

**PURE AND APPLIED MATHEMATICS
A SERIES OF TEXTS AND MONOGRAPHS**

**Edited by
R. COURANT · L. BERS · J. J. STOKER**

Volume XIX

**INTRODUCTION TO THE THEORY
OF CATEGORIES AND FUNCTORS**

Ion Bucur and Aristide Deleanu

with the collaboration of

PETER J. HILTON

**A WILEY-INTERSCIENCE PUBLICATION
JOHN WILEY & SONS LTD
London · New York · Sydney**

Ион Букур и Аристид Деляну

Введение в теорию КАТЕГОРИЙ И ФУНКТОРОВ

С предисловием
ПИТЕРА ХИЛТОНА

Перевод с английского
Д. А. Райкова и В. С. Ретаха

С примечаниями
Д. А. Райкова

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1972

Книга румынских математиков представляет собой введение в теорию категорий, методы и язык которой применяются почти во всей современной математике.

Приводятся многочисленные примеры ситуаций из различных разделов математики, которые иллюстрируют универсальность рассматриваемых понятий.

Книга может служить учебным пособием для изучающих современную алгебру и топологию. Она доступна студентам-математикам старших курсов университетов.

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ

Несмотря на интенсивное проникновение идей теории категорий во все возрастающее число областей современной математики, на русском языке до сих пор не было книги, специально посвященной этой теории¹⁾. Поэтому появление русского перевода книги И. Букура и А. Деляну отвечает давно назревшей потребности.

Первые четыре главы этой книги посвящены общей теории категорий, последние три (занимающие, однако, более половины всего объема книги) — абелевым категориям. Несколько параграфов пятой и шестой глав написал Н. Попеску.

Назначение книги Букура и Деляну, ее место в ряду других руководств по теории категорий и важные положительные черты хорошо освещены в помещенном ниже предисловии, написанном видным специалистом по теории категорий П. Хилтоном.

Но книга не лишена и некоторых недостатков, особенно проявившихся в пятой и шестой главах: изложение местами слишком сжатое или недостаточно аккуратное, в некоторых доказательствах имеются пробелы (или даже ошибки). Поэтому пришлось сопроводить текст книги довольно большим числом примечаний, имеющих целью исправление замеченных дефектов. Помещено также несколько примечаний, содержащих дополнительные сведения. Примечаний авторов в книге нет.

Д. Райков

¹⁾ Лишь в начале 1971 г. издательство МГУ выпустило отпечатанные на ротационном прессе „Лекции по теории категорий“ М. С. Цаленко и Е. Г. Шульгейфера. Но из-за мизерности тиража (всего 300 экземпляров) это издание так и не поступило в продажу.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория категорий возникла за последние двадцать пять лет и в настоящее время образует самостоятельную отрасль математики. Своим происхождением и первоначальными стимулами развития она обязана алгебраической топологии. Когда Эйленберг и Маклейн впервые сформулировали основные понятия категории, функтора, естественного преобразования и естественной эквивалентности, их непосредственной целью было дать надлежащие рамки для описания того, как применялись, или могли применяться, алгебраические методы в топологии. Разумеется, как авторам, так и другим математикам с самого начала было ясно, что область применения этих понятий выходит далеко за пределы алгебраической топологии. Так, были очевидны многие приложения внутри самой алгебры, и начала оформляться в полноправную математическую дисциплину гомологическая алгебра, имеющая дело с абелевыми категориями и в частности категориями модулей. Тем не менее на первых порах не было ясно, что здесь находится в скрытом виде „чистая“ теория категорий и функторов, способная занять в математике свое достойное место. Конечно, первоначальные основные понятия стали обрастать вспомогательными, подсказанными приложениями этих основных понятий, и обнаружилось, что многие рассуждения, традиционно проводившиеся в более специальном контексте, естественно укладываются в более абстрактные рамки теории категорий. Все же только за последние десять или того менее лет теория категорий стала в значительной степени черпать стимулы для дальнейшего развития в себе самой. Раз начавшись, этот процесс все больше ускорялся, так что в настоящее время объем знаний в этой области необычайно возрос, а вместе с этим продвижением сильно расширилась сфера приложений теории категорий, охватив и такие далеко отстоящие области математики, как функциональный анализ и математическая логика.

Поэтому представляется, что настало время для книги по теории категорий, пригодной как для желающих заниматься самой этой теорией, так и для тех, кто хочет применять ее — или по крайней мере основные ее идеи — в других математических дисциплинах, таких, как алгебра, топология, алгебраическая геометрия, логика и т. д. Настоящая книга и предназначена слу-

жить такой двойкой цели и, надеюсь, будет пригодна не только как справочное руководство, но и как учебник. Требуемая для ее чтения математическая подготовка весьма невелика, во всяком случае не больше, чем имеется у студентов, приступающих к обучению на старших курсах; но нужно с самого начала предупредить читателя, что от него потребуются некоторая изощренность, если он хочет усвоить довольно абстрактные точку зрения и стиль рассуждений теории категорий.

По своей цели эта книга отличается от ценных руководств Фрейда и Митчелла (см. библиографию). Книга Фрейда посвящена почти исключительно абелевым категориям, а книга Митчелла по охвату материала, акцентам и направлению также довольно сильно отличается от настоящей. Для того чтобы сделать предлагаемую книгу как можно более полезной для специалистов различных областей и передать возможно явственней сам аромат теории, ее авторы наряду с такими основными темами, как представимость и пропредставимость функторов и теоремы вложения категорий, включили также более специальные вопросы, например топологии Гротендика и теорию пучков. Авторы вплотную подводят читателя к современной теории троек, универсальных алгебр и их многообразий (хотя в самой книге этого материала нет) и приводят обширную библиографию для последующего чтения.

Я с большим удовольствием представляю читателю книгу двух моих коллег и друзей Иона Букура и Аристида Деляну.

Курантовский институт математических наук,
Нью-Йоркский и Корнельский университеты,
август 1968

Питер Хилтон

ОТ АВТОРОВ

Авторам доставляет удовольствие выразить свою признательность доктору Николае Попеску, написавшему § 10 главы 5 и §§ 5, 6 и 8 главы 6.

Они приносят также благодарность Симоне Паску, превосходно выполнившей работу по напечатанию рукописи.

*Ион Букур
Аристид Деляну*

Июль 1968

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

§ 1. Понятие категории. Двойственность. Подкатегории. Примеры

Понятия категории и функтора были введены в математику С. Эйленбергом и С. Маклейном в 1944 году, в связи с проблемой аксиоматизации теории групп гомологий и когомологий топологических пространств. Эти понятия постепенно нашли применение и в других областях математики.

Определение. Будем говорить, что задана категория $\mathcal{C}$, если задан класс $\text{Ob } \mathcal{C}$ элементов, называемых *объектами*, причем

1. Для каждой пары объектов (A, B) из $\mathcal{C}$ задано множество $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, называемое множеством *морфизмов* A в B (вместо $u \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ мы будем часто писать $u: A \rightarrow B$ или $A \xrightarrow{u} B$)¹⁾.

2. Для каждой тройки объектов (A, B, C) из $\mathcal{C}$ задано отображение

$$\mu: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

(образ $\mu(u, v)$ пары (u, v) , где $u \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $v \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$), будет обозначаться $v \circ u$ или vu и называться *композицией* морфизмов u и v).

3. Множества $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ и композиция морфизмов удовлетворяют следующим аксиомам:

(а) Композиция ассоциативна: для каждой тройки морфизмов $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} D$

$$w(vu) = (wv)u.$$

(б) Для каждого объекта A из $\mathcal{C}$ существует морфизм $1_A: A \rightarrow A$ (называемый *тождественным морфизмом* или *единицей* объекта A), такой, что $1_A u = u$ и $v 1_A = v$ для любых морфизмов $B \xrightarrow{u} A$, $A \xrightarrow{v} C$.

(γ) Если пары (A, B) , (A', B') различны, то пересечение множеств $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ и $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A', B')$ пусто.

Примеры категорий

1. Категория $\mathcal{S}n\mathcal{S}$. Объекты этой категории — множества. Для любых двух множеств A, B под $\text{Hom}_{\mathcal{S}n\mathcal{S}}(A, B)$ понимается

¹⁾ A называют *областью* морфизма u , а B — его *кообластью*.

множество всех отображений A в B , а под композицией $(f, g) \rightarrow gf$ — обычная композиция отображений.

2. Категория $\mathcal{T}op$. Объекты этой категории — топологические пространства. $\text{Hom}_{\mathcal{T}op}(X, Y)$ для любых двух топологических пространств X, Y есть множество всех непрерывных отображений X в Y . Под композицией понимается обычная композиция отображений (композиция двух непрерывных отображений также непрерывна).

3. Категория $\mathcal{G}$. Объекты категории $\mathcal{G}$ — группы. $\text{Hom}_{\mathcal{G}}(A, B)$ для любых двух групп A, B есть множество всех гомоморфизмов группы A в группу B . Под композицией понимается обычная композиция гомоморфизмов.

4. Категория $\mathcal{A}b$. Объекты этой категории — абелевы группы, а морфизмы — снова гомоморфизмы.

5. Категория ${}_A\mathcal{U}$. Пусть Λ — кольцо с единицей. Объектами категории ${}_A\mathcal{U}$ являются унитарные¹⁾ левые Λ -модули, морфизмами — гомоморфизмы Λ -модулей, а композицией — снова обычная композиция гомоморфизмов.

Аналогично определяется категория $\mathcal{U}_A$ правых Λ -модулей.

Определение. Пусть $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ — семейство категорий. Определим их произведение $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ следующим образом:

Объекты категории $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ — всевозможные семейства $(X_i)_{i \in I}$, где X_i для каждого $i \in I$ — объект категории $\mathcal{C}_i$;

$$\text{Hom}_{\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i}((X_i)_{i \in I}, (Y_i)_{i \in I}) = \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}_i}(X_i, Y_i).$$

Если

$$(u_i)_{i \in I} \in \text{Hom}_{\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i}((X_i)_{i \in I}, (Y_i)_{i \in I})$$

и

$$(v_i)_{i \in I} \in \text{Hom}_{\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i}((Y_i)_{i \in I}, (Z_i)_{i \in I}),$$

то

$$(v_i)_{i \in I} \circ (u_i)_{i \in I} = (v_i \circ u_i)_{i \in I}.$$

Определение. Для каждой категории $\mathcal{C}$ следующим образом определяется *дуальная категория* $\mathcal{C}^o$:

(I) Объекты категории $\mathcal{C}^o$ — те же, что у категории $\mathcal{C}$, т. е. $\text{Ob } \mathcal{C}^o = \text{Ob } \mathcal{C}$.

¹⁾ В дальнейшем слово „унитарные“ обычно опускается (хотя всюду предполагается, что Λ — кольцо с единицей и модуль унитарен, т. е. $1x = x$).

(II) За множество морфизмов $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\circ}}(A, B)$ по определению принимается $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$.

(III) Композиция

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\circ}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\circ}}(B, C) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\circ}}(A, C)$$

определяется так: если

$$u \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\circ}}(A, B) \quad \text{и} \quad v \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\circ}}(B, C),$$

то

$$v \circ_{\mathcal{C}^{\circ}} u = u \circ_{\mathcal{C}} v.$$

Ясно, что $(\mathcal{C}^{\circ})^{\circ} = \mathcal{C}$.

Возможность ассоциировать с каждой категорией $\mathcal{C}$ дуальную категорию $\mathcal{C}^{\circ}$ позволяет дуализировать каждое понятие или утверждение, относящееся к категории $\mathcal{C}$, сопоставляя ему дуальное понятие или утверждение, относящееся к категории $\mathcal{C}^{\circ}$ (получающееся путем „обращения стрелок“).

Определение. *Подкатегорией* категории $\mathcal{C}$ называют категорию $\mathcal{C}'$, удовлетворяющую следующим условиям:

(I) $\text{Ob } \mathcal{C}' \subset \text{Ob } \mathcal{C}$.

(II) $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(A, B) \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

(III) Композиция морфизмов в $\mathcal{C}'$ индуцируется их композицией в $\mathcal{C}$.

(IV) Все тождественные морфизмы из $\mathcal{C}'$ — тождественные морфизмы в $\mathcal{C}$.

Определение. Подкатегория $\mathcal{C}'$ категории $\mathcal{C}$ называется *полной*, если

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$$

для каждой пары (A, B) объектов из $\mathcal{C}'$.

§ 2. Мономорфизмы, эпиморфизмы, изоморфизмы

Пусть $u: A \rightarrow B$ — морфизм категории $\mathcal{C}$. Для каждого объекта X категории $\mathcal{C}$ рассмотрим отображение

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B), \quad (1)$$

сопоставляющее всякому элементу $v \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A)$ элемент $uv \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B)$.

Определение. Морфизм u называется *мономорфизмом*, если отображение (1) инъективно для любого объекта X из $\mathcal{C}$.

Примеры. 1. Пусть $\mathcal{C}$ — одна из категорий $\mathcal{E}nz$ или $\Delta\mathcal{C}$ (где Δ — произвольное кольцо с единицей) и $u: A \rightarrow B$ — морфизм из $\mathcal{C}$.

Следующие два утверждения равносильны:

(a) u — мономорфизм;

(б) u инъективен, т. е. для любых $x_1, x_2 \in A$ $x_1 \neq x_2$ влечет $u(x_1) \neq u(x_2)$.

Доказательство. Мы ограничимся доказательством для категории $\Lambda\mathcal{C}$, поскольку для категории $\mathcal{C}n3$ оно аналогично. Докажем импликацию (а) $\Rightarrow$ (б). Пусть $N = u^{-1}(0)$. Допустим, что $N \neq \{0\}$; тогда отображение $\text{Hom}_\Lambda(N, A) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(N, B)$, порождаемое морфизмом u , не инъективно. В самом деле, рассмотрим элементы $v_1, v_2 \in \text{Hom}_\Lambda(N, A)$, определяемые следующим образом:

$$v_1(\xi) = 0 \quad \text{для всех } \xi \in N,$$

$$v_2(\xi) = \xi \quad \text{для всех } \xi \in N.$$

Из предположения вытекает, что $v_1 \neq v_2$, однако их образы при отображении $\text{Hom}_\Lambda(N, A) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(N, B)$ совпадают.

Докажем теперь импликацию (б) $\Rightarrow$ (а). Допустим, что существуют левый Λ -модуль M и $v \in \text{Hom}_\Lambda(M, A)$, такие, что $v \neq 0$, но при отображении $\text{Hom}_\Lambda(M, A) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(M, B)$ v переходит в нулевой гомоморфизм. Тогда существует $\xi \in M$, такое, что $v(\xi) \neq 0$, но $u(v(\xi)) = 0$, а это противоречит (б).

2. $1_A: A \rightarrow A$ есть мономорфизм для любого объекта A произвольной категории $\mathcal{C}$.

Предложение 1.1. *Композиция двух мономорфизмов есть мономорфизм.*

Доказательство немедленно следует из того, что композиция двух инъективных отображений инъективна.

Предложение 1.2. *Если vu — мономорфизм, то u — мономорфизм.*

Доказательство очевидно.

Пусть теперь $u: A \rightarrow B$ — произвольный морфизм и X — произвольный объект категории $\mathcal{C}$; рассмотрим отображение

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X), \quad (2)$$

сопоставляющее каждому элементу $v \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X)$ элемент $vu \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$.

Определение. Морфизм u называется *эпиморфизмом*, если отображение (2) инъективно для любого объекта X категории $\mathcal{C}$.

Очевидно, u — эпиморфизм тогда и только тогда, когда, рассматриваемый как элемент из $\text{Hom}_{\mathcal{C}^0}(B, A)$, он — мономорфизм. Другими словами, понятие эпиморфизма получается дуализацией понятия мономорфизма.

Предложение 1.1°. *Композиция двух эпиморфизмов есть эпиморфизм.*

Предложение 1.2°. *Если vu — эпиморфизм, то v — эпиморфизм.*

Примеры. 1. В категориях $\mathcal{E}n\mathcal{Z}$ и $\Lambda\mathcal{E}$ понятия эпиморфизма и отображения *на* или гомоморфизма *на* совпадают.

Мы ограничимся случаем категории $\Lambda\mathcal{E}$. Предположим, что $u: A \rightarrow B$, где A, B — Λ -модули, — гомоморфизм *на*. Если гомоморфизмы $v, w: B \rightarrow C$ различны, то существует хотя бы один элемент $x \in B$, такой, что $v(x) \neq w(x)$. Но существует хотя бы один элемент $y \in A$, для которого $u(y) = x$. Поэтому

$$(vu)(y) = v(u(y)) = v(x) \neq w(x) = w(u(y)) = (wv)(y),$$

т. е. $vu \neq wv$, следовательно, u — эпиморфизм.

Обратно, предположим, что $u: A \rightarrow B$ — эпиморфизм, и допустим, что $u(A)$ — собственный подмодуль модуля B . Пусть C — прямая сумма двух Λ -модулей B_1 и B_2 , изоморфных B , и $v_i: B \rightarrow C$ ($i = 1, 2$) — композиция изоморфизма B на B_i и канонической инъекции $B_i \rightarrow C$. Пусть, далее, D — фактормодуль модуля C по подмодулю, порожденному всеми элементами вида $v_1(x) - v_2(x)$, где $x \in u(A)$, и $w: C \rightarrow D$ — каноническая проекция. Тогда $wv_1 \neq wv_2$ и $(wv_1)u = (wv_2)u$ в противоречие с тем, что u — эпиморфизм. Следовательно, $u(A) = B$, т. е. u — гомоморфизм *на*.

2. Пусть $\mathcal{E}$ — категория отделимых топологических абелевых групп с непрерывными гомоморфизмами в качестве морфизмов. Для морфизма $u: A \rightarrow B$ из $\mathcal{E}$ следующие утверждения равносильны:

(а) u — эпиморфизм,

(б) $\overline{u(A)} = B$.

Доказательство. (а) $\Rightarrow$ (б). Допустим, что $\overline{u(A)} = B_1 \neq B$. Рассмотрим морфизмы $v_1, v_2: B \rightarrow B/B_1$, где v_1 — каноническое отображение B на B/B_1 , а v_2 — нулевой гомоморфизм. Так как $B_1 \neq B$, то $v_1 \neq v_2$; но $v_1u = v_2u$ в противоречие с (а).

(б) $\Rightarrow$ (а). Пусть C — произвольный объект категории $\mathcal{E}$, а $v_1, v_2: B \rightarrow C$ таковы, что $v_1u = v_2u$. Следовательно, v_1, v_2 — непрерывные отображения, совпадающие на множестве $u(A)$, всюду плотном в B , а потому $v_1 = v_2$.

3. $1_A: A \rightarrow A$ есть эпиморфизм для любого объекта A произвольной категории $\mathcal{E}$.

Определение. Морфизм $u: A \rightarrow B$ в произвольной категории $\mathcal{E}$, являющийся одновременно мономорфизмом и эпиморфизмом, называется *биморфизмом*.

Определение. Морфизм $u: A \rightarrow B$ называется *изоморфизмом*, если существует морфизм $v: B \rightarrow A$, такой, что

$$vu = 1_A, \quad uv = 1_B.$$

Предложение 1.3. *Каждый изоморфизм есть биморфизм.*

Доказательство. Так как $vu = 1_A$, а 1_A — мономорфизм, то, согласно предложению 1.2, u — мономорфизм. С другой

стороны, так как $uv = 1_B$, а 1_B — эпиморфизм, то, согласно предложению 1.2°, u — эпиморфизм.

З а м е ч а н и е. Существуют биморфизмы, не являющиеся изоморфизмами. Например, рассмотрим в категории отделимых топологических абелевых групп морфизм $u: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, где $\mathbb{Q}$ — аддитивная топологическая группа рациональных чисел, $\mathbb{R}$ — аддитивная топологическая группа вещественных чисел и u — тождественное вложение $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$. Используя пример 2, легко проверить, что u — биморфизм. С другой стороны, не будучи отображением на, u не может быть изоморфизмом.

Предложение 1.4. *Композиция двух изоморфизмов есть изоморфизм.*

Доказательство очевидно.

Пусть A — объект категории $\mathcal{C}$. Рассмотрим мономорфизмы $u: U \rightarrow A$ и $v: V \rightarrow A$. Мы будем говорить, что мономорфизм u *мажорирует* мономорфизм v , и писать $u \geq v$ (или $v \leq u$), если существует морфизм $v_1: V \rightarrow U$, такой, что $uv_1 = v$.

Если такой морфизм v_1 существует, то, поскольку v — мономорфизм, из предложения 1.2 вытекает, что v_1 — мономорфизм, а так как u — мономорфизм, то из определения мономорфизма непосредственно следует, что v_1 однозначно определен.

Определенное так отношение „ $\geq$ “ рефлексивно и транзитивно.

Предположим теперь, что также $v \geq u$. В этом случае существуют однозначно определенные изоморфизмы $u_1: U \rightarrow V$ и $v_1: V \rightarrow U$, такие, что $v = uv_1$, $u = vu_1$. Действительно, по предыдущему существуют мономорфизмы u_1 и v_1 , удовлетворяющие этим соотношениям. Но тогда $v = v(u_1v_1)$, $u = u(v_1u_1)$, и так как u и v — мономорфизмы, то заключаем, что $u_1v_1 = 1_V$, $v_1u_1 = 1_U$.

Два мономорфизма $u: U \rightarrow A$, $v: V \rightarrow A$, для которых $u \geq v$ и $v \geq u$, мы будем называть *эквивалентными*.

В каждом классе эквивалентных мономорфизмов выберем раз и навсегда по представителю (используя, например, аксиому выбора)¹⁾. Полученные так мономорфизмы мы будем называть *подобъектами* объекта A . Таким образом, подобъекты объекта A — не просто объекты категории $\mathcal{C}$, а некоторые пары вида (U, u) , где $u: U \rightarrow A$ — мономорфизм; он будет называться *каноническим мономорфизмом* U в A . Но чтобы не усложнять запись и речь, мы всюду, где это не сможет повлечь путаницы, будем вместо (U, u) писать просто U .

Дуальным образом определяются понятия *факторобъекта* и *канонического эпиморфизма*²⁾.

¹⁾ В качестве представителя класса мономорфизмов, эквивалентных 1_A (т. е. класса всех изоморфизмов с кообластью A), далее принимается 1_A .

²⁾ При этом исходят из отношения мажорирования для эпиморфизмов с общей областью, определяемого следующим образом: $u \geq v$, если существует морфизм v_1 , такой, что $v_1u = v$ (т. е. если в дуальной категории мономорфизм u мажорирует мономорфизм v).

Заметим, что отношение $\geq$ между подобъектами или фактор-объектами является уже отношением (частичного) порядка¹⁾.

Пример. Пусть A — объект категории $\mathcal{A}$. Выбор, входящий в определение подобъекта, можно осуществить так, что каждый подобъект объекта A будет иметь вид (A_1, α) , где A_1 — подмножество множества A , а $\alpha(x) = x$ для всех $x \in A_1$. Другими словами, подобъекты в $\mathcal{A}$ отождествимы с обычными подгруппами.

§ 3. Функторы

Определение. Пусть даны категории $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$. *Ковариантный* (соотв. *контравариантный*) *функтор* из категории $\mathcal{C}_1$ в $\mathcal{C}_2$ состоит из:
(а) отображения $A \mapsto F(A)$, сопоставляющего каждому объекту A из $\mathcal{C}_1$ объект $F(A)$ из $\mathcal{C}_2$;
(б) отображений

$$F(A, B): \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(A), F(B))$$

$$(\text{соотв. } F(A, B): \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(B), F(A))),$$

определенных для всех пар (A, B) объектов из $\mathcal{C}_1$ и таких, что (если вместо $F(A, B)(u)$ писать просто $F(u)$) $F(1_A) = 1_{F(A)}$ и $F(vu) = F(v)F(u)$ (соотв. $F(vu) = F(u)F(v)$).

Очевидно, с каждым контравариантным функтором из $\mathcal{C}_1$ в $\mathcal{C}_2$ естественно ассоциируются ковариантные функторы из $\mathcal{C}_1^\circ$ в $\mathcal{C}_2$ и из $\mathcal{C}_1$ в $\mathcal{C}_2^\circ$ и обратно. Поэтому общее изучение контравариантных функторов может быть сведено к изучению ковариантных функторов.

Примеры. Современная математика изобилует функторами. Можно с основанием считать, что это и сделало возможным появление понятия категории. Мы ограничимся демонстрацией лишь нескольких примеров, которые будут использоваться в дальнейшем.

1. Пусть $\mathcal{C}$ — произвольная категория и $\mathcal{E}nz$ — категория множеств. Мы определим ковариантный функтор F из категории-произведения $\mathcal{C}^\circ \times \mathcal{C}$ (см. определение на стр. 10) в $\mathcal{E}nz$, положив

$$F(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$$

и

$$F(u, v)(f) = vfu$$

для любых $(u, v): (A, B) \rightarrow (A_1, B_1)$ и $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

2. Пусть $\mathcal{M}$ — категория, объектами которой служат упорядоченные тройки (A, L, M) , где A — кольцо, L — правый A -модуль, M — левый A -модуль, а морфизмами (A, L, M) в (A_1, L_1, M_1) служат упорядоченные тройки (φ, u, v) , где (φ, u) — бигомоморфизм

¹⁾ Для подобъектов вместо $U \geq V$ пишут также $U \supset V$ (или $V \subset U$).

пары (A, L) в пару (A_1, L_1) , а (φ, ψ) — бигомоморфизм (A, M) в (A_1, M_1) ¹⁾. Мы получим ковариантный функтор T из категории $\mathcal{M}$ в категорию абелевых групп $\mathcal{A}\mathcal{L}$, положив $T(A, L, M) = L \otimes_A M$ и $T(\varphi, \psi, \psi)$ равным гомоморфизму $L \otimes_A M \rightarrow L_1 \otimes_{A_1} M_1$, индуцированному тройкой (φ, ψ, ψ) .

3. Пусть X — фиксированный объект категории $\mathcal{C}$. Мы получим контравариантный функтор h_X из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{E}n\mathcal{Z}$, если для любого объекта Y из $\mathcal{C}$ положим

$$h_X(Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$$

и для любого морфизма $u: Y \rightarrow Y'$ из $\mathcal{C}$ определим $h_X(u)$ как отображение $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y', X)$ в $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, переводящее v в uv .

Аналогично определится ковариантный функтор $\bar{h}_X$ из категории $\mathcal{C}$ в $\mathcal{E}n\mathcal{Z}$, если для любого объекта Y из $\mathcal{C}$ положить

$$\bar{h}_X(Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

и для любого морфизма $u: Y \rightarrow Y'$ из $\mathcal{C}$ определить $\bar{h}_X(u)$ как отображение $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ в $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y')$, переводящее v в uv .

4. Пусть ${}_A\mathcal{C}$ — категория левых A -модулей и X — фиксированный правый A -модуль. Мы получим ковариантный функтор T_X из категории ${}_A\mathcal{C}$ в $\mathcal{A}\mathcal{L}$, если для каждого объекта Y из ${}_A\mathcal{C}$ положим

$$T_X(Y) = Y \otimes_A X$$

и для каждого гомоморфизма $u: Y \rightarrow Y'$ A -модуля Y в A -модуль Y' примем за $T_X(u)$ индуцированное им отображение $Y \otimes_A X$ в $Y' \otimes_A X$.

Определение. Пусть F и G — ковариантные функторы из категории $\mathcal{C}_1$ в категорию $\mathcal{C}_2$. Говорят, что задан *функторный морфизм* f функтора F в функтор G , если для каждого объекта A из $\mathcal{C}_1$ задан морфизм $f(A): F(A) \rightarrow G(A)$ в $\mathcal{C}_2$ так, что для любого морфизма $u: A \rightarrow B$ из $\mathcal{C}_1$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{f(A)} & G(A) \\ F(u) \downarrow & & \downarrow G(u) \\ F(B) & \xrightarrow{f(B)} & G(B) \end{array}$$

коммутативна²⁾.

Если $f(A)$ — изоморфизм для каждого объекта A из $\mathcal{C}_1$, то f называется *функторным изоморфизмом*.

¹⁾ То есть φ — гомоморфизм кольца A в A_1 , u (соотв. ψ) — гомоморфизм аддитивной группы L в L_1 (соотв. M в M_1), причем $u(xa) = u(x)\varphi(a)$ (соотв. $\psi(ax) = \varphi(a)\psi(x)$).

²⁾ То есть $G(u)f(A) = f(B)F(u)$.

Если функторы F и G контравариантны, то в определении функторного морфизма последняя диаграмма заменяется, конечно, диаграммой

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{f(A)} & G(A) \\ \uparrow F(u) & & \uparrow G(u) \\ F(B) & \xrightarrow{f(B)} & G(B) \end{array}$$

Пример. Пусть $w: X \rightarrow X'$ — морфизм категории $\mathcal{C}$. Сопоставим этому морфизму функторный морфизм функтора h_X в функтор $h_{X'}$ следующим образом. Пусть Y — произвольный объект из $\mathcal{C}$. Обозначим через $h_w(Y)$ отображение $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ в $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X')$, переводящее $v \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) = h_X(Y)$ в $wv \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X') = h_{X'}(Y)$. Чтобы заключить, что этим определен функторный морфизм h_X в $h_{X'}$, следует проверить, что для каждого морфизма $u: Y \rightarrow Y'$ из $\mathcal{C}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} h_X(Y) & \xrightarrow{h_w(Y)} & h_{X'}(Y) \\ \uparrow h_X(u) & & \uparrow h_{X'}(u) \\ h_X(Y') & \xrightarrow{h_w(Y')} & h_{X'}(Y') \end{array}$$

Но последнее очевидно, ибо для любого $f \in h_X(Y') = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y', X)$ имеем

$$\begin{aligned} (h_w(Y) h_X(u))(f) &= h_w(Y)(fu) = w(fu), \\ (h_{X'}(u) h_w(Y'))(f) &= h_{X'}(u)(wf) = (wf)u. \end{aligned}$$

Очевидно, если w — изоморфизм, то h_w — функторный изоморфизм.

Если f — функторный морфизм F в G и g — функторный морфизм G в H , то можно получить функторный морфизм F в H , положив $h(A) = g(A)f(A)$ для каждого объекта A из $\mathcal{C}_1$. Определенный так функторный морфизм h называется *композицией* функторных морфизмов f и g и обозначается gf . Введенная так операция композиирования ассоциативна. Если $\mathcal{C}_1$ — *малая категория*, т. е. ее объекты образуют множество, то естественно определяется новая категория $\text{Func}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$, объектами которой служат всевозможные ковариантные функторы из $\mathcal{C}_1$ в $\mathcal{C}_2$, а множество $\text{Hom}(F, G)$ морфизмов ковариантного функтора F в ковариантный функтор G в смысле этой новой категории есть по определению множество всех функторных морфизмов F в G .

Если F и G — ковариантные или контравариантные функторы из категории $\mathcal{C}_1$ в категорию $\mathcal{C}_2$, мы через $\text{Hom}(F, G)$ всегда будем обозначать класс всех функторных морфизмов F в G (даже

в том случае, когда класс объектов категории $\mathcal{C}_1$ не есть множество!)¹⁾. Мы будем также использовать обозначение $f: F \rightarrow G$ для указания того, что f — функторный морфизм функтора F в функтор G независимо от ковариантности или контравариантности этих функторов. Точно так же 1_F будет обозначать функторный морфизм $1_F: F \rightarrow F$, определенный формулой $1_F(Y) = 1_{F(Y)}$ для всех $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}_1$.

Логические трудности, возникающие при построении категории $\text{Funct}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$, могут быть обойдены путем применения понятия универсального множества Гротендика.

Универсальным множеством называется множество $\mathcal{U}$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

У₁. Если $(X_i)_{i \in I}$ — семейство множеств, являющихся элементами множества $\mathcal{U}$, и I — элемент множества $\mathcal{U}$, то и объединение $\bigcup_{i \in I} X_i$ есть элемент множества $\mathcal{U}$.

У₂. Если x — элемент множества $\mathcal{U}$, то и множество $\{x\}$, единственным элементом которого служит x , есть элемент множества $\mathcal{U}$.

У₃. Если x — элемент множества X , а X — элемент множества $\mathcal{U}$, то x — элемент множества $\mathcal{U}$.

У₄. Если множество X — элемент множества $\mathcal{U}$, то и множество $\mathfrak{P}(X)$ всех его подмножеств есть элемент множества $\mathcal{U}$.

У₅. Пара (x, y) есть элемент множества $\mathcal{U}$ тогда и только тогда, когда x и y — элементы множества $\mathcal{U}$.

Категория $\mathcal{C}$ называется $\mathcal{U}$ -категорией, если

1. Объекты категории $\mathcal{C}$ образуют множество, являющееся элементом универсального множества $\mathcal{U}$, и

2. Множество $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ есть элемент множества $\mathcal{U}$ для каждой пары (X, Y) объектов категории $\mathcal{C}$.

Если $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ — $\mathcal{U}$ -категории, то $\text{Funct}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ также есть

¹⁾ Наиболее распространенная ныне аксиоматика теории множеств — аксиоматика Бернаиса — Гёделя — основана на различении понятий класса и множества: множеством называется класс, являющийся элементом какого-либо класса, и допускаются также „собственные“ классы, т. е. классы, не являющиеся множествами (например, класс всех множеств). Но в рамках этой аксиоматики понятие класса всех функторных морфизмов функтора $F: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ в функтор $G: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ (законное, когда объекты категории $\mathcal{C}_1$ образуют множество) незаконно, когда класс объектов категории $\mathcal{C}_1$ — собственный (как это имеет место почти во всех рассмотренных примерах категорий). В самом деле, всякий функторный морфизм $f: F \rightarrow G$ есть отображение класса $\text{Ob } \mathcal{C}_1$ в класс $\text{Mor } \mathcal{C}_2$ всех морфизмов категории $\mathcal{C}_2$ и, значит, отождествим с подмножеством произведения $\text{Ob } \mathcal{C}_1 \times \text{Mor } \mathcal{C}_2$, образованным всевозможными парами $(X, f(X))$ ($X \in \text{Ob } \mathcal{C}_1$). Поэтому если $\text{Ob } \mathcal{C}_1$ — собственный класс, то и f — собственный класс. Но тогда f не может быть элементом никакого класса. Таким образом, если класс объектов категории $\mathcal{C}_1$ не есть множество, то „класса“ $\text{Hom}(F, G)$ не существует. (Заметим, что если также $\text{Ob } \mathcal{C}_2$ — собственный класс, то и сами морфизмы $f(X): F(X) \rightarrow G(X)$ могут не образовывать множества. Например, если $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$, F — тождественный функтор и f — тождественный функторный морфизм F в $G = F$, то $f(X)$ пробегает класс всех единиц категории $\mathcal{C}_1$, не являющийся множеством.)

$\mathcal{U}$ -категория, так как ее объекты образуют подмножество множества отображений $\bigcup_{X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}_1} \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(X, Y)$ в $\bigcup_{Z, V \in \text{Ob } \mathcal{C}_1} \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(Z, V)$ и $\text{Hom}(F, G)$ для любых $F, G \in \text{Func}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ есть подмножество множества $\prod_{X \in \text{Ob } \mathcal{C}_1} \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(X), G(X))$ ¹⁾.

Предложение 1.5. Если $f: F \rightarrow G$ — функторный изоморфизм контравариантного функтора F в контравариантный функтор G , то существует единственный функторный морфизм $g: G \rightarrow F$, такой, что $gf = 1_F$, $fg = 1_G$.

(Аналогичное утверждение верно и для ковариантных функторов.)

Доказательство. Единственность очевидна, и доказательства требует только существование. Пусть Y — объект категории $\mathcal{C}_1$. В категории $\mathcal{C}_2$ существует единственный морфизм $g(Y): G(Y) \rightarrow F(Y)$, такой, что $f(Y)g(Y) = 1_{G(Y)}$, $g(Y)f(Y) = 1_{F(Y)}$. Мы утверждаем, что этим определен функторный морфизм $g: G \rightarrow F$, т. е. что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G(Y) & \xrightarrow{g(Y)} & F(Y) \\ G(u) \uparrow & & \uparrow F(u) \\ G(Y') & \xrightarrow{g(Y')} & F(Y') \end{array}$$

коммутативна для любого $u: Y \rightarrow Y'$. Так как $f(Y)$ — изоморфизм, то достаточно показать, что

$$f(Y)g(Y)G(u) = f(Y)F(u)g(Y').$$

Но так как f — функторный морфизм, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F(Y) & \xrightarrow{f(Y)} & G(Y) \\ F(u) \uparrow & & \uparrow G(u) \\ F(Y') & \xrightarrow{f(Y')} & G(Y') \end{array}$$

¹⁾ Чтобы понятие $\mathcal{U}$ -категории имело практический смысл, нужно, чтобы по крайней мере множество N всех конечных кардинальных чисел было элементом некоторого универсального множества $\mathcal{U}$. Тогда приобретает смысл и, как показано, становится $\mathcal{U}$ -категорией категория функторов из любой $\mathcal{U}$ -категории в любую $\mathcal{U}$ -категорию (с этим $\mathcal{U}$). Но теория категорий нуждается не только в категориях функторов, но и в „категориях категорий“. Между тем категория всех $\mathcal{U}$ -категорий с данным $\mathcal{U}$ (и функторов между ними в качестве морфизмов) уже не есть $\mathcal{U}$ -категория с тем же $\mathcal{U}$. Чтобы включить и такие категории в рамки единой общей теории, принимают, следуя идее Гротендика, в качестве аксиомы, что *каждое множество есть элемент некоторого универсального множества*. В частности, и $\mathcal{U}$ есть элемент еще большего универсального множества $\mathcal{Y}$, а тогда категория всех $\mathcal{U}$ -категорий оказывается $\mathcal{Y}$ -категорией. Как видно из дальнейшего, авторы книги не следуют этой концепции и придерживаются классической аксиоматики Бернайса — Гёделя (допуская иногда неточности).

коммутативна, и поэтому

$$f(Y) F(u) g(Y') = G(u) f(Y') g(Y') = G(u) = f(Y) g(Y) G(u).$$

Пусть F — контравариантный функтор из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{E}$ и X — объект категории $\mathcal{C}$. Рассмотрим класс $\text{Hom}(h_X, F)$ всех функторных морфизмов h_X в F . Имеет место

Теорема 1.6. *Существует каноническое биективное отображение $\alpha: \text{Hom}(h_X, F) \rightarrow F(X)$ ¹⁾.*

Доказательство. Пусть f — функторный морфизм h_X в F , так что для каждого объекта Y категории $\mathcal{C}$ существует морфизм $f(Y): h_X(Y) \rightarrow F(Y)$, такой, что для всех морфизмов $u: Y \rightarrow Y'$ из $\mathcal{C}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} h_X(Y) & \xrightarrow{f(Y)} & F(Y) \\ h_X(u) \uparrow & & \uparrow F(u) \\ h_X(Y') & \xrightarrow{f(Y')} & F(Y') \end{array}$$

В частности, существует морфизм $f(X): h_X(X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \rightarrow F(X)$. Положим по определению $\alpha(f) = f(X)(1_X)$.

Определим теперь отображение $\beta: F(X) \rightarrow \text{Hom}(h_X, F)$ следующим образом. Пусть $\xi \in F(X)$ и Y — произвольный объект категории $\mathcal{C}$. Определим морфизм $\beta(\xi)(Y): h_X(Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \rightarrow F(Y)$ равенством

$$(\beta(\xi)(Y))(u) = F(u)(\xi).$$

Чтобы показать, что этим задан функторный морфизм h_X в F , следует проверить, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} h_X(Y) & \xrightarrow{\beta(\xi)(Y)} & F(Y) \\ h_X(v) \uparrow & & \uparrow F(v) \\ h_X(Y') & \xrightarrow{\beta(\xi)(Y')} & F(Y') \end{array}$$

коммутативна для всех морфизмов $v: Y \rightarrow Y'$ из $\mathcal{C}$. Но для каждого $w: Y' \rightarrow X$ имеем

$$(F(v) \beta(\xi)(Y'))(w) = F(v) F(w)(\xi) = F(wv)(\xi),$$

$$(\beta(\xi)(Y) h_X(v))(w) = \beta(\xi)(Y)(wv) = F(wv)(\xi).$$

¹⁾ Согласно сказанному в примечании на стр. 18, объединение функторных морфизмов $h_X \rightarrow F$ в класс $\text{Hom}(h_X, F)$ законно, когда категория $\mathcal{C}$ — малая, и незаконно в противном случае. Однако теорема 1.6 от этой логической трудности, по сути дела, не зависит, поскольку указанные в доказательстве правила отнесения каждому функторному морфизму $h_X \rightarrow F$ точки множества $F(X)$ и обратно на самом деле не требуют объединения этих функторных морфизмов в класс. Если $\text{Ob } \mathcal{C}_1$ — не множество, то нужно рассматривать $\alpha: \text{Hom}(h_X, F) \rightarrow F(X)$ и $\beta: F(X) \rightarrow \text{Hom}(h_X, F)$ (см. доказательство) как символические обозначения этих правил, а не отображений.

Покажем теперь, что α и β — взаимно обратные биекции.

(а) $\beta(\alpha(f)) = f$. В самом деле, пусть Y — объект из $\mathcal{C}$. Покажем, что $\beta(\alpha(f))(Y) = f(Y)$. По определению для любого $u \in h_X(Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ имеем

$$(\beta(\alpha(f))(Y))(u) = F(u)(\alpha(f)) = F(u)(f(X)(1_X)) = (F(u)f(X))(1_X).$$

Но так как f — функторный морфизм, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} h_X(X) & \xrightarrow{f(X)} & F(X) \\ h_X(u) \downarrow & & \downarrow F(u) \\ h_X(Y) & \xrightarrow{f(Y)} & F(Y) \end{array}$$

коммутативна. А это означает, что

$$(F(u)f(X))(1_X) = (f(Y)h_X(u))(1_X) = f(Y)(u).$$

(б) $\alpha(\beta(\xi)) = \xi$. В самом деле,

$$\alpha(\beta(\xi)) = (\beta(\xi)(X))(1_X) = F(1_X)(\xi) = 1_{F(X)}(\xi) = \xi.$$

Следствие 1.7. Пусть X и X' — объекты категории $\mathcal{C}$. Для всякого функторного морфизма $f: h_X \rightarrow h_{X'}$ существует такой единственный морфизм $\xi: X \rightarrow X'$ категории $\mathcal{C}$, что

$$f(Y)(u) = \xi u$$

для любых объекта Y и морфизма $u: Y \rightarrow X$. Если f — функторный изоморфизм, то ξ — изоморфизм, и обратно.

Доказательство. Положим $\xi = \alpha(f)$. Тогда $\beta(\xi) = f$, откуда и вытекает требуемое соотношение¹⁾. Если f — функторный изоморфизм, то, согласно предложению 1.5, существует функторный морфизм $g: h_{X'} \rightarrow h_X$, такой, что $gf = 1_{h_X}$, $fg = 1_{h_{X'}}$. Пусть $\xi' = \alpha(g)$. Тогда

$$\begin{aligned} 1_X = \alpha(gf) &= ((gf)(X))(1_X) = (g(X)f(X))(1_X) = \\ &= g(X)(f(X)(1_X)) = g(X)(\xi) = \xi'\xi. \end{aligned}$$

Аналогично $1_{X'} = \xi\xi'$.

§ 4. Представимые функторы

Определение. Контравариантный функтор F из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{E}$ называется *представимым*, если для некоторого объекта X категории $\mathcal{C}$ существует функторный изоморфизм $f: h_X \rightarrow F$. Используя предыдущие обозначения, будем говорить, что пара $(X, \alpha(f))$ представляет функтор F , а иногда, допуская „вольность речи“, что X представляет F .

¹⁾ Единственность ξ получим, взяв $u = 1_X$.

Предложение 1.8. Если пары (X, ξ) , (X', ξ') представляют функтор F , то существует единственный изоморфизм $u: X \rightarrow X'$, такой, что $F(u)(\xi') = \xi$.

Доказательство. Существование. Из условия вытекает существование функторного изоморфизма $g: h_X = h_{X'}$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} h_X & & \\ \downarrow g & \searrow f & \\ h_{X'} & \nearrow f' & \end{array}$$

где $\alpha(f) = \xi$, $\alpha(f') = \xi'$. Согласно следствию 1.7, существует морфизм $u: X \rightarrow X'$, такой, что $g(Y)(w) = uw$ для всех $w: Y \rightarrow X$. Поэтому $\xi = f(X)(1_X) = (f'(X)g(X))(1_X) = f'(X)(u) = F(u)(\xi')$.

Единственность. Если $u, v: X \rightarrow X'$ таковы, что $F(u)(\xi') = F(v)(\xi') = \xi$, то для обоих индуцированных ими функторных морфизмов $g_1, g_2: h_X \rightarrow h_{X'}$ приведенная выше диаграмма коммутативна. В самом деле, $(f'(Y)g_1(Y))(w) = f'(Y)(uw) = F(uw)(\xi') = (F(w)F(u))(\xi') = F(w)(F(u)(\xi')) = F(w)(\xi) = f(Y)(w)$, и аналогично $(f'(Y)g_2(Y))(w) = f(Y)(w)$. Но отсюда следует, что $g_1 = g_2$ и, значит, $u = v$.

Очень многие математические вопросы сводятся к выяснению того, представим данный функтор или нет. Таковы, например, вопросы, возникающие при классификации расслоений с фиксированной структурной группой, в теориях гомологий и когомологий, в теории многообразий Пикара и т. д.

К сожалению, мы не располагаем в настоящее время удобным общим критерием представимости функтора. Одно необходимое условие будет указано в главе 3 (следствие 3.8).

Приведем теперь несколько классических примеров представимых функторов.

Тензорное произведение двух модулей. Пусть Λ — коммутативное кольцо с единицей и A, B — некоторые фиксированные Λ -модули. Обозначая через $\mathcal{B}(X)$ множество всех билинейных отображений произведения $A \times B$ в Λ -модуль X , получаем ковариантный функтор $\mathcal{B}: \Lambda\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}\Lambda\mathcal{B}$. Он представим¹⁾ тензорным произведением $A \otimes B$.

¹⁾ Ковариантный функтор $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}\Lambda\mathcal{B}$ называется *представимым*, если для некоторого объекта X из $\mathcal{C}$ существует функторный изоморфизм $f: \tilde{h}_X \rightarrow F$. При этом говорят, что F представляется парой $(X, \alpha(f))$, где под $\alpha(f)$ для каждого функторного морфизма $g: \tilde{h}_X \rightarrow F$ понимается $g(X)(1_X)$ и g определяется по $\alpha(g)$ формулой $g(Y)(u) = F(u)(\alpha(g))$ для всех морфизмов $u: X \rightarrow Y$ (см. теорему 1.6).

Кольца частных. Пусть $\mathcal{A}$ — категория коммутативных колец с единицей и кольцевых гомоморфизмов, переводящих единицу в единицу. Пусть A — объект категории $\mathcal{A}$ и S — его мультипликативно замкнутое подмножество. Обозначая для каждого кольца B через $Q(B)$ множество всех гомоморфизмов $f: A \rightarrow B$, обладающих тем свойством, что $f(s)$ есть обратимый элемент в B для каждого $s \in S$, получим ковариантный функтор $Q: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}nz$. Он представим: $Q(B) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A[S^{-1}], B)^1$.

Полнение метрического пространства. Пусть $Metz$ — категория метрических пространств и равномерно непрерывных отображений. Выделим в ней полную подкатегорию $\overline{Metz}$ полных метрических пространств. Пусть A — произвольное метрическое пространство. Рассмотрим ковариантный функтор $F: Metz \rightarrow \mathcal{E}nz$, определенный следующим образом:

$$F(X) = \{f: A \rightarrow X \mid f \text{ равномерно непрерывно}\}^2.$$

Этот функтор представим: $F(X) = \text{Hom}_{\overline{Metz}}(\bar{A}, X)$, где $\bar{A}$ — пополнение пространства A .

Предложение 1.9. Пусть F и G — представимые ковариантные функторы, а (A, ξ) и (B, η) — представляющие их пары. Для каждого функторного морфизма $\mu: F \rightarrow G$ существует единственный морфизм $u: B \rightarrow A$, такой, что $\mu(A)(\xi) = G(u)(\eta)$. При этом, если функторному морфизму $v: G \rightarrow H$, где H — функтор, представимый парой (C, ζ) , соответствует морфизм $v: C \rightarrow B$, то композиция $v\mu: F \rightarrow H$ соответствует композиции $uv: C \rightarrow A$.

Доказательство. Пусть $\varphi: \bar{h}_A \rightarrow F$ и $\psi: \bar{h}_B \rightarrow G$ — функторные изоморфизмы, для которых $\varphi(A)(1_A) = \xi$ и $\psi(B)(1_B) = \eta$. Для любого объекта X существует морфизм $\lambda(X)$, такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\mu(X)} & G(X) \\ \varphi(X) \uparrow & & \uparrow \psi(X) \\ \text{Hom}_{\mathcal{E}}(A, X) & \xrightarrow{\lambda(X)} & \text{Hom}_{\mathcal{E}}(B, X) \end{array} \quad (3)$$

коммутативна. Покажем, что утверждаемым свойством обладает морфизм $u = \lambda(A)(1_A)$. Из коммутативности диаграммы (3) выте-

¹⁾ Здесь $A[S^{-1}]$ означает кольцо частных A по S (см., напр., С. Ленг, Алгебра, „Мир“, 1968, стр. 85).

²⁾ Имеется в виду, что F — сужение функтора $\bar{h}_A: Metz \rightarrow \mathcal{E}nz$ на $\overline{Metz}$.

кает, что

$$\mu(A)(\xi) = \mu(A)(\varphi(A)(1_A)) = (\psi(A)\lambda(A))(1_A) = \psi(A)(u) = G(u)(\eta),$$

чем существование u доказано. Единственность следует из биективности $\psi(A)$.

Для доказательства второй части предложения достаточно проверить, что

$$(\nu\mu)(A)(\xi) = H(uv)(\xi).$$

Но это вытекает из соотношений

$$\begin{aligned} (\nu\mu)(A)(\xi) &= \nu(A)(\mu(A)(\xi)) = \nu(A)(G(u)(\eta)) = \\ &= (H(u)\nu(B))(\eta) = H(u)(\nu(B)(\eta)) = (H(u)H(v))(\xi) \end{aligned}$$

где третье равенство основано на коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} G(A) & \xrightarrow{\nu(A)} & H(A) \\ G(u) \uparrow & & \uparrow H(u) \\ G(B) & \xrightarrow{\nu(B)} & H(B) \end{array}$$

Тем самым доказательство закончено. В качестве следствия получаем предложение: если ковариантный функтор F представим одновременно парами (A, ξ) и (B, η) , то существует единственный изоморфизм $u: B \rightarrow A$, такой, что $F(u)(\eta) = \xi^1$.

§ 5. Сопряженные функторы

Пусть F — ковариантный функтор из категории $\mathcal{C}_1$ в категорию $\mathcal{C}_2$ и G — ковариантный функтор из категории $\mathcal{C}_2$ в категорию $\mathcal{C}_1$. Сопоставим этим функторам два функтора из категории $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ (см. определение на стр. 10) в категорию $\mathcal{E}nz$, обозначаемые $\text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(G)$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F)$ и определяемые следующим образом: $\text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(G)$ относит каждому объекту (A, B) из $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ объект $\text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A, G(B))$, а $\text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F)$ — объект $\text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(A), B)$. (Мы ограничиваемся здесь, как и в других местах, указанием того, как функтор действует на объекты².) Будем говорить, что функтор G сопряжен к функтору F , если существует функторный изоморфизм

$$\varphi: \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(G).$$

Предложение 1.10. Если функтор G сопряжен к функтору F , а функтор G_1 — к функтору F_1 и $f: F \rightarrow F_1$ — функторный морфизм, то существует единственный функторный морфизм

¹) Ср. предложение 1.8.

²) Имея в виду естественное распространение его на морфизмы.

$g: G_1 \rightarrow G$, такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{E}_2}(F(A), B) & \xrightarrow{\varphi(A, B)} & \text{Hom}_{\mathcal{E}_1}(A, G(B)) \\ \uparrow \text{Hom}_{\mathcal{E}_2}(f(A), B) & & \uparrow \text{Hom}_{\mathcal{E}_1}(A, g(B)) \\ \text{Hom}_{\mathcal{E}_2}(F_1(A), B) & \xrightarrow{\varphi_1(A, B)} & \text{Hom}_{\mathcal{E}_1}(A, G_1(B)) \end{array} \quad (4)$$

где морфизмы $\text{Hom}_{\mathcal{E}_2}(f(A), B)$, $\text{Hom}_{\mathcal{E}_1}(A, g(B))$ имеют очевидный смысл, а φ и φ_1 — функторные изоморфизмы, коммутативна для любых объектов A из $\mathcal{E}_1$ и B из $\mathcal{E}_2$. Кроме того, если функтор G_2 сопряжен к F_2 , а $f_1: F_1 \rightarrow F_2$ и $g_1: G_2 \rightarrow G_1$ — аналогичным образом связанные функторные морфизмы, то функторным морфизмом, соответствующим $f_1 f$, служит $g g_1$.

Доказательство. Пусть B — произвольный объект категории $\mathcal{E}_2$. Рассмотрим функторы $h_{G(B)}$, $h_{G_1(B)}$ из категории $\mathcal{E}_1$ в категорию $\mathcal{E}nз$. Из условий предложения следует существование функторного морфизма $h_{G_1(B)}$ в $h_{G(B)}$ ¹⁾. Поэтому, согласно следствию 1.7, существует единственный морфизм $g(B): G_1(B) \rightarrow G(B)$, такой, что диаграмма (4) коммутативна. Покажем, что этим определяется функторный морфизм $g: G_1 \rightarrow G$. Пусть $u: B \rightarrow B_1$ — морфизм категории $\mathcal{E}_1$. Требуется доказать коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} G(B_1) & \xleftarrow{G(u)} & G(B) \\ g(B_1) \uparrow & & \uparrow g(B) \\ G_1(B_1) & \xleftarrow{G_1(u)} & G_1(B) \end{array} \quad (5)$$

Снова на основании следствия 1.7 достаточно доказать совпадение для всех A из $\mathcal{E}_1$ морфизмов

$\text{Hom}_{\mathcal{E}_1}(A, G(u)) \text{Hom}_{\mathcal{E}_1}(A, g(B))$ и $\text{Hom}_{\mathcal{E}_1}(A, g(B_1)) \text{Hom}_{\mathcal{E}_1}(A, G_1(u))$ объекта $\text{Hom}_{\mathcal{E}_1}(A, G_1(B))$ в объект $\text{Hom}_{\mathcal{E}_1}(A, G(B_1))$, или, что то же, совпадение их композиций с $\varphi_1(A, B)$. Учитывая коммута-

¹⁾ Для каждого объекта A из $\mathcal{E}_1$ положим

$$\psi(A, B) = \varphi(A, B) h_B(f(A)) [\varphi_1(A, B)]^{-1} \text{ и } \psi(B)(A) = \psi(A, B).$$

Так как для любого морфизма $u: C \rightarrow A$ из $\mathcal{E}_1$

$$\begin{aligned} h_{G(B)}(u) \psi(A, B) &= h_{G(B)}(u) \varphi(A, B) h_B(f(A)) [\varphi_1(A, B)]^{-1} = \\ &= \varphi(C, B) h_B(F(u)) h_B(f(A)) [\varphi_1(A, B)]^{-1} = \\ &= \varphi(C, B) h_B(f(C)) h_B(F_1(u)) [\varphi_1(A, B)]^{-1} = \\ &= \psi(C, B) \varphi_1(C, B) h_B(F_1(u)) [\varphi_1(A, B)]^{-1} = \\ &= \psi(C, B) h_{G_1(B)}(u), \end{aligned}$$

то $\psi(B)$ — функторный морфизм $h_{G_1(B)}$ в $h_{G(B)}$. Он и имеется в виду.

тивность диаграмм

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{G}_2}(F_1(A), B) & \xrightarrow{\varphi_1(A, B)} & \text{Hom}_{\mathcal{G}_1}(A, G_1(B)) \\ \text{Hom}_{\mathcal{G}_2}(F_1(A), u) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{G}_1}(A, G_1(u)) \\ \text{Hom}_{\mathcal{G}_2}(F_1(A), B_1) & \xrightarrow[\varphi_1(A, B_1)]{} & \text{Hom}_{\mathcal{G}_1}(A, G_1(B_1)) \\ & (\varphi_1 - \text{функторный морфизм}) & \end{array}$$

и

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{G}_2}(F_1(A), B_1) & \xrightarrow{\varphi_1(A, B_1)} & \text{Hom}_{\mathcal{G}_1}(A, G_1(B_1)) \\ \text{Hom}_{\mathcal{G}_2}(f(A), B_1) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{G}_1}(A, g(B_1)) \\ \text{Hom}_{\mathcal{G}_2}(F(A), B_1) & \xrightarrow[\varphi(A, B_1)]{} & \text{Hom}_{\mathcal{G}_1}(A, G(B_1)) \\ & (\text{определение } g(B_1), \text{ т. е. диаграмма (4) с заменой } B \text{ на } B_1), & \end{array}$$

получаем соотношения

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{G}_1}(A, g(B_1)) \text{Hom}_{\mathcal{G}_1}(A, G_1(u)) \varphi_1(A, B) &= \\ = \text{Hom}_{\mathcal{G}_1}(A, g(B_1)) \varphi_1(A, B_1) \text{Hom}_{\mathcal{G}_2}(F_1(A), u) &= \\ = \varphi(A, B_1) \text{Hom}_{\mathcal{G}_2}(f(A), B_1) \text{Hom}_{\mathcal{G}_2}(F_1(A), u). \end{aligned}$$

Аналогично, из коммутативности диаграммы (4) и диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{G}_2}(F(A), B_1) & \xrightarrow{\varphi(A, B_1)} & \text{Hom}_{\mathcal{G}_1}(A, G(B_1)) \\ \text{Hom}_{\mathcal{G}_2}(F(A), u) \uparrow & & \uparrow \text{Hom}_{\mathcal{G}_1}(A, G(u)) \\ \text{Hom}_{\mathcal{G}_2}(F(A), B) & \xrightarrow[\varphi(A, B)]{} & \text{Hom}_{\mathcal{G}_1}(A, G(B)) \\ & (\varphi - \text{функторный морфизм}) & \end{array}$$

получаем

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{G}_1}(A, G(u)) \text{Hom}_{\mathcal{G}_1}(A, g(B)) \varphi_1(A, B) &= \\ = \text{Hom}_{\mathcal{G}_1}(A, G(u)) \varphi(A, B) \text{Hom}_{\mathcal{G}_2}(f(A), B) &= \\ = \varphi(A, B_1) \text{Hom}_{\mathcal{G}_2}(F(A), u) \text{Hom}_{\mathcal{G}_2}(f(A), B). \end{aligned}$$

Поэтому равенство указанных выше двух морфизмов вытекает из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{G}_2}(F(A), B) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{G}_2}(F(A), u)} & \text{Hom}_{\mathcal{G}_2}(F(A), B_1) \\ \text{Hom}_{\mathcal{G}_2}(f(A), B) \uparrow & & \uparrow \text{Hom}_{\mathcal{G}_2}(f(A), B_1) \\ \text{Hom}_{\mathcal{G}_2}(F_1(A), B) & \xrightarrow[\text{Hom}_{\mathcal{G}_2}(F_1(A), u)]{} & \text{Hom}_{\mathcal{G}_2}(F_1(A), B_1) \end{array}$$

(а эта диаграмма коммутативна в силу ассоциативности композиции морфизмов).

Вторая часть предложения доказывается простым вычислением.

Следствие 1.11. *Функторы G_1 и G_2 , сопряженные к одному и тому же функтору F , функторно изоморфны.*

Классические примеры сопряженных функторов

1. Пусть Λ и Γ — кольца с единицей и B — левый Γ -модуль, одновременно являющийся правым Λ -модулем. Обозначим, как обычно, через ${}_{\Lambda}\mathcal{C}$ (соотв. $\mathcal{C}_{\Gamma}$) категорию левых Λ -модулей (соотв. правых Γ -модулей). Если A — левый Λ -модуль, то $A \otimes_{\Lambda} B$ можно естественным образом наделять структурой левого Γ -модуля, считая $\gamma(a \otimes b) = a \otimes \gamma b$ для каждого $\gamma \in \Gamma$.

Полагая $F(A) = A \otimes_{\Lambda} B$, где правая часть рассматривается описанным выше образом как левый Γ -модуль, получаем функтор $F: {}_{\Lambda}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\Gamma}$.

Если C — левый Γ -модуль, то в абелевой группе $\text{Hom}_{\Gamma}(B, C)$ можно естественным образом ввести структуру левого Λ -модуля, считая $(\lambda f)(x) = f(x\lambda)$ для любых $f: B \rightarrow C$ и $\lambda \in \Lambda$.

Полагая $G(C) = \text{Hom}_{\Gamma}(B, C)$, где правая часть рассматривается описанным образом как левый Λ -модуль, получаем функтор $G: \mathcal{C}_{\Gamma} \leftarrow {}_{\Lambda}\mathcal{C}$.

Функтор G сопряжен к функтору F .

2. Пусть $\mathcal{P}$ — категория, объекты которой — всевозможные пары (X, x) , где X — линейно связное топологическое пространство, а x — его отмеченная точка; морфизмы же объекта (X, x) в объект (Y, y) — это по определению классы гомотопных непрерывных отображений, переводящих отмеченную точку в отмеченную точку. Пусть, далее, $\mathcal{G}$ — категория групп и гомоморфизмов (см. пример 3 на стр. 10). Имеются следующие два функтора:

$$\pi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{G}, \quad e: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{P},$$

первый из которых сопоставляет паре (X, x) фундаментальную группу $\pi_1(X, x)$, а второй сопоставляет группе G пространство Эйленберга — Маклейна $K(G, 1)$ вместе с отмеченной точкой e_0 . В гомотопической теории в качестве следствия некоторых теорем Гуревича и Эйленберга — Маклейна устанавливается, что функтор e сопряжен к функтору π .

3. Пусть $\mathcal{W}$ — категория пространств с отмеченной точкой, имеющих гомотопический тип CW -комплекса, и классов гомотопных непрерывных отображений, переводящих отмеченную точку в отмеченную точку. Определим ковариантные функторы

$$\Omega: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}, \quad \Sigma: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$$

следующим образом:

Функтор Ω сопоставляет паре (X, x) ее пространство петель ΩX , т. е. пространство всех непрерывных отображений $f: [0, 1] \rightarrow X$, для которых $f(0) = f(1) = x$, наделенное компактно-открытой топологией; отмеченной точкой в ΩX служит отображение f , определяемое формулой $f([0, 1]) = x$.

Функтор Σ сопоставляет паре (X, x) надстройку ΣX , т. е. пространство, получаемое из произведения $[0, 1] \times X$ склеиванием подпространства $(\{0\} \times X) \cup (\{1\} \times X) \cup ([0, 1] \times \{x\})$ в точку, которая и принимается за отмеченную точку в ΣX .

В топологии доказывается, что функтор Σ сопряжен к функтору Ω .

4. Пусть $\mathcal{T}op$ — категория топологических пространств и непрерывных отображений (см. пример 2 на стр. 10) и $\mathcal{K}$ — категория полусимплициальных комплексов и полусимплициальных отображений. Определим ковариантные функторы

$$S: \mathcal{T}op \rightarrow \mathcal{K}, \quad R: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{T}op$$

следующим образом. Функтор S сопоставляет каждому топологическому пространству X его сингулярный комплекс SX ; функтор R сопоставляет каждому полусимплициальному комплексу K его реализацию RK в смысле Милнора.

В алгебраической топологии доказывается, что функтор R сопряжен к функтору S .

5. Пусть B — фиксированный объект категории множеств $\mathcal{E}nz$. Определим ковариантные функторы

$$F, G: \mathcal{E}nz \rightarrow \mathcal{E}nz$$

следующим образом: F сопоставляет каждому множеству A декартово произведение $F(A) = A \times B$; G сопоставляет каждому множеству C множество всех отображений B в C :

$$G(C) = \text{Hom}_{\mathcal{E}nz}(B, C).$$

Функтор G сопряжен к функтору F , ибо, как легко видеть,

$$\text{Hom}_{\mathcal{E}nz}(A \times B, C) \approx \text{Hom}_{\mathcal{E}nz}(A, \text{Hom}_{\mathcal{E}nz}(B, C)) \text{ } ^1).$$

Предложение 1.12. Пусть $F: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ и $G: \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_1$ — ковариантные функторы и $\varphi: \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(F) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(G)$ — функторный морфизм. Для каждого объекта A категории $\mathcal{C}_1$ обозначим через $e_\varphi(A)$ ее морфизм $\varphi(A, F(A))(1_{F(A)}): A \rightarrow GF(A)$. Этим определится функторный морфизм $e_\varphi: 1_{\mathcal{C}_1} \rightarrow GF$. Отображение $\varphi \mapsto e_\varphi$ класса

¹⁾ Имеется в виду биекция первого множества на второе, относящая каждому отображению $\varphi: A \times B \rightarrow C$ отображению $\tilde{\varphi}: A \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{E}nz}(B, C)$, определяемое формулой $\tilde{\varphi}(x)(y) = \varphi(x, y)$ для всех $x \in A$ и $y \in B$.

всех функторных морфизмов $\text{Hom}_{\mathcal{G}_1}(F)$ в $\text{Hom}_{\mathcal{G}_1}(G)$ в класс всех функторных морфизмов $1_{\mathcal{G}_1}$ в GF биективно¹⁾.

Доказательство. Прежде всего нужно показать, что для любого морфизма $\mu: A \rightarrow A_1$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varepsilon_{\Phi}(A)} & (GF)(A) \\ \mu \downarrow & & \downarrow (GF)(\mu) \\ A_1 & \xrightarrow{\varepsilon_{\Phi}(A_1)} & (GF)(A_1) \end{array}$$

коммутативна. Но так как Φ — функторный морфизм, то коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{G}_2}(F(A), F(A)) & \xrightarrow{\Phi(A, F(A))} & \text{Hom}_{\mathcal{G}_1}(A, (GF)(A)) \\ \downarrow \cdot F(\mu) & & \downarrow \cdot (GF)(\mu) \\ \text{Hom}_{\mathcal{G}_2}(F(A), F(A_1)) & \xrightarrow{\Phi(A, F(A_1))} & \text{Hom}_{\mathcal{G}_1}(A, (GF)(A_1)) \end{array}$$

где вертикальные стрелки означают композицию соответственно с морфизмами $F(\mu)$ и $(GF)(\mu)$. Отсюда

$$(GF)(\mu) \varepsilon_{\Phi}(A) = (GF)(\mu) \Phi(A, F(A)) (1_{F(A)}) = \Phi(A, F(A_1)) F(\mu). \quad (6)$$

На том же основании коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{G}_2}(F(A), F(A_1)) & \xrightarrow{\Phi(A, F(A_1))} & \text{Hom}_{\mathcal{G}_1}(A, (GF)(A_1)) \\ F(\mu) \uparrow & & \uparrow \mu \\ \text{Hom}_{\mathcal{G}_2}(F(A_1), F(A_1)) & \xrightarrow{\Phi(A_1, F(A_1))} & \text{Hom}_{\mathcal{G}_1}(A_1, (GF)(A_1)) \end{array}$$

откуда

$$\Phi(A, F(A_1)) F(\mu) = \Phi(A_1, F(A_1)) (1_{F(A_1)}) \mu, \quad (7)$$

и требуемая коммутативность доказана.

Покажем теперь, что каждому функторному морфизму $\Phi: 1_{\mathcal{G}_1} \rightarrow GF$ можно сопоставить функторный морфизм $\delta_{\Phi}: \text{Hom}_{\mathcal{G}_2}(F) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{G}_1}(G)$ так, чтобы $\varepsilon_{\delta_{\Phi}} = \Phi$, $\delta_{\varepsilon_{\Phi}} = \Phi$.

δ_{Φ} определяется следующим образом. Пусть A — объект из $\mathcal{G}_1$, B — объект из $\mathcal{G}_2$ и $\mu: F(A) \rightarrow B$ — морфизм из $\mathcal{G}_2$; тогда $\delta_{\Phi}(A, B)(\mu) = G(\mu) \Phi(A)$. Соотношения $\varepsilon_{\delta_{\Phi}} = \Phi$, $\delta_{\varepsilon_{\Phi}} = \Phi$ легко проверяются. Остается показать, что δ_{Φ} — функторный морфизм. Пусть $(\mu, \nu): (A, B) \rightarrow (A_1, B_1)$ — морфизм категории $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$. Требуется доказать коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{G}_2}(F(A), B) & \xrightarrow{\delta_{\Phi}(A, B)} & \text{Hom}_{\mathcal{G}_1}(A, G(B)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_{\mathcal{G}_2}(F(A_1), B_1) & \xrightarrow{\delta_{\Phi}(A_1, B_1)} & \text{Hom}_{\mathcal{G}_1}(A_1, G(B_1)) \end{array}$$

¹⁾ См. примечание на стр. 20.

где вертикальные стрелки означают морфизмы, индуцируемые морфизмом (μ, ν) . Имеем

$$\delta_\Phi(A_1, B_1)(\nu \mu F(\mu)) = G(\nu \mu F(\mu)) \Phi(A_1) = G(\nu) G(\mu) (GF)(\mu) \Phi(A_1), \quad (8)$$

$$G(\nu)(\delta_\Phi(A, B)(\mu)) \mu = G(\nu) G(\mu) \Phi(A) \mu = (G(\nu) G(\mu)) \Phi(A) \mu. \quad (9)$$

Но так как Φ — функторный морфизм $1_{\mathcal{C}_1}$ в GF , то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\Phi(A_1)} & (GF)(A_1) \\ \mu \downarrow & & \downarrow (GF)(\mu) \\ A & \xrightarrow{\Phi(A)} & (GF)(A) \end{array}$$

коммутативна, т. е. $\Phi(A) \mu = (GF)(\mu) \Phi(A_1)$, а это, согласно (8) и (9), и дает требуемую коммутативность.

Аналогично доказывается следующее предложение (где сохранены обозначения предложения 1.12):

Предложение 1.12'. Пусть $\Psi: FG \rightarrow 1_{\mathcal{C}_2}$ — функторный морфизм. Для каждого объекта (A, B) категории $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ определим морфизм

$$\psi(A, B): \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A, G(B)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(A), B)$$

формулой

$$\psi(A, B)(v) = \Psi(B) F(v)$$

для любых $v: A \rightarrow G(B)$. Этим определится функторный морфизм $\psi: \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F)$, и получаемое так отображение $\Psi \mapsto \psi$ есть биекция класса всех функторных морфизмов FG в $1_{\mathcal{C}_2}$ на класс всех функторных морфизмов $\text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(G)$ в $\text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F)$ ¹⁾.

Предложение 1.13. Для того чтобы функтор $G: \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_1$ был сопряжен к функтору $F: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$, необходимо и достаточно, чтобы существовали функторные морфизмы $\Phi: 1_{\mathcal{C}_1} \rightarrow GF$ и $\Psi: FG \rightarrow 1_{\mathcal{C}_2}$, удовлетворяющие следующим условиям:

(а) для любого объекта A категории $\mathcal{C}_1$

$$\Psi(F(A)) F(\Phi(A)) = 1_{F(A)},$$

(б) для любого объекта B категории $\mathcal{C}_2$

$$G(\Psi(B)) \Phi(G(B)) = 1_{G(B)}.$$

Доказательство. Справедливость этого предложения непосредственно следует из предложений 1.12 и 1.12'. Ограничимся доказательством достаточности условий (а) и (б). Пусть $\varphi: \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(G)$ и $\psi: \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F)$ — функторные морфизмы, ассоциированные соответственно с Φ и Ψ в смысле предложений 1.12 и 1.12'. Покажем, что $\psi\varphi = 1$, $\varphi\psi = 1$. Согласно

¹⁾ См. примечание на стр. 20.

определениям φ и ψ ,

$$\varphi(A, B)(u) = G(u) \Phi(A) \quad \text{для любых } u: F(A) \rightarrow B,$$

$$\psi(A, B)(v) = \Psi(B) F(v) \quad \text{для любых } v: A \rightarrow G(B).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \varphi(A, B)(\varphi(A, B)(u)) &= \psi(A, B)(G(u) \Phi(A)) = \\ &= \Psi(B) F(G(u) \Phi(A)) = \Psi(B)(FG)(u) F(\Phi(A)). \end{aligned}$$

Но поскольку Ψ — функторный морфизм, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (FG)(B) & \xrightarrow{\Psi(B)} & B \\ (FG)(u) \uparrow & & \uparrow u \\ (FG)(F(A)) & \xrightarrow{\Psi(F(A))} & F(A) \end{array}$$

коммутативна, так что, согласно (а),

$$\varphi(A, B)(\varphi(A, B)(u)) = u \Psi(F(A)) F(\Phi(A)) = u 1_{F(A)} = u.$$

Равенство $\varphi\psi = 1$ доказывается аналогично.

Предложение 1.13'. Пусть функтор $S: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ сопряжен к функтору $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ и $\Phi: 1_{\mathcal{C}} \rightarrow ST$, $\Psi: TS \rightarrow 1_{\mathcal{C}'}$ — соответствующие им функторные морфизмы предложения 1.13. Ψ есть изоморфизм тогда и только тогда, когда S вполне унивалентен, т. е. когда отображение $S(X, Y): \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(SX, SY)$, относящее каждому морфизму $u: X \rightarrow Y$ морфизм $S(u)$, биективно для любых объектов X, Y из $\mathcal{C}'$.

Доказательство. Пусть X, Y — объекты из $\mathcal{C}'$. Из предложения 1.12' следует, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) & \xrightarrow{S(X, Y)} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(SX, SY) \\ & \searrow & \swarrow \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(\Psi(X), Y) & & \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(TSX, Y) \end{array}$$

коммутативна¹⁾.

Очевидно, $S(X, Y)$ биективно тогда и только тогда, когда биективно $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(\Psi(X), Y)$. Но биективность $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(\Psi(X), Y)$ для всех Y , согласно следствию 1.7, равносильна тому, что $\Psi(X)$ — изоморфизм.

¹⁾ Действительно, согласно предложению 1.12', функторный морфизм $\varphi: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(S) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(T)$, ассоциированный с Ψ , определяется формулой $\varphi(X', Y)(v) = \Psi(Y)T(v)$ для любых объектов X' из $\mathcal{C}$, Y из $\mathcal{C}'$ и морфизма $v: X' \rightarrow SY$. Беря $X' = SX$ и $v = Su$, получаем $\varphi(SX, Y)(Su) = \Psi(Y)T(Su) = u\Psi(X)$ (где последнее равенство следует из того, что Ψ — функторный морфизм); $\varphi(SX, Y)$ и есть биекция, обозначенная на диаграмме правой стрелкой.

Предложение 1.14. Пусть $G: \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_1$ — ковариантный функтор. Предположим, что заданы:

(I) отображение, относящее каждому объекту A категории $\mathcal{C}_1$ объект $F(A)$ категории $\mathcal{C}_2$;

(II) морфизмы $\rho_A: A \rightarrow G(F(A))$ в $\mathcal{C}_1$ для всех объектов A категории $\mathcal{C}_1$.

Для каждого объекта B категории $\mathcal{C}_2$ этим порождается отображение

$$\varphi(A, B): \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(A), B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A, G(B)),$$

определенное равенством

$$\varphi(A, B)(v) = G(v) \rho_A. \quad (10)$$

Предположим, что $\varphi(A, B)$ — биекция для всех объектов A из $\mathcal{C}_1$ и B из $\mathcal{C}_2$.

При этих условиях существует ковариантный функтор $F: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$, имеющий G своим сопряженным.

Доказательство. Определение функтора $F: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$. Пусть $u: M \rightarrow N$ — произвольный морфизм категории $\mathcal{C}_1$. Требуется определить морфизм $F(u): F(M) \rightarrow F(N)$ и проверить выполнение обычных свойств, которым должен удовлетворять функтор. Рассмотрим морфизм $\rho_N u: M \rightarrow G(F(N))$. По предположению существует единственный морфизм $F(u): F(M) \rightarrow F(N)$, такой, что

$$\varphi(M, F(N))(F(u)) = \rho_N u. \quad (11)$$

Ясно, что, согласно этому определению, $F(1_M) = 1_{F(M)}$. Остается доказать, что

$$F(vu) = F(v) F(u), \quad (12)$$

каковы бы ни были морфизмы $u: M \rightarrow N$ и $v: N \rightarrow P$. Для этого достаточно доказать, что

$$\varphi(M, F(P))(F(v) F(u)) = \varphi(M, F(P))(F(vu)). \quad (13)$$

Но, как следует из определения,

$$\begin{aligned} \varphi(M, F(P))(F(v) F(u)) &= \rho_P(vu), \\ G(F(v)) \rho_N &= \varphi(N, F(P))(F(v)) = \rho_P v, \\ G(F(u)) \rho_M &= \varphi(M, F(N))(F(u)) = \rho_N u, \end{aligned} \quad (14)$$

откуда

$$\begin{aligned} \varphi(M, F(P))(F(vu)) &= (\rho_P v) u = G(F(v)) \rho_N u = \\ &= G(F(v)) G(F(u)) \rho_M = G(F(v) F(u)) \rho_M. \end{aligned} \quad (15)$$

С другой стороны, по определению

$$\varphi(M, F(P))(F(v) F(u)) = G(F(v) F(u)) \rho_M. \quad (16)$$

Сравнивая равенства (15) и (16), получаем (13), откуда и следует требуемое равенство (12).

З а м е ч а н и е. Введенное нами понятие сопряженного функтора можно уточнить следующим образом. Будем называть функтор G *правым сопряженным* к функтору F , если G сопряжен к F в указанном выше смысле. Считая же исходным функтор G , будем при выполнении тех же условий называть функтор F *левым сопряженным* к функтору G .

Определяются также дуальные понятия левого и правого сопряженных для контравариантного функтора. Например, G есть *правый сопряженный* к F , если существует функторный изоморфизм

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(B, F(A)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A, G(B)).$$

Отметим симметрию, которая при этом имеет место.

Все установленные выше предложения о сопряженных функторах справедливы и для других упомянутых случаев.

§ 6. Понятие эквивалентности категорий

Пусть $F, G: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ и $H: \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_3$ — ковариантные функторы, а $\varphi: F \rightarrow G$ — функторный морфизм.

Можно рассмотреть функторы $H \circ F, H \circ G: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_3$. Образовав для каждого объекта A из $\mathcal{C}_1$ морфизм $H(\varphi(A)): (H \circ F)(A) \rightarrow (H \circ G)(A)$, легко убедиться в том, что этим определяется функторный морфизм функтора $H \circ F$ в функтор $H \circ G$; обозначим его $H\varphi$ или $H*\varphi$. Другими словами, по определению

$$(H\varphi)(A) = H(\varphi(A)).$$

Аналогично, рассмотрим функторы $F_1, F_2: \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_3, F_3: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ и предположим, что задан функторный морфизм $\psi: F_1 \rightarrow F_2$. Мы определим функторный морфизм функтора $F_1 \circ F_3$ в функтор $F_2 \circ F_3$, обозначаемый ψF_3 или $\psi * F_3$, положив

$$(\psi F_3)(A) = \psi(F_3(A))$$

для каждого объекта A из $\mathcal{C}_1$.

О п р е д е л е н и е. Говорят, что ковариантный функтор $F: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ определяет *эквивалентность* между категорией $\mathcal{C}_1$ и категорией $\mathcal{C}_2$, если существуют функтор $G: \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_1$ и функторные изоморфизмы $\varphi: 1_{\mathcal{C}_1} \rightarrow GF$ и $\psi: 1_{\mathcal{C}_2} \rightarrow FG$, такие, что

$$F\varphi = \psi F. \quad (17)$$

Предложение 1.15. *Предположим, что функтор $F: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ определяет эквивалентность между $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(а) Для любой пары (A, B) объектов из $\mathcal{C}_1$ отображение $F(A, B): \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(A), F(B))$, сопоставляющее каждому морфизму $u: A \rightarrow B$ морфизм $F(u): F(A) \rightarrow F(B)$, биективно.

(б) Каждый объект M категории $\mathcal{C}_2$ изоморфен некоторому объекту вида $F(A)$.

Доказательство. Покажем, что отображение $F(A, B)$ имеет своим обратным композицию отображений

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(A), F(B)) \xrightarrow{G(F(A), F(B))} \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(GF(A), GF(B)) \xrightarrow{\varphi_*} \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A, B), \quad (18)$$

где отображение φ_* определяется по функторному изоморфизму φ формулой

$$\varphi_*(w) = (\varphi(B))^{-1} w \varphi(A) \quad \text{для всех } w: GF(A) \rightarrow GF(B).$$

Итак, пусть дан морфизм $u: A \rightarrow B$. Требуется показать, что морфизм, получающийся из $F(u)$ с помощью композиции отображений (18), есть не что иное, как u . Этот морфизм есть

$$(\varphi(B))^{-1} GF(u) \varphi(A) =: \alpha: A \rightarrow B,$$

так что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ \varphi(A) \downarrow & & \downarrow \varphi(B) \\ GF(A) & \xrightarrow{GF(u)} & GF(B) \end{array}$$

коммутативна. Но по определению функторного морфизма коммутативна также диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \varphi(A) \downarrow & & \downarrow \varphi(B) \\ GF(A) & \xrightarrow{GF(u)} & GF(B) \end{array}$$

откуда $\alpha = u$, поскольку φ — функторный изоморфизм.

Пусть теперь задан морфизм $v: F(A) \rightarrow F(B)$. Требуется показать, что $F(\varphi_*(G(v))) = v$. Но

$$\begin{aligned} F(\varphi_*(G(v))) &= F((\varphi(B))^{-1} G(v) \varphi(A)) = F((\varphi(B))^{-1})(FG(v) F(\varphi(A))) = \\ &= F((\varphi(B))^{-1})(FG(v) (\psi F)(A)) = F((\varphi(B))^{-1}) FG(v) \psi(F(A)). \end{aligned}$$

Используя коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{v} & F(B) \\ \psi(F(A)) \downarrow & & \downarrow \psi(F(B)) \\ (FG)(F(A)) & \xrightarrow{(FG)(v)} & (FG)(F(B)) \end{array}$$

получаем

$$\begin{aligned} F(v_*(G(v))) &= F((\varphi(B))^{-1}) \psi(F(B)) v = F((\varphi(B))^{-1}) (F\varphi)(B) v = \\ &= F((\varphi(B))^{-1}) F(\varphi(B)) v = F((\varphi(B))^{-1}) \varphi(B) v = \\ &= F(1_B) v = 1_{F(B)} v = v. \end{aligned}$$

Этим завершается доказательство утверждения (а). Ясно, что при этом существенно использовалось равенство (17).

Справедливость утверждения (б) очевидна, поскольку объект M категории $\mathcal{C}_2$ изоморфен $F(G(M))$, например, посредством изоморфизма $\psi(M): M \rightarrow FG(M)$.

Предложение 1.16. Пусть функтор $F: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ определяет эквивалентность между $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$, а $G: \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_1$, $\varphi: 1_{\mathcal{C}_1} \rightarrow GF$, $\psi: 1_{\mathcal{C}_2} \rightarrow FG$ — функтор и функторные изоморфизмы, удовлетворяющие условиям определения на стр. 33. Тогда справедливы следующие утверждения:

(а) Для любой пары (M, N) объектов из $\mathcal{C}_2$ отображение $G(M, N): \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(M, N) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(G(M), G(N))$ биективно.

(б) Функтор G сопряжен к F , а F сопряжен к G .

(в) $G\psi = \varphi G$.

Доказательство. (а) Из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} GF G(M) & \xrightarrow{GF G(v)} & GF G(N) \\ \uparrow \varphi(G(M)) & & \uparrow \varphi(G(N)) \\ G(M) & \xrightarrow{G(v)} & G(N) \end{array}$$

для всех $v: M \rightarrow N$ следует, что отображение

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(M, N) \xrightarrow{G(M, N)} \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(G(M), G(N))$$

совпадает с композицией отображений

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(M, N) \xrightarrow{FG(M, N)} \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(FG(M), FG(N)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(G(M), G(N)), \quad (19)$$

где последняя стрелка означает отображение, обратное к отображению

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(G(M), G(N)) \xrightarrow{F(G(M), G(N))} \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(G(M)), F(G(N))),$$

описанное при доказательстве предложения 1.15.

В самом деле, применив к морфизму $v: M \rightarrow N$ композицию отображений (19), получим морфизм

$$(\varphi(G(N)))^{-1} GF(G(v)) \varphi(G(M)) = \beta: G(M) \rightarrow G(N),$$

так что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} GF(G(M)) & \xrightarrow{GF(G(v))} & GF(G(N)) \\ \uparrow \varphi(G(M)) & & \uparrow \varphi(G(N)) \\ G(M) & \xrightarrow{\beta} & G(N) \end{array}$$

коммутативна. Сопоставление с коммутативной диаграммой в начале доказательства показывает, что $\beta = G(\psi)$. Так как $\psi: 1_{\mathcal{C}_2} \rightarrow FG$ — изоморфизм, то $FG(M, N)$ — биекция. Поскольку и второе отображение в (19) биективно, заключаем, что их композиция биективна, т. е. $G(M, N)$ — взаимно однозначное отображение на.

(б) Пусть A — объект из $\mathcal{C}_1$, а B — объект из $\mathcal{C}_2$. Имеем последовательность биекций

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(A), B) \xrightarrow{G(F(A), B)} \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(GF(A), G(B)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A, G(B)),$$

где последняя биекция индуцирована изоморфизмом $\varphi(A): A \rightarrow GF(A)$. Биекция $\text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(A), B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A, G(B))$, являющаяся их композицией, имеет функториальный характер; следовательно, функтор G сопряжен к F .

Аналогично доказывается, что F сопряжен к G .

(в) Так как F сопряжен к G , то, согласно предложению 1.13, существуют функторные морфизмы $\beta: 1_{\mathcal{C}_2} \rightarrow FG$ и $\alpha: GF \rightarrow 1_{\mathcal{C}_1}$, такие, что

$$\alpha G \cdot G\beta = 1_G. \quad (20)$$

В данном случае их легко указать явно:

$$\alpha = \varphi^{-1}, \quad \beta = \psi. \quad (21)$$

Пусть теперь M — произвольный объект категории $\mathcal{C}_2$. Соотношение (20) дает

$$(\alpha G)(M) \cdot (G\beta)(M) = 1_{G(M)},$$

так что ввиду равенства (21)

$$1_{G(M)} = \varphi^{-1}(G(M)) G(\psi(M)).$$

Компонируя с $\varphi(G(M))$, получаем

$$\varphi(G(M)) = G(\psi(M)),$$

чем требуемое соотношение $G\psi = \varphi G$ и доказано.

Следствие 1.17. Если функтор $F: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ определяет эквивалентность между категориями $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$, а функторы $G', G'': \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_1$ удовлетворяют условиям, наложенным на G в определении на стр. 33, то G' и G'' канонически изоморфны.

Следствие 1.18. Если функтор $F: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ определяет эквивалентность между категориями $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$, а функтор $G: \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_1$ удовлетворяет условиям определения на стр. 33, то G определяет эквивалентность между $\mathcal{C}_2$ и $\mathcal{C}_1$.

Предложение 1.19. Для того чтобы ковариантный функтор $F: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ определял эквивалентность между $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:

(а) Для каждой пары (A, B) объектов из $\mathcal{C}_1$ отображение $F(A, B): \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(A), F(B))$ биективно.

(б) Каждый объект M из $\mathcal{C}_2$ изоморфен объекту вида $F(A)$.

Доказательство. Необходимость следует из предложения 1.15. Чтобы доказать достаточность, выберем для каждого объекта M из $\mathcal{C}_2$ по объекту A в $\mathcal{C}_1$ с изоморфизмом

$$v_M: M \rightarrow F(A).$$

Это возможно по условию (б). Определим функтор $G: \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_1$ следующим образом. Для каждого объекта M из $\mathcal{C}_2$ положим $G(M) = A$. Далее, каждым морфизмом $w: M \rightarrow N$ из $\mathcal{C}_2$ определяется морфизм $w': F(A) \rightarrow F(B)$, такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{v_M} & F(A) \\ w \downarrow & & \downarrow w' \\ N & \xrightarrow{v_N} & F(B) \end{array}$$

коммутативна; по свойству (а) тогда существует, и притом единственный, морфизм $w_1: A \rightarrow B$, для которого $F(w_1) = w'$; положим $G(w) = w_1$.

Построим теперь функторные морфизмы φ, ψ из определения на стр. 33. Пусть A — произвольный объект из $\mathcal{C}_1$ и $B = G(F(A))$. Рассмотрим изоморфизм $v_{F(A)}: F(A) \rightarrow F(B)$; по свойству (а) существует единственный изоморфизм $\varphi(A): A \rightarrow B$, такой, что

$$(F\varphi)(A) = v_{F(A)}. \quad (22)$$

Изоморфизмы $\varphi(A): A \rightarrow GF(A)$ и определяют функторный изоморфизм $\varphi: 1_{\mathcal{C}_1} \rightarrow GF$.

Пусть теперь M — произвольный объект из $\mathcal{C}_2$. Для $A = G(M)$ имеем изоморфизм

$$v_M: M \rightarrow F(A) = FG(M).$$

Этими изоморфизмами определяется функторный изоморфизм $\psi: 1_{\mathcal{C}_2} \rightarrow FG$. Так как, согласно этому определению,

$$\psi(M) = v_M,$$

то

$$\psi(F(A)) = v_{F(A)},$$

откуда ввиду равенства (22) и следует соотношение $\psi F = F\varphi$.

Определение. Говорят, что ковариантный функтор $F: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ определяет *изоморфизм* между категорией $\mathcal{C}_1$ и категорией $\mathcal{C}_2$, если

1) для каждого объекта Z из $\mathcal{C}_2$ существует единственный объект X из $\mathcal{C}_1$, такой, что $F(X) = Z$, и

(2) для каждой пары объектов (X, Y) из $\mathcal{C}_1$ отображение $F(X, Y): \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(X), F(Y))$, сопоставляющее каждому морфизму $u: X \rightarrow Y$ морфизм $F(u): F(X) \rightarrow F(Y)$, биективно.

В этом случае говорят, что категории $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ *изоморфны*.

Определение. Категория называется *конкретной*, если она изоморфна подкатегории категории множеств $\mathcal{S}nz$.

Определение. Объект I категории $\mathcal{C}$ называется *интегральным*, если

1) для каждого объекта X из $\mathcal{C}$ множество $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(I, X)$ непусто и

2) для каждой пары объектов X, Y из $\mathcal{C}$ и каждой пары различных морфизмов $u, v: X \rightarrow Y$ существует морфизм $w: I \rightarrow X$, такой, что $uw \neq vw$.

Дуально, объект I категории $\mathcal{C}$ называется *коинтегральным*, если он есть интегральный объект в дуальной категории $\mathcal{C}^o$.

Например, в категории $\mathcal{S}nz$ любой объект¹⁾ интегрален; в категории всех групп бесконечные циклические группы — интегральные объекты.

В категории $\mathcal{S}nz$ каждое множество, содержащее хотя бы два различных элемента, является коинтегральным объектом.

Предложение 1.20. *Каждая категория, содержащая интегральный объект, конкретна.*

Доказательство. Пусть I — интегральный объект категории $\mathcal{C}$. Определим функтор $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}nz$ следующим образом:

$$F(X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(I, X) \text{ для всех объектов } X \text{ из } \mathcal{C},$$

$$F(u)(v) = uv \text{ для всех морфизмов } u: X \rightarrow Y \text{ и } v: I \rightarrow X.$$

Если теперь $X \neq Y$, то $F(X) \neq F(Y)$, согласно условию (v) определения категории. Если же заданы $u_1, u_2: X \rightarrow Y$, такие, что $u_1 \neq u_2$, то по определению интегрального объекта существует морфизм $v: I \rightarrow X$, для которого $u_1 v \neq u_2 v$, откуда $F(u_1) \neq F(u_2)$.

Следствие 1.21. *Категория, дуальная к $\mathcal{S}nz$, конкретна. Поэтому и категория, дуальная к любой конкретной категории, конкретна.*

¹⁾ Кроме пустого множества.

СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ

§ 1. Суммы и произведения

Пусть A — объект категории $\mathcal{C}$, а I — произвольное множество индексов. Предположим, что задано семейство объектов $(A_i)_{i \in I}$ категории $\mathcal{C}$ и семейство морфизмов $u_i: A \rightarrow A_i$. Будем говорить, что объект A вместе с семейством морфизмов $(u_i)_{i \in I}$ есть *произведение* семейства объектов $(A_i)_{i \in I}$, если выполнено следующее условие: для каждого объекта B категории $\mathcal{C}$ и каждого семейства $(v_i)_{i \in I}$ морфизмов $v_i: B \rightarrow A_i$ существует единственный морфизм $v: B \rightarrow A$, такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{v} & A \\ & \searrow v_i \quad \swarrow u_i & \\ & A_i & \end{array}$$

коммутативна для каждого $i \in I$. Иногда мы будем говорить также, что семейство $(A_i)_{i \in I}$ обладает произведением. Морфизмы u_i называются *каноническими проекциями*.

Условия этого определения могут быть выражены следующим равносильным образом. Рассмотрим теоретико-множественное декартово произведение $\prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A_i)$, где X — произвольный объект категории $\mathcal{C}$. Пусть

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A_i) \quad (*)$$

— отображение, сопоставляющее каждому морфизму $u: X \rightarrow A$ семейство $(u_i u)_{i \in I}$. Тогда приведенное выше определение равносильно следующему:

Объект A вместе с семейством $(u_i)_{i \in I}$ является произведением семейства объектов $(A_i)_{i \in I}$ тогда и только тогда, когда для каждого объекта X из $\mathcal{C}$ отображение $(*)$ биективно¹⁾.

¹⁾ Так как произведение пустого семейства множеств есть одноточечное множество (см., например, Н. Б у р б а к и, Теория множеств, „Мир“, М., 1965, стр. 377), то отсюда следует, что произведение пустого семейства объектов категории $\mathcal{C}$ есть такой ее объект Z , что $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ для каждого объекта X состоит ровно из одного морфизма. Объект Z , обладающий этим свойством, называется *финальным объектом* категории $\mathcal{C}$.

Предложение 2.1. Пусть объект A вместе с семейством морфизмов $(u_i)_{i \in I}$ есть произведение семейства объектов $(A_i)_{i \in I}$. Если и объект A' вместе с семейством морфизмов $(u'_i)_{i \in I}$ есть произведение того же семейства объектов, то существует канонический изоморфизм $\alpha: A \rightarrow A'$, такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A' \\ u_i \searrow & & \swarrow u'_i \\ & A_i & \end{array}$$

коммутативна для каждого $i \in I$.

Доказательство очевидно.

Этим предложением оправдывается следующее соглашение. Рассмотрим всевозможные семейства объектов категории $\mathcal{C}$, обладающие хотя бы одним произведением. В классе всех произведений каждого такого семейства $(A_i)_{i \in I}$ выберем раз и навсегда по одному представителю (используя, например, аксиому выбора); его и будем обозначать $\prod_{i \in I} A_i$ или $\bigtimes_{i \in I} A_i$. Подчеркнем, что $\prod_{i \in I} A_i$ — не просто объект категории $\mathcal{C}$, а объект вместе с каноническими морфизмами u_i . Тем не менее иногда мы будем использовать обозначения типа $u_i: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_i$.

Если семейство $(B_i)_{i \in I}$ также обладает произведением, то для любого семейства морфизмов $w_i: A_i \rightarrow B_i$ существует единственный морфизм

$$w: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow \prod_{i \in I} B_i,$$

такой, что диаграмма

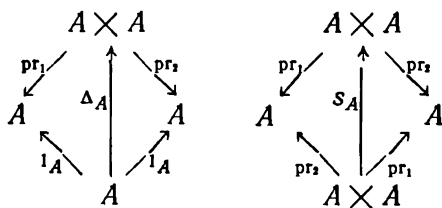
$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} A_i & \xrightarrow{w} & \prod_{i \in I} B_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_i & \xrightarrow{w_i} & B_i \end{array}$$

коммутативна для каждого $i \in I$. Этот морфизм обозначается $\prod_{i \in I} w_i$

(или $\bigtimes_{i \in I} w_i$) и называется *произведением морфизмов w_i* , или *распространением морфизмов w_i на произведение*.

Пусть, например, $I = \{1, 2\}$ и $A_1 = A_2 = A$. Предположим, что существует произведение этого семейства. Обозначим его через $A \times A$, а канонические проекции — через $\text{pr}_1: A \times A \rightarrow A$, $\text{pr}_2: A \times A \rightarrow A$.

Существуют морфизмы $\Delta_A: A \rightarrow A \times A$ и $S_A: A \times A \rightarrow A \times A$, для которых диаграммы



коммутативны. Морфизм Δ_A называется *диагональным вложением*, а морфизм S_A — *симметрией относительно диагонали*.

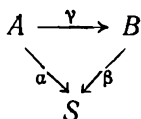
Определение. Будем говорить, что категория $\mathcal{C}$ есть *категория с конечными произведениями*, если всякое конечное семейство объектов из $\mathcal{C}$ обладает хотя бы одним произведением. Если же вообще всякое семейство объектов из $\mathcal{C}$ обладает хотя бы одним произведением, то будем говорить, что $\mathcal{C}$ есть *категория с произведениями*.

Примеры. $\mathcal{S}n_z, \mathcal{G}, \mathcal{A}l, \mathcal{T}op, \mathcal{A}\mathcal{C}$ — категории с произведениями. Через $\prod_{i \in I} A_i$ или $\bigtimes_{i \in I} A_i$ в этих категориях обозначаются произведения с каноническими проекциями, получаемые с помощью классических стандартных конструкций (декартово произведение, прямое произведение абелевых групп и т. д.).

Существуют категории, в которых имеются конечные семейства объектов, не обладающие произведением, например категория упорядоченных абелевых групп.

Пусть S — объект категории $\mathcal{C}$. Рассмотрим категорию $\mathcal{C}/S$, определенную следующим образом:

Объекты категории $\mathcal{C}/S$ — всевозможные пары вида (A, α) , где $\alpha: A \rightarrow S$ — морфизм категории $\mathcal{C}$. Морфизмы объекта (A, α) в объект (B, β) — всевозможные морфизмы $\gamma: A \rightarrow B$ категории $\mathcal{C}$ ¹⁾, для которых коммутативна диаграмма



Пусть $(A, \alpha), (B, \beta)$ — объекты категории $\mathcal{C}/S$. Произведение этих объектов называется *расслоенным произведением* объектов A

¹⁾ С той же композицией в $\mathcal{C}/S$, что и в $\mathcal{C}$.

и B , ассоциированным со схемой

$$\begin{array}{c} A \\ \downarrow \alpha \\ B \xrightarrow{\beta} S \end{array}$$

и обозначается $A \amalg_S B$ или $A \times_S B$ ¹⁾.

Предложение 2.2. Пусть $(A \amalg_S S, p_A, p_S)$ — расслоенное произведение, ассоциированное со схемой

$$\begin{array}{c} A \\ \downarrow \xi \\ S \xrightarrow{1_S} S \end{array}$$

Тогда существует единственный изоморфизм $\mu: A \rightarrow A \amalg_S S$, такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & & & S & \\ & \nearrow \xi & & \uparrow p_S & \\ A & \xrightarrow{\mu} & A \amalg_S S & & \\ & \searrow 1_A & & \downarrow p_A & \\ & & & A & \end{array}$$

¹⁾ Диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A \amalg_S B & \xrightarrow{p_A} & A \\ p_B \downarrow & & \downarrow \alpha \\ B & \xrightarrow{\beta} & S \end{array}$$

где p_A и p_B — канонические проекции, называют **декартовым** (или также **коуниверсальным**) квадратом. Таким образом, квадрат

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\delta} & A \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \alpha \\ B & \xrightarrow{\beta} & S \end{array}$$

декартов тогда и только тогда, когда 1) он коммутативен и 2) для всякой пары морфизмов $\mu: U \rightarrow A$, $\nu: U \rightarrow B$, такой, что $\alpha\mu = \beta\nu$, существует единственный морфизм $\lambda: U \rightarrow P$, удовлетворяющий условиям $\mu = \delta\lambda$, $\nu = \gamma\lambda$.

Доказательство. Согласно предложению 2.1, достаточно показать, что если U — произвольный объект в $\mathcal{C}$ и $\mu_A: U \rightarrow A$, $\mu_S: U \rightarrow S$ таковы, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\mu_A} & A \\ \mu_S \downarrow & & \downarrow \xi \\ S & \xrightarrow{1_S} & S \end{array}$$

коммутативна, то существует единственный морфизм $\mu: U \rightarrow A$, для которого диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\mu_A} & A \\ \mu_S \downarrow & \searrow \mu & \uparrow 1_A \\ S & \xleftarrow{\xi} & A \end{array}$$

коммутативна. Но это очевидно ¹⁾.

Предложение 2.3. Пусть $X_\Phi = X \prod_S S'$, $X_{\Phi\Phi'} = X \prod_S A''$, $(X_\Phi)_{\Phi'} = X_\Phi \prod_{S'} S''$ — расслоенные произведения, ассоциированные со схемами

$$\begin{array}{ccc} X & & X \\ \downarrow \xi & & \downarrow \xi \\ S' \xrightarrow{\Phi} S & & S'' \xrightarrow{\Phi\Phi'} S \end{array} \quad \begin{array}{c} X_\Phi \\ \downarrow \\ S' \end{array}$$

Тогда существует единственный изоморфизм $\alpha: (X_\Phi)_{\Phi'} \rightarrow X_{\Phi\Phi'}$, такой, что коммутативна диаграмма ²⁾

$$\begin{array}{ccc} (X_\Phi)_{\Phi'} & \xrightarrow{\alpha} & X_{\Phi\Phi'} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & X_\Phi & \end{array}$$

¹⁾ Таким образом, фактически доказано, что для схемы предложения 2.2 действительно существует ассоциированное расслоенное произведение, а именно объект A с каноническими морфизмами 1_A и ξ .

²⁾ Пусть $p_X, p_{S'}, q_X, q_{S''}$ — канонические морфизмы расслоенных произведений X_Φ и $X_{\Phi\Phi'}$. Так как $\xi q_X = \Phi(\Phi' q_{S''})$, то существует единственный морфизм $\lambda: X_{\Phi\Phi'} \rightarrow X_\Phi$, для которого $p_X \lambda = q_X$ и $p_{S'} \lambda = \Phi' q_{S''}$. Этот морфизм λ и понимается под стрелкой $X_{\Phi\Phi'} \rightarrow X_\Phi$.

Доказательство. Пусть $\mu: U \rightarrow X_\Phi$, $\nu: U \rightarrow S''$ таковы, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\mu} & X_\Phi \\ \nu \downarrow & & \downarrow \\ S'' & \xrightarrow{\Phi'} & S' \end{array}$$

коммутативна. Согласно предложению 2.1, достаточно доказать, что существует единственный морфизм $\rho: U \rightarrow X_{\Phi\Phi'}$, для которого коммутативна диаграмма ¹⁾

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\mu} & X_\Phi \\ \nu \downarrow & \searrow \rho & \uparrow \\ S'' & \xleftarrow{\Phi'} & X_{\Phi\Phi'} \end{array}$$

Но это непосредственно следует ²⁾ из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} X_{\Phi\Phi'} & \longrightarrow & X_\Phi & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \xi \\ S'' & \xrightarrow{\Phi'} & S' & \xrightarrow{\Phi} & S \end{array} \quad (**)$$

Определение. Будем говорить, что объект A вместе с семейством морфизмов $u_i: A_i \rightarrow A$ ($i \in I$) есть *сумма* семейства объектов $(A_i)_{i \in I}$, если для всякого объекта X категории $\mathcal{C}$ отображение

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A_i, X),$$

сопоставляющее каждому морфизму $u: A \rightarrow X$ семейство морфизмов $(u u_i)_{i \in I}$, биективно ³⁾.

¹⁾ Таким образом, предполагать существование расслоенного произведения, ассоциированного с третьей схемой, было излишне: на самом деле доказывается, что одним из таких произведений служит $X_{\Phi\Phi'}$ с каноническими морфизмами λ и $q_{S''}$ (см. предыдущее примечание). Или на диаграммном языке: если объемлющий и правый квадраты в диаграмме (**) декартовы, то и левый декартов. Верно также (частичное) обращение этого утверждения: если левый и правый квадраты диаграммы (**) декартовы, то и объемлющий декартов.

²⁾ Все же приведем доказательство. Так как $\xi(p_X \mu) = \Phi p_{S'} \mu = (\Phi \Phi') \nu$, то существует единственный морфизм $\rho: U \rightarrow X_{\Phi\Phi'}$, такой, что $p_X(\lambda \rho) = p_X \mu$ (1) и $q_{S''} \rho = \nu$ (2). Используя (2), получаем $p_{S'}(\lambda \rho) = \Phi' q_{S''} \rho = \Phi' \nu = p_{S'} \mu$ (3), а из (1) и (3) следует, что $\lambda \rho = \mu$ (4). Наконец, так как (4) влечет (1), то существует лишь одно ρ , удовлетворяющее условиям (2) и (4).

³⁾ Отсюда следует (см. примечание ¹⁾ на стр. 39), что сумма пустого семейства объектов категории $\mathcal{C}$ есть такой ее объект A , что $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$ для каждого объекта X состоит ровно из одного морфизма. Объект A , обладающий этим свойством, называется *инициальным объектом* категории $\mathcal{C}$.

Морфизмы u_i называются *каноническими инъекциями*.

Если $(A, (u_i)_{i \in I})$ и $(B, (v_i)_{i \in I})$ — суммы семейства $(A_i)_{i \in I}$, то существует единственный изоморфизм $\alpha: A \rightarrow B$, такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ & \swarrow u_i \quad \searrow v_i & \\ & A_i & \end{array}$$

коммутативна для каждого $i \in I$.

Как и в случае произведений, этот факт подсказывает идею выбрать из класса всех сумм семейства объектов $(A_i)_{i \in I}$ одного представителя; будем обозначать его $\coprod_{i \in I} A_i$ или $\bigoplus_{i \in I} A_i$.

Вопреки названию, канонические инъекции $u_i: A_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} A_i$ не всегда инъективны (и, аналогично, канонические проекции $\prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_i$ не всегда сюръективны).

Это видно из следующего примера.

Пример. Пусть $\mathcal{A}$ — категория коммутативных колец с единицей, с кольцевыми гомоморфизмами, сохраняющими единицу, в качестве морфизмов, и пусть A и B — два объекта из $\mathcal{A}$. Рассмотрим их тензорное произведение $A \otimes B = A \otimes B$. Очевидно,

$A \otimes B$ станет кольцом с единицей, если определить умножение формулой $(a \otimes b) \cdot (a_1 \otimes b_1) = aa_1 \otimes bb_1$. Рассмотрим морфизмы $i_A: A \rightarrow A \otimes B$, $i_B: B \rightarrow A \otimes B$, определяемые равенствами $i_A(a) = a \otimes 1$, $i_B(b) = 1 \otimes b$. Объект $A \otimes B$ вместе с морфизмами i_A , i_B есть сумма объектов A и B в категории $\mathcal{A}$. Но если положить $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}_2$, то, как легко видеть, отображение $i_{\mathbb{Z}}$ не будет инъективным¹⁾.

Определение. Категория $\mathcal{C}$ называется *категорией с конечными суммами*, если любое конечное семейство ее объектов обладает хотя бы одной суммой. Если любое вообще семейство объектов категории $\mathcal{C}$ обладает хотя бы одной суммой, то $\mathcal{C}$ называется *категорией с суммами*.

Примеры. *Ens*, *Ab* и *Top* — категории с суммами. Эти суммы совпадают соответственно с классическими понятиями раздельного объединения, прямой суммы абелевых групп, топологической суммы (в смысле Бурбаки).

Категория топологических пространств с отмеченной точкой есть категория с суммами. Суммой произвольного семейства

¹⁾ Ибо $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2$.

топологических пространств с отмеченной точкой $(X_i, x_i)_{i \in I}$ служит букет $\bigvee_{i \in I} X_i$, т. е. топологическая сумма пространств X_i , в которой все отмеченные точки отождествлены и полученная точка принята за отмеченную точку в $\bigvee_{i \in I} X_i$.

Категория $\mathcal{G}$ всех групп также есть категория с суммами. Суммой любого семейства групп служит его свободное произведение.

Существуют категории, в которых имеются конечные семейства, не обладающие суммой. Пример доставляет категория Δ , объекты которой — упорядоченные множества $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ ($n=0, 1, 2, \dots$), а морфизмы — всевозможные неубывающие отображения. Можно показать, что в категории Δ/S , где S — некоторый объект из Δ , существуют пары объектов, не имеющие суммы¹⁾.

Пусть $\mathcal{C}$ — некоторая категория и S — ее объект. Рассмотрим категорию $S/\mathcal{C}$, определенную следующим образом:

(I) Объекты категории $S/\mathcal{C}$ — всевозможные пары вида (A, α) , где $\alpha: S \rightarrow A$ — морфизм категории $\mathcal{C}$.

(II) Морфизмы объекта (A, α) в объект (B, β) — всевозможные морфизмы $\gamma: A \rightarrow B$ категории $\mathcal{C}$ ²⁾, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & S & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ A & \xrightarrow{\gamma} & B \end{array}$$

Пусть $(A, \alpha), (B, \beta)$ — объекты категории $S/\mathcal{C}$. Сумма этих объектов называется *расслоенной суммой* объектов A и B , ассоциированной со схемой

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\alpha} & A \\ \beta \downarrow & & \\ & & B \end{array}$$

и обозначается $A \bigsqcup_S B$ ³⁾.

¹⁾ Для любого объекта $S \neq \{0\}$ таким свойством обладает, например, пара морфизмов $\alpha, \beta: \{0\} \rightarrow S$, где $\alpha(0)=0, \beta(0)=1$.

²⁾ С той же композицией в $S/\mathcal{C}$, что и в $\mathcal{C}$.

³⁾ Диаграмму

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\alpha} & A \\ \beta \downarrow & & \downarrow i_A \\ B & \xrightarrow{i_B} & A \bigsqcup_S B \end{array}$$

Предложение 2.4. Пусть объект A вместе с морфизмами $(u_i)_{i \in I}$ есть произведение семейства $(A_i)_{i \in I}$. Предположим, что для каждого $i \in I$ объект A_i вместе с морфизмами $(v_{ij})_{j \in J_i}$ есть произведение семейства $(B_{ij})_{j \in J_i}$. Тогда A вместе с морфизмами $(v_{ij}u_i)_{j \in J_i, i \in I}$ есть произведение семейства $(B_{ij})_{j \in J_i, i \in I}$.

Доказательство. Пусть заданы объект C и морфизмы $w_{ij}: C \rightarrow B_{ij}$ ($j \in J_i, i \in I$). Тогда для каждого $i \in I$ существует единственный морфизм $t_i: C \rightarrow A_i$, такой, что

$$w_{ij} = v_{ij}t_i \quad \text{для всех } j \in J_i.$$

Следовательно, существует единственный морфизм $s: C \rightarrow A$, такой, что

$$t_i = u_i s \quad \text{для всех } i \in I.$$

Отсюда

$$w_{ij} = (v_{ij}u_i)s \quad \text{для всех } j \in J_i, i \in I.$$

Единственность s очевидна, и предложение доказано.

Предложение 2.4 допускает обращение, а именно:

Предложение 2.5. Пусть объект A вместе с морфизмами $(u_i)_{i \in I}$ есть произведение семейства $(A_i)_{i \in I}$. Предположим, что множество индексов I есть раздельное объединение множеств I_μ ($\mu \in M$) и что для каждого $\mu \in M$ существуют объект B_μ и семейство морфизмов $(v_i)_{i \in I_\mu}$, такие, что B_μ вместе с семейством $(v_i)_{i \in I_\mu}$ есть произведение семейства $(A_i)_{i \in I_\mu}$. Тогда существует семейство морфизмов $(w_\mu)_{\mu \in M}$, такое, что A вместе с семейством $(w_\mu)_{\mu \in M}$ есть произведение семейства $(B_\mu)_{\mu \in M}$ и $u_i = v_i w_\mu$ для всех $i \in I_\mu, \mu \in M$.

Доказательство. Очевидно, для каждого фиксированного $\mu \in M$ существует единственный морфизм $w_\mu: A \rightarrow B_\mu$, такой, что $u_i = v_i w_\mu$ для всех $i \in I_\mu$. Пусть заданы объект C и морфизмы

где i_A и i_B — канонические инъекции, называют **кодекартовым** (или также **универсальным**) **квадратом**. Таким образом, квадрат

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\alpha} & A \\ \beta \downarrow & & \downarrow \delta \\ B & \xrightarrow{\gamma} & Q \end{array}$$

кодекартов тогда и только тогда, когда 1) он коммутативен и 2) для всякой пары морфизмов $\mu: A \rightarrow V, \nu: B \rightarrow V$, такой, что $\mu\alpha = \nu\beta$, существует единственный морфизм $\lambda: Q \rightarrow V$, удовлетворяющий условиям $\mu = \lambda\delta, \nu = \lambda\gamma$.

$t_\mu: C \rightarrow B_\mu$; тогда для каждого $i \in I$ имеем морфизмы $v_i t_\mu: C \rightarrow A_i$, где $i \in I_\mu$, а потому существует единственный морфизм $s: C \rightarrow A$, такой, что

$$v_i t_\mu = u_i s = v_i w_\mu s \quad \text{для всех} \quad i \in I_\mu, \mu \in M.$$

Но так как B_μ есть произведение семейства $(A_i)_{i \in I_\mu}$, то $t_\mu = w_\mu s$ для каждого $\mu \in M$. Единственность s очевидна.

Наложим теперь на категорию $\mathcal{C}$ следующее условие.

CA_{d1}. Для каждой пары (A, B) объектов из $\mathcal{C}$ существует морфизм $0_{BA}: A \rightarrow B$, такой, что для всех $v: B \rightarrow C$ и $u: D \rightarrow A$

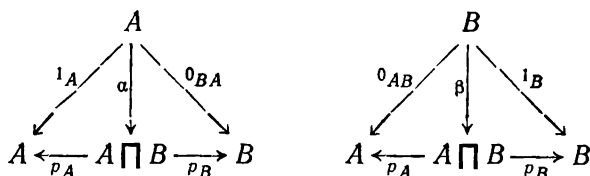
$$v 0_{BA} = 0_{CA}, \quad 0_{BA} u = 0_{BD} \quad ^1).$$

Предложение 2.6. Пусть категория $\mathcal{C}$ удовлетворяет условию CA_{d1}. Тогда для любой пары (A, B) объектов из $\mathcal{C}$, для которой существуют $A \sqcup B$ и $A \sqcap B$, существует единственный морфизм $h(A, B): A \sqcup B \rightarrow A \sqcap B$, такой, что

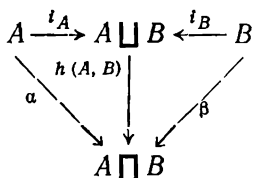
$$\begin{aligned} p_B h(A, B) i_A &= 0_{BA}, & p_A h(A, B) i_A &= 1_A, \\ p_A h(A, B) i_B &= 0_{AB}, & p_B h(A, B) i_B &= 1_B, \end{aligned}$$

где p_A, p_B и i_A, i_B — канонические проекции и инъекции.

Доказательство. Пусть $\alpha: A \rightarrow A \sqcap B$ и $\beta: B \rightarrow A \sqcap B$ — морфизмы, для которых коммутативны диаграммы



Тогда $h(A, B)$ есть тот единственный морфизм, для которого коммутативна диаграмма



¹⁾ Морфизмы $0_{BA} ((A, B) \in \text{Ob } \mathcal{C} \times \text{Ob } \mathcal{C})$ называют нулевыми. В категории может иметься не более одной системы нулевых морфизмов. В самом деле, если (0_{BA}) и $(0'_{BA})$ — такие системы, то $0'_{BA} = 0'_{BA} 0_{AA} = 0_{BA}$.

Действительно,

$$\begin{aligned} p_B h(A, B) i_A &= p_B \alpha = 0_{BA}, & p_A h(A, B) i_A &= p_A \alpha = 1_A, \\ p_A h(A, B) i_B &= p_A \beta = 0_{AB}, & p_B h(A, B) i_B &= p_B \beta = 1_B. \end{aligned}$$

Определение. Пусть $\mathcal{C}$ — категория с расслоенными произведениями и $(X \sqcup_Y Z, p_X, p_Z)$ — расслоенное произведение, ассоциированное со схемой

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow u \\ Z \xrightarrow{v} Y \end{array}$$

Будем говорить, что морфизм $p_Z: X \sqcup_Y Z \rightarrow Z$ получен из u расширением базы Y до Z посредством морфизма v .

Предложение 2.7. Если u — мономорфизм, то и p_Z — мономорфизм.

Доказательство. Пусть морфизмы $\xi_1, \xi_2: A \rightarrow X \sqcup_Y Z$ таковы, что $p_Z \xi_1 = p_Z \xi_2$. Тогда

$$u p_X \xi_1 = v p_Z \xi_1 = v p_Z \xi_2 = u p_X \xi_2.$$

Так как u — мономорфизм, то $p_X \xi_1 = p_X \xi_2$. По определению расслоенного произведения имеем тогда $\xi_1 = \xi_2$.

С другой стороны, если u — эпиморфизм, то p_Z не обязан быть эпиморфизмом, как показывает следующий пример.

Пусть $\mathcal{A}$ — категория коммутативных колец с единицей и $\mathcal{A}^\circ$ — дуальная категория. Рассмотрим эпиморфизм $u: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$ в $\mathcal{A}^\circ$, являющийся в $\mathcal{A}$ каноническим вложением $u: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ в поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Пусть v — канонический морфизм $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}_2$, где $\mathbb{Z}_2$ — кольцо целых чисел, приведенных по модулю 2. Наше утверждение следует из того, что морфизм $\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Q}$ не есть мономорфизм в $\mathcal{A}$, поскольку $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Q} = 0$.

Определение. Эпиморфизм $u: X \rightarrow Y$ называется *универсальным эпиморфизмом*, если для всякого морфизма $v: Z \rightarrow Y$ морфизм $p_Z: X \sqcup_Y Z \rightarrow Z$, полученный из u расширением базы Y до Z посредством морфизма v , есть эпиморфизм.

Предложение 2.8. Композиция двух универсальных эпиморфизмов есть универсальный эпиморфизм.

Доказательство. Пусть $u_1: X_1 \rightarrow X_2$ и $u_2: X_2 \rightarrow Y$ — универсальные эпиморфизмы, а $v: Z \rightarrow Y$ — произвольный морфизм. Требуется доказать, что $p_Z: X_1 \sqcup_Y Z \rightarrow Z$ — эпиморфизм,

где $(X_1 \sqcup_Y Z, p_Z, p_{X_1})$ — расслоенное произведение, ассоциированное со схемой

$$\begin{array}{c} X_1 \\ \downarrow u_2 u_1 \\ Z \twoheadrightarrow Y \end{array}$$

Пусть $(X_2 \sqcup_Y Z, p'_Z, p_{X_2})$ — расслоенное произведение, ассоциированное со схемой, определяемой морфизмами u_2, v . Так как u_2 — универсальный эпиморфизм, то p'_Z — эпиморфизм. Но по предложению 2.3 $X_1 \sqcup_Y Z$ совпадает с расслоенным произведением, ассоциированным со схемой, определяемой морфизмами u_1, p_{X_1} , причем диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X_1 \sqcup_Y Z & \xrightarrow{\pi} & X_2 \sqcup_Y Z \\ \downarrow & & \downarrow p_{X_1} \\ X_1 & \xrightarrow{u_1} & X_2 \end{array}$$

коммутативна и $p_Z = p'_Z \pi$. Но так как u_1 — универсальный эпиморфизм, то π — эпиморфизм. Поэтому и p_Z — эпиморфизм.

Предложение 2.9. Если композиция $u_2 u_1: X_1 \rightarrow Y$ морфизмов $u_1: X_1 \rightarrow X_2$ и $u_2: X_2 \rightarrow Y$ есть универсальный эпиморфизм, то u_2 — универсальный эпиморфизм.

Доказательство, аналогичное доказательству предложения 2.3, предоставляем читателю.

Следствие 2.10. Всякий изоморфизм есть универсальный эпиморфизм.

§ 2. Ядро и коядро

Определение. Объект N категории $\mathcal{C}$ вместе с морфизмом $v: N \rightarrow A$ называется *ядром*¹⁾ пары морфизмов $u_1, u_2: A \rightarrow B$, если выполнены следующие условия:

- (а) Если морфизм $u: X \rightarrow A$ таков, что $u_1 u = u_2 u$, то существует единственный морфизм $v: X \rightarrow N$, для которого $vu = u$.
- (б) Если морфизм $u: X \rightarrow A$ пропускается через v ²⁾, то $u_1 u = u_2 u$.

Предложение 2.11. Если (N, v) и (M, μ) — ядра пары морфизмов $u_1, u_2: A \rightarrow B$, то существует единственный изоморфизм

¹⁾ Часто также *уравнителем*.

²⁾ То есть существует морфизм $v: X \rightarrow N$, такой, что $u = v\mu$.

$\alpha: N \rightarrow M$, такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\alpha} & M \\ & \searrow \nu \quad \swarrow \mu & \\ & A & \end{array} \quad (1)$$

Доказательство. Так как (N, ν) — ядро пары (u_1, u_2) , то, как следует из условия (б) определения, $u_1 \nu = u_2 \nu$. Поскольку (M, μ) также есть ядро пары (u_1, u_2) , то отсюда следует (согласно условию (а) определения), что существует единственный морфизм $\alpha: N \rightarrow M$, для которого диаграмма (1) коммутативна. Остается доказать, что α — изоморфизм. Рассуждая точно так же, заключаем, что существует морфизм $\beta: M \rightarrow N$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\beta} & N \\ & \searrow \mu \quad \swarrow \nu & \\ & A & \end{array}$$

Достаточно показать, что $\beta\alpha = 1_N$. Но в силу условия (а) определения это следует из того, что одновременно $\nu(\beta\alpha) = \nu$ и $\nu 1_N = \nu$.

Предложение 2.12. Пусть $u_1, u_2: A \rightarrow B$ — морфизмы категории $\mathcal{C}$. Рассмотрим контравариантный функтор $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}n\mathcal{Z}$, определенный следующим образом:

$$F(X) = \{f: X \rightarrow A \mid u_1 f = u_2 f\}^1).$$

Если пара u_1, u_2 обладает ядром (N, ν) , то функтор F представим парой (N, ν) . Обратно, если функтор F представим, то пара морфизмов u_1, u_2 обладает ядром, причем пара (N, ν) , представляющая этот функтор, есть ядро пары u_1, u_2 .

Доказательство. Если (N, ν) — ядро пары морфизмов u_1, u_2 , то функторный морфизм функтора h_N в F , определяемый отображениями

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, N) \rightarrow F(X) \quad (g \mapsto \nu g),$$

очевидно, является функторным изоморфизмом. Обратно, предположим, что пара (N, ν) представляет функтор F . По определению $\nu \in F(N)$, откуда $u_1 \nu = u_2 \nu$. Кроме того, из представимости F парой (N, ν) следует, что отображение

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, N) \rightarrow F(X),$$

переводящее g в νg , биективно²⁾, а это равносильно тому, что (N, ν) есть ядро пары морфизмов u_1, u_2 .

¹⁾ И $F(\alpha)(f) = f\alpha$ для всех $\alpha: Y \rightarrow X$ и $f \in F(X)$.

²⁾ Так как F представим парой (N, ν) , то существует функторный изоморфизм $r: h_N \rightarrow F$, такой, что $\nu = r_N(1_N)$. Поскольку r — функторный изомор-

Предложение 2.13. Если (N, ν) — ядро пары морфизмов $u_1, u_2: A \rightarrow B$, то $\nu: N \rightarrow A$ — мономорфизм.

Доказательство. Пусть $v_1, v_2: X \rightarrow N$ таковы, что $\nu v_1 = \nu v_2$. Так как морфизм $\nu = \nu v_1 = \nu v_2$ единственным образом пропускается через ν , то $v_1 = v_2$.

Понятие *коядра* пары морфизмов получается дуализацией понятия ядра.

Примеры. В категориях $\mathcal{E}nz$, $\mathcal{T}op$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{A}l$ каждая пара морфизмов обладает ядром и коядром.

Если $u_1, u_2: A \rightarrow B$ — морфизмы в $\mathcal{E}nz$, то подмножество в A , состоящее из тех элементов x , для которых $u_1(x) = u_2(x)$, вместе с отображением включения есть ядро пары (u_1, u_2) . С другой стороны, будем говорить, что элементы $y, z \in B$ находятся в отношении R , если существует элемент $x \in A$, для которого $u_1(x) = y$, $u_2(x) = z$. Пусть C — фактормножество множества B по отношению эквивалентности $\tilde{R}$, порожденному отношением R^1 . Тогда C вместе с естественным эпиморфизмом $B \rightarrow C$ есть коядро пары (u_1, u_2) .

В категории $\mathcal{T}op$ ядра и коядра — те же множества, что и в $\mathcal{E}nz$, но наделенные соответственно топологией подмножества или фактортопологией.

Если $f_1, f_2: G \rightarrow H$ — морфизмы в категории групп $\mathcal{G}$, то подгруппа группы G , состоящая из тех элементов $x \in G$, для которых $f_1(x) = f_2(x)$, вместе с гомоморфизмом включения есть ядро пары (f_1, f_2) . С другой стороны, факторгруппа группы H по нормальной подгруппе, порожденной всеми элементами $f_1(x) f_2^{-1}(x)$ ($x \in G$), вместе с естественным эпиморфизмом есть коядро пары (f_1, f_2) .

В категории $\mathcal{A}l$ ядра и коядра те же, что и в $\mathcal{G}$.

Определение. Диаграмма

$$X \xrightarrow{u} Y \begin{matrix} \xrightarrow{v} \\ \xrightarrow{w} \end{matrix} Z$$

физм, отображение $r_X: \text{Hom}_{\mathcal{G}}(X, N) \rightarrow F(X)$ для любого объекта X из $\mathcal{G}$ биективно, причем для любого морфизма $g: X \rightarrow N$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{G}}(N, N) & \xrightarrow{r_N} & F(N) \\ h_N(g) \downarrow & & \downarrow F(g) \\ \text{Hom}_{\mathcal{G}}(X, N) & \xrightarrow{r_X} & F(X) \end{array}$$

откуда следует, что $\nu g = F(g)(r_N(1_N)) = r_X(h_N(g)(1_N)) = r_X(g)$.

¹⁾ По определению элементы $u, v \in B$ находятся в отношении $\tilde{R}$, если в B существует такая конечная цепочка элементов y_k ($k = 0, 1, \dots, n$), что $y_0 = u$, $y_n = v$ и y_k, y_{k+1} находятся в отношении R для $k = 0, 1, \dots, n-1$.

в категории $\mathcal{C}$ называется *точной*, если (X, u) есть ядро пары морфизмов (v, w) .

Дуально диаграмма

$$X \xrightarrow[u]{u} Y \xrightarrow{w} Z$$

называется *точной*, если (Z, w) — коядро пары морфизмов (u, v) .

§ 3. Топологии Гротендика и общее понятие пучка

Определение. Топология Гротендика T состоит из категории $\mathcal{C}at T$ и некоторого класса $\text{Cov } T$ семейств $\{U_i \xrightarrow{\Phi_i} U\}_{i \in I}$ морфизмов из $\mathcal{C}at T$, называемых *покрытиями* (где в каждом покрытии кообласть морфизмов Φ_i одна и та же), удовлетворяющих следующим условиям.

1. Если φ — изоморфизм, то $\{\varphi\} \in \text{Cov } T$.
2. Если $\{U_i \xrightarrow{\Phi_i} U\}_{i \in I} \in \text{Cov } T$ и $\{V_{ij} \xrightarrow{\Psi_{ij}} U_i\}_{j \in J_i} \in \text{Cov } T$ для всех $i \in I$, то $\{V_{ij} \xrightarrow{\Phi_i \Psi_{ij}} U\}_{i \in I, j \in J_i} \in \text{Cov } T$.

3. Если $\{U_i \xrightarrow{\Phi_i} U\}_{i \in I} \in \text{Cov } T$, то, каков бы ни был морфизм $V \rightarrow U$ из $\mathcal{C}at T$, $U_i \times_U V$ существует для всех $i \in I$ и $\{U_i \times_U V \xrightarrow{v_i} V\}_{i \in I} \in \text{Cov } T$, где v_i — каноническая проекция.

Определение. Пусть T — топология Гротендика и $\mathcal{C}$ — категория с произведениями. *Предпучком* над T со значениями в $\mathcal{C}$ называется всякий функтор $F: (\mathcal{C}at T)^\circ \rightarrow \mathcal{C}$. *Пучком* называется предпучок, удовлетворяющий следующему условию:

- (S) Если $\{U_i \xrightarrow{\Phi_i} U\}_{i \in I} \in \text{Cov } T$, то точна диаграмма

$$F(u) \xrightarrow{u} \prod_{i \in I} F(U_i) \xrightarrow[w]{v} \prod_{j, k \in I} F\left(U_j \times_U U_k\right),$$

где v и w определены условием коммутативности для всех $(\alpha, \beta) \in I \times I$ диаграмм

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} F(U_i) & \xrightarrow{v} & \prod_{(j, k) \in I \times I} F\left(U_j \times_U U_k\right) \\ p_\alpha \downarrow & & \downarrow p_{\alpha, \beta} \\ F(U_\alpha) & \xrightarrow{F(\pi_\alpha)} & F\left(U_\alpha \times_U U_\beta\right) \end{array}$$

и

$$\begin{array}{ccc}
 \prod_{i \in I} F(U_i) & \xrightarrow{\omega} & \prod_{(j, k) \in I \times I} F\left(U_j \mathop{\times}\limits_U U_k\right) \\
 \rho_\beta \downarrow & & \downarrow \rho_{\alpha, \beta} \\
 F(U_\beta) & \xrightarrow{F(\pi_\beta)} & F\left(U_\alpha \mathop{\times}\limits_U U_\beta\right)
 \end{array}$$

в которых ρ_α , ρ_β , $\rho_{\alpha, \beta}$, π_α , π_β — канонические проекции¹⁾.

Замечание. Из определения следует, что для того, чтобы предпучок F над T со значениями в категории $\mathcal{C}$ был пучком, необходимо и достаточно, чтобы для любого ее объекта A функтор G , определяемый равенством

$$G(U) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, F(U)),$$

был пучком над T со значениями в $\mathcal{C}^{nz}$.

Примеры.

1. Пусть X — топологическое пространство. Определим топологию Гротендика следующим образом: $\mathcal{C}at T$ есть категория, объектами которой служат все открытые множества из X , а $\text{Hom}_{\mathcal{C}at T}(U, V)$ для любых таких множеств U и V состоит из отображения включения, если $U \subset V$, и пусто в противном случае; $\text{Cov } T$ есть множество всех семейств $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i \in I}$, где φ_i — отображение включения и $\bigcup_{i \in I} U_i = U$. Условие 3 выполнено, поскольку $U_i \mathop{\times}\limits_U V \approx U_i \cap V$. Предпучки (соотв. пучки) над T совпадают с предпучками (соотв. пучками) над пространством X , понимаемыми в обычном смысле (см., например, Г о д е м а н).

Чтобы убедиться в этом, докажем следующее

Предложение 2.14. *Предпучок F над T со значениями в $\mathcal{C}^{nz}$ является пучком тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующим двум условиям:*

(F₁) Если $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i \in I} \in \text{Cov } T$ и $s', s'' \in F(U)$ таковы, что $F(\varphi_i)(s') = F(\varphi_i)(s'')$ для всех $i \in I$, то $s' = s''$.

¹⁾ А u — условием коммутативности для всех $\alpha \in I$ диаграмм

$$\begin{array}{ccc}
 F(U) & \xrightarrow{u} & \prod_{i \in I} F(U_i) \\
 \searrow F(\varphi_\alpha) & & \downarrow \rho_\alpha \\
 & & F(U_\alpha)
 \end{array}$$

(F₂) Если $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i \in I} \in \text{Cov } T$ и для каждого $i \in I$ задан элемент $s_i \in F(U_i)$ так, что $F(\psi_{ij}^i)(s_i) = F(\psi_{ij}^j)(s_j)$ для любых $i, j \in I$, для которых $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ (где ψ_{ij}^i и ψ_{ij}^j — отображения включения $U_i \cap U_j$ в U_i и U_j соответственно), то существует $s \in F(U)$, такое, что $F(\varphi_i)(s) = s_i$ для всех $i \in I$.

Доказательство. Необходимость. Пусть M — множество, состоящее из одной точки m . Рассмотрим диаграмму приведенного выше условия (S)

$$F(U) \xrightarrow{u} \prod_{i \in I} F(U_i) \xrightarrow[\omega]{v} \prod_{j, k \in I} F(U_j \cap U_k).$$

Пусть $s', s'' \in F(U)$ таковы, что $F(\varphi_i)(s') = F(\varphi_i)(s'')$ для всех $i \in I$. Определим отображение $\alpha: M \rightarrow \prod_{i \in I} F(U_i)$ следующим образом: $\alpha(m) = (F(\varphi_i)(s'))_{i \in I} = (F(\varphi_i)(s''))_{i \in I}$. Ясно, что $\alpha = u\sigma' = u\sigma''$, где $\sigma'(m) = s'$, $\sigma''(m) = s''$. Но отсюда следует, что $v\alpha = w\alpha$, так что α должно допускать единственное разложение $\alpha = u\sigma$; значит, $\sigma'(m) = \sigma''(m)$, т. е. $s' = s''$, и условие (F₁) выполнено.

Рассмотрим теперь элементы $s_i \in F(U_i)$ ($i \in I$), удовлетворяющие условиям, указанным в (F₂). Определим отображение $\alpha: M \rightarrow \prod_{i \in I} F(U_i)$ так: $\alpha(m) = (s_i)_{i \in I}$. Очевидно, $v\alpha = w\alpha$, так что существует (единственное) отображение $\sigma: M \rightarrow F(U)$, такое, что $F(\varphi_i)(\sigma(m)) = s_i$ для всех $i \in I$. Элемент $s = \sigma(m)$ и удовлетворяет условию (F₂).

Достаточность. Пусть M — произвольное множество и отображения $f_i: M \rightarrow F(U_i)$ таковы, что отображения $g_1, g_2: M \rightarrow F(U_i \cap U_j)$, определенные как композиции

$$\begin{aligned} M &\xrightarrow{f_i} F(U_i) \xrightarrow{F(\psi_{ij}^i)} F(U_i \cap U_j), \\ M &\xrightarrow{f_j} F(U_j) \xrightarrow{F(\psi_{ij}^j)} F(U_i \cap U_j), \end{aligned}$$

совпадают для любой пары индексов $i, j \in I$. Требуется показать, что при этих предположениях условие (S) выполнено, т. е. существует единственное отображение $f: M \rightarrow F(U)$, такое, что композиция

$$M \xrightarrow{f} F(U) \xrightarrow{F(\varphi_i)} F(U_i)$$

совпадает с f_i для каждого $i \in I$. Но, действительно, пусть x — произвольный элемент из M . Так как элементы $f_i(x) \in F(U_i)$, очевидно, удовлетворяют условиям, указанным в (F₂), то существует элемент $s \in F(U)$, такой, что $F(\varphi_i)(s) = f_i(x)$ для всех $i \in I$.

Согласно (F_1) , этот элемент s единствен. Положив $f(x) = s$, мы и получим требуемое отображение.

Предложение 2.15. Пусть $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ — категории и $H: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$, $K: \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_1$ — ковариантные функторы, причем K сопряжен к H . Предположим, что F — предпучок над T со значениями в $\mathcal{C}_2$. Определим предпучок G над T со значениями в $\mathcal{C}_1$, положив $G(U) = K(F(U))$ для каждого объекта U из $\mathcal{C}_2$. Если F — пучок, то и G — пучок.

Доказательство. Согласно замечанию на стр. 54, достаточно показать, что для каждого объекта A категории $\mathcal{C}_1$ предпучок, относящий каждому объекту U множество $\text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A, K(F(U)))$, есть пучок. Но поскольку функтор K сопряжен к H , имеется функторный изоморфизм

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A, K(F(U))) \approx \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(H(A), F(U)).$$

Так как F — пучок, то, вторично применяя замечание на стр. 54, видим, что предпучок, относящий каждому объекту U множество $\text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(H(A), F(U))$, также является пучком, и предложение доказано.

Следствие 2.16. Пусть F — предпучок над T со значениями в категории ${}_{\Lambda}\mathcal{E}$ унитарных левых Λ -модулей и $K: {}_{\Lambda}\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}nz$ — ковариантный функтор, сопоставляющий каждому Λ -модулю множество его элементов. Предпучок F есть пучок тогда и только тогда, когда предпучок G над T со значениями в $\mathcal{E}nz$, определяемый равенством $G(U) = K(F(U))$ для каждого объекта U , является пучком.

Доказательство. Как легко видеть, K есть функтор, сопряженный к функтору $H: \mathcal{E}nz \rightarrow {}_{\Lambda}\mathcal{E}$, относящему каждому множеству M свободный Λ -модуль $H(M)$, порожденный его элементами. Поэтому, согласно предложению 2.15, если F — пучок, то и G — пучок. Обратно, предположим, что G — пучок. Из функторных изоморфизмов

$$\text{Hom}_{\Lambda}(H(M), N) \approx \text{Hom}_{\mathcal{E}nz}(M, K(N))$$

и предложения 2.15 вытекает, что предпучок над T со значениями в $\mathcal{E}nz$, относящий каждому объекту U множество $\text{Hom}_{\Lambda}(L, F(U))$, является пучком для любого свободного Λ -модуля L . Взяв $L = \Lambda$, мы получим в точности F , чем и завершается доказательство.

2. Топология Гротендика T получится также, если в качестве $\mathcal{C}at$ T взять категорию $\mathcal{E}nz$, а в качестве $\text{Cov } T$ — класс всех семейств $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i \in I}$, таких, что $\bigcup_{i \in I} \varphi_i(U_i) = U$. Условие 3 будет выполнено, так как в $\mathcal{E}nz$ расслоенное произведение объек-

тов U_i и V , ассоциированное со схемой

$$\begin{array}{c} U_i \\ \downarrow \varphi_i \\ V \longrightarrow U \end{array}$$

изоморфно подмножеству декартова произведения $U_i \times V$, состоящему из всех пар (x, y) , для которых $\varphi_i(x) = \varphi(y)$. Каждый пучок F над T со значениями в $\mathcal{E}nz$ есть представимый функтор, а именно $F(U) \approx \text{Hom}(U, F(e))$, где e — одноточечное множество.

3. Более общим образом, пусть G — группа; определим топологию Гротендика T_G , приняв за $\mathcal{C}at T$ категорию левых G -множеств (множеств с группой G операторов $x \mapsto gx$, $g \in G$), а за $\text{Cov } T$ — класс всех семейств $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i \in I}$, где φ_i — G -отображения и $\bigcup_{i \in I} \varphi_i(U_i) = U$. Каждый пучок F над T_G со значениями в $\mathcal{E}nz$ есть представимый функтор, а именно $F(U) \approx \approx \text{Hom}_G(U, F(G))$, где $F(G)$ есть G , рассматриваемое как левое G -множество, в котором операцией, задаваемой элементом $g \in G$, служит умножение справа на g^{-1} .

4. Пусть $\mathcal{C}$ — категория с расслоенными произведениями. Определим новую категорию $\mathcal{C}'$ следующим образом:

(I) Объекты категории $\mathcal{C}'$ — всевозможные семейства $(U_i)_{i \in I}$ объектов из $\mathcal{C}$.

(II) Морфизмы семейства $(U_i)_{i \in I}$ в семейство $(V_j)_{j \in J}$ состоят из отображения $\varphi: I \rightarrow J$ и семейства морфизмов $\varphi_i: U_i \rightarrow V_{\varphi(i)}$ ($i \in I$) категории $\mathcal{C}$. Композиция морфизмов определяется очевидным образом.

Предложение 2.18. Существует естественный функтор $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$.

Предложение 2.19. $\mathcal{C}'$ есть категория с расслоенными произведениями.

Доказательство. Рассмотрим схему

$$\begin{array}{c} (U_i)_{i \in I} \\ \downarrow (\varphi, \varphi_i) \\ (V_j)_{j \in J} \xrightarrow{(\psi, \psi_j)} (W_k)_{k \in K} \end{array}$$

в категории $\mathcal{C}'$. Семейство $(U_i \prod_{W_k} V_j)_{(i, j) \in I \prod_K J}$, где $\varphi(i) = \psi(j) = k$

и $I \prod_K J$ есть расслоенное произведение в категории $\mathcal{E}nz$,

ассоциированное со схемой

$$\begin{array}{ccc} & I & \\ & \downarrow \Phi & \\ J & \xrightarrow{\psi} & K \end{array}$$

вместе с определенными очевидным образом морфизмами $U_i \prod_{W_k} V_I \xrightarrow{\pi_{iI}} U_i$, $U_i \prod_{W_k} V_I \xrightarrow{\sigma_{iI}} V_I$, образует расслоенное произведение, ассоциированное с данной схемой.

Рассматривая теперь для любого объекта X из $\mathcal{C}$ универсальные эпиморфизмы $(U_i)_{i \in I} \rightarrow (X)$ в категории $\mathcal{C}'$, мы получим топологию Гротендика. Это вытекает из предыдущего предложения и следующего замечания:

Если морфизмы $V_{iI} \xrightarrow{\Phi_{iI}} U_i$ (с фиксированным i) определяют универсальный эпиморфизм, то $(V_{iI}) \rightarrow (U_i)$ есть универсальный эпиморфизм.

5. В категории $\mathcal{C}$ с расслоенными произведениями можно определить топологию Гротендика T , положив $\mathcal{C}at T = \mathcal{C}$ и приняв за $\text{Cov } T$ класс всех универсальных эпиморфизмов $\{V \rightarrow U\}$ из $\mathcal{C}$.

ИНДУКТИВНЫЕ И ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

§ 1. Общие понятия проективного и индуктивного пределов

Определение. Пусть $\mathcal{D}, \mathcal{C}$ — категории. *Категорией функторов* $\text{Funct}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ называется категория, объектами которой служат всевозможные ковариантные функторы категории $\mathcal{D}$ в категорию $\mathcal{C}$, а морфизмами — функторные морфизмы между этими функторами.

Если категория $\mathcal{D}$ — малая¹⁾, то она называется также *схемой*, а функтор из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{C}$ — *диаграммой* в $\mathcal{C}$ со схемой $\mathcal{D}$. В этом случае $\text{Funct}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ называется также *категорией диаграмм*.

Примеры. Пусть I — частично упорядоченное множество (не обязательно направленное). Обозначим через $\text{Ord } I$ категорию, определяемую следующим образом: объекты ее — всевозможные элементы из I , а $\text{Hom}_{\text{Ord } I}(x, y)$ для каждой пары $x, y \in I$ состоит из единственного элемента (x, y) , если $x \leq y$ в смысле отношения порядка, заданного на I , и пусто в противном случае²⁾.

Объект категории $\text{Funct}(\text{Ord } I, \mathcal{C})$ называется *индуктивной системой* в $\mathcal{C}$ над I . Объект категории $\text{Funct}((\text{Ord } I)^\circ, \mathcal{C})$ называется *проективной системой* в $\mathcal{C}$ над I .

Определение. Пусть $\mathcal{D}, \mathcal{C}$ — категории и $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ — ковариантный функтор. Его *проективным пределом* называется объект A категории $\mathcal{C}$ вместе с морфизмами $u_X: A \rightarrow F(X)$, определенными для всех объектов X категории $\mathcal{D}$ и такими, что выполнены следующие два условия:

1. Для каждого морфизма $\alpha: X \rightarrow Y$ категории $\mathcal{D}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & F(X) \\ & \nearrow u_X & \downarrow F(\alpha) \\ A & & \\ & \searrow u_Y & \\ & & F(Y) \end{array}$$

¹⁾ А только в этом случае и законно понятие категории $\text{Funct}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ при принятой авторами аксиоматике теории множеств.

²⁾ Композиция морфизмов этим условием однозначно определена: если существуют морфизмы (x, y) и (y, z) , т. е. $x \leq y$ и $y \leq z$, то $x \leq z$, т. е. существует морфизм (x, z) , и необходимо $(y, z) \circ (x, y) = (x, z)$. Так как, кроме того, $x \leq x$, то существуют морфизмы (x, x) , очевидно являющиеся единицами. Таким образом, выполнение аксиом категории основывается лишь на том, что $\leq$ есть отношение *предпорядка*, т. е. транзитивно и рефлексивно; его антисимметричность („если $x \leq y$ и $y \leq x$, то $x = y$ “) не нужна (и во многих важных случаях не имеет места).

2. Если B — объект категории $\mathcal{C}$, а $v_X: B \rightarrow F(X)$ — морфизмы в $\mathcal{C}$, определенные для всех объектов категории $\mathcal{D}$ и такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & F(X) \\ & \nearrow v_X & \downarrow F(\alpha) \\ B & & \\ & \searrow v_Y & \\ & & F(Y) \end{array}$$

коммутативна для каждого морфизма $\alpha: X \rightarrow Y$ из $\mathcal{D}$, то существует единственный морфизм $v: B \rightarrow A$, такой, что диаграммы

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{v} & A \\ & \searrow v_X & \swarrow u_X \\ & & F(X) \end{array}$$

коммутативны для всех объектов X категории $\mathcal{D}$.

Проективный предел иногда называют также *обратным пределом*.

Дуально, *индуктивным пределом* функтора F называется объект A категории $\mathcal{C}$ вместе с морфизмами $u_X: F(X) \rightarrow A$, определенными для всех объектов X из $\mathcal{D}$ и такими, что

1'. Для каждого морфизма $\alpha: X \rightarrow Y$ из $\mathcal{D}$ имеет место равенство $u_X = u_Y F(\alpha)$.

2'. Если B — объект из $\mathcal{C}$, а $v_X: F(X) \rightarrow B$ — морфизмы в $\mathcal{C}$, определенные для всех объектов X из $\mathcal{D}$ и такие, что $v_X = v_Y F(\alpha)$ для каждого морфизма $\alpha: X \rightarrow Y$ из $\mathcal{D}$, то существует единственный морфизм $v: A \rightarrow B$, такой, что $v_X = v u_X$ для всех объектов X категории $\mathcal{D}$.

Индуктивный предел иногда называют также *прямым пределом*.

Понятия проективного и индуктивного пределов для контравариантного функтора определяются аналогично.

Примеры.

1. Пусть $\mathcal{C}$ — произвольная категория, M — произвольное множество и $(A_i)_{i \in M}$ — семейство объектов из $\mathcal{C}$. Рассмотрим категорию $\mathcal{M}$, объекты которой — всевозможные элементы из M , а $\text{Hom}_{\mathcal{M}}(i, j)$ для каждой пары $i, j \in M$ состоит из одного элемента 1_i , если $i = j$, и пусто в противном случае. Пусть $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$ — функтор, определенный формулой $F(i) = A_i$ ($i \in M$). Если A — произведение семейства $(A_i)_{i \in M}$, то A есть проективный предел функтора F , и обратно. Если A — сумма семейства $(A_i)_{i \in M}$, то A есть индуктивный предел функтора F , и обратно.

2. Пусть $\mathcal{C}$ — произвольная категория, а $u_1, u_2: A \rightarrow B$ — ее морфизмы. Рассмотрим категорию $\mathcal{D}$ с двумя объектами X, Y

и двумя морфизмами $v_1, v_2: X \rightarrow Y$ ¹⁾. Пусть F — функтор из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{C}$, определенный условиями $F(X) = A$, $F(Y) = B$, $F(v_i) = u_i$ ($i = 1, 2$). Если K — ядро пары морфизмов u_1, u_2 , то K есть проективный предел функтора F , и обратно. Если K — коядро пары морфизмов u_1, u_2 , то K есть индуктивный предел функтора F , и обратно.

3. Пусть $\mathcal{C}$ — произвольная категория, а $u_1: A \rightarrow B$ и $u_2: C \rightarrow B$ — ее морфизмы. Рассмотрим категорию $\mathcal{D}$ с тремя объектами X, Y, Z и двумя морфизмами $v_1: X \rightarrow Y, v_2: Z \rightarrow Y$ ²⁾. Пусть F — функтор из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{C}$, определенный условиями $F(X) = A$, $F(Y) = B$, $F(Z) = C$, $F(v_i) = u_i$ ($i = 1, 2$). Если $D = A \prod_B C$, то D — проективный предел функтора F , и обратно. Разумеется, аналогичным образом можно описать и расслоенную сумму.

4. Пусть $\mathcal{C}$ — одна из категорий $\mathcal{Enz}, \mathcal{Al}, {}_{\Delta}\mathcal{C}$, а I — произвольное частично упорядоченное множество³⁾. Понятие проективного (соотв. индуктивного) предела функтора $F: \text{Ord } I \rightarrow \mathcal{C}$ совпадает с обычным понятием проективного, или обратного (соотв. индуктивного, или прямого) предела семейства $(F(i))_{i \in I}$.

Предложение 3.1. Пусть даны категории $\mathcal{C}, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ и функторы $F_i: \mathcal{D}_i \rightarrow \mathcal{C}$ ($i = 1, 2$), $G: \mathcal{D}_2 \rightarrow \mathcal{D}_1$. Предположим, что A_i вместе с морфизмами u_X^i , определенными для всех объектов X из $\mathcal{D}_i$, есть проективный предел функтора F_i ($i = 1, 2$). Наконец, пусть f — функторный морфизм функтора $F_1 G$ в F_2 . При этих условиях существует единственный морфизм $u: A_1 \rightarrow A_2$, такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{u} & A_2 \\ u_{G(X)}^1 \downarrow & & \downarrow u_X^2 \\ F_1(G(X)) & \xrightarrow{f(X)} & F_2(X) \end{array} \quad (1)$$

коммутативна для каждого объекта X категории $\mathcal{D}_2$.

При этом, если $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}$, $G = 1_{\mathcal{D}}$, существует категория $\text{Funct}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ ⁴⁾ и каждый функтор F из $\text{Funct}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ обладает проективным пределом A , то соответствия

$$F \mapsto A, \quad f \mapsto u$$

задают ковариантный функтор $\lim: \text{Funct}(\mathcal{D}, \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$.

¹⁾ И, конечно, также морфизмами 1_X и 1_Y .

²⁾ И, конечно, также морфизмами $1_X, 1_Y$ и 1_Z .

³⁾ Здесь и в соответствующих случаях дальше под I можно (а иногда и нужно) понимать (частично) предупорядоченное множество.

⁴⁾ То есть $\mathcal{D}$ — малая категория.

Доказательство. Для каждого морфизма $v: X \rightarrow Y$ из $\mathcal{D}_2$ справедливы соотношения

$$f(Y) u_{G(Y)}^1 = f(Y) F_1(G(v)) u_{G(X)}^1 = F_2(v) f(X) u_{G(X)}^1.$$

Поэтому, рассматривая морфизмы $f(X) u_{G(X)}^1: A_1 \rightarrow F_2(X)$ и применяя условие 2 определения проективного предела, получаем единственный морфизм $u: A_1 \rightarrow A_2$, такой, что диаграмма (1) коммутативна для всех объектов X из $\mathcal{D}_2$. Вторая часть предложения очевидна.

Следствие 3.2. Если (A_1, u_X^1) и (A_2, u_X^2) — проективные пределы функтора $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, то существует единственный изоморфизм $u: A_1 \rightarrow A_2$, такой, что $u_X^1 = u_X^2 u$ для всех объектов X категории $\mathcal{D}$.

Опираясь на это следствие, мы для каждого функтора F , обладающего хотя бы одним проективным пределом, выберем раз и навсегда из класса всех его проективных пределов одного представителя, которого и будем обозначать $\lim F$.

Ясно, что справедливы также утверждения, дуальные к 3.1 и 3.2. Для каждого функтора F , обладающего хотя бы одним индуктивным пределом, мы из класса всех его индуктивных пределов выберем раз и навсегда одного представителя, которого и будем обозначать $\lim F$.

Замечание. Если $\mathcal{D} = \text{Ord } I$, где I — частично упорядоченное множество, то для проективного и индуктивного пределов функтора F мы иногда будем использовать соответственно обозначения $\lim_{i \in I} F(i)$ и $\lim_{i \in I} F(i)$.

§ 2. Существование индуктивных и проективных пределов

Предложение 3.3. Для того чтобы каждый функтор из малой категории в категорию $\mathcal{C}$ обладал проективным пределом, необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{C}$ была категорией с произведениями и чтобы каждая пара морфизмов в $\mathcal{C}$ обладала ядром.

Доказательство. Необходимость немедленно следует из приведенных выше примеров 1 и 2. Докажем достаточность. Пусть F — функтор из малой категории $\mathcal{D}$ в $\mathcal{C}$. Пусть далее P — произведение объектов $F(X)$, где X пробегает множество всех объектов из $\mathcal{D}$, и $p_X: P \rightarrow F(X)$ — канонические проекции. Наконец, пусть Q — произведение объектов $F(Y)$, где взято по экземпляру $F(Y)$ для каждого морфизма $\alpha: X \rightarrow Y$ категории $\mathcal{D}$, и $q_Y^\alpha: Q \rightarrow F(Y)$ — канонические проекции. Рассмотрим морфизмы $F(\alpha) p_X: P \rightarrow F(Y)$, определенные для каждого Y и каждого $\alpha: X \rightarrow Y$. Существует

единственный морфизм ω , такой, что коммутативны все диаграммы

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\omega} & Q \\ p_X \downarrow & & \downarrow q_Y^\alpha \\ F(X) & \xrightarrow{F(\alpha)} & F(Y) \end{array} \quad (2)$$

С другой стороны, рассмотрим морфизмы $p_Y: P \rightarrow F(Y)$, также определенные для каждого Y и каждого $\alpha: X \rightarrow Y$. Существует единственный морфизм $\bar{\omega}$, такой, что коммутативны все диаграммы

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\bar{\omega}} & Q \\ & \searrow p_Y & \downarrow q_Y^\alpha \\ & & F(Y) \end{array} \quad (3)$$

Пусть A вместе с морфизмом $s: A \rightarrow P$ есть ядро пары морфизмов $(\omega, \bar{\omega})$. Мы утверждаем, что A вместе с морфизмами $u_X = p_X s: A \rightarrow F(X)$, определенными для всех объектов X из $\mathcal{D}$, есть проективный предел функтора F . В самом деле, для каждого морфизма $\alpha: X \rightarrow Y$ в силу коммутативности диаграмм (2) и (3) имеем

$$F(\alpha) u_X = F(\alpha) p_X s = q_Y^\alpha \omega s = q_Y^\alpha \bar{\omega} s = p_Y s = u_Y.$$

С другой стороны, пусть B — объект из $\mathcal{C}$, заданный вместе с морфизмами $v_X: B \rightarrow F(X)$, определенными для всех объектов X из $\mathcal{D}$ и такими, что диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & & F(X) \\ & \nearrow v_X & \downarrow F(\alpha) \\ B & & \\ & \searrow v_Y & \downarrow \\ & & F(Y) \end{array}$$

коммутативны для всех морфизмов $\alpha: X \rightarrow Y$. Существует единственный морфизм $t: B \rightarrow P$, такой, что $p_X t = v_X$ для каждого объекта X из $\mathcal{D}$. Для любого морфизма $\alpha: X \rightarrow Y$ имеем

$$q_Y^\alpha \omega t = F(\alpha) p_X t = F(\alpha) v_X = v_Y,$$

$$q_Y^\alpha \bar{\omega} t = p_Y t = v_Y.$$

По определению произведения заключаем, что $\omega t = \bar{\omega} t$, а тогда, согласно определению ядра пары морфизмов, существует единственный морфизм $v: B \rightarrow A$, такой, что $sv = t$. Поэтому $u_X v = p_X sv = p_X t = v_X$ для каждого объекта X из $\mathcal{D}$, и предложение доказано.

Дуально, справедливо

Предложение 3.4. Для того чтобы каждый функтор из малой категории в категорию $\mathcal{C}$ обладал индуктивным пределом, необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{C}$ была категорией с суммами и чтобы каждая пара морфизмов в $\mathcal{C}$ обладала коядром.

Следствие 3.5. Каждый функтор из малой категории в любую из категорий $\mathcal{E}nз$, $\mathcal{T}op$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{A}l$, $_{\Lambda}\mathcal{C}$ обладает проективным и индуктивным пределами.

Доказательство. Это немедленно следует из примеров на стр 41, 45—46 и 52.

Напомним обычные конструкции проективного и индуктивного пределов в категории множеств для функторов из категорий вида $\text{Ord } I$, где I — произвольное частично упорядоченное множество.

Пусть (A_i, u_{ij}) — произвольная проективная система в $\mathcal{E}nз$ над I и A — подмножество декартова произведения $\prod_{i \in I} A_i$, состоящее из всех семейств $(x_i)_{i \in I}$, в которых $x_i \in A_i$ ($i \in I$) и $u_{ij}(x_j) = x_i$ для каждой пары $i, j \in I$, такой, что $i \leq j$. Пусть, далее, $u_i: A \rightarrow A_i$ ($i \in I$) определены формулами $u_i((x_j)_{j \in I}) = x_i$. Тогда A вместе с отображениями u_i есть проективный предел системы (A_i, u_{ij}) .

Пусть (A_i, u_{ij}) — произвольная индуктивная система в $\mathcal{E}nз$ над I и A — факторпространство раздельного объединения $\bigsqcup_{i \in I} A_i$ по отношению эквивалентности, порожденному следующим отношением R : элементы $x_i \in A_i$ и $x_j \in A_j$ находятся в отношении R , если существует $k \in I$, такое, что $k \geq i$, $k \geq j$ и $u_{ki}(x_i) = u_{kj}(x_j)$. Пусть, далее, $u_i: A_i \rightarrow A$ ($i \in I$) — композиция вложения A_i в раздельное объединение $\bigsqcup_{i \in I} A_i$ и канонического отображения этого объединения на A . Тогда A вместе с отображениями u_i есть индуктивный предел системы (A_i, u_{ij}) .

§ 3. Перестановочность функторов с проективными и индуктивными пределами

Определение. Пусть даны категории $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ и ковариантный функтор $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$. Будем говорить, что функтор F сохраняет проективные пределы функторов из $\mathcal{D}$, если выполнено следующее условие:

Если объект B из $\mathcal{A}$ вместе с морфизмами $u_D: B \rightarrow G(D)$, определенными для всех объектов D из $\mathcal{D}$, есть проективный предел функтора $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$, то объект $F(B)$ из $\mathcal{C}$ вместе с морфизмами $F(u_D): F(B) \rightarrow F(G(D))$ есть проективный предел функтора FG .

Определение ковариантных функторов, сохраняющих индуктивные пределы, аналогично.

Предположим теперь, что $F: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ — контравариантный функтор. Будем говорить, что он *переводит проективные пределы функторов из $\mathcal{D}$ в индуктивные пределы*, если выполнено следующее условие:

Если объект B из $\mathcal{B}$ вместе с морфизмами $u_D: B \rightarrow G(D)$ есть проективный предел функтора $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$, то $F(B)$ вместе с морфизмами $F(u_D): F(G(D)) \rightarrow F(B)$ есть индуктивный предел функтора FG .

Определение контравариантных функторов, переводящих индуктивные пределы в проективные, аналогично.

Пусть теперь $\mathcal{C}$ — произвольная категория и X — фиксированный ее объект. Напомним (см. пример 3 на стр. 16), что h_X обозначает контравариантный функтор из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{E}nz$, определяемый условиями

$$h_X(Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \text{ для каждого объекта } Y \text{ из } \mathcal{C}$$

и

$$h_X(u)(v) = vu \text{ для каждого морфизма } u: Y \rightarrow Y'$$

$$\text{и всех морфизмов } v: Y' \rightarrow X,$$

а $\bar{h}_X$ — ковариантный функтор из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{E}nz$, определяемый условиями

$$\bar{h}_X(Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \text{ для каждого объекта } Y \text{ из } \mathcal{C}$$

и

$$\bar{h}_X(u)(v) = uv \text{ для каждого морфизма } u: Y \rightarrow Y'$$

$$\text{и всех морфизмов } v: X \rightarrow Y.$$

Заметим, что если существует категория $\text{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{E}nz)$, то соответствие $\bar{h}: \mathcal{C} \rightarrow \text{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{E}nz)$, где $\bar{h}(X) = \bar{h}_X$ для каждого объекта X из $\mathcal{C}$, есть контравариантный функтор; аналогично, если существует категория $\text{Funct}(\mathcal{C}^o, \mathcal{E}nz)$, то соответствие $h: \mathcal{C} \rightarrow \text{Funct}(\mathcal{C}^o, \mathcal{E}nz)$, где $h(X) = h_X$ для каждого объекта X из $\mathcal{C}$, есть ковариантный функтор¹⁾.

Предложение 3.6. Пусть $\mathcal{C}$ — произвольная категория и A — ее объект. Функтор $\bar{h}_A: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}nz$ сохраняет проективные пределы функторов из любой категории.

Доказательство. Пусть заданы категория $\mathcal{D}$ и функтор $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$. Предположим, что объект B из $\mathcal{C}$ вместе с морфизмами

¹⁾ Имеется в виду также, что каждому морфизму $w: X \rightarrow X'$ из $\mathcal{C}$ ставится в соответствие функторный морфизм $h_w: h_X \rightarrow h_{X'}$, описанный в примере на стр. 17. Аналогично дополняется до (контравариантного) функтора и $\bar{h}$. Как уже отмечалось, существование категорий $\text{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{E}nz)$ и $\text{Funct}(\mathcal{C}^o, \mathcal{E}nz)$ равносильно малости категории $\mathcal{C}$.

$u_X: B \rightarrow F(X)$, определенными для всех объектов X из $\mathcal{D}$, есть проективный предел функтора F . Для каждого морфизма $\alpha: X \rightarrow Y$ из $\mathcal{D}$ имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & & \bar{h}_A(F(X)) \\ & \nearrow \bar{h}_A(u_X) & \downarrow \bar{h}_A(F(\alpha)) \\ \bar{h}_A(B) & & \\ & \searrow \bar{h}_A(u_Y) & \downarrow \\ & & \bar{h}_A(F(Y)) \end{array}$$

Предположим, что заданы множество M и отображения $f(X): M \rightarrow \bar{h}_A(F(X))$, такие, что для каждого морфизма $\alpha: X \rightarrow Y$ из $\mathcal{D}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & \bar{h}_A(F(X)) \\ & \nearrow f(X) & \downarrow \bar{h}_A(F(\alpha)) \\ M & & \\ & \searrow f(Y) & \downarrow \\ & & \bar{h}_A(F(Y)) \end{array}$$

Для каждого $m \in M$ $f(X)(m)$ есть элемент множества $\bar{h}_A(F(X)) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, F(X))$, и из коммутативности последней диаграммы следует, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & F(X) \\ & \nearrow f(X)(m) & \downarrow F(\alpha) \\ A & & \\ & \searrow f(Y)(m) & \downarrow \\ & & F(Y) \end{array}$$

Поэтому существует единственный морфизм $v_m: A \rightarrow B$, такой, что $u_X v_m = f(X)(m)$ для всех X . Определим отображение $g: M \rightarrow h_A(B)$, положив $g(m) = v_m$ для всех $m \in M$. Очевидно, $\bar{h}_A(u_X) g = f(X)$ для всех объектов X из $\mathcal{D}$, а это означает, что $\bar{h}_A(B)$ вместе с морфизмами $\bar{h}_A(u_X)$ есть проективный предел функтора $\bar{h}_A F$.

Справедливо также дуальное

Предложение 3.7. Пусть $\mathcal{C}$ — произвольная категория и A — ее объект. Тогда функтор $h_A: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et$ переводит индуктив-

ные пределы функторов из любой категории в проективные пределы.

Следствие 3.8. Пусть даны категория $\mathcal{C}$ и контравариантный функтор $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$. Если этот функтор представим, то он переводит индуктивные пределы функторов из любой категории в проективные пределы.

Доказательство. Если функтор F представим, то для некоторого объекта A из $\mathcal{C}$ существует функторный изоморфизм $F \approx h_A$. Поэтому утверждение следствия вытекает из предложения 3.7.

Следствие 3.9. Пусть $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ — ковариантный функтор. Если F обладает левым (правым) сопряженным функтором, то F сохраняет проективные (индуктивные) пределы функторов из любой категории.

Доказательство. Пусть функтор $G: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ — левый сопряженный к F . Это означает, что для любых A из $\mathcal{C}$ и B из $\mathcal{C}'$ имеет место функториальный изоморфизм

$$\bar{h}_{G(B)}(A) \approx \bar{h}_B(F(A)).$$

Пусть даны категория $\mathcal{D}$ и функтор $L: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, для которого существует $\varprojlim L$. Согласно предложению 3.6, для любого объекта B из $\mathcal{C}'$ имеем последовательность функториальных изоморфизмов

$$\begin{aligned} \bar{h}_B(F(\varprojlim L)) &\approx \bar{h}_{G(B)}(\varprojlim L) \approx \varprojlim (\bar{h}_{G(B)} L) \approx \\ &\approx \varprojlim (\bar{h}_B F L) \approx \bar{h}_B(\varprojlim (F L)). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$F(\varprojlim L) \approx \varprojlim (F L).$$

Предложение 3.10. Пусть даны категории $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, причем существует категория $\text{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ и задан функтор $F: \mathcal{D} \rightarrow \text{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$. Пусть, далее, $H_A: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$ для каждого объекта A из $\mathcal{C}$ есть функтор, определенный условием

$$H_A(X) = F(X)(A) \quad \text{для всех объектов } X \text{ из } \mathcal{D}^1).$$

Наконец, пусть функтор $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ таков, что для каждого объекта A из $\mathcal{C}$ объект $G(A)$ вместе с морфизмами $u_X^A: G(A) \rightarrow H_A(X)$, определенными для всех объектов X из $\mathcal{D}$, есть проективный предел функтора H_A , причем для каждого морфизма $\alpha: A \rightarrow B$ из $\mathcal{C}$

¹⁾ С естественным распространением на морфизмы.

коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G(A) & \xrightarrow{u_X^A} & H_A(X) \\ G(\alpha) \downarrow & & \downarrow F(X)(\alpha) \\ G(B) & \xrightarrow{u_X^B} & H_B(X) \end{array}$$

При этих условиях функтор G вместе с функторными морфизмами $v_X: G \rightarrow F(X)$, определенными формулами $v_X(A) = u_X^A$ для всех X из $\mathcal{D}$ и A из $\mathcal{C}$, есть проективный предел функтора F .

Доказательство. Пусть $L: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ — произвольный функтор, а $w_X: L \rightarrow F(X)$ — функторные морфизмы, определенные для всех X из $\mathcal{D}$ и такие, что $F(\mu)w_X = w_Y$ для каждого морфизма $\mu: X \rightarrow Y$ из $\mathcal{D}$. Тогда для любых объектов X из $\mathcal{D}$ и A из $\mathcal{C}$ имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & & F(X)(A) = H_A(X) \\ & \nearrow w_X(A) & \downarrow F(\mu)(A) \\ L(A) & & \\ & \searrow w_Y(A) & \downarrow \\ & & F(Y)(A) = H_A(Y) \end{array}$$

По определению проективного предела отсюда следует, что для каждого объекта A из $\mathcal{C}$ имеется единственный морфизм $s(A): L(A) \rightarrow G(A)$, такой, что $v_X(A)s(A) = u_X^A s(A) = w_X(A)$ для всех объектов X из $\mathcal{D}$. Легко видеть, что s — функторный морфизм функтора L в G ¹⁾, причем $v_X s = w_X$ для всех объектов X из $\mathcal{D}$, и предложение доказано.

Следствие 3.11. Для каждой малой категории $\mathcal{C}$ функтор $h: \mathcal{C} \rightarrow \text{Funct}(\mathcal{C}^{\circ}, \mathcal{E}ns)$

сохраняет проективные пределы из любой категории.

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}$ — произвольная категория и $L: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ — ковариантный функтор. Предположим, что объект C есть проективный предел функтора L . Применим предложение 3.10,

¹⁾ В самом деле, для любого морфизма $\alpha: A \rightarrow B$ и всех объектов X из $\mathcal{D}$ имеем: $u_X^B G(\alpha) s(A) = F(X)(\alpha) u_X^A s(A) = F(X)(\alpha) w_X(A) = w_X(B) L(\alpha) = u_X^B s(B) L(\alpha)$, и так как $G(B)$ вместе с морфизмами u_X^B есть $\varprojlim H_B$, то $G(\alpha) s(A) = s(B) L(\alpha)$.

взяв $\mathcal{B} = \mathcal{E}ns$, $F = hL$ и $G = h_c$. Условие, что $G(A)$ для любого A из $\mathcal{C}$ есть проективный предел функтора H_A , выполняется в силу предложения 3.10¹⁾.

§ 4. Характеризация сопряженных функторов

Определение. Категория $\mathcal{C}$ называется *локально малой*, если класс подобъектов любого объекта из $\mathcal{C}$ есть множество.

Лемма 3.12. Пусть $\mathcal{C}$ — локально малая категория, такая, что каждый функтор из малой категории в $\mathcal{C}$ обладает проективным пределом, и $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ — ковариантный функтор, сохраняющий проективные пределы из малых категорий. Пусть A — объект из $\mathcal{C}$, B — объект из $\mathcal{D}$ и $u: B \rightarrow T(A)$ — морфизм из $\mathcal{D}$. Тогда существует подобъект $i: A' \rightarrow A$ объекта A , такой, что $u = T(i)v$, где $v: B \rightarrow T(A')$, причем у A' нет собственного подобъекта $j: A'' \rightarrow A'$, для которого бы v пропускалось через $T(j)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ — категория, объектами которой служат все подобъекты $j: C \rightarrow A$ объекта A , для которых u пропускается через $T(j)$, а морфизмами объекта $j: C \rightarrow A$ в объект $k: D \rightarrow A$ из $\mathcal{A}$ — всевозможные морфизмы $s: C \rightarrow D$ из $\mathcal{C}$, для которых $ks = j^2$. Так как категория $\mathcal{C}$ локально мала, то $\mathcal{A}$ — малая категория. Заметим, что $1_A: A \rightarrow A$ есть объект категории $\mathcal{A}$. Рассмотрим функтор $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$, относящий каждому объекту $j: C \rightarrow A$ из $\mathcal{A}$ объект C из $\mathcal{C}$ ³⁾. Пусть A' вместе с морфизмами $w_C: A' \rightarrow C$ — проективный предел функтора F . Положим $i = w_A$. Легко видеть, что i — мономорфизм. Так как T сохраняет проективные пределы из малых категорий, то $T(A')$ вместе с морфизмами $T(w_C): T(A') \rightarrow T(C)$ есть проективный предел функтора TF . Но u разлагается для каждого C в композицию $B \xrightarrow{z_C} T(C) \xrightarrow{T(i)} T(A)$, а потому существует единственный морфизм $v: B \rightarrow T(A')$, такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & T(A') \\ & \nearrow v & \downarrow T(w_C) \\ B & & \\ & \searrow z_C & \\ & & T(C) \end{array}$$

¹⁾ Действительно, $H_A = \bar{h}_A L$ и $G(A) = \bar{h}_A(C)$. По условию $C = \varprojlim L$, скажем с каноническими проекциями u_X . По предложению 3.6 тогда $\bar{h}_A(C) = \varprojlim \bar{h}_A L$, т. е. $G(A) = \varprojlim H_A$ с каноническими проекциями $u_X^A = \bar{h}_A(u_X)$. Наконец, коммутативность диаграммы предложения 3.10 следует из того, что $G(\alpha)$ есть функторный морфизм $\bar{h}(\alpha): \bar{h}_B \rightarrow \bar{h}_A$, порожденный морфизмом $\alpha: A \rightarrow B$.

²⁾ С той же композицией, что и в $\mathcal{C}$.

³⁾ И каждому морфизму s объекта $j: C \rightarrow A$ в объект $k: D \rightarrow A$ — этот же морфизм $s: C \rightarrow D$ в $\mathcal{C}$.

коммутативна для каждого C . В частности, поскольку $z_A = u$, получаем $u = T(i)v$. Предположим, что $j: A'' \rightarrow A'$ — подобъект объекта A' , такой, что v разлагается в композицию $B \rightarrow T(A'') \xrightarrow{T(j)} T(A')$. Отсюда следует, что u пропускается через $T(ij)$, т. е. $ij: A'' \rightarrow A$ есть объект категории $\mathcal{A}$. Поэтому имеем морфизм $\omega_{A'': A' \rightarrow A''}$. Легко проверить, что морфизмы j и $\omega_{A''}$ устанавливают эквивалентность между подобъектами $j: A'' \rightarrow A'$ и $1_{A'}: A' \rightarrow A'$ объекта A' . Таким образом, A'' не есть собственный подобъект объекта A' , чем и завершается доказательство.

Теорема 3.13 (П. Фрейд). Пусть $\mathcal{C}$ — локально малая категория, такая, что каждый функтор из малой категории в $\mathcal{C}$ имеет проективный предел. Ковариантный функтор $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ обладает левым сопряженным функтором тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1. Для каждого объекта B из $\mathcal{D}$ имеется объект A из $\mathcal{C}$, для которого в $\mathcal{D}$ существует морфизм $B \rightarrow T(A)$.
2. T сохраняет проективные пределы.
3. Для каждого объекта B из $\mathcal{D}$ существует множество $\mathcal{P}_B$ объектов из $\mathcal{C}$, таких, что для любого объекта A из $\mathcal{C}$ и любого морфизма $v: B \rightarrow T(A)$ существуют объект $A' \in \mathcal{P}_B$ и морфизмы $u: A' \rightarrow A$ в $\mathcal{C}$ и $\omega: B \rightarrow T(A')$ в $\mathcal{D}$, такие, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & T(A') \\ & \nearrow \omega & \downarrow T(u) \\ B & & T(A) \\ & \searrow v & \end{array}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть функтор $S: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ — левый сопряженный к T ¹⁾. Согласно следствию 3.9, выполнено условие 2²⁾. Для проверки выполнения условия 3 положим $\mathcal{P}_B = \{S(B)\}$. Пусть A — объект из $\mathcal{C}$ и $v: B \rightarrow T(A)$ — морфизм из $\mathcal{D}$. Согласно определению сопряженных функторов, имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(S(B), S(B)) & \xrightarrow{\psi(B, S(B))} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, T(S(B))) \\ \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(S(B), u) & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, T(u)) \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(S(B), A) & \xrightarrow{\psi(B, A)} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, T(A)) \end{array} \quad (4)$$

где $\psi(B, S(B))$ и $\psi(B, A)$ — изоморфизмы, а морфизм $u: S(B) \rightarrow A$ определен равенством $\psi(B, A)(u) = v$. Пусть $\omega: B \rightarrow T(S(B))$ —

¹⁾ Так что условие 1 выполнено: поскольку $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(S(B), A) \approx \text{Hom}_{\mathcal{D}}(B, T(A))$, одним из объектов A , удовлетворяющих условию 1, служит $A = S(B)$.

²⁾ То есть T сохраняет проективные пределы функторов из любой категории,

морфизм, определенный равенством $\omega = \psi(B, S(B))(1_{S(B)})$. Мы утверждаем, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & T(S(B)) \\ & \nearrow \omega & \downarrow T(u) \\ B & & T(A) \\ & \searrow v & \end{array}$$

коммутативна. В самом деле, в силу коммутативности диаграммы (4) $T(u)\omega = \psi(B, A)(u) = v$.

Достаточность. Пусть B — произвольный объект из $\mathcal{D}$ и $\mathcal{C}_B$ — множество, описанное в условии 3. Положим

$$\bar{A} = \prod_{A' \in \mathcal{C}_B} \prod_{\omega \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(B, T(A'))} A'_\omega,$$

где $A'_\omega = A'$ для каждого $\omega \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(B, T(A'))$. Так как T сохраняет проективные пределы¹⁾, то $T(\bar{A}) = \prod \prod T(A')$. Пусть t — морфизм B в $T(\bar{A})$, определяемый условиями $v = T(\text{pr}_\omega)t$ ($\omega \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(B, T(A'))$, $A' \in \mathcal{C}_B$), где pr_ω — каноническая проекция $\bar{A}$ на A'_ω . Тогда для любого объекта A из $\mathcal{C}$ и любого морфизма $v: B \rightarrow T(A)$ существует морфизм $\bar{u}: \bar{A} \rightarrow A$ в $\mathcal{C}$, такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & T(\bar{A}) \\ & \nearrow t & \downarrow T(\bar{u}) \\ B & & T(A) \\ & \searrow v & \end{array} \quad (5)$$

коммутативна²⁾. Подчеркнем, что $\bar{u}$, вообще говоря, не единственно. Согласно лемме 3.12, существует такой подобъект $i: \bar{\bar{A}} \rightarrow \bar{A}$, что t разлагается в композицию $B \xrightarrow{s} T(\bar{\bar{A}}) \xrightarrow{T(i)} T(\bar{A})$, причем $\bar{\bar{A}}$ — минимальный из подобъектов, обладающих этим свойством. Мы утверждаем, что для любого объекта A из $\mathcal{C}$ и любого морфизма $v: B \rightarrow T(A)$ из $\mathcal{D}$ существует единственный морфизм $z: \bar{\bar{A}} \rightarrow A$, такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & T(\bar{\bar{A}}) \\ & \nearrow s & \downarrow T(z) \\ B & & T(A) \\ & \searrow v & \end{array}$$

коммутативна. В самом деле, как мы уже знаем, существует морфизм $\bar{u}: \bar{A} \rightarrow A$, для которого диаграмма (5) коммутативна,

¹⁾ Здесь достаточно предполагать, что T сохраняет проективные пределы функторов из любых малых категорий.

²⁾ А именно $\bar{u} = u \text{pr}_\omega$, где u и ω — морфизмы из диаграммы условия 3.

так что для доказательства существования достаточно взять $z = ui$. Докажем единственность. Пусть $z': \bar{A} \rightarrow A$ таково, что $T(z')s = v$, и $k: K \rightarrow \bar{A}$ — ядро пары морфизмов (z, z') . Так как T сохраняет проективные пределы, то $T(k): T(K) \rightarrow T(\bar{A})$ — ядро пары морфизмов $(T(z), T(z'))$. Поскольку $T(z)s = T(z')s$, существует единственный морфизм $\gamma: B \rightarrow T(K)$, для которого $s = T(k)\gamma$. Но в силу минимальности $\bar{A}$ отсюда следует, что $K = \bar{A}$ и $k = 1_A$, а потому $z' = z$.

Определим теперь функтор $S: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ следующим образом: для каждого объекта B из $\mathcal{D}$ положим $S(B) = \bar{A}$ и для каждого морфизма $r: B_1 \rightarrow B_2$ из $\mathcal{D}$ положим $S(r) = z$, где z — единственный морфизм $S(B_1)$ в $S(B_2)$, такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \rightarrow & T(S(B_1)) \\ r \downarrow & & \downarrow T(z) \\ B_2 & \rightarrow & T(S(B_2)) \end{array}$$

коммутативна. Далее, для каждой пары (A, B) , где A — объект из $\mathcal{C}$, а B — объект из $\mathcal{D}$, определим отображения

$$\varphi(A, B): \text{Hom}_{\mathcal{D}}(B, T(A)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(S(B), A),$$

$$\psi(A, B): \text{Hom}_{\mathcal{C}}(S(B), A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(B, T(A))$$

следующим образом. Для каждого морфизма $v: B \rightarrow T(A)$ положим $\varphi(A, B)(v) = z$, где z — единственный морфизм $S(B)$ в A , такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & T(S(B)) \\ & \nearrow s & \downarrow T(z) \\ B & & T(A) \\ & \searrow v & \end{array}$$

коммутативна; и для каждого морфизма $w: S(B) \rightarrow A$ положим $\psi(A, B)(w) = T(w)s$, где $s: B \rightarrow T(S(B))$ — морфизм, участвующий в описанном выше построении объекта $\bar{A} = S(B)$.

Нетрудно видеть, что $\varphi(A, B)$ и $\psi(A, B)$ функториальны, причем $\varphi(A, B) \circ \psi(A, B) = 1_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(S(B), A)}$ и $\psi(A, B) \circ \varphi(A, B) = 1_{\text{Hom}_{\mathcal{D}}(B, T(A))}$. Но это означает, что функтор S — левый сопряженный к T , и теорема доказана.

Покажем теперь, что каждый контравариантный функтор есть индуктивный предел представимых функторов. Более точно, справедливо

Предложение 3.14. Пусть $\mathcal{C}$ — произвольная малая категория и $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}^{\text{пз}}$ — контравариантный функтор. Существуют категория $\mathcal{D}$ и функтор $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, такие, что F есть индуктивный предел функтора hG .

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}$ — категория, объектами которой служат всевозможные функторные морфизмы $h_A \rightarrow F$ для всех объектов A из $\mathcal{C}$, а морфизмами — те морфизмы $v: A \rightarrow B^1)$, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & h_A & \\ h(v) \downarrow & \searrow & \nearrow \\ & h_B & \end{array} \quad F$$

Пусть $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ — функтор, относящий каждому объекту $h_A \rightarrow F$ объект $A^2)$. Для произвольного объекта $D: h_A \rightarrow F$ категории $\mathcal{D}$ определим функторный морфизм $u_D: h_{G(D)} \rightarrow F$, положив $u_D = D$. Мы докажем теперь, что F вместе с морфизмами u_D есть индуктивный предел функтора hG .

Для этого предположим, что задан функтор $H: \mathcal{C}^o \rightarrow \mathcal{C}nз$ вместе с функторными морфизмами $v_D: h_{G(D)} \rightarrow H$, определенными для всех объектов D из $\mathcal{D}$ и такими, что $v_D = v_E hG(\mu)$ для каждого морфизма $\mu: D \rightarrow E$ из $\mathcal{D}$. Мы должны определить функторный морфизм $v: F \rightarrow H$ так, чтобы для каждого объекта D из $\mathcal{D}$ была коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & u_D \nearrow & F \\ h_{G(D)} & & \downarrow v \\ & v_D \searrow & H \end{array}$$

Пусть X — любой объект из $\mathcal{C}$ и x — элемент множества $F(X)$. По теореме 1.6 имеется изоморфизм $F(X) \approx \text{Hom}_{\text{Funct}(\mathcal{C}^o, \mathcal{C}nз)}(h_X, F)$, при котором элемент x соответствует функторному морфизму $w_x: h_X \rightarrow F$, характеризуемому тем, что

$$w_x(X)(1_X) = x. \quad (6)$$

Определим $v(X)$ соотношением

$$v(X)(x) = v_{w_x(X)}(1_X) \quad (x \in F(X)). \quad (7)$$

Покажем, что для любого объекта $D: h_A \rightarrow F$ из $\mathcal{D}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & u_D(X) \nearrow & F(X) \\ h_{G(D)}(X) & & \downarrow v(X) \\ & v_D(X) \searrow & H(X) \end{array} \quad (8)$$

¹⁾ С той же композицией, что и в $\mathcal{C}$.

²⁾ И каждому морфизму $v: A \rightarrow B$ категории $\mathcal{D}$ этот же морфизм в $\mathcal{C}$.

Пусть $z \in h_{G(D)}(X) = h_A(X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A)$ и $y = u_D(X)(z) \in F(X)$. Тогда

$$u_D h(z) = w_y, \quad (9)$$

ибо для произвольного элемента $s: Y \rightarrow X$ из $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ имеем

$$\begin{aligned} u_D(Y)(h(z)(Y))(s) &= u_D(Y)(zs) = u_D(Y)(h_A(s))(z) = \\ &= F(s)(u_D(X))(z) = F(s)(y) = F(s)(w_y(X))(1_X) = \\ &= w_y(Y)(h_X(s))(1_X) = w_y(Y)(s). \end{aligned}$$

Из равенства (9) следует, что z есть морфизм категории $\mathcal{D}$; используя этот факт, а также равенства (6), (7) и (9), получаем

$$\begin{aligned} (v(X)u_D(X))(z) &= v(X)u_D(X)(h(z)(X))(1_X) = \\ &= v(X)w_y(X)(1_X) = v(X)(y) = v_{w_y}(X)(1_X) = \\ &= v_D(X)(h(z)(X))(1_X) = v_D(X)(z), \end{aligned}$$

так что диаграмма (8) коммутативна.

Единственность v непосредственно следует из соотношения (7)¹⁾. Проверку того, что v — функторный морфизм, предоставляем читателю.

Предложение 3.15. Пусть $\mathcal{C}$ — произвольная малая категория, $\mathcal{B}$ — категория и $F: \text{Func}(\mathcal{C}^0, \mathcal{E}ns) \rightarrow \mathcal{B}$ — ковариантный функтор. F сохраняет индуктивные пределы тогда и только тогда, когда он обладает правым сопряженным.

Доказательство. Если функтор F обладает правым сопряженным, то по следствию 3.9 F сохраняет индуктивные пределы. Обратно, предположим, что функтор $F: \text{Func}(\mathcal{C}^0, \mathcal{E}ns) \rightarrow \mathcal{B}$ сохраняет индуктивные пределы. Определим функтор $L: \mathcal{B} \rightarrow \rightarrow \text{Func}(\mathcal{C}^0, \mathcal{E}ns)$ следующим образом:

$$L(Y) = h_Y^{\mathcal{B}} F h^{\mathcal{C}} \text{ для каждого объекта } Y \text{ из } \mathcal{B}^2).$$

Другими словами, $L(Y)$ сопоставляет каждому объекту X из $\mathcal{C}$ множество

$$\text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(h_X^{\mathcal{C}}), Y).$$

Далее, для каждой пары (E, Y) , где E — объект из $\text{Func}(\mathcal{C}^0, \mathcal{E}ns)$, а Y — объект из $\mathcal{B}$, определим отображение

$$\varphi(E, Y): \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(E), Y) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Func}(\mathcal{C}^0, \mathcal{E}ns)}(E, L(Y))$$

следующим образом. Пусть $u: F(E) \rightarrow Y$ — произвольный морфизм из $\mathcal{B}$. Тогда $\varphi(E, Y)(u)$ есть функторный морфизм $w: E \rightarrow L(Y)$,

¹⁾ Которое в свою очередь должно выполняться, поскольку должна быть коммутативна диаграмма (8) с $D = w_X$.

²⁾ С естественным распространением на морфизмы.

определенный для всех объектов X из $\mathcal{C}$ и элементов $x \in E(X)$ соотношением

$$w(X)(x) = uF(v),$$

где $v: h_X \rightarrow E$ — функторный морфизм, соответствующий x по теореме 1.6. Если $E = h_Z$ для надлежащего объекта Z из $\mathcal{C}$, то

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(F(E), Y) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(F(h_Z), Y) = L(Y)(Z)$$

и легко видеть, что в этом случае $\varphi(E, Y)$ есть биекция $L(Y)(Z)$ на $\text{Hom}_{\text{Funct}(\mathcal{C}^0, \mathcal{A})}(h_Z, L(Y))$, описанная в теореме 1.6. Пусть теперь E — произвольный объект категории $\text{Funct}(\mathcal{C}^0, \mathcal{A})$. Согласно предложению 3.14, существуют категория $\mathcal{D}$ и функтор $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, такие, что E есть индуктивный предел функтора $h^{\mathcal{C}}G$. По предыдущему замечанию, для каждого объекта D из $\mathcal{D}$ имеется функториальная биекция

$$h_Y(F(h_{G(D)})) \xrightarrow{\sim} h_{L(Y)}(h_{G(D)}).$$

Согласно предложению 3.1, эти биекции индуцируют морфизм

$$\varprojlim (h_Y F h^{\mathcal{C}} G) \rightarrow \varprojlim (h_{L(Y)} h^{\mathcal{C}} G),$$

являющийся, как легко видеть, биекцией. Но по предложению 3.7 функтор h_A переводит индуктивные пределы в проективные, так что имеем биекцию

$$h_Y(\varinjlim (F h^{\mathcal{C}} G)) \xrightarrow{\sim} h_{L(Y)}(\varinjlim (h^{\mathcal{C}} G)).$$

Так как по предположению F сохраняет индуктивные пределы, то это дает биекцию

$$h_Y(F(\varinjlim (h^{\mathcal{C}} G))) \xrightarrow{\sim} h_{L(Y)}(\varinjlim (h^{\mathcal{C}} G)),$$

которая совпадает с $\varphi(\varinjlim (h^{\mathcal{C}} G), Y) = \varphi(E, Y)$, поскольку $\varphi(E, Y)$ функториально по E^1 . Таким образом, функтор L — правый сопряженный для функтора F .

¹ Пусть $\psi(E, Y)$ — биекция, о которой идет речь. Из предыдущего легко следует, что $\psi(h_Z, Y) = \varphi(h_Z, Y)$ для всех объектов Y из $\mathcal{A}$ и Z из $\mathcal{C}$. Поскольку φ функториально по E , отсюда следует коммутативность диаграмм

$$\begin{array}{ccc} h_Y(F(E)) & \xrightarrow[\varphi(E, Y)]{\varphi(E, Y)} & h_{L(Y)}(E) \\ \downarrow h_Y(F(u_D)) & & \downarrow h_{L(Y)}(u_D) \\ h_Y(h_{G(D)}) & \xrightarrow[\varphi(h_{G(D)}, Y)]{} & h_{L(Y)}(h_{G(D)}) \end{array}$$

§ 5. Пропредставимые функторы

Пусть I — направленное частично упорядоченное множество и $\mathbf{X} = (X_i, \varphi_{kl})$ — индуктивная система над I со значениями в категории $\mathcal{C}$. Сопоставим этой системе функтор $h_{\mathbf{X}}: \mathcal{C}^o \rightarrow \mathcal{E}nz$, определенный следующим образом:

(I) Для каждого объекта Y из $\mathcal{C}$ полагаем $h_{\mathbf{X}}(Y) = \varinjlim_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_i)$.

(II) Для каждого морфизма $u: Y \rightarrow Z$ из $\mathcal{C}$ определяем $h_{\mathbf{X}}(u): h_{\mathbf{X}}(Z) \rightarrow h_{\mathbf{X}}(Y)$ так. Для всякого $i \in I$ имеем морфизм $h_{X_i}(u): h_{X_i}(Z) \rightarrow h_{X_i}(Y)$, причем, если $i \leq j$, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} h_{X_i}(Z) & \rightarrow & h_{X_j}(Z) \\ h_{X_i}(u) \downarrow & & \downarrow h_{X_j}(u) \\ h_{X_i}(Y) & \rightarrow & h_{X_j}(Y) \end{array}$$

где горизонтальные морфизмы индуцированы морфизмом $\varphi_{ji}: X_i \rightarrow X_j$, коммутативна. Этим определен единственный морфизм $h_{\mathbf{X}}(u): h_{\mathbf{X}}(Z) \rightarrow h_{\mathbf{X}}(Y)$, такой, что для любого $i \in I$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} h_{\mathbf{X}}(Z) & \xrightarrow{h_{\mathbf{X}}(u)} & h_{\mathbf{X}}(Y) \\ \uparrow & & \uparrow \\ h_{X_i}(Z) & \xrightarrow{h_{X_i}(u)} & h_{X_i}(Y) \end{array}$$

где вертикальные морфизмы — канонические инъекции.

Пусть теперь $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}nz$ — контравариантный функтор. Мы хотим определить класс всех функторных морфизмов $h_{\mathbf{X}}$ в F^1). Следующий результат обобщает теорему 1.6.

Предложение 3.16. *Существует биективное каноническое отображение $\alpha: \text{Hom}(h_{\mathbf{X}}, F) \rightarrow \varprojlim_{i \in I} F(X_i)$, где $\varprojlim_{i \in I} F(X_i)$ есть проективный предел проективной системы $(F(X_i), F(\varphi_{kl}))$ над I со значениями в $\mathcal{E}nz$.*

для всех канонических инъекций $u_D: h_{G(D)} \rightarrow E$. Беря, в частности, $Y = F(E)$, получаем, что

$$(\varphi(E, F(E))(1_{F(E)})) u_D = (\psi(E, F(E))(1_{F(E)})) u_D$$

для всех u_D и, значит, $\varphi(E, F(E))(1_{F(E)}) = \psi(E, F(E))(1_{F(E)})$. В силу предложения 1.12 отсюда следует, что $\varphi = \psi$.

¹⁾ См. примечание на стр. 20.

Доказательство. Пусть φ — функторный морфизм h_X в F . Определим $\alpha(\varphi) \in \lim_{\leftarrow i \in I} F(X_i)$ следующим образом. Для каждого $i \in I$ обозначим через e_i канонический образ элемента $1_{X_i} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, X_i)$ в $h_X(X_i)$, и пусть $\eta_i = \varphi(X_i)(e_i)$. Семейство $(\eta_i)_{i \in I}$ определяет элемент из $\lim_{\leftarrow i \in I} F(X_i)$. В самом деле, пусть $i \leq j$; требуется показать, что $F(\varphi_{ji})\eta_j = \eta_i$. Для этого рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} h_X(X_j) & \xrightarrow{\varphi(X_j)} & F(X_j) \\ h_X(\varphi_{ji}) \downarrow & & \downarrow F(\varphi_{ji}) \\ h_X(X_i) & \xrightarrow{\varphi(X_i)} & F(X_i) \end{array}$$

Имеем

$$\eta_i = \varphi(X_i)(e_i) = (\varphi(X_i) h_X(\varphi_{ji}))(e_j) = (F(\varphi_{ji}) \varphi(X_j))(e_j) = F(\varphi_{ji})(\eta_j).$$

Обратно, пусть $\xi = (\xi_i)_{i \in I} \in \lim_{\leftarrow i \in I} F(X_i)$. Определим функторный

морфизм $\beta(\xi): h_X \rightarrow F$ следующим образом. Для каждого $i \in I$, согласно доказательству теоремы 1.6, существует функторный морфизм $\beta(\xi_i): h_{X_i} \rightarrow F$, такой, что $(\beta(\xi_i)(Y))(u) = F(u)(\xi_i)$ для всякого морфизма $u: Y \rightarrow X_i$. Так как тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} h_{X_i}(Y) & & \\ \downarrow h(\varphi_{ji}) & \searrow \beta(\xi_i)(Y) & \\ & & F(Y) \\ & \nearrow \beta(\xi_j)(Y) & \\ h_{X_j}(Y) & & \end{array}$$

коммутативна для всех объектов Y из $\mathcal{C}$ и всех $i, j \in I$, таких, что $i \leq j$, то этими функторными морфизмами порождается функторный морфизм $\beta(\xi): h_X \rightarrow F$.

Непосредственно проверяется, что $\beta(\alpha(\varphi)) = \varphi$ и $\alpha(\beta(\xi)) = \xi$, чем и завершается доказательство.

Определение. Индуктивная система $X = (X_i, \varphi_{ki})$ вместе с элементом $\xi = (\xi_i) \in \lim_{\leftarrow i \in I} F(X_i)$ называется *пропредставляющей системой* для функтора F , если функторный морфизм $\beta(\xi): h_X \rightarrow F$ есть функторный изоморфизм. Функтор F , обладающий пропредставляющей системой, называется *пропредставимым*. Если

морфизмы φ_{kl} для всех k и l являются мономорфизмами, то F называется *строго пропредставимым*.

Определение. Морфизм $u: X \rightarrow Y$ категории $\mathcal{C}$ называется *строгим эпиморфизмом*, если u — эпиморфизм, существует расслоенное произведение $X \coprod_Y X$ и последовательность

$$X \coprod_Y X \xrightleftharpoons[p_2]{p_1} X \xrightarrow{u} Y,$$

где p_1 и p_2 — канонические проекции, точна ¹⁾.

Определение. Пусть $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}ns$ — контравариантный функтор. Пара (X, ξ) , где X — объект из $\mathcal{C}$ и $\xi \in F(X)$, называется *минимальной парой*, если любой строгий эпиморфизм $u: X \rightarrow X_1$, для которого существует $\xi_1 \in F(X_1)$, такое, что $F(u)\xi_1 = \xi$, есть изоморфизм.

Лемма 3.17. *Морфизм $u: X \rightarrow Y$, являющийся одновременно строгим эпиморфизмом и мономорфизмом, есть изоморфизм.*

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X \coprod_Y X & \xrightleftharpoons[p_2]{p_1} & X \xrightarrow{u} Y \\ \downarrow 1_X & & \\ X & & \end{array}$$

Так как по определению $u p_1 = u p_2$ и u — мономорфизм, то $p_1 = p_2$. Поэтому снова по определению существует единственный морфизм $v: Y \rightarrow X$, такой, что $vu = 1_X$. Рассмотрим теперь диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X \coprod_Y X & \xrightleftharpoons[p_2]{p_1} & X \xrightarrow{u} Y \\ \downarrow u & & \\ Y & & \end{array}$$

Присоединение каждого из морфизмов 1_Y , $uv: Y \rightarrow Y$ оставляет ее коммутативной. Так как верхняя строка точна, то эти морфизмы должны совпадать: $uv = 1_Y$.

¹⁾ Вот более общая форма определения строгого эпиморфизма, не требующая существования расслоенного произведения $X \coprod_Y X$, а при его существовании равносильная определению, данному в тексте: *строгим эпиморфизмом* называется морфизм $u: X \rightarrow Y$, обладающий следующим свойством: для всякого морфизма $v: X \rightarrow Z$, такого, что равенство $uv = u\psi$ всегда влечет равенство $v\varphi = v\psi$, существует единственный морфизм $w: Y \rightarrow Z$, для которого $v = wu$. Дуально определяются строгие мономорфизмы.

Лемма 3.18. Если последовательность

$$A \xrightarrow[u_2]{u_1} B \xrightarrow{\gamma} C$$

точна, то γ — строгий эпиморфизм.

Доказательство. Очевидно, γ — эпиморфизм. Нужно лишь показать, что точна последовательность

$$B \amalg_C B \xrightarrow[p_2]{p_1} B \xrightarrow{\gamma} C,$$

где p_1, p_2 — канонические морфизмы расслоенного произведения. Очевидно, $\gamma p_1 = \gamma p_2$. Пусть морфизм $v: B \rightarrow D$ таков, что $v p_1 = v p_2$. Так как существует единственный морфизм $\alpha: A \rightarrow B \amalg_C B$, для которого диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & \nearrow u_1 & \uparrow p_1 \\ A & \xrightarrow{\alpha} & B \amalg_C B \\ & \searrow u_2 & \downarrow p_2 \\ & & B \end{array}$$

коммутативна, то $vu_1 = vu_2$ и потому существует единственный морфизм $\delta: C \rightarrow D$, такой, что $\delta\gamma = v$.

Определение. Будем называть контравариантный функтор $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ *точным слева*, если

1. F переводит суммы в произведения.

2. Для каждой точной последовательности $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ точна

последовательность $F(C) \xrightarrow{F(v)} F(B) \xrightarrow{F(u)} F(A)$.

Лемма 3.19. Пусть $\mathcal{C}$ — произвольная малая категория, а I — направленное частично упорядоченное множество. Пусть, далее, (F_i, φ_{ki}) — индуктивная система над I со значениями в $\text{Funct}(\mathcal{C}^o, \mathcal{E})$. Наконец, пусть $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ — контравариантный функтор, определенный условием

$$F(X) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ i \in I}} F_i(X) \quad \text{для каждого объекта } X \text{ из } \mathcal{C}^1.$$

¹ И, кроме того, условием, что $F(u)$ для всякого морфизма $u: X \rightarrow Y$ из $\mathcal{C}$ есть отображение $F(Y)$ в $F(X)$, индуцированное отображениями $F_i(u)$ ($i \in I$).

При этих условиях, если функторы F_i точны слева для всех $i \in I$, то и функтор F точен слева.

Доказательство. Проверим условие 2 определения, представив проверку условия 1 читателю. Пусть

$$A \xrightarrow[u]{u} B \xrightarrow{w} C$$

— точная последовательность в категории $\mathcal{C}$. Нужно показать, что последовательность

$$F(A) \xleftarrow[F(v)]{F(u)} F(B) \xleftarrow{F(w)} F(C)$$

точна. Это равносильно (см. пример на стр. 52) следующему утверждению: для каждого элемента $x \in F(B)$, такого, что $F(u)(x) = F(v)(x)$, существует единственный элемент $y \in F(C)$, такой, что $F(w)(y) = x$. Докажем последнее утверждение. Пусть

$$\varphi_i^X: F_i(X) \rightarrow F(X)$$

— каноническое отображение в индуктивный предел, определенное для каждого объекта X из $\mathcal{C}$ и каждого $i \in I$. Пусть $x \in F(B)$ таково, что $F(u)(x) = F(v)(x)$. Очевидно, существуют индекс $i_0 \in I$ и элемент $x_0 \in F_{i_0}(B)$, такие, что $\varphi_{i_0}^B(x_0) = x$ и $F_{i_0}(u)(x_0) = F_{i_0}(v)(x_0)$. Так как последовательность

$$F_{i_0}(A) \xleftarrow[F_{i_0}(v)]{F_{i_0}(u)} F_{i_0}(B) \xleftarrow{F_{i_0}(w)} F_{i_0}(C)$$

по предположению точна, то существует $y_0 \in F_{i_0}(C)$, такое, что $F_{i_0}(w)(y_0) = x_0$. Положим $y = \varphi_{i_0}^C(y_0)$. Тогда $F(w)(y) = x$.

Чтобы доказать единственность y , предположим, что $y, z \in F(C)$ таковы, что $F(w)(y) = F(w)(z)$. Так как множество I направленное, то, как легко видеть, существуют индекс $i_1 \in I$ и элементы $y_1, z_1 \in F_{i_1}(C)$, такие, что $\varphi_{i_1}^C(y_1) = y$, $\varphi_{i_1}^C(z_1) = z$ и, кроме того, $F_{i_1}(w)(y_1) = F_{i_1}(w)(z_1)$. Но так как последовательность

$$F_{i_1}(A) \xleftarrow[F_{i_1}(v)]{F_{i_1}(u)} F_{i_1}(B) \xleftarrow{F_{i_1}(w)} F_{i_1}(C)$$

по предположению точна, то мы видим, что $y_1 = z_1$, и, значит, $y = z$.

Лемма 3.20. Предположим, что в категории $\mathcal{C}$ каждая пара морфизмов обладает коядром, и пусть $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ — точный слева контравариантный функтор. Пусть, далее, $\xi \in F(X)$, $\xi' \in F(X')$, причем вторая из пар (X, ξ) , (X', ξ') минимальна. Если $u, v: X \rightarrow X'$ таковы, что $F(u)\xi' = F(v)\xi' = \xi$, то $u = v$.

Доказательство. Пусть $\omega: X' \rightarrow X''$ — коядро пары морфизмов (u, v) . По лемме 3.18 ω — строгий эпиморфизм. Достаточно доказать, что ω — изоморфизм. Другими словами, поскольку пара (X', ξ') минимальна, достаточно показать, что существует $\xi'' \in F(X'')$, для которого $F(\omega)\xi'' = \xi'$. Но функтор F точен слева, так что последовательность

$$F(X'') \xrightarrow{F(\omega)} F(X') \xrightarrow[F(v)]{F(u)} F(X)$$

точна. Принимая во внимание равенство $F(u)\xi' = F(v)\xi'$ и вид ядра в категории $\mathcal{E}nz$ (см. пример на стр. 52), заключаем, что существует $\xi'' \in F(X'')$, для которого $F(\omega)\xi'' = \xi'$, и лемма доказана.

Определение. Будем говорить, что пара (X, ξ) *мажорируется* парой (X', ξ') , если существует $u: X \rightarrow X'$, для которого $F(u)\xi' = \xi$.

Теорема 3.21 (А. Гротендик). Пусть $\mathcal{C}$ — малая категория с конечными суммами, в которой каждая пара морфизмов обладает коядром. Контравариантный функтор $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}nz$ строго пропредставим тогда и только тогда, когда

1. F точен слева.
2. Каждая пара (Y, η) , где Y — объект из $\mathcal{C}$ и $\eta \in F(Y)$, мажорируется некоторой минимальной парой.

Доказательство. Достаточность. Пусть I — множество всех минимальных пар. По лемме 3.20 отношение мажорирования определяет в I структуру частичного порядка¹⁾. При этом полученное так частично упорядоченное множество направленно. В самом деле, пусть (X, ξ) и (X', ξ') — минимальные пары. Так как F точен слева, то $F(X \sqcup X') = F(X) \amalg F(X')$, причем если $i_1: X \rightarrow X \sqcup X'$ и $i_2: X' \rightarrow X \sqcup X'$ — канонические инъекции, то $F(i_1): F(X) \amalg F(X') \rightarrow F(X)$ и $F(i_2): F(X) \amalg F(X') \rightarrow F(X')$ — канонические проекции. Поэтому $(\xi, \xi') \in F(X \sqcup X')$ ²⁾ и пара $(X \sqcup X', (\xi, \xi'))$ мажорирует пары (X, ξ) и (X', ξ') . Так как по условию 2 существует минимальная пара, мажорирующая $(X \sqcup X', (\xi, \xi'))$, то заключаем, что существует минимальная пара, мажорирующая (X, ξ) и (X', ξ') . Заметим теперь, что если (X, ξ) и (X', ξ') — минимальные пары и (X', ξ') мажорирует (X, ξ) , то по лемме 3.20 существует единственный морфизм $u: X \rightarrow X'$, такой, что $F(u)\xi' = \xi$. Это порождает индуктивную систему $X = (X, u)_{(X, \xi) \in I}$ над I со значениями в $\mathcal{C}$. Се-

¹⁾ Из леммы 3.20 следует лишь, что если (X, ξ) и (X', ξ') — такие минимальные пары, что одновременно $(X, \xi) \leq (X', \xi')$ и $(X', \xi') \leq (X, \xi)$, то морфизм $u: X \rightarrow X'$, для которого $F(u)\xi' = \xi$, есть изоморфизм (но не обязательно единица). Таким образом, отношение мажорирования определяет в I лишь структуру (частичного) предпорядка. На дальнейшем ходе доказательства это не отражается (см. примечание²⁾ на стр. 59).

²⁾ Точнее не (ξ, ξ') , а элемент из $F(X \sqcup X')$, переходящий в точку $(\xi, \xi') \in F(X) \times F(X')$ при каноническом изоморфизме множества $F(X \sqcup X')$ на декартово произведение $F(X) \times F(X')$.

мейство $(\xi)_{(X, \xi) \in I}$ определяет элемент $\lim_{(X, \xi) \in I} F(X)$, а следовательно, по предложению 3.16, — функторный морфизм

$$h_X \xrightarrow{\varphi} F.$$

Проверим, что φ есть функторный изоморфизм. Пусть Y — произвольный объект из $\mathcal{C}$ и η — произвольный элемент из $F(Y)$. По условию 2 существуют минимальная пара (X, ξ) и морфизм $v: Y \rightarrow X$, такие, что $F(v)(\xi) = \eta$. Обозначая через $\hat{v}$ канонический образ v в $h_X(Y)$, имеем $\varphi(Y)(\hat{v}) = F(v)(\xi) = \eta$, так что $\varphi(Y)$ сюръективно. Предположим теперь, что пара (X, ξ) минимальна и $u_1, u_2: Y \rightarrow X$ — такие морфизмы, что $\varphi(Y)(\hat{u}_1) = \varphi(Y)(\hat{u}_2)$. Тогда $F(u_1)\xi = F(u_2)\xi$, откуда в свою очередь следует по лемме 3.20, что $u_1 = u_2$. Тем самым $\varphi(Y)$ инъективно.

Осталось показать, что для любых минимальных пар (X, ξ) и (X', ξ') морфизм $u: X \rightarrow X'$ есть мономорфизм. Пусть $v_1, v_2: Z \rightarrow X$ таковы, что $uv_1 = uv_2$, и $w: X \rightarrow U$ — коядро пары морфизмов (v_1, v_2) . Тогда существует единственный морфизм $t: U \rightarrow X'$, такой, что $tw = u$. Отсюда $F(w)(F(t)\xi') = \xi$, т. е. пара (X, ξ) мажорируется парой $(U, F(t)\xi')$. Так как по лемме 3.18 w — строгий эпиморфизм, то заключаем, что w — изоморфизм; значит, $v_1 = v_2$ и u — мономорфизм.

При доказательстве необходимости можно предполагать, что $F = h_X$, где $X = (X_i, \varphi_{ki})$ — индуктивная система над I со значениями в $\mathcal{C}$, причем все φ_{ki} — мономорфизмы. По предложению 3.7 функтор h_{X_i} точен слева для каждого $i \in I$, а следовательно, по лемме 3.19, и F точен слева. Проверим условие 2. Пусть (Y, η) , где Y — объект из $\mathcal{C}$ и $\eta \in F(Y) = \lim_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_i)$, — произвольная

пара, а $v: Y \rightarrow X_j$ представляет η^1). Рассмотрим теперь пару (X_j, ξ_j) , где ξ_j — канонический образ морфизма $1_{X_j}: X_j \rightarrow X_j$ в $F(X_j) = \lim_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_j, X_i)$. Так как $F(v)\xi_j = \eta$, то пара (Y, η) мажори-

руется парой (X_j, ξ_j) . Остается показать, что (X_j, ξ_j) — минимальная пара. Пусть $u: X_j \rightarrow Z$ — строгий эпиморфизм, для которого существует $\xi \in F(Z) = \lim_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X_i)$, такое, что $F(u)\xi = \xi_j$.

Пусть $w: Z \rightarrow X_k$ представляет ξ ; тогда wu представляет $F(u)\xi$ и соотношение $F(u)\xi = \xi_j$ означает, что существует индекс $l \in I$, такой, что $l \geq j$, $l \geq k$ и $\varphi_{kl}wu = \varphi_{jl}1_{X_j} = \varphi_{jl}$. Так как φ_{jl} по предположению — мономорфизм, то в силу предложения 1.2 u — мономорфизм. Отсюда по лемме 3.17 вытекает, что u — изоморфизм, т. е. (X_j, ξ_j) — минимальная пара. Теорема доказана.

¹⁾ То есть η есть образ морфизма v при канонической инъекции $\text{Hom}(Y, X_j) \rightarrow F(Y)$.

СТРУКТУРЫ НА ОБЪЕКТАХ КАТЕГОРИИ

§ 1. Алгебраические операции на объектах категории.
Гомоморфизмы

Пусть $\mathcal{C}$ — произвольная категория и X — объект из $\mathcal{C}$. Напомним, что контравариантный функтор $h_X: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{Gnz}$ определяется соотношениями $h_X(Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, $h_X(u)(v) = vu$ для любых объектов Y и морфизмов $u: Y \rightarrow Z$, $v: Z \rightarrow X$ из $\mathcal{C}$. Пусть $\mathcal{G}$ — категория групп, а $c: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{Gnz}$ — „стирающий“ функтор, сопоставляющий каждой группе множество ее элементов.

Определение. Будем говорить, что на объекте X категории $\mathcal{C}$ определена *групповая структура*, и называть X *группой* в $\mathcal{C}$, если задан такой контравариантный функтор $\sigma: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{G}$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{h_X} & \mathcal{Gnz} \\ & \searrow \sigma \quad \nearrow c & \\ & \mathcal{G} & \end{array} \quad (D)$$

Очевидно, это равносильно тому, что $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ для каждого объекта Y из $\mathcal{C}$ есть группа, а $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(u, X)$ для каждого морфизма u из $\mathcal{C}$ — гомоморфизм.

Подчеркнем, что функтор σ , вообще говоря, — не единственный.

Примеры. Если $\mathcal{C} = \mathcal{Gnz}$, то X обладает групповой структурой в $\mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда X есть группа в обычном смысле слова; в этом легко убедиться, приняв за Y одноточечное множество¹⁾.

Если $\mathcal{C} = \mathcal{Top}$, то X обладает групповой структурой в $\mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда X — топологическая группа.

Если $\mathcal{C}$ — категория аналитических многообразий, то X обладает групповой структурой в $\mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда X — группа Ли.

Если $\mathcal{C}$ — категория топологических пространств с отмеченной точкой и классов гомотопически эквивалентных непрерывных отображений, оставляющих эту точку неподвижной, то X обладает групповой структурой в $\mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда X есть

¹⁾ При этом групповая структура в $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ для каждого множества Y связана с групповой структурой в X так: $(fg)(y) = f(y)g(y)$, каковы бы ни были $f, g: Y \rightarrow X$ и $y \in Y$.

гомотопически ассоциативное H -пространство с гомотопическим обратным.

Определение. Объект A категории $\mathcal{C}$ называется *инициальным*, если для всякого объекта X из $\mathcal{C}$ множество $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$ одноточечно.

Дуально, объект B категории $\mathcal{C}$ называется *финальным*, если для всякого объекта X из $\mathcal{C}$ множество $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B)$ одноточечно.

Объект, одновременно инициальный и финальный, называется *нулевым объектом*.

Примеры. В категории $\mathcal{S}$ из любое одноточечное множество есть финальный объект ¹⁾. В категории групп $\mathcal{G}$ группа, состоящая из одного нейтрального элемента, есть нулевой объект.

Теорема 4.1. Пусть $\mathcal{C}$ — категория с конечными произведениями, обладающая финальным объектом e ²⁾, и пусть X — объект из $\mathcal{C}$, а ξ — единственный элемент множества $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, e)$. При этих условиях групповая структура на X в категории $\mathcal{C}$ может быть задана тогда и только тогда, когда существуют морфизмы $m: X \times X \rightarrow X$, $a: X \rightarrow X$ и $e: e \rightarrow X$, для которых коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X \times X \times X & \xrightarrow{m \times 1_X} & X \times X \\ 1_X \times m \downarrow & & \downarrow m \\ X \times X & \xrightarrow{m} & X \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{(e\xi) \times 1_X} & X \times X \\ \Delta \uparrow & & \downarrow m \\ X & \xrightarrow{1_X} & X \end{array} \quad (2)$$

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{a \times 1_X} & X \times X \\ \Delta \uparrow & & \downarrow m \\ X & \xrightarrow{e\xi} & X \end{array} \quad (3)$$

где Δ — „диагональный“ морфизм (см. стр. 41).

Доказательство. Прежде всего напомним, что по предложению 3.6 для любых объектов A, B, C из $\mathcal{C}$ имеется функториальный изоморфизм

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B \times C) \approx \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C).$$

¹⁾ А пустое множество — инициальный.

²⁾ Согласно примечанию на стр. 39, в каждой категории с конечными произведениями имеется финальный объект: произведение пустого семейства объектов.

Предположим, что в категории $\mathcal{C}$ можно задать групповую структуру на X . Определим для каждого объекта Y из $\mathcal{C}$ отображения

$$\bar{m}(Y): \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X \times X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X),$$

$$\bar{a}(Y): \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X),$$

$$\bar{e}(Y): \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, e) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$$

следующим образом:

$$\bar{m}(Y)(u_1, u_2) = u_1 u_2,$$

$$\bar{a}(Y)(u) = u^{-1},$$

$$\bar{e}(Y)(\eta) = \text{нейтральному элементу группы } \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X),$$

где $u_1, u_2, u \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, $u_1 u_2$ означает произведение, а u^{-1} — элемент, обратный к u , в группе $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ и η есть единственный элемент группы $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, e)$. Как легко проверить, отображениями $\bar{m}(Y)$, $\bar{a}(Y)$, $\bar{e}(Y)$ определяются функторные морфизмы

$$\bar{m}: h_X \times h_X \rightarrow h_X, \quad \bar{a}: h_X \rightarrow h_X, \quad \bar{e}: h_e \rightarrow h_X.$$

Согласно следствию 1.7, тогда существуют однозначно определенные морфизмы

$$m: X \times X \rightarrow X, \quad a: X \rightarrow X, \quad e: e \rightarrow X,$$

индуцирующие соответственно $\bar{m}$, $\bar{a}$, $\bar{e}$.

Чтобы доказать коммутативность диаграммы (1), заметим, что она индуцирует для каждого объекта Y из $\mathcal{C}$ диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) & \xrightarrow{\overline{m \times 1_X(Y)}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \\ \downarrow \overline{1_X \times m(Y)} & & \downarrow \bar{m}(Y) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) & \xrightarrow{\bar{m}(Y)} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \end{array}$$

которая коммутативна, так как для любых $u_1, u_2, u_3 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ в силу ассоциативности умножения в группе $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ имеем

$$\begin{aligned} (\bar{m}(Y) \overline{m \times 1_X(Y)})(u_1, u_2, u_3) &= \bar{m}(Y)(u_1, u_2, u_3) = (u_1 u_2) u_3 = \\ &= u_1 (u_2 u_3) = \bar{m}(Y)(u_1, u_2, u_3) = (\bar{m}(Y) \overline{1_X \times m(Y)})(u_1, u_2, u_3). \end{aligned}$$

Применяя следствие 1.7, получаем, что $m(m \times 1_X) = m(1_X \times m)$, и коммутативность диаграммы (1) установлена.

Морфизм $e_{\xi}: X \rightarrow X$ индуцирует функторный морфизм $\bar{e}_{\xi}: h_X \rightarrow h_X$. Мы утверждаем, что для любого объекта Y из $\mathcal{C}$ гомоморфизм $e_{\xi}(Y)$ отображает $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ в нейтральный элемент ω группы $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$. В самом деле, для любого $u \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ имеем

$$\bar{e}_{\xi}(Y)(u) = e_{\xi} u = \bar{e}(Y)(\xi u) = \omega.$$

Диаграмма (2) индуцирует для каждого объекта Y из $\mathcal{C}$ диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) & \xrightarrow{(\bar{e}_X^Y) \times \bar{1}_X(Y)} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \\ \bar{\Delta}(Y) \uparrow & & \downarrow \bar{m}(Y) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) & \xrightarrow{\bar{1}_X(Y)} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \end{array}$$

которая коммутативна, так как для любого $u \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$

$$(\bar{m}(Y) \overline{(\bar{e}_X^Y) \times \bar{1}_X(Y)} \bar{\Delta}(Y))(u) = (\bar{m}(Y) \overline{(\bar{e}_X^Y) \times \bar{1}_X(Y)})(u, u) = \bar{m}(Y)(\omega, u) = \omega u = u.$$

Снова с помощью следствия 1.7 заключаем, что диаграмма (2) коммутативна.

Аналогично диаграмма (3) индуцирует диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) & \xrightarrow{\bar{a} \times \bar{1}_X(Y)} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \\ \bar{\Delta}(Y) \uparrow & & \downarrow \bar{m}(Y) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) & \xrightarrow{\bar{e}_X^Y} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \end{array}$$

которая коммутативна, так как для любого $u \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$

$$(\bar{m}(Y) \overline{\bar{a} \times \bar{1}_X(Y)} \bar{\Delta}(Y))(u) = (\bar{m}(Y) \overline{\bar{a} \times \bar{1}_X(Y)})(u, u) = \bar{m}(Y)(u^{-1}, u) = \omega.$$

А отсюда по следствию 1.7 вытекает, что диаграмма (3) коммутативна.

Обратно, пусть заданы морфизмы m, a, e , для которых коммутативны диаграммы (1), (2), (3). Для каждого объекта Y из $\mathcal{C}$ определим умножение в $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, обозначаемое $\mathbf{T}$, следующим образом.

Морфизм $m: X \times X \rightarrow X$ индуцирует функторный морфизм $\bar{m}: h_X \times h_X \rightarrow h_X$. Таким образом, имеем отображение

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \approx \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X \times X) \xrightarrow{\bar{m}(Y)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X).$$

Полагаем по определению

$$u_1 \mathbf{T} u_2 = \bar{m}(Y)(u_1, u_2) \quad (u_1, u_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)).$$

Очевидно, $u_1 \mathbf{T} u_2 = mv$, где $v: Y \rightarrow X \times X$ — единственный морфизм, такой, что $p_1 v = u_1$, $p_2 v = u_2$, где $p_1, p_2: X \times X \rightarrow X$ — канонические проекции. Легко проверить, что $h_X(u)$ для любого морфизма u из $\mathcal{C}$ сохраняет введенное так умножение.

Докажем теперь ассоциативность умножения $\mathbf{T}$. Пусть $u_1, u_2, u_3 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$. Согласно предыдущему замечанию,

$$(u_1 \mathbf{T} u_2) \mathbf{T} u_3 = mw,$$

где $\omega: Y \rightarrow X \times X$ — единственный морфизм, для которого $p_1\omega = mv$, $p_2\omega = u_3$, а в свою очередь $v: Y \rightarrow X \times X$ — единственный морфизм, такой, что $p_1v = u_1$, $p_2v = u_2$. Пусть $s: Y \rightarrow X \times X \times X$ — единственный морфизм, для которого $q_i s = u_i$ ($i = 1, 2, 3$), где $q_1, q_2, q_3: X \times X \times X \rightarrow X$ — канонические проекции. Мы утверждаем, что $\omega = (m \times 1_X) s$. В самом деле, рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X \times X & \xrightarrow{m} & X \\
 & \nearrow r_1 & & & \nwarrow p_1 \\
 (X \times X) \times X & \xrightarrow{m \times 1_X} & X \times X & & \\
 & \searrow r_2 & & & \swarrow p_2 \\
 & & X & \xrightarrow{1_X} & X
 \end{array}$$

где r_1, r_2 — канонические проекции. Имеем

$$p_1(m \times 1_X)s = mr_1s, \quad p_2(m \times 1_X)s = r_2s = q_3s = u_3,$$

причем $r_1s = v$, поскольку

$$p_1(r_1s) = q_1s = u_1, \quad p_2(r_1s) = q_2s = u_2.$$

Таким образом,

$$(u_1 \top u_2) \top u_3 = m(m \times 1_X)s.$$

Совершенно аналогично можно показать, что

$$u_1 \top (u_2 \top u_3) = m(1_X \times m)s,$$

так что в виду коммутативности диаграммы (1)

$$(u_1 \top u_2) \top u_3 = u_1 \top (u_2 \top u_3).$$

Проверим существование нейтрального элемента для умножения $\top$. Пусть η — единственный элемент множества $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(Y, e)$. Мы хотим показать, что $e\eta$ — нейтральный элемент в $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(Y, X)$. Таким образом, нам нужно показать, что

$$(e\eta) \top u = u \top (e\eta) = u \quad \text{для всех } u \in \text{Hom}_{\mathcal{E}}(Y, X). \quad (4)$$

По определению $(e\eta) \top u = mv$, где $v: Y \rightarrow X \times X$ — единственный морфизм, для которого $p_1v = e\eta$, $p_2v = u$. Мы утверждаем, что $v = ((e\xi) \times 1_X)\Delta u$. В самом деле, в силу коммутативности диаграмм

$$\begin{array}{ccc}
 X \times X & \xrightarrow{(e\xi) \times 1_X} & X \times X \\
 p_1 \downarrow & & \downarrow p_1 \\
 X & \xrightarrow{e\xi} & X
 \end{array}
 \quad \text{и} \quad
 \begin{array}{ccc}
 X \times X & \xrightarrow{(e\xi) \times 1_X} & X \times X \\
 p_2 \downarrow & & \downarrow p_2 \\
 X & \xrightarrow{1_X} & X
 \end{array}$$

имеем

$$\begin{aligned} p_1((e\xi) \times 1_X) \Delta u &= e\xi p_1 \Delta u = e\xi u = e\eta, \\ p_2((e\xi) \times 1_X) \Delta u &= 1_X p_2 \Delta u = u. \end{aligned}$$

Но тогда (4)¹⁾ следует из коммутативности диаграммы (2).

Наконец, для доказательства существования обратных элементов относительно умножения $\mathbf{T}$ покажем, что

$$(au) \mathbf{T} u = u \mathbf{T} (au) = e\eta \quad \text{для всех } u \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X). \quad (5)$$

По определению $(au) \mathbf{T} u = m\omega$, где $\omega: Y \rightarrow X \times X$ — единственный морфизм, для которого $p_1\omega = au$, $p_2\omega = u$. Мы утверждаем, что $\omega = (a \times 1_X) \Delta u$. В самом деле, в силу коммутативности диаграмм

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{a \times 1_X} & X \times X \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_1 \\ X & \xrightarrow{a} & X \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{a \times 1_X} & X \times X \\ p_2 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ X & \xrightarrow{1_X} & X \end{array}$$

имеем

$$\begin{aligned} p_1(a \times 1_X) \Delta u &= ap_1 \Delta u = au, \\ p_2(a \times 1_X) \Delta u &= 1_X p_2 \Delta u = u. \end{aligned}$$

Но тогда (5)²⁾ следует из коммутативности диаграммы (3), и теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Нетрудно видеть, что установленное при доказательстве теоремы соответствие между групповыми структурами, которые можно определить на X , и тройками (m, a, e) взаимно однозначно.

Пусть теперь $\mathcal{C}$ — произвольная категория. Определим категорию групп $\mathcal{GC}$ категории $\mathcal{C}$ следующим образом:

(I) Объекты категории $\mathcal{GC}$ — пары (X, σ) , где X — объект из $\mathcal{C}$, а σ — функторный морфизм, для которого диаграмма (D) коммутативна.

(II) Морфизмы (X_1, σ_1) в (X_2, σ_2) — просто функторные морфизмы σ_1 в σ_2 .

Морфизм (X_1, σ_1) в (X_2, σ_2) в категории $\mathcal{GC}$ называется также гомоморфизмом X_1 в X_2 .

¹⁾ Пока — только равенство $(e\eta) \mathbf{T} u = u$. Но см. примечание ²⁾.

²⁾ Пока — только равенство $(au) \mathbf{T} u = e\eta$. Но из него, в силу уже доказанного, следует, что и $u \mathbf{T} (au) = (e\eta) \mathbf{T} u \mathbf{T} (au) = (aau) \mathbf{T} (au) \mathbf{T} u \mathbf{T} (au) = (aau) \mathbf{T} (e\eta) \mathbf{T} (au) = (aau) \mathbf{T} (au) = e\eta$. А тогда также $u \mathbf{T} (e\eta) = u \mathbf{T} (au) \mathbf{T} u = (e\eta) \mathbf{T} u = u$, и теорема полностью доказана.

Используя следствие 1.7, легко проверить, что гомоморфизмы X_1 в X_2 находятся во взаимно однозначном соответствии с морфизмами $u: X_1 \rightarrow X_2$, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times X_1 & \xrightarrow{m_1} & X_1 \\ u \times u \downarrow & & \downarrow u \\ X_2 \times X_2 & \xrightarrow{m_2} & X_2 \end{array}$$

где m_1, m_2 — морфизмы, связанные с групповыми структурами в X_1, X_2 как в теореме 4.1¹⁾.

Предложение 4.2. Пусть $u: X_1 \rightarrow X_2$ — гомоморфизм. Для того чтобы u был изоморфизмом в категории $\mathcal{GC}$, необходимо и достаточно, чтобы u был изоморфизмом в категории $\mathcal{C}$.

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Предположим, что u — изоморфизм в категории $\mathcal{GC}$. Это означает, что индуцированный функторный морфизм $f: \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ есть функторный изоморфизм; поэтому и индуцированный функторный морфизм $h_{X_1} \rightarrow h_{X_2}$ есть функторный изоморфизм, а отсюда по следствию 1.7 вытекает, что u — изоморфизм в $\mathcal{C}$.

Предложение 4.3. Если $\mathcal{C}$ — категория с конечными произведениями, то и $\mathcal{GC}$ — категория с конечными произведениями.

Доказательство. Пусть X_1 и X_2 — группы в категории $\mathcal{C}$. Тогда и $X_1 \times X_2$ — группа, поскольку для любого объекта Y из $\mathcal{C}$

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_1 \times X_2) \approx \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_1) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_2),$$

и умножение определяется покомпонентно. Пусть $p_i: X_1 \times X_2 \rightarrow X_i$ ($i=1, 2$) — канонические проекции в $\mathcal{C}$. Мы утверждаем, что $X_1 \times X_2$ вместе с морфизмами p_1, p_2 есть произведение X_1 и X_2 в $\mathcal{GC}$. В самом деле, прежде всего p_1 и p_2 — гомоморфизмы, так как для $i=1, 2$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} [\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_1) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_2)] \times \xrightarrow{\alpha} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_1) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_2) \\ \times [\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_1) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_2)] & & \downarrow p_i(Y) \\ \bar{p}_i(Y) \times \bar{p}_i(Y) \downarrow & & \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_i) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_i) & \xrightarrow{\mu_i} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_i) \end{array}$$

где α — умножение в $h_{X_1 \times X_2}(Y)$, определенное формулой $\alpha((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = (u_1 v_1, u_2 v_2)$, μ_i — умножение в $h_{X_i}(Y)$, а $\bar{p}_i: h_{X_1 \times X_2} \rightarrow h_{X_i}$ — функторный морфизм, индуцированный p_i ($i=1, 2$). Пусть теперь

¹⁾ Гомоморфизмы (X_1, σ_1) в (X_2, σ_2) в дальнейшем отождествляются с этими морфизмами $u: X_1 \rightarrow X_2$.

Z — группа в $\mathcal{C}$ и $s_i: Z \rightarrow X_i$ ($i = 1, 2$) — гомоморфизмы. Тогда в $\mathcal{C}$ существует единственный морфизм $\gamma: Z \rightarrow X_1 \times X_2$, такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & X_1 & \\ s_1 \nearrow & & \nwarrow p_1 \\ Z & \xrightarrow{\gamma} & X_1 \times X_2 \\ s_2 \searrow & & \swarrow p_2 \\ & X_2 & \end{array}$$

коммутативна. Остается показать, что γ — гомоморфизм. Но это следует из существования в категории $\mathcal{C}nz$ единственного отображения τ , для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_1) & \\ \bar{s}_1(Y) \nearrow & & \nwarrow \bar{p}_1(Y) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) & \xrightarrow{\tau} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_1) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_2) \\ \bar{s}_2(Y) \searrow & & \swarrow \bar{p}_2(Y) \\ & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_2) & \end{array}$$

где $\bar{s}_i: h_Z \rightarrow h_{X_i}$ — функторные морфизмы, индуцированные гомоморфизмами s_i ($i = 1, 2$). Ясно, что $\bar{\gamma}(Y) = \tau$, где $\bar{\gamma}: h_Z \rightarrow h_{X_1 \times X_2}$ — функторный морфизм, индуцированный γ , а рассмотрение последней диаграммы в категории $\mathcal{C}$ показывает, что τ — гомоморфизм. Предложение доказано.

§ 2. Существование ядер гомоморфизмов

Пусть $\mathcal{C}$ — произвольная категория, X, Y — группы в $\mathcal{C}$ и $f: X \rightarrow Y$ — гомоморфизм. Морфизм f индуцирует функторный морфизм $\bar{f}: h_X \rightarrow h_Y$, и для каждого объекта Z из $\mathcal{C}$ имеем групповой гомоморфизм $\bar{f}(Z): \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y)$. Определим функтор $k: \mathcal{C}^o \rightarrow \mathcal{C}nz$ следующим образом: $k(Z)$ для каждого объекта Z из $\mathcal{C}$ есть множество всех морфизмов $u: Z \rightarrow X$, таких, что $\bar{f}(Z)(u) = \omega$, где ω — нейтральный элемент группы $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y)$, т. е. $k(Z)$ есть ядро $\bar{f}(Z)$ в теоретикогрупповом смысле¹⁾.

Определение. Мы будем говорить, что гомоморфизм f обладает ядром, если функтор k представим. Если пара (K, κ) представляет функтор k , то будем говорить, что K вместе с морфизмом $\kappa: K \rightarrow X$ есть ядро гомоморфизма f .

¹⁾ Пусть $w: Z_1 \rightarrow Z$ — морфизм в $\mathcal{C}$. Так как $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(w, Y)$ — групповой гомоморфизм, то $(\bar{f}(Z_1)\text{Hom}_{\mathcal{C}}(w, X))(u) = (\text{Hom}_{\mathcal{C}}(w, Y)\bar{f}(Z))(u)$ есть нейтральный элемент группы $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z_1, Y)$ для всякого $u \in k(Z)$, т. е. $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(w, X)(u) \in k(Z_1)$. Таким образом, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(w, X)$ индуцирует отображение $k(Z)$ в $k(Z_1)$. Это индуцированное отображение и принимается за $k(w)$.

Очевидно, K — группа в $\mathcal{C}$ и κ — гомоморфизм ¹⁾.

Предложение 4.4. Если в категории $\mathcal{C}$ существуют расслоенные произведения и финальный объект, то каждый гомоморфизм обладает ядром.

Доказательство. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — гомоморфизм, e — финальный объект в $\mathcal{C}$ и $\varepsilon: e \rightarrow Y$ — морфизм из теоремы 4.1 для Y (вместо X). Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X \amalg_Y e & \xrightarrow{p_X} & X \\ \eta \downarrow & & \downarrow f \\ e & \xrightarrow{\varepsilon} & Y \end{array}$$

где p_X и η — канонические проекции. Из коммутативности этой диаграммы следует, что p_X принадлежит $k(X \amalg_Y e)$. Мы утверждаем, что пара $(X \amalg_Y e, p_X)$ представляет функтор k .

В самом деле, p_X определяет по теореме 1.6 функторный морфизм

$$\beta: h_X \amalg_Y e \rightarrow k,$$

такой, что $\beta(Z)(\xi) = p_X \xi$ для всех $\xi: Z \rightarrow X \amalg_Y e$. Пусть морфизмы $\xi_1, \xi_2: Z \rightarrow X \amalg_Y e$ таковы, что $p_X \xi_1 = p_X \xi_2$. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{p_X \xi_1} & X \\ \alpha \downarrow & & \downarrow f \\ e & \xrightarrow{\varepsilon} & Y \end{array}$$

¹⁾ Пусть α — функторный изоморфизм $h_K \rightarrow k$. Объект K наделяется структурой группы в $\mathcal{C}$ путем наделения множества $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, K)$ для каждого объекта Z из $\mathcal{C}$ прообразом относительно α_Z групповой структуры, индуцируемой в $k(Z)$ из $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$; иными словами, композиция uv любых двух морфизмов $u, v: Z \rightarrow K$ определяется формулой $\alpha_Z(uv) = \alpha_Z(u) \alpha_Z(v)$, где справа стоит композиция в $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$. Так как при этом для любого морфизма $w: Z \rightarrow K$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, K) & \xrightarrow{\alpha_Z} & k(Z) \\ \uparrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(w, K) & & \uparrow k(w) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(K, K) & \xrightarrow{\alpha_K} & k(K) \end{array}$$

так что $\kappa w = (k(w) \alpha_K)(1_K) = (\alpha_Z \text{Hom}_{\mathcal{C}}(w, K))(1_K) = \alpha_Z(w)$, то получаем, что $\kappa(uv) = \alpha_Z(uv) = \alpha_Z(u) \alpha_Z(v) = \kappa u \cdot \kappa v$, т. е. κ — гомоморфизм.

где α — единственный элемент множества $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, e)$. Поэтому существует единственный морфизм $\zeta: Z \rightarrow X \prod_Y e$, для которого $p_X \zeta = p_X \zeta_1$; следовательно, $\zeta_1 = \zeta_2$ и $\beta(Z)$ — мономорфизм. Эпиморфность $\beta(Z)$ очевидна ¹⁾. Таким образом, β — функторный изоморфизм, т. е. f обладает ядром.

Установим теперь связь между только что введенным понятием ядра гомоморфизма и понятием ядра пары морфизмов в смысле главы 2.

Пусть $f: X \rightarrow Y$ — гомоморфизм и $\kappa: K \rightarrow X$ — его ядро. Пусть, далее, ξ — единственный элемент множества $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, e)$ и e — нейтральный элемент группы $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(e, Y)$. Тогда справедливо

Предложение 4.5. *Объект K вместе с морфизмом κ есть ядро пары морфизмов $(f, e\xi)$ как в категории $\mathcal{C}$, так и в категории $\mathcal{EC}$.*

Доказательство. Пусть $\zeta: Z \rightarrow X$ — морфизм категории $\mathcal{C}$, для которого $f\zeta = e\xi\zeta$. Ясно, что тогда ζ принадлежит $k(Z)$, и так как k представим парой (K, κ) , то существует единственный морфизм $\alpha: Z \rightarrow K$ в $\mathcal{C}$, такой, что $\zeta = \kappa\alpha$. Так как, с другой стороны, прямая проверка показывает, что $f\kappa = e\xi\kappa$, то это означает, что K вместе с κ есть ядро пары морфизмов $(f, e\xi)$ в $\mathcal{C}$.

Предположим теперь, что $\zeta: Z \rightarrow X$ есть морфизм в $\mathcal{EC}$, т. е. гомоморфизм, и $f\zeta = e\xi\zeta$. Как и выше, существует единственный морфизм $\alpha: Z \rightarrow K$ в $\mathcal{C}$, такой, что $\zeta = \kappa\alpha$. Остается показать, что α — гомоморфизм. Для каждого объекта T из $\mathcal{C}$ имеем коммутативную диаграмму групп

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, K) & \xrightarrow{\bar{\kappa}(T)} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) \\ & \nwarrow \bar{\alpha}(T) & \nearrow \bar{\zeta}(T) \\ & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Z) & \end{array}$$

где $\bar{\kappa}(T)$ — мономорфизм. Поскольку $\bar{\zeta}(T)$ — гомоморфизм, ясно тогда, что и $\bar{\alpha}(T)$ — гомоморфизм.

§ 3. Отношения эквивалентности

Как известно, отношение эквивалентности на множестве M есть подмножество R декартова произведения $M \times M$, такое, что

1. $(x, x) \in R$ для всех $x \in M$.
2. Если $(x, y) \in R$, то $(y, x) \in R$.
3. Если $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$, то $(x, z) \in R$.

¹⁾ Если морфизм $u: Z \rightarrow X$ принадлежит $k(Z)$, то $fu = e\alpha$ и, значит, существует $\zeta: Z \rightarrow X \prod_Y e$, такое, что $\kappa = p_X \zeta = \beta(Z)(\zeta)$.

Будем обозначать через (M, R) множество M со структурой, заданной отношением эквивалентности R .

Пусть $\mathcal{R}$ — категория, описываемая следующим образом:

(I) объекты $\mathcal{R}$ — всевозможные пары (M, R) , где M — множество, а R — отношение эквивалентности на M ;

(II) морфизмы (M, R) в (N, S) — всевозможные отображения $u: M \rightarrow N$, такие, что $(x, y) \in R$ влечет $(u(x), u(y)) \in S$.

Имеем два функтора:

$C: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{E}ns$, для которого $C(M, R) = M^1$,

и

$Q: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{E}ns$, для которого $Q(M, R) = M/R$,

где M/R есть множество классов эквивалентности, определяемое отношением R^2 .

Имеется также функторный морфизм $\varphi: C \rightarrow Q$, определяемый следующим образом: $\varphi(M, R): M \rightarrow M/R$ для каждого объекта (M, R) из $\mathcal{R}$ есть каноническое отображение, сопоставляющее каждому элементу $x \in M$ его класс эквивалентности.

О п р е д е л е н и е. Пусть $\mathcal{C}$ — произвольная категория и X — объект из $\mathcal{C}$. Будем говорить, что на объекте X определено отношение эквивалентности, если задан контравариантный функтор $R: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{R}$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C} & \\ R \swarrow & & \searrow h_X \\ \mathcal{R} & \xrightarrow{C} & \mathcal{E}ns \end{array}$$

Очевидно, это равносильно тому, что для каждого объекта Y из $\mathcal{C}$ на множестве $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ задано отношение эквивалентности $\rho(Y)$ так, что $(v, w) \in \rho(Y)$ влечет $(vu, wi) \in \rho(Z)$ для каждого морфизма $u: Z \rightarrow Y$ из $\mathcal{C}$.

§ 4. Общее понятие структуры на объектах категории

Введенные выше понятия можно, следуя одной идее Эресмана, обобщить так.

Рассмотрим категорию $\mathcal{BifE}ns$, определенную следующим образом:

(I) Объекты этой категории — все множества.

(II) Каковы бы ни были множества M и N , множеством всех морфизмов M в N в $\mathcal{BifE}ns$ по определению служит множество

¹⁾ И $C(u) = u$.

²⁾ И $Q(u)$ для каждого морфизма $u: (M, R) \rightarrow (N, S)$ есть индуцированное им отображение M/R в N/S .

всех биекций (в категории $\mathcal{E}ns$) M на N . За композицию морфизмов в $\mathcal{Bif}\mathcal{E}ns$ принимается обычная композиция отображений.

Из определения, в частности, следует, что каждый морфизм в $\mathcal{Bif}\mathcal{E}ns$ обратим.

Определение. Ковариантный функтор

$$F: \mathcal{Bif}\mathcal{E}ns \rightarrow \mathcal{Bif}\mathcal{E}ns$$

называется *родом структуры*.

Примеры. 1. Пусть M — множество, а $G(M)$ — множество всех отображений $M \times M \rightarrow M$, определяющих на M ассоциативные бинарные алгебраические операции с единицей, относительно которых каждый элемент обратим. Очевидно, этим задается функтор $G: \mathcal{Bif}\mathcal{E}ns \rightarrow \mathcal{Bif}\mathcal{E}ns$, род структуры группы.

2. Пусть $\mathfrak{P}(M)$ есть множество всех подмножеств множества M . Обозначая через $G(M)$ множество всех подмножеств $\mathcal{D}$ множества $\mathfrak{P}(M)$, удовлетворяющих условиям

(а) $\emptyset \in \mathcal{D}$, $M \in \mathcal{D}$;

(б) если $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$, то $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{D}$;

(в) если $D_i \in \mathcal{D}$ для всех $i \in I$, то $\bigcup_{i \in I} D_i \in \mathcal{D}$,

получаем функтор $G: \mathcal{Bif}\mathcal{E}ns \rightarrow \mathcal{Bif}\mathcal{E}ns$, род структуры топологического пространства.

Если F — род структуры и $s \in F(M)$, то s называется *структурой рода F* на множестве M . Если $f: M \rightarrow N$ — морфизм в $\mathcal{Bif}\mathcal{E}ns$, т. е. биекция, то $t = F(f)(s)$ есть структура рода F на N , называемая *структурой рода F* , полученной перенесением структуры s на N посредством f . В этом случае мы говорим также, что f осуществляет изоморфизм между множеством M , наделенным структурой s , и множеством N , наделенным структурой t .

Мы будем говорить, что задан *род структуры с морфизмами* (F, σ) , если

(а) Задан род структуры $F: \mathcal{Bif}\mathcal{E}ns \rightarrow \mathcal{Bif}\mathcal{E}ns$.

(б) Для каждой четверки (M, s, N, t) , где $s \in F(M)$, $t \in F(N)$, задано множество $\sigma(M, s, N, t)$ отображений M в N , таких, что выполнены следующие условия:

1. Если $f \in \sigma(M, s, N, t)$ и $g \in \sigma(N, t, R, u)$, то $gf \in \sigma(M, s, R, u)$.

2. Если $f: M \rightarrow N$ осуществляет изоморфизм между множеством M , наделенным структурой s , и множеством N , наделенным структурой t , то $f \in \sigma(M, s, N, t)$ и $f^{-1} \in \sigma(N, t, M, s)$.

Очевидно, с каждым родом структуры с морфизмами (F, σ) можно следующим образом ассоциировать категорию $\mathcal{K}$:

(I) Объекты категории $\mathcal{K}$ — всевозможные пары (M, s) , где M — множество, а s — структура рассматриваемого рода на M .

(II) $\text{Hom}_{\mathcal{K}}((M, s), (N, t)) = \sigma(M, s, N, t)$.

(III) Композиция морфизмов есть обычная композиция отображений.

Очевидно, существует канонический функтор

$$C: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{E}ns,$$

стирающий рассматриваемую структуру.

Предположим, что задан род структуры с морфизмами (F, σ) , и пусть $\mathcal{E}$ — категория, а X — ее объект. Обозначим, как и выше, через $\mathcal{K}$ категорию, ассоциированную с (F, σ) , и через $C: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{E}ns$ канонический стирающий функтор.

Будем говорить, что на объекте X определена *структура рода* (F, σ) , если задан контравариантный функтор S , такой, что диаграмма категорий и функторов

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & & \\ \downarrow S & \searrow h_X & \\ & & \mathcal{E}ns \\ & \nearrow C & \\ \mathcal{K} & & \end{array}$$

коммутативна.

Пусть X и Y — объекты категории $\mathcal{E}$, наделенные структурой одинакового рода. Предположим, что рассматриваемые структуры определены соответственно функторами $S, T: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{K}$. При этих условиях функторный морфизм $\varphi: S \rightarrow T$ называется также *гоморфизмом объекта X , наделенного структурой S , в объект Y , наделенный структурой T* .

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ АБЕЛЕВЫХ КАТЕГОРИЙ

§ 1. Аддитивные категории

Категория $\mathcal{C}$ называется *аддитивной*, если выполнены следующие условия:

1. Для каждой пары объектов (A, B) в $\mathcal{C}$ существуют произведение $A \amalg B$ и сумма $A \sqcup B$.

2. Для каждой пары объектов (A, B) множество $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ наделено структурой абелевой группы, причем отображения

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C),$$

задающие композицию морфизмов, билинейны. (Там где это не может повлечь путаницы, мы будем обозначать нейтральный элемент группы $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ просто 0.)

3. В категории $\mathcal{C}$ имеется объект A , для которого $1_A = 0$.

Очевидно, каждая аддитивная категория удовлетворяет условию CAd1 , приведенному на стр. 48¹⁾.

Ясно также, что объекты A и B , для которых $1_A = 0$ и $1_B = 0$, канонически изоморфны²⁾. Один из объектов категории $\mathcal{C}$, удовлетворяющий условию 3, будем обозначать символом 0^3).

Предложение 5.1. Пусть A, B, C — тройка объектов аддитивной категории $\mathcal{C}$, а $i_A: A \rightarrow C$, $i_B: B \rightarrow C$ — морфизмы. Для того чтобы объект C вместе с морфизмами i_A, i_B был суммой се-

¹⁾ А именно, если принять за 0_{BA} нейтральный элемент группы $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

²⁾ А именно $0_{AB}0_{BA} = 0_{AA} = 1_A$ и $0_{BA}0_{AB} = 0_{BB} = 1_B$. Обратно, если $1_A = 0$ и в $\mathcal{C}$ существует изоморфизм $i: B \rightarrow A$, то $1_B = 0$. В самом деле, $1_A i 1_B = 0_{AA} i 1_B = 0_{AB} = 1_A i 0_{BB}$ и, значит, $1_B = 0_{BB}$, поскольку $1_A i$ — мономорфизм. Таким образом, объекты A , удовлетворяющие условию 3, образуют класс изоморфных объектов. Заметим, что все они — нулевые объекты категории $\mathcal{C}$ в смысле определения, приведенного на стр. 84. А именно группы $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$ и $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A)$ для всех объектов X из $\mathcal{C}$ — нулевые. В самом деле, если $\xi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$, то $\xi = \xi 1_A = \xi 0 = 0$, и аналогично проверяется, что $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) = \{0\}$. Отсюда легко следует, что для всех объектов X из $\mathcal{C}$ морфизмы $A \rightarrow X$ — мономорфизмы, а морфизмы $X \rightarrow A$ — эпиморфизмы.

³⁾ Для каждого объекта X из $\mathcal{C}$ морфизмы $A \rightarrow X$, где A пробегает всевозможные объекты из $\mathcal{C}$, удовлетворяющие условию 3, образуют класс эквивалентных мономорфизмов. В качестве подобъекта, представляющего этот класс, в дальнейшем выбирается $0 \rightarrow X$. Точно так же за факторобъект, представляющий класс эквивалентных эпиморфизмов $X \rightarrow A$, далее принимается $X \rightarrow 0$.

действия объектов (A, B) , необходимо и достаточно, чтобы существовали морфизмы $p_A: C \rightarrow A$, $p_B: C \rightarrow B$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$(I) \quad p_A i_A = 1_A, \quad p_B i_A = 0_{BA},$$

$$(II) \quad p_B i_B = 1_B, \quad p_A i_B = 0_{AB},$$

$$(III) \quad i_A p_A + i_B p_B = 1_C^1).$$

Доказательство. Необходимость. В силу определения суммы существуют морфизмы p_A и p_B , для которых коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_A} & C \xleftarrow{i_B} B \\ & \searrow p_A \downarrow \swarrow p_B & \\ & A & \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_A} & C \xleftarrow{i_B} B \\ & \searrow p_A \downarrow \swarrow p_B & \\ & B & \end{array}$$

а это равносильно условиям (I) и (II). Из определения суммы следует также, что отображение

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X),$$

относящее каждому морфизму $u: C \rightarrow X$ пару морфизмов $(u i_A, u i_B)$, биективно. В частности, при $X=C$ это отображение относит морфизму 1_C пару (i_A, i_B) . Поэтому достаточно показать, что та же пара соответствует и морфизму $i_A p_A + i_B p_B$. Но в силу уже доказанных соотношений (I) и (II) имеем

$$(i_A p_A + i_B p_B) i_A = i_A, \quad (i_A p_A + i_B p_B) i_B = i_B.$$

Достаточность. В силу условий (I) и (II) для любой пары морфизмов $u: A \rightarrow X$, $v: B \rightarrow X$ существует морфизм $\xi: C \rightarrow X$, а именно $\xi = u p_A + v p_B$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_A} & C \xleftarrow{i_B} B \\ & \searrow u \downarrow \swarrow v & \\ & X & \end{array}$$

¹⁾ Из этих соотношений легко следует, что если C вместе с морфизмами i_A, i_B есть сумма семейства объектов (A, B) , то C вместе с морфизмами p_A, p_B есть их произведение. Таким образом, в условии 1 определения аддитивной категории можно было не включать требования существования произведений $A \amalg B$ (или, дуально, требовать лишь существование $A \sqcap B$, но не требовать существования $A \sqcup B$). Вместе с тем из соотношений (I)–(II) видно, что i_A и i_B — мономорфизмы, а p_A и p_B — эпиморфизмы. Обозначения $A \amalg B$ и $A \sqcup B$ авторы часто заменяют далее для аддитивных категорий обозначением $A \oplus B$.

Если η морфизм $\xi': C \rightarrow X$ обладает таким свойством, т. е. $\xi' i_A = u$, $\xi' i_B = v$, то

$$\xi' i_A p_A + \xi' i_B p_B = u p_A + v p_B,$$

откуда в силу условия (III) $\xi' = \xi$.

Предложение 5.2. Если $\mathcal{C}$ — аддитивная категория, то для любой пары ее объектов (A, B) морфизм $h(A, B): A \sqcup B \rightarrow A \sqcap B$, построенный в предложении 2.6, есть изоморфизм.

Доказательство. Во избежание путаницы обозначим канонические проекции произведения $A \sqcap B$, в отличие от морфизмов p_A , p_B предложения 5.1, через p'_A , p'_B . Будем также вместо $h(A, B)$ писать для краткости h . Пусть g — морфизм $A \sqcup B$ в $A \sqcup B$, определенный равенством

$$g = i_A p'_A + i_B p'_B.$$

Покажем, что $gh = 1_{A \sqcup B}$ и $hg = 1_{A \sqcap B}$. Для этого достаточно доказать, что

$$ghi_A = i_A, \quad ghi_B = i_B$$

и

$$p_A hg = p_A, \quad p_B hg = p_B.$$

Но, согласно предложению 2.6,

$$ghi_A = (i_A p'_A + i_B p'_B) i_A = i_A,$$

и аналогично доказываются остальные три соотношения.

Определение. Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ — аддитивные категории. Функтор $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ называется *аддитивным*, если для любых объектов A, B категории $\mathcal{C}$ и морфизмов $u, v \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ выполняется равенство

$$F(u + v) = F(u) + F(v).$$

Функторы, действующие из аддитивной категории в аддитивную категорию, всюду, где не оговорено противное, будут предполагаться аддитивными.

Предложение 5.3. Если ковариантный функтор $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ аддитивен и объект C категории $\mathcal{C}$ вместе с морфизмами $i_A: A \rightarrow C$, $i_B: B \rightarrow C$ есть сумма семейства (A, B) , то объект $F(C)$ категории $\mathcal{C}'$ вместе с морфизмами $F(i_A): F(A) \rightarrow F(C)$, $F(i_B): F(B) \rightarrow F(C)$ есть сумма семейства $(F(A), F(B))$.

Доказательство. Пусть $p_A: C \rightarrow A$, $p_B: C \rightarrow B$ — канонические проекции (см. предложение 5.1). Тогда $F(i_A)$, $F(i_B)$, $F(p_A)$,

$F(p_B)$ в силу аддитивности F удовлетворяют условиям предложения 5.1¹⁾, откуда и следует справедливость нашего предложения.

§ 2. Ядро и коядро

Пусть $\mathcal{C}$ — аддитивная категория. Если (N, ν) — ядро пары морфизмов $u_1, u_2: A \rightarrow B$ в $\mathcal{C}$, то (N, ν) есть также ядро пары морфизмов $(u_1 - u_2, 0_{BA})$, и обратно. Аналогичные утверждения справедливы, очевидно, и для коядер. Таким образом, в случае аддитивных категорий при изучении понятий ядра и коядра можно ограничиться рассмотрением пар вида $(u, 0)$, чем и оправдывается следующее

Определение. Пусть $i: K \rightarrow A$ и $u: A \rightarrow B$ — морфизмы аддитивной категории $\mathcal{C}$. Пара (K, i) называется *ядром морфизма u* , если она служит ядром пары морфизмов $(u, 0_{BA})$, или, что равносильно этому, если для каждого объекта X из $\mathcal{C}$ точна последовательность абелевых групп и их гомоморфизмов

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, K) \xrightarrow{\alpha} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \xrightarrow{\beta} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B)^2, \quad (1)$$

где α, β — гомоморфизмы, определенные равенствами

$$\alpha(\xi) = i\xi, \quad \beta(\eta) = u\eta.$$

Очевидно, различные ядра морфизма u , если они существуют, определяют один и тот же подобъект объекта A ; мы будем обозначать его $\text{Ker } u$ ³⁾.

Дуально, если $u: A \rightarrow B$ и $j: B \rightarrow L$ — морфизмы аддитивной категории $\mathcal{C}$, то пара (L, j) называется *коядром морфизма u* , если она служит коядром пары морфизмов $(u, 0)$, или, что равносильно этому, если для каждого объекта X из $\mathcal{C}$ точна последовательность абелевых групп и их гомоморфизмов

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(L, X) \xrightarrow{\varphi} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X) \xrightarrow{\psi} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X), \quad (2)$$

где φ, ψ — гомоморфизмы, определенные равенствами

$$\varphi(\xi) = \xi j, \quad \psi(\eta) = \eta u.$$

¹⁾ Так как F — аддитивный функтор, то $F(0) + F(0) = F(0 + 0) = F(0)$, откуда $F(0) = 0$.

²⁾ Т. е. α инъективно и $\alpha(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, K)) = \beta^{-1}(0)$.

³⁾ Для обозначения того, что (K, i) есть (какое-то) ядро морфизма u , мы будем писать $i = \text{ker } u$. Нетрудно видеть (и далее это используется), что если $v: B \rightarrow C$ — мономорфизм, то $i = \text{ker } u$ тогда и только тогда, когда $i = \text{ker}(vi)$.

Очевидно, различные коядра морфизма u , если они существуют, определяют один и тот же факторобъект объекта B ; мы будем обозначать его $\text{Coker } u$ ¹⁾.

Пусть теперь морфизм $u: A \rightarrow B$ аддитивной категории $\mathcal{C}$ обладает хотя бы одним коядром, и $\text{Coker } u = (L, j)$. Тогда подобъект $\text{Ker } j$ объекта A , если он существует, будет называться *образом* морфизма u и обозначаться $\text{Im } u$. Дуально, если существуют $\text{Ker } u = (K, i)$ и $\text{Coker } i$, то факторобъект $\text{Coker } i$ объекта B (если он существует) будет называться *кообразом* морфизма u и обозначаться $\text{Coim } u$.

Определение. Пусть C, B — объекты произвольной категории $\mathcal{C}$. Объект B называется *прямым слагаемым* объекта C , если в $\mathcal{C}$ существуют объект A и морфизмы $i_A: A \rightarrow C$, $i_B: B \rightarrow C$, такие, что C вместе с морфизмами i_A, i_B есть сумма семейства объектов (A, B) .

Предложение 5.4. Пусть $p: C \rightarrow B$ — морфизм аддитивной категории $\mathcal{C}$, причем выполнены следующие условия:

- (а) p обладает хотя бы одним ядром;
 - (б) существует морфизм $j: B \rightarrow C$, такой, что $pj = 1_B$.
- Тогда B есть прямое слагаемое объекта C .

Доказательство. Пусть (A, i) — ядро морфизма p . Согласно предложению 5.1, достаточно доказать существование такого морфизма $q: C \rightarrow A$, что $qi = 1_A$, $jp + iq = 1_C$, $qj = 0$. Для этого рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & C \xrightarrow{p} B \\ & & \downarrow 1_C - jp \\ & & C \end{array}$$

Так как $p(1_C - jp) = 0$, то по определению ядра существует единственный морфизм $q: C \rightarrow A$, для которого $1_C - jp = iq$, т. е. $iq + jp = 1_C$. Остается показать, что $qi = 1_A$ и $qj = 0$. А поскольку i — мономорфизм, для этого достаточно показать, что $i(qi) = i$ и $i(qj) = 0$. Но действительно

$$i(qi) = (iq)i = (1_C - jp)i = i, \quad i(qj) = (iq)j = (1_C - jp)j = 0.$$

Часто будет полезно также дуальное предложение:

Пусть $i: A \rightarrow C$ — морфизм аддитивной категории $\mathcal{C}$, причем выполнены следующие условия:

- (а) i обладает хотя бы одним коядром;
 - (б) существует морфизм $p: C \rightarrow A$, такой, что $pi = 1_A$.
- Тогда A есть прямое слагаемое объекта C .

¹⁾ Для обозначения того, что (L, j) есть (какое-то) коядро морфизма u , мы будем пользоваться записью $j = \text{coker } u$.

Предложение 5.5. Следующие утверждения относительно морфизма $u: A \rightarrow B$ аддитивной категории равносильны:

- (а) u — мономорфизм;
- (б) $0 \rightarrow A$ есть ядро u , иными словами, $\text{Ker } u = 0$;
- (в) $1_A: A \rightarrow A$ есть кообраз u , иными словами, $\text{Coim } u = A$.

Доказательство. (а) $\Rightarrow$ (б). Если $\xi: X \rightarrow A$ — морфизм, для которого $u\xi = 0$, то из мономорфности u следует, что $\xi = 0$, так что ξ единственным образом пропускается через 0 . Тем самым $0 \rightarrow A$ есть ядро u .

(б) $\Rightarrow$ (в). Для каждого $\xi: A \rightarrow X$ имеем $\xi 0 = 0$ и $\xi = \xi 1_A$. Тем самым $1_A = \text{Coker}(0 \rightarrow A)$.

(б) $\Rightarrow$ (а). Если $u\xi = 0$, то $\xi = 0$ и тем самым u — мономорфизм.

(в) $\Rightarrow$ (б). Пусть $i: K \rightarrow A$ — морфизм, для которого $\text{Coker } i = 1_A$. Тогда $i = 1_A i = 0^1$.

§ 3. Каноническое разложение морфизма

Предложение 5.6. Пусть морфизм $u: A \rightarrow B$ аддитивной категории $\mathcal{C}$ обладает образом u и кообразом. Тогда существует единственный морфизм $\bar{u}: \text{Coim } u \rightarrow \text{Im } u$, такой, что u разлагается в композицию следующих морфизмов:

$$A \xrightarrow{\lambda} \text{Coim } u \xrightarrow{\bar{u}} \text{Im } u \xrightarrow{\mu} B,$$

где λ — канонический эпиморфизм и μ — канонический мономорфизм.

Доказательство. Единственность проверяется так: если $\bar{u}\lambda = \bar{u}'\lambda$, то из мономорфности μ следует, что $\bar{u}\lambda = \bar{u}'\lambda$, а тогда из эпиморфности λ вытекает, что $\bar{u} = \bar{u}'$. Для доказательства существования $\bar{u}$ рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \text{Ker } u & \xrightarrow{i} & A \xrightarrow{\lambda} \text{Coker } i = \text{Coim } u \\ & \downarrow u & \\ \text{Coker } u & \xleftarrow{j} & B \xleftarrow{\mu} \text{Ker } j = \text{Im } u \end{array}$$

Так как $ui = 0$, то существует морфизм $u': \text{Coim } u \rightarrow B$, для которого $u'\lambda = u$. Однако $ju' = 0$ (в самом деле, поскольку λ — эпиморфизм, достаточно доказать, что $(ju')\lambda = 0$; но это очевидно, поскольку $j(u'\lambda) = ju = 0$). Значит, существует $\bar{u}: \text{Coim } u \rightarrow \text{Im } u$, для которого $\bar{u}\lambda = u'$.

¹⁾ Здесь под (K, i) следовало бы понимать $\text{Ker } u$ (существование которого следует из предположения, что u обладает кообразом). Поскольку, как показано, $i = 0$, имеем тогда $i1_K = 0 = i0_{KK}$, и так как i — мономорфизм, то $1_K = 0_{KK}$, так что $K = 0$.

§ 4. Преабелевы категории

Определение. *Преабелевой категорией* будет называться аддитивная категория, в которой для каждого морфизма u существуют $\text{Ker } u$ и $\text{Coker } u$.

Отсюда непосредственно следует, что в преабелевой категории каждый морфизм обладает образом и кообразом.

Категория, дуальная к преабелевой категории, также преабелева.

Для изучения функториальных свойств ядер, коядер, образов и кообразов в преабелевой категории $\mathcal{C}$ введем новую категорию $\mathcal{C}_1$, определяемую следующим образом:

(I) Объекты категории $\mathcal{C}_1$ — всевозможные упорядоченные пары (A, B) объектов категории $\mathcal{C}$ вместе с каким-либо морфизмом $u: A \rightarrow B$, иными словами — диаграммы вида $A \xrightarrow{u} B$ в $\mathcal{C}$.

(II) Морфизмы диаграммы $A \xrightarrow{u} B$ в диаграмму $A_1 \xrightarrow{u_1} B_1$, по определению, — всевозможные пары морфизмов $\alpha: A \rightarrow A_1$, $\beta: B \rightarrow B_1$, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \end{array} \quad (3)$$

Определим функтор $\text{Ker}: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_1$ следующим образом. Каждой диаграмме $A \xrightarrow{u} B$ отнесем диаграмму $\text{Ker } u \xrightarrow{i} A$, где i — канонический мономорфизм. А каждому морфизму (α, β) диаграммы $A \xrightarrow{u} B$ в диаграмму $A_1 \xrightarrow{u_1} B_1$ отнесем морфизм $(\text{Ker } u \rightarrow \text{Ker } u_1, \alpha)$ диаграммы $\text{Ker } u \xrightarrow{i} A$ в диаграмму $\text{Ker } u_1 \xrightarrow{i_1} A_1$, где $\text{Ker } u \rightarrow \text{Ker } u_1$ — единственный морфизм, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker } u & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{u} & B \\ \downarrow & & \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ \text{Ker } u_1 & \xrightarrow{i_1} & A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \end{array}$$

Аналогично определим функторы Coker , Im и Coim категории $\mathcal{C}_1$ в себя.

Каноническое разложение морфизма в преабелевой категории также порождает функтор, определенный на категории $\mathcal{C}_1$, однако принимающий значения уже в более сложной категории $\mathcal{C}_2$, определяемой следующим образом:

(I) Объекты категории $\mathcal{C}_2$ — всевозможные диаграммы в $\mathcal{C}$ вида

$$A_1 \xrightarrow{u_1} A_2 \xrightarrow{u_2} A_3 \xrightarrow{u_3} A_4.$$

(II) Морфизмы диаграммы $A_1 \xrightarrow{u_1} A_2 \xrightarrow{u_2} A_3 \xrightarrow{u_3} A_4$ в диаграмму $B_1 \xrightarrow{v_1} B_2 \xrightarrow{v_2} B_3 \xrightarrow{v_3} B_4$, по определению, — всевозможные упорядоченные четверки $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ морфизмов $\alpha_i: A_i \rightarrow B_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \xrightarrow{u_1} & A_2 & \xrightarrow{u_2} & A_3 & \xrightarrow{u_3} & A_4 \\ \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow \\ B_1 & \xrightarrow{v_1} & B_2 & \xrightarrow{v_2} & B_3 & \xrightarrow{v_3} & B_4 \end{array}$$

Определим теперь функтор $F: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ следующим образом. Каждой диаграмме $A \xrightarrow{u} B$ отнесем диаграмму

$$A \xrightarrow{\lambda} \text{Coim } u \xrightarrow{\bar{u}} \text{Im } u \xrightarrow{\beta} B.$$

Если также $A_1 \xrightarrow{u_1} B_1$ — диаграмма в $\mathcal{C}_1$ и $\alpha: A \rightarrow A_1$, $\beta: B \rightarrow B_1$ таковы, что диаграмма (3) коммутативна, то существуют морфизмы $\alpha_1: \text{Coim } u \rightarrow \text{Coim } u_1$ и $\beta_1: \text{Im } u \rightarrow \text{Im } u_1$, для которых коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A \xrightarrow{\lambda} \text{Coim } u & & \text{Im } u \xrightarrow{\mu} B \\ \alpha \downarrow & \downarrow \alpha_1 & \text{и} \quad \downarrow \beta_1 \quad \downarrow \beta \\ A_1 \xrightarrow{\lambda_1} \text{Coim } u_1 & & \text{Im } u_1 \xrightarrow{\mu_1} B_1 \end{array}$$

и остается показать, что и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{Coim } u & \xrightarrow{\bar{u}} & \text{Im } u \\ \alpha_1 \downarrow & & \downarrow \beta_1 \\ \text{Coim } u_1 & \xrightarrow{\bar{u}_1} & \text{Im } u_1 \end{array}$$

коммутативна. Имеем

$$\begin{aligned} \mu_1 \bar{u}_1 \alpha_1 \lambda &= \mu_1 \bar{u}_1 \lambda_1 \alpha = u_1 \alpha, \\ \mu_1 \beta_1 \bar{u} \lambda &= \beta \mu \bar{u} \lambda = \beta u. \end{aligned}$$

Следовательно, $\mu_1 \bar{u}_1 \alpha_1 \lambda = \mu_1 \beta_1 \bar{u} \lambda$, откуда $\bar{u}_1 \alpha_1 = \beta_1 \bar{u}$, поскольку μ_1 — мономорфизм и λ — эпиморфизм.

Предложение 5.7. В предабелевой категории существуют расслоенные произведения и расслоенные суммы.

Доказательство. Пусть $\mathcal{C}$ — предабелева категория. Поскольку и дуальная категория предабелева, можно ограничиться доказательством существования расслоенных произведений. Пусть задана диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ & \downarrow f & \\ C & \xrightarrow{g} & A \end{array} \quad (4)$$

Пользуясь тем, что $\mathcal{C}$ — категория с суммами, рассмотрим $B \oplus C$ с каноническими проекциями $p_B: B \oplus C \rightarrow B$, $p_C: B \oplus C \rightarrow C$. Пусть μ — морфизм $B \oplus C$ в A , определенный равенством

$$\mu = f p_B - g p_C,$$

и (N, ν) — его ядро. Мы утверждаем, что объект N вместе с морфизмами $p_B \nu$, $p_C \nu$ есть расслоенное произведение, ассоциированное с диаграммой (4).

В самом деле, так как $\mu \nu = 0$, то $f(p_B \nu) = g(p_C \nu)$. С другой стороны, если $\xi: X \rightarrow B$ и $\eta: X \rightarrow C$ таковы, что $f\xi = g\eta$, то существует единственный морфизм $\zeta: X \rightarrow N$, для которого $p_B \nu \zeta = \xi$ и $p_C \nu \zeta = \eta$. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим морфизм $i_B \xi + i_C \eta: X \rightarrow B \oplus C$, где $i_B: B \rightarrow B \oplus C$, $i_C: C \rightarrow B \oplus C$ — канонические инъекции. Имеем $\mu(i_B \xi + i_C \eta) = (f p_B - g p_C)(i_B \xi + i_C \eta) = f\xi - g\eta = 0$. Поэтому существует единственный морфизм ζ , для которого $\nu \zeta = i_B \xi + i_C \eta$. А отсюда непосредственно следует, что $p_B \nu \zeta = \xi$, $p_C \nu \zeta = \eta$. Единственность вытекает из того, что если $p_B \nu \zeta' = \xi$ и $p_C \nu \zeta' = \eta$, то $\nu \zeta' = i_B \xi + i_C \eta$, откуда $\zeta' = \zeta$.

Примеры предабелевых категорий

1. Рассмотрим категорию $\mathcal{C}$, определенную следующим образом:

(I) объекты ее — всевозможные отделимые топологические абелевы группы;

(II) морфизмы ее — всевозможные непрерывные гомоморфизмы.

Очевидно, $\mathcal{C}$ — аддитивная категория. Кроме того, если $f: A \rightarrow B$ — морфизм категории $\mathcal{C}$, то $\text{Ker } f = f^{-1}(\{0\})$ и $\text{Coker } f = B/\overline{f(A)}^1$.

В этой категории существуют биморфизмы, не являющиеся изоморфизмами. Таковы, например, инъективные непрерывные гомоморфизмы $f: A \rightarrow B$, для которых $f(A) \neq B$, но $\overline{f(A)} = B$.

2. Пусть A — кольцо. Говорят, что на A задана *положительная фильтрация*, или что A — *фильтрованное кольцо*, если в A задана последовательность идеалов $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, удовлетворяющая следующим условиям:

(а) $A_0 = A$;

(б) $A_n \supset A_{n+1}$ для каждого $n \geq 0$;

(в) $A_n A_m \subset A_{n+m}$.

Например, степени всякого идеала t кольца A , очевидно, образуют положительную фильтрацию на A .

¹⁾ Здесь предполагается, что в $\mathcal{C}$ в качестве подобъектов и факторобъектов выбраны подгруппы и факторгруппы, наделенные групповой топологией, при которой канонические морфизмы непрерывны.

Предположим теперь, что на A задана фиксированная положительная фильтрация, определенная последовательностью идеалов $(A_i)_{i \geq 0}$. A -модуль M называют *фильтрованным модулем* относительно этого фильтрованного кольца A , если в M задана последовательность подмодулей $(M_i)_{i \geq 0}$, для которой выполнены следующие условия:

- (а) $M_0 = M$;
- (б) $M_n \supset M_{n+1}$ для всех $n \geq 0$;
- (в) $A_p M_q \subset M_{p+q}$.

Определим теперь категорию $\mathcal{F}$ следующим образом:

(I) Объекты ее — всевозможные фильтрованные модули относительно фиксированного фильтрованного кольца A .

(II) Пусть M и N — фильтрованные модули над A с фильтрациями, образованными соответственно последовательностями $(M_i)_{i \geq 0}$ и $(N_i)_{i \geq 0}$. Морфизмы M в N — всевозможные гомоморфизмы A -модуля M в A -модуль N , обладающие тем свойством, что $f(M_n) \subset N_n$ для всех $n \geq 0$.

Нетрудно проверить, что $\mathcal{F}$ — предабелева категория. В ней также существуют биморфизмы, не являющиеся изоморфизмами.

3. Категория ${}_{\Lambda}\mathcal{F}$ унитарных левых Λ -модулей (где Λ — кольцо с единицей) и их гомоморфизмов предабелева. В этой категории каждый биморфизм есть изоморфизм.

Охарактеризуем теперь строгие мономорфизмы и эпиморфизмы в предабелевых категориях.

Лемма 5.8. Пусть $f: M' \rightarrow M$ — морфизм предабелевой категории $\mathcal{F}$, $(\text{Ker } f, \lambda)$ — его ядро, $M' \amalg_M M'$ — расслоенное произведение, ассоциированное с диаграммой

$$\begin{array}{c} M' \\ \downarrow f \\ M' \xrightarrow{f} M \end{array}$$

и p_1, p_2 — его канонические проекции. Тогда $\text{Coker}(p_1 - p_2) = \text{Coim } f$.

Доказательство. Существует мономорфизм $\sigma_1: \text{Ker } f \rightarrow M' \amalg_M M'$, для которого $p_1 \sigma_1 = \lambda$, $p_2 \sigma_1 = 0$ ¹⁾. В самом деле, как мы знаем, существует канонический мономорфизм $\nu: M' \amalg_M M' \rightarrow M' \oplus M'$, такой, что пара $(M' \amalg_M M', \nu)$ служит ядром морфизма

¹⁾ В силу определения расслоенного произведения это сразу следует из того, что $f\lambda = f0$.

$f\pi_1 - f\pi_2$, где π_1 и π_2 — канонические проекции суммы $M' \oplus M'$. Пусть i_1 и i_2 — ее канонические инъекции. Так как тогда $(f\pi_1 - f\pi_2)i_1\lambda = 0$, то существует морфизм $\sigma_1: \text{Ker } f \rightarrow M' \prod_M M'$, для которого $\forall \sigma_1 = i_1\lambda$, откуда $p_1\sigma_1 = \lambda$, $p_2\sigma_1 = 0$. Поскольку $f(p_1 - p_2) = 0$, существует также морфизм $\alpha: M' \prod_M M' \rightarrow \text{Ker } f$, для которого $\lambda\alpha = p_1 - p_2$. Рассмотрим теперь диаграмму

$$\begin{array}{ccc} M' \prod_M M' & \xrightarrow{p_1 - p_2} & M' \xrightarrow{\mu} \text{Coker}(p_1 - p_2) \\ \sigma_1 \uparrow \downarrow \alpha & & \downarrow 1_{M'} \\ \text{Ker } f & \xrightarrow{\lambda} & M' \xrightarrow{\rho} \text{Coim } f = \text{Coker}(\text{Ker } f). \end{array}$$

Так как $\rho(p_1 - p_2) = \rho\lambda\alpha = 0$, то $\rho = \tau\mu$ для некоторого морфизма $\tau: \text{Coker}(p_1 - p_2) \rightarrow \text{Coim } f$. Далее, так как $\mu\lambda = \mu(p_1 - p_2)\sigma_1 = 0$, то существует морфизм $\tau_1: \text{Coim } f \rightarrow \text{Coker}(p_1 - p_2)$, такой, что $\tau_1\rho = \mu$. Отсюда сразу следует, что τ , τ_1 определяют эквивалентность между $\text{Coker}(p_1 - p_2)$ и $\text{Coim } f^1$.

Предложение 5.9. Пусть $f: M' \rightarrow M$ — эпиморфизм в предабелевой категории $\mathcal{C}$ и $M' \xrightarrow{f} \text{Coim } f \xrightarrow{\bar{f}} M$ — его каноническое разложение. Для того чтобы $\bar{f}$ был строгим эпиморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы $\bar{f}$ был изоморфизмом.

Доказательство. Если $\bar{f}$ — строгий эпиморфизм, то из соотношения $\text{Coim } f = \text{Coker}(p_1 - p_2)$ следует, что $\bar{f}$ — изоморфизм. Обратно, если $\bar{f}$ — изоморфизм, то то же соотношение влечет, что f — строгий эпиморфизм.

§ 5. Абелевы категории

Будем для каждого морфизма $u: A \rightarrow B$ предабелевой категории $\mathcal{C}$ обозначать через $\bar{u}$ морфизм, входящий в его каноническое разложение

$$A \rightarrow \text{Coim } u \xrightarrow{\bar{u}} \text{Im } u \rightarrow B.$$

Определение. Предабелева категория $\mathcal{C}$ называется абелевой категорией, если для каждого морфизма u из $\mathcal{C}$ морфизм $\bar{u}: \text{Coim } u \rightarrow \text{Im } u$ есть изоморфизм.

Предложение 5.10. Предабелева категория $\mathcal{C}$ является абелевой тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

¹⁾ А так как $\text{Coim } f$ и $\text{Coker}(p_1 - p_2)$ — факторобъекты одного и того же объекта M' , то, будучи эквивалентными, они просто совпадают.

(а) для каждого морфизма u из $\mathcal{C}$ морфизм $\bar{u}: \text{Coim } u \rightarrow \text{Im } u$ есть биморфизм;

(б) каждый биморфизм есть изоморфизм.

Доказательство. Если категория $\mathcal{C}$ абелева, то условие (а), очевидно, выполнено, а (б) следует из того, что если u — биморфизм, то $\bar{u} = u$ (см. предложение 5.5¹⁾). Обратное очевидно.

Второй принцип двойственности для абелевых категорий

Пусть $\mathcal{C}$ — абелева категория и A — ее объект. Обозначим через $\mathcal{P}(A)$ класс всех подобъектов, а через $\mathcal{Q}(A)$ — класс всех факторобъектов объекта A . В каждом из этих классов имеется естественное отношение частичного порядка (см. стр. 14—15). Рассмотрим функцию, относящую каждому подобъекту (A', i) объекта A факторобъект $(\text{Coker } i, j)$ объекта A , где j — канонический эпиморфизм $A \rightarrow \text{Coker } i$. Дуально, рассмотрим также функцию, относящую каждому факторобъекту (A'', k) объекта A подобъект $(\text{Ker } k, l)$ объекта A , где l — канонический мономорфизм $\text{Ker } k \rightarrow A$. Цель приводимых ниже предложений — показать, что эти две функции взаимно обратны. Отсюда, в частности, будет вытекать существование естественного взаимно однозначного соответствия между классами $\mathcal{P}(A)$ и $\mathcal{Q}(A)$; это соответствие обращает упомянутые отношения порядка.

Предложение 5.11. Пусть A — объект абелевой категории $\mathcal{C}$, (A', i) — его подобъект и (A'', j) — факторобъект, определяемый коядром морфизма i . Тогда $\text{Ker } j = (A', i)$.

Предложение 5.12. Пусть A — объект абелевой категории $\mathcal{C}$, (A'', j) — его факторобъект и (A', i) — подобъект, определяемый ядром морфизма j . Тогда $\text{Coker } i = (A'', j)$.

Очевидно, предложение 5.12 дуально предложению 5.11, так что, принимая во внимание, что категория, дуальная к абелевой, также абелева, достаточно привести

Доказательство предложения 5.11. По определению $\text{Ker}(\text{Coker } i) = \text{Im } i$. Пусть λ — канонический мономорфизм $\text{Im } i \rightarrow A$. Достаточно будет указать изоморфизм $\mu: A' \rightarrow \text{Im } i$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A' & & A \\ \mu \downarrow & \searrow i & \\ \text{Im } i & \xrightarrow{\lambda} & A \end{array}$$

¹⁾ И дуальное к нему.

Рассмотрим для этого каноническое разложение морфизма i

$$A' \xrightarrow{v} \text{Coim } i \xrightarrow{\bar{i}} \text{Im } i \xrightarrow{\lambda} A.$$

Так как i — мономорфизм, то $\text{Coim } i = A'$ и $v = 1_{A'}$. А поскольку категория $\mathcal{C}$ абелева, $\bar{i}$ есть изоморфизм, и предложение доказано ¹⁾.

Если A' — подобъект объекта A абелевой категории $\mathcal{C}$, то факторобъект объекта A , соответствующий A' при описанной выше биекции, будет обозначаться через A/A' . Если же A'' — факторобъект объекта A , то подобъект объекта A , соответствующий A'' при этой биекции, будет обозначаться через $A \setminus A''$ ²⁾.

§ 6. Точные функторы

Определение. Последовательность морфизмов

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$$

в абелевой категории $\mathcal{C}$ называется *точной*, если $\text{Im } u = \text{Ker } v$. Произвольная последовательность морфизмов, в которой каждые два соседних компонируемы, называется *точной*, если точны все ее подпоследовательности, образованные парами соседних морфизмов.

Непосредственно проверяется справедливость следующих предложений.

Предложение 5.13. Для точности последовательности

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого объекта X из $\mathcal{C}$ была точна порождаемая ею последовательность абелевых групп и их гомоморфизмов

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C).$$

Предложение 5.14. Для точности последовательности

$$C \xrightarrow{v} B \xrightarrow{u} A \longrightarrow 0$$

¹⁾ Пусть (A'_1, i_1) и (A'_2, i_2) — подобъекты объекта A , а (A''_1, j_1) и (A''_2, j_2) — соответствующие факторобъекты. Если $i_1 \leq i_2$, т. е. существует такой морфизм i , что $i_1 = i_2 i$, то $j_2 i_1 = j_2 i_2 i = 0$ и потому существует такой морфизм j , что $j_2 = j j_1$, т. е. $j_2 \leq j_1$. Таким образом, описанное соответствие между классами $\mathcal{P}(A)$ и $\mathcal{Q}(A)$ действительно обращает порядок.

²⁾ Из предложений 5.11—5.12 легко следует, что если $i: A' \rightarrow A$ — мономорфизм, а $j: A \rightarrow A''$ — эпиморфизм, то (A', i) служит ядром для j тогда и только тогда, когда (A'', j) служит коядром для i . Как будет видно дальше (в частности, при доказательстве „второй теоремы об изоморфизме“ и „3×3-леммы“), оказывается целесообразным и в этом случае, независимо от того, является ли (A', i) подобъектом, а (A'', j) факторобъектом объекта A , обозначать A'' через A/A' , а A' через $A \setminus A''$ (что авторы молчаливо и делают).

необходимо и достаточно, чтобы для любого объекта X из $\mathcal{C}$ была точна порождаемая ею последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, X)$$

абелевых групп и их гомоморфизмов.

Предложения 5.13 и 5.14 дуальны друг другу.

Предложение 5.15. Для точности последовательности

$$0 \rightarrow A' \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} A'' \rightarrow 0$$

необходимо и достаточно, чтобы (A', u) было ядром v , а (A'', v) — коядром u .

Определение. Пусть $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ — абелевы категории и $F: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ — аддитивный ковариантный функтор. Будем говорить, что F *точен слева* (соотв. *точен справа*), если для каждой точной последовательности

$$0 \rightarrow A' \xrightarrow{\alpha'} A \xrightarrow{\alpha''} A'' \rightarrow 0 \quad (\text{E})$$

из $\mathcal{C}_1$ *точна последовательность*

$$0 \rightarrow F(A') \xrightarrow{F(\alpha')} F(A) \xrightarrow{F(\alpha'')} F(A'')$$

(соотв. $F(A') \xrightarrow{F(\alpha')} F(A) \xrightarrow{F(\alpha'')} F(A'') \rightarrow 0$). Если для каждой точной последовательности (E) *точна последовательность*

$$0 \rightarrow F(A') \xrightarrow{F(\alpha')} F(A) \xrightarrow{F(\alpha'')} F(A'') \rightarrow 0,$$

то будем называть F *просто точным*.

Дуализацией получим понятия *точного слева*, *точного справа* и *точного контравариантного функтора*¹⁾.

Предложение 5.16. Для точности функтора $F: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ необходимо и достаточно, чтобы каждая точная последовательность морфизмов категории $\mathcal{C}_1$ переводилась им в точную последовательность морфизмов категории $\mathcal{C}_2$.

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Пусть

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$$

— точная последовательность морфизмов категории $\mathcal{C}_1$. Требуется доказать точность последовательности

$$F(A) \xrightarrow{F(u)} F(B) \xrightarrow{F(v)} F(C).$$

¹⁾ То есть такой функтор F *точен слева* (справа), если для каждой точной последовательности (E) *точна последовательность* $0 \rightarrow F(A'') \xrightarrow{F(\alpha'')} F(A) \xrightarrow{F(\alpha')} F(A') \xrightarrow{F(\alpha')} F(A')$ (соотв. $F(A'') \xrightarrow{F(\alpha'')} F(A) \xrightarrow{F(\alpha')} F(A') \rightarrow 0$).

Но последовательность

$$0 \rightarrow \operatorname{Im} u \xrightarrow{\lambda} B \xrightarrow{\mu} \operatorname{Coim} v \rightarrow 0,$$

очевидно, точна, а потому из точности функтора F следует, что и последовательность

$$0 \rightarrow F(\operatorname{Im} u) \xrightarrow{F(\lambda)} F(B) \xrightarrow{F(\mu)} F(\operatorname{Coim} v) \rightarrow 0 \quad (F)$$

точна. С другой стороны, $u = \lambda u'$, где u' — эпиморфизм, а $v = v' \mu$, где v' — мономорфизм. Так как F , будучи точным, преобразует мономорфизмы в мономорфизмы и эпиморфизмы в эпиморфизмы¹⁾, то заключаем, что $F(u) = F(\lambda) F(u')$, где $F(u')$ — эпиморфизм, а $F(v) = F(v') F(\mu)$, где $F(v')$ — мономорфизм. Отсюда вытекает, что $\operatorname{Im}(F(u)) = \operatorname{Im}(F(\lambda))$ и $\operatorname{Ker}(F(v)) = \operatorname{Ker}(F(\mu))$. Но в силу точности последовательности (F) $\operatorname{Im}(F(\lambda)) = \operatorname{Ker}(F(\mu))$. Следовательно, $\operatorname{Im}(F(u)) = \operatorname{Ker}(F(v))$.

Таким же способом можно доказать следующие утверждения:

Если функтор $F: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ точен слева, то он преобразует каждую точную последовательность вида

$$0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A''$$

в точную последовательность.

Если функтор $F: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ точен справа, то он преобразует каждую точную последовательность вида

$$A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$$

в точную последовательность.

Предложение 5.17. Пусть $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ — абелевы категории. Если функтор $G: \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_1$ сопряжен к функтору $F: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$, то G точен слева, а F точен справа.

Доказательство. Пусть

$$0 \rightarrow A' \xrightarrow{\alpha'} A \xrightarrow{\alpha''} A'' \rightarrow 0 \quad (E)$$

— произвольная точная последовательность в $\mathcal{C}_1$. Чтобы доказать, что F точен справа, нужно доказать точность последовательности

$$F(A') \xrightarrow{F(\alpha')} F(A) \xrightarrow{F(\alpha'')} F(A'') \rightarrow 0.$$

В силу предложения 5.14 для этого достаточно показать, что для всех объектов Y из $\mathcal{C}_2$ точна порождаемая ею последовательность

$$0 \rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(A''), Y) \rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(A), Y) \rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(A'), Y).$$

¹⁾ См. предложения 5.11–5.12.

Но точность последовательности (Е) влечет точность последовательности

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A'', G(Y)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A, G(Y)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A', G(Y)).$$

С другой стороны, поскольку функтор G сопряжен к F , имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A'', G(Y)) & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A, G(Y)) & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A', G(Y)) \\ & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\ 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(A''), Y) & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(A), Y) & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(A'), Y) \end{array}$$

где вертикальные стрелки — изоморфизмы. Значит, и нижняя строка диаграммы точна.

§ 7. Теоремы об изоморфизме в абелевых категориях

Из определения абелевой категории следует, в частности, что во всех абелевых категориях справедливо предложение, известное в теории модулей под названием „первой теоремы об изоморфизме“. Мы покажем, что в абелевых категориях справедливы и остальные две „теоремы об изоморфизме“ теории модулей.

Для доказательства второй теоремы об изоморфизме нам понадобятся следующие леммы и предложения.

Лемма 5.17. Пусть A_1 и A_2 — подобъекты объекта A с каноническими мономорфизмами $i_1: A_1 \rightarrow A$ и $i_2: A_2 \rightarrow A$, $i: A_1 \rightarrow A_2$ — мономорфизм, для которого $i_2 i = i_1$, и $p_1: A \rightarrow A/A_1$ — канонический эпиморфизм. Тогда последовательность

$$0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{i} A_2 \xrightarrow{\alpha} A/A_1,$$

где $\alpha = p_1 i_2$, точна ¹⁾.

Доказательство. Точность в члене A_1 очевидна, так что требует доказательства лишь точность в A_2 . Так как $\alpha i = 0$, то $\text{Im } i \subset \text{Ker } \alpha$. Покажем, что и обратно, $\text{Ker } \alpha \subset \text{Im } i$. Пусть $\lambda: \text{Ker } \alpha \rightarrow A_2$ — канонический мономорфизм. Так как $0 = \alpha \lambda = p_1(i_2 \lambda)$, то существует морфизм $\xi: \text{Ker } \alpha \rightarrow A_1$, такой, что $i_1 \xi = i_2 \lambda$. Но поскольку $i_2 i = i_1$, отсюда следует, что $i \xi = \lambda$, а потому $\text{Ker } \alpha \subset \text{Im } i$.

Лемма 5.18. Пусть B_1 и B_2 — факторобъекты объекта A с каноническими эпиморфизмами $p_1: B \rightarrow B_1$ и $p_2: B \rightarrow B_2$; $p: B_2 \rightarrow B_1$ — эпиморфизм, для которого $p p_2 = p_1$; $i_1: B \setminus B_1 \rightarrow B$ — канонический

¹⁾ Утверждение леммы и доказательство сохраняют силу для любых мономорфизмов $i_1: A_1 \rightarrow A$, $i_2: A_2 \rightarrow A$ (связанных соотношением $i_2 i = i_1$) и любого коядра $(A/A_1, p_1)$ морфизма i_1 (по поводу символа A/A_1 см. примечание ²⁾ на стр. 108). Аналогичное верно и для последующих утверждений и доказательств.

мономорфизм. Тогда последовательность

$$0 \leftarrow B_1 \xleftarrow{p} B_2 \xleftarrow{\beta} B \setminus B_1,$$

где $\beta = p_2 i_1$, точна.

Лемма 5.18 дуальна к лемме 5.17 и потому не нуждается в особом доказательстве.

Предложение 5.19. Пусть $A_1, A_2, A, i_1, i_2, i, p_1, p_2$, а те же, что в лемме 5.17, и j — единственный морфизм, при котором коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & \xrightarrow{i_1} & A & \xrightarrow{p_1} & A/A_1 \\ i_1 \downarrow & & \downarrow 1_A & & \downarrow j \\ A_2 & \xrightarrow{i_2} & A & \xrightarrow{p_2} & A/A_2 \end{array}$$

Тогда последовательность

$$0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{i} A_2 \xrightarrow{a} A/A_1 \xrightarrow{j} A/A_2 \rightarrow 0$$

точна.

Доказательство. Точность в A_1 и A_2 установлена в лемме 5.17, точность же в A/A_1 и A/A_2 следует из леммы 5.18, если положить в ней $B_1 = A/A_2$, $B_2 = A/A_1$, $B = A$ и соответственно изменить обозначения канонических морфизмов.

Следствие 5.20 (вторая теорема об изоморфизме). Пусть A_1, A_2, A, j те же, что в предложении 5.19, и p — единственный морфизм, при котором коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & \xrightarrow{i} & A_2 & \xrightarrow{a} & A_2/A_1 \\ \downarrow 1_{A_1} & & \downarrow i_2 & & \downarrow p \\ A_1 & \xrightarrow{i_1} & A & \xrightarrow{p_1} & A/A_1 \end{array}$$

Тогда последовательность

$$0 \rightarrow A_2/A_1 \xrightarrow{p} A/A_1 \xrightarrow{j} A/A_2 \rightarrow 0$$

точна ¹⁾.

¹⁾ Поскольку подобъекты определены с помощью аксиомы выбора, из того, что (A_1, i_1) и (A_2, i_2) — подобъекты объекта A , не следует вообще, что (A_1, i) есть подобъект объекта A . (Правда, во многих конкретных категориях одновременный выбор подобъектов всех объектов, обладающий таким свойством, возможен — например, выбор в качестве подобъектов в категории $\mathcal{U}^A$ подмножеств с их тождественными вложениями. Но, во-первых, не ясно, возможен ли такой выбор в любой, хотя бы и абелевой, категории, и, во-вторых, даже в упомянутых конкретных категориях аналогичным свойством не обладает естественный выбор факторобъектов.) Таким образом, символу A_2/A_1 приходится приписывать здесь обобщенный смысл, о котором говорилось в примечании ²⁾ на стр. 108. А при последующем применении „второй теоремы об изоморфизме“ (например, в доказательстве „3 × 3-леммы“) отбрасывается

Доказательство. Согласно предложению 5.19, $\text{Ker } j = \text{Im } \alpha$. С другой стороны, поскольку рассматриваемая категория абелева, $\text{Im } \alpha$ изоморфен $\text{Coim } \alpha$. Но по определению $\text{Coim } \alpha = \text{Coker } (\text{Ker } \alpha)$. Так как по предложению 5.19 $\text{Ker } \alpha = i$, то $\text{Coker } i = A_2/A_1$, и следствие доказано ¹⁾.

Следствие 5.21 (дуальное ко второй теореме об изоморфизме). Пусть $B_1, B_2, B, \rho_1, \rho_2, \rho$ те же, что в лемме 5.18. Тогда последовательность

$$0 \leftarrow B_2 \setminus B_1 \leftarrow B \setminus B_1 \leftarrow B \setminus B_2 \leftarrow 0$$

с очевидным образом определенными морфизмами точна.

В качестве применения второй теоремы об изоморфизме мы докажем так называемую „3×3-лемму“, которая будет использована в теории производных функторов. Сперва докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 5.22. Если последовательности

$$0 \rightarrow B \xrightarrow{\beta} A \xrightarrow{\beta'} B',$$

$$0 \rightarrow C \xrightarrow{\gamma} A \xrightarrow{\gamma'} C'$$

в абелевой категории $\mathcal{C}$ точны и $\gamma'\beta$ — мономорфизм, то и $\beta'\gamma$ — мономорфизм.

Лемма 5.23. Если последовательности

$$B \xrightarrow{\beta} A \xrightarrow{\beta'} B' \rightarrow 0,$$

$$C \xrightarrow{\gamma} A \xrightarrow{\gamma'} C' \rightarrow 0$$

в абелевой категории $\mathcal{C}$ точны и $\gamma'\beta$ — эпиморфизм, то и $\beta'\gamma$ — эпиморфизм.

Поскольку лемма 5.23 дуальна лемме 5.22, приведем лишь

Доказательство леммы 5.22. Очевидно, лемма 5.22 справедлива в категории $\mathcal{A}$ абелевых групп. Но это влечет ее справедливость во всякой абелевой категории $\mathcal{C}$, поскольку для

и предположение, что мономорфизмы (A_1, i_1) и (A_2, i_2) — подобъекты. Доказательство, приведенное в следующем примечании, от этого предположения совершенно не зависит.

¹⁾ Уже отсутствие упоминаний о морфизме ρ свидетельствует, что это рассуждение не доказывает следствия 5.20. Приведем доказательство. Точность указанной последовательности в члене A/A_2 уже установлена в предложении 5.19. Согласно этому же предположению, $\text{Ker } j = \text{Im } \alpha$. Но так как $\rho q = \rho_1 i_2 = \alpha$ и q — эпиморфизм, то $\text{Im } \alpha = \text{Im } \rho$. Тем самым $\text{Ker } j = \text{Im } \rho$, т. е. последовательность точна в члене A/A_1 . Наконец, так как, снова по предположению 5.19, $\text{Ker } \alpha = \text{Im } i$, то $(A_2/A_1, q) \approx \text{Coker } i = \text{Coker } (\text{Im } i) = \text{Coker } (\text{Ker } \alpha) = \text{Coim } \alpha$, так что ρ — мономорфизм, чем доказана точность последовательности в члене A_2/A_1 .

любого объекта X из $\mathcal{C}$ условиям леммы удовлетворяют последовательности

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B'),$$

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C')$$

в $\mathcal{A}$, порожденные последовательностями леммы.

Следствие 5.24. Если последовательности

$$0 \rightarrow B \xrightarrow{\beta} A \xrightarrow{\beta'} B' \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow C \xrightarrow{\gamma} A \xrightarrow{\gamma'} C' \rightarrow 0$$

в абелевой категории $\mathcal{C}$ точны и $\gamma'\beta$ — изоморфизм, то и $\beta'\gamma$ — изоморфизм.

Предложение 5.25 („3 $\times$ 3-лемма“). Если диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \rightarrow & A_1 & \xrightarrow{\lambda} & A & \xrightarrow{\mu} & A_2 \rightarrow 0 \\ & \chi_1 \downarrow & & \chi \downarrow & & \chi_2 \downarrow & \\ 0 \rightarrow & B_1 & \xrightarrow{\eta} & B & \xrightarrow{\zeta} & B_2 \rightarrow 0 \\ & \rho_1 \downarrow & & \rho \downarrow & & \rho_2 \downarrow & \\ 0 \rightarrow & C_1 & \xrightarrow{\alpha} & C & \xrightarrow{\beta} & C_2 \rightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & 0 & & 0 & & 0 & \end{array}$$

в абелевой категории $\mathcal{C}$ коммутативна, а все три ее столбца и последние две строки точны, то и первая строка точна.

Доказательство. Точность в A_1 следует из того, что $\eta\chi_1$ — мономорфизм и $\eta\chi_1 = \chi\lambda$, так что λ — мономорфизм. Пусть $(N, \omega) = \text{Coker } \lambda$. Требуется доказать существование изоморфизма $\theta: N \rightarrow A_2$, для которого $\theta\omega = \mu$.

Применяя вторую теорему об изоморфизме к объектам A_1, B_1, B и мономорфизмам $\chi_1: A_1 \rightarrow B_1, \eta: B_1 \rightarrow B, \eta\chi_1: A_1 \rightarrow B$, получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow C_1 \xrightarrow{n_1} B/A_1 \xrightarrow{m_1} B_2 \rightarrow 0,$$

где n_1, m_1 удовлетворяют условиям $n_1\rho_1 = \tau\eta, m_1\tau = \zeta$, где $\tau: B \rightarrow B/A_1$ — канонический эпиморфизм. А применяя ту же теорему к объектам A_1, A, B и мономорфизмам $\lambda: A_1 \rightarrow A, \chi: A \rightarrow B$,

$\eta_1: A_1 \rightarrow B$, получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{n_1} B/A_1 \xrightarrow{m_1} C \rightarrow 0,$$

где n_1, m_1 удовлетворяют условиям $n_1\omega = \tau\chi$, $m_1\tau = \rho$.

С другой стороны, применив теорему, дуальную ко второй теореме об изоморфизме, к объектам $B/A_1, C, C_2$ и эпиморфизмам $m_2: B/A_1 \rightarrow C, \beta: C \rightarrow C_2, \beta m_2: B/A_1 \rightarrow C_2$, получим точную последовательность

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{n_2} R \xrightarrow{m_2} C_1 \rightarrow 0,$$

где $(R, \sigma) = \text{Ker}(\beta m_2)$, $\sigma n_2 = n_1$, $\sigma m_2 = m_1\sigma$. А применив ту же дуальную теорему к объектам $B/A_1, B_2, C_2$ и эпиморфизмам $m_1: B/A_1 \rightarrow B_2, \rho_2: B_2 \rightarrow C_2, \rho_2 m_1 = \beta m_2: B/A_1 \rightarrow C_2$ ¹⁾, получим точную последовательность

$$0 \rightarrow C_1 \xrightarrow{n_3} R \xrightarrow{m_3} A_2 \rightarrow 0$$

с условиями $\sigma n_3 = n_2$, $\chi_2 m_3 = m_1\sigma$.

Мы утверждаем, что $m_3 n_3 = 1_{C_1}$. В самом деле, с одной стороны, $\sigma m_3 n_3 = m_2 \sigma n_3 = m_2 n_1$, а с другой, $m_2 n_1 \rho_1 = m_2 \tau \eta = \rho \eta = \alpha \rho_1$, откуда $m_2 n_1 = \alpha$. Поэтому $\sigma m_3 n_3 = \alpha$ и, следовательно, $m_3 n_3 = 1_{C_1}$.

Мы получили возможность применить следствие 5.24 и приходим к выводу, что $\theta = m_4 n_3: N \rightarrow A_2$ есть изоморфизм. С другой стороны, $\chi_2 \theta \omega = \chi_2 m_4 n_3 \omega = m_1 \sigma n_3 \omega = m_1 n_2 \omega = m_1 \tau \chi = \zeta \chi = \chi_2 \mu$, откуда $\theta \omega = \mu$, чем доказательство и завершается²⁾.

¹⁾ Равенство $\rho_2 m_1 = \beta m_2$ следует из того, что $\rho_2 m_1 \tau = \rho_2 \zeta = \beta \rho = \beta m_2 \tau$, а τ — эпиморфизм.

²⁾ Вот более короткое доказательство, основанное на двух простых диаграммных леммах теории абелевых категорий (полезных и в других случаях), доказательство которых предоставляется в качестве упражнения читателю.

Лемма 1. Пусть

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightarrow & A' & \rightarrow & A & \rightarrow & A'' & \rightarrow & 0 \\ & & \alpha' \downarrow & & \alpha \downarrow & & \alpha'' \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & B' & \rightarrow & B & \rightarrow & B'' & \rightarrow & 0 \end{array}$$

— коммутативная диаграмма с точными строками. Ее левый квадрат декартов (т. е. $A' = A \sqcap_B B'$, см. примечание на стр. 42) тогда и только тогда, когда α'' — мономорфизм; а правый — дуально — кодекартов тогда и только тогда, когда α' — эпиморфизм.

Лемма 2. Если в декартовом квадрате

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{\lambda} & A \\ \chi_1 \downarrow & & \downarrow \chi \\ B_1 & \xrightarrow{\eta} & B \end{array}$$

η — мономорфизм, то $\lambda = \ker(\zeta\chi)$, где $\zeta = \text{coker } \eta$.

Образы и прообразы

Пусть A — объект абелевой категории $\mathcal{C}$. Обозначим, как и выше, через $\mathcal{P}(A)$ класс всех подобъектов, а через $\mathcal{Q}(A)$ — класс всех факторобъектов объекта A . Согласно второму принципу двойственности (для абелевых категорий), существует биекция $\varphi_A: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{Q}(A)$, относящая каждому подобъекту (A', i) объекта A факторобъект $(A'', j) = \text{Coker } i$.

Пусть теперь $u: A \rightarrow B$ — морфизм из $\mathcal{C}$. Мы покажем, что он естественно порождает отображения

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(A) &\rightarrow \mathcal{P}(B), \\ \mathcal{Q}(A) &\rightarrow \mathcal{Q}(B), \\ \mathcal{P}(B) &\rightarrow \mathcal{P}(A), \\ \mathcal{Q}(B) &\rightarrow \mathcal{Q}(A);\end{aligned}$$

первые два из них мы будем несколько вольно (следуя традиции) обозначать через u , а вторые два — через u^{-1} . Эти отображения определяются следующим образом.

Пусть (A', i) — подобъект объекта A . Тогда по определению $u(A') = \text{Im}(ui)$. При этом существует морфизм $u': A' \rightarrow u(A')$, равный композиции

$$A' \rightarrow \text{Coim}(ui) \rightarrow \text{Im}(ui).$$

Пусть (A'', j) — факторобъект объекта A и (A', i) — подобъект объекта A , соответствующий (A'', j) при биекции φ_A , так что $i = \text{Ker } j$. Тогда по определению полагаем $u(A'') = \text{Coker}(ui)$. Очевидно, существует морфизм $u'': A'' \rightarrow u(A'')$, при котором диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ i \downarrow & & \downarrow \\ A'' & \xrightarrow{u''} & u(A'') \end{array}$$

коммутативна.

Отображения u^{-1} получаются дуализацией. Их прямые определения таковы:

Пусть (B'', j) — факторобъект объекта B . Тогда по определению $u^{-1}(B'') = \text{Coim}(ju)$. Пусть, далее, (B', i) — подобъект объекта B и (B'', j) — факторобъект объекта B , соответствующий (B', i) при биекции φ_B , так что $j = \text{Coker } i$. Тогда по определению полагаем

Доказательство 3×3 -леммы. Так как первые два столбца диаграммы предложения 5.25 точны, а α — мономорфизм, то по лемме 1 левый верхний квадрат декартов. Тогда по лемме 2, в силу точности средней строки, $\lambda = \text{ker}(\xi\chi) = \text{ker}(\chi_2\mu)$ и, значит, $\lambda = \text{ker } \mu$, поскольку χ_2 — мономорфизм. С другой стороны, так как последние две строки точны, а ρ_1 — эпиморфизм, то по лемме 1 правый нижний квадрат кодекартов. А тогда по той же лемме, примененной к правой половине диаграммы, μ — эпиморфизм, и тем самым первая строка точна.

$u^{-1}(B') = \text{Ker}(ju)$. Существуют морфизмы $u^{-1}(B') \rightarrow B'$, $u^{-1}(B'') \rightarrow B''$, для которых диаграмма

$$\begin{array}{ccc} u^{-1}(B') & \rightarrow & B' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{u} & B \\ \downarrow & & \downarrow j \\ u^{-1}(B'') & \rightarrow & B'' \end{array}$$

коммутативна.

Выше было замечено, что от определения отображений u к определению отображений u^{-1} и обратно можно перейти с помощью общего принципа двойственности. Мы собираемся теперь показать, что от одного из отображений u к другому и аналогично от одного из отображений u^{-1} к другому можно перейти с помощью второго принципа двойственности для абелевых категорий. Более точно, коммутативны следующие диаграммы классов и отображений:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Q}(A) & \xrightarrow{u} & \mathcal{Q}(B) \\ \uparrow \varphi_A & & \uparrow \varphi_B \\ \mathcal{P}(A) & \xrightarrow{u} & \mathcal{P}(B) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{Q}(B) & \xrightarrow{u^{-1}} & \mathcal{Q}(A) \\ \uparrow \varphi_B & & \uparrow \varphi_A \\ \mathcal{P}(B) & \xrightarrow{u^{-1}} & \mathcal{P}(A) \end{array}$$

Для проверки коммутативности первой диаграммы рассмотрим подобъект (A', i) объекта A ; u относит ему подобъект $\text{Im}(ui)$ объекта B , а φ_B переводит этот подобъект в факторобъект $\text{Coker}(\text{Im}(ui))$. С другой стороны, φ_A переводит подобъект (A', i) в $\text{Coker } i$, а u относит последнему $\text{Coker}(ui)$. Таким образом, требуется показать, что $\text{Coker}(\text{Im}(ui)) = \text{Coker}(ui)$. Но действительно,

$$\text{Coker}(\text{Im}(ui)) = \text{Coker}(\text{Ker}(\text{Coker}(ui))) = \text{Coker}(ui).$$

Коммутативность второй диаграммы вытекает подобным же образом из соотношения

$$\text{Ker}(\text{Coim}(ju)) = \text{Ker}(ju).$$

Эти замечания позволяют сводить изучение четырех описанных выше отображений к изучению какого-нибудь одного из них.

Предложение 5.26. Пусть (A', i) и (A'', j) — подобъект и факторобъект объекта A , а (B', k) и (B'', l) — подобъект и факторобъект объекта B . Тогда для любого морфизма $u: A \rightarrow B$ справедливы формулы

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} \quad u^{-1}(u(A')) \supseteq A'; & \text{(III)} \quad u(u^{-1}(B'')) \supseteq B''; \\ \text{(II)} \quad u^{-1}(u(A'')) \subseteq A''; & \text{(IV)} \quad u(u^{-1}(B')) \subseteq B'. \end{array}$$

Доказательство. Покажем прежде всего, что достаточно доказать одно из этих соотношений, например (I). В самом деле, (I) влечет (III) по двойственности. Далее, (II) получается из (I) путем следующего рассуждения: пусть A' — подобъект объекта A , такой, что $\varphi_A(A') = A''$; из соотношения (I) следует, что $\varphi_A(u^{-1}(u(A))) \subseteq \subseteq \varphi_A(A') = A''$; но $\varphi_A(u^{-1}(u(A'))) = u^{-1}(u(\varphi_A(A'))) = u^{-1}(u(A''))$. Наконец, (IV) аналогичным образом следует из (III).

Переходя к доказательству соотношения (I), рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} A' & \xrightarrow{u'} & u(A') & & \\ i \downarrow & & \downarrow \lambda & & \\ u^{-1}(u(A')) = \text{Ker}(\mu i) & \rightarrow & A & \xrightarrow{u} & B \\ & & & & \downarrow \mu \\ & & & & \text{Coker } \lambda \end{array}$$

Из нее видно, что $\mu i = \mu \lambda u' = 0$, откуда следует, что i пропускается через $u^{-1}(u(A'))$, т. е. $A' \subseteq u^{-1}(u(A'))$.

Лемма 5.27. Для каждого подобъекта (A', i) объекта A морфизм u' : $A' \rightarrow u(A')$ есть эпиморфизм.

Доказательство. По определению морфизм u' равен композиции морфизмов

$$A' \rightarrow \text{Coim}(\mu i) \xrightarrow{\overline{\mu i}} \text{Im}(\mu i),$$

и так как первый из них является эпиморфизмом, а второй — изоморфизмом, то u' — эпиморфизм.

Предложение 5.28. Пусть (A', i) и (A'', j) — подобъект и факторобъект объекта A , а (C', k) и (C'', l) — подобъект и факторобъект объекта C . Тогда для любых морфизмов $u: A \rightarrow B$ и $v: B \rightarrow C$ справедливы следующие соотношения транзитивности:

$$(vu)(A') = v(u(A')); \quad (vu)^{-1}(C'') = u^{-1}(v^{-1}(C'')); \quad (vu)^{-1}(C') = u^{-1}(v^{-1}(C')).$$

Доказательство. Как и в случае предложения 5.26, достаточно проверить справедливость первого из этих соотношений, поскольку остальные получаются из него с помощью принципов двойственности. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} A' & \xrightarrow{u'} & u(A') & & \\ i \downarrow & & \downarrow i' & & \\ A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C \end{array}$$

По определению $(vi)(A') = \text{Im}(vui)$, откуда в силу коммутативности диаграммы получаем

$$(vi)(A') = \text{Im}(vi'u') = \text{Im}((vi')u').$$

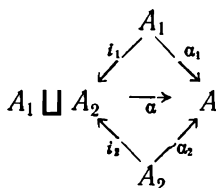
Но, согласно лемме 5.27, u' — эпиморфизм. Следовательно, $(vi)(A') = \text{Im}(vu') = v(u(A'))$.

Для формулирования и доказательства третьей теоремы об изоморфизме для абелевых категорий нам потребуется ввести некоторые новые понятия.

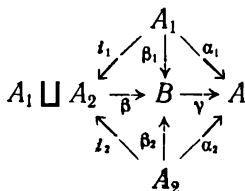
Пусть A — произвольный объект абелевой категории $\mathcal{C}$, а $\mathcal{P}(A)$ и $\mathcal{Q}(A)$ — классы всех его подобъектов и факторобъектов, наделенные естественными отношениями частичного порядка.

Предложение 5.29. *Для любых двух подобъектов A_1, A_2 объекта A в $\mathcal{P}(A)$ существуют $\sup(A_1, A_2)$ и $\inf(A_1, A_2)$ в смысле отношения порядка, имеющегося в $\mathcal{P}(A)$.*

Доказательство. Пусть $\alpha_1: A_1 \rightarrow A$, $\alpha_2: A_2 \rightarrow A$ — канонические мономорфизмы, $(A_1 \sqcup A_2, i_1, i_2)$ — сумма подобъектов A_1, A_2 и α — морфизм, для которого коммутативна диаграмма



Мы утверждаем, что $\text{Im } \alpha = \sup(A_1, A_2)$. Прежде всего ясно, что $\text{Im } \alpha \supset A_1$ и $\text{Im } \alpha \supset A_2$. Пусть теперь (B, γ) — подобъект объекта A , для которого $A_1 \subset B$ и $A_2 \subset B$. Нужно показать, что $\text{Im } \alpha \subset B$. Пусть $\beta_1: A_1 \rightarrow B$ и $\beta_2: A_2 \rightarrow B$ — мономорфизмы, для которых $\alpha_1 = \gamma\beta_1$ и $\alpha_2 = \gamma\beta_2$. Существует морфизм $\beta: A_1 \sqcup A_2 \rightarrow B$, для которого диаграмма



коммутативна, так что $\gamma\beta = \alpha$. Но так как γ — мономорфизм, то отсюда следует, что $\text{Ker } \beta = \text{Ker } \alpha$ и, значит, $\text{Coim } \beta = \text{Coim } \alpha$. Пусть $\bar{\alpha}: \text{Coim } \alpha \rightarrow \text{Im } \alpha$ и $\bar{\beta}: \text{Coim } \beta \rightarrow \text{Im } \beta$ — изоморфизмы, входящие в канонические разложения морфизмов α и β . Тогда диа-

грамма

$$\begin{array}{ccccc} \text{Coim } \alpha = \text{Coim } \beta & \xrightarrow{\beta} & \text{Im } \beta & \rightarrow & B \xrightarrow{\gamma} A \\ & \nwarrow \alpha^{-1} & & \nearrow & \\ & & \text{Im } \alpha & & \end{array}$$

коммутативна и, следовательно, $\text{Im } \alpha \subset B$.

Пусть теперь $\rho_1: A \rightarrow A/A_1$, $\rho_2: A \rightarrow A/A_2$ — канонические эпиморфизмы, $((A/A_1) \amalg (A/A_2), p_1, p_2)$ — произведение факторобъектов A/A_1 , A/A_2 и p — морфизм, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & A/A_1 & \\ \rho_1 \nearrow & & \nwarrow \rho_1 \\ A & \xrightarrow{p} & (A/A_1) \amalg (A/A_2) \\ \rho_2 \searrow & & \nearrow \rho_2 \\ & A/A_2 & \end{array}$$

Мы утверждаем, что $\text{Ker } p = \inf(A_1, A_2)$. Очевидно, $\text{Ker } p \subset A_1$ и $\text{Ker } p \subset A_2$. Пусть $B \subset A_1$, $B \subset A_2$ и $\beta: B \rightarrow A$ — канонический мономорфизм. Тогда, очевидно, $p\beta = 0$ ¹⁾ и тем самым $B \subset \text{Ker } p$.

Обозначения. Мы будем обозначать $\sup(A_1, A_2)$ через $A_1 \cup A_2$ и $\inf(A_1, A_2)$ через $A_1 \cap A_2$.

Замечания. 1. Для класса $\mathcal{Q}(A)$ справедливо предложение, дуальное предложению 5.29.

2. При применении первого принципа двойственности (справедливого для любых категорий) отношения частичного порядка в $\mathcal{P}(A)$ и $\mathcal{Q}(A)$ сохраняются. При применении же второго принципа двойственности (установленного лишь для абелевых категорий) эти отношения обращаются.

Предложение 5.30. Для последовательности морфизмов

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$$

в абелевой категории $\mathcal{C}$ справедливы следующие соотношения:

- (I) $\text{Im } u \cap \text{Ker } v = u(\text{Ker } (vu))$;
- (II) $\text{Im } u \cup \text{Ker } v = v^{-1}(\text{Im } (vu))$;
- (III) $\text{Coim } v \cap \text{Coker } u = v^{-1}(\text{Coker } (vu))$;
- (IV) $\text{Coim } v \cup \text{Coker } u = u(\text{Coim } (vu))$.

¹⁾ Действительно, обозначая через $i_1: A_1 \rightarrow A$, $i_2: A_2 \rightarrow A$, $\beta_1: B \rightarrow A_1$, $\beta_2: B \rightarrow A_2$ канонические мономорфизмы, имеем $p_1 p \beta = \rho_1 i_1 \beta_1 = 0$ и $p_2 p \beta = \rho_2 i_2 \beta_2 = 0$.

Доказательство. Благодаря принципам двойственности, очевидно, достаточно доказать одно из этих соотношений. Мы докажем (II). Предположим сначала, что (A, u) — подобъект, а (C, v) — факторобъект объекта B . В этом случае нужно доказать формулу $A \cup \text{Ker } v = v^{-1}(v(A))$. Для этого заметим прежде всего, что, согласно предложению 5.26, $v^{-1}(v(A)) \supset A$. Очевидно также, что $v^{-1}(v(A)) \supset v^{-1}(0) = \text{Ker } v$, так что $v^{-1}(v(A)) \supset A \cup \text{Ker } v$. Чтобы получить отсюда требуемое соотношение, достаточно показать, что если D — подобъект объекта B , удовлетворяющий условиям $D \supset A$, $D \supset \text{Ker } v$ и $v^{-1}(v(A)) \supset D$, то $D = v^{-1}(v(A))$. Для этого мы докажем, что $v(D) = v(v^{-1}(v(A)))$. Но в силу леммы 5.26 $v(v^{-1}(v(A))) = v(A)$. Что касается $v(D)$, то заметим, что $D \supset A$ влечет $v(D) \supset v(A)$. А так как, с другой стороны, $v^{-1}(v(A)) \supset D$ влечет $v(A) = v(v^{-1}(v(A))) \supset v(D)$, то $v(A) = v(D)$. Требуемое соотношение вытекает теперь из следующей леммы.

Лемма 5.31. Пусть последовательность

$$0 \rightarrow X' \xrightarrow{\xi'} X \xrightarrow{\xi''} X'' \rightarrow 0$$

в абелевой категории $\mathcal{C}$ точна, причем (X', ξ') и (X'', ξ'') — подобъект и факторобъект объекта X , и пусть (X_1, ξ_1) и (X_2, ξ_2) — подобъекты объекта X , удовлетворяющие соотношениям $X' \subset X_1 \subset X_2$. Тогда, для того чтобы $X_1 = X_2$, необходимо и достаточно, чтобы $\xi''(X_1) = \xi''(X_2)$.

Доказательство. По второй теореме об изоморфизме имеем коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & X_1/X' & \xrightarrow{\eta_1} & X'' & \rightarrow & X/X_1 \rightarrow 0 \\ & & \eta_1 \downarrow & & \downarrow 1 & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & X_2/X' & \xrightarrow{\eta_2} & X'' & \rightarrow & X/X_2 \rightarrow 0 \end{array}$$

Если $\xi''(X_1) = \xi''(X_2)$, то первая вертикальная стрелка есть изоморфизм¹⁾. Поскольку вторая стрелка — единица, заключаем, что и третья вертикальная стрелка — изоморфизм, откуда $X_1 = X_2$.

Чтобы получить теперь общую формулу (II), рассмотрим, кроме морфизмов предложения 5.30, еще последовательность мор-

¹⁾ В самом деле, из коммутативных диаграмм с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & X' & \rightarrow & X_i & \rightarrow & X_i/X' \rightarrow 0 \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow \xi_i & & \downarrow \eta_i \\ 0 & \rightarrow & X' & \xrightarrow{\xi'} & X & \xrightarrow{\xi''} & X'' \rightarrow 0 \end{array} \quad (i = 1, 2)$$

видно, что η_i есть мономорфизм, эквивалентный подобъекту $\xi''(X_i)$ объекта X'' . Поэтому если $\xi''(X_1) = \xi''(X_2)$, то η_1 и η_2 — эквивалентные мономорфизмы, и так как $\eta_1 = \eta_2 \eta$, то η — изоморфизм.

физмов

$$\text{Im } u \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\nu} \text{Coim } v,$$

где μ и ν — канонические мономорфизм и эпиморфизм. Имеем $\text{Im } u = \text{Im } \mu$, $\text{Ker } v = \text{Ker } \nu$ и $\nu^{-1}(\text{Im } (\nu\mu)) = \nu^{-1}(\text{Im } (vu))$ ¹⁾, так что соотношение (II) непосредственно следует из доказанного частного случая.

Предложение 5.32 (третья теорема об изоморфизме). Пусть $v: A \rightarrow C$ — морфизм абелевой категории, а M и N — подобъекты объекта A . Тогда имеют место следующие изоморфизмы:

$$v(M) \approx M/(M \cap \text{Ker } v) \approx (M \cup \text{Ker } v)/\text{Ker } v, \\ M/(M \cap N) \approx (M \cup N)/N.$$

Доказательство. В силу предложения 5.30 $M \cup \text{Ker } v = v^{-1}(v(M))$, а отсюда следует, что $(M \cup \text{Ker } v)/\text{Ker } v \approx v(M)$ ²⁾. Аналогично $M \cap \text{Ker } v = u(\text{Ker } (vu))$, где u — канонический мономорфизм подобъекта M в A . Поэтому $M \cap \text{Ker } v$ есть ядро эпиморфизма $M \rightarrow v(M)$ ³⁾, откуда $v(M) \approx M/(M \cap \text{Ker } v)$. Для получения

¹⁾ Как нетрудно проверить, $\kappa(\text{Im } \lambda) = \text{Im } (\kappa\lambda)$, и если κ — мономорфизм, то $\kappa^{-1}(\kappa(\text{Im } \lambda)) = \text{Im } \lambda$. В нашем случае $v = \kappa\nu$, где κ — мономорфизм. Поэтому $\nu^{-1}(\text{Im } (\nu\mu)) = \nu^{-1}(\kappa^{-1}(\kappa(\text{Im } (\nu\mu)))) = \nu^{-1}(\text{Im } (\kappa\nu\mu)) = \nu^{-1}(\text{Im } (\nu\mu)) = \nu^{-1}(\text{Im } (vu))$.

²⁾ Действительно, имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} M \cup \text{Ker } v & \xleftarrow{\alpha} & M & \xrightarrow{\nu} & v(M) \\ \uparrow \beta & \searrow \gamma & \downarrow \mu & & \downarrow \mu \\ \text{Ker } v & \xrightarrow{\kappa} & A & \xrightarrow{\nu} & C \end{array}$$

где u, μ, κ, γ — канонические морфизмы. Так как $\text{coker } \mu \cdot v\gamma = 0$, а $\mu = \text{ker } (\text{coker } \mu)$, то существует морфизм ϵ , для которого $v\gamma = \mu\epsilon$. Тогда $\mu\epsilon\alpha = v\gamma\alpha = vu = \mu\nu$, откуда $\epsilon\alpha = \nu$. Но ν — эпиморфизм (лемма 5.27). Следовательно, и ϵ — эпиморфизм. Покажем, что $\beta = \text{ker } \epsilon$. Так как $\mu\epsilon\beta = v\gamma\beta = v\kappa = 0$, то $\epsilon\beta = 0$. Пусть ξ — произвольный морфизм, для которого $\epsilon\xi = 0$. Так как тогда $v\gamma\xi = \mu\epsilon\xi = 0$, а $\kappa = \text{ker } v$, то существует единственный морфизм η , для которого $\gamma\xi = \kappa\eta = \gamma\beta\eta$, или, что равносильно этому, $\xi = \beta\eta$. Таким образом, последовательность

$$0 \rightarrow \text{Ker } v \xrightarrow{\beta} M \cup \text{Ker } v \xrightarrow{\epsilon} v(M) \rightarrow 0$$

точна, в чем и состоит смысл утверждения, что $v(M) \approx (M \cup \text{Ker } v)/\text{Ker } v$.

³⁾ Неточность: $M \cap \text{Ker } v$, являющееся по определению подобъектом объекта A , рассматривается уже как подобъект объекта M (хотя, строго говоря, не обязано быть им). На самом деле положение таково: имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker } (vu) & \xrightarrow{\delta} & M & \xrightarrow{\nu} & v(M) \\ \downarrow i & \nearrow \lambda & \downarrow u & & \downarrow \mu \\ M \cap \text{Ker } v & \xrightarrow{j} & A & \xrightarrow{\nu} & C \end{array}$$

где u, v, μ, ν те же, что в предыдущем примечании, а δ и j — канонические мономорфизмы. Так как $\delta = \text{ker } (vu) = \text{ker } (\mu\nu)$, а μ — мономорфизм, то $\delta = \text{ker } \nu$;

последнего изоморфизма следует взять в качестве v канонический эпиморфизм $A \rightarrow A/N$ и применить уже доказанные соотношения.

§ 8. Условия АВЗ, АВ4, АВ5

Для получения более точных результатов часто приходится налагать на рассматриваемую абелеву категорию $\mathcal{C}$ дополнительные условия. Наиболее употребительны введенные Гротендиком, так называемые, условия АВЗ, АВ4, АВ5 и дуальные к ним условия, обычно обозначаемые АВЗ*, АВ4*, АВ5*. Приведем их.

АВЗ. Каждое семейство $(A_i)_{i \in I}$ объектов категории $\mathcal{C}$ обладает хотя бы одной суммой.

Одно из непосредственных следствий этого условия таково: Для каждого семейства подобъектов $(A_i, u_i)_{i \in I}$ объекта A существует $\sup_{i \in I} A_i$.

Действительно, достаточно рассмотреть образ морфизма

$$\bigoplus_{i \in I} A_i \rightarrow A,$$

индуцированного морфизмами u_i .

Если категория $\mathcal{C}$ удовлетворяет условию АВЗ и $(u_i)_{i \in I}$ — семейство мономорфизмов $u_i: A_i \rightarrow B_i$, то индуцированный им морфизм $u: \bigoplus_{i \in I} A_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} B_i$, вообще говоря, не есть мономорфизм¹⁾. Это приводит к следующему условию:

АВ4. Выполнено условие АВЗ и, кроме того, прямая сумма любого семейства мономорфизмов также есть мономорфизм.

Условие АВ5 еще сильнее, чем АВ4, и формулируется следующим образом:

АВ5. Выполнено условие АВЗ и, кроме того, для каждого направленного по возрастанию семейства подобъектов $(A_i)_{i \in I}$

но так как u — мономорфизм, а $M \cap \text{Ker } v = u(\text{Ker } (vu))$, то i — изоморфизм. Принимая во внимание, что v — эпиморфизм, заключаем, что последовательность

$$0 \rightarrow M \cap \text{Ker } v \xrightarrow{\lambda} M \xrightarrow{v} v(M) \rightarrow 0$$

точна, что и требовалось.

¹⁾ Имеется в виду единственный морфизм u , удовлетворяющий для всех $i \in I$ соотношениям $u \alpha_i = \beta_i u_i$, где $\alpha_i: A_i \rightarrow \bigoplus_{j \in I} A_j$ и $\beta_i: B_i \rightarrow \bigoplus_{j \in I} B_j$ — канонические инъекции. Мы будем иногда обозначать его $\bigoplus_{i \in I} u_i$. Если I конечно и u_i — мономорфизмы, то u — мономорфизм (см. примечание ¹⁾ на стр. 149).

объекта A и каждого подобъекта B объекта A справедливо соотношение

$$(\sup_{i \in I} A_i) \cap B = \sup_{i \in I} (A_i \cap B).$$

Упомянем две важные категории, удовлетворяющие всем этим условиям: категория левых (или правых) модулей над кольцом Λ и категория пучков Λ -модулей над произвольным топологическим пространством.

Легко проверить, что условие АВ5 допускает следующую равносильную формулировку:

Выполнено условие АВ3, и, каково бы ни было направленное по возрастанию семейство подобъектов $(A_i)_{i \in I}$ объекта A , если $u_i: A_i \rightarrow B$ — такие морфизмы, что при $A_i \subset A_j$ сужение u_j на A_i ¹⁾ совпадает с u_i , то существует единственный морфизм $u: \sup_{i \in I} A_i \rightarrow B$, сужение которого на A_i совпадает с u_i для каждого $i \in I$ ²⁾.

Как следует из предложения 3.4, условие АВ3 равносильно требованию существования любых индуктивных пределов. Условие же АВ5 равносильно требованию, чтобы, кроме того, индуктивные пределы по направленным множествам индексов были точны, т. е. если I — направленное множество и последовательности

$$A_i \rightarrow B_i \rightarrow C_i$$

точные для всех $i \in I$, то последовательность

$$\lim_{\rightarrow} A_i \rightarrow \lim_{\rightarrow} B_i \rightarrow \lim_{\rightarrow} C_i$$

также точна³⁾. Условие АВ5 будет применяться главным образом в этой форме⁴⁾.

¹⁾ То есть композиция $u_i \alpha_{ij}$, где α_{ij} — канонический мономорфизм $A_i \rightarrow A_j$.

²⁾ То есть $\sup_{i \in I} A_i$ вместе с каноническими мономорфизмами $A_j \rightarrow \sup_{i \in I} A_i$ есть $\lim_{\rightarrow} A_i$.

³⁾ Подразумевается, что речь идет об индуктивных системах (A_i, α_{ij}) , (B_i, β_{ij}) , (C_i, γ_{ij}) над I и что для всех $i, j \in I$, таких, что $i \leq j$, коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} A_i & \rightarrow & B_i & \rightarrow & C_i \\ \alpha_{ij} \downarrow & & \beta_{ij} \downarrow & & \gamma_{ij} \downarrow \\ A_j & \rightarrow & B_j & \rightarrow & C_j \end{array}$$

(чем и порождается последовательность $\lim_{\rightarrow} A_i \rightarrow \lim_{\rightarrow} B_i \rightarrow \lim_{\rightarrow} C_i$).

⁴⁾ Поскольку, однако, применяются и первые две формы условия АВ5, покажем, как они получаются из третьей, принятой за основную. (Вывод третьей формы из первой или второй потребовал бы слишком много места.)

Пусть $(A_i)_{i \in I}$ — семейство подобъектов объекта A , направленное по возрастанию (с соответственно направленным множеством индексов I), $A' = \sup_{i \in I} A_i$, $u: A' \rightarrow A$, $u_i: A_i \rightarrow A$, $u'_i: A_i \rightarrow A'$, $u_{ij}: A_i \rightarrow A_j$ (при $i \leq j$) — канонические мономорфизмы, (C, v) — коядро u и (C_i, v_i) — коядра u_i . Легко видеть, что если $i \leq j$, то существует $v_{ij}: C_i \rightarrow C_j$, такое, что $v_j = v_{ij}v_i$, причем (C_i, v_{ij}) (как и (A_i, u_{ij})) — индуктивная система над I . Так как $vu_i = v_{ii}u'_i = 0$, то для каждого $i \in I$ существует $w_i: C_i \rightarrow C$, такое, что $w_i v_i = v$.

Лемма. $C = \lim_{\rightarrow} C_i$ с каноническими инъекциями w_i .

Доказательство. Если $i \leq j$, то $w_j v_{ij} v_i = w_j v_j = v = w_i v_i$, откуда $w_j v_{ij} = w_i$. С другой стороны, если морфизмы $x_i: C_i \rightarrow X$ ($i \in I$) с общей кообластью X удовлетворяют при $i \leq j$ соотношениям $x_j v_{ij} = x_i$, то $x_j v_j = x_i v_i v_j = x_i v_i$, так что вследствие направленности множества I существует $x: A \rightarrow X$, такое, что $x_i v_i = x$ для всех $i \in I$. Но тогда $xu_i = x_i v_i u_i = 0$, т. е. $A_i \subset \text{Ker } x$ для всех $i \in I$; значит, и $A' \subset \text{Ker } x$, т. е. $xu = 0$, а потому существует единственный морфизм $y: C \rightarrow X$, для которого $x = yv$, откуда $x_i v_i = yv_i v_i = yw_i v_i = yx_i$, или $x_i = yw_i$ для всех $i \in I$.

Следствие 1 (вторая форма условия АВ5). $\sup_{i \in I} A_i \approx \lim_{\rightarrow} A_i$.

Доказательство. Применяя третью форму условия АВ5 к точным последовательностям

$$0 \rightarrow A_i \rightarrow A' \rightarrow \text{Coker } u'_i \rightarrow 0,$$

получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow \lim_{\rightarrow} A_i \rightarrow A' \rightarrow \lim_{\rightarrow} \text{Coker } u'_i \rightarrow 0.$$

Но по лемме (примененной к A' вместо A) $\lim_{\rightarrow} \text{Coker } u'_i = \text{Coker } 1_{A'} = 0$. Следовательно, $\lim_{\rightarrow} A_i \approx A'$.

Следствие 2 (усиление первой формы условия АВ5). Пусть $f: B \rightarrow A$ — произвольный морфизм с кообластью A и

$$\begin{array}{ccc} A_i \amalg B & \xrightarrow{k_i} & B \\ \downarrow A & & \downarrow f \\ A_i & \xrightarrow{u_i} & A \end{array}$$

— диаграммы расслоенных произведений. Тогда $\lim_{\rightarrow} (A_i \amalg B) \approx (\lim_{\rightarrow} A_i) \amalg B$.

Доказательство. $k_s = \ker(v_s f)$ для всех $s \in I$. Поэтому если $i \leq j$, то $v_j f k_i = v_{ij} v_i f k_i = 0$, так что существует k_{ij} , такое, что $k_i = k_j k_{ij}$, откуда следует, что $(A_i \amalg B, k_{ij})$ — индуктивная система над I . Применяя третью форму условия АВ5 к точным последовательностям

$$0 \rightarrow A_i \amalg B \xrightarrow{k_i} B \xrightarrow{v_i f} C_i$$

§ 9. Образующие

Определение. Семейство объектов $(U_i)_{i \in I}$ категории $\mathcal{C}$ называется *семейством образующих* этой категории, если для каждого объекта A категории $\mathcal{C}$ и каждого его подобъекта B , отличного от A , существует по крайней мере для одного индекса $i \in I$ морфизм $u_i: U_i \rightarrow A$, не делящийся на канонический мономорфизм $B \rightarrow A$. Объект U категории $\mathcal{C}$ называется *образующей* этой категории, если составленное им одним семейство (U) есть семейство образующих категории $\mathcal{C}$.

Пример. Объект Λ категории ${}_A\mathcal{C}$ есть образующая этой категории. В самом деле, пусть M и N — объекты этой категории, $N \subset M$, $N \neq M$ и $c \in M \setminus N$. Тогда морфизм $u: \Lambda \rightarrow M$, определяемый равенством $u(x) = xc$, удовлетворяет требуемому условию.

Предложение 5.33. Пусть $\mathcal{C}$ — абелева категория, удовлетворяющая условию АВЗ. Тогда $(U_i)_{i \in I}$ есть семейство образующих категории $\mathcal{C}$ в том и только том случае, когда объект $\bigoplus_{i \in I} U_i$ есть ее образующая.

Доказательство. Пусть $B \subset A$, $B \neq A$ и $u_i: U_i \rightarrow A$ — морфизм, не делящийся на канонический мономорфизм $\beta: B \rightarrow A$. Тогда морфизм $\bigoplus_{i \in I} U_i \rightarrow A$ с компонентами $u_i = 0$ при $i \neq j$ и $= u_j$ при $i = j$ не делится на β . Обратно, если морфизм $u: \bigoplus_{i \in I} U_i \rightarrow A$ с компонентами u_i не делится на β , то существует хотя бы один индекс $i \in I$, для которого морфизм $u_i: U_i \rightarrow A$ не делится на β .

Предложение 5.34. Пусть $\mathcal{C}$ — абелева категория, удовлетворяющая условию АВЗ. Если U — образующая этой категории, то каждый объект из $\mathcal{C}$ изоморфен факторобъекту объекта вида $U^{(I)}$, где I — некоторое множество¹⁾.

и принимая во внимание лемму и следствие 1, получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow \lim_{\rightarrow} A_i \bigcap_A B \rightarrow B \xrightarrow{vf} C,$$

откуда $\lim_{\rightarrow} A_i \bigcap_A B \approx \text{Ker}(vf) = (\lim_{\rightarrow} A_i) \bigcap_A B$, или (по следствию 1, считая $A_i \bigcap_A B$ подобъектами объекта B) $\sup (A_i \bigcap_A B) = (\sup A_i) \bigcap_A B$.

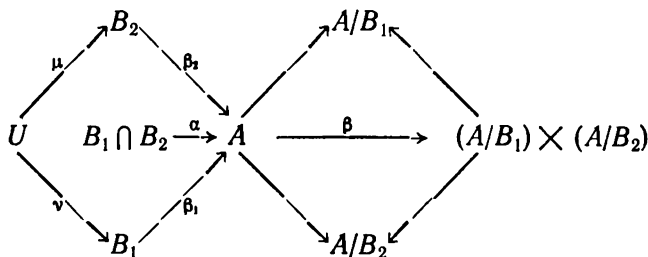
Если, в частности, B — подобъект объекта A и f — канонический мономорфизм, то (считая для каждого подобъекта X объекта A расслоенное произведение $X \bigcap_A B$ подобъектом объекта A) имеем $X \bigcap_A B = X \cap B$, и из следствий 1 и 2 вытекает первая форма условия АВ5: $\sup (A_i \cap B) = (\sup A_i) \cap B$.

¹⁾ Под $U^{(I)}$ понимается $\bigoplus_{i \in I} U_i$, где все $U_i = U$.

Доказательство. Пусть A — объект категории $\mathcal{C}$ и $I = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, A)$. Рассмотрим морфизм $u: U^{(I)} \rightarrow A$, определенный следующим образом: $u_i = i$ для каждого $i \in I$. Поскольку U — образующая, u , очевидно, есть эпиморфизм¹⁾.

Предложение 5.35. Пусть $\mathcal{C}$ — абелева категория, обладающая образующей U . Тогда для каждого объекта A из $\mathcal{C}$ класс всех его подобъектов есть множество.

Доказательство. Заметим прежде всего, что если категория $\mathcal{C}$ обладает образующей U и $(B_1, \beta_1), (B_2, \beta_2)$ — два различных подобъекта объекта A , то существует по крайней мере один морфизм $u: U \rightarrow A$, делящийся на β_2 , но не делящийся на β_1 , или наоборот. Действительно, пусть, например, $B_2 \not\subseteq B_1$. Рассмотрим подобъект $B_1 \cap B_2$ объекта A . Он определяет подобъект объекта B_1 и подобъект объекта B_2 , отличный от B_2 . Поэтому существует морфизм $\mu: U \rightarrow B_2$, не пропускаемый через $B_1 \cap B_2$. Морфизм $\beta_2 \mu$, делящийся на β_2 , не может делиться на β_1 . В самом деле, в противном случае мы имели бы равенство $\beta_2 \mu = \beta_1 \nu$ и тем самым следующую коммутативную диаграмму:



Но отсюда следовало бы, что $\beta_2 \mu$ пропускается через $B_1 \cap B_2$, ибо $(B_1 \cap B_2, \alpha)$ есть ядро морфизма β , а в силу коммутативности диаграммы $\beta \beta_2 \mu = 0$.

Рассмотрим теперь отображение, относящее каждому подобъекту (B, β) объекта A подмножество множества $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, A)$, образованное всеми морфизмами $U \rightarrow A$, делящимися на β . Из предыдущего следует, что это отображение взаимно однозначно.

Дуальным к понятию образующей является понятие кообразующей. Рекомендуем читателю дуализировать предложения 5.33, 5.34 и 5.35.

В гомологической алгебре и алгебраической геометрии встречается один весьма важный тип категорий, а именно категории Гротендика.

¹⁾ В самом деле, пусть $\nu u = 0$ и $(K, k) = \text{Ker } \nu$. Тогда все $i: U \rightarrow A$ вместе с u должны пропускаться через k . Поскольку U — образующая, отсюда следует, что $k = 1_A$ и, значит, $\nu = 0$.

Определение. *Категорией Гротендика* называется абелева категория, удовлетворяющая условию АВ5 и обладающая семейством образующих.

Примеры. Категория $\mathcal{A}\mathcal{E}$ и категория пучков абелевых групп над топологическим пространством являются категориями Гротендика.

Как обнаружится в главе 6, категории Гротендика наиболее отвечают запросам гомологической алгебры. В следующем параграфе мы покажем, что каждая малая абелева категория есть полная абелева подкатегория некоторой категории Гротендика.

§ 10. Полное вложение малой абелевой категории в категорию Гротендика

Определение. Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ — абелевы категории. Будем говорить, что функтор $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ реализует *вложение* $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}'$, если выполнены следующие условия:

- (а) T — точный функтор;
- (б) T — *унивалентный* функтор, т. е. для всякой пары объектов X, Y категории $\mathcal{C}$ из того, что $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ и $Tf = Tg$, следует, что $f = g$.

Будем говорить, что функтор T реализует *полное вложение* $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}'$, если он точен и *вполне унивалентен*, т. е. каковы бы ни были объекты X, Y из $\mathcal{C}$, для всякого морфизма $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(TX, TY)$ существует, и притом единственный, морфизм $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, такой, что $Tf = g$.

Мы докажем, что каждая малая абелева категория допускает полное вложение в категорию Гротендика. Этот результат принадлежит П. Габриэлю.

Пусть $\mathcal{C}$ — малая абелева категория. Мы будем обозначать через $\mathcal{C}^{\Delta}$ категорию всех аддитивных контравариантных функторов из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{A}\mathcal{E}$ и через h функтор из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}^{\Delta}$, аналогичный функтору $h: \mathcal{C} \rightarrow \text{Funct}(\mathcal{C}^{\circ}, \mathcal{E}ns)$, введенному на стр. 65.

Рассуждение, аналогичное проведенному при доказательстве теоремы 1.6, показывает, что функтор h вполне унивалентен. Кроме того, по аналогу следствия 3.11 h точен слева.

Пусть $\mathcal{P}$ — полная подкатегория категории $\mathcal{C}^{\Delta}$, образованная всеми функторами из $\mathcal{C}^{\Delta}$, точными слева, а $I: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C}^{\Delta}$ — функтор вложения, который, очевидно, вполне унивалентен. Мы покажем, что I обладает левым сопряженным функтором R^0 , причем этот функтор точен.

Предпошлем построению функтора R^0 несколько замечаний о категории $\mathcal{C}^{\Delta}$.

Как категория диаграмм со значениями в $\mathcal{A}\mathcal{E}$, $\mathcal{C}^{\Delta}$ есть абелева категория, удовлетворяющая условию АВ5. (Чтобы убедиться

в этом, достаточно заметить, что оперирование с диаграммами сводится к оперированию с их компонентами.) Так как, кроме того, объекты h_X составляют семейство образующих категории $\mathcal{E}^{\Lambda 1}$, то заключаем, что $\mathcal{E}^{\Lambda}$ есть категория Гротендика.

Пусть X — объект из $\mathcal{E}$. Обозначим через $E(X)$ множество, образованное всевозможными парами (A, p) , где A — объект из $\mathcal{E}$, а $p: A \rightarrow X$ — эпиморфизм. Множество $E(X)$ для каждого объекта X из $\mathcal{E}$ обладает следующими свойствами:

- (а) $(X, 1_X) \in E(X)$.
- (б) Если $(A, p) \in E(X)$, а $(B, q) \in (E, A)$, то $(B, pq) \in E(X)$.
- (в) Если $(A, p) \in E(X)$ и $f: X' \rightarrow X$ — произвольный морфизм, то в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} A' = A \amalg_X X' & \xrightarrow{p'} & X' \\ r \downarrow & & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

построенной каноническим образом, $(A', p') \in E(X')^2$.

З а м е ч а н и е. Соответствие $X \mapsto E(X)$ определяет в $\mathcal{E}$ топологию Гротендика, которую мы называем *канонической*. Из дальнейшего будет следовать, что $\mathcal{P}$ есть категория пучков абелевых групп над $\mathcal{E}$ относительно этой топологии Гротендика.

Для каждого объекта X из $\mathcal{E}$ определим следующим образом категорию $\mathcal{E}(X)$:

- (I) $\text{Ob } \mathcal{E}(X) = E(X)$;
- (II) морфизмы (A, p) в (A_1, p_1) — всевозможные морфизмы $u: A \rightarrow A_1$, для которых $p_1 u = p$, с той же композицией, что и в $\mathcal{E}$.

¹) Это легко следует из аналога теоремы 1.6 для функторов h_X и того, что в категории $\mathcal{E}^{\Lambda}$ морфизм $\alpha: F \rightarrow G$ является мономорфизмом тогда и только тогда, когда $\alpha_X: F(X) \rightarrow G(X)$ есть мономорфизм для всех объектов X из $\mathcal{E}$.

²) Согласно доказательству предложения 5.7, указанная диаграмма строится следующим образом. Пусть $S = A \oplus X'$ с каноническими проекциями π, π' и инъекциями i, i' и $(A', \nu) = \text{Ker } \mu$, где $\mu = f\pi' - p\pi$. Тогда $p' = \pi'\nu$ и $f' = \pi\nu$. Так как $\mu i = -p$ и, как легко видеть, $-p$ является эпиморфизмом вместе с p , то μ — эпиморфизм и, значит, строка

$$0 \rightarrow A' \xrightarrow{\nu} S \xrightarrow{\mu} X \rightarrow 0$$

точна. С другой стороны, и строка

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} S \xrightarrow{\pi'} X' \rightarrow 0$$

точна, ибо $\pi' i = 0$ и если $\pi' \xi = 0$, то $\xi = (i\pi + i'\pi') \xi = i(\pi \xi)$, так что $i = \text{Ker } \pi'$. Но как было сказано, μi — эпиморфизм. Применяя лемму 5.23, заключаем, что и $p' = \pi'\nu$ — эпиморфизм.

Каждый эпиморфизм $f: X \rightarrow X'$ из $\mathcal{E}$ порождает функтор $f^*: \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(X')$, определенный следующим образом: $f^*(A, p) = (A, f \circ p)$ ¹⁾. С другой стороны, произвольный морфизм $f: X \rightarrow X'$ порождает функтор $f_*: \mathcal{E}(X') \rightarrow \mathcal{E}(X)$, определенный так: если $(A', p') \in E(X')$, то $f_*(A', p') = (A' \prod_{X'} X, p)$, где $p: A' \prod_{X'} X \rightarrow X$ — канонический морфизм²⁾. Таким образом, для каждого $(A', p') \in E(X')$ существует канонический морфизм $f^*f_*: (A', p') \rightarrow (A', p')$ и, значит, образ множества $E(X)$ относительно f^* кофинален в $E(X')$ ³⁾.

Построим теперь функтор $H: \mathcal{E}^\Lambda \rightarrow \mathcal{E}^\Lambda$ следующим образом. Пусть F — объект из $\mathcal{E}^\Lambda$ и X — объект из $\mathcal{E}$. Для каждого $(A, p) \in E(X)$ обозначим через $m_p: \text{Ker } p \rightarrow A$ ядро p и положим $F(A, p) = \text{Ker } F(m_p)$, так что будем иметь точную последовательность

$$0 \rightarrow F(A, p) \rightarrow F(A) \xrightarrow{F(m_p)} F(\text{Ker } p).$$

Легко видеть, что, каков бы ни был морфизм $u: (A, p) \rightarrow (A_1, p_1)$ из $\mathcal{E}(X)$, существует единственный морфизм $F(p_1, p): F(A_1, p_1) \rightarrow F(A, p)$ (не зависящий от u), для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & F(A_1, p_1) \\ & \nearrow^{F(X, p_1)} & \downarrow F(p_1, p) \\ F(X) & & \\ & \searrow_{F(X, p)} & \\ & & F(A, p) \end{array}$$

¹⁾ И $f^*(u) = u$ для всякого $u: (A, p) \rightarrow (A_1, p_1)$.

²⁾ Предполагается, что для каждой схемы

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow f & & \\ A' & \xrightarrow{p'} & X' \end{array}$$

как-нибудь выбрано по одному ассоциированному с ней расслоенному произведению $(A' \prod_{X'} X, p')$. Если $u' — морфизм $(A', p') \rightarrow (A'_1, p'_1)$ из $\mathcal{E}(X')$ и $f_*(A'_1, p'_1) = (A_1, p_1)$, где A_1 — выбранное расслоенное произведение $A'_1 \prod_{X'} X$ с каноническими морфизмами p_1 и f'_1 , то под $f_*(u')$ понимается единственный морфизм $u: (A, p) \rightarrow (A_1, p_1)$, удовлетворяющий условию $f'_1 u = u' f'$.$

³⁾ Имеется в виду отношение предпорядка в $E(X')$, определяемое следующим образом: $(A'_1, p'_1) \geq (A', p')$, если существует морфизм $u': (A'_1, p'_1) \rightarrow (A', p')$.

где морфизмы $F(X, p): F(X) \rightarrow F(A, p)$ получаются каноническим образом из определения $F(A, p)^1$.

Мы полагаем

$$H(F)(X) = \lim_{(A, p) \in E(X)} F(A, p),$$

где индуктивный предел взят в $\mathcal{A}\mathcal{L}$; используя специальные свойства категории $\mathcal{E}(X)$, легко показать, что в действительности он является индуктивным пределом по направленному множеству²⁾.

Пусть теперь $f: X \rightarrow Y$ — произвольный морфизм из $\mathcal{E}$. Для каждого $(B, q) \in E(Y)$ им однозначно определяется морфизм $F(B, q) \rightarrow F(f_*(B, q))$, а эти морфизмы однозначно определяют морфизм $H(F)(Y) \rightarrow H(F)(X)$, который мы и примем за $H(F)(f)$.

Соответствия $X \mapsto H(F)(X)$, $f \mapsto H(F)(f)$ определяют аддитивный контравариантный функтор $H(F): \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}\mathcal{L}$.

Обозначая через ψ_X морфизмы $F(X) \rightarrow H(F)(X)$, естественно порождаемые морфизмами $F(X, p)$, заметим, что получающиеся каноническим образом диаграммы

$$\begin{array}{ccc} F(Y) & \xrightarrow{\psi_Y} & H(F)(Y) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow H(F)(f) \\ F(X) & \xrightarrow{\psi_X} & H(F)(X) \end{array}$$

коммутативны и тем самым определяют функторный морфизм $\psi_F: F \rightarrow H(F)^3$.

Предложение 5.36. *Функтор $H(F)$ для каждого объекта F из $\mathcal{E}^\Lambda$ преобразует эпиморфизмы в мономорфизмы. Соответствие*

¹⁾ Приведем доказательство независимости указанного морфизма $F_u(p_1, p): F(A_1, p_1) \rightarrow F(A, p)$ от u . Пусть также v — морфизм (A, p) в (A_1, p_1) , т. е. $p_1 v = p$. Так как $p_1(u - v) = 0$, то существует морфизм k , такой, что $u - v = m_{p_1} k$, откуда $F(u - v) = F(k) F(m_{p_1})$. Но легко видеть, что $\ker F(m_{p_1}) F_u(p_1, p) = F(u) \ker F(m_{p_1})$ и, аналогично, $\ker F(m_{p_1}) F_v(p_1, p) = F(v) \ker F(m_{p_1})$. Поэтому $\ker F(m_{p_1}) [F_u(p_1, p) - F_v(p_1, p)] = F(u - v) \ker F(m_{p_1}) = F(k) F(m_{p_1}) \ker F(m_{p_1}) = 0$, и так как $\ker F(m_{p_1})$ — мономорфизм, то $F_u(p_1, p) = F_v(p_1, p)$.

²⁾ А именно по множеству $E(X)$, наделенному отношением (частичного) предпорядка, аналогичным указанному в примечании³⁾ на стр. 130. Если (A_1, p_1) и $(A_2, p_2) \in E(X)$, то по отмеченному выше свойству (в) канонические морфизмы $\pi_1: A_1 \coprod_X A_2 \rightarrow A_1$ и $\pi_2: A_1 \coprod_X A_2 \rightarrow A_2$ являются эпиморфизмами, так что (A, p) , где $A = A_1 \coprod_X A_2$ и $p = p_1 \pi_1 = p_2 \pi_2$, есть элемент множества $E(X)$, мажорирующий (A_1, p_1) и (A_2, p_2) .

³⁾ Если F точен слева, то ψ_F есть функторный изоморфизм. В самом деле, в этом случае все $F(X, p)$ — изоморфизмы. А отсюда легко следует, что объект $F(X)$ вместе с морфизмами $(F(X, p))^{-1}$ есть предел индуктивной системы $(F(A, p), F(p_1, p))$ и, значит, изоморфен $H(F)(X)$, причем изоморфизм $F(X) \rightarrow H(F)(X)$ осуществляет ψ_X .

$F \mapsto H(F)$ определяет точный слева ковариантный функтор $H: \mathcal{C}^\Lambda \rightarrow \mathcal{C}^\Lambda$.

Доказательство. Пусть $f: X \rightarrow X'$ — эпиморфизм из $\mathcal{C}$ и $(A, p) \in E(X)$. Имеем в $\mathcal{C}$ коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow & \text{Ker } p & \xrightarrow{m_p} & A & \xrightarrow{p} & X & \rightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow 1_A & & \downarrow f & \\ 0 \rightarrow & \text{Ker } (f \circ p) & \xrightarrow{m_{f \circ p}} & A & \xrightarrow{f \circ p} & X' & \rightarrow 0 \end{array}$$

Она порождает в $\mathcal{A}\ell$ коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow & F(A, p) & \rightarrow & F(A) & \rightarrow & F(\text{Ker } p) & \\ & \uparrow F(f \circ p, p) & & \uparrow 1_{F(A)} & & \uparrow & \\ 0 \rightarrow & F(A, f \circ p) & \rightarrow & F(A) & \rightarrow & F(\text{Ker } (f \circ p)) & \end{array}$$

из которой видно, что $F(f \circ p, p)$ мономорфизм. Но $(A, f \circ p) = f^*(A, p)$, а так как образ $E(X)$ относительно f^* кофинален в $E(X')$, то $H(F)(X')$ может быть получен и как индуктивный предел, взятый по образу f^* . Поскольку $\mathcal{A}\ell$ удовлетворяет условию АВ5, заключаем, что $H(F)(f)$, как индуктивный предел мономорфизмов, есть мономорфизм.

Пусть теперь

$$0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F''$$

— точная последовательность в $\mathcal{C}^\Lambda$ и X — объект из $\mathcal{C}$. Для каждого $(A, p) \in E(X)$ имеем коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow & F'(A) & \rightarrow & F(A) & \rightarrow & F''(A) & \\ & \downarrow F'(m_p) & & \downarrow F(m_p) & & \downarrow F''(m_p) & \\ 0 \rightarrow & F'(\text{Ker } p) & \rightarrow & F(\text{Ker } p) & \rightarrow & F''(\text{Ker } p) & \end{array}$$

что порождает точную последовательность

$$0 \rightarrow F'(A, p) \rightarrow F(A, p) \rightarrow F''(A, p)^1).$$

¹⁾ Это вытекает из следующей леммы, справедливой в любых абелевых категориях: если в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & & 0 & & 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \rightarrow & K' & \rightarrow & K & \rightarrow & K'' \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \rightarrow & A' & \rightarrow & A & \rightarrow & A'' \\ & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \rightarrow & B' & \rightarrow & B & & \end{array}$$

столбцы и последние две строки точны, то первая строка точна. Доказательство этой леммы предоставляем читателю.

Поэтому, переходя к индуктивному пределу по $\mathcal{E}(X)$, получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow H(F')(X) \rightarrow H(F)(X) \rightarrow H(F'')(X)$$

(поскольку индуктивные пределы берутся в категории $\mathcal{A}$, которая удовлетворяет условию АВ5).

Предложение 5.37. Если F — объект категории $\mathcal{E}^A$, переводящий каждый эпиморфизм $f: X \rightarrow X'$ из $\mathcal{E}$ в мономорфизм, то функтор $H(F)$ точен слева.

Доказательство. Пусть $(A, p) \in E(X)$. Имеем в $\mathcal{E}$ коммутативную диаграмму с точными строками и столбцами

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \rightarrow & \text{Ker } p & \xrightarrow{m_{p'}} & A \prod_X \text{Ker } f & \xrightarrow{p'} & \text{Ker } f & \rightarrow 0 \\ & \downarrow \text{!Ker } p & & \downarrow f'' & & \downarrow f' & \\ 0 \rightarrow & \text{Ker } p & \xrightarrow{m_p} & A & \xrightarrow{p} & X & \rightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow f \circ p & & \downarrow f & \\ 0 \rightarrow & 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{\text{!}X'} & X' & \end{array} \quad (*)$$

где $(A \prod_X \text{Ker } f, p') = f'_*(A, p)$ и $(A, f \circ p) = f^*(A, p)$ ¹⁾. В свою очередь она порождает коммутативную диаграмму с точными стро-

¹⁾ Третий столбец этой диаграммы точен, поскольку f' , конечно, означает канонический мономорфизм $\text{Ker } f \rightarrow X$; второй (в котором f'' — канонический морфизм) точен в силу леммы 2 примечания²⁾ к доказательству „3 × 3-леммы“ на стр. 115. В первом столбце допущена вольность: на самом деле областью морфизма $m_{p'}$ служат $\text{Ker } p'$, а не $\text{Ker } p$. Но если заменить фрагмент $\text{!Ker } p: \text{Ker } p \rightarrow \text{Ker } p$ диаграммы однозначно определенным морфизмом $l: \text{Ker } p' \rightarrow \text{Ker } p$, сохраняющим ее коммутативность, то в силу леммы предыдущего примечания последовательность

$$0 \rightarrow \text{Ker } p' \xrightarrow{l} \text{Ker } p \rightarrow 0$$

будет точна. Поэтому l — изоморфизм, и для достижения полной строгости остается только заменить $m_{p'}$ на $m_p \circ l^{-1}$.

ками и столбцами¹⁾

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 \rightarrow & F(A, f \circ p) \rightarrow & F(A, p) \rightarrow & F(A \prod_X \text{Ker } f, p') & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 {}^1F(A, f \circ p) \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 \rightarrow & F(A, f \circ p) \rightarrow & F(A) \rightarrow & F(A \prod_X \text{Ker } f) & & &
 \end{array} \quad (**)$$

Поскольку $f^*(E(X))$ кофинально в $E(X')$, получаем, переходя к индуктивному пределу по $E(X)$, точную последовательность

$$0 \rightarrow H(F)(X') \rightarrow H(F)(X) \rightarrow \lim_{(A, p) \in E(X)} F(f'_*(A, p)).$$

Для завершения доказательства заметим, что если F — функтор, преобразующий эпиморфизмы в мономорфизмы, то, каково бы ни было $u: (A, p) \rightarrow (A_1, p_1)$, $F(p_1, p)$ есть мономорфизм²⁾. Отсюда, в частности, следует (поскольку категория $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию AB5), что канонический морфизм

$$\lim_{(A, p) \in E(X)} F(f'_*(A, p)) \rightarrow H(F)(\text{Ker } f)$$

есть мономорфизм, и предложение полностью доказано.

¹⁾ В силу точности среднего столбца диаграммы (*) и первых двух ее строк (где m_p , в согласии с предыдущим примечанием, заменено на $m_{p'}i^{-1}$) имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & & 0 & & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 \rightarrow F(A, f \circ p) & \xrightarrow{i} & \text{Ker } F(f'') & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & k \downarrow & & \downarrow \\
 0 \rightarrow F(A, p) & \longrightarrow & F(A) & \xrightarrow{F(m_p)} & F(\text{Ker } p) \\
 \downarrow & & F(f'') \downarrow & & \downarrow {}^1F(\text{Ker } p) \\
 0 \rightarrow F(A \prod_X \text{Ker } f, p') \longrightarrow & F(A \prod_X \text{Ker } f) & \xrightarrow{F(m_{p'}i^{-1})} & F(\text{Ker } p)
 \end{array}$$

в которой точны столбцы и последние две строки. Так как тогда по лемме примечания на стр. 132 первая строка тоже точна, то j — изоморфизм и потому можно, с сохранением всех точностей, заменить $\text{Ker } F(f'')$ на $F(A, f \circ p)$ и j на ${}^1F(A, f \circ p)$, соответственно заменив k на kj^{-1} . В результате получим диаграмму, содержащую в качестве фрагмента диаграмму (**).

²⁾ В самом деле, если $u: A \rightarrow A_1$ — эпиморфизм (для которого $p_1u = p$), то это следует из того, что

$$\text{ker } F(m_p) F(p_1, p) = F(u) \text{ker } F(m_{p_1})$$

Пусть F — объект категории $\mathcal{C}^\Lambda$ и $\psi_F: F \rightarrow H(F)$ — построенный выше функторный морфизм; им определяется функторный морфизм $\psi: 1_{\mathcal{C}^\Lambda} \rightarrow H$, где $1_{\mathcal{C}^\Lambda}$ — тождественный функтор категории $\mathcal{C}^\Lambda$. Так как по предложению 5.36 функтор $H(F)$ преобразует эпиморфизмы в мономорфизмы, то функтор $H^2(F) = H(H(F))$ по предложению 5.37 точен слева. С другой стороны, $H\psi \circ \psi$ есть функторный морфизм функтора $1_{\mathcal{C}^\Lambda}$ в функтор H^2 . Введем обозначения $R^0 = H^2$ и $\rho = H\psi \circ \psi$. Таким образом, для каждого объекта F категории $\mathcal{C}^\Lambda$ существуют объект $R^0(F)$ категории $\mathcal{P}$ и функторный морфизм $\rho_F: F \rightarrow R^0(F)$, такие, что для каждого объекта G из $\mathcal{P}$ и каждого морфизма $\alpha: F \rightarrow G$ имеется единственный морфизм $\alpha_0: R^0(F) \rightarrow G$, такой, что $\alpha_0 \rho_F = \alpha$; построение и доказательство единственности α_0 выполняются каноническим способом исходя из определения функтора $R^0(F)$ ¹⁾. Тем самым соответствие $F \mapsto R^0(F)$ определяет функтор из $\mathcal{C}^\Lambda$ в $\mathcal{P}^2$, являющийся левым сопряженным к функтору I .

и справа стоит мономорфизм. Пусть теперь u любое и $(A_2 = A \prod_X A_1, \pi, \pi_1)$ — расслоенное произведение, ассоциированное со схемой

$$\begin{array}{c} A \\ \downarrow p \\ A_1 \xrightarrow{\pi_1} X \end{array}$$

Согласно свойству (в) на стр. 129, π и π_1 — эпиморфизмы, а потому и $q = \pi\pi_1 = \pi_1\pi_1$ — эпиморфизм, так что $(A_2, q) \in E(X)$. Тогда помимо морфизма $u: (A, p) \rightarrow (A_1, \pi_1)$ имеем также морфизмы $\pi: (A_2, q) \rightarrow (A, p)$, ил: $(A_2, q) \rightarrow (A_1, p)$ и $\pi_1: (A_2, q) \rightarrow (A_1, \pi_1)$. Так как $F(p_1, q)$ не зависит от порождающего его морфизма $(A_2, q) \rightarrow (A_1, \pi_1)$, а π_1 — эпиморфизм, то, по уже доказанному, $F(p_1, q)$ — мономорфизм. Но $F(p_1, q) = F(p, q) F(p_1, p)$. Следовательно, и $F(p_1, p)$ — мономорфизм.

¹⁾ Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\rho_F} & R^0(F) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow R^0(\alpha) \\ G & \xrightarrow{\rho_G} & R^0(G) \end{array}$$

Но так как функтор G точен слева, то по примечанию ³⁾ на стр. 311 ψ_G и, значит, также ρ_G — функторный изоморфизм. Следовательно, $\alpha = \alpha_0 \rho_F$, где $\alpha_0 = \rho_G^{-1} R^0(\alpha)$. Пусть также $\alpha = \alpha'_0 \rho_F$. Тогда $R^0(\alpha) = R^0(\alpha_0) R^0(\rho_F) = R^0(\alpha'_0) R^0(\rho_F)$. Но $R^0(\rho_F)$ — изоморфизм. (В самом деле, из того что H точен слева, легко следует, что $H\psi_F = \psi_{H(F)}$. Поэтому $R^0(\rho_F) = H^2(H\psi_F \circ \psi_F) = H\psi_{H^2(F)} \circ \psi_{H^2(F)}$, и так как функтор $H^2(F)$ точен слева, то по примечанию ³⁾ на стр. 131 $\psi_{H^2(F)}$, а значит, и $R^0(\rho_F)$ — изоморфизм.) Следовательно, $R^0(\alpha_0) = R^0(\alpha'_0)$. А тогда $\alpha_0 = \rho_G^{-1} R^0(\alpha_0) \rho_{R^0(F)} = \rho_G^{-1} R^0(\alpha'_0) \rho_{R^0(F)} = \alpha'_0$.

²⁾ Обозначаемый по-прежнему R^0 .

Докажем теперь, что категория $\mathcal{S}$ абелева, а функтор R^0 точен. Заметим, что $\mathcal{S}$ — аддитивная категория, причем для каждого морфизма $\alpha: F \rightarrow G$ из $\mathcal{S}$ функтор $\text{Ker } \alpha$, относящий каждому объекту X из $\mathcal{S}$ группу $\text{Ker } \alpha_X$, точен слева¹⁾.

Коядро морфизма α определяется диаграммой

$$F \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\varphi} \text{Coker } \alpha \xrightarrow{\rho_1} R^0(\text{Coker } \alpha),$$

где $(\text{Coker } \alpha, \varphi)$ — коядро α в $\mathcal{S}^\Delta$, а $\rho_1 = \rho_{\text{Coker } \alpha}$. Непосредственно проверяется, что $(R^0(\text{Coker } \alpha), \rho_1 \varphi)$ есть коядро α в категории $\mathcal{S}$. Следовательно, $\mathcal{S}$ — предабелева категория. Для доказательства того, что она абелева, нужно еще показать, что для каждого морфизма $\alpha: F \rightarrow G$ из $\mathcal{S}$ канонический морфизм $\bar{\alpha}: \text{Coim } \alpha \rightarrow \text{Im } \alpha$ есть изоморфизм. Рассмотрим для этого следующую диаграмму в $\mathcal{S}^\Delta$:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker } \alpha & \rightarrow & F & \xrightarrow{\alpha} & G & \rightarrow & \text{Coker } \alpha \\ & & \downarrow u' & & \uparrow v' & & \\ & & \text{Coim } \alpha & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & \text{Im } \alpha & & \end{array}$$

где θ — изоморфизм. Из определения функтора $R^0(F)$ вытекает, что если функтор F точен слева, то $\rho_F: F \rightarrow R^0(F)$ есть изоморфизм²⁾. Из предыдущей диаграммы получаем диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ker } \alpha & \rightarrow & F & \xrightarrow{\alpha} & G & \xrightarrow{\varphi} & \text{Coker } \alpha \\ & \searrow & \downarrow u' & & \uparrow v' & \searrow \rho' & \downarrow \rho_1 \\ & & R^0(\text{Coim } \alpha) & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & R^0(\text{Im } \alpha) & & R^0(\text{Coker } \alpha) \\ & \swarrow \mu & & & \swarrow v & & \\ \text{Coim } \alpha & \xrightarrow{\theta} & \text{Im } \alpha & & & & \end{array}$$

где $\mu = \rho_{\text{Coim } \alpha}$, $v = \rho_{\text{Im } \alpha}$. Ее морфизмы построены каноническим образом, с тем чтобы все части диаграммы были коммутативны. В частности, $\bar{\alpha} = R^0(\theta)$. Объекты $R^0(\text{Im } \alpha)$ и $R^0(\text{Coim } \alpha)$ играют роль образа и кообраза α в категории $\mathcal{S}$. В самом деле, достаточно доказать, что $R^0(\text{Im } \alpha)$ вместе с v есть ядро $\rho' = \rho_1 \varphi$ ³⁾. Для этого заметим, что v есть мономорфизм в категории $\mathcal{S}$, а $(R^0(\text{Coker } \alpha), \rho')$ — коядро v ⁴⁾. Итак, $\mathcal{S}$ — абелева категория.

¹⁾ Последнее легко следует из леммы примечания ¹⁾ на стр. 132. Таким образом, каждый морфизм в $\mathcal{S}$ обладает ядром.

²⁾ См. примечание ³⁾ на стр. 131.

³⁾ То, что $R^0(\text{Coim } \alpha)$ вместе с $\mu = \mu' \mu''$ есть коядро канонического мономорфизма $\text{Ker } \alpha \rightarrow F$ в $\mathcal{S}$, следует из описанного выше общего построения коядра морфизма в $\mathcal{S}$. В частности, μ есть эпиморфизм в $\mathcal{S}$.

⁴⁾ Так как θ — изоморфизм в $\mathcal{S}^\Delta$, то $\bar{\alpha} = R^0(\theta)$ есть изоморфизм в $\mathcal{S}$ и, значит, $\bar{\alpha} \mu$ — эпиморфизм в $\mathcal{S}$. Поскольку $\alpha = v \bar{\alpha} \mu$, отсюда следует, что $\rho' = \text{coker } v$ в $\mathcal{S}$. Но, согласно примечанию ¹⁾ на стр. 135, $v = \rho_G^{-1} R^0(v')$. Так

В силу предложения 5.37 функтор R^0 точен слева. А обладая правым сопряженным, он также точен справа. Таким образом, мы получили

Предложение 5.38. Пусть $\mathcal{C}$ — малая абелева категория, $\mathcal{C}^\Delta$ — категория всех аддитивных контравариантных функторов из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{A}$ и $\mathcal{P}$ — полная подкатегория категории $\mathcal{C}^\Delta$, образованная всеми функторами из $\mathcal{C}^\Delta$, точными слева. Тогда $\mathcal{P}$ есть абелева категория и функтор вложения $I: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C}^\Delta$ обладает точным левым сопряженным.

Здесь будет уместно ввести следующее понятие:

Определение. Если $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ — абелевы категории, а $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ — точный аддитивный ковариантный функтор, обладающий вполне унивалентным правым сопряженным S , то мы будем говорить, что пара (T, S) определяет категорию $\mathcal{C}'$ как факторкатегорию категории $\mathcal{C}$.

Замечание. Это понятие факторкатегории менее обще, чем предложенное П. Габриэлем.

Следующее предложение показывает, что категория $\mathcal{C}'$ наследует наиболее важные свойства категории $\mathcal{C}$.

Предложение 5.39. Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ — абелевы категории, $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ — аддитивный ковариантный функтор и $S: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ — его правый сопряженный, причем пара (T, S) определяет $\mathcal{C}'$ как факторкатегорию категории $\mathcal{C}$. Если тогда $\mathcal{C}$ удовлетворяет какому-либо из условий АВЗ, АВ4, АВ5, АВЗ*, то и $\mathcal{C}'$ удовлетворяет тому же условию. Если $\mathcal{C}$ удовлетворяет условию АВ4* или АВ5* и функтор S точен, то и $\mathcal{C}'$ удовлетворяет тому же условию. Если $\mathcal{C}$ обладает семейством образующих, то и $\mathcal{C}'$ обладает таким семейством.

Доказательство. Проверим, например, что $\mathcal{C}'$ вместе с $\mathcal{C}$ удовлетворяет аксиоме АВЗ. Пусть $(X'_i)_{i \in I}$ — семейство объектов категории $\mathcal{C}'$. Рассмотрим в $\mathcal{C}$ семейство объектов $(S(X'_i))_{i \in I}$; пусть Y — его сумма с каноническими инъекциями $\alpha_i: S(X'_i) \rightarrow Y$. Тогда $T(Y)$ вместе с морфизмами $T(\alpha_i)$ есть сумма семейства $(T(S(X'_i)))_{i \in I}$; но из полной унивалентности функтора S выте-

как ядро морфизма из $\mathcal{P}$ в $\mathcal{C}^\Delta$ есть также его ядро в $\mathcal{P}$, то R^0 , будучи точен слева как функтор из $\mathcal{C}^\Delta$ в $\mathcal{C}^\Delta$, точен слева также как функтор из $\mathcal{C}^\Delta$ в $\mathcal{P}$; следовательно, поскольку σ' — мономорфизм в $\mathcal{C}^\Delta$, $R^0(\sigma')$, а значит, и σ есть мономорфизм в $\mathcal{P}$. Но тогда $\sigma = \ker \rho'$, так что $(R^0(\operatorname{Im} \alpha), \sigma)$ есть ядро ρ' .

¹⁾ См. следствие 3.9.

кает, что $TS(X'_i)$ изоморфно X'_i для всех $i \in I^1$). Остальные условия проверяются аналогичным образом²⁾. Если $(U_i)_{i \in I}$ — семейство образующих категории $\mathcal{C}$, то $(T(U_i))_{i \in I}$ есть семейство образующих категории $\mathcal{C}'$, как это показывает прямая проверка.

¹⁾ Так как S вполне унивалентен, то „морфизм сопряжения“ $\Psi: TS \rightarrow 1_{\mathcal{C}'}$ есть изоморфизм (предложение 1.13').

²⁾ Докажем только неоднократно используемое далее сохранение условия AB5 (в его третьей форме). Заметим прежде всего, что для любого морфизма $u: X' \rightarrow Y'$ из $\mathcal{C}'$ имеется функторный изоморфизм $T \operatorname{Coker} Su \approx \operatorname{Coker} u$. В самом деле, так как в коммутативной диаграмме с точной нижней строкой

$$\begin{array}{ccccc} TSX' & \xrightarrow{TSu} & TSY' & \rightarrow & TS \operatorname{Coker} u \rightarrow 0 \\ \Psi(X') \downarrow & & \Psi(Y') \downarrow & & \downarrow \Psi(\operatorname{Coker} u) \\ X' & \xrightarrow{u} & Y' & \rightarrow & \operatorname{Cok} u \rightarrow 0 \end{array}$$

вертикальные стрелки — изоморфизмы, то и верхняя строка точна. Но в силу точности функтора T точна и последовательность

$$TSX' \xrightarrow{TSu} TSY' \rightarrow T \operatorname{Coker} Su \rightarrow 0.$$

Следовательно, $T \operatorname{Coker} Su \approx TS \operatorname{Coker} u \approx \operatorname{Coker} u$. Пусть теперь (A'_i, α_{ij}) , (B'_i, β_{ij}) , (C'_i, γ_{ij}) — индуктивные системы над I и для каждого $i \in I$ задана точная последовательность

$$0 \rightarrow A'_i \xrightarrow{u_i} B'_i \xrightarrow{v_i} C'_i \rightarrow 0,$$

причем все диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} A'_i & \xrightarrow{u_i} & B'_i & \xrightarrow{v_i} & C'_i \\ \downarrow \alpha_{ij} & & \downarrow \beta_{ij} & & \downarrow \gamma_{ij} \\ A'_j & \xrightarrow{u_j} & B'_j & \xrightarrow{v_j} & C'_j \end{array}$$

($i \leq j$) коммутативны. Так как функтор S точен слева, то в $\mathcal{C}$ имеем точные последовательности

$$0 \rightarrow SA'_i \rightarrow SB'_i \xrightarrow{Sv_i} SC'_i \rightarrow \operatorname{Coker} Sv_i \rightarrow 0.$$

Если $\mathcal{C}$ удовлетворяет условию AB5, то, поскольку функтор T точен и, обладая правым сопряженным, перестановочен с индуктивными пределами, получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow \varinjlim TSA'_i \rightarrow \varinjlim TSB'_i \rightarrow \varinjlim TSC'_i \rightarrow \varinjlim T \operatorname{Coker} Sv_i \rightarrow 0.$$

Но $T \operatorname{Coker} Sv_i \approx \operatorname{Coker} v_i = 0$. Принимая еще во внимание, что Ψ — функторный изоморфизм, заключаем, что последовательность

$$0 \rightarrow \varinjlim A'_i \rightarrow \varinjlim B'_i \rightarrow \varinjlim C'_i \rightarrow 0$$

точна. Таким образом, в $\mathcal{C}'$ индуктивные пределы по направленным множествам сохраняют точность коротких точных последовательностей, а значит, как легко следует отсюда, и всех точных последовательностей.

Из предложения 5.39 вытекает, что при условиях предложения 5.38 $\mathcal{P}$ есть факторкатегория категории $\mathcal{E}^\Delta$ и, следовательно, категория Гротендика. Для завершения программы, намеченной в конце предыдущего параграфа, докажем теперь следующую теорему.

Теорема 5.40. *В предположениях и обозначениях предложения 5.38, функтор $R^0 \circ h$ осуществляет полное вложение категории $\mathcal{E}$ в $\mathcal{P}$, так что каждая малая абелева категория допускает полное вложение в категорию Гротендика.*

Доказательство. Так как функтор h_X для каждого объекта X из $\mathcal{E}$ точен слева, то $\rho_{h_X}: h_X \rightarrow R^0 h_X$ есть изоморфизм. Отсюда вытекает, что

$$R^0(h_X, h_Y): \text{Hom}_{\mathcal{E}^\Delta}(h_X, h_Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{P}}(R^0 h_X, R^0 h_Y)$$

для каждой пары объектов X, Y из $\mathcal{E}$ есть изоморфизм. Следовательно, $R^0 \circ h$ — вполне унивалентный функтор. Остается доказать его точность.

Как композиция двух функторов, точных слева, $R^0 \circ h$ точен слева. Нужно еще показать, что он точен справа, а для этого достаточно доказать, что он сохраняет эпиморфизмы. Пусть $f: Z \rightarrow Y$ — эпиморфизм в $\mathcal{E}$. Морфизм $R^0 h(f)$ есть эпиморфизм тогда и только тогда, когда $R^0(\text{Coker } h(f)) = 0$ ¹⁾, или $H(\text{Coker } h(f)) = 0$, где H — функтор, построенный в начале этого параграфа²⁾. Пусть X — объект из $\mathcal{E}$; согласно определению функтора H ,

$$H(\text{Coker } h(f))(X) = \lim_{(A, p) \in E(X)} (\text{Coker } h(f))(A, p).$$

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} h_Z(X) & \xrightarrow{h(f)(X)} & h_Y(X) & \rightarrow & \text{Coker } h(f)(X) & \rightarrow & 0 \\ h_Z(p) \downarrow & & h_Y(p) \downarrow & & \downarrow & & \\ h_Z(A) & \xrightarrow{h(f)(A)} & h_Y(A) & \rightarrow & \text{Coker } h(f)(A) & \rightarrow & 0 \end{array} \quad (*)$$

¹⁾ Так как R^0 обладает правым сопряженным, то он точен справа (предложение 5.17) и потому $\text{Coker } R^0 h(f) \approx R^0(\text{Coker } h(f))$.

²⁾ Соотношения $R^0(\text{Coker } h(f)) = 0$ и $H(\text{Coker } h(f)) = 0$ действительно равносильны (как и вообще соотношения $R^0(F) = 0$ и $H(F) = 0$). В рассматриваемом случае достаточно доказать лишь второе из них, очевидно влекущее первое. Но последующие беглые фразы авторского текста (в одной из которых к тому же фигурирует формула $h(f')(a) = h(f)(a)$, лишенная смысла) содержат лишь намеки на доказательство, по-видимому, имевшееся в виду.

Положим для краткости $\text{Coker } h(f) = F$. Утверждение, что $H(F)(X) = 0$, равносильно утверждению, что для каждого $(A, p) \in E(X)$ и каждого $b \in F(A, p)$ существует $(A', p') \in E(X)$ с морфизмом $f': (A', p') \rightarrow (A, p)$, такое, что $F(p, p')(b) = 0$. В силу соотношения $\text{ker } F(m_p)F(p, p') = F(f')\text{ker } F(m_p)$ для доказательства этого утверждения достаточно показать, что при каждом

Пусть $a \in h_Y(A)$; тогда $a: A \rightarrow Y$ — морфизм из $\mathcal{C}$. Из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & Y \\ a' \uparrow & & \uparrow a \\ Z \coprod_Y A & \xrightarrow{f'} & A \end{array} \quad (**)$$

построенной каноническим образом, вытекает, что $h(f')(a) = h(f)(a)$, а это показывает, с учетом построения $H(\text{Coker } h(f))$ и свойств индуктивных пределов абелевых групп, что $H(\text{Coker } h(f)(X)) = 0$. Тем самым $R^0(\text{Coker } h(f)) = 0$, чем и завершается доказательство.

Мы предположили выше, что $\mathcal{C}$ — малая категория, поскольку использовали — для построения некоторых функторов — индуктивные пределы, а мы умеем строить эти пределы, только когда индексы образуют множество. В случае произвольной абелевой категории возникают трудности, относящиеся к основам теории множеств. Способ обхода этих трудностей доставляется следующим общим результатом:

Предложение 5.41. Пусть $(A_i)_{i \in I}$ — произвольное семейство объектов абелевой категории $\mathcal{C}$. Тогда в $\mathcal{C}$ имеется малая полная абелева подкатегория $\mathcal{A}$, содержащая в качестве своих объектов все A_i ($i \in I$).

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{A}_0$ полную подкатегорию категории $\mathcal{C}$, порожденную объектами A_i ; $\mathcal{A}_0$ — малая категория. Обозначим, далее, через $\mathcal{A}_1$ полную подкатегорию категории $\mathcal{C}$, порожденную всеми объектами из $\mathcal{A}_0$, ядрами и коядрами всех морфизмов из $\mathcal{A}_0$ — по одному ядру и коядру для

$b \in F(A)$ существует морфизм $f': (A', p') \rightarrow (A, p)$ в $\mathcal{E}(X)$, для которого $F(f')(b) = 0$. Но каждое $b \in F(A)$ есть образ некоторого $a: A \rightarrow Y$ относительно канонического эпиморфизма, стоящего в нижней строке диаграммы (*). Возьмем теперь $Z \coprod_Y A$ из диаграммы (**) в качестве A' , а pf' (где f' — из той же диаграммы) — в качестве p' : так как f' по свойству (в) множества $E(X)$ есть эпиморфизм, то $(A', p') \in E(X)$. Из коммутативных диаграмм (**) и

$$\begin{array}{ccccc} h_Z(A) & \xrightarrow{h_f(A)} & h_Y(A) & \xrightarrow{\alpha_A} & F(A) \rightarrow 0 \\ h_Z(f') \downarrow & & h_Y(f') \downarrow & & \downarrow F(f') \\ h_Z(A') & \xrightarrow{h_f(A')} & h_Y(A') & \xrightarrow{\alpha_{A'}} & F(A') \rightarrow 0 \end{array}$$

где α_A и $\alpha_{A'}$ — канонические эпиморфизмы, получим тогда $F(f')(b) = F(f')(\alpha_A(a)) = \alpha_{A'}(af') = \alpha_{A'}(fa) = 0$, поскольку $fa' = h_f(A')(a') \in \text{Im } h_f(A') = \text{Ker } \alpha_{A'}$. Этим и завершается доказательство теоремы 5.40.

каждого из этих морфизмов — и суммами всевозможных конечных семейств объектов из $\mathcal{A}_0$; $\mathcal{A}_1$ — малая подкатегория категории $\mathcal{C}$. Продолжим этот процесс по индукции, полагая $\mathcal{A}_{n+1} = (\mathcal{A}_n)_1$ ($n = 1, 2, \dots$); $\mathcal{A}_n$ будет малой подкатегорией категории $\mathcal{C}$ для каждого n . Пусть, наконец, $\mathcal{A} = \bigcup_{n=0, 1, 2, \dots} \mathcal{A}_n$, т. е. $\mathcal{A}$ — наи-

меньшая полная подкатегория категории $\mathcal{C}$, содержащая все $\mathcal{A}_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Очевидно, $\mathcal{A}$ — малая категория. Она абелева. Действительно, пусть $f: A \rightarrow B$ — морфизм из $\mathcal{A}$. Существует такое n , что A и B — объекты из $\mathcal{A}_n$. Тогда $\text{Ker } f$ и $\text{Coker } f$ будут, вместе с каноническими морфизмами, объектами из $\mathcal{A}_{n+1}$, и т. д.

Предложение 5.41 позволяет изучать абелевы категории локально и найдет применение в главе 6.

ИНЪЕКТИВНЫЕ И ПРОЕКТИВНЫЕ ОБЪЕКТЫ АБЕЛЕВЫХ КАТЕГОРИЙ

§ 1. Понятия инъективного и проективного объектов и их общие свойства

Определение. Объект Q абелевой категории $\mathcal{C}$ называется *инъективным*, если для каждого мономорфизма $\alpha: A' \rightarrow A$ и каждого морфизма $u: A' \rightarrow Q$ существует морфизм $v: A \rightarrow Q$, такой, что $v\alpha = u$. На диаграммном языке это означает, что каждая диаграмма вида

$$\begin{array}{ccc} 0 \rightarrow A' & \rightarrow & A \\ & \downarrow & \\ & Q & \end{array}$$

с точной строкой $0 \rightarrow A' \rightarrow A$ допускает вложение в коммутативную диаграмму вида

$$\begin{array}{ccc} 0 \rightarrow A' & \rightarrow & A \\ & \downarrow & \nearrow \\ & Q & \end{array}$$

Предложение 6.1. Пусть $(Q_i)_{i \in I}$ — семейство объектов абелевой категории $\mathcal{C}$, обладающее произведением $Q = \prod_{i \in I} Q_i$. Тогда объект Q инъективен в том и только том случае, когда все Q_i инъективны.

Доказательство. Пусть $\pi_i: Q \rightarrow Q_i$ — канонические проекции и $\alpha_i: Q_i \rightarrow Q$ — морфизмы, для которых $\pi_i \alpha_i = 1_{Q_i}$. Предположим, что Q инъективен, и пусть $f: X' \rightarrow X$ — мономорфизм, а $g: X' \rightarrow Q_i$ — морфизм в $\mathcal{C}$. Тогда существует морфизм $h: X \rightarrow Q$, для которого $h \circ f = \alpha_i \circ g$, откуда $\pi_i \circ h \circ f = \pi_i \circ \alpha_i \circ g = g$. Следовательно, Q_i инъективен. Обратно, предположим, что все Q_i инъективны, и пусть задан морфизм $g: X' \rightarrow Q$. Для каждого $i \in I$ существует морфизм $h_i: X \rightarrow Q_i$, такой, что $\pi_i \circ g = h_i \circ f$. Поэтому из определения произведения вытекает существование единственного морфизма $h: X \rightarrow Q$, такого, что $\pi_i \circ h = h_i$ для всех $i \in I$. Очевидно, $h \circ f = g$, так что Q инъективен.

Предложение 6.2. Всякий инъективный подобъект Q объекта C есть прямое слагаемое этого объекта.

Доказательство. Пусть $i: Q \rightarrow C$ — канонический мономорфизм Q в C . Достаточно доказать существование морфизма

$p: C \rightarrow Q$, для которого $pi = 1_Q$. Но в силу инъективности Q существование такого морфизма явствует из рассмотрения диаграммы

$$\begin{array}{c} Q \xrightarrow{i} C \\ \downarrow 1_Q \\ Q \end{array}$$

Предложение 6.3. Пусть $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ — абелевы категории и $G: \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_1$ — функтор, сопряженный к функтору $F: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$. При этих условиях, если F точен, то G относит каждому инъективному объекту категории $\mathcal{C}_2$ инъективный объект категории $\mathcal{C}_1$.

Доказательство. Пусть Q — инъективный объект категории $\mathcal{C}_2$. Нам нужно доказать, что $G(Q)$ есть инъективный объект категории $\mathcal{C}_1$. Для этого достаточно показать, что каждая точная последовательность

$$0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$$

из категории $\mathcal{C}_1$ порождает точную последовательность абелевых групп и их гомоморфизмов

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(X'', G(Q)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(X, G(Q)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(X', G(Q)) \rightarrow 0. (*)$$

Но в силу предположения последовательность

$$0 \rightarrow F(X') \rightarrow F(X) \rightarrow F(X'') \rightarrow 0$$

точна. Поэтому вследствие инъективности Q точна последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(X''), Q) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(X), Q) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(X'), Q) \rightarrow 0.$$

А так как мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(X''), Q) & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(X), Q) & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(X'), Q) & \rightarrow & 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(X'', G(Q)) & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(X, G(Q)) & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(X', G(Q)) & \rightarrow 0 \end{array}$$

в которой вертикальные стрелки — изоморфизмы, то заключаем, что и последовательность (*) точна.

Определение. Пусть $\mathcal{C}$ — абелева категория. Будем говорить, что в $\mathcal{C}$ достаточно много инъективных объектов, если каждый объект из $\mathcal{C}$ есть подобъект некоторого инъективного объекта из $\mathcal{C}$.

Абелевы категории, содержащие достаточно много инъективных объектов, представляют собой наилучшую среду для „разведения гомологической алгебры“. Прежде чем перейти к подробному рассмотрению некоторых таких категорий, докажем

следующее предложение, в некотором смысле обратное к предложению 6.3.

Предложение 6.4. Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ — абелевы категории, $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ — аддитивный функтор и $S: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ — его правый сопряженный. Если в $\mathcal{C}'$ достаточно много инъективных объектов и S переводит инъективные объекты в инъективные объекты, то T точен.

Доказательство. Достаточно доказать, что T переводит мономорфизмы в мономорфизмы, т. е. что если $i: X \rightarrow Y$ — мономорфизм в $\mathcal{C}$, то $T(i): T(X) \rightarrow T(Y)$ — мономорфизм в $\mathcal{C}'$. Пусть $\Phi: 1_{\mathcal{C}} \rightarrow ST$ и $\Psi: TS \rightarrow 1_{\mathcal{C}'}$ — функторные морфизмы, для которых $\Psi(T(A))T(\Phi(A)) = 1_{T(A)}$ и $S(\Psi(B))\Phi(S(B)) = 1_{S(B)}$ при любых объектах A из $\mathcal{C}$ и B из $\mathcal{C}'$ (см. предложение 1.13), и $i: X \rightarrow Y$ — мономорфизм из $\mathcal{C}$. Мы имеем в $\mathcal{C}'$ диаграмму

$$\begin{array}{c} T(Y) \\ \uparrow T(i) \\ T(X) \xrightarrow{f} Q \end{array}$$

где f — мономорфизм объекта $T(X)$ в некоторый инъективный объект Q . Из этой диаграммы получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & Y \\ \Phi(X) \downarrow & & \downarrow \Phi(Y) \\ S(Q) \xleftarrow{S(f)} ST(X) & \xrightarrow{ST(i)} & ST(Y) \end{array}$$

Пусть $\alpha: Y \rightarrow S(Q)$ — морфизм из $\mathcal{C}$, для которого $\alpha \circ i = S(f) \circ \Phi(X)$. Из соотношений

$$\Psi(T(X)) \circ T(\Phi(X)) = 1_{T(X)}, \quad f \circ \Psi(T(X)) = \Psi(Q) \circ TS(f)$$

следует, что $f = \Psi(Q) \circ TS(f) \circ T\Phi(X)$. Но $T(\alpha) \circ T(i) = TS(f) \circ T\Phi(X)$. Поэтому $f = \Psi(Q) \circ T(\alpha) \circ T(i)$, откуда следует, что $T(i)$ — мономорфизм.

Укажем теперь важный класс категорий, имеющих достаточно много инъективных объектов. А именно докажем следующее

Предложение 6.5. Пусть Λ — кольцо с единицей. Тогда в категории $\Lambda\mathcal{A}$ имеется достаточно много инъективных объектов.

Доказательство проведем в несколько шагов.

(а) Объект Q категории $\Lambda\mathcal{A}$ инъективен тогда и только тогда, когда Q — делимая группа.

В самом деле, пусть Q — инъективный объект категории $\Lambda\mathcal{A}$, $y_0 \in Q$ и $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Нам нужно доказать существование эле-

мента $y \in Q$, для которого $ny = y_0$. Пусть $\varphi: Z \rightarrow Q$ — гомоморфизм абелевых групп, определенный формулой

$$\varphi(m) = my_0 \quad \text{для всех } m \in Z.$$

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} 0 & \rightarrow & Z \xrightarrow{\psi} Z \\ & & \downarrow \varphi \\ & & Q \end{array}$$

где ψ — гомоморфизм, определенный условием $\psi(m) = nm$. Так как объект Q по предположению инъективен, то существует $u: Z \rightarrow Q$, для которого $u\psi = \varphi$. Пусть $y = u(1)$. Имеем $y_0 = \varphi(1) = u(\psi(1)) = u(n) = nu(1) = ny$.

Обратно, пусть Q — делимая абелева группа, A' — подгруппа абелевой группы A и $u: A' \rightarrow Q$ — гомоморфизм абелевых групп. Нам нужно показать, что u допускает продолжение на A . Рассмотрим множество всех пар (V, v) , где V — подгруппа группы A , содержащая A' , а v — гомоморфизм V в Q , являющийся продолжением u . Введем в это множество следующее отношение порядка: $(V', v') \leq (V'', v'')$ в том и только том случае, когда $V' \subset V''$ и v'' является продолжением v' . По лемме Цорна в этом множестве имеется максимальный элемент (V_0, v_0) . Покажем, что $V_0 = A$. В самом деле, допустим, что существует $x \in A$, такое, что $x \notin V_0$. Рассмотрим подгруппу Zx группы A . Возможны два случая:

- I. $Zx \cap V_0 \neq \{0\}$.
- II. $Zx \cap V_0 = \{0\}$.

Поскольку случай II легко приводит к противоречию, займемся лишь случаем I. Пусть n_0 — наименьшее положительное целое число, для которого $n_0x \in V_0$. Очевидно, тогда $Zx \cap V_0$ совпадает с множеством элементов вида mn_0x , где m пробегает Z . Рассмотрим подгруппу $V_0 + Zx = V$ и покажем, что существует гомоморфизм $v: V \rightarrow Q$, продолжающий v_0 , чем и завершится доказательство. Так как $n_0x \in V_0$, то $v_0(n_0x)$ определено. Пусть $y_0 = v_0(n_0x)$. Поскольку Q — делимая группа, существует $y \in Q$, такое, что $n_0y = y_0$. Пусть $z \in V_0 + Zx$, т. е. $z = a + nx$, где $a \in V_0$, $n \in Z$. Положим $v(z) = v_0(a) + ny$. Мы утверждаем, что $v(z)$ не зависит от представления z в виде $z = a + nx$. В самом деле, если также $z = b + mx$, где $b \in V_0$, $m \in Z$, то $a - b = (m - n)x \in V_0 \cap Zx$, так что $m - n = n'n_0$ и потому

$$\begin{aligned} v_0(a) - v_0(b) &= v_0(a - b) = v_0(n'n_0x) = \\ &= n'v_0(n_0x) = n'y_0 = n'n_0y = (m - n)y, \end{aligned}$$

откуда $v_0(a) + ny = v_0(b) + my$. Очевидно, v — гомоморфизм, продолжающий v_0 , вопреки максимальнойности (V_0, v_0) . Таким образом, Q — инъективный объект,

(б) Пусть $\varphi: \Lambda \rightarrow \Gamma$ — гомоморфизм колец с единицей ($\varphi(1) = 1$). Если в ${}_{\Lambda}\mathcal{E}$ достаточно много инъективных объектов, то и в ${}_{\Gamma}\mathcal{E}$ достаточно много инъективных объектов.

Действительно, рассмотрим функторы

$$F: {}_{\Gamma}\mathcal{E} \rightarrow {}_{\Lambda}\mathcal{E}, \quad G: {}_{\Lambda}\mathcal{E} \rightarrow {}_{\Gamma}\mathcal{E},$$

определенные условиями

$$F(A) = A_{[\varphi]}, \quad G(B) = \text{Hom}_{\Lambda}(\Gamma_{[\varphi]}, B)^1).$$

Напомним, что структура левого Γ -модуля в $G(B)$ определяется так: если $u: \Gamma_{[\varphi]} \rightarrow B$, то по определению $(\gamma u)(x) = u(x\gamma)$ для всех $x \in \Gamma_{[\varphi]} = \Gamma$. Так как функтор G сопряжен к функтору $F^2)$ и F — точный функтор, то, согласно предложению 6.3, G переводит инъективные Λ -модули в инъективные Γ -модули. Пусть теперь A — произвольный Γ -модуль. $A_{[\varphi]}$ есть Λ -модуль. По предположению существуют инъективный Λ -модуль Q и вложение $\mu: A_{[\varphi]} \rightarrow Q$. Поскольку G точен слева, получаем вложение (Γ -модулей) $G(\mu): G(A_{[\varphi]}) \rightarrow G(Q)$. Но модуль $G(Q)$ инъективен. Покажем, что A допускает вложение в $G(Q)$. Очевидно, достаточно вложить A в $G(A_{[\varphi]})$. Это достигается следующим образом: каждому $a \in A = A_{[\varphi]}$ относим гомоморфизм $\hat{a} \in \text{Hom}_{\Lambda}(\Gamma_{[\varphi]}, A_{[\varphi]})$, определенный формулой $\hat{a}(\gamma) = \gamma a$. Принимая во внимание гомоморфизм $\text{Hom}_{\Lambda}(\Gamma_{[\varphi]}, A_{[\varphi]}) \rightarrow A_{[\varphi]}$, относящий каждому $u \in \text{Hom}_{\Lambda}(\Gamma_{[\varphi]}, A_{[\varphi]})$ значение $u(1)$, заключаем, что отображение $a \mapsto \hat{a}$ реализует вложение A в $G(A_{[\varphi]})$, и наше утверждение доказано.

(в) Категория $\mathcal{A}$ содержит достаточно много инъективных объектов.

В силу (а) нужно доказать, что каждая абелева группа вложима в делимую абелеву группу. Это очевидно для группы $\mathbb{Z}$, а потому и для каждой свободной группы. А поскольку каждая факторгруппа делимой группы есть делимая группа и сумма любого семейства делимых групп есть делимая группа, заключаем, что каждая абелева группа вложима в делимую группу.

(г) Категория ${}_{\Lambda}\mathcal{E}$ для каждого кольца Λ с единицей содержит достаточно много инъективных объектов.

Это вытекает из (в) и (б), если рассмотреть кольцевой гомоморфизм $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \Lambda$, переводящий единицу кольца $\mathbb{Z}$ в единицу кольца Λ .

¹⁾ С естественным распространением на морфизмы. Здесь под $X_{[\varphi]}$ для любого левого Γ -модуля X понимается левый Λ -модуль с той же аддитивной группой X и умножением на элементы $\lambda \in \Lambda$, определенным формулой

$$\lambda \cdot x = \varphi(\lambda) x \quad \text{для всех } x \in X \text{ и } \lambda \in \Lambda.$$

²⁾ В силу функторных изоморфизмов

$$\text{Hom}_{\Lambda}(A_{[\varphi]}, B) \approx \text{Hom}_{\Lambda}((\Gamma \otimes_{\Gamma} A)_{[\varphi]}, B) \approx \text{Hom}_{\Gamma}(A, \text{Hom}_{\Lambda}(\Gamma_{[\varphi]}, B));$$

§ 2. Существенные расширения

Предложение 6.6. Пусть M и P — объекты абелевой категории $\mathcal{C}$, такие, что $P \supset M$. Тогда следующие условия равносильны:

(I) Каждый подобъект Q объекта P , такой, что $Q \cap M = 0$, равен 0.

(II) Каждый морфизм $u: P \rightarrow A$, индуцирующий на M мономорфизм, является мономорфизмом.

Доказательство. (I) $\Rightarrow$ (II). Пусть $Q = \text{Кег } u$. По предположению $u|_M: M \rightarrow A$, где $\mu: M \rightarrow P$ — канонический мономорфизм M в P , есть мономорфизм. Нам нужно показать, что $\text{Кег } u = 0$. Для этого достаточно показать, что $Q \cap M = 0$. Но в противном случае мы имели бы $0 \neq Q \cap M \subset \text{Кег } (\mu)$, как это видно из следующей коммутативной диаграммы, где β — канонический эпиморфизм и $(Q \cap M, \kappa)$ — ядро морфизма $\beta\mu$ ¹⁾:

$$\begin{array}{ccccc} Q \cap M & \rightarrow & Q & & \\ \kappa \downarrow & & \downarrow & & \\ M & \xrightarrow{\mu} & P & \xrightarrow{u} & A \\ & & \beta \downarrow & \nearrow & \\ & & P/Q & & \end{array}$$

Однако это противоречит тому, что $u|_M$ есть мономорфизм.

(II) $\Rightarrow$ (I). Пусть $Q \subset P$, $Q \cap M = 0$. Рассмотрим канонический эпиморфизм $\beta: P \rightarrow P/Q$. Ядром морфизма $\beta\mu$ служит $Q \cap M = 0$. Поэтому $\beta\mu$ — мономорфизм. Следовательно, β — мономорфизм и тем самым $Q = 0$.

Определение. Пара (P, M) , где M — подобъект объекта P , называется *существенным расширением* объекта M , если выполнены равносильные условия (I), (II). Мы будем также говорить, что $\mu: M \rightarrow P$ есть *существенный мономорфизм*, если μ — мономорфизм и пара (P, M) является существенным расширением объекта M . Еще проще, мы будем называть объект P *существенным расширением объекта M* ²⁾.

Иногда представляет также интерес рассмотрение дуального понятия, определение которого мы для удобства читателя сформулируем явно.

¹⁾ См. лемму 2 из примечания ²⁾ на стр. 115.

²⁾ В дальнейшем *существенным расширением* объекта M называется всякая пара (P, M) с мономорфизмом $\mu: M \rightarrow P$, обладающим (независимо от того, является ли (M, μ) подобъектом объекта P или нет) тем свойством, что для всякого морфизма $u: P \rightarrow A$ мономорфность $u|_M$ влечет мономорфность u ; и всякий такой мономорфизм μ называется *существенным мономорфизмом*.

Определение. Эпиморфизм $f: M \rightarrow M'$ называется *существенным*, если всякий морфизм $g: X \rightarrow M$, для которого fg — эпиморфизм, сам является эпиморфизмом.

Примеры

Предложение 6.7. Пусть A — коммутативное кольцо с единицей и ${}_A\mathcal{E}$ — категория унитарных левых A -модулей. Для того чтобы A -модуль P был существенным расширением своего подмодуля M , необходимо и достаточно, чтобы $A\xi \cap M \neq \{0\}$ для каждого $\xi \in P$, $\xi \neq 0$.

Доказательство. Необходимость очевидна, поскольку $A\xi \neq \{0\}$. Для доказательства достаточности требуется показать, что если Q — подмодуль модуля P , такой, что $Q \cap M = \{0\}$, то $Q = \{0\}$. Но допустим, что $0 \neq \xi \in Q$. Тогда $A\xi \cap M \neq \{0\}$, что невозможно, поскольку $A\xi \cap M \subset Q \cap M$.

Пример 1. Пусть A — кольцо целостности, рассматриваемое как объект категории ${}_A\mathcal{E}$, и B — его поле отношений, также рассматриваемое как объект этой категории. Из предложения 6.7 непосредственно следует, что B является существенным расширением A .

2. Пусть A — локальное кольцо¹⁾ с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и k — поле вычетов $A/\mathfrak{m}$. Рассмотрим эпиморфизм $f: A \rightarrow A/\mathfrak{m}$. (Конечно, все мыслится в категории ${}_A\mathcal{E}$.) Этот эпиморфизм — существенный. В самом деле, пусть X есть A -модуль и $g: X \rightarrow A$ таково, что fg сюръективно. Тогда $g(X) + \mathfrak{m} = A$. По лемме Накаямы²⁾ отсюда следует, что $g(X) = A$, так что g — эпиморфизм.

Определение. Существенное расширение (I, M) объекта M , где I — инъективный объект, называется *инъективной оболочкой* объекта M .

Ниже мы увидим (следствие 6.32), что в категории Гротендика каждый объект обладает хотя бы одной инъективной оболочкой, причем любые две его инъективные оболочки изоморфны (предложение 6.10).

¹⁾ Т. е. коммутативное кольцо (здесь — с единицей), обладающее единственным максимальным идеалом.

²⁾ См. Н. Бурбаки, Алгебра. Модули, кольца, формы, „Мир“, 1966, стр. 191. Впрочем сюръективность морфизма g проще доказать прямо, опираясь на то, что A — кольцо с единицей. Поскольку $g(X) + \mathfrak{m} = A$, существуют $x \in X$ и $m \in \mathfrak{m}$, такие, что $g(x) + m = 1$. Так как тогда $g(x) \notin \mathfrak{m}$, то элемент $g(x)$ обратим (иначе он должен был бы содержаться в максимальном идеале, т. е. в $\mathfrak{m}$). Но в таком случае $g(X) \supset g(Ax) = Ag(x) = A$.

Примеры инъективных оболочек

1. Рассмотрим в категории $\mathcal{A}\ell$ абелевых групп аддитивную группу целых чисел $\mathbb{Z}$. Очевидно, аддитивная группа всех рациональных чисел $\mathbb{Q}$ есть инъективная оболочка группы $\mathbb{Z}$.

2. Пусть p — простое число. Рассмотрим в категории $\mathcal{A}\ell$ мультипликативную группу $\mathbb{Z}_p^\infty$ всех комплексных чисел, удовлетворяющих хотя бы одному уравнению вида

$$z^{p^n} = 1, \quad n > 0.$$

Пусть m — произвольное положительное целое число и $\mathbb{Z}_{p^m}$ — мультипликативная группа всех корней степени p^m из единицы. Очевидно, $\mathbb{Z}_{p^m} \subset \mathbb{Z}_p^\infty$. Докажем, что $\mathbb{Z}_p^\infty$ есть инъективная оболочка группы $\mathbb{Z}_{p^m}$.

(а) Группа $\mathbb{Z}_p^\infty$ инъективна. Достаточно показать, что $\mathbb{Z}_p^\infty$ — делимая группа, т. е. что если $\zeta \in \mathbb{Z}_p^\infty$, то для каждого целого $n > 0$ существует $\zeta_1 \in \mathbb{Z}_p^\infty$, такое, что $\zeta_1^n = \zeta$. Очевидно, можно ограничиться доказательством этого для простых n .

Справедливость утверждения при $n=p$ очевидна. Предположим теперь, что n взаимно просто с p и $\zeta^{p^r} = 1$. Для некоторых целых s и q имеем

$$p^r s + nq = 1,$$

а тогда

$$\zeta = \zeta^{p^r s + nq} = \zeta^{p^r s} \zeta^{nq} = (\zeta^q)^n.$$

Таким образом, группа $\mathbb{Z}_p^\infty$ делима и потому инъективна.

(б) Расширение $(\mathbb{Z}_p^\infty, \mathbb{Z}_{p^m})$ существенно для каждого $m > 0$. Поскольку $\mathbb{Z}_p^\infty = \sup_{m' \geq m} \mathbb{Z}_{p^{m'}}$, достаточно доказать существенность расширений $(\mathbb{Z}_{p^{m'}}, \mathbb{Z}_{p^m})$ для всех $m' > m$. А это вытекает из того, что, как легко видеть, расширение $(\mathbb{Z}_{p^{m+1}}, \mathbb{Z}_{p^m})$ существенное.

§ 3. Свойства инъективных оболочек

Лемма 6.8. Если (P_1, M_1) и (P_2, M_2) — существенные расширения, то и $(P_1 \oplus P_2, M_1 \oplus M_2)$ — существенное расширение ¹⁾.

¹⁾ Пусть μ_i — канонический мономорфизм подобъекта M_i в соответствующий объект P_i ($i = 1, 2$). Тогда $\mu = \mu_1 \oplus \mu_2: M_1 \oplus M_2 \rightarrow P_1 \oplus P_2$ есть мономорфизм. В самом деле, как легко видеть, диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & M_1 & \xrightarrow{\alpha} & M_1 \oplus M_2 & \rightarrow & M_2 \rightarrow 0 \\ & & \mu_1 \downarrow & & \mu \downarrow & & \mu_2 \downarrow \\ 0 & \rightarrow & P_1 & \xrightarrow{\beta} & P_1 \oplus P_2 & \rightarrow & P_2 \rightarrow 0 \end{array}$$

Доказательство¹⁾. Пусть Q — подобъект суммы $P_1 \oplus P_2$. Требуется доказать, что если $Q \neq 0$, то $Q \cap (M_1 \oplus M_2) \neq 0$. Пусть p_1 и p_2 — канонические проекции $P_1 \oplus P_2$ на P_1 и P_2 . Из предположения следует, что $p_1(Q) \neq 0$ или $p_2(Q) \neq 0$. Пусть, скажем, $p_1(Q) \neq 0$. Поскольку $p_1(Q) \subset P_1$, отсюда в силу существенности расширения (P_1, M_1) следует, что $p_1(Q) \cap M_1 \neq 0$ и, значит, $Q_1 = Q \cap p_1^{-1}(M_1) \neq 0$.

Возможны два случая: $p_2(Q_1) \neq 0$ или $Q_1 \subset p_2^{-1}(M_2)$. В первом случае получаем, что $p_2(Q_1) \cap M_2 \neq 0$ и потому $Q_1 \cap p_2^{-1}(M_2) \neq 0$. Но $Q_1 \cap p_2^{-1}(M_2) \subset M_1 \oplus M_2$. Во втором случае получаем, что $Q_1 \subset M_1 \oplus M_2$.

Предложение 6.9. Если I_1 — инъективная оболочка M_1 и I_2 — инъективная оболочка M_2 , то $I_1 \oplus I_2$ есть инъективная оболочка $M_1 \oplus M_2$.

Это явствует из леммы 6.8.

Предложение 6.10. Инъективные оболочки Q_1 и Q_2 объекта X абелевой категории $\mathcal{C}$ изоморфны.

Доказательство. Пусть $f_i: X \rightarrow Q_i$ ($i = 1, 2$) — канонические мономорфизмы. Так как объект Q_2 инъективен, то существует морфизм $\alpha: Q_1 \rightarrow Q_2$, для которого $\alpha f_1 = f_2$. Этот морфизм есть мономорфизм. В самом деле, если $Y = \text{Ker } \alpha \neq 0$, то $Y \cap X \neq 0$ и потому $\text{Ker } (\alpha f_1) \neq 0$, в противоречие с тем, что f_2 — мономорфизм²⁾. С другой стороны, α — эпиморфизм, ибо в противном случае в силу предложения 6.2 объект $\text{Im } \alpha$ был бы нетривиальным прямым слагаемым объекта Q_2 , содержащим $\text{Im } f_2$, а это противоречит тому, что Q_2 — существенное расширение³⁾.

по строкам которой стоят канонические инъекции и проекции, коммутативна. Так как ее строки точны, а μ_2 — мономорфизм, то левый квадрат декартов (лемма 1 из примечания²⁾ на стр. 115). Пусть $(K, \kappa) = \text{Ker } \mu$. Так как $\mu \kappa = 0 = \beta 0$, то существует морфизм $\lambda: K \rightarrow M_1$, для которого $\alpha \lambda = \kappa$ и $\mu_1 \lambda = 0$. Но так как μ_1 — мономорфизм, то из второго равенства следует, что $\lambda = 0$. а тогда в силу первого равенства $\kappa = 0$ и так как κ — мономорфизм, то $K = 0$, т. е. μ — мономорфизм. В утверждении леммы 6.8 подразумевается, что $(P_1 \oplus P_2, M_1 \oplus M_2)$ есть существенное расширение относительно этого мономорфизма μ . Однако, поскольку сумма $M_1 \oplus M_2$ определена лишь с точностью до изоморфизма, ничто не мешает считать теперь $M_1 \oplus M_2$ подобъектом объекта $P_1 \oplus P_2$, а μ — каноническим мономорфизмом.

¹⁾ Помимо установленных ранее свойств пересечений и прообразов под-объектов, в этом доказательстве используются также соотношения $\alpha^{-1}(\alpha(A) \cap B) = A \cap \alpha^{-1}(B)$, $(A_1 \cap A_2) \cap A_3 = A_1 \cap (A_2 \cap A_3)$, $p_1^{-1}(M_1) \cap p_2^{-1}(M_2) = M_1 \oplus M_2$, доказательства которых предоставлены читателю.

²⁾ Мономорфность α и непосредственно следует из того, что $\alpha f_1 = f_2$ — мономорфизм, а f_1 — существенный мономорфизм.

³⁾ Ибо дополнение к $\text{Im } \alpha$ было бы ненулевым подобъектом объекта Q_2 , имеющим с $\text{Im } f_1$ нулевое пересечение.

Теперь мы докажем предложение, устанавливающее существование инъективных оболочек для весьма большого числа категорий.

Предложение 6.11. Пусть Λ — кольцо с единицей. Тогда в категории ${}_{\Lambda}\mathcal{V}$ каждый объект обладает инъективной оболочкой.

В основе доказательства лежит следующая

Лемма. Модуль I инъективен тогда и только тогда, когда он не обладает нетривиальными существенными расширениями.

Доказательство леммы. Предположим, что I инъективен, и пусть B — его существенное расширение. Согласно предложению 6.2, I является прямым слагаемым модуля B и, значит, изоморфен B^1 . Обратно, предположим, что I не имеет нетривиальных собственных расширений. Докажем, что тогда каждое расширение $I \rightarrow B$ расщепляется, откуда в силу предложений 6.5 и 6.1 будет следовать, что I инъективен. Рассмотрим множество $\mathcal{M}$ всех подмодулей X модуля B , для которых $X \cap I = 0$. Оно индуктивно. В самом деле, если $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ — подмножество множества $\mathcal{M}$, линейно упорядоченное по возрастанию, то его объединение $X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ есть подмодуль модуля B , такой, что $X \cap I = 0$, а потому $X \in \mathcal{M}$. Согласно лемме Цорна, $\mathcal{M}$ обладает максимальным элементом M . Очевидно, композиция

$$I \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} B/M$$

есть существенное расширение модуля I^2). Но тогда pi в силу предположения есть изоморфизм и, следовательно, $B = I \oplus M$.

Доказательство предложения 6.11. Пусть A — левый Λ -модуль и $A \rightarrow Q_0$ — существующий по предложению 6.5 мономорфизм этого модуля в инъективный Λ -модуль Q_0 . Пусть, далее, $\mathcal{N}$ — множество всех подмодулей X модуля Q_0 , служащих существенным расширением для A ; оно индуктивно, ибо если $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ — подмножество в $\mathcal{N}$, линейно упорядоченное по возрастанию, то и $\bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ есть существенное расширение модуля A . Согласно лемме

¹) Пусть $i: I \rightarrow B$ — мономорфизм, осуществляющий существенное расширение. Так как I — прямое слагаемое в B , то существует морфизм $p: B \rightarrow I$, такой, что $pi = 1_I$. Но тогда p , с одной стороны, — эпиморфизм (ибо 1_I — эпиморфизм), а с другой — мономорфизм (ибо 1_I — мономорфизм, а i — существенный мономорфизм). Тем самым p и i — изоморфизмы.

²) Действительно, так как $(pi)^{-1}(0) = M \cap I = \{0\}$, то pi — мономорфизм. С другой стороны, если αpi — мономорфизм, так что $p^{-1}\alpha^{-1}(0) \cap I = \{0\}$, то в силу максимальной M имеем $p^{-1}\alpha^{-1}(0) = M = p^{-1}(0)$, откуда $\alpha^{-1}(0) = \{0\}$, т. е. α — мономорфизм.

Цорна, $\mathcal{N}$ обладает максимальным элементом Q , и Q есть существенное расширение модуля A . Пусть теперь Q_1 — существенное расширение модуля Q . Тогда существует мономорфизм $\alpha: Q_1 \rightarrow Q_0$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Q & \rightarrow & Q_0 \\ \downarrow & \nearrow \alpha & \\ Q_1 & & \end{array}$$

в которой $Q \rightarrow Q_0$ есть канонический мономорфизм, определяющий Q как подобъект объекта Q_0 . Но отсюда следует, что Q изоморфен Q_1 , ибо иначе получилось бы противоречие с максимальнойностью Q в $\mathcal{N}$. Таким образом, модуль Q не обладает нетривиальными существенными расширениями и, следовательно, инъективен по лемме.

З а м е ч а н и е. Пусть X — объект абелевой категории $\mathcal{C}$, удовлетворяющей условию АВ5. Если $X \subset Q_0$ и Q_0 — инъективный объект категории $\mathcal{C}$, то перефразировкой предыдущего доказательства можно показать, что X обладает инъективной оболочкой.

§ 4. Проективные объекты

Понятие проективного объекта дуально к понятию инъективного объекта, как это показывает следующее

О п р е д е л е н и е. Объект P абелевой категории $\mathcal{C}$ называется *проективным*, если для каждого эпиморфизма $\alpha: A \rightarrow A'$ и каждого морфизма $u: P \rightarrow A'$ существует морфизм $v: P \rightarrow A$, такой, что $\alpha v = u$.

На диаграммном языке это означает, что каждая диаграмма вида

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & \leftarrow & A' & \leftarrow & A \\ & & \uparrow & & & & \\ & & P & & & & \end{array}$$

с точной строкой $0 \leftarrow A' \leftarrow A$ вложима в коммутативную диаграмму вида

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & \leftarrow & A' & \leftarrow & A \\ & & \uparrow & \nearrow & & & \\ & & P & & & & \end{array}$$

Предложения 6.1 и 6.2 очевидным образом дуализируются для проективных объектов. Также и предложения 6.3 и 6.4 допускают дуализацию, состоящую в замене слов „правый сопряженный“ на „левый сопряженный“ и „инъективный“ на „проективный“.

Проективные объекты категории $\Lambda\mathcal{C}$ характеризуются следующим предложением.

Предложение 6.12. Для того чтобы Λ -модуль P был проективным, необходимо и достаточно, чтобы он был прямым слагаемым свободного Λ -модуля.

Доказательство. Пусть F_P есть Λ -модуль, образованный всеми формальными конечными суммами $\sum \lambda_i x_i$, где $\lambda_i \in \Lambda$, $x_i \in P$. F_P есть свободный Λ -модуль. Отображение $1x \mapsto x$ продолжается до гомоморфизма $\varphi: F_P \rightarrow P$. Если теперь P — проективный модуль, то существует морфизм $\psi: P \rightarrow F_P$, для которого $\varphi\psi = 1_P$. Но это означает, что точная последовательность

$$0 \rightarrow \text{Кер } \varphi \rightarrow F_P \xrightarrow{\varphi} P \rightarrow 0$$

расщепляется, так что P есть прямое слагаемое свободного Λ -модуля F_P .

Нужно еще показать, что каждое прямое слагаемое свободного Λ -модуля проективно. Согласно предложению, дуальному к предложению 6.1, достаточно показать, что каждый свободный Λ -модуль проективен. Пусть F — свободный Λ -модуль с базисом $(x_i)_{i \in I}$, $g: A \rightarrow B$ — эпиморфизм и f — произвольный морфизм $F \rightarrow B$. Для каждого $i \in I$ выберем по элементу $y_i \in A$, для которого $g(y_i) = f(x_i)$. Тогда существует морфизм $h: F \rightarrow A$, для которого $h(x_i) = y_i$ при каждом $i \in I$. Следовательно, $gh = f$, так что F проективен.

Следствие 6.13. Каждый Λ -модуль A есть фактормодуль проективного Λ -модуля.

Доказательство. Достаточно рассмотреть эпиморфизм $F_A \rightarrow A$, указанный в доказательстве предложения 6.12.

Утверждение, что каждый объект категории $\Lambda\mathcal{C}$ обладает проективной оболочкой, неверно. Примеры категорий, в которых каждый объект обладает проективной оболочкой, будут указаны в главе 7.

§ 5. Локализация в кольцах

Нашей целью теперь будет описание всех факторкатегорий категории $\mathcal{C}_\Lambda$ правых модулей над кольцом Λ с единицей. Эта задача тесно связана с понятием инъективной оболочки.

Мы начнем с некоторых рассмотрений общего характера, относящихся к факторкатегориям, определенным в главе 5.

Предложение 6.14. Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ — абелевы категории, $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ — точный функтор и S — его правый сопряженный, предполагаемый вполне универсальным (так что $\mathcal{C}'$ есть фактор-

категория категории $\mathcal{C}$). Обозначим через $\text{Ker } T$ полную подкатегорию категории $\mathcal{C}$, образованную всеми объектами X из $\mathcal{C}$, для которых $T(X) = 0$. Эта подкатегория $\text{Ker } T$ удовлетворяет следующим условиям:

(а) Если в точной последовательности

$$0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$$

объектов и морфизмов из $\mathcal{C}$ объект A принадлежит $\text{Ker } T$, то A' и A'' также принадлежат $\text{Ker } T$, и обратно.

(б) Если $D: \mathcal{D} \rightarrow \text{Ker } T$ есть функтор из малой категории $\mathcal{D}$, для которого существует $\varinjlim D$, то и $\varinjlim D$ есть объект категории $\text{Ker } T$.

Доказательство. Для доказательства утверждения (а) достаточно воспользоваться точностью функтора T . Доказательство утверждения (б) основывается на том, что T , обладая правым сопряженным, сохраняет индуктивные пределы.

Полная подкатегория $\text{Ker } T$ категории $\mathcal{C}$ называется *локализующей подкатегорией*, ассоциированной с факторкатегорией $\mathcal{C}'$. Как мы увидим, между локализующими подкатегориями и факторкатегориями категории $\mathcal{C}_\Delta$ имеется взаимно однозначное соответствие.

Предложение 6.15. В предположениях и обозначениях предложения 6.14, следующие утверждения об объекте X категории $\mathcal{C}$ равносильны:

(а) Если $f: P \rightarrow Q$ — морфизм в $\mathcal{C}$, для которого $\text{Ker } f$ и $\text{Coker } f$ являются объектами подкатегории $\text{Ker } T$, то отображение $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, X)$ биективно.

(б) Объект X не обладает ненулевыми подобъектами из $\text{Ker } T$, и каждая точная последовательность

$$0 \rightarrow X \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow 0,$$

в которой B — объект из $\text{Ker } T$, расщепляется.

Доказательство. Импликация (а) $\Rightarrow$ (б) очевидна¹⁾.

(б) $\Rightarrow$ (а). Пусть $f: P \rightarrow Q$ — морфизм из $\mathcal{C}$, такой, что $\text{Ker } f$ и $\text{Coker } f$ являются объектами из $\text{Ker } T$. Если $p: Q \rightarrow X$ — морфизм,

¹⁾ Если C — подобъект объекта X , принадлежащий $\text{Ker } T$, то надо рассмотреть точную последовательность

$$0 \rightarrow C \rightarrow X \xrightarrow{f} D \rightarrow 0.$$

А в случае точной последовательности $0 \rightarrow X \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow 0$, в которой B — объект из $\text{Ker } T$, за f принять $X \rightarrow A$.

для которого $pf=0$, то $p=0$, поскольку X не содержит под-объектов из $\text{Ker } T^1$). Тем самым $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, X)$ — мономорфизм. Пусть теперь p — произвольный морфизм P в X . Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \text{Ker } f & \xrightarrow{i} & P & \xrightarrow{f} & Q & \xrightarrow{j} & \text{Coker } f \rightarrow 0 \\ & & \downarrow p & \searrow \alpha & \nearrow \beta & & \downarrow u' \\ & & & \text{Coim } f & & & \\ & & \swarrow u & & \searrow & & \\ 0 \rightarrow X & \xrightarrow{\beta'} & X & \coprod_{\text{Coim } f} & Q & \xrightarrow{j'} & \text{Coker } \beta' \rightarrow 0 \end{array}$$

В ней $p \circ i = 0$, поскольку X не содержит подобъектов из $\text{Ker } T$, а α — коядро i . Далее, $\text{Coker } \beta'$ есть объект из $\text{Ker } T$ вместе с $\text{Coker } f^2$). Поэтому существует морфизм $\gamma: X \coprod_{\text{Coim } f} Q \rightarrow X$, для которого $\gamma\beta' = 1_X^3$). Но тогда $\gamma u' f = \gamma u' \beta \alpha = \gamma \beta' u \alpha = p$, а это показывает, что $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, X)$ есть эпиморфизм.

Определение. В предположениях и обозначениях предложения 6.14, объект X из $\mathcal{C}$, удовлетворяющий одному из равно-

¹) Если $pf=0$, то p пропускается через $\text{Coker } f$. Но если C (в данном случае $\text{Coker } f$) есть объект из $\text{Ker } T$, то всякий морфизм $\alpha: C \rightarrow X$, разлагаясь каноническим образом в композицию $C \rightarrow \text{Im } \alpha \rightarrow X$, необходимо равен нулю, поскольку $\text{Im } \alpha \in \text{Ob Ker } T$ вместе с C и, значит, $\text{Im } \alpha = 0$.

²) Действительно, так как $\text{Coker } f = \text{Coker } \beta$, то существует морфизм $v: \text{Coker } f \rightarrow \text{Coker } \beta'$, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \text{Coim } f & \xrightarrow{\beta} & Q & \xrightarrow{j} & \text{Coker } f \\ \downarrow u & & \downarrow u' & & \downarrow v \\ X & \xrightarrow{\beta'} & X \coprod_{\text{Coim } f} Q & \xrightarrow{j'} & \text{Coker } \beta' \end{array}$$

Но левый квадрат этой диаграммы кодекартов (см. примечание ³) на стр. 46). А тогда по свойству кодекартовых квадратов, справедливому во всех „предабелевых“ категориях, v есть изоморфизм. В самом деле, так как $j\beta = 0 = 0u$, то существует морфизм a , такой, что $au' = j$ и $a\beta' = 0$. В силу последнего равенства и равенства $j' = \text{coker } \beta'$ существует морфизм w , для которого $wj' = a$. Тогда, прежде всего, $vwj = wj'u' = au' = j$, откуда $wv = 1_{\text{Coker } f}$. С другой стороны, $vwj' = va$. Но $va u' = vj = j'u'$ и $va\beta' = 0 = j'\beta'$, откуда $va = j'$. Поэтому $vwj' = j'$ и, следовательно, $wv = 1_{\text{Coker } \beta'}$. Таким образом, $\text{Coker } \beta'$ изоморфен $\text{Coker } f$, а так как $\text{Coker } f \in \text{Ob Ker } T$, то и $\text{Coker } \beta' \in \text{Ob Ker } T$.

³) Так как левый квадрат диаграммы предыдущего примечания кодекартов и β — мономорфизм, то в силу свойства, двойного свойству (v), приведенному на стр. 129, β' — также мономорфизм. Поэтому строка

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{\beta'} X \coprod_{\text{Coim } f} Q \xrightarrow{j'} \text{Coker } \beta' \rightarrow 0$$

точна, и так как $\text{Coker } \beta'$ — объект из $\text{Ker } T$, то по предположению она расщепляется.

сильных утверждений предложения 6.15, называется *Кер T -замкнутым* (или просто *замкнутым*, если можно не опасаться путаницы).

Докажем теперь предложение, характеризующее замкнутые объекты.

Предложение 6.16. *В предположениях и обозначениях предложения 6.14, объект X из $\mathcal{C}$ Кер T -замкнут тогда и только тогда, когда он изоморфен объекту вида $S(X')$, где X' — объект из $\mathcal{C}'$.*

Доказательство. Пусть X' — объект из $\mathcal{C}'$ и $f: P \rightarrow Q$ — морфизм из $\mathcal{C}$, для которого $\text{Ker } f$ и $\text{Coker } f$ — объекты из $\text{Ker } T$. Тогда Tf есть изоморфизм в $\mathcal{C}'$, и так как мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, SX') & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, SX')} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, SX') \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(TQ, X') & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(Tf, X')} & \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(TP, X') \end{array}$$

где вертикальные стрелки означают изоморфизмы, то $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, SX')$ есть изоморфизм. Для завершения доказательства рассмотрим функторные морфизмы $\Phi: 1_{\mathcal{C}} \rightarrow ST$ и $\Psi: TS \rightarrow 1_{\mathcal{C}'}$, для которых $\Psi(T(A))T(\Phi(A)) = 1_{T(A)}$ и $S(\Psi(B))\Phi(S(B)) = 1_{S(B)}$, каковы бы ни были объекты A из $\mathcal{C}$ и B из $\mathcal{C}'$ (см. предложение 1.13; Φ и Ψ будут называться далее квазиобратными друг другу морфизмами сопряжения). Достаточно доказать, что $\text{Ker } \Phi(X)$ и $\text{Coker } \Phi(X)$ являются объектами из $\text{Ker } T$ для каждого объекта X из $\mathcal{C}$ ¹⁾. Поскольку Ψ в силу предложения 1.13' есть изоморфизм, из соотношения $\Psi(T(X))T(\Phi(X)) = 1_{T(X)}$ вытекает, что $T\Phi(X)$ — изоморфизм, чем доказательство в силу точности T и завершается.

Пусть X — инъективный объект из $\mathcal{C}$, не содержащий ненулевых подобъектов, принадлежащих $\text{Ker } T$. Как следует из предложения 6.15(б), X Кер T -замкнут. Нетрудно видеть, что TX — инъективный объект категории $\mathcal{C}'$ ²⁾.

¹⁾ Действительно, если тогда объект X Кер T -замкнут, то отображение $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\Phi(X), X): \text{Hom}_{\mathcal{C}}(STX, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ биективно, так что существует морфизм $\alpha: STX \rightarrow X$, для которого $\alpha\Phi(X) = 1_X$. Поэтому точная последовательность

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{\Phi(X)} STX \rightarrow \text{Coker } \Phi(X) \rightarrow 0$$

расщепляется, так что $\text{Coker } \Phi(X)$ изоморфен подобъекту объекта STX . Так как STX по доказанному выше Кер T -замкнут, а $\text{Coker } \Phi(X) \in \text{Ob Ker } T$, то $\text{Coker } \Phi(X) = 0$ и, значит, $\Phi(X)$ — изоморфизм. Тем самым каждый Кер T -замкнутый объект X изоморфен объекту вида SX' , а именно объекту STX . Вместе с тем доказано, что X Кер T -замкнут тогда и только тогда, когда $\Phi(X)$ — изоморфизм.

²⁾ Действительно, пусть $i: A' \rightarrow B'$ — мономорфизм и $u: A' \rightarrow TX$ — морфизм в $\mathcal{C}'$. Так как X Кер T -замкнут, то $\Phi(X)$ — изоморфизм (см. предыдущее при-

Следствие 6.17. В предположениях и обозначениях предложения 6.14, если $\mathcal{C}$ есть категория с инъективными оболочками, то то же верно и для $\mathcal{C}'$.

Доказательство. Пусть X' — объект из $\mathcal{C}'$ и $i: SX' \rightarrow Q$ — инъективная оболочка объекта SX' . Объект Q не содержит ненулевых подобъектов из $\text{Ker } T^1$) и потому замкнут. Следовательно, TQ инъективен в $\mathcal{C}'$ и $Ti: TSX' \rightarrow TQ$ — существенное расширение²⁾.

Предложение 6.18. В предположениях и обозначениях предложения 6.14, обозначим через $\mathcal{C}_1$ полную подкатегорию категории $\mathcal{C}$, образованную всеми $\text{Ker } T$ -замкнутыми объектами. $\mathcal{C}_1$ можно канонически превратить в абелеву категорию и S устанавливает эквивалентность между этой категорией и $\mathcal{C}$.

Доказательство. Пусть $\Phi: 1_{\mathcal{C}} \rightarrow ST$ и $\Psi: TS \rightarrow 1_{\mathcal{C}'}$ — квази-обратные друг другу морфизмы сопряжения. Пусть, далее, X и Y — $\text{Ker } T$ -замкнутые объекты из $\mathcal{C}$, т. е., согласно предложению 6.16, $\Phi(X)$ и $\Phi(Y)$ — изоморфизмы, и пусть $f: X \rightarrow Y$ — морфизм из $\mathcal{C}_1$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \text{Ker } f & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{p} & \text{Coker } f \rightarrow 0 \\ \Phi(\text{Ker } f) \downarrow & & \Phi(X) \downarrow i & & \Phi(Y) \downarrow i & & \downarrow \Phi(\text{Coker } f) \\ ST(\text{Ker } f) & \xrightarrow{STi} & STX & \xrightarrow{STf} & STY & \xrightarrow{STp} & ST(\text{Coker } f) \end{array}$$

мечание). С другой стороны, поскольку S точен слева (предложение 5.17), $S(i)$ — мономорфизм. Поэтому в силу инъективности X существует морфизм v , такой, что $vS(i) = \Phi(X)^{-1}S(i)$. Применяя функтор T и принимая во внимание, что Ψ — изоморфизм, заключаем, что

$$u = \Psi(TX)T(\Phi(X))T(v)\Psi(B')^{-1}i = T(v)\Psi(B')^{-1}i,$$

чем инъективность TX и доказана.

¹⁾ Пусть A — подобъект объекта Q , такой, что $A \in \text{Ob } \text{Ker } T$. Тогда и $A \cap SX' \in \text{Ob } \text{Ker } T$, и так как объект SX' по предложению 6.16 замкнут, то $A \cap SX' = 0$. Поскольку Q — существенное расширение SX' , отсюда следует, что $A = 0$.

²⁾ Так как T точен, то Ti — мономорфизм. Пусть $\alpha: TQ \rightarrow A'$ — морфизм, для которого $\alpha \circ Ti$ есть мономорфизм. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} STSX' & \xrightarrow{STi} & STQ \xrightarrow{Sa} SA' \\ \Phi(SX') \uparrow & & \uparrow \Phi(Q) \\ SX' & \xrightarrow{i} & Q \end{array}$$

Так как SX' и Q замкнуты, то ее вертикальные стрелки — изоморфизмы (см. примечание ¹⁾ на стр. 156). С другой стороны, поскольку S точен слева, $Sa \circ STi = S(\alpha \circ Ti)$ есть мономорфизм. Но тогда и $Sa \circ \Phi(Q)i$ — мономорфизм. Так как i — существенный мономорфизм, то заключаем, что $Sa \circ \Phi(Q)$, а значит, и Sa — мономорфизм. А в силу унивалентности функтора S отсюда следует, что и α — мономорфизм.

где верхняя строка точна в $\mathcal{C}$. Ядром f в $\mathcal{C}_1$ служит пара $(ST(\text{Ker } f), \Phi(X)^{-1} \circ STi)$, а коядром f в $\mathcal{C}_1$ — пара $(ST(\text{Coker } f), STp \circ \Phi(Y))$. Предоставляем читателю проверку абелевости категории $\mathcal{C}_1$.

Морфизм f в $\mathcal{C}_1$ есть мономорфизм тогда и только тогда, когда он мономорфизм в $\mathcal{C}$; f есть эпиморфизм в $\mathcal{C}_1$ тогда и только тогда, когда $\text{Coker } f$ есть объект категории $\text{Ker } T$. То, что S устанавливает эквивалентность между категориями $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}$, вытекает из того, что S вполне унивалентен и каждый объект X из $\mathcal{C}_1$ изоморфен STX^1).

Как было обещано в начале параграфа, рассмотрим теперь вкратце локализацию в кольцах, т. е. факторкатегории категории $\mathcal{C}_\Lambda$.

Пусть Λ — кольцо с единицей и $\mathcal{C}_\Lambda$ — категория унитарных правых Λ -модулей. Пусть, далее, $\mathcal{C}'$ — факторкатегория категории $\mathcal{C}_\Lambda$, т. е. абелева категория вместе с двумя функторами: точным функтором $T: \mathcal{C}_\Lambda \rightarrow \mathcal{C}'$ и его вполне унивалентным правым сопряженным $S: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}_\Lambda$. Мы докажем, что категория $\text{Ker } T$ определяет категорию $\mathcal{C}'$ с точностью до эквивалентности. Точнее говоря, пусть $\mathcal{C}'$ и $\mathcal{C}''$ — факторкатегории категории $\mathcal{C}_\Lambda$ с соответствующими функторами T', S' и T'', S'' . Мы называем $\mathcal{C}'$ и $\mathcal{C}''$ эквивалентными факторкатегориями, если существует эквивалентность $H: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}''$, для которой $H \circ T' = T''$. В этом случае локализующие категории $\text{Ker } T'$ и $\text{Ker } T''$ каноническим образом совпадают. Под факторкатегорией категории $\mathcal{C}_\Lambda$ мы будем понимать „класс эквивалентных факторкатегорий“.

Определение. Полная подкатегория $\mathcal{A}$ категории $\mathcal{C}_\Lambda$ называется *локализирующей*, если она удовлетворяет следующим условиям:

(а) Если в точной последовательности

$$0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$$

объектов и морфизмов категории $\mathcal{C}_\Lambda$ объект A принадлежит $\mathcal{A}$, то и объекты A' и A'' принадлежат $\mathcal{A}$, и обратно.

(б) Индуктивный предел объектов из $\mathcal{A}$, взятый в $\mathcal{C}_\Lambda$, есть объект из $\mathcal{A}^2$).

¹⁾ См. предложение 1.19.

²⁾ Отметим используемые в дальнейшем свойства локализирующей подкатегории $\mathcal{A}$ категории $\mathcal{C}_\Lambda$. 1) Если $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$ и $i: A' \rightarrow A$ — изоморфизм, то $A' \in \text{Ob } \mathcal{A}$ (ибо точна последовательность $0 \rightarrow A' \xrightarrow{i} A \rightarrow 0 \rightarrow 0$). 2) Если $A', A'' \in \text{Ob } \mathcal{A}$, то $A' \oplus A'' \in \text{Ob } \mathcal{A}$ (ибо имеется каноническая точная последовательность $0 \rightarrow A' \rightarrow A' \oplus A'' \rightarrow A'' \rightarrow 0$). Следовательно, и прямая сумма любого конечного семейства объектов из $\mathcal{A}$ есть объект из $\mathcal{A}$. 3) Прямая сумма любого вообще семейства объектов из $\mathcal{A}$ есть объект из $\mathcal{A}$ (как индуктивный предел сумм конечных подсемейств). 4) Если $(A_i)_{i \in I}$ — семейство подмодулей правого Λ -модуля A , принадлежащих $\mathcal{A}$, то и подмодуль $\sum_{i \in I} A_i$ модуля A принадлежит $\mathcal{A}$ (как эпиморфный образ прямой суммы $\bigoplus_{i \in I} A_i$).

Локализирующие подкатегории уже появлялись в связи с предложением 6.14; однако введенное сейчас понятие не зависит ни от какого понятия факторкатегории; напротив, ниже мы определим факторкатегории, отправляясь от локализирующих категорий. Для этого мы воспользуемся следующим понятием:

Определение. Пусть Λ — кольцо с единицей и $\mathcal{F}$ — некоторая система его правых идеалов. Будем называть $\mathcal{F}$ *топологизирующей системой идеалов* в Λ , если выполнены следующие аксиомы:

$$1. \Lambda \in \mathcal{F}.$$

2. Если $a \in \mathcal{F}$, то и идеал

$$\{a : \mu\} = \{\lambda \mid \lambda \in \Lambda, \mu\lambda \in a\}$$

для каждого $\mu \in \Lambda$ есть элемент из $\mathcal{F}$.

3. Если a и b — правые идеалы кольца Λ , такие, что $a \in \mathcal{F}$ и $\{b : \mu\} \in \mathcal{F}$ для каждого $\mu \in a$, то $b \in \mathcal{F}$ ¹⁾.

Введенное сейчас понятие будет оправдано приводимыми ниже предложениями, равно как и последующими построениями.

Предложение 6.19. Пусть Λ — кольцо с единицей. Имеется взаимно однозначное соответствие между локализирующими подкатегориями категории $\mathcal{C}_\Lambda$ и топологизирующими системами идеалов в Λ .

Доказательство. Пусть U — множество всех топологизирующих систем правых идеалов кольца Λ и V — класс всех локализирующих подкатегорий категории $\mathcal{C}_\Lambda$. Определим отображение $\varphi: U \rightarrow V$ следующим образом: $\varphi(\mathcal{F})$ для каждого элемента $\mathcal{F}$ из U есть полная подкатегория категории $\mathcal{C}_\Lambda$, образованная всеми модулями A , обладающими тем свойством, что $\text{Ann } x = \{\lambda \mid \lambda \in \Lambda, x\lambda = 0\}$ есть правый идеал из $\mathcal{F}$ для всех $x \in A$. Легко проверить, что $\varphi(\mathcal{F})$ есть локализирующая подкатегория категории $\mathcal{C}_\Lambda$ ²⁾. Далее, определим отображение $\psi: V \rightarrow U$

¹⁾ Отметим используемые в дальнейшем свойства топологизирующей системы идеалов $\mathcal{F}$. 1) Если $a \in \mathcal{F}$ и b — правый идеал кольца Λ , содержащий a , то $b \in \mathcal{F}$ (если $\mu \in a$, то $\mu \in b$ и потому $\{b : \mu\} = \Lambda \in \mathcal{F}$). 2) Если $a, b \in \mathcal{F}$, то $a \cap b \in \mathcal{F}$ ($\{a \cap b : \mu\} = \{a : \mu\} \cap \{b : \mu\} = \{a : \mu\} \in \mathcal{F}$ для каждого $\mu \in b$). Таким образом, система $\mathcal{F}$ направлена по убыванию.

²⁾ Пусть $A \in \text{Ob } \varphi(\mathcal{F})$. Если $\alpha: A' \rightarrow A$ — мономорфизм, то $\text{Ann } x' = \text{Ann } \alpha(x') \in \mathcal{F}$ для всех $x' \in A'$, т. е. $A' \in \text{Ob } \varphi(\mathcal{F})$; если $\beta: A \rightarrow A''$ — эпиморфизм, то для каждого $x'' \in A''$ существует $x \in A$, такое, что $x'' \in \beta(x)$, откуда $\text{Ann } x'' \supset \text{Ann } x$, и так как $\text{Ann } x \in \mathcal{F}$, то $\text{Ann } x'' \in \mathcal{F}$, так что $A'' \in \text{Ob } \varphi(\mathcal{F})$. Обратно, пусть в точной последовательности $0 \rightarrow A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A'' \rightarrow 0$ объекты A' и A'' принадлежат $\mathcal{A}$, и пусть $x \in A$. Если $\mu \in \text{Ann } \beta(x)$, т. е. $\beta(x\mu) = 0$, то $x\mu = \alpha(x')$ для некоторого $x' \in A'$ и потому $\{\text{Ann } x : \mu\} = \text{Ann } (x\mu) = \text{Ann } x' \in \mathcal{F}$; поскольку $\text{Ann } \beta(x) \in \mathcal{F}$, заключаем тогда, что $\text{Ann } x \in \mathcal{F}$, так что $A \in \text{Ob } \varphi(\mathcal{F})$. Как и в примечании ²⁾ на стр. 158, отсюда

следующим образом: $\psi(\mathcal{A})$ для каждой локализующей подкатегории $\mathcal{A}$ категории $\mathcal{C}_\Lambda$ есть система всех правых идеалов кольца Λ , каждый из которых есть аннулятор какого-либо элемента объекта из $\mathcal{A}$. Прямая проверка показывает, что $\psi(\mathcal{A})$ — топологизирующая система¹⁾, причем $\varphi \circ \psi = 1$ ²⁾ и $\psi \circ \varphi = 1$ ³⁾ (где 1 — надлежащее тождественное отображение).

Рассмотрим теперь категорию $\mathcal{C}_\Lambda$ и ее локализующую подкатегорию $\mathcal{A}$. Обозначим через $\mathcal{F}$ топологизирующую систему, ассоциированную с $\mathcal{A}$ по предложению 6.19, и определим функтор $H: \mathcal{C}_\Lambda \rightarrow \mathcal{C}_\Lambda$ следующим образом. Для каждого объекта X из $\mathcal{C}_\Lambda$ обозначим через X_1 наибольший его подобъект из $\mathcal{A}$ (существование которого обеспечивается замкнутостью $\mathcal{A}$ относительно индуктивных пределов) и рассмотрим абелеву группу

$$H(X) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ a \in \mathcal{F}}} \text{Hom}_\Lambda(a, X/X_1)^4).$$

следует, что прямая сумма каждого конечного семейства модулей из $\varphi(\mathcal{F})$ принадлежит $\varphi(\mathcal{F})$. Тогда то же верно и для прямой суммы любого вообще семейства модулей из $\varphi(\mathcal{F})$, поскольку каждый ее элемент содержится в прямой сумме некоторого конечного подсемейства. И наконец, любой индуктивный предел модулей из $\varphi(\mathcal{F})$ принадлежит $\varphi(\mathcal{F})$, как эпиморфный образ их прямой суммы. Тем самым $\varphi(\mathcal{F})$ — локализующая подкатегория категории $\mathcal{C}_\Lambda$.

¹⁾ Выполнение аксиом 1 и 2 очевидно. Покажем, что $i \in \psi(\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда $\Lambda/i \in \mathcal{A}$. В самом деле, если $i \in \psi(\mathcal{A})$, т. е. $i = \text{Апп } x$, где $x \in A \in \text{Об } \mathcal{A}$, то $\Lambda/i \approx x\Lambda \subset A$, и так как $x\Lambda \in \text{Об } \mathcal{A}$, то $\Lambda/i \in \text{Об } \mathcal{A}$; обратно, так как $\Lambda/i = (1 + i/i)\Lambda$ и $i = \text{Апп}(1 + i/i)$, то $\Lambda/i \in \text{Об } \mathcal{A}$ влечет $i \in \psi(\mathcal{A})$. Пусть теперь $a \in \psi(\mathcal{A})$ и b — правый идеал в Λ , такой, что $\{b: \mu\} \in \psi(\mathcal{A})$ для всех $\mu \in a$. Обозначим через β канонический гомоморфизм Λ на Λ/b и через γ_μ для каждого $\mu \in \Lambda$, — гомоморфизм, определяемый формулой $\gamma_\mu(\lambda) = \beta(\mu\lambda)$ ($\lambda \in \Lambda$). Так как $\{b: \mu\} = \text{Кер } \gamma_\mu$, то $\Lambda/\{b: \mu\} \approx \approx \text{Im } \gamma_\mu = \beta(\mu\Lambda) = \beta\beta^{-1}\beta(\mu\Lambda) = \beta(\mu\Lambda + b)$ и, значит, подмодуль $\beta(\mu\Lambda + b)$ модуля Λ/b принадлежит $\mathcal{A}$ для всех $\mu \in a$. Тогда и $a + b/b = \beta(a\Lambda + b) = \sum_{\mu \in \Lambda} \beta(\mu\Lambda + b) \in \text{Об } \mathcal{A}$. С другой стороны, и $a + b/a \in \text{Об } \mathcal{A}$, поскольку

$A/a \in \mathcal{A}$, а $a + b/a \subset \Lambda/a$. Поэтому и $\Lambda/a + b (\approx (A/a)/(a + b/a)) \in \text{Об } \mathcal{A}$. В силу точности последовательности $0 \rightarrow a + b/b \rightarrow \Lambda/b \rightarrow \Lambda/a + b \rightarrow 0$ заключаем, что $\Lambda/b \in \mathcal{A}$ и, значит, $b \in \psi(\mathcal{A})$.

²⁾ Очевидно, $\mathcal{A} \subset \varphi(\psi(\mathcal{A}))$. Обратно, если $B \in \text{Об } \varphi(\psi(\mathcal{A}))$ и $y \in B$, то $\text{Апп } y \in \psi(\mathcal{A})$, т. е. существуют A из $\mathcal{A}$ и $x \in A$, такие, что $\text{Апп } y = \text{Апп } x$. Так как тогда $y\lambda \mapsto x\lambda$ есть изоморфизм $y\Lambda$ на $x\Lambda$, а $x\Lambda \in \text{Об } \mathcal{A}$, то $y\Lambda \in \text{Об } \mathcal{A}$. Следовательно, и $B = \sum_{y \in B} y\Lambda \in \text{Об } \mathcal{A}$.

³⁾ Очевидно, $\psi(\varphi(\mathcal{F})) \subset \mathcal{F}$. Обратно, если $a \in \mathcal{F}$, то $\Lambda/a \in \text{Об } \varphi(\mathcal{F})$ и потому $a (= \text{Апп}(1 + a/a)) \in \psi(\varphi(\mathcal{F}))$.

⁴⁾ Как уже отмечалось в примечании ¹⁾ на стр. 159, система $\mathcal{F}$ направлена по убыванию. Для каждой пары $a, b \in \mathcal{F}$, такой, что $b \subset a$, имеется гомоморфизм $\text{Hom}_\Lambda(a, X/X_1) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(b, X/X_1)$, индуцированный тождественным вложением b в a . Очевидно, абелевы группы $\text{Hom}_\Lambda(a, X/X_1)$ с этими гомоморфизмами образуют индуктивную систему над $\mathcal{F}$. Под $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ a \in \mathcal{F}}} \text{Hom}_\Lambda(a, X/X_1)$ понимается ее предел.

Мы превратим ее в правый Λ -модуль следующим образом. Пусть $m \in H(X)$ и $\lambda \in \Lambda$. Обозначим через $\bar{\lambda}$ отображение $x \mapsto \lambda x$ кольца Λ в себя. Пусть теперь $u: \alpha \rightarrow X/X_1$ — морфизм из $\mathcal{C}_\Lambda$, представляющий элемент m индуктивного предела. Рассмотрим элемент $\{\alpha: \lambda\} \in \mathcal{F}$ и обозначим через $\bar{\lambda}_1$ сужение $\bar{\lambda}$ на $\{\alpha: \lambda\}$. Образ отображения $\bar{\lambda}_1$ содержится в α . По определению принимаем за $m\lambda$ образ морфизма $u \circ \bar{\lambda}_1$ в индуктивном пределе $H(X)$. Так $H(X)$ становится Λ -модулем.

Пусть теперь $f: X \rightarrow Y$ — морфизм из $\mathcal{C}_\Lambda$. Ясно, что $f(X_1)$ содержится в Y_1 . Поэтому f индуцирует единственный морфизм $f': X/X_1 \rightarrow Y/Y_1$. В свою очередь f' индуцирует единственный морфизм $H(f): H(X) \rightarrow H(Y)$, являющийся гомоморфизмом правых Λ -модулей. Этим построение функтора H завершено.

Топологизирующая система $\mathcal{F}$, упорядоченная по убыванию, является направленным множеством¹⁾. Из построения H и того, что категория $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию АВ5, вытекает, что функтор H точен слева. Кроме того, для любого объекта X из $\mathcal{A}$ имеем $H(X) = 0$, поскольку $X_1 = X$.

Если α_Λ — канонический морфизм $\text{Hom}_\Lambda(\Lambda, X/X_1)$ в индуктивный предел $H(X)$, $\beta: X/X_1 \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(\Lambda, X/X_1)$ — канонический изоморфизм и $\rho: X \rightarrow X/X_1$ — канонический эпиморфизм, то $\Phi(X) = \alpha_\Lambda \beta \rho$ есть Λ -гомоморфизм X в $H(X)$, определяющий функторный морфизм $\Phi: 1_{\mathcal{A}} \rightarrow H$.

Относительно этого функторного морфизма Φ докажем следующее

Предложение 6.20. *$\text{Ker } \Phi(X)$ и $\text{Coker } \Phi(X)$ являются объектами из $\mathcal{A}$ для каждого объекта X из $\mathcal{C}_\Lambda$.*

Доказательство. Очевидно, $\text{Ker } \Phi(X)$ содержит X_1 . Покажем, что канонический морфизм $\alpha_\Lambda \beta: X/X_1 \rightarrow H(X)$ есть мономорфизм, или, что равносильно этому, что $\Phi(X)$ есть мономорфизм для каждого X , не имеющего ненулевых подобъектов из $\mathcal{A}$ ²⁾. В самом деле, пусть X не имеет ненулевых подобъектов из $\mathcal{A}$ и элемент $x \in X$ таков, что $\Phi(X)(x) = 0$. Тогда (на основании свойств индуктивных пределов) существует элемент $\alpha \in \mathcal{F}$, такой, что, если через $\bar{x}: \Lambda \rightarrow X$ обозначить Λ -гомоморфизм, определенный равенством $\bar{x}(\lambda) = x\lambda$, и через $i: \alpha \rightarrow \Lambda$ — каноническое вложение, то будем иметь $\bar{x} \circ i = 0$. Но это означает, что α содержится в $\text{Ann } x$, откуда следует, что $x = 0$ (легко видеть, что если b — правый

¹⁾ См. примечание ¹⁾ на стр. 159.

²⁾ Для всякого подмодуля Y модуля X/X_1 имеем точную последовательность $0 \rightarrow X_1 \rightarrow p^{-1}(Y) \rightarrow Y \rightarrow 0$, где p — канонический эпиморфизм X на X/X_1 . Если $Y \in \text{Ob } \mathcal{A}$, то, поскольку $X_1 \in \text{Ob } \mathcal{A}$, $p^{-1}(Y)$ также есть объект из $\mathcal{A}$ и, значит, в силу максимальности X_1 $p^{-1}(Y) = X_1$, т. е. $Y = \{0\}$. Таким образом, X/X_1 не содержит ненулевых подобъектов из $\mathcal{A}$.

идеал кольца Λ , содержащий идеал из $\mathcal{F}$, то $b \in \mathcal{F}$ ¹⁾). Таким образом, $\text{Кег } \Phi(X) = X_1$ ²⁾.

Пусть теперь $x \in H(X)$. Докажем, что правый идеал

$$\{\text{Im } \Phi(X) : x\} = \{\lambda \mid \lambda \in \Lambda, x\lambda \in \text{Im } \Phi(X)\}$$

принадлежит $\mathcal{F}$ ³⁾. Для простоты предположим, что $\Phi(X)$ — мономорфизм, что не ограничит общности. Пусть $u: a \rightarrow X$ есть Λ -гомоморфизм, представляющий элемент x индуктивного предела $H(X)$. Согласно построению Λ -модуля $H(X)$, $x\lambda$ определено для каждого $\lambda \in \Lambda$ как образ в индуктивном пределе $H(X)$ Λ -гомоморфизма $u \circ \bar{\lambda}_1$, где $\bar{\lambda}_1: \{a: \lambda\} \rightarrow a$ определяется равенством $\bar{\lambda}_1(y) = \lambda y$ ($y \in \{a: \lambda\}$). Для того чтобы $x\lambda \in \text{Im } \Phi(X)$ (т. е. $\lambda \in \{\text{Im } \Phi(X) : x\}$), необходимо, чтобы $x\lambda = \Phi(X)(x')$, где $x' \in X$. В рассматриваемом случае морфизм $\Phi(X)$ можно отождествить с каноническим морфизмом $\alpha_\Lambda: \text{Hom}_\Lambda(\Lambda, X) \rightarrow H(X)$. С учетом этого замечания соотношение $x\lambda = \Phi(X)(x')$ равносильно существованию такого элемента $b \in \mathcal{F}$, содержащегося в $\{a: \lambda\}$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & \{a: \lambda\} & \xrightarrow{\bar{\lambda}_1} a \\ & \nearrow i & \searrow u \\ b & & X \\ & \searrow j & \nearrow \bar{x}' \\ & \Lambda & \end{array} \quad (*)$$

где i и j — канонические мономорфизмы, а $\bar{x}'$ определено равенством $\bar{x}'(y) = x'y$ ($y \in \Lambda$). Обозначим идеал $\{\text{Im } \Phi(X) : x\}$ через c , и пусть $y \in a$. Докажем, что $\{c: y\} \in \mathcal{F}$. Элемент $z \in \Lambda$ принадлежит $\{c: y\}$, если $yz \in c$, т. е. если имеет место коммутативная диаграмма вида (*), где λ заменено на yz . Но диаграмма такого вида имеется для любого элемента из a ⁴⁾. Следовательно, $\{c: y\}$ содержит a и, значит, $\{c: y\} \in \mathcal{F}$ для каждого $y \in a$.

¹⁾ См. примечание ¹⁾ на стр. 159. В рассматриваемом случае $b = \text{App } x$. Тем самым подмодуль $x\Lambda$ модуля X есть объект из $\mathcal{A}$, и, значит, $x\Lambda = \{0\}$, т. е. $x = x \cdot 1 = 0$.

²⁾ Отсюда следует, что если $H(X) = 0$, то $X \in \text{Ob } \mathcal{A}$. Действительно, тогда $\text{Кег } \Phi(X) = X$ и, значит, $X = X_1$. Таким образом, $H(X) = 0$ тогда и только тогда, когда X — объект из $\mathcal{A}$.

³⁾ Этим и будет доказано, что $\text{Сокер } \Phi(X) \in \text{Ob } \mathcal{A}$, ибо каждый элемент $y \in \text{Сокер } \Phi(X)$ есть образ некоторого элемента $x \in H(X)$ относительно канонического эпиморфизма $H(X) \rightarrow \text{Сокер } \Phi(X)$ (имеющего своим ядром $\text{Im } \Phi(X)$), причем $\text{App } y = \{\text{Im } \Phi(X) : x\}$.

⁴⁾ Если $\lambda \in a$, то $\{a: \lambda\} = \Lambda$ и мы для каждого $u: a \rightarrow X$ получим коммутативную диаграмму вида (*), взяв $b = \Lambda$, $i = j = 1_\Lambda$ и $\bar{x}' = u \circ \bar{\lambda}_1$, т. е. $x' = u(\lambda)$.

Из аксиомы 3 определения топологизирующей системы вытекает тогда, что $c \in \mathcal{F}$, и предложение доказано.

Определение. Λ -модуль X называется *замкнутым* относительно локализующей подкатегории $\mathcal{A}$, если гомоморфизм $\Phi(X)$ есть изоморфизм.

Из проведенного выше построения вытекает справедливость следующих замечаний:

1. Объект $H(X)$ не содержит ненулевых подобъектов из $\mathcal{A}$ ни для какого объекта X из $\mathcal{E}_\Lambda$.

Это следует из построения $H(X)$ ¹⁾.

2. Если X — замкнутый объект категории $\mathcal{E}_\Lambda$, то каждая точная последовательность

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{i} Y \rightarrow A \rightarrow 0$$

в $\mathcal{E}_\Lambda$, где A — объект из $\mathcal{A}$, расщепляется.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & X & \xrightarrow{i} & Y & \rightarrow & A \rightarrow 0 \\ & & \Phi(X) \downarrow & & \downarrow \Phi(Y) & & \\ 0 & \rightarrow & H(X) & \xrightarrow{H(i)} & H(Y) & \rightarrow & H(A) \end{array}$$

Так как нижняя строка точна и $H(A) = 0$, то $H(i)$ — изоморфизм. Поэтому $(\Phi(X))^{-1} \circ H(i)^{-1} \circ \Phi(Y) \circ i = 1_X$.

3. Объект $H(X)$ замкнут для каждого объекта X из $\mathcal{E}_\Lambda$.

Чтобы убедиться в этом, заметим, что канонический эпиморфизм $p: X \rightarrow X/X_1$, участвующий в построении функтора H , индуцирует для каждого объекта X из $\mathcal{E}_\Lambda$ изоморфизм $H(p)$ ²⁾. При этом имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & X/X_1 \\ \Phi(X) \downarrow & & \downarrow \Phi(X/X_1) \\ H(X) & \xrightarrow{H(p)} & H(X/X_1) \end{array}$$

¹⁾ Пусть A — подобъект объекта $H(X)$, принадлежащий $\mathcal{A}$, $x \in A$ и $u: a \rightarrow X/X_1$ — гомоморфизм, представляющий x . Если $\lambda \in \text{Апп } x$, то существует правый идеал $b \in \mathcal{F}$, содержащийся в $\{a: \lambda\}$ и такой, что сужение гомоморфизма $u \circ \bar{\lambda}_1$, представляющего $x\lambda$, на b равно нулю, т. е. $u(\lambda)\mu = 0$ для всех $\mu \in b$, так что $b \subset \text{Апп } u(\lambda)$. Тогда $\text{Апп } u(\lambda) \in \mathcal{F}$, т. е. $u(\lambda) \wedge \in \text{Об } \mathcal{A}$ и, значит, $u(\lambda) = 0$, поскольку X/X_1 не содержит ненулевых подобъектов из $\mathcal{A}$. Таким образом, $\text{Апп } x \subset \text{Кер } u$, и так как $\text{Апп } x \in \text{Об } \mathcal{A}$, то и $\text{Кер } u \in \text{Об } \mathcal{A}$. Но в таком случае x , как образ в $H(X)$ нулевого гомоморфизма $u \circ \text{Кер } u$ из $\text{Нот}_\Lambda(\text{Кер } u, X/X_1)$, равен нулю, так что $A = \{0\}$.

²⁾ Так как наибольший подобъект Y_1 объекта $Y = X/X_1$, принадлежащий $\mathcal{A}$, нулевой, то $Y/Y_1 = X/X_1$ и p индуцирует единичный морфизм $p': X/X_1 \rightarrow X/X_1$. Поэтому $H(p)$ есть просто $1_{H(X)}$, а $H(X) = H(X/X_1)$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow & X/X_1 & \xrightarrow{H(p)^{-1} \circ \Phi(X/X_1) = \alpha} & H(X) & \rightarrow & \text{Coker } \Phi(X) & \rightarrow 0 \\
 & \Phi(X/X_1) \downarrow & & \downarrow \Phi(H(X)) & & \downarrow \Phi(\text{Coker } \Phi(X)) & \\
 0 \rightarrow & H(X/X_1) & \xrightarrow{H(\alpha)} & H(H(X)) & \rightarrow & H(\text{Coker } \Phi(X)) &
 \end{array}$$

Верхняя ее строка точна ввиду коммутативности предыдущей диаграммы и того, что p — эпиморфизм. Нижняя строка также точна, а $H(\text{Coker } \Phi(X)) = 0$ в силу предложения 6.20 и того, что H обращается в нуль на объектах из $\mathcal{A}$. Таким образом, $H(\alpha)$ — изоморфизм. Применяя функтор H к предыдущей диаграмме, получаем, что $H(\Phi(X))$ — изоморфизм¹⁾.

Обозначим через $\bar{\mathcal{A}}$ полную подкатегорию категории $\mathcal{E}_\Lambda$, образованную всеми объектами, замкнутыми относительно $\mathcal{A}$ (или, короче, замкнутыми).

Категория $\bar{\mathcal{A}}$ абелева. Действительно, мономорфизмы в $\bar{\mathcal{A}}$ — это те морфизмы из $\bar{\mathcal{A}}$, которые являются мономорфизмами в $\mathcal{A}$, а эпиморфизмы в $\bar{\mathcal{A}}$ — те морфизмы $f: X \rightarrow Y$ из $\bar{\mathcal{A}}$, для которых $\text{Coker } f$, рассматриваемый в $\mathcal{E}_\Lambda$, есть объект из $\mathcal{A}$ ²⁾. Ядро морфизма $f: X \rightarrow Y$ в $\bar{\mathcal{A}}$ определяется канонической коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow & \text{Ker } f & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{f} & Y & \\
 & \Phi(\text{Ker } f) \downarrow & & \Phi(X) \downarrow & & \downarrow \Phi(Y) & \\
 0 \rightarrow & H(\text{Ker } f) & \xrightarrow{H(i)} & H(X) & \xrightarrow{H(f)} & H(Y) &
 \end{array}$$

где $(\text{Ker } f, i)$ есть ядро f в $\mathcal{E}_\Lambda$. А именно ядром f в $\bar{\mathcal{A}}$ служит пара $(H(\text{Ker } f), \Phi(X)^{-1} \circ H(i))$ ³⁾. Подобным образом из рассмотре-

¹⁾ Между тем требуется установить, что $\Phi(H(X))$ изоморфизм. Для этого заметим, что так как Φ — функторный морфизм, то справедливы равенства

$$\Phi(H(X))\Phi(X) = H(\Phi(X))\Phi(X) \quad (*)$$

и

$$\begin{aligned}
 \Phi(H^2(X))\Phi(H(X)) &= H(\Phi(H(X)))\Phi(H(X)), \\
 \Phi(H^2(X))H(\Phi(X)) &= H^2(\Phi(X))\Phi(H(X)).
 \end{aligned} \quad (**)$$

Применяя к равенству (*) функтор H , получаем, что $H(\Phi(H(X)))H(\Phi(X)) = H^2(\Phi(X))H(\Phi(X))$, и так как $H(\Phi(X))$ — изоморфизм, то $H(\Phi(H(X))) = H^2(\Phi(X))$. Но тогда из равенств (**) следует, что

$$\Phi(H^2(X))\Phi(H(X)) = \Phi(H^2(X))H(\Phi(X)). \quad (***)$$

А так как $H^2(X)$ по замечанию 1 не содержит нулевых подобъектов из $\mathcal{A}$, то, согласно первой части доказательства предложения 6.20, $\Phi(H^2(X))$ — мономорфизм. Поэтому из равенства (***) следует, что $\Phi(H(X)) = H(\Phi(X))$ и, значит, $\Phi(H(X))$ — изоморфизм.

²⁾ См. следующие два примечания.

³⁾ Так как функтор H точен слева, то нижняя строка диаграммы точна, т. е. $H(i) = \text{ker } H(f)$ в $\mathcal{E}_\Lambda$. Поскольку $\Phi(X)$ и $\Phi(Y)$ — изоморфизмы, отсюда

ния коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{p} & \text{Coker } f \rightarrow 0 \\ \Phi(Y) \downarrow & & & & \downarrow \Phi(\text{Coker } f) \\ & & H(Y) & \xrightarrow{H(p)} & H(\text{Coker } f) \end{array}$$

где $(\text{Coker } f, p)$ есть коядро f в категории $\mathcal{C}_\Lambda$, заключаем, что $(H(\text{Coker } f), H(p)\Phi(Y))$ есть коядро f в $\mathcal{A}^1$. Проверку того, что канонический гомоморфизм $\text{Coim } f$ в $\text{Im } f$ есть изоморфизм в $\bar{\mathcal{A}}$, предоставляем читателю²⁾.

Определим теперь функтор $T: \mathcal{C}_\Lambda \rightarrow \bar{\mathcal{A}}$ следующим образом: $T(X) = H(X)$ для каждого объекта X из $\mathcal{C}_\Lambda$ и $Tf = Hf$ для каждого Λ -гомоморфизма $f: X \rightarrow Y$. Функтор T является левым сопряженным к функтору вложения $S: \bar{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{C}_\Lambda$; морфизмом сопряжения S с T служит построенный выше функторный морфизм $\Phi: 1_{\mathcal{C}_\Lambda} \rightarrow H = ST^3$. Кроме того, функтор T точен⁴⁾, а S вполне унивалентен. Тем самым пара (T, S) определяет $\bar{\mathcal{A}}$ как факторкатегорию категории $\mathcal{C}_\Lambda$. Таким образом, справедливо следующее

Предложение 6.21. *Для каждой локализирующей подкатегории $\mathcal{A}$ категории $\mathcal{C}_\Lambda$ существует факторкатегория $\bar{\mathcal{A}}$ катего-*

следует, что $\Phi(X)^{-1} \cdot H(i) = \ker f$ в $\mathcal{C}_\Lambda$. Но тогда $\Phi(\text{Ker } f)$ — изоморфизм, так что $\text{Ker } f$ замкнут вместе с $H(\text{Ker } f)$, а $(\text{Ker } f, i)$ служит ядром морфизма f и в $\mathcal{C}_\Lambda$, и в $\bar{\mathcal{A}}$ (так что, в частности, f является мономорфизмом в $\bar{\mathcal{A}}$ тогда и только тогда, когда f — мономорфизм в $\mathcal{A}$).

¹⁾ Пусть $gf = 0$, где $g: Y \rightarrow Z$ — морфизм в $\bar{\mathcal{A}}$ (так что $Z \in \text{Ob } \bar{\mathcal{A}}$). Тогда существует морфизм $j: \text{Coker } f \rightarrow Z$, такой, что $g = jp$, и легко видеть, что $g = qH(p)\Phi(Y)$, где $q = \Phi(Z)^{-1}H(j)$. Пусть также $g = q'H(p)\Phi(Y)$. Тогда $q'\Phi(\text{Coker } f)p = q\Phi(\text{Coker } f)p$, и так как p — эпиморфизм, то $q'\Phi(\text{Coker } f) = q\Phi(\text{Coker } f)$. Применив функтор H и приняв во внимание, что $H(\Phi(\text{Coker } f))$ — изоморфизм, получим отсюда, что $H(q') = H(q)$. Но тогда $q' = \Phi(Z)^{-1}H(q') \times \times \Phi(\text{Coker } f) = \Phi(Z)^{-1}H(q)\Phi(\text{Coker } f) = q$. Тем самым доказано, что $(H(\text{Coker } f), H(p)\Phi(Y))$ есть коядро f в $\bar{\mathcal{A}}$ (так что, в частности, f — эпиморфизм тогда и только тогда, когда $H(\text{Coker } f) = 0$, т. е. когда $\text{Coker } f$ — объект из $\mathcal{A}$).

²⁾ Нетрудно проверить, что, поскольку Φ — функторный морфизм, $\Phi(X_1 \oplus X_2) = \Phi(X_1) \oplus \Phi(X_2)$, и, значит, если $X_1, X_2 \in \text{Ob } \bar{\mathcal{A}}$, то и $X_1 \oplus X_2 \in \text{Ob } \bar{\mathcal{A}}$. Присоединяя это к сказанному в тексте, заключаем, что категория $\bar{\mathcal{A}}$ абелева.

³⁾ А квазиобратным к Φ — функторный морфизм $\Psi: T\mathcal{S} \rightarrow 1_{\bar{\mathcal{A}}}$, определенный равенством $\Psi(X) = \Phi(X)^{-1}$ для всех $X \in \text{Ob } \bar{\mathcal{A}}$. Выполнение условия $\Psi(T(A))T(\Phi(A)) = 1_{T(A)}$ основывается на равенстве $\Phi(H(A)) = H(\Phi(A))$, доказанием в примечании ¹⁾ к стр. 164. Условие $S(\Psi(B))\Phi(S(B)) = 1_{S(B)}$ тривиально.

⁴⁾ T точен слева вместе с H и точен справа по предложению 5.17 как функтор, обладающий правым сопряженным.

рии $\mathcal{C}_\Lambda$ с каноническими функторами $T: \mathcal{C}_\Lambda \rightarrow \bar{\mathcal{A}}$, $S: \bar{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{C}_\Lambda$ (T точен, S вполне универсален и служит правым сопряженным к T), такая, что $\mathcal{A} = \text{Ker } T$.

Доказательство. Принимая во внимание только что сказанное, достаточно доказать, что если $TX = 0$, то X есть объект из $\mathcal{A}$, а это вытекает из определения функтора H и свойств индуктивных пределов¹⁾.

Из предложения 6.21²⁾ следует существование взаимно однозначного соответствия между факторкатегориями категории $\mathcal{C}_\Lambda$ и ее локализующими подкатегориями.

В силу предложения 5.39 каждая факторкатегория категории $\mathcal{C}_\Lambda$ есть категория Гротендика с произведениями, а из следствия 6.17 и предложения 6.11 вытекает, что каждая факторкатегория категории $\mathcal{C}_\Lambda$ есть категория с инъективными оболочками. Таким образом, имеем

Следствие 6.22. Пусть $\mathcal{C}'$ — факторкатегория категории $\mathcal{C}_\Lambda$. Тогда $\mathcal{C}'$ есть категория Гротендика с произведениями и инъективными оболочками.

§ 6. Характеризация категорий Гротендика

В этом параграфе будет доказано, что каждая категория Гротендика эквивалентна некоторой факторкатегории категории $\mathcal{C}_\Lambda$ с соответствующим кольцом Λ . Этот результат принадлежит П. Габриэлю и Н. Попеску [1].

Прежде чем приступить к этому, проведем некоторые предварительные рассуждения, представляющие и самостоятельный интерес.

Пусть U — объект абелевой категории $\mathcal{C}$. Обозначим через Λ кольцо $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, U)$ и через S функтор из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}_\Lambda$, определяемый для всех объектов X и морфизмов f из $\mathcal{C}$ равенствами

$$S(X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X), \quad S(f) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, f),$$

где $S(X)$ наделено структурой правого Λ -модуля, определенной следующим образом: $x\lambda$ для любых $\lambda \in \Lambda$ и $x \in S(X)$ есть композиция морфизмов $x: U \rightarrow X$ и $\lambda: U \rightarrow U$ в $\mathcal{C}$. Очевидно, $S(f)$ есть Λ -гомоморфизм для каждого морфизма f из $\mathcal{C}$. Функтор S точен слева.

Предложение 6.23. Пусть $\mathcal{C}$ — абелева категория и U — ее объект, обладающий тем свойством, что для каждого семейства

¹⁾ По поводу доказательства см. примечание²⁾ на стр. 162. Заметим, что этот факт уже использован при характеристизации эпиморфизмов в $\bar{\mathcal{A}}$ (см. примечание¹⁾ на стр. 165).

²⁾ В сочетании с предложением 6.14.

$(U_i)_{i \in I}$ объектов из $\mathcal{C}$, изоморфных U , существует сумма $\bigoplus_{i \in I} U_i$. Пусть, далее, Λ есть кольцо $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, U)$ и $S: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\Lambda}$ — определенный выше функтор. При этих условиях функтор S обладает левым сопряженным $T: \mathcal{C}_{\Lambda} \rightarrow \mathcal{C}$.

Доказательство. Пусть M — объект категории $\mathcal{C}_{\Lambda}$. Как известно, в $\mathcal{C}_{\Lambda}$ можно построить точную последовательность

$$\bigoplus_{i \in I} \Lambda_i \xrightarrow{q} \bigoplus_{i \in I} \Lambda_i \xrightarrow{p} M \rightarrow 0, \quad (*)$$

где I и J — множества и $\Lambda_i = \Lambda_j = \Lambda$ для всех $i \in I, j \in J$ (см. А. Картан и С. Эйленберг [1], гл. I, § 2)¹⁾. Рассмотрим в $\mathcal{C}$ суммы $\bigoplus_{i \in I} U_i$ и $\bigoplus_{i \in I} U_i$, где $U_i = U_j = U$ для всех $i \in I, j \in J$. В силу предложения 3.7 для каждого объекта X из $\mathcal{C}$

$$\text{Hom}_{\Lambda} \left(\bigoplus_{i \in I} \Lambda_i, S(X) \right) \approx \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\Lambda_i, S(X)).$$

Так как $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\Lambda_i, S(X)) \approx S(X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X)$ для всех $i \in I$, то $\prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\Lambda_i, S(X)) \approx \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U_i, X) \approx \text{Hom}_{\mathcal{C}} \left(\bigoplus_{i \in I} U_i, X \right)$. Как легко видеть, все эти изоморфизмы функториальны по X (т. е. „не зависят от X “). В итоге получаем функторный изоморфизм

$$\psi_0(X): \text{Hom}_{\Lambda} \left(\bigoplus_{i \in I} \Lambda_i, S(X) \right) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}} \left(\bigoplus_{i \in I} U_i, X \right)$$

и, аналогично, для каждого объекта X из $\mathcal{C}$ — функторный изоморфизм

$$\psi_1(X): \text{Hom}_{\Lambda} \left(\bigoplus_{i \in I} \Lambda_i, S(X) \right) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}} \left(\bigoplus_{i \in I} U_i, X \right).$$

Морфизм q порождает функторный морфизм

$$\alpha = \psi_1 \circ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(q, \cdot) \circ \psi_0^{-1}: \text{Hom}_{\mathcal{C}} \left(\bigoplus_{i \in I} U_i, \cdot \right) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}} \left(\bigoplus_{i \in I} U_i, \cdot \right).$$

Но по следствию 1.7 существует единственный морфизм $q': \bigoplus_{i \in I} U_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} U_i$, такой, что $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(q', \cdot) = \alpha$. Полагаем, по определению, $T(M) = \text{Coker } q'$.

¹⁾ Например, в качестве I можно взять M , эпиморфизм p определить формулой $p((\lambda m)_{m \in M}) = \sum \lambda m$, далее, в качестве J взять $\text{Ker } p$, а за q принять композицию $\bigoplus_{j \in \text{Ker } p} \Lambda_j \rightarrow \text{Ker } p \rightarrow \bigoplus_{m \in M} \Lambda_m$, где первая стрелка означает эпиморфизм, определенный аналогично p , а вторая — каноническое вложение. (Неограниченно продолжая таким же способом последовательность $(*)$ влево, получим проективную резольвенту модуля M ; см. гл. 7.)

Предоставляем читателю проверку того, что $T(M)$ не зависит от свободных модулей, входящих в последовательность (*), и что этим действительно определяется функтор $T: \mathcal{C}_\Lambda \rightarrow \mathcal{C}^1$.

Из коммутативной диаграммы с точными строками

$$\begin{array}{ccccc} 0 \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(M, S(X)) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda\left(\bigoplus_{i \in I} \Lambda_i, S(X)\right) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda\left(\bigoplus_{j \in J} \Lambda_j, S(X)\right) \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \Phi_0(X) \qquad \qquad \qquad \downarrow \Phi_1(X) \\ 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T(M), X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\bigoplus_{i \in I} U_i, X\right) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\bigoplus_{j \in J} U_j, X\right) \end{array}$$

где верхняя строка индуцирована точной последовательностью (*), нижняя строка — точной последовательностью

$$\bigoplus_{i \in I} U_i \xrightarrow{q'} \bigoplus_{i \in I} U_i \rightarrow T(M) \rightarrow 0,$$

а пунктирная стрелка определена условием коммутативности, заключаем, что функтор T является левым сопряженным к S (морфизм, представленный пунктирной стрелкой, функториален).

Предложение 6.24. Пусть U — объект абелевой категории $\mathcal{C}$. Рассмотрим кольцо $\Lambda = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, U)$ и функтор $S: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_\Lambda$, определенный в начале этого параграфа. U есть образующая категории $\mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда функтор S унивалентен.

Доказательство. Предположим, что S унивалентен. Пусть $i: X' \rightarrow X$ — мономорфизм из $\mathcal{C}$, не являющийся изоморфизмом, и $p: X \rightarrow X/X'$ — его коядро. Если $S(i)$ — изоморфизм, то из точности S слева вытекает, что $S(p) = 0$ и, значит, $p = 0$, что неверно. Обратно, предположим, что U — образующая категории $\mathcal{C}$, и пусть $f: X \rightarrow Y$ — морфизм из $\mathcal{C}$, для которого $S(f) = 0$, а $f = ip$ — его каноническое разложение в композицию мономорфизма i и эпиморфизма p . Тогда $S(p) = 0$ и, значит, $S(j)$, где

¹⁾ Вследствие довольно большого произвола в выборе последовательности (*) (последнего отрезка проективной резольвенты модуля M) объект $T(M)$ определен неоднозначно. Но можно показать, что все возможные значения $T(M)$ при данном M изоморфны и при выборе для каждого M какого-либо одного из них соответствие $M \mapsto T(M)$ естественно распространяется на морфизмы до функтора. Проверку справедливости этих утверждений можно отложить до ознакомления с теорией производных функторов, излагаемой в следующей главе, поскольку функтор T строится по тому же правилу, что и левый производный функтор нулевого порядка от любого функтора. Отличие лишь в том, что там исходный функтор предполагается определенным на всей рассматриваемой категории, тогда как здесь это — фактически построенный выше функтор $\bigoplus_{i \in I} \Lambda_i \mapsto \bigoplus_{i \in I} U_i$, $q \mapsto q'$, определенный лишь на полной подкатегории категории $\mathcal{C}_\Lambda$, образованной всевозможными суммами $\bigoplus_{i \in I} \Lambda_i$ ($\Lambda_i = \Lambda$).

Но так как объектов этой подкатегории достаточно для образования проективных резольвент любых модулей из $\mathcal{C}_\Lambda$, то „левые производные“ этого функтора определены уже на всей категории $\mathcal{C}_\Lambda$.

$j: \text{Ker } f \rightarrow X$ — ядро p , есть изоморфизм. Поскольку U — образующая, тогда и j — изоморфизм, откуда $p = 0$ и, значит, $f = 0$.

Теорема 6.25 (П. Габриэль — Н. Попеску). Пусть $\mathcal{C}$ — абелева категория, удовлетворяющая условию АВ5, и U — ее объект. Обозначим через Λ кольцо $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, U)$ и через S — функтор из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}_{\Lambda}$, фигурирующий в предложении 6.24. Пусть $T: \mathcal{C}_{\Lambda} \rightarrow \mathcal{C}$ — левый сопряженный к S и $\Psi: TF \rightarrow 1_{\mathcal{C}}$ — морфизм сопряжения T с S . Следующие утверждения равносильны:

- (а) U — образующая категории $\mathcal{C}$.
- (б) S — вполне унивалентный функтор.
- (в) Ψ — функторный изоморфизм, а T точен.
- (г) T точен, а S индуцирует эквивалентность между категорией $\mathcal{C}$ и факторкатегорией категории $\mathcal{C}_{\Lambda}$ относительно ее локализующей подкатегории $\text{Ker } T$.

Доказательство. Равносильность (в) $\Leftrightarrow$ (г) непосредственно следует из предложений 1.13', 6.18 и 1.15. В силу предложений 1.13' и 6.24 очевидны также импликации (в) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (а). Остается доказать импликацию (а) $\Rightarrow$ (в), а для этого мы покажем сначала, что (а) $\Rightarrow$ (б). Пусть X, Y — объекты из $\mathcal{C}$ и $S(X, Y): \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda}(SX, SY)$ — каноническое отображение $\psi \mapsto S(\psi)$ ($\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$). Согласно предложению 6.24 отображение $S(X, Y)$ мономорфно. Докажем, что оно также эпиморфно. Пусть $\varphi: S(X) \rightarrow S(Y)$ — морфизм из $\mathcal{C}_{\Lambda}$. Обозначим множество $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X)$ через I , и пусть $(U_f)_{f \in I}$ — семейство объектов из $\mathcal{C}$, каждый из которых совпадает с U . Пусть, далее, $p: \bigoplus_{f \in I} U_f \rightarrow X$ — канонический морфизм, индуцирующий f на каждом слагаемом U_f , т. е. такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U_f & & \\ i_f \downarrow & \searrow f & \\ \bigoplus_{f \in I} U_f & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

где i_f — каноническая инъекция, коммутативна при всех $f \in I$. Пусть также $q: \bigoplus_{f \in I} U_f \rightarrow Y$ — канонический морфизм, для которого диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U_f & & \\ i_f \downarrow & \searrow \varphi(f) & \\ \bigoplus_{f \in I} U_f & \xrightarrow{q} & Y \end{array}$$

коммутативна при всех $f \in I$. Если мы докажем, что $\text{Ker } q$ содержит $\text{Ker } p$, то этим будет доказано, что $q = \varphi p$ и потому $\varphi = S\varphi$

(ибо, как видно из доказательства предложения 5.34, p — эпиморфизм). Пусть K_J для каждого конечного подмножества J множества I — ядро канонического морфизма $p_J: \bigoplus_{f \in J} U_f \rightarrow X$, индуцируемого морфизмом p . Так как $\mathcal{C}$ удовлетворяет условию АВ5, то $\text{Ker } p = \sup_J K_J$, где J пробегает семейство всех конечных подмножеств множества I , упорядоченное по возрастанию. Поэтому достаточно доказать, что K_J содержится в $\text{Ker } q$ для каждого J ¹⁾. Пусть $h: K_J \rightarrow \bigoplus_{f \in J} U_f$ — канонический мономорфизм, $\alpha: U \rightarrow K_J$ — морфизм из $\mathcal{C}$ и π_f — канонические проекции $\bigoplus_{f \in J} U_f \rightarrow U_f$ ($f \in J$). Очевидно, обозначая через i'_f канонические инъекции $U_f \rightarrow \bigoplus_{f \in J} U_f$, имеем $\sum_{f \in J} i'_f \pi_f = 1$, где 1 означает единицу объекта $\bigoplus_{f \in J} U_f$. Поэтому

$$0 = p_J h \alpha = p_J \sum_{f \in J} i'_f \pi_f h \alpha = \sum_{f \in J} f \lambda_f,$$

где $\lambda_f = \pi_f h \alpha$ — элемент из Λ . Обозначая через q_J сужение q на $\bigoplus_{f \in J} U_f$, получаем тогда, что

$$q_J h \alpha = \sum_{f \in J} q_J i'_f \pi_f h \alpha = \sum_{f \in J} \varphi(f) \lambda_f = \sum_{f \in J} \varphi(f \lambda_f) = \varphi\left(\sum_{f \in J} f \lambda_f\right) = 0$$

для каждого $\alpha: U \rightarrow K_J$. Но отсюда вытекает, что $q_J h = 0$ ²⁾ и, значит, K_J содержится в $\text{Ker } q$.

Для доказательства импликации (а) $\Rightarrow$ (в) мы докажем теперь, что S индуцирует эквивалентность S_1 между категорией $\mathcal{C}$ и полной подкатегорией $\mathcal{A}$ категории $\mathcal{C}_\Lambda$, которая образована замкнутыми объектами последней относительно некоторой ее локализующей подкатегории $\mathcal{A}$ и абелизирована в согласии с рас-

¹⁾ Т. е. что образ K_J относительно канонического вложения K_J в $\bigoplus_{f \in J} U_f$ содержится в $\text{Ker } q$.

²⁾ Пусть $i_J: \bigoplus_{f \in J} U_f \rightarrow \bigoplus_{f \in I} U_f$ — каноническое вложение и (P, j, k) — расслоенное произведение, ассоциированное со схемой

$$\begin{array}{ccc} & K_J & \\ & \downarrow i_{Jh} & \\ \text{Ker } q & \xrightarrow{\text{ker } q} & \bigoplus_{f \in I} U_f \end{array}$$

Для каждого $\alpha: U \rightarrow K_J$, поскольку $q i_J h \alpha = q_J h \alpha = 0$, существует $\beta: U \rightarrow \text{Ker } q$, такое, что $i_J h \alpha = \text{ker } q \cdot \beta$, и, следовательно, — также $\gamma: U \rightarrow P$, для которого $\alpha = j \gamma$. Но j вместе с $\text{ker } q$, — мономорфизм. Поскольку U — образующая, заключаем, что j — изоморфизм и, следовательно, $q_J h = q i_J h = q \text{ker } q \cdot k j^{-1} = 0$.

смотрениями, предшествующими предложению 6.21 (после замечания 3)¹⁾. Предварительно несколько определений и лемм.

Будем называть объект N категории $\mathcal{C}_\Lambda$ *пренебрегаемым*, если для каждого морфизма $f: \Lambda \rightarrow N$ и каждого объекта X из $\mathcal{C}$ канонический морфизм

$$\text{Hom}_\Lambda(\Lambda, SX) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(\text{Ker } f, SX)$$

есть изоморфизм.

Лемма 6.26. Λ -модуль N пренебрегаем тогда и только тогда, когда для каждого морфизма $f: M \rightarrow N$ из $\mathcal{C}_\Lambda$ и каждого объекта X из $\mathcal{C}$ каноническое отображение

$$\text{Hom}_\Lambda(M, SX) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(\text{Ker } f, SX)$$

есть изоморфизм.

Доказательство. Предположим, что N пренебрегаем, и пусть $f: M \rightarrow N$ — морфизм из $\mathcal{C}_\Lambda$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker}(fp\psi_i) & \xrightarrow{\gamma_i} & \Lambda_i & \xrightarrow{\psi_i} & \bigoplus_{i \in I} \Lambda_i \\ \delta_i \downarrow & & & & \downarrow \rho \\ 0 \rightarrow \text{Ker } f & \xrightarrow{\varphi} & M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

в которой нижняя строка точна, $\Lambda_i = \Lambda$ для каждого $i \in I$, ψ_i — канонические инъекции, ρ — эпиморфизм, пара $(\text{Ker}(fp\psi_i), \gamma_i)$ есть ядро морфизма $f p \psi_i$, и δ_i — единственный морфизм $\text{Ker}(fp\psi_i) \rightarrow \text{Ker } f$, делающий диаграмму коммутативной. Пусть X — объект из $\mathcal{C}$ и $u: M \rightarrow SX$ — Λ -гомоморфизм, для которого $u\varphi = 0$. Тогда для каждого $i \in I$ имеем $u\varphi\delta_i = 0$. Поскольку N пренебрегаем, отсюда следует, что $u p \psi_i = 0$ для всех $i \in I$; поэтому $u\rho = 0$ и, значит, поскольку ρ — эпиморфизм, $u = 0$. Таким образом, каноническое отображение

$$\text{Hom}_\Lambda(M, SX) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(\text{Ker } f, SX), \quad (*)$$

индуцируемое морфизмом φ , инъективно.

¹⁾ Действительно тогда функтор $S_1: \mathcal{C}_\Lambda \rightarrow \overline{\mathcal{A}}$ обладает левым сопряженным T_1 , также являющимся эквивалентностью и потому точным. С другой стороны, в силу сказанного перед предложением 6.21, функтор вложения $S': \overline{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{C}_\Lambda$ обладает точным левым сопряженным T' . Так как $S = S'S_1$, то будем иметь функториальные изоморфизмы $\text{Hom}(Y, SX) \approx \text{Hom}(T'Y, S_1X) \approx \text{Hom}(T_1T'Y, X)$, т. е. T_1T' будет левым сопряженным к S . Поскольку и T — левый сопряженный к S , тогда существует функторный изоморфизм $T_1T' \rightarrow T$, и, значит, T , вместе с композицией точных функторов T_1T' , точен. А так как в силу уже доказанной импликации (а) $\Rightarrow$ (б) и предложения 1.13' Ψ — изоморфизм, то тем самым и будет доказана импликация (а) $\Rightarrow$ (в).

Пусть теперь задан Λ -гомоморфизм $u: \text{Ker } f \rightarrow SX$. Тогда $u\delta_i: \text{Ker } (fp\psi_i) \rightarrow SX$. Пусть $\lambda_i: \Lambda_i \rightarrow SX$ — морфизм, для которого $\lambda_i\gamma_i = u\delta_i$. Морфизмы λ_i индуцируют морфизм $\lambda: \bigoplus_{i \in I} \Lambda_i \rightarrow SX$, такой, что $\lambda\psi_i = \lambda_i$. Для завершения доказательства остается показать, что λ равно нулю на $\text{Ker } p$, для чего рассуждением, аналогичным проведенному выше при доказательстве импликации (а) $\Rightarrow$ (б), устанавливаем, что λ равно нулю на $\text{Ker } (fp)$ ¹⁾.

¹⁾ Ошибка. Рассмотрение диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Ker } p & \\
 \swarrow \kappa' & \downarrow \kappa & \\
 K = \text{Ker } (fp) & \xrightarrow{\gamma} & \Lambda_I = \bigoplus_{i \in I} \Lambda_i \\
 \delta \downarrow & & \downarrow p \\
 0 \rightarrow \text{Ker } f & \xrightarrow{\varphi} & M \xrightarrow{f} N
 \end{array} \quad (**)$$

где $(\text{Ker } p, \kappa)$ — ядро p , (K, γ) — ядро fp , а κ' и δ — однозначно определенные морфизмы, делающие диаграмму коммутативной, показывает, что если $\lambda = 0$ на $\text{Ker } (fp)$, т. е. $\lambda\gamma = 0$, то, поскольку тогда $\lambda\kappa = 0$, существует $v: M \rightarrow SX$, такое, что $\lambda = v\rho$. Так как, однако, $v\delta = v\rho\gamma = \lambda\gamma = 0$, а δ — эпиморфизм (см. примечания ²⁾ на стр. 115 и ²⁾ на стр. 129), то $v\varphi = 0$, так что v есть образ u при отображении (*), лишь если $u = 0$; между тем, например, при $M = SX$ (где $X \neq 0$) и $f = 0$ морфизм u может быть ненулевым. Таким образом, биективность отображения (*) осталась недоказанной.

По-видимому, данное выше определение пренебрегаемых модулей недостаточно для обеспечения всех нужных их свойств. Усилим его: будем называть Λ -модуль N *пренебрегаемым*, если для каждой суммы $\Lambda_J = \bigoplus_{i \in J} \Lambda_i$, где J конечно и все $\Lambda_i = \Lambda$, каждого ее морфизма f в N и каждого объекта X из $\mathcal{C}$ каноническое отображение $\text{Hom}_\Lambda(\Lambda_J, SX) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(\text{Ker } f, SX)$ биективно. Тогда доказательство леммы 6.26 можно завершить так.

Пусть J — произвольное конечное подмножество множества I ; ψ_J — каноническое отображение $\Lambda_J \rightarrow \Lambda$; (K_J, γ_J) — ядро $f\rho\psi_J$; $\delta_J: K_J \rightarrow \text{Ker } f$ — единственный морфизм, для которого $\rho\psi_J\gamma_J = \delta_J$; $\lambda_J: \Lambda_J \rightarrow SX$ — единственный морфизм, такой, что $\lambda_J\gamma_J = u\delta_J$; и ψ'_i для каждого $i \in J$ — каноническое отображение $\Lambda_i \rightarrow \Lambda_J$, так что $\psi_i = \psi_J\psi'_i$. Так как квадрат

$$\begin{array}{ccc}
 K_J & \xrightarrow{\gamma_J} & \Lambda_J \\
 \delta_J \downarrow & & \downarrow \rho\psi_J \\
 \text{Ker } f & \xrightarrow{\varphi} & M
 \end{array}$$

декартов, а $\rho\psi_J\psi'_i\gamma_i = \rho\psi_i\gamma_i = \delta_{Ji}$, то существует морфизм $\delta'_i: \text{Ker } (f\rho\psi_i) \rightarrow K_J$, такой, что $\gamma_i\delta'_i = \psi'_i\gamma_i$ и $\delta_J\delta'_i = \delta_{Ji}$. Тогда $u\delta_i = u\delta_J\delta'_i = \lambda_J\gamma_J\delta'_i = \lambda_J\psi'_i\gamma_i$. Так как вместе с тем $u\delta_i = \lambda_i\gamma_i$, а N пренебрегаем, то заключаем, что $\lambda_J\psi'_i = \lambda_i$ для всех $i \in J$. Но и $\lambda\psi_J\psi'_i = \lambda\psi_i = \lambda_i$ для всех $i \in J$. Следовательно, $\lambda_J = \lambda\psi_J$. С другой стороны, так как $\rho\psi_J\gamma_J = \delta_J$, а квадрат из диа-

Лемма 6.27. Полная подкатегория $\mathcal{A}$ категории $\mathcal{C}_\Lambda$, образованная всеми пренебрегаемыми объектами, — локализующая.

Доказательство. Пусть N — пренебрегаемый Λ -модуль, $N' \xrightarrow{i} N$ — его подмодуль и $f: \Lambda \rightarrow N'$ — Λ -гомоморфизм¹⁾. Очевидно, $\text{Ker}(if)$ канонически изоморфен $\text{Ker } f$ и потому N' пренебрегаем.

Пусть $p: N \rightarrow N''$ — эпиморфизм и $f: \Lambda \rightarrow N''$ — морфизм из $\mathcal{C}_\Lambda$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} 0 \rightarrow \text{Ker } f' & \xrightarrow{i'} & \Lambda \prod_{N''} N & \xrightarrow{f'} & N \\ & & \downarrow p' & & \downarrow p \\ 0 \rightarrow \text{Ker } f & \xrightarrow{i} & \Lambda & \xrightarrow{f} & N'' \end{array}$$

где строки точны и p'' — изоморфизм²⁾. Пусть X — объект из $\mathcal{C}$ и $u: \Lambda \rightarrow SX$ — Λ -гомоморфизм, для которого $ui = 0$. Тогда

граммы (***) декартов, то существует $\delta'_j: K_j \rightarrow K$, такое, что $\gamma\delta'_j = \psi_j\gamma_j$ и $\delta\delta'_j = \delta_j$. Тогда $\lambda\gamma\delta'_j = \lambda\psi_j\gamma_j = \lambda_j\gamma_j = u\delta_j = u\delta\delta'_j$, т. е. (если отождествлять Λ_j с его образом в Λ_j) $\lambda\gamma$ совпадает с $u\delta$ на $K \cap \Lambda_j$ для всех конечных $j \in I$. Поскольку $\Lambda_i = \bigcup \Lambda_j$, заключаем, что $\lambda\gamma = u\delta$. Из диаграммы (***) имеем тогда $\lambda\kappa = \lambda\gamma\kappa' = u\delta\kappa'$. Но так как $\phi\delta\kappa' = r\kappa = 0$, а ϕ — мономорфизм, то $\delta\kappa' = 0$. Поэтому $\lambda\kappa = 0$ и, следовательно, существует морфизм $v: M \rightarrow SX$, для которого $vr = \lambda$. Но тогда $v\phi\delta = v\gamma\gamma = \lambda\gamma = u\delta$, и так как δ — эпиморфизм, то $u = v\phi$. Тем самым доказательство биективности отображения (*) завершено.

¹⁾ При определении пренебрегаемости, данным в предыдущем примечании, нужно под f понимать любой морфизм вида $\bigoplus_{i \in I} \Lambda_i \rightarrow N'$, где I конечно и все $\Lambda_i = \Lambda$.

²⁾ Здесь использована следующая диаграммная лемма: если

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\delta} & A \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \alpha \\ B & \xrightarrow{\beta} & C \end{array}$$

— декартов квадрат, то $\text{Ker } \beta \approx \text{Ker } \delta$; подробнее: в диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} 0 \rightarrow \text{Ker } \delta & \xrightarrow{\eta} & P & \xrightarrow{\delta} & A \\ & & \downarrow \kappa & & \downarrow \alpha \\ 0 \rightarrow \text{Ker } \beta & \xrightarrow{\epsilon} & B & \xrightarrow{\beta} & C \end{array}$$

с точными строками, правый квадрат которой декартов, морфизм κ (однозначно определяемый условием коммутативности диаграммы) есть изоморфизм. Доказательство дуального предложения (для кодекартовых квадратов) см. в примечании²⁾ на стр. 155. Заметим, что для категории модулей при стандартной реализации P в виде модуля, образованного теми $(x, y) \in A \times B$, для которых $\alpha(x) = \beta(y)$ (см. предложение 5.7), $\text{Ker } \delta = \{0\} \times \text{Ker } \beta$, а $\kappa(0, y) = y$, так что то, что κ — изоморфизм, становится совершенно очевидным.

$uip'' = 0$ и потому $up'i' = 0$, а это означает, что $up' = 0$; поскольку p' — эпиморфизм, заключаем, что $u = 0$. Далее, существует Λ -гомоморфизм $q: \Lambda \rightarrow \Lambda \prod_{N''} N$, такой, что $p'q = 1_\Lambda$. Тогда $qip'' = i'$;

действительно, если $x \in \text{Ker } f'$, то равенство $p'i'(x) = 0$ влечет $x = 0$, а это показывает, что $\text{Im } i'$ содержится в $\text{Im } q^{(1)}$. Для каждого Λ -гомоморфизма $u: \text{Ker } f \rightarrow SX$ существует $\alpha: \Lambda \prod_{N''} N \rightarrow SX$, такое, что $\alpha i' = up''$. Тогда $\alpha qip'' = \alpha i' = up''$, т. е. $\alpha q i = u$. Тем самым доказано, что факторобъект пренебрегаемого объекта является пренебрегаемым объектом²⁾.

Пусть теперь в $\mathcal{C}_\Lambda$ заданы точная последовательность

$$0 \rightarrow N' \xrightarrow{i} N \xrightarrow{p} N'' \rightarrow 0,$$

¹⁾ Неубедительно. Если реализовать $\Lambda \prod_{N''} N$ в виде модуля $\{(\lambda, n) \in \Lambda \times N: f(\lambda) = p(n)\}$, то $\text{Im } i = \{(\lambda, 0): f(\lambda) = 0\}$, а $\text{Im } q = \{(\lambda, n_1\lambda): \lambda \in \Lambda\}$, где n_1 — какой-нибудь фиксированный элемент из $p^{-1}f(1)$. Но $f(\lambda) = 0$ влечет лишь $p(n_1\lambda) = 0$. Можно ли n_1 выбрать в $p^{-1}f(1)$ так, чтобы $p(n_1\lambda) = 0$ влекло $n_1\lambda = 0$, неясно. А если существует $\lambda_1 \in \text{Ker } f$, такое, что $n_1\lambda_1 \neq 0$, то $(\lambda_1, 0) \in \text{Im } i' \setminus \text{Im } q$, т. е. $\text{Im } i' \not\subset \text{Im } q$.

²⁾ Приведем доказательство этого, свободное от отмеченной неясности и основанное на определении пренебрегаемых модулей, данном в примечании¹⁾ на стр. 172. Заметим прежде всего, что если модуль K пренебрегаем, то $\text{Hom}(K, SX) (\approx \text{Hom}(\text{Ker } 1_K, SX)) = \{0\}$. Рассмотрим теперь коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker } p' & \xrightarrow{f''} & \text{Ker } p & & \\ i' \downarrow & & \downarrow i & & \\ \text{Ker } f' & \xrightarrow{i'} & M \prod_{N''} N & \xrightarrow{f'} & N \\ p'' \downarrow & & p' \downarrow & & \downarrow p \\ \text{Ker } f & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{f} & N'' \end{array}$$

где $f: M \rightarrow N''$ — произвольный морфизм, правый нижний квадрат декартов, а $(\text{Ker } f, i)$ и т. д. — ядра соответствующих морфизмов. Так как p'' — изоморфизм, то отображение $\text{Hom}(M, SX) \rightarrow \text{Hom}(\text{Ker } f, SX)$ есть композиция отображений

$$\text{Hom}(M, SX) \rightarrow \text{Hom}(M \prod_{N''} N, SX) \rightarrow \text{Hom}(\text{Ker } f', SX) \rightarrow \text{Hom}(\text{Ker } f, SX), \quad (***)$$

индуцированных морфизмами p' , i' и p''^{-1} . Второе из этих отображений биективно, поскольку N пренебрегаем, а третье — поскольку p''^{-1} есть изоморфизм. Остается доказать биективность первого. Но $\text{Ker } p$ пренебрегаем, как подобъект пренебрегаемого объекта N , а так как f'' — изоморфизм, то вместе с $\text{Ker } p$ пренебрегаем и $\text{Ker } p'$. Значит, по сделанному выше замечанию, $u'f = 0$ для каждого $u: M \prod_{N''} N \rightarrow SX$, а потому u пропускается, и притом единственным образом, через $p' = \text{coKer } f'$. Тем самым все три отображения (***) биективны, и, следовательно, N'' пренебрегаем.

где N' и N'' — объекты из $\mathcal{A}$, и Λ -гомоморфизм $f: \Lambda \rightarrow N$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Ker } f & & \\ & \swarrow k & \downarrow u & & \\ \text{Ker } (pf) & \xrightarrow{j} & \Lambda & & \\ \downarrow h & & \downarrow f & & \\ 0 \rightarrow N' & \xrightarrow{i} & N & \xrightarrow{p} & N'' \rightarrow 0 \end{array}$$

где $(\text{Ker } f, u)$ — ядро f , $(\text{Ker } (pf), j)$ — ядро pf , $(\text{Ker } f, k)$ — ядро h ¹⁾ и k, h, j построены каноническим образом. Пусть X — объект из $\mathcal{C}$ и $\alpha: \Lambda \rightarrow SX$ — гомоморфизм, для которого $\alpha u = 0$. Тогда $\alpha j k = 0$, а потому $\alpha j = 0$ и, значит, $\alpha = 0$, поскольку N' и N'' пренебрегаемы. Далее, для Λ -гомоморфизма $\alpha: \text{Ker } f \rightarrow SX$ существуют $\beta: \text{Ker } (pf) \rightarrow SX$, такое, что $\beta k = \alpha$, и также $\gamma: \Lambda \rightarrow SX$, для которого $\gamma j = \beta$. Очевидно, $\gamma u = \gamma j k = \beta k = \alpha$ ²⁾.

Осталось показать еще, что индуктивный предел пренебрегаемых модулей есть пренебрегаемый модуль, а для этого достаточно доказать, что сумма пренебрегаемых модулей пренебрегаема³⁾. Последнее в свою очередь сводится к пренебрегаемости конечных сумм пренебрегаемых модулей, доказываемой по индукции⁴⁾.

Морфизм $u: M \rightarrow N$ из $\mathcal{C}_\Lambda$ будет называться *накрывающим*, если $\text{Coker } u$ — пренебрегаемый объект.

¹⁾ См. примечание ²⁾ на стр. 173.

²⁾ При определении пренебрегаемых модулей, данном в примечании ¹⁾ на стр. 172, нужно в этой части доказательства заменить Λ (всюду, где оно выступает в качестве области определения морфизма) произвольной конечной суммой $\bigoplus_{i \in I} \Lambda_i$ ($\Lambda_i = \Lambda$), а можно (на основании леммы 6.26) — и произвольным модулем M .

³⁾ Ибо индуктивный предел модулей есть эпиморфный образ их суммы.

⁴⁾ Если N_1 и N_2 — пренебрегаемые модули, то поскольку имеется точная последовательность

$$0 \rightarrow N_1 \rightarrow N_1 \oplus N_2 \rightarrow N_2 \rightarrow 0,$$

модуль $N_1 \oplus N_2$ также пренебрегаем. По индукции отсюда следует пренебрегаемость суммы любого конечного семейства пренебрегаемых модулей. Пусть теперь $(N_k)_{k \in K}$ — бесконечное семейство пренебрегаемых модулей, N_K — его сумма, J — любое конечное множество, Λ_J — сумма семейства модулей $\Lambda_i = \Lambda$, где i пробегает множество J , и ψ_i ($i \in J$) — канонические вложения $\Lambda_i \rightarrow \Lambda_J$. Образом всякого морфизма $f: \Lambda_J \rightarrow N_K$ служит подмодуль модуля N_K , натянутый на элементы $f\psi_i(1)$ и потому содержащийся в некоторой конечной подсумме $N_{K'}$ суммы N_K . Тогда f разлагается в композицию $\Lambda_J \xrightarrow{f'} N_{K'} \xrightarrow{\subseteq} N_K$, так что $\text{Ker } f = \text{Ker } f'$, и так как модуль $N_{K'}$ как сумма конечного семейства $(N_k)_{k \in K'}$ пренебрегаемых модулей пренебрегаем, то заключаем, что каноническое

Лемма 6.28. Морфизм $u: M \rightarrow N$ из $\mathcal{C}_\Lambda$ является накрывающим тогда и только тогда, когда для каждого Λ -гомоморфизма $f: \Lambda \rightarrow N$ и каждого объекта X из $\mathcal{C}$ последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(\Lambda, SX) \xrightarrow{\varphi} \text{Hom}_\Lambda(\Lambda \prod_N M, SX) \xrightarrow{\psi} \text{Hom}_\Lambda(\text{Ker } u, SX),$$

индуцированная морфизмами u и f , точна¹⁾.

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Ker}(pf) & & \\ & q \nearrow & & \nwarrow h & \\ 0 \rightarrow \text{Ker } u' & \xrightarrow{i'} & \Lambda \prod_N M & \xrightarrow{u'} & \Lambda \\ & \downarrow v & \downarrow i' & & \downarrow f \\ 0 \rightarrow \text{Ker } u & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{u} & N \xrightarrow{p} \text{Coker } u \rightarrow 0 \end{array}$$

в которой строки точны, v — изоморфизм²⁾, $(\text{Ker}(pf), h)$ — ядро pf и q — эпиморфизм³⁾. Пусть u — накрывающий морфизм, X — объект из $\mathcal{C}$ и $\alpha: \Lambda \rightarrow SX$ — Λ -гомоморфизм, для которого $\alpha u' = 0$. Тогда $\alpha h q = 0$, откуда $\alpha h = 0$ и, значит, $\alpha = 0$, поскольку $\text{Coker } u$ пренебрегаем. Тем самым отображение φ , индуцированное морфизмом u' , мономорфно. Пусть теперь морфизм $\alpha: \Lambda \prod_N M \rightarrow SX$

таков, что $\alpha i' = 0$. Так как $(\text{Ker}(pf), q)$ есть коядро i' , то существует Λ -гомоморфизм $t: \text{Ker}(pf) \rightarrow SX$, для которого $tq = \alpha$. А поскольку $\text{Coker } u$ пренебрегаем, существует морфизм $l: \Lambda \rightarrow SX$,

отображение

$$\text{Hom}(\Lambda_J, SX) \rightarrow \text{Hom}(\text{Ker } f, SX)$$

биективно для любого объекта X из $\mathcal{C}$ и любого конечного множества индексов J , т. е. модуль N_K пренебрегаем.

¹⁾ Конечно, Λ следует здесь и в доказательстве заменить на $\Lambda_J = \bigoplus_{i \in J} \Lambda_i$ с любыми конечными множествами индексов J (и $\Lambda_i = \Lambda$).

²⁾ См. примечание²⁾ на стр. 173. Таким образом, $\text{Ker } u$ можно заменять на $\text{Ker } u'$, что дальше и делается.

³⁾ Существование и единственность q следуют из того, что $pfu' (= pfu) = 0$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda_J \prod_N M & \xrightarrow{q} & \text{Ker}(pf) & \xrightarrow{u'} & \Lambda_J \\ & \downarrow i' & \downarrow & & \downarrow f \\ M & \xrightarrow{n} & \text{Ker } p & \xrightarrow{k} & N \xrightarrow{p} \text{Coker } u \end{array}$$

где $(\text{Ker } p, k)$ — ядро p , $kn = u$ и средняя стрелка означает единственный морфизм, делающий диаграмму коммутативной. Так как обтекающий и правый квадраты диаграммы декартовы, то и левый квадрат декартов (см. примечание¹⁾ на стр. 44). А тогда эпиморфность n (канонического морфизма $M \rightarrow \text{Im } u = \text{Ker } p$) влечет эпиморфность q .

такой, что $lh = t$. Но тогда $lu' = lhq = tq = a$, чем и завершается доказательство ¹⁾.

Пусть $\bar{\mathcal{A}}$ — полная подкатегория категории $\mathcal{C}_\Lambda$, образованная всеми Λ -модулями, замкнутыми относительно локализирующей подкатегории $\mathcal{A}$. Согласно рассуждениям, предшествующим предложению 6.21, $\bar{\mathcal{A}}$ — абелева категория. Очевидно, объект SX замкнут для каждого объекта X из $\mathcal{C}^2$). Таким образом, S индуцирует функтор $S_1: \mathcal{C} \rightarrow \bar{\mathcal{A}}$.

Лемма 6.29. *Функтор S_1 точен.*

Доказательство. Очевидно, S_1 точен слева ³⁾. Остается показать, что если $u: X \rightarrow Y$ — эпиморфизм в $\mathcal{C}$, то морфизм Su в $\mathcal{C}_\Lambda$ накрывающий ⁴⁾, т. е., согласно лемме 6.28, что для каждого объекта Z из $\mathcal{C}$ и каждого Λ -гомоморфизма $f: \Lambda \rightarrow SY$ последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(\Lambda, SZ) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda\left(\Lambda \prod_{SY} SX, SZ\right) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(\text{Ker } Su, SZ), \quad (1)$$

индуцированная морфизмами Su и f , точна. Так как функтор S вполне унивалентен и $\Lambda = SU$, то в $\mathcal{C}$ существует морфизм $g: U \rightarrow Y$, такой, что $f = Sg$. Имеем коммутативную диаграмму

¹⁾ Пропущено доказательство обратного утверждения леммы (а именно на него опирается доказательство следующей леммы 6.29). Пусть последовательность леммы точна, и g — произвольный морфизм $\Lambda_j \rightarrow \text{Coker } u$. Так как модуль Λ_j по предложению 6.1 проективен, то существует морфизм $f: \Lambda_j \rightarrow N$, для которого $pf = g$, так что (если заменить в диаграмме доказательства леммы Λ на Λ_j) $(\text{Ker}(pf), h)$ есть ядро g . Если морфизм $\alpha: \Lambda_j \rightarrow SX$ таков, что $\alpha h = 0$, то $\alpha u' (= \alpha hq) = 0$, откуда $\alpha = 0$, поскольку ϕ инъективно. Пусть теперь $\beta \in \text{Hom}(\text{Ker } g, SX)$. Так как $\beta q i' = 0$, т. е. $\beta q \in \text{Ker } \phi$, то поскольку $\text{Ker } \phi = \text{Im } \phi$, существует $\alpha: \Lambda_j \rightarrow SX$, такое, что $\beta q = \alpha i'$, т. е. $\beta q = \alpha hq$, а тогда $\beta = \alpha h$. Таким образом, каноническое отображение $\text{Hom}(\Lambda_j, SX) \rightarrow \text{Hom}(\text{Ker } g, SX)$ биективно, т. е. $\text{Coker } u$ пренебрегаем.

²⁾ Как было отмечено в примечании ²⁾ на стр. 174, единственный морфизм каждого пренебрегаемого модуля в SX нулевой. Поэтому SX не имеет ненулевых подобъектов из $\mathcal{A}$, так что $H(SX) = \varinjlim_{a \in \mathcal{F}} \text{Hom}(a, SX)$, где $\mathcal{F}$ — тополо-

гизирующая система правых идеалов кольца Λ , ассоциированная с $\mathcal{A}$. По определению каждое $a \in \mathcal{F}$ есть аннулятор элемента x какого-то пренебрегаемого модуля N , т. е. $a = \text{Ker } f$, где f — отображение $\Lambda \rightarrow x\Lambda$ по формуле $f(\lambda) = x\lambda$. Так как модуль $x\Lambda$ пренебрегаем вместе с N , то тогда имеется каноническая биекция $i_a: \text{Hom}(a, SX) \rightarrow \text{Hom}(\Lambda, SX)$. Непосредственно проверяется, что если $b \in \mathcal{F}$ и $b \subset a$, то $i_a = i_b i_{ab}$, где i_{ab} есть отображение $\text{Hom}(a, SX) \rightarrow \text{Hom}(b, SX)$, индуцированное каноническим вложением $b \rightarrow a$. Отсюда легко следует, что $\text{Hom}(\Lambda, SX)$ есть предел индуктивной системы $\{\text{Hom}(a, SX), i_{ab}\}$ (с каноническими инъекциями i_a), так что $SX \approx \text{Hom}(\Lambda, SX) \approx H(SX)$. Но объект $H(SX)$ замкнут (замечание 3 на стр. 163). Следовательно, и объект SX замкнут.

³⁾ Ибо S точен слева, а ядра морфизмов в $\bar{\mathcal{A}}$ те же, что и в $\mathcal{C}_\Lambda$ (см. примечание ³⁾ на стр. 164).

⁴⁾ См. стр. 164 и примечание ¹⁾ на стр. 165.

с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow \text{Ker } u & \xrightarrow{v'} & U & \prod_Y X & \xrightarrow{u'} & U & \rightarrow 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow g & \\
 & & & X & \xrightarrow{u} & Y & \rightarrow 0
 \end{array} \quad (2)$$

Так как S точен слева, то получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Ker } Su \rightarrow \Lambda \prod_{SY} SX \rightarrow \Lambda.$$

Точность последовательности (1) вытекает из точности верхней строки диаграммы (2) и полной унивалентности функтора S^1).

Лемма 6.30. Пусть X — объект из $\mathcal{C}$ и $(X_i)_{i \in I}$ — семейство его подобъектов, направленное по включению $\subset$ и такое, что $X = \sup_{i \in I} X_i$. Тогда $SX = \sup_{i \in I} SX_i$.

Доказательство. Достаточно доказать, что канонический морфизм

$$\sup_{i \in I} SX_i \rightarrow SX$$

¹⁾ Как мы видели, прежде всего следует заменить всюду Λ на $\Lambda_J = \bigoplus_{i \in J} \Lambda_i$, где J — произвольное конечное множество и все $\Lambda_i = \Lambda$. Пусть $U_i = U$ ($i \in J$). Тогда $\Lambda_J = \bigoplus_{i \in J} \text{Hom}(U, U_i)$ отождествимо с $\text{Hom}(U, U_J) = SU_J$, где $U_J = \bigoplus_{i \in J} U_i$. В соответствии с этим U в диаграмме (2) заменится на U_J , так что будем иметь точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Ker } u \rightarrow U_J \prod_Y X \rightarrow U_J \rightarrow 0.$$

Она индуцирует точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}(U_J, Z) \rightarrow \text{Hom}(U_J \prod_Y X, Z) \rightarrow \text{Hom}(\text{Ker } u, Z)$$

и, значит, поскольку S вполне унивалентен, — точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\Lambda_J, SZ) \rightarrow \text{Hom}(S(U_J \prod_Y X), SZ) \rightarrow \text{Hom}(S(\text{Ker } u), SZ).$$

Но так как S точен слева, то $S(\text{Ker } u)$ изоморфно $\text{Ker } Su$, а $S(U_J \prod_Y X)$ (в силу предложений 5.3 и 5.7) — расслоенному произведению $\Lambda_J \prod_{SY} SX$, причем эти изоморфизмы функториальны. Поэтому также последовательности

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\Lambda_J, SZ) \rightarrow \text{Hom}(\Lambda_J \prod_{SY} SX, SZ) \rightarrow \text{Hom}(\text{Ker } Su, SZ)$$

для всех объектов Z из $\mathcal{C}$ точны, и остается применить лемму 6.28 (в уточненной редакции — с заменой Λ на произвольные Λ_J).

является накрывающим¹⁾, а это можно получить, как в лемме 6.29, если воспользоваться соотношением

$$(\sup_{i \in I} X_i) \prod_X U = \sup_{i \in I} (X_i \prod_X U),$$

которое (поскольку $\mathcal{C}$ удовлетворяет условию АВ5) справедливо для любого морфизма $f: U \rightarrow X$ ²⁾.

¹⁾ Так как $SX = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X)$, то S сохраняет мономорфизмы, так что $(SX_i)_{i \in I}$ можно считать семейством подобъектов объекта SX , направленным по включению. Поскольку $\mathcal{C}$ удовлетворяет условию АВ5, тогда в $\mathcal{C}$ существует $\sup SX_i$, причем он совпадает с $\varinjlim SX_i$ (см. примечания²⁾ и ⁴⁾ на стр. 124). Но в силу сказанного перед предложением 6.21 функтор вложения $S': \bar{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{C}_{\Delta}$ обладает точным левым сопряженным T' с морфизмом сопряжения $\Phi: 1_{\mathcal{C}_{\Delta}} \rightarrow H = S'T'$, причем если $Y \in \text{Ob } \bar{\mathcal{A}}$, то $\Phi(Y): Y \rightarrow H(Y)$ — изоморфизм. Так как все $SX_i = S_1 X_i \in \text{Ob } \bar{\mathcal{A}}$, а T' , обладая правым сопряженным, перестановочен с индуктивными пределами, то заключаем, что

$$\varinjlim S(X_i) \approx \varinjlim H(S_1(X_i)) = \varinjlim T'S'S_1(X_i) \approx T' \varinjlim S(X_i) \in \text{Ob } \bar{\mathcal{A}}$$

и, значит, $\varinjlim S(X_i) \in \text{Ob } \bar{\mathcal{A}}$. Поэтому, если будет доказано, что канонический мономорфизм $u: \varinjlim S(X_i) \rightarrow S(X)$ накрывающий, то по замечанию 2 на стр. 163 точная последовательность

$$0 \rightarrow \varinjlim S(X_i) \xrightarrow{u} S(X) \xrightarrow{v} \text{Coker } u \rightarrow 0$$

должна будет расщепляться, так что будет существовать морфизм $w: \text{Coker } u \rightarrow S(X)$, такой, что $vw = 1_{\text{Coker } u}$. Но раз $\text{Coker } u$ пренебрегаем, то $w = 0$ (см. примечание²⁾ на стр. 174). Поэтому $\text{Coker } u = 0$ и, значит, $S(X) = \varinjlim S(X_i) = \sup_{i \in I} S(X_i)$.

²⁾ Пусть h — произвольный морфизм $SU_J \rightarrow \text{Coker } u$ (см. обозначения предыдущих примечаний). Так как $SU_J (\approx \Lambda_J)$ — проективный объект категории $\mathcal{C}_{\Delta}$, то существует морфизм $g: \Lambda_J \rightarrow S(X)$, для которого $h = vg$, и, далее, поскольку S вполне унивалентен, — морфизм $f: U_J \rightarrow X$, такой, что $g = Sf$. Пусть $X_i \prod_X U_J$ — расслоенное произведение, ассоциированное со схемой

$$\begin{array}{ccc} & U_J & \\ & \downarrow f & \\ X_i & \xrightarrow{u_i} & X \end{array}$$

где u_i — канонический мономорфизм. Так как S точен слева, то $S(X_i \prod_X U_J)$ есть расслоенное произведение, ассоциированное со схемой

$$\begin{array}{ccc} & SU_J & \\ & \downarrow Sf & \\ SX_i & \xrightarrow{Su_i} & SX \end{array}$$

Из леммы 6.30 вытекает, в частности, что S_1 перестановочен с суммами любых семейств объектов из $\mathcal{C}$; в частности, каждая сумма $\bigoplus_{i \in I} \Lambda_i$, где $\Lambda_i = \Lambda$ для всех $i \in I$, изоморфна $S_1(\bigoplus_{i \in I} U_i)$, где $U_i = U$ для всех $i \in I$ ¹⁾.

Пусть теперь M — произвольный объект из $\overline{\mathcal{A}}$. Тогда его можно включить в точную в $\mathcal{C}_\Lambda$ последовательность

$$SY \xrightarrow{Sf} SX \rightarrow M \rightarrow 0, \quad (*)$$

где $f: Y \rightarrow X$ — морфизм из $\mathcal{C}$ ²⁾. Очевидно, M изоморфен $S_1(\text{Coker } f)$ ³⁾. Таким образом, S_1 — вполне унивалентный функтор и каждый объект M из $\overline{\mathcal{A}}$ изоморфен объекту вида $S_1 M'$, где M' — объект из $\mathcal{C}$. Согласно предложению 1.19 это означает, что S_1 — эквивалентность.

Итак, теорема 6.25 полностью доказана⁴⁾.

Следствие 6.31. *Каждая категория Гротендика есть категория с произведениями.*

Доказательство. Это вытекает из теоремы 6.25 и предложения 5.39.

Следствие 6.32. *Каждая категория Гротендика есть категория с инъективными оболочками и кообразующими.*

Доказательство. Справедливость первого утверждения вытекает из теоремы 6.25 и следствия 6.17. Пусть теперь U — обра-

и, значит (поскольку $\mathcal{C}_\Lambda$ удовлетворяет условию AB5), $\varinjlim S(X_i \sqcap_X U_j) \approx \varinjlim S(X_i) \sqcap_{SX} SU_j$ (см. примечание⁴⁾ на стр. 124), так что $\varinjlim S(X_i \sqcap_X U_j) \approx \text{Ker } h$. Но так как $\varinjlim (X_i \sqcap_X U_j) \approx (\varinjlim X_i) \sqcap_X U_j = X \sqcap_X U_j \approx U_j$, то, принимая во внимание предложение 3.7 и полную унивалентность функтора S , для любого $Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$ имеем

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\varinjlim S(X_i \sqcap_X U_j), SZ) &\approx \varprojlim \text{Hom}(S(X_i \sqcap_X U_j), SZ) \approx \varprojlim \text{Hom}(X_i \sqcap_X U_j, Z) \approx \\ &\approx \text{Hom}(\varinjlim (X_i \sqcap_X U_j), Z) \approx \text{Hom}(U_j, Z) \approx \text{Hom}(SU_j, SZ). \end{aligned}$$

Поскольку $SU_j \sim \Lambda_j$, заключаем, что $\text{Coker } u$ пренебрегаем.

¹⁾ Пусть J пробегает множество всех конечных подмножеств множества индексов I , направленное по возрастанию. Тогда

$$\bigoplus_{i \in I} \Lambda_i = \varinjlim \bigoplus_{i \in J} \Lambda_i \approx \varinjlim S(\bigoplus_{i \in J} U_i) \approx S(\varinjlim \bigoplus_{i \in J} U_i) = S_1(\bigoplus_{i \in I} U_i).$$

²⁾ См. примечание¹⁾ на стр. 167.

³⁾ Последовательность (*), будучи точна в $\mathcal{C}_\Lambda$, тем более точна в $\overline{\mathcal{A}}$. Но по лемме 6.29 и последовательность $S_1 Y \xrightarrow{S_1 f} S_1 X \rightarrow S_1(\text{Coker } f) \rightarrow 0$ точна в $\overline{\mathcal{A}}$. Следовательно, $M \approx S_1(\text{Coker } f)$.

⁴⁾ См. примечание¹⁾ на стр. 171.

зующая категории Гротендика $\mathcal{C}$, $(U_i)_{i \in I}$ — семейство всех ее подобъектов и Q_i — инъективная оболочка факторобъекта $Y_i = U/U_i$ ($i \in I$). Тогда объект $W = \prod_{i \in I} Q_i$, инъективный как произведение инъективных объектов, является кообразующей категории $\mathcal{C}$ ¹⁾.

Приведем теперь теорему, которая будет в дальнейшем использована для изучения некоторых свойств абелевых категорий.

Теорема 6.33 (Б. Митчелл). Пусть $\mathcal{C}$ — абелева категория с проективной образующей U , $\Lambda = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, U)$ и $S: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\Lambda}$ — канонический функтор, определяемый формулой $S(X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X)$. Если X и Y — факторобъекты объекта U , то $S(X, Y): \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda}(SX, SY)$ — изоморфизм.

Доказательство. Функтор S унивалентен (предложение 6.24). Пусть $f: SX \rightarrow SY$ — Λ -гоморфизм. Так как S точен (U — проективный объект), то имеем диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & SK & \xrightarrow{Si} & \Lambda & \xrightarrow{Sp} & SX \rightarrow 0 \\ & & & & \downarrow f & & \\ & & & & \Lambda & \xrightarrow{Sq} & SY \rightarrow 0 \end{array}$$

с точными строками, построенными в согласии с предположением теоремы. Существует Λ -гоморфизм $g: \Lambda \rightarrow \Lambda$, для которого $Sq \circ g = f \circ Sp$. Но $g = Sg'$, где $g' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, U)$. Поэтому имеем равенство $qg'i = 0$, откуда вытекает существование в $\mathcal{C}$ морфизма $f': X \rightarrow Y$, такого, что $f'p = qg'$. Тогда $Sf' \circ Sp = Sq \circ g$, откуда $Sf' = f$, поскольку Sp — эпиморфизм.

Следствие 6.34. Каждая малая абелева категория $\mathcal{C}$ допускает полное вложение $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\Lambda}$ в категорию правых модулей над некоторым кольцом Λ .

¹⁾ Доказательство. а) Если $X \neq 0$, то $h_W(X) \neq 0$, т. е. существует ненулевой морфизм $\gamma: X \rightarrow W$. В самом деле, так как U — образующая, то имеется ненулевой морфизм $\xi: U \rightarrow X$. Пусть $U_{i_0} = \text{Ker } \xi$, так что существует изоморфизм $u: \text{Im } \xi \rightarrow Y_{i_0}$. Полагая $\beta_{i_0} = v_{i_0}u$, где $v_{i_0}: Y_{i_0} \rightarrow Q_{i_0}$ — канонический мономорфизм, и беря $\beta_i: \text{Im } \xi \rightarrow Q_i$ для всех $i \neq i_0$ нулевыми, получим морфизм $\beta: \text{Im } \xi \rightarrow W$. Поскольку W инъективен, β будет сужением некоторого морфизма $\gamma: X \rightarrow W$, и так как $\beta \neq 0$ (ибо $\beta_{i_0} \neq 0$), то также $\gamma \neq 0$. б) Если $\alpha: A \rightarrow B$ — ненулевой морфизм, то $h_W(\alpha) \neq 0$, т. е. существует $\gamma: B \rightarrow W$, такое, что $\beta\alpha \neq 0$. Действительно, так как W инъективен, то функтор h_W точен, откуда легко следует, что $\text{Im } h_W(\alpha) \approx h_W(\text{Im } \alpha)$. Но так как $\text{Im } \alpha \neq 0$, то по пункту а) $h_W(\text{Im } \alpha) \neq 0$ и, значит, $h_W(\alpha) \neq 0$. в) W — кообразующая. В самом деле, пусть $\beta: B \rightarrow C$ — эпиморфизм и (A, α) — его ядро. Если β — не изоморфизм, то $\alpha \neq 0$ и, значит, по пункту б) существует $\gamma: B \rightarrow W$, такое, что $\gamma\alpha \neq 0$. Но тогда γ не пропускается через β .

Доказательство. Согласно теореме 5.40 существует полное вложение $T_1: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_1$, где $\mathcal{C}_1$ — категория Гротендика, причем из построений, предшествующих теореме 5.40, можно усмотреть, что $\mathcal{C}_1$ обладает образующей U , имеющей своими факторобъектами объекты T_1X для всех объектов X из $\mathcal{C}$ ¹⁾. Тем самым $\mathcal{C}_1$, по следствию 6.32, обладает инъективной кообразующей V , содержащей все T_1X в качестве подобъектов. Категория $\mathcal{C}_1^\circ$, дуальная к $\mathcal{C}_1$, обладает проективной образующей V° (где V° — объект, „дуальный“ V). Поэтому согласно теореме 6.33 существует точный функтор $T_2: \mathcal{C}_1^\circ \rightarrow \mathcal{C}_\Lambda$, где Λ — надлежаще выбранное кольцо, такой, что для любых объектов X, Y из $\mathcal{C}$ морфизм $T_2(DT_1X, DT_1Y)$, где $D: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_1^\circ$ — функтор дуализации, есть изоморфизм. В итоге композиция функторов T_2DT_1A , где $A: \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathcal{C}$ — функтор дуализации, будет полным вложением $\mathcal{C}^\circ$ в $\mathcal{C}_\Lambda$, чем и завершается доказательство²⁾.

Следствие 6.35. Пусть $\mathcal{C}$ — абелева категория и

$$\begin{array}{ccccccc} X' & \rightarrow & X & \rightarrow & X'' & \rightarrow & 0 \\ f' \downarrow & & f \downarrow & & f'' \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & Y' & \rightarrow & Y & \rightarrow & Y'' \end{array}$$

— коммутативная диаграмма с точными строками в $\mathcal{C}$. Тогда существует морфизм $\theta: \text{Ker } f'' \rightarrow \text{Coker } f'$, такой, что последовательность

$$\text{Ker } f' \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow \text{Ker } f'' \xrightarrow{\theta} \text{Coker } f' \rightarrow \text{Coker } f \rightarrow \text{Coker } f''$$

точна.

Доказательство. Согласно предложению 5.41 существует полная малая абелева подкатегория $\mathcal{A}$ категории $\mathcal{C}$, содержащая указанную диаграмму. Пусть $T: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}_\Lambda$ — полное вложение. Как хорошо известно, в категории $\mathcal{C}_\Lambda$ утверждение следствия верно (А. Картан и С. Эйленберг [1], гл. 3). Для завершения

¹⁾ Действительно, $\mathcal{C}_1$ есть категория $\mathcal{S}$ всех точных слева контравариантных аддитивных функторов из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{A}l$, а T_1 — функтор R^0h из теоремы 5.40. Так как $(h_X)_{X \in \text{Ob } \mathcal{C}}$ — семейство образующих в $\mathcal{C}_1$, а $\mathcal{C}_1$ удовлетворяет условию АВЗ, то по предложению 5.33 $U = \bigoplus_{Y \in \text{Ob } \mathcal{C}} h_Y$ есть образующая категории $\mathcal{C}_1$.

Пусть $i_X: h_X \rightarrow U$ — канонический мономорфизм и $f: U \rightarrow T_1X (= R^0h_X)$ — морфизм, порождаемый морфизмами $f_Y: h_Y \rightarrow T_1X (Y \in \text{Ob } \mathcal{C})$, где $f_X = \rho_{h_X}$ (см. стр. 135), а все остальные f_Y нулевые. Так как $fi_X = \rho_{h_X}$, а ρ_{h_X} — изоморфизм, то f — эпиморфизм, так что T_1X можно считать факторобъектом образующей U .

²⁾ Разумеется, $\mathcal{C}$ заменено на $\mathcal{C}^\circ$ лишь для удобства записи; каждая малая абелева категория представима в виде категории, дуальной к малой абелевой категории.

доказательства достаточно заметить, что последовательность

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z$$

в $\mathcal{A}$ точна тогда и только тогда, когда точна последовательность

$$TX \rightarrow TY \rightarrow TZ$$

в $\mathcal{C}_\Lambda$.

З а м е ч а н и е. Используя характеризацию категорий Гротендика, данную в предложении 6.25, можно показать, что всякая категория диаграмм над категорией Гротендика есть категория Гротендика; это — обобщение одного результата Гротендика.

§ 7. Теорема Крулля — Ремака — Шмидта

О п р е д е л е н и е. Пусть M — объект абелевой категории $\mathcal{C}$. Его подобъект N называется *неприводимым* в M , если выполнены следующие условия:

(а) $N \neq M$.

(б) Если $P \cap Q = N$, то $P = N$ или $Q = N$.

Если 0 неприводим в M , то M называется *конеприводимым*¹⁾.

О п р е д е л е н и е. Ненулевой объект X абелевой категории $\mathcal{C}$ называется *неразложимым*, если $X = X_1 \oplus X_2$ лишь при $X_1 = 0$ или $X_2 = 0$.

Далее будет предполагаться, что $\mathcal{C}$ — категория с инъективными оболочками или категория Гротендика.

П р е д л о ж е н и е 6.36. Следующие утверждения равносильны:

(а) M — конеприводимый объект.

(б) Инъективная оболочка $E(M)$ объекта M неразложима.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (а) $\Rightarrow$ (б). Пусть объект M конеприводим и $E(M) = Q_1 \oplus Q_2$. Очевидно, $Q_1 \cap M \subset M$, $Q_2 \cap M \subset M$ и $(Q_1 \cap M) \cap (Q_2 \cap M) = 0$. Но если $Q_1 \neq 0$ и $Q_2 \neq 0$, то это противоречит конеприводимости объекта M , поскольку тогда $Q_1 \cap M \neq 0$ и $Q_2 \cap M \neq 0$.

(б) $\Rightarrow$ (а). Пусть инъективная оболочка $E(M)$ объекта M неразложима и P, Q — его подобъекты, такие, что $P \cap Q = 0$ и $P \neq 0$. Так как $E(P) \subset E(M)$ ²⁾, то в силу неразложимости $E(M)$

¹⁾ Если N неприводим в M , то M/N конеприводим. Действительно, пусть $\omega: M \rightarrow M/N$ — канонический эпиморфизм и P, Q — подобъекты в M/N , такие, что $P \cap Q = 0$. Тогда $\omega^{-1}(P) \cap \omega^{-1}(Q) = \omega^{-1}(P \cap Q) = \omega^{-1}(0) = N$, а потому $\omega^{-1}(P)$ или $\omega^{-1}(Q)$ равно N , откуда $P = \omega\omega^{-1}(P) = 0$ или $Q = 0$. Можно показать, что верно и обратное.

²⁾ Имеем мономорфизмы $i: P \rightarrow E(P)$ и $j: P \rightarrow M \rightarrow E(M)$. Так как $E(P)$ и $E(M)$ инъективны, то существуют морфизмы $u: E(P) \rightarrow E(M)$ и $v: E(M) \rightarrow E(P)$, такие, что $j = ui$ и $i = vj$, откуда $vui = i$, т. е. vui — мономорфизм. Так как i — существенный мономорфизм, то ui , а значит, и u — мономорфизм, так что $E(P)$ является прямым слагаемым в $E(M)$.

имеем $E(P) = E(M)$, откуда $E(P) \cap Q = E(M) \cap Q = Q$ и потому $(E(P) \cap Q) \cap P = Q \cap P = 0$. Но тогда $Q = E(P) \cap Q = 0$.

Следствие 6.37. Если $N_1, \dots, N_r$ — неприводимые подобъекты объекта M , такие, что $N_1 \cap \dots \cap N_r = 0$, но пересечение любого меньшего числа этих подобъектов отлично от 0, то

$$E(M) = E(M/N_1) \oplus \dots \oplus E(M/N_r),$$

причем объекты $E(M/N_i)$ неразложимы ¹⁾.

¹⁾ Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{k=1}^r P_k & \xrightleftharpoons[\sigma_i]{\rho_i} & P_i & & \\ & \searrow \gamma & \swarrow \gamma_i & & \\ & & M & & \\ & \swarrow \omega & \searrow \omega_j & & \\ \bigoplus_{k=1}^r M/N_k & \xrightleftharpoons[\mu_j]{\nu_j} & M/N_j & & \end{array}$$

$\lambda \downarrow$ $\downarrow \lambda_{ij}$
 $\downarrow$ $\downarrow$

где $P_i = \bigcap_{k \neq i} N_k$, σ_i и ρ_i равно как μ_j и ν_j — канонические инъекции и проекции, γ_i и ω_j — канонические мономорфизмы и эпиморфизмы, γ и ω — единственные морфизмы, удовлетворяющие соотношениям $\gamma\sigma_i = \gamma_i$ и $\nu_j\omega = \omega_j$ для $i, j = 1, \dots, r$, $\lambda_{ij} = \omega_j\gamma_i$ и $\lambda = \bigotimes_{i=1}^r \lambda_{ij}$, т. е. $\mu_i\lambda_{ii} = \lambda\sigma_i$ для $i = 1, \dots, r$. Имеем $\nu_j\lambda\sigma_i\rho_i = \nu_j\mu_i\lambda_{ii}\rho_i = \lambda_{ij}\rho_j$ при $i = j$ и 0 при $i \neq j$, откуда $\nu_j\lambda = \sum_{i=1}^r \nu_j\lambda\sigma_i\rho_i = \lambda_{jj}\rho_j$. С другой стороны, $\nu_j\omega\gamma = \sum_i \nu_j\omega\gamma\sigma_i\rho_i = \sum_i \omega_j\gamma_i\rho_i = \sum_i \lambda_{ji}\rho_i$. Но $\lambda_{ji} = 0$ при $i \neq j$, поскольку тогда $P_i \subset N_j$. Таким образом, $\nu_j\omega\gamma = \lambda_{jj}\rho_j = \nu_j\lambda$ для всех j и, следовательно, $\omega\gamma = \lambda$. Далее, так как $\text{Ker } \lambda_{jj} = N_j \cap P_j = 0$, то λ_{jj} — мономорфизмы. Пусть $\mu: M/N_j \rightarrow L$ — произвольный морфизм, для которого $\mu\lambda_{jj}$ — мономорфизм, и $K = \text{Ker } \mu$, так что $K \cap P_j \approx \text{Ker } (\mu\lambda_{jj}) = 0$. Так как M/N_j конеприводим (примечание ¹⁾ на стр. 183), а $P_j \neq 0$, то $K = 0$, т. е. μ — мономорфизм. Таким образом, λ_{jj} — существенные мономорфизмы, а потому, согласно лемме 6.8 (распространенной по индукции на любые конечные суммы), и λ — существенный мономорфизм. Пусть теперь (K, κ) — ядро ω . Так как $\omega_j\kappa = \nu_j\omega\kappa = 0$, то $K \subset N_j$ для всех j , так что $K = 0$.

Тем самым ω — мономорфизм и притом, как легко следует из равенства $\omega\gamma = \lambda$, существенный вместе с λ . Но если $\alpha: X \rightarrow Y$ — существенный мономорфизм, то $E(X) \approx E(Y)$. В самом деле, пусть $\xi: X \rightarrow E(X)$ — канонический мономорфизм; так как объект $E(X)$ инъективен, то существует $\beta: Y \rightarrow E(X)$, такое, что $\beta\alpha = \xi$; из сущестственности α и мономорфности ξ следует, что β — мономорфизм, а в силу сущестственности ξ и он существенный. Так как по доказанному

. Предложение 6.38. Пусть I — инъективный объект. Тогда следующие утверждения равносильны:

(а) I неразложим.

(б) $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(I, I)$ — локальное кольцо.

Доказательство. (а) $\Rightarrow$ (б). Заметим прежде всего, что элемент $u \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(I, I)$ обратим тогда и только тогда, когда $\text{Ker } u = 0$. В самом деле, так как I инъективен, то в силу условия (а) $\text{Ker } u = 0$ влечет $u(I) = \text{Im } u = I$. Поэтому достаточно доказать, что если $\text{Ker } u \neq 0$ и $\text{Ker } v \neq 0$, то $\text{Ker } (u + v) \neq 0$ ¹). Но в противном случае, поскольку $\text{Ker } (u + v) \supset \text{Ker } u \cap \text{Ker } v$, мы получили бы, что $\text{Ker } u \cap \text{Ker } v = 0$, в противоречие с предложением 6.36.

(б) $\Rightarrow$ (а). Если бы объект I не был неразложимым, то мы имели бы $I = I_1 \oplus I_2$, где $I_1 \neq 0$ и $I_2 \neq 0$. Но тогда $i_1 p_1$ и $i_2 p_2$ были бы необратимы, а их сумма обратима, что противоречит условию (б)²).

З а м е ч а н и е. При доказательстве импликации (б) $\Rightarrow$ (а) мы не использовали предположения, что I инъективен. Ниже будут указаны условия, при которых и импликация (а) $\Rightarrow$ (б) справедлива без предположения инъективности объекта I .

Начиная отсюда, мы снова будем предполагать, что категория $\mathcal{C}$ удовлетворяет условию АВ5.

Л е м м а 6.39. Пусть $M = M_1 \oplus M_2$, с каноническими инъекциями i_1, i_2 и каноническими проекциями p_1, p_2 . Если $P \xrightarrow{\alpha} M$ — подобъект объекта M , такой, что $p_1 \alpha: P \rightarrow M_1$ — изоморфизм, то $M = P \oplus M_2$, с каноническими инъекциями $i_1 p_1 \alpha, i_2$ и каноническими проекциями $(p_1 \alpha)^{-1} p_1, p_2$.

Доказательство очевидно.

О п р е д е л е н и е. Объект M абелевой категории $\mathcal{C}$ называется нётеровым, если каждая последовательность

$$M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_i \subset \dots$$

$\omega: M \rightarrow \bigoplus_{k=1}^r M/N_k$ — существенный мономорфизм, то, принимая во внимание лемму 6.9, заключаем, что $E(M) \approx E\left(\bigoplus_{k=1}^r M/N_k\right) \approx \bigoplus_{k=1}^r E(M/N_k)$. Наконец, неразложимость всех $E(M/N_k)$ следует в силу предложения 6.36 из конеприводимости всех M/N_k .

¹) Ибо тогда совокупность всех необратимых элементов кольца $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(I, I)$ будет его единственным максимальным идеалом.

²) Ибо максимальные идеалы M_1 и M_2 , содержащие соответственно $i_1 p_1$ и $i_2 p_2$ (существующие, поскольку $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(I, I)$ — кольцо с единицей), были бы различны.

его подобъектов стационарна, т. е. существует номер n_0 , такой, что $M_i = M_{i+1}$ для всех $i \geq n_0$.

Лемма 6.40. *Каждый подобъект нётерова объекта является пересечением конечного числа неприводимых подобъектов.*

Доказательство. Допустим, что существует нётеров объект, не все подобъекты которого обладают утверждаемым свойством. Пусть $\mathcal{M}$ — множество всех таких подобъектов. Из определения нётерова объекта вытекает, что $\mathcal{M}$ обладает хотя бы одним максимальным элементом. Пусть N — такой элемент. Он не может быть неприводимым. Но тогда $N = N_1 \cap N_2$, где N_1 и N_2 уже обладают свойством, утверждаемым в лемме, и мы пришли к противоречию.

Предложение 6.41. *Инъективная оболочка каждого нётерова объекта является суммой конечного числа неразложимых инъективных объектов.*

Доказательство. Пусть M — нётеров объект. В силу леммы 6.40 $0 = N_1 \cap \dots \cap N_r$, где $N_1, \dots, N_r$ — его неприводимые подобъекты, причем, очевидно, можно считать, что пересечение любого меньшего числа этих подобъектов N_i уже не равно 0. Таким образом, мы находимся в условиях следствия 6.37, в силу которого

$$E(M) = E(M/N_1) \oplus \dots \oplus E(M/N_r),$$

где $E(M/N_i)$ — неразложимые инъективные объекты.

Мы покажем, что разложение, доставляемое предложением 6.41, с точностью до изоморфизмов и перестановки слагаемых единственно. Доказательство этой теоремы единственности будет опираться на несколько лемм.

Лемма 6.42. *Пусть $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ и $a, b: M \rightarrow M$ таковы, что $a + b = 1_M$. Предположим, что кольцо эндоморфизмов $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M_i, M_i)$ объекта M_i для каждого $i \in I$ локально. При этих условиях для каждого конечного набора $i_1, \dots, i_s$ индексов из I существуют подобъекты $P_1, \dots, P_s$ объекта M , обладающие следующими свойствами:*

(1) Для каждого $k \in \{1, \dots, s\}$ a или b индуцирует изоморфизм P_k на M_{i_k} .

(2) $M = (P_1 \oplus \dots \oplus P_s) \oplus (\bigoplus_{i \in I'} M_i)$, где через I' обозначено множество $I \setminus \{i_1, \dots, i_s\}$.

Доказательство. Пусть $p_i: M \rightarrow M_i$ — каноническая проекция M на M_i и $\alpha_i: M_i \rightarrow M$ — каноническая инъекция M_i в M .

Имеем

$$p_{i_1} = p_{i_1}(a + b) = p_{i_1}a + p_{i_1}b,$$

$$1_{M_{i_1}} = p_{i_1}\alpha_{i_1} = p_{i_1}a\alpha_{i_1} + p_{i_1}b\alpha_{i_1}.$$

В силу локальности кольца эндоморфизмов объекта M_{i_1} отсюда следует, что $p_{i_1}a\alpha_{i_1}$ или $p_{i_1}b\alpha_{i_1}$ — изоморфизм. Пусть, скажем, $p_{i_1}a\alpha_{i_1}: M_{i_1} \rightarrow M_{i_1}$ — изоморфизм. Обозначим подобъект $(a\alpha_{i_1})(M_{i_1})$ объекта M через P_1 . Очевидно, сужение p_{i_1} на P_1 осуществляет изоморфизм P_1 на M_{i_1} , так что применима лемма 6.39 и мы получаем, что $M = P_1 \oplus (\bigoplus_{i \in I \setminus \{i_1\}} M_i)$. Повторяя теперь то же рассуждение для индекса i_2 и т. д., мы получим через конечное число шагов объекты $P_1, \dots, P_s$ с требуемыми свойствами.

Лемма 6.43. Пусть $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ и кольцо эндоморфизмов объекта M_i для каждого $i \in I$ локально. При этих условиях справедливы следующие утверждения:

(а) Каждый ненулевой идемпотентный морфизм $f: M \rightarrow M$ (т. е. такой морфизм f , что $f \neq 0$ и $f^2 = f$) индуцирует по крайней мере для одного $i \in I$ изоморфизм M_i на $f(M_i)$, причем $f(M_i)$ является прямым слагаемым объекта M .

(б) Каждое неразложимое прямое слагаемое объекта M изоморфно одному из M_i .

Доказательство. Положив $f' = 1 - f$, будем, очевидно, иметь следующее разложение:

$$M = f(M) \oplus f'(M).$$

В силу аксиомы АВ5

$$f(M) = \sup_J (f(M) \cap \bigoplus_{i \in J} M_i),$$

где J пробегает множество всех конечных подмножеств множества I . Поэтому существует конечное множество индексов $\{i_1, \dots, i_s\} \subset I$, для которого

$$f(M) \cap (M_{i_1} \oplus \dots \oplus M_{i_s}) \neq 0.$$

Применяя теперь лемму 6.42 с $a = f$, $b = f'$ и набором индексов $i_1, \dots, i_s$, получаем разложение

$$M = (P_1 \oplus \dots \oplus P_s) \oplus (\bigoplus_{i \in I'} M_i),$$

где $I' = I \setminus \{i_1, \dots, i_s\}$. Так как, с другой стороны, $f(M) \cap (M_{i_1} \oplus \dots \oplus M_{i_s})$ принадлежит ядру f' , то заключаем, что f индуцирует изоморфизм между M_{i_k} и P_k по крайней мере для одного индекса i_k , и утверждение (а) доказано.

Пусть теперь P — неразложимое прямое слагаемое объекта M , $M = P \oplus Q$. Существует идемпотентный эндоморфизм $p: M \rightarrow M$, такой, что $p(M) = P$. Из утверждения (а) следует, что p индуцирует изоморфизм некоторого M_i на $p(M_i) \subset P$, причем $p(M_i)$ — прямое слагаемое объекта M . Поскольку P — неразложимое прямое слагаемое, заключаем, что $p(M_i) = P$, и утверждение (б) доказано.

Мы в состоянии теперь сформулировать и доказать теорему Крулля — Ремака — Шмидта в части единственности.

Теорема 6.44 (теорема Крулля — Ремака — Шмидта). Пусть

$$M = \bigoplus_{i \in I} M_i = \bigoplus_{j \in J} N_j,$$

где для всех $i \in I$ и $j \in J$ объекты M_i, N_j неразложимы, а кольца эндоморфизмов $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M_i, M_i)$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(N_j, N_j)$ локальны. При этих условиях существует биекция $\pi: I \rightarrow J$, такая, что M_i изоморфно $N_{\pi(i)}$ для каждого $i \in I$.

Доказательство. Применение леммы 6.43 сразу показывает, что каждый объект M_i изоморфен одному из объектов N_j и наоборот. Введем теперь в множестве индексов I следующее отношение эквивалентности: будем говорить, что индекс i_1 эквивалентен индексу i_2 , если объект M_{i_1} изоморфен объекту M_{i_2} . Аналогичное отношение эквивалентности введем в множестве индексов J . Пусть K , соответственно L , — фактормножество множества I , соответственно множества J , по этому отношению эквивалентности. Отмеченные выше изоморфизмы порождают биективное соответствие между K и L . Основываясь на этом, отождествим L с K .

Пусть теперь $k \in K$. Обозначим через $I(k)$, соответственно $J(k)$, множество всех элементов из I , соответственно из J , принадлежащих классу k . Достаточно доказать, что множества $I(k)$ и $J(k)$ для каждого $k \in K$ равномощны. Пусть $c(I(k))$ и $c(J(k))$ — их кардинальные числа. Поскольку роли множеств I и J симметричны, достаточно доказать, что $c(I(k)) \geq c(J(k))$. Возможны два случая:

1. $c(I(k))$ конечно. Пусть $j_1 \in J(k)$ и $p_{j_1}: M \rightarrow M$ — идемпотентный эндоморфизм, для которого $p_{j_1}(M) = N_{j_1}$. По лемме 6.43 существует $i_1 \in I(k)$, такое, что p_{j_1} индуцирует изоморфизм M_{i_1} с N_{j_1} , а по лемме 6.42 имеем тогда разложение

$$M = M_{i_1} \oplus \left(\bigoplus_{I \neq i_1} N_j \right). \quad (*)$$

Если j_1 — единственный элемент множества $J(k)$, то соотношение $c(I(k)) \geq c(J(k))$ уже доказано. Если же $J(k)$ содержит также элемент $j_2 \neq j_1$, то рассмотрение проекции p_{j_1} в разложении (*)

показывает, что существует $i_2 \in I(k)$, такое, что p_{i_2} индуцирует изоморфизм M_{i_2} с N_{j_2} , и нужно только показать, что $i_2 \neq i_1$, а это следует из того, что $p_{i_1}(M_{i_1}) = 0$. Очевидно, продолжая это рассуждение, мы через конечное число шагов докажем, что $c(I(k)) \geq c(J(k))$.

2. $c(I(k))$ бесконечно. Пусть $j \in J$ и $p_j: M \rightarrow N_j$ — каноническая проекция. Для каждого $i \in I$ имеем соотношение

$$M_i = \sup_L (M_i \cap \bigoplus_{j \in L} N_j),$$

где L пробегает множество всех конечных подмножеств множества J . Следовательно, $M_i \cap \text{Ker } p_j = 0$ лишь для конечного числа индексов j , и потому имеется лишь конечное число индексов j , для которых p_j индуцирует изоморфизм M_i с N_j . Поскольку $c(I(k))$ бесконечно, заключаем, что $c(I(k)) \geq c(J(k))$.

Теорема Крулля — Ремака — Шмидта в форме Атьи

Установленная выше теорема Крулля — Ремака — Шмидта есть теорема о существовании и единственности разложений на неразложимые объекты инъективных объектов в абелевых категориях, подчиненных некоторым условиям. Нашей целью теперь будет доказать теорему типа Крулля — Ремака — Шмидта, которая была бы применима ко всем объектам рассматриваемой категории. Условия, которые мы собираемся наложить на категорию $\mathcal{C}$, аналогичны условиям нётерова или артинова типа в теории модулей.

Определение. Двойной цепью в абелевой категории $\mathcal{C}$ называется последовательность систем (A_n, i_n, p_n) ($n = 0, 1, 2, \dots$) со следующими свойствами:

(I) A_n — объекты категории $\mathcal{C}$.

(II) $i_n: A_n \rightarrow A_{n-1}$ — мономорфизм для каждого $n \geq 1$.

(III) $p_n: A_{n-1} \rightarrow A_n$ — эпиморфизм для каждого $n \geq 1$.

Двойная цепь называется *стационарной*, если существует такой номер N , что i_n и p_n — изоморфизмы для всех $n \geq N$.

Наша цель — доказать следующую теорему:

Теорема 6.45 (Круль — Ремак — Шмидт). Если в категории $\mathcal{C}$ каждая двойная цепь стационарна, то каждый объект M из $\mathcal{C}$ обладает разложением $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ на неразложимые прямые слагаемые M_i . При этом если $M = N_1 \oplus \dots \oplus N_m$ — еще одно разложение, в котором все N_i неразложимы, то $n = m$ и существует такая перестановка $\pi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, что M_i изоморфно $N_{\pi(i)}$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Доказательство. Существование. Предположим, что имеется неограниченная последовательность разложений

$$M = A_1 \oplus B_1, A_1 = A_2 \oplus B_2, \dots, A_{n-1} = A_n \oplus B_n, \dots,$$

а с ней — и соответствующих канонических инъекций и проекций

$$i_n: A_n \rightarrow A_{n-1}, \quad p_n: A_{n-1} \rightarrow A_n.$$

Тем самым получаем двойную цепь (A_n, i_n, p_n) . Согласно условию теоремы эта двойная цепь стационарна, что противоречит нашему предположению ¹⁾.

Единственность разложения будет вытекать из теоремы 6.44, если мы докажем, что при нашем предположении о двойных цепях $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ есть локальное кольцо для всякого неразложимого объекта A . Последнее непосредственно вытекает из следующих лемм.

Лемма 6.46. Пусть A — произвольный объект категории $\mathcal{C}$. Со всяким морфизмом $\theta: A \rightarrow A$ можно ассоциировать двойную цепь (A_n, i_n, p_n) так, что если она стационарна, то A_n для достаточно больших n есть прямое слагаемое объекта A .

Доказательство. Двойная цепь (A_n, i_n, p_n) строится следующим образом. Пусть $(A_n, j_n) = \text{Im } \theta^n$ (так что j_n — каноническая инъекция $A_n \rightarrow A$). Так как $\theta^n = \theta^{n-1} \circ \theta$, то $\text{Im } \theta^n \subset \text{Im } \theta^{n-1}$, иными словами, существует мономорфизм $i_n: A_n \rightarrow A_{n-1}$, для которого $j_{n-1}i_n = j_n$. Отсюда $j_n = i_1i_2 \dots i_n$. Существуют также эпиморфизмы $p_{n-1}: A_{n-1} \rightarrow A_n$, такие, что $j_n p_{n-1} = \theta j_{n-1}$ ²⁾. Тем самым мы определили двойную цепь (A_n, i_n, p_n) . Предположим теперь, что она стационарна. Определим эпиморфизм $q_n: A \rightarrow A_n$ формулой ³⁾

$$q_n = p_{n-1} \dots p_0.$$

Покажем сначала, что морфизм $q_n j_n: A_n \rightarrow A_n$ для достаточно больших n есть изоморфизм. Это следует из соотношения

$$q_n j_n = i_{n+1} \dots i_{2n} p_{2n-1} \dots p_n. \quad (**)$$

¹⁾ Пока доказано лишь, что M обладает неразложимым прямым слагаемым M_1 . Пусть M'_1 — его прямое дополнение. По доказанному и оно обладает неразложимым прямым слагаемым M_2 , с прямым дополнением M'_2 . Продолжая этот процесс, получим двойную цепь $M, M'_1, M'_2, \dots$. В силу предположения теоремы эта цепь стационарна. А тогда, по ее построению, M'_n с некоторого номера n становится нулевым, и мы получаем требуемое разложение $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$.

²⁾ Так как $\theta^{n-1} = j_{n-1}q_{n-1}$, где q_{n-1} — эпиморфизм, то $(A_n, j_n) = \text{Im } \theta^n = \text{Im } (\theta j_{n-1}q_{n-1}) = \text{Im } (\theta j_{n-1})$, так что $\theta j_{n-1} = j_n p_{n-1}$, где p_{n-1} — эпиморфизм. Заметим, кстати, что тогда $j_n q_n = \theta^n = \theta j_{n-1}q_{n-1} = j_n p_{n-1}q_{n-1}$ и, значит (поскольку j_n — мономорфизм), $q_n = p_{n-1}q_{n-1}$, а отсюда следует, что $q_n = p_{n-1}p_{n-2} \dots p_0$.

³⁾ См. предыдущее примечание.

Для его доказательства заметим, что

$$j_n q_n j_n = j_n (p_{n-1} \dots p_0) j_n = \theta j_{n-1} q_{n-1} j_n = \theta^n j_n,$$

$$j_n (i_{n+1} \dots i_{2n} p_{2n-1} \dots p_n) =$$

$$= j_{2n} p_{2n-1} \dots p_n = \theta j_{2n-1} p_{2n-2} \dots p_n = \dots = \theta^n j_n;$$

соотношение (**) вытекает отсюда, поскольку j_n — мономорфизм. Пусть $\sigma_n = q_n j_n$. Имеем $\sigma_n^{-1} q_n j_n = 1_{A_n}$, а отсюда вытекает, что A_n есть прямое слагаемое объекта A .

Лемма 6.47. Пусть в абелевой категории $\mathcal{C}$ всякая двойная цепь стационарна. Если тогда A — неразложимый объект из $\mathcal{C}$, то каждый элемент $\theta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ либо есть изоморфизм, либо нильпотентен.

Доказательство. Используя обозначения и результаты леммы 6.46, заключаем из неразложимости A , что морфизмы j_n и q_n для достаточно больших значений n — либо оба изоморфизмы, либо оба нули. В первом случае θ — изоморфизм, тогда как во втором $\theta^n = 0$.

Лемма 6.48. При условиях леммы 6.47, если $\theta_1, \theta_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ и $\theta_1 + \theta_2$ — изоморфизм, то θ_1 или θ_2 — изоморфизм.

Доказательство. Можно считать, что $\theta_1 + \theta_2 = 1_A$. Если бы ни θ_1 , ни θ_2 не было изоморфизмом, то из леммы 6.48 следовало бы, что $(\theta_1 + \theta_2)^{2^n} = 0^1$, что абсурдно. Мы опирались здесь на соотношение $\theta_1 \theta_2 = \theta_2 \theta_1$, вытекающее, например, из равенств $\theta_1 \theta_2 = \theta_1 - \theta_1^2 = \theta_2 \theta_1$.

Замечание. Не следует думать, что в абелевых категориях, в которых каждая двойная цепь стационарна, все объекты инъективны. Так, в абелевой категории конечных абелевых групп имеются объекты, не являющиеся инъективными.

§ 8. Строение инъективных объектов в локально нётеровых категориях

Пусть $\mathcal{C}$ — категория Гротендика.

Определение. Категория $\mathcal{C}$ называется *локально нётеровой*, если она обладает семейством нётеровых образующих.

Из этого определения непосредственно следует, что каждый объект категории $\mathcal{C}$ является верхней гранью своих нётеровых подобъектов. В качестве примеров локально нётеровых категорий

¹⁾ Под n понимается показатель степени, для которого в этом случае было бы одновременно $\theta_1^n = 0$ и $\theta_2^n = 0$.

можно назвать категорию $\mathcal{A}$ абелевых групп и категорию градуированных унитарных левых модулей над нётеровым слева кольцом Λ с единицей. Более общий характер имеет следующий пример. Пусть $\mathcal{C}$ — малая абелева категория, каждый объект которой нётеров. Тогда категория точных слева контравариантных функторов из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{A}$ локально нётерова, и обратно, каждая локально нётерова категория есть категория такого вида.

Докажем теперь несколько результатов, которые приведут нас к характеристизации инъективных объектов локально нётеровых категорий.

Предложение 6.49. Пусть $\mathcal{C}$ — категория Гротендика, M — ее нётеров объект и $(P_i)_{i \in I}$ — семейство подобъектов объекта P , направленное по возрастанию и такое, что $P = \sup_{i \in I} P_i$. Тогда канонический гомоморфизм

$$\varphi: \sup_i \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, P_i) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, \sup_i P_i)$$

есть изоморфизм.

Доказательство. То, что φ — мономорфизм, — факт общего характера. Остается доказать, что φ — эпиморфизм. Пусть $f: M \rightarrow \sup_i P_i$ — морфизм из $\mathcal{C}$. Тогда $P'_i = \text{Im } f$ есть нётеров подобъект объекта P , так что $(P'_i \cap P_i)_{i \in I}$ есть семейство подобъектов объекта P , обладающее максимальным элементом, скажем $P'_i \cap P_{i_0}$. Но тогда $P'_i = P'_i \cap P_{i_0}$. В самом деле, для каждого $i \in I$ существует $j(i) \in I$, такое, что $P_{j(i)} \supset P_i$ и $P_{j(i)} \supset P_{i_0}$, откуда $P_{j(i)} \cap P'_i = P_{i_0} \cap P'_i$ и $P'_i = \sup_i (P'_i \cap P_i) = \sup_i (P_{j(i)} \cap P'_i) = P_{i_0} \cap P_i$. Таким образом $\text{Im } f \subset P_{i_0}$, а остальное ясно.

Следствие 6.50. В локально нётеровой категории $\mathcal{C}$ сумма инъективных объектов является инъективным объектом.

Доказательство¹⁾. Допустим, что в $\mathcal{C}$ существует семейство $(Q_i)_{i \in I}$ инъективных объектов, сумма которого Q не инъективна. Тогда имеются объект X , его подобъект X' с каноническим мономорфизмом $\alpha: X' \rightarrow X$ и морфизм $f': X' \rightarrow Q$, такие, что f' не продолжается на X , т. е. нет морфизма $f: X \rightarrow Q$, для которого бы $f' = f\alpha$. Пусть $\mathcal{M}$ — множество всех пар (Y, g) , где Y — подобъект объекта X , содержащий X' , а $g: Y \rightarrow Q$ морфизм, продолжающий f' . Из аксиомы АВ5 легко следует, что $\mathcal{M}$, упорядоченное отноше-

¹⁾ Доказательство этого следствия, помещенное в английском оригинале книги, содержало ошибку. Н. Попеску любезно сообщил новое доказательство, которое ниже и излагается.

нием $(Y_1, g_1) \leq (Y_2, g_2)$, означающим, что $Y_1 \subset Y_2$ и g_2 — продолжение g_1 на Y_2 , индуктивно и, значит, по лемме Цорна обладает максимальным элементом. Тогда без ограничения общности можно считать, что им служит сама пара (X', f') , т. е. морфизм f' — не продолжаемый. Так как $\mathcal{E}$ локально нетерова и $X' \neq X$, то X обладает нетеровым подобъектом Y' , не содержащимся в X' . Пусть $\beta: Y' \rightarrow X$ канонический мономорфизм, $M = X' \oplus Y'$ с каноническими инъекциями i, j и проекциями $p, q, \mu = \alpha p - \beta q$ и $(K, \kappa) = \text{Ker } \mu$. Согласно предложению 5.7 объект K вместе с морфизмами px и qx есть расслоенное произведение, ассоциированное X'

со схемой $\downarrow \alpha$. Так как α мономорфизм, то, в силу пред-

$$Y' \xrightarrow{\beta} X$$

ложения 2.7, тогда также qx мономорфизм и, значит, K вместе с Y' — нетеров объект. Пусть теперь J пробегает все конечные подмножества множества I . Так как $Q = \bigoplus_{i \in I} Q_i$ есть верхняя грань направленного по возрастанию семейства своих подобъектов $S_J = \bigoplus_{i \in J} Q_i$, то, по предложению 6.49, $\text{Im}(f'px) \subset S_J$ для некоторого конечного $J \subset I$. Но S_J как сумма конечного семейства инъективных объектов, есть инъективный объект. Поэтому $f'px$ допускает продолжение на Y' , т. е. существует такой морфизм $g': Y' \rightarrow Q$, что $g'qx = f'px$. Положим $h' = f'p - g'q$ и пусть $L = \text{Im } \mu$, так что $\mu = \lambda v$, где $\lambda: L \rightarrow X$ канонический мономорфизм. Так как тогда $0 \rightarrow K \xrightarrow{x} M \xrightarrow{\mu} L \rightarrow 0$ точная последовательность, а $h'\kappa = 0$, то существует такой морфизм $h: L \rightarrow Q$, что $h' = hv$. Но так как $\alpha = \mu i = \lambda(vi)$ и $f' = h'i = h(vi)$, то $X' \subset L$ и h служит продолжением f' на L . С другой стороны, так как $\beta = \mu(-j) = \lambda(-vj)$, то также $Y' \subset L$ и, значит, $X' \neq L$. Полученное противоречие с непродолжаемостью морфизма f' и доказывает справедливость следствия 6.50.

Предложение 6.51. Каждый ненулевой инъективный объект локально нетеровой категории $\mathcal{E}$ является суммой некоторого семейства $(Q_i)_{i \in I}$ неразложимых инъективных объектов, и если Q есть также сумма семейства $(Q'_i)_{i \in I}$ неразложимых инъективных объектов, то существует биекция $\tau: I \rightarrow J$, такая, что $Q_i \approx Q'_{\tau(i)}$ для всех $i \in I$.

Доказательство. Объект Q обладает ненулевыми нетеровыми подобъектами; их инъективные оболочки, также являющиеся подобъектами объекта Q , представимы согласно предложению 6.41 в виде сумм конечных семейств неразложимых инъективных объектов. Пусть Q_0 — какой-либо максимальный подобъект объекта Q , являющийся суммой неразложимых инъективных

объектов¹⁾. Так как Q_0 в силу следствия 6.50 инъективен, то $Q = Q_0 \oplus Q_1$. Если объект Q_1 — ненулевой, то он содержит ненулевой нётеров подобъект Q'_1 , а с ним и его инъективную оболочку, имеющую вид $R = \bigoplus_{1 \leq k \leq n} R_k$, где R_k — неразложимые инъективные объекты. Но тогда $Q_0 \oplus R$ есть подобъект объекта Q , в противоречие с максимальностью Q_0 .

Вторая часть предложения вытекает из предложения 6.38 и теоремы 6.44.

Определение. Пусть $\mathcal{C}$ — категория Гротендика. Назовем *типом* ее объекта Q класс всех объектов категории $\mathcal{C}$, изоморфных Q . Класс типов всех неразложимых инъективных объектов категории $\mathcal{C}$ будем называть ее *спектром* и обозначать $\text{Spec } \mathcal{C}$ ²⁾.

Предложения 6.50 и 6.51 показывают, что существует взаимно однозначное соответствие между типами инъективных объектов локально нётеровой категории $\mathcal{C}$ и семействами объектов ее спектра $\text{Spec } \mathcal{C}$. При этом инъективным оболочкам нётеровых объектов соответствуют конечные семейства объектов из $\text{Spec } \mathcal{C}$ (см. предложение 6.41)³⁾.

¹⁾ То есть максимальный элемент совокупности всех содержащихся в Q сумм неразложимых инъективных объектов, упорядоченной отношением $\Sigma_1 < \Sigma_2$, означающим, что Σ_1 есть подсумма суммы Σ_2 ; существование его обеспечивается леммой Цорна, применимой к указанной совокупности в силу выполнения в $\mathcal{C}$ аксиомы АВ5.

²⁾ Если тип хотя бы одного неразложимого инъективного объекта Q является собственным классом (не множеством), то такое определение спектра, в рамках аксиоматики Бернайса — Гёделя, незаконно. Это затруднение можно обойти, „выбрав“ из „типа“ каждого Q по одному объекту и назвав спектром категории $\mathcal{C}$ класс этих избранных неразложимых инъективных объектов.

³⁾ Верно и обратное. Действительно, пусть $Q \in \text{Spec } \mathcal{C}$. Q обладает ненулевым нётеровым подобъектом N , а значит, будучи неразложимым, равно $E(N)$ (см. примечание ²⁾ на стр. 183). Если же $(Q_i)_{i \in J}$ — конечное семейство объектов из $\text{Spec } \mathcal{C}$, а N_i ($i \in J$) — их ненулевые нётеровы подобъекты, то $\bigoplus_{i \in J} Q_i = E(\bigoplus_{i \in J} N_i)$ (предложение 6.9), причем $\bigoplus_{i \in J} N_i$ — нётеров объект. Для доказательства последнего утверждения достаточно доказать, что сумма двух нётеровых объектов нётерова, для чего в свою очередь достаточно доказать, что если подобъект N объекта M и факторобъект M/N нётеровы, то и сам объект M нётеров. Докажем это свойство. Пусть (A_n) — возрастающая последовательность подобъектов объекта M . Рассмотрим коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow A_n \cap N & \xrightarrow{i_n} & A_n & \xrightarrow{p_n} & p(A_n) & \rightarrow & 0 \\ & \downarrow & \downarrow i_n & & \downarrow j'_n & & \\ 0 \rightarrow N & \rightarrow & M & \xrightarrow{p} & M/N & \rightarrow & 0 \end{array}$$

с канонически определенными морфизмами. Так как ее левый квадрат декартов, то $i_n = \ker(pj_n) = \ker(j'_n p_n) = \ker p_n$ (ибо j'_n — мономорфизм) и, значит, верхняя строка точна (ибо p_n — эпиморфизм). Поскольку N и M/N нётеровы, существует

Пусть $\mathcal{C}$ — локально нётерова категория, M — ее нётеров объект и $E(M)$ — его инъективная оболочка; $E(M) = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} Q_{s_i}$, где $s_i \in \text{Срес } \mathcal{C}$ и Q_{s_i} — соответствующие неразложимые инъективные объекты. Обозначим через L множество $\{s_i \mid 1 \leq i \leq n\}$.

Предложение 6.52. *Существует отображение f множества L в множество подобъектов объекта M : $s_i \mapsto M_{s_i}$, удовлетворяющее следующим условиям:*

(а) *Инъективная оболочка факторобъекта M/M_{s_i} есть сумма неразложимых инъективных объектов типа s_i .*

(б) $\bigcap M_{s_i} = 0$, причем это пересечение — приведенное, т. е. при удалении хотя бы одного члена перестает быть нулевым.

Доказательство. Обозначим через J_i ($1 \leq i \leq n$) подобъект объекта $E(M)$, являющийся суммой всех подобъектов Q_{s_j} , изоморфных Q_{s_i} . Для различных i, j имеем либо $J_i \cap J_j = 0$, либо $J_i = J_j$. Таким образом, произведя надлежащую индексацию, получаем семейство $J_{k_1}, \dots, J_{k_r}$ подобъектов объекта $E(M)$. Положим $M'_i = J_i \cap M$. Построение отображения f (если принять во внимание, что каждое Q_{s_i} есть прямое слагаемое единственного J_{k_i}) очевидно: $s_i \mapsto J_{k_i} \mapsto J_{k_i} \cap M \mapsto M_{s_i}$, где M_{s_i} есть сумма $\bigoplus M'_j$ тех M'_j , для которых $J_i \cap J_j = 0$; M_{s_i} и будут требуемыми объектами. Проверка выполнения условий (а) и (б) не представляет труда.

§ 9. Применения к теориям разложения

В настоящем параграфе будет установлена теорема, позволяющая описывать все теории разложения, заданные на локально нётеровой категории.

номер n , такой, что $A_m \cap N = A_n \cap N$ и $p(A_m) = p(A_n)$ для всех $m \geq n$, так что имеем коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A_n & \cap & N & \rightarrow & A_n \rightarrow p(A_n) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow 1_{A_n \cap N} & & \downarrow j_{nm} & & \downarrow 1_{p(A_n)} \\ 0 & \rightarrow & A_m & \cap & N & \rightarrow & A_m \rightarrow p(A_m) \rightarrow 0 \end{array}$$

где j_{nm} — канонический мономорфизм. Но тогда j_{nm} является и эпиморфизмом. Действительно, так как $1_{A_n \cap N}$ — эпиморфизм, то правый квадрат кодекартов (см. примечание ²) на стр. 115) и потому $\text{coker } j_{nm} = \text{coker } 1_{p(A_n)} = 0$ (см. примечание ²) на стр. 155). Тем самым $A_m = A_n$ для всех $m \geq n$, т. е. объект M нётеров.

Определение. Пусть A — фиксированный объект локально нётеровой категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{P}(A)$ — множество всех его подобъектов (см. предложение 5.35). Будем говорить, что на $\mathcal{C}$ задана *теория разложения*, если задана „функция“ Γ , относящая каждому объекту M категории $\mathcal{C}$ множество $\Gamma(M) \subset \mathcal{P}(A)$ так, что выполнены следующие условия:

I. Если $(M_i)_{i \in I}$ — семейство подобъектов объекта M , направленное по возрастанию, и $M = \sup_{i \in I} M_i$, то $\Gamma(M) = \bigcup_{i \in I} \Gamma(M_i)$.

II. Если $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ — точная последовательность, то $\Gamma(M') \subset \Gamma(M) \subset \Gamma(M') \cup \Gamma(M'')$.

III. $\Gamma(M) = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $M = 0$.

IV. Каждый нётеров объект M обладает подобъектами $M_1, M_2, \dots, M_r$, такими, что

(i) $\Gamma(M/M_i) = \{P_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, r$), где P_i — некоторые подобъекты объекта A ;

(ii) $0 = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_r$, причем всякое меньшее число объектов M_i имеет ненулевое пересечение;

(iii) $\Gamma(M/M_i) \neq \Gamma(M/M_j)$ при $i \neq j$;

(iv) $\Gamma(M) = \{P_1, P_2, \dots, P_r\}$.

Докажем теперь теорему, полностью характеризующую теорию разложения.

Теорема 6.53. С каждой функцией $f: \text{Спец } \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P}(A)$ можно единственным образом ассоциировать теорию разложения Γ_f так, чтобы

$$\Gamma_f(X) = f(x)$$

для каждого неразложимого инъективного объекта X типа x . Получающееся соответствие $f \mapsto \Gamma_f$ между функциями $f: \text{Спец } \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P}(A)$ и теориями разложения биективно.

Доказательство. Пусть задана функция $f: \text{Спец } \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P}(A)$ и M — произвольный объект категории $\mathcal{C}$, а $E(M)$ — его инъективная оболочка. Согласно предложению 6.51 $E(M)$ обладает разложением

$$E(M) = \bigoplus_{i \in I} Q_i$$

на неразложимые инъективные объекты Q_i . Тем самым M определяет множество $P(M) \subset \text{Спец } \mathcal{C}$, и мы можем положить

$$\Gamma_f(M) = f(P(M)).$$

Требуется проверить выполнение условий I–IV. Выполнение условий I и III очевидно. Для проверки выполнения условия II рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0.$$

Так как, очевидно, $E(M') \subset E(M)$, то $P(M') \subset P(M)$ и потому $\Gamma_f(M') \subset \Gamma_f(M)$. Остается показать, что $\Gamma_f(M) \subset \Gamma_f(M') \cup \Gamma_f(M'')$. А это вытекает из того, что $\Gamma_f(N_1 \oplus N_2) = \Gamma_f(N_1) \cup \Gamma_f(N_2)$, и следующей леммы:

Лемма. Если последовательность

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

точна, то существует мономорфизм $\alpha: M \rightarrow Q \oplus M''$, где $Q = E(M')$.

Доказательство. Пусть $\xi: M' \rightarrow Q$ — канонический мономорфизм. Тогда существует морфизм $\eta: M \rightarrow Q$, такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & M' & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{p} & M'' \rightarrow 0 \\ & & \searrow \xi & & \downarrow \eta & & \\ & & & & Q & & \end{array}$$

коммутативна. Этим определяется морфизм $\alpha: M \rightarrow Q \oplus M''$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{p} & M'' \\ \eta \downarrow & \searrow \alpha & \uparrow \\ Q & \longleftarrow & M'' \oplus Q \end{array}$$

и ясно, что $\text{Ker } \alpha = 0^1$).

Выполнение условия IV вытекает из предложения 6.52.

Пусть теперь Γ — теория разложения. Нам нужно показать, что существует функция $f: \text{Spec } \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P}(A)$, для которой $\Gamma_f = \Gamma$. Достаточно доказать, что если Q — неразложимый инъективный объект, то $\Gamma(Q)$ состоит из одного элемента. Рассмотрим для этого произвольный нётеров подобъект M объекта Q . Так как Q неразложим, то M конеприводим. Но тогда условие IV влечет, что $\Gamma(M)$ сводится к одному элементу, поскольку единственным разложением объекта 0, обладающим свойством (ii), служит $0 = 0$. Пусть также N — нётеров подобъект объекта Q . Докажем, что $\Gamma(M) = \Gamma(N)$. Поскольку Q неразложим, можно предполагать, что $N \subset M$. Но тогда из условия II следует, что $\Gamma(N) \subset \Gamma(M)$ и, значит, $\Gamma(N) = \Gamma(M)$. Применяя теперь условие I, заключаем, что $\Gamma(Q)$ состоит из одного элемента, и теорема полностью доказана.

Приведем теперь в качестве примеров две классические теории разложения, рассматриваемые с изложенной точки зрения.

¹⁾ Если $\alpha x = 0$, то 1) $px = 0$, откуда $x = i\lambda$, и 2) $\xi\lambda = \eta i\lambda = \eta x = 0$, откуда $\lambda = 0$ (ибо ξ — мономорфизм) и, значит, $x = 0$.

Пример 1. *Теория примарного разложения* (Ласкер — Нётер). Пусть A — коммутативное нётерово кольцо с единицей и $\mathcal{C}$ — абелева категория всех A -модулей. Для каждого $a \in A$ обозначим через φ_a гомотетию $a \mapsto ax$ заданного A -модуля M .

Определение. Модуль M называется *копримарным*, если
(I) $M \neq 0$;

(II) для каждого элемента $a \in A$ гомотетия $\varphi_a: M \rightarrow M$ инъективна или нильпотентна.

Лемма. *Всякий нётеров конеприводимый модуль копримарен.*

Доказательство. Допустим, что существует $a \in A$, для которого гомотетия φ_a не инъективна и не нильпотентна. Рассмотрим последовательность

$$\text{Ker } \varphi_a \subset \text{Ker } \varphi_{a^2} \subset \dots \subset \text{Ker } \varphi_{a^p} \subset \dots$$

подмодулей модуля M . Так как M нётеров, то существует n , такое, что

$$\text{Ker } \varphi_{a^n} = \text{Ker } \varphi_{a^{n+1}} = \dots$$

В частности, $\text{Ker } \varphi_{a^n} = \text{Ker } \varphi_{a^{2n}}$. Так как гомотетия φ_a не инъективна, то $\text{Ker } \varphi_a \neq 0$ и потому $\text{Ker } \varphi_{a^n} \neq 0$. А поскольку φ_a не нильпотентна, $\text{Im } \varphi_{a^n} \neq 0$. Но $\text{Ker } \varphi_{a^n} \cap \text{Im } \varphi_{a^n} = 0$. В самом деле, если $\xi \in \text{Ker } \varphi_{a^n} \cap \text{Im } \varphi_{a^n}$, то $\varphi_{a^n}(\xi) = 0$ и $\xi = \varphi_{a^n}(\eta)$, откуда $\varphi_{a^{2n}}(\eta) = 0$, т. е. $\eta \in \text{Ker } \varphi_{a^{2n}} = \text{Ker } \varphi_{a^n}$ и, значит, $\xi = \varphi_{a^n}(\eta) = 0$. Мы пришли к противоречию с конеприводимостью модуля M .

Определение. Подмодуль N модуля M называется *примарным*, если фактормодуль M/N копримарен. В этом случае множество тех элементов $a \in A$, для которых $\varphi_a: M/N \rightarrow M/N$ нильпотентна, образует простой идеал в A ; он называется *примарным радикалом* подмодуля N модуля M и обозначается $\mathcal{R}_p(N, M)$.

Пусть теперь Q — неразложимый инъективный объект категории $\mathcal{C}$ A -модулей и M — его нётеров подобъект. Тогда M конеприводим, $\mathcal{R}_p(0, M)$ не зависит от M , и мы можем положить $f(q) = \mathcal{R}_p(0, M)$, где q — тип объекта Q . Полученная так теория разложения есть не что иное, как теория примарного разложения.

Пример 2. *Теория терциарного разложения* (Лезье — Круазо). Пусть A — нётерово кольцо с единицей. Его двусторонний идеал p называется *простым*, если

(I) $p \neq A$;

(II) $aAb \subset p$ влечет $a \in p$ или $b \in p$.

Определение. Элемент $a \in A$ называется *семианнулятором* модуля M , если в M имеется ненулевой подмодуль N , такой, что

$aN = \{0\}$. Аналогично левый идеал a кольца A называется *семианнулятором* модуля M , если в M имеется ненулевой подмодуль N , такой, что $aN = \{0\}$. Модуль M называется *котерциарным*, если каждый его семианнулятор является семианнулятором всех нетривиальных подмодулей этого модуля.

Лемма. *Всякий конеприводимый A -модуль котерциарен.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in A$ и N — ненулевой подмодуль модуля M , такой, что $\lambda N = \{0\}$. Мы должны доказать, что каждый другой ненулевой подмодуль P модуля M обладает подмодулем P' , таким, что $P' \neq 0$ и $\lambda P' = \{0\}$. Но поскольку M конеприводим, можно взять $P' = N \cap P$.

Определение. Подмодуль N модуля M называется *терциарным*, если фактормодуль M/N котерциарен. В этом случае множество $\mathcal{R}_t(N, M)$ всех элементов кольца A , являющихся семианнуляторами модуля M/N , называется *терциарным радикалом* подмодуля N модуля M .

Лемма. *Если модуль M нётеров и конеприводим, то $\mathcal{R}_t(0, M)$ — двусторонний простой идеал.*

Доказательство. (а) $\mathcal{R}_t(0, M)$ — двусторонний идеал. Очевидно, $\mathcal{R}_t(0, M)$ — левый идеал кольца A . Для доказательства того, что этот идеал двусторонний, заметим прежде всего, что $\mathcal{R}_t(0, M)$ совпадает с множеством семианнуляторов всех моноидных подмодулей модуля M . Пусть теперь $a \in \mathcal{R}_t(0, M)$ и $\mu \in A$. Покажем, что для каждого ненулевого $b \in A$ существует подмодуль модуля Ab , аннулируемый элементом $a\mu$. В силу предположения существует $\xi \in A$, такое, что $\xi b \neq 0$ и $(a\lambda)(\xi b) = 0$ для всех $\lambda \in A$. Но тогда и $(a\mu)(\lambda \xi b) = 0$ для всех $\lambda \in A$. Тем самым $a\mu \in \mathcal{R}_t(0, M)$. Пусть, далее, $a_1, a_2 \in \mathcal{R}_t(0, M)$. Нужно показать, что $a_1 + a_2 \in \mathcal{R}_t(0, M)$. Для этого пусть $b \in M$ ($b \neq 0$) и $\xi_1 \in A$ таковы, что $\xi_1 b \neq 0$, но $(a_1 \lambda)(\xi_1 b) = 0$ для всех $\lambda \in A$. С другой стороны, существует $\xi_2 \in A$, такое, что $\xi_2 \xi_1 b \neq \{0\}$ и $(a_2 \lambda)(\xi_2 \xi_1 b) = 0$ для всех $\lambda \in A$. Отсюда следует, что $(a_1 + a_2)(\lambda \xi_2 \xi_1 b) = 0$ для всех $\lambda \in A$ и потому $a_1 + a_2 \in \mathcal{R}_t(0, M)$.

(б) $\mathcal{R}_t(0, M)$ — простой идеал. Действительно, пусть $\text{Ann } N$ для каждого подмодуля N модуля M означает аннулятор N . Семейство $(\text{Ann } N)_{N \subset M, N \neq 0}$ обладает максимальным элементом $\text{Ann } N_0$; обозначим его $A(M)$. Очевидно, $\mathcal{R}_t(0, M) \subset A(M)$. Обратно, если $\lambda \in A(M)$, то существует ненулевой подмодуль N модуля M , такой, что $\lambda N = 0$. Поскольку M конеприводим, применима предыдущая лемма, показывающая, что $\lambda \in \mathcal{R}_t(0, M)$. Таким образом, $A(M) = \mathcal{R}_t(0, M)$. Пусть теперь $a, b \in A$ таковы, что $aAb \subset A(M)$. Если $b \notin A(M)$, то $bN_0 \neq 0$ и потому $AbN_0 \neq 0$. Но так как по предположению $aAb \subset A(M)$, то в силу максимальной N_0

$$a \in \text{Ann}(AbN_0) = \text{Ann } N_0 = A(M) = \mathcal{R}_t(0, M),$$

ибо $A(M)$ — аннулятор каждого подмодуля модуля N_0 . Тем самым лемма доказана.

Пусть теперь Q — неразложимый инъективный объект категории $\mathcal{C}$ A -модулей и M — его нётеров подмодуль. Таким образом, M конеприводим и $\mathcal{R}_i(0, M)$ — двусторонний простой идеал. $\mathcal{R}_i(0, M)$ не зависит от M , и мы можем положить

$$f(q) = \mathcal{R}_i(0, M),$$

где q обозначает тип объекта Q . Получающаяся так теория разложения есть не что иное, как теория терциарного разложения.

ЭЛЕМЕНТЫ ГОМОЛОГИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1. Комплексы. Гомология. Когомология

Определение. Пусть $\mathcal{C}$ — абелева категория. *Комплекс* K со значениями в категории $\mathcal{C}$ состоит из

(I) последовательности $(K^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ объектов категории $\mathcal{C}$;

(II) последовательности $(d_K^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ морфизмов $d_K^n: K^n \rightarrow K^{n+1}$, такой, что $d_K^{n+1} d_K^n = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$.

Пусть L и K — комплексы со значениями в категории $\mathcal{C}$. *Морфизмом* комплекса L в комплекс K называется последовательность $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ морфизмов $f^n: L^n \rightarrow K^n$, такая, что все диаграммы

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} \\ \uparrow f^n & & \uparrow f^{n+1} \\ L^n & \xrightarrow{d_L^n} & L^{n+1} \end{array} \quad (1)$$

коммутативны, т. е. $d_K^n f^n = f^{n+1} d_L^n$.

Таким образом, класс всех комплексов со значениями в категории $\mathcal{C}$ образует категорию; будем обозначать ее $\mathcal{K}(\mathcal{C})$ ¹⁾.

Функторы гомологии (когомологии).

Пусть n — фиксированное целое число. С каждым комплексом K со значениями в категории $\mathcal{C}$ можно ассоциировать следующие объекты этой категории:

$$Z^n(K) = \text{Ker } d_K^n,$$

$$B^n(K) = \text{Im } d_K^{n-1}.$$

При этом, очевидно, для каждого морфизма $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ комплекса L в комплекс K существует единственный морфизм

¹⁾ Как легко видеть, $\mathcal{K}(\mathcal{C})$ — абелева категория.

$Z^n(f): Z^n(L) \rightarrow Z^n(K)$, такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} Z^n(L) & \rightarrow & L^n & \xrightarrow{d_L^n} & L^{n+1} \\ z^n(f) \downarrow & & f^n \downarrow & & \downarrow f^{n+1} \\ Z^n(K) & \rightarrow & K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} \end{array}$$

Таким образом получаем функтор $Z^n: \mathcal{X}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$, и аналогично функтор $B^n: \mathcal{X}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}^1$). Эти функторы аддитивны.

По традиции $Z^n(K)$ называют *объектом n -мерных циклов* комплекса K , а $B^n(K)$ — *объектом n -мерных границ*. Из соотношения $d_K^n d_K^{n-1} = 0$ сразу следует, что $B^n(K) \subset Z^n(K)$ для всех n . Ассоциируя с каждым комплексом K объект $H^n(K) = Z^n(K)/B^n(K)$, получим новый функтор $H^n: \mathcal{X}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$, называемый *функтором n -мерной гомологии*; $H^n(K)$ называется *объектом n -мерной гомологии* комплекса K .

Мы будем иногда $H(f)$, где $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ — морфизм комплекса L в комплекс K , обозначать f_* .

Определение. Морфизмы $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ и $g = (g^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ комплекса L в комплекс K называют *гомотопными*, если существуют морфизмы $k^n: L^n \rightarrow K^{n-1}$ ($n \in \mathbb{Z}$), удовлетворяющие соотношениям

$$g^{n+1} - f^{n+1} = d_K^n k^{n+1} + k^{n+2} d_L^{n+1} \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (2)$$

Предложение 7.1. Если морфизмы $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ и $g = (g^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ комплекса L в комплекс K гомотопны, то $H^n(f) = H^n(g)$ для всех $n \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Заметим, что $f - g = (f^n - g^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ также есть морфизм L в K . Так как функтор H^n аддитивен, то $H^n(f - g) = H^n(f) - H^n(g)$. Поэтому достаточно показать, что $H^n(f - g) = 0$. Из определения следует, что $H^n(f - g)$ есть единственный морфизм, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} B^n(L) & \rightarrow & Z^n(L) & \rightarrow & H^n(L) \\ B^n(h) \downarrow & & z^n(h) \downarrow & & \downarrow H^n(h) \\ B^n(K) & \rightarrow & Z^n(K) & \rightarrow & H^n(K) \end{array} \quad (3)$$

¹⁾ B^n определяется по Z^n условием коммутативности диаграмм

$$\begin{array}{ccccc} Z^{n-1}(L) & \rightarrow & L^{n-1} & \xrightarrow{\text{Im } d_L^{n-1}} & B^n(L) \\ z^{n-1}(f) \downarrow & & f^{n-1} \downarrow & & \downarrow B^n(f) \\ Z^{n-1}(K) & \rightarrow & K^{n-1} & \xrightarrow{\text{Im } d_K^{n-1}} & B^n(K) \end{array}$$

где $h = f - g$. Но из соотношения (2) вытекает, что $Z^n(h)$ пропускается через $B^n(K)$ ¹⁾, а отсюда следует, что $H^n(h) = 0$, поскольку морфизм $0: H^n(L) \rightarrow H^n(K)$ удовлетворяет требованию сохранения коммутативности диаграммы (3).

Комплекс K называется *положительным*, если $K^n = 0$ для всех $n < 0$, и *отрицательным*, если $K^n = 0$ для всех $n > 0$. Положительный комплекс называют также *коцепным комплексом*, а его объекты гомологии — *объектами когомологии*. Отрицательный комплекс называют также *цепным комплексом*. По традиции для цепного комплекса K используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} K^{-n} &= K_n, \\ H^{-n}(K) &= H_n(K), \\ d_K^{-n} &= d_n^K \end{aligned}$$

($n > 0$). Другими словами, цепной комплекс представляют в виде

$$\dots \rightarrow K_n \xrightarrow{d_n^K} K_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}^K} \dots \xrightarrow{d_1^K} K_0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Симплициальные комплексы

Приведем теперь один удобный способ построения цепных и коцепных комплексов.

Пусть Δ_n обозначает множество $\{0, 1, 2, \dots, n\}$. Определим категорию $\mathcal{P}$ следующим образом:

(I) ее объекты — множества Δ_n ($n \geq 0$);

(II) морфизмы объекта Δ_n в объект Δ_m — всевозможные возрастающие отображения множества Δ_n в множество Δ_m .

Рассмотрим, в частности, следующие морфизмы категории $\mathcal{P}$, играющие в дальнейшем важную роль:

$$d_n^i: \Delta_n \rightarrow \Delta_{n+1} \quad (0 \leq i \leq n+1),$$

¹⁾ Пусть $\kappa_K^n: Z^n(K) \rightarrow K^n$, $\kappa_L^n: Z^n(L) \rightarrow L^n$ и $\mu_K^n: B^n(K) \rightarrow Z^n(K)$ — канонические мономорфизмы и $e_K^n: K^{n-1} \rightarrow B^n(K)$ — канонический эпиморфизм. В силу соотношения (2) (с заменой $n+1$ на n) имеем

$$\kappa_K^n Z^n(h) = h^n \kappa_L^n = (h^n - k^{n+1} d_L^n) \kappa_L^n = d_K^{n-1} k^n \kappa_L^n = \kappa_K^n \mu_K^n e_K^n k^n \kappa_L^n,$$

и так как κ_K^n — мономорфизм, то $Z^n(h)$ допускает разложение

$$Z^n(L) \xrightarrow{e_K^n k^n \kappa_L^n} B^n(K) \xrightarrow{\mu_K^n} Z^n(K).$$

определяемые условиями

$$d_n^i(p) = \begin{cases} p, & \text{если } p < i, \\ p+1, & \text{если } p \geq i, \end{cases}$$

и

$$s_n^i: \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_n \quad (0 \leq i \leq n),$$

определяемые условиями

$$s_n^i(p) = \begin{cases} p, & \text{если } p \leq i, \\ p-1, & \text{если } p > i. \end{cases}$$

Прямая проверка показывает, что справедливы следующие соотношения:

- (I) $d_{n+1}^i d_n^i = d_{n+1}^i d_n^{i-1} \quad (i < j),$
- (II) $s_{n+1}^i s_{n+1}^i = s_n^i s_{n+1}^{i+1} \quad (i \leq j),$
- (III) $s_{n+1}^i d_{n+1}^i = d_n^i s_n^{i-1} \quad (i < j),$
- (IV) $s_n^i d_n^i = s_n^i d_n^{i+1} = 1_{\Delta_n},$
- (V) $s_{n+1}^j d_{n+1}^i = d_n^{i-1} s_n^j \quad (j+1 < i).$

Пусть $\mathcal{C}$ — произвольная категория. *Симплициальным* (соотв. *косимплициальным*) *объектом со значениями в $\mathcal{C}$* будет называться всякий контравариантный (соотв. ковариантный) функтор $F: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$.

Предложение 7.2. *Каждому симплициальному (соотв. косимплициальному) объекту со значениями в абелевой категории $\mathcal{C}$ отвечает некоторый цепной (соотв. коцепной) комплекс.*

Доказательство. Рассмотрим, например, случай косимплициального объекта. Пусть $\mathcal{C}$ — абелева категория и $F: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ — ковариантный функтор. Положим $K^n = F(\Delta_n)$ и рассмотрим морфизмы $F(d_n^i): K^n \rightarrow K^{n+1}$ категории $\mathcal{C}$. Поскольку она абелева, можно для каждого $n \geq 0$ образовать морфизм

$$d_K^n: K^n \rightarrow K^{n+1}$$

по формуле

$$d_K^n = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i F(d_n^i).$$

Докажем, что последовательность объектов $(K^n)_{n \geq 0}$ вместе с последовательностью морфизмов $(d_K^n)_{n \geq 0}$ определяет комплекс со значениями в абелевой категории $\mathcal{C}$. Для этого достаточно показать, что

$$d_K^{n+1} d_K^n = 0.$$

Но

$$\begin{aligned} d_K^{n+1} d_K^n &= \left(\sum_{j=0}^{n+2} (-1)^j F(d_{n+1}^j) \right) \left(\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i F(d_n^i) \right) = \\ &= \sum_{j=0}^{n+2} \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{i+j} F(d_{n+1}^j d_n^i) = \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq n+2} (-1)^{i+j} F(d_{n+1}^j d_n^i) + \sum_{0 \leq j \leq i \leq n+1} (-1)^{i+j} F(d_{n+1}^j d_n^i) = \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq n+2} (-1)^{i+j} F(d_{n+1}^j d_n^{i-1}) + \sum_{0 \leq j \leq i \leq n+1} (-1)^{i+j} F(d_{n+1}^j d_n^i), \end{aligned}$$

где при написании последнего равенства было использовано соотношение (I). Заменяя в первой сумме $j-1$ на i , а i на j , получим

$$\begin{aligned} d_K^{n+1} d_K^n &= \sum_{0 \leq j \leq i \leq n+1} (-1)^{i+j+1} F(d_{n+1}^j d_n^i) + \\ &+ \sum_{0 \leq j \leq i \leq n+1} (-1)^{i+j} F(d_{n+1}^j d_n^i) = 0. \end{aligned}$$

Примеры. Стандартный комплекс Гротендика

Пусть $\mathcal{C}$ — категория с конечными суммами и A — произвольный ее объект. Обозначим через A' сумму семейства объектов $(A_i)_{1 \leq i \leq r}$, где все $A_i = A$. Определим ковариантный функтор $F: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C}$, иными словами — косимплициальный объект со значениями в категории $\mathcal{C}$, следующим образом. Положим по определению $F(\Delta_0) = A$ и $F(\Delta_n) = A^{n+1}$ для всех $n \geq 1$. Пусть $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{P}}(\Delta_r, \Delta_s)$. Нам нужно определить $F(\varphi): A^{r+1} \rightarrow A^{s+1}$ так, чтобы

$$F(1_{\Delta_r}) = 1_{A^{r+1}}, \quad F(\psi\varphi) = F(\psi)F(\varphi). \quad (4)$$

Обозначим через $i_0, i_1, \dots, i_r$ канонические инъекции A в A^{r+1} и через $j_0, j_1, \dots, j_s$ — канонические инъекции A в A^{s+1} . За $F(\varphi): A^{r+1} \rightarrow A^{s+1}$ примем единственный морфизм, для которого диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A^{r+1} & \xrightarrow{F(\varphi)} & A^{s+1} \\ & \searrow i_k \quad \nearrow j_{\varphi(k)} & \\ & A & \end{array}$$

коммутативна при любом $k \in \Delta_r$. Очевидно, при таком определении $F(\varphi)$ условия (4) будут выполнены.

Если $\mathcal{C}'$ — абелева категория, то с каждым ковариантным функтором $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ можно очевидным образом ассоциировать косимплициальный объект со значениями в $\mathcal{C}'$ и тем самым,

по предложению 7.2, коцепной комплекс со значениями в $\mathcal{C}'$. Этот коцепной комплекс называется *стандартным комплексом Гротендика*, ассоциированным с функтором G и объектом A .

§ 2. Резольвенты

Определение. Пусть $\mathcal{C}$ — абелева категория и A — ее объект. *Правой резольвентой* объекта A называется положительный комплекс K (со значениями в $\mathcal{C}$) вместе с морфизмом $e: A \rightarrow K^0$ („дополняющим морфизмом“), для которых точна последовательность

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{e} K^0 \xrightarrow{d_K^0} K^1.$$

Резольвента объекта A называется *точной*, если $H^n(K) = 0$ для всех $n > 0$; она называется *инъективной*, если все K^n — инъективные объекты категории $\mathcal{C}$.

Дуальным образом получаем понятия *левой резольвенты* объекта, *проективной резольвенты* и т. д.

В дальнейшем мы ограничимся формулированием и доказательством основных результатов, относящихся к инъективным резольвентам, предоставив читателю соответствующие результаты относительно проективных резольвент сформулировать по двойственности.

Предложение 7.3. Если $\mathcal{C}$ — абелева категория, содержащая достаточно много инъективных объектов, то каждый ее объект обладает по крайней мере одной инъективной резольвентой.

Доказательство. Пусть A — произвольный объект категории $\mathcal{C}$ и $e: A \rightarrow K^0$ — его мономорфизм в инъективный объект K^0 . Положим $L^0 = \text{Coker } e$, и пусть $\lambda^0: K^0 \rightarrow L^0$ — канонический эпиморфизм, $\mu^0: L^0 \rightarrow K^1$ — мономорфизм L^0 в инъективный объект K^1 и $d_K^0 = \mu^0 \lambda^0$. Последовательность

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{e} K^0 \xrightarrow{d_K^0} K^1,$$

очевидно, точна. Пусть, далее, $L^1 = \text{Coker } d_K^0$, $\lambda^1: K^1 \rightarrow L^1$ — канонический эпиморфизм и $\mu^1: L^1 \rightarrow K^2$ — мономорфизм L^1 в инъективный объект K^2 . Положим $d_K^1 = \mu^1 \lambda^1$. Неограниченно продолжая этот процесс, мы получим инъективную резольвенту объекта A .

Лемма 7.4. Если в диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & \xrightarrow{u_1} & A_2 & \xrightarrow{u_2} & A_3 \\ & & \downarrow \varphi & & \\ & & Q & & \end{array}$$

последовательность $A_1 \xrightarrow{u_1} A_2 \xrightarrow{u_2} A_3$ точна, объект Q инъективен и $\varphi i_1 = 0$, то существует морфизм $\psi: A_3 \rightarrow Q$, такой, что $\psi i_2 = \varphi$.

Доказательство. Канонические разложения морфизмов u_1 и u_2 доставляют диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Im } u_1 & \xrightarrow{i_1} & A_2 & \xrightarrow{j_2} & \text{Coim } u_2 & \xrightarrow{\bar{u}_2} & \text{Im } u_2 \xrightarrow{i_2} A_3 \\ & & \downarrow \varphi & & & & \\ & & Q & & & & \end{array}$$

в которой $\varphi i_1 = 0$ и $\bar{u}_2$ — изоморфизм. Поскольку $\text{Coim } u_2 = \text{Coker } i_1$ и $\varphi i_1 = 0$, существует морфизм $\theta: \text{Coim } u_2 \rightarrow Q$, такой, что $\theta j_2 = \varphi$. А так как $\bar{u}_2$ — изоморфизм, то, очевидно, существует $\psi_1: \text{Im } u_2 \rightarrow Q$, для которого $\psi_1 \bar{u}_2 j_2 = \varphi$. Но поскольку Q — инъективный объект и i_2 — мономорфизм, существует морфизм $\psi: A_3 \rightarrow Q$, такой, что $\psi i_2 = \psi_1$. Ясно, что ψ и есть требуемый морфизм.

Предложение 7.5. Пусть A и B — объекты категории $\mathcal{C}$, (K, e) — точная резольвента объекта A и (L, η) — инъективная резольвента объекта B . Тогда для каждого морфизма $u: A \rightarrow B$ существует по крайней мере один такой морфизм $f = (f^n)_{n \geq 0}$ комплекса K в комплекс L , что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{e} & K^0 \\ u \downarrow & & \downarrow f^0 \\ B & \xrightarrow{\eta} & L^0 \end{array} \quad (5)$$

коммутативна. Если $g = (g^n)_{n \geq 0}$ — морфизм комплекса K в комплекс L , удовлетворяющий тому же условию, что и f , то f и g гомотопны.

Доказательство. Мы построим последовательно морфизмы $f^0, f^1, \dots, f^n, \dots$, определяющие морфизм $f: K \rightarrow L$, удовлетворяющий условию предложения. Существование морфизма $f^0: K^0 \rightarrow L^0$, для которого диаграмма (5) коммутативна, вытекает просто из того, что L^0 — инъективный объект, а e — мономорфизм. То, что η — мономорфизм, здесь не использовалось. Для построения морфизма $f^1: K^1 \rightarrow L^1$ заметим, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{e} & K^0 \xrightarrow{d_K^0} K^1 \\ & & \downarrow d_L^0 f^0 \\ & & L^1 \end{array}$$

удовлетворяет условиям леммы 7.4. Поэтому существует морфизм $f^1: K^1 \rightarrow L^1$, такой, что $f^1 d_K^0 = d_L^0 f^0$. Рассуждая по индукции,

предположим, что мы уже построили морфизмы $f^0, f^1, \dots, f^{n-1}$, удовлетворяющие соотношениям $f^i d_K^{i-1} = d_L^{i-1} f^{i-1}$ ($0 \leq i \leq n-1$). В частности $f^{n-1} d_K^{n-2} = d_L^{n-2} f^{n-2}$. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K^{n-2} & \xrightarrow{d_K^{n-2}} & K^{n-1} \xrightarrow{d_K^{n-1}} K^n \\ & d_L^{n-1} f^{n-1} \downarrow & \\ & L^n & \end{array}$$

снова удовлетворяет условиям леммы 7.4. Чтобы убедиться в этом, нужно только проверить, что $d_L^{n-1} f^{n-1} d_K^{n-2} = 0$. Но действительно,

$$d_L^{n-1} f^{n-1} d_K^{n-2} = (d_L^{n-1} d_L^{n-2}) f^{n-2} = 0.$$

Поэтому существует морфизм $f^n: K^n \rightarrow L^n$, для которого $f^n d_K^{n-1} = d_L^{n-1} f^{n-1}$, и первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь также $g = (g^n)_{n \geq 0}$ — морфизм, удовлетворяющий тем же условиям, что и f . Чтобы убедиться в том, что f и g гомотопны, мы должны построить морфизмы $k^i: K^i \rightarrow L^{i-1}$ ($i \geq 1$), удовлетворяющие соотношениям

$$f^i - g^i = d_L^{i-1} k^i + k^{i+1} d_K^i.$$

Для определения $k^1: K^1 \rightarrow L^0$ рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{e} & K^0 \xrightarrow{d_K^0} K^1 \\ & f^0 - g^0 \downarrow & \\ & L^0 & \end{array}$$

и заметим, что мы снова находимся в условиях леммы 7.4, поскольку $(f^0 - g^0)e = f^0 e - g^0 e = \eta u - \eta u = 0$. Таким образом, существует морфизм $k^1: K^1 \rightarrow L^0$, такой, что $f^0 - g^0 = k^1 d_K^0$. Для определения $k^2: K^2 \rightarrow L^1$ рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} K^0 & \xrightarrow{d_K^0} & K^1 \xrightarrow{d_K^1} K^2 \\ & f^1 - g^1 - d_L^0 k^1 \downarrow & \\ & L^1 & \end{array}$$

Она также удовлетворяет условиям леммы 7.4. Действительно, $(f^1 - g^1 - d_L^0 k^1) d_K^0 = f^1 d_K^0 - g^1 d_K^0 - d_L^0 k^1 d_K^0 =$
 $= d_L^0 (f^0 - g^0) - d_L^0 (f^0 - g^0) = 0.$

Таким образом, существует морфизм $k^2: K^2 \rightarrow L^1$, такой, что $f^1 - g^1 = d_L^0 k^1 + k^2 d_K^1$. Предположим теперь, что мы уже построили $k^1, k^2, \dots, k^n$ так, что

$$f^i - g^i = d_L^{i-1} k^i + k^{i+1} d_K^i \text{ для всех } i \leq n-1.$$

В частности $f^{n-1} - g^{n-1} = d_L^{n-2} k^{n-1} + k^n d_K^{n-1}$. Для построения k^{n+1} рассматриваем диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} K^{n-1} & \xrightarrow{d_K^{n-1}} & K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} \\ & & \downarrow f^n - g^n - d_L^{n-1} k^n & & \\ & & L^n & & \end{array}$$

снова проверяем, что она удовлетворяет условиям леммы 7.4, и тем самым существует морфизм k^{n+1} , обладающий требуемым свойством.

Предложение 7.6. Пусть

$$0 \rightarrow A' \xrightarrow{\Psi} A \xrightarrow{\Phi} A'' \rightarrow 0$$

— точная последовательность в категории $\mathcal{C}$, (X', ϵ') — точная инъективная резольвента объекта A' и (X'', ϵ'') — точная резольвента объекта A'' . Тогда существует точная резольвента (X, ϵ) объекта A , удовлетворяющая следующим условиям:

(а) Существуют морфизмы комплексов $I': X' \rightarrow X$, $P'': X \rightarrow X''$, такие, что последовательность комплексов и их морфизмов

$$0 \rightarrow X' \xrightarrow{I'} X \xrightarrow{P''} X'' \rightarrow 0$$

точна.

(б) $X_n = X'_n \oplus X''_n$ для всех $n \geq 0$; обозначим через i'_n, i''_n соответствующие канонические инъекции и через p'_n, p''_n — канонические проекции.

(в) Диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} A' & \xrightarrow{\Psi} & A & \xrightarrow{\Phi} & A'' \\ \epsilon' \downarrow & & \epsilon \downarrow & & \downarrow \epsilon'' \\ X'_0 & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & X''_0 \end{array}$$

коммутативна.

(г) $I' = (i'_n)_{n \geq 0}$ и $P'' = (p''_n)_{n \geq 0}$.

Точная резольвента (X, ϵ) , удовлетворяющая условиям (а) — (г), называется *нормальной резольвентой*.

Перед доказательством предложения 7.6 докажем следующую лемму.

Лемма 7.7. Диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 \rightarrow & A' & \xrightarrow{\psi} & A & \xrightarrow{\varphi} & A'' \rightarrow 0 \\
 & \downarrow e' & & & & \downarrow e'' & \\
 & P' & & & & P'' & \\
 & \downarrow & & & & \downarrow & \\
 & L' & & & & L'' & \\
 & \downarrow & & & & \downarrow & \\
 & 0 & & & & 0 &
 \end{array}$$

строка и столбцы которой точны, а объект P' инъективен, может быть дополнена до коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 \rightarrow & A' & \xrightarrow{\psi} & A & \xrightarrow{\varphi} & A'' \rightarrow 0 \\
 & \downarrow e' & & \downarrow e & & \downarrow e'' & \\
 0 \rightarrow & P' & \xrightarrow{i'} & P & \xrightarrow{p''} & P'' \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & L' & \rightarrow & L & \rightarrow & L'' \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

в которой все строки и столбцы точны, а P есть сумма объектов P' и P'' с каноническими инъекциями i' , i'' и каноническими проекциями p' , p'' .

Доказательство. Пусть $P = P' \oplus P''$ с каноническими инъекциями i' , i'' и каноническими проекциями p' , p'' . Для определения морфизма e рассмотрим сначала морфизм $\sigma_0: A \rightarrow P'$, для которого $\sigma_0 \psi = e'$. Существование такого σ_0 следует из того, что объект P' инъективен. Если положить $e = i' \sigma_0 + i'' e'' \varphi$, то верхняя часть последней диаграммы будет коммутативной. Покажем, что e — мономорфизм. Пусть $u: X \rightarrow A$ таково, что $eu = 0$. Тогда $p'' eu = 0$, откуда $e'' \varphi u = 0$ и, следовательно, $\varphi u = 0$. Поэтому существует морфизм $u': X \rightarrow A'$, такой, что $u = \psi u'$. Но тогда

$$0 = eu = e\psi u' = (i' \sigma_0 + i'' e'' \varphi) \psi u' = i' \sigma_0 \psi u' = i' e' u',$$

и так как i' и e' — мономорфизмы, то $u' = 0$, а значит, и $u = 0$. Следовательно, e — мономорфизм. Для завершения диаграммы полагаем $L = \text{Coker } u$ и в качестве морфизмов, указанных стрелками, берем канонические морфизмы, делающие получающуюся диаграмму коммутативной. Точность ее следует из „3 $\times$ 3-леммы“ (предложение 5.25).

Доказательство предложения 7.6. Применяя лемму 7.7 к диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 0 \rightarrow & A' & \xrightarrow{\psi} & A & \xrightarrow{\varphi} & A'' & \rightarrow 0 \\
 & \varepsilon' \downarrow & & \downarrow \varepsilon'' & & & \\
 & X'_0 & & X''_0 & & & \\
 & \delta'_1 \downarrow & & \downarrow \delta''_1 & & & \\
 & Z^1(X') & & Z^1(X'') & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & 0 & & 0 & & &
 \end{array}$$

получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & A' & \xrightarrow{\psi} & A & \xrightarrow{\varphi} & A'' & \rightarrow 0 \\
 & \varepsilon' \downarrow & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon''_1 & \\
 0 \rightarrow & X'_0 & \xrightarrow{i'_0} & X & \xrightarrow{p''_0} & X''_0 & \rightarrow 0 \\
 & \delta'_1 \downarrow & & \downarrow \delta_1 & & \downarrow \delta''_1 & \\
 & Z^1(X') & \longrightarrow & \text{Coker } \varepsilon & \longrightarrow & Z^1(X'') & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

все строки и столбцы которой точны, а $X = X'_0 \oplus X''_0$ с каноническими инъекциями i'_0, i''_0 и каноническими проекциями p'_0, p''_0 . Применяя, далее, лемму 7.7 к диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 0 \rightarrow & Z^1(X') & \rightarrow & \text{Coker } \varepsilon & \rightarrow & Z^1(X'') & \rightarrow 0 \\
 & \delta'_2 \downarrow & & \downarrow \delta''_2 & & & \\
 & X'_1 & & X''_1 & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & Z^2(X') & & Z^2(X'') & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & 0 & & 0 & & &
 \end{array}$$

получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & Z^1(X') & \rightarrow & \text{Coker } \varepsilon & \rightarrow & Z^1(X'') & \rightarrow 0 \\
 & \delta_2' \downarrow & & \delta_2 \downarrow & & \downarrow \delta_2'' & \\
 0 \rightarrow & X_1' & \xrightarrow{i_1'} & X_1 & \xrightarrow{p_1''} & X_1'' & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & Z^2(X') & \rightarrow & \text{Coker } \delta_2 & \rightarrow & Z^2(X'') & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

с точными строками и столбцами, в которой $X_1 = X_1' \oplus X_1''$, с каноническими инъекциями i_1', i_1'' и каноническими проекциями p_1', p_1'' , и кроме того $\delta_2' \delta_1' = d_{X'}^0$, $\delta_2'' \delta_1'' = d_{X''}^0$. Полагаем $d_X^0 = \delta_2 \delta_1$. Продолжая так дальше, мы, очевидно, получим точную резольвенту (X, ε) со свойствами, перечисленными в предложении.

Для облегчения доказательства приводимого далее предложения 7.8 сделаем теперь несколько общих замечаний относительно нормальных резольвент. Пусть (X, ε) — такая резольвента. Используя обозначения предложения 7.6, введем морфизмы σ_i ($i \geq 0$), определенные следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \sigma_0: A &\rightarrow X_0', & \sigma_0 &= p_0' \varepsilon, \\
 \sigma_n: X_{n-1}'' &\rightarrow X_n', & \sigma_n &= p_n' d_X^{n-1} i_{n-1}''.
 \end{aligned}$$

Покажем, что имеют место следующие соотношения:

- (а) $\varepsilon = i_0' \sigma_0 + i_0'' \varepsilon'' \varphi$,
- (б) $\varepsilon' = \sigma_0 \psi$,
- (в) $d_X^0 \sigma_0 + \sigma_1 \varepsilon'' \varphi = 0$,
- (г) $d_X^n = i_{n+1}'' d_{X''}^n p_n'' + i_{n+1}' \sigma_{n+1} p_n'' + i_{n+1}' d_X^n p_n'$,
- (д) $\sigma_{n+1} d_{X''}^{n-1} + d_X^n \sigma_n = 0$.

В самом деле,

$$\begin{aligned}
 i_0' \sigma_0 + i_0'' \varepsilon'' \varphi &= i_0' p_0' \varepsilon + i_0'' p_0'' \varepsilon = (i_0' p_0' + i_0'' p_0'') \varepsilon = \varepsilon. \\
 \sigma_0 \psi &= p_0' \varepsilon \psi = p_0' i_0' \varepsilon' = \varepsilon'.
 \end{aligned}$$

Для доказательства соотношения (в) достаточно установить, что $i'_1(d_X^0 \sigma_0 + \sigma_1 e'' \varphi) = 0$. Но, действительно,

$$\begin{aligned} i'_1(d_X^0 \sigma_0 + \sigma_1 e'' \varphi) &= i'_1 d_X^0 p'_0 e + i'_1 p'_1 d_X^0 i''_0 e'' \varphi = d_X^0 i'_0 p'_0 e + (1_{X_1} - i''_1 p'_1) d_X^0 i''_0 e'' \varphi = \\ &= d_X^0 e - d_X^0 i''_0 p'_0 e + d_X^0 i''_0 e'' \varphi - i''_1 p'_1 d_X^0 i''_0 e'' \varphi = \\ &= -d_X^0 i''_0 p'_0 e + d_X^0 i''_0 p'_0 e - i''_1 d_X^0 p'_0 i''_0 e'' \varphi = -i''_1 d_X^0 e'' \varphi = 0. \end{aligned}$$

Для доказательства соотношения (г) покажем, что обе его части имеют одинаковые композиции как с p'_{n+1} , так и с p''_{n+1} . В самом деле,

$$\begin{aligned} p'_{n+1}(i''_{n+1} d_X^n p''_n + i'_{n+1} \sigma_{n+1} p''_n + i'_{n+1} d_X^n p'_n) &= \sigma_{n+1} p''_n + d_X^n p'_n = \\ &= p'_{n+1} d_X^n i''_n p''_n + d_X^n p'_n = p'_{n+1} d_X^n - p'_{n+1} d_X^n i'_n p'_n + d_X^n p'_n = \\ &= p'_{n+1} d_X^n - p'_{n+1} i'_{n+1} d_X^n p'_n + d_X^n p'_n = p'_{n+1} d_X^n, \\ p''_{n+1}(i''_{n+1} d_X^n p''_n + i'_{n+1} \sigma_{n+1} p''_n + i'_{n+1} d_X^n p'_n) &= d_X^n p''_n = p''_{n+1} d_X^n. \end{aligned}$$

Чтобы доказать соотношение (д) покажем, что $i'_{n+1}(\sigma_{n+1} d_X^{n-1} + d_X^n \sigma_n) = 0$:

$$\begin{aligned} i'_{n+1}(\sigma_{n+1} d_X^{n-1} + d_X^n \sigma_n) &= i'_{n+1} p'_{n+1} d_X^n i''_n d_X^{n-1} + i'_{n+1} d_X^n p'_n d_X^{n-1} i''_{n-1} = \\ &= d_X^n i''_n d_X^{n-1} - i''_{n+1} p''_{n+1} d_X^n i''_n d_X^{n-1} + d_X^n i'_n p'_n d_X^{n-1} i''_{n-1} = \\ &= d_X^n i''_n d_X^{n-1} - i''_{n+1} d_X^n p''_n i''_n d_X^{n-1} - d_X^n i'_n p'_n d_X^{n-1} i''_{n-1} = \\ &= d_X^n i''_n d_X^{n-1} - d_X^n i''_n d_X^{n-1} p''_{n-1} i''_{n-1} = 0. \end{aligned}$$

Предложение 7.8. Рассмотрим коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A' & \xrightarrow{\psi} & A & \xrightarrow{\varphi} & A'' \rightarrow 0 \\ & & \downarrow h' & & \downarrow h & & \downarrow h'' \\ 0 & \rightarrow & B' & \xrightarrow{\xi} & B & \xrightarrow{\eta} & B'' \rightarrow 0 \end{array}$$

Пусть (X', e') , (X, e) , (X'', e'') — точные резольвенты объектов A' , A , A'' , а (W', e') , (W, e) , (W'', e'') — точные резольвенты объектов B' , B , B'' . Предположим, что эти резольвенты удовлетворяют условиям предложения 7.6, так что (X, e) и (W, e) — нормальные резольвенты. Кроме того предположим, что выполнены следующие условия:

(а) (W'', e'') есть инъективная резольвента объекта B'' .

(б) Существуют морфизмы комплексов

$$f': X' \rightarrow W', \quad f' = (f'_n)_{n \geq 0} \quad \text{и} \quad f'': X'' \rightarrow W'', \quad f'' = (f''_n)_{n \geq 0},$$

для которых коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{h'} & B' \\ e' \downarrow & & \downarrow e' \\ X'_0 & \xrightarrow{f'_0} & W'_0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A'' & \xrightarrow{h''} & B'' \\ e'' \downarrow & & \downarrow e'' \\ X''_0 & \xrightarrow{f''_0} & W''_0 \end{array}$$

При этих условиях существует морфизм комплексов $f: X \rightarrow W$, $f = (f_n)_{n \geq 0}$, для которого коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & B \\ e \downarrow & & \downarrow e \\ X_0 & \xrightarrow{f_0} & W_0 \end{array} \quad \text{(I)} \quad \begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & X \xrightarrow{p''} X'' \\ f' \downarrow & & f \downarrow \quad \downarrow f'' \\ W' & \xrightarrow{f'} & W \xrightarrow{p''} W'' \end{array} \quad \text{(II)}$$

Доказательство. Обозначим через τ_i морфизмы для резольвент W' , W , W'' , аналогичные морфизмам σ_i . Покажем, что морфизмы f_n можно найти в виде

$$f_n = j'_n q_n p''_n + j''_n f'_n p'_n + j''_n f''_n p''_n, \quad (6)$$

где $q_n: X''_n \rightarrow W'_n$ морфизмы, подлежащие определению. Определим прежде всего $q_0: X''_0 \rightarrow W'_0$ так, чтобы была коммутативна диаграмма (I). Рассмотрим для этого диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{\psi} & A \xrightarrow{e''\varphi} X''_0 \\ \tau_0 h - f'_0 \sigma_0 \downarrow & & \\ & & W'_0 \end{array}$$

Она удовлетворяет условиям леммы 7.4. Действительно, в силу предположения объект W'_0 инъективен и последовательность $A' \xrightarrow{\psi} A \xrightarrow{e''\varphi} X''_0$ точна, так что остается проверить, что $(\tau_0 h - f'_0 \sigma_0) \psi = 0$. Но используя соотношение (б) для σ_0 и для τ_0 , а также, конечно, коммутативность первых двух диаграмм предложения, получаем

$$(\tau_0 h - f'_0 \sigma_0) \psi = \tau_0 h \psi - f'_0 \sigma_0 \psi = \tau_0 \xi h' - f'_0 e' = e' h' - f'_0 e' = 0.$$

В силу леммы 7.4, тогда существует морфизм $q_0: X''_0 \rightarrow W'_0$, такой, что $q_0 e'' \varphi = \tau_0 h - f'_0 \sigma_0$. Морфизм f_0 , определенный соотношением (6)

с этим q_0 , делает диаграмму (I) коммутативной, ибо

$$\begin{aligned} f_0 \varepsilon &= (j'_0 q_0 p''_0 + j'_0 f'_0 p'_0 + j''_0 f''_0 p''_0) (i'_0 \sigma_0 + i''_0 \varepsilon'' \varphi) = \\ &= j'_0 f'_0 \sigma_0 + j'_0 q_0 \varepsilon'' \varphi + j''_0 f''_0 \varepsilon'' \varphi, \\ e h &= (j'_0 \tau_0 + j''_0 \varepsilon'' \eta) h = j'_0 \tau_0 h + j''_0 \varepsilon'' \eta h = j'_0 \tau_0 h + j''_0 \varepsilon'' h'' \varphi = \\ &= j'_0 \tau_0 h + j''_0 f''_0 \varepsilon'' \varphi. \end{aligned}$$

Покажем теперь, что можно по индукции определить морфизмы $q_n: X''_n \rightarrow W'_n$ ($n \geq 1$) так, чтобы выполнялись соотношения

$$q_{n+1} d_{X''}^n - d_{W'}^n q_n = -f'_{n+1} \sigma_{n+1} + \tau_{n+1} f''_n \quad (n \geq 0). \quad (7)$$

Для $n=1$ рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varepsilon'' \varphi} & X''_0 \xrightarrow{d_{X''}^0} X''_1 \\ & & \downarrow d_{W'}^0 q_0 - f'_1 \sigma_1 + \tau_1 f''_0 \\ & & W'_1 \end{array}$$

К ней также применима лемма 7.4, ибо

$$\begin{aligned} (d_{W'}^0 q_0 - f'_1 \sigma_1 + \tau_1 f''_0) \varepsilon'' \varphi &= d_{W'}^0 (\tau_0 h - f'_0 \sigma_0) - f'_1 \sigma_1 \varepsilon'' \varphi + \tau_1 f''_0 \varepsilon'' \varphi = \\ &= -\tau_1 \varepsilon'' h'' \varphi - f'_1 d_{X'}^0 \sigma_0 + f'_1 d_{X'}^0 \sigma_0 + \tau_1 \varepsilon'' h'' \varphi = 0. \end{aligned}$$

Поэтому существует морфизм $q_1: X''_1 \rightarrow W'_1$, такой, что $q_1 d_{X''}^0 = \tau_1 f''_0 - f'_1 \sigma_1 + d_{W'}^0 q_0$. Предположим теперь, что уже построены морфизмы $q_1, q_2, \dots, q_n$, удовлетворяющие соотношению (7). Для определения морфизма $q_{n+1}: X''_{n+1} \rightarrow W'_{n+1}$ рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X''_{n-1} & \xrightarrow{d_{X''}^{n-1}} & X''_n \xrightarrow{d_{X''}^n} X''_{n+1} \\ & & \downarrow \tau_{n+1} f''_n - f'_{n+1} \sigma_{n+1} + d_{W'}^n q_n \\ & & W'_{n+1} \end{array}$$

Так как

$$\begin{aligned} (\tau_{n+1} f''_n - f'_{n+1} \sigma_{n+1} + d_{W'}^n q_n) d_{X''}^{n-1} &= \\ &= (\tau_{n+1} f''_n - f'_{n+1} \sigma_{n+1}) d_{X''}^{n-1} + d_{W'}^n (d_{W'}^{n-1} q_{n-1} + \tau_n f''_{n-1} - f'_n \sigma_n) = \\ &= \tau_{n+1} f''_n d_{X''}^{n-1} - f'_{n+1} \sigma_{n+1} d_{X''}^{n-1} + d_{W'}^n \tau_n f''_{n-1} - d_{W'}^n f'_n \sigma_n = \\ &= (\tau_{n+1} d_{W''}^{n-1} + d_{W'}^n \tau_n) f''_{n-1} - f'_{n+1} (\sigma_{n+1} d_{X''}^{n-1} + d_{X'}^n \sigma_n) = 0, \end{aligned}$$

то к ней применима лемма 7.4 и, таким образом, существование семейства морфизмов q_n со свойством (7) доказано.

Остается показать, что семейство морфизмов $(f_n)_{n \geq 0}$, определенных формулой (6), в которой q_n удовлетворяют соотношению (7), образует морфизм комплекса X в комплекс W и что диаграмма (II) коммутативна. Покажем прежде всего, что $f_{n+1}d_X^n = d_W^n f_n$. Имеем

$$\begin{aligned} d_W^n f_n &= (j'_{n+1} d_W^n \pi''_n + j'_{n+1} \tau_{n+1} \pi''_n + j'_{n+1} d_W^n \pi'_n) (j'_n q_n p''_n + j'_n f'_n p'_n + j''_n f''_n p''_n) = \\ &= j'_{n+1} d_W^n q_n p''_n + j'_{n+1} d_W^n f'_n p'_n + j''_{n+1} d_W^n f''_n p''_n + j'_{n+1} \tau_{n+1} f''_n p''_n = \\ &= j'_{n+1} d_W^n q_n p''_n + j'_{n+1} f'_{n+1} d_X^n p'_n + j''_{n+1} f''_{n+1} d_X^n p''_n + j'_{n+1} \tau_{n+1} f''_n p''_n, \\ f_{n+1} d_X^n &= (j'_{n+1} q_{n+1} p''_{n+1} + j'_{n+1} f'_{n+1} p'_{n+1} + j''_{n+1} f''_{n+1} p''_{n+1}) \times \\ &\quad \times (i''_{n+1} d_X^n p''_n + i'_{n+1} \sigma_{n+1} p''_n + i'_{n+1} d_X^n p'_n) = \\ &= j'_{n+1} q_{n+1} d_X^n p''_n + j''_{n+1} f''_{n+1} d_X^n p''_n + j'_{n+1} f'_{n+1} \sigma_{n+1} p''_n + j'_{n+1} f'_{n+1} d_X^n p'_n. \end{aligned}$$

Сравнение этих соотношений показывает, с учетом равенства (7), что $d_W^n f_n = f_{n+1} d_X^n$.

Проверка коммутативности диаграммы (II) тривиальна и не требует наложения на морфизмы q_n никаких условий. Тем самым предложение 7.8 полностью доказано.

§ 3. Производные функторы

Теперь мы можем ввести одно из фундаментальных понятий гомологической алгебры, а именно понятие производных функторов.

Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ — абелевы категории и $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ — аддитивный ковариантный функтор. Предположим, кроме того, что в $\mathcal{C}$ имеется достаточно много инъективных объектов. При этих условиях каждый объект категории $\mathcal{C}$ обладает по крайней мере одной точной инъективной резольвентой. Мы примем, что для каждого объекта A из $\mathcal{C}$ выбрано по одной такой резольвенте (R_A, e_A) . (Следует отметить, что дальнейшие построения зависят от выбора этих резольвент.) Ясно, что $F(R_A)$ есть комплекс в категории $\mathcal{C}'$.

Мы построим последовательность ковариантных функторов $R^0 F, R^1 F, \dots, R^q F, \dots$ из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{C}'$, называемых *правыми производными функторами* функтора F . А именно, для каждого объекта A категории $\mathcal{C}$ положим

$$(R^q F)(A) = H^q(F(R_A)).$$

Для каждого морфизма $u: A \rightarrow B$ категории $\mathcal{C}$ нужно еще определить морфизмы $(R^q F)(u): (R^q F)(A) \rightarrow (R^q F)(B)$ так, чтобы $(R^q F)(vu) = (R^q F)(v) \circ (R^q F)(u)$. Согласно предложению 7.5 существует такой морфизм $f = (f^n)_{n \geq 0}$ комплекса R_A в комплекс R_B , что коммута-

тивна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \varepsilon_A \downarrow & & \downarrow \varepsilon_B \\ R_A^0 & \xrightarrow{f^0} & R_B^0 \end{array}$$

При этом, по тому же предложению, f определен однозначно с точностью до гомотопии; другими словами, если и $g = (g^n)_{n \geq 0}$ — морфизм R_A в R_B , удовлетворяющий тем же условиям, что и f , то f и g гомотопны. $F(f) = (F(f^n))_{n \geq 0}$ и $F(g) = (F(g^n))_{n \geq 0}$ — морфизмы комплекса $F(R_A)$ в комплекс $F(R_B)$, очевидно также гомотопные. Таким образом, можно, отправляясь от морфизма f , определить морфизм комплекса $F(R_A)$ в комплекс $F(R_B)$, и этот морфизм в силу предложения 7.1 зависит только от морфизма u . В соответствии с этим положим $(R^q F)(u) = H^q(F(f))$. Очевидно, $(R^q F)(vu) = (R^q F)(v) \circ (R^q F)(u)$. Тем самым мы получили аддитивные ковариантные функторы $R^q F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$.

Присмотримся теперь ближе к зависимости функторов $R^q F$ от выбора резольвент R_A . А именно, предположим, что для каждого объекта A категории $\mathcal{C}$ как-то еще выбрана точная инъективная резольвента $(\bar{R}_A, \bar{\varepsilon}_A)$. Обозначим через $\bar{R}^0 F, \bar{R}^1 F, \dots, \bar{R}^q F, \dots$ правые производные функторы функтора F , построенные исходя из резольвент $\bar{R}_A$. Нам нужно сравнить функторы $R^q F$ и $\bar{R}^q F$. Мы докажем, что между ними имеется канонический функторный изоморфизм. Для этого мы определим изоморфизмы $f_A^q: (R^q F)(A) \rightarrow (\bar{R}^q F)(A)$ так, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (R^q F)(A) & \xrightarrow{f_A^q} & (\bar{R}^q F)(A) \\ (R^q F)(u) \downarrow & & \downarrow (\bar{R}^q F)(u) \\ (R^q F)(B) & \xrightarrow{f_B^q} & (\bar{R}^q F)(B) \end{array} \quad (8)$$

будет коммутативна для каждого морфизма $u: A \rightarrow B$.

Для определения морфизма f_A снова воспользуемся предложением 7.5. По этому предложению существует морфизм $\bar{f} = (\bar{f}^n)_{n \geq 0}$ комплекса R_A в комплекс $\bar{R}_A$, однозначно определенный с точностью до гомотопии, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \varepsilon_A \swarrow & & \searrow \varepsilon_A \\ R_A^0 & \xrightarrow{\bar{f}^0} & \bar{R}_A^0 \end{array}$$

Полагаем $f_A^q = H^q(F(f))$: $(R^q F)(A) \rightarrow (\bar{R}^q F)(A)$. Коммутативность диаграмм (8) непосредственно следует из предложения 7.5.

Это замечание наводит на мысль выбрать раз навсегда по резольвенте для каждого объекта категории $\mathcal{C}$. Мы будем называть эти резольвенты *каноническими*.

Из определения правых производных функторов ковариантного функтора F вытекают следующие два основных их свойства:

Свойство 7.9. Если Q — инъективный объект категории $\mathcal{C}$, то $(R^q F)(Q) = 0$ для всех $q \geq 1$.

Свойство 7.10. Если функтор F точен слева, то функтор $R^0 F$ изоморфен F . Если F точен, то $(R^q F)(A) = 0$ для всех $q \geq 1$.

Доказательство. Свойство 7.9 вытекает из того замечания, что инъективный объект Q обладает точной инъективной резольвентой

$$0 \rightarrow Q \xrightarrow{1_Q} Q \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Свойство 7.10 вытекает из следующих замечаний.

Если (R_A, e_A) — точная инъективная резольвента объекта A и функтор F точен слева, то последовательность

$$0 \rightarrow F(A) \xrightarrow{F(e_A)} F(R_A^0) \xrightarrow{F(d_{R_A}^0)} F(R_A^1)$$

точна и потому

$$(R^0 F)(A) = H^0(F(R_A)) \approx F(A).$$

Если к тому же F точен, то вся последовательность

$$0 \rightarrow F(A) \xrightarrow{F(e_A)} F(R_A^0) \xrightarrow{F(d_{R_A}^0)} F(R_A^1) \xrightarrow{F(d_{R_A}^1)} F(R_A^2) \rightarrow \dots$$

точна и потому

$$(R^q F)(A) = H^q(F(R_A)) = 0 \quad (q \geq 1).$$

Помимо этих двух свойств и общих свойств аддитивных функторов, производные функторы обладают рядом других замечательных свойств. Однако для их изложения нам понадобятся еще некоторые предварительные построения и свойства.

Если вместо того чтобы отправляться от точных инъективных резольвент, мы примем за отправной пункт точные проективные резольвенты, то таким же путем, как и выше, придем к понятию *левых производных функторов* ковариантного функтора F ; будем обозначать их $L^0 F, L^1 F, \dots, L^n F, \dots$.

Можно также, по двойственности, рассматривать правые и левые производные функторы контравариантного функтора. Предоставим читателю сформулировать свойства, дуальные к полученным выше.

Пусть X', X, X'' — тройка комплексов со значениями в категории $\mathcal{C}$. Для упрощения записи будем обозначать элементы и дифференциалы этих комплексов так:

$$\begin{aligned} X' &= (\dots \rightarrow X'_i \xrightarrow{d'_i} X'_{i+1} \xrightarrow{d'_{i+1}} X'_{i+2} \rightarrow \dots), \\ X &= (\dots \rightarrow X_i \xrightarrow{d_i} X_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} X_{i+2} \rightarrow \dots), \\ X'' &= (\dots \rightarrow X''_i \xrightarrow{d''_i} X''_{i+1} \xrightarrow{d''_{i+1}} X''_{i+2} \rightarrow \dots). \end{aligned}$$

Предположим теперь, что $X_i = X'_i \oplus X''_i$ для каждого $i \in \mathbb{Z}$, причем канонические инъекции $i'_j: X'_j \rightarrow X'_j \oplus X''_j$ ($j \in \mathbb{Z}$) определяют морфизм $I': X' \rightarrow X$ комплекса X' в комплекс X , а канонические проекции $p''_j: X'_j \oplus X''_j \rightarrow X''_j$ ($j \in \mathbb{Z}$) — морфизм $P'': X \rightarrow X''$ комплекса X в комплекс X'' . Таким образом, получаем точную последовательность комплексов

$$0 \rightarrow X' \xrightarrow{I'} X \xrightarrow{P''} X'' \rightarrow 0. \quad (E)$$

Нашей целью будет показать, что при этих условиях для каждого $i \in \mathbb{Z}$ существует морфизм

$$\partial_E^i: H^i(X'') \rightarrow H^{i+1}(X'),$$

такой, что последовательность

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^i(X'') \xrightarrow{\partial_E^i} H^{i+1}(X') \xrightarrow{H^{i+1}(I')} \\ \xrightarrow{H^{i+1}(I')} H^{i+1}(X) \xrightarrow{H^{i+1}(P'')} H^{i+1}(X'') \xrightarrow{\partial_E^{i+1}} \dots \end{aligned}$$

точна.

Для этого заметим, что для каждого $i \in \mathbb{Z}$ мы имеем коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & X'_i & \rightarrow & X_i & \rightarrow & X''_i \rightarrow 0 \\ & & d'_i \downarrow & & d_i \downarrow & & \downarrow d''_i \\ 0 & \rightarrow & X'_{i+1} & \rightarrow & X_{i+1} & \rightarrow & X''_{i+1} \rightarrow 0 \end{array}$$

чем порождаются точные последовательности

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Ker } d'_i \rightarrow \text{Ker } d_i \rightarrow \text{Ker } d''_i, \\ \text{Coker } d'_i \rightarrow \text{Coker } d_i \rightarrow \text{Coker } d''_i \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(см. следствие 6.35). При этом $\text{Ker } d_i = Z_i$, $\text{Coker } d_i = X_{i+1}/B_{i+1}$ и d_{i+1} индуцирует морфизм $\alpha_i: \text{Coker } d_i \rightarrow Z_{i+2}$, образом которого служит как раз B_{i+2} . Таким образом, имеем коммутативную

диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \text{Coker } d'_i & \rightarrow & \text{Coker } d_i & \rightarrow & \text{Coker } d''_i \rightarrow 0 \\ \alpha'_i \downarrow & & \alpha_i \downarrow & & \downarrow \alpha''_i \\ 0 \rightarrow Z'_{i+2} & \rightarrow & Z_{i+2} & \rightarrow & Z''_{i+2} \end{array}$$

Для завершения доказательства остается заметить, что $\text{Ker } \alpha_i$ изоморфен $H_{i+1}(X)$, $\text{Coker } \alpha_i$ изоморфен $H_{i+2}(X)$ и т. д., и применить следствие 6.35.

§ 4. Дальнейшие свойства производных функторов

Результаты, полученные в предыдущем параграфе, позволяют пополнить список замечательных свойств производных функторов.

Предложение 7.11. Пусть $\mathcal{C}$ — абелева категория, содержащая достаточно много инъективных объектов, $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ — точный слева аддитивный ковариантный функтор и

$$0 \rightarrow A' \xrightarrow{\alpha'} A \xrightarrow{\alpha''} A'' \rightarrow 0 \quad (\text{E})$$

— точная последовательность в $\mathcal{C}$. Тогда для всех $i \geq 0$ существуют морфизмы

$$\partial_E^i: (R^i F)(A'') \rightarrow (R^{i+1} F)(A'),$$

такие, что последовательность

$$\begin{aligned} (R^0 F)(A') &\xrightarrow{(R^0 F)(\alpha')} (R^0 F)(A) \xrightarrow{(R^0 F)(\alpha'')} (R^0 F)(A'') \xrightarrow{\partial_E^0} (R^1 F)(A') \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow (R^i F)(A') &\xrightarrow{(R^i F)(\alpha')} (R^i F)(A) \xrightarrow{(R^i F)(\alpha'')} (R^i F)(A'') \xrightarrow{\partial_E^i} \\ &\xrightarrow{\partial_E^i} (R^{i+1} F)(A') \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (9)$$

точна.

Если также

$$0 \rightarrow B' \xrightarrow{\beta'} B \xrightarrow{\beta''} B'' \rightarrow 0 \quad (\text{F})$$

— точная последовательность в $\mathcal{C}$ и морфизмы $f': A' \rightarrow B'$, $f: A \rightarrow B$, $f'': A'' \rightarrow B''$ таковы, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow A' & \xrightarrow{\alpha'} & A & \xrightarrow{\alpha''} & A'' & \rightarrow & 0 \\ f' \downarrow & & f \downarrow & & \downarrow f'' & & \\ 0 \rightarrow B' & \xrightarrow{\beta'} & B & \xrightarrow{\beta''} & B'' & \rightarrow & 0 \end{array}$$

то диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 (R^i F)(A'') & \xrightarrow{\partial_E^i} & (R^{i+1} F)(A') \\
 (R^i F)(f'') \downarrow & & \downarrow (R^i F)(f') \\
 (R^i F)(B'') & \xrightarrow{\partial_F^i} & (R^{i+1} F)(B')
 \end{array} \quad (10)$$

коммутативна для каждого $i \geq 0$.

Доказательство. Пусть $(R_{A'}, e_{A'})$ и $(R_{A''}, e_{A''})$ — канонические точные инъективные резольвенты объектов A' и A'' . Выбирая нормальную резольвенту (X, e) объекта A и принимая во внимание рассуждения, проведенные в конце предыдущего параграфа, получаем морфизмы ∂_E^i , для которых последовательность (9) точна. По способу, которым определялись морфизмы ∂_E^i , могло бы показаться, что они зависят от выбора нормальной резольвенты (X, e) . Но на самом деле они не зависят от специального выбора резольвенты (X, e) , как это непосредственно следует из соотношения (7) в доказательстве предложения 7.8, если взять там в качестве f' и f'' единичные морфизмы комплексов $R_{A'}$ и $R_{A''}$. То же соотношение, рассматриваемое уже для общего случая, влечет коммутативность диаграммы (10), и предложение полностью доказано.

§ 5. Функторы гомологии и когомологии

С понятием производных функторов тесно связаны понятия функторов гомологии и когомологии. Собственно, речь идет о четырех понятиях. Это:

- (1) ковариантный функтор гомологии,
- (2) контравариантный функтор гомологии,
- (3) ковариантный функтор когомологии,
- (4) контравариантный функтор когомологии.

Понятия (1) и (2) дуальны друг другу; то же верно для понятий (3) и (4). Кроме того переход от понятия функтора когомологии к понятию функтора гомологии очевиден, так что при построении общей теории достаточно рассмотреть, например, случай ковариантных функторов когомологии.

Определение. Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ — абелевы категории. Последовательность $(T^i)_{i \geq 0}$ ковариантных функторов из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{C}'$ называется *ковариантным функтором когомологии*, определенным на $\mathcal{C}$ и со значениями в $\mathcal{C}'$, если для каждой точной последовательности

$$0 \rightarrow A' \xrightarrow{\alpha'} A \xrightarrow{\alpha''} A'' \rightarrow 0 \quad (E)$$

объектов и морфизмов из $\mathcal{C}$ и всех $i \geq 0$ заданы морфизмы

$$\partial_E^i: T^i(A'') \rightarrow T^{i+1}(A')$$

так, что выполнены следующие условия:

(1) Точна последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow T^0(A') \xrightarrow{T^0(\alpha')} T^0(A) \xrightarrow{T^0(\alpha'')} T^0(A'') \xrightarrow{\partial_E^0} T^1(A') \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow T^i(A') \xrightarrow{T^i(\alpha')} T^i(A) \xrightarrow{T^i(\alpha'')} T^i(A'') \xrightarrow{\partial_E^i} T^{i+1}(A') \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (11)$$

(2) Если также

$$0 \rightarrow B' \xrightarrow{\beta'} B \xrightarrow{\beta''} B'' \rightarrow 0 \quad (F)$$

—точная последовательность в $\mathcal{C}$ и морфизмы $f': A' \rightarrow B'$, $f: A \rightarrow B$, $f'': A'' \rightarrow B''$ таковы, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A' & \xrightarrow{\alpha'} & A & \xrightarrow{\alpha''} & A'' \rightarrow 0 \\ & & f' \downarrow & & f \downarrow & & f'' \downarrow \\ 0 & \rightarrow & B' & \xrightarrow{\beta'} & B & \xrightarrow{\beta''} & B'' \rightarrow 0 \end{array}$$

то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T^i(A'') & \xrightarrow{\partial_E^i} & T^{i+1}(A') \\ T^i(f'') \downarrow & & \downarrow T^{i+1}(f') \\ T^i(B'') & \xrightarrow{\partial_F^i} & T^{i+1}(B') \end{array} \quad (12)$$

коммутативна для каждого $i \geq 0$.

Будем говорить, что задан функторный морфизм ковариантного функтора когомологии, определяемого последовательностью функторов $(T^i)_{i \geq 0}$ и морфизмами ∂_E^i , в ковариантный функтор когомологии, определяемый последовательностью функторов $(S^i)_{i \geq 0}$ и морфизмами δ_E^i , если для каждого $i \geq 0$ задан функторный морфизм $\varphi^i: T^i \rightarrow S^i$ так, что для каждой точной последовательности

$$0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0 \quad (E)$$

в $\mathcal{C}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T^i(A'') & \xrightarrow{\partial_E^i} & T^{i+1}(A') \\ \varphi^i(A'') \downarrow & & \downarrow \varphi^{i+1}(A') \\ S^i(A'') & \xrightarrow{\delta_E^i} & S^{i+1}(A') \end{array}$$

Ковариантный функтор когомологии (T^i, ∂_E^i) называется *универсальным*, если для каждого ковариантного функтора когомологии (S^i, δ_E^i) и каждого функторного морфизма $\varphi: T^0 \rightarrow S^0$ существует единственный морфизм первого функтора когомологии во второй, определенный последовательностью функторных морфизмов $(\psi^i)_{i \geq 0}$, такую, что $\psi^0 = \varphi$.

Если $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ — точный слева ковариантный функтор, то универсальный функтор когомологии (T^i, ∂_E^i) условием $T^0 = F$ определяется однозначно (с точностью до канонического изоморфизма). В этом случае функторы T^i называются *спутниками* функтора F и обозначаются $S^i F$.

Что касается контравариантного функтора когомологии, то здесь требуется, чтобы каждой точной последовательности (E) соответствовала последовательность морфизмов $\partial_E^i: T^i(A') \rightarrow T^{i+1}(A'')$, для которой точна последовательность

$$0 \rightarrow T^0(A'') \xrightarrow{T^0(\alpha'')} T^0(A) \xrightarrow{T^0(\alpha')} T^0(A') \xrightarrow{\partial_E^0} T^1(A'') \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow T^i(A'') \xrightarrow{T^i(\alpha'')} T^i(A) \xrightarrow{T^i(\alpha')} T^i(A') \xrightarrow{\partial_E^i} T^{i+1}(A'') \rightarrow \dots,$$

и, конечно, чтобы выполнялось условие коммутативности типа (12).

Отличие понятия ковариантного функтора гомологии состоит лишь в том, что морфизмы ∂_E^i уменьшают показатели. Другими словами, $\partial_E^i \in \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(T^i(A''), T^{i-1}(A'))$ и вместо последовательности (11) мы имеем последовательность

$$\dots \rightarrow T^i(A'') \xrightarrow{\partial_E^i} T^{i-1}(A') \xrightarrow{T^{i-1}(\alpha')} T^{i-1}(A) \xrightarrow{T^{i-1}(\alpha'')} T^{i-1}(A'') \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow T^0(A') \xrightarrow{T^0(\alpha')} T^0(A) \xrightarrow{T^0(\alpha'')} T^0(A'') \rightarrow 0.$$

Как определяется понятие контравариантного функтора гомологии, уже ясно.

Если $\mathcal{C}$ — категория, содержащая достаточно много инъективных объектов, и $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ — точный слева контравариантный функтор, то ясно, что правые производные функторы функтора F определяют ковариантный функтор когомологии. Если же F точен справа, то его левые производные функторы определяют ковариантный функтор гомологии. Как вытекает из следующего предложения, производные функторы определяют на самом деле даже универсальный функтор когомологии (или гомологии).

Предложение 7.12. Пусть категория $\mathcal{C}$ содержит достаточно много инъективных объектов и функтор когомологии (T^i, ∂_E^i) удовлетворяет следующему условию:

(а) $T^i(Q) = 0$ для каждого инъективного объекта Q из $\mathcal{C}$ и каждого $i \geq 1$.

Тогда функтор когомологии (T^i, ∂_E^i) универсален.

Обратно, каждый универсальный функтор когомологии удовлетворяет условию (а).

Доказательство. Пусть также (S^i, δ_E^i) — ковариантный функтор когомологии и $\varphi: T^0 \rightarrow S^0$ — функторный морфизм. Требуется доказать существование морфизма $(\psi^i)_{i \geq 0}$ функтора когомологии (T^i, ∂_E^i) в функтор когомологии (S^i, δ_E^i) , удовлетворяющего условию $\psi^0 = \varphi$. Морфизм ψ^1 определяется следующим образом. Берем произвольный объект категории $\mathcal{C}$ и, вкладывая его в инъективный объект Q , получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow A \rightarrow Q \xrightarrow{\omega} Q/A \rightarrow 0, \quad (E)$$

доставляющую морфизм $\psi_Q^1(A): T^1(A) \rightarrow S^1(A)$, для которого коммутативна диаграмма¹⁾

$$\begin{array}{ccc} T^0(Q/A) & \xrightarrow{\partial_E^0} & T^1(A) \\ \varphi(Q/A) \downarrow & & \downarrow \psi_Q^1(A) \\ S^0(Q/A) & \xrightarrow{\delta_E^0} & S^1(A) \end{array}$$

Наша первая задача — доказать, что $\psi_Q^1(A)$ не зависит от выбора инъективного объекта Q , в который мы вложили A , чем будет оправдана запись $\psi^1(A)$ вместо $\psi_Q^1(A)$. Для этого рассмотрим кроме последовательности (E) еще точную последовательность

$$0 \rightarrow A \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_1/A \rightarrow 0 \quad (E_1)$$

с инъективным объектом Q_1 . Существуют морфизмы $\alpha: Q \rightarrow Q_1$ и $\beta: Q/A \rightarrow Q_1/A$, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & Q & \rightarrow & Q/A \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha_A & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & Q_1 & \rightarrow & Q_1/A \rightarrow 0 \end{array}$$

¹⁾ Существование морфизма $\psi_Q^1(A)$ вытекает из наличия коммутативной диаграммы с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} T^0(Q) & \xrightarrow{T^0(\omega)} & T^0(Q/A) & \xrightarrow{\partial_E^0} & T^1(A) & \rightarrow & T^1(Q) \\ \varphi(Q) \downarrow & & \downarrow \varphi(Q/A) & & & & \\ S^0(Q) & \xrightarrow{S^0(\omega)} & S^0(Q/A) & \xrightarrow{\delta_E^0} & S^1(A) & & \end{array}$$

в которой $\delta_E^0 S^0(\omega) = 0$, а $\partial_E^0 = \text{сокр } T^0(\omega)$, поскольку $T^1(Q) = 0$.

Нам нужно доказать, что $\psi_Q^1(A) = \psi_{Q_1}^1(A)$. Поскольку ∂_E^0 — эпиморфизм, достаточно проверить, что $\psi_Q^1(A) \partial_E^0 = \psi_{Q_1}^1(A) \partial_E^0$. Но в силу коммутативности диаграмм

$$\begin{array}{ccc} T^0(Q/A) & \xrightarrow{\partial_E^0} & T^1(A) \\ T^0(\beta) \downarrow & \nearrow \partial_E^0 & \\ T^0(Q_1/A) & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} S^0(Q/A) & \xrightarrow{\partial_E^0} & S^1(A) \\ S^0(\beta) \downarrow & \nearrow \partial_{E_1}^0 & \\ S^0(Q_1/A) & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} T^0(Q/A) & \xrightarrow{\Phi(Q/A)} & S^0(Q/A) \\ T^0(\beta) \downarrow & & \downarrow S^0(\beta) \\ T^0(Q_1/A) & \xrightarrow{\Phi(Q_1/A)} & S^0(Q_1/A) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T^0(Q_1/A) & \xrightarrow{\partial_{E_1}^0} & T^1(A) \\ \Phi(Q_1/A) \downarrow & & \downarrow \psi_{Q_1}^1(A) \\ S^0(Q_1/A) & \xrightarrow{\partial_{E_1}^0} & S^1(A) \end{array}$$

имеем

$$\begin{aligned} \psi_Q^1(A) \partial_E^0 &= \delta_E^0 \Phi(Q/A) = \delta_{E_1}^0 S^0(\beta) \Phi(Q/A) = \delta_{E_1}^0 \Phi(Q_1/A) T^0(\beta) = \\ &= \psi_{Q_1}^1(A) \partial_{E_1}^0 T^0(\beta) = \psi_{Q_1}^1(A) \partial_E^0. \end{aligned}$$

Докажем теперь, что морфизмы $\psi^1(A)$ определяют функторный морфизм $\psi^1: T^1 \rightarrow S^1$. Пусть $u \in \text{Hom}_\mathbf{A}(A, B)$. Требуется проверить коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} T^1(A) & \xrightarrow{T^1(u)} & T^1(B) \\ \psi^1(A) \downarrow & & \downarrow \psi^1(B) \\ S^1(A) & \xrightarrow{S^1(u)} & S^1(B) \end{array} \quad (13)$$

Для B имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow B \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_1/B \rightarrow 0 \quad (F)$$

с инъективным объектом Q_1 . Существуют морфизмы $u_1: Q \rightarrow Q_1$ и $u_2: Q/A \rightarrow Q_1/B$, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & Q & \rightarrow & Q/A \rightarrow 0 \\ & & u \downarrow & & u_1 \downarrow & & \downarrow u_2 \\ 0 & \rightarrow & B & \rightarrow & Q_1 & \rightarrow & Q_1/B \rightarrow 0 \end{array}$$

Для проверки коммутативности диаграммы (13) мы воспользуемся коммутативностью следующих диаграмм:

$$\begin{array}{ccc} T^0(Q/A) & \xrightarrow{\partial_E^0} & T^1(A) \\ T^0(u_2) \downarrow & & \downarrow T^1(u) \\ T^0(Q_1/A) & \xrightarrow{\partial_F^0} & T^1(B) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T^0(Q/A) & \xrightarrow{\partial_E^0} & T^1(A) \\ \varphi(Q/A) \downarrow & & \downarrow \psi^1(A) \\ S^0(Q/A) & \xrightarrow{\delta_E^0} & S^1(A) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} S^0(Q/A) & \xrightarrow{\delta_E^0} & S^1(A) \\ S^0(u_2) \downarrow & & \downarrow S^1(u) \\ S^0(Q_1/A) & \xrightarrow{\delta_F^0} & S^1(B) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T^0(Q_1/B) & \xrightarrow{\partial_F^0} & T^1(B) \\ \varphi(Q_1/B) \downarrow & & \downarrow \psi^1(B) \\ S^0(Q_1/B) & \xrightarrow{\delta_F^0} & S^1(B) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} T^0(Q/A) & \xrightarrow{T^0(u_2)} & T^0(Q_1/B) \\ \varphi(Q/A) \downarrow & & \downarrow \varphi(Q_1/B) \\ S^0(Q/A) & \xrightarrow{S^0(u_2)} & S^0(Q_1/B) \end{array}$$

Поскольку ∂_E^0 — эпиморфизм, достаточно доказать, что

$$\psi^1(B) T^1(u) \partial_E^0 = S^1(u) \psi^1(A) \partial_E^0.$$

Но действительно,

$$\begin{aligned} \psi^1(B) T^1(u) \partial_E^0 &= \psi^1(B) \partial_F^0 T^0(u_2) = \delta_{F\varphi}^0(Q_1/B) T^0(u_2) = \\ &= \delta_F^0 S^0(u_2) \varphi(Q/A) = S^1(u) \delta_E^0 \varphi(Q/A) = S^1(u) \psi^1(A) \partial_E^0. \end{aligned}$$

Остается показать, что для всякой точной последовательности

$$0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0 \quad (U)$$

коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T^0(A'') & \xrightarrow{\partial_U^0} & T^1(A') \\ \varphi(A'') \downarrow & & \downarrow \psi^1(A') \\ S^0(A'') & \xrightarrow{\delta_U^0} & S^1(A') \end{array} \quad (14)$$

Для этого рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow A' \rightarrow Q \rightarrow Q/A' \rightarrow 0 \quad (V)$$

с инъективным объектом Q и вложим ее в коммутативную диаграмму.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A' & \rightarrow & A & \rightarrow & A'' \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \iota_{A'} & & \downarrow \mu & & \downarrow \nu \\ 0 & \rightarrow & A' & \rightarrow & Q & \rightarrow & Q/A' \rightarrow 0 \end{array}$$

Используя коммутативность диаграмм

$$\begin{array}{ccc} T^0(A'') & \xrightarrow{\partial_U^0} & T^1(A') \\ T^0(v) \downarrow & \nearrow \partial_V^0 & \\ T^0(Q/A) & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} S^0(A'') & \xrightarrow{\delta_U^0} & S^1(A') \\ S^0(v) \downarrow & \nearrow \delta_V^0 & \\ S^0(Q/A) & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} T^0(Q/A) & \xrightarrow{\partial_V^0} & T^1(A') \\ \Phi(Q/A) \downarrow & & \downarrow \Psi^1(A') \\ S^0(Q/A) & \xrightarrow{\delta_V^0} & S^1(A') \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} T^0(A'') & \xrightarrow{T^0(v)} & T^0(Q/A) \\ \Phi(A'') \downarrow & & \downarrow \Phi(Q/A) \\ S^0(A'') & \xrightarrow{S^0(v)} & S^0(Q/A) \end{array}$$

получаем

$$\begin{aligned} \Psi^1(A') \partial_U^0 &= \Psi^1(A') \partial_V^0 T^0(v) = \delta_V^0 \Phi(Q/A) T^0(v) = \\ &= \delta_V^0 S^0(v) \Phi(A'') = \delta_U^0 \Phi(A''), \end{aligned}$$

т. е. как раз коммутативность диаграммы (14).

Продолжая так дальше, можно определить требуемые функторные морфизмы $\Psi^2, \Psi^3, \dots, \Psi^n, \dots$. Тем самым первая часть предложения полностью доказана.

Для доказательства второй части рассуждаем следующим образом. В условиях нашего предложения мы можем построить правые производные функторы функтора T^0 . Согласно первой части предложения, мы получим тем самым универсальный функтор когомологии $(R^i T^0, \partial_E^i)$, и он будет канонически изоморфен функтору когомологии (T^i, ∂_E^i) , поскольку $R^0 T^0 = T^0$. А так как $(R^i T^0)(Q) = 0$ для каждого инъективного объекта Q и всех $i \geq 1$, то то же верно и для функторов T^i .

Очевидно, для контравариантных функторов когомологии, равно как и для функторов гомологии, справедливы предложения, аналогичные предложению 7.12.

Следствие 7.13. Если в категории $\mathcal{C}$ имеется достаточно много инъективных объектов, то для каждого точного слева ковариантного функтора $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ существует универсальный ковариантный функтор когомологии (T^i, ∂_E^i) , такой, что, $T^0 = F$. При

этом функтор (T^i, ∂_E^i) определен однозначно с точностью до канонического изоморфизма.

Следствие 7.14. Если в категории $\mathcal{C}$ имеется достаточно много проективных объектов, то для каждого точного справа ковариантного функтора $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ существует универсальный ковариантный функтор гомологии (T^i, ∂_E^i) , такой, что $T^0 = F$. При этом функтор (T^i, ∂_E^i) определен однозначно с точностью до канонического изоморфизма.

Следствие 7.15. Если в категории $\mathcal{C}$ имеется достаточно много проективных объектов, то для каждого точного справа контравариантного функтора $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ существует универсальный контравариантный функтор когомологии (T^i, ∂_E^i) , такой, что $T^0 = F$. При этом функтор (T^i, ∂_E^i) определен однозначно с точностью до канонического изоморфизма.

Следствие 7.16. Если в категории $\mathcal{C}$ имеется достаточно много инъективных объектов, то для каждого точного слева контравариантного функтора $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ существует универсальный контравариантный функтор гомологии (T^i, ∂_E^i) , такой, что $T^0 = F$. При этом функтор (T^i, ∂_E^i) определен однозначно с точностью до канонического изоморфизма.

§ 6. Дальнейшие свойства функторов гомологии и когомологии

Для определенности рассмотрим случай контравариантных функторов когомологии.

Предложение 7.17. Пусть (T^i, ∂_E^i) — контравариантный функтор когомологии из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{C}'$. Для каждой точной последовательности вида

$$0 \rightarrow B \xrightarrow{\beta} X_n \xrightarrow{\xi_n} \dots \xrightarrow{\xi_1} X_0 \xrightarrow{\xi_0} A \rightarrow 0 \quad (S)$$

и каждого $i \geq 0$ существует морфизм $D_S^i: T^i(B) \rightarrow T^{i+n+1}(A)$, такой, что выполнены следующие условия:

(а) Если заданы точная последовательность того же вида

$$0 \rightarrow B_1 \xrightarrow{\beta_1} Y_n \xrightarrow{\eta_n} \dots \xrightarrow{\eta_1} Y_0 \xrightarrow{\eta_0} A_1 \rightarrow 0 \quad (U)$$

и морфизмы $f: A \rightarrow A_1$, $g: B \rightarrow B_1$, $f_i: X_i \rightarrow Y_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$), для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow B & \xrightarrow{\beta} & X_n & \xrightarrow{\xi_n} & \dots & \xrightarrow{\xi_1} & X_0 \xrightarrow{\xi_0} A \rightarrow 0 \\ g \downarrow & & f_n \downarrow & & & & f_0 \downarrow & \downarrow f \\ 0 \rightarrow B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & Y_n & \xrightarrow{\eta_n} & \dots & \xrightarrow{\eta_1} & Y_0 \xrightarrow{\eta_0} A_1 \rightarrow 0 \end{array}$$

то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T^i(B) & \xrightarrow{D_S^i} & T^{i+n+1}(A) \\ \uparrow T^i(g) & & \uparrow T^{i+n+1}(f) \\ T^i(B_1) & \xrightarrow{D_U^i} & T^{i+n+1}(A_1) \end{array}$$

коммутативна для каждого $i \geq 0$.

(б) Если в последовательности (S) объекты X_i ($i=0, 1, \dots, n$) таковы, что $T^j(X_i)=0$ для всех $j \geq 1$, то морфизмы D_S^i для всех $i \geq 1$ являются изоморфизмами и кроме того последовательность

$$T^0(X_n) \rightarrow T^0(B) \xrightarrow{D_S^0} T^{n+1}(A) \rightarrow 0$$

точна.

(в) Если также (R^i, δ_E^i) — контравариантный функтор когомологии из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}'$ и $\varphi = (\varphi^i)_{i \geq 0}$ — морфизм функтора когомологии (T^i, δ_E^i) в функтор когомологии (R^i, δ_E^i) , то для каждой точной последовательности (S) и каждого $i \geq 0$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T^i(B) & \xrightarrow{D_S^i} & T^{i+n+1}(A) \\ \varphi^i(B) \downarrow & & \downarrow \varphi^{i+n+1}(A) \\ R^i(B) & \xrightarrow{\Delta_S^i} & R^{i+n+1}(A) \end{array}$$

где Δ_S^i — морфизмы для функтора (R^i, δ_E^i) , аналогичные морфизмам D_S^i .

Доказательство. Применим индукцию по n . При $n=0$ положим $D_S^i = \delta_S^i$, и условия (а), (б) будут, очевидно, выполнены. Для произвольного n разложим последовательность (S) на следующие две точные последовательности:

$$0 \rightarrow B \xrightarrow{\beta} X_n \xrightarrow{\xi'_n} \text{Im } \xi_n \rightarrow 0, \quad (S_1)$$

$$0 \rightarrow \text{Im } \xi_n \xrightarrow{\xi''_n} X_{n-1} \xrightarrow{\xi_{n-1}} \dots \xrightarrow{\xi_1} X_0 \xrightarrow{\xi_0} A \rightarrow 0. \quad (S_2)$$

По предположению индукции определены морфизмы $D_{S_i}^i: T^i(\text{Im } \xi_n) \rightarrow T^{i+n}(A)$, удовлетворяющие требуемым условиям. Полагаем по определению $D_S^i = D_{S_i}^{i+1} \partial_{S_i}^i$. Остается проверить выполнение условий (а), (б).

Что касается условия (а), заметим сначала, что мы имеем коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow B & \xrightarrow{\beta} & X_n & \xrightarrow{\xi'_n} & \text{Im } \xi_n & \rightarrow & 0 \\
 g \downarrow & & f_n \downarrow & & \downarrow f' & & \\
 0 \rightarrow B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & Y_n & \xrightarrow{\eta_n} & \text{Im } \eta_n & \rightarrow & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 0 \rightarrow \text{Im } \xi_n & \xrightarrow{\xi''_n} & X_{n-1} & \xrightarrow{\xi_{n-1}} & \dots & \xrightarrow{\xi_1} & X_0 & \xrightarrow{\xi_0} & A & \rightarrow & 0 \\
 f' \downarrow & & f_{n-1} \downarrow & & & & f_0 \downarrow & & \downarrow f & & \\
 0 \rightarrow \text{Im } \eta_n & \xrightarrow{\eta''_n} & Y_{n-1} & \xrightarrow{\eta_{n-1}} & \dots & \xrightarrow{\eta_1} & Y_0 & \xrightarrow{\eta_0} & A_1 & \rightarrow & 0
 \end{array}$$

Это влечет коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccccc}
 T^i(B) & \xrightarrow{\partial_{S_1}^i} & T^{i+1}(\text{Im } \xi_n) & \xrightarrow{D_{S_2}^{i+1}} & T^{i+1+n}(A) \\
 \uparrow T^i(g) & & \uparrow T^{i+1}(f') & & \uparrow T^{i+1+n}(f) \\
 T^i(B_1) & \xrightarrow{\partial_{U_1}^i} & T^{i+1}(\text{Im } \eta_n) & \xrightarrow{D_{U_1}^{i+1}} & T^{i+1+n}(A_1)
 \end{array}$$

а отсюда непосредственно следует коммутативность диаграммы предложения.

Из выполнения условия (б) для $n=0$ непосредственно следует по индукции, что D_S^i — изоморфизмы для всех $i > 0$. В случае $i=0$ имеем точную последовательность

$$T^0(X_n) \rightarrow T^0(B) \xrightarrow{\partial_{S_1}^0} T^1(\text{Im } \xi_n) \rightarrow 0$$

и изоморфизм $D_{S_2}^1: T^1(\text{Im } \xi_n) \rightarrow T^{n+1}(A)$, очевидно и дающие нам точную последовательность предложения.

Выполнение условия (в) очевидно.

О п р е д е л е н и е. Пусть (T^i, ∂_E^i) — функтор гомологии или когомологии. Объект A называется T -ациклическим, если $T^i(A) = 0$ для всех $i \geq 1$.

Следующее предложение показывает, что если (T^i, ∂_E^i) — функтор гомологии или когомологии, то для определения объектов $T^i(A)$ можно вместо проективных или инъективных точных резольвент воспользоваться T -ациклическими точными резольвентами. Имея в виду применения к теории пучков, установим это для случая ковариантных функторов когомологии.

Предложение 7.18. Пусть (T^i, d_E^i) — универсальный ковариантный функтор когомологии, A — произвольный объект и (X, e) — его точная резольвента, в которой X_i T -ациклически для всех i . При этих предположениях для всех i существует изоморфизм $T^i(A) \approx H^i(T^0(X))$.

Доказательство. Пусть $Z^i(X)$ — i -мерные циклы комплекса X . Имеем следующую точную последовательность:

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{e} X_0 \xrightarrow{\zeta_0} \dots \xrightarrow{\zeta_{i-1}} X_{i-1} \xrightarrow{\zeta'_i} Z^i(X) \rightarrow 0. \quad (\xi_i)$$

Согласно предложению 7.17, получаем точную последовательность

$$T^0(X_{i-1}) \xrightarrow{T^0(\zeta'_i)} T^0(Z^i(X)) \xrightarrow{D_{\zeta_i}^0} T^i(A) \rightarrow 0.$$

Другими словами, $T^i(A) \approx T^0(Z^i(X))/\text{Im } T^0(\zeta'_i)$. Но так как функтор T^0 точен слева, то $T^0(Z^i(X)) = Z^i(T^0(X))$. С другой стороны, пусть ζ''_i — канонический мономорфизм $Z^i(X)$ в X_i ; из того что T^0 точен слева, вытекает, что $T^0(\zeta''_i)$ — мономорфизм. Поскольку $\zeta_i = \zeta''_i \zeta'_i$, а значит $T^0(\zeta_i) = T^0(\zeta''_i) T^0(\zeta'_i)$, имеем $\text{Im } T^0(\zeta_i) = \text{Im } T^0(\zeta'_i)$, и утверждаемое соотношение доказано.

Следующее предложение доставляет простой способ получения некоторых классов T -ациклических объектов.

Предложение 7.19. Пусть (T^i, d_E^i) — универсальный ковариантный функтор когомологии из категории $\mathcal{C}$, имеющей достаточно много инъективных объектов, в категорию $\mathcal{C}'$. Пусть, далее, $\mathcal{M}$ — класс объектов категории $\mathcal{C}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1. Для каждого объекта A из $\mathcal{C}$ существует по крайней мере один морфизм в объект из $\mathcal{M}$.
2. Каждый объект категории $\mathcal{C}$, изоморфный прямому слагаемому какого-либо объекта M из $\mathcal{M}$, есть объект из $\mathcal{M}$.
3. Если

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

— точная последовательность в $\mathcal{C}$ и $M, M' \in \mathcal{M}$, то $M'' \in \mathcal{M}$ и последовательность

$$0 \rightarrow T^0(M') \rightarrow T^0(M) \rightarrow T^0(M'') \rightarrow 0$$

точна.

При этих предположениях каждый инъективный объект категории $\mathcal{C}$ принадлежит классу $\mathcal{M}$ и каждый объект из $\mathcal{M}$ T -ацикличесок.

Доказательство. Пусть Q — инъективный объект категории $\mathcal{C}$ и $\alpha: Q \rightarrow M$ — его мономорфизм в объект класса $\mathcal{M}$. Тогда Q

является прямым слагаемым объекта M и потому в силу условия 2 принадлежит классу $\mathcal{M}$.

Пусть теперь M — произвольный объект из $\mathcal{M}$ и

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\mu} L^0 \xrightarrow{\lambda^0} L^1 \xrightarrow{\lambda^1} L^2 \rightarrow \dots \rightarrow L^i \xrightarrow{\lambda^i} \dots$$

— его точная инъективная резольвента. Для доказательства T -ацикличности объекта M достаточно доказать, что последовательность

$$0 \rightarrow T^0(M) \rightarrow T^0(L^0) \rightarrow T^0(L^1) \rightarrow \dots \quad (15)$$

точна. Мы покажем по индукции, что $Z^i(L)$ — объект из $\mathcal{M}$ и последовательность (15) точна в $T^0(L^i)$. Случай $i=0$ очевиден. Так как по предположению индукции $Z^{i-1}(L) \in \mathcal{M}$, то из точной последовательности

$$0 \rightarrow Z^{i-1}(L) \rightarrow L^{i-1} \rightarrow Z^i(L) \rightarrow 0$$

вытекает, что $Z^i(L) \in \mathcal{M}$ и последовательность

$$0 \rightarrow T^0(Z^{i-1}(L)) \rightarrow T^0(L^{i-1}) \rightarrow T^0(Z^i(L)) \rightarrow 0$$

также точна. Аналогично последовательности

$$0 \rightarrow T^0(Z^i(L)) \rightarrow T^0(L^i) \rightarrow T^0(Z^{i+1}(L)) \rightarrow 0$$

и

$$0 \rightarrow T^0(Z^{i+1}(L)) \rightarrow T^0(L^{i+1}) \rightarrow T^0(Z^{i+2}(L)) \rightarrow 0$$

точные, откуда, очевидно, вытекает точность последовательности (15) в $T^0(L^i)$.

§ 7. Примеры функторов гомологии и когомологии

Пример 1. Функторы $\text{Ext}_\mathcal{C}^i$

Пусть $\mathcal{C}$ — абелева категория, в которой имеется достаточно много инъективных объектов, и A — фиксированный объект из $\mathcal{C}$. Рассмотрим функтор $\text{Hom}_\mathcal{C}(A, \cdot): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}\mathcal{B}$. Он ковариантен и точен слева. Согласно следствию 7.8 существует единственный универсальный функтор когомологии (T_A^i, ∂_A^i) , для которого $T_A^0 = \text{Hom}_\mathcal{C}(A, \cdot)$. При этом T_A^i — правые производные функторы функтора $\text{Hom}_\mathcal{C}(A, \cdot)$. Будем для каждого объекта B категории $\mathcal{C}$ писать $T_A^i(B) = \text{Ext}_\mathcal{C}^i(A, B)$.

Пусть теперь B — фиксированный элемент категории $\mathcal{C}$ и $u \in \text{Hom}_\mathcal{C}(A_1, A)$. Определим морфизм

$$\text{Ext}_\mathcal{C}^i(u, B): \text{Ext}_\mathcal{C}^i(A, B) \rightarrow \text{Ext}_\mathcal{C}^i(A_1, B)$$

следующим образом. Рассмотрим каноническую точную инъективную резольвенту (R_B, ϵ_B) объекта B , где

$$R_B = (X_0 \xrightarrow{d_0} X_1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} X_n \xrightarrow{d_n} \dots).$$

$(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X_n), \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, d_n))$ и $(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A_1, X_n), \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A_1, d_n))$ будут комплексами со значениями в категории $\mathcal{A}\mathcal{L}$ абелевых групп и ясно, что u индуцирует вполне определенный морфизм первого комплекса во второй, а потому и вполне определенный морфизм $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(A, B) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(A_1, B)$ для каждого i . Этот морфизм мы и обозначим $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(u, B)$.

Таким образом мы определили последовательность контравариантных функторов из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{A}\mathcal{L}$, очевидно, зависящую от объекта B . Покажем, далее, что для каждой точной последовательности

$$0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0 \quad (\text{E})$$

можно определить морфизм $\delta_E^i: \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(A', B) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(A'', B)$ и получить так контравариантный функтор когомологии. Поскольку резольвента R_B инъективная, последовательность (E) порождает точную последовательность комплексов

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A'', R_B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, R_B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A', R_B) \rightarrow 0$$

в категории абелевых групп. Это, очевидно, и доставляет морфизмы δ_E^i с требуемыми свойствами. В частности, имеем точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A'', B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A', B) \xrightarrow{\delta_E^0} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A'', B) \rightarrow \\ \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, B) \rightarrow \dots \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(A'', B) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(A, B) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(A', B) \xrightarrow{\delta_E^i} \\ \xrightarrow{\delta_E^1} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(A'', B) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Если A — проективный объект категории $\mathcal{C}$, то функтор $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \cdot)$ точен и потому $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(A, B) = 0$ для всех объектов B из $\mathcal{C}$. Это показывает, что если в $\mathcal{C}$ достаточно много проективных объектов, то для каждого фиксированного объекта B последовательность контравариантных функторов $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\cdot, B)$ вместе с морфизмами δ_E^i совпадает с универсальным контравариантным функтором когомологии, ассоциированным с функтором $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, B): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}\mathcal{L}$.

В качестве примера категории, удовлетворяющей указанным условиям, можно указать категорию унитарных правых или левых Λ -модулей над кольцом Λ с единицей. То что в категориях ${}_{\Lambda}\mathcal{C}$

и $\mathcal{C}_\Lambda$ имеется достаточно много инъективных объектов, вытекает из общей теории инъективных объектов, поскольку каждая из этих категорий обладает образующими и удовлетворяет аксиоме АВ5. Но ввиду важности этих категорий, мы привели в главе 6 (предложение 6.5) специальное доказательство для этого случая.

Предположим теперь, что кольцо Λ коммутативно. В этом случае в $\text{Ext}_\Lambda^i(A, B)$ можно естественным образом ввести структуру Λ -модуля. А именно, каждый элемент $\lambda \in \Lambda$ индуцирует эндоморфизм $b \mapsto \lambda b$ Λ -модуля B . Этим определяется функторный морфизм функтора $\text{Hom}_\Lambda(\cdot, B)$ в себя, а тем самым и морфизм функтора когомологии, определяемого последовательностью $\text{Ext}_\Lambda^i(\cdot, B)$, в себя. Легко проверить, что таким образом в абелевых группах $\text{Ext}_\Lambda^i(A, B)$ вводится структура Λ -модуля. Нетрудно также доказать, что она совпадает со структурой, индуцируемой, если отправляться от эндоморфизмов Λ -модуля A , определяемых элементами кольца Λ .

Пример 2. Функторы Tor_i^Λ

Пусть Λ — кольцо с единицей и ${}_\Lambda\mathcal{C}$ — категория унитарных левых Λ -модулей. В категории ${}_\Lambda\mathcal{C}$ достаточно много проективных объектов. Пусть A — фиксированный правый Λ -модуль и $F_A: {}_\Lambda\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ — функтор, относящий каждому левому Λ -модулю B абелеву группу $A \otimes B$ ¹⁾. Это ковариантный функтор, точный справа. По следствию 7.14 существует единственный универсальный ковариантный функтор гомотопии (T_A^i, ∂_E^i) , такой, что $T_A^0 = F_A$. Для него принято обозначение $T_A^i(B) = \text{Tor}_i^\Lambda(A, B)$. Разумеется, T_A^i — левые производные функторы функтора F_A .

Пример 3. Когомология топологических пространств

Пусть X — произвольное топологическое пространство. (Никаких аксиом отделимости не предполагается!) Пусть, далее, $\mathcal{C}$ — категория Гротендика. Обозначим через $\mathcal{C}(X)$ абелеву категорию предпучков над X со значениями в $\mathcal{C}$. Очевидно, существует точный ковариантный функтор $\gamma: \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}$, относящий каждому предпучку $\mathcal{F}$ его значение $\mathcal{F}(X)$. Обозначим через $\tilde{\mathcal{C}}(X)$ категорию пучков над X со значениями в категории $\mathcal{C}$; $\tilde{\mathcal{C}}(X)$ есть полная подкатегория категории $\mathcal{C}(X)$ и γ индуцирует точный слева функтор $\Gamma: \tilde{\mathcal{C}}(X) \rightarrow \mathcal{C}$. Это — функтор сечений над всем пространством X . Как уже отмечалось, в категории $\tilde{\mathcal{C}}(X)$ имеется

¹⁾ И каждому морфизму $u: B \rightarrow B_1$ морфизм $1 \otimes u$.

достаточно много инъективных объектов¹⁾. Поэтому существует универсальный ковариантный функтор когомологии (H^i, ∂_E^i) , такой, что $H^0 = \Gamma$. Этот функтор называется *функтором „хорошей когомологии“* пространства X .

Значение функтора H^i на пучке $\mathcal{F}$ обычно обозначается $H^i(X, \mathcal{F})$ и называется *i -мерным объектом когомологии* пространства X со значениями в пучке $\mathcal{F}$; $H^i(X, \mathcal{F})$ есть объект категории $\mathcal{C}$. На практике чаще рассматривают тот частный случай, когда $\mathcal{C}$ — категория правых или левых Λ -модулей над кольцом Λ . В этом случае $H^i(X, \mathcal{F})$ есть Λ -модуль.

Приведем для частного случая, когда $\mathcal{C} = {}_{\Lambda}\mathcal{C}$, доказательство того, что в категории $\tilde{\mathcal{C}}(X)$ имеется достаточно много инъективных объектов, независимое от общей теории инъективных объектов и локализации. При этом мы будем существенно опираться на то, что в категории ${}_{\Lambda}\mathcal{C}$ достаточно много инъективных объектов. Для каждого пучка $\mathcal{F}$ (в данном случае — пучка Λ -модулей) обозначим через $\mathcal{F}_x$ слой пучка $\mathcal{F}$ над точкой $x \in X$; $\mathcal{F}_x$ есть Λ -модуль. Для $s \in \mathcal{F}(U)$ обозначим через $s(x)$ элемент, ассоциированный с x в $\mathcal{F}_x$ (разумеется, $x \in U$). Поскольку в категории Λ -модулей достаточно много инъективных объектов, Λ -модуль $\mathcal{F}_x$ может быть вложен в инъективный Λ -модуль Q_x . Рассмотрим пучок $\mathcal{Q}$, определенный формулой

$$\mathcal{Q}(U) = \prod_{x \in U} Q_x,$$

с очевидным определением сужений. Существует мономорфизм пучка $\mathcal{F}$ в пучок $\mathcal{Q}$, относящий каждому $s \in \mathcal{F}(U)$ семейство $(s(x))_{x \in U}$ в $\mathcal{Q}(U)$. Остается показать, что $\mathcal{Q}$ — инъективный объект категории ${}_{\Lambda}\tilde{\mathcal{C}}(X)$. С этой целью определим для каждого $x \in X$ пучок $\mathcal{L}^x$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^x(U) &= Q_x, \quad \text{если } x \in U, \\ \mathcal{L}^x(U) &= \{0\}, \quad \text{если } x \notin U, \end{aligned}$$

с очевидным определением сужений. Непосредственно (без использования инъективности Λ -модулей Q_x) устанавливается, что $\mathcal{Q} = \prod_{x \in X} \mathcal{L}^x$. Отсюда вытекает, что для каждого пучка $\mathcal{M}$ Λ -модулей имеются канонические изоморфизмы

$$\text{Hom}_{{}_{\Lambda}\tilde{\mathcal{C}}(X)}(\mathcal{M}, \mathcal{Q}) \approx \prod_{x \in X} \text{Hom}_{\Lambda}(\mathcal{M}_x, Q_x).$$

Используя теперь инъективность каждого Λ -модуля Q_x , заключаем, что пучок $\mathcal{Q}$ инъективен.

¹⁾ $\tilde{\mathcal{C}}(X)$ — категория Гротендика.

§ 8. Гомологическая размерность абелевых категорий

Пусть $\mathcal{C}$ — абелева категория. Будем говорить, что *проективная размерность* ее объекта A меньше n , и писать $\text{dp } A \leq n$, если A обладает хотя бы одной точной проективной резольвентой

$$\dots \rightarrow X_i \rightarrow X_{i-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_0 \rightarrow A \rightarrow 0,$$

в которой $X_i = 0$ для всех $i > n$. Если такого n нет, то мы будем говорить, что A имеет бесконечную проективную размерность.

Дуализацией получаем понятие *инъективной размерности* $\text{di } A$ объекта A категории $\mathcal{C}^1$.

Предложение 7.20. Если в категории $\mathcal{C}$ имеется достаточно много проективных объектов, то следующие утверждения равносильны:

(а) $\text{dp } A \leq n$.

(б) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n+1}(A, C) = 0$ для каждого объекта C из $\mathcal{C}$.

(в) Функтор $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A, \cdot)$ точен справа.

(г) Если в точной последовательности

$$0 \rightarrow X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_0 \rightarrow A \rightarrow 0 \quad (\text{S})$$

все объекты X_k с $k < n$ проективны, то и объект X_n проективен.

Доказательство. Импликации (а) $\Rightarrow$ (б) и (б) $\Rightarrow$ (в) очевидны.

(в) $\Rightarrow$ (г). Диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_{n-1}, C) & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_n, C) & \xrightarrow{D_S^0} & \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A, C) & \rightarrow & 0 \\ \xi \downarrow & & \eta \downarrow & & \downarrow \zeta & & \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_{n-1}, C'') & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_n, C'') & \xrightarrow{\bar{D}_S^0} & \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A, C'') & \rightarrow & 0 \end{array}$$

где ξ , η и ζ — морфизмы, индуцированные морфизмом $\gamma: C \rightarrow C''$, коммутативна. В силу предложения 7.17 строки ее точны. Предположим теперь, что γ — эпиморфизм. Достаточно доказать, что η — также эпиморфизм. Но ξ является эпиморфизмом, поскольку объект X_{n-1} по предположению проективен, а ζ — эпиморфизм, поскольку функтор $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A, \cdot)$ согласно предположению (в) точен справа. Следовательно, и η — эпиморфизм.

(г) $\Rightarrow$ (а). Так как в $\mathcal{C}$ достаточно много проективных объектов, то существует точная последовательность вида

$$0 \rightarrow X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow A \rightarrow 0,$$

¹⁾ Под $\text{dp } A$ ($\text{di } A$) понимается наименьшее из целых n , для которых $\text{dp } A \leq n$ ($\text{di } A \leq n$), или $+\infty$, если таких n нет. Очевидно, объект A проективен (инъективен) тогда и только тогда, когда $\text{dp } A = 0$ ($\text{di } A = 0$).

в которой все X_i с $i < n$ проективны. Но в силу (г) это означает, что объект X_n проективен и потому $\text{dp } A \leq n$.

Следствие 7.21. Для того чтобы объект A категории $\mathcal{C}$ был проективен, необходимо и достаточно, чтобы $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(A, Y) = 0$ для каждого объекта Y категории $\mathcal{C}$.

Дуализацией предложения 7.20 и следствия 7.21 получаем

Предложение 7.22. Если в категории $\mathcal{C}$ имеется достаточно много инъективных объектов, то следующие утверждения равносильны:

(а) $\text{di } A \leq n$.

(б) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n+1}(C, A) = 0$ для каждого объекта C из $\mathcal{C}$.

(в) Функтор $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(\cdot, A)$ точен справа.

(г) Если в точной последовательности

$$0 \rightarrow A \rightarrow Y^0 \rightarrow \dots \rightarrow Y^{n-1} \rightarrow Y^n \rightarrow 0$$

все объекты Y^k с $k < n$ инъективны, то и объект Y^n инъективен.

Следствие 7.23. Для того чтобы объект A категории $\mathcal{C}$ был инъективен, необходимо и достаточно, чтобы $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(Y, A) = 0$ для каждого объекта Y категории $\mathcal{C}$.

Определение. Будем говорить, что гомологическая размерность категории $\mathcal{C}$ меньше n , и писать $\text{dh } \mathcal{C} < n$, если $\text{dp } A \leq n$ для каждого объекта A из $\mathcal{C}$.

Если Λ — кольцо с единицей и $\text{dh}_{\Lambda} \mathcal{C} < n$, то мы будем говорить, что левая глобальная гомологическая размерность кольца Λ меньше n , и писать $\text{lgldim } \Lambda < n$. Аналогично определяется правая глобальная гомологическая размерность кольца Λ .

Предложение 7.24. Если в категории $\mathcal{C}$ достаточно много как инъективных, так и проективных объектов, то следующие утверждения равносильны:

(а) $\text{dh } \mathcal{C} < n$.

(б) $\text{dp } A \leq n$ для каждого объекта A из $\mathcal{C}$.

(в) $\text{di } A \leq n$ для каждого объекта A из $\mathcal{C}$.

(г) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(X, Y) = 0$ для каждого $k > n$ и каждой пары (X, Y) объектов из $\mathcal{C}$.

(д) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n+1}(X, Y) = 0$ для каждой пары (X, Y) объектов из $\mathcal{C}$.

Доказательство. Равносильность утверждений (а) и (б) вытекает из определения $\text{dh } \mathcal{C}$; равносильность (б) и (в) — из предложений 7.20 (а) — (б) и 7.22 (а) — (б); равносильность (в) и (г) — из предложений 7.22 (а) — (б), а равносильность (г) и (д) очевидна.

Предложение 7.25. В категории Гротендика $\mathcal{C}$ следующие утверждения равносильны:

(а) $\text{di } A \leq n$.

(б) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\Lambda/a, A) = 0$ для каждого $i \geq n+1$ и каждого под-объекта a образующей Λ .

Доказательство. Импликация (а) $\Rightarrow$ (б) очевидна. Доказательство импликации (б) $\Rightarrow$ (а) проведем индукцией по n . Рассмотрим сначала случай $n=0$. Нужно доказать, что если $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\Lambda/a, A) = 0$ для каждого подобъекта a образующей Λ , то A — инъективный объект. Для этого достаточно доказать, что морфизм

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\Lambda, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, A),$$

индуцируемый вложением a в Λ , есть эпиморфизм¹⁾. Но это непосредственно следует из рассмотрения точной последовательности

$$0 \rightarrow a \rightarrow \Lambda \rightarrow \Lambda/a \rightarrow 0$$

и ассоциированной точной последовательности

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\Lambda/a, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\Lambda, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, A) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\Lambda/a, A),$$

как раз и доставляющей в силу сделанного предположения требуемый результат.

Пусть теперь $n \geq 1$. Вкладывая A в инъективный объект Q ²⁾, получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow A \rightarrow Q \rightarrow Q/A \rightarrow 0,$$

откуда следует, что $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(X, Q/A) \approx \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(X, A)$ для каждого объекта X из $\mathcal{C}$. В частности $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\Lambda/a, Q/A) = 0$ для всех $i \geq n$ и каждого подобъекта a образующей Λ . По предположению индукции тогда $\text{di}(Q/A) \leq n-1$. Но, очевидно, $\text{di} A = \text{di}(Q/A) + 1$, и предложение доказано.

Следствие 7.26. Если Λ — кольцо с единицей, то $\text{lgldim } \Lambda = \sup \text{dp } M$, где M пробегает класс всех моноидных Λ -модулей.

Доказательство. Для каждой пары (M, N) Λ -модулей обозначим через $d(M, N)$ верхнюю грань множества чисел p , для которых $\text{Ext}_{\Lambda}^p(M, N) \neq 0$. По предложению 7.24³⁾ имеем

$$\text{lgldim } \Lambda = \sup_{M, N} d(M, N) = \sup_N (\sup_M d(M, N)) = \sup_N \text{di } N. \quad (16)$$

С другой стороны, поскольку Λ — образующая категории $_{\Lambda}\mathcal{C}$ и к этой категории применимо предложение 7.25, имеем

$$\text{di } N = \sup_{M'} d(M', N), \quad (17)$$

где M' пробегает класс всех моноидных Λ -модулей. Из соотношений (16) и (17) заключаем, что

$$\text{lgldim } \Lambda = \sup_N (\sup_{M'} d(M', N)) = \sup_{M'} (\sup_N d(M', N)) = \sup_{M'} \text{dp } M'.$$

¹⁾ См. А. Гротендик [1], русское издание, лемма 1 на стр. 30.

²⁾ См. следствие 6.32.

³⁾ И 7.22.

§ 9. Минимальные проективные резольвенты

Понятие проективной оболочки дуально понятию инъективной оболочки. Мы будем пользоваться следующим определением, очевидно, равносильным данному раньше ¹⁾.

Определение. Эпиморфизм $P \xrightarrow{\varphi} Q$ называется *проективной оболочкой* объекта Q , если выполнены следующие условия:

- (а) P — проективный объект.
- (б) Если P' — подобъект объекта P , такой, что сужение φ на P' — также эпиморфизм, то $P' = P$.

Может случиться, что в категории $\mathcal{C}$ имеется достаточно много проективных объектов и тем не менее в $\mathcal{C}$ существует объект, не обладающий проективной оболочкой.

Пример. Объект Z_2 категории $\mathcal{C} = \mathcal{A}\ell$ не обладает проективной оболочкой.

Ниже будут указаны примеры категорий, в которых каждый объект обладает хотя бы одной проективной оболочкой.

Предложение 7.27. Если $\varphi: P \rightarrow Q$ — проективная оболочка объекта Q , $\varphi_1: P_1 \rightarrow Q$ — эпиморфизм и P_1 — проективный объект, то существует эпиморфизм $\chi: P_1 \rightarrow P$, такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\varphi} & Q \\ \uparrow \chi & \nearrow \varphi_1 & \\ P_1 & & \end{array} \quad (18)$$

коммутативна.

Доказательство. Существование морфизма χ , для которого диаграмма (18) коммутативна, вытекает из проективности объекта P_1 . Так как φ_1 — эпиморфизм, то $\text{Im } \chi = P$, ибо в противном случае не выполнялось бы условие (б).

Предложение 7.28. Если $P_1 \xrightarrow{\varphi_1} Q$ и $P_2 \xrightarrow{\varphi_2} Q$ — две проективные оболочки объекта Q , то существует изоморфизм $\chi: P_1 \rightarrow P_2$, такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \searrow \varphi_1 & Q \\ \downarrow \chi & & \nearrow \varphi_2 \\ P_2 & & \end{array} \quad (19)$$

коммутативна.

Доказательство. По предложению 7.27 существует эпиморфизм χ , для которого диаграмма (19) коммутативна.

¹⁾ См. определение существенного эпиморфизма в § 2 гл. 6.

Докажем, что χ — изоморфизм. Последовательность

$$0 \rightarrow \text{Ker } \chi \rightarrow P_1 \xrightarrow{\chi} P_2 \rightarrow 0$$

точна. Поскольку P_2 — проективный объект, отсюда следует, что $P_1 = P_2 \oplus \text{Ker } \chi$. А так как P_1 — проективная оболочка объекта Q , то заключаем, что $\text{Ker } \chi = 0$ ¹⁾, т. е. χ — мономорфизм.

Следствие 7.29. Если $\alpha: Q_1 \rightarrow Q_2$ — изоморфизм, $\varphi_1: P_1 \rightarrow Q_1$ — проективная оболочка объекта Q_1 и $\varphi_2: P_2 \rightarrow Q_2$ — проективная оболочка объекта Q_2 , то существует изоморфизм $\chi: P_1 \rightarrow P_2$, такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & Q_1 \\ \chi \downarrow & & \downarrow \alpha \\ P_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & Q_2 \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство. Достаточно заметить, что $\alpha\varphi_1: P_1 \rightarrow Q_2$ есть проективная оболочка объекта Q_2 .

Замечание. Изоморфизм χ вообще говоря не определяется изоморфизмом α однозначно.

Определение. Резольвента

$$\dots \xrightarrow{d_{n+1}} X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots \xrightarrow{d_2} X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{e} Q \rightarrow 0$$

называется *минимальной проективной резольвентой*, если

- (а) $X_0 \xrightarrow{e} Q$ есть проективная оболочка объекта Q ;
- (б) канонические эпиморфизмы

$$X_n \rightarrow \text{Im } d_n \quad (n \geq 1)$$

являются проективными оболочками.

Предложение 7.30. Две минимальные проективные резольвенты одного и того же объекта изоморфны.

Доказательство получается непосредственным применением предложения 7.28²⁾.

Ясно, что могут существовать объекты, у которых нет минимальной проективной резольвенты. Очевидно также, что если каждый объект обладает проективной оболочкой, то каждый объект имеет хотя бы одну проективную резольвенту.

¹⁾ Пусть ψ — каноническая инъекция P_2 в P_1 , так что $\chi\psi = 1_{P_2}$. Тогда $\varphi_1\psi = \varphi_2\chi\psi = \varphi_2$ и тем самым $\varphi_1\psi$ — эпиморфизм. Так как $\varphi_1: P_1 \rightarrow Q$ — проективная оболочка, а ψ — мономорфизм, то отсюда следует, что ψ — также эпиморфизм. А это и означает, что $\text{Ker } \chi = 0$.

²⁾ И следствия 7.29.

Примеры категорий, каждый объект которых обладает хотя бы одной проективной оболочкой

1. Пусть Λ — локальное кольцо, не обязательно коммутативное, однако нётерово, и $\mathfrak{m}$ — его (единственный) максимальный идеал. Как обычно, ${}_{\Lambda}\mathcal{C}$ будет обозначать категорию левых Λ -модулей. Через ${}_{\Lambda}\mathcal{C}'$ обозначим полную подкатегорию категории ${}_{\Lambda}\mathcal{C}$, образованную Λ -модулями конечного типа.

Предложение 7.31. *В категории ${}_{\Lambda}\mathcal{C}'$ каждый объект обладает хотя бы одной проективной оболочкой.*

Доказательство. Пусть M — Λ -модуль конечного типа и $k = \Lambda/\mathfrak{m}$. k — поле. $M/\mathfrak{m}M$ обладает естественной структурой конечномерного векторного пространства над k . Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — его базис, а $y_1, y_2, \dots, y_n \in M$ таковы, что $e_i = y_i \bmod \mathfrak{m}M$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Семейство $y_1, y_2, \dots, y_n$ есть система образующих модуля M (лемма Накаямы). Пусть $\Lambda^{(n)}$ — свободный Λ -модуль, порожденный семейством элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$, и $\varphi: \Lambda^{(n)} \rightarrow M$ — гомоморфизм, определяемый равенствами

$$\varphi(x_i) = y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ясно, что φ — эпиморфизм, а модуль $\Lambda^{(n)}$ проективен. Пусть теперь Γ — подмодуль модуля $\Lambda^{(n)}$, такой, что $\varphi(\Gamma) = M$. Покажем, что $\Gamma = \Lambda^{(n)}$. Заметим прежде всего, что морфизм $\bar{\varphi}$ в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^{(n)} & \xrightarrow{\varphi} & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda^{(n)}/\mathfrak{m}\Lambda^{(n)} & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & M/\mathfrak{m}M \end{array}$$

есть изоморфизм. Отсюда следует, что в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{\gamma} & \Lambda^{(n)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma/\mathfrak{m}\Gamma & \xrightarrow{\bar{\gamma}} & \Lambda^{(n)}/\mathfrak{m}\Lambda^{(n)} \end{array}$$

(где γ — каноническое вложение) морфизм $\bar{\gamma}$ есть изоморфизм. В частности композиция $\Gamma \xrightarrow{\gamma} \Lambda^{(n)} \rightarrow \Lambda^{(n)}/\mathfrak{m}\Lambda^{(n)}$ эпиморфна. Поэтому

$$\mathfrak{m}\Lambda^{(n)} + \Gamma = \Lambda^{(n)}$$

и, следовательно, по лемме Накаямы, $\Gamma = \Lambda^{(n)}$.

Из доказательства предложения 7.31 в сочетании с предложением 7.30 явствует справедливость следующего предложения:

Предложение 7.32. Для того чтобы морфизм $\varphi: P \rightarrow Q$ категории $\Lambda \mathcal{C}'$ был проективной оболочкой объекта Q , необходимо и достаточно, чтобы

- (а) объект P был проективен;
- (б) гомоморфизм $\bar{\varphi}: P/mP \rightarrow Q/mQ$ был изоморфизмом.

Предложение 7.33. Пусть

$$X = (\dots \rightarrow X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{e} Q \rightarrow 0)$$

— минимальная проективная резольвента левого Λ -модуля Q конечного типа. Тогда все дифференциалы комплекса

$$X/mX = (\dots \rightarrow X_n/mX_n \xrightarrow{\bar{d}_n} X_{n-1}/mX_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_1/mX_1 \xrightarrow{\bar{d}_1} X_0/mX_0)$$

нулевые.

Доказательство. Из предположения следует, что морфизм $d_n: X_n \rightarrow X_{n-1}$ допускает разложение на существенный эпиморфизм $f: X_n \rightarrow Z_{n-1}$ и мономорфизм $g: Z_{n-1} \rightarrow X_{n-1}$. Достаточно доказать, что равен нулю морфизм

$$\bar{g}: Z_{n-1}/mZ_{n-1} \rightarrow X_{n-1}/mX_{n-1}.$$

Но композиция

$$Z_{n-1}/mZ_{n-1} \rightarrow X_{n-1}/mX_{n-1} \rightarrow Z_{n-2}/mZ_{n-2}$$

равна нулю. Так как $X_{n-1} \rightarrow Z_{n-2}$ — проективная оболочка, то в силу предложения 7.32 второй морфизм этой последовательности есть изоморфизм. А тогда $\bar{g} = 0$, и предложение доказано.

Пусть Λ — (нётерово) локальное кольцо, $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал и $k = \Lambda/\mathfrak{m}$.

Предложение 7.34. Если

$$X = (\dots \rightarrow X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{e} Q \rightarrow 0)$$

— минимальная проективная резольвента левого Λ -модуля Q конечного типа, то имеют место изоморфизмы

- I) $\text{Tor}_i^\Lambda(k, Q) \approx X_i/mX_i$,
- II) $\text{Ext}_\Lambda^i(Q, k) \approx \text{Hom}_k(\text{Tor}_i^\Lambda(k, Q), k)$.

Доказательство. $\text{Tor}_i^\Lambda(k, Q) \approx H_i(X \otimes_\Lambda k) \approx H_i(X/mX)$.

А так как по предложению 7.33 все дифференциалы комплекса X/mX нулевые, то $H_i(X/mX) \approx X_i/mX_i$. Далее,

$$\begin{aligned} \text{Ext}_\Lambda^i(Q, k) &\approx H^i(\text{Hom}_\Lambda(X, k)) \approx H^i(\text{Hom}_\Lambda(X/mX, k)) \approx \\ &\approx \text{Hom}(X_i/mX_i, k) \approx \text{Hom}_k(X_i/mX_i, k) \approx \text{Hom}_k(\text{Tor}_i^\Lambda(k, Q), k). \end{aligned}$$

Определение. Пусть M — левый A -модуль и n — целое число ≥ 0 . Будем говорить, что *слабая гомологическая размерность* модуля M меньше n , и писать $\text{wdh}_A M \leq n$, если, каков бы ни был правый A -модуль N ,

$$\text{Tor}(N, M) = 0 \text{ для всех } m > n.$$

Предложение 7.35. Если Λ — локальное кольцо и M — левый Λ -модуль конечного типа, то

$$\text{wdh}_\Lambda M = \text{dp } M.$$

Доказательство. Пусть

$$\dots \rightarrow P_n \xrightarrow{d_n} \dots \rightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P \xrightarrow{i} M \rightarrow 0$$

— минимальная проективная резольвента модуля M и предположим, что $\text{Tor}_{n+i}(L, M) = 0$ для каждого $i > 0$ и каждого правого Λ -модуля L . Покажем, что $P_{n+i} = 0$ для всех $i > 0$, т. е. $\text{dp } M \leq n$. Действительно (предложение 7.34), имеют место соотношения

$$0 = \text{Tor}_{n+i}(k, M) \approx P_{n+i}/\mathfrak{m}P_{n+i} \quad (i > 0).$$

Поэтому $P_{n+i} = \mathfrak{m}P_{n+i}$ и, следовательно (лемма Накаямы), $P_{n+i} = 0$. Тем самым доказано неравенство $\text{dp } M \leq \text{wdh } M$. Обратное неравенство очевидно.

§ 10. Относительная гомологическая алгебра

Рассмотрим следующий классический пример.

Пусть $\varphi: \Lambda \rightarrow \Gamma$ — гомоморфизм колец с единицей. Ему отвечает функтор $\varphi_*: \Gamma\mathcal{C} \rightarrow \Lambda\mathcal{C}^1$. Согласно сказанному в главе 6 φ_* обладает правым и левым сопряженными функторами²⁾. Будем называть мономорфизм $i: X \rightarrow Y$ в $\Gamma\mathcal{C}$ *φ -расщепляющим*, если $\varphi_*(i)$ вкладывает $\varphi_*(X)$ в $\varphi_*(Y)$ как прямое слагаемое. Обозначим через $\mathcal{T}$ класс всех φ -расщепляющих мономорфизмов в $\Gamma\mathcal{C}$ и через $\mathcal{P}(\mathcal{T})$ — класс всех эпиморфизмов $p: X \rightarrow Y$ в $\Gamma\mathcal{C}$, ядро ко-

¹⁾ Пусть Γ_Λ — кольцо Γ , наделенное помимо своей обычной структуры левого Γ -модуля также структурой правого Λ -модуля по формуле $\gamma \cdot \lambda = \gamma\varphi(\lambda)$. Под φ_* , по-видимому, понимается функтор, относящий каждому Λ -модулю X тензорное произведение $\Gamma_\Lambda \otimes_\Lambda X$, наделенное структурой левого Γ -модуля, определяемой произведением $\gamma(z \otimes x) = (\gamma z) \otimes x$, и каждому морфизму $\alpha: X \rightarrow Y$ морфизм $\varphi_*(\alpha) = 1_\Gamma \otimes \alpha$.

²⁾ Легко видеть, что функтор φ_* , описанный в предыдущем примечании, изоморфен функтору F , рассмотренному на стр. 146, и потому обладает правым сопряженным. Левым сопряженным к φ_* служит функтор, относящий каждому левому Γ -модулю Y аддитивную группу $\text{Hom}_\Gamma(\Gamma_\Lambda, Y)$, наделенную структурой левого Λ -модуля, определяемой умножением, задаваемым для каждого $f \in \text{Hom}_\Gamma(\Gamma_\Lambda, Y)$ и каждого $\lambda \in \Lambda$ формулой $(\lambda f)(\gamma) = f(\gamma\varphi(\lambda))$, и естественно определенный на морфизмах.

торых принадлежит $\mathcal{T}$. Легко видеть, что $\mathcal{T}$ и $\mathcal{P}(\mathcal{T})$ обладают следующими свойствами:

- (I) $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{P}(\mathcal{T}))^1$.
- (II) Если $pi = 1_X$, то $i \in \mathcal{T}$ (а потому также $p \in \mathcal{P}(\mathcal{T})$).
- (III) Если $\alpha, \beta \in \mathcal{T}$ и $\alpha\beta$ определено, то $\alpha\beta \in \mathcal{T}$.
- (III') Если $\gamma, \delta \in \mathcal{P}(\mathcal{T})$ и $\gamma\delta$ определено, то $\gamma\delta \in \mathcal{P}(\mathcal{T})$.
- (IV) Если α, β — мономорфизмы, то $\alpha\beta \in \mathcal{T}$ влечет $\beta \in \mathcal{T}$.
- (IV') Если γ, δ — эпиморфизмы и $\gamma\delta \in \mathcal{P}(\mathcal{T})$, то $\gamma \in \mathcal{P}(\mathcal{T})$.

В том же духе можно говорить о следующих относительных понятиях, соотнесенных классу $\mathcal{T}$ или тройке $(\mathcal{F}, \Lambda, \Gamma)$. Объект P из $\mathcal{C}$ называется $\mathcal{T}$ -проективным (т. е. проективным относительно $\mathcal{T}$), если для каждой диаграммы

$$\begin{array}{c} P \\ \downarrow g \\ A \xrightarrow{p} A'' \rightarrow 0 \end{array}$$

в которой строка точна, а $p \in \mathcal{P}(\mathcal{T})$, существует морфизм $f: P \rightarrow A$, такой, что $pf = g$. Таким образом можно для данного функтора строить производные функторы, используя $\mathcal{T}$ -проективные ($\mathcal{T}$ -инъективные) резольвенты.

Другой метод был развит в монографии Маклейна [9], гл. 9, §§ 6 и 8.

Не входя в детали, покажем только, что относительная гомологическая алгебра допускает сведение к „абсолютной“.

Для этого проведем следующие рассуждения.

Пусть $\mathcal{C}$ — малая абелева категория. Предположим, что в $\mathcal{C}$ задан некоторый класс $\mathcal{T}$ мономорфизмов. Ассоциируем с ним класс $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{T})$ всех эпиморфизмов, являющихся коядрами мономорфизмов из $\mathcal{T}$. Обозначим через $\mathcal{M}$ класс всех морфизмов u из $\mathcal{C}$, допускающих разложение $u = u''u'$, где $u' \in \mathcal{P}$, $u'' \in \mathcal{T}$. Допустим, что выполнены следующие условия:

- (I) $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{P}(\mathcal{T}))^1$.
- (II) Если $pi = 1_A$, то $i \in \mathcal{T}$.
- (III) Если $\alpha, \beta \in \mathcal{T}$ и $\alpha\beta$ определено, то $\alpha\beta \in \mathcal{T}$.
- (III') Если $\gamma, \delta \in \mathcal{P}(\mathcal{T})$ и $\gamma\delta$ определено, то $\gamma\delta \in \mathcal{P}(\mathcal{T})$.
- (IV) Если α, β — мономорфизмы и $\alpha\beta \in \mathcal{T}$, то $\beta \in \mathcal{T}$.
- (IV') Если γ, δ — эпиморфизмы и $\gamma\delta \in \mathcal{P}(\mathcal{T})$, то $\gamma \in \mathcal{P}(\mathcal{T})$.

Определим с помощью класса $\mathcal{T}$ топологию Гротендика τ в $\mathcal{C}$, „менее сильную“ чем каноническая (гл. 5, § 10), следующим образом. Будем называть морфизм $p: A \rightarrow X$ из $\mathcal{C}$ *накрывающим*,

¹⁾ По-видимому, под $\mathcal{T}(\mathcal{C})$, где $\mathcal{C}$ — класс эпиморфизмов, понимается здесь класс их ядер

если $p \in \mathcal{P}(\mathcal{T})$. Используя свойства класса $\mathcal{T}$, читатель может проверить, что если для каждого объекта X из $\mathcal{C}$ определить $\text{Cov } X$ как множество всех пар (A, p) , где $p: A \rightarrow X$ — накрывающий морфизм, то получится некоторая топология Гротендика τ на $\mathcal{C}$ (см. гл. 2, § 3).

Обозначим через $\mathcal{C}^\Lambda$ категорию $\text{Funct}(\mathcal{C}^\circ, \mathcal{A})$, образованную всеми контравариантными аддитивными функторами из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{A}$, и через $h: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^\Lambda$ — канонический функтор (гл. 5, § 10). Далее, обозначим через $\bar{\mathcal{C}}$ категорию пучков относительно топологии Гротендика τ и через $S: \bar{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}^\Lambda$ — функтор вложения. Воспроизводя построение, проведенное в § 10 главы 5, мы получим точный функтор $R: \mathcal{C}^\Lambda \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$, являющийся правым сопряженным к функтору S . Это выполняется следующим образом. Пусть F — объект из $\mathcal{C}^\Lambda$ и X — объект из $\mathcal{C}$. Для каждого $(A, p) \in \text{Cov } X$ рассматриваем точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Ker } p \rightarrow A \xrightarrow{p} X \rightarrow 0.$$

Она порождает коммутативную диаграмму с точной строкой

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightarrow & F(A, p) & \rightarrow & F(A) \rightarrow F(\text{Ker } p) \\ & & \nwarrow & & \nearrow \\ & & F(X, p) & & F(p) \\ & & & \searrow & \nearrow \\ & & & & F(X) \end{array}$$

Соответствие $X \mapsto \lim_{(A, p) \in \text{Cov } X} F(A, p)$ определяет точный слева аддитивный функтор $H: \mathcal{C}^\Lambda \rightarrow \mathcal{C}^\Lambda$. Тогда к рассматриваемой ситуации применимы, с надлежащими изменениями, предложения 5.36 и 5.37.

Функтор $R \circ h$ не точен, однако справедливо следующее

Предложение 7.34. Если последовательность

$$0 \rightarrow A' \xrightarrow{\alpha'} A \xrightarrow{\alpha''} A'' \rightarrow 0$$

в $\mathcal{C}$ точна и $\alpha'' \in \mathcal{P}$, то последовательность

$$0 \rightarrow R(h(A')) \xrightarrow{R(h(\alpha'))} R(h(A)) \xrightarrow{R(h(\alpha''))} R(h(A'')) \rightarrow 0$$

точна в $\bar{\mathcal{C}}$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что, как это непосредственно следует из определения $\text{Cov } X$, каждый точный слева функтор из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{A}$ является пучком в топологии τ . Таким образом, остается доказать, что $(R(h(A'')), R(h(\alpha'')))$ есть ядро для $R(h(\alpha'))$. Пусть F — произвольный объект из $\bar{\mathcal{C}}$ и $\varphi: R(h(A)) \rightarrow F$ — морфизм, для которого $\varphi \circ R(h(\alpha')) = 0$. Существует $\xi \in F(A)$, такое, что для любого морфизма $u: X \rightarrow A$ из $\mathcal{C}$

имеем

$$\varphi(X)(u) = F(u)(\xi).$$

Действительно, согласно сделанному выше замечанию, функтор $R(h(A))$ изоморфен h_A , и ξ доставляется теоремой 1.6. Таким образом, для каждого морфизма $v: X \rightarrow A'$ имеем $F(\alpha'v)(\xi) = 0$. Из канонически построенной коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A \amalg_{A''} A & \xrightarrow{p_1} & A \\ \downarrow p_2 & & \downarrow \alpha'' \\ A & \xrightarrow{\alpha''} & A'' \end{array}$$

поскольку F — пучок, получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow F(A'') \rightarrow F(A) \xrightarrow{F(p_1) - F(p_2)} F(A \amalg_{A''} A).$$

Мы утверждаем, что $F(p_1)\xi = F(p_2)(\xi)$. В самом деле, согласно конструкции расслоенного произведения имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow A \amalg_{A''} A \xrightarrow{\mu} A \amalg A \xrightarrow{\alpha''(\pi_1 - \pi_2)} A'',$$

где π_1 и π_2 — канонические проекции и $p_i = \pi_i \mu$ ($i = 1, 2$). Отсюда следует, что $p_1 - p_2$ пропускается через α' , ибо $\alpha''(p_1 - p_2) = 0$. Поэтому $p_1 - p_2 = \alpha'v$, где $v: X \rightarrow A'$. Таким образом, существует $\xi'' \in F(A'')$, такое, что $F(\alpha'')(\xi'') = \xi'$.

Поскольку функтор $R(h(A''))$ представим, заключаем, что ξ'' определяет функторный морфизм $\psi: R(h(A'')) \rightarrow F$, такой, что $\psi \circ R(h(\alpha'')) = \varphi$. Из построения следует, что ψ единствен.

З а м е ч а н и е. Можно показать, что каждый $\mathcal{T}$ -проективный объект категории $\mathcal{C}$ становится проективным в категории пучков.

БИБЛИОГРАФИЯ

S. A. Amitsur

1. Derived functors in Abelian categories, *J. Math. Mech.*, **10** (1961), 971—994.

E. F. Assmus, Jr.

1. On the homology of local rings, *Ill. J. Math.*, **3** (1959), 187—199.

M. F. Atiyah

1. On the Krull — Schmidt theorem with application to sheaves, *Bull. Soc. Math. France*, **84** (1956), 307—317.
2. Characters and cohomology of finite groups, *Pub. Math.*, No 9, Inst. Hautes Études, Paris.

M. Auslander

1. On the dimension of modules and algebras. III, *Nagoya Math. J.*, **9** (1955), 67—77.

M. Auslander, D. A. Buchsbaum

1. Homological dimension in Noetherian rings, *Proc. NAS USA*, **42** (1955), No 9, 36—38.
2. Homological dimension in local rings, *Trans. AMS*, **85** (1957), 390—405.
3. Homological dimension in Noetherian rings. II, *Trans. AMS*, **88** (1968), 194—206.
4. Codimension and multiplicity, *Ann. Math.*, **68** (1958), 625—657.
5. Unique factorization in regular local rings, *Proc. NAS USA*, **45** (1959), 733—734.

H. Bass

1. Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings, *Trans. AMS*, **95** (1960), 466—488.

C. Bănică, N. Popescu

1. Sur l'exactitude des foncteurs, *Bull. Soc. Math. Phys. R. P. R.* (1963), 3—8.

I. Bernstein, P. J. Hilton

1. Category and generalized Hopf invariants, *Ill. J. Math.*, **4** (1960), 437—451.
2. Homomorphism of homotopy structures, *Top. et Géom. Dif.* (Sém. Ehresmann), **V** (1963), 24 p.

D. A. Buchsbaum

1. Exact categories and duality, *Trans. AMS*, **80** (1955), 1—34. [Русский перевод: «Точные категории и двойственность». Добавление к книге А. Картан и С. Эйленберг, «Гомологическая алгебра», ИЛ, 1960, стр. 451—496.]
2. A note on homology in categories, *Ann. Math.*, **69** (1958), 66—74.
3. Satellites and universal functors, *Ann. Math.*, **71** (1960), 199—209.

I. Bucur

1. Fonctions définies sur le spectre d'une catégorie et théorie de décompositions, *Rev. Roum. Mat. Pure Appl.*, **9** (1964), No 6, 583—588.
2. Sur un problème posé par Buchsbaum, *Rev. Roum. Math. Pure Appl.*, **10** (1965), No 1.

L. Budach

1. Quotientenfunktor und Erweiterungstheorie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1967.

II. Cartan, S. Eilenberg

1. Homological Algebra, Princeton, 1956 [Русский перевод: А. Картан и С. Эйленберг, «Гомологическая алгебра», ИЛ, 1960.]
2. Foundations of fibre bundles, *Symp. Intern. Top. Alg. Mexico* (1958), 16—23.

P. Dedecker

1. Introduction aux structures locales, *Coll. Géom. Dif. Glob. Bruxelles* (1957), 103—136.

R. Deheuvels

1. Homologie des ensembles ordonnées et des espaces topologiques, *Bull. Soc. Math. France*, **90** (1962), No 2, 261—321.

J. Dixmier

1. Homologie des anneaux de Lie, *Ann. Ec. Norm. Supp.*, **74** (1957), 25—83.

A. Dold

1. Homology of symmetric products and other functors of complexes, *Ann. Math.*, **68** (1958), 58—80.
2. Universelle Koeffizienten, *Math. Z.*, **80** (1962), 63—88.

A. Dold, D. Puppe

1. Homologie nicht-additiver Funktoren, Anwendungen, *Ann. Inst. Fourier*, **11** (1961), 201—312.

B. Eckmann

1. Der Cohomologie-Ring einer beliebigen Gruppe, *Comment. Math. Helv.*, **18** (1945/46), 232—282.
2. Zur Cohomologietheorie von Räumen und Gruppen, *Proc. Int. Congr. Math. Amsterdam, III* (1954), 170—177.

B. Eckmann, P. J. Hilton

1. On the homology and homotopy decomposition of continuous maps, *Proc. NAS USA*, **45** (1959), 372—375.
2. Homotopy groups of maps and exact sequences, *Comment. Math. Helv.*, **34** (1960), 271—304.
3. Operators and cooperators in homotopy theory, *Math. Ann.*, **14** (1960), 1—21.
4. Structure maps in group theory, *Fund. Math.*, **50** (1961/62), 207—221.
5. Group-like structures in general categories, I, *Math. Ann.*, **145** (1961/62), 227—244.
6. Group-like structures in general categories, II. Equalizers, limits, lengths, *Math. Ann.*, **151** (1963), 150—186.
7. Group-like structures in general categories, III. Primitive categories, *Math. Ann.*, **150** (1963), 165—187.

B. Eckmann, A. Schopf

1. Über injektive Moduln, *Arch. Math.*, **4** (1953), 75—78.

C. Ehresmann

1. Structures locales, *Ann. di Matem.* IV, **36** (1954), 133—142.
2. Gattungen von lokalen Strukturen, *Jahresb. D. M.* V., **60** (1957), No 2, 49—77.

3. Catégories topologiques et catégories différentiables, Coll. Géom. Dif. Glob. Bruxelles (1958), 137—150.
4. Catégorie des foncteurs types, *Rev. Un. Mat. Arg.*, **20** (1960), 194—209.
5. Catégories inductives et pseudogroupes, *Ann. Inst. Fourier*, **10** (1960), 317—332.
6. Espèces de structures locales, élargissements des catégories, *Top. et Géom. Dif.* (Sém. Ehresmann), III (1961), 73 p.
7. Structures feuilletées, Proc. 5th Canad. Math. Cong. (1961), 109—172.
8. Catégories structurées. I, II, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, **80** (1963), 349—426; III, *Top. et Géom. Dif.* (Sém. Ehresmann), V (1963), 21 p.
9. Catégories structurées quotient, *Top. et Géom. Dif.* (Sém. Ehresmann), V (1963), 5 p.
10. Structures quotient, *Comm. Math. Helv.*, **38** (1963), 219—283.
11. Groupoides sous-inductifs, *Ann. Inst. Fourier*, **13** (1963), № 2, 1—60.
12. Sous-structures et catégories ordonnées, *Fund. Math.*, **14** (1964), 211—228.
13. Catégories ordonnées, Holonomie et Cohomologie, *Ann. Inst. Fourier*, **14** (1964), № 1, 205—268.
14. Complétion des catégories ordonnées, *Ann. Inst. Fourier*, **14** (1964), № 2, 89—144.
15. Catégories et structures, *Top. et Géom. Dif.* (Sém. Ehresmann), VI (1964), 31 p.
16. Prolongements des catégories différentiables, *Top. et Géom. Dif.* (Sém. Ehresmann), VI (1964), 8 p.
17. Catégories et structures, Dunod, Paris, 1965.
18. Introduction to the theory of structured categories, Univ. of Kansas, Dept. of Math., 1966.
19. Sur l'existence de structures libres et de foncteurs adjoints, *Top. et Géom. Dif.* (Sém. Ehresmann), VIII (1966).

S. Eilenberg

1. Singular homology theory, *Ann. Math.*, **45** (1944), 407—447.
2. Homology of spaces with operators. I, *Trans. AMS*, **61** (1947), 378—417.
3. Homological dimension and syzygies, *Ann. Math.*, **64** (1956), 328—336; errata: *Ann. Math.*, **65** (1957), 593.
4. Abstract description of some basic functors, *J. Indian Math. Soc.*, **24** (1960), 231—234.

S. Eilenberg, S. Mac Lane

1. Group extensions and homology, *Ann. Math.*, **43** (1942), 757—831.
2. Relations between homology and homotopy groups, *Proc. NAS USA*, **29** (1943), 155—158.
3. General theory of natural equivalences, *Trans. AMS*, **58** (1945), 231—294.
4. Relations between homology and homotopy groups of spaces, *Ann. Math.*, **46** (1945), 480—509.
5. Cohomology theory in abstract groups. I, *Ann. Math.*, **48** (1947), 51—78.
6. Cohomology theory in abstract groups. II. Groups extensions with a nonabelian kernel, *Ann. Math.*, **48** (1947), 326—341.
7. Cohomology and Galois theory. I. Normality of algebras and Teichmüller's cocycle, *Trans. AMS*, **64** (1948), 1—20.
8. Homology of spaces with operators. II, *Trans. AMS*, **65** (1949), 49—99.
9. Relations between homology and homotopy groups of spaces. II, *Ann. Math.*, **51** (1950), 514—533.
10. Cohomology theory of Abelian groups and homotopy theory. I. *Proc. NAS USA*, **36** (1950), 443—447.
11. Homology theories for multiplicative systems, *Trans. AMS*, **71** (1951), 294—330.
12. Acyclic models, *Am. J. Math.*, **75** (1953), 189—199.
13. On the groups $H(\pi, n)$. I, *Ann. Math.*, **58** (1953), 55—106.

14. On the groups $H(\pi, n)$. II. Methods of computation, *Ann. Math.*, **60** (1954), 49—139.
15. On the groups $H(\pi, n)$. III. Operations and obstructions. *Ann. Math.*, **60** (1954), 513—557.
16. On the homology theory of Abelian groups, *Can. J. Math.*, **7** (1955), 43—55.

S. Eilenberg, J. C. Moore

1. Limits and spectral sequences, *Topology*, **1** (1962), 1—23.
2. Adjoint functors and triples, *Ill. J. Math.*, **9** (1965), 381—398.

S. Eilenberg, N. Steenrod

1. Foundations of algebraic topology, Princeton, 1952 [Русский перевод: Н. С т и н р о д и С. Эйленберг, Основания алгебраической топологии, ИЛ, 1958.]

S. Eilenberg, J. A. Zilber

1. Semi-simplicial complexes and singular homology, *Ann. Math.*, **51** (1950), 499—513.

P. Freyd

1. Functor theory, Dissertation, Princeton Univ., 1960.
2. Abelian categories, Harper and Row, New York, 1964.

P. Gabriel

1. Des catégories abéliennes, *Bull. Soc. Math. France*, **90** (1962), 323—448.

P. Gabriel, N. Popescu

1. Caractérisations des catégories abéliennes avec générateurs et limites inductives exactes, *C. R.*, **258** (1964), 4188—4190.

P. Gabriel, M. Zisman

1. Séminaire Homotopique, Strasbourg (1964).

J. Giraud

1. Analysis situs, *Sém. Bourbaki*, **257** (1962/63), 11 p.
2. Cohomologie non-abélienne de degré 2, Thèse, Fac. des Sciences de l'Univ. de Paris.

R. Godement

1. Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Hermann, Paris, 1958. [Русский перевод: Р. Годеман, Алгебраическая топология и теория пучков, ИЛ, 1961.]

J. W. Gray

1. Extensions of sheaves of algebras, *Ill. J. Math.*, **5** (1961), 159—174.
2. Extensions of sheaves of associative algebras by non-trivial kernels, *Pac. J. Math.*, **11** (1961), 909—917.

A. Grothendieck

1. Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tohoku Math. J.* **2**, **9** (1957), 119—221. [Русский перевод: А. Гротендик, О некоторых вопросах гомологической алгебры, ИЛ, 1961.]
2. Techniques de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. I—V, *Sém. Bourbaki*: I, **190** (1959/60), 29 p; II, **195** (1959/60), 22 p; III, **212** (1960/61), 20 p; IV, **221** (1960/61), 28 p; V, **232** (1961/62), 19 p.
3. Techniques de construction en géométrie analytique, I—X, *Sém. Cartan*, **13** (1960/61): I, 33 p; II, 14 p; III, 11 p; IV, 28 p; V, 15 p; VI, 13 p; VII, 27 p; VIII, 10 p; IX, 20 p; X, 20 p.
4. Fondements de la géométrie algébrique, Paris, 1961.

A. Grothendieck, J. Dieudonné

1. Éléments de géométrie algébrique, I—IV, Publ. Inst. des Hautes Étud. Sci.

A. Heller

1. Homological algebra in abelian categories, *Ann. Math.*, **68** (1958), 484—525.

P. J. Hilton

1. Note on free and direct products in general categories, *Bull. Soc. Math. Belg.*, **13** (1961), 38—49.
2. The fundamental group as a functor, *Bull. Soc. Math. Belg.*, **14** (1962), 153—177.

P. J. Hilton, W. Ledermann

1. Homology and ringoids. I, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **54** (1958), 152—167.
2. On the Jordan-Hölder theorem in homological monoids, *Proc. London Math. Soc.*, **14** (1960), 321—334.

P. J. Huber

1. Homotopy theory in general categories, *Math. Ann.*, **144** (1961), 361—385.
2. Standard constructions in abelian categories, *Math. Ann.*, **146** (1962), 321—325.

D. M. Kan

1. On the homotopy relation for c. s. s. maps, *Col. Soc. Mat. Mec.*, **2**, **2** (1957), 75—81.
2. On c. s. s. categories, там же, 82—94.
3. Adjoint functors, *Trans. AMS*, **294** (1958); 294—329. [Русский перевод: Д. Кан, Сопряженные функторы, *Математика*, **3**: **2** (1959), 3—37.]
4. Functors involving c. s. s. complexes, *Trans. AMS*, **87** (1958), 330—346.
5. On monoids and their duals, *Bol. Soc. Mat. Mec.*, **3** (1958), 52—61.

I. Kaplansky

1. On the dimension of modules and algebras. X, *Nagoya Math. J.*, **13** (1958), 85—88.

J. L. Kelley, E. Pitcher

1. Exact homomorphism sequences in homology theory, *Ann. Math.*, **48** (1947), 682—709.

H. Kleisli

1. Homotopy theory in abelian categories, *Can. J. Math.*, **14** (1962), No 1, 139—169.

A. Г. Курош

1. Прямые разложения в алгебраических категориях, *Труды ММО*, **8** (1959), 391—412.

A. Г. Курош, А. Х. Лившиц, Е. Г. Шульгейфер

1. Основы теорий категорий, *УМН*, **15** (1960), № 6, 3—52.

O. A. Laudal

1. Sur la limite projective et la théorie de la dimension, *Top. et Géom. Dif.* (Sém. Ehresmann), **III** (1961), 23 p.

W. V. Lawvere

1. Functorial semantics of algebraic theories, *Proc. NAS USA*, **50** (1963), 869—872.

2. An elementary theory of the category of sets, *Proc. NAS USA*, (1964), 1506—1511.

S. Lubkin

1. Imbedding of abelian categories, *Trans. AMS*, **97** (1960), 410—417.

S. MacLane

1. Duality for groups, *Bull. AMS*, **56** (1950), 485—516.
2. Slide and torsion products for modules, *Rend. Del. Sem. Mat. Torino*, **15** (1955/56), 281—309.
3. Homologie des anneaux et des modules, Colloque de Topologie algébrique, Louvain (1956), 55—80.
4. Extension and obstructions for rings, *Ill. J. Math.*, **2** (1958), 316—345.
5. Locally small categories and the foundations of set theory, Infinitistic methods, Symp. Warsaw (1959), 25—43.
6. Group extensions by primary abelian groups, *Trans. AMS*, **95** (1960), 1—16.
7. Triple torsion products and multiple Künneth formulas, *Math. Ann.*, **140** (1960), 51—64.
8. An algebra of additive relations, *Proc. NAS USA*, **47** (1961), 1043—1051. [Русский перевод: С. Маклейн, Алгебра аддитивных отношений, *Математика*, **7**: 6 (1963), 3—12.]
9. Homology, Springer—Berlin, 1963. [Русский перевод: С. Маклейн, Гомология, «Мир», 1966.]
10. Natural associativity and commutativity, *Rice University Studies*, **49** (1963), p. 28—46.
11. Categorical algebra, *Bull. AMS*, **71** (1965), 40—106. [Русский перевод первоначальной редакции статьи: С. Маклейн, Алгебра категорий, *Математика*, **9**: 1 (1965), 3—50.]

S. MacLane, G. Birkhoff

1. Algebra, Macmillan Company, 1967.

J. M. Maranda

1. Some remarks on limits in categories, *Canad. Math. Bull.*, **5** (1962), 133—146.

E. Matlis

1. Injective modules over Noetherian rings, *Pac. J. Math.*, **8** (1958), 511—528.
2. Applications of duality, *Proc. AMS*, **10** (1959), 659—662.
3. Modules with descending chain condition, *Trans. AMS*, **97** (1960), 495—508.

B. Mitchell

1. The full embedding theorem, *Am. J. Math.*, **86** (1964), 619—637.
2. Theory of categories, New York, Academic Press, 1965.

C. Năstăsescu, N. Popescu

1. Quelques observations sur les topos abéliens, *Rev. Roum. Mat. Pure Appl.*, **12** (1967), 553—563.
2. Sur la structure des objets de certaines catégories abéliennes, *C. R.*, **262** (1966), 1295—1297.

D. G. Northcott

1. An introduction to homological algebra, Cambridge Univ. Press, 1960.

F. Oort

1. Natural maps of extension functors, *Ned. Akad. Proc.*, **66** (1963), 559—566.
2. Yoneda extensions in abelian categories, *Math. Ann.*, **153** (1964), 227—235. Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla, 1965 (Edited by S. Eilenberg, D. K. Harison, S. MacLane, H. Röhrli).

D. Puppe

1. Korrespondenzen in abelschen Kategorien, *Math. Ann.*, **148** (1962), 1—30.
[Русский перевод: Д. Пуппе, Соответствия в абелевых категориях, *Математика*, **8:6** (1964), 109—139.]

J. A. Riley

1. Axiomatic primary and tertiary decomposition theory, *Trans. AMS*, **105** (1962), 177—201.

H. Röhrl

1. Über Satelliten Halbexakter Functoren, *Math. Z.*, **79** (1962), 193—228.

D. S. Rim

1. Modules over finite groups, *Ann. Math.*, **69** (1959), 700—712.

J. Roos

1. Sur les foncteurs dérivés de $\lim$. Applications, *C. R.*, **252** (1961), 3702—3704.
2. Locally distributive spectral categories and strongly regular rings, Midwest category seminar, Lecture notes, Springer, 1967.
3. Sur la condition AB6 et ses variantes dans les catégories abéliennes, *C. R.*, **264** (1967), 991—994.
4. Sur les catégories spectrales localement distributives, *C. R.*, **265** (1967), 14—17.
5. Sur la structure des catégories spectrales et les coordonnées de von Neumann des treillis modulaires et complémentés, *C. R.*, **265** (1967), 42—45.

Z. Semadeni

1. Projectivity, injectivity and duality, *Rozprawy Mat.*, **35**, Varsovie (1963), 47 p.
2. Free and direct objects, *Bull. AMS*, **69** (1963), 63—65.

U. Shukla

1. Cohomologie des algèbres associatives, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, **78** (1961), 163—209.

R. G. Swan

1. A simple proof of the cup product reduction theorem, *Proc. NAS USA*, **46** (1960), 114—117.
2. Induced representations and projective modules, *Ann. Math.*, **71** (1960), 552—578.

J. A. Zilber

1. Categories in homotopy theory, Dissertation, Harvard Univ., Cambridge, Mass., 1963.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

абелева категория 106
аддитивная категория 96
аддитивный функтор 98

биморфизм 13

вложение категории 128
— — полное 128
вполне унивалентный функтор 31, 128
вторая теорема об изоморфизме 112
второй принцип двойственности 107

гомологии функтор ковариантный 221
— — контравариантный 221
гомологическая размерность 237
— — глобальная левая 237
— — — правая 237
— — слабая 243
гомоморфизм 88
— объекта, наделенного структурой 95
гомоморфизма ядро 90
гомотопные морфизмы 202
Гротендика категория 128
— стандартный комплекс 206
— топология 53
— — каноническая 129

двойная цепь 189
декартов квадрат 42
диагональный морфизм 41
диаграмма в категории 59
— точная 53
дуальная категория 10

замкнутый Λ -модуль 163
— объект 156

изоморфизм 13
— между категориями 37
— функторный 16
изоморфные категории 38
индуктивная система 59
индуктивный предел функтора 60
инициальный объект 44, 84

интегральный объект 38
инъективная оболочка 148
— правая резольвента 206
— размерность 237
инъективный объект 142

каноническая резольвента 218
— топология Гротендика 129
канонические инъекции 45
— проекции 39
канонический мономорфизм 14
— эпиморфизм 14
категории изоморфные 38
категория 9
— абелева 106
— аддитивная 96
— Гротендика 128
— групп категории 88
— диаграмм 59
— дуальная 10
— конкретная 38
— локально малая 69
— локально нётерова 191
— малая 17
— предабелева 106
— с конечными произведениями 41
— — — суммами 45
— — произведениями 41
— суммами 45
— функторов 59
квадрат декартов 42
— кодекартов 47
— коуниверсальный 42
— универсальный 47
ковариантный функтор 15
— — гомологии 221
— — когомологии 221
— — — универсальный 221
— — сохраняющий проективные пре-
делы 64
когомологии объект 203
— — i -мерный 235
— функтор ковариантный 221
— — контравариантный 221
кодекартов квадрат 47
коинтегральный объект 38
кольцо фильтрованное 104
комплекс 201
— Гротендика стандартный 206

комплекс коцепной 203
 — отрицательный 203
 — положительный 203
 — цепной 203
 композиция морфизмов 9
 — функторных морфизмов 17
 конеприводимый объект 183
 конкретная категория 38
 контравариантный функтор 15
 — — гомологии 221
 — — когомологии 221
 — переводящий проективные пре-
 делы в индуктивные 65
 — — точный 109
 — — — слева 79, 109
 — — — справа 109
 кообласть морфизма 9
 кообраз морфизма 100
 копримарный модуль 198
 косимплициальный объект 204
 котерициарный модуль 199
 коуниверсальный квадрат 42
 коцепной комплекс 203
 коядро морфизма 99
 — пары морфизмов 52
 Крулля—Ремака—Шмидта теорема
 188

левая глобальная гомологическая раз-
 мерность 237
 — резольвента 206
 — — проективная 206
 левые производные функторы 218
 левый сопряженный функтор 33
 локализующая подкатегория 154, 158
 локально малая категория 69
 — нётерова категория 191

малая категория 17
 минимальная пара 78
 — проективная резольвента 240
 множество универсальное 18
 модуль замкнутый 163
 — копримарный 198
 — котерициарный 199
 пренебрегаемый 171, 172
 — фильтрованный 105
 мономорфизм 11
 — канонический 14
 — существенный 147
 — ф-расщепляющий 243
 морфизм 9
 — комплекса 201
 — накрывающий 175, 244
 — тождественный 9
 — функторный 16
 морфизмы гомотопные 202

морфизмы нулевые 48
 — сопряжения 156

накрывающий морфизм 175, 244
 неприводимый подобъект 183
 неразложимый объект 183
 нормальная резольвента 209
 нулевой объект 84
 нулевые морфизмы 48

область морфизма 9
 оболочка инъективная 148
 — проективная 239
 образ морфизма 100
 образующая 126
 образующих семейство 126
 обратный предел функтора 60
 объект 9
 — замкнутый 156
 — инициальный 44, 84
 — интегральный 38
 — инъективный 142
 — $\text{Ker } T$ -замкнутый 156
 — когомологии 203
 — — i -мерный 235
 — коинтегральный 38
 — конеприводимый 183
 — косимплициальный 204
 — неразложимый 183
 — n -мерный гомологии 202
 — n -мерный границ 202
 — — циклов 202
 — нулевой 84
 — проективный 152
 — симплициальный 204
 — T -ациклический 230
 — $\mathcal{T}$ -проективный 244
 — финальный 39, 84
 отношение предпорядка 59
 — эквивалентности на объекте катего-
 рии 93
 отрицательный комплекс 203

пара минимальная 78
 — функторов, определяющая фактор-
 категорию 137
 подкатегория 11
 — локализующая 154, 158
 — полная 11
 подмодуль примарный 198
 — терциарный 199
 подобъект 14
 — неприводимый 183
 покрытия 53
 полная подкатегория 11

полное вложение категории 128
 положительная фильтрация 104
 положительный комплекс 203
 последовательность морфизмов точная 108
 правая глобальная гомологическая размерность 237
 — резольвента 206
 — — инъективная 206
 — — точная 206
 правые производные функторы 216
 правый сопряженный функтор 33
 преабелева категория 102
 предел функтора индуктивный 60
 — — обратный 60
 — — проективный 59
 — — прямой 60
 предпорядка отношение 59
 предпучок 53
 представимый функтор ковариантный 22
 — — контравариантный 21
 пренебрегаемый Λ -модуль 171, 172
 примарный подмодуль 198
 — радикал 198
 проективная оболочка 239
 — размерность 236
 — резольвента левая 206
 — — минимальная 240
 — система 59
 проективный объект 152
 — предел функтора 59
 проекции канонические 39
 произведение категорий 10
 — морфизмов 40
 — расслоенное 41
 — семейства объектов 39
 производные функторы левые 218
 — — правые 216
 пропредставимый функтор 77
 пропредставляющая система 77
 простой двусторонний идеал 198
 прямое слагаемое объекта 100
 прямой предел функтора 60
 пучок 53

радикал подмодуля терциарный 199
 — примарный 198
 размерность глобальная гомологическая левая 237
 — — — правая 237
 — гомологическая 237
 — — слабая 243
 — инъективная 236
 — проективная 236
 расслоенная сумма 46
 расслоенное произведение 41
 расширение существенное 147

резольвента каноническая 218
 — левая 206
 — нормальная 209
 — правая 206
 — — инъективная 206
 — — точная 206
 — проективная 206
 — — минимальная 240
 род структуры 94
 — — с морфизмами 94

сателлиты 223
 семейство образующих 126
 семианнулятор модуля 198, 199
 симметрия относительно диагонали 41
 симплициальный объект 204
 система идеалов топологизирующая 159
 — индуктивная 59
 — проективная 59
 — пропредставляющая 77
 слабая гомологическая размерность 243
 сопряженный функтор 25
 — — левый 33
 — — правый 33
 спектр категории Гротендика 194
 стандартный комплекс Гротендика 206
 строгий эпиморфизм 78
 строго пропредставимый функтор 78
 структура групповая 83
 — данного рода 94
 сумма расслоенная 46
 — семейства объектов 44
 существенное расширение 147
 существенный мономорфизм 147
 — эпиморфизм 148
 схема диаграммы 59

T -ациклический объект 230
 теорема Габриэля 139
 — Габриэля—Попеску 169
 — Гротендика 81
 — Крулля—Ремака—Шмидта 188, 189
 — об изоморфизме вторая 112
 — — третья 122
 — Фрейда 70
 теория разложения 196
 — — примарного 198
 — — терциарного 198
 терциарный подмодуль 199
 — радикал подмодуля 199
 тип объекта категории Гротендика 194
 тождественный морфизм 9
 топологизирующая система идеалов 159
 топология Гротендика 53
 — — каноническая 129

точная диаграмма 53
 — последовательность морфизмов 108
 — правая резольвента 206
 точный контравариантный функтор 109
 — слева контравариантный функтор 79, 109
 — справа контравариантный функтор 109
 третья теорема об изоморфизме 122
 3×3 -лемма 114

$\mathcal{U}$ -категория 18
 унивалентный функтор 128
 универсальное множество 18
 универсальный квадрат 47
 — ковариантный функтор когомологий 223
 — эпиморфизм 49
 уравниватель 50
 условия $AB3$, $AB4$, $AB5$ 123

факторкатегория 137, 158
 факторкатегории эквивалентные 158
 факторобъект 14
 фильтрация положительная 104
 фильтрованное кольцо 104
 фильтрованный модуль 105
 финальный объект 39, 84
 функтор аддитивный 98
 — вполне унивалентный 31, 128
 — гомологии ковариантный 221
 — — контравариантный 221
 — ковариантный 15
 — — представимый 22
 — — сохраняющий индуктивные пределы 64
 — — — проективные пределы 64
 — — — когомологии ковариантный 221
 — — — универсальный 223
 — — контравариантный 221
 — контравариантный 15

функтор контравариантный, переводящий индуктивные пределы в проективные 65
 — — — проективные пределы в индуктивные 65
 — — — представимый 21
 — — пропредставимый 77
 — — строго пропредставимый 78
 — — точный слева 79, 109
 — — — справа 109
 — n -мерной гомологии 202
 — сопряженный 25
 — — левый 33
 — — правый 33
 — унивалентный 128
 — «хорошей когомологии» 235
 функторный изоморфизм 16
 — морфизм 16
 функторы Ext_R^i 232
 — производные левые 218
 — — правые 216
 — Tor_i^A 234

цепной комплекс 203
 цепь двойная 189

эквивалентности отношение на объекте 93
 эквивалентность между категориями 33
 эквивалентные мономорфизмы 14
 — факторкатегории 158
 эпиморфизм 12
 — канонический 14
 — строгий 78
 — существенный 148
 — универсальный 49

ядро гомоморфизма 90
 — морфизма 99
 — пары морфизмов 50

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому переводу	5
Предисловие Питера Хилтона	6
От авторов	8
Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ	9
§ 1. Понятие категорий. Двойственность. Подкатегории. Примеры	9
§ 2. Мономорфизмы, эпиморфизмы, изоморфизмы	11
§ 3. Функторы	15
§ 4. Представимые функторы	21
§ 5. Сопряженные функторы	24
§ 6. Понятие эквивалентности категорий	33
Глава 2. СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ	39
§ 1. Суммы и произведения	39
§ 2. Ядро и коядро	50
§ 3. Топологии Гротендика и общее понятие пучка	53
Глава 3. ИНДУКТИВНЫЕ И ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕДЕЛЫ	59
§ 1. Общие понятия проективного и индуктивного пределов	59
§ 2. Существование индуктивных и проективных пределов	62
§ 3. Перестановочность функторов с проективными и индуктивными пределами	64
§ 4. Характеризация сопряженных функторов	69
§ 5. Пропредставимые функторы	76
Глава 4. СТРУКТУРЫ НА ОБЪЕКТАХ КАТЕГОРИИ	83
§ 1. Алгебраические операции на объектах категории. Гомоморфизмы	83
§ 2. Существование ядер гомоморфизмов	90
§ 3. Отношения эквивалентности	92
§ 4. Общее понятие структуры на объектах категории	93
Глава 5. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ АБЕЛЕВЫХ КАТЕГОРИЙ	96
§ 1. Аддитивные категории	96
§ 2. Ядро и коядро	99
§ 3. Каноническое разложение морфизма	101
§ 4. Преабелевы категории	102
§ 5. Абелевы категории	106
§ 6. Точные функторы	108
§ 7. Теоремы об изоморфизме в абелевых категориях	111
§ 8. Условия АВ3, АВ4, АВ5	123
§ 9. Образующие	126
§ 10. Полное вложение малой абелевой категории в категорию Гротендика	128
Глава 6. ИНЪЕКТИВНЫЕ И ПРОЕКТИВНЫЕ ОБЪЕКТЫ АБЕЛЕВЫХ КАТЕГОРИЙ	142
§ 1. Понятия инъективного и проективного объектов и их общие свойства	142
§ 2. Существенные расширения	147

§ 3. Свойства инъективных оболочек	149
§ 4. Проективные объекты	152
§ 5. Локализация в кольцах	153
§ 6. Характеризация категорий Гротендика	166
§ 7. Теорема Крулля—Ремака—Шмидта	183
§ 8. Строение инъективных объектов в локально нётеровых категориях	191
§ 9. Применения к теориям разложения	195
Глава 7. ЭЛЕМЕНТЫ ГОМОЛОГИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЫ	201
§ 1. Комплексы. Гомология. Когомология	201
§ 2. Резольвенты	206
§ 3. Производные функторы	216
§ 4. Дальнейшие свойства производных функторов	220
§ 5. Функторы гомологии и когомологии	221
§ 6. Дальнейшие свойства функторов гомологии и когомологии	228
§ 7. Примеры функторов гомологии и когомологии	232
§ 8. Гомологическая размерность абелевых категорий	236
§ 9. Минимальные проективные резольвенты	239
§ 10. Относительная гомологическая алгебра	243
БИБЛИОГРАФИЯ	247
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	254

И. Букур, А. Деляну

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КАТЕГОРИЙ И ФУНКТОРОВ

Редактор *В. И. Авербух*. Художник *Д. В. Орлов*

Художественный редактор *В. И. Шаповалов*. Технический редактор *Н. Д. Толстякова*

Сдано в набор 22/VI 1971 г. Подписано к печати 24/III 1972 г. Бумага № 1 60×90¹/₁₆=8,13
 бум. л. 16,25 печ. л. Уч.-изд. л. 14,40 Изд. № 1/5854 Цена 1 р. 25 к. Зак. 1286

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2
 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома Комитета по печати
 при Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29,