(n)\right) = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1 :$$

α	0.05	0.025	0.01	0.005
n				
4	1.000	1.000	1.000	1.000
5	.800	1.000	1.000	1.000
6	.733	.867	.867	1.000
7	.619	.714	.810	.905
8	.571	.643	.714	.786
9	.500	.556	.667	.722
10	.467	.551	.600	.644

Օգտագործված գրականության ցանկ

- [1] Б о р о в к о в А. А., Математическая статистика, 4 - е издание, М., «Лань», 2010.
- [2] Б о р о в к о в А. А., Математическая статистика. Дополнительные главы, М., «Наука», 1984.
- [3] Д р е й п е р Н., С м и т Г., Прикладной регрессионный анализ, кн. 1 и 2, 3 – е издание, М., «Ozon.ru», 2016.
- [4] И в ч е н к о Г. И., М е д в е д е в Ю. И., Математическая статистика, 2 – е издание, М., «Ozon.ru», 2014.
- [5] И в ч е н к о Г. И., М е д в е д е в Ю. И., Ч и с т я к о в А. В., Математическая статистика в задачах, М., «Ozon.ru», 2015.
- [6] К е н д а л л М. Д ж., С т ь ю а р т А., Статистические выводы и связи, М., «Наука», 1973.
- [7] К о р ш у н о в Д. А., Ч е р н о в а Н. И., Сборник задач и упражнений по математической статистике, Новосибирск, издание института математики, 2004.
- [8] К р а м е р Г., Математические методы статистики, М., «Мир», 1975.
- [9] Л е м а н Э., Проверка статистических гипотез, М., «Наука», 1979.
- [10] М а г н у с Я. Р., К а т ы ш е в П. К., П е р е с е ц к и й А.А., Эконометрика. Начальный курс, 8 – е издание, М., «Дело», 2007.
- [11] М а г н у с Я. Р., К а т ы ш е в П. К., П е р е с е ц к и й А.А., Сборник задач к начальному курсу эконометрики, 4 –е издание, М., «Дело», 2007.
- [12] Р а о С. Р., Линейные статистические методы и их применения, М., «Наука», 1968.
- [13] С е б е р Дж., Линейный регрессионный анализ, М., «Мир», 1980.

- [14] Ш и р я е в А. Н., Вероятность – 1, 2, 3 – е издание, М., «МЦНМО», 2004.
- [15] Գ ա ա պ ա ռ յ ա ն Կ. Վ., Տեսական և կիրառական վիճակագրության հիմունքներ, մաս 1, Երևան, «Գիտություն», 2015:
- [16] Գ ա ա պ ա ռ յ ա ն Կ. Վ., Վիճակագրության խնդիրների ժողովածու, ԵՊՀ հրատ., Երևան, 2017:
- [17] Հ ա թ ու թ յ ու ն յ ա ն Ե. Ա. և ա յ լ ք, Հավանականություն և կիրառական վիճակագրություն, Երևան, «Գիտություն», 2000:
- [18] D e v o r e J. L., Probability and Statistics for Engineering and the Sciences, 9 - th Edit., Belmont, Brooks / Cole, 2016.
- [19] G i b b o n s J. D., C h a k r a b o r t i S., Nonparametric Statistical Inference, 5 - th Edit., Chapman and Hall/CRC, 2010.
- [20] G r e e n e W. H., Econometric Analysis, 7 – th Edit., New York Univ., Pearson, 2012.
- [21] G u j a r a t i D. N., Basic Econometrics, 5 - th Edit., New York, Mc.Graw - Hill, 2009.
- [22] J o h n s t o n J., D i N a r d o J., Econometric Methods, 4 – th Edit., McGraw-Hill, 1997.
- [23] M o n t g o m e r y D. C., R u n g e r G. C., Applied Statistics and Probability for Engineers, 6 - th Edit., New York, Wiley, 2013.

Համառոտագրություններ

ԿՄԹ – կենտրոնական սահմանային թեորեմ

ՃՄ գնահատական – ճշմարտանմանության մաքսիմումի գնահատական

ՆՔ գնահատական – նվազագույն քառակուսիների գնահատական

ՀԱՀ հայտանիշ – հավասարաչափ առավել հզոր հայտանիշ

ՃՀՀ – ճշմարտանմանության հարաբերության հայտանիշ

ANOVA (Analysis of Variance) – ցրվածքների վերլուծություն

ESS (Error Sum of Squares) – մնացորդների քառակուսիների գումար

FGLS (Feasible Generalised Least Squares) Estimator – հասանելի
ընդհանրացված նվազագույն քառակուսիների գնահատական

GLS Estimator – ընդհանրացված նվազագույն քառակուսիների
գնահատական

LM (Lagrange Multiplier) test – Լագրանժի բազմապատկիչների հայտանիշ

LR (Likelihood Ratio) test – ճշմարտանմանության հարաբերության
հայտանիշ

MSE (Mean Square Error) – միջին քառակուսային սխալ

OLSE (Ordinary Least Squares Estimator) – սովորական նվազագույն
քառակուսիների գնահատական

RSS (Regression Sum of Squares) – ռեգրեսիայով բացատրվող
քառակուսիների գումար

TSS (Total Sum of Squares) – լրիվ քառակուսիների գումար

W (Wald) test – Վալդի հայտանիշ

Նշաններ

$\Leftrightarrow$ – համարժեքություն

$\Rightarrow$ – «հետևում է»

P

$\rightarrow$ – զուգամիտություն ըստ P հավանականության

d

$\rightarrow$ – ըստ բաշխման զուգամիտություն

$\sim$ – «մոտարկվող» (մեծ n -ի դեպքում) բաշխում

■ – ապացույցի վերջ

Ընդհանուր մաթեմատիկական որոշ նշանակումներ

$\mathcal{N}$ – **բնական թվերի** բազմություն

$\mathcal{R}$ – **իրական թվերի** բազմություն

$\mathcal{R}^m$ – m - չափանի **Էվկլիդեսյան** տարածություն

P – **հավանականություն (բաշխում)**

$F(x)$ – **բաշխման ֆունկցիա**

$f(x)$ – բացարձակ անընդհատ X պատահական մեծության **խտության ֆունկցիա**

$p(x)$ – դիսկրետ X պատահական մեծության **բաշխման օրենք** ($p(x) = P(X = x)$)

$\varphi_X(t)$ – X պատահական վեկտորի **բնութագրիչ ֆունկցիա**

$M_X(t)$ – X պատահական վեկտորի **մոմենտների ծնորդ ֆունկցիա**

$m = E(X)$ – X պատահական մեծության **մաթեմատիկական սպասում (միջին)**

$\sigma^2 = \text{var}(X)$ – X պատահական մեծության **ցրվածք (դիսպերսիա)**

σ – X պատահական մեծության **միջին քառակուսային (ստանդարտ) շեղում**

$\text{cov}(X, Y)$ – X և Y պատահական մեծությունների **կովարիացիա**

ρ_{XY} – X և Y պատահական մեծությունների **կորելյացիայի գործակից**

$\Sigma = V(X)$ – X պատահական վեկտորի **կովարիացիոն մատրից**

$V(X, Y)$ – X և Y պատահական վեկտորների **համատեղ կովարիացիոն մատրից**

$E(X)$ – X պատահական մատրիցի **մաթեմատիկական սպասում (միջին)**

$E(Y|X)$ – Y պատահական մատրիցի ըստ X պատահական մատրիցի **պայմանական մաթեմատիկական սպասում**

$V\{Y|X\}$ – Y պատահական վեկտորի ըստ X պատահական մատրիցի **պայմանական կովարիացիոն մատրից**

ζ_α – X պատահական մեծության α մակարդակով **քանորդիչ (քվանտիլ)**

z_α – **ստանդարտ նորմալ** ($N(0,1)$) **բաշխման** α մակարդակով **կրիտիկական արժեք**

$\chi_\alpha^2(n)$ – n ազատության աստիճաններով χ^2 **բաշխման** ($\mathbb{H}^2(n)$) α մակարդակով **կրիտիկական արժեք**

$t_\alpha(n)$ – n ազատության աստիճաններով **Ստյուդենտի** (t -) **բաշխման** ($\mathbb{T}(n)$) α մակարդակով **կրիտիկական արժեք**

$S_\alpha(n, m)$ – n և m ազատության աստիճաններով **Ֆիշեր – Մենդելկորի** (F -) **բաշխման** ($\mathbb{S}(n, m)$) α մակարդակով **կրիտիկական արժեք**

$\sup B$ – $B \subset \mathcal{R}$ **բազմության վերին եզր**

$[x]$ – $x \in \mathcal{R}$ թվի **ամբողջ մաս**

$|x|$ – $x \in \mathcal{R}$ թվի **մոդուլ**

$X = (X_1, \dots, X_n)$ – n ծավալի **պատահական նմուշ**

$x = (x_1, \dots, x_n)$ – n ծավալի **թվային նմուշ**

$\mathcal{X} = X(\Omega) - X$ պատահական մեծության **արժեքների բազմություն**

$\mathcal{B}(\mathcal{X}) - \mathcal{X} \subset \mathcal{R}$ բազմության **բորելյան բազմությունների σ - հանրահաշիվ**

$\mathcal{X}^n = \underbrace{\mathcal{X} \times \dots \times \mathcal{X}}_n - \mathcal{X}$ բազմությունների **դեկարտյան արտադրյալ**

$\mathcal{P} = \{P\} -$ **թույլատրելի** բաշխումների դաս

$(\mathcal{X}^n, \mathcal{B}(\mathcal{X}^n), \mathcal{P}) -$ **նմուշային տարածություն**

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i -$ **նմուշային միջին**

$S^2(S_X^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 -$ **նմուշային ցրվածք (դիսպերսիա)**

$S_0^2(S_{0X}^2) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 -$ **անշեղ նմուշային ցրվածք (դիսպերսիա)**

$S_1^2(S_{1X}^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 -$ **նմուշային ցրվածքի արդյունավետ գնահատական**

$S_{XY}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) -$ **նմուշային կովարիացիա**

$r_{X,Y} = \frac{S_{XY}^2}{S_X \cdot S_Y} -$ **նմուշային կորելյացիայի գործակից**

$S_X = \sqrt{S_X^2} -$ **նմուշային միջին քառակուսային (ստանդարտ) շեղում**

$\mathbb{A} = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^{n,m} - n \times m -$ չափանի **մատրից**

$\mathbb{A} = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n - n \times n -$ չափանի (**քառակուսային**) **մատրից**

$\mathbb{E}_n - n \times n -$ չափանի **միավոր մատրից**

$\mathbf{0}_{n \times m} - n \times m -$ չափանի **0 -ական մատրից**

$\Lambda_n = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) - n \times n -$ չափանի **անկյունագծային մատրից**

$\mathbb{A}^T - \mathbb{A}$ մատրիցի **տրանսպոնցված (շրջված) մատրից**

$\mathbb{A}^{-1} - \mathbb{A}$ մատրիցի **հակադրած** մատրից

$|\mathbb{A}| = \det(\mathbb{A}) - \mathbb{A}$ մատրիցի **որոշիչ (դետերմինանտ)**

$\text{tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} - \mathbb{A} = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$ մատրիցի **հետք**

$\text{rank}(\mathbb{A}) - \mathbb{A}$ մատրիցի **ռանգ**

$\mathbf{t} \mathbb{A} \mathbf{t}^T = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} t_i t_j - A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$ մատրիցին համապատասխանող **քառակուսային ձև**

$\mathbb{A} > 0 (\mathbb{A} \geq 0) -$ **դրական (ոչ բացասական) որոշյալ** մատրից

$\Omega^\perp - \Omega \subset \mathcal{R}^n$ ենթատարածության **օրթոգոնալ լրացում**

$\mathbb{P}_\Omega - \Omega \subset \mathcal{R}^n$ ենթատարածության վրա **օրթոգոնալ պրոեկտման մատրից**

Օգտագործվող տերմինների հայերեն-անգլերեն - ռուսերեն բառարան

- անկախության հայտանիշ – test of independence – критерий независимости
- անշեղ գնահատական – unbiased estimator – несмещенная оценка
- անշեղ հայտանիշ – unbiased test – несмещенный критерий
- առավել հզոր հայտանիշ – most powerful test – наиболее мощный критерий
- առավել ճշգրիտ վստահության միջակայք – more precise confidence interval – наиболее точный достоверительный интервал
- ասիմպտոտիկ անշեղ հայտանիշ – asymptotically unbiased test – асимптотически несмещенный критерий
- ասիմպտոտիկ առավել հզոր հայտանիշ – asymptotically most powerful test – асимптотически наиболее мощный критерий
- ասիմպտոտիկ կրիտիկական արժեք – asymptotic critical value – асимптотически критическое значение
- ասիմպտոտիկ հայտանիշ – asymptotic test – асимптотический критерий
- ասիմպտոտիկ նշանակալիության մակարդակ – asymptotic significance level – асимптотический уровень значимости
- ասիմպտոտիկ օպտիմալ հայտանիշ – asymptotically optimal test – асимптотически оптимальный критерий
- ասիմպտոտիկ ոչ պարամետրական (բաշխումից ազատ) վիճականի – asymptotically distribution free statistic – асимптотически непараметрическая (свободная от распределения) статистика
- բաշխումից ազատ (ոչ պարամետրական) վիճականի – distribution free statistic – статистика (непараметрическая) свободная от распределения
- բարդ վարկած – composite hypothesis – сложная гипотеза
- բացատրող (անկախ) փոփոխականներ – explanatory (independent) variables – объясняющие (независимые) переменные
- բացատրվող (կախյալ) փոփոխականներ կամ արձագանք – explained (dependent) variables or response – объясняемые (зависимые) переменные или отклик
- գծային ռեգրեսիայի հավասարում – linear regression equation – уравнение линейной регрессии
- գնահատական կետային – point estimator – точечная оценка
- գնահատական ճշմարտանմանության մաքսիմումի – maximum likelihood estimator – оценка максимального правдоподобия
- գնահատական միջակայքային – interval estimator – интервальная оценка
- գնահատական նվազագույն քառակուսիների – least square estimator – оценка наименьших квадратов

դետերմինացիայի գործակից – coefficient of determination – коэффициент детерминации

դետերմինացիայի գործակից «ճշգրտված» – «adjusted» coefficient of determination – «исправленный» коэффициент детерминации

երկրևտրանքային վարկած – alternative hypothesis – альтернативная гипотеза

գուգակցության աղյուսակ – contingency table – таблица сопряженности

էքսպոնենտական (ցուցային) դաս – exponential family – экспоненциальный класс

լոգարիթմական ճշմարտանմանության ֆունկցիա – logarithmic likelihood function – логарифмическая функция правдоподобия

Կոլմոգորովի հայտանիշ – Kolmogorov's test – критерий Колмогорова

Կոլմոգորովի վիճականի – Kolmogorov's statistic – статистика Колмогорова

հայտանիշ – test – критерий

համասեռության հայտանիշ – test for homogeneity – критерий однородности

հայտանիշի հզորություն – power of a test – мощность критерия

հայտանիշի վիճականի – test statistic – статистика критерия

հասանելի նշանակալիության մակարդակ (P - արժեք) – P - value (P-V) – достижимый уровень значимости (P - значение)

հավասարաչափ առավել հզոր հայտանիշ – uniformly most powerful test – равномерно наиболее мощный критерий

ճշմարտանմանության հարաբերություն – likelihood ratio – отношение правдоподобия

ճշմարտանմանության հարաբերության հայտանիշ – likelihood ratio test – критерий отношения правдоподобия

ճշմարտանմանության հարաբերության վիճականի – likelihood ratio statistic – статистика отношения правдоподобия

ճշմարտանմանության հարաբերության ֆունկցիա – likelihood ratio function – функция отношения правдоподобия

Ման – Ուիտնիի հայտանիշ – Mann – Whitney test – критерий Мана – Уитни

Ման – Ուիտնիի վիճականի – Mann – Whitney statistic – статистика Мана - Уитни

մատրից չվերասերված – nondegenerate matrix – невырожденная матрица

- իդեմպոտենտ – idempotent matrix – идемпотентная матрица

- հակադարձ – inverse matrix – обратная матрица

- համաչափ – symmetric matrix – симметричная матрица

- պատահական – random matrix – случайная матрица

- պրոեկցիոն – projective matrix – проекционная матрица

- վերասերված – degenerate matrix – вырожденная матрица

- տրանսպոնացված (շրջված) – transpose matrix – транспонированная матрица

- օրթոգոնալ – orthogonal matrix – ортогональная матрица

մատրիցի հետք – trace of matrix – след матрицы

- **որոշիչ (դետերմինանտ)** – determinant of matrix – детерминант матрицы

- **ռանգ** – rank of matrix – ранг матрицы

- **սեփական արժեք** – eigenvalue of matrix – собственное значение матрицы

միագործոն ցրվածքային վերլուծություն – one – way ANOVA – однофакторный дисперсионный анализ

միակողմանի բարդ վարկածների ստուգում – one – tailed composite hypothesis testing – проверка односторонних сложных гипотез

միակողմանի երկընտրանքային վարկած – one – tailed alternative hypothesis – односторонняя альтернативная гипотеза

միակողմանի վարկած – one – tailed hypothesis – односторонняя гипотеза

միջակայքային կանխատեսում – interval forecasting – интервальное предсказание

մնացորդային անդամ – residual term – остаточный член

մնացորդային ցրվածք – residual variance – остаточная дисперсия

մնացորդների քառակուսիների գումար – error sum of squares (ESS) – сумма квадратов остатков

մոմենտների ծնորդ ֆունկցիա – moment generating function – производящая функция моментов

մոնոտոն ճշմարտանմանության հարաբերությունով բաշխումներ – distributions with monotone likelihood ratio – распределения с монотонным отношением правдоподобия

Նեյման – Պիրսոնի (ճշմարտանմանության հարաբերության) ֆունդամենտալ լեմմա – Neyman – Pearson`s (the likelihood ratio) fundamental lemma – фундаментальная лемма (отношения правдоподобия) Неймана – Пирсона

նշանակալի կորելյացիոն կապ – significance correlation connection – значимая корреляционная связь

նշանակալիության մակարդակ – significance level – уровень значимости

նվազագույն քառակուսիների մեթոդ – least square method – метод наименьших квадратов

ոչ պարամետրական վարկած – nonparametric hypothesis – непараметрическая гипотеза

ոչ պարամետրական (բաշխումից ազատ) վիճականի – distribution free statistic – непараметрическая (свободная от распределения) статистика

պարամետրական բաշխումների դաս – parametric family of distributions – параметрическое семейство распределений

պարամետրական վարկած – parametric hypothesis – параметрическая гипотеза

պատահական վեկտորի պայմանական կովարիացիոն մատրից – conditional covariation matrix of random vector – условная ковариационная матрица случайного вектора

պատահական վեկտորի կովարիացիոն մատրից – covariation matrix of random vector – ковариационная матрица случайного вектора

պատահական մատրիցի պայմանական մաթեմատիկական սպասում – conditional mathematical expectation of random matrix - условное математическое ожидание случайной матрицы

Պիրսոնի χ^2 - հայտանիշ – Pearson's χ^2 - test – χ^2 – критерий Пирсона

Պիրսոնի χ^2 - վիճականի – Pearson's χ^2 - statistic – χ^2 – статистика Пирсона

ռանգ – rank – ранг

ռանգային հայտանիշներ – rank tests – ранговые критерии

ռեգրեսիա զույգային – binary regression – парная регрессия

ռեգրեսիայի մնացորդ – regression residual – остаток регрессии

ռեգրեսիայի սխալ – regression error – ошибка регрессии

ռեգրեսիոն մոդել – regression model – регрессионная модель

ռեգուլյարության պայմաններ – regularity conditions – условия регулярности

սխալներ I և II տեղի – I - st and II - nd kind errors – ошибки I и II рода

Սմիրնովի վիճականի – Smirnov's statistic – статистика Смирнова

Ստյուդենտի վիճականի – Student's statistic – статистика Стьюдента

Ստյուդենտի (t –) բաշխում – Student's (t –) distribution – t – распределение Стьюдента

Սպիրմենի ռանգային հայտանիշ – Spearman's rank test – ранговый критерий Спирмена

Սպիրմենի ռանգային կորելյացիայի գործակից – Spearman's rank correlation coefficient (Spearman's ρ – coefficient) - коэффициент ранговой корреляции Спирмена

վարիացիոն (փոփոխականության) շարք – variation series – вариационный ряд

վարկած – hypothesis – гипотеза

վիճակագրություն – statistics – статистика (как предмет)

վիճականի – statistic – статистика (как функция)

վիճականի կարգային – rank statistic – порядковая статистика

վիճականի կենտրոնական – central statistic – центральная статистика

վստահության մակարդակ – confidence level – доверительный уровень

վստահության միջակայք – confidence interval – доверительный интервал

«ցողուն և տերևներ» ներկայացում – «stem and life» representation – представление «стебель и листья»

ցրվածք (դիսպերսիա) – variation – дисперсия

ցրվածքային վերլուծություն – analysis of variation (ANOVA) – дисперсионный анализ

Ուիլկոքսոնի ռանգային հայտանիշ – Wilcoxon's rank test – ранговый критерий Уилкоксона

Ուիլկոքսոնի վիճականի – Wilcoxon's statistic – статистика Уилкоксона

ունակ գնահատական – consistent estimator – состоятельная оценка

ունակ հայտանիշ – consistent test – состоятельный критерий

Քենդալի ռանգային հայտանիշ – Kendall's rank test – ранговый критерий Кендалла

Քենդալի Q – վիճականի – Kendall's Q – statistic – Q – статистика Кендалла

Քենդալի ռանգային կորելյացիայի գործակից – Kendall`s rank correlation coefficient

(Kendall`s τ coefficient) – коэффициент ранговой корреляции Кендалла

օպտիմալ գնահատական – optimal estimator – оптимальная оценка

Ֆիշերի բաշխում – Fisher`s distribution – распределение Фишера

Ֆիշերի z – ձևափոխություն – Fisher`s z – transformation – z – преобразование Фишера

Ֆիշեր – Սնեդեկորի (F –) բաշխում – Fisher – Snedekor`s F – distribution – F –
распределение Фишера – Снедекора

Ֆիշերի տեղեկատվական մատրից – Fisher`s information matrix – информационная
матрица Фишера

Դասագրքի I-ին մասում հայտնաբերված վրիպակներ

1. Էջ 17 :

Սահմանում 1.6 - *նւմ բերված է՝*

*... հաշվելի կետերի $\mathcal{X}_\theta = \{x_k\}_{k \geq 1} \equiv \{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}^m$ բազմություն ... :
Պետք է լինի՝*

... հաշվելի կետերի $\mathcal{X} = \{x_k\}_{k \geq 1} := \{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}^m$ բազմություն ... :

2. Էջ 22 :

Սահմանում 1.17 - *նւմ բերված են՝ $p(x_{i_0}) \geq p(x_{i_0-1})$ և $p(x_{i_0}) \geq p(x_{i_0+1})$*

անհավասարությունները:

Պետք է լինի՝ $p(x_{i_0}) > p(x_{i_0-1})$ և $p(x_{i_0}) > p(x_{i_0+1})$:

3. Էջ 56 :

Սահմանում 4.5 -*ից հետո պետք է ավելացվի՝*

Հետագայում կենթադրվի, որ Θ պարամետրական բազմության և $\mathcal{P}(\theta)$ բաշխումների դասի միջև տեղի ունի փոխմիարժեք համապատասխանություն՝ $\mathbb{P}_\theta : \Theta \Leftrightarrow \mathcal{P}(\theta) \left(\theta_1 \neq \theta_2 \in \Theta \Leftrightarrow \mathbb{P}_{\theta_1} \neq \mathbb{P}_{\theta_2} \right)$:

4. Էջ 72 :

Սահմանում 4.26 -*նւմ բերված է՝*

$$\mathbb{F}_n^*(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^r \left(\sum_{i=1}^k v_i^* \right) \mathbb{1}_{\Delta_k}(x) + \mathbb{1}_{(b_{r+1}, +\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

բանաձևը:

Պետք է լինի՝

$$\mathbb{F}_n^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{r-1} \left(\sum_{i=1}^k v_i^* \right) \mathbb{1}_{(x_k^0, x_{k+1}^0]}(x), & \text{եթե } x \leq x_r^0 \\ 1, & \text{եթե } x > x_r^0, \end{cases}$$

որտեղ $x_k^0 = \frac{1}{2}(b_k + b_{k+1})$ -ն $\Delta_k = (b_k, b_{k+1}]$ միջակայքի միջնակետն է:
Սահմանում 4.27 -ում բերված է՝

$$\mathbb{F}_n(x) = \sum_{k=1}^r \omega_k \mathbb{1}_{\Delta_k}(x) + \mathbb{1}_{(b_{r+1}, +\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

բանաձևը:

$$\text{Պետք է լինի՝ } \mathbb{F}_n(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{r-1} \omega_k \mathbb{1}_{(x_k^0, x_{k+1}^0]}(x), & \text{եթե } x \leq x_r^0 \\ 1, & \text{եթե } x > x_r^0 : \end{cases}$$

Սահմանում 4.28 -ում բերված է՝

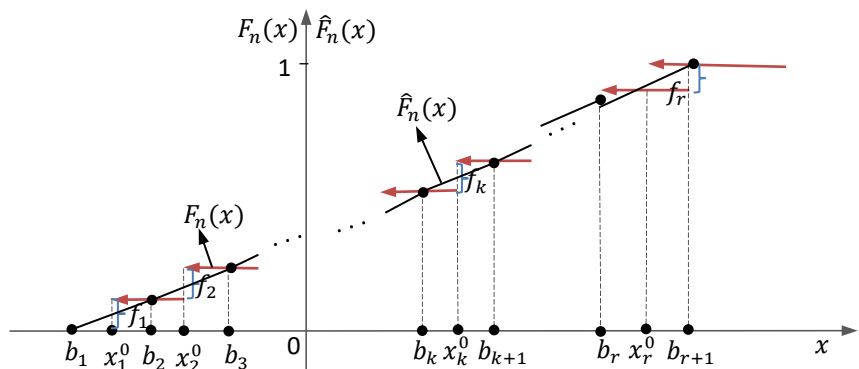
$$\widehat{\mathbb{F}}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^r \left[\sum_{i=1}^{k-1} v_i + \frac{v_k}{h_k} (x - b_k) \right] \mathbb{1}_{\Delta_k}(x) + \mathbb{1}_{(b_{r+1}, +\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

բանաձևը:

Պետք է լինի՝

$$\widehat{\mathbb{F}}_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^r \left[\sum_{i=1}^{k-1} v_i + \frac{v_k}{h_k} (x - b_k) \right] \mathbb{1}_{\Delta_k}(x), & \text{եթե } x \leq b_{r+1} \\ 1, & \text{եթե } x > b_{r+1} : \end{cases}$$

$\mathbb{F}_n(x)$ և $\widehat{\mathbb{F}}_n(x)$ ֆունկցիաների գծապատկերը պետք է լինի՝



5.Էջ 87 :

Օրինակ 4.46 -ի դ) կետում *բերված* է $\mathbb{F}_n(x)$ նմուշային միջակայքային բաշխման ֆունկցիայի հետևյալ բանաձևը՝

$$\mathbb{F}_n(x) = \omega_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k v_i, k = 0, \dots, 6, x \in (b_k, b_{k+1}], b_0 = -\infty,$$

$$b_7 = +\infty (\omega_0 = 0, v_6 = 0)$$

$(b_k, b_{k+1}]$	$(-\infty, 3]$	$(3, 5.5]$	$(5.5, 8]$	$(8, 10.5]$	$(10.5, 13]$	$(13, +\infty)$
$\mathbb{F}_n(x)$	0	0.3	0.55	0.75	0.85	1

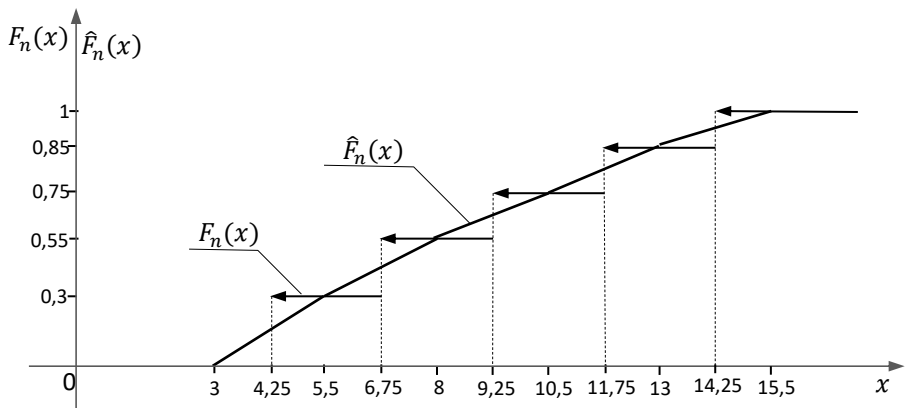
Պետք է լինի՝

$$\mathbb{F}_n(x) = \omega_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k v_i, x \in (x_k^0, x_{k+1}^0], k = 0, \dots, 5,$$

որտեղ $x_k^0 = \frac{b_k + b_{k+1}}{2}$ -ն՝ $\Delta_k = (b_k, b_{k+1}]$ միջակայքի միջնակետն է,
 $x_0^0 = -\infty, x_6^0 = +\infty, b_0 = -\infty, b_6 = +\infty (\omega_0 = 0)$

$(x_k^0, x_{k+1}^0]$	$(-\infty, 4.25]$	$(4.25, 6.75]$	$(6.75, 9.25]$	$(9.25, 11.75]$	$(11.75, 14.25]$	$(14.25, \infty)$
$\mathbb{F}_n(x)$	0	0.3	0.55	0.75	0.85	1

$\mathbb{F}_n(x)$ և $\hat{\mathbb{F}}_n(x)$ ֆունկցիաների գծապատկերը պետք է լինի՝



6. Էջ 97 :

Սահմանում 4.64 -ում բերված է ζ_p^* նմուշային p -քանորդիչի հետևյալ ներկայացումը՝

$$\zeta_p^* \equiv \zeta_p^*(n) = \begin{cases} X_{([np]+1)}, & \text{եթե } np \in \mathbb{Q} \\ X_{(np)}, & \text{եթե } np \in \mathbb{N} \end{cases}, p \neq 1/2 :$$

Պետք է լինի՝

$$\zeta_p^* := \zeta_p^*(n) = X_{([np]+1)}, n \in \mathbb{N}, p \neq 1/2 :$$

7. Էջեր 221 - 240 : Խնդիրներ՝ 7.29, 7.32, 7.49, 7.58 և Օրինակներ՝ 7.47, 7.48
 – ում բերված են՝ Պատասխաններ՝ $(-\infty, a)$, պետք է լինի՝ $(0, a)$:

Հղումներ՝

1. Էջեր 15, 16, 18:

Բերված է՝ [36], պետք է լինի՝ [34]:

2. Էջ 28 :

Բերված է՝ [28], պետք է լինի՝ [26]:

3. Էջ 29 :

Բերված է՝ [29], պետք է լինի՝ [27],

բերված է՝ [8], պետք է լինի՝ [6],

բերված է՝ [36], պետք է լինի՝ [34]:

4. Էջ 30 :

Բերված է՝ [29], պետք է լինի՝ [27]:

5. Էջեր 56, 75, 83 :

Բերված է՝ [36], պետք է լինի՝ [34]:

6. Էջ 68 :

Բերված է՝ [43], պետք է լինի՝ [41]:

7. Էջեր 104, 110, 112, 113, 114, 115 :

Բերված է՝ [25], պետք է լինի՝ [23]:

8. Էջ 197 :

Բերված է՝ [27], պետք է լինի՝ [25]:

9. Էջ 225 :

Բերված է՝ [29], պետք է լինի՝ [27]:

SUMMARY

Foundations of Theoretic and Applied Statistics

Part 2

K. V. Gasparyan

The second part of the textbook focuses on the theory of parametric and non-parametric statistical hypotheses, as well as pairwise and multivariate linear regression analysis. The included theoretical material is accompanied by examples and problems related to each topic.

The textbook is intended for undergraduate and graduate students of the faculties of mathematics and mechanics (including actuarial and financial mathematics), informatics and applied mathematics. It can also be useful for students of YSU Faculty of Economics and Management and all those specialists who want to use advanced statistical methods in their research.

РЕЗЮМЕ

Основы теоретической и прикладной статистики

Часть 2

К. В. Гаспарян

Вторая часть учебника посвящена теории параметрических и непараметрических статистических гипотез и вопросам парного и многомерного линейного регрессионного анализа. Включенный теоретический материал сопровождается примерами и задачами по каждой теме.

Учебник предназначен для студентов и аспирантов факультетов математики и механики (в том числе актуарной и финансовой математики), информатики и прикладной математики. Он также может быть полезен студентам факультета экономики и управления ЕГУ и всем тем специалистам, которые стремятся использовать в своих исследованиях современные статистические методы.

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԿԱՐԵՆ ՎԱՀԱՆԻ ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ

**ՏԵՍԱԿԱՆ
ԵՎ ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ
ՎԻՃԱԿԱԳՐՈՒԹՅԱՆ
ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐ**

Մաս 2

**Վիճակագրական վարկածների ստուգում:
Գծային ռեգրեսիա**

Համակարգչային ձևավորումը՝ Կ. Չալաբյանի
Կազմի ձևավորումը՝ Ա. Պատվականյանի
Հրատ. խմբագրումը՝ Լ. Ավետիսյանի

Հեղինակը հաստատում է, որ ծանոթ է «ԵՊՀ գրատարարական քաղաքականությանը», և գրքում առկա փաստերը, դիրքորոշումները, կարծիքները շարադրված են հեղինակային իրավունքի և էթիկայի միջազգայնորեն ընդունված սկզբունքների պահպանմամբ:

Ստորագրված է տպագրության՝ 26.12.2025:
Չափեր՝ 60x84 ¹/₁₆: Տպ. մամուլը՝ 21,375:
Տպաքանակը՝ 100:

ԵՊՀ հրատարակչություն
ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1
www.publishing.ysu.am