АКАДЕМИЯ НАУК МОЛДАВСКОЙ ССР

ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ С ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ ЦЕНТРОМ

И. Ц. Гохберг
Н. Я. Крупник

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ОДНОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ШТИИНЦА»

КИШИНЕВ * 1973

УДК 517.9

Основное место в книге отведено теории линейных одномерных сингулярных интегральных операторов с непрерывными и разрывными коэффициентами в различных функциональных пространствах. При весьма общих ограничениях выясняются условия обратимости таких операторов, вид обратного оператора, структура ядра и коядра. Подробно рассматривается задача факторизации функций относительно контура.

В книге приведены различные методы, применяемые в теории одномерных сингулярных интегральных операторов. Излагаются основы теории фредгольмовых и полуфредгольмовых операторов.

Книга рассчитана на студентов старших курсов, аспирантов и специалистов по математике и механике, владеющих основами функционального анализа.

Г $\frac{0-2-2-3-72}{М753(12)-73}$ 63 - 73

кий вектор $x \in \mathscr{L}$ представим в виде $x = x_1 + y_1$, где $x_1 \in \mathcal{N}_1$ и $y_1 \in \mathscr{L}_1$. Так как $\mathscr{L}_1 \subseteq \mathscr{L}$, то $x_1 \in \mathcal{N}_1 \cap \mathscr{L} = \mathcal{N}$. Следовательно, $\mathscr{L} \subseteq \mathcal{N} \dot{+} \mathscr{L}_1$. Таким образом, $\mathscr{L} = \mathcal{N} \dot{+} \mathscr{L}_1$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$ ($\mathscr{L}_1 \subseteq \mathscr{L}_2$) – два подпространства банахова пространства $\mathscr{B}$ и $\dim \mathscr{L}_2/\mathscr{L}_1 < \infty$. Если для линеала $\mathscr{L}$ выполняется соотношение

$$\mathscr{L}_1 \subset \mathscr{L} \subset \mathscr{L}_2,$$

то $\mathscr{L}$ является подпространством.

§ 3. Линейные операторы. Обозначения и простейшие классы

Пусть $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ – банаховы пространства. Обозначим через $L(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ банахово пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих из $\mathscr{B}_1$ в $\mathscr{B}_2$. Норма в $L(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ вводится как норма оператора. Пространство $L(\mathscr{B}, \mathscr{B})$, обозначаемое дальше через $L(\mathscr{B})$, является банаховой алгеброй.

Каждому оператору $A \in L(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ сопоставляется подпространство $\operatorname{Ker} A$ ($\subseteq \mathscr{B}_1$) – ядро оператора A, то есть множество всех решений однородного уравнения $Ax = 0$. Каждому оператору $A \in L(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ также сопоставляется линеал $\operatorname{Im} A$ ($\subseteq \mathscr{B}_2$) – образ оператора A, то есть множество значений оператора A. Наряду с символом $\operatorname{Im} A$ мы будем также употреблять обозначение $A\mathscr{B}_1$. Множество значений оператора A на подмножестве $\mathscr{L}$ будем обозначать через $A\mathscr{L}$. Множество $\operatorname{Im} A$ может быть незамкнутым*.

Подпространство $\mathscr{B}_2/\operatorname{Im} A$ назовем коядром оператора A и обозначим через $\operatorname{Coker} A$. Всякое прямое дополнение к подпространству $\overline{\operatorname{Im} A}$ (если оно существует) будем также называть коядром оператора A и обозначать через $\operatorname{Coker} A$.

Оператор $A \in L(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ называется обратимым, если существует оператор $A^{-1} \in L(\mathscr{B}_2, \mathscr{B}_1)$, такой, что

---

* Подробнее об этом см. в § 3, гл. IV.

$$A^{-1}Ax=x \ (x\in\mathcal{B}_1) \qquad \text{и} \quad AA^{-1}x=x \ (x\in\mathcal{B}_2).$$

В силу известной теоремы Банаха оператор $A\in L(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ обратим в том и только том случае, когда

$$\operatorname{Ker} A=\{0\} \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} A=\mathcal{B}_2.$$

Р а з м е р н о с т ь ю   о п е р а т о р а $A\in L(\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2)$ называется размерность его множества значений. Размерность оператора обозначается через $\dim A$:

$$\dim A=\dim \operatorname{Im} A.$$

Оператор A называется к о н е ч н о м е р н ы м , если $\dim A<\infty$. Пусть $y_1,\dots,y_n\in\mathcal{B}_2$ и $f_1,\dots,f_n\in\mathcal{B}_1^*$. Рассмотрим оператор

$$Kx=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)y_k \quad (x\in\mathcal{B}_1). \tag{3.1}$$

Очевидно, оператор K принадлежит $L(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ и подпространство $\operatorname{Im} K$ содержится в линейной оболочке $\mathcal{L}$ системы $\{y_j\}_1^n$. Следовательно, $\dim K\le n$. Легко видеть, что

$$\dim K=\min\{\dim\mathcal{L},\dim\mathfrak{M}\},$$

где $\mathfrak{M}$ – линейная оболочка векторов $f_1,f_2,\dots,f_n$.

Всякий конечномерный оператор $K\in L(\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2)$ может быть представлен в виде (3.1), где системы $y_1,\dots,y_n$ и $f_1,\dots,f_n$ линейно независимы. Действительно, пусть система $\{y_j\}_1^n$ является базисным подпространством $\operatorname{Im} K$. Имеет место равенство (3.1), если в качестве f_k $(k=1,2,\dots,n)$ выбрать функционалы, определенные равенствами $f_k(x)=\chi_k(Kx)$ $(x\in\mathcal{B}_1)$, где $\{\chi_k\}_1^n$ – система, биортогональная к системе $\{y_j\}_1^n$:

$$\chi_k(y_j)=\delta_{kj}.$$

Вектор Kx $(x\in\mathcal{B}_1)$ можно представить в виде

$$Kx=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j y_j .$$

Очевидно $\chi_j(Kx)=\alpha_j$. Легко видеть, что если в представлении (3.1) векторы $y_1,\dots,y_n$ и функционалы $f_1,\dots,f_n$ линейно независимы, то

$$\operatorname{Ker} K=\bigcap_{j=1}^{n}\operatorname{Ker} f_j \qquad \text{и} \quad \operatorname{Im} K=\mathcal{L}\{y_1,\dots,y_n\},$$

где через $\mathcal{L}\{y_1,\dots,y_n\}$ обозначается линейная оболочка векторов $y_1,\dots,y_n$. Предположим, что $\mathcal{B}_1=\mathcal{B}_2=\mathcal{B}$. Пусть $\mathcal{N}$ – некоторое прямое дополнение к подпространству $\operatorname{Im} K$. Обозначим через $\mathfrak{M}_1$ пересечение $\mathcal{N}\cap\operatorname{Ker} K$. Очевидно, $\operatorname{codim}\mathfrak{M}_1<\infty$. Пусть $\mathfrak{M}_2$ является прямым дополнением к $\mathfrak{M}_1$, содержащим подпространство $\operatorname{Im} K$. Тогда, очевидно, подпространства $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ инвариантны относительно K, причем $K\mathfrak{M}_1=\{0\}$.

§ 4. Проекторы, связанные с оператором сингулярного интегрирования

Оператор $P\in L(\mathcal{B})$ называется п р о е к т о р о м, если $P^2=P$. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что вместе с оператором P проектором является и оператор $Q=I-P$, где I – тождественный оператор в $\mathcal{B}$. Проектор Q назовем д о п о л н и т е л ь н ы м проектором к P. Очевидно, P является дополнительным проектором к Q и $PQ=QP=0$.

Пусть пространство $\mathcal{B}$ распадается в прямую сумму подпространств $\mathcal{L}$ и $\mathcal{N}$. Пусть $x=x_1+x_2$ ($x_1\in\mathcal{L}$ и $x_2\in\mathcal{N}$) – произвольный вектор из $\mathcal{B}$. Легко видеть, что оператор P, определяемый равенством $Px=x_1$, является проектором в $\mathcal{B}$, причем $\operatorname{Im} P=\mathcal{L}$ и $\operatorname{Ker} P=\mathcal{N}$. В этом случае говорят, что P проектирует пространство $\mathcal{B}$ на $\mathcal{L}$ параллельно $\mathcal{N}$. Очевидно, Q является проектором, проектирующим $\mathcal{B}$ на $\mathcal{N}$ параллельно $\mathcal{L}$.

Всякий проектор P имеет такую структуру, то есть является проектором, проектирующим пространство $\mathcal{B}$ на $\operatorname{Im} P$

параллельно $\operatorname{Ker} P$. Действительно, легко видеть, что $\operatorname{Im} P = \operatorname{Ker}(I-P)$, следовательно, $\operatorname{Im} P$ является подпространством. Кроме того, без труда проверяется, что подпространства $\operatorname{Im} P$ и $\operatorname{Ker} P (= \operatorname{Im}(I-P))$ пересекаются только в нуле и их прямая сумма равна $\mathcal{B}$. Равенство $x = Px + (I-P)x$ дает требуемое разложение любого вектора $x \in \mathcal{B}$. Из последнего равенства также вытекает, что P проектирует $\mathcal{B}$ на $\operatorname{Im} P$ параллельно $\operatorname{Ker} P$.

Пусть Γ – сложный замкнутый контур и $\mathcal{B} = L_p(\Gamma, \rho)$, где

$$\rho(t) = \prod_{k=1}^{n} |t - t_k|^{\beta_k} \quad (t_1, \dots, t_n \in \Gamma, \ 1 < p < \infty, -1 < \beta_k < p-1).$$

В § 4 гл. I было доказано, что оператор S_Γ ограничен в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$ и $S_\Gamma^2 = I$. Отсюда следует, что операторы P_Γ и Q_Γ, определенные равенствами

$$P_\Gamma = \frac{1}{2}(I + S_\Gamma), \quad Q_\Gamma = \frac{1}{2}(I - S_\Gamma), \tag{4.1}$$

являются взаимно дополнительными проекторами, причем $P_\Gamma - Q_\Gamma = S_\Gamma$. В этом параграфе подробно исследуются проекторы P_Γ и Q_Γ. Введем подпространства $L_p^+(\Gamma, \rho)$, $\overset{\circ}{L}{}_p^-(\Gamma, \rho)$, полагая

$$L_p^+(\Gamma, \rho) = \operatorname{Im} P, \quad \overset{\circ}{L}{}_p^-(\Gamma, \rho) = \operatorname{Im} Q. \tag{4.2}$$

Другими словами, проектор P_Γ проектирует пространство $L_p(\Gamma, \rho)$ на подпространство $L_p^+(\Gamma, \rho)$ параллельно подпространству $\overset{\circ}{L}{}_p^-(\Gamma, \rho)$, а проектор Q_Γ проектирует $L_p(\Gamma, \rho)$ на $\overset{\circ}{L}{}_p^-(\Gamma, \rho)$ параллельно $L_p^+(\Gamma, \rho)$. Контур Γ разбивает расширенную комплексную плоскость на два открытых множества F_Γ^+ и F_Γ^- ($\infty \in F_\Gamma^-$).

Пусть $\varphi \in L_p(\Gamma, \rho)$: из определения весовой функции ρ вытекает, что $\rho^{-1/p} \in L_q(\Gamma)$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$. Так как, кроме этого, $\varphi \rho^{1/p} \in L_p(\Gamma)$, то $\varphi \in L_1(\Gamma)$. С помощью функции φ определим функцию

$$\Phi_\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma). \tag{4.3}$$

Пусть сначала $z \in F_\Gamma^+$. Как известно (И.И.Привалов [1], стр. 189), функция $\Phi_\varphi(z)$ голоморфна в F_Γ^+, имеет почти всюду на Γ предельные значения $\Phi_\varphi^+(t)$ при $z \to t$ по всем некасательным путям, лежащим в F_Γ^+, и эти предельные значения находятся по формуле

$$\Phi_\varphi^+(t)=\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau, \tag{4.4}$$

в которой интеграл понимается в смысле главного значения. Таким образом, $\Phi_\varphi^+ = P_\Gamma \varphi$. Отсюда вытекает

ТЕОРЕМА 4.I. Имеет место равенство

$$L_p^+(\Gamma,\rho)=\{\Phi_\varphi^+ : \varphi\in L_p(\Gamma,\rho)\}. \tag{4.5}$$

Для того чтобы функция $\varphi\,(\in L_p(\Gamma,\rho))$ принадлежала $L_p^+(\Gamma,\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы $\Phi_\varphi^+=\varphi$.

Аналогично функция $\Phi_\varphi(z)$ голоморфна в F_Γ^-, равна нулю на бесконечности, имеет почти всюду на Γ предельные значения $\Phi_\varphi^-(t)$ при $z\to t$ по всем некасательным путям, лежащим в F_Γ^-, и $\Phi_\varphi^- = -Q\varphi$. Отсюда вытекает

ТЕОРЕМА 4.2. Имеет место равенство

$$\overset{\circ}{L}{}_p^-(\Gamma,\rho)=\{\Phi_\varphi^- : \varphi\in L_p(\Gamma,\rho)\}. \tag{4.6}$$

Для того чтобы функция $\varphi\,(\in L_p(\Gamma,\rho))$ принадлежала $\overset{\circ}{L}{}_p^-(\Gamma,\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы $\Phi_\varphi^-=\varphi$.

Так как функция $\varphi\,(\in L_p^+(\Gamma,\rho))$ совпадает на Γ с предельными значениями функции Φ_φ, определенной в F_Γ^+, то условимся в дальнейшем функции φ из $L_p^+(\Gamma,\rho)$ считать определенными в F_Γ^+, при этом будем полагать $\varphi(z)=\Phi_\varphi(z)$ $(z\in F_\Gamma^+)$. Аналогично функции φ из $\overset{\circ}{L}{}_p^-(\Gamma,\rho)$ будем считать определенными в F_Γ^- равенством $\varphi(z)=\Phi_\varphi(z)$ $(z\in F_\Gamma^-)$.

Пусть $\varphi, f\in L_p(\Gamma,\rho)$; из равенств (4.I) непосредственно следует, что $\varphi\in L_p^+(\Gamma,\rho)$ $(f\in \overset{\circ}{L}{}_p^-(\Gamma,\rho))$ в том и только том случае, когда $S_\Gamma\varphi=\varphi$ $(S_\Gamma f=-f)$. Из теоремы I.I, гл. I вытекает, что

$$R(\Gamma)\cap \overset{\circ}{L}{}_p^-(\Gamma,\rho)=R_-^0(\Gamma,\rho),\quad R(\Gamma)\cap L_p^+(\Gamma,\rho)=R_+(\Gamma). \tag{4.7}$$

Отсюда, в частности, следует, что множество $R_+(\Gamma)$ и $R_-^0(\Gamma)$ плотны в подпространствах $L_p^+(\Gamma,\rho)$ и $\overset{\circ}{L}{}_p^-(\Gamma,\rho)$ соответственно.

Следующие теоремы устанавливают критерии принадлежности функций $f\,(\in L_p(\Gamma,\rho))$ подпространствам $L_p^+(\Gamma,\rho)$ и $\overset{\circ}{L}{}_p^-(\Gamma,\rho)$.

Пусть $F_1^+,\dots,F_m^+$ и $F_1^-,\dots,F_k^-$ - связные компоненты множеств F_Γ^+ и F_Γ^- соответственно.

ТЕОРЕМА 4.3. Для того чтобы функция φ из $L_p(\Gamma,\rho)$ принадлежала подпространству $L_p^+(\Gamma,\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-\alpha_j^-)^n}=0 \quad (j=1,\dots,k;\ n=1,2,\dots), \tag{4.8}$$

где α_j^- - некоторые точки из F_j^-.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi\in L_p(\Gamma,\rho)$; функция $\Phi_\varphi(z)$ голоморфна в F_Γ^- и в окрестности точки $z=\alpha_j^-$ разлагаются в ряд

$$\Phi_\varphi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-\alpha_j^-)^k}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-\alpha_j^-)^{k+1}}. \tag{4.9}$$

Если выполнены условия (4.8), то функция $\Phi_\varphi(z)\equiv 0$ в F_Γ^-, стало быть, $Q_\Gamma\varphi=0$ и $\varphi\in L_p^+(\Gamma,\rho)$. Достаточность условий (4.8) доказана. Докажем их необходимость. Пусть $\varphi\in L_p^+(\Gamma,\rho)$, тогда $Q_\Gamma\varphi=0$, стало быть, предельные значения функции Φ_φ при $z\to t$ $(z\in F_\Gamma^+,\ t\in\Gamma)$ почти всюду равны нулю. В силу теоремы Лузина-Привалова (И.И.Привалов [I], стр. 292 - 293) $\Phi_\varphi(z)=0$ для всех $z\in F_\Gamma^-$ и, в частности, в окрестностях точек α_j^-. Из равенства (4.9) вытекает (4.8). Теорема доказана. Аналогично доказывается

ТЕОРЕМА 4.4. Для того чтобы функция φ $(\in L_p(\Gamma,\rho))$ принадлежала подпространству $L_p^-(\Gamma,\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-\alpha_j^+)^n}=0 \quad (j=1,\dots,m;\ n=1,2,\dots), \tag{4.10}$$

где α_j^+ - некоторые точки из F_j^+.

Из теоремы 4.4 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть Γ - простой замкнутый контур и $0 \in F_\Gamma^+$. Для того чтобы функция $\varphi (\in L_p(\Gamma,\rho))$ принадлежала подпространству $\overset{\circ}{L}_p(\Gamma,\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\int_\Gamma \varphi(t) t^{-n} dt = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4.11}$$

Имеет место также следующее **предложение**.

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть Γ - простой замкнутый контур. Для того чтобы функция $\varphi (\in L_p(\Gamma,\rho))$ принадлежала подпространству $L_p^+(\Gamma,\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\int_\Gamma \varphi(t) t^{n} dt = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.12}$$

Доказательство этого предложения аналогично доказательству теоремы 4.3. При этом функция $\Phi_\varphi(z)$ разлагается в ряд в окрестности бесконечно удаленной точки.

Пусть Γ - замкнутый сложный контур. Введем подпространство $L_p^-(\Gamma,\rho)$, полагая

$$L_p^-(\Gamma,\rho) = \overset{\circ}{L}{}_p^-(\Gamma,\rho) \dotplus \mathcal{L}\{1\},$$

где $\mathcal{L}\{1\}$ - линейная оболочка функции $\varphi(t) \equiv 1$. Если $\varphi \in L_p^-(\Gamma,\rho)$, то $\varphi = \varphi_1 + c$, где $\varphi_1 \in \overset{\circ}{L}{}_p^-(\Gamma,\rho)$ $c = const$. Функцию φ будем считать определенной в F_Γ^-, полагая $\varphi(z) = \varphi_1(z) + c \ (z \in F_\Gamma^-)$.

Обозначим через $L_\infty^+(\Gamma)$ и $L_\infty^-(\Gamma)$ соответственно множества функций $\varphi_\pm$, голоморфных и ограниченных на F_Γ^+ и F_Γ^-. Пусть $\varphi \in L_\infty^\pm(\Gamma)$ и $\sup_{z \in F_\Gamma^\pm} |\varphi(z)| = M$. По известной теореме Фату (И.И.Привалов [1], стр. 182) **функция** φ имеет почти всюду на Γ предельные значения $\varphi(t) = \lim_{z \to t} \varphi(z)$ $(z \in F_\Gamma^\pm, t \in \Gamma)$ по любым некасательным путям, лежащим в $F_\Gamma^\pm$, причем $\varphi \in L_\infty(\Gamma)$ и $\|\varphi\|_{L_\infty(\Gamma)} = M$. Если функции φ_1 и φ_2 из $L_\infty^\pm(\Gamma)$ имеют почти всюду на Γ одинаковые предельные значения, то в силу теоремы Лузина-Привалова (И.И.Привалов [1], стр. 292 – 293) $\varphi_1 = \varphi_2$. Таким образом, пространство $L^{\pm}_{\infty}(\Gamma)$ можно определить как подпространство пространства $L_{\infty}(\Gamma)$, состоящее из функций φ, являющихся почти всюду пределом функций $\varphi(z)$, голоморфных и ограниченных в $F^{\pm}_{\Gamma}$. Отметим, что не всякая функция $\varphi\,(\in L_{\infty}(\Gamma))$, являющаяся пределом почти всюду на Γ некоторой функции $f(z)$, голоморфной в F^{+}_{Γ}, принадлежит $L^{+}_{\infty}(\Gamma)$. Пусть, например, $\Gamma = \Gamma_0$ – единичная окружность и $\varphi(z) = exp((z+1)/(1-z))$ $(|z|<1)$. В каждой точке $t \neq 1$ контура Γ_0 существует предел $\varphi(t)$ при $z \to t$ $(|z|<1)$, причем $|\varphi(t)| = 1$. Но $\varphi \notin L^{+}_{\infty}(\Gamma_0)$, так как $\varphi((n-1)/n) \to \infty$.

Пусть $\rho(t)$ – весовая функция, определенная в начале этого параграфа.

ТЕОРЕМА 4.6. Имеют место включения

$$L^{+}_{\infty}(\Gamma) \subset L^{+}_{p}(\Gamma,\rho), \quad L^{-}_{\infty}(\Gamma) \subset L^{-}_{p}(\Gamma,\rho). \tag{4.13}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \in L^{+}_{\infty}(\Gamma)$, тогда в силу определения веса ρ будем иметь $\varphi \in L_p(\Gamma,\rho)$. Обозначим через γ_m последовательность составных контуров, содержащихся в F^{+}_{Γ} и сходящихся к Γ. Пусть $\beta_m : F^{+}_{\Gamma} \to F^{+}_{\gamma_m}$ – конформное отображение, удовлетворяющее условию: $\beta_m(t) \to t$ при $m \to \infty$ $(t \in \Gamma)$. Составим функцию $f_m(t) = \varphi(\beta_m(t))(t-\alpha)^{-N}$, где α – некоторая точка из F^{-}_{Γ} и N – произвольное натуральное число. Так как f_m голоморфна в $\bar{F}^{+}_{\Gamma}$, то

$$\int_{\Gamma} f_m(t)\,dt = 0. \tag{4.14}$$

Последовательность f_m $(m=1,2,\ldots)$ равномерно ограничена и сходится почти всюду на Γ к функции $\varphi(t)(t-\alpha)^{-N}$, стало быть, в равенстве (4.14) можно перейти к пределу под знаком интеграла. Таким образом, для функции φ выполняются условия (4.8). Из теоремы 4.3 вытекает, что $\varphi \in L^{+}_{p}(\Gamma,\rho)$. Пусть $\varphi \in L^{-}_{\infty}(\Gamma)$ и $\varphi_0 = \varphi - \varphi(\infty)$. Аналогично рассмотренному выше случаю доказывается, что функция φ_0 удовлетворяет условиям (4.10). Из теоремы 4.4 вытекает, что $\varphi_0 \in \overset{\circ}{L}{}^{-}_{p}(\Gamma,\rho)$, стало быть, $\varphi \in L^{-}_{p}(\Gamma,\rho)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4.7. Пусть Γ – замкнутый сложный контур, $a_+ \in L^{+}_{\infty}(\Gamma)$ и $a_- \in L^{-}_{\infty}(\Gamma)$, тогда для операторов P_Γ и Q_Γ, действующих в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$ имеют место равенства

$$P_\Gamma a_+ P_\Gamma = a_+ P_\Gamma, \quad Q_\Gamma a_- Q_\Gamma = a_- Q_\Gamma. \tag{4.15}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tau \in R(\Gamma)$, тогда $a_+ P\tau = a_+ \tau_+ \in \overset{+}{L}_\infty(\Gamma,\rho)$. Стало быть, $P_\Gamma a_+ P_\Gamma \tau = a_+ P_\Gamma \tau$, откуда следует первое из равенств (4.15). Если $a_- \in \overset{-}{L}_\infty(\Gamma)$, то $a_- Q\tau = a_- \tau_- \in \overset{-}{L}_\infty(\Gamma)$ и $a_-(\infty)\tau_-(\infty) = 0$, стало быть, $a_- Q\tau \in \overset{\circ}{L}{}^-_p(\Gamma,\rho)$. Отсюда вытекает, что $Qa_- Q\tau = a_- Q\tau$, следовательно, $Qa_- Q = a_- Q$. Теорема доказана.

Обозначим через $C^\pm(\Gamma)$ множество функций, голоморфных в $F_\Gamma^\pm$ и непрерывных в $\bar F_\Gamma^\pm$. Из теоремы 4.5 вытекает, что

$$C^+(\Gamma) \subset \overset{+}{L}_p(\Gamma,\rho), \quad C^-(\Gamma) \subset \overset{-}{L}_p(\Gamma,\rho). \tag{4.16}$$

Приведем одно обобщение этого предложения.

ТЕОРЕМА 4.8. Пусть Γ - сложный замкнутый контур. Если функция a_- (a_+) из $L_p(\Gamma,\rho)$ голоморфна в F_Γ^- (F_Γ^+), непрерывна во всех точках множества $\bar F_\Gamma^-$ ($\bar F_\Gamma^+$), за исключением конечного числа точек $t_1,\dots,t_m \in \Gamma$, в окрестности которых она допускает оценку

$$|a_\pm(z)| \le \frac{k}{|z-t_k|^{\mu}}, \tag{4.17}$$

где k - постоянная и $0<\mu<1$, то $a_\pm \in \overset{\pm}{L}_p(\Gamma,\rho)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия теоремы вытекает, что функция $a_+(t-\alpha_-)^{-N}$, где $\alpha_- \in F_\Gamma^-$ и N - натуральное число, удовлетворяет условию леммы 2.3 гл. I, стало быть,

$$\int_\Gamma a_+(t)(t-\alpha^-)^{-N} dt = 0.$$

Из теоремы 4.3 вытекает, что $a_+ \in \overset{+}{L}_p(\Gamma,\rho)$. Так же как в лемме 2.3, гл. I устанавливается, что

$$\int_\Gamma \frac{a_-(t)-a_-(\infty)}{(t-\alpha^+)^N}dt=0 \quad (\alpha^+\in F_+,\ N=1,2,\ldots).$$

В силу теоремы 4.4 $a_- - a_-(\infty)\in \mathring{L}_p^-(\Gamma,\rho)$, стало быть, $a_-\in L_p^-(\Gamma,\rho)$. Теорема доказана.

Отметим, что теорема 4.8 перестает быть верной, если отказаться от условия (4.17). Так, например, рассмотренная выше функция $\varphi(t)=exp((1+t)/(t-1))$ ограничена на Γ_0, непрерывна в каждой точке $t\neq 1$, и является почти всюду на Γ_0 предельным значением функции $exp((1+z)/(z-1))$, голоморфной в Γ_0. Однако функция φ не принадлежит $L_p^+(\Gamma)$ ни при каком p. В самом деле, допустим, что $\varphi\in L_p^+(\Gamma)$. Легко видеть, что $\varphi\in L_\infty^-(\Gamma)$, и в силу теоремы 4.6 $\varphi\in L_p^-(\Gamma_0)$. Следовательно, φ – константа, что неверно.

§ 5. Односторонне обратимые операторы

Пусть $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ – два банахова пространства. Оператор $A\in L(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ называется **обратимым слева**, если существует оператор $B\in L(\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1)$, такой, что $BA=I_1$. Оператор B называется **обратным слева к** A и будет обозначаться через A^{-1}. Оператор A^{-1} из $L(\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1)$, обратный справа к A, определяется равенством $AA^{-1}=I_2$. Если оператор $A\in L(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ обратим слева и справа, то он обратим. Если оператор A обратим только с одной стороны, то соответствующий обратный определяется неоднозначно. Пусть A^{-1} оператор, обратный слева к $A\in L(\mathcal{B})$, тогда все операторы $A^{-1}+\lambda(I-AA^{-1})$ $(\lambda\in\mathbb{C})$ тоже являются обратными слева к оператору A. Если оператор A^{-1} является обратным справа к $A\in L(\mathcal{B})$, то таковыми будут и все операторы семейства $A^{-1}+\lambda(I-A^{-1}A)$ $(\lambda\in\mathbb{C})$.

Пусть $A\in L(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ – обратимый слева оператор и A^{-1} – обратный слева к A. Паре операторов A и A^{-1} сопоставим оператор $\Lambda_A=AA^{-1}\in L(\mathcal{B}_2)$.

1°. Оператор Λ_A является проектором, проектирующим пространство $\mathcal{B}_2$ на подпространство $\mathfrak{Im}\,A$ параллельно $Ker\,A^{-1}$.

Действительно, $\Lambda_A^2=A(A^{-1}A)A^{-1}=\Lambda_A$. Из равенства $A^{-1}A=I_2$ вытекает, что $\mathfrak{Im}\,A^{-1}=\mathcal{B}_2$, стало быть, $\mathfrak{Im}\,A=\mathfrak{Im}\,\Lambda_A$. Очевидно, $Ker\,A=\{0\}$. Следовательно, $Ker\,\Lambda_A=Ker\,A^{-1}$.

Пусть $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ – обратимый справа оператор и A^{-1} – обратный справа к A. Для пары A и A^{-1} введем оператор $\Pi_A = A^{-1}A \in L(\mathcal{B}_1)$.

2^0. Оператор Π_A является проектором, проектирующим пространство $\mathcal{B}_1$ на подпространство $\mathrm{Im}\, A^{-1}$ параллельно $\mathrm{Ker}\, A$.

Это предложение вытекает из предыдущего.

ТЕОРЕМА 5.I. *Для того чтобы оператор $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ был обратим слева, необходимо и достаточно, чтобы*

I. линеал $\mathrm{Im}\, A$ являлся подпространством, имеющим прямое дополнение;

2. $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$.

Если эти условия выполнены и A_0^{-1} $(\in L(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1))$ – один из операторов, обратных слева к A, то общий вид обратных слева к A дается формулой $A_0^{-1}P$, где P – произвольный проектор со свойством $\mathrm{Im}\, P = \mathrm{Im}\, A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условий теоремы уже отмечалась. Докажем их достаточность. Если A рассматривать как оператор, действующий из $\mathcal{B}_1$ на $\mathrm{Im}\, A$, то он имеет ограниченный обратный. Обозначим этот обратный через A_1^{-1}. Через P обозначим какой-либо проектор, проектирующий все пространство $\mathcal{B}_2$ на подпространство $\mathrm{Im}\, A$. Рассмотрим оператор $A_0^{-1} = A_1^{-1}P$. Очевидно, он определен на всем пространстве $\mathcal{B}_2$ и принадлежит $L(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$. Кроме того,

$$A^{-1}A = A_1^{-1}PA = A_1^{-1}A = I_1.$$

Так как для любого проектора P со свойством $\mathrm{Im}\, P = \mathrm{Im}\, A$ будем иметь $PP = P$, то оператор $A_0^{-1}P = A_1^{-1}P$ также является обратным слева к A. Если A^{-1} – произвольный левый обратный к A, то легко видеть, что он представим в виде $A_0^{-1}\Lambda_A$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.I. *Если оператор $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ обратим слева, то*

$$\dim \mathrm{Coker}\, A = \dim \mathrm{Ker}\, A^{-1}.$$

Аналогично теореме 5.I доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.2. **Для того чтобы оператор** $A \in L(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2)$ был обратим справа, необходимо и достаточно, чтобы

1. $\operatorname{Im} A = \mathscr{L}_2$;

2. подпространство $\operatorname{Ker} A$ имело прямое дополнение в $\mathscr{L}_1$.

Если эти условия выполнены и A_0^{-1} $(\in L(\mathscr{L}_2, \mathscr{L}_1))$ – один из обратных справа операторов к A, то общий вид операторов обратных справа к A дается формулой PA_0^{-1}, где P – произвольный проектор со свойством $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} A$.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Если оператор $A \in L(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2)$ обратим справа, то

$$\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Coker} A^{-1}.$$

Приведем еще два простых общих предложения об односторонне обратимых операторах.

3^0. Пусть оператор $A \in L(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2)$ обратим слева и A^{-1} – обратный слева к нему. Тогда уравнение

$$Ax = y \tag{5.I}$$

разрешимо в том и только том случае, когда выполняется условие

$$(I - \Lambda_A) y = 0.$$

При выполнении этого условия вектор $x = A^{-1} y$ является единственным решением уравнения (5.I).

Если оператор $A \in L(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2)$ обратим справа и A^{-1} – обратный к нему, то вектор $x = A^{-1} y$ является одним из решений уравнения (5.I), а подпространство $\operatorname{Ker} A$ совпадает с множеством значений проектора $I - \Pi_A$.

4^0. Пусть операторы $A\in L(\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1)$ и $C\in L(\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3)$ обратимы, а оператор B ($\in L(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$) обратим с одной стороны. Тогда оператор $F=ABC$ обратим с той же стороны, причем

$$\operatorname{Ker} F = C^{-1}\operatorname{Ker} B \quad \text{и} \quad \operatorname{Coker} F = A\operatorname{Coker} B.$$

В частности,

$$\dim\operatorname{Ker} F=\dim\operatorname{Ker} B \quad \text{и} \quad \dim\operatorname{Coker} F=\dim\operatorname{Coker} C.$$

Приведем теорему о возмущении односторонне обратимых операторов.

ТЕОРЕМА 5.4. Если оператор $A\in L(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ обратим с одной стороны, то все операторы $X\in L(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$, удовлетворяющие условию

$$\|X-A\|<1/\|A^{-1}\|, \tag{5.2}$$

обратимы с той же стороны, причем

$$\dim\operatorname{Ker} X=\dim\operatorname{Ker} A,\quad \dim\operatorname{Coker} X=\dim\operatorname{Coker} A.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае, когда оператор A обратим слева, оператор X можно представить в виде $X=(I-B)A$, где $B=(A-X)A^{-1}$. Так как $\|B\|<1$, то оператор B обратим. Таким образом, утверждение вытекает из предложения 4^0. Аналогично, если оператор A обратим справа, то оператор X можно представить в виде $X=A(I-C)$, где $C=A^{-1}(A-X)$. Оператор $I-C$ обратим, так как $\|C\|<1$. Следовательно, утверждения теоремы вытекают из предложения 4^0. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Пусть G - связное множество односторонне обратимых операторов из $L(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$. Если множество G содержит хотя бы один оператор X_0, обратимый слева (справа),

то и все операторы X **из** G **обратимы слева (справа), причем**

$$\dim \operatorname{Coker} X = \dim \operatorname{Coker} X_0 \quad (\dim \ker X = \dim \ker X_0).$$

В самом деле, пусть X – произвольный оператор из G, а X_0 – фиксированный оператор из этого множества. Соединим операторы X и X_0 непрерывной кривой $X(t)$ ($0 \le t \le 1$, $X(0) = X_0, X(1) = X$), все значения которой принадлежат G. В силу теоремы 5.4 отрезок $[0, 1]$ можно покрыть конечным числом окрестностей U_j ($j = 1,2,\ldots,n$), таких, что для каждого множества $G_j = \{X(t): t \in U_j\}$ ($j=1,2,\ldots,n$) утверждения теоремы справедливы. Отсюда непосредственно следует справедливость теоремы и для всего множества G.

§ 6. Сингулярные интегральные операторы и близкие к ним

Пусть Γ – некоторый сложный контур и c, d – пара функций из пространства $L_\infty(\Gamma)$. Операторы вида $A = cI + dS_\Gamma$ и $B = cI + S_\Gamma dI$ называются **сингулярными интегральными операторами вдоль контура** Γ. В этом параграфе мы ограничимся рассмотрением этих операторов в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$, где $1 < p < \infty$, а весовая функция ρ имеет вид

$$\rho(t) = \prod_{j=1}^{n} |t - t_j|^{\beta_j}$$

и удовлетворяет условиям $-1 < \beta_j < p-1$.

Как показано в гл. I, при этих условиях операторы A и B являются линейными ограниченными операторами. В дальнейшем эти операторы будут записываться в более удобном виде:

$$A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma \quad \text{и} \quad B = P_\Gamma aI + Q_\Gamma bI,$$

где $a = c+d$, $b = c-d$, $P_\Gamma = \frac{1}{2}(I + S_\Gamma)$ и $Q_\Gamma = \frac{1}{2}(I - S_\Gamma)$. Функции a и b будем называть **коэффициентами оператора** A и оператора B. Очевидно,

$$\|A\|, \|B\| \le \sup_{t\in\Gamma}|a(t)|\,\|P_\Gamma\| + \sup_{t\in\Gamma}|b(t)|\,\|Q_\Gamma\|.$$

Операторы A^* и B^*, сопряженные к операторам A и B, действуют в пространстве $L_q(\Gamma, \rho^{1-q})(p^{-1}+q^{-1}=1)$ и имеют вид

$$A^* = P_\Gamma^* \bar{a} I + Q_\Gamma^* \bar{b} I \qquad \text{и} \quad B^* = \bar{a} P_\Gamma^* + \bar{b} Q_\Gamma^*.$$

Согласно теореме 7.I, гл. I, имеет место равенство $S_\Gamma^* = -H_\Gamma S_\Gamma H_\Gamma$, где H_Γ – оператор, определенный равенством $(H_\Gamma \varphi)(t) = h_\Gamma(t)\varphi(t)$, $h_\Gamma(t) = exp\, i\theta_\Gamma(t)$, а $\theta_\Gamma(t)$ – угол наклона касательной к кривой Γ в точке t к положительному направлению оси x. Отсюда непосредственно следует, что $P_\Gamma^* = H_\Gamma Q_\Gamma H_\Gamma$ и $Q_\Gamma^* = H_\Gamma P_\Gamma H_\Gamma$. Легко видеть, что для любой функции $a \in L_\infty(\Gamma)$ имеет место равенство $H_\Gamma a H_\Gamma = \bar{a} I$. Таким образом, имеют место равенства

$$A^* = H_\Gamma(P_\Gamma b I + Q_\Gamma a I)H_\Gamma \quad \text{и} \quad B^* = H_\Gamma(b P_\Gamma + a Q_\Gamma)H_\Gamma. \tag{6.I}$$

В дальнейшем неоднократно будут использованы следующие правила умножения сингулярных операторов, действующих в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$.

I°. Пусть $f, g \in C(\Gamma)$ и $a, b \in L_\infty(\Gamma)$, где Γ – замкнутый сложный контур, тогда

$$(aP_\Gamma + bQ_\Gamma)(fP_\Gamma + gQ_\Gamma) = afP_\Gamma + bgQ_\Gamma + T, \tag{6.2}$$

где T – вполне непрерывный оператор.

Равенство (6.2.) вытекает из теоремы 4.3, гл. I, о полной непрерывности оператора $cS_\Gamma - S_\Gamma cI$, где c – произвольная функция, непрерывная на Γ.

2°. Пусть $a, b \in L_\infty(\Gamma)$; $f_+ \in L_\infty^+(\Gamma)$ и $f_- \in L_\infty^-(\Gamma)$ тогда

$$(aP_\Gamma + bQ_\Gamma)(f_+P_\Gamma + f_-Q_\Gamma) = af_+P_\Gamma + bf_-Q_\Gamma. \tag{6.3}$$

Равенство (6.3) вытекает непосредственно из равенств (4.I5).

Рассмотрим случай, когда контур $\Gamma = \Gamma_0$ является единичной окружностью с центром в начале координат. При этом предположении система функций t^j $(j=0,\pm 1,\dots;\ |t|=1)$ образует базис в пространстве $L_p(\Gamma_0,\rho)$. В самом деле, легко видеть, что операторы P_{nm} $(n,m=1,2,\dots)$, определенные равенствами

$$P_{nm}=t^{-m}P_\Gamma t^{m}-t^{n+1}P_\Gamma t^{-n-1}, \tag{6.4}$$

являются проекторами, проектирующими пространство $L_p(\Gamma_0,\rho)$ на подпространство $\mathscr{L}\{t^{-m},t^{-m+1},\dots,t^{n}\}$ параллельно замыканию линейной оболочки $\mathscr{L}\{t^{-m-1},t^{-m-2},\dots;\ t^{n+1},t^{n+2},\dots\}$. Так как линейная оболочка системы t^j $(j=0,\pm1,\dots)$ плотна в пространстве $L_p(\Gamma_0,\rho)$ (следствие I.3, гл. I) и $\sup\|P_{nm}\|\le 2\|P_\Gamma\|$, то проекторы P_{nm} сильно сходятся к единичному оператору при m и $n\to\infty$. Стало быть, $\{t^j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ является базисом* пространства $L_p(\Gamma_0,\rho)$. Таким образом, всякая функция $\xi\in$ $\in L_p(\Gamma_0,\rho)$ разлагается в сходящийся по норме ряд

$$\xi(t)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\xi_j t^j \quad (|t|=1).$$

Числа ξ_j являются коэффициентами Фурье функции $\xi(t)$.

Обозначим через a_k $(k=0,\pm1,\dots)$ и b_k $(k=0,\pm1,\dots)$ коэффициенты Фурье функций a и b. Без труда проверяется, что операторам A и B в базисе $\{t^k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ отвечают матрицы

$$\|a_{jk}\|_{j,k=-\infty}^{\infty} \quad \text{и} \quad \|b_{jk}\|_{j,k=-\infty}^{\infty},$$

где

$$a_{jk}=\begin{cases} a_{j-k} & \text{при } k\geq 0,\\ b_{j-k} & \text{при } k<0,\end{cases} \tag{6.5}$$

а

$$b_{jk}=\begin{cases} a_{j-k} & \text{при } j\geq 0,\\ b_{j-k} & \text{при } j<0.\end{cases} \tag{6.6}$$

В теории дискретных уравнений Винера-Хопфа оператор, порожденный матрицей (6.6), называется парным оператором, а опе-

---

* Отметим, что этот базис, вообще говоря, не является безусловным (см. К.И.Бабенко [I]).

ратор, порожденный матрицей (6.5), называется оператором, транспонированным к парному (см. И.Ц.Гохберг и И.А.Фельдман [I], стр. 179 - 180). Эти операторы чаще рассматриваются в пространствах ℓ_p.

Аналогичная связь с парными континуальными операторами имеет место также в случае, когда Γ является вещественной осью.

Выясним еще непосредственную связь между операторами Винера-Хопфа и сингулярными интегральными операторами.

Пусть $A_0 = aP_0 + Q_0$ и $B_0 = P_0 aI + Q_0$, где $P_0 = P_{\Gamma_0}$ и $Q_0 = Q_{\Gamma_0}$. Легко видеть, что имеют равенство

$$A_0 = (P_0 a P_0 + Q_0)(Q_0 a P_0 + I) \quad \text{и} \quad B_0 = (P_0 a Q_0 + I)(P_0 a P_0 + Q_0),$$

причем операторы $I + Q_0 a P_0$ и $I + P_0 a Q_0$ обратимы:

$$(I + P_0 a Q_0)^{-1} = I - P_0 a Q_0 \qquad \text{и} \quad (I + Q_0 a P_0)^{-1} = I - Q_0 a P_0.$$

Система $\{t^k\}_{k=0}^{\infty}$ является, очевидно, базисом пространства $L_p^+(\Gamma_0, \rho)$. Сужению оператора $P_0 a P_0$ на подпространство $L_p^+(\Gamma, \rho)$ в базисе $\{t^k\}_0^{\infty}$ отвечает теплицева матрица

$$\| a_{j-k} \|_{j,k=0}^{\infty}. \tag{6.7}$$

Отсюда вытекает, например, следующее утверждение. Оператор $P_0 a I$, определенный в пространстве $L_p^+(\Gamma_0, \rho)$ матрицей (6.7), обратим слева (справа) в том и только том случае, когда обратим слева (справа) каждый из операторов A_0 и B_0. Без труда проверяется, что

$$(P_0 a I \mid L_p^+(\Gamma_0, \rho))^{-1} = P_0 A_0^{-1} \mid L_p^+(\Gamma_0, \rho) = P_0 B_0^{-1} \mid L_p^+(\Gamma_0, \rho).$$

Через $A \mid \mathscr{L}$ обозначается сужение оператора A на подпространство $\mathscr{L}$.

Аналогичные утверждения имеют место и для континуальных интегральных уравнений Винера-Хопфа (И.Ц.Гохберг и И.А.Фельдман [I], стр. 181).

§ 7. Примеры односторонне обратимых сингулярных интегральных операторов

Пусть Γ - сложный замкнутый контур. В этом параграфе исследуются операторы вида

$$V_{n;\lambda}=(t-\lambda)^n P_\Gamma + Q_\Gamma,$$

где $n=0,\pm 1,\ldots$ и $\lambda\in\mathbb{C}$, а также другие примеры сингулярных интегральных операторов. При всех натуральных числах n имеет место равенство

$$V_{n;\lambda}=V_{1;\lambda}^n .$$

Кроме того, при $\lambda\notin\Gamma$

$$V_{-n;\lambda}V_{n;\lambda}=I \quad (n=1,2,\ldots). \tag{7.1}$$

В левой части (7.1) можно переставить сомножители при $\lambda\in F_\Gamma^-$.

Все перечисленные свойства непосредственно вытекают из равенства (6.3).

При $\lambda\in F_\Gamma^+$ нельзя переставлять множители в левой части равенства (7.1), так как оператор $V_{1;\lambda}$ не является обратимым справа. Легко видеть, что в этом случае

$$\operatorname{Im} V_{1;\lambda}=\{f\in L_p(\Gamma,\rho):(P_\Gamma f)(\lambda)=0\},$$

откуда непосредственно следует, что $\operatorname{Im} V_{1;\lambda}\neq L_p(\Gamma,\rho)$. Отметим еще равенство

$$\operatorname{Ker} V_{-1;\lambda}=\mathcal{L}\{1-(t-\lambda)^{-1}\} \quad (\lambda\in F_\Gamma^+)$$

и более общее равенство

$$\operatorname{Ker} V_{-n;\lambda}=\mathcal{L}\left\{(t-\lambda)^{n-1}-\frac{1}{t-\lambda},(t-\lambda)^{n-2}-\frac{1}{(t-\lambda)^2},\ldots,1-\frac{1}{(t-\lambda)^n}\right\} \tag{7.2}$$

при $n=1,2,\ldots$ и $\lambda\in F_\Gamma^+$. Эти равенства легко получаются, если искать решение φ уравнения $V_{-n;\lambda}\varphi=0$ в виде

$$P_\Gamma \varphi = c_0 + c_1(t-\lambda)+\ldots+c_{n-1}(t-\lambda)^{n-1}+(t-\lambda)^n\varphi_+(t),$$

где $c_j \in \mathbb{C}$ и $\varphi_+ \in \mathfrak{Im}\, P_\Gamma$.

ТЕОРЕМА 7.I. Оператор $V_{n;\lambda}$ $(n=\pm 1,\pm 2,\ldots)$ обратим при $\lambda \in F_\Gamma^-$ и обратим слева при $\lambda \in F_\Gamma^+$. Обратный оператор в обоих случаях равен $V_{-n;\lambda}$.

При $n=1,2,\ldots$ имеют место равенства

$$V_{n;\lambda} = V_{1;\lambda}^n$$

и

$$\operatorname{Ker} V_{-n;\lambda} = \mathcal{L}\left\{(t-\lambda)^{n-1}-\frac{1}{t-\lambda},(t-\lambda)^{n-2}-\frac{1}{(t-\lambda)^2},\ldots,1-\frac{1}{(t-\lambda)^n}\right\}\quad (\lambda \in F_\Gamma^+).$$

В частности,

$$\dim \operatorname{Ker} V_{-n;\lambda} = n \quad \text{и} \quad \dim \operatorname{Coker} V_{n;\lambda} = n$$

при $\lambda \in F_\Gamma^+$ и $n=1,2,\ldots$.

Если $\lambda \in \Gamma$, то операторы $V_{n;\lambda}$ $(n=\pm 1,\pm 2,\ldots)$ не имеют обратного ни с одной стороны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Осталось доказать последнее утверждение теоремы. Очевидно, можно ограничиться оператором $V_{1;\lambda}$. Пусть $\lambda = t_0 \in \Gamma$. Тогда по доказанному в каждой окрестности оператора $V_{t_0}=(t-t_0)P_\Gamma+Q_\Gamma$ существуют операторы V_λ, обратимые с двух сторон, и операторы, обратимые только с одной стороны. Последнее противоречит теореме 5.4, если оператор V_{t_0} обратим с какой-либо стороны. Теорема доказана.

Аналогично доказывается

ТЕОРЕМА 7.2. Оператор

$$W_{n;\lambda} = P_\Gamma + (1-\lambda t^{-1})^n Q_\Gamma \quad (n=1,2,\ldots)$$

обратим при $\lambda \in F_\Gamma^+$ и обратим слева при $\lambda \in F_\Gamma^-$. Обратный оператор к $W_{n;\lambda}$ в обоих случаях равен

$$W_{-n;\lambda}=P_\Gamma+(1-\lambda t^{-1})^{-n}Q_\Gamma.$$

При $n=1,2,\dots$ имеют место равенства

$$W_{n;\lambda}=W_{1;\lambda}^{n}$$

и

$$\operatorname{Ker} W_{-n;\lambda}=\mathcal{L}\{gt^{-1},gt^{-2},\dots,gt^{-n}\}\ \left(g(t)=\frac{t^n}{(t-\lambda)^n}-1\right) \qquad (7.3)$$

В частности,

$$\dim\operatorname{Ker} W_{-n;\lambda}=n \qquad \text{и} \quad \dim\operatorname{Coker} W_{n;\lambda}=n$$

при $\lambda\in F_\Gamma^-$ и $n=1,2,\dots$.

Если $\lambda\in\Gamma$, то операторы $W_{n;\lambda}\,(n=\pm1,\pm2,\dots)$ не имеют обратных ни с одной стороны.

Аналогичным образом исследуются операторы

$$P_\Gamma(t-\lambda)^n I+Q_\Gamma \qquad \text{и} \quad P_\Gamma+Q_\Gamma(1-\lambda t^{-1})^n I.$$

Рассмотрим более общий пример. В пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$ исследуем оператор

$$Y=(a_{-1}t^{-1}+a_0+a_1t)P_\Gamma+Q_\Gamma,$$

где $a_{-1},a_0,a_1\in\mathbb{C}$ $(a_1\neq0$ и $a_{-1}\neq0)$. Пусть α и β – корни многочлена $a_1t^2+a_0t+a_{-1}$. В зависимости от расположения корней α и β возможны четыре случая.

а) Корни $\alpha,\beta\in F_\Gamma^-$. В этом случае оператор Y можно представить в виде $Y=Y_1Y_2Y_3$, где $Y_1=a_1t^{-1}P_\Gamma+Q_\Gamma$, $Y_2=(t-\alpha)P_\Gamma+Q_\Gamma$ и $Y_3=(t-\beta)P_\Gamma+Q_\Gamma$. Как уже отмечалось выше, операторы Y_2 и Y_3 обратимы, а оператор Y_1 обратим справа, причем $\dim\ker Y_1=1$. Таким образом, в этом случае оператор Y обратим справа и $\dim\ker Y=1$.

б) Корни $\alpha,\beta\in F_\Gamma^+$. В этом случае, как легко видеть, имеет место равенство $Y=Y_0Y_1Y_2Y_3$, где $Y_0=(1-\alpha t^{-1})(1-\beta t^{-1})I$, $Y_1=a_1tP_\Gamma+Q_\Gamma$, $Y_2=P_\Gamma+(1-\alpha t^{-1})^{-1}Q_\Gamma$, $Y_3=P_\Gamma+(1-\beta t^{-1})Q_\Gamma$.

Как было установлено выше, операторы Y_2, Y_3 обратимы, а оператор Y_1 обратим слева и $\dim \operatorname{Coker} Y_1 = 1$. Стало быть, оператор Y обратим слева $\dim \operatorname{Coker} Y = 1$.

в) Один из корней α и β принадлежит F_Γ^+, а другой F_Γ^-. Для определенности положим $\alpha \in F_\Gamma^-$ и $\beta \in F_\Gamma^+$. При этих ограничениях оператор Y можно представить в виде $Y = Y_0 Y_1 Y_2$, где $Y_0 = (1-\beta t^{-1})I$, $Y_1 = a_1(t-\alpha)P_\Gamma + Q_\Gamma$ и $Y_2 = P_\Gamma + (1-\beta t^{-1})^{-1} Q_\Gamma$. Все операторы Y_0, Y_1 и Y_2 обратимы. Следовательно, оператор Y обратим.

г) Один из корней α, β находится на Γ. Очевидно, малыми изменениями одного или обоих корней можно добиться, чтобы оператор Y был обратим, а также чтобы он был обратим только о одной стороны. Отсюда вытекает, что оператор Y в этом случае не является обратимым ни с одной стороны.

Рассмотрим теперь специальный случай, когда контур Γ является окружностью $\Gamma_0 = \{\zeta : |\zeta| = 1\}$.

ТЕОРЕМА 7.3. Для оператора

$$Y_0 = (a_{-1}\zeta^{-1} + a_0 + a_1\zeta)P_0 + Q_0,$$

где $a_{-1}, a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, $P_0 = P_{\Gamma_0}$, $Q_0 = Q_{\Gamma_0}$, действующего в $L_p(\Gamma, \rho)$, имеют место следующие утверждения.

Если $|a_{-1}| \neq |a_1|$, то спектр оператора Y_0 состоит из всех точек плоскости, ограниченных эллипсом

$$\frac{(a_0 - \operatorname{Re}\lambda)^2}{(a_{-1}+a_1)^2} + \frac{(\operatorname{Im}\lambda)^2}{(a_{-1}-a_1)^2} = 1, \tag{7.4}$$

и точки $\lambda = 1$.

Во всех внутренних точках $\lambda (\lambda \neq 1)$ спектра при $|a_{-1}| > |a_1|$ оператор $Y_0 - \lambda I$ обратим справа и $\dim \operatorname{Ker}(Y_0 - \lambda I) = 1$, при $|a_{-1}| < |a_1|$ оператор $Y_0 - \lambda I$ обратим слева $\dim \operatorname{Coker}(Y_0 - \lambda I) = 1$.

Если $a_{-1} = a_1$, то спектр оператора Y_0 состоит из отрезка вещественной оси $[-2|a_1| + a_0, 2|a_1| + a_0]$ и точки $\lambda = 1$.

Если $a_{-1} = -a_1$, то спектр оператора Y_0 состоит из отрезка, соединяющего точки $a_0-i2|a_1|$ и $a_0+i2|a_1|$ и точки $\lambda=1$

В обоих последних случаях в точках λ ($\lambda\neq 1$) спектра $\dim \operatorname{Ker}(Y_0-\lambda I)=0$ и $\dim \operatorname{Coker}(Y_0-\lambda I)=0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор $Y_0-\lambda I$ можно представить в виде

$$Y_0-\lambda I=(a_{-1}\zeta^{-1}+a_0-\lambda+a\zeta)P_0+(1-\lambda)Q_0.$$

Точка $\lambda=1$, очевидно, является точкой спектра оператора Y_0, поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $\lambda\neq 1$.

Отыщем сперва множество $\Sigma=\Sigma(a_{-1},a_0,a_1)$ чисел λ, для которых уравнение $a_{-1}\zeta^{-1}+a_0-\lambda+a_1\zeta=0$ имеет хотя бы одно решение на единичной окружности. Положим $\zeta=\cos\varphi+i\sin\varphi$ $(0\le\varphi<2\pi)$, тогда равенство $a_{-1}\zeta^{-1}+a_0-\lambda+a_1\zeta=0$ эквивалентно следующему:

$$a_0-\operatorname{Re}\lambda=-(a_{-1}+a_1)\cos\varphi \quad \text{и} \quad \operatorname{Im}\lambda=(a_1-a_{-1})\sin\varphi. \tag{7.5}$$

Отсюда вытекает, что при $|a_1|\neq|a_{-1}|$ множество $\Sigma(a_{-1},a_0,a_1)$ совпадает с внутренностью эллипса (7.4). Легко видеть, что если $|a_{-1}|<|a_1|$, то при всех λ, лежащих внутри эллипса (7.4), оба корня уравнения $a_{-1}\zeta^{-1}+a_0-\lambda+a\zeta=0$ лежат внутри единичного круга. Аналогично, если $|a_{-1}|>|a_1|$, то при всех λ, лежащих внутри эллипса (7.4), оба корня уравнения $a_{-1}\zeta^{-1}+a_0-\lambda+a_1\zeta=0$ лежат вне единичного круга. Если же $|a_{-1}|\neq|a_1|$, то при всех λ, лежащих вне эллипса, один корень уравнения находится внутри единичного круга, а второй вне.

Таким образом, первое утверждение теоремы является следствием приведенных выше утверждений а) – г).

Пусть теперь $a_1=a_{-1}$, тогда из равенства (7.5.) вытекает, что в этом случае

$$\Sigma(a_1,a_0,a_1)=\{\lambda:-2|a_1|+a_0\le\lambda\le a_0+2|a_1|\}. \tag{7.6}$$

Если λ не принадлежит этому отрезку, то оператор $Y_0-\lambda I$ обратим. Этот вывод можно сделать с помощью теоремы 5.4 или проверив, что в этом случае уравнение $a_{-1}\zeta^{-1}+a_0-\lambda+a_1\zeta=0$ имеет один корень внутри, а другой – вне единичного круга.

При $a_1=-a_{-1}$ из (7.5) вытекает, что

$$\Sigma(-a_1,a_0,a_1)=\{\lambda=i\mu+a_0:-2|a_1|\le\mu\le2|a_1|\}. \qquad (7.7)$$

Если λ не принадлежит этому отрезку, то оператор $Y_0-\lambda I$ обратим. Наконец, если точка λ принадлежит множеству (7.6) и (7.7), то оператор $Y_0-\lambda I$ предотавим в виде произведения операторов вида $(1-\zeta^{-1}\rho)P_0+Q_0$ и $(\zeta-\omega)P_0+Q_0$, где ρ и ω – точки единичной окружности. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что ядра этих операторов состоят только из нуля. Сопряженные операторы к приведенным имеют вид $P_0(1-\zeta\bar{\rho})I+Q_0$, $P_0(\zeta^{-1}-\bar{\omega})I+Q_0$. Ядра этих операторов также состоят только из нуля. Отсюда в силу теоремы 5.1 и 5.2 вытекает справедливость последнего утверждения теоремы. Теорема доказана.

§ 8. Две леммы о спектре элемента в подалгебре банаховой алгебры[x]

Пусть $\mathfrak{A}$ – произвольная банахова алгебра с единицей e и $\mathfrak{A}_1$ ($e\in\mathfrak{A}_1$) – некоторая ее подалгебра. Для элемента $x\in\mathfrak{A}$ через $\rho(x,\mathfrak{A}_1)$ обозначим множество комплексных чисел λ, для которых элемент $x-\lambda e$ обратим и $(x-\lambda e)^{-1}\in\mathfrak{A}_1$. В частности, $\rho(x,\mathfrak{A})=\rho(x)$ состоит из всех регулярных значений λ элемента x.

Множество[xx] $\rho(x,\mathfrak{A}_1)$ является открытым множеством. Действительно, если $\lambda_0\in\rho(x,\mathfrak{A}_1)$, то при $|\lambda-\lambda_0|<\|(x-\lambda_0 e)^{-1}\|^{-1}$ элемент $x-\lambda e$ обратим и

$$(x-\lambda e)^{-1}=\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_0-\lambda)^j(x-\lambda_0 e)^{-j-1}. \qquad (8.1)$$

Стало быть, $\lambda\in\rho(x,\mathfrak{A}_1)$.

Множество $\sigma(x,\mathfrak{A}_1)$, дополняющее $\rho(x,\mathfrak{A}_1)$ до всей плоскости, будем называть спектром элемента x в подалгебре $\mathfrak{A}_1$. В частности, $\sigma(x,\mathfrak{A})=\sigma(x)$ является спектром элемента x. Множество $\sigma(x,\mathfrak{A}_1)$ замкнуто.

---

[x] Этот и следующий параграфы используются лишь в § 11, гл. III, и в § 9, гл. IV.

[xx] Это множество может быть пустым.

Для того чтобы спектр $\sigma(x, \mathfrak{A}_1)$ был ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы элемент x принадлежал подалгебре $\mathfrak{A}_1$. В самом деле, если $x \in \mathfrak{A}_1$, то для чисел λ с $|\lambda| > \|x\|$ элемент $x - \lambda e$ обратим и

$$(x-\lambda e)^{-1} = -\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j-1} x^j,$$

следовательно, $(x-\lambda e)^{-1} \in \mathfrak{A}_1$.

Обратно, пусть в области $|\lambda| \geqslant \delta\ (\delta > \|x\|)$ элемент $x - \lambda e$ обратим и $(x-\lambda e)^{-1} \in \mathfrak{A}_1$. Тогда элемент

$$\left(e - \frac{1}{\lambda} x\right)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j} x^j \quad (|\lambda| \geqslant \delta)$$

также принадлежит алгебре $\mathfrak{A}_1$, а вместе с ним алгебре $\mathfrak{A}_1$ принадлежит элемент

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\delta} \left(e - \frac{1}{\lambda} x\right)^{-1} d\lambda = x.$$

Множество $\rho(x, \mathfrak{A}_1)$ состоит из конечного или счетного множества связных компонент, которые будем обозначать через $\rho_j(x, \mathfrak{A}_1)$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$. Среди компонент $\rho_j(x, \mathfrak{A}_1)$ только одна может быть неограниченной. Неограниченную компоненту будем всегда обозначать через $\rho_0(x, \mathfrak{A}_1)$. Очевидно, $\sigma(x) \subset \subset \sigma(x, \mathfrak{A}_1)$. Имеет место

ЛЕММА 8.I. Пусть $x \in \mathfrak{A}$ и $\rho_j(x)$ - некоторая связная компонента $\rho(x)$. Если пересечение $\rho_j(x) \cap \rho(x, \mathfrak{A}_1)$ непусто, то $\rho_j(x) \subset \rho(x, \mathfrak{A}_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что точка $\lambda_0 \in \rho_j(x) \cap \rho(x, \mathfrak{A}_1)$. Пусть λ - произвольная точка компоненты $\rho_j(x)$. Соединим точки λ_0 и λ кривой Γ, целиком лежащей в компоненте $\rho_j(x)$. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m (= \lambda)$ точки кривой Γ, для которых

$$|\lambda_{k-1} - \lambda_k| < 1 / \max_{\lambda \in \Gamma} \|(x-\lambda e)^{-1}\| \quad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{8.2}$$

Элемент $(x - \lambda_0 e)^{-1}$ по условию принадлежит подалгебре $\mathfrak{A}_1$. Из соотношения (8.2) вытекает, что при $\lambda = \lambda_1$ ряд (8.I) сходится. Этот ряд определяет элемент $(x - \lambda_1 e)^{-1}$, который принадлежит подалгебре $\mathfrak{A}_1$.

Отправляясь от элемента $x - \lambda_1 e$, таким же образом доказывается, что элемент $(x - \lambda_2 e)^{-1} \in \mathfrak{A}_1$. Продолжая рассуждения так далее, устанавливаем, что $(x-\lambda e)^{-1}=(x-\lambda_m e)^{-1}\in \mathfrak{A}_1$. Лемма доказана.

Из этой леммы следует, что спектр $\sigma(x, \mathfrak{A}_1)$ элемента $x\in\mathfrak{A}$ в подалгебре $\mathfrak{A}_1$ состоит из спектра $\sigma(x)$ этого элемента во всей алгебре и, быть может, из некоторых целых связных компонент множества $\rho(x)$ $(=\rho(x,\mathfrak{A}))$. В частности, если $x\in\mathfrak{A}_1$, то $\rho_0(x,\mathfrak{A}_1)=\rho_0(x,\mathfrak{A})$.

ЛЕММА 8.2. *Пусть $\mathfrak{A}_1$ – коммутативная подалгебра банаховой алгебры $\mathfrak{A}$. Если в $\mathfrak{A}_1$ имеется плотное множество $\mathcal{P}$, такое, что*

$$\sigma(x,\mathfrak{A}_1)=\sigma(x,\mathfrak{A}) \tag{8.3}$$

для всех элементов $x\in\mathcal{P}$, то для любого элемента $z\in\mathfrak{A}_1$

$$\sigma(z,\mathfrak{A}_1)=\sigma(z,\mathfrak{A}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathfrak{M}$ компакт максимальных идеалов алгебры $\mathfrak{A}_1$ и через $z(M)$ – преобразование Гельфанда элемента $z\in\mathfrak{A}_1$. Как известно,

$$\sigma(z,\mathfrak{A}_1)=\left\{z(M): M\in\mathfrak{M}\right\}.$$

Допустим, что для элемента $z\in\mathfrak{A}_1$, имеющего обратный в $\mathfrak{A}$, найдется идеал $M_0\in\mathfrak{M}$, такой, что $z(M_0)=0$. Подберем элемент $x_1\in\mathcal{P}$ так, чтобы $\|x_1-z\|<1/2\,\|z\|^{-1}$. Так как $|x_1(M_0)|\le\|x_1-z\|$, то для элемента $x=x_1-x_1(M_0)e$ выполняются соотношения

$$\|x-z\|<1/\|z\|^{-1} \tag{8.4}$$

и

$$x(M_0)=0. \tag{8.5}$$

Из соотношения (8.4) вытекает, что число $x(M_0)\in\rho(x,\mathfrak{A})$, а из (8.5) следует, что $x(M_0)\notin\rho(x,\mathfrak{A}_1)$. Последнее противоречит условию (8.3). Лемма доказана.

§ 9. Подалгебры банаховой алгебры, порожденные одним элементом[*]

Пусть по-прежнему $\mathfrak{A}$ – банахова алгебра с единицей e. Для любого $x \in \mathfrak{A}$ через Ω_x обозначим множество целых неотрицательных чисел, используемых в качестве индексов для нумерации всех связных компонент $\rho_j(x, \mathfrak{A})\ (=\rho_j(x))$ множества $\rho(x, \mathfrak{A})$.

Пусть $x \in \mathfrak{A}$, Ω – некоторое подмножество Ω_x и λ_j – какие-либо числа из $\rho_j(x, \mathfrak{A})\ (j \in \Omega)$. Через $\mathfrak{A}(x, \Omega)$ обозначим наименьшую подалгебру (с единицей) алгебры $\mathfrak{A}$, содержащую все элементы $(x-\lambda_j e)^{-1}\ (j \in \Omega)$. Алгебру $\mathfrak{A}(x, \Omega_x)$ будем обозначать через $\mathfrak{A}(x)$.

Алгебра $\mathfrak{A}(x, \Omega)$, очевидно, является замыканием линейной оболочки всех элементов вида $(x-\lambda_j e)^{-k}\ (k=0,1,\dots;\ j \in \Omega)$.

Отметим прежде всего, что $\mathfrak{A}(x, \Omega)$ является коммутативной подалгеброй, не зависящей от выбора чисел λ_j в компонентах $\rho_j(x, \mathfrak{A})\ (j \in \Omega)$. В самом деле, согласно лемме 7.I все компоненты $\rho_j(x, \mathfrak{A})\ (j \in \Omega)$ принадлежат $\rho(x, \mathfrak{A}_1)$, где $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}(x, \Omega)$. Следовательно, элементы $(x-\mu_j e)^{-1}$ принадлежат $\mathfrak{A}_1$, каковы бы ни были числа $\mu_j \in \rho_j(x, \mathfrak{A})\ (j \in \Omega)$. Пусть $\mathfrak{A}_2$ – минимальная подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, содержащая элементы $(x-\mu_j e)^{-1}\ (j \in \Omega)$. Тогда $\mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{A}_1$. Поменяв $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ ролями, получим $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2$. Таким образом, $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2$.

Отметим еще, что если нуль принадлежит Ω, то в определении алгебры $\mathfrak{A}(x, \Omega)$ элемент $(x-\lambda_0 e)^{-1}$ можно заменить элементом x.

ТЕОРЕМА 9.I. *Пусть $x \in \mathfrak{A}$. Спектр элемента x в подалгебре $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}(x, \Omega)$ состоит из объединения спектра $\sigma(x)$ этого элемента во всей алгебре и всех компонент $\rho_j(x, \mathfrak{A})\ (j \in \Omega_x \setminus \Omega)$.*

Компакт максимальных идеалов алгебры $\mathfrak{A}_1$ гомеоморфен множеству $\sigma(x, \mathfrak{A}_1)$.

Если $\Omega = \Omega_x$, то есть $\sigma(x, \mathfrak{A}) = \sigma(x, \mathfrak{A}_1)$, то и для любого элемента $z \in \mathfrak{A}_1$

$$\sigma(z, \mathfrak{A}_1) = \sigma(z, \mathfrak{A}).$$

---

[*] Этот параграф как и предыдущий используется в § 11, гл. III, и в § 9, гл. IV.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathfrak{K}$ линейную оболочку всех элементов $(x-\lambda_j e)^{-n}$ $(j\in\Omega,\ n=1,2,\ldots)$, где λ_j – фиксированные числа из компонент $\rho_j(x,\mathfrak{A})$ $(j\in\Omega)$. Каждому элементу r вида

$$r=\sum_{j\in N;\, n} a_{jn}(x-\lambda_j e)^{-n} \quad (\in \mathfrak{K}) \tag{9.1}$$

сопоставим рациональную функцию $r(t)$, получаемую заменой в (9.1) элемента x аргументом t. Так как $\sigma(x,\mathfrak{A})\subset\sigma(x,\mathfrak{A}_1)$, то множество значений функции $r(t)$, когда t пробегает $\sigma(x,\mathfrak{A})$, принадлежит спектру $\sigma(x,\mathfrak{A}_1)$. Стало быть,

$$|r(t)|\leq\|r\| \quad (t\in\sigma(x,\mathfrak{A})). \tag{9.2}$$

Последнее неравенство имеет место на границе каждой из компонент $\rho_j(a,\Omega)$ $(j\in\Omega_x\setminus\Omega)$. Так как для любого элемента $r\in\mathfrak{K}$ функция $r(t)$ голоморфна в каждой из компонент $\rho_j(x,\mathfrak{A})$ $(j\in\Omega_x\setminus\Omega)$, то в силу принципа максимума модуля неравенство (9.2) имеет место и во всех точках $t\in\rho_j(x,\mathfrak{A})$ $(j\in\Omega_x\setminus\Omega)$.

Таким образом, для любого $r\in\mathfrak{K}$

$$\max_{t\in F}|r(t)|\leq\|r\|, \tag{9.3}$$

где $F=\sigma(x)\cup(\bigcup_{j\in\Omega_x\setminus\Omega}\rho_j(x,\mathfrak{A}))$.

Пусть z – произвольный элемент из $\mathfrak{A}_1$ и $r_n(n=1,2,\ldots)$ – последовательность элементов из $\mathfrak{K}$, стремящаяся к z по норме. Тогда в силу (9.3) последовательность функций $r_n(t)$ сходится равномерно на F к некоторой непрерывной функции. Эта функция не зависит от выбора последовательности r_n и будет обозначаться через $z(t)$ $(t\in F)$. Функция $z(t)$ голоморфна в компонентах $\rho_j(x,\mathfrak{A})$ $(j\in\Omega_x\setminus\Omega)$, и имеет место неравенство

$$\max_{t\in F}|z(t)|\leq\|z\|. \tag{9.4}$$

Покажем, что множество F гомеоморфно компакту максимальных идеалов алгебры $\mathfrak{A}_1$ и функция $z(t)$ является преобразованием Гельфанда элемента z. В самом деле, функционал $f_{t_0}(z) = z(t_0)$, где t_0 – некоторая точка из F, является непрерывным мультипликативным функционалом. Следовательно, множество

$$M_{t_0}=\left\{ z : z\in \mathfrak{A}_1,\ z(t_0)=0\right\}$$

является максимальным идеалом алгебры $\mathfrak{A}_1$ для каждого $t_0\in F$. Других максимальных идеалов алгебра $\mathfrak{A}_1$ не имеет. Пусть M какой-либо максимальный идеал алгебры $\mathfrak{A}_1$ и M - точка из некоторой компоненты $\rho_j(x,\mathfrak{A})$ $(j\in\Omega)$. Через $(x-\mu e)^{-1}(M)$ обозначим значение преобразования Гельфанда элемента $(x-\mu e)^{-1}$ на идеале M.

Рассмотрим число*

$$t_0=\mu+1/(x-\mu e)^{-1}(M).$$

Допустим, что $t_0\notin F$, тогда легко видеть, что элемент $y = (x-\mu e)^{-1}-(t_0-\mu)^{-1}e$ обратим в $\mathfrak{A}$. Легко проверить, что $y^{-1}=(\mu-t_0)[e-(t_0-\mu)(x-t_0e)^{-1}]$, стало быть, этот элемент y^{-1} принадлежит $\mathfrak{A}_1$. Последнее невозможно, так как

$$y(M)=(x-\mu e)^{-1}(M)-(t_0-\mu)^{-1}=0,$$

и, следовательно, $y\in M$.

Таким образом, $t_c\in F$. Отсюда легко выводится, что для любого элемента $z\in\mathcal{R}$ будем иметь $z(M)=z(t_0)$. Следовательно, $M_{t_0}\subseteq M$. Последнее возможно только в случае, когда $M=M_{t_0}$. Элемент $x-\lambda e=(x-\mu e)(e-(\lambda-\mu)(x-\mu e)^{-1})$ $(\mu\notin F)$ обратим в $\mathfrak{A}_1$ в том и только том случае, когда

$$1-(\lambda-\mu)(t-\mu)^{-1}\neq 0 \quad (t\in F).$$

Последнее означает, что $t\notin F$. Следовательно, $\sigma(x,\mathfrak{A}_1)=F$.

Докажем последнее утверждение теоремы. Положим $\Omega=\Omega_x$. В этом случае $\sigma(x,\mathfrak{A})=\sigma(x,\mathfrak{A}_1)$. Отсюда, в частности, следует, что элемент $x\in\mathfrak{A}_1$. Так как для всех элементов $z\in\mathcal{P}$ имеет место равенство $\sigma(z,\mathfrak{A})=\left\{z(\zeta):\zeta\in\sigma(x)\right\}$, то $\sigma(z,\mathfrak{A})=\sigma(z,\mathfrak{A}_1)$. Отсюда в силу леммы 8.2 вытекает справедливость равенства $\sigma(z,\mathfrak{A})=\sigma(z,\mathfrak{A}_1)$ для всех $z\in\mathfrak{A}_1$. Теорема доказана.

---

* Здесь полагаем $t_0=\infty$, если $(x-\mu e)^{-1}(M)=0$.

ГЛАВА III

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Всюду в этой главе, где не оговорено противное, будем предполагать, что Γ является замкнутым контуром, то есть он является ориентированным контуром, ограничивающим множество F_Γ^+ и состоящим из конечного числа простых замкнутых ляпуновских контуров.

Пространство $L_p(\Gamma,\rho)$ будем рассматривать при следующих ограничениях

$$1<p<\infty, \quad \rho(t)=\prod_{k=1}^{n}|t-t_k|^{\beta_k}$$

и

$$-1<\beta_k<p-1 \quad (k=1,2,\dots,n).$$

В этой главе исследуются сингулярные интегральные операторы вида $aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ и $P_\Gamma aI+Q_\Gamma bI$ с непрерывными коэффициентами a и b в пространствах $L_p(\Gamma,\rho)$.

Устанавливаются признаки односторонней обратимости этих операторов. Приводятся формулы для решения однородных и неоднородных уравнений. Подробно исследуется задача факторизации. Рассматривается одно абстрактное обобщение сингулярных интегральных операторов.

§ 1. Индекс непрерывной функции

Обозначим через $C(\Gamma)$ банахову алгебру всех непрерывных на Γ комплекснозначных функций. Пусть $a\in C(\Gamma)$ и $a(t)$ не обращается в нуль на Γ. Если Γ - простой замкнутый контур, то через $[\arg a(t)]_\Gamma$ обозначается полное приращение функции $\arg a(t)$, когда переменная t пробегает контур Γ. Если же Γ состоит из нескольких замкнутых контуров, то полагают

$$[\arg a(t)]_\Gamma = \sum_{j=1}^{n} [\arg a(t)]_{\Gamma_j}.$$

Число $\frac{1}{2\pi}[\arg a(t)]_\Gamma$ называется **индексом** функции a и обозначается через $\operatorname{ind} a$:

$$\operatorname{ind} a = \frac{1}{2\pi}[\arg a(t)]_\Gamma. \tag{I.I}$$

Индекс функции является целым числом, обладающим следующими свойствами.

Пусть $a_1, a_2 \in C(\Gamma)$ и $a_1(t)a_2(t) \neq 0$ $(t \in \Gamma)$, тогда

$$\operatorname{ind} a_1 a_2 = \operatorname{ind} a_1 + \operatorname{ind} a_2. \tag{I.2}$$

Отсюда вытекают равенства

$$\operatorname{ind} \bar{a} = -\operatorname{ind} a, \quad \operatorname{ind} a^n = n \operatorname{ind} a \quad (n = 0, \pm 1, \dots).$$

Из равенства (I.2) также вытекает, что для функции $a \in C(\Gamma)$ $(a(t) \neq 0)$ можно подобрать число n и точку $\alpha \notin \Gamma$, так, чтобы $\operatorname{ind}(t-\alpha)^n a = 0$. Отметим, что если для некоторой функции $x \in C(\Gamma)$ выполняется условие $\operatorname{Re} x > 0$ $(t \in \Gamma)$, то $\operatorname{ind} x = 0$. Отсюда, в частности, вытекает, что если $\max_{t \in \Gamma} |x(t)| < 1$, то $\operatorname{ind}(1 - x) = 0$. Последнее свойство допускает следующее обобщение. Если $y \in C(\Gamma)$ и

$$\max_{t \in \Gamma} |y(t)/a(t)| < 1,$$

то $\operatorname{ind}(a + y) = \operatorname{ind} a$. Таким образом, функционал $\operatorname{ind} a$ является непрерывным.

Индекс функции можно также выразить через изменение логарифма этой функции. Легко видеть, что

$$\operatorname{ind} a = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma d(\arg a(t)) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma d(\ln a(t)).$$

Если непрерывная и не обращающаяся в нуль на Γ функция $a(t)$ является предельным значением функции $a(z)$, мероморфной в F_Γ^+, то (см., например, А.И.Маркушевич [I], стр. 425)

$ind\,a = N^+ - П^+$, где N^+ и $П^+$ – соответственно число нулей и полюсов функции $a(z)$ (с учётом их кратности) в F_Γ^+.

Если же функция a мероморфна в F_Γ^-, то $ind\,a = П^- - N^-$, где N^- и $П^-$ – соответственно число нулей и полюсов функции a в F_Γ^-. В частности, если $a_+ \in C^+(\Gamma)$ и $a_+(z) \neq 0$ при $z \in \overline{F_\Gamma^+}$, то $ind\,a_+ = 0$. Аналогично, если $a_- \in C^-(\Gamma)$ и $a_-(z) \neq 0$ при $z \in \overline{F_\Gamma^-}$, то $ind\,a_- = 0$.

§ 2. Сингулярные интегральные операторы с рациональными коэффициентами

В этом параграфе и в дальнейшем понадобится специальное разложение на множители рациональных функций.

Пусть $r = q_1/q_2$, где q_1 и q_2 – полиномы. Обозначим через t_j^+ $(j=1,2,\ldots,k^+)$ и t_j^- $(j=1,2,\ldots,k^-)$ все нули (с учетом их кратностей) полинома q_1, лежащие в F_Γ^+ и F_Γ^- соответственно. Аналогично через $\tau_j^+(j=1,2,\ldots,\ell^+)$ и $\tau_j^-(j=1,2,\ldots,\ell^-)$ обозначим все нули полинома $q_2(t)$, лежащие в F_Γ^+ и F_Γ^-. Предположим, что функция r не имеет полюсов и нулей на контуре Γ. Очевидно, рациональную функцию r можно представить в виде

$$r = r_- t^{\varkappa} r_+, \tag{2.1}$$

где

$$r_-(t) = \alpha \frac{\prod_{n=1}^{k_+}(1 - t^{-1}t_n^+)}{\prod_{n=1}^{\ell_+}(1 - t^{-1}\tau_n^+)}; \qquad r_+(t) = \frac{\prod_{n=1}^{k_-}(t - t_n^-)}{\prod_{n=1}^{\ell_-}(t - \tau_n^-)},$$

$\varkappa = k^+ - \ell^+$ и $\alpha \in \mathbb{C}$. Представление (2.1) называется факторизацией функции r относительно контура Γ. Заметим, что $\varkappa = ind\,r$. Фунция r_- голоморфна в F_Γ^- вместе с $1/r_-$. Функция r_+ голоморфна в F_Γ^+ вместе с $1/r_+$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть $A = r_1 P_\Gamma + r_2 Q_\Gamma$ – оператор с коэффициентами $r_1, r_2 \in R(\Gamma)$. Для того чтобы оператор A был обратим с какой-либо стороны в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$, необходимо и дос-*

таточно, чтобы выполнялось условие

$$r_j(t)\neq 0 \quad (j=1,2;\ t\in\Gamma). \tag{2.2}$$

Если условие (2.2) выполняется, то оператор A будет обратим, обратим только слева, обратим только справа, в зависимости от того, будет ли число

$$\varkappa=\operatorname{ind} r_1/r_2$$

равным нулю, положительным или отрицательным.

Если выполняется условие (2.2) и равенство

$$r=r_- t^{\varkappa} r_+ \tag{2.3}$$

означает факторизацию относительно Γ функции $r=r_1/r_2$, то оператор A^{-1}, обратный к A с соответствующей стороны, дается следующим равенством:

$$A^{-1}=r_+^{-1}P_\Gamma t^{-\varkappa}P_\Gamma r_-^{-1}r_2^{-1}I+r_-Q_\Gamma t^{-\varkappa}P_\Gamma r_-^{-1}r_2^{-1}I+r_-Q_\Gamma r_-^{-1}r_2^{-1}]$$

или, что то же, равенством

$$A^{-1}=(r_+^{-1}P_\Gamma+r_-Q_\Gamma)(t^{-\varkappa}P_\Gamma+Q_\Gamma)r_-^{-1}r_2^{-1}I \tag{2.4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что условие (2.2) выполняется и равенство (2.3) дает факторизацию функции $r=r_1/r_2$. Оператор A можно представить в виде

$$A=r_2(r_-t^{\varkappa}r_+P_\Gamma+Q_\Gamma)=r_2r_-(t^{\varkappa}r_+P_\Gamma+r_-^{-1}Q_\Gamma).$$

В силу равенства (6.3), гл. II, получаем

$$A=r_2r_-(t^{\varkappa}P_\Gamma+Q_\Gamma)(r_+P_\Gamma+r_-^{-1}Q_\Gamma). \tag{2.5}$$

Операторы r_2r_-I и $r_+P_\Gamma+r_-^{-1}Q_\Gamma$ обратимы, причем

$$(r_2 r_-I)^{-1} = r_2^{-1} r_-^{-1} I \qquad \text{и} \quad (r_+ P_\Gamma + r_-^{-1} Q_\Gamma)^{-1} = r_+^{-1} P_\Gamma + r_- Q_\Gamma. \quad (2.6)$$

Оператор $t^{\varkappa} P_\Gamma + Q_\Gamma$ при $\varkappa > 0$ обратим только слева, а при $\varkappa < 0$ обратим только справа. Соответствующий обратный оператор равен $t^{-\varkappa} P_\Gamma + Q_\Gamma$.

Осталось доказать, что условие (2.2) является необходимым условием обратимости оператора A хотя бы с одной стороны.

Рассмотрим сначала случай, когда $r_2 = 1$. Допустим, что функция r_1 обращается в нуль в точке $t_0 \in \Gamma$. Представим ее в виде $r_1 = (t - t_0) s$ и $r_1 = (t^{-1} - t_0^{-1}) q$. Легко видеть, что для оператора $A = r_1 P_\Gamma + Q_\Gamma$ имеют место равенства

$$A = (s P_\Gamma + Q_\Gamma)((t - t_0) P_\Gamma + Q_\Gamma) \qquad (2.7)$$

и

$$A = ((t^{-1} - t_0^{-1}) P_\Gamma + Q_\Gamma)(P_\Gamma q P_\Gamma + (t^{-1} - t_0^{-1}) Q_\Gamma q P_\Gamma + Q_\Gamma). \qquad (2.8)$$

Если оператор A обратим с какой-либо стороны, то из полученных равенств вытекает, что односторонне обратимым будет, по крайней мере, один из операторов $(t - t_0) P_\Gamma + Q_\Gamma$ или $(t^{-1} - t_0^{-1}) P_\Gamma + Q_\Gamma$. Последнее утверждение противоречит теоремам 7.2 и 7.I, гл.II.

Аналогичным образом доказывается, что если оператор вида $P_\Gamma + r_2 Q_\Gamma$ обратим с какой-либо стороны, то r_2 не обращается в нуль на контуре Γ.

Перейдем к общему случаю. Пусть оператор $A = r_1 P_\Gamma + r_2 Q_\Gamma$ обратим с какой-либо стороны. Подберем функции $\chi_1, \chi_2 \in R(\Gamma)$ так, чтобы выполнялись условия

$$\chi_1(t) \neq 0 \ (t \in \Gamma), \quad \chi_2(t) \neq 0 \ (t \in \Gamma), \qquad (2.9)$$

$$\chi_1 r_1 \in R_+(\Gamma), \quad \chi_2 r_2 \in R_-(\Gamma). \qquad (2.10)$$

При этих условиях оператор A можно представить в двух видах:

$$A = \chi_1^{-1}(P_\Gamma + \chi_1 r_2 Q_\Gamma)(\chi_1 r_1 P_\Gamma + Q_\Gamma) \qquad (2.11)$$

и
$$A=\chi_2^{-1}(\chi_2 r_1 P_\Gamma+Q_\Gamma)(P_\Gamma+\chi_2 r_2 Q_\Gamma). \qquad (2.12)$$
Из полученных равенств вытекает, что если оператор A обратим слева, то обратимы слева операторы $\chi_1 r_1 P_\Gamma+Q_\Gamma$ и $P_\Gamma+\chi_2 r_2 Q_\Gamma$; если оператор A обратим справа, то справа обратимы операторы $P_\Gamma+\chi_1 r_2 Q_\Gamma$ и $\chi_2 r_1 P_\Gamma+Q_\Gamma$. В силу доказанного выше отсюда вытекает, что функции r_1 и r_2 не обращаются в нуль на контуре Γ. Теорема доказана.

Имеет место следующая теорема, аналогичная теореме 2.1.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть оператор A имеет вид
$$A=P_\Gamma r_1 I+Q_\Gamma r_2 I$$
с коэффициентами r_1 и $r_2\in R(\Gamma)$. Для того чтобы оператор A был обратим с какой-либо стороны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие
$$r_j(t)\neq 0 \quad (t\in\Gamma;\ j=1,2). \qquad (2.13)$$
Если это условие выполнено, то оператор A будет обратим, обратим только справа, обратим только слева, в зависимости от того, будет ли число
$$\varkappa=\operatorname{ind} r_1/r_2$$
равным нулю, отрицательным или положительным.

Если выполняется условие (2.13) и равенство
$$r=r_- t^{\varkappa} r_+$$
означает факторизацию функции $r=r_1/r_2$ относительно контура Γ, то оператор A^{-1}, обратный к A с соответствующей стороны, дается равенством

$$A^{-1} = \tau_+^{-1}\tau_2^{-1}(P_\Gamma t^{\varkappa} I + Q_\Gamma)(P_\Gamma \tau_+ I + Q_\Gamma \tau_-^{-1} I).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта теорема доказывается аналогично предыдущей. В процессе доказательства достаточности условий необходимо заменить равенство (2.5) равенством

$$A = (P_\Gamma \tau_- I + Q_\Gamma \tau_+^{-1} I)(P_\Gamma t^{\varkappa} I + Q_\Gamma)\tau_+ \tau_2 I,$$

равенства (2.6) равенствами

$$(\tau_2 \tau_+ I)^{-1} = \tau_2^{-1}\tau_+^{-1} I, \quad (P_\Gamma \tau_- I + Q_\Gamma \tau_+^{-1} I)^{-1} = P_\Gamma \tau_-^{-1} I + Q_\Gamma \tau_+ I,$$

и учесть одностороннюю обратимость оператора $P_\Gamma t^{\varkappa} I + Q_\Gamma$.

В доказательстве необходимости условий теоремы равенства (2.7) и (2.8) заменяются соответственно равенствами

$$P_\Gamma \tau_1 I + Q_\Gamma = (P_\Gamma (t^{-1} - t_0^{-1}) I + Q_\Gamma)(P_\Gamma q I + Q_\Gamma),$$

$$P_\Gamma \tau_1 I + Q_\Gamma = (P_\Gamma s P_\Gamma + P_\Gamma s Q_\Gamma (t - t_0) I + Q_\Gamma)(P_\Gamma (t - t_0) I + Q_\Gamma),$$

равенство (2.10) равенством

$$\chi_1 \tau_1 \in R_-(\Gamma), \qquad \chi_2 \tau_2 \in R_+(\Gamma), \tag{2.14}$$

и, наконец, представления (2.11) и (2.12) оператора A заменяются представлениями

$$A = (P_\Gamma \tau_1 \chi_1 I + Q_\Gamma)(P_\Gamma + Q_\Gamma \tau_2 \chi_1 I)\chi_1^{-1} I$$

и

$$A = (P_\Gamma + Q_\Gamma \tau_2 \chi_2 I)(P_\Gamma \tau_1 \chi_2 I + Q_\Gamma)\chi_2^{-1} I.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть функции τ_1 и $\tau_2 \in R(\Gamma)$ удовлетворяют условию (2.2.) и равенство

$$r = r_- t^{\varkappa} r_+$$

является факторизацией функции $r = r_1 / r_2$.

Если $\varkappa < 0$, то

$$\operatorname{Ker}(r_1 P_\Gamma + r_2 Q_\Gamma) = \mathscr{L}\{g, gt, \dots, g t^{|\varkappa| - 1}\}, \qquad (2.15)$$

где $g = r_+^{-1} - r_- t^{\varkappa}$.

Если $\varkappa > 0$, то

$$\operatorname{Im}(r_1 P_\Gamma + r_2 Q_\Gamma) =$$

$$= \{f : f = r_2 r_- (t^{\varkappa} \varphi_- + \varphi_+);\ \varphi_- \in \operatorname{Im} Q_\Gamma,\ \varphi_+ \in \operatorname{Im} P_\Gamma\} \qquad (2.16)$$

и

$$\operatorname{Coker}(r_1 P_\Gamma + r_2 Q_\Gamma) = \mathscr{L}\{r_2 r_-,\ r_2 r_- t, \dots, r_2 r_- t^{\varkappa - 1}\}. \qquad (2.17)$$

При $\varkappa > 0$ уравнение

$$r_1 P_\Gamma \varphi + r_2 Q_\Gamma \varphi = f$$

разрешимо в том и только том случае, когда выполняется условие

$$\int_\Gamma f(t) r_2^{-1}(t) r_-^{-1}(t) t^{-j} dt \quad (j = 1, 2, \dots, \varkappa). \qquad (2.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же, как в доказательстве теоремы 2.2, оператор A представляется в виде

$$A = r_2 r_- (t^{\varkappa} P_\Gamma + Q_\Gamma)(r_+ P_\Gamma + r_-^{-1} Q_\Gamma).$$

Так как при $\varkappa < 0$

$$\operatorname{Ker} A = (r_+^{-1} P_\Gamma + r_- Q_\Gamma) \operatorname{Ker}(t^{\varkappa} P_\Gamma + Q_\Gamma),$$

то в силу предложения 3^0, § 5, гл. II,

$$\operatorname{Ker} A=\mathscr{L}\{g_1,g_2,\dots,g_{|\varkappa|}\},$$

где

$$g_j=(r_+^{-1}P_\Gamma+r_-Q_\Gamma)(t^{|\varkappa|-j}-t^{-j})\quad (j=1,\dots,|\varkappa|).$$

Легко видеть, что

$$g_j=r_+^{-1}t^{|\varkappa|-j}-r_-t^{-j}\quad (j=1,2,\dots,|\varkappa|).$$

При $\varkappa>0$ формула (2.16) является следствием равенства

$$\operatorname{Im} A=r_2r_-\operatorname{Im}(t^{\varkappa}P_\Gamma+Q_\Gamma). \tag{2.19}$$

Так как $\operatorname{Im}(t^{\varkappa}P_\Gamma+Q_\Gamma)$ состоит из всех функций $\varphi\in L_p(\Gamma,\rho)$, для которых $P_\Gamma\varphi$ имеют в точке $t=0$ нуль порядка $\geqslant\varkappa$, то из (2.19) вытекает равенство (2.17). Последнее утверждение теоремы будет в более общем случае доказано в § 5, гл. УШ. Теорема доказана.

Аналогично доказывается

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть выполняются условия теоремы 2.3.

Если $\varkappa<0$, то

$$\operatorname{Ker}(P_\Gamma r_1I+Q_\Gamma r_2I)=$$

$$=\mathscr{L}\{r_+^{-1}r_2^{-1}t,\ r_+^{-1}r_2^{-1}t^2,\dots,r_+^{-1}r_2^{-1}t^{|\varkappa|}\}.$$

Если $\varkappa>0$, то подпространство $\operatorname{Im}(P_\Gamma r_1I+Q_\Gamma r_2I)$ состоит из всех функций вида $P_\Gamma r_-P_\Gamma f+P_\Gamma r_+^{-1}P_\Gamma f$, для которых функция $P_\Gamma f-P_\Gamma(t^{\varkappa}Q_\Gamma f)$ имеет в точке $t=0$ нуль кратности $\geqslant\varkappa$. Кроме того,

$$\operatorname{Coker}(P_\Gamma r_1I+Q_\Gamma r_2I)=$$

$$=\mathscr{L}\{P_\Gamma r_-,\ P_\Gamma(r_-t),\dots,P_\Gamma(r_-t^{\varkappa-1})\}.$$

Для того чтобы уравнение

$$P_\Gamma r_1\varphi + Q_\Gamma r_2\varphi = f$$

было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int_\Gamma f(t)(r_2(t)-r_1(t))r_2^{-1}(t)r_-^{-1}(t)t^{-j}dt = 0 \quad (j=1,\dots,\varkappa). \tag{2.20}$$

§ 3. Факторизация функций

В теоремах предыдущего параграфа важную роль играла факторизация рациональных функций. Напомним, что **факторизацией** рациональной функции r относительно замкнутого сложного контура Γ называется представление этой функции в виде

$$r = r_- t^\varkappa r_+,$$

где $\varkappa = \operatorname{ind} r$, $r_- \in R_-(\Gamma)$, $r_+ \in R_+(\Gamma)$, причем $r_-(t) \neq 0$ $(t \in F_\Gamma^-)$ и $r_+(t) \neq 0$ $(t \in F_\Gamma^+)$. Эта факторизация позволила получить эффективную формулу для обращения сингулярных интегральных операторов с рациональными коэффициентами, а также эффективные формулы для ядра и коядра оператора. Все эти формулы можно получить в значительно более общем случае. Для этого понадобится более общее понятие факторизации функций.

Факторизацией функции $a \in C(\Gamma)$ относительно контура Γ называется ее разложение в произведение трех сомножителей

$$a = a_- t^\varkappa a_+, \tag{3.1}$$

где $\varkappa$ – целое число, $a_- \in C_-(\Gamma)$, $a_+ \in C_+(\Gamma)$, причем

$$a_-(t) \neq 0 \ (t \in F_\Gamma^-) \qquad a_+(t) \neq 0 \ (t \in F_\Gamma^+).$$

В определении факторизации средний множитель можно заменить множителем вида

$$\left(\frac{t-t^+}{t-t^-}\right)^{\varkappa}, \tag{3.2}$$

где t^+ – точка из F_Γ^+, а t^- – точка из F_Γ^-. Эта форма среднего множителя необходима для случая, когда контур Γ проходит через нуль или контур Γ неограничен.

Если функция допускает факторизацию относительно контура Γ, то она допускает факторизацию и с любым множителем вида (3.2), ибо

$$\left(\frac{t-t^+}{t-t^-}\right)^{\varkappa} = (1-t^{-1}t^+)^{\varkappa} t^{\varkappa}(t-t^-)^{-\varkappa}.$$

Так как $\operatorname{ind} a_- = \operatorname{ind} a_+ = 0$, то число $\varkappa$ определяется однозначно функцией a и $\varkappa = \operatorname{ind} a$.

Факторизация (3.I) в случае, когда $\varkappa = 0$, называется **канонической**.

Легко видеть, что в факторизации (3.I) множители a_+, a_- определяются с точностью до мультипликативной константы. Пусть функция a допускает факторизацию. Выведем формулы, выражающие функции a_- и a_+ через a. Ради простоты ограничимся сначала случаем, когда контур Γ состоит из одной замкнутой кривой. В этом случае функция $a(t)t^{-\varkappa}$ имеет индекс, равный нулю, и, следовательно, $\ln(t^{-\varkappa}a) \in C(\Gamma)$. Так как $\ln a_+ \in C_+(\Gamma)$, то

$$P_\Gamma \ln(t^{-\varkappa}a) = \ln a_+, \quad Q_\Gamma \ln(t^{-\varkappa}a) = \ln a_-.$$

Здесь предполагается, что $a_-(\infty)=1$. Таким образом,

$$a_+ = \exp P_\Gamma \ln(t^{-\varkappa}a); \quad a_- = \exp Q_\Gamma \ln(t^{-\varkappa}a). \tag{3.3}$$

Не для всякой непрерывной функции χ функции $P_\Gamma\chi$ и $Q_\Gamma\chi$ являются непрерывными. Как уже отмечалось (см. § 2, гл. II) эти функции $P_\Gamma\chi$ и $Q_\Gamma\chi$ могут быть и неограниченными. Отсюда вытекает, что не всякая непрерывная функция допускает факторизацию относительно контура Γ.

Пусть $\mathcal{C}$ – некоторая банахова алгебра, состоящая из непрерывных на контуре Γ функций, содержащая все функции из $R(\Gamma)$. Введем следующие обозначения:

$$\mathcal{C}_+ = \mathcal{C} \cap C_+(\Gamma), \quad \mathcal{C}_- = \mathcal{C} \cap C_-(\Gamma) \quad \text{и} \quad \mathcal{C}_-^0 = \mathcal{C} \cap C_-^0(\Gamma).$$

Так как имеет место соотношение

$$\sup_{x\in\mathcal{C}} \|x\|_{C(\Gamma)} / \|x\|_{\mathcal{C}} < \infty ,$$

то множества $\mathcal{C}_\pm, \mathcal{C}_-^0$ являются подалгебрами алгебры $\mathcal{C}$. Будем предполагать, что алгебра $\mathcal{C}$ обладает следующим свойством: если функция $a \in \mathcal{C}$ нигде на Γ не обращается в нуль, то $1/a \in \mathcal{C}$. Это свойство назовем свойством обратимости. Пусть алгебра $\mathcal{C}$ обладает свойством обратимости, легко видеть, что если $a_+ \in \mathcal{C}_+$ и $a_+(t) \neq 0 \; (t \in F_\Gamma^+)$, то $1/a_+ \in \mathcal{C}_+$, аналогично, если $a_- \in \mathcal{C}_-$ и $a_-(t) \neq 0 \; (t \in F_\Gamma^-)$, то $1/a_- \in \mathcal{C}_-$.

Назовем алгебру $\mathcal{C}$ распадающейся, если она является прямой суммой своих подалгебр $\mathcal{C}_+$ и $\mathcal{C}_+^0$: $\mathcal{C} = \mathcal{C}_+ \dot{+} \mathcal{C}_-^0$.

Как уже отмечалось (см. § 2, гл. II), алгебра $C(\Gamma)$ не является распадающейся. Алгебра $\mathcal{C}$ является распадающейся в том и только том случае, когда проектор P_Γ является линейным ограниченным оператором в пространстве $\mathcal{C}$.

В самом деле, если алгебра $\mathcal{C}$ распадающаяся, то, очевидно, P_Γ совпадает с проектором, проектирующим $\mathcal{C}$ на $\mathcal{C}_+$ параллельно $\mathcal{C}_-^0$. Обратно, пусть P_Γ является линейным ограниченным оператором из $L(\mathcal{C})$. Тогда $P_\Gamma\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_+$ и $(I-P_\Gamma)\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_-^0$. Так как $P_\Gamma\mathcal{C} + (I-P_\Gamma)\mathcal{C} = \mathcal{C}$, то $P_\Gamma\mathcal{C} = \mathcal{C}_+$ и $(I-P_\Gamma)\mathcal{C} = \mathcal{C}_-^0$.

Примером распадающейся алгебры является алгебра $H_\mu(\Gamma)$ $(0<\mu<1)$. Другим примером такой алгебры служит алгебра $H_\mu^n(\Gamma)$ $(0<\mu<1,\; n=1,2,\dots)$ всех функций f из $C(\Gamma)$ таких, что n-ая производная $f^{(n)} \in H_\mu(\Gamma)$. Норма в этой алгебре задается равенством

$$\|f\|_{H_\mu^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \max |f^{(k)}(t)| + \sup_{t_1,t_2\in\Gamma;\, t_1\neq t_2} \frac{|f^{(n)}(t_1) - f^{(n)}(t_2)|}{|t_1-t_2|^\mu} .$$

Как известно (Ф.Д.Гахов [I], стр 49), для функции $f \in H_\mu^n(\Gamma)$ имеет место равенство

$$\frac{d^k(S_\Gamma f)(t)}{dt^k}=\left(S_\Gamma \frac{d^k\varphi}{dt^k}\right)(t) \quad (k=1,2,\ldots,n).$$

Следовательно, если функция f принадлежит $H_\mu^n(\Gamma)$, то и функция $S_\Gamma f$ также принадлежит пространству $H_\mu^n(\Gamma)$. Из соотношения

$$|\varphi^{(k)}(t)|\leq \left|\frac{1}{\pi}\int_\Gamma \frac{\varphi^{(k)}(t)-\varphi^{(k)}(\tau)}{t-\tau}d\tau\right|+\left|\frac{\varphi^{(k)}(t)}{\pi}\int_\Gamma\frac{d\tau}{\tau-t}\right|,$$

где $k=1,2,\ldots,n$ и $\varphi^{(0)}(t)=\varphi(t)$, следует, что

$$\max|\varphi^{(k)}(t)|\leq c(\max_{t\in\Gamma}|\varphi^{(k+1)}(t)|+\max_{t\in\Gamma}|\varphi^{(k)}(t)|)$$

при $k=0,1,\ldots,n-1$. Отсюда и из соотношения

$$\|\varphi^{(n)}\|_{H_\mu(\Gamma)}\leq\|S_\Gamma\|\|\varphi^{(n)}\|_{H_\mu(\Gamma)}$$

вытекает ограниченность оператора S_Γ в пространстве $H_\mu^n(\Gamma)$. Следовательно, оператор P_Γ тоже ограничен в пространстве $H_\mu^n(\Gamma)$. Таким образом, $H_\mu^n(\Gamma)$ является распадающейся алгеброй.

Через W обозначим винеровскую алгебру всех функций $\varphi:\Gamma_0\to\mathbb{C}$, разлагающихся в абсолютно сходящиеся ряды Фурье:

$$\varphi(t)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\varphi_j t^j \quad (|t|=1,\ \sum_{j=-\infty}^{\infty}|\varphi_j|<\infty).$$

Норма в алгебре W определяется равенством

$$\|\varphi\|_W=\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\varphi_j|.$$

Очевидно,

$$(P_\Gamma\varphi)(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j t^j.$$

Отсюда следует, что алгебра W является распадающейся.

Имеет место

ТЕОРЕМА 3.I. П у с т ь $\mathcal{C}$ – б а н а х о в а а л г е б р а, с о с т о я щ а я и з н е п р е р ы в н ы х н а Γ ф у н к ц и й, о б л а д а ю щ а я с в о й с т в о м о б р а т и м о с т и. Д л я т о г о ч т о б ы в с я к а я н е о б р а щ а ю щ а я с я в н у л ь ф у н к ц и я a и з $\mathcal{C}$ д о п у с к а л а ф а к т о р и з а ц и ю (3.I) с м н о ж и т е л я м и $a_{\pm} \in \mathcal{C}_{\pm}$, н е о б х о д и м о и д о с т а т о ч н о, ч т о б ы а л г е б р а $\mathcal{C}$ б ы л а р а с п а д а ю щ е й с я.

Доказательство этой теоремы будет приведено в § 5 после ряда вспомогательных абстрактных предложений. Здесь приведем два следствия.

СЛЕДСТВИЕ 3.I. В с я к а я н е о б р а щ а ю щ а я с я в н у л ь н а Γ ф у н к ц и я $a \in H_{\alpha}(\Gamma)$ д о п у с к а е т ф а к т о р и з а ц и ю (3.I) с м н о ж и т е л я м и $a_{\pm} \in H_{\alpha}^{\pm}(\Gamma)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. В с я к а я н е о б р а щ а ю щ а я с я н а Γ_0 ф у н к ц и я $a \in W$ д о п у с к а е т ф а к т о р и з а ц и ю (3.I) с м н о ж и т е л я м и $a_{\pm} \in W_{\pm}$.

Легко видеть, что все теоремы из предыдущего параграфа сохраняют силу, если заменить в их формулировках рациональные функции r_1 и r_2 на произвольные функции a и b из некоторой распадающейся алгебры $\mathcal{C}$, обладающей свойством обратимости. Кроме того, эти теоремы сохраняют силу и в пространстве $H_{\alpha}(\Gamma)$, если коэффициенты r_1, r_2 заменить функциями a и b из $H_{\alpha}(\Gamma)$.

§ 4. Каноническая факторизация в коммутативной банаховой алгебре

Пусть $\mathfrak{A}$ – банахова алгебра с единицей e, и пусть $\mathfrak{A}_+$, $\mathfrak{A}_-$ – подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$, прямая сумма которых равна[*] $\mathfrak{A}$. Обозначим через P проектор, проектирующий $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}_+$ параллельно $\mathfrak{A}_-$. Положим $Q = I - P$. Будем говорить, что элемент $a \in \mathfrak{A}$ допускает к а н о н и ч е с к у ю ф а к т о р и з а ц и ю, если он представим в виде

[*] Такую алгебру назовем р а с п а д а ю щ е й с я.

$$a=a_-a_+ \qquad (4.1)$$

где $a_\pm$ – обратимые элементы из $\mathfrak{A}$, обладающие следующими свойствами: $a_\pm - e \in \mathfrak{A}_\pm$ и $a_\pm^{-1} - e \in \mathfrak{A}_\pm$.

Обозначим через $G\mathfrak{A}$ группу всех обратимых элементов из $\mathfrak{A}$. Множество $G\mathfrak{A}$ открыто и, следовательно, оно является объединением некоторой совокупности открытых связных компонент G_α. Через G_0 обозначим ту из связных компонент, которая содержит единицу e. Очевидно, G_α состоит из всех элементов вида $a_\alpha x$, где a_α – фиксированный элемент из G_α, а x пробегает все элементы из G_0.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\mathfrak{A}$ – коммутативная банахова алгебра и G_α – одна из связных компонент группы G. Если хотя бы один элемент из G_α допускает каноническую факторизацию, то и все элементы этой компоненты допускают каноническую факторизацию. Все элементы из компоненты G_0 допускают каноническую факторизацию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сперва последнее утверждение теоремы. Пусть a_1 – произвольный элемент из G_0 и $a:[0,1]\to G_0$ – непрерывная функция, соединяющая элементы e и a_1: $a(0)=e$ и $a(1)=e_1$. Пусть $0=t_0<t_1<\ldots<t_{n-1}<t_n=1$ – разбиение отрезка $[0,1]$, обладающее свойством

$$\|a(t_j)-a(t_{j-1})\|<\max_{0\le t\le 1}\|a^{-1}(t)\|^{-1} \quad (j=1,\ldots,n).$$

В частности, имеет место оценка $\|z_1\|<1$, где $z_1=-a(t_1)+e$. Следовательно, элемент $\ln a(t_1)$, определенный формулой

$$\ln a(t_1)=\ln(e-z_1)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n},$$

принадлежит алгебре $\mathfrak{A}$, причем $\exp \ln a(t_1)=a(t_1)$. Так как

$$a(t_{k+1})=a(t_k)(e-z_{k+1}),$$

где $z_{k+1}=-(a(t_k))^{-1}(a(t_{k+1})-a(t_k))$ и $\|z_{k+1}\|<1$

$(k=1,2,\ldots,n-1)$, это можно последовательно определить $\ln a(t_k)(\in \mathfrak{A})$ для всех чисел $k=1,2,\ldots,n-1$, полагая

$$\ln a(t_{k+1})=\ln a(t_k)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z_k^n}{n}.$$

Так же последовательно проверяется, что

$$\exp(\ln a(t_{k+1}))=$$
$$=\exp(\ln a(t_k))\exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z_{k+1}^n}{n}\right)=a(t_{k+1}).$$

В частности, $\exp \ln a_1=a_1$.

Обозначим через P проектор, проектирующий $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}_+$ параллельно $\mathfrak{A}$, и через Q – дополнительный проектор $Q= = I-P$. Так как $\ln a=P\ln a-Q\ln a$, то

$$a=\exp(P\ln a)\exp(Q\ln a).$$

Последнее равенство дает каноническую факторизацию функции a. В самом деле, элементы

$$x_+=\exp(P\ln a)-e=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(P\ln a)^n$$

и

$$x_-=\exp(Q\ln a)-e=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(Q\ln a)^n$$

принадлежат алгебрам $\mathfrak{A}_+$ и $\mathfrak{A}_-$ соответственно. Кроме того, элементы $e+x_+=\exp(P\ln a)$ и $e+x_-=\exp(Q\ln a)$ обратимы, причем

$$(e+x_+)^{-1}-e=\exp(-P\ln a)-e\in\mathfrak{A}_+$$

и

$$(e+x_-)^{-1}-e=\exp(-Q\ln a)-e\in\mathfrak{A}_-.$$

Последнее утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь G_α – некоторая связная компонента $G\mathfrak{A}$ содержащая элемент a_0, допускающий каноническую факторизацию, и пусть a_1 – произвольный элемент из G_α. Элемент a_1 представим в виде $a_1=a_0 b$, где $b\in G_0$. По доказанному элемент b также допускает каноническую факторизацию. Следовательно, a_1 допускает каноническую факторизацию. Теорема доказана.

Таким образом, множество всех элементов, допускающих каноническую факторизацию, совпадает со всей группой $G\mathfrak{A}$ или с объединением части связных компонент G_α группы $G\mathfrak{A}$ (эта часть всегда содержит компоненту $\mathfrak{A}_0$).

СЛЕДСТВИЕ 4.I. *Множители a_+ и a_- в канонической факторизации (4.I) элемента a непрерывно зависят от элемента a.*

Это следствие, по существу, установлено в процессе доказательства теоремы 4.I.

ТЕОРЕМА 4.2. *Пусть $\mathfrak{A}$ – распадающаяся банахова алгебра, в которой все делители единицы являются обратимыми элементами*[ж]. *Следующие утверждения об элементах $a \in \mathfrak{A}$ эквивалентны.*

I. Элемент $e-a$ допускает каноническую факторизацию.

2. Каждое из уравнений

$$x - P(ax) = e, \quad y - Q(ya) = e$$

разрешимо в $\mathfrak{A}$.

3. Каждое из уравнений

$$x - P(ax) = f, \quad y - Q(ya) = g \quad (f, g \in \mathfrak{A}) \tag{4.2}$$

однозначно разрешимо в $\mathfrak{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть элемент $e-a$ допускает каноническую факторизацию

$$e - a = (e + a_-)(e + a_+). \tag{4.3}$$

Покажем, что из утверждения I вытекает утверждение 3. В уравнении

[ж] Это условие эквивалентно следующему: если элемент обратим с какой-либо стороны, то он обратим с двух сторон.

$$x - P(ax) = f \tag{4.4}$$

положим $x = f + z_+$, где $z_+ \in \mathfrak{A}_+$. Тогда оно примет вид

$$z_+ - P(az_+) = P(af)$$

или

$$(e-a)z_+ + z_- = P(af),$$

где z_- — некоторый элемент из $\mathfrak{A}_-$.

Пользуясь факторизацией (4.3), получим

$$(e+a_+)z_+ + (e+a_-)^{-1}z_- = (e+a_-)^{-1}P(af)$$

Следовательно,

$$z_+ = (e+a_+)^{-1}P[(e+a_-)^{-1}P(af)]$$

и

$$x = f + (e+a_+)^{-1}P[(e+a_-)^{-1}P(af)]. \tag{4.5}$$

Обратно, пусть f — произвольный элемент из $\mathfrak{A}$ и x задан формулой (4.5). Тогда элемент $v_+ = x - f \in \mathfrak{A}_+$ и

$$(e-a)v_+ + v_- = P(af), \tag{4.6}$$

где $v_- = (e+a_-)Q[(e+a_-)^{-1}P(af)] \in \mathfrak{A}_-$. Проектируя равенство (4.6) на алгебру $\mathfrak{A}_+$, получим $v_+ - P(av_+) = P(af)$. Заменяя теперь v_+ его значением $x-f$, получим равенство (4.4).

Аналогично доказывается справедливость утверждения 3 и о втором уравнении из (4.2).

Очевидно, из утверждения 3 вытекает утверждение 2. Покажем, что из утверждения 2 следует утверждение I. Пусть элементы u и v являются решениями уравнений

$$e + u - P(a(e+u)) = e; \quad e + v - Q((e+v)a) = e$$

Тогда $u \in \mathfrak{A}_-$, $v \in \mathfrak{A}_+$ и выполняются равенства

$$(e-a)(e+u) = e + u_-; \quad (e+v)(e-a) = e + v_+,$$

где u_- и v_+ - некоторые элементы из $\mathfrak{A}_-$ и $\mathfrak{A}_+$ соответственно. Из полученных равенств вытекает, что

$$(e+v)(e-a)(e+u)=(e+v)(e+u_-)=(e+v_+)(e+u).$$

Из равенства последних выражений следует

$$v+u_-+vu_-=0 \quad \text{и} \quad v_++u+v_+u=0$$

или

$$(e+v)(e+u_-)=e, \qquad (e+v_+)(e+u)=e.$$

Так как все делители единицы алгебры $\mathfrak{A}$ обратимы, то элементы $e+v$ и $e+u$ обратимы, причем

$$(e+v)^{-1}=e+u_- \quad \text{и} \quad (e+u)^{-1}=e+v_+.$$

Таким образом, равенство

$$e-a=(e+a_-)(e+v_+)$$

дает каноническую факторизацию элемента $e-a$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Если элемент $e-a$ допускает каноническую факторизацию $e-a=(e+a_-)(e+a_+)$, то решения $x=x_f$ и $y=y_f$ уравнений (4.2) даются равенствами

$$x_f=f+(e+a_+)^{-1}P[(e+a_-)^{-1}P(af)], \tag{4.7}$$

$$y_f=g+Q[Q(ga)(e+a_+)^{-1}](e+a_-)^{-1}, \tag{4.8}$$

причем при $f=g=e$

$$x_e=(e+a_+)^{-1} \quad \text{и} \quad y_e=(e+a_-)^{-1}. \tag{4.9}$$

Действительно, равенство (4.7) выведено в процессе доказательства теоремы 4.2. Аналогично доказывается равенство(4.8). Согласно формуле (4.7)

$$x_e=e+(e+a_+)^{-1}P[(e+a_-)^{-1}Pa].$$

Так как

$$P[(e+a_-)^{-1}Pa]=P[(e+a_-)^{-1}a],$$

то

$$x_e=e+(e+a_+)^{-1}P[(e+a_-)^{-1}a],$$

и, стало быть,

$$x_e=e-(e+a_+)^{-1}P[(e-a_-)^{-1}(e-a)-e]=$$

$$=e-(e+a_+)^{-1}P(e+a_+-e)=e-(e+a_+)^{-1}a_+=(e+a_+)^{-1}.$$

Аналогично выводится второе равенство из (4.7).

§ 5. Доказательство теоремы о факторизации функций

В этом параграфе будет доказано теорема 3.I. Пусть контур Γ является объединением простых замкнутых линий $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$. Введем функционалы ν_j $(j=1,2,\ldots,n)$, определенные на группе $GC(\Gamma)$ равенствами

$$\nu_j(a)=\frac{1}{2\pi}\left[\arg a(t)\right]_{t\in\Gamma_j}.$$

Очевидно, $\sum \nu_j(a)=\operatorname{ind} a$

ЛЕММА 5.I. **Пусть** $\mathfrak{C}=\mathfrak{C}(\Gamma)$ **- алгебра непрерывных функций, обладающая свойством обратимости и содержащая** $R(\Gamma)$. **Для любой системы целых чисел** $k_1, k_2, \ldots, k_n$ **множество** $G_{k_1 k_2 \ldots k_n}$, **определяемое равенством**

$$G_{k_1 k_2 \ldots k_n}=\left\{a\in G\mathfrak{C}: \nu_j(a)=k_j,\ j=1,2,\ldots,n\right\},$$

является связной компонентой группы $G\mathfrak{C}$. **Единица содержится в компоненте** $G_{00\ldots0}$. **Имеет место равенство**

$$G\mathfrak{C}(\Gamma)=\bigcup_{k_1,k_2,\ldots,k_n} G_{k_1 k_2 \ldots k_n}, \tag{5.I}$$

где объединение распространяется на всевозможные системы целых чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сперва случай, когда контур совпадает с Γ_1. Пусть a – произвольный элемент из $G\mathcal{C}$, который можно соединить в $G\mathcal{C}$ непрерывной кривой с единицей, то есть существует непрерывная функция $h:[0,1]\to G\mathcal{C}$, такая, что $h(0)=1$ и $h(1)=a$. Функция $\nu_1(h(u))$ является непрерывной функцией на отрезке $[0, 1]$, принимающей только целые значения, следовательно, эта функция – константа. В частности, $\nu_1(a)=\nu_1(1)=0$. Таким образом, $a\in G_0$.

Обратно, каждый элемент $a\in G_0$ можно соединить о единицей непрерывной кривой в $G\mathcal{C}$. Пусть r – рациональная функция из G_0, достаточно близкая по норме $C(\Gamma)$ к элементу a. Тогда, очевидно, все значения непрерывной функции $g:[0,1]\to\mathfrak{A}$, определенной равенством $g(\lambda)=(1-\lambda)r+\lambda a\ (0\le\lambda\le 1)$, принадлежат G_0 и $\nu_1(g(\lambda))=0\ \ (0\le\lambda\le 1)$.

Легко видеть, что функция r является произведением конечного числа множителей вида

$$(1-t^{-1}\alpha^{+})^{\pm 1},\ \ (t-\alpha^{-})^{\pm 1}\ (\alpha^{\pm}\in F_{r}^{\pm}).$$

Каждый из этих множителей очевидным образом соединяется о единицей непрерывной кривой, лежащей в $R(\Gamma)\cap G_0$.

Пусть теперь a – произвольная функция из $G\mathcal{C}$. Очевидно, что все функции из $G\mathcal{C}$, которые можно соединить с a в $G\mathcal{C}$ непрерывной кривой, принадлежат множеству

$$G_k=\{x\in G\mathcal{C}:\nu_1(x)=k\},$$

где $k=\nu_1(a)$. Так как имеет место равенство

$$G_k=(t-t_1)^k G_0,$$

где t_1 лежит внутри области, окруженной контуром Γ_1, то G_k является связной компонентой группы $G\mathcal{C}$. Все связные компоненты $G_k\ (k=0,\pm 1,\ldots)$ различны и

$$G\mathcal{C}=\bigcup_k G_k.$$

Перейдем теперь к общему случаю. Пусть Γ состоит из n простых замкнутых кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$. Обозначим через $\mathcal{C}_j$ $(j=1,2,\ldots,n)$ подалгебру алгебры $\mathcal{C}$, состоящую из всех функций, аннулирующихся на контурах Γ_k $(k \neq j)$. Алгебра $\mathcal{C}$ является прямой суммой всех подалгебр $\mathcal{C}_j$ $(j=1,\ldots,n)$. Алгебру $\mathcal{C}_j$ можно рассматривать как некоторую алгебру $\mathcal{C}(\Gamma_j)$.

Легко видеть, что

$$G\mathcal{C} = G\mathcal{C}(\Gamma_1) \dotplus G\mathcal{C}(\Gamma_2) \dotplus \ldots \dotplus G\mathcal{C}(\Gamma_n),$$

и всякая связная компонента $G\mathcal{C}$ также является прямой суммой набора n связных компонент групп $G\mathcal{C}(\Gamma_j)$ $(j=1,2,\ldots,n)$. Отсюда и из доказанного непосредственно вытекает равенство (5.I). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.I. Пусть алгебра $\mathcal{C}$ - распадающаяся и a - некоторый элемент из $G\mathcal{C}$. Можно подобрать рациональную функцию $r \in R(\Gamma) \cap GC(\Gamma)$, такую что

$$[\arg r(t)a(t)]_{t \in \Gamma_j} = 0,$$

где $\Gamma_j (\in \Gamma)$ - произвольный простой замкнутый контур. Согласно лемме 5.I функция ra принадлежит связной компоненте $G_{00\ldots 0}$, содержащей единицу. Следовательно, элемент ra допускает каноническую факторизацию с множителями (и обратным к ним) из групп $GC_{\pm}(\Gamma)$. В силу теоремы 2.I функция r допускает факторизацию с рациональными множителями. Стало быть, произведение ra допускает факторизацию с необходимыми свойствами.

Докажем теперь необходимость условий теоремы. Предположим, что всякая функция вида $\exp f (f \in \mathcal{C})$ допускает каноническую факторизацию

$$\exp f = f_- f_+ \quad (f_-(\infty) = 1). \tag{5.2}$$

Как и прежде, будем предполагать, что контур Γ состоит из простых замкнутых контуров $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ и

$$\nu_j(a) = \frac{1}{2\pi}[\arg a(t)]_{t \in \Gamma_j} \quad (j=1,2,\ldots,n).$$

Очевидно,

$$\nu_j(\exp f)=0 \quad (j=1,2,\dots,n).$$

Покажем, что выполняются также равенства

$$\nu_j(f_\pm)=0 \quad (j=1,2,\dots,n). \tag{5.3}$$

Рассмотрим сначала случай, когда контур Γ_k ограничивает односвязную область F_k, целиком содержащуюся в F_r^+ или F_r^-. Если $F_k\subset F_r^+$, то $\nu_k(f_+)=0$. Из равенства (5.2) вытекает, что $\nu_k(f_+)=-\nu_k(f_-)$, и, стало быть, $\nu_k(f_-)=0$. Таким образом, доказано равенство (5.3) для всех j, при которых контуры Γ_j ограничивают области, целиком содержащиеся в F_r^+ или F_r^-.

Предположим теперь, что контур Γ_m ограничивает область F_m^+, такую, что все контуры Γ_j, содержащиеся в F_m^+, в свою очередь, ограничивают области, целиком содержащиеся в F_r^+ или F_r^-. Легко видеть, что и в этом случае $\nu_m(f_\pm)=0$. Продолжая такие рассуждения, докажем справедливость всех равенств (5.3). Из равенства (5.2) вытекает

$$f=\ln f_-+\ln f_+ .$$

В силу условий (5.3) $\ln f_\pm$ являются непрерывными функциями. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 4.I, можно легко показать, что $\ln f_+\in\mathfrak{C}_+$ и $\ln f_-\in\mathfrak{C}_-$. Следовательно, алгебра $\mathfrak{C}$ является распадающейся. Теорема 3.I доказана.

Отметим еще, что в этом и предыдущем параграфах, по существу, доказана

ТЕОРЕМА 5.I. *Пусть $\mathfrak{C}$ – произвольная банахова алгебра непрерывных функций на Γ, содержащая все рациональные функции из $R(\Gamma)$ и обладающая свойством обратимости, и пусть Γ состоит из простых гладких замкнутых контуров $\Gamma_1,\dots,\Gamma_n$. Если функция $a\in G\mathfrak{C}$ удовлетворяет условиям*

$$\nu_j(a)\overset{def}{=}\frac{1}{2\pi}\left[\arg a(t)\right]_{t\in\Gamma_j}=0, \tag{5.4}$$

то функция $\ln a\in\mathfrak{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия (5.4) вытекает, что функция $\ln a \in C(\Gamma)$. Соединим теперь элементы a и 1 непрерывной кривой $a(t;\lambda)$ $(0\le\lambda\le 1, t\in\Gamma; a(t;0)=1, a(t;1)=a(t))$ с значениями в $G\mathfrak{C}$. Рассматривая последовательно функции $\ln a(t;\lambda)$ в соответствующих точках $(0=\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_m=1)$, можно показать методом доказательства теоремы 4.I, что $\ln(t;\lambda_j)\in\mathfrak{C}$ $(j=1,2,\ldots,m)$.

СЛЕДСТВИЕ 5.I. Если функция $a\in G\mathfrak{C}$ и удовлетворяет условиям (5.4), то $\ln a\in\mathfrak{C}_{\pm}$.

§ 6. Локальный принцип в факторизации

Будем говорить, что функция $a\in GC(\Gamma)$ допускает локальную факторизацию относительно дуги γ контура Γ, если существует окрестность* U_γ этой дуги и пара функций $a_\gamma^{\pm}: \bar{F}_\Gamma^{\pm}\cap\bar{U}_\gamma\to\mathbb{C}$ со следующими свойствами.

I. Функции $a_\gamma^{\pm}$ непрерывны на $\bar{F}_\Gamma^{\pm}\cap\bar{U}_\gamma$, голоморфны в $F_\Gamma^{\pm}\cap\bar{U}_\gamma$ и

$$a_\gamma^{\pm}(t)\neq 0 \quad (t\in\bar{F}_\Gamma^{\pm}\cap\bar{U}_\gamma).$$

2. Имеет место равенство

$$a(t)=a_\gamma^-(t)a_\gamma^+(t) \quad (t\in\Gamma\cap\bar{U}_\gamma).$$

Окрестность U_γ назовем факторизационной окрестностью функции a относительно дуги γ.

Этот параграф посвящен следующей теореме.

ТЕОРЕМА 6.I. Если функция $a\in GC(\Gamma)$ допускает локальную факторизацию относительно системы дуг, покрывающих контур Γ, то она допускает факторизацию относительно всего контура Γ.

Доказательству этой теоремы предпошлем вспомогательное предложение.

---

* Окрестностью дуги γ в дальнейшем будем называть объединение ε-окрестностей всех точек γ при достаточно малых $\varepsilon>0$.

ЛЕММА 6.1. П у с т ь γ_1 и γ_2 — две пересекающиеся дуги контура Γ. Если функция $a \in GC(\Gamma)$ допускает локальную факторизацию относительно каждой из дуг γ_1 и γ_2, то она допускает локальную факторизацию и относительно дуги $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через U_{γ_1} и U_{γ_2} факторизационности функции a относительно дуг γ_1 и γ_2 и через $f_\pm = a^\pm_{\gamma_1}$ и $g_\pm = a^\pm_{\gamma_2}$ — соответствующие функции, осуществляющие факторизацию a.

Отметим, что пересечение $U_n = U_{\gamma_1} \cap U_{\gamma_2}$ может быть односвязным или состоять из двух односвязных компонент. Так как

$$g_-(t) g_+(t) = f_-(t) f_+(t) \quad (t \in \Gamma \cap \overline{U}_n),$$

то

$$g_-(t) f_-^{-1}(t) = f_+(t) g_+^{-1}(t) \quad (t \in \Gamma \cap \overline{U}_n). \tag{6.1}$$

Функция $g_- f_-^{-1}$ голоморфна на множестве $\overline{U}_n \cap F_\Gamma^-$ и непрерывна в его замыкании $\overline{U}_n \cap \overline{F}_\Gamma^-$, а функция $f_+ g_+^{-1}$ голоморфна на $\overline{U}_n \cap F_\Gamma^+$ и непрерывна в $\overline{U}_n \cap \overline{F}_\Gamma^+$. Из равенства (6.1) вытекает, что функция

$$b(t) = g_-(t) f_-(t) = f_+(t) g_+^{-1}(t) \quad (t \in \Gamma \cap \overline{U}_n) \tag{6.2}$$

допускает голоморфное продолжение на $\overline{U}_n$.

Проведем гладкий простой замкнутый ограниченный контур Δ, разбивающий плоскость на внутреннюю область F_Δ^+ и внешнюю F_Δ^- $(\infty \in F_\Delta^-)$ и обладающий следующим свойством $\overline{U}_{\gamma_1} \setminus \overline{U}_n \subset F_\Delta^+$, $\overline{U}_{\gamma_2} \setminus \overline{U}_n \subset F_\Delta^-$. Очевидно, кривая Δ проходит через каждую из связных компонент пересечения $\overline{U}_n$. На пересечении $\Delta \cap \overline{U}_n$ функция b голоморфна. Доопределим как-либо функцию b на весь контур Δ так, чтобы она удовлетворяла условию Гельдера с показателем μ $(0 < \mu < 1)$, не обращалась в нуль на контуре Δ и имела индекс, равный нулю. Согласно следствию 3.1 функция b допускает каноническую факторизацию относительно контура Δ :

$$b = b_- \, b_+ . \qquad (6.3)$$

Из этого равенства вытекает, что функция b_- допускает голоморфное продолжение на $F^- \cap \overline{U}_n$, а функция b_+ – на $F^+ \cap \overline{U}_n$, причем в указанных расширениях обе функции b_- и b_+ не обращаются в нуль.

Из равенства (6.2) и (6.3) вытекает, что

$$b_-^{-1}(t) g_-(t) = f_-(t) b_+(t) \quad \text{и} \quad f_+(t) b_+^{-1}(t) = g_+(t) b_-(t) \quad (t \in \Delta \cap \overline{U}_n).$$

Из полученных равенств следует, что функция

$$a_n^-(t) = b_-^{-1}(t) g_-(t) = f_-(t) b_+(t) \quad (t \in \Delta \cap \overline{U}_n)$$

допускает голоморфное продолжение в $\overline{U}_U \cap F_\Gamma^-$, где $U_U = U_{\gamma_1} \cup U_{\gamma_2}$, и непрерывное в $\overline{U}_U \cap \overline{F}_\Gamma^-$, а функция

$$a_n^+(t) = f_+(t) b_+^{-1}(t) = g_+(t) b_-(t) \quad (t \in \Delta \cap \overline{U}_n)$$

– голоморфное продолжение в $\overline{U}_U \cap F_\Gamma^+$ и непрерывное в $\overline{U}_U \cap \overline{F}_\Gamma^+$. Кроме того, из тех же равенств получаем, что

$$a(t) = a_n^-(t) a_n^+(t) \quad (t \in \Gamma \cap \overline{U}_U),$$

причем

$$a_n^-(t) \neq 0 \ (t \in \overline{U}_U \cap \overline{F}_\Gamma^-) \quad \text{и} \quad a_n^+(t) \neq 0 \ (t \in \overline{U}_U \cap \overline{F}_\Gamma^+).$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.I Пусть дуги $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ покрывают контур Γ и относительно каждой из них функция a допускает локальную факторизацию.

Пусть контур Γ состоит из n простых замкнутых контуров $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$.

Применяя последовательно лемму 6.I к системе дуг $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l$, покрывающих каждый из контуров $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, заключаем, что функция a допускает локальную факторизацию относительно каждого из контуров $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$. Стало быть, функция a допускает локальную факторизацию относительно всего контура Γ. Обозначим через U_Γ соответствующую факторизационную окрестность и через $a(t)=a_{\Gamma}^{-}(t)a_{\Gamma}^{+}(t)$ соответствующую локальную факторизацию. Обозначим через $\Gamma_1^-, \Gamma_2^-, \dots, \Gamma_n^-$ систему простых замкнутых кривых, достаточно близких к соответствующим кривым $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ и так же ориентированным, как последние. Кроме того, предположим, что новый контур $\Gamma^- = \Gamma_1^- \cup \cup \Gamma_2^- \cup \dots \cup \Gamma_n^-$ полностью содержится в области $F_{\Gamma}^- \cap U_{\Gamma}$. На контуре Γ^- функция a_{Γ}^- голоморфна. В силу следствия 3.I функция a_{Γ}^- допускает факторизацию относительно контура Γ^-:

$$a_{\Gamma}^- = h_- t^{\varkappa_1} h_+ . \tag{6.4}$$

Из равенства $h_- = a_{\Gamma}^- t^{-\varkappa_1} h_+^{-1}$ вытекает, что функция h_- допускает продолжение, аналитическое в области F_{Γ}^- и непрерывное в $\bar{F}_{\Gamma}^- \ (= F_{\Gamma}^- \cup \Gamma)$. Кроме того, $h_-(t) \neq 0 \ (t \in \bar{F}_{\Gamma}^-)$. Таким образом, равенство (6.4) справедливо и для точек $t \in \Gamma$ и является факторизацией функции a_{Γ}^- и на контуре Γ.

Аналогичным образом, рассматривая контур Γ^+, достаточно близкий к Γ и содержащийся в $F_{\Gamma}^+ \cap U_{\Gamma}$, можно показать, что функция a_{Γ}^+ допускает факторизацию относительно Γ^+. Эта факторизация оказывается факторизацией функции a_{Γ}^+ и относительно контура Γ. Наконец, перемножая факторизации относительно контура Γ для функций a_{Γ}^- и a_{Γ}^+, получаем факторизацию относительно Γ функции a. Теорема доказана.

Приведем лишь одно следствие из доказанной теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 6.I. *Пусть Γ_0 – окружность и $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ – система дуг, покрывающих Γ_0. Если на каждой дуге $\gamma_j (j=1,\dots,n)$ функция $a \in GC(\Gamma_0)$ обладает одним из свойств: a удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\mu (0<\mu<1)$ или функция a на дуге является сужением другой функции, разлагающейся в абсолютно сходящийся ряд Фурье, тогда функция a допускает факторизацию относительно окружности Γ_0.*

В самом деле, из следствий 3.I и 3.2 вытекает, что функция a допускает локальную факторизацию относительно каждой дуги $\gamma_j \ (j=1,2,\dots,n)$. Следовательно, в силу теоремы 6.I функция a допускает факторизацию относительно Γ_0.

§ 7. Операторы с непрерывными коэффициентами

Как отмечалось в § 3, не всякая непрерывная, не обращающаяся в нуль, функция допускает факторизацию относительно замкнутого контура Γ. Однако основные утверждения § 2, полученные с помощью факторизации рациональных функций, обобщаются и на общий случай непрерывных коэффициентов.

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть $a, b \in C(\Gamma)$. Для того чтобы оператор $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ был обратим в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$ хотя бы с одной стороны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$a(t) \neq 0 \quad \text{и} \quad b(t) \neq 0 \quad (t \in \Gamma). \tag{7.1}$$

Если эти условия выполняются, то оператор A будет обратим, обратим только слева или обратим только справа в зависимости от того, будет ли число

$$æ = \operatorname{ind} a/b$$

равным нулю, положительным или отрицательным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполняются условия (7.1). Выберем рациональную функцию $r \in R(\Gamma)$ так, чтобы она достаточно хорошо аппроксимировала функцию $c = a/b$, то есть чтобы функция c имела вид $c = r(1+m)$, где $m \in C(\Gamma)$ и

$$\max_{t \in \Gamma} |m(t)| < 1/\|P_\Gamma\|.$$

Так как $\|P\|_\Gamma \geq 1$, то $\operatorname{ind}(1+m) = 0$ и, стало быть, $\operatorname{ind} c = \operatorname{ind} r$. Пусть равенство

$$r = r_- t^{æ} r_+ \tag{7.2}$$

означает факторизацию функции r относительно контура Γ. Рассмотрим сперва случай, когда $æ \geq 0$. Так как

$$A = b\tau_-\left[t^{\varkappa}\tau_+(1+m)P_r + \tau_-^{-1}Q_r\right] =$$

$$= b\tau_-((1+m)P_r + Q_r)(t^{\varkappa}\tau_+P_r + \tau_-^{-1}Q_r),$$

то оператор A представим в виде

$$A = b\tau_-(I + mP_r)(\tau_+P_r + \tau_-^{-1}Q_r)(t^{\varkappa}P_r + Q_r).$$

Так как $\|mP_r\| < 1$, то оператор $I + mP_r$ обратим и

$$(I + mP_r)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(mP_r)^j.$$

Оператор $\tau_+P_r + \tau_-^{-1}Q_r$ обратим, причем

$$(\tau_+P_r + \tau_-^{-1}Q_r)^{-1} = \tau_+^{-1}P_r + \tau_-Q_r.$$

Оператор $t^{\varkappa}P_r + Q_r$ обратим слева и

$$(t^{\varkappa}P_r + Q_r)^{-1} = t^{-\varkappa}P_r + Q_r.$$

Таким образом, если $\varkappa = 0$, оператор A обратим и

$$A^{-1} = (\tau_+^{-1}P_r + \tau_-Q_r)\sum_{j=0}^{\infty}(-mP_r)^j b^{-1}\tau^{-1}I. \qquad (7.3)$$

При $\varkappa > 0$ оператор A обратим только слева и

$$A^{-1} = (t^{-\varkappa}P_r + Q_r)(\tau_+^{-1}P_r + \tau_-Q_r)\sum_{j=0}^{\infty}(-mP_r)^j b^{-1}\tau_-^{-1}I.$$

Перейдем к случаю $\varkappa < 0$. Рассмотрим оператор $B = at^{-\varkappa}P_r + bQ_r$. Так как $\operatorname{ind} at^{-\varkappa}b = 0$, то в силу доказанного оператор B обратим и обратный к нему выражается по формуле (7.3).

Так как оператор B может быть представлен в виде $B = A(t^{-\varkappa}P_r + Q_r)$, то оператор A обратим справа и $A^{-1} = (t^{-\varkappa}P_r + Q_r)B^{-1}$ или

$$A^{-1} = (t^{-\varkappa}P_r + Q_r)(\tau_+^{-1}P_r + \tau_-^{-1}Q_r)\sum_{j=0}^{\infty}(-mP_r)^j b^{-1}\tau_-^{-1}I.$$

Необходимость условий теоремы докажем от противного. Допустим, что оператор $A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ обратим с какой-либо стороны и, по крайней мере, одна из функций a, b обращается в нуль на Γ. Пусть r_1 и r_2 - рациональные функции из $R(\Gamma)$, аппроксимирующие по норме $C(\Gamma)$ с достаточно большой точностью соответственно функции a и b. Функции r_1 и r_2 можно при этом подобрать так, чтобы, по крайней мере, одна из них обращалась в нуль на Γ. Оператор $r_1P_\Gamma+r_2Q_\Gamma$ достаточно близок к оператору A, и, следовательно, он также обратим с какой-либо стороны. Последнее противоречит теореме 2.I. Теорема доказана.

В доказанной теореме получены формулы для обращения оператора A, однако, в отличие от § I, в этих формулах фигурируют бесконечные операторные ряды.

СЛЕДСТВИЕ 7.I. Пусть a и $b\in GC(\Gamma)$. Тогда

$$\dim \operatorname{Ker}(aP_\Gamma+bQ_\Gamma)=|\varkappa| \qquad \text{при } \varkappa<0$$

и

$$\dim \operatorname{Coker}(aP_\Gamma+bQ_\Gamma)=\varkappa \qquad \text{при } \varkappa>0.$$

Это утверждение установлено в процессе доказательства теоремы 7.I. Более подробно подпространства $\operatorname{Ker}(aP_\Gamma+bQ_\Gamma)$ и $\operatorname{Im}(aP_\Gamma+bQ_\Gamma)$ будут рассмотрены в следующем параграфе.

Результаты этого параграфа сохранят силу и для оператора вида $A=P_\Gamma aI+Q_\Gamma bI$.

§ 8. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений

Пусть a и b - функции из $GC(\Gamma)$ и r_n - рациональные функции из $R(\Gamma)$, такие, что

$$\max_{t\in\Gamma}|r_n(t)-a(t)b^{-1}(t)|=\varepsilon_n \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0. \qquad (8.1)$$

Предположим, что равенство

$$r_n={}^{-}r_n\,t^{\varkappa}\,{}^{+}r_n \qquad (8.2)$$

означает факторизацию функции τ_n относительно контура Γ, при этом будем считать, что ${}^{-}\tau_n(\infty)=1$.

Образуем оператор $A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ и операторы $A_n=b(\tau_n P_\Gamma+Q_\Gamma)$. Очевидно,

$$\|A_n-A\|_{L_p(\Gamma,\rho)}=O(\varepsilon_n)\quad (n\to\infty).$$

Отметим, что если оператор A обратим с какой-либо стороны, то соответствующие обратные операторы к A_n, вообще говоря, могут не сходиться.

Если последовательности функций ${}^{\pm}\tau_n$, $({}^{\pm}\tau_n)^{-1}$ сходятся по норме $C(\Gamma)$ к функциям $c_\pm$ $(c_\pm)^{-1}$, то из (8.2) следует равенство

$$ab^{-1}=c_-t^{\varkappa}c_+, \tag{8.3}$$

которое означает факторизацию функции a относительно контура Γ. В этом случае операторы

$$A_n^{-1}=(t^{\varkappa}P_\Gamma+Q_\Gamma)({}^{+}\tau_n^{-1}P_\Gamma+{}^{-}\tau_n Q_\Gamma){}^{-}\tau_n^{-1}b^{-1}I, \tag{8.4}$$

обратные к A_n с соответствующей стороны (см. теорему 8.I), очевидно, сходятся к оператору

$$A^{-1}=(t^{\varkappa}P_\Gamma+Q_\Gamma)(c_+^{-1}P_\Gamma+c_-Q_\Gamma)c_-^{-1}b^{-1}I, \tag{8.5}$$

обратному к A с соответствующей стороны. Последнее утверждение оказывается верным и в случае, когда функция ab^{-1} не допускает факторизации (8.3) относительно Γ и, стало быть, последовательности ${}^{\pm}\tau_n$ расходятся по норме $C(\Gamma)$. Более полное утверждение содержится в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 8.I. *Пусть a и $b\in QC(\Gamma)$, τ_n - функции из $R(\Gamma)$, удовлетворяющие условию (8.I), и равенство (8.2) означает факторизацию функций τ_n. Тогда последовательность операторов (8.4), обратных с соответствующей стороны к операторам A_n, сходится равномерно к оператору A^{-1}, обратному к $aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ с той же стороны. При этом*

$$\| A_n^{-1} - A^{-1} \| = O(\varepsilon_n) \quad (n \to \infty). \tag{8.6}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Образуем операторы B и B_n, полагая

$$B = a t^{-\varkappa} P_r + b Q_r \quad \text{и} \quad B_n = b(\tau_n t^{-\varkappa} P_r + Q_r).$$

Очевидно,

$$\| B_n - B \| = O(\varepsilon_n) \quad (n \to \infty).$$

Согласно теореме 7.I операторы B и B_n обратимы. Следовательно,

$$\| B_n^{-1} - B^{-1} \| = O(\varepsilon_n) \quad (n \to \infty). \tag{8.7}$$

Так как

$$B_n = b^- \tau_n ({}^+\tau_n P_r + {}^-\tau_n^{-1} Q_r),$$

то

$$B_n^{-1} = ({}^+\tau_n^{-1} P_r + {}^-\tau Q_r)\, {}^-\tau_n^{-1} b^{-1} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

При $\varkappa \geqslant 0$ имеют место равенства

$$A_n = B_n (t^{\varkappa} P_r + Q_r)$$

и

$$A = B (t^{\varkappa} P_r + Q_r).$$

Стало быть, обратные к этим операторам слева даются формулами

$$A_n^{-1} = (t^{-\varkappa} P_r + Q_r) B_n^{-1}$$

и

$$A^{-1} = (t^{-\varkappa} P_r + Q_r) B^{-1}.$$

Отсюда и из (8.7) вытекает соотношение (8.6).

При $\varkappa < 0$ будем иметь

$$B_n = A_n(t^{-\varkappa}P_\Gamma + Q_\Gamma)$$

и

$$B = A(t^{-\varkappa}P_\Gamma + Q_\Gamma).$$

Следовательно, операторы, обратные к A_n и A справа, можно задать равенствами

$$A_n^{-1} = (t^{-\varkappa}P_\Gamma + Q_\Gamma)B_n^{-1}$$

и

$$A^{-1} = (t^{-\varkappa}P_\Gamma + Q_\Gamma)B^{-1}.$$

Снова из этих формул и соотношения (8.7) вытекает соотношение (8.6). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 8.2. Пусть выполняются условия теоремы 8.1 и $f \in L_p(\Gamma,\rho)$. Тогда 1) последовательность функций

$$\varphi_n = t^{\varkappa}\,{}^{+}r_n^{-1}P_\Gamma({}^{-}r_n^{-1}b^{-1}f) + {}^{-}r_n Q_\Gamma({}^{-}r_n^{-1}b^{-1}f) \tag{8.8}$$

стремится по норме пространства $L_p(\Gamma,\rho)$ к некоторой функции $\varphi \in L_p(\Gamma,\rho)$, причем

$$\|\varphi_n\| = O(\varepsilon_n) \quad (n \to \infty);$$

2) функция φ является решением уравнения

$$aP_\Gamma\varphi + bQ_\Gamma\varphi = f,$$

если последнее разрешимо; 3) функции ${}^{+}r_n^{-1}$ и ${}^{-}r_n$ сходятся по норме пространства $L_p(\Gamma,\rho)$ к некоторым функциям $g_+ \in \overset{+}{L}_p(\Gamma,\rho)$ и $g_- \in \overset{-}{L}_p(\Gamma,\rho)$, причем

$$\|{}^{+}r_n^{-1} - g_+\| = O(\varepsilon_n) \quad \text{и} \quad \|{}^{-}r_n - g_-\| = O(\varepsilon_n)\ (n \to \infty);$$

4) при $\varkappa < 0$ имеет место равенство

$$\operatorname{Ker}(aP_\Gamma + bQ_\Gamma) = \mathcal{L}\{g, gt, \ldots, gt^{|\varkappa|-1}\}, \tag{8.9}$$

где $g=g_+^{-1}-g_-t^{\varkappa}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения 1) и 2) теоремы являются следствием предыдущей теоремы. Утверждение 3) вытекает из первого утверждения теоремы. В самом деле, положим в равенстве (8.6) $f=b^{-1}$. Тогда будем иметь

$$\varphi_n=t^{\varkappa}\,{}^+r_n^{-1}+{}^-r_n-1.$$

Следовательно,

$$^-r_n=1+Q_r\varphi_n \quad \text{и} \quad {}^+r_n^{-1}=\begin{cases} t^{-\varkappa}P_r\varphi_n, & \varkappa\geqslant 0,\\ P_r t^{-\varkappa}\varphi_n, & \varkappa\leqslant 0.\end{cases}$$

Утверждение 4) является следствием теоремы 2.3. Теорема доказана.

§ 9. Обобщенная факторизация непрерывных функций

В § 3 было доказано, что не всякая непрерывная функция допускает факторизацию относительно замкнутого контура Γ. В этом параграфе вводится более общее понятие факторизации непрерывной функции. Будет доказано, что такую факторизацию допускает всякая не обращающаяся в нуль непрерывная функция. Все результаты § 2 допускают соответствующие обобщения.

Будем говорить, что функция $a\in GL_\infty(\Gamma)$ допускает о б о б щ е н н у ю ф а к т о р и з а ц и ю относительно контура Γ, если функция a может быть разложена в виде произведения

$$a=a_-t^{\varkappa}a_+, \tag{9.1}$$

где $\varkappa$ - целое число, а a_- и a_+ - функции, обладающие следующими свойствами:

1) $a_-,a_-^{-1}\in L_p^-(\Gamma)$ и $a_+,a_+^{-1}\in L_p^+(\Gamma)$ для любого $p\,(1<p<\infty)$;

2) оператор $a_+^{-1}P_\Gamma a_-^{-1}I$ ограничен в пространстве $L_p(\Gamma)$ при любом $p\,(1<p<\infty)$.

Прежде всего заметим, что если функция $a\in GL_\infty(\Gamma)$ допускает две факторизации

$$a=g_-t^{\varkappa_1}g_+ \qquad \text{и} \quad a=f_-t^{\varkappa_2}f_+ \qquad (9.2)$$

с множителями, обладающими свойством I), то $\varkappa_1=\varkappa_2$, $g_-=c_1f_-$, $g_+=c_2f_+$, где $c_1, c_2\in\mathbb{C}$.

В самом деле, функции $h_-=g_-f_-^{-1}$ и $h_+=f_+g_+^{-1}$, очевидно, принадлежат соответственно пространствам $L_1^-(\Gamma)$ и $L_1^+(\Gamma)$. Из равенств (9.2) вытекает, что

$$h_-=h_+t^{\varkappa_2-\varkappa_1}. \qquad (9.3)$$

Допустим, что $\varkappa_1<\varkappa_2$, тогда обе части равенства (9.3) принадлежат пересечению $L_1^+(\Gamma)\cap L_1^-(\Gamma)$. Так как это пересечение совпадает с $\mathbb{C}$, то из (9.3) следует, что $h_-=h_+=0$. Поменяв факторизации ролями, получим, что соотношение $\varkappa_1>\varkappa_2$ также невозможно. Следовательно, $\varkappa_1=\varkappa_2$.

Из равенства $h_-=h_+$ вытекает, что $h_\pm\in L_1^+(\Gamma)\cap L_1^-(\Gamma)$, стало быть, функции h_- и h_+ являются константами.

Легко видеть, что множители в факторизации (9.I) выражаются формулами (3.2).

Основным в этом параграфе является следующее предложение.

ТЕОРЕМА 9.I. *Всякая функция $a\in QC(\Gamma)$ допускает обобщенную факторизацию (9.I) относительно контура Γ и $\varkappa=ind\,a$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть m - некоторая функция из $C(\Gamma)$, удовлетворяющая условию*

$$\max_{t\in\Gamma}|m(t)|<\max_{p_1\le r\le p_2}\left\{\|P_\Gamma\|^{-1}_{L_r(\Gamma)},\|Q_\Gamma\|^{-1}_{L_r(\Gamma)}\right\}, \qquad (9.4)$$

где p_1 и p_2 - пара чисел, для которых $1<p_1\le 2\le p_2<\infty$. Операторы $I+P_\Gamma mI$ и $I+Q_\Gamma mI$ обратимы в каждом из пространств $L_r(\Gamma)$ $(p_1\le r\le p_2)$. Положим

$$x=(I+P_\Gamma mI)^{-1}1 \qquad \text{и} \qquad y=(I+Q_\Gamma mI)^{-1}1.$$

---

* В силу теоремы I.3 об интерполяции достаточно требовать выполнения этого условия при $r=p_1$ и при $r=p_2$.

Легко видеть, что функции x, y принадлежат пространству $L_{p_2}(\Gamma)$. Из равенств $x+P_\Gamma(mx)=1$, $y+Q_\Gamma(my)=1$ вытекает, что $x\in \overset{+}{L}_{p_2}(\Gamma)$ и $y\in \overset{-}{L}_{p_2}(\Gamma)$ и $(1+m)x=z_-$, $(1+m)y=z_+$, где $z_\pm\in \overset{\pm}{L}_{p_2}(\Gamma)$. Последние два равенства влекут за собой равенство $z_+x=yz_-$. Отсюда вытекает, что обе части последнего равенства являются константами. Учитывая еще, что $z_-(\infty)=y(\infty)=1$, получим $z_+x=yz_-=1$. Таким образом, имеет место равенство

$$1+m=z_-z_+, \tag{9.5}$$

в котором $z_-,\ 1/z_-\in \overset{-}{L}_{p_2}(\Gamma)$; $z_+,\ 1/z_+\in \overset{+}{L}_{p_2}(\Gamma)$.

Покажем, что оператор $H=z_+^{-1}P_\Gamma z_-^{-1}I$ ограничен во всех пространствах $L_r(\Gamma)$ $(p_1\le r\le p_2)$.

Пусть $f=f_++f_-$, где $f_+\in \overset{+}{L}_r(\Gamma)$ и $f_-\in \overset{\circ}{L}{}^{-}_r(\Gamma)$. Тогда $(Hf)(t)=z_+^{-1}P_\Gamma z_-^{-1}f_+$. Следовательно, достаточно показать, что ограничен оператор $H\,|\,\overset{+}{L}_r(\Gamma)$. Пусть $f_+\in \overset{+}{L}_{r_2}(\Gamma)$ $(p_1\le r\le p_2)$, а $\varphi_+\ (\in \overset{+}{L}_2(\Gamma))$ – решение уравнения

$$\varphi_++P_\Gamma m\varphi_+=f_+.$$

Это равенство может быть переписано в виде

$$(1+m)\varphi_++\varphi_-=f_+,$$

где φ_- – некоторая функция из $\overset{\circ}{L}{}^{-}_r(\Gamma)$. Из равенства (9.5) вытекает

$$z_+\varphi_++z_-^{-1}\varphi_-=z_-^{-1}f_+.$$

Функция $z_+\varphi_+\in \overset{+}{L}_1(\Gamma)$ и функция $z_-^{-1}\varphi_-\in \overset{\circ}{L}{}^{-}_1(\Gamma)$. Проектируя обе части последнего равенства, получаем

$$\varphi_+=z_+^{-1}P_\Gamma z_-^{-1}f_+=Hf_+.$$

Таким образом,

$$H=(I+P_\Gamma mI)^{-1}\,|\,\overset{+}{L}_r(\Gamma,\rho).$$

Пусть теперь a – произвольная функция из $GC(\Gamma)$ и p_1 $(1<p_1\le 2)$ некоторое фиксированное число. Положим $p_2=p_1(p_1-1)^{-1}$. Подбе-

рем рациональную функцию $r_0 \in R(\Gamma)$ так, чтобы функция $m = a r_0^{-1} - 1$ удовлетворяла условию (9.4). Очевидно, $\operatorname{ind} m = \operatorname{ind} a (= \varkappa)$. Пусть равенство

$$r_0 = r_- t^{\varkappa} r_+ \tag{9.6}$$

означает факторизацию r_0 относительно контура Γ. Объединяя равенства (9.6) и (9.5), получим

$$a = a_- t^{\varkappa} a_+ ,$$

где $a_- = r_- z_-$ и $a_+ = r_+ z_+$. Оператор

$$a_+^{-1} P_\Gamma a_-^{-1} I = r_-^{-1} (z_-^{-1} P_\Gamma z_+^{-1}) r_+^{-1} I$$

ограничен во всех пространствах $L_r(\Gamma)$ $(p_1 \leq r \leq p_2)$. Функция $a_-, a_-^{-1} \in L_{p_2}^-(\Gamma)$ и $a_+, a_+^{-1} \in L_{p_2}^+(\Gamma)$.

Таким образом, множители $a_\pm$ удовлетворяют условиям 1) и 2) для чисел $p_1 \leq r \leq p_2$.

Покажем, что функция $a_\pm$ удовлетворяет условиям 1) и 2) при любых r $(1 < r < \infty)$. Пусть $\tilde{p}_1 (>1)$ произвольное число, меньшее чем p_1, и $\tilde{p}_2 = \tilde{p}_1 (\tilde{p}_1 - 1)^{-1}$. По доказанному существует факторизация $\tilde{a} = \tilde{a}_- t^{\tilde{\varkappa}} \tilde{a}_+$ с множителями $\tilde{a}_\pm$, удовлетворяющими условиям 1) и 2) при $\tilde{p}_1 \leq r \leq \tilde{p}_2$. Повторяя рассуждения, предшествующие теореме 9.1, можно показать, что $\tilde{\varkappa} = \varkappa$ и

$$a_- = c_1 \tilde{a}_- , \quad a_+ = c_2 \tilde{a}_+ ,$$

где c_1 и c_2 – комплексные константы. Следовательно, множители $a_\pm$ удовлетворяют условиям 1) и 2) и при $\tilde{p}_1 \leq r \leq \tilde{p}_2$. Теорема доказана.

Отметим, что теорема 6.1 о локальном принципе факторизации является следствием доказанной теоремы 9.1.

В самом деле, пусть функция $a \in G C(\Gamma)$ допускает локальную факторизацию относительно любой дуги γ_j из системы дуг $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, покрывающих контур Γ. Обозначим через U_{γ_j} $(j = 1, 2, \dots, n)$ факторизационные окрестности и через $a_{\gamma_j}^{\pm}$ – соответствующие факторизационные множители.

С другой стороны, согласно теореме 9.1, функция a допускает обобщенную факторизацию $a = a_- t^{\varkappa} a_+$. Следовательно,

$$(\nu(t)=)\ a_-(t)t^{\varkappa}/a^-_{\gamma_j}(t)=a^+_{\gamma_j}(t)/a_+(t)\ \ (t\in U_{\gamma_j}\cap\Gamma)$$

вытекает, что функция $\nu(t)$ допускает голоморфное продолжение во всю окрестность U_γ. Стало быть, функции $a_\pm(t)$ непрерывны на множестве $U_{\gamma_j}\cap\bar F^\pm_\Gamma$ $(j=1,2,\dots,n)$. Отсюда следует, что функции $a_\pm$ непрерывны на $F_\pm\cup\Gamma$. Сделаем еще одно замечание.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть функция $a\in GC(\Gamma)$ и равенство $a=a_-t^{\varkappa}a_+$ означает ее обобщенную факторизацию. Тогда функции $a_\pm$, $1/a_\pm\in L^\pm_p(\Gamma,\rho)$ и оператор $a_+^{-1}P_\Gamma a_-^{-1}$ ограничен во всех пространствах* $L_p(\Gamma,\rho)$ $(1<p<\infty)$.

Очевидно, что достаточно убедиться в справедливости этого утверждения для функции $\tilde a=t^{-\varkappa}a$, то есть в случае $ind\,a=0$.

По доказанному в § 7 в этом случае операторы $I-P_\Gamma(1-a)I$ $(=P_\Gamma aI+Q_\Gamma)$ и $I_\Gamma(1-a)I$ $(=P_\Gamma+Q_\Gamma aI)$ обратимы в пространствах $L_p(\Gamma,\rho)$. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы, замечаем, что

$$a_+=(I-P_\Gamma(1-a)I)^{-1}1 \quad \text{и} \quad a_-=(I-Q_\Gamma(1-a)I)^{-1}1.$$

Следовательно, $a_\pm$, $1/a_\pm\in L_p(\Gamma,\rho)$. Кроме того,

$$(I-P_\Gamma(1-a)I)^{-1}\,|\,L^+_p(\Gamma,\rho)=a_+^{-1}P_\Gamma a_-^{-1}I\,|\,L^+_p(\Gamma,\rho).$$

Так как

$$a_+^{-1}P_\Gamma a_-^{-1}I\,|\,\overset{\circ}{L}{}^-_p(\Gamma,\rho)=0,$$

то оператор $a^{-1}P_\Gamma a_-^{-1}I$ ограничен в пространствах $L_p(\Gamma,\rho)$.

§ 10. Операторы с непрерывными коэффициентами (продолжение)

С помощью обобщенной факторизации непрерывных функций можно получить эффективные формулы для обращения сингулярных интегральных операторов с непрерывными коэффициентами (в общем случае).

---

* Напоминаем, что вес ρ имеет вид $\rho(t)=\prod_{k=1}^{n}|t-t_k|^{\beta_k}$ и $-1<\beta_k<p-1$ $(k=1,2,\dots,n)$.

ТЕОРЕМА 10.1. Пусть a и $b \in GC(\Gamma)$, $\varkappa = \operatorname{ind} a/b$ и равенство

$$a/b = c_- t^{\varkappa} c_+ \qquad (10.1)$$

означает обобщенную факторизацию функции a/b. Тогда оператор, обратный к оператору $aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ с соответствующей стороны дается равенством

$$(aP_\Gamma + bQ_\Gamma)^{-1} = (t^{-\varkappa} P_\Gamma + Q_\Gamma)(c_+^{-1} P_\Gamma c_-^{-1} + ab^{-1} t^{-\varkappa} c_+^{-1} Q_\Gamma c_-^{-1}) b^{-1} I. \qquad (10.2)$$

При $\varkappa < 0$

$$\operatorname{Ker}(aP_\Gamma + bQ_\Gamma) = \mathcal{L}\{g, gt, \ldots, gt^{|\varkappa|-1}\}, \qquad (10.3)$$

где $g = c_+^{-1} - c_- t^{\varkappa}$.

При $\varkappa > 0$

$$\operatorname{Coker}(aP_\Gamma + bQ_\Gamma) = \mathcal{L}\{bc_-, bc_- t, \ldots, bc_- t^{\varkappa-1}\}. \qquad (10.4)$$

Если $\varkappa > 0$, то уравнение $aP_\Gamma \varphi + bQ_\Gamma \varphi = f$ разрешимо в том и только том случае, когда выполняются условия

$$\int_\Gamma f(t) b^{-1}(t) c_-^{-1}(t) t^{-j} dt = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, \varkappa). \qquad (10.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сперва случай $\varkappa = 0$. По доказанному в теореме 7.1 оператор $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ обратим. Покажем, что

$$A^{-1} = (c_+^{-1} P_\Gamma c_-^{-1} I + ab^{-1} c_+^{-1} Q_\Gamma c_-^{-1} I) b^{-1} I. \qquad (10.6)$$

Заметим, что оператор $c_+^{-1} Q_\Gamma c_-^{-1} = a^{-1} b I - c_+^{-1} P_\Gamma c_-^{-1}$ ограничен вместе с оператором $c_+^{-1} P_\Gamma \cdot c_-^{-1}$. Следовательно, равенством (10.6) определяется ограниченный оператор.

Оператор A^{-1} можно записать в виде

$$A^{-1}=(c_+^{-1}P_\Gamma c_-^{-1}I+c_-Q_\Gamma c_-^{-1}I)b^{-1}I. \tag{10.7}$$

Пусть r – произвольная рациональная функция из $C(\Gamma)$. Тогда

$$(c_+^{-1}P_\Gamma c_-^{-1}+c_-Q_\Gamma c_-^{-1})(c_-c_+P_\Gamma+Q_\Gamma)r=$$

$$=(c_+^{-1}P_\Gamma+c_-Q_\Gamma)(c_+r_++c_-r_-).$$

Так как $c_+r_+\in L_p^+(\Gamma,\rho)$ и $c_-r_-\in \overset{\circ}{L}{}_p^-(\Gamma,\rho)$, то

$$(c_+^{-1}P_\Gamma c_-^{-1}+c_-Q_\Gamma c_-^{-1})(c_-c_+P_\Gamma+Q_\Gamma)r=r.$$

Отсюда следует, что $A^{-1}Ar=r$. Стало быть, оператор A^{-1}, определенный равенством (10.2), является обратным к оператору A.

При $\varkappa>0$ оператор $A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ можно представить в виде

$$A=b(ab^{-1}t^{-\varkappa}P_\Gamma+Q_\Gamma)(t^{\varkappa}P_\Gamma+Q_\Gamma).$$

В силу доказанного выше оператор A^{-1}, обратный слева к A, имеет вид (10.2).

Пусть $\varkappa<0$, тогда оператор

$$B=b(ab^{-1}t^{-\varkappa}P_\Gamma+Q_\Gamma)=A(t^{-\varkappa}P_\Gamma+Q_\Gamma)$$

является обратимым и обратный к нему выражается по формуле (10.6). Следовательно, оператор A обратим справа, и для обратного к нему имеет место равенство (10.2).

Для любой рациональной функции $r\in C(\Gamma)$ имеет место равенство

$$b^{-1}c_-^{-1}(aP_\Gamma+bQ_\Gamma)(c_+^{-1}P_\Gamma+c_-Q_\Gamma)r=(t^{\varkappa}P_\Gamma+Q_\Gamma)r. \tag{10.8}$$

Отсюда при $\varkappa<0$ вытекает, что

$$\operatorname{Ker}(aP_\Gamma+bQ_\Gamma)=(c_+^{-1}P_\Gamma+c_-Q_\Gamma)\operatorname{Ker}(t^{\varkappa}P_\Gamma+Q_\Gamma).$$

Следовательно, из теоремы 2.3 вытекает равенство (10.3).

Последнее утверждение теоремы в более общем случае доказывается в § 5, гл. VIII.

Аналогичным образом обобщаются и теоремы 2.2 и 2.4 для операторов вида $A = P_\Gamma aI + Q_\Gamma bI$ на случай произвольных непрерывных коэффициентов.

§ 11. Дополнения и обобщения

Во всей главе до сих пор предполагалось, что Γ – замкнутый контур. Это предположение было существенно использовано. Однако основные результаты о сингулярных интегральных операторах с непрерывными коэффициентами, полученные в предыдущих параграфах, сохраняют силу и в случае контура Γ, состоящего из любой конечной совокупности простых замкнутых гладких кривых. В этом параграфе будем предполагать контур Γ именно таковым.

ТЕОРЕМА 11.1. Пусть Γ^1 – составной замкнутый контур* и пусть c и $d \in C(\Gamma^1)$. Для того чтобы оператор $A_1 = cI + dS_\Gamma$ был обратим хотя бы с одной стороны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$c(t)+d(t) \neq 0 \quad \text{и} \quad c(t)-d(t) \neq 0 \quad (t \in \Gamma^1). \qquad (11.1)$$

Если это условие выполнено, то оператор A_1 обратим, обратим слева или обратим справа в зависимости от того, является ли число $\varkappa = ind(c+d)/(c-d)$ равным нулю, положительным или отрицательным.

При $\varkappa > 0$

$$\dim Coker(cI + dS_\Gamma) = \varkappa,$$

а при $\varkappa < 0$

---

* Составным замкнутым контуром называется контур, состоящий из конечного числа простых замкнутых контуров, не имеющих общих точек.

$$\dim \ker(cI+dS_\Gamma)=|\varkappa|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть контур Γ^1 состоит из простых замкнутых контуров $\Gamma_1^1, \Gamma_2^1, \ldots, \Gamma_n^1$.

Обозначим через $F^+_{\Gamma_k^1}$ область, ограниченную контуром Γ_k^1. Для каждого контура Γ_k^1 построим замкнутый простой контур Γ_k^2, лежащий в пересечении $F^+_{\Gamma_k}$ и достаточно малой окрестности Γ_k^1. Ориентируем контур Γ_k^2 противоположно ориентации Γ_k^1. Пара контуров Γ_k^1 и Γ_k^2 ограничивает некоторое кольцо. Положим $\Gamma^2=\bigcup_{j=1}^{n}\Gamma_j^2$ и $\Gamma=\Gamma^1\cup\Gamma^2$. Контур Γ ограничивает область, состоящую из n колец. Расширим функции c и d на контур Γ, полагая $c(t)=1$ $(t\in\Gamma^2)$ и $d(t)=0$ $(t\in\Gamma^2)$.

Рассмотрим сингулярный интегральный оператор $A=cI+dS$ в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$. Так как контур Γ ограничивает множество, то к оператору A применимы теоремы предыдущих параграфов. Пространство $L_p(\Gamma,\rho)$, очевидно, изоморфно прямой сумме $L_p(\Gamma^1,\rho)\dot{+}L_p(\Gamma^2)$. Пусть $Y: L_p(\Gamma,\rho)\to L_p(\Gamma^1,\rho)\dot{+}L_p(\Gamma^2)$ – отображение, определенное равенством $Y\varphi=\{\varphi_1,\varphi_2\}$, где $\varphi_1=\varphi|\Gamma^1$ и $\varphi_2=\varphi|\Gamma^2$. Без труда проверяется, что имеет место равенство

$$YAY^{-1}=\begin{Vmatrix} A_1 & B \\ 0 & I \end{Vmatrix},$$

где

$$(B\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma^1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau \quad (t\in\Gamma^2,\ \varphi\in L_p(\Gamma^1,\rho))$$

– линейный ограниченный оператор, отображающий $L_p(\Gamma^1,\rho)$ в $L_p(\Gamma^2)$. Очевидно, имеет место равенство

$$YAY^{-1}=\begin{Vmatrix} I & B \\ 0 & I \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \end{Vmatrix}. \tag{II.2}$$

Первый сомножитель в правой части равенства (II.2) является обратимым оператором, причем

$$\begin{Vmatrix} I & B \\ 0 & I \end{Vmatrix}^{-1}=\begin{Vmatrix} I & -B \\ 0 & I \end{Vmatrix}.$$

Из равенства (II.2) и результатов предыдущих параграфов вытекают все утверждения теоремы. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ II.I. Если выполняются условия (II.I), то

$$A_1^{-1}=Y^{-1}\chi A^{-1}Y|L_p(\Gamma^1,\rho) \quad \text{и} \quad \operatorname{Ker} A_1=\operatorname{Ker} AY^{-1}, \tag{II,3}$$

где $\chi\{\varphi_1,\varphi_2\}=\{\varphi_1,0\}$.

Оба равенства легко выводятся из равенства (II.2). Приведенные результаты переносятся на сингулярные интегральные операторы вида $cI+S_\Gamma dI$.

Приведем простой пример. Пусть Γ^1 – контур, состоящий из двух концентрических окружностей Γ_1 и Γ_2 радиусов $R_1<R_2$. Ориентируем каждую из окружностей против часовой стрелки. В силу теоремы II.I оператор S_{Γ^1} обратим в пространствах $L_p(\Gamma^1,\rho)$. Найдем оператор $S_{\Gamma^1}^{-1}$. Для этого дополним контур Γ^1 до контура $\Gamma=\Gamma^1\cup\Gamma^2$, где Γ^2 – окружность, концентрическая с Γ_1, радиуса R ($R_1<R<R_2$) и ориентированная по часовой стрелке. Рассмотрим в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$ оператор $A=cI+dS_\Gamma$, где

$$c(t)=\begin{cases}1 & \text{при } t\in\Gamma^2,\\ 0 & \text{при } t\in\Gamma^1,\end{cases}\qquad d(t)=\begin{cases}0 & \text{при } t\in\Gamma^2,\\ 1 & \text{при } t\in\Gamma^1.\end{cases}$$

Оператор A можно представить в виде $A=b(gP_\Gamma+Q_\Gamma)$, где $g(t)=1$ при $t\in\Gamma^2$, $g(t)=-1$ при $t\in\Gamma^1$ и $b=g$. Функция g допускает факторизацию $g=g_-g_+$, где

$$g_-(t)=\begin{cases}1 & \text{при } t\in\Gamma_1\cup\Gamma^2,\\ -1 & \text{при } t\in\Gamma_2,\end{cases}\qquad g_+(t)=\begin{cases}1 & \text{при } t\in\Gamma^2\cup\Gamma_2,\\ -1 & \text{при } t\in\Gamma_1.\end{cases}$$

Из равенства (10.7) вытекает, что

$$A^{-1}=(g_+^{-1}P_\Gamma+g_-Q_\Gamma)g_-^{-1}b^{-1}I=\frac{1}{2}(1+b)+\frac{1}{2}(g_+-g_-)S_\Gamma bg_-I.$$

Отсюда в силу (II.3) следует, что

$$S_{\Gamma^1}^{-1}=fS_{\Gamma^1}fI,$$

где

$$f(t)=\begin{cases}-1 & \text{при } t\in\Gamma_1,\\ 1 & \text{при } t\in\Gamma_2.\end{cases}$$

На этом примере легко видеть, что имеется другой метод исследования сингулярных интегральных операторов на составном замкнутом контуре. В данном случае он вытекает из очевидного равенства $S_{\Gamma_1} = S_{\widetilde{\Gamma}} + I$, где $\widetilde{\Gamma} = \Gamma_2 \cup (-\Gamma_1)$.

Изложенные в этой главе результаты распространяются и на другие банаховы пространства, например, на пространства гельдеровых функций, сепарабельные симметричные пространства без веса и с весом (см. по этому поводу § II, гл. IX).

Отметим еще, что все результаты этой главы легко переносятся на случай неограниченного контура, который рассматривался в § 5, гл. I.

§ I2. Операторы с обращающимися в нуль коэффициентами

В настоящем параграфе исследуются сингулярные интегральные операторы $aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ с коэффициентами, обращающимися в нуль в конечном числе точек. Приведем сначала абстрактную схему.

Пусть $\mathcal{B}$ - банахово пространство и $A \in L(\mathcal{B})$. Предположим, что оператор A представим в виде

$$A = B_1 A_0 B_2, \tag{I2.I}$$

где $B_1, A_0, B_2 \in L(\mathcal{B})$. Кроме того, предполагается, что операторы B_1 и B_2 в определенном смысле являются более простыми операторами со следующими свойствами: а) $\operatorname{Ker} B_1 = \{0\}$ и б). существует линейное ограниченное обратимое расширение $\widetilde{B}_2$ оператора B_2, действующее из расширенного банахова пространства $\widetilde{\mathcal{B}} (\supset \mathcal{B})$ на $\mathcal{B}$. Образуем пространство $\widehat{\mathcal{B}}$, совпадающее с множеством значений оператора B_1, с нормой

$$\|y\|_{\widehat{\mathcal{B}}} = \|x\| \quad (y = B_1 x).$$

Оператор B_1, очевидно, является обратимым оператором из $L(\mathcal{B}, \widehat{\mathcal{B}})$. Равенство (I2.I) позволяет расширить область определения оператора A до $\widetilde{\mathcal{B}}$, а область его значений сузить до $\widehat{\mathcal{B}}$ и рассматривать оператор A как оператор из $L(\widetilde{\mathcal{B}}, \widehat{\mathcal{B}})$. Полученное расширение оператора A обозначим через $\widetilde{A}$.

Из представления (I2.I) оператора A вытекает, что если оператор A_0 обратим с какой-либо стороны, то и оператор $\widetilde{A}$ также обратим с той же стороны.

Для применения этой схемы потребуется два вида пространств.

Пусть $t_1, t_2, \dots, t_k$ и $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\ell$ – различные точки контура Γ, а $n_1, n_2, \dots, n_k$ и $m_1, m_2, \dots, m_\ell$ – целые неотрицательные числа. Введем две функции:

$$\rho_+(t) = \prod_{j=1}^{k}(t-t_j)^{n_j} \quad \text{и} \quad \rho_-(t) = \prod_{j=1}^{\ell}(1-\tau_j t^{-1})^{m_j} \quad (t\in\Gamma).$$

Через $\widetilde{L}_p(\rho, \rho_\pm; \Gamma)$ обозначим банахово пространство функций g вида

$$g = \rho_+^{-1} P_\Gamma f + \rho_-^{-1} Q_\Gamma f \quad (f \in L_p(\Gamma, \rho))$$

с нормой $\|g\|_{\widetilde{L}_p} = \|f\|_{L_p}$.

Это определение является корректным, так как из равенства

$$\rho_+^{-1} P_\Gamma f = -\rho_-^{-1} Q_\Gamma f \; (f \in L_p(\Gamma, \rho)) \tag{12.2}$$

вытекает $f = 0$. Действительно, рассмотрим функции

$$\varphi_-(t) = t^{-m}\rho_+(t) \quad \text{и} \quad \varphi_+(t) = t^{n}\rho_-(t),$$

где m и n – степени полиномов ρ_+ и ρ_-. Равенство (12.2) можно переписать в виде

$$t^{m+n}\varphi_-(t) f_-(t) = \varphi_+(t) f_+(t) \quad (t \in \Gamma),$$

где $f_+ = P_\Gamma f$ и $f_- = -Q_\Gamma f$. Отсюда следует, что функция $\varphi = \varphi_- f_- - \varphi_+ f_+$ $(\in L_p(\Gamma, \rho))$ принадлежит ядру обратимого слева оператора $t^{m+n} P_\Gamma + Q_\Gamma$. Стало быть, $\varphi = 0$ и $f_- = f_+ = 0$.

Через $\widehat{L}_p(\rho, h; \Gamma)$, где h функция из $L_\infty(\Gamma)$, отличная от нуля всюду, за исключением, быть может, множества нулевой меры, обозначим множество значений оператора H, определенного равенством

$$(H\varphi)(t) = h(t)\varphi(t) \quad (\varphi \in L_p(\Gamma, \rho))$$

с нормой $\|h\varphi\|_{\widehat{L}_p} = \|\varphi\|_{L_p}$. Пусть a и b – две функции из $C(\Gamma)$, имеющие вид $a = \rho_1 a_0$ и $b = \rho_2 b_1$, где $a_0, b_1 \in C(\Gamma)$,

$$\rho_1(t)=\prod_{j=1}^{n}(t-t_j)^{n_j} \quad \text{и} \quad \rho_2(t)=\prod_{j=1}^{n}(t-t_j)^{m_j},$$

и n_j, m_j – целые неотрицательные числа. Обозначим через ρ_0 наибольший общий делитель полиномов ρ_1 и ρ_2. Положим $\rho_+=\rho_1\rho_0^{-1}$, $\rho_-=t^{-m}\rho_2\rho_0^{-1}$, где m – степень полинома $\rho_2\rho_0^{-1}$. Функции a и b можно представить в виде

$$a=\rho_+\rho_0 a_0 \qquad \text{и} \qquad b=\rho_-\rho_0 b_0, \tag{12.3}$$

где $b_0=t^m b_1$. При этих обозначениях имеет место

ТЕОРЕМА 12.1. Пусть Γ – замкнутый контур и функции a, b имеют вид (12.3). Для того чтобы оператор $A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ из $L(\widetilde{L}_p(\rho,\rho_\pm,\Gamma), \widehat{L}_p(\rho,\rho_0;\Gamma))$ был обратим с какой-либо стороны, необходимо и достаточно, чтобы функции a_0 и b_0 не обращались в нуль на Γ.

Если a_0 и $b_0 \in GC(\Gamma)$, то оператор $A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ обратим слева, справа, с двух сторон в зависимости от того, будет ли число $\operatorname{ind} a_0 b_0^{-1}$ положительным, отрицательным или равным нулю.

Имеет место равенство

$$\dim \operatorname{Coker} A=\operatorname{ind} a_0 b_0^{-1} \quad \text{при} \quad \operatorname{ind} a_0 b_0^{-1}>0$$

и

$$\dim \operatorname{Ker} A=-\operatorname{ind} a_0 b_0^{-1} \quad \text{при} \quad \operatorname{ind} a_0 b_0^{-1}<0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенств (12.3) вытекает, что оператор A можно представить в виде

$$A=\rho_0(a_0P_\Gamma+b_0Q_\Gamma)(\rho_+P_\Gamma+\rho_-Q_\Gamma). \tag{12.4}$$

Обозначим через $\widetilde{L}_p^+$ подпространство $\widetilde{L}_p(=\widetilde{L}_p(\rho,\rho_\pm;\Gamma))$, состоящее из функций вида $\rho_+^{-1}f_+$, где $f_+\in \widetilde{L}_p^+(\Gamma,\rho)$. Аналогично через $\widetilde{L}_p^-$ обозначим подпространство $\widetilde{L}_p$, состоящее из функций вида $\rho_-^{-1}f_-$, где $f_-\in \overset{\circ}{L}{}_p^-(\Gamma,\rho)$. По доказанному $\widetilde{L}_p^+\cap\widetilde{L}_p^-=\{0\}$. Кроме того,

$$\widetilde{L}_p=\widetilde{L}_p^+\dot{+}\widetilde{L}_p^-.$$

Обозначим через $\widetilde{P}$ проектор, проектирующий пространство $\widetilde{L}_p$ на $\widetilde{L}_p^+$ параллельно $\widetilde{L}_p^-$. Положим $\widetilde{Q}=I-\widetilde{P}$. Имеют место равенства

$$\widetilde{P}\,|\,L_p(\Gamma,\rho)=P_\Gamma \qquad \text{и} \qquad \widetilde{Q}\,|\,L_p(\Gamma,\rho)=Q_\Gamma.$$

Действительно, любая функция $g\in L_p(\Gamma,\rho)$ может быть представлена в виде

$$g=\rho_+^{-1}P_\Gamma\rho_+P_\Gamma g+\rho_-^{-1}Q_\Gamma\rho_-Q_\Gamma g$$

и

$$\widetilde{P}g=\rho_+^{-1}P_\Gamma\rho_+P_\Gamma g=P_\Gamma g,\quad \widetilde{Q}g=\rho_-^{-1}Q_\Gamma\rho_-Q_\Gamma g=Q_\Gamma g.$$

Легко видеть, что оператор $\rho_+\widetilde{P}+\rho_-\widetilde{Q}$ является обратным к изометрическому оператору $\rho_+^{-1}P_\Gamma+\rho_-^{-1}Q_\Gamma: L_p(\Gamma,\rho)\to\widetilde{L}_p$. Оператор $\rho_+\widetilde{P}+\rho_-\widetilde{Q}$ является искомым расширением оператора $\rho_+P_\Gamma+\rho_-Q_\Gamma$. Очевидно, что $\operatorname{Ker}(\rho_0 I\,|\,L_p(\Gamma,\rho))=\{0\}$. Следовательно, полагая $B_1=\rho_0 I$, $A_0=a_0P_\Gamma+b_0Q_\Gamma$ и $B_2=\rho_+P_\Gamma+\rho_-Q_\Gamma$, получаем, что равенство (I2.4) может играть ту же роль, что и равенство (I2.I) в абстрактной схеме. Отсюда и из теоремы 7.I непосредственно следует справедливость всех утверждений теоремы. Теорема доказана.

Отметим, что с помощью результатов § 2, I0 можно получить явные формулы для обращения оператора, фигурирующего в формулировке теоремы I2.I. Аналогичная теорема имеет место и для операторов вида $P_\Gamma aI+Q_\Gamma bI$. В этом случае равенствам (I2.3) удобнее придать следующий вид:

$$a=\rho_-\rho_0a_0 \qquad \text{и} \qquad b=\rho_+\rho_0b_0.$$

Имеет место равенство

$$P_\Gamma aI+Q_\Gamma bI=(P_\Gamma\rho_-I+Q_\Gamma\rho_+I)(P_\Gamma a_0I+Q_\Gamma b_0I)\rho_0I.$$

К этому произведению можно применить абстрактную схему. При этом $B_1 = P_\Gamma \rho_- I + Q_\Gamma \rho_+ I$, $A_0 = P_\Gamma a_0 I + Q_\Gamma b_0 I$ и $B_2 = \rho_0 I$. Роль пространства $\tilde{\mathscr{B}}$ в этом случае играет пространство $\hat{L}_p(\rho, \rho_0^{-1}; \Gamma)$, а роль пространства $\hat{\mathscr{B}}$ играет банахово пространство всех функций вида

$$g = P_\Gamma(\rho_- f) + Q_\Gamma(\rho_+ f),$$

где f пробегает $L_p(\Gamma, \rho)$, с нормой

$$\|g\|_{\hat{\mathscr{B}}} = \|f\|_{L_p(\Gamma, \rho)}.$$

§ 13. Одно обобщение сингулярных интегральных операторов с непрерывными коэффициентами

Пусть $\mathscr{B}$ – банахово пространство и X – некоторый оператор из $L(\mathscr{B})$. Обозначим через $\mathfrak{A}(X)$ подалгебру алгебры $L(\mathscr{B})$, порожденную операторами X и $(X - \lambda I)^{-1}$ $(\lambda \in \rho(X))$. Алгебра $\mathfrak{A}(X)$ является коммутативной.

В § 6, гл. II, показано, что компакт максимальных идеалов алгебры $\mathfrak{A}(X)$ гомеоморфен спектру $\sigma(X)$ оператора X. Обозначим через $y(t)$ $(t \in \sigma(X))$ преобразование Гельфанда оператора $Y \in \mathfrak{A}(X)$. Если $Y = (X - \lambda I)^{-1}$ $(\lambda \in \rho(X))$ или $Y = X$, то $y(t) = (t - \lambda)^{-1}$ или соответственно $y(t) = t$ $(t \in \sigma(X))$. Разделим все связные компоненты множества $\rho(X)$ на компоненты двух классов: $\{F_j^-\}_j$ и $\{F_j^+\}_j$ $(\rho(X) = (\cup F_j^-) \cup (\cup F_j^+))$. Ради простоты будем считать, что $0 \in F^+ = \cup F_j^+$ и $\infty \in F^- = \cup F_j^-$.

Кроме того, условимся, что всякая точка спектра $\sigma(X)$ принадлежит пересечению замыканий множеств F^+ и F^-.

Пусть R – некоторый оператор из $\mathfrak{A}(X)$, преобразование Гельфанда которого является рациональной функцией r $(r(t) \neq 0,$ $t \in \sigma(X))$. Через $ind_X r$ обозначим разность между числом всех нулей* и всех полюсов r в F^+.

Так как $\mathfrak{A}(X)$ является замыканием по норме операторов множества всех таких операторов R и из сходимости операторов из $\mathfrak{A}(X)$ вытекает равномерная сходимость их преобразований

---

* С учетом их кратностей.

Гельфанда на $\sigma(X)$, то функционал ind_X допускает расширение по непрерывности на всю группу $G\mathfrak{A}(X)$.

Предположим, что пространство $\mathcal{B}$ распадается в прямую сумму подпространств $\mathcal{B}^+$ и $\mathcal{B}^-$: $\mathcal{B}=\mathcal{B}^+\dot{+}\mathcal{B}^-$ и оператор X обладает следующими свойствами:

$$X\mathcal{B}^+\subseteq\mathcal{B}^+,\quad X\mathcal{B}^+\neq\mathcal{B}^+, \tag{13.1}$$

$$(X-\lambda^- I)^{-1}\mathcal{B}^+\subseteq\mathcal{B}^+\quad(\lambda^-\in F^-), \tag{13.2}$$

$$(X-\lambda^+ I)^{-1}\mathcal{B}^-\subseteq\mathcal{B}^-\quad(\lambda^+\in F^+). \tag{13.3}$$

Из соотношений (13.1) и (13.2) вытекает, что

$$(X-\lambda^- I)\mathcal{B}^+=\mathcal{B}^+\quad(\lambda^-\in F^-),$$

а из соотношений (13.1) и (13.3), что

$$(X-\lambda^+ I)^{-1}\mathcal{B}^-\neq\mathcal{B}^-.$$

Обозначим через P проектор, проектирующий пространство $\mathcal{B}$ на $\mathcal{B}^+$ параллельно $\mathcal{B}^-$ и через Q – дополнительный проектор $I-P$. Соотношения (13.1), (13.2) и (13.3) можно соответственно переписать следующим образом:

$$PXP=XP,\quad PX^{-1}P\neq X^{-1}P,$$

$$P(X-\lambda^- I)^{-1}P=(X-\lambda^- I)^{-1}P\quad(\lambda^-\in F^-)$$

и

$$Q(X-\lambda^+ I)^{-1}Q=(X-\lambda^- I)^{-1}Q\quad(\lambda^+\in F^+).$$

Оператор $X|\mathcal{B}^+$ обратим слева, и обратным к нему является оператор $PX^{-1}|\mathcal{B}^+$. Введем обозначение

$$m=\dim\operatorname{Coker}X|\mathcal{B}^+.$$

Число m может быть как конечным, так и бесконечным. Оператор $(X-\lambda^- I)P+Q$ $(\lambda^-\in F^-)$ обратим и

$$((X-\lambda^- I)P+Q)^{-1}=(X-\lambda^- I)^{-1}P+Q, \tag{13.4}$$

а оператор $(X-\lambda^+ I)P+Q$ $(\lambda^+\in F^+)$ обратим только слева, причем

$$((X-\lambda^+ I)P+Q)^{-1}=(X-\lambda^+ I)^{-1}P+Q \tag{13.5}$$

и

$$\dim \mathrm{Coker}((X-\lambda^+ I)P+Q)=\dim \mathrm{Ker}((X-\lambda^+ I)^{-1}P+Q)=m. \tag{13.6}$$

Равенства (13.4) и (13.5) проверяются непосредственно, равенство (13.6) вытекает из соотношения

$$(X-\lambda^+ I)P+Q=(P(X-\lambda^+ I)P+Q)(I+QXP),$$

в котором оператор $I+QXP$ обратим:

$$(I+QXP)^{-1}=I-QXP.$$

Из приведенных свойств оператора $(X-\lambda I)P+Q$ и теоремы о возмущении односторонне обратимых операторов непосредственно следует, что если $\lambda\in\sigma(X)$, то оператор $(X-\lambda I)P+Q$ не имеет обратного ни с одной стороны.

ТЕОРЕМА 13.1. *Пусть* A *и* $B\in\mathfrak{A}(X)$. *Для того чтобы оператор* $AP+BQ$ *был обратим хотя бы с одной стороны, необходимо и достаточно, чтобы*

$$a(t)\neq 0 \quad \text{и} \quad b(t)\neq 0 \quad (t\in\sigma(X)). \tag{13.7}$$

Если эти условия выполняются, то оператор $AP+BQ$ $(PA+QB)$ *обратим, обратим справа, обратим слева в зависимости от того, будет ли число* $\varkappa=\mathrm{ind}_X ab^{-1}$ *равным нулю, отрицательным или положительным.*

При $\varkappa>0$

$$\dim \mathrm{Coker}(AP+BQ)=m\varkappa, \tag{13.8}$$

а при $\varkappa<0$

$$\dim \mathrm{Ker}(AP+BQ)=m|\varkappa|. \tag{13.9}$$

Эта теорема сохраняет силу, если в ее формулировке оператор $AP+BQ$ заменить оператором $PA+QB$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполняются условия (13.7). Тогда операторы A и B обратимы в $\mathfrak{A}(X)$. Образуем оператор $C=B^{-1}A$. Подберем оператор $R\in\mathfrak{A}(X)$ с рациональным преобразованием Гельфанда r, который достаточно близок к оператору C. При этом условии оператор R обратим ($r(t)\neq 0$; $t\in\sigma(X)$) и $ind_X r = ind_X a\ (=\varkappa)$.

Оператор C можно представить в виде $C=(I+M)R$, где $\|M\|<1/\|R\|$.

Пусть равенство $r=r_- t^{\varkappa} r_+$ означает факторизацию функции r относительно $\sigma(X)$, F^+ и F^-. Эту факторизацию можно произвести так же как в начале § 2 этой главы.

Напомним, что $r_\pm$ являются рациональными функциями вида

$$r_-(t)=\frac{\prod\limits_{n=1}^{k_+}(1-t^{-1}t_n^+)}{\prod\limits_{n=1}^{\ell_+}(1-t^{-1}\tau_n^+)}\ ,\qquad r_+(t)=\frac{\prod\limits_{n=1}^{k_-}(t-t_n^-)}{\prod\limits_{n=1}^{\ell_-}(t-\tau_n^-)}\ ,$$

где $\alpha\in\mathbb{C}$, $t_n^+,\tau_n^+\in F^+$, а $t_n^-,\tau_n^-\in F^-$.

Из факторизации функции r вытекает равенство $R=R_-X^{\varkappa}R_+$, где

$$R_-=\alpha\prod_{n=1}^{k_+}(I-t_n^+X^{-1})\prod_{n=1}^{\ell_+}(I-\tau_n^+X^{-1})^{-1}$$

и

$$R_+=\prod_{n=1}^{k_-}(X-t_n^-I)\prod_{n=1}^{\ell_-}(X-\tau_n^-I)^{-1}.$$

Операторы R_+ и R_- обратимы, причем имеют место равенства

$$PR_+^{\pm1}P=R_+^{\pm1}P \quad \text{и} \quad QR_-^{\pm1}Q=R_-^{\pm1}Q \qquad (13.10)$$

и вытекающие из них равенства

$$QR_+^{\pm1}Q=QR_+^{\pm1} \qquad \text{и} \quad PR_-^{\pm}P=PR_-^{\pm}.$$

Оператор $AP+BQ$ можно представить в виде

$$AP+BQ=B(CP+Q)=B((I+M)R_-X^{\varkappa}R_+P+Q).$$

При $\varkappa \geqslant 0$ будем иметь

$$AP+BQ=BR_-(I+MP)(R_+P+R_-^{-1}Q)(X^{\varkappa}P+Q). \tag{13.11}$$

Первые три сомножителя являются обратимыми операторами, причем

$$(I+MP)^{-1}=\sum_{j=0}^{\infty}(-MP)^j,\ (R_+P+R_-^{-1}Q)^{-1}=R_+^{-1}P+R_-Q.$$

Оператор $X^{\varkappa}P+Q$ обратим слева и

$$(X^{\varkappa}P+Q)^{-1}=X^{-\varkappa}P+Q.$$

Таким образом, при $\varkappa=0$ оператор $AP+BQ$ обратим, а при $\varkappa>0$ обратим слева и

$$(AP+BQ)^{-1}=(X^{-\varkappa}P+Q)(R_+^{-1}P+R_-Q)(I+MP)^{-1}R_-^{-1}B^{-1}. \tag{13.12}$$

При $\varkappa<0$ по доказанному выше оператор $AX^{-\varkappa}P+BQ$ обратим. Так как

$$AX^{-\varkappa}P+BQ=(AP+BQ)(X^{-\varkappa}P+Q),$$

то в силу (13.11) оператор $AP+BQ$ обратим справа и

$$(AP+BQ)^{-1}=(X^{-\varkappa}P+Q)(R_+^{-1}P+R_-Q)(I+MP)^{-1}R_-^{-1}B^{-1}. \tag{13.13}$$

Из формул (13.11) и (13.13) непосредственно следуют равенства (13.8) и (13.9).

Перейдем к доказательству необходимости условий (13.7). Допустим, что оператор $AP+BQ$ обратим с какой-либо стороны, и хотя бы одна из функций a или b обращается в нуль в точке $t_0 \in \sigma(X)$. Пусть R_1 и $R_2 \in \mathfrak{A}(X)$ – два оператора, преобразованиями Гельфанда которых r_1 и r_2 являются рациональные функции, подобранные так, чтобы величина $\| R_1 - A\|$ и $\| R_2 - B\|$ были достаточно малы и только одно из чисел $r_1(t_0)$, $r_2(t_0)$ равнялось нулю.

Предположим для определенности, что этим числом является $r_1(t_0)$. Оператор $R_1 P + R_2 Q$, а вместе с ним и оператор $RP+Q$ ($R = R_2^{-1} R_1$) обратим с какой-либо стороны. Учитывая, что оператор R можно представить в виде $R=(X-t_0 I)R_0$ и $R=(X^{-1}-t_0^{-1}I)S_0$, получим

$$RP+Q=(R_0P+Q)((X-t_0I)P+Q)$$

и

$$RP+Q=((X^{-1}-t_0^{-1}I)P+Q)(PS_0P+(X^{-1}-t_0^{-1}I)QS_0P+Q).$$

Так как оператор $(X-t_0I)P+Q$ не обратим ни с одной стороны, то из этих двух равенств вытекает, что оператор $RP+Q$ не может иметь обратного ни с одной стороны.

Аналогичным образом доказывается теорема и в случае оператора $PA+QB$. Теорема доказана.

Отметим, что если оператор AB^{-1} представим в виде $C_- X^{\varkappa} C_+$ (подобном факторизации) и множители C_-, C_+ обладают свойствами, аналогичными (13.10), то формулы (13.12) и (13.13) могут быть упрощены. А именно, в этом случае имеет место равенство

$$(AP+BQ)^{-1}=(X^{-\varkappa}P+Q)(C_+^{-1}P+C_-Q)C_-^{-1}B^{-1}.$$

При этих предположениях обобщаются и остальные теоремы о ядре и множестве значений на случай операторов $AP+BQ$ или $PA+QB$.

В заключение заметим, что в предыдущих параграфах роли пространства $\mathscr{B}$, подпространств $\mathscr{B}^+$, $\mathscr{B}^-$, проекторов P и Q и оператора X играли соответственно пространство $L_p(\Gamma,\rho)$, подпространства $L_p^+(\Gamma,\rho)$, $\overset{\circ}{L}{}_p^-(\Gamma,\rho)$, проекторы P_Γ, Q_Γ и оператор умножения на независимую переменную t. Легко видеть, что для оператора $X=tI$ число m равно единице.

ГЛАВА IУ

ФРЕДГОЛЬМОВЫ ОПЕРАТОРЫ

В этой главе приводятся предложения теории фредгольмовых операторов. Они излагаются в несколько большем объеме, чем это необходимо для дальнейшего. Попутно приводятся приложения к сингулярным интегральным операторам и другим классам операторов.

§ I. Нормально разрешимые операторы

I. Пусть $A \in L(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$, где m и n - некоторые натуральные числа. В линейной алгебре хорошо известно следующее предложение.

I°. Для того чтобы уравнение $Ax = y$ $(x \in \mathbb{C}^m,\ y \in \mathbb{C}^n)$ было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $f(y)=0$ для любого решения $f \in \mathbb{C}_n^*$ $(=\mathbb{C}^n)$ уравнения $A^*f=0$.

В самом деле, если уравнение $Ax=y$ разрешимо, то для любого функционала $f \in \mathbb{C}_n^*$ имеет место равенство $f(Ax)=f(y)$, следовательно, $(A^*f)(x)=f(y)$. Если $A^*f=0$, то $f(y)=0$. Докажем, что пересечение ядер функционалов f из подпространства $\operatorname{Ker} A^*$ совпадает с подпространством $\operatorname{Im} A$.

Допустим, что существует вектор $x_0 \in \mathbb{C}^n$, такой, что $x_0 \notin \operatorname{Im} A$ и $f(x_0)=0$ для всех $f \in \operatorname{Ker} A^*$. Тогда существует функционал со свойством $g(x_0) \neq 0$, $g(\operatorname{Im} A)=0$. Отсюда следует, что $A^*g=0$. Последнее невозможно.

Отметим, что в рассматриваемом случае

$$\dim \operatorname{Ker} A = n - r$$

и

$$\dim \operatorname{Ker} A^* = m - r,$$

где r - размерность (ранг) оператора A. Следовательно, имеет место равенство

$$\dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Ker} A^* = n - m,$$

в котором правая часть не зависит от оператора A.

2. В случае бесконечномерных пространств $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ для оператора $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ условие $f(y) = 0$ $(f \in \operatorname{Ker} A^*)$, где $y \in \mathcal{B}_2$, является, очевидно, необходимым условием разрешимости уравнения $Ax = y$. На простых примерах можно убедиться в том, что это условие, вообще говоря, не является достаточным. Следовательно, предложение I° перестает быть верным в бесконечномерном случае.

ЛЕММА I.I. Пусть $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ и $\mathfrak{Z}^*$ – подпространство всех общих нулей функционалов $f \in \operatorname{Ker} A^*$. Тогда линеал $\operatorname{Im} A$ плотен в $\mathfrak{Z}^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всех векторов $y \in \operatorname{Im} A$ и функционалов $f \in \operatorname{Ker} A^*$ будем иметь

$$f(y) = f(Ax) = (A^* f)(x).$$

Следовательно, $\operatorname{Im} A \subset \mathfrak{Z}^*$.

Допустим, что замыкание линеала $\operatorname{Im} A$ является правильной частью $\mathfrak{Z}^*$. Пусть x_0 – некоторый вектор из $\mathfrak{Z}^*$, не принадлежащий подпространству $\overline{\operatorname{Im} A}$.

В силу теоремы Хана-Банаха существует функционал $\chi \in \mathcal{B}_2^*$ со следующими свойствами: $\chi(x_0) \neq 0$ и $\chi(\operatorname{Im} A) = 0$. Очевидно, $\chi \in \operatorname{Ker} A^*$. Тогда $\chi(\mathfrak{Z}^*) = 0$. Это противоречит условию $\chi(x_0) \neq 0$. Лемма доказана.

3. Оператор $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ называется нормально разрешимым, если уравнение $Ax = y$ $(x \in \mathcal{B}_1, y \in \mathcal{B}_2)$ разрешимо в том и только том случае, когда выполняется условие $f(y) = 0$ для любого функционала $f \in \operatorname{Ker} A^*$.

Из доказанной леммы I.I легко выводится

ТЕОРЕМА I.I. Для того чтобы оператор $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ был нормально разрешим, необходимо и достаточно, чтобы линеал $\operatorname{Im} A$ был замкнутым.

Пусть $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$. Обозначим через $\mathbb{A}$ оператор, действующий из фактор-пространства $\mathcal{B}_1 / \operatorname{Ker} A$ в подпространство $\operatorname{Im} A$ по правилу $\mathbb{A}\mathbf{x} = Ax$, где через $\mathbf{x}$ обозначается класс вычетов из $\mathcal{B}_1 / \operatorname{Ker} A$, содержащий элемент $x \in \mathcal{B}_1$. Легко видеть, что оператор $\mathbb{A}$ принадлежит $L(\mathcal{B}_1/\mathrm{Ker}A, \overline{\mathrm{Im}A})$, причем $\|\mathbb{A}\| = \|A\|$.

Из известной теоремы Банаха об ограниченности обратного оператора непосредственно вытекает

ТЕОРЕМА I.2. Для того чтобы оператор A был нормально разрешим, необходимо и достаточно, чтобы оператор $\mathbb{A}$ был обратим.

Если оператор $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ вполне непрерывен, то вполне непрерывен и оператор $\mathbb{A}$. В силу теоремы I.2 отсюда вытекает

СЛЕДСТВИЕ I.I. Всякий бесконечномерный вполне непрерывный оператор из $L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ не является нормально разрешимым.

Для оператора $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ введем величину k_A, равную $\|\mathbb{A}^{-1}\|$ в случае, когда оператор $\mathbb{A}$ обратим, и равную ∞ в противном случае. Легко видеть, что в обоих случаях имеет место равенство

$$k_A = \sup_{y \in \mathrm{Im}A, \|y\|=1} \ \inf_{Ax=y, x \in \mathcal{B}_1} \|x\|, \tag{I.I}$$

так как

$$\sup_{y \in \mathrm{Im}A, \|y\|=1} \|\mathbb{A}^{-1} y\| =$$

$$= \sup_{y \in \mathrm{Im}A, \|y\|=1, Ax=y} \|\mathbb{x}\| = \sup_{y \in \mathrm{Im}A, \|y\|=1} \ \inf_{Ax=y, x \in \mathcal{B}_1} \|x\|.$$

Теорему I.2 можно теперь сформулировать, не прибегая к факторпространству.

ТЕОРЕМА I.3. Для того чтобы оператор $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ был нормально разрешим, необходимо и достаточно, чтобы $k_A < \infty$.

Отметим также, что имеет место равенство

$$k_A = \sup_{x \in \mathcal{B}_1, \|Ax\|=1} \rho(x, \mathrm{Ker}A), \tag{I.2}$$

где $\rho(x, \operatorname{Ker} A) = \inf\limits_{z \in \operatorname{Ker} A} \|x - z\|$.

В самом деле, в равенстве (I.I) вектор x можно, очевидно, заменить на вектор $x - x_0$, где $x_0 \in \operatorname{Ker} A$ и, стало быть,

$$k_A = \sup_{y \in \operatorname{Im} A, \|y\|=1} \ \inf_{Ax = y, x_0 \in \operatorname{Ker} A} \|x - x_0\|.$$

Последнее равенство совпадает о (I.2).

§ 2. Сужение нормально разрешимых операторов

Если оператор $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ нормально разрешим, то его сужение $A|\mathcal{N}$ на подпространство $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}_1$, вообще говоря, не является нормально разрешимым. Имеет место

ТЕОРЕМА 2.I. Пусть $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ – нормально разрешимый оператор и $\mathcal{N}$ – некоторое подпространство из $\mathcal{B}_1$. Для того чтобы сужение $A|\mathcal{N}$ оператора A на подпространство $\mathcal{N}$ было нормально разрешимым, необходимо и достаточно, чтобы сумма $\mathcal{N} + \operatorname{Ker} A$ была замкнутым подпространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что оператор $A|\mathcal{N}$ является нормально разрешимым. Покажем, что линеал $\mathcal{N} + \operatorname{Ker} A$ замкнут. Пусть $y_n = x_n + z_n$ ($x_n \in \mathcal{N}$, $z_n \in \operatorname{Ker} A$; $n = 1, 2, \ldots$) – последовательность векторов, сходящаяся к вектору y. Так как $\lim Ay_n = \lim Ax_n = Ay$, то в силу теоремы I.I $Ay \in A\mathcal{N}$. Следовательно, существует вектор $y_0 \in \mathcal{N}$, такой, что $Ay_0 = Ay$. Учитывая, что $y - y_0 \in \operatorname{Ker} A$, получаем $y \in \mathcal{N} + \operatorname{Ker} A$.

Перейдем к доказательству достаточности условий теоремы. Пусть сумма $\mathcal{N} + \operatorname{Ker} A$ замкнута. Обозначим через A_1 сужение оператора A на подпространство $\mathcal{N} + \operatorname{Ker} A$. Из равенства (I.2) вытекает, что $k_{A_1} \leq k_A$.

Так как $k_A < \infty$, то $k_{A_1} < \infty$ и, стало быть, оператор A_1 нормально разрешим. Но $\operatorname{Im}(A|\mathcal{N}) = \operatorname{Im} A_1$, значит $A|\mathcal{N}$ нормально разрешим. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы и теоремы 2.3, гл. П, непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $A \in L(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ - нормально разрешимый оператор и $\mathcal{N}$ - подпространство $\mathscr{B}_1$ конечной коразмерности. Тогда оператор $A|\mathcal{N}$ нормально разрешим.

Справедливо также более общее

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть $A \in L(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ и $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_2$ подпространства $\mathscr{B}_1$. Если $\dim \mathcal{N}_2/\mathcal{N}_1 < \infty$, то из нормальной разрешимости одного из операторов $A|\mathcal{N}_1$, $A|\mathcal{N}_2$ вытекает нормальная разрешимость второго.

Отметим также

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$, $\mathscr{B}_3$ - банаховы пространства и $A \in L(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$, $B \in L(\mathscr{B}_2, \mathscr{B}_3)$ - нормально разрешимые операторы. Для того чтобы оператор BA был нормально разрешим, необходимо и достаточно, чтобы сумма $\operatorname{Im} A + \operatorname{Ker} B$ была замкнута.

В частности, если $\dim \operatorname{Ker} B < \infty$, то оператор BA нормально разрешим.

§ 3. Возмущения нормально разрешимых операторов

Пусть $A \in L(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ - произвольный нормально разрешимый оператор, а K - конечномерный оператор из $L(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$. Тогда оператор $B = A + K$ также нормально разрешим. В самом деле, очевидно, имеет место равенство

$$B|\operatorname{Ker} K = A|\operatorname{Ker} K.$$

Так как $\operatorname{codim} \operatorname{Ker} K < \infty$, то согласно следствию 2.1 оператор $A|\operatorname{Ker} K$ нормально разрешим. В силу следствия 2.2 оператор B также нормально разрешим.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть оператор $K \in L(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ обладает следующим свойством. Для любого нормально разрешимого оператора $A \in L(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ оператор $A + K$ нормально разрешим. Тогда оператор K конечномерен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K удовлетворяет условиям теоремы. Из нормальной разрешимости нулевого оператора следует нормальная разрешимость оператора K. Допустим, что оператор K бесконечномерен. Тогда найдется бесконечномерный вполне непрерывный оператор T, действующий в подпространстве $\mathcal{J}m\,K$. Оператор $(I+T)K$, где I - единичный оператор в $\mathcal{J}m\,K$, является нормально разрешимым. Стало быть, в силу условий теоремы нормально разрешимым является также оператор $TK=(I+T)K-K$. Последнее невозможно, так как TK является вполне непрерывным бесконечномерным оператором. Теорема доказана.

Имеют место следующие две теоремы о возмущении нормально разрешимых операторов.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $A\in L(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ - нормально разрешимый оператор и $T\in L(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ - вполне непрерывный оператор, удовлетворяющий хотя бы одному из условий

$$\dim \operatorname{Ker} A/(\operatorname{Ker} T\cap \operatorname{Ker} A)<\infty, \qquad (3.1)$$

$$\dim \overline{\mathcal{J}m\,T}/(\mathcal{J}m\,A\cap \overline{\mathcal{J}m\,T})<\infty, \qquad (3.2)$$

тогда оператор $A+T$ нормально разрешим.

ТЕОРЕМА 3.2 будет доказана в § 15, она будет выведена из теоремы 15.3.

§ 4. Нормальная разрешимость сопряженного оператора

Пусть оператор $A\in L(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$. Согласно определению оператор $A^*(\in L(\mathcal{B}_2^*,\mathcal{B}_1^*))$ является нормально разрешимым, если множество $\mathcal{J}m\,A^*$ совпадает с пересечением всех ядер решений уравнения $A^{**}\varphi=0$. Оказывается, что это свойство эквивалентно следующему: уравнение $A^*\varphi=f$ разрешимо в том и только том случае, когда $f(x)=0$ для любого вектора $x\in \operatorname{Ker} A$. Иными словами имеет место

ТЕОРЕМА 4.I. Если оператор $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ нормально разрешим, то множество $\mathfrak{Im}\, A^*$ замкнуто и состоит из всех функционалов $f \in \mathcal{B}_1^*$, удовлетворяющих условию $f(x) = 0$.

Кроме того, имеет место

ТЕОРЕМА 4.2. Оператор $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ нормально разрешим в том и только том случае, когда нормально разрешим оператор $A^* \in L(\mathcal{B}_2^*, \mathcal{B}_1^*)$. Имеет место равенство $k_A = k_{A^*}$.

Доказательства этих теорем содержатся в книге Н.Данфорда и Дж.Шварца [I] (§ 6, гл. УI).

§ 5. Обобщенно обратимые операторы

В этом параграфе исследуется важный класс нормально разрешимых операторов.

Оператор $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ назовем обобщенно обратимым оператором, если существует оператор $B \in L(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$, такой, что

$$ABA = A.$$

Оператор B назовем обобщенным обратным к A и будем обозначать $B = A^{(-1)}$.

Очевидно, линейные ограниченные односторонне обратимые операторы являются обобщенно обратимыми.

Пусть V – обратимый слева оператор из $L(\mathcal{B})$. Очевидно, оператор A , определенный в пространстве $\mathcal{B} \dot{+} \mathcal{B}$ матрицей

$$A = \begin{Vmatrix} V & 0 \\ 0 & V^{-1} \end{Vmatrix},$$

где V^{-1} – оператор, обратный слева к V , является обобщенно обратимым.

ЛЕММА 5.I. Пусть оператор $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ обобщенно обратим. Тогда операторы $P_1 = AA^{(-1)}$ и $P_2 = A^{(-1)}A$ являются проекторами, причем

$$\mathfrak{Im}\, A = \mathfrak{Im}\, P_1 \qquad \text{и} \qquad \mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, P_2 . \qquad (5.\mathrm{I})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле,

$$P_1^2 = AA^{(-1)}AA^{(-1)} = AA^{(-1)} = P_1 \quad \text{и} \quad P_2^2 = A^{(-1)}AA^{(-1)}A = A^{(-1)}A = P_2 .$$

Кроме того,

$$\mathcal{I}m\, A \supseteq \mathcal{I}m\, AA^{(-1)} \supseteq \mathcal{I}m\, AA^{(-1)}A = \mathcal{I}m\, A$$

и

$$\mathrm{Ker}\, A \subseteq \mathrm{Ker}\, A^{(-1)}A \subseteq \mathrm{Ker}\, AA^{(-1)}A = \mathrm{Ker}\, A .$$

Лемма доказана.

Пусть $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ - обобщенно обратимый оператор. Знание оператора $A^{(-1)}$, обобщенно обратного к A, позволяет найти все решения уравнения

$$Ax = y \quad (x \in \mathcal{B}_1, y \in \mathcal{B}_2), \tag{5.2}$$

если оно разрешимо. Вектор

$$x_0 = A^{(-1)}y$$

является одним из решений уравнения (5.2). Действительно, пусть $Ax_0 = y$, тогда $AA^{(-1)}y = AA^{(-1)}Ax_0 = Ax_0 = y$. Общий вид векторов из ядра $\mathrm{Ker}\, A$ дается формулой $z = u - A^{(-1)}Au$, где u - произвольный вектор из $\mathcal{B}_1$. Условие $AA^{(-1)}y = y$ является необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (5.2).

ТЕОРЕМА 5.I. Для того чтобы оператор $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ был обобщенно обратимым, необходимо и достаточно, чтобы он обладал следующими тремя свойствами:

I) A - нормально разрешим;

2) подпространство $\mathrm{Ker}\, A$ имеет прямое дополнение в $\mathcal{B}_1$;

3) подпространство $\mathcal{I}m\, \mathcal{B}_2$ имеет прямое дополнение в подпространстве $\mathcal{B}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условий теоремы вытекает из леммы 5.I. Докажем их достаточность. Пусть $\mathcal{L}$ - прямое дополнение к подпространству $\mathrm{Ker}\, A$ в $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{N}$ - прямое дополнение к $\mathcal{I}m\, A$ в $\mathcal{B}_2$. Оператор $A|\mathcal{L}$, рассматриваемый как оператор, действующий из $\mathcal{L}$ на $\mathcal{I}m\, A$, обратим. Обозначим через $B\in L(\mathrm{Im}\,A,\mathscr{L})$ оператор, для которого $BA|\mathscr{L}=I|\mathscr{L}$ и $AB|\mathrm{Im}\,A=I|\mathrm{Im}\,A$. Пусть P обозначает некоторый проектор, проектирующий $\mathscr{B}_2$ на $\mathrm{Im}\,A$ параллельно $\mathscr{N}$. Рассмотрим оператор $A^{(-1)}=BP\in L(\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1)$. Имеет место равенство $AA^{(-1)}A=ABPA=$ $=ABA=A$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Если пространства $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ гильбертовы, то оператор A обобщенно обратим в том и только том случае, когда он нормально разрешим.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Всякий конечномерный оператор из $L(\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2)$ обобщенно обратим.

Из доказательства теоремы 5.1 вытекает, по существу, следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть оператор $A\in L(\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2)$ обобщенно обратим и пусть $A_0^{(-1)}$ – один из операторов, обобщенно обратных к A. Тогда общий вид операторов $A^{(-1)}$, обобщенно обратных к A дается формулой

$$A^{(-1)}=P_1A_0^{(-1)}P_2,$$

где P_1 и P_2 – произвольные проекторы из $L(\mathscr{B}_1)$ и $L(\mathscr{B}_2)$ со свойствами

$$(I-P_1)\mathscr{B}_1=\mathrm{Ker}\,A \quad \text{и} \quad P_2\mathscr{B}_2=\mathrm{Im}\,A.$$

Заметим еще, что если оператор $A\in L(\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2)$ обобщенно обратим, то оператор $A^{(-1)}$ можно подобрать так, чтобы выполнялись равенства

$$AA^{(-1)}A=A \qquad A^{(-1)}AA^{(-1)}=A^{(-1)}. \tag{5.3}$$

В самом деле, пусть имеет место равенство $AA_0^{(-1)}A=A$. Положим

$$A^{(-1)}=A_0^{(-1)}AA_0^{(-1)}. \tag{5.4}$$

Непосредственной проверкой устанавливается, что оператор (5.4) обладает свойствами (5.3). Без труда показывается, что из соотношений (5.3) вытекают равенства

$$\mathcal{I}m\, A \dotplus Ker A^{(-1)} = \mathcal{B}_2, \quad \mathcal{I}m\, A^{(-1)} \dotplus Ker\, A = \mathcal{B}_1 .$$

Отметим еще, что для пары операторов $A, B \in L(\mathcal{B})$ имеют место равенства

$$ABA = A \qquad \text{и} \qquad BAB = B$$

в том и только том случае, когда выполняется одно из равенств

$$\begin{Vmatrix} A & I-AB \\ I-BA & B \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} B & I-BA \\ I-AB & A \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} B & I-BA \\ I-AB & A \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} A & I-AB \\ I-BA & A \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{Vmatrix}.$$

Если выполняется одно из этих равенств, то выполняется и второе.

Приведем еще одну теорему о возмущении обобщенно обратимых операторов.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ - обобщенно обратимый оператор и $K \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ - конечномерный оператор. Тогда оператор $A+K$ обобщенно обратим, причем

$$(A+K)^{(-1)} = A^{(-1)} - \left[(A^{(-1)}(A+K)-I)\right] K_1^{(-1)} \left[(A+K)A^{(-1)} - I\right],$$

где $K_1^{(-1)}$ - обобщенно обратный к конечномерному оператору

$$K_1 = (A+K)\, A^{(-1)} (A+K) - (A+K).$$

Эта теорема легко устанавливается с помощью следующей леммы.

ЛЕММА 5.2. Если для оператора $X \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ существует оператор $Y \in L(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$, такой, что оператор $Z = XYX - X$ обобщенно обратим, то оператор X также обобщенно обратим, причем

$$X^{(-1)} = Y - (YX - I) Z^{(-1)} (XY - I),$$

где $Z^{(-1)}$ - оператор, обобщенно обратный к Z.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле,

$$XX^{(-1)}X = XYX - ZZ^{(-1)}Z = X + Z - Z = X.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.3. Пусть $A^{(-1)}$ - обобщенно обратный оператор к A. Тогда легко видеть, что оператор

$$K_1 = (A+K)A^{(-1)}(A+K) - (A+K)$$

конечномерен. Следовательно, применима лемма 5.2 при $X = A+K$, $Y = A^{(-1)}$ и $Z = K_1$. Теорема доказана.

§ 6. Φ-операторы

Оператор $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ называется Φ-оператором, если он нормально разрешим и числа $\dim \operatorname{Ker} A$ и $\dim \operatorname{Coker} A$ конечны. В силу теоремы 5.I всякий Φ-оператор является обобщенно обратимым. Индексом Φ-оператора $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ называется число

$$\operatorname{Ind} A \stackrel{def}{=} \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Coker} A. \qquad (6.I)$$

Из теории Рисса-Шаудера следует, что всякий оператор вида $I+T$, где T - вполне непрерывный оператор из $L(\mathcal{B})$, является Φ-оператором, причем $\operatorname{Ind}(I+T) = 0$.

Обратимый слева (справа) оператор $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ является Φ-оператором в том и только том случае, когда $\dim \operatorname{Coker} A < \infty$ ($\dim \operatorname{Ker} A < \infty$), причем

$$\operatorname{Ind} A = -\dim \operatorname{Coker} A \quad (\operatorname{Ind} A = \dim \operatorname{Ker} A).$$

Пусть $\mathcal{N}$ - некоторое подпространство из $\mathcal{B}_1$. Как известно,

$$(\mathcal{B}_1/\mathcal{N})^* = \mathcal{N}^{\perp},$$

где $\mathcal{N}^{\perp}$ - подпространство $\mathcal{B}_1^*$, состоящее из всех функционалов $f \in \mathcal{B}_1^*$, аннулирующихся на $\mathcal{N}$. Отсюда в силу леммы I.I вытекает, что для любого оператора $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ имеет место равенство

$$(\mathcal{B}_2/\overline{\mathcal{J}m\,A})^* = Ker\,A^*,$$

стало быть,

$$codim\,\overline{\mathcal{J}m\,A} = dim\,Ker\,A^*.$$

Отсюда следует, что равенство (6.I), определяющее индекс, можно заменить

$$\mathcal{J}nd\,A = dim\,Ker\,A - dim\,Ker\,A^*.$$

Условимся через $\Phi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ обозначать множество всех Φ-операторов из $L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$*.

ТЕОРЕМА 6.I. Если $A \in \Phi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ и $B \in \Phi(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3)$, то $BA \in \Phi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)$ и

$$\mathcal{J}nd\,BA = \mathcal{J}nd\,B + \mathcal{J}nd\,A. \tag{6.2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нормальная разрешимость оператора BA вытекает из следствия 2.3. Кроме того, очевидно,

$$dim\,Ker\,BA \leq dim\,Ker\,B + dim\,Ker\,A$$

и

$$dim\,Coker\,BA \leq dim\,Coker\,B + dim\,Coker\,A.$$

Стало быть, $BA \in \Phi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)$.

Докажем равенство (6.2). Обозначим через $\mathcal{L}_1$ пересечение подпространств $\mathcal{J}m\,A$ и $Ker\,B$. Тогда будем иметь

$$dim\,Ker\,BA = dim\,Ker\,A + dim\,\mathcal{L}_1. \tag{6.3}$$

Подпространство $Ker\,B$ можно представить в виде прямой суммы подпространства $\mathcal{L}_1$ и некоторого подпространства $\mathcal{B}_2'$. Пространство $\mathcal{B}_2'$ в свою очередь можно представить в виде $\mathcal{B}_2 = \mathcal{J}m\,A \dot{+} \mathcal{L}_2 \dot{+} \mathcal{L}_3$, где $\mathcal{L}_3$ – некоторое конечномерное пространство. Следовательно,

---

* Отметим, что множество $\Phi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ непусто тогда и только тогда, когда пространства $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ "почти изоморфны" в том смысле, что одно из них изоморфно подпространству другого, имеющему конечную коразмерность.

$$\dim \operatorname{Coker} A = \dim \mathcal{L}_2 + \dim \mathcal{L}_3.$$

Так как $\dim \operatorname{Ker} B = \dim \mathcal{L}_1 + \dim \mathcal{L}_2$, то

$$\dim \mathcal{L}_3 - \dim \mathcal{L}_1 = -\dim \operatorname{Ker} B + \dim \operatorname{Coker} A. \qquad (6.4)$$

Из разложения $\mathcal{B}_2 = \operatorname{Im} A \dot{+} \mathcal{L}_2 \dot{+} \mathcal{L}_3$ вытекает, что $\operatorname{Im} B = \operatorname{Im} BA \dot{+} B\mathcal{L}_3$. Стало быть,

$$\dim \operatorname{Coker} BA = \dim \operatorname{Coker} B + \dim \mathcal{L}_3 \qquad (6.5)$$

Сопоставляя равенства (6.3) и (6.5), получаем

$$\dim BA = \dim \operatorname{Ker} BA - \dim \operatorname{Coker} BA =$$

$$= \dim \operatorname{Ker} A + \dim \mathcal{L}_1 - \dim \operatorname{Coker} B - \dim \mathcal{L}_3.$$

В силу (6.4) отсюда вытекает равенство (6.2). Теорема доказана.

Приведем одну теорему о представлении Φ-операторов.

ТЕОРЕМА 6.2. *Для оператора* $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ *следующие утверждения эквивалентны.*

I) Оператор A *является* Φ-*оператором.*

2) Оператор A *представим в виде* $A = D + T$, *где* D *- обратимый с одной стороны* Φ-*оператор из* $L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ *и* T *- вполне непрерывный оператор.*

3) Оператор A *представим в виде* $A = D + K$, *где* D *- обратимый с одной стороны* Φ-*оператор из* $L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, *а* K *- конечномерный оператор.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, из утверждения 3) вытекает утверждение 2). Из утверждения 2) следует I). В самом деле, пусть оператор D для определенности обратим справа, тогда $A = D(I + D^{-1}T)$. В силу теоремы 6.I оператор A является Φ-оператором.

Докажем, что утверждение I) влечет за собой утверждение 3). Пусть $y_1, \ldots, y_n$ - базис подпространства $\operatorname{Coker} A$ и $x_1, \ldots, x_m$ - базис подпространства $\operatorname{Ker} A$. Обозначим через

$f_1,\dots,f_m$ систему функционалов из $\mathcal{B}_1^*$, для которых $f_j(x_k)=\delta_{jk}$ $(j,k=1,\dots,m)$. Образуем конечномерный оператор K, полагая

$$Kx=\sum_{j=1}^{\min(n,m)} f_j(x)y_j \quad (x\in\mathcal{B}_1).$$

Определим оператор $D=A-K$. Легко видеть, что

$$\mathrm{Im}\,D=\mathrm{Im}\,A\dot{+}\mathrm{Im}\,K.$$

Отсюда следует, что при $n\le m$ $\mathrm{Im}\,D=\mathcal{B}_2$, а при $n>m$ $\mathrm{codim}\,\mathrm{Im}\,D=n-m$. Кроме того, из равенства $D=A-K$ следует, что при $n<m$

$$\mathrm{Ker}\,D=\mathcal{L}\{x_{n+1},x_{n+2},\dots,x_m\},$$

а при $n>m$ $\mathrm{Ker}\,D=\{0\}$. Теорема доказана.

Теорема 6.2 остается в силе, если в ее формулировке произвести следующие изменения: в утверждении 1) добавить "и $\mathrm{Ind}\,A=0$", а в утверждениях 2) и 3) заменить слова "обратимый с одной стороны Φ-оператор" на "обратимый оператор".

Обозначим через $\mathcal{J}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ множество всех вполне непрерывных операторов из $L(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$.

В следующих двух теоремах доказывается устойчивость индекса Φ-операторов при малых и вполне непрерывных возмущениях.

ТЕОРЕМА 6.3. Если $A\in\Phi(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ и $T\in\mathcal{J}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$, то $A+T\in\Phi(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ и

$$\mathrm{Ind}(A+T)=\mathrm{Ind}\,A.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 6.2 оператор A представим в виде $A=D+T_1$, где $T_1\in\mathcal{J}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$, а D – односторонне обратимый оператор. Следовательно, имеет место, по крайней мере, одно из следующих двух равенств:

$$A=D(I+D^{-1}T_1),\quad A=(I+T_1D^{-1})D.$$

Из теоремы 6.1 вытекает, что

$$\mathrm{Ind}\,A=\mathrm{Ind}\,D.$$

Так как $A+T=D+T_2$, где $T_2=T_1+T\in\mathcal{J}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$, то согласно теореме 6.2 $A+T\in\Phi(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ и в силу доказанного выше $\mathrm{Ind}(A+T)=\mathrm{Ind}\,D=\mathrm{Ind}\,A$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6.4 Пусть $A\in\Phi(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$. Тогда существует число $\rho>0$, такое, что для всех операторов $X\in L(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$, удовлетворяющих условию

$$\|X-A\|<\rho, \tag{6.6}$$

оператор $X\in\Phi(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ и выполняются соотношения

$$\operatorname{Ind} A=\operatorname{Ind} X, \tag{6.7}$$

$$\dim\operatorname{Ker} X\leq\dim\operatorname{Ker} A \quad \text{и} \quad \dim\operatorname{Coker} X\leq\dim\operatorname{Coker} A. \tag{6.8}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 6.2 оператор A можно представить в виде $A=D+K$, где K – конечномерный оператор из $L(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$, а D – односторонне обратимый оператор. Обозначим через D^{-1} один из односторонне обратных к D. Положим

$$\rho=\|D^{-1}\|^{-1} \quad \text{и} \quad D_X=X-K. \tag{6.9}$$

Пусть выполняется условие (6.6). Тогда

$$\|D-D_X\|<\|D^{-1}\|^{-1}.$$

Согласно теореме 5.4, гл. II, оператор D_X обратим с той же стороны, что и D, и выполняются равенства

$$\dim\operatorname{Ker} D_X=\dim\operatorname{Ker} D,\ \dim\operatorname{Coker} D_X=\dim\operatorname{Coker} D.$$

В силу теоремы 6.2 оператор $X\in\Phi(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$. Так как $\operatorname{Ind} X=$ $=\operatorname{Ind} D_X$, а $\operatorname{Ind} A=\operatorname{Ind} D$, то $\operatorname{Ind} X=\operatorname{Ind} A$.

Осталось доказать справедливость соотношения (6.8). Следуя доказательству теоремы 6.2, можно подобрать оператор K таким, чтобы при $\operatorname{Ind} A\leq 0$

$$\dim K=\dim\operatorname{Ker} A,$$

а при $\operatorname{Ind} A\geqslant 0$

$$\dim K=\dim\operatorname{Coker} A.$$

В первом случае при $\operatorname{Ind} A \leq 0$ оператор D_X обратим слева, и будем иметь $X = D_X(I + D_X^{-1}K)$. Следовательно, $\operatorname{Ker} X = \operatorname{Ker}(I + D_X^{-1}K)$. Очевидно,

$$\dim \operatorname{Ker}(I + D_X^{-1}K) \leq \dim D_X^{-1}K \leq \dim K.$$

Стало быть, $\dim \operatorname{Ker} X \leq \dim \operatorname{Ker} A$. Второе из соотношений (6.8) вытекает из доказанного равенства (6.7).

Во втором случае при $\operatorname{Ind} A \geq 0$ оператор D_X обратим справа и, следовательно, $X = (I + KD_X^{-1})D_X$. Отсюда вытекает, что

$$\dim \operatorname{Ker} X \leq \dim \operatorname{Ker} D_X + \dim \operatorname{Ker}(I + KD_X^{-1}).$$

Так как

$$\dim \operatorname{Ker}(I + KD_X^{-1}) \leq \dim K = \dim \operatorname{Coker} A,$$

а

$$\dim \operatorname{Ker} D_X = \operatorname{Ind} A = \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Coker} A,$$

то

$$\dim \operatorname{Ker} X \leq \dim \operatorname{Ker} A. \tag{6.9}$$

Второе из соотношений (6.7) следует из (6.7) и (6.9). Теорема доказана.

Доказанная теорема называется теоремой об устойчивости индекса и полуустойчивости величин $\dim \operatorname{Ker} X$ и $\dim \operatorname{Coker} X$ при малых возмущениях Φ-операторов.

Пусть $\tilde{\mathcal{B}}_1$ и $\tilde{\mathcal{B}}_2$ – два банахова пространства, содержащие соответственно $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ в качестве подпространств, причем

$$\dim \tilde{\mathcal{B}}_1 / \mathcal{B}_1 = m \qquad \text{и} \quad \dim \tilde{\mathcal{B}}_2 / \mathcal{B}_2 = n.$$

Оператор $\tilde{A}$ называется расширением оператора $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ на $\{m, n\}$ измерений, если $\tilde{A}x = Ax$ при $x \in \mathcal{B}_1$.

ЛЕММА 6.1. *Пусть оператор $\tilde{A} \in L(\tilde{\mathcal{B}}_1, \tilde{\mathcal{B}}_2)$ является расширением оператора $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ на $\{m, n\}$ измерений. Если оператор $A \in \Phi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, то оператор $\tilde{A} \in \Phi(\tilde{\mathcal{B}}_1, \tilde{\mathcal{B}}_2)$ причем*

$$\dim \operatorname{Ker} \tilde{A} \leq \dim \operatorname{Ker} A + m, \quad \dim \operatorname{Coker} \tilde{A} \leq \dim \operatorname{Coker} A + n \tag{6.10}$$

и,

$$\operatorname{Ind}\tilde{A} = \operatorname{Ind} A + m - n. \qquad (6.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение (6.10) очевидно. Докажем соотношения (6.11). Для этого представим пространство $\tilde{\mathcal{B}}_1$ в виде $\tilde{\mathcal{B}}_1 = \mathcal{B}_1 \dotplus \mathcal{N}_1$, где $\mathcal{N}_1$ – подпространство размерности m. Определим оператор $\tilde{A}_0 \in L(\tilde{\mathcal{B}}_1, \tilde{\mathcal{B}}_2)$ равенством

$$\tilde{A}_0(x+y) = Ax \quad (x \in \mathcal{B}_1,\ y \in \mathcal{N}_1).$$

Этот оператор является расширением на $\{m, n\}$ измерений оператора A. Очевидно, $\tilde{A}_0 \in \Phi(\tilde{\mathcal{B}}_1, \tilde{\mathcal{B}}_2)$,

$$\dim \operatorname{Ker} \tilde{A}_0 = \dim \operatorname{Ker} A + m \text{ и } \dim \operatorname{Coker} \tilde{A}_0 = \dim \operatorname{Coker} A + n.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Ind}\tilde{A}_0 = \operatorname{Ind} A + m - n.$$

Операторы $\tilde{A}_0$ и $\tilde{A}$, очевидно, отличаются на конечномерное слагаемое. Стало быть, $\tilde{A} \in \Phi(\tilde{\mathcal{B}}_1, \tilde{\mathcal{B}}_2)$ и $\operatorname{Ind}\tilde{A} = \operatorname{Ind}\tilde{A}_0$. Лемма доказана.

§ 7. Регуляризация операторов. Приложения к сингулярным интегральным операторам

Говорят, что оператор $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ **допускает регуляризацию**, если существует оператор $M \in L(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$, такой, что каждый из операторов $MA - I$ и $AM - I$ вполне непрерывен.

Оператор M называется **регуляризирующим** для A.

ТЕОРЕМА 7.1. *Для того чтобы оператор $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ был Φ-оператором, необходимо и достаточно, чтобы он допускал регуляризацию.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – регуляризирующий оператор для A, то есть $MA = I + T_1$ и $AM = I + T_2$, где T_1 и T_2 – вполне непрерывные операторы. Так как

$$\operatorname{Im} A \supseteq \operatorname{Im} AM = \operatorname{Im}(I + T_2),$$

то в силу теоремы 2.3, гл. II, оператор A нормально разрешим. Из этих же соотношений вытекает, что

$$\dim \operatorname{Coker} A \leq \dim \operatorname{Coker}(I+T_2) < \infty$$

Кроме того,

$$\operatorname{Ker} A \subseteq \operatorname{Ker} MA = \operatorname{Ker}(I+T_1).$$

Стало быть,

$$\dim \operatorname{Ker} A \leq \dim \operatorname{Ker}(I+T_1) < \infty.$$

Таким образом, A является Φ-оператором.

Обратно, пусть оператор $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ является Φ-оператором. Тогда согласно теоремы 5.I оператор A является обобщенно обратимым оператором. Обозначим через $A^{(-1)} \in L(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$ один из обобщенно обратных к A операторов. Согласно лемме 5.I

$$\dim(AA^{(-1)} - I) = \dim \operatorname{Coker} A$$

и

$$\dim(A^{(-1)}A - I) = \dim \operatorname{Ker} A.$$

Отсюда следует, что оператор $A^{(-1)}$ является регуляризирующим для A. Теорема доказана.

Легко видеть, что любые два регуляризирующие операторы M_1 и M_2 для оператора $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ отличаются друг от друга на вполне непрерывное слагаемое.

Отметим, что вместе с предыдущей теоремой по существу доказана

ТЕОРЕМА 7.I$'$. Следующие утверждения об операторе $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ эквивалентны.

I. Оператор A является Φ-оператором.

2. Существуют операторы $M_1, M_2 \in L(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$, такие, что операторы $M_1A - I$ и $AM_2 - I$ конечномерны.

3. Существуют операторы $M_1, M_2 \in L(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$, такие, что операторы $M_1A - I$ и $AM_2 - I$ вполне непрерывны.

4. Существует оператор $M \in L(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$, такой, что операторы $MA - I$ и $AM - I$ конечномерны.

ТЕОРЕМА 7.1 может быть сформулирована в случае $\mathcal{B}_1=\mathcal{B}_2=\mathcal{B}$ в других терминах.

Обозначим через $\mathcal{J}(\mathcal{B})$ двусторонний идеал алгебры $L(\mathcal{B})$, состоящий из всех линейных вполне непрерывных операторов, и через $\hat{L}(\mathcal{B})$ - фактор-алгебру $L(\mathcal{B})/\mathcal{J}(\mathcal{B})$. Через $\hat{X}$ условимся обозначать класс вычетов из $\hat{L}(\mathcal{B})$, содержащий оператор $X\in L(\mathcal{B})$. Как известно, $\hat{L}(\mathcal{B})$ является банаховой алгеброй с нормой*

$$\|\hat{A}\|_{\hat{L}} = \inf_{A\in\hat{A}} \|A\|. \qquad (7.1)$$

ТЕОРЕМА 7.2. Для того чтобы оператор $A\in L(\mathcal{B})$ был Ф-оператором, необходимо и достаточно, чтобы класс вычетов $\hat{A}$ был обратим в $\hat{L}(\mathcal{B})$.

Эта теорема, очевидно, эквивалентна теореме 7.1. Легко видеть, что всякий регуляризирующий для A оператор содержится в классе вычетов $\hat{A}^{-1}$.

Из этой теоремы и известной формулы И.М.Гельфанда для спектрального радиуса вытекает, что все операторы вида $I+X$ $(X\in L(\mathcal{B}))$, удовлетворяющие условию

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|\hat{X}^n\|_{\hat{L}}} < 1,$$

являются Ф-операторами.

Пусть $A\in L(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ - некоторый Ф-оператор. Если известен регуляризирующий оператор M для A, то решение уравнения

$$Ax=y \qquad (7.2)$$

можно свести к решению уравнения

$$MAx=My, \qquad (7.3)$$

в котором оператор $MA-I$ вполне непрерывен. К уравнению (7.3) применимы многие методы, разработанные для обращения операторов вида $I+T$, где T - вполне непрерывный оператор.

Разумеется, особый интерес представляет случай, когда урав-

---

* В случае гильбертова пространства в равенстве (7.1) вместо $\inf$ можно писать $\min$ (см. И.Ц.Гохберг и М.Г.Крейн [2], стр. 58).

нения (7.2) и (7.3) эквивалентны при любом векторе y^*. Это имеет место в том и только том случае, когда $Ker\, M = 0$. Действительно, если $MAx = 0$, то $Ax = \chi$, где $\chi \in Ker\, M$.

Предположим, что уравнения (7.2) и (7.3) эквивалентны, тогда либо $Ker\, M = \{0\}$, либо $dim\, Ker\, M > 0$ и $Ker\, M \cap Im A = \{0\}$. Последнее невозможно, так как в этом случае уравнения $Ax = \chi$ ($\chi \in Ker\, M$) и $MAx = M\chi = 0$ не эквивалентны. Обратно, если $Ker\, M = \{0\}$, то, очевидно, уравнения (7.2) и (7.3) эквивалентны.

Говорят, что оператор A допускает эквивалентную регуляризацию, если он обладает регуляризирующим оператором M, для которого уравнения (7.2) и (7.3) эквивалентны при любом векторе $y \in \mathcal{B}_2$. При этом оператор M называется эквивалентным регуляризирующим оператором для A.

Из сказанного выше следует, что оператор M является эквивалентным регуляризирующим оператором для A, если он является регуляризирующим для A и обратимым слева.

1°. Для того чтобы оператор $A \in \Phi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ допускал эквивалентную регуляризацию, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$Ind\, A \geqslant 0. \tag{7.4}$$

В самом деле, если M является эквивалентным регуляризирующим оператором для A, то он обратим слева и, стало быть, $Ind\, M \leqslant 0$. Так как $Ind\, M A = Ind\, M + Ind\, A = 0$, то $Ind\, A \geqslant 0$. Пусть условие (7.4) выполняется и M_1 – регуляризирующий оператор для A. Тогда $M_1 \in \Phi(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$ и $Ind\, A + Ind\, M_1 = 0$. Стало быть, $Ind\, M_1 \leqslant 0$. Согласно теореме 6.2 оператор M_1 можно представить в виде $M_1 = M + T$, где M обратим слева. Очевидно, оператор M является эквивалентным регуляризирующим оператором для A.

Рассмотрим теперь случай, когда оператор $A \in \Phi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ не допускает эквивалентную регуляризацию, то есть выполняется условие

$$Ind\, A < 0. \tag{7.5}$$

---

* Это означает, что уравнения (7.2) и (7.3) одновременно разрешимы или неразрешимы, а в случае разрешимости имеют одни и те же решения.

Пусть оператор M_1 является регуляризирующим для A. Так как $\mathrm{Ind}\, M_1 > 0$, то согласно теореме 6.3. оператор M_1 можно представить в виде $M_1 = M + T$, где M обратим справа. Оператор M также является регуляризирующим для A, причем все решения уравнения

$$Ax = y \quad (y \in \mathrm{Im}\, A) \tag{7.6}$$

можно получить по формуле $x = Mz$, где z пробегает все решения уравнения $AMz = y$.

Приведем одно приложение к сингулярным интегральным операторам.

ТЕОРЕМА* 7.3. Пусть Γ - замкнутый контур $a, b \in C(\Gamma)$. Для того чтобы оператор $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma + T$, где $T \in \mathcal{T}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$, был Φ-оператором в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$ $(1 < p < \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$a(t) \neq 0 \quad \text{и} \quad b(t) \neq 0 \quad (t \in \Gamma). \tag{7.7}$$

Если это условие выполняется, то $\mathrm{Ind}\, A = \mathrm{ind}\, ab^{-1}$ и оператор

$$M = \frac{1}{a} P_\Gamma + \frac{1}{b} Q_\Gamma \tag{7.8}$$

является регуляризирующим оператором для A.

При условии $\mathrm{Ind}\, A \geqslant 0$ уравнения

$$A\varphi = f \quad \text{и} \quad MA\varphi = Mf$$

эквивалентны при любой правой части $f \in L_p(\Gamma, \rho)$.

При условии $\mathrm{Ind}\, A \leq 0$ все решения уравнения $A\varphi = f$ получаются по формуле $\varphi = M\chi$, где χ пробегает все решения уравнения $AM\chi = f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполняются условия (7.7). Тогда согласно теореме 7.1, гл. III, $aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ является односто-

* Дополнение к этой теореме содержится в § 15.

ронне обратимым Φ-оператором и $\operatorname{Ind}(aP_\Gamma+bQ_\Gamma)=-\operatorname{ind}ab^{-1}$. Следовательно, в силу теоремы 6.3 оператор A является Φ-оператором и $\operatorname{Ind} A=-\operatorname{ind}ab^{-1}$.

Так как для любой функции $g\in C(\Gamma)$ оператор $gP_\Gamma-P_\Gamma gI$ вполне непрерывен (см. теорему 4.3 гл. I), то легко проверить, что оператор M, определяемый равенством (7.8), является регуляризирующим для A.

Последние утверждения теоремы вытекают из предыдущего пункта.

Осталось показать, что если не выполняется условие (7.7), то оператор $aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ не является Φ-оператором. Докажем это от противного. Допустим, что оператор $aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ является Φ-оператором, и хотя бы одна из функций a или b обращается в нуль на контуре Γ. Функции a и b можно достаточно хорошо аппроксимировать рациональными функциями r_1 и $r_2\in R(\Gamma)$ так, чтобы оператор $r_1P_\Gamma+r_2Q_\Gamma$ был Φ-оператором и хотя бы одна из этих функций обращалась в нуль на контуре Γ. Для определенности предположим, что $r_1(t_0)=0$. Так как $r_1(t)=(t-t_0)s_1(t)$, где $s_1\in R(\Gamma)$, то

$$r_1P_\Gamma+r_2Q_\Gamma=(s_1P_\Gamma+r_2Q_\Gamma)((t-t_0)P_\Gamma+Q_\Gamma) \tag{7.9}$$

и

$$r_1P_\Gamma+r_2Q_\Gamma=((t-t_0)P_\Gamma+Q_\Gamma)(s_1P_\Gamma+r_2Q_\Gamma)+T_0, \tag{7.10}$$

где $T_0\in\mathfrak{T}(\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2)$. Оператор $r_1P_\Gamma+r_2Q_\Gamma$ допускает регуляризацию. Из равенств (7.9) и (7.10) вытекает, что оператор $(t-t_0)P_\Gamma+Q_\Gamma$ допускает регуляризацию и, стало быть, является Φ-оператором. При $\lambda\in F_\Gamma^-$ оператор $(t-\lambda)P_\Gamma+Q_\Gamma$ обратим, а при $\lambda\in F_\Gamma^+$ оператор $(t-\lambda)P_\Gamma+Q_\Gamma$ обратим слева и $\operatorname{Ind}((t-\lambda)P_\Gamma+Q_\Gamma)=-1$.

Таким образом, в любой окрестности оператора $(t-t_0)P_\Gamma+Q_\Gamma$ имеются операторы с разными индексами. Последнее противоречит устойчивости индекса при малых возмущениях оператора. Теорема доказана.

§ 8. Индекс и след

В этом параграфе выводится одна формула для индекса оператора, в которой индекс выражается в виде разности следов двух операторов.

Начнем с определения следа. Пусть K – конечномерный оператор из $L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – все его ненулевые собственные числа*. Так же, как в конечномерном пространстве, следом оператора K называется сумма всех его собственных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. След оператора K обозначается через $sp\, K$:

$$sp\, K = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n .$$

Отметим, что след n-мерного проектора равен n.

В дальнейшем понадобятся следующие свойства следа.

I°. Для любых двух конечномерных операторов K_1, K_2 имеет место равенство

$$sp(K_1 + K_2) = sp\, K_1 + sp\, K_2 . \tag{8.I}$$

В самом деле, положим $\mathcal{L} = \operatorname{Ker} K_1 \cap \operatorname{Ker} K_2$ и $\mathfrak{M} = \operatorname{Im} K_1 + \operatorname{Im} K_2$. Через $\mathfrak{Z}$ обозначим какое-нибудь прямое дополнение к $\mathfrak{M} \cap \mathcal{L}$ в $\mathcal{L}$, а через $\mathfrak{N}$ какое-нибудь прямое дополнение к $\mathfrak{Z}$ во всем пространстве $\mathcal{B}$, содержащее $\mathfrak{M}$. Очевидно

$$K_j \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{Z} \subseteq \operatorname{Ker} K_j \quad (j = 1, 2),$$

и поэтому $sp\, K_j = sp\, K_j | \mathfrak{N}$ $(j=1,2)$ и $sp(K_1 + K_2) = sp(K_1 + K_2) | \mathfrak{N}$ $(j=1,2)$. Так как $\dim \mathfrak{N} < \infty$, то равенство (8.I) вытекает из соответствующих равенств для матриц.

2°. Если конечномерный оператор $K \in L(\mathcal{B})$ представлен в виде

$$Kx = \sum_{j=1}^{m} f_j(x) y_j \quad (x \in \mathcal{B}), \tag{8.2}$$

то

$$sp\, K = \sum_{j=1}^{m} f_j(y_j). \tag{8.3}$$

В самом деле, в силу свойства I° достаточно доказать свойство (8.3) в случае, когда $m = 1$. Оператор $K_1 x = f_1(x) y$, очевидно, имеет собственное число $\lambda_1 = f_1(y_1)$. Следовательно, $sp\, K_1 = f_1(y_1)$.

---

* Каждое собственное число повторяется столько раз, какова его кратность. Напомним, что кратностью собственного числа называется размерность соответствующего корневого подпространства (определение см. в § 3, гл. У).

3^0. Пусть K – конечномерный оператор из $L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ и $A \in L(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$. Тогда

$$sp\, AK = sp\, KA. \tag{8.4}$$

Действительно, если оператор K представим в виде (8.2), то

$$AKx = \sum_{j=1}^{m} f_j(x) A y_j \quad \text{и} \quad KAx = \sum_{j=1}^{m} f_j(Ax) y_j.$$

Согласно формуле (8.4)

$$sp\, AK = \sum_{j=1}^{m} f_j(Ay_j) \quad \text{и} \quad sp\, KA = \sum_{j=1}^{m} f_j(Ay_j),$$

и,следовательно, имеет место равенство (8.4).

ТЕОРЕМА 8.I. Пусть оператор $A \in \Phi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ и $M \in L(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$ – его регуляризирующий оператор, такой, что операторы $MA - I_1$ и $AM - I_2$ являются конечномерными. Тогда

$$\mathcal{J}nd\, A = sp(I_1 - MA) - sp(I_2 - AM). \tag{8.5}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сперва случай, когда оператор $M = A^{(-1)}$ является обобщенно обратным к оператору A. Тогда согласно лемме 5.I

$$A^{(-1)}A = I_1 - P_1, \quad AA^{(-1)} = I_2 - P_2,$$

где P_1 – проектор на подпространство $Ker\, A$, а $I_2 - P_2$ – проектор на подпространство $\mathcal{J}m\, A$. Стало быть,

$$sp(I_1 - A^{(-1)}A) = dim\, P_1 = dim\, Ker\, A$$

и

$$sp(I_2 - AA^{(-1)}) = dim\, P_2 = dim\, Coker\, A.$$

Таким образом, в этом случае равенство (8.5) доказано. Рассмотрим общий случай произвольного M. В этом случае оператор $(M - A^{(-1)})A$ конечномерен. Следовательно, конечномерен оператор $(M - A^{(-1)})|\mathcal{J}m\, A$. Так как $dim\, Coker\, A < \infty$, то оператор $M - A^{-1}$ конечномерен. По доказанному

$$sp\,(M-A^{(-1)})A = sp\,A(M-A^{(-1)}),$$

следовательно,

$$sp(I_2-A^{(-1)}A)-sp(I_2-MA)=sp(I_1-AA^{(-1)})-sp(I_1-AM).$$

Отсюда следует, что

$$sp(I_1-AA^{(-1)})-sp(I_2-A^{(-1)}A)=sp(I_1-MA)-sp(I_2-AM).$$

Теорема доказана.

С помощью доказанной теоремы можно легко доказать теорему 6.I.

Действительно, пусть $A\in\Phi(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ и $B\in\Phi(\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3)$. Обозначим через $A^{(-1)}$ и $B^{(-1)}$ операторы, обобщенно обратные к операторам A и B. Так как операторы $I_1-A^{(-1)}A$, $I_2-AA^{(-1)}$, $I_3-BB^{(-1)}$, $I_2-B^{(-1)}B$ конечномерны, то конечномерны и операторы $I_1-A^{(-1)}B^{(-1)}BA$, $I_3-BAA^{(-1)}B^{(-1)}$. Согласно формуле (8.5) для величины $\omega=\mathrm{Ind}\,BA-\mathrm{Ind}\,A-\mathrm{Ind}\,B$ имеет место равенство

$$\omega=sp(A^{(-1)}A-A^{(-1)}B^{(-1)}BA)+sp(BAA^{(-1)}B^{(-1)}-BB^{(-1)})+sp(B^{(-1)}B\cdot AA^{(-1)}).$$

Так как в силу 3°

$$sp(A^{(-1)}A-A^{(-1)}B^{(-1)}BA)=sp\,A^{(-1)}(I_2-B^{(-1)}B)A=sp(I_2-B^{(-1)}B)AA^{(-1)}$$

и

$$sp(BAA^{(-1)}B^{(-1)}-BB^{(-1)})=sp\,B(AA^{(-1)}-I_2)B^{(-1)}=sp\,B^{(-1)}B(AA^{(-1)}-I_2),$$

то

$$\omega=sp((I_2-B^{(-1)}B)AA^{(-1)}+BB^{(-1)}(AA^{(-1)}-I_2)+B^{(-1)}B-AA^{(-1)})=0.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Ind}\, BA = \mathrm{Ind}\, B + \mathrm{Ind}\, A.$$

В случае гильбертовых пространств след определяется для более широкого класса ядерных операторов. Оператор $A \in L(\mathfrak{H})$ называется ядерным, если ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} (A\varphi_j, \varphi_j) \tag{8.6}$$

сходится для любого ортонормированного базиса $\varphi_1, \varphi_2, \dots$. Всякий ядерный оператор вполне непрерывен и сумма ряда (8.6) совпадает с суммой всех собственных чисел оператора A с учетом их кратностей. Эту сумму обозначают через $\mathrm{Sp}\, A$ и называют следом оператора A. След ядерных операторов обладает всеми свойствами $1^\circ - 3^\circ$. Повторяя доказательство теоремы 8.1, можно установить следующую теорему.

ТЕОРЕМА 8.2. Пусть $A \in \Phi(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ и $M \in L(\mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_1)$ - регуляризирующий оператор для A, такой, что операторы $MA - I_1$ и $AM\ I_2$ являются ядерными. Тогда

$$\mathrm{Ind}\, A = \mathrm{Sp}(I_1 - MA) - \mathrm{Sp}(I_2 - AM). \tag{8.7}$$

Отметим, что в случае, когда пространство $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}$, формула (8.5) (соответственно формула (8.7)) упрощается и принимает вид

$$\mathrm{Ind}\, A = \mathrm{Sp}(AM - MA).$$

§ 9. Функции от Φ-операторов и их индекс

В этом параграфе исследуются некоторые классы функций от Φ-операторов. Выясняются условия, при которых эти операторы сами являются Φ-операторами. Выводится формула для индекса.

Пусть $\mathfrak{H}$ -гильбертово пространство и U - частично изометрический оператор, действующий в нем. Как известно, оператор $U \in L(\mathfrak{H})$ называется *частично изометрическим*, если

$$U^*U = P_1 \quad \text{и} \quad UU^* = P_2, \qquad (9.1)$$

где P_1 – ортогональный проектор на подпространство $\operatorname{Im} U^*$, а P_2 – ортогональный проектор на подпространство $\operatorname{Im} U$.

С помощью леммы 5.I легко заключить, что оператор U является частично изометрическим в том и только том случае, когда оператор U^* является обобщенным обратным к U, то есть $UU^*U = U$. Будем предполагать, что числа $\dim \operatorname{Ker} U$ и $\dim \operatorname{Coker} U$ конечны и различны. Следовательно, U является Φ-оператором и $\operatorname{Ind} U \neq 0$.

ЛЕММА 9.I. В круге $|\lambda| < 1$ оператор $U-\lambda I$ является Φ-оператором и

$$\operatorname{Ind}(U-\lambda I) = \operatorname{Ind} U. \qquad (9.2)$$

При $|\lambda| > 1$ оператор $U-\lambda I$ обратим, а при $|\lambda| = 1$ оператор $U-\lambda I$ не является Φ-оператором.

Эта лемма сохраняет силу, если в ее формулировке оператор U заменить оператором U^*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор $UU^* - I$ конечномерен. Следовательно, оператор $U-\lambda I$ является Φ-оператором в том и только том случае, когда таковым является оператор $U-\lambda UU^*$. Так как $\|U\| = \|U^*\| = 1$, то оператор $I-\lambda U^*$ обратим при $|\lambda| < 1$, стало быть, оператор $U-\lambda UU^* = U(I-\lambda U^*)$ является Φ-оператором и выполняется условие (9.2).

В окрестности любого оператора $U-\lambda_0 I$ $(|\lambda_0| = 1)$ имеются обратимые операторы $U-\lambda I$ $(|\lambda| > 1)$ и Φ-операторы $U-\lambda I$ $(|\lambda| < 1)$ с ненулевыми индексами. Отсюда в силу теоремы 6.4 вытекает, что оператор $U-\lambda_0 I$ не является Φ-оператором. Лемма доказана.

Отметим, что, в частности, доказано равенство $\sigma(\hat{U}) = \{t : |t| = 1\}$. Напомним (см. § I), что через $\hat{U}$ обозначается класс вычетов из $\hat{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L}(\mathfrak{H})/\mathfrak{F}(\mathfrak{H})$, содержащий оператор U.

Каждому тригонометрическому полиному

$$p(t) = \sum_j a_j t^j \quad (|t| = 1)$$

сопоставим оператор

$$p(U) = \sum_j a_j U^{(j)},$$

где

$$U^{(j)} = \begin{cases} U^j & \text{при } j = 0, 1, \ldots, \\ (U^*)^{-j} & \text{при } j = -1, -2, \ldots . \end{cases}$$

Из равенства (9.I) вытекает

$$\hat{U}\hat{U}^* = \hat{U}^*\hat{U} = \hat{I},$$

стало быть,

$$\hat{U}^{-1} = \hat{U}^*.$$

Таким образом, $\widehat{p(U)} = p(\hat{U})$. Так как $\sigma(\hat{U}) = \{t : |t| = 1\}$, то

$$\|p(U)\| \geq \|p(\hat{U})\| \geq \max_{|t|=1} |p(t)|. \tag{9.3}$$

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}^{(2)} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ * оператор

$$\tilde{U} = \begin{Vmatrix} U & UU^* - I \\ U^*U - I & U^* \end{Vmatrix}.$$

Легко видеть, что оператор $\tilde{U}$ является унитарным оператором. Отсюда следует, что

$$\|p(U)\| \leq \|p(\tilde{U})\| \leq \max_{|t|=1} |p(t)|. \tag{9.4}$$

Из равенства (9.3) и (9.4) вытекает, что

$$\|p(U)\| = \|p(\hat{U})\| = \max_{|t|=1} |p(t)|. \tag{9.5}$$

Пусть a – произвольная непрерывная функция на единичной окружности Γ_0 и $p_n (\in C(\Gamma_0))$ – последовательность тригонометрических полиномов, стремящаяся равномерно на Γ_0 к a.

---

* Через $\oplus$ обозначается ортогональная сумма.

В силу (9.5) последовательность операторов $p_n(U)$ стремится по норме к некоторому оператору, который обозначим через $a(U)$. Очевидно, $a(U)$ не зависит от выбора последовательности p_n, стремящейся к a. Аналогично определяется класс вычетов $a(\hat{U})$. Легко видеть, что $\widehat{a(U)}=a(\hat{U})$. Когда a пробегает всю алгебру $C(\Gamma_0)$, то $a(\hat{U})$ пробегает алгебру $\hat{C}(\hat{U})$ с двумя образующими $\hat{U}$ и $\hat{U}^*=\hat{U}^{-1}$. Кроме того, алгебры $\hat{C}(\hat{U})$ и $C(\Gamma_0)$ изометричны.

ТЕОРЕМА 9.I*. Для того чтобы оператор $a(U)$ $(a\in C(\Gamma_0))$ был Φ-оператором, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$a(t)\neq 0 \qquad |t|=1. \tag{9.6}$$

Если это условие выполняется, то

$$\operatorname{Ind} a(U)=\operatorname{Ind} U \operatorname{ind} a. \tag{9.7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение теоремы вытекает из теоремы 7.2. Докажем формулу (9.7). Пусть p - тригонометрический полином и пусть

$$p(t)=c_0 t^{-\ell}\prod_j(t-t_j^+)^{n_j}\prod_k(t-t_k^-)^{m_k},$$

где $|t_j^+|<1$ и $|t_k^-|>1$, $c_0\in\mathbb{C}$. Легко видеть, что

$$p(U)=c_0 U^{(-\ell)}\prod_j(U-t_j^+ I)^{n_j}\prod_k(U-t_k^- I)^{m_k}+T,$$

где $T\in\mathcal{J}(\mathfrak{B})$. В силу теоремы 6.1 и леммы 9.1 будем иметь

$$\operatorname{Ind} p(U)=(-\ell+\sum_j n_j)\operatorname{Ind} U.$$

Так как

$$-\ell+\sum_j n_j=\operatorname{ind} p,$$

то

$$\operatorname{Ind} p(U)=\operatorname{Ind} U \operatorname{ind} p. \tag{9.8}$$

---

*Дополнение к этой теореме содержится в § 15.

Так как обе части равенства (9.8) являются непрерывными функциями от функции a, то из (9.8) вытекает (9.7). Теорема доказана.

Отметим еще, что если $a \in C(\Gamma_0)$ и $b=a^{-1}$, то оператор $b(U)$ является регуляризирующим для оператора $a(U)$. Это следует из того, что $a(\hat{U})b(\hat{U})=b(\hat{U})a(\hat{U})=\hat{I}$.

Теорема 9.I допускает обобщение на некоторые классы Φ-операторов, действующих в банаховом пространстве $\mathcal{B}$. Это обобщение приводится ниже. Пусть $\hat{L}=\hat{L}(\mathcal{B})$ обозначает фактор-алгебру $L(\mathcal{B})/\mathcal{T}(\mathcal{B})$, где $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ – двусторонний идеал алгебры $L(\mathcal{B})$, состоящий из всех вполне непрерывных операторов.

Через $\hat{A}$ обозначим класс вычетов из $\hat{L}$, содержащий оператор $A \in L(\mathcal{B})$.

Пусть X – некоторый оператор из $L(\mathcal{B})$. Согласно теореме 7.2 множество чисел $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $X-\lambda I$ является Φ-оператором, совпадает с множеством регулярных точек $\rho(\hat{X})$ элемента $\hat{X}$ в алгебре $\hat{L}$. Множество $\rho(\hat{X})$ является открытым, следовательно, оно состоит из конечного или счетного множества связных компонент. Обозначим эти компоненты через $\rho_j(\hat{X})$ $(j=0,1,\dots,\omega;\ \omega\leq\infty)$. Компоненту $\rho_0(\hat{X})$ будем считать неограниченной. Согласно теореме 6.4* в каждой компоненте $\rho_j(\hat{X})$ индекс $\mathrm{Ind}(X-\lambda I)$ $(\lambda\in\rho_j(\hat{X}))$ принимает постоянное значение. Условимся о следующем обозначении:

$$n_j=\mathrm{Ind}(X-\lambda_j I) \quad (j=0,1,\dots,\omega),$$

где $\lambda_j \in \rho_j(\hat{X})$.

Обозначим через $\hat{L}[\hat{X}]$ подалгебру алгебры $\hat{L}$, порожденную всеми элементами вида $(\hat{X}-\lambda_j\hat{I})^{-1}$ $(\lambda_j\in\rho(\hat{X}))$. По доказанному в § 9, гл. II, подалгебра $\hat{L}(\hat{X})$ не зависит от выбора чисел λ_j в компонентах $\rho_j(\hat{X})$, и элемент $(\hat{X}-\lambda_0\hat{I})^{-1}$ можно заменить элементом $\hat{X}$.

Алгебра $\hat{L}[\hat{X}]$ является коммутативной банаховой алгеброй. Согласно теореме 9.I, гл. II, компакт максимальных идеалов алгебры $\hat{L}[\hat{X}]$ совпадает с $\sigma(\hat{X})$ $(=\mathbb{C}\setminus\rho(\hat{X}))$.

Пусть r – рациональная функция с полюсами в $\rho(\hat{X})$. Тогда $r(\hat{X})$ принадлежит алгебре $\hat{L}[\hat{X}]$. Функция r является преобразованием Гельфанда элемента $r(\hat{X})$. Если последовательность таких элементов $\{r_n(\hat{X})\}$ стремится по норме к

---

* См. также теорему 10.I.

элементу $\hat{A} \in \hat{\mathfrak{L}}[\hat{X}]$, то последовательность функций $r_n(t)$ стремится равномерно на $\sigma(\hat{X})$ к некоторой непрерывной на $\sigma(\hat{X})$ функции, которую обозначим через $a(t)$. Эта функция является преобразованием Гельфанда элемента $\hat{A}$.

Рассмотрим функционалы ν_j $(j=1,2,\ldots,\omega)$, определенные на функциях из $GC(\sigma(\hat{X}))$ [*] следующим образом. Если r является рациональной функцией, то $\nu_j(r)$ равно разности числа нулей и числа полюсов функции r, лежащих внутри $\rho_j(\hat{X})$. Легко устанавливается, что функционал $\nu_j(r)$ допускает расширение по непрерывности на всю группу $GC(\sigma(\hat{X}))$. Если компонента $\rho_j(\hat{X})$ ограничена замкнутой спрямляемой кривой Γ, то

$$\nu_j(a)=\frac{1}{2\pi}\left[\arg a(t)\right]_{t\in\Gamma}.$$

ТЕОРЕМА 9.2[**]. *Для того чтобы оператор A из класса вычетов $\hat{A}\in\hat{\mathfrak{L}}[\hat{X}]$ был Φ-оператором, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$a(t)\neq 0 \quad (t\in\sigma(\hat{X})). \tag{9.8}$$

Если это условие выполняется, то

$$\operatorname{Ind} A=\sum_j n_j\,\nu_j(a). \tag{9.9}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение теоремы является простым следствием теоремы 7.2 и теоремы 9.1, гл. II. В случае, когда функция a является рациональной, равенство (9.9) устанавливается непосредственной проверкой. Отсюда вытекает справедливость этой формулы в общем случае, так как обе части равенства в (9.9) являются непрерывными функционалами от a. Теорема доказана.

---

[*] Напомним, что через $GC(\sigma(\hat{X}))$ обозначается множество обратимых элементов алгебры $C(\sigma(\hat{X}))$.

[**] Дополнение к этой теореме содержится в § 15.

§ 10. Структура множества Φ-операторов

Из теоремы 6.4 следует, что множество $\Phi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ всех Φ-операторов из $L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ является открытым. Следовательно, $\Phi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ состоит из связных компонент.

ТЕОРЕМА 10.1. Во всякой связной компоненте $F(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ множества $\Phi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ индекс операторов принимает постоянное значение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A_0 и A_1 – некоторые два оператора из $F(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$. Обозначим через $A(\lambda)(0 \le \lambda \le 1)$ непрерывную оператор-функцию со значениями в $F(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, такую, что $A(0) = A_0$ и $A(1) = A_1$. Рассмотрим функцию $h(\lambda) = \mathrm{Ind}\, A(\lambda)$ $(0 \le \lambda \le 1)$. Согласно теореме 6.4 функция h непрерывна. Кроме того, она принимает только целочисленные значения. Следовательно, функция h является постоянной. В частности,

$$\mathrm{Ind}\, A_0 = \mathrm{Ind}\, A_1 .$$

Теорема доказана.

Напомним, что через $GL(\mathcal{B})$ обозначается группа обратимых операторов из алгебры $L(\mathcal{B})$. Для дальнейшего нам понадобятся следующие простые свойства группы $GL(\mathcal{B})$.

1^0. Пусть для оператора $A \in GL(\mathcal{B})$ существует непрерывная кривая $\lambda(t)\,(0 \le t \le 1)$ в плоскости $\mathbb{C}$, соединяющая точку $\lambda_1 = 0$ с некоторой точкой λ_2 из области $|\lambda| > \|A\|$ и не пересекающая спектр оператора A. Тогда оператор A содержится в связной компоненте G_0 $(= G_0(L(\mathcal{B})))$ группы $GL(\mathcal{B})$, содержащей единичный оператор.

В самом деле, обозначим через $\mu(t)$ $(1 \le t \le 2)$ некоторую непрерывную функцию, убывающую от 1 до 0, и положим $\mu(t) = 1$ при $0 \le t \le 1$ и $\lambda(t) = \lambda_2$ при $1 < t \le 2$. Непрерывная оператор-функция $F(t) = \mu(t)A - \lambda(t)I$ $(0 \le t \le 2)$ обладает следующими свойствами: $F(0) = A$, $F(2) = I$, все значения $F(t)$ $(0 \le t \le 2)$ являются обратимыми операторами. Следовательно, $A \in G_0$.

2^0. Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство. Тогда группа $GL(\mathcal{H})$ связна. Действительно, пусть A – произвольный оператор из $GL(\mathcal{H})$. Оператор $H = (A^*A)^{1/2}$ – положительно определенный, а оператор $V = AH^{-1}$ – унитарный. В силу предложения I^0 оператор $H \in G_0$. Обозначим через $\mathscr{L}$ и $\mathscr{N} = \mathscr{H} \ominus \mathscr{L}$ инвариантные подпространства оператора V, такие, что спектр $V|\mathscr{L}$ лежит на полуокружности $|\lambda| = 1$, $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$, а спектр оператора $V|\mathscr{N}$ лежит на полуокружности $|\lambda| = 1$, $\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$. Согласно предложению I^0 $V|\mathscr{L} \in G_0 L(\mathscr{L})$ и $V|\mathscr{N} \in G_0 L(\mathscr{N})$. Отсюда непосредственно вытекает, что оператор $V \in G_0$. Учитывая, что $A = VH$, заключаем, что $A \in G_0$. Следовательно, $GL(\mathscr{H}) = G_0$.

3^0. Пусть $\mathscr{B}$ – банахово пространство и $\mathscr{L}$ – его подпространство конечной коразмерности. Группа $GL(\mathscr{B})$ связна в том и только том случае, когда связна группа $GL(\mathscr{L})$.

Действительно, пусть $\mathscr{N}$ – некоторое прямое дополнение к $\mathscr{L}$ и P – проектор, проектирующий $\mathscr{B}$ на $\mathscr{N}$ параллельно $\mathscr{L}$. Если для некоторого $X \in L(\mathscr{B})$ оператор $X_{11} \overset{def}{=} PX|\mathscr{L}$ обратим, то имеет место равенство

$$X = (I + QXPX_{11}^{-1}P)D_X(I + X_{11}^{-1}PXQ), \tag{10.0}$$

где $Q = I - P$ и

$$D_X = PXP + QXQ - QXPX_{11}^{-1}PXQ.$$

Равенство (10.0) устанавливается непосредственной проверкой. Так как $(QXPX_{11}^{-1}P)^2 = (X_{11}^{-1}PXQ)^2 = 0$, то

$$(I + tQXPX_{11}^{-1}P)^{-1} = I - tQXPX_{11}^{-1}P \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

и

$$(I + tX_{11}^{-1}PXQ)^{-1} = I - tX_{11}^{-1}PXQ \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Следовательно, операторы $I + QXPX_{11}^{-1}P$, $I + X_{11}^{-1}PXQ$ принадлежат компоненте G_0.

Предположим, что группа $GL(\mathscr{L})$ связна. Покажем, что произвольный оператор $A \in GL(\mathscr{B})$ принадлежит компоненте G_0. Без ограничения общности можно считать, что оператор $A_{11} (= PA|\mathscr{N})$ обратим, ибо в противном случае (учитывая конечномерность подпространства $\mathscr{N}$) этого можно добиться заменой оператора A достаточно близким.

Оператор D_A можно представить в виде $D_A = (A_{11}P + Q)(P + QBQ)$, где $B = A - APA_{11}^{-1}PA$. Так как подпространство $\mathscr{N}$ конечномерно и, следовательно, группа $GL(\mathscr{N})$ связна, то оператор $A_{11}P + Q \in G_0$. Из связности группы $GL(\mathscr{L})$ вытекает, что оператор $P + QBQ \in G_0$. В силу равенства (10.0) отсюда вытекает, что и оператор $A \in G_0$. Таким образом, $GL(\mathscr{B}) = G_0$.

Покажем теперь, что если группа $GL(\mathscr{B})$ связна, то группа $GL(\mathscr{L})$ также связна.

Пусть A_{22} – произвольный оператор из $GL(\mathscr{L})$. Тогда оператор $A_{22}Q+P\in GL(\mathscr{B})$ и в силу предположения существует непрерывная оператор-функция $A(t)\ (0\le t\le 1)$ со значениями из $GL(\mathscr{B})$, такая, что $A(0)=I$ и $A(1)=A_{22}Q+P$. Без ограничения общности можно считать, что все значения оператор-функции $A_{11}(t)=PA(t)|\mathfrak{N}$ обратимы. В противном случае можно заменить оператор-функцию $A(t)\ (0\le t\le 1)$ достаточно близкой непрерывной оператор-функцией, обладающей и этим свойством.

В силу равенства (10.0) будем иметь

$$D_{A(t)}=(I-QA(t)PA_{11}^{-1}(t)P)A(t)(I-A_{11}^{-1}(t)PA(t)Q)$$

и, следовательно $D_{A(0)}=I$ и $D_{A(1)}=A_{22}Q+P$. Учитывая, что $D_{A(t)}=(A_{11}(t)P+Q)(P+A_{22}(t)Q)$, где $A_{22}(t)=[QA(t)-QA(t)PA_{11}^{-1}PA(t)]|\mathscr{L}$, получаем

$$A_{22}(t)Q+P=(A_{11}^{-1}(t)P+Q)D_{A(t)}\,.$$

Отсюда вытекает, что $A_{22}(t)\in GL(\mathscr{L})(0\le t\le 1)$ и $A_{22}(0)=Q$, $A_{22}(1)=A_{22}$. Предложение доказано.

4^0. Пусть $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ – два банаховых пространства, и пусть в $L(\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2)$ существует хотя бы один Φ-оператор A. Группа $GL(\mathscr{B}_1)$ связна в том и только том случае, когда связна группа $GL(\mathscr{B}_2)$.

Действительно, пусть $\mathscr{L}$ – некоторое прямое дополнение к ядру оператора A в $\mathscr{B}_1$. Подпространства $\mathscr{L}$ и $\mathfrak{Im}\,A$, очевидно, изоморфны. Так как подпространства $\operatorname{Ker}A$ и $\mathscr{B}_2/\mathfrak{Im}\,A$ конечномерны, то утверждение 4^0 вытекает из утверждения 3^0.

ТЕОРЕМА 10.2. *Если одна из групп $GL(\mathscr{B}_1)$ или $GL(\mathscr{B}_2)$ связна, то множество всех операторов из $\Phi(\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2)$, имеющих один и тот же индекс, образует связную компоненту.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема содержательна лишь в случае, когда множество $\Phi(\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2)$ непусто. Согласно предложению 4^0 в этом случае обе группы $GL(\mathscr{B}_1)$ и $GL(\mathscr{B}_2)$ связны. Обозначим через $\Phi_{\varkappa}(\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2)$ множество всех операторов из $\Phi(\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2)$ с индексом, равным $\varkappa$.

Пусть D – некоторый фиксированный односторонне обратимый оператор из $\Phi_{\varkappa}(\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2)$ и D^{-1} – обратный к нему. Так как

$\operatorname{Ind} D^{-1} = -\operatorname{Ind} D = -\varkappa$, то $\operatorname{Ind} AD^{-1} = 0$. Согласно теореме 6.2 оператор AD^{-1} может быть представлен в виде $AD^{-1} = B + K$, где $B \in GL(\mathscr{B}_2)$ и K – конечномерный оператор. По предположению существует непрерывная функция $F: [0,1] \to GL(\mathscr{B}_2)$, такая, что $F(0) = B$ и $F(1) = I$. В случае, когда оператор D обратим слева, рассмотрим функцию

$$H(\lambda) = (F(\lambda) + (1-\lambda)K)D \quad (0 \le \lambda \le 1).$$

Она, очевидно, непрерывна, и все ее значения принадлежат $\Phi_{\varkappa}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$. Кроме того, $H(0) = A$, а $H(1) = D$.

Рассмотрим второй случай, когда оператор D обратим справа. В этом случае оператор $D^{-1}D = I + K_0$, где K_0 – конечномерный оператор. Образуем новую функцию $H_1(\lambda)$ $(0 \le \lambda \le 1)$, определенную равенствами

$$H_1(\lambda) = A(I + 2\lambda K_0) \quad (0 \le \lambda \le \tfrac{1}{2})$$

и

$$H_1(\lambda) = (F(2\lambda - 1) + 2(1-\lambda)K)D \quad (\tfrac{1}{2} \le \lambda \le 1).$$

Легко видеть, что функция H_1 отображает непрерывно отрезок [0,1] в $\Phi_{\varkappa}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$, причем

$$H_1(0) = A, \quad H_1(\tfrac{1}{2}) = AD^{-1}D \quad \text{и} \quad H_1(1) = D.$$

Теорема доказана.

С помощью теоремы 10.2 устанавливается следующая характеристика индекса Φ-операторов.

ТЕОРЕМА 10.3. Пусть $\nu(X)$ – функционал, определенный на множестве $\Phi(\mathscr{B})$, где $\mathscr{B}$ – банахово пространство, для которого группа $GL(\mathscr{B})$ связна.

Если функционал $\nu(X)$ принимает только целочисленные значения и обладает следующими двумя свойствами

$$\nu(XY) = \nu(X) + \nu(Y) \tag{10.1}$$

и

$$\nu(X + K) = \nu(X), \tag{10.2}$$

где K - произвольный конечномерный оператор из $L(\mathcal{B})$, то найдется рациональное число* ν_0, такое, что имеет место равенство

$$\nu(X) = \nu_0 \, \mathrm{Ind}\, X \tag{10.3}$$

для любого оператора $X \in \Phi(\mathcal{B})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сперва покажем, что функционал $\nu(X)$ непрерывен на $\Phi(\mathcal{B})$. Пусть $X \in \Phi(\mathcal{B})$. Согласно теореме 6.2 оператор X представим в виде $X = D + K$, где D обратим с какой-либо стороны, а K - конечномерный оператор. Для определенности положим, что оператор D имеет обратный слева D^{-1}.

Покажем, что для всех операторов $Y \in L(\mathcal{B})$, удовлетворяющих условию $\|Y\| < 1/\|D^{-1}\|$, имеет место равенство

$$\nu(X+Y) = \nu(X). \tag{10.4}$$

В самом деле, $X+Y = (I+YD^{-1})D + K$ и, стало быть, в силу равенств (10.1) и (10.2)

$$\nu(X+Y) = \nu(D) + \nu(I+YD^{-1}) = \nu(X) + \nu(I+YD^{-1}). \tag{10.5}$$

Рассмотрим оператор Z, определенный равенством

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(YD^{-1})^n}{n} \quad (\in L(\mathcal{B})).$$

Как известно, имеет место равенство

$$e^{Z} = I + YD^{-1}.$$

Так как

$$e^{Z} = \left(e^{\frac{1}{n}Z}\right)^n$$

для любого натурального n, то в силу (10.1) будем иметь

$$\nu(e^{Z}) = n\nu\left(e^{\frac{1}{n}Z}\right) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

---

* Если величина $\mathrm{Ind}\, X$ принимает все целые значения при $X \in \Phi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, то ν_0 является целым числом.

Целое число $\nu(e^{Z})$ делится на все натуральные числа, следовательно,

$$\nu(I+Y\mathcal{D}^{-1})=\nu(e^{Z})=0.$$

Отсюда и из (10.1) вытекает равенство (10.4). Таким образом, функционал ν непрерывен.

Обозначим через $\Phi_{\varkappa}(\mathcal{B})$ множество всех операторов из $\Phi(\mathcal{B})$, индекс которых равен $\varkappa$. Согласно теореме 11.2 каждое множество $\Phi_{\varkappa}(\mathcal{B})$ связно и

$$\Phi(\mathcal{B})=\bigcup_{\varkappa}\Phi_{\varkappa}(\mathcal{B}).$$

Так как функционал ν непрерывен и принимает целочисленные значения, то на каждой компоненте $\Phi_{\varkappa}(\mathcal{B})$ он принимает одно и то же значение. Обозначим это значение через $\nu_{\varkappa}$. Из равенства (10.1) вытекает, что $\nu_{\varkappa_1+\varkappa_2}=\nu_{\varkappa_1}+\nu_{\varkappa_2}$. Множество индексов операторов из $\Phi(\mathcal{B})$ образует подгруппу группы целых чисел. Следовательно, индексы пробегают все целые числа, кратные некоторому натуральному числу p. Так как для любых целых чисел r_1 и r_2 $\nu_{p(r_1+r_2)}=\nu_{pr_1}+\nu_{pr_2}$, то $\nu_{pr}=r\nu_p$. Таким образом, $\nu_{\varkappa}=(\nu_p/p)\varkappa$.

§ 11. Зависимость подпространств $\mathrm{Ker}\,X$ и $\mathrm{Im}\,X$ от оператора X

Подпространства $\mathrm{Ker}\,X$ и $\mathrm{Im}\,X$ не зависят, вообще говоря, непрерывно от оператора $X\in\Phi(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$. Даже величины $\dim\mathrm{Ker}\,X$ и $\dim\mathrm{Coker}\,X$, вообще говоря, не являются непрерывными функциями от X, когда оператор X пробегает множество $\Phi(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$. Имеет место

ТЕОРЕМА 11.1. Пусть $A\in\Phi(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ и U – любая окрестность A. Тогда функция $\dim\mathrm{Ker}\,X$ принимает на множестве $U\cap\Phi(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ все значения от 0 до $\dim\mathrm{Ker}\,A$ при $\mathrm{Ind}\,A\leq 0$ и все значения от $\mathrm{Ind}\,A$ до $\dim\mathrm{Ker}\,A$ при $\mathrm{Ind}\,A\geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 6.4 для оператора X из достаточно малой окрестности оператора A.

$$\dim \mathrm{Ker}\, X \leq \dim \mathrm{Ker}\, A.$$

Покажем, что когда оператор X пробегает сколь угодно малую окрестность оператора A, величина $\dim \mathrm{Ker}\, X$ принимает все промежуточные значения в соотношениях

$$0 \leq \dim \mathrm{Ker}\, X \leq \dim \mathrm{Ker}\, A \qquad (\mathrm{II.1})$$

при $\mathrm{Ind}\, A \leq 0$ и

$$\mathrm{Ind}\, A \leq \dim \mathrm{Ker}\, X \leq \dim \mathrm{Ker}\, A \qquad (\mathrm{II.2})$$

при $\mathrm{Ind}\, A \geqslant 0$.

Обозначим через $x_1, x_2, \dots, x_n$ базис подпространства $\mathrm{Ker}\, A$ и через $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathcal{B}_1^*$ биортогональную систему $(f_j(x_k) = \delta_{jk})$. Обозначим еще через $y_1, \dots, y_m$ базис какого-либо прямого дополнения к $\mathrm{Im}\, A$ до $\mathcal{B}_2$. Определим оператор K_j ($j = 0, 1, \dots, r$; $r = \min(m, n)$) по формуле

$$K_j x = \sum_{k=1}^{j} f_k(x) y_k,$$

и положим $X_j = A + \varepsilon K_j$, где ε – любое положительное число. Легко видеть, что

$$\mathrm{Ker}\, X_j = \mathcal{L}\{x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_n\}.$$

Следовательно,

$$\dim \mathrm{Ker}\, X_j = n - j.$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы и теоремы об устойчивости индекса вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА II.2. *Пусть $A \in \Phi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ и U – любая окрестность A. Тогда функция $\dim \mathrm{Coker}\, X$ принимает на множестве $U \cap \Phi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ все значения от 0 до $\dim \mathrm{Coker}\, A$ при $\mathrm{Ind}\, A \geqslant 0$ и все значения от $-\mathrm{Ind}\, A$ до $\dim \mathrm{Coker}\, A$ при $\mathrm{Ind}\, A < 0$.*

Обозначим через $\Phi_{\alpha,\beta}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ $\alpha, \beta = 0, 1, \dots$ множество всех операторов $X \in \Phi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, для которых $\dim \mathrm{Ker}\, X = \alpha$ и

$\dim \operatorname{Coker} X=\beta$. Очевидно, что для всех операторов $X\in\Phi_{\alpha,\beta}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ будем иметь $\operatorname{Ind} X=\alpha-\beta$.

На множестве $\Phi_{\alpha,\beta}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ подпространство $\operatorname{Ker} X$ изменяется непрерывно, то есть имеет место

ТЕОРЕМА II.3. Пусть $A\in\Phi_{\alpha,\beta}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ и P_A – проектор на подпространство $\operatorname{Ker} A$. Тогда существует число $\rho=\rho(A,P_A)>0$, такое, что для всякого оператора $X\in\Phi_{\alpha,\beta}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$, удовлетворяющего условию $\|X-A\|<\rho$, имеет место соотношение

$$\|P_A-P_X\|\leqslant \ell\,\|X-A\|, \tag{II.3}$$

где P_X – надлежаще подобранный проектор на подпространство $\operatorname{Ker} X$, а ℓ – константа, зависящая только от операторов A и P_A.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай, когда $\beta=0$. В этом случае оператор A обратим справа. Обратный справа к A оператор A^{-1} можно подобрать так, чтобы $A^{-1}A=I-P_A$. Операторы X из окрестности $\|X-A\|<\|A^{-1}\|^{-1}$ обратимы справа, причём $X^{-1}=YA^{-1}$, где

$$Y=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A^{-1}(A-X)\right)^n. \tag{II.4}$$

Оператор P_X, определенный равенством

$$I-P_X=X^{-1}X=Y(I-P_A)Y^{-1}, \tag{II.5}$$

является проектором на подпространство $\operatorname{Ker} X$.

Так как

$$\|Y^{-1}-I\|\leqslant\|A^{-1}\|\|A-X\| \quad\text{и}\quad \|Y-I\|\leqslant\frac{\|A^{-1}\|\|A-X\|}{1-\|A^{-1}\|\|A-X\|}, \tag{II.6}$$

то

$$\|P_A-P_X\|\leqslant \ell_{A,A^{-1}}\|A-X\|,$$

где $\ell_{A,A^{-1}}$ – константа, зависящая только от операторов A и A^{-1}.

Таким образом, в случае $\beta=0$ теорема доказана. Перейдем к случаю, когда $\beta\neq 0$. Обозначим через $\widetilde{\mathcal{B}}_1$ расширение на β измерений пространства $\mathcal{B}_1$, то есть $\widetilde{\mathcal{B}}_1=\mathcal{B}_1\dotplus\mathcal{N}$, где $\dim\mathcal{N}=\beta$. Расширим оператор A до обратимого справа оператора $\widetilde{A}$ из $L(\widetilde{\mathcal{B}}_1,\mathcal{B}_2)$, полагая*

$$\widetilde{A}(x+y)=Ax+Ky \quad (x\in\mathcal{B}_1,\ y\in\mathcal{N}),$$

где K – некоторый оператор, изоморфно отображающий подпространство $\mathcal{N}$ на некоторое прямое дополнение $\mathcal{M}$ к подпространству $\mathcal{J}m\,A$.

Пусть $\widetilde{A}^{-1}$ – оператор, обратный справа к $\widetilde{A}$, такой, что $\mathcal{J}m\,\widetilde{A}^{-1}\supset\mathcal{N}$. Проектор $P_{\widetilde{A}}=I-\widetilde{A}^{-1}\widetilde{A}$ проектирует пространство $\widetilde{\mathcal{B}}_1$ на подпространство $Ker\,\widetilde{A}\,(=Ker\,A)$ параллельно $\mathcal{J}m\,\widetilde{A}^{-1}$. В частности, $\mathcal{N}\subset Ker\,P_{\widetilde{A}}$. Отсюда вытекает, что оператор $P_A\overset{def}{=}P_{\widetilde{A}}\,|\,\mathcal{B}_1$ является проектором, проектирующим $\mathcal{B}_1$ на ядро оператора A.

Пусть $X\in L(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ – произвольный оператор, удовлетворяющий условию $\|A-X\|<1/\|\widetilde{A}^{-1}\|$. Расширим оператор X на $\widetilde{\mathcal{B}}_1$, полагая $\widetilde{X}(x+y)=Xx+Ky$ $(x\in\mathcal{B}_1,\ y\in\mathcal{N})$. Очевидно, выполняется равенство $\|A-X\|=\|\widetilde{A}-\widetilde{X}\|$ и, следовательно, $\|\widetilde{A}-\widetilde{X}\|<1/\|\widetilde{A}^{-1}\|$. Применяя к оператору $\widetilde{X}$ теорему в доказанном выше случае $\beta=0$, получим, что проектор $P_{\widetilde{X}}$, определенный равенством (II.5), удовлетворяет соотношению

$$\|P_{\widetilde{A}}-P_{\widetilde{X}}\|\leq \ell_{\widetilde{A},\widetilde{A}^{-1}}\|\widetilde{A}-\widetilde{X}\|.$$

Предположим теперь, что оператор $X\in\Phi_{\alpha,\beta}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$. Так как $\dim Ker\,\widetilde{X}=\dim Ker\,\widetilde{A}=\alpha=\dim Ker\,X$ и $Ker\,X\subset Ker\,\widetilde{X}$, то $Ker\,X=Ker\,\widetilde{X}$. Последнее соотношение позволяет заключить, что оператор $P_X\overset{def}{=}P_{\widetilde{X}}\,|\,\mathcal{B}_1$ является проектором, проектирующим пространство $\mathcal{B}_1$ на $Ker\,X$. Очевидно, выполняется соотношение

$$\|P_A-P_X\|\leq \ell_{\widetilde{A},\widetilde{A}^{-1}}\|A-X\|.$$

Теорема доказана.

---

* Будем предполагать, что норма в $\widetilde{\mathcal{B}}_1$ определяется равенством $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$ $(x\in\mathcal{B}_1,\ y\in\mathcal{N})$.

Двойственной к теореме II.3 является

ТЕОРЕМА II.4. Пусть $A\in\Phi_{\alpha,\beta}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ и R_A – проектор на подпространство $\mathfrak{Im}\,A$. Тогда существует число $\rho>0$, такое, что для всякого оператора $X\in\Phi_{\alpha,\beta}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$, удовлетворяющего условию $\|X-A\|<\rho$, имеет место соотношение

$$\|R_A-R_X\|\leq \tau\|X-A\|, \tag{II.7}$$

где R_X – надлежаще подобранный проектор на подпространство $\mathfrak{Im}\,X$, а τ – константа, зависящая только от операторов A и R_A.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта теорема выводится из предыдущей переходом к сопряженным операторам.

Оператор $P_{A^*}=I-R_A^*$ является проектором на подпространство $\mathrm{Ker}\,A^*$. Согласно теореме II.3 существует $\rho>0$, такое, что для всех операторов $X\in\Phi_{\alpha,\beta}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$, удовлетворяющих условию $\|A-X\|<\rho$,

$$\|P_{A^*}-P_{X^*}\|<\ell_{A^*,P_{A^*}}\|A-X\|. \tag{II.8}$$

Анализируя доказательство теоремы II.3, легко видеть, что оператор P_{X^*} является сопряженным к некоторому проектору $I-R_X$, причем R_X является проектором на подпространство $\mathfrak{Im}\,X$. Из равенства (II.8), очевидно, вытекает равенство (II.7). Теорема доказана.

Приведем еще одну теорему об операторах из множества $\Phi_{\alpha,\beta}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$.

ТЕОРЕМА II.5. Пусть $A\in\Phi_{\alpha,\beta}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ и $A^{(-1)}$ – оператор, обобщенно обратный к A. Тогда существует число $\rho>0$, такое, что для каждого оператора X из $\Phi_{\alpha,\beta}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$, удовлетворяющего условию $\|A-X\|<\rho$, можно подобрать обобщенно обратный оператор $X^{(-1)}$, такой, что

$$\|X^{(-1)}-A^{(-1)}\|\leq s\|X-A\|, \tag{II.9}$$

где $\mathfrak{z}$ - константа, зависящая только от операторов A и $A^{(-1)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае, когда $\beta=0$, утверждение следует из теоремы 5.4, гл. II, о возмущении операторов, обратимых справа. В общем случае, рассуждая как в доказательстве теоремы II.3, перейдем к расширенным операторам $\widetilde{A}$ и $\widetilde{X}$.

Обозначим через R проектор, проектирующий расширенное пространство $\widetilde{\mathcal{B}}_1$ на исходное пространство* $\mathcal{B}_1$ параллельно $\mathcal{N}$. Оператор $\widetilde{A}^{-1}$, обратный справа к $\widetilde{A}$, будем считать выбранным так, чтобы выполнялось равенство $R\widetilde{A}^{-1}=\widetilde{A}^{-1}$. Тогда $I-\widetilde{A}^{-1}\widetilde{A}|\mathcal{B}_1=I-\widetilde{A}^{-1}A=I-R\widetilde{A}^{-1}A$. Стало быть, $P_{\widetilde{A}}|\mathcal{B}_1=P_A$.

Для операторов $\widetilde{X}^{-1}$, обратных справа к $\widetilde{X}$ (и соответственно подобранных), имеет место соотношение

$$\|\widetilde{X}^{-1}-\widetilde{A}^{-1}\|\leq \mathfrak{z}_1\|\widetilde{X}-\widetilde{A}\|, \tag{II.10}$$

где $\mathfrak{z}_1$ - константа, зависящая только от операторов A и A^{-1}. Для оператора $\widetilde{X}^{-1}$ (см. доказательство теоремы II.3) выполняется равенство

$$I-\widetilde{X}^{-1}\widetilde{X}|\mathcal{B}_1=I-R\widetilde{X}^{-1}X=P_X,$$

и, следовательно,

$$XR\widetilde{X}^{-1}X=X.$$

Таким образом, оператор $R\widetilde{X}^{-1}$ является обобщенно обратным к оператору X. Положим $X^{(-1)}=R\widetilde{X}^{-1}$. Легко видеть, что из (II.10) вытекает соотношение (II.9). Теорема доказана.

§ 12. Непрерывность функции k_X

Напомним (см. § 1), что величина k_A для оператора $A\in L(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ определяется равенством

$$k_A=\sup_{y\in \operatorname{Im}A,\|y\|=1}\ \inf_{Ax=y,x\in\mathcal{B}_1}\|x\| \tag{12.1}$$

---

*Здесь используются обозначения из доказательства теоремы II.3.

или эквивалентным равенством

$$k_A = \sup_{x \in \mathcal{B}_1, \|Ax\|=1} \rho(x, \mathrm{Ker}\, A), \tag{12.2}$$

где $\rho(x, \mathrm{Ker}\, A) = \inf_{z \in \mathrm{Ker} A} \|x - z\|$.

Величина k_A конечна в том и только том случае, когда оператор A нормально разрешим. В случае, когда оператор A обратим, $k_A = \|A^{-1}\|$. Если оператор A обратим слева, то

$$k_A = \sup_{y \in \mathrm{Im} A, \|y\|=1} \|A^{-1} y\| \leq \|A^{-1}\|,$$

а в случае, когда оператор A обратим справа,

$$k_A \leq \sup_{y \in \mathcal{B}_2, \|y\|=1} \|A^{-1} y\| = \|A^{-1}\|.$$

Отметим еще, что если на некотором векторе $x \in \mathcal{B}_1$ имеют место соотношения

$$\|Ax\| < \sigma_1 \quad \text{и} \quad \rho(x, \mathrm{Ker}\, A) \geq \sigma_2,$$

то

$$k_A \geq \frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \tag{12.3}$$

Функция $k_X : \Phi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \to \bar{\mathbb{R}}$ не является непрерывной. В самом деле, пусть T – линейный вполне непрерывный оператор из $L(\mathcal{B}_1)$ и $\lambda_0 (\neq 0)$ – его собственное число. Тогда в точке λ_0 и в ее окрестности функция $R_{T-\lambda I}$ принимает конечные значения. Однако

$$R_{T-\lambda I} = \|(T - \lambda I)^{-1}\| \quad (0 < |\lambda - \lambda_0| < \delta)$$

и, стало быть,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} k_{T-\lambda I} = \infty.$$

Оказывается, что на множестве $\Phi_{\alpha,\beta}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ функция k_X является непрерывной.

ТЕОРЕМА 12.1. Пусть $A \in \Phi_{\alpha,\beta}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$. Существует число $\rho > 0$, такое, что для всех операторов $X \in \Phi_{\alpha,\beta}(\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2)$, удовлетворяющих условию $\|A-X\|<\rho$, выполняется соотношение

$$|k_X - k_A| \le \tau_A \|X-A\|, \tag{12.4}$$

где τ_A – константа, зависящая только от оператора A.

Доказательству теоремы предпошлем следующую лемму.

ЛЕММА 12.1. Пусть $A \in \Phi_{\alpha,\beta}(\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2)$. Тогда существует число $\rho>0$, такое, что функция k_X ограничена в окрестности $\|X-A\|<\rho$, $X \in \Phi_{\alpha,\beta}(\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как в доказательстве теоремы 11.3, рассмотрим сначала случай, когда $\beta=0$, а следовательно, когда оператор A имеет обратный справа A^{-1}. В этом случае

$$k_A \le \|A^{-1}\|.$$

Положим $\rho < 1/\|A^{-1}\|$. Пусть $X \in L(\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2)$ – оператор, удовлетворяющий условию $\|X-A\|<\rho$. Оператор X обратим справа (см. теорему 5.4, гл. II), и оператор $X^{-1}=YA^{-1}$, где Y определен равенством (11.4) и является обратным справа к X. Согласно (11.4)

$$\|A^{-1}-X^{-1}\| \le \frac{\|A^{-1}\|^2\rho}{1-\|A^{-1}\|\rho}.$$

Следовательно,

$$k_X \le \|X^{-1}\| \le \|A^{-1}\| + \frac{\|A^{-1}\|^2\rho}{1-\|A^{-1}\|\rho}.$$

Перейдем к случаю, когда $\beta \ne 0$. Так же как в теореме 11.3, рассмотрим пространство $\tilde{\mathscr{B}}_1 = \mathscr{B}_1 \dotplus \mathfrak{N}$, где $\dim \mathfrak{N} = \beta$, и оператор $\tilde{A} \in L(\tilde{\mathscr{B}}_1,\mathscr{B}_2)$, определенный равенством

$$\tilde{A}(x+y) = Ax + Ky,$$

где K – оператор, изоморфно отображающий $\mathfrak{N}$ на некоторое прямое дополнение к $\operatorname{Im} A$.

Пусть $\tilde{A}^{-1}$ – оператор, обратный к $\tilde{A}$ справа, и $X \in \Phi_{\alpha,\beta}(\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2)$ – произвольный оператор, удовлетворяющий условию

$$\|A-X\|<1/\|\widetilde{A}^{-1}\|.$$

Расширим оператор X на пространство $\widetilde{\mathscr{B}}_1$, полагая

$$\widetilde{X}(x+y)=Xx+Ky \quad (x\in\mathscr{B}_1,\ y\in\mathfrak{N}).$$

Очевидно, выполняется условие $\|\widetilde{A}-\widetilde{X}\|<\|\widetilde{A}^{-1}\|^{-1}$, следовательно, по доказанному

$$k_{\widetilde{X}}\leq\|\widetilde{A}^{-1}\|+\frac{\|\widetilde{A}^{-1}\|^2\rho}{1-\|\widetilde{A}^{-1}\|\rho}.$$

Так как

$$\dim\operatorname{Ker}\widetilde{X}=\dim\operatorname{Ker}X,$$

то подпространство $\operatorname{Ker}\widetilde{X}=\operatorname{Ker}X$. Отсюда и из определения (12.2) величины k_X вытекает, что $k_X\leq k_{\widetilde{X}}$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 12.1. Пусть операторы X и Y принадлежат множеству $\Phi(\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2)$. Обозначим через P_X и P_Y какие-либо проекторы на подпространства $\operatorname{Ker}X$ и $\operatorname{Ker}Y$. Из определения (12.2) вытекает, что для любого достаточно малого $\varepsilon\ (>0)$ можно подобрать вектор $z\in\mathscr{B}_1$ так, чтобы выполнялись соотношения $\|z\|=1$, $\|Xz\|<k_X^{-1}+\varepsilon$ и $\rho(z,\operatorname{Ker}X)>1-\varepsilon$. Легко видеть, что

$$\|Yz\|\leq\|X-Y\|+k_X^{-1}+\varepsilon. \tag{12.5}$$

Пусть y^* – вектор из подпространства $\operatorname{Ker}Y$, для которого

$$\|z-y^*\|=\rho(z,\operatorname{Ker}Y).$$

Очевидно, $\|y^*\|-\|z\|\leq\|z-y^*\|\leq 1$. Следовательно, $\|y^*\|\leq 2$. Так как

$$\|z-y^*\|\geq\|z-P_Xy^*\|-\|(I-P_X)y^*\|$$

и

$$\|(I-P_X)y^*\|=\|(P_Y-P_X)y^*\|\leq\|P_Y-P_X\|\|y^*\|,$$

то

$$\rho(z,\operatorname{Ker}Y)\geq\rho(z,\operatorname{Ker}X)-2\|P_Y-P_X\|.$$

Стало быть,

$$\rho(z, Ker\, Y) \geqslant 1-\varepsilon-2\|P_Y-P_X\|. \tag{12.6}$$

В силу (12.3) из соотношений (12.5) и (12.6) вытекает, что

$$k_Y \geqslant \frac{1-2\|P_Y-P_X\|}{\|X-Y\|+k_X^{-1}} .$$

Последнее соотношение эквивалентно следующему:

$$k_X-k_Y \leqslant 2k_X\|P_Y-P_X\|+k_Y k_X\|X-Y\|.$$

Меняя операторы X и Y местами, получим

$$|k_X-k_Y| \leqslant 2\max(k_X, k_Y)\|P_Y-P_X\|+k_Y k_X\|X-Y\|. \tag{12.7}$$

Пусть теперь $Y=A\in\Phi_{\alpha,\beta}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ и $X\in\Phi_{\alpha,\beta}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$. Предположим, что $\|X-A\|<\rho$, где ρ – число, определенное в теореме 12.3, и что P_X и P_A – проекторы, фигурирующие в этой теореме. Тогда

$$\|P_X-P_A\|\leqslant \ell_A\|X-A\|.$$

Согласно лемме 12.1 величина

$$k_\rho=\sup_{X\in\Phi_{\alpha,\beta}(\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2),\ \|X-A\|<\rho} k_X<\infty.$$

Стало быть, из (12.7) следует, что

$$|k_X-k_A|\leqslant(2k_\rho\ell_A+k_\rho^2)\|X-A\|.$$

Теорема доказана.

Приведем еще одно предложение.

Пусть A – произвольный нормально разрешимый оператор из $L(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ и B – произвольный оператор из $L(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$. Тогда для любого орта $x\in Ker\, A$

$$\rho(x, Ker\, B)\leqslant k_B\|A-B\|. \tag{12.8}$$

Действительно, из определения k_B вытекает, что

$$\rho(x, \operatorname{Ker} B) \leq k_B \|Bx\|.$$

Так как

$$\|Bx\| = \|(A-B)x\| \leq \|A-B\|,$$

то получаем соотношение (12.8). Если оператор B также нормально разрешим, то для любого орта $y \in \operatorname{Ker} B$ будем иметь

$$\rho(y, \operatorname{Ker} A) \leq k_A \|A-B\|.$$

Таким образом, для любой пары нормально разрешимых операторов имеет место соотношение

$$\max\left\{ \sup_{x \in \operatorname{Ker} A, \|x\|=1} \rho(x, \operatorname{Ker} B), \sup_{y \in \operatorname{Ker} B, \|y\|=1} \rho(y, \operatorname{Ker} A)\right\} \leq$$

$$\leq \max(k_A, k_B)\|A-B\|. \qquad (12.9)$$

Число из левой части последнего соотношения называется раствором подпространств $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Ker} B$ и обозначается через $\theta(\operatorname{Ker} A, \operatorname{Ker} B)$. Таким образом, доказано, что

$$\theta(\operatorname{Ker} A, \operatorname{Ker} B) \leq \max(k_A, k_B)\|A-B\|. \qquad (12.10)$$

На множестве, где величины k_A и k_B ограничены, равенство (12.10) означает некоторую непрерывность подпространства $\operatorname{Ker} B$.

§ 13. Случай гильбертова пространства

Предложения § 11 и 12 допускают более красивые, а иногда и более точные формулировки в случае гильбертова пространства.

Нам понадобится следующее вспомогательное предложение.

ЛЕММА 13.1. *Пусть $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ — два подпространства гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Если R_1 и R_2 — какие-либо про-*

векторы на $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ соответственно, а P_1 и P_2 ортогональные проекторы на эти подпространства, то

$$\| P_1 - P_2 \| \leq \| R_1 - R_2 \| . \qquad (13.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\rho(x, \mathfrak{N})$ расстояние от вектора x до подпространства $\mathfrak{N}$, то есть

$$\rho(x, \mathfrak{N}) = \inf_{y \in \mathfrak{N}} \| x - y \| .$$

Для любого орта $x_1 \in \mathfrak{N}_1$ будем иметь

$$\| x_1 - R_2 x_1 \| = \| (R_1 - R_2) x_1 \| \leq \| R_1 - R_2 \| ,$$

следовательно,

$$\rho(x_1, \mathfrak{N}_2) \leq \| R_1 - R_2 \| \quad (x_1 \in \mathfrak{N}_1, \| x_1 \| = 1).$$

Аналогично устанавливается, что

$$\rho(x_2, \mathfrak{N}_1) \leq \| R_1 - R_2 \| \quad (x_2 \in \mathfrak{N}_2, \| x_2 \| = 1).$$

Введем величины ρ_1 и ρ_2, полагая

$$\rho_1 = \sup_{x_1 \in \mathfrak{N}_1, \| x_1 \| = 1} \rho(x_1, \mathfrak{N}_2) \qquad (13.2)$$

и

$$\rho_2 = \sup_{x_2 \in \mathfrak{N}_2, \| x_2 \| = 1} \rho(x_2, \mathfrak{N}_1) . \qquad (13.3)$$

По доказанному

$$\max \{ \rho_1, \rho_2 \} \leq \| R_1 - R_2 \| . \qquad (13.4)$$

Из (13.2) и (13.3) вытекает, что

$$\rho_1 = \sup_{x_1 \in \mathfrak{N}_1, \| x_1 \| = 1} \| (I - P_2) x_1 \|$$

и

$$\rho_2 = \sup_{x_2 \in \mathfrak{N}_2, \|x_2\|=1} \|(I-P_1)x_2\|.$$

Следовательно, для любого вектора $x \in \mathfrak{H}$ будем иметь

$$\|(I-P_2)P_1 x\| \leq \rho_1 \|P_1 x\|. \tag{13.5}$$

Так как

$$\|P_2(I-P_1)x\|^2 = ((I-P_1)P_2(I-P_1)x,\ (I-P_1)x) \leq$$

$$\leq \|(I-P_1)P_2(I-P_1)x\| \|(I-P_1)x\|,$$

то

$$\|P_2(I-P_1)x\|^2 \leq \rho_2 \|P_2(I-P_1)x\| \|(I-P_1)x\|$$

или

$$\|P_2(I-P_1)x\| \leq \rho_2 \|(I-P_1)x\|. \tag{13.6}$$

Учитывая равенство $P_2 - P_1 = P_2(I-P_1) - (I-P_2)P_1$, получаем

$$\|(P_2-P_1)x\|^2 = \|P_2(I-P_1)x\|^2 + \|(I-P_2)P_1 x\|^2.$$

Отсюда и из (13.5) и (13.6) вытекает, что

$$\|(P_2-P_1)x\|^2 \leq \rho_1^2 \|P_1 x\|^2 + \rho_2^2 \|(I-P_1)x\|^2 \leq \max\{\rho_1^2, \rho_2^2\} \|x\|^2.$$

Таким образом,

$$\max\{\rho_1, \rho_2\} \geq \|P_2 - P_1\|. \tag{13.7}$$

Сопоставляя соотношения (13.7) и (13.4), получаем $\max\{\rho_1, \rho_2\} = \|P_2 - P_1\|$. Отсюда и из (13.4) вытекает (13.1). Лемма доказана.

Одновременно доказана

ЛЕММА 13.2. Пусть $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ - два подпространства гильбертова пространства $\mathfrak{H}$. Тогда

$$\max\left\{\sup_{x\in\mathcal{N}_1,\|x\|=1}\rho(x,\mathcal{N}_2),\ \sup_{y\in\mathcal{N}_2,\|y\|=1}\rho(y,\mathcal{N}_1)\right\}=\|P_{\mathcal{N}_1}-P_{\mathcal{N}_2}\|, \quad (13.8)$$

где $P_{\mathcal{N}}$ - ортогональный проектор на подпространство $\mathcal{N}$.

С помощью введенного в конце предыдущего параграфа понятия раствора, соотношение (13.8) записывается в виде

$$\theta(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2)=\|P_{\mathcal{N}_1}-P_{\mathcal{N}_2}\|. \quad (13.9)$$

Лемма 13.1 и теоремы 11.3 и 11.4 влекут за собой следующую теорему.

ТЕОРЕМА 13.1. Пусть $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ - гильбертовы пространства и $A\in\Phi_{\alpha,\beta}(\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2)$. Тогда для любого оператора $X\in\Phi_{\alpha,\beta}(\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2)$ имеют место соотношения

$$\|P_{\operatorname{Ker}X}-P_{\operatorname{Ker}A}\|\leq \ell_A\|X-A\| \quad (13.10)$$

и

$$\|P_{\operatorname{Im}X}-P_{\operatorname{Im}A}\|\leq \ell_A\|X-A\|, \quad (13.11)$$

где ℓ_A - константа, зависящая только от оператора A, а $P_{\mathcal{N}}$ - ортогональный проектор на подпространство $\mathcal{N}$.

Отметим, что соотношение (13.10) в силу леммы 13.2 можно записать в виде

$$\|P_{\operatorname{Ker}X}-P_{\operatorname{Ker}A}\|\leq \max\left\{k_X,\ k_A\right\}\|X-A\|. \quad (13.12)$$

Применяя это соотношение к сопряженным операторам, получим

$$\|P_{\operatorname{Im}X}-P_{\operatorname{Im}A}\|\leq \max\left\{k_X,\ k_A\right\}\|X-A\|. \quad (13.13)$$

Из соотношений (13.12) и (13.13) и теоремы 12.1 также вытекает теорема 13.1.

Пусть A – обобщенно обратимый оператор. Через $A_0^{(-1)}$ обозначим обобщенно обратный к A со следующим свойством. Подпространство $\mathrm{Ker}\, A_0^{(-1)}$ является ортогональным дополнением к $\mathrm{Im}\, A$, а подпространство $\mathrm{Im}\, A_0^{(-1)}$ является ортогональным дополнением к $\mathrm{Ker}\, A$. Очевидно, что оператор $A_0^{(-1)}$ определяется однозначно и связан с любым другим оператором $A^{(-1)}$, обобщенно обратным к A, равенством

$$A_0^{(-1)} = \left(I - P_{\mathrm{Ker}\, A}\right) A^{(-1)} P_{\mathrm{Im}\, A} . \tag{13.14}$$

ТЕОРЕМА 13.2. Пусть $\mathcal{F}$ – некоторое ограниченное множество операторов из $L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, на котором функция k_X ограничена. Тогда для любой пары операторов A и B из $\mathcal{F}$ имеет место соотношение

$$\| A_0^{(-1)} - B_0^{(-1)} \| \leq \ell_{\mathcal{F}} \| A - B \| , \tag{13.15}$$

где $\ell_{\mathcal{F}}$ – константа, зависящая только от $\mathcal{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$A A_0^{(-1)} = P_{\mathrm{Im}\, A} \quad \text{и} \quad A_0^{(-1)} A = I - P_{\mathrm{Ker}\, A} ,$$

то

$$A_0^{(-1)} - B_0^{(-1)} = A_0^{(-1)} \left(P_{\mathrm{Im}\, A} - P_{\mathrm{Im}\, B} \right) + A_0^{(-1)} (B - A) B_0^{(-1)} + \left(P_{\mathrm{Ker}\, A_0^{(-1)}} - P_{\mathrm{Ker}\, B_0^{(-1)}} \right) B_0^{(-1)} . \tag{13.16}$$

Отметим, что в случае гильбертова пространства равенство (12.2) может быть записано в виде

$$k_A = \max_{x \perp \mathrm{Ker}\, A, \|x\| = 1} \| A x \|^{-1} .$$

Имеет место соотношение

$$\| A_0^{(-1)} \| = \max_{y \in \mathrm{Im}\, A, y \neq 0} \frac{\| A_0^{(-1)} y \|}{\| y \|} =$$

$$= \max_{y\in \operatorname{Im} A, \|A_0^{(-1)}y\|=1} \|y\|^{-1} = \max_{x\in \operatorname{Ker} A, \|x\|=1} \|Ax\|^{-1}.$$

Стало быть,

$$\|A_0^{(-1)}\| = k_A \qquad \text{и} \qquad \|B_0^{(-1)}\| = k_B . \tag{13.17}$$

Из (13.16) и (13.17) вытекает

$$\|A_0^{(-1)} - B_0^{(-1)}\| \le k_A \|P_{\operatorname{Im} A} - P_{\operatorname{Im} B}\| +$$

$$+ k_B \|P_{\operatorname{Ker} A} - P_{\operatorname{Ker} B}\| + k_A k_B \|A - B\|.$$

В силу теоремы 13.1 получаем соотношение (13.15). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 13.1. Пусть оператор $A \in \Phi_{\alpha,\beta}(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2)$ и X - произвольный оператор из пересечения $\Phi_{\alpha,\beta}(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2)$ и достаточно малой окрестности оператора A. Тогда

$$\|A_0^{(-1)} - X_0^{(-1)}\| < m_A \|A - X\|,$$

где m_A - константа, зависящая только от оператора A.

Отсюда вытекает

ТЕОРЕМА 13.3. Оператор-функция $X_0^{(-1)}$ является непрерывной функцией от X на множестве $\Phi_{\alpha,\beta}(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2)$.

§ 14. Нормальная разрешимость оператора умножения на матрицу-функцию

Пусть Λ - некоторый связный компакт τ-мерного вещественного пространства $\mathbb{R}^\tau$. В этом параграфе будет доказана

ТЕОРЕМА 14.1. Пусть $a(t)\,(t\in\Lambda)$ - непрерывная комплекснозначная $m\times n$ - матрица-функция и $A\in L(L_p^n(\Lambda), L_p^m(\Lambda))$ * $(1\leq p\leq\infty)$-оператор умножения на матрицу-функцию a:

$$(Af)(t)=a(t)f(t) \quad (f\in L_p^n(\Lambda)).$$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. ранг матрицы $a(t)$ не зависит от точки t на Λ;
2. оператор A обобщенно обратим;
3. оператор A нормально разрешим;
4. существует непрерывная $n\times m$-матрица-функция $x(t)$ такая, что для всех $t\in\Lambda$ имеет место соотношение $a(t)x(t)a(t)=a(t)$.

Для доказательства этой теоремы понадобятся два вспомогательных предложения о непрерывных матрицах-функциях. В первом доказывается эквивалентность утверждений 1) и 4).

ЛЕММА 14.1. Пусть $a(t)\ (t\in\Lambda)$ — непрерывная $m\times n$-матрица-функция. Для того чтобы существовала непрерывная $n\times m$-матрица-функция $x(t)\ (t\in\Lambda)$, такая, что

$$a(t)x(t)a(t)=a(t) \quad (t\in\Lambda), \tag{14.1}$$

необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $a(t)$ на Λ не зависел от t.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ранг матрицы $a(t)$ принимает одно и то же значение на Λ. При каждом $t\in\Lambda$ матрицу-функцию $a(t)$ будем рассматривать как оператор, действующий из гильбертова пространства $\mathbb{C}^n$ в гильбертово пространство $\mathbb{C}^m$. Операторы $a(t)\ (t\in\Lambda)$ обобщенно обратимы. Рассмотрим обобщенно обратные** для них $a_0^{(-1)}(t)\ (t\in\Lambda)$. Согласно теореме 13.3 матри-

* Через $L_p^n(\Lambda)$ обозначается прямая сумма n экземпляров пространства $L_p(\Lambda)$. Норма в $L_p^n(\Lambda)$ определяется равенством

$$\|\{f_1,\dots,f_n\}\|=\left(\sum_{j=1}^{n}\int_\Lambda|f_j(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

** Эти операторы определены в конце предыдущего параграфа.

ца-функция $a_0^{(-1)}(t)$ непрерывна. Таким образом, матрица-функция $x(t)=a_0^{(-1)}(t)$ обладает всеми необходимыми свойствами.

Перейдем к доказательству необходимости условия леммы. Пусть $x(t)$ $(t\in\Lambda)$ – непрерывная $n\times m$-матрица-функция, такая, что $axa=a$. Тогда (см. лемму 5.I) оператор $s(t)=a(t)x(t)$ является проектором в $\mathbb{C}^m$, проектирующим $\mathbb{C}^m$ на подпространство* $\operatorname{Im} a(t)$. Допустим, что ранг матрицы $a(t)$ $(t\in\Lambda)$ изменяется. Наибольшее значение ранга $a(t)$ на Λ обозначим через ν. Так как множество точек $t\in\Lambda$, в которых ранг $a(t)$ равен ν, является открытым, то существует последовательность точек $t_j\in\Lambda$ $(j=1,2,\dots)$, стремящаяся к $t_0\in\Lambda$, такая, что матрица $a(t_j)$ $(j=1,2,\dots)$ имеет ранг, равный ν, а матрица $a(t_0)$ – ранг, равный $\nu_0<\nu$. Так как $\dim\operatorname{Ker} s(t_0)+\dim\operatorname{Im} s(t_j)=m-\nu_0+\nu>m$, то существует орт $x\in\operatorname{Ker} s(t_0)\cap\operatorname{Im} s(t_j)$. Для этого вектора будем иметь

$$\| s(t_j)x-s(t_0)x\|=\|x\|=1.$$

Это противоречит непрерывности функции s на Λ. Лемма доказана.

Будем говорить, что матрица-функция $b(t)$ кусочно-непрерывна на Λ, если Λ можно представить в виде $\Lambda=\bigcup_{k=1}^{m}\Lambda_k$, где каждое из Λ_k является пересечением открытого и замкнутого множеств, причем $b(t)$ непрерывна на каждом Λ_j $(j=1,\dots,m)$ и допускает непрерывное продолжение на $\overline{\Lambda}_j$.

ЛЕММА I4.2. Пусть $a(t)$ $(t\in\Lambda)$ – непрерывная $m\times n$-матрица-функция, имеющая ранг ν во всех точках $t\in\Lambda$. Тогда $a(t)$ можно факторизовать в виде

$$a(t)=a_1(t)e_{mn}^{\nu}a_2(t), \tag{I4.I'}$$

где $a_1(t)$ – кусочно-непрерывная на Λ квадратная матрица порядка m, a_2 – кусочно-непрерывная на Λ квадратная матрица порядка n,

$$\inf_{t\in\Lambda}|\det a_j(t)|>0 \quad (j=1,2)$$

*Можно завершить доказательство леммы с помощью теоремы Б.С.-Надя (см. Б.С.-Надь и Ф.Рисс [I], стр.29I).

и

$$e_{mn}^{\nu}=\left(\begin{array}{c|c}\overbrace{\begin{matrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{matrix}}^{\nu} & 0\\ \hline 0 & 0\end{array}\right)\quad(\in L(\mathbb{C}^{n},\mathbb{C}^{m}))$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p(t)$ - ортопроектор, проектирующий $\mathbb{C}^n$ на $Ker\,a(t)$; $r(t)$ - ортопроектор из $\mathbb{C}^m$ на $Im\,a(t)$. Положим $q(t)=e_n-p(t)$ и $s(t)=e_m-r(t)$, где e_k - единичная матрица порядка k. Согласно теореме I3.I все эти проекторы непрерывны на Λ.

Пусть t_0 - некоторая точка из Λ и системы векторов $\{x_1,\dots,x_\nu\}$, $\{x_{\nu+1},\dots,x_n\}$ и $\{y_{\nu+1},\dots,y_m\}$ - базисы подпространств $Im\,q(t_0)$, $Im\,p(t_0)$ и $Im\,s(t_0)$ соответственно.

В замыкании некоторой достаточно малой окрестности U_0 точки t_0 системы

$$x_j(t)=q(t)x_j\ (j=1,\dots,\nu);\quad x_j(t)=p(t)x_j\ \ (j=r+1,\dots,n),$$

$$y_j(t)=s(t)y_j\ (j=r+1,\dots,m);\quad y_j(t)=a(t)x_j\ \ (j=1,\dots,r)$$

являются базисами подпространств $Im\,q(t)$, $Im\,p(t)$, $Im\,s(t)$ и $Im\,r(t)$ соответственно. Обозначим через $b_0(t)$ $(t\in U_0)$ матрицу порядка m, определенную равенствами

$$b_0(t)e_j^{(m)}=y_j(t)\quad(j=1,2,\dots,m),$$

и через c_0 - матрицу, определенную равенствами

$$c_0(t)\,x_j(t)=e_j^{(n)}\quad(j=1,2,\dots,n),$$

где $e_j^{(k)}=(\delta_{1j},\dots,\delta_{kj})$, а δ_{ij} - символ Кронекера.

Очевидно, матрицы $b_0(t)$ и $c_0(t)$ непрерывны в окрестности U_0 и в ее замыкании, и

$$\det b_0(t)\neq 0,\ \det c_0(t)\neq 0\ (t\in\overline{U}_0). \qquad (14.2)$$

Для $j=1,2,\dots,\nu$ имеют место равенства

$$b_0(t)e_{mn}^{\nu}c_0(t)\,x_j(t)=b_0(t)e_{mn}^{\nu}e_j^{(n)}=b_0(t)e_j^{(m)}=$$

$$=y_j(t)=a(t)x_j=a(t)q(t)x_j=a(t)x_j(t)$$

и для $j=\nu+1,\dots,n$ - равенства

$$b_0(t)e^{\nu}_{mn}c_0(t)x_j(t)=b_0(t)e^{\nu}_{mn}e^{(n)}_j=0=$$

$$=a(t)p(t)x_j=a(t)x_j(t).$$

Стало быть,

$$a(t)=b_0(t)e^{\nu}_{mn}c_0(t)\quad (t\in U_0).$$

В силу доказанного для компакта Λ можно подобрать конечное число точек $t_j\,(j=1,2,\dots,\mu)$ из Λ вместе с соответствующими им окрестностями U_j и непрерывными функциями $b_j(t)$ и $c_j(t)\,(t\in\overline{U}_j;\, j=1,\dots,\mu)$, такими, что

$$\Lambda=\bigcup_{j=1}^{\mu}U_j\,,$$

$$a(t)=b_j(t)e^{\nu}_{mn}c_j(t)\quad (j=1,\dots,\mu;\ t\in U_j)$$

и $$\det b_j(t)\neq 0,\quad \det c_j(t)\neq 0\quad (t\in\overline{U}_j,\ j=1,2,\dots,\mu).$$

Определим функцию a_1 равенствами $a_1(t)=b_1(t)$ при $t\in U_1$ и $a_1(t)=b_j(t)$ при $t\in U_j\setminus(U_1\cup\dots\cup U_{j-1})\,(j=2,\dots,\mu)$, а также функцию a_2 равенствами $a_2(t)=c_1(t)$ при $t\in U_1$ и $a_2(t)=c_j(t)$ при $t\in U_j\setminus(U_1\cup\dots\cup U_{j-1})\,(j=2,\dots,\mu)$. Очевидно, функции a_1 и a_2 удовлетворяют условиям леммы. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I4.I. Как уже отмечалось, эквивалентность утверждений I) и 4) доказана в лемме I4.I. Так как всякий обобщенно обратимый оператор нормально разрешим, то из утверждения 2) вытекает утверждение 3). Покажем, что из утверждения 4) вытекает утверждение 2). Согласно утверждению 4) существует непрерывная $n\times m$ -матрица-функция $x(t)$ $(t\in\Lambda)$, такая, что $a(t)x(t)a(t)=a(t)$ $(t\in\Lambda)$. Обозначим через X оператор из $L(L^m_p(\Lambda), L^n_p(\Lambda))$ умножения на матрицу-функцию $x(t)$: $(Xg)(t)=x(t)g(t)$ $(t\in\Lambda)$. Очевидно, $AXA=A$.

Для завершения доказательства достаточно показать, что утверждение 3) влечет за собой утверждение I). Предположим, что ранг матрицы $a(t)$ меняется на Λ, и покажем, что оператор A не является нормально разрешимым.

Пусть ν – наибольший ранг матрицы-функции $a(t)$ на Λ. Так как подмножество Λ, на котором ранг $a(t)$ равен ν, открыто, то существует последовательность точек $t_j\in\Lambda\ (j=1,2,\dots)$, сходящаяся к точке $t_0\in\Lambda$, такая что ранги матриц

$a(t_j)(j=1,2,\dots)$ равны ν, а ранг $a(t_0)$ равен $\nu_0<\nu$. Как уже отмечалось в лемме I2.2, отсюда вытекает, что в пересечении $\operatorname{Ker} a(t_0)$ и ортогонального дополнения $\mathscr{L}(t_j)$ к $\operatorname{Ker} a(t_j)$ содержится, по крайней мере, один орт. Обозначим этот орт через x_j.

Положим $\varepsilon_j=\|a(t_j)-a(t_0)\|$. Без ограничения общности можно считать, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} j\varepsilon_j<\infty .$$

Пусть $q(t)$ – ортогональный проектор, проектирующий $\mathbb{C}^n$ на подпространство $\mathscr{L}(t)$, являющееся ортогональным дополнением к $\operatorname{Ker} a(t)$. Так как в некоторой окрестности точки t_j ранг матрицы $a(t)$ равен ν, то согласно теореме II.5 функция $q(t)$ непрерывна в этой окрестности. Отсюда следует, что существует окрестность U_{t_j} точки $t_j\ (j=1,2,\dots)$, такая, что

$$\|q(t)x_j\|\geqslant\frac{1}{2}\quad (j=1,2,\dots;\ t\in U_{t_j}). \tag{I4.3}$$

Так как

$$\|a(t_j)x_j\|=\|a(t_j)x_j-a(t_0)x_j\|\leqslant\|a(t_j)-a(t_0)\|=\varepsilon_j,$$

то окрестности U_{t_j} могут быть выбраны так, чтобы выполнялись соотношения

$$\|a(t)x_j\|\leqslant 2\varepsilon_j\quad (j=1,2,\dots;\ t\in U_{t_j}). \tag{I4.4}$$

Будем также считать, что окрестности U_{t_j} не пересекаются.

Выберем функции $\varphi_j\in C(\Lambda)(j=1,2,\dots)$, такие, что $\varphi_j(t)=0$ при $t\in\Lambda\setminus U_{t_j}$,

$$\int_{U_{t_j}}|\varphi_j(t)|^p dt=1 \tag{I4.5}$$

при $1\leqslant p<\infty$ и

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in U_{t_j}}|\varphi_j(t)|=j \tag{I4.6}$$

при $p=\infty$. Рассмотрим вектор функции

$$g_j(t)=a(t)\varphi_j(t)x_j\quad (j=1,2,\dots).$$

Легко видеть, что $g_j \in \mathfrak{Im}\, A$. Из соотношений (14.3) - (14.6) следует, что

$$\|g_j\| = \left(\int_\Lambda \|A(t)\varphi_j(t)x_j\|^p dt \right)^{1/p} \le 2\varepsilon_j$$

при $1 \le p < \infty$ и

$$\|g_j\| = \operatorname{ess\,sup}_{t\in\Lambda} \|A(t)\varphi_j(t)x_j\| < j2\varepsilon_j$$

при $p=\infty$. Отсюда вытекает, что ряд

$$g = \sum_{j=1}^{\infty} g_j$$

абсолютно сходится в пространстве $L_p^m(\Lambda)$ $(1 \le p \le \infty)$. Функция $g \in \overline{\mathfrak{Im}\, A}$. Покажем, что $g \notin \mathfrak{Im}\, A$, то есть что любая функция f, для которой

$$g(t) = a(t)f(t) \tag{14.7}$$

не принадлежит пространству $L_p^n(\Lambda)$. Учитывая равенства

$$g(t) = a(t)\varphi_j(t)x_j \quad (j=1,2,\dots;\ t\in U_{t_j}),$$

получим согласно (14.3) и (14.7), что

$$\|f(t)\| \geqslant \|q(t)\varphi_j(t)x_j\| \geqslant \frac{1}{2}.$$

В силу соотношений (14.4) - (14.6) получаем

$$\int_\Lambda \|f(t)\|^p dt \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} \int_{U_{t_j}} \|f(t)\|^p dt \geqslant \frac{1}{2^p} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(t)|^p dt = \infty$$

при $1 \le p < \infty$ и

$$\operatorname{ess\,sup}_{t\in\Lambda} \|f(t)\| \geqslant \frac{1}{2} \sup_j \operatorname{ess\,sup}_{t\in U_{t_j}} |\varphi_j(t)| = \infty$$

при $p=\infty$. Таким образом, $f \notin L_p^n(\Lambda)$. Теорема доказана.

§ 15. $\Phi_\pm$-операторы

Оператор $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ называется Φ_+ - о п е р а т о р о м, если он нормально разрешим, число $\dim \operatorname{Ker} A$ конечно, а $\dim \operatorname{Coker} A$ бесконечно.

Оператор $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ называется Φ_--оператором, если он нормально разрешим и выполняются условия

$$\dim \operatorname{Ker} A = \infty \quad \text{и} \quad \dim \operatorname{Coker} A < \infty .$$

Обозначим через $\Phi_+(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ множество всех Φ_+-операторов из $L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ и через $\Phi_-(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ - множество всех Φ_--операторов из $L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.

Если оператор $A \in \Phi_+(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, то $A^* \in \Phi_-(\mathcal{B}_2^*, \mathcal{B}_1^*)$, и обратно, если $A^* \in \Phi_-(\mathcal{B}_2^*, \mathcal{B}_1^*)$, то $A \in \Phi_+(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$; при этих предположениях имеет место равенство (см. § 4)

$$\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Coker} A^* .$$

Аналогично, оператор A принадлежит $\Phi_-(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ в том и только том случае, когда $A^* \in \Phi_+(\mathcal{B}_2^*, \mathcal{B}_1^*)$. Если $A \in \Phi_-(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, то

$$\dim \operatorname{Coker} A = \dim \operatorname{Ker} A^* .$$

Условимся для операторов $A \in \Phi_+(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ писать $\operatorname{Ind} A = -\infty$ и для $A \in \Phi_-(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ - $\operatorname{Ind} A = \infty$.

Оператор $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ называется о п е р а т о р о м р е г у л я р н о г о т и п а, если он обладает свойством

$$m_A \overset{def}{=} \inf_{x \in \mathcal{B}_1, \|x\|=1} \|Ax\| > 0. \tag{15.1}$$

Очевидно, что из (15.1) следует равенство $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. Кроме того, всякий оператор регулярного типа нормально разрешим. Действительно,

$$k_A = \sup_{x \in \mathcal{B}_1, \|Ax\|=1} \|x\| = 1 / \inf_{x \in \mathcal{B}_1, \|x\|=1} \|Ax\| = m_A^{-1} < \infty. \tag{15.2}$$

Имеет место и обратное утверждение: всякий нормально разрешимый оператор $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ с нулевым ядром является оператором регулярного типа. В самом деле, легко видеть, что соотношение (15.1) является следствием соотношения (15.2).

Очевидно, всякий обратимый слева оператор является оператором регулярного типа. Обратное утверждение неверно *.

Простейшим примером Φ_+ -оператора является оператор регулярного типа с бесконечномерным коядром, то есть оператор $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ со свойствами

$$(m_A=) \inf_{x \in \mathcal{B}_1, \|x\|=1} \|Ax\| > 0, \quad \dim \operatorname{Coker} A = \infty.$$

Если $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B})$ является оператором регулярного типа с бесконечномерным коядром, то таковыми будут все операторы $B \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, удовлетворяющие условию

$$\|B-A\| < m_A,$$

при этом $m_B \geqslant m_A - \|B-A\|$. Из соотношений

$$\|Bx\| \geqslant \|Ax\| - \|(B-A)x\| \geqslant (m_A - \|B-A\|)\|x\|$$

следует, что B является оператором регулярного типа. Доказательство бесконечномерности коядра оператора B можно найти в статье И.Ц.Гохберга и М.Г.Крейна [I]. В этом доказательстве используются теоремы о растворе, которые здесь не приводятся. Через $\Phi_+^{\circ}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ обозначим множество всех операторов регулярного типа с бесконечным коядром. Простейшим примером Φ_- -оператора является оператор $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ со свойствами

$$\operatorname{Im} A = \mathcal{B}_2 \quad \text{и} \quad \dim \operatorname{Ker} A = \infty.$$

Множество всех таких операторов обозначим через $\Phi_-^{\circ}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$. Оператор A принадлежит $\Phi_+^{\circ}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ в том и только том случае, когда $A^* \in \Phi_-^{\circ}(\mathcal{B}_2^*, \mathcal{B}_1^*)$. Аналогично, оператор A при-

---

*Для случая $\mathcal{B}_1 \neq \mathcal{B}_2$ это очевидно. Приведем соответствующий пример для случая $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$. Пусть $\mathcal{B}$ – подпространство $\ell_p (p \neq 2)$, не имеющее прямого дополнения. Как известно (см. С.Банаха [I], теорема I, стр. 164-165), в $\mathcal{B}$ существует подпространство $\mathcal{N}$, изоморфное ℓ_p. Пусть A – изоморфизм ℓ_p на $\mathcal{N}$. Подпространство $\mathcal{M} = A\mathcal{B}$ не имеет в $\mathcal{B}$ прямого дополнения. В самом деле, если $\mathcal{M} \dot{+} \mathcal{L} = \mathcal{B}$, то $\mathcal{M} \dot{+} (\mathcal{L} \cap \mathcal{N}) = \mathcal{N}$. Но тогда (в силу изоморфизма) $\mathcal{B} \dot{+} A^{-1}(\mathcal{L} \cap \mathcal{N}) = \ell_p$, что невозможно. Таким образом, $\operatorname{Im} A$ не имеет прямого дополнения в $\mathcal{B}$ и в силу теоремы 5.I, гл. II, оператор A необратим слева. Легко видеть, что A является оператором регулярного типа.

надлежит $\Phi_-^\circ(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ в том и только том случае, когда $A^*\in\Phi_+^\circ(\mathcal{B}_2^*,\mathcal{B}_1^*)$. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Если оператор $A\in\Phi_-^\circ(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ и для оператора $B\in L(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ выполняется соотношение

$$\|A-B\|< m_{A^*},$$

то $B\in\Phi_-^\circ(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$.

ТЕОРЕМА 15.1. Следующие утверждения об операторе $A\in L(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ эквивалентны.

1) Оператор A принадлежит множеству $\Phi_+(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$.

2) Оператор A представим в виде $A=A_0+K$, где $A_0\in\Phi_+^\circ(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ и K — конечномерный оператор.

3) Оператор A представим в виде $A=A_0+T$, где $A_0\in\Phi_+^\circ(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ и T - вполне непрерывный оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сперва, что утверждение 1) влечет за собой утверждение 2). Пусть $x_1,x_2,\dots,x_n$ - базис подпространства $\operatorname{Ker} A$ и $y_1,\dots,y_n$ - базис некоторого подпространства $\mathcal{B}_2$, пересекающегося с $\operatorname{Im} A$ только в нуле. Обозначим через $f_1,f_2,\dots,f_n$ систему функционалов из $\mathcal{B}_1^*$, для которых $f_j(x_k)=\delta_{jk}$ $(j,k=1,\dots,n)$. Образуем конечномерный оператор K, полагая

$$Kx=\sum_{j=1}^{n} f_j(x)\,y_j \quad (x\in\mathcal{B}_1).$$

Оператор A_0 определим равенством $A_0=A-K$. Легко видеть, что

$$\operatorname{Im} A_0=\operatorname{Im} A\dotplus\operatorname{Im} K \quad \text{и} \quad \operatorname{Ker} A_0=\{0\},$$

то есть $A_0\in\Phi_+^\circ$. Очевидно, что из утверждения 2) вытекает утверждение 3). Докажем, что из утверждения 3) следует утверждение 1). Обозначим через $\widetilde{A}_0^{-1}$ оператор, обратный к оператору $A_0:\mathcal{B}_1\to\operatorname{Im} A_0$. Тогда $\widetilde{A}_0^{-1}A_0x=x$ для всех векторов $x\in\mathcal{B}_1$. Оператор A_0+T можно представить в виде

$$A_0+T=(I+T\widetilde{A}_0^{-1})A_0. \tag{15.3}$$

Уравнение $(I+T\tilde{A}_0^{-1})y=0$ $(y\in \mathrm{Im}\,A)$ имеет конечное число линейно независимых решений, ибо на подпространстве $\mathrm{Im}A$ оператор $T\tilde{A}_0^{-1}$ вполне непрерывен. Из равенства (I5.3) следует, что $\dim \mathrm{Ker}(A_0+T)<\infty$.

Пусть $\mathfrak{N}$ обозначает некоторое прямое дополнение к подпространству $\mathrm{Ker}(A_0+T)$ в $\mathcal{B}_1$. Покажем, что оператор $(A_0+T)|\mathfrak{N}$ является нормально разрешимым или, что то же,

$$\inf_{\|x\|=1,\, x\in\mathfrak{N}} \|(A_0+T)x\|>0.$$

Допустим противное, то есть что существует последовательность ортов $x_n\in\mathfrak{N}$ $(n=1,2,\dots)$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \|(A_0+T)x_n\|=0. \tag{I5.3}$$

Без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{Tx_n\}$ сходится. Обозначим ее предел через z. Тогда последовательность A_0x_n сходится к пределу $y=-z$. Так как $\mathrm{Im}\,A_0$ замкнуто, то $y\in\mathrm{Im}A_0$, следовательно,последовательность x_n сходится к вектору $x_0=\tilde{A}_0^{-1}y$ $(x_0\in\mathfrak{N},\ \|x_0\|=1)$. Из равенства (I5.3) следует, что $(A_0+T)x_0=0$. Последнее противоречит принадлежности вектора x_0 подпространству $\mathfrak{N}$. Следовательно, оператор $(A_0+T)|\mathfrak{N}$ нормально разрешим, а поэтому оператор A_0+T также нормально разрешим.

Очевидно, $\dim \mathrm{Coker}(A_0+T)=\infty$, так как в противном случае в силу теоремы 6.3 оператор A_0 был бы Φ-оператором. Теорема доказана.

С помощью этой теоремы легко устанавливается следующая двойственная теорема.

ТЕОРЕМА I5.2. *Следующие утверждения об операторе $A\in L(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ эквивалентны.*

1) Оператор A принадлежит множеству $\Phi_-(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$.

2) Оператор A представим в виде $A=A_0+K$, где K – конечномерный оператор и $A_0\in\Phi_-^{\circ}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$.

3) Оператор A представим в виде $A=A_0+T$, где T – вполне непрерывный оператор и $A_0\in\Phi_-^{\circ}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$.

Из доказанных теорем непосредственно вытекает следующая теорема о возмущении $\Phi_{\pm}$-операторов вполне непрерывными.

ТЕОРЕМА 15.3. Пусть оператор A принадлежит множеству $\Phi_{-}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ $(\Phi_{+}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2))$, тогда для любого вполне непрерывного оператора $T \in \mathcal{T}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ оператор $A+T$ также принадлежит множеству $\Phi_{-}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)(\Phi_{+}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2))$.

С помощью теоремы 15.3 можно доказать теорему 3.2, согласно которой оператор $A+T$ $(A, T \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2))$ нормально разрешим, коль скоро оператор A нормально разрешим, оператор T вполне непрерывен и выполняется хотя бы одно из условий

$$\dim \operatorname{Ker} A/(\operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Ker} A) < \infty, \tag{15.4}$$

$$\dim \overline{\operatorname{Im} T}/(\operatorname{Im} A \cap \overline{\operatorname{Im} T}) < \infty. \tag{15.5}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. Пусть выполняется условие (15.4). Обозначим через $\hat{\mathcal{B}}_1$ фактор-пространство $\mathcal{B}_1/\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} = \operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Ker} A$. Рассмотрим операторы $\hat{A}$ и $\hat{T} \in L(\hat{\mathcal{B}}_1, \mathcal{B}_2)$, определенные равенствами

$$\hat{A}\hat{f} = Af \qquad \text{и} \qquad \hat{T}\hat{f} = Tf,$$

где $\hat{f} \in \hat{\mathcal{B}}_1$, а $f \in \hat{f}$. Согласно условиям оператор $\hat{A}$ является Φ_{+}-оператором, а оператор $\hat{T}$ – вполне непрерывен. В силу теоремы 15.3 оператор $\hat{A} + \hat{T}$ является Φ_{+}-оператором. Так как $\operatorname{Im}(A+T) = \operatorname{Im}(\hat{A}+\hat{T})$, то оператор $A+T$ нормально разрешим.

Перейдем ко второму случаю, когда выполняются условия (15.5). Обозначим через $\mathcal{B}_0$ линейную замкнутую оболочку подпространств $\overline{\operatorname{Im} T}$ и $\operatorname{Im} A$. Обозначим через A_0 и T_0 операторы, действующие из $\mathcal{B}_1$ в $\mathcal{B}_0$ и совпадающие с операторами A и T соответственно. Оператор $A_0 \in \Phi_{-}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_0)$, а T_0 вполне непрерывен. Стало быть, согласно теореме 15.3 оператор $A_0 + T_0 \in \Phi_{-}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_0)$. Так как $\operatorname{Im}(A_0 + T_0) = \operatorname{Im}(A+T)$, то оператор $A_0 + T_0$ нормально разрешим.

В следующей теореме рассматривается возмущение $\Phi_{\pm}$-операторов операторами, малыми по норме.

ТЕОРЕМА 15.4. Пусть $A \in \Phi_{+}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ $(A \in \Phi_{-}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2))$. Тогда существует число $\rho > 0$, такое, что все операторы $X\in L(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$, удовлетворяющие условию $\|A-X\|<\rho$, принадлежат множеству $\Phi_+(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ $(\Phi_-(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2))$ и выполняется соотношение

$$\dim \operatorname{Ker} X\leq \dim \operatorname{Ker} A \quad (\dim \operatorname{Coker} X\leq \dim \operatorname{Coker} A).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть оператор A является Φ_+-оператором, тогда в силу теоремы 15.I его можно представить в виде $A=A_0+K$, где $A\in\Phi_+^0(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$, а K – конечномерный оператор. Из доказательства теоремы 15.I вытекает, что оператор K можно выбрать так, чтобы $\dim K=\dim \operatorname{Ker} A$.

Положим $\rho=m_{A_0}$. Тогда для операторов X из окрестности $\|A-X\|<m_{A_0}$ будем иметь $\|A_0-(X-K)\|<m_{A_0}$. Следовательно, оператор $X_0=X-K\in\Phi_+^0(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$. Из теоремы 15.I следует, что оператор $X=X_0+K\in\Phi_+(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$. Кроме того, из представления оператора в виде $X=(I+K\tilde{X}_0^{-1})X_0$, где $\tilde{X}_0^{-1}$ – оператор, обратный к оператору $X_0:\mathcal{B}_1\to \operatorname{Im} X_0$, вытекает, что

$$\operatorname{Ker} X=\operatorname{Ker}(I+K\tilde{X}_0^{-1})\big|\operatorname{Im} X_0.$$

Стало быть,

$$\dim \operatorname{Ker} X\leq \dim K=\dim \operatorname{Ker} A.$$

Аналогично доказывается теорема во втором случае. С помощью следствия 2.3 легко устанавливаются следующие утверждения.

Если $A\in\Phi_+(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ и $B\in\Phi_+(\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3)$, то $BA\in\Phi_+(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3)$.

Если $A\in\Phi_-(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ и $B\in\Phi_-(\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3)$, то $BA\in\Phi_-(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3)$.

Если $A\in\Phi_-(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ и $B\in\Phi_+(\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3)$, то оператор BA нормально разрешим, однако $\dim \operatorname{Ker} BA=\dim \operatorname{Coker} BA=\infty$.

Если $A\in\Phi_+(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ и $B\in\Phi_-(\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3)$, то оператор BA может не быть нормально разрешимым, а каждое из подпространств $\operatorname{Ker} BA$ и $\operatorname{Coker} BA$ может быть конечномерным или бесконечномерным.

Отметим еще, что произведение $\Phi_\pm$-оператора на Φ-оператор (в любом порядке) является $\Phi_\pm$-оператором.

Эти утверждения можно дополнить следующими леммами, играющими важную роль в дальнейшем.

ЛЕММА 15.I. Пусть $A\in L(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ и $B\in L(\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3)$. Если произведение BA является Φ- или Φ_--оператором, то и оператор B является Φ- или Φ_--оператором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В линеале $\operatorname{Im} B$ содержится подпространство $\operatorname{Im} BA$ конечной коразмерности. Согласно теореме 2.3, гл. II, линеал $\mathfrak{Im}\, B$ замкнут и имеет конечную коразмерность. Лемма доказана.

ЛЕММА 15.2. Пусть $A \in L(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ и $B \in L(\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3)$. Если произведение BA является Φ_- или Φ_+-оператором, то оператор A является Φ_- или Φ_+-оператором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта лемма вытекает из предыдущей, если последнюю применить к оператору $A^* B^*$.

Результаты этого параграфа позволяют уточнить некоторые теоремы предыдущих параграфов.

ДОПОЛНЕНИЕ К ТЕОРЕМЕ 7.3. Пусть Γ - замкнутый контур и $a, b \in C(\Gamma)$, тогда оператор $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ не является ни Φ_+- ни Φ_--оператором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем это утверждение от противного. Допустим, что оператор $aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ является Φ_+ - или Φ_--оператором. Функции a и b можно достаточно хорошо аппроксимировать рациональными функциями r_1 и r_2 $(\in R(\Gamma))$, отличными от нуля на Γ. В силу теоремы 15.4 оператор $r_1 P_\Gamma + r_2 Q_\Gamma$ является Φ_+ - или Φ_--оператором. Это противоречит теореме 2.3, гл. Ш, в которой доказано, что если $r_1(t) \neq 0$ и $r_2(t) \neq 0$, то оператор $r_1 P_\Gamma + r_2 Q_\Gamma$ является Φ-оператором.

Аналогичным образом можно доказать следующее утверждение.

ДОПОЛНЕНИЕ К ТЕОРЕМЕ 9.1. Пусть U - частично изометрический Φ-оператор из $L(\mathcal{H})$ с ненулевым индексом и a - непрерывная функция на единичной окружности. Тогда оператор $a(U)$ не является ни Φ_+-, ни Φ_--оператором.

Аналогичное дополнение можно сделать к теореме 9.2, если дополнительно потребовать, чтобы ни в одной точке λ множества $\sigma(\hat{X})$ оператор $X - \lambda I$ не являлся Φ_+ - или Φ_--оператором. Последнее условие выполняется, например, если множество $\sigma(X)$ нигде не плотно в $\mathbb{C}$.

В заключение этого параграфа приведем еще одну теорему о Φ_+-операторах.

ТЕОРЕМА 15.5. Для того чтобы оператор A из $L(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ был Φ_+- или Φ-оператором, необходимо и достаточно, чтобы сужение $A|\mathfrak{M}$ оператора на люрое бесконечномерное подпространство $\mathfrak{M}(\subseteq \mathscr{B}_1)$ не было вполне непрерывным оператором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сужение Φ_+ - или Φ-оператора A на любое подпространство $\mathfrak{M}$ является Φ_+ - или Φ-оператором. Следовательно, если $\dim \mathfrak{M}=\infty$, то $A|\mathfrak{M}$ не является вполне непрерывным оператором.

Обратно, пусть оператор $A\in L(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ не является ни Φ - ни Φ_+-оператором. Пусть $\varepsilon(>0)$ - произвольное число, тогда существует орт $x_1\in \mathscr{B}_1$, такой, что $\|Ax_1\|<\varepsilon/2$. Обозначим через f_1 функционал из $\mathscr{B}_1^*$, такой, что $\|f_1\|=1$ и $f_1(x_1)=1$. Предположим, что построены биортогональные системы $x_1,\dots,x_{n-1}\in \mathscr{B}_1$ и $f_1,\dots,f_{n-1}\in \mathscr{B}_1^*$, такие, что

$$\|x_k\|=1,\quad \|Ax_k\|<\varepsilon 2^{1-2k},\quad \|f_k\|\le 2^{k-1}\quad (k=1,2,\dots,n-1). \qquad (15.8)$$

Так как сужение оператора A на подпространство

$$\mathfrak{N}=\bigcap_{k=1}^{n-1} \operatorname{Ker} f_k$$

не является ни Φ -, ни Φ_+ -оператором, то найдется вектор $x_n\in \mathfrak{N}$, такой, что $\|x_n\|=1$ и $\|Ax_n\|<\varepsilon 2^{1-2n}$. Пусть $g\in \mathscr{B}_1^*$ - произвольный функционал, для которого $g(x_n)=1$ и $\|g\|=1$. Тогда функционал

$$f_n=g-\sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)f_k$$

обладает свойствами

$$f_n(x_k)=\delta_{nk}\ (k=1,2,\dots,n) \text{ и } \|f_n\|\le 2^{n-1}.$$

Таким образом, по индукции можно построить биортогональные последовательности $x_1,x_2,\dots\in \mathscr{B}_1$ и $f_1,f_2,\dots\in \mathscr{B}_1^*$, такие, что для всех k выполняются соотношения (15.8). Обозначим через $\mathfrak{M}$ линейную замкнутую оболочку векторов $x_1, x_2,\dots$ и через A_0 - оператор, определенный равенством,

$$A_0 x=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)Ax_k \quad (x\in \mathfrak{M}).$$

Последовательность конечномерных операторов K_n

$$K_n x=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)Ax_k$$

равномерно сходится к оператору A_0. Следовательно, оператор A_0 вполне непрерывен. Оператор A совпадает с оператором A_0 на множестве

$$\mathcal{L}\{x_1, x_2, \dots\},$$

плотном в $\mathfrak{M}$. Следовательно, $A_0 = A|\mathfrak{M}$. Отметим, кроме того, что

$$\|A_0\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| \|Ax_k\| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \varepsilon .$$

Теорема доказана.

Фактически доказана следующая более общая

ТЕОРЕМА 15.5'. Если оператор $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ не является ни Φ- ни Φ-оператором, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется бесконечномерное подпространство $\mathfrak{M}_\varepsilon$, такое, что

$$A|\mathfrak{M}_\varepsilon \in \mathcal{J}(\mathfrak{M}_\varepsilon, \mathcal{B}_2) \quad \text{и} \quad \|A|\mathfrak{M}_\varepsilon\| < \varepsilon$$

§ 16. Односторонняя регуляризация операторов

Говорят, что оператор $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ допускает регуляризацию слева (справа), если существует оператор $M \in L(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$, такой что оператор $MA - I$ $(AM - I)$ вполне непрерывен. Оператор M называется регуляризирующим слева (справа) для A. В силу теоремы 7.1', если оператор A допускает регуляризацию слева и справа, то он допускает регуляризацию.

Очевидно, что если оператор A допускает регуляризацию слева (справа), то оператор A^* допускает регуляризацию справа (слева).

Приведем еще несколько простых свойств операторов, допускающих одностороннюю регуляризацию.

Если операторы $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ и $B \in L(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3)$ допускают регуляризацию слева (справа), то оператор BA также допускает регуляризацию слева (справа). Если же один из операторов A или B допускает регуляризацию слева, а другой справа, то оператор BA может не допускать регуляризацию ни с одной стороны.

Если оператор $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ допускает регуляризацию слева или справа, а $T \in \mathcal{F}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, то оператор $A+T$ допускает такую же регуляризацию.

Множество всех операторов $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, допускающих регуляризацию слева (справа), является открытым множеством.

ТЕОРЕМА 16.1. Следующие утверждения об операторе $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ эквивалентны.

1. Оператор A допускает регуляризацию слева.

2. Существует оператор $M \in L(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$, такой, что оператор $MA-I$ конечномерен.

3. Оператор A нормально разрешим, $\dim \operatorname{Ker} A < \infty$ и подпространство $\operatorname{Im} A$ имеет прямое дополнение в $\mathcal{B}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из утверждения 1 вытекает утверждение 2. В самом деле, пусть M_1 – регуляризирующий слева оператор для A. Тогда оператор $T = M_1 A - I \in \mathcal{F}(\mathcal{B}_1)$. Оператор $I+T$ можно представить в виде $I+T = B+K$, где $B \in L(\mathcal{B}_1)$ – обратимый оператор, а K – конечномерный оператор. Очевидно, для оператора $M = B^{-1} M_1$ разность $MA-I$ является конечномерным оператором.

Утверждение 2 влечет за собой утверждение 3. Пусть существует оператор $M \in L(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$, такой, что оператор $MA-I$ конечномерен. Тогда конечномерен и оператор $AMA-A$. Отсюда в силу леммы 5.2 вытекает, что оператор A обобщенно обратим. Следовательно, согласно теореме 5.1 оператор A нормально разрешим и подпространство $\operatorname{Im} A$ имеет прямое дополнение. Так как $\operatorname{Ker} A \subseteq \operatorname{Ker} MA$, то $\dim \operatorname{Ker} A < \infty$.

Наконец, из утверждения 3 вытекает утверждение 1. Пусть $A^{(-1)}$ – обобщенно обратный оператор к A. Тогда согласно лемме 5.1 имеет место равенство $\operatorname{Im}(I - A^{-1}A) = \operatorname{Ker} A$. Стало быть, оператор $I - A^{(-1)}A$ конечномерен, то есть оператор $A^{(-1)}$ является регуляризирующим слева для A. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 16.1. Оператор $A \in \Phi_+(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ допускает регуляризацию слева в том и только том случае, когда подпространство $\mathcal{I}m\,A$ имеет прямое дополнение в $\mathcal{B}_2$.

Аналогичным образом доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 16.2. Следующие утверждения об операторе $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ эквивалентны.

1. Оператор A допускает регуляризацию справа.

2. Существует оператор $M \in L(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$, такой, что оператор $AM - I$ конечномерен.

3. Оператор A нормально разрешим $\dim \operatorname{Coker} A < \infty$ и подпространство $\operatorname{Ker} A$ имеет прямое дополнение в $\mathcal{B}_1$

Из этой теоремы вытекает

СЛЕДСТВИЕ 16.2. Оператор $A \in \Phi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ допускает регуляризацию справа в том и только том случае, когда подпространство $\operatorname{Ker} A$ имеет прямое дополнение.

Отметим, что существуют Φ^{+}- (Φ^{-})-операторы, не допускающие регуляризацию слева (справа)*.

Из теоремы 16.1 и 16.2 непосредственно следует

ТЕОРЕМА 16.3. Пусть $\hat{L}(\mathcal{B})$ – фактор-алгебра $L(\mathcal{B})/\mathcal{J}(\mathcal{B})$. Для того чтобы оператор $A \in L(\mathcal{B})$ допускал регуляризацию слева (справа), необходимо и достаточно, чтобы класс вычетов $\hat{A} \in \hat{L}(\mathcal{B})$, содержащий оператор A, был обратим слева (справа).

Приведем еще одну теорему о представлениях операторов, допускающих регуляризацию.

ТЕОРЕМА 16.4. Следующие утверждения об операторе $A \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, не принадлежащем множеству $\Phi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, эквивалентны.

1. Оператор A допускает регуляризацию слева (справа).

2. Оператор A допускает представление в виде $A = D + T$, где оператор $D (\in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2))$ обратим слева (справа), $\dim \operatorname{Coker} D = \infty$ ($\dim \operatorname{Ker} D = \infty$) и $T \in \mathcal{J}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.

---

* См. пример в сноске на стр. 191.

3. Оператор A допускает представление в виде $A=D+K$, где оператор $D(\in L(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2))$ обратим слева (справа), $\dim \mathrm{Coker}\, D=\infty$ ($\dim \mathrm{Ker}\, D=\infty$), и K - конечномерный оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО*. Очевидно, что из утверждения 3 следует утверждение 2, а утверждение 2 влечет за собой утверждение I.

Докажем, что утверждение I влечет за собой утверждение 3. Пусть $x_1,\dots,x_m$ – базис подпространства $\mathrm{Ker}\, A$ и $f_1,f_2,\dots,f_m$ - биортогональная система функционалов. Через $y_1,\dots,y_m$ обозначим линейно независимую систему векторов из дополнения к подпространству $\mathrm{Im}\, A$. Определим оператор D, полагая $D=A-K$, где $Kx=f_1(x)y_1+\dots+f_m(x)y_m$. Легко видеть, что $\mathrm{Ker}\, D=\{0\}$. Так как $\mathrm{Im}\, D=\mathrm{Im}\, A+\mathrm{Im}\, K$, то подпространство $\mathrm{Im}\, D$ имеет прямое дополнение. Таким образом, оператор D обратим слева. Очевидно, $\dim \mathrm{Coker}\, D=\infty$.

Аналогично доказывается второй вариант теоремы.

Рассмотрим теперь класс односторонне регуляризируемых операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Обозначим через U частично изометрический оператор** из $L(\mathcal{H})$. В отличие от § 9 будем предполагать, что

$$\dim \mathrm{Ker}\, U<\infty \text{ и } \dim \mathrm{Coker}\, U=\infty .$$

Следовательно, U является Φ_+-оператором и допускает регуляризацию слева. В качестве регуляризирующего слева оператора для U можно взять оператор U^*.

ЛЕММА I6.I. При всех λ из круга $|\lambda|<1$ оператор $U-\lambda I$ допускает регуляризацию слева и $\dim \mathrm{Coker}(U-\lambda I)=\infty$. При $|\lambda|>1$ оператор $U-\lambda I$ обратим, а при $|\lambda|=1$ оператор $U-\lambda I$ не является ни Φ-, ни $\Phi_\pm$-оператором.

Эта лемма сохраняет силу, если в ее формулировке заменить оператор U оператором U^* и слово "слева" на "справа" и $\dim \mathrm{Coker}(U-\lambda I)=\infty$ на $\dim \mathrm{Ker}(U-\lambda I)=\infty$.

---

* Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 6.2.

** См. § 9.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $|\lambda|<1$ оператор $I-\lambda U^*$ обратим и $(I-\lambda U^*)^{-1}=I+\lambda U^*+\lambda^2(U^*)^2+\ldots$. Следовательно, для оператора

$$M=\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda U^*)^j U^*$$

имеет место равенство

$$M(U-\lambda I)=(I-\lambda U^*)^{-1}U^*(U-\lambda I)=I+K,$$

где $K=(I-\lambda U^*)^{-1}(U^*U-I)$. Оператор U^*U-I конечномерен, следовательно, конечномерен и оператор K. Таким образом, оператор M является регуляризирующим к $U-\lambda I$ слева при $|\lambda|<1$. Легко видеть, что $\dim \operatorname{Coker}(U-\lambda I)=\infty$ при $|\lambda|<1$. При $|\lambda|>1$ оператор $U-\lambda I=-\lambda(I-\frac{1}{\lambda}U)$, очевидно, обратим. В окрестности любого оператора $U-\lambda_0 I$ $(|\lambda_0|=1)$ имеются Φ_+-операторы $U-\lambda I$ $(|\lambda|<1)$ и обратимые операторы $U-\lambda I$ $(|\lambda|>1)$. Стало быть, в силу теоремы 15.4 оператор $U-\lambda_0 I$ не является ни Φ_-, ни Φ_+-оператором. Лемма доказана.

Каждому тригонометрическому полиному

$$p(t)=\sum_{j=-s}^{\ell}a_j t^j \quad (|t|=1) \tag{16.1}$$

сопоставим оператор

$$p(U)=\sum_{j\geq 0}a_j U^j+\sum_{j<0}a_j (U^*)^j.$$

В силу теоремы 16.3 спектр $\sigma(\hat U)$ совпадает с единичным кругом. Элемент $\hat U^*$ является обратным только слева к $\hat U$. Повторяя, по существу, рассуждения из § 9, можно показать, что

$$\|p(U)\|=\|\widehat{p(U)}\|=\max_{|t|=1}|p(t)|.$$

Так же как в § 9 можно определить оператор $a(U)$ для любой непрерывной функции $a(t)$ $(|t|=1)$. При этом

$$\|a(U)\|=\|\widehat{a(U)}\|=\max_{|t|=1}|a(t)|.$$

Отметим, что класс вычетов $\widehat{a(U)}$ можно понимать как $a(\hat U)$.

ТЕОРЕМА 16.5. Пусть $a\in C(\Gamma_0)$. Для того чтобы оператор $a(U)$ допускал регуляризацию хотя бы с одной стороны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$a(t) \neq 0 \quad (|t|=1). \tag{16.2}$$

Если это условие выполняется, то оператор $a(U)$ допускает регуляризацию слева, справа или с двух сторон, в зависимости от того, будет ли число $ind\,a$ положительным, отрицательным или равным нулю. При $ind\,a>0$ $\dim \operatorname{Coker} a(U)=\infty$, а при $ind\,a<0$ $\dim \operatorname{Ker} a(U)=\infty$.

Если функция $a(t)$ обращается в нуль на единичной окружности, то оператор $a(U)$ не является ни Φ_-, ни Φ_+-оператором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполняется условие (16.2). Тогда функцию a можно представить в виде $a=p(1+m)$, где p – тригонометрический полином вида (16.1), а m – функция из $C(\Gamma_0)$, удовлетворяющая условию $|m(t)|<1$ $(|t|=1)$.

Пусть $t_1^+, \ldots, t_r^+$ – корни многочлена $t^s p(t)$, лежащие внутри круга, и через $t_1^-, t_2^-, \ldots, t_n^-$ обозначим корни многочлена $p(t)$, лежащие вне единичного круга. Полином $p(t)$ можно представить в виде

$$p(t)=\prod_{j=1}^{r}(1-t^{-1}t_j^+)\, t^{\varkappa} \prod_{j=1}^{n}(t-t_j^-).$$

Это равенство, очевидно, является факторизацией p относительно единичной окружности (см. гл. II). В частности, $\varkappa=ind\,p$. Так как $ind\,a=ind\,p$, то $\varkappa=ind\,a$.

Функцию a можно представить в виде

$$a=p_-\, t^{\varkappa}(1+m)p_+, \tag{16.3}$$

где

$$p_-(t)=\prod_{j=1}^{r}(1-t^{-1}t_j^+) \quad \text{и} \quad p_+(t)=\prod_{j=1}^{n}(t-t_j^-).$$

Положим $\hat U^* = \hat U^{-1}$. Равенство

$$\hat U^k \hat U^\ell = \hat U^{k+\ell} \tag{16.4}$$

имеет место, когда $k\ell \geqslant 0$, а также в случае, когда k принимает неположительные значения, а ℓ – неотрицательные. Отсюда и из равенства (16.3) вытекает, что

$$a(\hat{U}) = p_-(\hat{U})\hat{U}^{\varkappa}(I+m(\hat{U}))p_+(\hat{U}) \qquad (16.5)$$

при $\varkappa \leq 0$ и

$$a(\hat{U}) = p_-(\hat{U})(I+m(\hat{U}))\hat{U}^{\varkappa}p_+(\hat{U}) \qquad (16.6)$$

при $\varkappa \geqslant 0$. Легко видеть, что элементы $p_-(\hat{U})$ и $p_+(\hat{U})$ обратимы в $\hat{C}(\mathcal{B})$. Элемент $I+m(\hat{U})$ также обратим в $\hat{C}(\mathcal{B})$, так как $\|m(\hat{U})\| < 1$. Элементы $\hat{U}^{\varkappa}$ обратимы только слева при $\varkappa > 0$ и только справа при $\varkappa < 0$.

Таким образом, элемент $a(\hat{U})$ обратим только слева при $\varkappa > 0$, только справа – при $\varkappa < 0$ и с двух сторон – при $\varkappa = 0$. Отсюда в силу теоремы 16.3 вытекает, что оператор $a(U)$ допускает регуляризацию только слева при $\varkappa > 0$, только справа при $\varkappa < 0$ и с двух сторон – при $\varkappa = 0$.

Из равенств (16.5) и (16.6) можно легко вывести, что регуляризирующий оператор M для $a(U)$ имеет вид

$$M = q_+(U)(1+n(U))U^{-\varkappa}q_-(U) \qquad \text{при } \varkappa < 0,$$

$$M = q_+(U)U^{-\varkappa}(I+n(U))q_-(U) \qquad \text{при } \varkappa > 0,$$

$$M = q_+(U)(I+n(U))q_-(U) \qquad \text{при } \varkappa = 0,$$

где

$$q_+ = \frac{1}{p_+}, \quad q_- = \frac{1}{p_-} \quad \text{и} \quad 1+n = \frac{1}{1+m}.$$

Осталось доказать последнее утверждение теоремы. Допустим, что функция $a \in C(\Gamma_0)$ обращается в нуль в некоторой точке t_0 $(|t_0| = 1)$, и оператор $a(U)$ является Φ-, Φ_+- или Φ_--оператором. Пусть p – тригонометрический полином, достаточно точно аппроксимирующий функцию a и обращающийся в нуль в точке t_0. Оператор $p(U)$ также является Φ-, Φ_+- или Φ_--оператором.

Так как p можно представить в виде $p(t) = (t-t_0)p_1(t)$ или $p(t) = (t^{-1}-t_0^{-1})p_2(t)$, где p_1, p_2 – тригонометрические полиномы, то

$$p(\hat{U})=p_1(\hat{U})(\hat{U}-t_0\hat{I}) \quad \text{и} \quad p(\hat{U})=(\hat{U}^{-1}-t_0^{-1})p_2(\hat{U})$$

или

$$p(U)=p_1(U)(U-t_0 I)+T_1 \tag{16.7}$$

и

$$p(U)=(U^*-t_0^{-1})p_2(U)+T_2, \tag{16.8}$$

где $T_1, T_2 \in \mathcal{J}(\mathcal{H})$.

Если оператор $p(U)$ является Φ - или Φ_+ -оператором, то из равенства (16.7) и леммы 15.2 вытекает, что $U^*-t_0^{-1}I$ является Φ - или Φ_+ -оператором. Это противоречит лемме 16.1.

Если оператор $p(U)$ является Φ_- -оператором, то из равенства (16.8) и леммы 15.1 следует, что $U-t_0 I$ является Φ - или Φ_- -оператором. Это противоречит лемме 16.1. Теорема доказана.

§ 17. Проекции обратимых операторов

Ограничимся в этом параграфе рассмотрением операторов, действующих в одном банаховом пространстве $\mathcal{B}$. Обозначим через $\widetilde{\mathcal{B}}$ некоторое банахово пространство, содержащее $\mathcal{B}$ в качестве подпространства, имеющего прямое дополнение. Оператор $A\in L(\mathcal{B})$ назовем проекцией оператора $\widetilde{A}\in L(\widetilde{\mathcal{B}})$, если существует проектор $\widetilde{P}$, проектирующий $\widetilde{\mathcal{B}}$ на $\mathcal{B}$, такой, что

$$A=\widetilde{P}\widetilde{A}\,|\,\mathcal{B}.$$

Легко видеть, что любой оператор $A\in L(\mathcal{B})$ является проекцией обратимого оператора. В самом деле, положим $\widetilde{\mathcal{B}}=\mathcal{B}\dotplus\mathcal{B}$. Рассмотрим в пространстве $\widetilde{\mathcal{B}}$ оператор $\widetilde{A}$, определенный равенством

$$\widetilde{A}=\begin{Vmatrix} A & \omega I \\ \omega I & 0 \end{Vmatrix},$$

где μ – достаточно большое комплексное число. Очевидно, оператор $\tilde{A}$ обратим и A является проекцией $\tilde{A}$.

Имеет место

ТЕОРЕМА 17.1. Следующие утверждения об операторе $A \in L(\mathcal{B})$ эквивалентны.

1. Оператор A обобщенно обратим и $\dim \operatorname{Ker} A < \infty$.

2. Оператор A является проекцией обратимого оператора $\tilde{A}: A = \tilde{P}\tilde{A}|\mathcal{B}$, и оператор $(\tilde{I}-\tilde{P})\tilde{A}\tilde{P}$ вполне непрерывен

3. Оператор A является проекцией обратимого оператора $\tilde{A}: A = \tilde{P}\tilde{A}|\mathcal{B}$, и оператор $(\tilde{I}-\tilde{P})\tilde{A}\tilde{P}$ конечномерен.

4. Оператор $\tilde{P}\tilde{A}^{-1}\tilde{P}$ является регуляризирующим слева для A.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из утверждения 1 вытекает утверждение 3. В самом деле, положим $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \dotplus \mathcal{B}$ и рассмотрим оператор $\tilde{A}$, определенный в пространстве $\tilde{\mathcal{B}}$ матрицей

$$\tilde{A} = \left\| \begin{matrix} A & I - AA^{(-1)} \\ I - A^{(-1)}A & A^{(-1)} \end{matrix} \right\|, \qquad (17.1)$$

где $A^{(-1)}$ – обобщенно обратный оператор к A, для которого выполняется равенство $A^{(-1)}AA^{(-1)} = A^{(-1)}$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что обратный оператор к оператору $\tilde{A}$ определяется матрицей

$$\tilde{A}^{-1} = \left\| \begin{matrix} A^{(-1)} & I - A^{(-1)}A \\ I - AA^{(-1)} & A \end{matrix} \right\|. \qquad (17.2)$$

Очевидно, оператор A является проекцией оператора $\tilde{A}$, причем $(\tilde{I}-\tilde{P})\tilde{A}\tilde{P} = I - A^{(-1)}A$. Согласно лемме 5.1 оператор $I - A^{(-1)}A$ является проектором на подпространство $\operatorname{Ker} A$, следовательно, $\dim(\tilde{I}-\tilde{P})\tilde{A}\tilde{P} < \infty$.

Из утверждения 2 вытекает 4. Действительно, непосредственной проверкой убеждаемся в том, что оператор $\tilde{P}\tilde{A}^{-1}|\mathcal{B}$ является регуляризирующим слева для оператора A.

Очевидно, утверждение 3 влечет за собой утверждение 2.

Осталось еще заметить, что согласно теореме I6.I из утверждения 4 вытекает первое утверждение. Теорема доказана.

Аналогичным образом доказывается

ТЕОРЕМА I7.2. Следующие утверждения об операторе $A \in L(\mathcal{B})$ эквивалентны.

I. Оператор A обобщенно обратим и $\dim \operatorname{Coker} A < \infty$.

2. Оператор A является проекцией обратимого оператора $\tilde{A}: A = \tilde{P}\tilde{A}|\mathcal{B}$, и оператор $\tilde{P}\tilde{A}(\tilde{I}-\tilde{P})$ вполне непрерывен.

3. Оператор A является проекцией обратимого оператора $\tilde{A}$: $A = \tilde{P}\tilde{A}|\mathcal{B}$, и оператор $\tilde{P}\tilde{A}(\tilde{I}-\tilde{P})$ конечномерен.

4. Оператор $\tilde{P}\tilde{A}^{-1}\tilde{P}$ является регуляризирующим справа для A .

Из теорем I7.I и I7.2 непосредственно вытекает

ТЕОРЕМА I7.3. Следующие утверждения об операторе $A \in L(\mathcal{B})$ эквивалентны.

I. Оператор A является Φ-оператором.

2. Оператор A является проекцией обратимого оператора $\tilde{A}: A = \tilde{P}\tilde{A}|\mathcal{B}$, и оператор $\tilde{P}\tilde{A}(\tilde{I}-\tilde{P})+(\tilde{I}-\tilde{P})\tilde{A}\tilde{P}$ конечномерен (или вполне непрерывен).

3. Оператор $\tilde{P}\tilde{A}^{-1}|\mathcal{B}$ является регуляризирующим для A .

Рассмотрим один пример. Пусть Γ — замкнутый контур и $a = h + b$, где $h \in L^{+}_{\infty}(\Gamma)$ и $b \in C(\Gamma)$.

Покажем, что при выполнении условия

$$\operatorname*{ess\,inf}_{|t|=1} |a(t)| > 0$$

оператор $aP_\Gamma + Q_\Gamma$ допускает в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$ регуляризацию слева. Так как

$$aP_\Gamma + Q_\Gamma = (P_\Gamma a P_\Gamma + Q_\Gamma)(I + Q_\Gamma a P_\Gamma),$$

а оператор $I + Q_\Gamma a P_\Gamma$ обратим

$$(I + Q_\Gamma a P_\Gamma)^{-1} = I - Q_\Gamma a P_\Gamma,$$

то остается показать, что оператор $P_\Gamma a \mid L_p^+(\Gamma,\rho)$ допускает регуляризацию слева.

Оператор $P_\Gamma a \mid L_p^+(\Gamma,\rho)$ является проекцией оператора $aI \in L(L_p(\Gamma,\rho))$. Этот оператор обратим, и, очевидно, $Q_\Gamma a P_\Gamma = Q_\Gamma h P_\Gamma + Q_\Gamma b P_\Gamma = Q_\Gamma b P_\Gamma$. Оператор $Q_\Gamma b P_\Gamma$ вполне непрерывен (см. § 4, гл. I). Следовательно, в силу теоремы I7.I оператор $P_\Gamma a^{-1} \mid L_p(\Gamma,\rho)$ является регуляризирующим слева для оператора $P_\Gamma a \mid L_p^+(\Gamma,\rho)$. Поэтому оператор $(I - Q_\Gamma a P_\Gamma)(P_\Gamma a^{-1} P_\Gamma + Q_\Gamma)$ является регуляризирующим слева для оператора $aP_\Gamma + Q_\Gamma$.

ГЛАВА У.

ФРЕДГОЛЬМОВЫ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ С ДВУМЯ НОРМАМИ

В классической теории интегральных уравнений условие разрешимости уравнений отличается от условий нормальной разрешимости. В нем, как правило, не участвует сопряженное пространство и сопряженный оператор. Последнее сильно упрощает проверку условия разрешимости. Это особенно важно, например, для пространства $H_{\alpha_1}(\Gamma)$.

В этой главе исследуются связи между нормальной разрешимостью операторов и их "классической" разрешимостью. Это исследование проводится с помощью абстрактной схемы пространств с двумя нормами, из которых одна является гильбертовой.

В первом параграфе выясняются условия, при которых банахово пространство $\mathcal{B}$ можно превратить в пространство с двумя нормами, то есть непрерывно вложить в некоторое гильбертово пространство $\mathcal{H}$. В § 2 – 4 исследуются операторы в пространствах с двумя нормами. Классической разрешимости операторов посвящен пятый параграф. В § 6 приведены примеры, реализующие всевозможные ситуации, которые встречаются в пространствах с двумя нормами. Приложения к сингулярным интегральным операторам приведены в последнем параграфе.

§ 1. Пространство с двумя нормами

Банахово пространство $\mathcal{B}$ будем называть пространством с двумя нормами, если оно непрерывно вложено* в некоторое гильбертово-

* Говорят, что пространство $\mathcal{B}_1$ непрерывно вложено в пространство $\mathcal{B}_2$, если $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$ и $\sup\limits_{x \in \mathcal{B}_1} (\|x\|_{\mathcal{B}_2} / \|x\|_{\mathcal{B}_1}) < \infty$.

во пространство $\mathfrak{H}$ и образует в нем плотное множество. Пространство $\mathfrak{H}$ назовем присоединенным к пространству $\mathcal{B}$.

Примерами пространств с двумя нормами могут служить пары $\mathcal{B}=C(\Gamma)$ и $\mathfrak{H}=L_2(\Gamma)$; $\mathcal{B}=H_\mu(\Gamma)(0<\mu<1)$ и $\mathfrak{H}=L_2(\Gamma)$ и другие.

Пусть $\mathcal{B}$ – пространство с двумя нормами и $\mathfrak{H}$ – присоединенное к нему гильбертово пространство. Каждый элемент $\varphi\in\mathfrak{H}$ по формуле $f_\varphi(x)=(x,\varphi)$ определяет функционал из пространства $\mathcal{B}^*$. Если отождествить функционал f_φ с элементом φ, то получим, что $\mathcal{B}^*\supset\mathfrak{H}$. Очевидно, пространство $\mathfrak{H}$ непрерывно вложено в $\mathcal{B}^*$. Таким образом,

$$\mathcal{B}\subset\mathfrak{H}\subset\mathcal{B}^*. \tag{1.1}$$

В дальнейшем, говоря о пространстве с двумя нормами, будем всегда предполагать выполненным соотношение (I.1).

ТЕОРЕМА I.I. Для того чтобы банахово пространство было пространством с двумя нормами, необходимо и достаточно, чтобы существовал оператор $J\in L(\mathcal{B},\mathcal{B}^*)$, такой, что

$$(Jx)(x)>0 \quad (x\in\mathcal{B},\ x\neq 0). \tag{1.2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathcal{B}$ является пространством с двумя нормами, то роль J будет играть оператор вложения $\mathcal{B}$ в $\mathcal{B}^*$. Тогда будем иметь

$$(Jy)(x)=(x,y) \quad (x,y\in\mathcal{B}).$$

Легко видеть, что J – линейный ограниченный оператор и что выполняется условие (I.2).

Обратно, пусть $J\in L(\mathcal{B},\mathcal{B}^*)$ и выполняется условие (I.2). Образуем билинейную форму $(x,y)=(Jy)(x)$. Равенство $(x,y)=\overline{(y,x)}$ проверяется легко, если предварительно выразить билинейную форму (x,y) через соответствующие квадратичные формы.

Таким образом, эта билинейная форма может быть принята в качестве скалярного произведения. Обозначим через $\mathfrak{H}$ гильбертово пространство, являющееся замыканием пространства $\mathcal{B}$ по норме $\|x\|_{\mathfrak{H}}=\sqrt{(x,x)}$. Так как

$$\|x\|^2_{\mathfrak{H}}=(Jx)(x)\leq\|Jx\|_{\mathcal{B}^*}\|x\|_{\mathcal{B}}\leq\|J\|\|x\|^2_{\mathcal{B}},$$

то

$$\|x\|_{\mathcal{H}} \le \|J\|^{1/2}\|x\|_{\mathcal{B}}.$$

Следовательно, пространство $\mathcal{B}$ непрерывно вложено в $\mathcal{H}$. Теорема доказана.

§ 2. Биограниченные операторы

Пусть $\mathcal{B}$ - пространство с двумя нормами, $\mathcal{H}$ - гильбертово пространство, присоединенное к $\mathcal{B}$, и $A \in L(\mathcal{B})$. Так как $\mathcal{B} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{B}^*$, то оператор A^* определен на $\mathcal{B}$. Оператор A назовем биограниченным, если $A^*\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$ и $A^*|\mathcal{B} \in L(\mathcal{B})$. Для биограниченного оператора $A \in L(\mathcal{B})$ через A^+ обозначим сужение $A^*|\mathcal{B}$. Условимся через $B(\mathcal{B}, \mathcal{H})$ обозначать совокупность всех биограниченных операторов. Отметим, что оператор $A \in L(\mathcal{B})$ принадлежит $B(\mathcal{B}, \mathcal{H})$ в том и только том случае, когда $A^*\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}$. В самом деле, если $A^*\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}$, то легко проверить, что оператор $A^*|\mathcal{B}$ замкнут, а следовательно, в силу теоремы Банаха он ограничен.

Для операторов $A_1, A_2 \in B(\mathcal{B}, \mathcal{H})$, очевидно, имеют место следующие свойства:

1^0 $A_1^+ \in B(\mathcal{B}, \mathcal{H})$ и $(A_1^+)^+ = A_1$;

2^0 $A_1 A_2 \in B(\mathcal{B}, \mathcal{H})$ и $(A_1 A_2)^+ = A_2^+ A_1^+$;

3^0 $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)^+ = \bar{\alpha}_1 A_1^+ + \bar{\alpha}_2 A_2^+$ $(\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C})$.

Из свойства 1^0 вытекает, что всякий оператор $A \in B(\mathcal{B}, \mathcal{H})$ допускает расширение на $\mathcal{B}^*$. Этим расширением, очевидно, является оператор $(A^+)^*$.

Из свойств 2^0 и 3^0 следует, что $B(\mathcal{B}, \mathcal{H})$ является алгеброй. Эта алгебра не является полной (относительно обычной операторной нормы). В этом можно убедиться на следующем примере. Пусть $\mathcal{B} = \ell_1$, $\mathcal{H} = \ell_2$ и $\mathcal{B}^* = m$. Рассмотрим последовательность биограниченных операторов X_n $(n = 1, 2, \ldots)$, заданных в пространстве ℓ_1 матрицами

$$\begin{Vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n} & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdots \end{Vmatrix}.$$

Так как $\|X_n - X_m\|_{\ell_1} = \frac{1}{n+1}$ $(n < m)$, то последовательность $\{X_n\}$ сходится по норме к оператору $X \in L(\ell_1)$, определенному матрицей

$$\begin{Vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \cdots \\ 0 & 0 & 0 \dots \\ \cdot & \cdot & \cdots \end{Vmatrix}.$$

Легко видеть, что оператор X^* не отображает ℓ_1 в себя и, стало быть, оператор X не является биограниченным.

Без труда проверяется, что алгебра $B(\mathcal{B}, \mathcal{G})$ является банаховой алгеброй с нормой

$$\|X\|_B = \|X\|_{\mathcal{B}} + \|X^+\|_{\mathcal{B}}. \tag{2.1}$$

В проверке нуждается лишь полнота этой алгебры. Пусть X_n $(n=1,2,\dots)$ – фундаментальная по норме (2.1) последовательность из $B(\mathcal{B}, \mathcal{G})$. Тогда X_n сходится, в частности, по обычной норме к некоторому $X \in L(\mathcal{B})$. Операторы X_n^+ также сходятся по обычной операторной норме к некоторому оператору $Y \in L(\mathcal{B})$. Из равенства

$$\lim_{n\to\infty} \|X_n^+ z - Yz\|_{\mathcal{B}} = 0 \quad (z \in \mathcal{B})$$

вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \|X_n^* z - Yz\|_{\mathcal{B}^*} = 0 \quad (z \in \mathcal{B}).$$

Следовательно, $Y = X^*|\mathcal{B}$. Таким образом, $X^*\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$ и оператор $X \in B(\mathcal{B}, \mathcal{G})$. Последовательность $\{X_n\}$ стремится по норме (2.1) к оператору X.

Имеет место следующее легко проверяемое утверждение.

4°. Если оператор $A \in B(\mathcal{B}, \mathcal{G})$ обратим, то оператор A^{-1} принадлежит $B(\mathcal{B}, \mathcal{G})$ в том и только том случае, когда оператор A^+ обратим. Если последнее условие выполняется, то

$$(A^{-1})^{+} = (A^{+})^{-1}. \tag{2.2}$$

Отметим еще, что если оператор $A \in B(\mathcal{B}, \mathcal{H})$ вполне непрерывен, то оператор A^{+} может не быть вполне непрерывным. В этом можно убедиться в случае $\mathcal{B} = \ell_1$ и $\mathcal{H} = \ell_2$ на примере оператора, определенного бесконечной матрицей

$$\left\| \begin{matrix} 2^{-1} & 2^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 2^{-2} & 2^{-2} & 2^{-2} & 2^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 2^{-3} & 2^{-3} & 2^{-3} & 2^{-3} & 2^{-3} & 2^{-3} & 2^{-3} & 2^{-3} & 0 & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \end{matrix} \right\|.$$

§ 3. Биограниченные операторы в присоединенном гильбертовом пространстве

Пусть $\mathcal{B}$ - пространство с двумя нормами и $\mathcal{H}$ - присоединенное пространство. Будем говорить, что оператор $A \in L(\mathcal{B})$ принадлежит алгебре $L(\mathcal{H})$, если оператор A допускает расширение по непрерывности до линейного ограниченного оператора, действующего в пространстве $\mathcal{H}$. Условимся расширение оператора $A \in L(\mathcal{B})$ на $\mathcal{H}$ обозначать также буквой A. Легко видеть, что если $A \in L(\mathcal{B}) \cap L(\mathcal{H})$, то оператор, сопряженный к A в $\mathcal{H}$, является сужением оператора, сопряженного к A в $\mathcal{B}$.

Важную роль играет

ЛЕММА 3.1. *Если оператор $A \in B(\mathcal{B}, \mathcal{H})$ обладает свойством $A^{+} = A$, то оператор $A \in L(\mathcal{H})$ и*

$$\|A\|_{\mathcal{H}} \leq \|A\|_{\mathcal{B}}. \tag{3.1}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно предположить, что $\|A\|_{\mathcal{B}} = 1$. Для произвольного вектора $\varphi \in \mathcal{B}$ с $\|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1$ положим

$$\nu_n = (A^n\varphi, A^n\varphi) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Из соотношений

$$(A^{n-1}\varphi+\lambda A^{n+1}\varphi, A^{n-1}\varphi+\lambda A^{n+1}\varphi)=\nu_{n-1}+2\lambda\nu_n+\lambda^2\nu_{n+1}\geqslant 0$$
$$(n=1,2,\dots),$$

справедливых для всех вещественных чисел λ, следует что

$$\nu_n^2\leqslant\nu_{n-1}\nu_{n+1}\quad(n=1,2,\dots).$$

Так как $\nu_0=1$ и $\nu_n\geqslant 0$ $(n=1,2,\dots)$, то

$$\nu_1\leqslant\frac{\nu_2}{\nu_1}\leqslant\frac{\nu_3}{\nu_2}\leqslant\dots$$

и, стало быть,

$$\nu_n\geqslant\nu_1^n\quad(n=1,2,\dots)\qquad\text{и}\qquad\nu_1\leqslant\lim_{n\to\infty}\inf\sqrt[n]{\nu_n}.$$

С другой стороны,

$$\nu_n=(A^n\varphi, A^n\varphi)=\|A^n\varphi\|_{\mathfrak{H}}^2\leqslant h^2\|A^n\varphi\|_{\mathfrak{B}}^2\leqslant h^2\|\varphi\|_{\mathfrak{B}}^2,$$

где

$$h=\sup_{\varphi\in\mathfrak{B}}(\|\varphi\|_{\mathfrak{H}}/\|\varphi\|_{\mathfrak{B}}).$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{\nu_n}\leqslant 1.$$

Таким образом

$$\nu_1=\|A\varphi\|_{\mathfrak{H}}^2\leqslant 1\quad(\varphi\in\mathfrak{B},\ \|\varphi\|_{\mathfrak{H}}=1).$$

Лемма доказана.

Из доказанной леммы непосредственно выводится

ТЕОРЕМА 3.I. Если оператор $A\in B(\mathfrak{B},\mathfrak{H})$, $A\in L(\mathfrak{H})$,

$$\|A\|_{\mathfrak{H}}\leqslant\|A^+A\|_{\mathfrak{B}}^{1/2},\quad\|A^+\|_{\mathfrak{H}}\leqslant\|AA^+\|_{\mathfrak{B}}^{1/2}\qquad(3.2)$$

и

$$\|A\|_{\mathcal{H}} \leq max\{\|A\|_{\mathcal{B}}, \|A^+\|_{\mathcal{B}}\}. \tag{3.3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При условиях теоремы оператор $A^+A \in B(\mathcal{B}, \mathcal{H})$. Так как $(A^+A)^+ = A^+A$, то согласно лемме 3.I будем иметь $A^+A \in L(\mathcal{H})$ и

$$\|A^+A\|_{\mathcal{H}} \leq \|A^+A\|_{\mathcal{B}}.$$

Так как

$$\|A\varphi\|^2_{\mathcal{H}} = (A\varphi, A\varphi) = (\varphi, A^+A\varphi) \leq$$

$$\leq \|\varphi\|_{\mathcal{H}} \|A^+A\varphi\|_{\mathcal{H}} \leq \|\varphi\|^2_{\mathcal{H}} \|A^+A\|_{\mathcal{B}}$$

для любого вектора $\varphi \in \mathcal{B}$, то оператор $A \in L(\mathcal{H})$ и $\|A\|_{\mathcal{H}} \leq \|A^+A\|_{\mathcal{B}}$. Аналогично рассуждая, получим второе соотношение (3.2). Из которого непосредственно вытекает соотношение (3.3). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.2. Если оператор $A \in B(\mathcal{B}, \mathcal{H})$ вместе с оператором A^+ обратим, то A обратим также в $L(\mathcal{H})$.

Доказательство непосредственно вытекает из утверждения 4^0, § 2, и теоремы 3.I.

Обозначим через $\sigma(A|\mathcal{B})$ спектр оператора A в пространстве $\mathcal{B}$. Из теоремы 3.2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.I. Для любого оператора $A \in B(\mathcal{B}, \mathcal{H})$ имеет место соотношение

$$\sigma(A|\mathcal{H}) \subseteq \sigma(A|\mathcal{B}) \cup \sigma^*(A^+|\mathcal{B}), \tag{3.4}$$

где σ^* означает множество, симметричное к σ относительно вещественной оси. Говорят, что точка λ_0 является собственным числом оператора $A \in L(\mathcal{B})$ с нормально отщепляющимся корневым подпространством, если пространство $\mathcal{B}$ распадается в прямую сумму $\mathcal{B} = \mathcal{L} \dot{+} \mathcal{N}$ двух подпространств $\mathcal{L}$ и $\mathcal{N}$, обладающих следующими свойствами:

а) оба подпространства инвариантны относительно A и $dim\,\mathcal{N} < \infty$;

б) оператор $(A - \lambda_0 I)|\mathcal{L}$ обратим;

в) оператор $(A-\lambda_0 I)|\mathfrak{N}$ в некоторой степени равен нулю.

Очевидно, всякое собственное число оператора A с нормально отщепляющимся корневым подпространством является изолированной точкой спектра оператора A. Подпространство $\mathfrak{N}$ является **корневым подпространством** оператора A в точке λ_0, то есть $\mathfrak{N}=\bigcup\limits_{n=1} Ker(A-\lambda_0 I)^n$.

Из известной теоремы об интеграле Ф.Рисса (см. Ф.Рисс и и Б.С.-Надь [1]) непосредственно вытекает следующее предложение.

Для того чтобы изолированная точка спектра λ_0 оператора $A\in L(\mathcal{B})$ была собственным числом оператора A с нормально отщепляющимся корневым подпространством, необходимо и достаточно, чтобы конечномерным был проектор

$$P=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon}(A-\lambda I)^{-1}d\lambda, \qquad (3.5)$$

где ε – достаточно малое положительное число. Если условие (3.5) выполняется, то $\mathfrak{N}=\mathfrak{Im}\,P$ и $\mathcal{L}=\mathfrak{Im}(I-P)$.

Отметим еще, что если точка λ_0 является собственным числом оператора $A\in L(\mathcal{B})$ с нормально отщепляющимся корневым подпространством, то оператор $A-\lambda_0 I$ нормально разрешим и $\mathfrak{Ind}\,A=0$.

Как известно, всякое собственное число $\lambda_0\neq 0$ вполне непрерывного оператора имеет нормально отщепляющееся корневое подпространство.

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть оператор $A\in B(\mathcal{B},\mathcal{H})$. Если точка λ_0 является собственным числом с нормально отщепляющимся корневым подпространством $\mathfrak{N}$ оператора A, а точка $\bar\lambda_0$ является собственным числом с нормально отщепляющимся корневым подпространством оператора A^+, то точка λ_0 является изолированным собственным числом оператора A в $\mathcal{H}$, которому отвечает конечномерное нормально отщепляющееся корневое подпространство, совпадающее с $\mathfrak{N}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим в пространстве $\mathcal{L}$ конечномерный проектор P, определенный равенством

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon} (A-\lambda I)^{-1} d\lambda, \tag{3.6}$$

где ε – достаточно малое положительное число. Как отмечалось, $P\mathcal{L} = \mathcal{N}$. Из соотношения (3.4) вытекает, что точка λ_0 является изолированной точкой спектра оператора $A|\mathcal{H}$ и, стало быть, формулой (3.6) можно также определить проектор $P|\mathcal{H}$ в пространстве $\mathcal{H}$, являющийся расширением проектора, определенного равенством (3.6) в $\mathcal{L}$. Так как $\mathcal{L}$ плотно в $\mathcal{H}$ и подпространство $P\mathcal{L}$ конечномерно, то $P\mathcal{H} = P\mathcal{L}$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть оператор $A \in B(\mathcal{L}, \mathcal{H})$. Если оператор A вполне непрерывен в пространстве $\mathcal{L}$, то он вполне непрерывен в $\mathcal{H}$, $\sigma(A|\mathcal{H}) = \sigma(A|\mathcal{L})$ и корневые подпространства оператора A, отвечающие одним и тем же собственным числам $(\neq 0)$ в пространствах $\mathcal{L}$ и $\mathcal{H}$, совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор $C = A^{+}A$ вполне непрерывен в $\mathcal{L}$. Так как $C^{+} = C$, то согласно теореме 3.3 собственные числа и корневые подпространства оператора C в пространстве $\mathcal{L}$ и в пространстве $\mathcal{H}$ одни и те же. Отсюда вытекает, что оператор C является ограниченным самосопряженным оператором в $\mathcal{H}$ и каждая отличная от нуля точка спектра оператора C является изолированным собственным числом конечной кратности. Следовательно, оператор C вполне непрерывен в $\mathcal{H}$. Из полной непрерывности оператора $A^{*}A$ в $\mathcal{H}$ вытекает полная непрерывность оператора A в $\mathcal{H}$.

Доказательство остальных утверждений теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 3.3. Теорема доказана.

§ 4. Φ-операторы в присоединенном гильбертовом пространстве

В этом параграфе доказывается

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть оператор $A \in B(\mathcal{B}, \mathcal{H})$. Если оба оператора A и A^+ являются Φ-операторами в пространстве $\mathcal{B}$ и выполняется равенство

$$\operatorname{Ind} A = -\operatorname{Ind} A^+, \tag{4.1}$$

то оператор A является Φ-оператором и в пространстве $\mathcal{H}$, причем

$$\operatorname{Ker}(A|\mathcal{B}) = \operatorname{Ker}(A|\mathcal{H}), \quad \operatorname{Ker}(A^+|\mathcal{B}) = \operatorname{Ker}(A^*|\mathcal{H})$$

и

$$\operatorname{Ind}(A|\mathcal{H}) = \operatorname{Ind}(A|\mathcal{B}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Образуем оператор $C = AA^+$. Так как C - ограниченный оператор и $C^+ = C$, то в силу леммы 3.1 C допускает расширение по непрерывности до ограниченного самосопряженного оператора в $\mathcal{H}$. Имеет место равенство

$$\mathcal{H} = \overline{C\mathcal{H}} \oplus \operatorname{Ker}(C|\mathcal{H}),$$

из которого следует, что пересечение $C\mathcal{B} \cap \operatorname{Ker}(C|\mathcal{B})$ состоит только из нуля. Оператор C является Φ-оператором в пространстве $\mathcal{B}$. Так как

$$\operatorname{Ind} C = \operatorname{Ind} A + \operatorname{Ind} A^+,$$

то в силу условия (4.1) $\operatorname{Ind} C = 0$. Следовательно, имеет место равенство

$$\mathcal{B} = C\mathcal{B} \dotplus \operatorname{Ker} C.$$

Отсюда вытекает, что оператор C обратим на инвариантном подпространстве $C\mathcal{B}$, и, следовательно, при достаточно малых $\lambda (\neq 0)$ оператор $C - \lambda I$ обратим в $\mathcal{B}$. Таким образом, точка $\lambda = 0$ является изолированным собственным числом оператора C (в пространстве $\mathcal{B}$) с нормально отщепляющимся корневым подпространством. Отсюда в силу теоремы 3.3 следует, что оператор C является Φ-оператором с нулевым индексом в $\mathcal{H}$ и

$$\operatorname{Ker} C|\mathcal{B} = \operatorname{Ker} C|\mathcal{H}.$$

Из соотношения $AA^*\mathcal{H} \subseteq A\mathcal{H}$ вытекает (в силу теоремы 2.3, гл. II), что оператор A нормально разрешим в $\mathcal{H}$.

Согласно условиям теоремы

$$\dim \operatorname{Ker} A|\mathcal{B} - \dim \operatorname{Ker}(A^+)^* =$$

$$= \dim \operatorname{Ker} A^*|\mathcal{B}^* - \dim \operatorname{Ker} A^+|\mathcal{B}. \qquad (4.2)$$

С другой стороны, имеем

$$\operatorname{Ker} A|\mathcal{B} \subseteq \operatorname{Ker}(A^+)^*|\mathcal{B}^* \quad \text{и} \quad \operatorname{Ker} A^+|\mathcal{B} \subseteq \operatorname{Ker} A^*|\mathcal{B}^*.$$

Отсюда и из соотношений (4.2) вытекают равенства

$$\operatorname{Ker} A|\mathcal{B} = \operatorname{Ker}(A^+)^*|\mathcal{B}^* \quad \text{и} \quad \operatorname{Ker} A^+|\mathcal{B} = \operatorname{Ker} A^*|\mathcal{B}^*.$$

Учитывая, что

$$\operatorname{Ker} A|\mathcal{B} \subseteq \operatorname{Ker} A|\mathcal{Y} \subseteq \operatorname{Ker}(A^+)^*|\mathcal{B}^*$$

и

$$\operatorname{Ker} A^+|\mathcal{B} \subseteq \operatorname{Ker} A^*|\mathcal{Y} \subseteq \operatorname{Ker} A^*|\mathcal{B}^*,$$

получаем

$$\operatorname{Ker} A|\mathcal{B} = \operatorname{Ker} A|\mathcal{Y}$$

и

$$\operatorname{Ker} A^*|\mathcal{B}^* = \operatorname{Ker} A^*|\mathcal{Y}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Ind} A|\mathcal{B} = \operatorname{Ind} A|\mathcal{Y}.$$

Теорема доказана.

Отметим, что если для оператора $A \in B(\mathcal{B}; \mathcal{Y})$ не выполняется хотя бы одно из условий теоремы 4.1, то оператор A может не быть Φ-оператором в пространстве $\mathcal{Y}$. Соответствующие примеры будут приведены в § 6.

§ 5. Классически разрешимые операторы

Условие разрешимости оператора, которое встречается в классической теории интегральных уравнений, в абстрактной теории приводит к следующему определению.

Оператор $A \in B(\mathcal{B}, \mathcal{Y})$ назовем классически разрешимым, если уравнение $Ax=y \, (x, y \in \mathcal{B})$ разрешимо в том и только том случае, когда выполняется условие $(y, \varphi)=0$ для любого решения $\varphi \in \mathcal{B}$ уравнения $A^{+}\varphi = 0$.

Пусть $A \in B(\mathcal{B}, \mathcal{Y})$ и $\dim \operatorname{Ker} A^{+} < \infty$. Легко видеть, что оператор A является классически разрешимым в том и только том случае, когда он является нормально разрешимым в $\mathcal{B}$ и

$$\operatorname{Ker} A^{+} | \mathcal{B} = \operatorname{Ker} A^{*} | \mathcal{B}^{*}.$$

Условимся оператор $A \in B(\mathcal{B}, \mathcal{Y})$ называть классическим Φ-оператором, если он является Φ-оператором и классически разрешим, то есть если он является Φ-оператором и выполняется равенство $\operatorname{Ker} A^{+}|\mathcal{B} = \operatorname{Ker} A^{*}|\mathcal{B}^{*}$. Последнее условие можно заменить условием $\dim \operatorname{Ker} A^{+}|\mathcal{B} = \dim \operatorname{Ker} A^{*}|\mathcal{B}^{*}$.

Отметим, что если оператор $A \in B(\mathcal{B}, \mathcal{Y})$ является классическим Φ-оператором, то оператор A^{+} может таковым не быть. Соответствующий пример будет приведен в § 6.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть оператор $T \in B(\mathcal{B}, \mathcal{Y})$ вместе с оператором T^{+} вполне непрерывен в пространстве $\mathcal{B}$. Тогда оператор $I-T$ является классическим Φ-оператором с нулевым индексом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, достаточно доказать, что оператор $A=I-T$ классически разрешим или что $\operatorname{Ker} A^{+}|\mathcal{B} = \operatorname{Ker} A^{*}|\mathcal{B}^{*}$. Согласно теореме 3.6 оператор T вполне непрерывен в пространстве $\mathcal{Y}$ и $\operatorname{Ker} A|\mathcal{B} = \operatorname{Ker} A|\mathcal{Y}$. Учитывая, что $\operatorname{Ind} A|\mathcal{Y} = \operatorname{Ind} A|\mathcal{B} = 0$, получим $\operatorname{Ker} A^{*}|\mathcal{B}^{*} = \operatorname{Ker} A^{*}|\mathcal{Y}$. В силу той же теоремы $\operatorname{Ker} A^{+}|\mathcal{B} = \operatorname{Ker} A^{*}|\mathcal{B}$ и, стало быть, $\operatorname{Ker} A^{+}|\mathcal{B} = \operatorname{Ker} A^{*}|\mathcal{B}^{*}$. Теорема доказана.

Будем говорить, что оператор $A \in B(\mathcal{B}, \mathcal{Y})$ допускает левую классическую регуляризацию, если существует такой оператор $M \in B(\mathcal{B}, \mathcal{Y})$, что операторы $MA-I$ и $(MA-I)^{+}$ вполне непрерывны в пространстве $\mathcal{B}$. Оператор M назовем левым классическим регуляризирующим оператором для A.

Аналогично определяется правая классическая регуляризация и правый классический регуляризирующий оператор для A.

Если оператор $M \in B(\mathcal{B}, \mathcal{Y})$ является одновременно левым и правым классическим регуляризирующим оператором для $A \in B(\mathcal{B}, \mathcal{Y})$, то будем говорить, что A допускает классическую регуляризацию и M является классическим регуляризирующим для A.

ТЕОРЕМА 5.2. Для любого оператора $A \in B(\mathscr{B}, \mathscr{Y})$ следующие утверждения эквивалентны.

а) Операторы A и A^+ являются классическими Φ-операторами.

б) Операторы A и A^+ являются Φ-операторами и $\operatorname{Ind} A = -\operatorname{Ind} A^+$.

в) Оператор $A(A^+)$ допускает левую и правую классическую регуляризации.

г) Оператор $A(A^+)$ допускает классическую регуляризацию.

д) Оператор A представим в виде $A = D + T$, где $T \in B(\mathscr{B}, \mathscr{Y})$ вместе с T^+ вполне непрерывный оператор, а D – односторонне обратимый Φ-оператор, имеющий соответствующий односторонне обратный D^{-1} из $B(\mathscr{B}, \mathscr{Y})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что из утверждения д) вытекает г). В самом деле, в качестве классического регуляризирующего оператора для A можно взять оператор D^{-1}. Очевидно, утверждение г) влечет за собой утверждение в). Покажем, что из утверждения в) вытекает б). Пусть M_1 и M_2 – левый и правый классические регуляризирующие операторы для A. Согласно теореме 7.I$'$, гл. IУ, A и A^+ являются Φ-операторами. В силу теоремы 5.I будем иметь

$$\ker M_2^* A^* | \mathscr{B}^* = \ker M_2^+ A^+ | \mathscr{B},$$

откуда следует, что

$$\ker A^* \mathscr{B}^* = \ker A^+ | \mathscr{B}.$$

Аналогично устанавливается, что

$$\ker (A^+)^* | \mathscr{B}^* = \ker A | \mathscr{B}.$$

Следовательно A и A^+ являются классическими Φ-операторами, в частности,

$$\operatorname{Ind} A = -\operatorname{Ind} A^+.$$

Из утверждения б) следует а). Действительно, в силу условия г)

$$\dim \operatorname{Ker} A|\mathcal{B} - \dim \operatorname{Ker}(A^+)^*|\mathcal{B}^* =$$

$$= \dim \operatorname{Ker} A^*|\mathcal{B}^* - \dim \operatorname{Ker} A^+|\mathcal{B}.$$

Отсюда в силу очевидных соотношений

$$\operatorname{Ker} A|\mathcal{B} \subset \operatorname{Ker}(A^+)^*|\mathcal{B}^*, \quad \operatorname{Ker} A^+|\mathcal{B} \subseteq \operatorname{Ker} A^*|\mathcal{B}^*$$

вытекают равенства

$$\operatorname{Ker} A|\mathcal{B} = \operatorname{Ker}(A^+)^*|\mathcal{B}^* \quad \text{и} \quad \operatorname{Ker} A^+|\mathcal{B} = \operatorname{Ker} A^*|\mathcal{B}^*.$$

Таким образом, операторы A и A^+ классически разрешимы.

Наконец, докажем, что из утверждения а) вытекает утверждение д). Рассмотрим сперва случай, когда $\operatorname{Ind} A \leq 0$. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – базис подпространства $\operatorname{Ker} A$, а $\psi_1, \dots, \psi_n$ – система линейно независимых векторов подпространства $\operatorname{Ker} A^+$. Образуем конечномерный оператор $K \in B(\mathcal{B}, \mathcal{H})$, определенный равенством

$$Kx = \sum_{j=1}^{n} (x, \varphi_j)\psi_j$$

и оператор $D = A - K$ $(\in B(\mathcal{B}, \mathcal{H}))$. Операторы D и D^+ являются Φ-операторами, причем $\dim \operatorname{Ker} D = 0$. Отсюда следует, что оператор $C = D^+ D$ $(\in B(\mathcal{B}, \mathcal{H}))$ обратим. Так как $C^+ = C$, то оператор $C^{-1} \in B(\mathcal{B}, \mathcal{H})$. Оператор $D^{-1} = C^{-1} D^+ \in B(\mathcal{B}, \mathcal{H})$ и является левым обратным к оператору D. Одновременно показано, что оператор A^+ представим в виде $A^+ = D^+ + K^+$. Отсюда следует, что утверждение доказано и в случае, когда $\operatorname{Ind} A|\mathcal{B} \geqslant 0$. Теорема доказана.

Обозначим через $\mathcal{J}(\mathcal{B}, \mathcal{H})$ множество всех операторов $T \in B(\mathcal{B}, \mathcal{H})$, которые являются вполне непрерывными вместе с T^+. Легко видеть, что $\mathcal{J}(\mathcal{B}, \mathcal{H})$ является замкнутым двусторонним идеалом алгебры $B(\mathcal{B}, \mathcal{H})$.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть $A \in B(\mathcal{B}, \mathcal{H})$. Для того чтобы операторы A и A^+ были классическими Φ-операторами, необходимо и достаточно, чтобы класс вычетов из фактор-алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{L},\mathcal{H})/\mathcal{F}(\mathcal{L},\mathcal{H})$, содержащий оператор A, был обратим.

Эта теорема непосредственно следует из предыдущей.

§ 6. Примеры

В настоящем параграфе будут приведены примеры, иллюстрирующие точность ряда утверждений из предыдущих параграфов.

Роль пространства $\mathcal{H}$ будет играть пространство $L_2(\Gamma_0)$, где Γ_0 – единичная окружность. Напомним, что пространство $L_2(\Gamma_0)$ состоит из измеримых на Γ_0 функций f, коэффициенты Фурье f_j $(j=0,\pm 1,\dots)$ которых удовлетворяют условию $\sum |f_j|^2 < \infty$, причем

$$\|f\|^2_{L_2}=\sum |f_j|^2.$$

Вместе с пространством $L_2(\Gamma_0)$ рассмотрим пространство $\widetilde{L}_2(\Gamma_0)$, состоящее из всех функций $f\in L_2(\Gamma_0)$, для которых выполняется условие

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{2|j|}|f_j|^2<\infty.$$

Норму в $\widetilde{L}_2(\Gamma_0)$ определим равенством

$$\|f\|_{\widetilde{L}_2}=\Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{2|j|}|f_j|^2\Big)^{1/2}.$$

Очевидно, $\widetilde{L}_2(\Gamma_0)$ является гильбертовым пространством. Это пространство будет играть роль пространства $\mathcal{L}$. Пространство $\widetilde{L}_2(\Gamma_0)$ плотно в $L_2(\Gamma_0)$ и

$$\|f\|_{L_2(\Gamma_0)}\le \|f\|_{\widetilde{L}_2(\Gamma_0)}.$$

Отметим еще, что пространства $\widetilde{L}_2(\Gamma_0)$ и $L_2(\Gamma_0)$ изометричны. Оператор J, устанавливающий изометрию $L_2(\Gamma_0)\to\widetilde{L}_2(\Gamma_0)$ определяется равенством

$$J\Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j t^j\Big)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{-|j|} f_j t^j.$$

Очевидно, операторы P_0 и Q_0 * являются линейными ограниченными операторами в пространстве $\tilde{L}_2(\Gamma_0)$. Более того, эти операторы и операторы умножения на полиномы от t и t^{-1} являются биограниченными операторами.

Рассмотрим в пространстве $\tilde{L}_2(\Gamma)$ оператор

$$Y_0=(a_{-1}t^{-1}+a_0+a_1t)P_0+Q_0.$$

Исследование его можно произвести переходом к изометрическому оператору $J^{-1}Y_0J$, действующему в $L_2(\Gamma_0)$. Очевидно,

$$J^{-1}P_0J=P_0 \quad \text{и} \quad J^{-1}Q_0J=Q_0.$$

Если функция $f\in L_2(\Gamma_0)$ имеет вид

$$f(t)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}f_j t^j,$$

то

$$(J^{-1}tJf)(t)=2t\sum_{j=0}^{\infty}t^j f_j+\frac{1}{2}t\sum_{j=-\infty}^{-1}t^j f_j.$$

Следовательно,

$$J^{-1}tJ=t(2P_0+\frac{1}{2}Q_0).$$

Аналогично устанавливается, что

$$J^{-1}t^{-1}J=t^{-1}(\frac{1}{2}P_0+2Q_0+Z_0),$$

где проектор Z_0 определен равенством

$$(Z_0f)(t)=f_0.$$

Таким образом, оператор $J^{-1}Y_0J$ имеет вид

$$J^{-1}Y_0J=(\frac{1}{2}a_{-1}t^{-1}+a_0+2a_1t)P_0+Q_0+\frac{3}{2}a_{-1}t^{-1}Z_0.$$

---

* Напомним, что $P_0=P_{\Gamma_0}$, $Q_0=Q_{\Gamma_0}$. Легко видеть, что

$$P_0(\sum_{-\infty}^{\infty}f_j t^j)=\sum_{j\geq 0}f_j t^j, \qquad Q_0(\sum_{-\infty}^{\infty}f_j t^j)=\sum_{j<0}f_j t^j.$$

Очевидно, этот оператор можно представить в виде

$$J^{-1}Y_0 J=\left[\left(\tfrac{1}{2}a_{-1}t^{-1}+a_0+2a_1t\right)P_0+Q_0\right]\left(I+\tfrac{3}{2}a_{-1}t^{-1}Z_0\right).$$

Оператор $I+\frac{3}{2}a_{-1}t^{-1}Z_0$ обратим, и обратный к нему дается формулой

$$\left(I+\tfrac{3}{2}a_{-1}t^{-1}Z_0\right)^{-1}=I-\tfrac{3}{2}a_{-1}t^{-1}Z_0.$$

Таким образом, исследование оператора $J^{-1}Y_0J$ сводится к исследованию оператора $\left(\frac{1}{2}a_{-1}t^{-1}+a_0+2a_1t\right)P_0+Q_0$ в пространстве $L_2(\Gamma_0)$. Учитывая теорему 7.3, гл. II, приходим к следующему предложению.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть Y_0 — оператор, определенный в пространстве $\widetilde{L}_2(\Gamma_0)$ равенством

$$Y_0=(a_{-1}t^{-1}+a_0+a_1t)P_0+Q_0,$$

где $a_{-1},a_0,a_1\in\mathbb{R}$.

Если $|a_{-1}|\neq 4|a_1|$, то спектр оператора Y_0 в $\widetilde{L}_2(\Gamma_0)$ состоит из части плоскости, ограниченной эллипсом

$$\frac{(a_0-\operatorname{Re}\lambda)^2}{\left(\frac{1}{2}a_{-1}+2a_1\right)^2}+\frac{(\operatorname{Im}\lambda)^2}{\left(\frac{1}{2}a_{-1}-2a_1\right)^2}=1, \tag{6.1}$$

и точки $\lambda=1$.

Во всех внутренних точках λ $(\lambda\neq 1)$ эллипса (6.1) при $|a_{-1}|>4|a_1|$ оператор $Y_0-\lambda I$ обратим справа и $\dim\operatorname{Ker}(Y_0-\lambda I)=1$, при $|a_{-1}|<4|a_1|$ оператор $Y_0-\lambda I$ обратим слева и $\dim\operatorname{Coker}(Y_0-\lambda I)=1$.

Если $a_{-1}=4a_1$, то спектр оператора Y_0 состоит из отрезка вещественной оси $[-2|a_1|+a_0,\ 2|a_1|+a_0]$ и точки $\lambda=1$.

Если $a_{-1}=-4a_1$, то спектр оператора Y_0 состоит из отрезка, соединяющего точки $a_0-4|a_1|i$ и $a_0+4|a_1|i$ и точки $\lambda=1$. В обоих последних случаях в точках λ $(\neq 1)$ спектра

$\dim\operatorname{Ker}(Y_0-\lambda I)=0$ и $\dim\operatorname{Coker}(Y_0-\lambda I)=0$.

Приводимые ниже утверждения а) – ж) вытекают из теорем 7.3, гл. II и 6.I.

Рассмотрим оператор

$$Y_1=(t^{-1}+2+t)P_0+Q_0 \tag{6.2}$$

в пространстве $\tilde{L}_2(\Gamma_0)$. Этот оператор биограничен, и его можно расширить на пространство $L_2(\Gamma_0)$, причем расширенный оператор будет задаваться той же формулой (6.2).

а) Спектр оператора Y_1 в пространстве $L_2(\Gamma_0)$ состоит из отрезка $0\leq\lambda\leq 4$, а спектр оператора Y_1 в $\tilde{L}_2(\Gamma_0)$ – из всех точек эллипса

$$\frac{4(\mathrm{Re}\lambda-2)^2}{25}+\frac{4(\mathrm{Im}\lambda)^2}{9}=1 \tag{6.3}$$

и его внутренних точек. Следующее предложение касается оператора

$$Z_1=P_0(t^{-1}+2+t)P_0+Q_0,$$

тоже биограниченного. Операторы Y_1 и Z_1 связаны равенством $Y_1-\lambda I=(Z_1-\lambda I)Z_2$, где $Z_2=I+(1-\lambda)^{-1}Q_0(t^{-1}+2-\lambda+t)P_0$. Оператор Z_2 обратим, причем

$$Z_2^{-1}=I-Q_0(t^{-1}+2-\lambda+t)P_0.$$

б) Оператор Z_1 обладает следующими свойствами в пространстве $L_2(\Gamma_0)$: он неотрицателен, $\dim\mathrm{Ker}\,Z_1=0$, $\mathrm{Im}\,Z_1\neq L_2(\Gamma_0)$ и $\overline{\mathrm{Im}\,Z_1}=L_2(\Gamma_0)$. В то же время оператор Z_1 обратим слева в пространстве $\tilde{L}_2(\Gamma_0)$ и $\dim\mathrm{Coker}\,Z_1|\tilde{L}_2(\Gamma_0)=1$.

Неотрицательность оператора Z_1 проверяется непосредственно. Остальные свойства оператора Z_1 вытекают из теорем 6.I и 7.3, гл. II, и указанной связи между операторами Z_1 и Y_1.

в) Оператор $Z_3=Z_1+\frac{1}{3}I$ является обратимым положительно определенным оператором в $L_2(\Gamma_0)$, и он же является обратимым слева в $\tilde{L}_2(\Gamma_0)$, причем $\dim\mathrm{Coker}\,Z_3=1$.

Это предложение устанавливается также, как предложение б).

г) Оператор $Z_4=Z_1+\frac{1}{2}I$ является обратимым положительно определенным оператором в пространстве $L_2(\Gamma_0)$, а в пространстве $\tilde{L}_2(\Gamma_0)$ он не является нормально разрешимым.

Последнее утверждение вытекает из теоремы 6.I.

д) Оператор

$$Z_5 = P_0(t^{-1}+1)P_0 + Q_0$$

является обратимым оператором в пространстве $\widetilde{L}_2(\Gamma_0)$. Оператор Z_5^+ имеет вид

$$Z_5^+ = P_0(t+1)P_0 + Q_0$$

и является обратимым слева оператором, причем $\dim \operatorname{Coker} Z_5^+ = 1$. В пространстве $L_2(\Gamma_0)$ оператор Z_5^+ не является обратимым, причем

$$\dim \operatorname{Ker} Z_5^+ = \dim \operatorname{Coker} Z_5^+ = 0.$$

Оператор Z_5 классически разрешим, а оператор Z_5^+ является нормально разрешимым, но не классически разрешимым:

$$\dim \operatorname{Ker} Z_5 = 0, \quad \dim \operatorname{Coker} Z_5^+ = 1.$$

Наконец, приведем еще один пример.

ж) Оператор $Z_6 = P_0(1+2t)P_0 + Q_0$ обратим слева в пространстве $L_2(\Gamma_0)$, в то время как в пространстве $\widetilde{L}_2(\Gamma_0)$ оператор $Z_6^+ = P_0(1+2t^{-1})P_0 + Q_0$ не является нормально разрешимым (он отображает $\widetilde{L}_2(\Gamma_0)$ однозначно на свою плотную часть).

§ 7. Сингулярные интегральные операторы с гельдеровыми коэффициентами в пространствах гельдеровых функций

В этом параграфе Γ обозначает замкнутый контур. Напомним, что через $H_\alpha(\Gamma)$ обозначается пространство всех функций, определенных на Γ и удовлетворяющих условию Гельдера с показателем α $(0 < \alpha < 1)$. Норма в $H_\alpha(\Gamma)$ определяется равенством

$$\|\varphi\|_{H_\alpha} = \max_{t\in\Gamma} |\varphi(t)| + \sup_{t_1, t_2 \in \Gamma;\, t_1 \neq t_2} \frac{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha}.$$

Пространство $H_\alpha(\Gamma)$ будет в этом параграфе играть роль пространства $\mathcal{L}$, а роль пространства $\mathcal{Y}$ будет играть пространство $L_2(\Gamma)$. Таким образом, $H_\alpha(\Gamma)$ является пространством с двумя нормами.

В пространстве $H_{\mu}(\Gamma)$ рассмотрим оператор $A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma$, где a и b – функции, удовлетворяющие на Γ условию Гельдера с показателем μ.

Оператор A является линейным ограниченным оператором в $H_\mu(\Gamma)$ и $L_2(\Gamma)$. Так как $A^*=h_\Gamma(P_\Gamma \bar{b}I+Q_\Gamma \bar{a}I)h_\Gamma$, где $(h_\Gamma\varphi)(t)=h_\Gamma(t)\varphi(t)$, и функция $h_\Gamma(t)\in H_\mu(\Gamma)$ (см. § 1, гл. 1), то оператор A^* отображает пространство $H_\mu(\Gamma)$ в себя. Таким образом, оператор A является биограниченным.

ЛЕММА 7.1. Для каждой функции $a\in H_\mu(\Gamma)$ оператор $T=S_\Gamma aI-aS_\Gamma$ вполне непрерывен в пространстве $H_\mu(\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H – некоторое ограниченное множество в $H_\mu(\Gamma)$. В силу критерия Арцела множество H компактно в пространстве $C(\Gamma)$. Выделим из H последовательность $\{\varphi_n\}_1^\infty$, сходящуюся к функции φ по норме $C(\Gamma)$. Без труда проверяется, что $\varphi\in H_\mu(\Gamma)$. Положим $\psi_n=\varphi-\varphi_n$ и покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\|T\psi_n\|_{H_\mu(\Gamma)}=0$. Из соотношения

$$|T\psi_n|\leq\frac{1}{\pi}\max_{t\in\Gamma}|\psi_n(t)|\int_\Gamma\left|\frac{a(t)-a(\tau)}{\tau-t}\right||d\tau|$$

вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty}\max_{t\in\Gamma}|(T\psi_n)(t)|=0. \tag{7.1}$$

Разность $(T\psi_n)(t_2)-(T\psi_n)(t_1)$ представим в виде $\sum\limits_{k=1}^{5}J_k$, где

$$J_k=\frac{1}{\pi i}\int_\gamma\frac{a(\tau)-a(t_k)}{\tau-t_k}\psi_n(\tau)d\tau\ (k=1,2),\quad J_3=\frac{\psi_n(t_1)}{\pi i}\int_{\Gamma\setminus\gamma}\frac{a(t_1)-a(t_2)}{\tau-t_1}d\tau,$$

$$J_4=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma\setminus\gamma}\frac{(a(\tau)-a(t_2))(t_2-t_1)}{(\tau-t_1)(\tau-t_2)}\psi_n(\tau)d\tau,\quad J_5=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma\setminus\gamma}\frac{(a(t_1)-a(t_2))(\psi_n(\tau)-\psi_n(t_1))}{\tau-t_1}d\tau,$$

а γ – некоторая дуга контура Γ, содержащая точки t_1 и t_2.

Так же, как в доказательстве теоремы И.И.Привалова (см., например, Ф.Д.Гахов [I], стр. 56 – 58), устанавливается, что

$$|J_k| \leq c \max_{t\in\Gamma} |\varphi_n(t)| |t_1 - t_2|^{\mu} \quad (k=1,2,3,4), \tag{7.2}$$

где константа c не зависит от t_1 и t_2. Легко видеть, что

$$|J_5| \leq c_1 |t_1 - t_2|^{\mu} \|\varphi_n\|_{H_\lambda(\Gamma)} \int_\Gamma \frac{|d\tau|}{|\tau - t_1|^{1-\lambda}}, \tag{7.3}$$

где λ – некоторое число из интервала $(0, \mu)$.

Так как последовательность $\{\varphi_n\}$ ограничена в $H_\mu(\Gamma)$ и стремится к нулю в $C(\Gamma)$, то, как нетрудно проверить $\lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi_n\|_{H_\lambda(\Gamma)} = 0 \ (0<\lambda<\mu)$. Из оценок (7.2) и (7.3) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t_1, t_2 \in \Gamma} \frac{|(T\varphi_n)(t_2) - T\varphi_n(t_1)|}{|t_2 - t_1|^{\mu}} = 0.$$

Учитывая еще (7.I), получаем равенство

$$\lim_{n\to\infty} \|T\varphi_n\|_{H_\mu(\Gamma)} = 0.$$

Лемма доказана.

Простой проверкой с помощью доказанной леммы убеждаемся в том, что оператор $M = a^{-1} P_\Gamma + b^{-1} Q_\Gamma$ является классическим регуляризирующим оператором для оператора $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$, где $a, b \in H_\mu(\Gamma)$ и

$$a(t) \neq 0 \ (t\in\Gamma), \qquad b(t) \neq 0 \ (t\in\Gamma). \tag{7.4}$$

Из общей теоремы 5.2 вытекает, что операторы A и A^* при условии (7.4) являются классическими Φ-операторами.

Обозначим через A' оператор $P_\Gamma bI + Q_\Gamma aI$ (союзный по терминологии Н.И.Мусхелишвили [I] с оператором A), тогда $A^+ = H_\Gamma A' H_\Gamma$. Так как, кроме того,

$$(\varphi, H_\Gamma f) = \int_\Gamma \varphi(t) h_\Gamma(t) f(t) |dt| = \int_\Gamma \varphi(t) f(t) dt,$$

то классическая разрешимость оператора A означает, что уравнение $A\varphi = \psi$ разрешимо в том и только том случае, когда

$$\int_\Gamma \psi(t) f(t) dt = 0$$

для всех $f \in \operatorname{Ker} A'$.

Таким образом, при выполнении условия (7.4) имеют место теоремы Нетера в их классической формулировке (см. Н.И.Мусхелишвили [1], стр. 203-204).Покажем, что условие (7.4) является необходимым условием, для того, чтобы оператор A был Φ-оператором в пространстве $H_\alpha(\Gamma)$.

Для доказательства понадобится следующее вспомогательное предложение.

ЛЕММА 7.2. Пусть $\mathfrak{A}$ - банахова алгебра и a, b - элементы из $\mathfrak{A}$, имеющие вещественный спектр и коммутирующие между собой. Если элемент $a+bi$ обратим, то обратим и элемент $a-bi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{A}_0$ - наименьшая банахова подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, содержащая элементы $a, b, (a+bi)^{-1}$. Легко проверить, что $\mathfrak{A}_0$ - коммутативная алгебра. Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех максимальных идеалов алгебры $\mathfrak{A}_0$. Элемент $a+bi$ обратим в $\mathfrak{A}_0$, стало быть, его преобразование Гельфанда $a(M)+ib(M)\neq 0$ $(M\in\mathfrak{M})$. Так как элементы a и b имеют вещественный спектр в алгебре $\mathfrak{A}$, то при переходе к подалгебре $\mathfrak{A}_0$ их спектр не изменяется (см. § 9, гл. II). Отсюда следует, что $a(M)$ и $b(M)$ - вещественные функции. Таким образом, преобразование Гельфанда $a(M)-ib(M)\neq 0$, стало быть, элемент $a-bi$ обратим в $\mathfrak{A}_0\subseteq\mathfrak{A}$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 7.I. Если оператор $A=cI+dS$ $(c,d\in H_\alpha(\Gamma))$ является Φ-оператором в пространстве $H_\alpha(\Gamma)$, то выполняются условия

$$c(t)+d(t)\neq 0 \ (t\in\Gamma) \text{ и } c(t)-d(t)\neq 0 \ (t\in\Gamma). \tag{7.5}$$

При этих условиях

$$\operatorname{Ind} A=\operatorname{ind}\frac{c(t)-d(t)}{c(t)+d(t)}. \tag{7.6}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим операторы X и Y, определенные равенствами $X=(\operatorname{Re}c)I+(\operatorname{Re}d)S_\Gamma$ и $Y=(\operatorname{Im}c)I+(\operatorname{Im}d)S_\Gamma$. Рассмотрим алгебру $\hat{\mathfrak{L}}=\mathfrak{L}(H_\alpha(\Gamma))/\mathfrak{T}(H_\alpha(\Gamma))$. Из леммы 7.I вытекает, что элементы $\hat{X}$ и $\hat{Y}$ коммутируют между собой. В силу доказанного выше спектры их в $\hat{\mathfrak{L}}$ являются вещественными. Следовательно, в силу леммы 7.2 вместе с элементом $\hat{A}=\hat{X}+i\hat{Y}$ обратим и элемент $\hat{X}-i\hat{Y}$. Легко видеть, что $\hat{X}-i\hat{Y}=\hat{B}$, где $B=H_\Gamma A^+H_\Gamma$.

Таким образом, оператор A^+ является Φ-оператором в пространстве $H_{\alpha}(\Gamma)$.

Очевидно, оператор $A^+A+\lambda I$ имеет вид $A^+A+\lambda I=gI+hS+T_1$, где T_1 – вполне непрерывный оператор в $H_{\alpha}(\Gamma)$, $g=|a|^2+|b|^2+\lambda$, $h=\bar{a}b+a\bar{b}$. Так как при $\lambda>0$

$$g+h=|a+b|^2+\lambda>0$$

и

$$g-h=|a-b|^2+\lambda>0,$$

то оператор $A^+A+\lambda I$ является Φ-оператором в $\mathcal{L}$. При достаточно больших числах λ имеет место равенство $\operatorname{Ind}(A^+A+\lambda I)=0$, стало быть, и $\operatorname{Ind}A^+A=0$. Отсюда вытекает, что $\operatorname{Ind}A^+=-\operatorname{Ind}A$. В силу теоремы 4.I отсюда следует, что оператор A является Φ-оператором в $L_2(\Gamma)$ и $\operatorname{Ind}A|H_{\alpha}(\Gamma)=\operatorname{Ind}A|L_2(\Gamma)$. Последнее согласно теореме 7.I, гл. III, влечет за собой условие (7.5) и формулу (7.6). Теорема доказана.

НОРМАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В этой главе рассматриваются сингулярные интегральные операторы вида $aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ с непрерывными коэффициентами $a, b \in C(\Gamma)$ на замкнутом контуре Γ.

В предыдущих главах было показано, что такой оператор является односторонне обратимым Φ-оператором в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$ в том и только в том случае, когда выполняется условие

$$a(t) \neq 0 \ (t \in \Gamma), \quad b(t) \neq 0 \ (t \in \Gamma). \qquad (0.1)$$

Если это условие не выполняется, то оператор $aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ не является ни Φ_+-, ни Φ_--оператором.

В этой главе всюду, где оговорено противное, будет предполагаться, что Γ – граница области F_Γ^+, состоящая из конечного числа простых замкнутых контуров Γ_j. Пусть F_Γ^- – дополнение к связному множеству $F_\Gamma^+ \cup \Gamma$ до расширенной плоскости. Через F_j^- будем обозначать связную компоненту множества F_Γ^- с границей Γ_j. Наконец, через F_j^+ обозначим множество $\bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{F}_j^-$. Напомним, что контур Γ ориентирован так, что при его обходе множество F^+ остается слева. Как обычно, весовая функция

$$\rho(t) = \prod_{k=1}^{n} |t - t_k|^{\beta_k} \quad (t_1, \ldots, t_n \in \Gamma)$$

удовлетворяет условиям $-1 < \beta_k < p-1$, $1 < p < \infty$. Оказывается, что если контур Γ простой, то при нарушении условия (0.1) оператор $aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ не является даже нормально разрешимым оператором в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$. Если же контур является составным, то оператор $aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ может быть нормально разрешимым и в том случае, когда условие (0.1) не выполняется. В этой главе устанавливается критерий нормальной разрешимости сингулярных интегральных операторов в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$.

§ I. Вспомогательные предложения

ЛЕММА I.I. Пусть Γ_j - один из простых замкнутых контуров, составляющих контур Γ. Для любой функции $f\in C(\Gamma)$ и любого $\varepsilon>0$ существуют функции $\varphi, \psi \in C^{+}(\Gamma)$ *, такие, что выполняются соотношения

$$\max_{t\in\Gamma}|\varphi(t)|=1, \ |\varphi(t)|=1 \ (t\in\Gamma_j)$$

и

$$\max_{t\in\Gamma}|f(t)\varphi(t)-\psi(t)|<\varepsilon. \tag{I.I}$$

Лемма сохраняет силу, если в ее формулировке $C^{+}(\Gamma)$ заменить на $C^{-}(\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть r - рациональная функция из $R(\Gamma)$, такая, что

$$|f(t)-r(t)|<\varepsilon \quad (t\in\Gamma). \tag{I.2}$$

Определим функцию $\varphi: F_{\Gamma}^{+}\to\mathbb{C}$ следующим образом. Если F_{Γ}^{+} не содержит полюсов функции r, положим $\varphi(t)=1$ при $t\in F_{\Gamma}^{+}$; если же в F_{Γ}^{+} содержатся полюсы $\tau_1,\dots,\tau_k$ функции r и $n_1,\dots,n_k$ - их порядки, то положим

$$\varphi(t)=\Phi_1^{n_1}(t)\,\Phi_2^{n_2}(t)\dots\Phi_k^{n_k}(t),$$

где Φ_m $(m=1,\dots,k)$ - функция со следующими свойствами: она конформно отображает на единичный круг односвязную область F_j^{+} и $\Phi_m(\tau_m)=0\,(m=1,\dots,k)$. Очевидно, $\varphi\in C^{+}(\Gamma)$ и выполняются соотношения

$$|\varphi(t)|=1 \ (t\in\Gamma_j), \ |\varphi(t)|<1 \quad (t\in\Gamma\setminus\Gamma_j). \tag{I.3}$$

Так как функция $\psi=r\varphi$ также принадлежит $C^{+}(\Gamma)$, то соотношение (I.I) вытекает из (I.2) и (I.3). Лемма доказана.

---

* Напомним, через $C^{\pm}(\Gamma)$ обозначается множество функций, голоморфных в $F_{\Gamma}^{\pm}$ и непрерывных в $\bar{F}_{\Gamma}^{\pm}$.

ЛЕММА 1.2. Пусть Γ_j один из простых контуров, составляющих контур Γ. Для любой пары функций f_1 и $f_2 \in C(\Gamma)$ и произвольного положительного числа ε найдется функция $\varphi \in C^+(\Gamma)$, такая, что

$$\max_{t\in\Gamma} |\varphi(t)| = 1, \quad |\varphi(t)| = 1 \quad (t \in \Gamma_j) \tag{1.4}$$

и

$$\| Q_\Gamma \varphi f_k \| < \varepsilon \quad (k = 1,2). \tag{1.5}$$

Эта лемма сохраняет силу, если в ее формулировке заменить $C^+(\Gamma)$ на $C^-(\Gamma)$ и проектор Q_Γ на P_Γ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1.1 существуют функции $\varphi_k, \psi_k \in C^+(\Gamma)(k=1,2)$, такие, что

$$\max_{t\in\Gamma} |\varphi_k(t)| = 1, \quad |\varphi_k(t)| = 1 \quad (t \in \Gamma_j)$$

и

$$|f_k(t)\varphi_k(t) - \psi_k(t)| < \varepsilon / \| Q_\Gamma \| \quad (k=1,2;\ t \in \Gamma). \tag{1.6}$$

Введем новую функцию $\varphi = \varphi_1 \varphi_2 \in C^+(\Gamma)$, для нее выполняются соотношения (1.4). Из (1.6) вытекает, что

$$\| \varphi f_1 - \psi_1 \varphi_2 \| < \varepsilon / \| Q_\Gamma \| \qquad \text{и} \qquad \| \varphi f_2 - \psi_2 \varphi_1 \| < \varepsilon / \| Q_\Gamma \|.$$

Поэтому

$$\| Q_\Gamma(\varphi f_1) \| = \| Q_\Gamma(\varphi f_1 - \psi_1 \varphi_2) \| \le \| Q_\Gamma \| \, \| \varphi f_1 - \psi_1 \varphi_2 \| < \varepsilon.$$

Аналогично, выводим, что

$$\| Q_\Gamma(\varphi f_2) \| < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

§ 2. Критерий нормальной разрешимости

Этот критерий формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть a и $b\in C(\Gamma)$. Для того чтобы оператор $A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ был нормально разрешимым в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы

I) На всяком простом контуре $\Gamma_j\ (j=1,2,\dots,m)$, входящем в состав Γ, каждая из функций a и b либо тождественно равнялась нулю либо нигде в нуль не обращалась;

а также выполнялось хотя бы одно из следующих условий:

а) $a(t)\neq 0$ для всех $t\in\Gamma$;

б) $b(t)\neq 0$ для всех $t\in\Gamma$;

в) на всех простых контурах Γ_j $(j=1,\dots,m)$, на которых функция b равна тождественно нулю, функция a также равна тождественно нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕОБХОДИМОСТИ УСЛОВИЯ I)*. Допустим, что хотя бы для одной функции a, b утверждение теоремы не имеет места. Для определенности будем считать, что на некотором простом контуре $\Gamma_j\subset\Gamma$ (на котором функция $a(t)$ не равна тождественно нулю) имеется точка t_0, такая, что $a(t_0)=0$. Покажем, что тогда оператор A не является нормально разрешимым. В силу теоремы 1.3. гл. IУ, достаточно найти последовательность $\varphi_n\in L_p(\Gamma,\rho)\ (n=1,2,\dots)$ со следующими свойствами:

$$\lim_{n\to\infty}\|A\varphi_n\|=0,\quad \inf_{n=1,2,\dots}\ \inf_{A\varphi=A\varphi_n}\|\varphi\|>0. \tag{2.1}$$

Из допущения вытекает, что на контуре Γ_j можно выбрать дугу Δ_n, такую, что при достаточно больших n выполняется соотношение

$$\frac{1}{2n}\leq|a(t)|\leq\frac{1}{n}\quad (t\in\Delta_n,\ n>n_0). \tag{2.2}$$

Пусть Δ_n' – дуга, лежащая внутри Δ_n, причем длина Δ_n' вдвое меньше длины Δ_n. Через ω_n обозначим некоторую функцию из $C(\Gamma)$, равную нулю на $\Gamma\setminus\Delta_n$ и равную единице на Δ_n'. Положим $c_n=\|\omega_n\|^{-1}$.

---

* Остальные утверждения теоремы будут доказаны в следующем параграфе.

В силу леммы I.I. найдутся функции g_n и $\varphi_n \in C(\Gamma)$, такие, что

$$\max_{t\in\Gamma} |g_n(t)| = 1, \quad |g_n(t)| = 1 \quad (t \in \Gamma_j)$$

и

$$\max_{t\in\Gamma} |\omega_n b g_n - \varphi_n| \leq \frac{1}{n^2}. \tag{2.3}$$

Применив лемму I.2 к функциям $c_n \omega_n$ и $a c_n \omega_n^2 g_n$, найдем функцию $h_n \in C^+(\Gamma)$, для которой

$$\max_{t\in\Gamma} |h_n(t)| = 1, \quad |h_n(t)| = 1 \quad (t \in \Gamma_j)$$

и

$$\| Q_\Gamma (c_n \omega_n h_n) \| \leq 1/n^2, \tag{2.4}$$

$$\| Q_\Gamma (a c_n \omega_n^2 g_n h_n) \| \leq 1/n^2. \tag{2.5}$$

Положим $\varphi_n = c_n \omega_n h_n$. Тогда

$$\| A\varphi_n \| \leq \| a P_\Gamma \varphi_n \| + \| b Q_\Gamma \varphi_n \| \leq$$

$$\leq \| a\varphi_n \| + \| a Q_\Gamma \varphi_n \| + \| b Q_\Gamma \varphi_n \|.$$

Стало быть,

$$\| A\varphi_n \| \leq \sup_{t\in\Delta_n} |a(t)| \, \| \varphi_n \| + (\max_{t\in\Gamma} |a(t)| + \max_{t\in\Gamma} |b(t)|) \, \| Q_\Gamma \varphi_n \|.$$

В силу соотношений (2.2) и (2.4) отсюда следует, что $\lim \| A\varphi_n \| = 0$.

Докажем теперь второе соотношение из (2.I). Если $A\varphi = A\varphi_n$, то

$$a P_\Gamma \varphi = b Q_\Gamma \varphi_n - a Q_\Gamma \varphi_n - b Q_\Gamma \varphi + a\varphi_n. \tag{2.6}$$

Если $\| Q_\Gamma \varphi \| > 1$, то

$$\| \varphi \| \geq \frac{1}{\| Q_\Gamma \|} \| Q_\Gamma \varphi \| > \frac{1}{\| Q_\Gamma \|}.$$

Следовательно, без ограничения общности можно предполагать, что

$$\| Q_r \varphi \| \leq 1. \tag{2.7}$$

Обозначим через χ_{Δ_n} характеристическую функцию дуги Δ_n и условимся о следующем обозначении:

$$\| \varphi \|_n = \| \chi_{\Delta_n} \varphi \|.$$

В силу соотношения (2.2) будем иметь

$$\| \varphi \| \geqslant \frac{1}{\| P_r \|} \| P_r \varphi \| \geqslant \frac{n}{\| P_r \|} \| a P_r \varphi \|_n .$$

Учитывая (2.6), получим

$$\| \varphi \| \geqslant \frac{n}{\| P_r \|} \| a \varphi_n - b Q_r \varphi + b Q_r \varphi_n - a Q_r \varphi_n \| \geqslant \tag{2.8}$$

$$\geqslant \frac{n}{\| P_r \|} \| a \varphi_n - b Q_r \varphi_n \|_n - \frac{n}{\| P_r \|} (\| b Q_r \varphi_n \| + \| a Q_r \varphi_n \|).$$

Так как

$$\| P_r (g_n \omega_n a \varphi_n - g_n \omega_n b Q_r \varphi) \| \leqslant \| P_r \| \| a \varphi_n - b Q_r \varphi \|_n ,$$

то

$$\| a \varphi_n - b Q_r \varphi \|_n \geqslant \frac{1}{\| P_r \|} (\| g_n \omega_n a \varphi_n \| - \| Q_r (g_n \omega_n a \varphi_n) \| -$$

$$- \| P_r (g_n \omega_n b Q_r \varphi) \| . \tag{2.9}$$

Кроме того, в силу (2.2)

$$\| \omega_n g_n a \varphi_n \| = \| \omega_n a \varphi_n \|_n \geqslant \frac{1}{2n} \| \omega_n \varphi_n \|_n .$$

Принимая во внимание соотношения

$$\| \omega_n \varphi_n \|_n = \frac{\| \omega_n^2 \|}{\| \omega_n \|} \geqslant \frac{\| \chi_{\Delta'_n} \|}{\| \chi_{\Delta_n} \|} \geqslant \frac{1}{2} ,$$

будем иметь

$$\| \omega_n g_n a \varphi_n \| \geqslant 1/4n . \tag{2.10}$$

Учитывая (2.3 и (2.7), получим

$$\|P_\Gamma(g_n\omega_n b\,Q_\Gamma\varphi\| = \|P_\Gamma(g_n\omega_n b-\varphi_n)Q_\Gamma\varphi\| \le$$

$$\le \max_{t\in\Gamma}|g_n\omega_n b-\varphi_n|\,\|P_\Gamma\|\,\|Q_\Gamma\varphi\| \le \frac{\|P_\Gamma\|}{n^2}. \qquad (2.11)$$

Из неравенств (2.4), (2.5) и (2.8)-(2.11) следует, что

$$\|\varphi\| \ge \frac{n}{\|P_\Gamma\|^2}\left(\frac{1}{4n}-\frac{1}{n^2}-\frac{\|P_\Gamma\|}{n^2}\right)-$$

$$-\frac{n}{\|P_\Gamma\|}\left(\max_{t\in\Gamma}|a(t)|+\max_{t\in\Gamma}|b(t)|\right)\frac{1}{n^2}$$

Если n достаточно велико, то

$$\|\varphi\| \ge \left(8\|P_\Gamma\|^2\right)^{-1}.$$

Таким образом, последовательность $\varphi_1,\varphi_2,\dots$ удовлетворяет условиям (2.1). Утверждение доказано.

Из доказанного утверждения непосредственно вытекает

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть Γ - простой замкнутый контур и $a,b\in C(\Gamma)$. Для того чтобы оператор $A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ был нормально разрешим, необходимо и достаточно, чтобы каждая из функций a,b либо тождественно равнялась нулю, либо нигде не обращалась в нуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условий этой теоремы вытекает из доказанной части теоремы 2.1. Если обе функции a и b не обращаются в нуль на Γ, то оператор A является Φ-оператором (см. теорему 7.1, гл. III). Если же одна из функций a, b тождественно равна нулю, а вторая нигде не обращается в нуль, то, очевидно, оператор A нормально разрешим. Теорема доказана.

Отметим, что необходимость условия 1) теоремы 2.1 сохраняет силу для любого составного контура. Это можно легко вывести из теоремы 2.1 с помощью следствия 1.1, гл. VII.

Отметим еще, что теорема 2.2 теряет силу для простого разомкнутого контура Γ. В § 5, гл. IX, будет показано, например, что оператор $S_{[0,1]}$ не является нормально разрешимым в пространстве $L_2(0,1)$.

§ 3. Продолжение доказательства теоремы 2.I

В настоящем параграфе доказываются остальные утверждения теоремы 2.I.

Обозначим через R_j проектор в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$, определенный равенством

$$(R_j\varphi)(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{при } t\in\Gamma_j, \\ 0 & \text{при } t\in\Gamma\setminus\Gamma_j. \end{cases}$$

Условимся функцию $R_j\varphi$ обозначать через φ_j $(j=1,2,\dots,m)$. Докажем сперва достаточность условий теоремы 2.I. Оператор A, очевидно, можно представить в виде $A=A_0+T$, где

$$A_0=\sum_{j=1}^{m} R_j A R_j \qquad \text{и} \qquad T=\sum_{j\neq k} R_j A R_k .$$

Легко видеть, что операторы $R_j S_\Gamma R_j | L_p(\Gamma_j,\rho)$ можно отождествить с оператором S_{Γ_j}, а операторы $R_j^+=R_j P_\Gamma R_j$ и $R_j^-=R_j Q_\Gamma R_j$ – с операторами P_{Γ_j} и Q_{Γ_j} соответственно. Так как имеет место равенство

$$R_j A R_j = a_j R_j^+ + b_j R_j^-, \tag{3.I}$$

то из условия I) теоремы вытекает, что все операторы $R_j A R_j$ $(j=1,\dots,m)$ нормально разрешимы. Следовательно, оператор A_0 нормально разрешим.

Без труда проверяется, что имеет место равенство

$$R_j A R_k=(a-b)Z_{jk} \quad (j,k=1,\dots,m;\ j\neq k), \tag{3.2}$$

где

$$Z_{j,k}=\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_k}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau & \text{при } t\in\Gamma_j, \\ 0 & \text{при } t\in\Gamma\setminus\Gamma_j. \end{cases} \quad (j\neq k) \tag{3.3}$$

Операторы Z_{jk} $(j\neq k)$, очевидно, являются все вполне непрерывными. Следовательно, вполне непрерывным будет и оператор T. Согласно теореме 3.2, гл. IУ, оператор $A=A_0+T$ будет нормально разрешим, коль скоро будет выполняться хотя бы одно из условий

$$\dim \overline{\mathfrak{Im}\, T}/(\overline{\mathfrak{Im}\, T}\cap \mathfrak{Im}\, A_0)<\infty \qquad (3.4)$$

или

$$\dim \operatorname{Ker} A_0/(\operatorname{Ker} A_0\cap \operatorname{Ker} T)<\infty . \qquad (3.5)$$

Предположим теперь, что выполняются условия I) и а). Тогда без ограничения общности можно считать, что $a(t)\equiv 1$ $(t\in\Gamma)$. Введем подпространства $\mathfrak{N}_j$ и $\mathfrak{M}_j$ $(j=1,2,\dots,m)$, полагая

$$\mathfrak{N}_j=\begin{cases}\mathfrak{Im}\, R_j^+ & \text{при } b_j=0,\\ \mathfrak{Im}\, R_j & \text{при } b_j\neq 0,\end{cases} \quad \text{и} \quad \mathfrak{M}_j=\begin{cases}\mathfrak{Im}\, R_j^- & \text{при } b_j=0,\\ 0 & \text{при } b_j\neq 0.\end{cases}$$

Из (3.I) следует, что при $b_j=0$ выполняется соотношение $R_jAR_j=R_j^+$, а при $b_j\neq 0$ – соотношение $R_jAR_j\in\Phi(\mathfrak{Im}\, R_j)$. Отсюда вытекает, что

$$\mathfrak{M}_j\subseteq \operatorname{Ker} R_jAR_j \quad \text{и} \quad \dim(\mathfrak{N}_j\cap \operatorname{Ker} R_jAR_j)<\infty .$$

Стало быть,

$$\mathfrak{M}_1\dotplus\mathfrak{M}_2\dotplus\dots\dotplus\mathfrak{M}_m\subseteq \operatorname{Ker} A_0 \quad \text{и}$$

$$\dim((\mathfrak{N}_1\dotplus\dots\dotplus\mathfrak{N}_m)\cap \operatorname{Ker} A_0)<\infty . \qquad (3.6)$$

Учитывая равенство (3.2) и равенство*

$$\operatorname{Ker} Z_{jk}=\operatorname{Ker} R_k^+ \quad (j\neq k), \qquad (3.7)$$

получаем, что и при $j\neq k$

$$\mathfrak{M}_j\subseteq \operatorname{Ker} R_kAR_j .$$

* При проверке равенства (3.7) используется связность множества F_Γ^+.

Стало быть,

$$\mathfrak{M}_1 \dotplus \mathfrak{M}_2 \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{M}_m \subseteq \operatorname{Ker} T.$$

Положим

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \dotplus \mathfrak{N}_2 \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{N}_m \quad \text{и} \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \dotplus \mathfrak{M}_2 \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{M}_m.$$

Очевидно, $\mathfrak{N}_j \dotplus \mathfrak{M}_j = \operatorname{Im} R_j$. Стало быть, $\mathfrak{N} \dotplus \mathfrak{M} = L_p(\Gamma, \rho)$. Так как

$$\dim(\operatorname{Ker} A_0 / (\operatorname{Ker} A_0 \cap \operatorname{Ker} T)) \leq \dim(\operatorname{Ker} A_0 / \mathfrak{M})$$

и

$$\dim(\operatorname{Ker} A_0 / \mathfrak{M}) = \dim(\operatorname{Ker} A_0 \cap \mathfrak{N} / \mathfrak{M}) < \infty,$$

то выполняется условие (3.5).

Предположим теперь, что выполняются условия I) и б). Без ограничения общности можно считать, что $b(t) \equiv 1 \;(t \in \Gamma)$. Введем подпространства

$$\mathfrak{K}_j = \begin{cases} \operatorname{Im} R_j^- & \text{при } a_j = 0, \\ \operatorname{Im} R_j & \text{при } a_j \neq 0. \end{cases}$$

Из равенства (3.I) следует, что имеет место равенство $R_j A R_j = R_j^-$ при $a_j = 0$ и соотношение $R_j A R_j | \operatorname{Im} R_j \in \Phi(\operatorname{Im} R_j)$ при $a_j \neq 0$. Отсюда вытекает, что

$$\operatorname{Im} A_0 \subset \mathfrak{K} \quad \text{и} \quad \dim(\mathfrak{K} / \operatorname{Im} A_0) < \infty, \tag{3.8}$$

где $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 \dotplus \mathfrak{K}_2 \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{K}_m$.

Из равенства (3.I) и соотношения

$$\operatorname{Im} Z_{jk} \subset \operatorname{Im} R_j^- \quad (j \neq k) \tag{3.9}$$

выводится, что при $a_j = 0$

$$\operatorname{Im} R_j A R_k = \operatorname{Im}(a - b) Z_{jk} = \operatorname{Im}(-Z_{jk}) \subset \operatorname{Im} R_j^-.$$

Следовательно, будем иметь

$$\operatorname{Im} R_j A R_k \subseteq \mathfrak{K}_j \quad (j \neq k),$$

и поэтому $\operatorname{Im} T \subseteq \mathfrak{K}$. Из последнего соотношения (3.8) вытекает (3.4).

Рассмотрим последний случай в доказательстве достаточности условий теоремы 3.I. Предположим, что выполняются условия I) и в) . Без ограничения общности можно считать, что $a(t)\equiv b(t)\equiv 0$ $(t\in \Gamma_j;\quad j=1,2,\dots,k;\ 0<k<m)$ и $b(t)=1$ $(t\in\Gamma_j;\ j=k+1,\dots,m)$. Введем подпространство

$$\mathfrak{P}_j=\begin{cases} 0 & \text{при } j=1,2,\dots,k,\\ \mathfrak{Im}\,R_j^- & \text{при } j=k+1,\dots,m \text{ и } a_j=0,\\ \mathfrak{Im}\,R_j & \text{при } j=k+1,\dots,m \text{ и } a_j\neq 0,\end{cases}$$

и $\mathfrak{P}=\mathfrak{P}_1\dot{+}\mathfrak{P}_2\dot{+}\dots\dot{+}\mathfrak{P}_m$.

В силу (3.I)

$$R_jAR_j=\begin{cases} 0 & \text{при } j=1,2,\dots,k,\\ R_j^- & \text{при } j=k+1,\dots,m \text{ и } a_j=0\end{cases}$$

и

$$R_jAR_j|\mathfrak{Im}\,R_j\in\Phi(\mathfrak{Im}\,R_j)\qquad \text{при } j=k+1,\dots,m \text{ и } a_j\neq 0.$$

Следовательно, $\mathfrak{Im}\,A_0\subseteq\mathfrak{P}$ и $\dim\mathfrak{P}/\mathfrak{Im}\,A_0<\infty$. Таким образом, для доказательства соотношения (3.4) достаточно показать, что $\mathfrak{Im}\,T\subseteq\mathfrak{P}$, то есть $\mathfrak{Im}\,R_jAR_s\subseteq\mathfrak{P}_j$ $(j\neq s)$. Последнее соотношение очевидно при $j=1,\dots,k$ и при $j=k+1,\dots,m$ и $a_j\neq 0$. В случае $j=k+1,\dots,m$ и $a_j=0$ соотношение $\mathfrak{Im}\,R_jAR_k\subseteq\mathfrak{P}$ вытекает из (3.2), (3.9):

$$\mathfrak{Im}\,R_jAR_s=\mathfrak{Im}(a-b)Z_{js}=\mathfrak{Im}(-Z_{js})\subset\mathfrak{Im}\,R_j^-=\mathfrak{P}_j.$$

Необходимость условия I) доказана в предыдущем параграфе. Докажем необходимость хотя бы одного из условий а) – в).

Пусть выполняется условие I) и не выполняется ни одно из условий а) – в) . Тогда существует пара индексов j и $k(j\neq k)$ таких, что $a_j=0$, $a_k\neq 0$ и $b_k=0$. Без ограничения общности можно предполагать, что $a(t)=1$ при $t\in\Gamma_k$ . .

Представим оператор A в виде $A=AR_j^++B$. Так как $R_jAR_j=b_jR_j^-$, то $R_jAR_j^+=b_jR_j^-R_j^+=0$. Следовательно, имеет место равенство

$$AR_j^+=\sum_{r\neq j}R_rAR_j^+,$$

из которого вытекает полная непрерывность оператора AR_j^+. Покажем, что

$$\mathfrak{Im}\,AR_j^+\cap\mathfrak{Im}\,B=\{0\}.\tag{3.10}$$

Предположим, что существует пара функций φ и $\varphi \in L_p(\Gamma,\rho)$, таких, что $AR_j^+\varphi = B\varphi$. Тогда

$$R_k A R_j^+\varphi = R_k A R_k\varphi + \sum_{\tau\neq j,k} R_k A R_\tau\varphi + R_k A R_j^-\varphi. \tag{3.11}$$

В силу (3.2) и (3.7) $R_k A R_j^- = Z_{kj} R_j^- = 0$, следовательно, из (3.11) получаем

$$R_k A R_j^+\varphi = R_k A R_k\varphi + \sum_{\tau\neq j,k} R_k A R_\tau\varphi. \tag{3.12}$$

Кроме того, из (3.1) и (3.2) следует, что $R_k A R_k = R_k^+$ и при $s\neq k$ $R_k A R_s = Z_{ks}$. Таким образом, соотношение (3.12) принимает вид

$$Z_{kj} R_j^+\varphi = R_k^+\varphi + \sum_{\tau\neq j,k} Z_{k\tau}\varphi.$$

Согласно (3.9) $R_k Z_{ks} = Z_{ks}$ $(s\neq k)$. Стало быть,

$$Z_{ks} R_j^+\varphi = \sum_{\tau\neq j,k} Z_{k\tau}\varphi. \tag{3.13}$$

Из определения операторов $Z_{kj}(j\neq k)$ следует, что функция $(Z_{kj}R_j^+\varphi)(t)$ $(t\in\Gamma_k)$ допускает голоморфное продолжение в область F_j^+ (в случае, когда F_j^+ неограничено, это продолжение обращается в нуль в точке $t=\infty$). Кроме того, функция $\sum_{s\neq j,k}(Z_{jk}\varphi)(t)$ допускает голоморфное продолжение в область $\bigcap_{s\neq j,k}$ (при условии $\infty\in\bigcap_{s\neq j,k} F_s^+$ эта функция обращается в нуль на бесконечности). Так как $F_j^+\cup\bigcap_{s\neq j,k} F_s^+ = \overline{\mathbb{C}}$, то из (3.13) вытекает равенство

$$Z_{kj} R_j^+\varphi = 0.$$

Последнее в силу (3.7) влечет за собой равенство $R_j^+\varphi = 0$ и, стало быть, $AR_j^+\varphi = 0$. Соотношение (3.10) доказано.

Из соотношений (3.2) и (3.7) следует, что $R_k A R_j^+ = Z_{kj} R_j^+ = Z_{kj}$. Так как оператор Z_{kj} бесконечномерен, то

$$\dim \mathfrak{Im}\, A R_j^+ = \infty. \tag{3.14}$$

Допустим, что оператор A нормально разрешим. Тогда $A\in\Phi(L_p(\Gamma,\rho), \mathfrak{Im}\, A)$. Так как $AR_j^+\in\mathcal{J}(L_p(\Gamma,\rho),\mathfrak{Im}\, A)$, то согласно теореме 7.1', гл. IУ, оператор $B = A - AR_j^+$ также принадлежит $\Phi(L_p(\Gamma,\rho),\mathfrak{Im}\, A)$. Отсюда, в частности, следует, что $\dim(\mathfrak{Im}\, A/\mathfrak{Im}\, B) < \infty$. Последнее противоречит соотношениям (3.10) и (3.14). Теорема доказана.

Г Л А В А VII

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ О СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ

В этой главе устанавливаются общие теоремы об операторах вида $A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ и $B=P_\Gamma aI+Q_\Gamma bI$ в предположении, что коэффициенты $a, b\in L_\infty(\Gamma)$. Выясняется, как изменяются эти операторы при специальных изменениях контура. Получены необходимые условия, при которых операторы A или B являются Φ-, Φ_+-, Φ_--операторами. При некоторых естественных ограничениях доказывается, что одно из чисел $\dim\operatorname{Ker} A$, $\dim\operatorname{Coker} A$ ($\dim\operatorname{Ker} B$, $\dim\operatorname{Coker} B$) равно нулю. В отдельном параграфе рассмотрен принцип разделения особенностей коэффициентов. К случаю, когда Γ является окружностью, сводится вычисление фактор-нормы операторов A и B. В последних параграфах обобщаются некоторые теоремы, установленные в гл. III для случая непрерывных коэффициентов.

В этой главе сингулярные интегральные операторы рассматриваются в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$ при обычных ограничениях

$$\rho(t)=\prod_{k=1}^{n}|t-t_k|^{\beta_k};\quad t_1,t_2,\ldots,t_n\in\Gamma,$$

$$1<p<\infty;\quad -1<\beta_k<p-1\quad (k=1,2,\ldots,n).$$

§ 1. Изменения контура

В этом параграфе приводятся две теоремы о связях между сингулярными интегральными операторами на разных контурах.

Пусть $\widetilde{\Gamma}$ – некоторый сложный контур, а Γ – его часть. Пространство $L_p(\widetilde{\Gamma},\rho)$ можно отождествить с прямой суммой пространств $L_p(\Gamma,\rho)$ и $L_p(\tilde\Gamma\setminus\Gamma,\rho)$. Обозначим через R_1 проектор, проектирующий пространство $L_p(\tilde\Gamma,\rho)$ на пространство $L_p(\Gamma,\rho)$ параллельно $L_p(\tilde\Gamma\setminus\Gamma,\rho)$, и через R_2 – дополнительный проектор.

ТЕОРЕМА I.I. Пусть $\tilde a, \tilde b\in L_\infty(\Gamma)$ и $a=\tilde a|\Gamma$, $b=\tilde b|\Gamma$ [*]. Если выполняется условие

$$\tilde a(t)=\tilde b(t)=1 \quad (t\in\tilde\Gamma\setminus\Gamma), \tag{I.1}$$

то оператор $A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ является сужением на $L_p(\Gamma,\rho)$ оператора $\tilde A=\tilde a P_{\tilde\Gamma}+\tilde b Q_{\tilde\Gamma}$:

$$A=\tilde A\,|\,L_p(\Gamma,\rho), \tag{I.2}$$

и имеет место равенство

$$\tilde A=(I+R_1\tilde A R_2)(AR_1+R_2), \tag{I.3}$$

в котором оператор $I+R_1\tilde A R_2$ обратим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$R_2\tilde A=R_2\tilde a P_{\tilde\Gamma}+R_2\tilde b Q_{\tilde\Gamma}=R_2P_{\tilde\Gamma}+R_2Q_{\tilde\Gamma}=R_2,$$

то

$$\tilde A=(R_1+R_2)\tilde A=R_1\tilde A+R_2. \tag{I.4}$$

Отсюда, в частности, следует, что $R_1\tilde A R_1=\tilde A R_1=AR_1$. Стало быть, пространство $L_p(\Gamma,\rho)$ инвариантно относительно оператора $\tilde A$ и имеет место равенство (I.2). Из (I.4) также вытекает, что

$$\tilde A=R_1\tilde A R_1+R_1\tilde A R_2+R_2=(I+R_1\tilde A R_2)(R_1\tilde A R_1+R_2).$$

Таким образом, имеет место равенство (I.3). Очевидно,

$$(I+R_1\tilde A R_2)^{-1}=I-R_1\tilde A R_2.$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы можно вывести три важных следствия.

СЛЕДСТВИЕ I.I. Пусть выполняется условие (I.I). Тогда оператор A нормально разрешим в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$ в том и только том случае,

---

[*] Через $\tilde a|\Gamma$ обозначается сужение функции $\tilde a$ на контур Γ.

когда нормально разрешим оператор $\widetilde{A}$ в пространстве $L_p(\widetilde{\Gamma},\rho)$.

Имеют место равенства

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} \widetilde{A} \quad \text{и} \quad \operatorname{Coker} A = \operatorname{Coker} \widetilde{A}. \qquad (1.5)$$

Это следствие непосредственно вытекает из равенств (I.2) и (I.4).

СЛЕДСТВИЕ I.2. **Пусть выполняется условие (I.I). Оператор A допускает регуляризацию с какой-либо стороны в том и только том случае, когда оператор $\widetilde{A}$ допускает регуляризацию с той же стороны.**

Если оператор $\widetilde{M}$ является регуляризирующим для $\widetilde{A}$ с какой-либо стороны, то оператор $M=R_1\widetilde{M}|L_p(\Gamma,\rho)$ является регуляризирующим для A с той же стороны.

Первое утверждение выводится из равенств (I.3). Если оператор $\widetilde{M}$ является регуляризирующим для $\widetilde{A}$ слева, то второе утверждение очевидно. Если же он является регуляризирующим для $\widetilde{A}$ справа, то есть оператор $\widetilde{A}\widetilde{M}-\widetilde{I}$ вполне непрерывен, то вполне непрерывен и оператор $R_2\widetilde{A}\widetilde{M}R_1 = R_2\widetilde{M}R_1$. Стало быть, регуляризирующим справа для $\widetilde{A}$ будет и оператор

$$\widetilde{M}_1 = R_1\widetilde{M}R_1 + R_1\widetilde{M}R_2 + R_2\widetilde{M}R_2.$$

Отсюда непосредственно вытекает второе утверждение следствия и в этом случае.

СЛЕДСТВИЕ I.3. **Для того чтобы оператор A был обратим с какой-либо стороны, необходимо и достаточно, чтобы оператор $\widetilde{A}$ был обратим с той же стороны.**

Если оператор $\widetilde{A}^{-1}$ является обратным к $\widetilde{A}$ с какой-либо стороны, то оператор $R_1\widetilde{A}^{-1}|L_p(\Gamma,\rho)$ является обратным к A с той же стороны.

Это следствие выводится аналогично предыдущему.

Один частный случай теоремы I.I и вытекающих из него следствий уже был использован в доказательстве теоремы II.I, гл. III.

Там этот метод позволил свести задачу обращения сингулярного интегрального оператора вдоль составного замкнутого контура к задаче обращения такого оператора вдоль замкнутого контура.

Приведем еще один пример применения теоремы I.I и следствий из нее. Пусть контур Γ является отрезком вещественной оси $[\alpha,\beta]$, $a\in C(\alpha,\beta)$, $a(\alpha)=a(\beta)=1$ и $A=aP_\Gamma+Q_\Gamma$.

Обозначим через $\tilde{\Gamma}$ некоторую простую замкнутую дугу, содержащую отрезок $[\alpha,\beta]$, тогда функция $\tilde{a}$, определенная равенствами $\tilde{a}|\Gamma=a$ и $\tilde{a}|\tilde{\Gamma}\setminus\Gamma=1$, непрерывна на контуре $\tilde{\Gamma}$. Из теоремы I.I и предложений § 7, 10, гл. III, вытекает, что оператор A обратим хотя бы с одной стороны в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$ в том и только том случае, когда $a\in GC(\alpha,\beta)$. Если $a\in GC(\alpha,\beta)$ и $\varkappa=\frac{1}{2\pi}[\arg a(t)]_\Gamma$, то оператор A обратим, обратим только справа, обратим только слева в зависимости от того, является ли число $\varkappa$ равным нулю, отрицательным или положительным. Кроме этого, $\dim\operatorname{Ker}A=-\varkappa$ при $\varkappa<0$ и $\dim\operatorname{Coker}A=\varkappa$ при $\varkappa>0$. Если $a\in GC(\alpha,\beta)$, то функция $\tilde{a}$ допускает обобщенную факторизацию* $\tilde{a}=\tilde{a}_-t^\varkappa\tilde{a}_+$ относительно контура $\tilde{\Gamma}$. Из следствия I.3 вытекает, что оператор, обратный (с соответствующей стороны) к оператору A, задается равенством $A^{-1}=(a_+^{-1}(t)t^{-\varkappa}P_\Gamma+$ $+a_-(t)Q_\Gamma)a_-^{-1}(t)I$, где $a_\pm$ – сужение функции $\tilde{a}_\pm$ на отрезок $[\alpha,\beta]$.

ТЕОРЕМА I.2. Пусть $\Gamma_1,\dots,\Gamma_n$ – сложные контуры, не имеющие общих точек, и $a,b\in L_\infty(\Gamma)$, где $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\dots\cup\Gamma_n$. Для того чтобы оператор $A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ был Φ-оператором, необходимо и достаточно, чтобы каждый из операторов $A_j=a_jP_{\Gamma_j}+$ $+b_jQ_{\Gamma_j}$, где $a_j=a|\Gamma_j$ и $b_j=b|\Gamma_j$ $(j=1,2,\dots,n)$, был Φ-оператором.

Для того чтобы оператор A был Φ_+-(Φ_-)-оператором, необходимо и достаточно, чтобы все операторы A_j Φ_+ (Φ_-)- или Φ-операторами и по

---

*Здесь мы предполагаем, что $0\notin[\alpha,\beta]$, стало быть, $\tilde{\Gamma}$ можно взять так, чтобы $0\notin F_\Gamma^+$.

крайней мере один из них был Φ_+ (Φ_-)-оператором.

Во всех случаях имеет место равенство

$$\mathrm{Ind}(aP_\Gamma + bQ_\Gamma) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ind}(a_j P_{\Gamma_j} + b_j Q_{\Gamma_j}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пространство $L_p(\Gamma, \rho)$ можно естественным образом отождествить с прямой суммой $L_p(\Gamma_1,\rho) \dot{+} L_p(\Gamma_2,\rho) \dot{+} \ldots \dot{+} L_p(\Gamma_n,\rho)$. Обозначим через R_k ($k=1,2,\ldots,n$) проектор, проектирующий все пространство $L_p(\Gamma,\rho)$ на пространство $L_p(\Gamma_k,\rho)$ параллельно прямой сумме остальных пространств $L_p(\Gamma_j,\rho)$ ($j=1,2,\ldots,n;\ j\neq k$). Так как $R_1+R_2+\ldots+R_n=I$, то оператор A представим в виде

$$A = \sum_{j,k=1}^{n} R_j A R_k .$$

Легко видеть, что

$$R_j A R_j = A_j R \qquad \text{и} \qquad R_j A R_k = \frac{1}{2}(a_j - b_j) S_{\Gamma_k} \quad (j \neq k).$$

Так как контуры Γ_j ($j=1,2,\ldots,n$) не пересекаются, то операторы $R_j A R_k$ ($j,k=1,2,\ldots,n;\ j\neq k$) вполне непрерывны. Следовательно,

$$A = \sum_{j=1}^{n} A_j R_j + T, \tag{I.6}$$

где T – вполне непрерывный оператор. Оператор $A_1R_1 + A_2R_2 + \ldots + A_nR_n$, очевидно, распадается в прямую сумму операторов $A_j R_j$, действующих в пространствах $L_p(\Gamma_j,\rho)$. Отсюда и из теоремы § 7, гл. IУ, вытекает справедливость утверждений теоремы. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ I.3. Для того чтобы оператор A допускал регуляризацию слева (справа), необходимо и достаточно, чтобы все операторы A_j допускали регуляризацию слева (справа).

Это следствие вытекает из установленного в доказательстве теоремы I.2 равенства (I.6).

Пусть Γ – составной контур и S – оператор сингулярного интегрирования вдоль Γ. Норма $\|S\|_{p,\Gamma}$ оператора S, действующего в пространстве $L_p(\Gamma)$, зависит от p и Γ. В самом деле, в § 9, гл. IX, будет показано, что $\|S\|_{p,\Gamma_0}=ctg\frac{\pi}{2p}$ при $p=2^n$, стало быть, норма зависит от p. Покажем, что она зависит от Γ. Пусть Γ – эллипс, заданный уравнением $t=\alpha\sin\theta+ i\cos\theta$ ($\alpha\neq 1$, $0\leq\theta<2\pi$) и $f(t)=t+t^{-1}$ ($t\in\Gamma$), тогда $(Sf)(t)=t-t^{-1}$ и, как нетрудно проверить,

$$\|Sf\|^2_{2,\Gamma}-\|f\|^2_{2,\Gamma}=4\int_0^{2\pi}\frac{\alpha^2\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\alpha^2\sin^2\theta+\cos^2\theta}d\theta=8\pi\frac{\alpha-1}{\alpha+1}.$$

При $\alpha>1$ получаем, что $\|Sf\|_{2,\Gamma}>\|f\|_{2,\Gamma}$, стало быть, $\|S\|_{2,\Gamma}>1$. Так как $\|S\|_{2,\Gamma_0}=1$, то норма $\|S\|_{p,\Gamma}$ зависит также и от контура Γ. Оказывается, что фактор-норма $\|\hat{S}\|_{p,\Gamma}$ не зависит от контура Γ. Это вытекает из более общих предложений, которые будут установлены в этом параграфе.

Условимся о следующем обозначении:

$$|A|_{L_p(\Gamma,\rho)}=\inf_{T\in\mathcal{J}(L_p(\Gamma,\rho))}\|A+T\|_{L_p(\Gamma,\rho)}, \tag{2.1}$$

где $A\in L(L_p(\Gamma,\rho))$ и $\mathcal{J}=\mathcal{J}(L_p(\Gamma,\rho))$ – множество всех вполне непрерывных операторов из $L(L_p(\Gamma,\rho))$.

ЛЕММА 2.1. *Пусть Γ – простой замкнутый контур, Γ_0 – единичная окружность, $\alpha:\Gamma_0\to\Gamma$ – отображение, обладающее[*] производственной $\alpha'(z)$, принадлежащей $H_\mu(\Gamma)$ $(0<\mu<1)$ и отличной от нуля на Γ; $\rho(t)=\prod_{k=1}^{n}|t-t_k|^{\beta_k}$ $(t,t_k\in\Gamma)$,*

$$\rho_0(z)=\prod_{k=1}^{n}|z-z_k|^{\beta_k}\ (z,z_k\in\Gamma_0;\ t_k=\alpha(z_k));\ a,b\in L_\infty(\Gamma);$$

$A=aI+bS_\Gamma$ и $A_0=a_0I+b_0S_0$, где $a_0(z)=a(\alpha(z))$ и $b_0(z)=b(\alpha(z))$. Тогда

$$|A|_{L_p(\Gamma,\rho)}=|A_0|_{L_p(\Gamma_0,\rho_0)}. \tag{2.2}$$

[*] См. § 2, гл. I.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через B линейный ограниченный оператор, действующий из $L_p(\Gamma,\rho)$ в $L_p(\Gamma_0,\rho_0)$ по правилу

$$(B\varphi)(z)=f(z)\varphi(\alpha(z)),$$

где $f(z)=|\alpha'(z)|^{1/p}\rho^{1/p}(\alpha(z))\rho_0^{-1/p}(z)$. Легко проверить, что

$$\|B\varphi\|_{L_p(\Gamma_0,\rho_0)}=\|\varphi\|_{L_p(\Gamma,\rho)},$$

и оператор B обратим.

Пусть $\varphi\in L_p(\Gamma_0,\rho_0)$, нетрудно проверить, что $BS_\Gamma B^{-1}S_0=$ $=T_1+T_2$, где

$$(T_1\varphi)(z)=\frac{1}{\pi i}f(z)\int_{\Gamma_0}\left(\frac{\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta)-\alpha(z)}-\frac{1}{\zeta-z}\right)f^{-1}(\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta$$

и

$$(T_2\varphi)(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{f(z)-f(\zeta)}{f(\zeta)(\zeta-z)}\varphi(\zeta)d\zeta.$$

Из условия леммы и теоремы 2.2, гл. I, вытекает, что ядро оператора T_1 имеет слабую особенность. В силу теоремы 4.2, гл. I, оператор T_1 вполне непрерывен в пространстве $L_p(\Gamma_0,\rho_0)$. Оператор T_2 также вполне непрерывен. В самом деле, его можно представить в виде $T_2=(fS_0-S_0f)f^{-1}I$. Так как $\alpha'(z)$ непрерывна на Γ_0 и $\alpha'(z)\neq 0$, то функция

$$f(z)=|\alpha'(z)|^p\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{\alpha(z)-\alpha(z_k)}{z-z_k}\right|^{\beta_k/p}$$

также непрерывна на Γ_0. В силу теоремы 4.3, гл. I, оператор T_2 вполне непрерывен. Отсюда следует, что

$$B(aI+bS_\Gamma)B^{-1}=a_0I+b_0S_0+T, \tag{2.3}$$

где $T\in\mathcal{T}(L_p(\Gamma_0,\rho_0))$. Так как $\|B\|=\|B^{-1}\|=1$, то из равенства (2.3) вытекает (2.2). Лемма доказана.

Пусть теперь Γ - простая разомкнутая дуга и $\alpha:[0,1]\to\Gamma$ - отображение, обладающее производной $\alpha'(z)$, принадлежащей $H_\mu(0,1)\,(0<\mu<1)$ и отличной от нуля в каждой точке $z\in[0,1]$. Такое отображение существует, так как Γ - ляпуновская дуга. Через $\rho(t)$ и $\rho_0(t)$ обозначим весовые функции

$$\rho(t)=\prod_{k=1}^{n}|t-t_k|^{\beta_k} \quad (t,\ t_k\in\Gamma);$$

$$\rho_0(z)=\prod_{k=1}^{n}|z-z_k|^{\beta_k} \quad (z,z_k\in[0,1];\ t_k=\alpha(z_k)).$$

Аналогично лемме 2.I доказывается

ЛЕММА 2.2. Пусть $a,b\in L_\infty(\Gamma)$, $a_0(z)=a(\alpha(z))$, $b_0(z)=b(\alpha(z))$, $\Gamma^0=[0,1]$, $A=aI+bS_\Gamma$ и $A_0=a_0I+b_0S_{\Gamma^0}$, тогда имеет место равенство

$$|A|_{L_p(\Gamma,\rho)}=|A_0|_{L_p(\Gamma^0,\rho_0)}. \tag{2.4}$$

Рассмотрим общий случай, когда Γ – составной контур, состоящий из простых замкнутых контуров $\Gamma_1,\dots,\Gamma_n$ и простых разомкнутых дуг $\Gamma_{n+1},\dots,\Gamma_m$. Пусть $\rho_j(t)=\prod_{k=1}^{n_j}|t-t_{kj}|^{\beta_{kj}}$ $(t_{kj}\in\Gamma_j)$; $\alpha_j:\Gamma'\to\Gamma_j\ (j=1,\dots,m)$, где $\Gamma'=\Gamma_0$ при $j=1,\dots,n$ и $\Gamma'=[0,1]$ при $j=n+1,\dots,m$; $\rho_{j0}(z)=\prod_{k=1}^{n_j}|z-z_{kj}|^{\beta_{kj}}(z_{kj}\in\Gamma',\ t_{kj}=\alpha_j(z_{kj}))$ и $\rho(t)\ (t\in\Gamma)$ – весовая функция, определённая равенством $\rho(t)=\rho_j(t)$ при $t\in\Gamma_j$.

ТЕОРЕМА 2.I. Пусть $a,b\in L_\infty(\Gamma)$, $A=aI+bS_{\Gamma}$; $A_j=a_j+b_jS_{\Gamma'}$, где $a_j(z)=a_{j0}(\alpha_j(z))$ и $b_j(z)=b_{j0}(\alpha_j(z))$, а $a_{j0}=a|\Gamma_j$, $b_{j0}=b|\Gamma_j$. Тогда имеет место следующее равенство

$$|A|_{L_p(\Gamma,\rho)}=\max_{j=1,\dots,m}|A_j|_{L_p(\Gamma',\rho_{j0})}. \tag{2.5}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R_k – проекторы, проектирующие пространство $L_p(\Gamma,\rho)$ на пространство $L_p(\Gamma_k,\rho_k)$ параллельно прямой сумме остальных пространств $L_p(\Gamma_j,\rho_j)\ (j\neq k;\ j=1,\dots,n)$ (см. § I). Для оператора $C=A+T$, где T – произвольный оператор из $\mathcal{T}(L_p(\Gamma,\rho))$ имеет место соотношение

$$\|C\|_{L_p(\Gamma,\rho)}\geqslant\|R_jAR_j\|_{L_p(\Gamma,\rho)}=\|A_j+R_jTR_j\|_{L_p(\Gamma_j,\rho_j)}\geqslant|A_j|_{L_p(\Gamma_j,\rho_j)},$$

откуда вытекает, что

$$|A|_{L_p(\Gamma,\rho)}\geqslant\max_{j=1,\dots,m}|A_j|_{L_p(\Gamma',\rho_{j0})}. \tag{2.6}$$

Докажем обратное неравенство. В силу лемм 2.1 и 2.2 для каждого $j=1,\dots,m$ и $\varepsilon>0$ существует оператор $T_j\in L_p(\Gamma_j,\rho_j)$ такой, что

$$|A_j|_{L_p(\Gamma',\rho_{qj})}+\varepsilon>\|A_j+T_j\|_{L_p(\Gamma_j,\rho_j)}.$$

Положим $T=\sum\limits_{j=1}^{n}R_jT_jR_j$. Без труда проверяется, что

$$\|\sum_{j=1}^{n}R_j(A+T)R_j\|_{L_p(\Gamma,\rho)}=\max_{j=1,\dots,m}\|A_j+T_j\|_{L_p(\Gamma_j,\rho_j)}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\max_{j=1,\dots,m}|A_j|_{L_p(\Gamma',\rho_{j0})}+\varepsilon>\|\sum_{j=1}^{n}R_j(A+T)R_j\|_{L_p(\Gamma,\rho)}. \tag{2.7}$$

Так как операторы R_jAR_k $(j\neq k)$ вполне непрерывны в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$, то

$$\sum_{j=1}^{n}R_j(A+T)R_j=A+T',$$

где $T'\in\mathfrak{T}(L_p(\Gamma,\rho))$. Отсюда в силу соотношения (2.7) вытекает, что

$$\max_{j=1,\dots,m}|A|_{L_p(\Gamma',\rho_{j0})}\geqslant|A|_{L_p(\Gamma,\rho)}. \tag{2.8}$$

Из соотношений (2.6) и (2.8) вытекает (2.5). Теорема доказана.

§ 3. Принцип разделения особенностей

В этом параграфе предполагается, что Γ – сложный замкнутый контур. Напомним, что при этом предположении $P_\Gamma^2=P_\Gamma$.

Пусть a – некоторая функция из $L_\infty(\Gamma)$. Наименьшее замкнутое множество на контуре Γ, в дополнении к которому функция a непрерывна, называется носителем особенностей функции a. Обозначим это множество через $\Delta(a)$.

Основной в этом параграфе является.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть носитель особенностей $\Delta(a)$ функции $a\in GL_\infty(\Gamma)$ расположен на n непересекающихся от-*

крытых дугах $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ и пусть функции $a_j\in GL_\infty(\Gamma)$ $(j=1,\dots,n)$ обладают следующими свойствами:

α) функция a_j непрерывна на контуре $\Gamma\setminus\gamma_j$ $(j=1,\dots,n)$;

β) $a_j(t)=a(t)$ при $t\in\gamma_j$.

Для того чтобы оператор $aP_\Gamma+Q_\Gamma$ был Φ-оператором, необходимо и достаточно, чтобы каждый из операторов $a_jP_\Gamma+Q_\Gamma$ $(j=1,2,\dots,n)$ был Φ-оператором.

Для того чтобы оператор $aP_\Gamma+Q_\Gamma$ был Φ_+ (Φ_-)-оператором, необходимо и достаточно, чтобы все операторы $a_jP_\Gamma+Q_\Gamma$ $(j=1,2,\dots,n)$ были Φ_+ (Φ_-) - или Φ-операторами и по крайней мере один из них был Φ_+ (Φ_-)-оператором.

Во всех случаях имеет место равенство

$$\operatorname{Ind}(aP_\Gamma+Q_\Gamma)=\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Ind}(a_jP_\Gamma+Q_\Gamma)-\operatorname{ind}a_0,$$

где a_0 - функция из $GC(\Gamma)$, определенная равенством

$$a_0=aa_1^{-1}a_2^{-1}\dots a_n^{-1}.$$

Доказательству этой теоремы предпошлем два вспомогательных предположения.

ЛЕММА 3.1. Пусть $a_1,a_2,\dots,a_n$ - функции из $L_\infty(\Gamma)$, носители особенностей которых не пересекаются. Тогда оператор

$$P_\Gamma\tilde a P_\Gamma-P_\Gamma a_1P_\Gamma P_\Gamma a_2P_\Gamma\cdots P_\Gamma a_nP_\Gamma\quad(\tilde a=a_1a_2\dots a_n)$$

вполне непрерывен в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что без ограничения общности можно положить $n=2$. В случае, когда одна из функций a_1, a_2 непрерывна, утверждение леммы вытекает из теоремы 4.3, гл. I, о том, что для любой функции $b\in C(\Gamma)$ оператор $bP_\Gamma - P_\Gamma bI$ вполне непрерывен.

Рассмотрим общий случай. Множество $\Delta(a_1)$ лежит в дополнении к замкнутому множеству $\Delta(a_2)$. Это дополнение состоит из конечного или счетного числа попарно непересекающихся открытых дуг, которые образуют покрытие замкнутого множества $\Delta(a_1)$. Из такого покрытия можно извлечь конечное покрытие $\{\delta_j\}_1^r$. Очевидно, можно подобрать открытые дуги γ_j и Δ_j так, что

$$\Delta(a_1)\cap\delta_j\subset\gamma_j,\quad \bar\gamma_j\subset\Delta_j,\quad \bar\Delta_j\subset\delta_j\quad (j=1,2,\dots,r).$$

Положим

$$\gamma=\bigcup_{j=1}^{r}\gamma_j\ (\supset\Delta(a_1))\qquad \text{и}\qquad \Delta=\bigcup_{j=1}^{r}\Delta_j.$$

Легко видеть, что существует функция $b\in C(\Gamma)$, совпадающая с функцией a_2 на множестве γ, такая, что во всех граничных точках множества $\bar\Delta$ $b(t)\neq a_2(t)$.

Рассмотрим две функции $c_1(t)$ и $c_2(t)$ $(t\in\Gamma)$. Первая удовлетворяет условиям

$$c_1(t)\in C(\Gamma),\quad c_1(t)=a_2(t)-b(t)\ (t\in\Delta);\quad c_1(t)\neq 0\ (t\in\Gamma\setminus\Delta),$$

а вторая определяется равенством

$$c_2(t)=\begin{cases}1 & \text{при } t\in\Delta,\\ [a_2(t)-b(t)]/c_1(t) & \text{при } t\in\Gamma\setminus\Delta.\end{cases}$$

В силу выбора функций c_1 и c_2 имеем $a_2-b=c_1c_2$. Следовательно, $a_1a_2=a_1c_1c_2+a_1b$. Так как функция c_1 аннулируется на множестве $\Delta(a_1)$, то функция $a_1c_1\in C(\Gamma)$. Отсюда в силу доказанного вытекает

$$P_\Gamma a_1c_1c_2P_\Gamma=P_\Gamma a_1c_1P_\Gamma c_2P_\Gamma+T_1,\tag{3.1}$$

где T_1 – вполне непрерывный оператор. Учитывая, что функция c_1 непрерывна, получим

$$P_\Gamma a_1c_1P_\Gamma=P_\Gamma a_1P_\Gamma c_1P_\Gamma+T_2\quad\text{и}\quad P_\Gamma c_1P_\Gamma c_2P_\Gamma=P_\Gamma c_1c_2P_\Gamma+T_3,\tag{3.2}$$

где T_2 и T_3 – вполне непрерывные операторы.

Из (3.I), (3.2) и равенства

$$P_\Gamma a_1 b P_\Gamma = P_\Gamma a_1 P_\Gamma b P_\Gamma + T_4$$

вытекает, что

$$P_\Gamma \tilde{a} P_\Gamma = P_\Gamma a_1 c_1 c_2 P_\Gamma + P_\Gamma a_1 b P_\Gamma = P_\Gamma a_1 P_\Gamma (P_\Gamma c_1 c_2 P_\Gamma + P_\Gamma b P_\Gamma) + T_5 ,$$

где T_4 и T_5 –вполне непрерывные операторы. Таким образом,

$$P_\Gamma \tilde{a} P_\Gamma = P_\Gamma a_1 P_\Gamma a_2 P_\Gamma + T_5 .$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. Если функции $a_1, a_2 \in L_\infty(\Gamma)$ имеют непересекающиеся носители особенностей, то оператор $P_\Gamma a_1 P_\Gamma a_2 P_\Gamma - P_\Gamma a_2 P_\Gamma a_1 P_\Gamma$ вполне непрерывен.

Эта лемма непосредственно вытекает из предыдущей леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Введем функцию

$$a_0 = a a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_n^{-1} .$$

Очевидно, $a_0 \in QC(\Gamma)$. Положим

$$A = P_\Gamma a P_\Gamma + Q_\Gamma \quad \text{и} \quad A_j = P_\Gamma a_j P_\Gamma + Q_\Gamma \ (j = 0, 1, \dots, n).$$

Согласно лемме 3.I будем иметь

$$A = A_0 A_1 \dots A_n + T, \tag{3.3}$$

где T – вполне непрерывный оператор. Отсюда и из лемм 3.I, 3.2 и теоремы 6.3, гл. IУ, непосредственно выводится, что теорема 3.I справедлива, если в ее формулировке заменить оператор $aP_\Gamma + Q_\Gamma$ оператором A, а операторы $a_j P_\Gamma + Q_\Gamma$ – операторами A_j.

Остается еще учесть, что имеют место равенства

$$aP_\Gamma + Q_\Gamma = A(I + Q_\Gamma a P_\Gamma) \text{ и } a_j P_\Gamma + Q_\Gamma = A_j(I + Q_\Gamma a_j P_\Gamma), \tag{3.4}$$

и операторы $I+Q_\Gamma a P_\Gamma$, $I+Q_\Gamma a_j P_\Gamma$ обратимы:

$$(I+Q_\Gamma a P_\Gamma)^{-1}=I-Q_\Gamma a P_\Gamma, \quad (I+Q_\Gamma a_j P_\Gamma)^{-1}=I-Q_\Gamma a_j P_\Gamma. \tag{3.5}$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.I. *В предположениях теоремы 3.I оператор $aP_\Gamma+Q_\Gamma$ допускает регуляризацию слева (справа, с двух сторон) в том и только том случае, когда все операторы $a_jP_\Gamma+Q_\Gamma$ ($j=1,2,\dots,n$) допускают регуляризацию слева (справа, с двух сторон).*

Это следствие вытекает из леммы 3.2 и установленного в доказательстве теоремы 3.I равенства

$$aP_\Gamma+Q_\Gamma=(a_1P_\Gamma+Q_\Gamma)(I-Q_\Gamma a_1P_\Gamma)(a_2P_\Gamma+Q_\Gamma)(I-Q_\Gamma a_2P_\Gamma)\dots(a_nP_\Gamma+$$

$$+Q_\Gamma)(I-Q_\Gamma a_nP_\Gamma)(a_0P_\Gamma+Q_\Gamma)(I+Q_\Gamma aP_\Gamma)+T, \tag{3.6}$$

где T - вполне непрерывный оператор.

§ 4. Необходимое условие

В этом параграфе доказывается

ТЕОРЕМА 4.I. *Пусть Γ - составной контур и $a, b\in L_\infty(\Gamma)$. Если оператор $aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ является Φ-, Φ_+- или Φ_--оператором в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$, то*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{t\in\Gamma}|a(t)|>0, \quad \operatorname*{ess\,inf}_{t\in\Gamma}|b(t)|>0. \tag{4.I}$$

Аналогичное утверждение имеет место и для оператора $B=P_\Gamma aI+Q_\Gamma bI$.

Для доказательства теоремы понадобится

ЛЕММА 4.I. *Пусть Γ - простой замкнутый контур и $c\in L_\infty(\Gamma)$. Если существуют множества γ_1 и γ_2 ($\gamma_1,\gamma_2\subset\Gamma$) положи-*

тельной меры, такие, что $c(t)=0$ при $t\in\gamma_1$ и $c(t)\neq 0$ для всех $t\in\gamma_2$, то для каждого из операторов $A=cP_r+Q_r$ и $A=P_r+cQ_r$ имеют место равенства

$$\dim \operatorname{Ker} A=\dim \operatorname{Ker} A^*=0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi_0\in \operatorname{Ker}(cP_r+Q_r)$, тогда $cP_r\varphi_0=-Q_r\varphi_0$. Функция $Q_r\varphi_0(t)$ является предельным значением функции $(Q_r\varphi_0)(z)$, голоморфной в F_r^- и равной нулю на бесконечности. Так как $c(t)=0$ при $t\in\gamma_1$, то и $(Q_r\varphi_0)(t)=0$ при $t\in\gamma_1$. Тогда в силу теоремы Лузина-Привалова (см. И.И.Привалов [I], стр. 292) $(Q_r\varphi_0)(t)\equiv 0$. Но $c(t)\neq 0$ при $t\in\gamma_2$, стало быть, $(P_r\varphi_0)(t)=0$ при $t\in\gamma_2$. В силу той же теоремы Лузина-Привалова $(P_r\varphi_0)(t)\equiv 0$. Таким образом, $\varphi_0=P_r\varphi_0+Q_r\varphi_0=0$. Аналогично доказывается, что $\dim \operatorname{Ker}(P_r+cQ_r)=0$. Оператор $A^*=(cP_r+Q_r)^*$ можно представить в виде $A^*=H_r(P_r+Q_rc)H_r$, где $(H_r\varphi)(t)=\overline{\exp(i\alpha(t))\varphi(t)}$, а $\alpha(t)$ - угол наклона касательной к кривой Γ в точке t к положительному направлению оси x (см. теорему 7.I, гл. I). Отсюда следует, что $\dim \operatorname{Ker} A^*=\dim \operatorname{Ker}(P_r+Q_rcI)$. Оператор P_r+Q_rcI можно представить в виде $P_r+Q_rcI=(I+Q_rcP_r)(P_r+cQ_r)(I-P_rcQ_r)$. Крайние сомножители в правой части последнего равенства являются обратимыми операторами: $(I+Q_rcP_r)^{-1}=I-Q_rcP_r$, $(I-P_rcQ_r)^{-1}=I+P_rcQ_r$. Стало быть, $\dim \operatorname{Ker}(P_r+Q_rcI)=\dim \operatorname{Ker}(P_r+cQ_r)$. В силу доказанного выше $\dim \operatorname{Ker}(cP_r+Q_r)^*=0$. Аналогично устанавливается, что $\dim \operatorname{Ker}(P_r+cQ_r)^*=0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.I. Рассмотрим сначала случай, когда Γ - простой замкнутый контур. Доказательство теоремы в этом случае проведем от противного. Допустим, что оператор A является Φ (или Φ_+)-оператором и одно из условий (4.I) нарушено. Допустим для определенности, что $\operatorname{ess\,inf}|a(t)|=0$. Определим функции a_1 и b_1 следующими равенствами

$$a_1(t)=\begin{cases} a(t) & \text{при } |a(t)|\geq\varepsilon,\\ 0 & \text{при } |a(t)|<\varepsilon,\end{cases}\qquad b_1(t)=\begin{cases} b(t) & \text{при } |b(t)|\geq\varepsilon,\\ \varepsilon & \text{при } |b(t)|<\varepsilon.\end{cases}$$

где ε - достаточно малое число. Очевидно, $|a(t)-a_1(t)|<\varepsilon$ и $|b(t)-b_1(t)|<2\varepsilon$ для всех $t\in\Gamma$.

Так как для оператора $A_1=a_1P_r+b_1Q_r$ имеет место оценка $\|A-A_1\|<2\varepsilon(\|P_r\|+\|Q_r\|)$, то при достаточно малом $\varepsilon>0$ оператор A_1 является Φ-, Φ_+- или Φ_--оператором. Пусть

$f=a_1/b_1$ и $D=fP_\Gamma+Q_\Gamma$. Из условия $\operatorname{ess\,inf}|a(t)|=0$ вытекает, что множество $\gamma_1=\{t\in\Gamma: f(t)=0\}$ имеет положительную меру. Так как оператор D является Φ- (или $\Phi_\pm$-)- оператором, то множество $\gamma_2=\{t\in\Gamma: f(t)\neq 0\}$ также имеет положительную меру. Из леммы 4.I вытекает, что $\dim\ker D=\dim\ker D^*=0$, стало быть, оператор D обратим. Пусть φ_0 – решение уравнения $D\varphi_0=1$; так как $f(t)=0$ $(t\in\gamma_1)$, то из равенства $fP_\Gamma\varphi_0=1-Q_\Gamma\varphi_0$ вытекает, что функция $1-Q_\Gamma\varphi_0$ обращается в нуль на множестве γ_1 положительной меры. В силу теоремы Лузина-Привалова $1-(Q_\Gamma\varphi_0)(z)\equiv 0$ в F_Γ^-. Последнее невозможно, ибо функция $(Q_\Gamma\varphi_0)(z)$ обращается в нуль на бесконечности. Для случая, когда Γ – простая замкнутая кривая, теорема доказана.

Пусть Γ – составной контур. Дополним его до составного контура $\tilde\Gamma$, состоящего только из замкнутых кривых. Обозначим эти замкнутые кривые через $\tilde\Gamma_1,\dots,\tilde\Gamma_n$. Рассмотрим функции $\tilde b(t)$ и $\tilde a(t)$ $(t\in\tilde\Gamma)$, совпадающие на Γ с функциями b и a соответственно и равные единице на $\tilde\Gamma\setminus\Gamma$. Положим $\tilde a_k=\tilde a|\tilde\Gamma_k$ и $\tilde b_k=\tilde b|\tilde\Gamma_k$. Из теоремы I.I вытекает, что оператор $\tilde aP_{\tilde\Gamma}+\tilde bQ_{\tilde\Gamma}$ является Φ (или $\Phi_\pm$)-оператором в $L_p(\tilde\Gamma,\rho)$, а из теоремы I.2 следует, что для каждого $k=1,2,\dots,n$ оператор $a_kP_{\tilde\Gamma_k}+b_kQ_{\tilde\Gamma_k}$ является Φ (или $\Phi_\pm$)-оператором в пространстве $L_p(\tilde\Gamma_k,\rho)$. В силу доказанного выше

$$\operatorname*{ess\,inf}_{t\in\tilde\Gamma_k}|\tilde a_k(t)|>0,\quad \operatorname*{ess\,inf}_{t\in\tilde\Gamma_k}|\tilde b_k(t)|,$$

откуда вытекает (4.I). Теорема доказана.

§ 5. Теоремы о ядре и коядре сингулярного интегрального оператора

Пусть a и $b\in L_\infty(\Gamma)$, где Γ – составной контур, и $A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma$. В этом параграфе устанавливаются различные достаточные условия, при которых одно из чисел $\dim\ker A$, $\dim\ker A^*$ равно нулю.

ТЕОРЕМА 5.I. *Пусть a и $b\in L_\infty(\Gamma)$, где Γ – простой замкнутый контур и $A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma$. Если каждая из функций a, b не равна тождественно нулю и*

$$\operatorname{mes}\{t \in \Gamma : a(t) = b(t) = 0\} = 0, \qquad (5.1)$$

то хотя бы одно из чисел $\dim \operatorname{Ker} A$, $\dim \operatorname{Ker} A^*$ равно нулю.

Аналогичное утверждение имеет место и для оператора $P_\Gamma aI + Q_\Gamma bI$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi_0 \in \operatorname{Ker} A$ и $\tilde\varphi \in \operatorname{Ker} A^*$. Оператор A^* можно записать в виде $A^* = H_\Gamma(P_\Gamma b + Q_\Gamma a)H_\Gamma$ (см. § 7, гл.I), откуда следует, что $(P_\Gamma b + Q_\Gamma a)\varphi_0 = 0$, где $\varphi_0 = H_\Gamma \tilde\varphi$. Действуя на обе части равенства $(P_\Gamma b + Q_\Gamma a)\varphi_0 = 0$ последовательно операторами P_Γ и Q_Γ, получим $P_\Gamma b\varphi_0 = 0$ и $Q_\Gamma a\varphi_0 = 0$. Отсюда следует, что функция $h_+ = a\varphi_0 \in \overset{+}{L}_q(\Gamma, \rho^{q-1})$ и $h_- = b\varphi_0 \in \overset{-}{L}_q(\Gamma, \rho^{q-1})$, где $q^{-1} + p^{-1} = 1$. Пусть $\varphi_+ = P_\Gamma \varphi_0$ и $\varphi_- = Q_\Gamma \varphi_0$. Умножая обе части равенства $a\varphi_+ = -b\varphi_-$ на φ_0, получим равенство $h_+\varphi_+ = -h_-\varphi_-$. Так как $h_+\varphi_+ \in \overset{+}{L}_1(\Gamma)$ и $h_-\varphi_- \in \overset{\circ}{L}{}_1^-(\Gamma)$, а $\overset{+}{L}_1(\Gamma) \cap \overset{\circ}{L}{}_1^-(\Gamma) = \{0\}$, то $h_+\varphi_+ = 0$ и $h_-\varphi_- = 0$.

Если мера множества точек, на которых хотя бы одна из функций φ_+ и φ_- обращается в нуль, равна нулю, то $h_+ = h_- = 0$. Тогда $a\varphi_0 = b\varphi_0 = 0$. Таким образом, $(|a| + |b|)|\varphi_0| = 0$. В силу условия (5.1) $\varphi_0 = 0$, следовательно, $\dim \operatorname{Ker} A^* = 0$.

Если хотя бы одна из функций φ_+, φ_- обращается в нуль на множестве положительной меры $\gamma\, (\subset \Gamma)$, то согласно теореме Лузина-Привалова (см. И.И.Привалов [1], стр. 292) эта функция равна нулю. Из равенства $b\varphi_- = -a\varphi_+$ вытекает, что и вторая из функций φ_+, φ_- обращается в нуль на множестве положительной меры. В силу той же теоремы Лузина-Привалова и она равна нулю. Таким образом, $\varphi_0 = \varphi_- + \varphi_+ = 0$, то есть $\dim \operatorname{Ker} A = 0$. Теорема доказана.

Приведем примеры, показывающие, что условия теоремы 5.1 являются существенными.

1. Для оператора $A = P_\Gamma$ функция $b = 0$ и $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Ker} A^* = \infty$.

2. Для оператора $A = \chi I$, где χ – характеристическая функция некоторой дуги контура Γ, $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Ker} A^* = \infty$.

Заметим, что если для оператора $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ нарушено условие (5.1) или одна из функций a или b равна нулю, то $\dim \operatorname{Ker} A = \infty$ или $\dim \operatorname{Ker} A^* = \infty$. В самом деле, если $a = 0$, то $\overset{+}{L}_p(\Gamma, \rho) \subset \operatorname{Ker} A$, а если $b = 0$, то $\overset{\circ}{L}{}_p^-(\Gamma, \rho) \subset \operatorname{Ker} A$. Если же нарушено условие (5.1), то существует множество γ положительной меры, такое, что $a|\gamma = b|\gamma = 0$. Поэтому ядру оператора A^* принадлежит любая функция, носитель которой содержится в γ, стало быть, $\dim \operatorname{Ker} A^*=\infty$.

Из последнего замечания и теоремы 5.I вытекает

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть a и $b\in L_\infty(\Gamma)$, где Γ -простой замкнутый контур и $A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma$. Если числа $\dim \operatorname{Ker} A$ и $\dim \operatorname{Ker} A^*$ конечны, то хотя бы одно из них равно нулю.

Из этой теоремы, в частности, следует, что если Γ -простой замкнутый контур и оператор A является Φ -оператором, то он обратим с какой-либо стороны. Более общее предложение о том, что если оператор A является Φ- или $\Phi_\pm$-оператором, то одно из чисел $\dim \operatorname{Ker} A$ либо $\dim \operatorname{Ker} A^*$ равно нулю, вытекает из теорем 4.I и 5.I. Это предложение остается в силе и для любого составного контура Γ. Оно будет получено с помощью следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть Γ - произвольный составной контур; $a,b\in GL_\infty(\Gamma)$ и $A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma$, тогда хотя бы одно из чисел $\dim \operatorname{Ker} A$ либо $\dim \operatorname{Ker} A^*$ равно нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай, когда контур Γ является замкнутым. Пусть $\varphi_0\in \operatorname{Ker} A$ и $\tilde\varphi\in \operatorname{Ker} A^*$. Повторяя первую часть доказательства теоремы 5.I, получим равенство $h_+\varphi_+=0$, где $h_+=a\varphi_0$, $\psi_0=H_\Gamma\tilde\varphi$, $\varphi_+=P_\Gamma\psi_0$. Если $h_+=0$, то $\varphi_0=0$, стало быть, $\dim \operatorname{Ker} A^*=0$. Если же $h_+\neq 0$, то $\varphi_+(t)$ обращается в нуль на множестве $\gamma\subset\Gamma$ положительной меры.

Множество F_Γ^+ состоит из конечного числа связных компонент.

Пусть F_1 - связная компоненты множества F_Γ^+, граница которой Γ_1 удовлетворяет условию $mes(\gamma\cap\Gamma_1)>0$. В силу теоремы Лузина-Привалова $\varphi_+|\Gamma_1=0$. Положим $\varphi_-=Q_\Gamma\varphi_0$. Так как $a\varphi_+=-b\varphi_-$ и $b\in GL_\infty(\Gamma)$, то $\varphi_-|\Gamma_1=0$. Таким образом, $\varphi_+|\Gamma_1=\varphi_-|\Gamma_1=0$. Пусть $\tau_0\in\Gamma_1$ и τ - произвольная фиксированная точка на Γ. Обозначим через ℓ кривую, соединяющую точки τ_0 и τ. Предположим, что кривая ℓ пересекает последовательно области $F_2,\dots,F_m$, каждая из которых является связной компонентой одного из множеств F_Γ^+ либо F_Γ^-. Одна из функций φ_+ либо φ_- допускает голоморфное продолжение в F_2, и в силу теоремы Лузина-Привалова она равна тождественно нулю в F_2. Учитывая, что $a,b\in GL_\infty(\Gamma)$ и $a\varphi_+=-b\varphi_-$, получаем, что $\varphi_+|\Gamma_2=\varphi_-|\Gamma_2=0$, где Γ_k – граница множества F_k. Перебирая последовательно множества $F_3, \dots, F_m$, получим равенства $\varphi_+|\Gamma_m=\varphi_-|\Gamma_m=0$, следовательно $\varphi_+(\tau)=\varphi_-(\tau)=0$. Таким образом, $\varphi_+=\varphi_-=0$ и, стало быть, $\varphi_0=0$. Отсюда следует, что $\dim \ker A=0$.

Пусть теперь Γ – произвольный составной контур. Его можно дополнить до контура $\tilde{\Gamma}$, ограничивающего множество F^+_Γ, состоящее из конечного числа областей. Пусть $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ – функции, совпадающие соответственно с a и b на Γ и равные единице на $\tilde{\Gamma}\setminus\Gamma$. В силу доказанного выше для оператора $\tilde{A}=\tilde{a}P_{\tilde{\Gamma}}+\tilde{b}Q_{\tilde{\Gamma}}$ одно из чисел $\dim \ker \tilde{A}$ либо $\dim \ker \tilde{A}^*$ равно нулю. Для завершения доказательства теоремы остается воспользоваться следствием I.I, в силу которого $\dim \ker \tilde{A}=\dim \ker A$ и $\dim \ker \tilde{A}^*=\dim \ker A^*$.

Из теорем 4.I и 5.3 вытекает

ТЕОРЕМА 5.4. *Пусть a и b – ограниченные измеримые функции на составном контуре Γ. Если оператор $A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ является Φ-или $\Phi_\pm$-оператором, то одно из чисел $\dim\ker A$ или $\dim \ker A^*$ равно нулю.*

Аналогичная теорема имеет место для оператора $P_\Gamma aI+Q_\Gamma bI$ (см.теорему 6.I и следствие 6.I). В частности, если оператор A допускает регуляризацию с какой-либо стороны, то он обратим с одной стороны.

В заключение этого параграфа приведем еще одно следствие из теоремы 5.4.

ТЕОРЕМА 5.5. *Пусть $a\neq 0$ – ограниченная измеримая функция на простом замкнутом контуре Γ. Если оператор $A=aP_\Gamma+Q_\Gamma$ нормально разрешим в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$, то*

$$\operatorname{ess\,inf}|a(t)|>0.$$

§ 6. Две теоремы о связях между сингулярными интегральными операторами

Вместе с операторами вида $aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ обычно рассматриваются также операторы вида $P_\Gamma aI + Q_\Gamma bI$. В следующей простой теореме устанавливается связь между этими операторами.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть Γ – сложный замкнутый контур и $a, b \in GL_\infty(\Gamma)$. Тогда операторы $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ и $B = P_\Gamma aI + Q_\Gamma bI$ связаны равенством

$$D_1(aP_\Gamma + bQ_\Gamma)D_2 = P_\Gamma aI + Q_\Gamma bI, \tag{6.1}$$

в котором D_1 и D_2 – обратимые операторы, заданные равенствами

$$D_1 = (I + P_\Gamma ab^{-1}Q_\Gamma)b^{-1}I \quad \text{и} \quad D_2 = (I - Q_\Gamma ab^{-1}P_\Gamma)bI. \tag{6.2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор A, очевидно, можно представить в виде

$$A = b(ab^{-1}P_\Gamma + Q_\Gamma) = b(P_\Gamma ab^{-1}P_\Gamma + Q_\Gamma)(I + Q_\Gamma ab^{-1}P_\Gamma). \tag{6.3}$$

Для оператора B имеет место аналогичное равенство

$$B = (P_\Gamma ab^{-1}I + Q_\Gamma)bI = (P_\Gamma ab^{-1}Q_\Gamma + I)(P_\Gamma ab^{-1}P_\Gamma + Q_\Gamma)bI. \tag{6.4}$$

Так как операторы bI, $I + Q_\Gamma ab^{-1}P_\Gamma$, $I + P_\Gamma ab^{-1}Q_\Gamma$ обратимы

$$(I + Q_\Gamma ab^{-1}P_\Gamma)^{-1} = I - Q_\Gamma ab^{-1}P_\Gamma \quad \text{и} \quad (I + P_\Gamma ab^{-1}Q_\Gamma)^{-1} = I - P_\Gamma ab^{-1}Q_\Gamma,$$

то из (6.3) и (6.4) вытекают равенства

$$P_\Gamma ab^{-1}P_\Gamma + Q_\Gamma = b^{-1}(aP_\Gamma + bQ_\Gamma)(I - Q_\Gamma ab^{-1}P_\Gamma) =$$

$$= (I - Q_\Gamma ab^{-1})(P_\Gamma aI + Q_\Gamma bI)b^{-1}I.$$

Отсюда уже непосредственно следует равенство (6.1). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Пусть Γ – произвольный сложный контур. Для того чтобы оператор $aP_\Gamma+bQ_\Gamma\ (a,b\in L_\infty(\Gamma))$ был Φ-, Φ_+-, Φ_--оператором в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы таким же был оператор $P_\Gamma aI+Q_\Gamma bI$ в том же пространстве.

Оператор $aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ допускает регуляризацию слева (справа) в $L_p(\Gamma,\rho)$ в том и только том случае, когда оператор $P_\Gamma aI+Q_\Gamma bI$ допускает регуляризацию слева (справа) в $L_p(\Gamma,\rho)$.

Имеют место равенства

$$\dim\mathrm{Ker}(aP_\Gamma+bQ_\Gamma)=\dim\mathrm{Ker}(P_\Gamma aI+Q_\Gamma bI)$$

и

$$\dim\mathrm{Coker}(P_\Gamma aI+Q_\Gamma bI)=\dim\mathrm{Coker}(aP_\Gamma+bQ_\Gamma).$$

Это следствие вытекает из доказанной теоремы и теоремы 1.1.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть Γ — сложный замкнутый контур и $a,b\in GL_\infty(\Gamma)$. Тогда оператор $A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma$, действующий в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$, связан с оператором $B=a^{-1}P_\Gamma+b^{-1}Q_\Gamma$, действующим в сопряженном пространстве $L_q(\Gamma,\rho^{1-q})\ (p^{-1}+q^{-1}=1)$, равенством

$$A^*=D_3BD_4, \tag{6.5}$$

где

$$D_3=H_\Gamma D_1,\qquad D_4=D_2abH_\Gamma$$

и H_Γ — обратимый оператор, определенный равенством $(H_\Gamma\varphi)(t)=\overline{h_\Gamma(t)\varphi(t)}$ (см. § 7, гл. I).

В самом деле, в силу теоремы 7.1, гл. I, будем иметь

$$A^*=H_\Gamma(P_\Gamma bI+Q_\Gamma aI)H_\Gamma,$$

откуда непосредственно следует равенство (6.5).

Из (6.5) вытекает

СЛЕДСТВИЕ 6.2. Пусть Γ — произвольный сложный контур. Для того чтобы оператор $aP_\Gamma+bQ_\Gamma\ (a,b\in GL_\infty(\Gamma))$ был Φ-, Φ_+-, Φ_--оператором в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы оператор $a^{-1}P_\Gamma + b^{-1}Q_\Gamma$ был соответственно $\Phi-$, $\Phi_- -$, Φ_+ -оператором в сопряженном пространстве $L_q(\Gamma\rho^{1-q})(p^{-1}+q^{-1}=1)$.

Если оператор $aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ допускает регуляризацию слева (справа) в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$, то оператор $a^{-1}P_\Gamma + b^{-1}Q_\Gamma$ допускает регуляризацию справа (слева) в пространстве $L_q(\Gamma,\rho^{1-q})$. Имеет место равенство

$$\dim \operatorname{Ker}(aP_\Gamma + bQ_\Gamma)|L_p(\Gamma,\rho) = \dim \operatorname{Coker}(a^{-1}P_\Gamma + b^{-1}Q_\Gamma)|L_q(\Gamma,\rho^{1-q}).$$

§ 7. Погашение индекса и приближенное обращение сингулярного интегрального оператора

Пусть оператор $aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ с коэффициентами из $L_\infty(\Gamma)$ является Φ -оператором и $\varkappa = \operatorname{Ind}(aP_\Gamma + bQ_\Gamma)$. Согласно теореме 5.4 оператор $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ обратим справа, слева или с двух сторон в зависимости от того, будет ли число $\varkappa$ положительным, отрицательным или равным нулю.

Рассмотрим оператор $B_\varkappa$, определенный равенством

$$B_\varkappa = at^\varkappa P_\Gamma + bQ_\Gamma.$$

Согласно теореме 4.3, гл. I, разность $B_\varkappa - A(t^\varkappa P_\Gamma + Q_\Gamma)$ является вполне непрерывным оператором, следовательно, $\operatorname{Ind} B_\varkappa = 0$. В силу теоремы 4.I a и $b \in GL_\infty(\Gamma)$, а в силу теоремы 5.4 оператор $B_\varkappa$ обратим.

В случае, когда $\varkappa < 0$, оператор A представим в виде

$$A = B_\varkappa(t^{-\varkappa}P_\Gamma + Q_\Gamma),$$

и, стало быть, обратный слева к A дается формулой

$$(aP_\Gamma + bQ_\Gamma)^{-1} = (t^\varkappa P_\Gamma + Q_\Gamma)(at^\varkappa P_\Gamma + bQ_\Gamma)^{-1}. \tag{7.I}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что в случае $\varkappa > 0$ равенством (7.I) задается оператор, обратный к A справа.

ТЕОРЕМА 7.I. Пусть оператор $A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ является Φ-оператором. Тогда он обратим с одной стороны, а оператор $at^{\varkappa}P_\Gamma+bQ_\Gamma$, где $\varkappa=\operatorname{Ind}A$, обратим с двух сторон. Обратный с соответствующей стороны к оператору A определяется равенством (7.I).

В случае $\varkappa>0$ имеет место также равенство

$$\operatorname{Ker}(aP_\Gamma+bQ_\Gamma)=\mathcal{L}\{g,gt,\dots,gt^{\varkappa-1}\}, \tag{7.2}$$

где $g=P_\Gamma\varphi-t^{-\varkappa}(1-Q_\Gamma\varphi)$, а φ - решение уравнения

$$at^{\varkappa}P_\Gamma\varphi+bQ_\Gamma\varphi=b. \tag{7.3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение теоремы доказано выше. Из равенства (7.3) вытекает, что

$$(aP_\Gamma+bQ_\Gamma)(gt^j)=t^{j-\varkappa}(at^{\varkappa}P_\Gamma\varphi+bQ_\Gamma\varphi-b)=0 \quad (j=0,1,\dots,\varkappa-1),$$

следовательно, $\mathcal{L}\{g,gt,\dots,gt^{\varkappa-1}\}\subseteq\operatorname{Ker}(aP_\Gamma+bQ_\Gamma)$. Учитывая, что функции $g,gt,\dots,gt^{\varkappa-1}$ линейно независимы и $\dim\operatorname{Ker}(aP_\Gamma+bQ_\Gamma)=\varkappa$, приходим к равенству (7.3). Теорема доказана.

Отметим также, что первое утверждение теоремы 7.I можно еще сформулировать следующим образом.

При $\varkappa<0$ уравнение

$$aP_\Gamma\varphi+bQ_\Gamma\varphi=f \tag{7.4}$$

разрешимо в том и только том случае, когда для решения φ уравнения

$$at^{\varkappa}P_\Gamma\varphi+bQ_\Gamma\varphi=f \tag{7.5}$$

выполняется условие $t^{\varkappa}P_\Gamma\varphi\in L_p^+(\Gamma,\rho)$. При выполнении этого условия функция $\varphi=t^{\varkappa}P_\Gamma\varphi+Q_\Gamma\varphi$ является решением уравнения(7.4).

При $\varkappa>0$ вектор

$$\varphi=t^{\varkappa}P_\Gamma\varphi+Q_\Gamma\varphi,$$

где φ – решение уравнения (7.5), всегда является одним из решений исходного уравнения.

Теорема 7.I позволяет обобщить теоремы 8.I и 8.2, гл. Ш, о приближенном решении сингулярных интегральных уравнений.

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть a и $b \in GL_\infty(\Gamma)$ и оператор $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ является Φ-оператором. Пусть, кроме того, a_n и b_n – функции из $L_\infty(\Gamma)$, для которых

$$\sup_{t\in\Gamma}|a_n(t)-a(t)|\leq\varepsilon_n, \quad \sup_{t\in\Gamma}|b_n(t)-b(t)|<\varepsilon_n$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0.$$

Последовательность операторов

$$A_n^{-1} = (t^{\varkappa}P_\Gamma + Q_\Gamma)(a_n t^{\varkappa}P_\Gamma + b_n Q_\Gamma)^{-1},$$

где $\varkappa = \operatorname{Ind} A_n$, обратных с соответствующей стороны к операторам $A_n = a_n P_\Gamma + b_n Q_\Gamma$, сходится к оператору

$$A^{-1} = (t^{\varkappa}P_\Gamma + Q_\Gamma)(a t^{\varkappa}P_\Gamma + bQ_\Gamma)^{-1},$$

обратному к A с соответствующей стороны, причем

$$\|A_n^{-1} - A^{-1}\| = O(\varepsilon_n) \quad (n\to\infty).$$

При $\varkappa > 0$ решения φ_n уравнения

$$a_n t^{\varkappa} P_\Gamma \varphi_n + b_n Q_\Gamma \varphi_n = b_n$$

сходятся по норме пространства $L_p(\Gamma,\rho)$ к функции φ, и имеет место равенство

$$\operatorname{Ker}(aP_\Gamma + bQ_\Gamma) = \mathcal{L}(g, gt, \ldots, gt^{\varkappa-1}),$$

где $g = P_\Gamma\varphi - t^{\varkappa}(1 - Q_\Gamma\varphi)$.

ГЛАВА УШ

ОБОБЩЕННАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

В главе Ш было доказано, что всякая непрерывная функция $a \in GC(\Gamma)$ допускает обобщенную факторизацию относительно замкнутого контура Γ, и была выяснена роль этой факторизации при обращении сингулярных интегральных операторов с непрерывными коэффициентами. Эти результаты непосредственным образом не переносятся на случай функций из $GL_\infty(\Gamma)$.

В этой главе вводится новое понятие факторизации: обобщенная факторизация функций относительно контура Γ в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$. Это понятие позволяет обобщить основные результаты гл. Ш на случай функций из $GL_\infty(\Gamma)$.

Центральным результатом главы является теорема 3.I, содержащая критерий обобщенной факторизации в пространствах $L_p(\Gamma, \rho)$. В последнем параграфе излагаются приложения факторизации к обращению сингулярных интегральных операторов.

§ I. Постановка задачи

Как отмечалось выше, не всякая функция $a \in GL_\infty(\Gamma)$ допускает обобщенную факторизацию относительно замкнутого контура Γ.

Пусть, например, Γ_0 - единичная окружность и $a(t) = t^{1/2}$ $(= e^{i\theta/2}, 0 < \theta \leq 2\pi)$. Допустим, что функция a допускает обобщенную факторизацию $a = a_- t^{\varkappa} a_+$ (см. § 9, гл. Ш). Представим, кроме этого, a в виде $a(t) = (t-1)^{1/2}(1 - 1/t)^{-1/2}$. Положим $b_-(t) = (1 - 1/t)^{-1/2}$ и $b_+(t) = (t-1)^{1/2}$, тогда $a_- t^{\varkappa} a_+ = b_-$. Из теоремы 4.8, гл. II, вытекает, что $b_+^{\pm 1} \in L_p^+(\Gamma)$ и $b_-^{\pm 1} \in L_p^-(\Gamma)$ при $1 < p < 2$. Пусть $\varkappa < 0$, тогда левая часть равенства $t^{\varkappa} a_- b_-^{-1} = b_+ a_+^{-1}$ принадлежит $\overset{\circ}{L}{}_1^-(\Gamma)$, а правая - $L_1^+(\Gamma)$. Так как $L_1^+(\Gamma) \cap \overset{\circ}{L}{}_1^-(\Gamma) = \{0\}$, то $b_+ a_+^{-1} \equiv 0$, что невозможно.

Если $\varkappa > 0$, то аналогично из равенства $t^{-1} b_- a_-^{-1} = t^{\varkappa-1} a_+ b_+^{-1}$ вытекает, что $b_- a_-^{-1} = 0$, что также невозможно. Наконец, если $\varkappa = 0$, то воспользуемся равенством $b_- a_-^{-1} = a_+ b_+^{-1}$. Так как $b_- a_-^{-1} \in L_1^-(\Gamma), a_+ b_+^{-1} \in L_1^+(\Gamma)$, то $a_- = \lambda b_-$ $(\lambda \in \mathbb{C})$. Последнее невозможно, так как $b_- \notin L_q(\Gamma)$ $(q > 2)$. Таким образом, функция $a(t) = t^{1/2}$ не допускает обобщенной факторизации относительно окружности Γ_0 .

В третьей главе было показано, что задача обращения сингулярных операторов тесно связана с факторизацией функций. В случае, когда коэффициенты сингулярного оператора не являются непрерывными, сингулярный оператор может в одних пространствах быть обратимым с какой-либо стороны, а в других пространствах не быть обратимым ни с какой стороны (см. гл. IX). В этих случаях естественно ожидать, что и факторизация функций как-то связана с пространством. Эти соображения приводят к следующему определению.

Пусть Γ – замкнутый сложный контур. Обобщенной факторизацией функции $a \in L_\infty(\Gamma)$ относительно контура Γ в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$, называется ее представление в виде

$$a(t) = a_-(t)\, t^{\varkappa} a_+(t), \tag{I.1}$$

где $\varkappa$ – целое число, а множители $a_\pm$ удовлетворяют следующим условиям.

1) $a_- \in L_p^-(\Gamma, \rho)$, $a_+ \in L_q^+(\Gamma, \rho^{1-q})$, $a_-^{-1} \in L_q^-(\Gamma, \rho^{1-q})$ и

$$a_+^{-1} \in L_p^+(\Gamma, \rho) \quad (p^{-1} + q^{-1} = 1). \tag{I.2}$$

2) оператор $a_+^{-1} P_\Gamma a_-^{-1}$ ограничен в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$.

Напомним, что $L_q(\Gamma, \rho^{1-q}) = L_p^*(\Gamma, \rho)$ (см. § 7, гл. I). Если функция допускает обобщенную факторизацию относительно контура Γ , то, очевидно, она допускает обобщенную факторизацию относительно контура Γ в каждом пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$ $(1 < p < \infty$, $\rho = \prod_{k=1}^{N} |t - t_k|^{\beta_k}, -1 < \beta_k < p - 1)$.

Так же, как в § 9, гл. III, устанавливается, что если функция a допускает факторизацию относительно контура Γ в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$, то число $\varkappa$ определяется однозначно. Это число назовем индексом функции a в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$ и обозначим через $\operatorname{ind} a \,|\, L_p(\Gamma, \rho)$.

Множители $a_\pm$ определяются с точностью до постоянного множителя. Если, например, условиться, что $a_-(\infty) = 1$, то множители $a_\pm$ уже определяются однозначно.

Однако одна и та же функция может допускать различные обобщенные факторизации относительно контура Γ в различных пространствах. Например, пусть Γ_0 – единичная окружность и $a(t)=t^{1/2}$ $(=e^{i\theta/2},\ 0<\theta\leq 2\pi)$. Функция a допускает обобщенную факторизацию $a=a_-a_+$ $(a_+=(t-1)^{1/2},\ a_-=(1-t^{-1})^{-1/2})$ в пространстве $L_p(\Gamma)\ (1<p<2)$, а также обобщенную факторизацию $a=b_-t\,b_+$ $(b_+=(t-1)^{-1/2},\ b_-=(1-t^{-1})^{1/2})$ в пространстве $L_p(\Gamma)\ (2<p<\infty)$. В § 4, гл. I, было показано, что функции $a_\pm$ и $b_\pm$ удовлетворяют условиям (I.2) при соответствующих p. Ограниченность оператора $a_+^{-1}P_0a_-^{-1}I$ в пространстве $L_p(\Gamma)\ (1<p<2)$ и оператора $b_+^{-1}P_0\,b_-^{-1}$ в пространстве $L_p(\Gamma)\ (2<p<\infty)$ вытекает из теоремы 4.I, гл.I. В конце § 2, гл. IX будет показано, что функция $a(t)=t^{1/2}$ не допускает обобщенной факторизации относительно окружности Γ_0 в пространстве $L_2(\Gamma_0)$.

Ради краткости в дальнейшем вместо "обобщенная факторизация функции относительно контура Γ в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$" будем говорить "факторизация функции в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$."

§ 2. Функции, допускающие факторизацию относительно контура в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$

В этом параграфе указываются некоторые классы функций, допускающих факторизацию относительно замкнутого контура Γ в различных пространствах.

ТЕОРЕМА 2.I. *Пусть a – вещественная измеримая функция на замкнутом контуре Γ, удовлетворяющая условиям*

$$0<\operatorname*{ess\,inf}_{t\in\Gamma} a(t), \qquad \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\Gamma} a(t)<\infty,$$

тогда функция a допускает факторизацию $a=a_-a_+$ с множителями

$$a_+=\exp(P\ln a), \qquad a_-=\exp(Q\ln a),$$

обладающими следующими свойствами: $a_+^{\pm1}\in L_\infty^+(\Gamma)$, $a_-^{\pm1}\in L_\infty^-(\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно (см. И.И.Привалов [I], стр.189–190), функции $a_+^{\pm1}$ и $a_-^{\mp1}$ являются почти всюду предельными значениями функции

$$F(z)=exp\left(\pm\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\ln a(\tau)}{\tau-z}d\tau\right)$$

из F_Γ^+ и F_Γ^- соответственно.

Пусть $\Gamma_k (\subset\Gamma)$ – простая замкнутая дуга, разделяющая плоскость на области F_k^+ и F_k^- и

$$u_k(z)=Re\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k}\frac{\ln a(\tau)}{\tau-z}d\tau\right).$$

Так как $\ln a(\tau)$ – ограниченная вещественная функция на Γ_k, то функция $u_k(z)$ является гармонической функцией в каждой из областей F_k^+ и F_k^-, $u_k(\infty)=0$ и $|u_k(z)|\le const\ (z\in\mathbb{C})$ (см. И.И.Привалов [I], стр. 253, 260). Отсюда вытекает, что функция

$$u(z)=Re\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\ln a(\tau)}{\tau-z}d\tau\right)$$

ограничена в F_Γ^+ и F_Γ^-. Таким образом, функции $a_+^{\pm1}$ ($a_-^{\pm1}$) голоморфны и ограничены в F_Γ^+ (F_Γ^-) и, стало быть,

$$a_+^{\pm1}\in L_\infty^+(\Gamma),\ a_-^{\pm1}\in L_\infty^-(\Gamma).$$

Теорема доказана.

С помощью теоремы 2.I легко доказывается

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть функция $a\in L_\infty(\Gamma)$ и b – вещественная функция из $L_\infty(\Gamma)$, для которой*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{t\in\Gamma} b(t)>0.$$

Функция ab допускает факторизацию относительно контура Γ в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$ в том и только том случае, когда функция a допускает такую факторизацию. Если функция a допускает факторизацию, то $ind\, ab|L_p(\Gamma,\rho)=ind\, a|L_p(\Gamma,\rho)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 2.I функция b допускает факторизацию $b=b_-b_+$ с множителями $b_\pm$, обладающими свойствами $b_+^{\pm1}\in L_\infty^+(\Gamma)$ и $b_-^{\pm1}\in L_\infty^-(\Gamma)$.

Пусть равенство $a=a_-t^{\varkappa}a_+$ дает факторизацию функции a относительно контура Γ в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$. Тогда равенство $ab=g_-t^{\varkappa}g_+$, где $g_-=a_-b_-$ и $g_+=a_+b_+$, является факторизацией функции ab относительно Γ в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$. Теорема доказана.

Укажем на некоторые следствия, вытекающие из теоремы 2.2.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть функция a непрерывна всюду на Γ, за исключением конечного числа точек $t_1, t_2, \ldots, t_n$, в которых существуют конечные пределы $a(t_k \pm 0)(k=1,2,\ldots,n)$ и $\inf|a(t)|>0$. Если каждая пара значений $a(t_k+0)$ и $a(t_k-0)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ лежит на некотором луче, исходящем из нулевой точки, то функция a допускает обобщенную факторизацию относительно контура Γ во всех пространствах $L_p(\Gamma,\rho)$ [ж].

Это утверждение вытекает из теоремы 2.1. Действительно, обозначим через f функцию, непрерывную в каждой точке $t \in \Gamma$, за исключением точек t_k $(k=1,2,\ldots,n)$, и обладающую двумя свойствами

$$f(t)>0 \quad \text{и} \quad \frac{f(t_k+0)}{f(t_k-0)}=\frac{a(t_k+0)}{a(t_k-0)} \quad (k=1,2,\ldots,n).$$

Очевидно, функция $b=af^{-1}$ является непрерывной. Следовательно, согласно теореме 2.2 и теореме 9.1, гл. III, функция $a=bf$ допускает факторизацию относительно Γ в любом пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$.

Из теоремы 2.2 также непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть $a \in GL_\infty(\Gamma)$. Для того чтобы функция a допускала обобщенную факторизацию относительно контура Γ в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$ необходимо и достаточно, чтобы этим свойством обладала функция $a/|a|$. При этом $\operatorname{ind} a \,|\, L_p(\Gamma,\rho)=\operatorname{ind} a/|a| \,|\, L_p(\Gamma,\rho)$.

Приведем еще одно следствие из теоремы 2.2.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть выполняются условия теоремы 2.2. Тогда операторы $A_1=abP_\Gamma+Q_\Gamma$ и $A_2=aP_\Gamma+Q_\Gamma$ в любом пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$ связаны равенством

$$A_1=B_1A_2B_2,$$

[ж] В § 2, гл. IX, будет показано, что следствие 2.1 допускает обращение.

где B_1 и B_2 — обратимые операторы в каждом пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$.

В самом деле, если равенство $b=b_- b_+$ ($b_-^{\pm1}\in L_\infty^-(\Gamma)$ и $b_+^{\pm1}\in L_\infty^+(\Gamma)$) является факторизацией функции b относительно контура Γ, то

$$A_1=b_-(ab_+P_\Gamma+b_-^{-1}Q_\Gamma)=b_-(aP_\Gamma+Q_\Gamma)(b_+P_\Gamma+b_-^{-1}Q_\Gamma).$$

Операторы $B_1=b_-I$ и $B_2=b_+P_\Gamma+b_-^{-1}Q_\Gamma$ обратимы:

$$B_1^{-1}=b_-^{-1}I \qquad B_2^{-1}=b_+^{-1}P_\Gamma+b_-Q_\Gamma.$$

§ 3. Факторизация в пространствах $L_p(\Gamma,\rho)$

В этом параграфе устанавливается критерий возможности факторизации относительно контура Γ функций из $L_\infty(\Gamma)$ и выводятся некоторые следствия из него.

ТЕОРЕМА 3.1. Для того чтобы функция $a\in L_\infty(\Gamma)$ допускала факторизацию в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы оператор $A=aP_\Gamma+Q_\Gamma$ был Φ-оператором в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$. Если A является Φ-оператором, то $\operatorname{ind} a\,|\,L_p(\Gamma,\rho)=-\operatorname{Ind} A\,|\,L_p(\Gamma,\rho)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что функция a допускает факторизацию $a=a_-a_+$ в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$ и $\operatorname{ind} a\,|\,L_p(\Gamma,\rho)=0$. Образуем оператор $B=(a_+^{-1}P_\Gamma+a_-Q_\Gamma)a_-^{-1}I$.

Пусть r — произвольная рациональная функция из $R(\Gamma)$. Из определения факторизации вытекает, что $a_-^{-1}r\in L_q(\Gamma,\rho^{1-q})$, $a_+^{-1}\in L_p^+(\Gamma,\rho)$ и $a_-\in L_p^-(\Gamma,\rho)$. Стало быть, $a_+^{-1}P_\Gamma a_-^{-1}r\in L_1^+(\Gamma)$ и $a_-Q_\Gamma a_-^{-1}r\in \overset{\circ}{L}{}_1^-(\Gamma)$. Так как, кроме этого, операторы $a_+^{-1}P_\Gamma a_-^{-1}I$ и $a_-Q_\Gamma a_-^{-1}I=I-aa_+^{-1}P_\Gamma a_-^{-1}I$ ограничены в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$, то $a_+^{-1}P_\Gamma a_-^{-1}r\in L_p^+(\Gamma,\rho)$ и $a_-Q_\Gamma a_-^{-1}r\in \overset{\circ}{L}{}_p^-(\Gamma,\rho)$. Отсюда вытекает, что $ABr=(aP_\Gamma+Q_\Gamma)(a_+^{-1}P_\Gamma a_-^{-1}+a_-Q_\Gamma a_-^{-1})r=aa_+^{-1}P_\Gamma a_-^{-1}r+a_-Q_\Gamma a_-^{-1}r=r$. Аналогично, так как $a_+P_\Gamma r\in L_q^+(\Gamma,\rho^{1-q})$ и $a_-^{-1}Q_\Gamma r\in \overset{\circ}{L}{}_q^-(\Gamma,\rho)$, то $BAr=(a_+^{-1}P_\Gamma+a_-Q_\Gamma)(a_+P_\Gamma+a_-^{-1}Q_\Gamma)r=r$.

Оператор $B=I+(I-a)a_+^{-1}P_\Gamma a_-^{-1}I$ ограничен в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$, следовательно, оператор A обратим и оператор B является его обратным.

Рассмотрим общий случай, когда $\varkappa$ – произвольное целое число. В этом случае функция $at^{-\varkappa}$ допускает факторизацию $at^{-\varkappa}=a_+a_-$, и в силу доказанного выше оператор $at^{-\varkappa}P_\Gamma+Q_\Gamma$ обратим в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$. Если $\varkappa>0$, то оператор A можно представить в виде $A=(at^{\varkappa}P_\Gamma+Q_\Gamma)(t^{\varkappa}P_\Gamma+Q_\Gamma)$. Так как оператор $t^{\varkappa}P_\Gamma+Q_\Gamma$ является Φ-оператором и его индекс равен $\varkappa$, то этими же свойствами обладает оператор A. Если $\varkappa<0$, то можно воспользоваться равенством $at^{-\varkappa}P_\Gamma+Q_\Gamma=A(t^{-\varkappa}P_\Gamma+Q_\Gamma)$. Оператор $at^{-\varkappa}P_\Gamma+Q_\Gamma$ обратим в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$, а оператор $t^{-\varkappa}P_\Gamma+Q_\Gamma$ является Φ – оператором и его индекс равен $\varkappa$ (см. § 7, гл. II). Следовательно, оператор $aP_\Gamma+Q_\Gamma$ является Φ-оператором, и его индекс равен $\varkappa$.

Необходимость условия теоремы доказана. Докажем достаточность. Пусть оператор $A=aP_\Gamma+Q_\Gamma$ является Φ-оператором и его индекс равен $-\varkappa$. Согласно теореме 7.1, гл. VII, оператор $C=at^{-\varkappa}P_\Gamma+Q_\Gamma$ обратим в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$. Из теоремы 4.1, гл. VII, вытекает, что $a\in GL_\infty(\Gamma)$. Согласно следствию 6.2, гл. VII, оператор $a^{-1}t^{\varkappa}P_\Gamma+Q_\Gamma$ обратим в пространстве $L_q(\Gamma,\rho^{1-q})$.

Пусть $\varphi_0\in L_p(\Gamma,\rho)$ и $\psi_0\in L_q(\Gamma,\rho^{1-q})$ – соответственно решения уравнений $(cP_\Gamma+Q_\Gamma)\varphi=1$ и $(c^{-1}P_\Gamma+Q_\Gamma)\psi=1$, где $c=at^{-\varkappa}$. Тогда $cP_\Gamma\varphi_0=1-Q_\Gamma\varphi_0$ и $c^{-1}P_\Gamma\psi_0=1-Q_\Gamma\psi_0$ и, стало быть,

$$(P_\Gamma\varphi_0)(P_\Gamma\psi_0)=(1-Q_\Gamma\varphi_0)(1-Q_\Gamma\psi_0). \tag{3.1}$$

Функция $(1-Q_\Gamma\varphi_0)(1-Q_\Gamma\psi_0)-1$ принадлежит подпространству $\mathring{L}_1^-(\Gamma)$, а $(P_\Gamma\varphi_0)(P_\Gamma\psi_0)-1$ – подпространству $L_1^+(\Gamma,\rho)$. Так как $L_1^+(\Gamma)\cap\mathring{L}_1^-(\Gamma)=\{0\}$, то $(P_\Gamma\varphi_0)(P_\Gamma\psi)=(1-Q_\Gamma\varphi_0)(1-P_\Gamma\varphi_0)=1$. Положим $a_+=P_\Gamma\varphi_0$ и $a_-=1-Q_\Gamma\varphi_0$, тогда $c=a_+a_-$ и, стало быть, $a=a_+t^{\varkappa}a_-$. Очевидно, функции $a_+=P_\Gamma\varphi_0$, $a_-=1-Q_\Gamma\varphi_0$, $a_+^{-1}=P_\Gamma\psi_0$ и $a_-^{-1}=1-Q_\Gamma\psi_0$ удовлетворяют условиям (1.2). Для завершения доказательства осталось показать ограниченность оператора $a_+^{-1}P_\Gamma a_-^{-1}I$ в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $|c(t)|\leq m<1$.

Рассмотрим два оператора $C=cP_\Gamma+Q_\Gamma$ и $B=(a_+^{-1}P_\Gamma+a_-Q_\Gamma)a_-^{-1}I$. Так же, как выше, нетрудно проверить, что для каждой функции

$\varphi\in L_p(\Gamma,\rho)$ имеет место равенство $BC\varphi=\varphi$, стало быть, оператор $B=C^{-1}$ ограничен в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$. Оператор B можно записать в виде $B=I+(1-c)a_+^{-1}P_\Gamma a_-^{-1}I$, откуда вытекает ограниченность оператора $a_+^{-1}P_\Gamma a_-^{-1}I$ в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть Γ — сложный замкнутый контур[*], являющийся объединением сложных замкнутых контуров $\Gamma_1,\Gamma_2,\dots,\Gamma_n$, не имеющих общих точек, и $a\in L_\infty(\Gamma)$.

Для того чтобы функция a допускала обобщенную факторизацию относительно контура Γ в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$ необходимо и достаточно, чтобы каждая из функций $a|\Gamma_j$ $(j=1,2,\dots,n)$ допускала обобщенную факторизацию относительно контура Γ_j в пространстве $L_p(\Gamma_j,\rho)$.

Если функция a допускает обобщенную факторизацию, то

$$\operatorname{ind} a|L_p(\Gamma,\rho)=\sum_{j=1}^{n}\operatorname{ind} a_j|L_p(\Gamma_j,\rho).$$

Эта теорема является следствием теоремы 3.I и теоремы I.2 главы УП.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть носитель особенностей $\Delta(a)$ функции $a\in GL_\infty(\Gamma)$ расположен на n непересекающихся дугах $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ и пусть функции $a_j\in GL_\infty(\Gamma)$ $(j=1,2,\dots,n)$ обладают следующими свойствами:

$$a_j|\Gamma\setminus\gamma_j\in C(\Gamma\setminus\gamma_j);\ a_j|\gamma_j=a|\gamma_j\quad (j=1,2,\dots,n).$$

Для того чтобы функция a допускала факторизацию в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы каждая функция a_j $(j=1,2,\dots,n)$ допускала факторизацию в $L_p(\Gamma,\rho)$.

Если a допускает такую факторизацию, то

$$\operatorname{ind} a|L_p(\Gamma,\rho)=\sum_{j=1}^{n}\operatorname{ind} a_j|L_p(\Gamma,\rho)+\operatorname{ind} a_0,$$

где a_0 — функция из $GC(\Gamma)$, определенная равенством

$$a_0=aa_1^{-1}a_2^{-1}\dots a_n^{-1}.$$

---

[*]Определение сложного замкнутого контура см. в § I, гл. I.

Эта теорема непосредственно следует из теоремы 3.I и теоремы 3.I главы УП.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть $a \in L_\infty(\Gamma)$, $b \in QC(\Gamma)$. Для того чтобы функция a допускала факторизацию в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$, необходимо и достаточно, чтобы функция ab допускала факторизацию в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$.

Если функция a допускает факторизацию в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$ и равенства

$$a = a_- t^{\varkappa_1} a_+, \quad b = b_- t^{\varkappa_2} b_+$$

обозначают соответственно факторизацию функции a в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$ и обобщенную факторизацию функции b, то равенство

$$ab = a_- b_- t^{\varkappa_1 + \varkappa_2} a_+ b_+$$

дает факторизацию функции ab в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция b непрерывна на Γ, то оператор $ab P_\Gamma + Q_\Gamma - (aP_\Gamma + Q_\Gamma)(bP_\Gamma + Q_\Gamma)$ вполне непрерывен в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$. Оператор $bP_\Gamma + Q_\Gamma$ является Φ-оператором, следовательно, оператор $abP_\Gamma + Q_\Gamma$ является Φ-оператором в том и только том случае, когда Φ-оператором является оператор $aP_\Gamma + Q_\Gamma$. Отсюда в силу теоремы 3.I вытекает первое утверждение теоремы.

Пусть $ab = c_- t^m c_+$ – обобщенная факторизация функции ab в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$, тогда имеет место равенство $a_- b_- t^{\varkappa_1 + \varkappa_2} a_+ b_+ = c_- t^m c_+$. Из определения обобщенной факторизации легко получить, что $(a_+ b_+)^{\pm 1}, c_+^{\pm 1} \in L_\tau^+(\Gamma)$; $(a_- b_-)^{\pm 1}, c_-^{\pm 1} \in L_\tau^-(\Gamma)$, где $\tau > 1$. Отсюда обычным способом (см. § 9, гл. Ш) можно заключить, что $\varkappa = m$, $a_- b_- = \lambda c_-$, $a_+ b_+ = \lambda^{-1} c_+$, где λ – некоторая константа. Теорема доказана.

§ 4. Приложение факторизации к обращению сингулярных интегральных операторов

Следующая теорема подводит итог ряда исследований, проведенных в предыдущих параграфах.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть Γ – произвольный замкнутый контур и $a, b \in L_\infty(\Gamma)$. Для того чтобы оператор $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ был Φ-оператором или $\Phi_\pm$-оператором в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$, необходимо, чтобы выполнялись условия

$$a \in GL_\infty(\Gamma), \quad b \in GL_\infty(\Gamma). \tag{4.1}$$

Пусть условие (4.1) выполняется. Для того чтобы оператор A был Φ-оператором, необходимо и достаточно, чтобы функция ab^{-1} допускала обобщенную факторизацию относительно Γ в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$. Если оператор A является Φ-оператором, то $\operatorname{Ind} A = -\operatorname{ind} ab^{-1} | L_p(\Gamma, \rho)$.

Пусть функция ab^{-1} допускает обобщенную факторизацию относительно Γ в $L_p(\Gamma, \rho)$: $ab^{-1} = c_- t^{\varkappa} c_+$, $\varkappa = \operatorname{ind} ab^{-1} | L_p(\Gamma, \rho)$. Тогда оператор A обратим в $L_p(\Gamma, \rho)$ слева, справа или с двух сторон в зависимости от того, будет ли число $\varkappa$ положительным, отрицательным или равным нулю. Во всех случаях оператор, обратный к A с соответствующей стороны, задается равенством

$$(aP_\Gamma + bQ_\Gamma)^{-1} =$$

$$= (t^{-\varkappa} P_\Gamma + Q_\Gamma)(c_+^{-1} P_\Gamma c_-^{-1} + ab^{-1} t^{-\varkappa} c_+^{-1} Q_\Gamma c_-^{-1}) b^{-1} I. \tag{4.2}$$

Эта теорема вытекает из теоремы 3.1 и теорем 4.1, 5.3, 7.1 гл. VII.

Отметим, что теорема 4.1 сохраняет силу, если в ее формулировке заменить оператор $aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ оператором $P_\Gamma aI + Q_\Gamma bI$, а формулу (4.2) – формулой

$$(P_\Gamma aI + Q_\Gamma bI)^{-1} = b^{-1}(c_-^{-1} P_\Gamma c_+^{-1} I + c_-^{-1} Q_\Gamma c_+^{-1} t^{-\varkappa} ab^{-1} I).$$

Теорему 4.1 можно дополнить следующей.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $a, b \in GL_\infty(\Gamma)$ и функция $c = ab^{-1}$ допускает факторизацию $c = c_- t^{\varkappa} c_+$ в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$.

Тогда при $\varkappa = ind\, c \,|\, L_p(\Gamma, \rho) < 0$

$$Ker(aP_\Gamma + bQ_\Gamma) = \mathcal{L}(g, gt, \dots, gt^{-\varkappa-1}), \tag{4.3}$$

где $g = c_+^{-1} - c_- t^{\varkappa}$.

При $\varkappa > 0$

$$Coker(aP_\Gamma + bQ_\Gamma) = \mathcal{L}(bc_-, bc_- t, \dots, bc_- t^{\varkappa-1}), \tag{4.4}$$

а уравнение $aP_\Gamma \varphi + bQ_\Gamma \varphi = f$ разрешимо в том и только том случае, когда выполняется условие

$$\int_\Gamma f(t) b^{-1}(t) c_-^{-1}(t) t^{-j} dt = 0 \quad (j = 1, \dots, \varkappa). \tag{4.5}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сперва первое утверждение теоремы. Положим

$$\varphi_k = gt^k \;\; (= c_+^{-1} t^k - c_- t^{\varkappa+k}).$$

Тогда $P_\Gamma \varphi_k = c_+^{-1} t^k$ и $Q_\Gamma \varphi_k = -c_- t^{\varkappa+k}$. Стало быть, $cP_\Gamma \varphi_k + Q_\Gamma \varphi_k = 0$. Таким образом, $\mathcal{L}\{g, gt, \dots, gt^{-\varkappa-1}\} \subseteq Ker A$. Учитывая, что $dim\, Ker A = |\varkappa|$, получим равенство (4.3).

Пусть $\varkappa > 0$. Построим базис подпространства $Ker A^*$. Для этого напомним (см. § 7, гл. I), что имеет место равенство $A^* = H_\Gamma(P_\Gamma bI + Q_\Gamma aI)H_\Gamma$, где H_Γ – оператор, определенный равенством $(H_\Gamma \varphi)(t) = h_\Gamma(t)\varphi(t)$.

Рассмотрим функции $y_j = H_\Gamma(c_-^{-1} b^{-1} t^{-j})(j = 1, 2, \dots, \varkappa)$. Тогда $H_\Gamma A^* y_j = (P_\Gamma b + Q_\Gamma a) c_-^{-1} b^{-1} t^{-j} = P_\Gamma c_-^{-1} t^{-j} + Q_\Gamma c_+ t^{\varkappa-j} = 0$ и, следовательно, $\mathcal{L}\{y_1, y_2, \dots, y_\varkappa\} \subset Ker A^*$. Учитывая, что $dim\, Ker A^* = \varkappa$, получаем равенство

$$\mathcal{L}\{y_1, y_2, \dots, y_\varkappa\} = Ker A.$$

Оператор A нормально разрешим, стало быть $f \in Im A$ в том и только том случае, когда $f \in L_p(\Gamma, \rho)$ и

$$\int_\Gamma f(t)\overline{y_j(t)}|dt| = 0 \quad (j=1,2,\dots,\varkappa). \qquad (4.6)$$

Так как $\overline{y_j(t)}|dt| = h b^{-1} c_-^{-1} t^{-j}|dt| = b^{-1} c_-^{-1} t^{-j}\,dt$, то условия (4.6) и (4.5) совпадают.

Пусть $x_j = b c_- t^j$ $(j=0,1,\dots,\varkappa-1)$. Тогда

$$\int_\Gamma x_j(t) b^{-1}(t) c_-^{-1}(t) t^{-1-j}\,dt = \int_\Gamma \frac{dt}{t} = 0$$

и, стало быть $x_j \notin \operatorname{Im} A$. Учитывая, что $\dim \operatorname{Coker} A = \varkappa$, получаем равенство (4.4). Теорема доказана.

Аналогичная теорема имеет место и для оператора $P_\Gamma a I + Q_\Gamma b I$. Она отличается от теоремы 5.2 лишь тем, что формулы (4.3), (4.4), и условия (4.6) заменены соответственно формулами

$$\operatorname{Ker}(P_\Gamma a I + Q_\Gamma b I) = \mathscr{L}\{b^{-1}c_+^{-1},\ b^{-1}c_+^{-1}t, \dots, b^{-1}c_+^{-1}t^{-\varkappa-1}\}, \qquad (4.7)$$

$$\operatorname{Coker}(P_\Gamma a I + Q_\Gamma b I) = \mathscr{L}\{g, gt, \dots, gt^{\varkappa-1}\}, \qquad (4.8)$$

где $g = c_-^{-1} - c_+ t^{\varkappa}$, и условиями

$$\int_\Gamma f(t)(c_-^{-1}(t) - c_+ t^{\varkappa}) t^{-j}\,dt = 0 \ (j=1,\dots,\varkappa). \qquad (4.9)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.2.

Г Л А В А IX

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В этой главе исследуются сингулярные интегральные операторы, коэффициенты которых имеют конечное число точек разрыва, и все они являются точками разрыва первого рода.

Глава состоит из одиннадцати параграфов. Первые два носят подготовительный характер. Основные теоремы излагаются в § 3,4. В § 5 отдельно рассматриваются сингулярные интегральные операторы с непрерывными коэффициентами на составном незамкнутом контуре. Различные методы обращения сингулярных интегральных операторов на вещественной оси излагаются в § 6 и 7. С помощью результатов предыдущих параграфов в § 8 и 9 устанавливаются различные оценки для норм операторов P_Γ, Q_Γ и S_Γ.

В § 10 исследуются сингулярные интегральные операторы в пространствах гельдеровых функций с весом.

В § 11 рассматривается задача обращения сингулярных интегральных операторов в симметричных пространствах.

§ 1. Неособенные функции и их индекс

Пусть Γ – замкнутый контур. Обозначим через $PC(\Gamma)$ множество всех функций a из $L_\infty(\Gamma)$ со следующими свойствами:

1) функция a непрерывна всюду на Γ, за исключением конечного числа точек;

2) в каждой точке разрыва t_0 функции a существуют конечные пределы

$$a(t_0+0)=\lim_{\substack{t\to t_0\\ t>t_0}} a(t) \quad \text{и} \quad a(t_0-0)=\lim_{\substack{t\to t_0\\ t<t_0}} a(t),$$

где $t < t_0$ означает, что на ориентированном контуре Γ точка t предшествует точке t_0 ;

3) в точках разрыва $a(t_0-0)=a(t_0)$.

Пусть z_1 и z_2 – некоторая пара точек комплексной плоскости и δ – число из интервала $(0,\pi)$. Обозначим через $\ell(z_1,z_2;\delta)$ дугу окружности, соединяющую точки z_1 и z_2 и обладающую следующим свойством: из точек z $(z\neq z_1,\ z\neq z_2)$ дуги $\ell(z_1,z_2;\delta)$ отрезок прямой, соединяющий z_1 и z_2, виден под углом δ и при обходе дуги $\ell(z_1,z_2;\delta)$ от точки z_1 к z_2 этот отрезок остается слева. Для чисел δ из интервала $\pi<\delta<2\pi$ полагаем $\ell(z_1,z_2;\delta)=\ell(z_2,z_1;2\pi-\delta)$. Через $\ell(z_1,z_2;\pi)$ обозначим отрезок прямой, соединяющий точки z_1 и z_2. Дугу $\ell(0,1;\delta)$ $(0<\delta<\pi)$ можно задать параметрически

$$z=\frac{\sin\theta\mu}{\sin\theta}e^{i\theta(\mu-1)}\quad(0\le\mu\le 1), \qquad (1.1)$$

где $\theta=\pi-\delta$. Параметрическое уравнение дуги $\ell(z_1,z_2;\delta)$ $(0<\delta<\pi)$ имеет вид

$$z=z_1+(z_2-z_1)f_\delta(\mu),$$

где $f_\delta(\mu)$ – функция, определенная правой частью равенства (1.1).

Если μ изменяется от нуля до единицы, то множество значений функции $1-f_\delta(\mu)$ пробегает дугу $\ell(1,0;2\pi-\delta)$, стало быть, параметрическое уравнение дуги $\ell(z_1,z_2;\delta)$ (при $\pi<\delta<2\pi$) имеет вид

$$z=z_2+(z_1-z_2)(1-f_\delta(\mu)).$$

Таким образом, уравнение дуги $\ell(z_1,z_2;\delta)$ имеет вид $z=z_2 f_\delta(\mu)+z_1(1-f_\delta(\mu))$, где

$$f_\delta(\mu)=\begin{cases}\dfrac{\sin\theta\mu}{\sin\theta}e^{i\theta(\mu-1)} & (\theta=\pi-\delta)\ \text{при } 0<\delta<2\pi,\ \delta\neq\pi,\\ \mu & \text{при } \delta=\pi.\end{cases}\qquad (1.2)$$

Пусть заданы числа $p,\beta_1,\dots,\beta_r$, удовлетворяющие условиям $1<p<\infty$, $-1<\beta_k<p-1$ $(k=1,\dots,r)$, и

$$\rho(t)=\prod_{j=1}^{r}|t-t_j|^{\beta_j},$$

где t_j – некоторые различные точки контура Γ.

Каждой функции $a\in PC(\Gamma)$ сопоставим функцию $a^{p,\rho}$ $(\Gamma\times[0,1])$, определенную равенством

$$a^{p,\rho}(t,\mu)=a(t+0)f(t,\mu)+a(t)(1-f(t,\mu))\quad(t\in\Gamma,\ 0\le\mu\le 1),$$

где $f(t,\mu)=f_{\delta(t)}(\mu)$, а

$$\delta(t)=\begin{cases} 2\pi/p & \text{при} \quad t\in\Gamma\setminus\{t_1,\dots,t_\tau\}, \\ \dfrac{2\pi(1+\beta_k)}{p} & \text{при} \quad t=t_k \ (k=1,2,\dots,\tau). \end{cases} \tag{I.3}$$

Если t_0 – точка непрерывности функции a то $a^{p,\rho}(t_0,\mu)=a(t_0)$, если же t_0 – точка разрыва функции a, то множество значений функции $a^{p,\rho}(t_0,\mu)(0\le\mu\le 1)$ совпадает с дугой (или отрезком). $\ell(a(t_0),a(t_0+0);\ \delta(t_0))$.

Обозначим через $W_{p,\rho}(a)$ кривую на плоскости, полученную добавлением к множеству значений функции a всех дуг окружностей (или отрезков прямой) $\ell(a(\tau_k),a(\tau_k+0);\ \delta(\tau_k))\ (k=1,\dots,m)$, где $\tau_1,\dots,\tau_m$ – все точки разрыва функции a. Очевидно кривая $W_{p,\rho}(a)$ совпадает с множеством значений функции $a^{p,\rho}$. Кривую $W_{p,\rho}(a)$ ориентируем естественным образом, то есть так, чтобы в промежутках непрерывности функции a движение вдоль $W_{p,\rho}(a)$ отвечало движению t вдоль Γ в положительном направлении, а вдоль дополнительных дуг – от точки $a(\tau_k)$ к $a(\tau_k+0)$.

Функцию $a(\in PC(\Gamma))$ назовем $\{p,\rho\}$-неособенной, если кривая $W_{p,\rho}(a)$ не проходит через нуль, то есть если $a^{p,\rho}(t,\mu)\neq 0$ $(t\in\Gamma, 0\le\mu\le 1)$. Если функция a является $\{p,\rho\}$-неособенной, то ее $\{p,\rho\}$-индексом назовем число оборотов кривой $W_{p,\rho}(a)$ вокруг точки $z=0$. Этот индекс обозначим через $\operatorname{ind}a^{p,\rho}$. Если функция a непрерывна на Γ и $a(t)\neq 0\ (t\in\Gamma)$, то $\operatorname{ind}a^{p,\rho}=\operatorname{ind}a$, если же a имеет точки разрыва, то ее $\{p,\rho\}$-индекс зависит от p и ρ.

Рассмотрим примеры. Пусть Γ_0 – единичная окружность $|\zeta|=1$, ориентированная против часовой стрелки; $\rho(t)=|t-1|^{\beta}$ и $a(t)=$ $=t^{1/2}\ (=e^{i\theta/2},\ 0<\theta\le 2\pi)$. Множество значений функции a совпадает с верхней полуокружностью, $a(1)=-1$, $a(1+0)=1$. Если $(1+\beta)/p<1/2$, то дуга окружности $\ell(-1,1;2\pi(1+\beta)/p)$ расположена в нижней полуплоскости, а если $(1+\beta)/p>1/2$, то в верхней полуплоскости. При $2(1+\beta)=p$ $\ell(-1,1;\pi)=[-1,1]$. Только в последнем случае функция $a^{p,\rho}$ обращается в нуль (в точке $t=1$, $\mu=1/2$). Таким образом, функция a является $\{p,\rho\}$-неособенной в том и только том случае, когда $2(1+\beta)\neq p$. Легко видеть, что

$$\operatorname{ind}a^{p,\rho}=\begin{cases} 1, & \text{если} \quad 2(1+\beta)<p, \\ 0, & \text{если} \quad 2(1+\beta)>p. \end{cases}$$

Покажем, что произведение двух $\{p,\rho\}$-неособенных функций может не быть $\{p,\rho\}$-неособенной функцией. Пусть, например, $a(t)=t^{1/4}(=e^{i\theta/4},\ 0<\theta\le 2\pi)$ и $2(1+\beta)=p$. Легко видеть, что функция a является $\{p,\rho\}$-неособенной, а функция a^2 не является $\{p,\rho\}$-неособенной.

Отметим также, что если функция a, b и ab являются $\{p,\rho\}$-неособенными, то $\{p,\rho\}$-индекс произведения ab может не совпадать с суммой $\{p,\rho\}$-индексов функций a и b. Например, пусть $a(t)=b(t)=t^{2/3}$ и $2(1+\beta)=p$, тогда $\operatorname{ind} a^{p,\rho}=\operatorname{ind} b^{p,\rho}=0$, а $\operatorname{ind} ab^{p,\rho}=1$. Однако имеет место

ТЕОРЕМА 1.1. Если $\{p,\rho\}$-неособенные функции a и b не имеют общих точек разрыва, то их произведение $c=ab$ является $\{p,\rho\}$-неособенной функцией и

$$\operatorname{ind} c^{p,\rho}=\operatorname{ind} a^{p,\rho}+\operatorname{ind} b^{p,\rho}. \tag{1.4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно проверить справедливость равенства

$$c^{p,\rho}(t,\mu)-a^{p,\rho}(t,\mu)b^{p,\rho}(t,\mu)=$$

$$=(a(t+0)-a(t))(b(t+0)-b(t))f(t,\mu)(1-f(t,\mu)).$$

Если $\{p,\rho\}$-неособенные функции a и b не имеют общих точек разрыва, то $c^{p,\rho}=a^{p,\rho}b^{p,\rho}$. Отсюда вытекает, что $c^{p,\rho}(t,\mu)\ne 0$ $(t\in\Gamma,\ 0\le\mu\le 1)$ и имеет место равенство (1.4). Теорема доказана.

В случае, когда $\rho(t)\equiv 1$ вместо "$\{p,1\}$-неособенная функция" будем говорить "p-неособенная функция".

Приведем один критерий $\{p,\rho\}$-неособенности функции a.

ТЕОРЕМА 1.2. Для того чтобы функция $a(\in PC(\Gamma))$ была $\{p,\rho\}$-неособенной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

1) $a(t\pm 0)\ne 0$ для всех точек $t\in\Gamma$;

2) в каждой точке t_k разрыва функции a отношение $a(t_k)/a(t_k+0)$ можно представить в виде $\exp(i\gamma_k)$, где $\delta(t_k)-2\pi<\operatorname{Re}\gamma_k<\delta(t_k)$, а функция $\delta(t)$ определена равенством (1.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость первого условия очевидна. Пусть выполнено это условие. Отношение $a(t_k)/a(t_k+0)$ всегда можно представить в виде $exp(i\gamma_k)$, где $\delta(t_k)-2\pi < Re\gamma_k < \delta(t_k)$. Нетрудно проверить, что дуга (или отрезок) $\ell(a(t_k), a(t_k+0); \delta(t_k))$ проходит через точку $z=0$ в том и только том случае, когда $Re\gamma_k = \delta(t_k)$. Отсюда вытекает, что функция a, удовлетворяющая условию $a(t\pm 0)\neq 0\,(t\in\Gamma)$, является $\{p,\rho\}$-неособенной в том и только том случае, когда $Re\gamma_k \neq \delta(t_k)$. Теорема доказана.

§ 2. Критерий обобщенной факторизации степенной функции

В настоящем параграфе устанавливаются необходимые и достаточные условия, при которых функции вида $(t-z)^\gamma$ и произведения таких функций допускают факторизацию в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$. Оказывается, что эти функции допускают факторизацию в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$ в том и только том случае, когда они являются $\{p,\rho\}$-неособенными.

Пусть сначала Γ - простой замкнутый контур, z_0 - некоторая точка из F_Γ^+, γ - комплексное число и $\varphi_0(z)$ - некоторая фиксированная ветвь функции $(z-z_0)^\gamma$, определенной на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом, соединяющим z_0 с ∞ и пересекающим контур Γ в одной точке t_0. Функция $\varphi_0(t)$ непрерывна в каждой точке $t\in\Gamma$, кроме, быть может, точки t_0; $\varphi_0(t\pm 0)\neq 0$ $(t\in\Gamma)$ и

$$\varphi(t_0)/\varphi(t_0+0)=exp(2\pi i\gamma). \qquad (2.1)$$

ТЕОРЕМА 2.1. Для того чтобы функция φ_0 была $\{p,\rho\}$-неособенной, необходимо и достаточно, чтобы разность $Re\gamma-\delta(t_0)/2\pi$ не была целым числом. Если это условие выполнено и $\varkappa$ - целое число, удовлетворяющее условию*

$$0<\varkappa+\delta(t_0)/2\pi-Re\gamma<1,$$

то $ind\,\varphi_0^{p,\rho}=\varkappa$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение теоремы вытекает из равенства (2.1) и теоремы 1.2.

---

*Напомним, что функция $\delta(t)$ определяется равенством (1.3).

Пусть $\gamma' = \gamma - \varkappa = \alpha + \beta i$, тогда $\varphi_0(t) = (t-z_0)^{\gamma'}(t-z_0)^{\varkappa}$. Функция $(t-z_0)^{\varkappa}$ непрерывна на Γ, и ее индекс равен $\varkappa$. В силу теоремы I.2 достаточно показать, что $\operatorname{ind} a^{p,\rho} = 0$, где $a(t) = (t-z_0)^{\gamma'}$. Если точка t обходит контур Γ, начиная с точки t_0, то аргумент функции a получает приращение, равное $2\pi\alpha$, стало быть,

$$\operatorname{ind} a^{p,\rho} = \alpha + \frac{1}{2\pi}\left[\arg a^{p,\rho}(t_0,u)\right]_{0\le u\le 1}.$$

Так как $a^{p,\rho}(t_0,u) = a(t_0+0)(f(t_0,u) + \exp(2\pi i\gamma_0')(1-f(t_0,u)))$ и $f(t_0,0)=0, f(t_0,1)=1$, то $\left[\arg a^{p,\rho}(t_0,u)\right]_{0\le u\le 1} = -2\pi\alpha$, стало быть, $\operatorname{ind} a^{p,\rho} = 0$. Теорема доказана.

Пусть Γ – замкнутый контур. Каждой точке $\tau \in \Gamma$ и комплексному числу γ поставим в соответствие функцию $\varphi_{\tau,\gamma}$, которую определим ниже. Пусть простой замкнутый контур Γ_k $(\subset \Gamma)$ содержит точку τ_k. Через $\varphi_{\tau_k,\gamma}$ обозначим непрерывную в каждой точке $t \ne \tau_k$ функцию

$$\varphi_{\tau_k,\gamma} = \begin{cases} (t-z_k)^{\varepsilon\gamma} & \text{при } t \in \Gamma_k, \\ 1 & \text{при } t \in \Gamma \setminus \Gamma_k, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $\varepsilon = 1$, если контур Γ_k ориентирован в положительном направлении и $\varepsilon = -1$ – в противном случае. Точка z_k принадлежит F_Γ^+ при $\varepsilon = 1$ и F_Γ^- при $\varepsilon = -1$. Она выбрана так, чтобы отрезок прямой, соединяющий точки τ_k и z_k, не имел общих точек с Γ, кроме точки τ_k.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\rho(t) = \prod_{k=1}^{r} |t-t_k|^{\beta_k}$ и $\varphi(t) = \varphi_{t_1,\gamma_1} \cdot \ldots \cdot \varphi_{t_n,\gamma_n}$ $(n \le r)$. Для того чтобы функция φ была $\{p,\rho\}$-неособенной, необходимо и достаточно, чтобы каждое из чисел

$$\nu_k = (1+\beta_k)/p - \operatorname{Re}\gamma_k \quad (k=1,\ldots,n)$$

не было целым. Если выполнено это условие и $\varkappa_1,\ldots,\varkappa_n$ – целые числа, удовлетворяющие неравенствам $0 < \varkappa_k + \nu_k < 1$, то $\operatorname{ind}\varphi^{p,\rho} = \varkappa_1 + \ldots + \varkappa_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторяя, по существу, доказательство теоремы 2.I, можно показать, что функция φ_{t_k,γ_k} является $\{p,\rho\}$-неособенной в том и только том случае, когда число ν_k не является целым. Если ν_k не является целым числом, то $\operatorname{ind}\varphi_{t_k,\gamma_k}^{p,\rho} = \varkappa_k$. Так как функции φ_{t_k,γ_k} не имеют общих точек разрыва, то все утверждения теоремы вытекают из теоремы I.I. Теорема доказана.

Найдем условия, при которых функция φ допускает факторизацию в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$. Рассмотрим сначала случай, когда Γ_γ – простой замкнутый контур. В этом случае $\varphi_{\tau,\gamma}=(t-z_0)^\gamma$. Положим

$$\varphi^{+}_{\tau,\gamma}=(t-\tau)^\gamma, \quad \varphi^{-}_{\tau,\gamma}=\left(\frac{t-\tau}{t-z_0}\right)^{-\gamma}, \tag{2.3}$$

где через $((t-\tau)/(t-z_0))^{-\gamma}$ обозначена однозначная ветвь этой функции, голоморфная на комплексной плоскости с разрезом вдоль отрезка прямой, соединяющего точки z_0 и τ, и равная единице на бесконечности. Через $(t-\tau)^\gamma$ обозначена однозначная ветвь этой функции, голоморфная на комплексной плоскости с разрезом, соединяющим точку τ с бесконечностью и не имеющим общих точек с F^+_Γ. Эта ветвь выбирается так, чтобы имело место равенство $\varphi_{\tau,\gamma}=\varphi^{+}_{\tau,\gamma}\varphi^{-}_{\tau,\gamma}$.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $t_1\in\Gamma$ и

$$\frac{1+\beta_1}{p}-1<\operatorname{Re}\gamma<\frac{1+\beta_1}{p}, \tag{2.4}$$

тогда функция $\varphi_{t_1,\gamma}$ допускает факторизацию $\varphi_{t_1,\gamma}=\varphi^{+}_{t_1,\gamma}\varphi^{-}_{t_1,\gamma}$ в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$, где

$$\rho(t)=\prod_{k=1}^{t}|t-t_k|^{\beta_k} \quad (1<p<\infty,\ -1<\beta_k<p-1,\ t_k\in\Gamma).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функции $(\varphi^{+}_{t_1,\gamma})^{\pm1}$ и $(\varphi^{-}_{t_1,\gamma})^{\pm1}$ голоморфны соответственно в F^+_Γ и F^-_Γ, они непрерывны в каждой точке $t\neq t_1$ контура Γ и в окрестности точки t_1 допускают оценку

$$|(\varphi^{\pm}_{t_1,\gamma}(z))^{\pm1}|\le\frac{c}{|z-t_1|^{|\operatorname{Re}\gamma|}} \quad (c=const).$$

Легко видеть, что $|\operatorname{Re}\gamma|<1$. Кроме этого,

$$(\varphi^{+}_{t_1,\gamma})^{-1},\ \varphi^{-}_{t_1,\gamma}\in L_p(\Gamma,\rho);\ \varphi^{+}_{t_1,\gamma},(\varphi^{-}_{t_1,\gamma})^{-1}\in L_q(\Gamma,\rho^{1-q}).$$

Из теоремы 4.8, гл. II, вытекает, что

$$(\varphi^{+}_{t_1,\gamma})^{-1}\in L^{+}_p(\Gamma,\rho);\ \varphi^{-}_{t_1,\gamma}\in L^{-}_p(\Gamma,\rho);$$

$$\varphi^{+}_{t_1,\gamma}\in L^{+}_q(\Gamma,\rho^{1-q});\ (\varphi^{-}_{t_1,\gamma})^{-1}\in L^{-}_q(\Gamma,\rho^{1-q}).$$

Ограниченность оператора $(\varphi^{+}_{t_1,\gamma})^{-1}P_r(\varphi^{-}_{t_1,\gamma})^{-1}I$ следует из теоремы 4.I, гл. I. Теорема доказана.

Рассмотрим более общий случай, когда Γ – замкнутый контур, состоящий из конечного числа непересекающихся простых замкнутых контуров. Пусть простой замкнутый контур $\Gamma_k\ (\subset\Gamma)$ содержит точку t_k. Обозначим через F_k ограниченную область на комплексной плоскости с границей Γ_k. Положим

$$\varphi^{+}_{t_k,\gamma}(t)=\begin{cases}(t-t_k)^{\gamma} & \text{при } t\in\Gamma'_k,\\ \left(\dfrac{t-t_k}{t-z_k}\right)^{\gamma} & \text{при } t\in\Gamma\setminus\Gamma'_k,\end{cases}\qquad \varphi^{-}_{t_k,\gamma}(t)=\begin{cases}(t-t_k)^{-\gamma} & \text{при } t\in\Gamma''_k,\\ \left(\dfrac{t-t_k}{t-z_k}\right)^{-\gamma} & \text{при } t\in\Gamma\setminus\Gamma''_k,\end{cases}$$

где $\Gamma'_k=\Gamma_k\cup(\Gamma\cap F_k)$, $\Gamma''_k=\Gamma\cap F_k$, когда контур Γ_k ориентирован против часовой стрелки и $\Gamma'_k=\Gamma\cap F_k$, $\Gamma''_k=\Gamma_k\cup(\Gamma\cap F_k)$ в противном случае. Ветви этих функций выбираются так же, как выше.

ТЕОРЕМА 2.4. *Для того чтобы функция $\varphi=\varphi_{t_1,\gamma_1}\cdot\ldots\cdot\varphi_{t_n,\gamma_n}$ допускала факторизацию в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы она была $\{p,\rho\}$-неособенной. Если функция φ является $\{p,\rho\}$-неособенной, то ее факторизация в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$ имеет вид*

$$\varphi=\varphi_-\,t^{\varkappa}\varphi_+,$$

где $\varkappa=\operatorname{ind}\varphi^{p,\rho}$,

$$\varphi_+=\varphi^{+}_{t_1,\gamma'_1}\cdot\ldots\cdot\varphi^{+}_{t_n,\gamma'_n}f_1^{+}\cdots f_n^{+},\tag{2.5}$$

$$\varphi_-=\varphi^{-}_{t_1,\gamma'_1}\cdot\ldots\cdot\varphi^{-}_{t_n,\gamma'_n}f_1^{-}\cdot\ldots\cdot f_n^{-},$$

$$\gamma'_k=\gamma_k-\varkappa_k,\qquad \varkappa_k=\operatorname{ind}\varphi^{p,\rho}_{t_k,\gamma_k}\quad(k=1,\ldots,n)$$

и

$$f_k^{+}(t)=\begin{cases}1 & \text{при } t\in\Gamma'_k,\\ (t-z_k)^{-\varkappa_k} & \text{при } t\in\Gamma\setminus\Gamma'_k,\end{cases}\qquad f_k^{-}(t)=\begin{cases}t^{-\varkappa_k} & \text{при } t\in\Gamma''_k,\\ \left(\dfrac{t-z_k}{t}\right)^{-\varkappa_k} & \text{при } t\in\Gamma\setminus\Gamma''_k.\end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция φ является $\{p,\rho\}$-неособенной. Так как функции φ_{t_k,γ_k} не имеют общих точек разрыва, то в силу теоремы I.I каждая из функций φ_{t_k,γ_k} является $\{p,\rho\}$-неособенной и $\varkappa=\varkappa_1+\ldots+\varkappa_n$.

В силу теоремы 2.2 числа $\gamma_k' = \gamma_k - æ_k$ удовлетворяют условиям

$$\frac{1+\beta_k}{p} - 1 < Re\, \gamma_k' < \frac{1+\beta_k}{p}.$$

Повторяя доказательство теоремы 2.3, можно показать, что функция $\varphi_0 = \varphi_{t_1,\gamma_1'} \cdot \ldots \cdot \varphi_{t_n,\gamma_n'}$ допускает факторизацию $\varphi_0 = \varphi_0^- \varphi_0^+$ в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$ с множителями

$$\varphi_0^- = \varphi_{t_1,\gamma_1'}^- \cdot \ldots \cdot \varphi_{t_n,\gamma_n'}^-, \qquad \varphi_0^+ = \varphi_{t_1\gamma_1'}^+ \cdot \ldots \cdot \varphi_{t_n\gamma_n'}^+.$$

Функция $f(t) = \varphi_{t_1,æ_1} \cdot \ldots \cdot \varphi_{t_n,æ_n}$ непрерывна на Γ. Легко видеть, что равенство $f = f_- t^{æ} f_+$, где $f_- = f_1^- \cdot \ldots \cdot f_n^-$ и $f_+ = f_1^+ \cdot \ldots \cdot f_n^+$, дает факторизацию функции f (в смысле § 3, гл. Ш). Так как множители $f_\pm$ и $f_\pm^{-1}$ ограничены на Γ, то равенство $\varphi = \varphi_- t^{æ} \varphi_+$, где $\varphi_- = \varphi_0^- f_-$ и $\varphi_+ = \varphi_0^+ f_+$, дает факторизацию функции φ в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$. Достаточность условий теоремы доказана. Необходимость этих условий вытекает из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2.5. Для того чтобы оператор $A = \varphi P_\Gamma + Q_\Gamma$ был нормально разрешим в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$, необходимо и достаточно, чтобы функция φ была $\{p,\rho\}$-неособенной. Если функция φ является $\{p,\rho\}$-неособенной, то оператор A является Φ-оператором и $Ind\, A = ind\, \varphi^{p,\rho}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно условий теоремы вытекает из теоремы 3.I, гл. УШ, и доказанной в предыдущей теореме возможности факторизации $\{p,\rho\}$-неособенной функции φ в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$.

Необходимость условий теоремы докажем от противного. Допустим, что оператор $A = \varphi P_\Gamma + Q_\Gamma$ нормально разрешим в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$ и существует пара чисел $\beta \in \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ и $\gamma \in \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, такая, что разность $\delta = (1+\beta)/p - Re\,\gamma$ является целым числом. Пусть для определенности $\beta = \beta_1$ и $\gamma = \gamma_1$. Покажем сначала, что оператор-функция $A(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \varphi_{t_1,\gamma_1+\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot \varphi_{t_n,\gamma_n+\varepsilon_n} P_\Gamma + Q_\Gamma$ непрерывна в точке $(0, 0, \ldots, 0)$. Пусть $t_0 \in \Gamma$ и Γ^0 – контур, полученный из Γ раздвоением точки t_0 на t_0^+ и t_0^-. Для каждого $\gamma_0 \in \mathbb{C}$ функцию φ_{t_0,γ_0} можно рассматривать как непрерывную функцию на Γ^0, если положить $\varphi_{t_0,\gamma_0}(t_0^\pm) = \varphi_{t_0,\gamma_0}(t_0 \pm 0)$. Аналогично, функцию $\varphi_{t_0,\gamma_0+\varepsilon}(t)$ можно рассматривать как непрерывную функцию от двух переменных t и ε $(t \in \Gamma^0,\ 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0)$, где ε_0 – некоторое положительное число. В силу равномерной непрерывности функции $\varphi_{t_0,\gamma_0+\varepsilon}(t)$ на $\Gamma_0\times[0,\varepsilon_0]$ имеет место равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{t\in\Gamma}|\varphi_{t_0,\gamma_0+\varepsilon}(t)-\varphi_{t_0,\gamma_0}(t)|=0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\lim_{\varepsilon_j\to 0; j=1,\dots,n}\sup_{t\in\Gamma}|\varphi_{t_1,\gamma_1+\varepsilon_1}(t)\cdot\ldots\cdot\varphi_{t_n,\gamma_n+\varepsilon_n}(t)-\varphi_{t_1,\gamma_1}(t)\cdot\ldots\cdot\varphi_{t_n,\gamma_n}(t)|=0.$$

Так как

$$\|A(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)-A(0,\dots,0)\|\leq\sup_{t\in\Gamma}|\varphi_{t_1,\gamma_1+\varepsilon_1}(t)\cdot\ldots-\varphi_{t_1,\gamma_1}(t)\cdot\ldots|\,\|P_\Gamma\|,$$

то оператор-функция $A(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ непрерывна в точке $(0,\dots,0)$. Согласно допущению оператор $A\,(=A(0,0,\dots,0))$ нормально разрешим. Кроме этого, $\varphi(t\pm 0)\neq 0\ (t\in\Gamma)$, следовательно, одно из чисел $\dim\operatorname{Ker}A$ либо $\dim\operatorname{CoKer}A$ равно нулю(см..теорему 5.3,гл. УП).Таким образом, оператор A является Φ-или $\Phi_\pm$-оператором. В силу теоремы об устойчивости индекса (см. гл. IУ) можно подобрать достаточно малые неотрицательные числа $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$ так, чтобы выполнялись следующие условия: I) операторы $A_1=A(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)$ и $A_2=A(-\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)$ являются Φ- или $\Phi_\pm$-операторами; 2) $\operatorname{Ind}A_1=\operatorname{Ind}A_2=\operatorname{Ind}A$ и 3) числа $(1+\beta_k)/p-\operatorname{Re}\gamma_k-\varepsilon_k$ не являются целыми. Пусть $\delta_k=(1+\beta_k)/p-\operatorname{Re}\gamma_k$ $(k=2,\dots,n)$, $\delta^\pm=(1+\beta_1)/p-\operatorname{Re}(\gamma_1\pm\varepsilon_1)$, а $\varkappa^\pm,\varkappa_2,\dots,\varkappa_n$ - целые числа, удовлетворяющие условиям $0<\varkappa^\pm+\delta^\pm<1$, $0<\varkappa_k+\delta_k<1$ $(k=2,\dots,n)$. Так как $\delta^+<\delta<\delta^-$ и δ - целое число, то $\varkappa^+\neq\varkappa^-$. Отсюда следует, что $\varkappa'\neq\varkappa''$, где $\varkappa'=\varkappa^++\varkappa_2+\ldots+\varkappa_n$ и $\varkappa''=\varkappa^-+\varkappa_2+\ldots+\varkappa_n$. В силу доказанного выше $\operatorname{Ind}A_1=-\varkappa'$ и $\operatorname{Ind}A_2=-\varkappa''$. Это противоречит тому, что $\operatorname{Ind}A_1=\operatorname{Ind}A_2$. Теорема доказана.

Из теоремы 3.I, гл. УП, и доказанной теоремы 2.5 вытекает необходимость условий теоремы 2.4.

Отметим,в частности, что в силу теоремы 2.4 функция $\varphi_{t_1,1/2}$ допускает факторизацию в пространстве $L_p(\Gamma)\ (1<p<\infty)$ в том и только том случае, когда $p\neq 2$. Этот пример уже рассматривался в § I, гл. УШ.

§ 3. Обращение сингулярных операторов на замкнутом контуре

В этом параграфе устанавливаются необходимые и достаточные условия односторонней обратимости сингулярных интегральных операторов с кусочно-непрерывными коэффициентами на замкнутом контуре Γ в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$.

ТЕОРЕМА 3.I. Пусть Γ – замкнутый контур $\rho(t)=\prod\limits_{k=1}^{n}|t-t_k|^{\beta_k}$ $(-1<\beta_k<p-1,\ k=1,\dots,n)$ и $a, b\in PC(\Gamma)$. Для того чтобы оператор $A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ был обратим хотя бы с одной стороны в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$a(t+0)b(t)f(t,\mu)+a(t)b(t+0)(1-f(t,\mu))\neq 0 \quad (t\in\Gamma,\ 0\leq\mu\leq 1). \tag{3.I}$$

Если условие (3.I) выполнено и $c=a/b$, то оператор A обратим, обратим слева, обратим только справа в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$ в зависимости от того, является ли число $\varkappa=\operatorname{ind} c^{p,\rho}$ равным нулю, положительным или отрицательным. Если $\varkappa>0$, то $\dim\operatorname{Coker}A=\varkappa$, если $\varkappa<0$, то $\dim\operatorname{Ker}A=-\varkappa$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено условие (3.I). Так как $f(t,0)=0$ и $f(t,1)=1$, то из условия (3.I) вытекает что $a(t\pm 0)b(t\pm 0)\neq 0$ $(t\in\Gamma)$. Пусть $c=ab^{-1}$ и $t_1,\dots,t_n$ – все точки разрыва функции c. Из условия (3.I) также вытекает, что $c^{p,\rho}(t,\mu)\neq 0$ $(t\in\Gamma,\ 0\leq\mu\leq 1)$ и, стало быть, функция c является $\{p,\rho\}$-неособенной. В силу теоремы I.2 отношение $c(t_k)/c(t_k+0)$ можно представить в виде $\exp(2\pi i\gamma_k)$,

$$\delta(t_k)/2\pi-1<\operatorname{Re}\gamma_k<\delta(t_k)/2\pi.$$

Пусть $\varphi=\varphi_{t_1,\gamma_1}\cdot\ldots\cdot\varphi_{t_n,\gamma_n}$; так как

$$c(t_k)/c(t_k+0)=\varphi(t_k)/\varphi(t_k+0) \quad (k=1,\dots,n),$$

то функция $d=c/\varphi$ непрерывна на Γ. Из равенства $c=d\varphi$ вытекает, что функция φ является $\{p,\rho\}$-неособенной и $\operatorname{ind} c^{p,\rho}=\operatorname{ind} d+\operatorname{ind}\varphi^{p,\rho}$. Из теоремы 3.I, гл. УШ, и теоремы 2.4 вытекает, что функция c допускает факторизацию в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$ и $\operatorname{ind} c\,|\,L_p(\Gamma,\rho)=\operatorname{ind} d+\operatorname{ind}\varphi^{p,\rho}$. В силу теоремы 3.I, гл. УШ, достаточность условий теоремы доказана. Необходимость условия (3.I) вытекает из следующего предположения.

---

* Определение функции $f(t,\mu)$ см. на стр. 280

ЛЕММА 3.1. Пусть $a, b \in PC(\Gamma)$, где Γ - замкнутый контур. Если оператор $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ является Φ- или $\Phi_\pm$-оператором, то функции a и b удовлетворяют условию (3.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть оператор A является Φ - или $\Phi_\pm$ -оператором. В силу теоремы 1.1, гл. VII, $a(t \pm 0) \neq 0$, $b(t \pm 0) \neq 0$ $(t \in \Gamma)$. Функцию $c = a/b$ можно представить в виде $c = \varphi d$, где d - непрерывная функция на Γ, а $\varphi = \varphi_{t_1, \gamma_1} \cdot \ldots \cdot \varphi_{t_n \gamma_n}$. В соответствии с этим оператор A представим в виде

$$A = b(\varphi P_\Gamma + Q_\Gamma)(dP_\Gamma + Q_\Gamma) + T, \tag{3.2}$$

где T - вполне непрерывный оператор. Так как d непрерывна и отлична от нуля на Γ, то оператор $dP_\Gamma + Q_\Gamma$ является Φ-оператором. Отсюда следует, что оператор $\varphi P_\Gamma + Q_\Gamma$ является (так же, как и A) Φ - или $\Phi_\pm$ -оператором. Из теоремы 2.5 вытекает, что функция φ является $\{p, \rho\}$ -неособенной. Стало быть, функция c также является $\{p, \rho\}$ -неособенной. Отсюда следует справедливость условия (3.1).

Для доказательства последнего утверждения теоремы достаточно воспользоваться теоремой 6.1, гл. VII.

Из доказанной теоремы и теоремы 3.1, гл. VIII, вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть $a \in PC(\Gamma)$. Для того чтобы функция a допускала факторизацию в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$, необходимо и достаточно, чтобы она была $\{p, \rho\}$-неособенной. Если функция a является $\{p, \rho\}$-неособенной, то $\operatorname{ind} a | L_p(\Gamma, \rho) = \operatorname{ind} a^{p, \rho}$.

В § 4, гл. VIII, было показано, что если функция a/b допускает факторизацию в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$, то с помощью множителей факторизации можно получить формулу для оператора, обратного с соответствующей стороны к оператору $aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ $(P_\Gamma aI + Q_\Gamma bI)$ и описать базис ядра и коядра оператора A, а также условия разрешимости уравнения $A\varphi = \psi$. В силу доказанного выше это можно сделать, если функция $c = a/b$ является $\{p, \rho\}$ -неособенной на замкнутом контуре Γ. Для составного (не обязательно замкнутого) контура аналогичные результаты устанавливаются в следующем параграфе.

§ 4. Составной контур

Результаты предыдущего параграфа переносятся на любой составной контур Γ. Для этого дополним контур Γ до замкнутого контура $\tilde{\Gamma}$, а коэффициенты a и b $(\in PC(\Gamma))$ сингулярного оператора $A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ продолжим на контур $\tilde{\Gamma}$, полагая

$$\tilde{a}(t)=\begin{cases} a(t) & \text{при } t\in\Gamma, \\ 1 & \text{при } t\in\tilde{\Gamma}\setminus\Gamma, \end{cases} \qquad \tilde{b}(t)=\begin{cases} b(t) & \text{при } t\in\Gamma, \\ 1 & \text{при } t\in\tilde{\Gamma}\setminus\Gamma. \end{cases} \tag{4.1}$$

Применяя результаты предыдущего параграфа к операторам $\tilde{A}=\tilde{a}P_{\tilde{\Gamma}}+\tilde{b}Q_{\tilde{\Gamma}}$ с коэффициентами $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ из $PC(\tilde{\Gamma})$, с помощью теоремы 1.1, гл. VII, получим соответствующие результаты для оператора A, действующего в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$. Будем считать, что $0\notin\Gamma$, а контур $\tilde{\Gamma}$ выбран так, что точка $z=0$ принадлежит области $F^+_{\tilde{\Gamma}}$, ограниченной контуром $\tilde{\Gamma}$.

Условимся в дальнейшем функции из $PC(\Gamma)$, где Γ - составной контур, считать непрерывными на концах разомкнутых дуг контура Γ. Обозначим через $\tau_1,\dots,\tau_m$ и $\tau_{m+1},\dots,\tau_{2m}$ соответственно начала и концы всех разомкнутых дуг контура Γ. Каждой функции $a\in PC(\Gamma)$, числу p и весу ρ поставим в соответствие функцию $a^{p,\rho}=a^{p,\rho}(t,\mu)$, определенную следующими равенствами.

Если точка t отлична от концов $\tau_1,\dots,\tau_{2m}$ контура Γ, то

$$a^{p,\rho}(t,\mu)=a(t+0)f(t,\mu)+a(t)(1-f(t,\mu)) \quad (0\le\mu\le 1),$$

где $f(t,\mu)=f_{\delta(t)}(\mu)$, а $f_{\delta(t)}(\mu)$ - функция, определенная равенствами (1.2) и (1.3); если t совпадает с одним из концов, то

$$a^{p,\rho}(\tau_k,\mu)=a(\tau_k)f(\tau_k,\mu)+1-f(\tau_k,\mu) \quad (k=1,\dots,m)$$

и

$$a^{p,\rho}(\tau_k,\mu)=a(\tau_k)(1-f(\tau_k,\mu)+f(\tau_k,\mu) \quad (k=m+1,\dots,2m).$$

Множество значений функции $a^{p,\rho}$ является объединением множества значений функции a, конечного числа дуг окружностей (или отрезков прямой) $\ell(a(t_k),a(t_k+0),\delta(t_k))$, соединяющих предельные значения $a(t_k)$ и $a(t_k+0)$ функции a в ее точках разрыва t_k, а также $2m$ дуг (или отрезков) $\ell(1, a(\tau_k); \delta(\tau_k))$ $(k=1,\dots,m)$ и $\ell(a(\tau_k), 1; \delta(\tau_k))(k=m+1,\dots,2m)$, соединяющих точки τ_k с точкой $u=1$.

Множество значений функции $a^{p,\rho}(t\in\Gamma, 0\le\mu\le 1)$, очевидно, совпадает с множеством значений функции $\tilde{a}^{p,\rho}(t\in\tilde{\Gamma}, 0\le\mu\le 1)$, где функция $\tilde{a}$ определена равенством (4.I) на замкнутом контуре $\tilde{\Gamma}$.

В случае составного контура Γ функция $a\in PC(\Gamma)$ называется $\{p,\rho\}$ -неособенной, если $a^{p,\rho}(t,\mu)\ne 0\,(t\in\Gamma, 0\le\mu\le 1)$.

Пусть a - $\{p,\rho\}$-неособенная функция, тогда ее $\{p,\rho\}$-индексом называется число*

$$ind\, a^{p,\rho} \overset{def}{=} ind\, \tilde{a}^{p,\rho}.$$

ТЕОРЕМА 4.I. Пусть $a, b\in PC(\Gamma)$, где Γ- составной контур. Для того чтобы оператор $A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma\,(P_\Gamma aI+Q_\Gamma bI)$ был обратим с какой-либо стороны в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $a(t+0)b(t)f(t,\mu)+a(t)b(t+0)(1-f(t,\mu))\ne 0\;(t\in\Gamma\setminus\{\tau_1,\dots,\tau_{2m}\})$;

2) $a(\tau_k)f(\tau_k,\mu)+b(\tau_k)(1-f(\tau_k,\mu))\ne 0\quad(k=1,\dots,m)$;

3) $a(\tau_k)(1-f(\tau_k,\mu))+b(\tau_k)f(\tau_k,\mu)\ne 0\quad(k=m+1,\dots,2m)$.

Если эти условия выполнены и $c=a/b$, то оператор A обратим, обратим только слева, обратим только справа в зависимости от того, является ли число $æ=ind\, c^{p,\rho}$ равным нулю, положительным или отрицательным.

Если $æ>0$, то $\dim Coker A=æ$, если же $æ<0$, то $\dim \ker A=|æ|$.

Эта теорема немедленно следует из теоремы I.I, гл. УП, и теоремы 3.I, если заметить, что условия 1) - 3) теоремы 4.I совпадают с условиями (3.I), записанным для функций $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, определенных равенством (4.I) на замкнутом контуре $\tilde{\Gamma}$.

---

* $\{p,\rho\}$ -индекс функции на замкнутом контуре определен в § I.

Пусть $a\in L_\infty(\Gamma)$, $b\in G L_\infty(\Gamma)$, $c=a/b$ – $\{p,\rho\}$ –неособенная функция из $PC(\Gamma)$, тогда функция $\tilde c$ является $\{p\rho\}$ –неособенной на замкнутом контуре $\tilde\Gamma$ и, стало быть, она допускает факторизацию $\tilde c=\tilde c_- t^{\varkappa}\tilde c_+$ в пространстве $L_p(\tilde\Gamma,\rho)$, где $\varkappa=\operatorname{ind} c^{p,\rho}$. Операторы $\tilde A=\tilde a P_{\tilde\Gamma}+\tilde b Q_{\tilde\Gamma}$ и $A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ обратимы с некоторой стороны. Из теоремы . I.I, гл. УП, вытекает, что соответствующий обратный A^{-1} к оператору A является сужением на подпространство $L_p(\Gamma,\rho)(\subset L_p(\tilde\Gamma,\rho))$ оператора $\chi\tilde A^{-1}$, где $\chi(t)\,(t\in\tilde\Gamma)$ – характеристическая функция контура Γ. Из теоремы 4.I, гл. УШ, вытекает также

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть Γ – составной контур, $a\in L_\infty(\Gamma)$, $b\in G L_\infty(\Gamma)$, $c=a/b$ – $\{p,\rho\}$ неособенная функция и $\varkappa=\operatorname{ind} c^{p,\rho}$. Тогда операторы A^{-1} и B^{-1}, обратные к операторам $A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ и $B=P_\Gamma aI+Q_\Gamma bI$ с соответствующей стороны, определяются равенствами

$$A^{-1}=c_-a^{-1}(bP_\Gamma+aQ_\Gamma)b^{-1}c_-^{-1}I,\quad B^{-1}=b^{-1}c_+^{-1}(P_\Gamma b+Q_\Gamma a)a^{-1}c_+I, \tag{4.2}$$

в которых через $c_\pm$ обозначены сужения на Γ множителей $\tilde c_\pm$ факторизации $\tilde c=\tilde c_- t^{\varkappa}\tilde c_+$ функции $\tilde c$ в пространстве $L_p(\tilde\Gamma,\rho)$.

При $\varkappa<0$

$$\operatorname{Ker} A=\mathcal{L}\{g,gt,\dots,gt^{-\varkappa-1}\} \text{ и } \operatorname{Ker} B=\mathcal{L}\{h,ht,\dots,ht^{-\varkappa-1}\},$$

где $g=c_+^{-1}-c_-t^{\varkappa}$, $h=c_+^{-1}b^{-1}$.

При $\varkappa>0$

$$\operatorname{Coker} A=\mathcal{L}\{bc_-,bc_-t,\dots,bc_-t^{\varkappa-1}\},$$

$$\operatorname{Coker} B=\mathcal{L}\{d^{-1},d^{-1}t,\dots,d^{-1}t^{\varkappa-1}\},$$

где $d=c_-^{-1}-c_+t^{\varkappa}$.

Уравнение $A\varphi=f$ разрешимо в том и только том случае, когда выполняется условие

$$\int_\Gamma f(t)b^{-1}(t)c_-^{-1}(t)t^{-j}dt=0\ (j=1,\dots,\varkappa),$$

а уравнение $B\varphi=f$ — в том и только том случае, когда

$$\int_{\Gamma} f(t)d(t)t^{-j}dt=0 \quad (j=1,\dots,\varkappa).$$

Рассмотрим случай, когда удается эффективно произвести факторизации функции c в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$.

Пусть $\{p,\rho\}$ -неособенная функция c является кусочно-гельдеровой на Γ. Последнее означает, что контур Γ можно разбить на конечное число контуров, на каждом из которых функция c удовлетворяет условию Гельдера. В этом случае функция $\tilde{c}$ является $\{p,\rho\}$ -неособенной и кусочно-гельдеровой на замкнутом контуре $\tilde{\Gamma}$.

Пусть $\tau_1,\dots,\tau_n$ — все точки разрыва функции $\tilde{c}$. В силу теоремы I.2 отношения $\tilde{c}(\tau_k)/\tilde{c}(\tau_k+0)$ можно представить в виде $exp(2\pi i\gamma_k)$, где $\delta(\tau_k)-2\pi<2\pi\gamma_k<\delta(\tau_k)$. Пусть $\tilde{\varphi}=\varphi_{\tau_1,\gamma_1}\cdot\dots$ $\dots\cdot\varphi_{\tau_n,\gamma_n}$, где $\varphi_{\tau,\gamma}$ — функция, определенная на $\tilde{\Gamma}$ равенствами (2.2). В силу теоремы 2.4 функция $\tilde{\varphi}$ допускает факторизацию $\tilde{\varphi}=\tilde{\varphi}_-\tilde{\varphi}_+$ в пространстве $L_p(\tilde{\Gamma},\rho)$, где $\varphi_\pm$ — функции, определенные равенствами (2.5), в которых $f_k^\pm=1$.

Пусть $\tilde{d}=\tilde{c}/\tilde{\varphi}$. Легко проверить, что

$$\tilde{\varphi}(\tau_k)/\tilde{\varphi}(\tau_k+0)=exp(2\pi i\gamma_k)=\tilde{c}(\tau_k)/\tilde{c}(\tau_k+0),$$

стало быть, функция $\tilde{d}$ удовлетворяет условию Гельдера на всем контуре $\tilde{\Gamma}$. В силу теоремы 3.I, гл. Ш, функция $\tilde{d}$ допускает факторизацию $\tilde{d}=\tilde{d}_-t^{\varkappa}\tilde{d}_+$, где $\varkappa=ind\,\tilde{d}$, а множители $\tilde{d}_\pm$ определены равенствами (3.3), гл. Ш. Функции c_+ и c_- являются соответственно сужениями функций $\tilde{\varphi}_+\tilde{d}_+$ и $\tilde{\varphi}_-\tilde{d}_-$ на контур Γ.

Рассмотрим пример. Пусть $\Gamma_0=\{t:|t|=1\}$ и $\Gamma_1=\{t:|t|=4\}$ — две окружности, ориентированные против часовой стрелки, $a(t)$ — однозначная ветвь функции $(t-3)^{1/2}$, определяемая на плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль луча $\operatorname{Im} z=0$, $\operatorname{Re} z\geqslant 3$ и удовлетворяющая условию $a(4+0)=1$. Функция a непрерывна во всех точках контура $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_0$, кроме точки $t_0=4$. Через $\tilde{\Gamma}$ обозначим контур $\Gamma\cup\Gamma_2$, где $\Gamma_2=\{t:|t|=2\}$ — окружность, ориентированная по часовой стрелке. Пусть

$$\tilde{\varphi}(t)=\begin{cases}(t-3)^{1/2} & \text{при } t\in\Gamma_1,\\ 1 & \text{при } t\in\Gamma_0\cup\Gamma_2,\end{cases} \qquad \tilde{a}(t)=\begin{cases}(t-3)^{1/2} & \text{при } t\in\Gamma,\\ 1 & \text{при } t\in\Gamma_2\end{cases}$$

Найдем функции $n(\xi)$ и $s(\xi)$;

$$n(\xi)=\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{t^{\gamma-i\xi-1}}{1+t}dt=\frac{2e^{\pi(\xi+i\gamma)}}{e^{2\pi(\xi+i\gamma)}-1}$$

(см., например, И.С.Градштейн и И.М.Рыжик [I], стр. 306).

Непосредственным вычислением можно показать, что

$$s(\xi)=\frac{e^{2\pi(\xi+i\gamma)}+1}{e^{2\pi(\xi+i\gamma)}-1}. \qquad (7.4)$$

Эту формулу можно доказать и следующим методом. Так как $S^2=I$ и

$$RSR^{-1}=\begin{pmatrix} s(\xi) & -n(\xi)\\ n(\xi) & -s(\xi)\end{pmatrix},$$

то

$$\begin{pmatrix} s^2-n^2 & 0\\ 0 & s^2-n^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

стало быть,

$$s(\xi)^2=1+n(\xi)^2. \qquad (7.5)$$

Кроме того, спектр оператора S в пространстве $L_p(R^+,t^\beta)$ (см. последний пример предыдущего параграфа) совпадает с дугой $\ell(-1,1;2\pi\gamma)$. Так как множество значений функции $s(\xi)$ содержится в спектре оператора S, то

$$\operatorname{Im} s(\xi)>0 \quad \text{при } \gamma>\frac{1}{2};\quad \operatorname{Im} s(\xi)<0 \quad \text{при } \gamma<\frac{1}{2}. \qquad (7.6)$$

Условия (7.5) и (7.6) однозначно определяют функцию $s(\xi)$. Обозначим $s(\xi)$ через ζ, тогда $n(\xi)=\sqrt{\zeta^2-1}$, где под $\sqrt{\zeta^2-1}$ понимается однозначная непрерывная ветвь, принимающая значение $1/i\sin\pi\gamma$ при $\zeta=-i\,ctg(\pi\gamma/2)$. Таким образом, оператор RAR^{-1} является оператором умножения на матрицу-функцию

$$\mathcal{A}(\zeta)=\begin{pmatrix} c_2+d_2\zeta & -d_2\sqrt{\zeta^2-1}\\ d_1\sqrt{\zeta^2-1} & c_1-d_1\zeta\end{pmatrix},$$

где $\zeta=s(\xi)$ – переменная, пробегающая дугу $\ell(-1,1,2\pi\gamma)$.

Рассмотрим простой пример. В предыдущем параграфе было показано, что оператор S обратим в пространстве $L_p(R^+)$ $(1<p<\infty)$ в том и только том случае, когда $p\neq 2$. Найдем сбратный оператор. Пусть $R_0 = M W_{1/p}$, где M и $W_{1/p}$ – операторы, определенные выше, $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^+)$, $\psi = S\varphi$ и $\hat{\varphi} = R_0 \varphi$. Тогда $R_0 S R_0^{-1} \hat{\varphi} = \hat{\psi}$ и в силу доказанного выше $s(\xi)\hat{\varphi}(\xi) = \hat{\psi}(\xi)$. Таким образом,

$$\hat{\psi}(\xi) = \frac{e^{2\pi(\xi+i\gamma)} - 1}{e^{2\pi(\xi+i\gamma)} + 1}\, \hat{\varphi}(\xi),$$

где $\gamma = 1/p$. Равенство (7.4) выведено при $0 < \gamma < 1$. Учитывая это, функцию $\hat{\psi}(\xi)$ запишем следующим образом;

$$\hat{\psi}(\xi) = \frac{e^{2\pi(\xi+i\gamma-i/2)} + 1}{e^{2\pi(\xi+i\gamma-i/2)} - 1}\, \hat{\varphi}(\xi), \qquad \text{если } p > 2$$

и

$$\hat{\psi}(\xi) = \frac{e^{2\pi(\xi+i\gamma+i/2)} - 1}{e^{2\pi(\xi+i\gamma+i/2)} + 1}\, \hat{\varphi}(\xi), \qquad \text{если } p < 2.$$

Произведем обратное преобразование Фурье, учитывая, что $(W_{1/p} f)(t) = f(t)\, t^{1/p}$. Пусть $2 < p < \infty$, тогда

$$t^{1/p}\psi(t) = \frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \varphi(\tau)\tau^{1/p}\, \frac{(t\tau^{-1})^{1/p-1/2}}{1 - t\tau^{-1}}\, \frac{d\tau}{\tau},$$

стало быть,

$$\psi(t) = \int_0^\infty \sqrt{\frac{\tau}{t}}\, \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau.$$

Отсюда вытекает, что при $p > 2$

$$(S^{-1}\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \sqrt{\frac{\tau}{t}}\, \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau. \qquad (7.6)$$

Аналогично при $1 < p < 2$

$$(S^{-1}\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \sqrt{\frac{t}{\tau}}\, \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau. \qquad (7.7)$$

Отметим, что оператор, определенный правой частью равенства (7.6), является обратным к оператору S и в пространстве $L_p(\mathbb{R}^+, t^\beta)$, если $2(1+\beta) < p$, а оператор в правой части равенства (7.7) – обратным к оператору S, если $2(1+\beta) < p$. При $p = 2(1+\beta)$ оператор S не является обратимым ни с какой стороны (он не является даже нормально разрешимым).

§ 8. Критерий ограниченности оператора S_Γ

В этом параграфе выясняются необходимые и достаточные условия ограниченности оператора S_Γ сингулярного интегрирования в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$. Покажем, что условия теоремы 4.I, гл. I, являются не только достаточными, но и необходимыми для ограниченности оператора S_Γ.

ТЕОРЕМА 8.I. Пусть Γ – составной контур, $t_1,\dots,t_N$ – различные точки на Γ; $\beta_1,\dots,\beta_N$ – произвольные вещественные числа и

$$\rho(t)=\prod_{k=1}^{N}|t-t_k|^{\beta_k}.$$

Для того чтобы оператор S_Γ сингулярного интегрирования вдоль Γ был ограничен в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$ $(1<p<\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы числа β_k удовлетворяли условиям

$$-1<\beta_k<p-1 \quad (k=1,2,\dots,N). \tag{8.I}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность условий (8.I) доказана в теореме 4.I, гл. I. Докажем необходимость этих условий. Пусть оператор S_Γ ограничен в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$. Зафиксируем некоторое число $\tau(\tau=1,\dots,N)$ и обозначим через $\gamma\subset\Gamma$ некоторую одностороннюю окрестность точки t_τ, не содержащую остальных точек t_j $(j\neq\tau)$. Так как оператор S_Γ ограничен в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$, то он, очевидно, ограничен и в пространстве $L_p(\gamma,\rho)$; но $L_p(\gamma,\rho)=L_p(\gamma,|t-t_\tau|^{\beta_\tau})$, стало быть, оператор $S=S_{\Gamma_\tau}$ ограничен в пространстве $L_p(\gamma,|t-t_\tau|^{\beta})$, где $\beta=\beta_\tau$. Покажем, что $-1<\beta<p-1$. Допустим, что это соотношение не выполнено, тогда существует число $\lambda\,(0\leq\lambda\leq 1)$, такое, что либо $\beta\lambda=-1$, либо $\beta\lambda=p-1$. Так как оператор S ограничен в пространстве $L_p(\gamma)$ и в пространстве $L_p(\gamma,|t-t_\tau|^{\beta})$, то в силу интерполяционной теоремы I.4, гл. I, оператор S ограничен в пространстве $L_p(\gamma,|t-t_\tau|^{\lambda\beta})$. Покажем, что это невозможно, то есть что оператор S неограничен в пространствах $L_p(\gamma,|t-t_\tau|^{-1})$ и $L_p(\gamma,|t-t_\tau|^{p-1})$.

Пусть для определенности точка t_τ является началом дуги γ. Конец этой дуги обозначим через $\tilde{t}$. Рассмотрим оператор $A=I-bS$, где b – непрерывная функция на γ, удовлетворяющая условиям $b(\tilde{t})=0$, $1-b^2(t)\neq 0$ и

$$b(t_\tau)=\begin{cases} i\,tg\,\pi/p, & \text{если } p\neq 2,\\ 2, & \text{если } p=2.\end{cases}$$

Покажем, что оператор A обратим с какой-либо стороны в любом пространстве $L_s(\gamma)$ $(s\neq p)$ и не обратим в пространстве $L_p(\gamma)$ ни с какой стороны. Для этого воспользуемся теоремой 5.2. Пусть $g=(1-b)(1+b)^{-1}$, тогда $g(t_\tau)=e^{-2\pi i/p}$ при $p\neq 2$, стало быть, $-\frac{1}{2\pi i}\,Ln\,g(t_\tau)=\frac{1}{p}+n$, где n – целое число. Разность $1/p-1/s$ является целым числом в том и только том случае, когда $p=s$. При $p=2$ $g(t_\tau)=-1/3$, стало быть, $Re((-1/2\pi i)Ln\,g(t_\tau))=1/2+n$ и снова разность $1/2+n-1/s$ является целым числом в том и только том случае, когда $s=2$.

Будем считать, что функция b удовлетворяет на γ условию Гельдера. Тогда при $s<p$ оператор, обратный с соответствующей стороны к оператору $A=I-bS$, можно записать в виде

$$A^{-1}=(1-b^2)^{-1}(I-bZSZ^{-1}I) \tag{8.2}$$

(см. (5.4) и (5.7)), где $Z(t)=|t-t_\tau|^{-1/p}f(t)$ (напомним, что $Re(-\frac{1}{2\pi i}Ln\,g(t_\tau))=1/p$), а функции $f(t)$ и $1/f(t)$ ограничены на γ. Так как оператор A не обратим в $L_p(\gamma)$ ни с какой стороны, то оператор A^{-1} неограничен в пространстве $L_p(\Gamma)$. Отсюда вытекает, что оператор $|t-t_\tau|^{-1/p}S|t-t_\tau|^{1/p}$ неограничен в пространстве $L_p(\gamma)$ и, стало быть, оператор S неограничен в пространстве $L_p(\gamma,|t-t_\tau|^{-1})$.

Осталось проверить неограниченность оператора S в пространстве $L_p(\gamma,|t-t_\tau|^{p-1})$. Для этого заметим, что оператор A^{-1}, обратный к оператору A в пространствах $L_s(\gamma)$ при $s>p$, в силу (5.4) и (5.7) также записывается в виде (8.2), только в этом случае $Z(t)=f(t)|t-t_\tau|^{1-1/p}$. Аналогично предыдущему случаю отсюда вытекает неограниченность оператора S в пространстве $L_p(\gamma|t-t_\tau|^{p-1})$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 8.1. Пусть $t_1,\dots,t_N$ – различные точки вещественной оси $\mathbb{R}$ и $\rho_0(t)=$

$=|t^2+1|^{\beta/2}\prod\limits_{k=1}^{N}|t-t_k|^{\beta_k}$, где $\beta, \beta_1, \ldots, \beta_N$ – некоторые вещественные числа. Для того чтобы оператор $S_{\mathbb{R}}$ был ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{R}, \rho_0)$ $(1<p<\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы числа $\beta, \beta_1, \ldots, \beta_N$ удовлетворяли следующим условиям:

$$-1<\beta_k<p-1 \ \ (k=1,\ldots,N), \ \ -1<\beta+\sum_{k=1}^{N}\beta_k<p-1.$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 5.I, гл. I. Оно сводится к случаю окружности отображением пространства $L_p(\mathbb{R}, \rho_0)$ на пространство $L_p(\Gamma_0, \rho)$.

§ 9. Оценки норм операторов P_Γ, Q_Γ и S_Γ

В этом параграфе в качестве одного из приложений результатов этой главы будут получены оценки снизу для фактор-норм, а стало быть, и для норм операторов P_Γ, Q_Γ и S_Γ, действующих в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$.

Пусть Γ – составной контур, $\rho(t)=\prod\limits_{k=1}^{N}|t-t_k|^{\beta_k}$ $(-1<\beta_k<p-1;\ 1<p<\infty)$; $\tau_k=p(1+\beta_k)^{-1}$ $(k=1,\ldots,N)$, $\tau_0=p$, $\bar{\tau}_k=max(\tau_k, \tau_k(\tau_k-1)^{-1})$

и $\tau=max(\bar{\tau}_0, \bar{\tau}_1, \ldots, \bar{\tau}_N)$.

ТЕОРЕМА 9.I. Для замкнутого составного контура Γ имеют место следующие оценки:

$$\inf_{T\in\mathcal{T}(L_p(\Gamma,\rho))} \|P_\Gamma+T\| \geqslant 1/\sin\frac{\pi}{\tau}, \tag{9.I}$$

$$\inf_{T\in\mathcal{T}(L_p(\Gamma,\rho))} \|Q_\Gamma+T\| \geqslant 1/\sin\frac{\pi}{\tau}, \tag{9.2}$$

$$\inf_{T\in\mathcal{T}(L_p(\Gamma,\rho))} \|S_\Gamma+T\| \geqslant ctg\frac{\pi}{2\tau}. \tag{9.3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $\inf \| P_\Gamma + T \| < 1/\sin\frac{\pi}{\tau}$. Обозначим через a какую-нибудь функцию из $PC(\Gamma)$, принимающую на контуре Γ два значения $\cos\frac{\pi}{\tau}\exp(i\pi/\tau)$ и $\cos\frac{\pi}{\tau}\exp(-i\pi/\tau)$, причем

$$a(t_m+0) = \begin{cases} \cos\frac{\pi}{\tau}\exp(i\pi/\tau), & \text{если } \bar{\tau}_m = \tau_m(\tau_m-1)^{-1}, \\ \cos\frac{\pi}{\tau}\exp(-i\pi/\tau), & \text{если } \bar{\tau}_m = \tau_m, \end{cases}$$

$$a(t_m-0) = \begin{cases} \cos\frac{\pi}{\tau}\exp(-i\pi/\tau), & \text{если } \bar{\tau}_m = \tau_m(\tau_m-1)^{-1}, \\ \cos\frac{\pi}{\tau}\exp(i\pi/\tau), & \text{если } \bar{\tau}_m = \tau_m, \end{cases}$$

где t_m – точка, для которой $\tau = \bar{\tau}_m$. Так как $a(t_m-0)/a(t_m+0) = \exp(2\pi i/\bar{\tau}_m)$, то в силу теоремы I.2 функция a не является $\{p,\rho\}$-неособенной. Согласно теореме 4.3 оператор $A = aP_\Gamma + Q_\Gamma$ не является Φ-оператором в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$. С другой стороны, $|a(t)-1| = |\cos^2\frac{\pi}{\tau} \pm i\sin\frac{\pi}{\tau}\cos\frac{\pi}{\tau} - 1| = \sin\frac{\pi}{\tau}$ и в силу допущения

$$\inf_{T\in\mathcal{T}(L_p(\Gamma,\rho))} \| B+T \| < 1,$$

где $B = (a-1)P_\Gamma$. Так как $A = aP_\Gamma + Q_\Gamma = I + B$, то в силу теоремы 7.2, гл. IУ, оператор A является Φ-оператором. Полученное противоречие доказывает справедливость соотношения (9.I). Аналогично доказывается соотношение (9.2): рассматривается функция a, принимающая два значения $\sec\frac{\pi}{\tau}\exp(i\pi/\tau)$ и $\sec\frac{\pi}{\tau}\exp(-i\pi/\tau)$. Эта функция также не является $\{p,\rho\}$-неособенной. Кроме этого, $|(1-a)/a| = \sin\pi/\tau$ и $A = a(I+(1-a)a^{-1}Q_\Gamma)$. Отсюда легко следует соотношение (9.2).

Наконец, для доказательства соотношения (9.3) рассмотрим функцию a, принимающую два значения $\exp(i\pi/\tau)$ и $\exp(-i\pi/\tau)$, и воспользуемся тем, что

$$aP_\Gamma + Q_\Gamma = \frac{a+1}{2}\left(I + \frac{a-1}{a+1}S_\Gamma\right)$$

и $|(a-1)(a+1)^{-1}| = tg(\pi/2\tau)$. Теорема доказана.

Если составной контур Γ содержит разомкнутые дуги, то доказательство теоремы 9.I не проходит из-за того, что точка t_m, для которой $\tau = \bar{\tau}_m$, может оказаться концом разомкнутой дуги. В случае, когда точка t_m является внутренней точкой составного контура Γ, теорема 9.I сохраняет силу. В частности, в пространстве $L_p(\Gamma)$ (без веса) $r=max(p,q)$ $(p^{-1}+q^{-1}=1)$, и в качестве t_m можно взять любую точку контура Γ. Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 9.2. Пусть Γ - составной контур, тогда для каждого $p(1<p<\infty)$ имеют место оценки

$$\inf_{T\in\mathcal{T}} \|P_\Gamma+T\|_p \geqslant \frac{1}{\sin\pi/p}, \quad \inf_{T\in\mathcal{T}} \|Q_\Gamma+T\|_p \geqslant \frac{1}{\sin\pi/p}, \tag{9.4}$$

$$\inf_{T\in\mathcal{T}} \|S_\Gamma+T\|_p \geqslant ctg\frac{\pi}{2p} \quad (2\leq p<\infty) \tag{9.5}$$

и

$$\inf_{T\in\mathcal{T}} \|S_\Gamma+T\|_p \geqslant tg\frac{\pi}{2p} \quad (1<p\leq 2). \tag{9.6}$$

Из оценок (9.5) и (9.6) и (2.I), гл. I, вытекает

ТЕОРЕМА 9.3. Пусть Γ_0 - единичная окружность, тогда для оператора S, действующего в пространстве $L_p(\Gamma_0)$, справедливы равенства

$$\|S\|_{L_p(\Gamma_0)}=ctg\frac{\pi}{2p} \quad (p=2^n;\ n=1,2,\dots);$$

$$\|S\|_{L_p(\Gamma_0)}=tg\frac{\pi}{2p} \quad (p=2^n(2^n-1)^{-1},\ n=1,2,\dots).$$

В заключение этого параграфа отметим, что теоремы 9.2 и 9.3 без изменения переносятся на случай, когда Γ - вещественная ось или ее некоторая часть.

Теорема 9.I переносится на пространство $L_p(R, \rho_0)$, где
$\rho_0(t)=(1+t^2)^{\beta/2}\prod_{k=1}^{N}|t-t_k|^{\beta_k}$ $(-1<\beta_k<p-1,\ 1<p<\infty,\ -1<\sum_{k=1}^{N}\beta_k+\beta<p-1)$.
Необходимо лишь в ее формулировке положить $r=max(\bar{r}_0,\bar{r}_1,\dots,\bar{r}_N,\bar{s})$, где

$$r_0=p,\quad r_k=p(1+\beta_k)^{-1}\ (k=1,\dots,N) \qquad s=p(p-1-\beta-\sum_{k=1}^{N}\beta_k)^{-1}.$$

Пусть Γ - составной контур. Обозначим через $H_\mu(\Gamma,t_1,\dots,t_n)$ $(0<\mu<1)$ множество всех функций на Γ, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем μ всюду на Γ, за исключением, быть может, точек $t_1,\dots,t_n$, в которых они непрерывны слева и могут иметь разрывы первого рода. Напомним (см. § 6, гл. I), что через $H^o_\mu(\Gamma,\rho)$, где $\rho(t)=\prod_{k=1}|t-t_k|^{\alpha_k}$, обозначается банахово пространство функций φ, удовлетворяющих условию $\rho\varphi\in H^o_\mu(\Gamma,t_1,\dots,t_n)$, где $H^o_\mu(\Gamma,t_1,\dots,t_n)$ - подпространство пространства $H_\mu(\Gamma)$, состоящее из всех функций, обращающихся в нуль в точках $t_1,\dots,t_n$. Будем предполагать, что множество $\{t_1,\dots,t_n\}$ содержит концы и начала всех разомкнутых дуг контура Γ.

Пусть заданы числа $\mu,\alpha_1,\dots,\alpha_n$, удовлетворяющие условиям

$$0<\mu<1,\quad \mu<\alpha_k<\mu+1\quad (k=1,\dots,n) \tag{10.1}$$

и $\rho(t)=\prod_{k=1}^{n}|t-t_k|^{\alpha_k}$. Каждой функции $a\in H_\mu(\Gamma,t_1,\dots,t_n)$ сопоставим функцию $a^{\mu,\rho}:\Gamma\times[0,1]\to\mathbb{C}$, определенную следующим образом. Если точка $t\in\Gamma$ не является началом или концом разомкнутой дуги, то полагаем $a^{\mu,\rho}(t,x)=a(t)$ при $t\neq t_1,\dots,t_n$ и $a^{\mu,\rho}(t_k,x)=a(t_k+0)f_{\lambda_k}(x)+a(t_k)(1-f_{\lambda_k}(x))$ $(0\le x\le 1)$, где $\lambda_k=2\pi(\alpha_k-\mu)$, а $f_{\lambda_k}(x)$ - функция, определённая в § I. В точках t_k являющихся началом или концом разомкнутой дуги контура Γ, полагаем соответственно

$$a^{\mu,\rho}(t_k,x)=f_{\lambda_k}(x)a(t_k)+1-f_{\lambda_k}(x)$$

и

$$a^{\mu,\rho}(t_k,x)=f_{\lambda_k}(x)+a(t_k)(1-f_{\lambda_k}(x)).$$

Функцию $a\ (\in H_\mu(\Gamma,t_1,\dots,t_n))$ назовем $H_{\mu,\rho}$-неособенной, если $a^{\mu,\rho}(t,x)\neq 0$ $(t\in\Gamma,\ 0\le x\le 1)$. Если функция a является $H_{\mu,\rho}$-неособенной, то ее $H_{\mu,\rho}$-индексом назовем число оборотов вокруг точки $z=0$ кривой, являющейся множеством значений функции $a^{\mu,\rho}$.

ТЕОРЕМА 10.1. Пусть $a,b\in H_\mu(\Gamma,t_1,\dots,t_n)$. Для того чтобы оператор $A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ $(A=P_\Gamma aI+Q_\Gamma bI)$ был Φ-оператором в пространстве $H^o_\mu(\Gamma,\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $b(t\pm 0)\neq 0 \quad (t\in\Gamma)$;

2) функция a/b является $H_{\mu,p}$-неособенной.

Если выполнены условия 1) – 2) и $\varkappa$ – $H_{\mu,p}$-индекс функции a/b, то оператор A обратим, обратим слева, обратим справа в пространстве $H^0_\mu(\Gamma,\rho)$ в зависимости от того, является ли число $\varkappa$ равным нулю, положительным или отрицательным. При $\varkappa<0$ $\dim\operatorname{Ker}A=|\varkappa|$, а при $\varkappa>0$ $\dim\operatorname{Coker}A=\varkappa$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай, когда Γ – замкнутый контур. Пусть выполнены условия 1) – 2) и $c=a/b$. Положим $p=2$, $\beta_k=2(\alpha_k-\mu)-1$ и $\rho_1(t)=\prod_{k=1}^{n}|t-t_k|^{\beta_k}$; легко видеть, что множества значений функции c^{2,ρ_1} (определенной в § 1) и $c^{\mu,p}$ совпадают. Отсюда следует, что функция c является $\{2,\rho_1\}$-неособенной. Так как, кроме этого, функция c является кусочно-гельдеровой, то ее можно представить в виде $c=\varphi d$, где $d\in H_\mu(\Gamma)$, $\varphi=\varphi_{t_1,\gamma_1}\cdot\ldots\cdot\varphi_{t_n,\gamma_n}$, $\alpha_k-\mu-1<\operatorname{Re}\gamma_k<\alpha_k-\mu$, а функции φ_{t_k,γ_k} определены равенством (2.2). Функция φ допускает факторизацию (в пространстве $L_2(\Gamma,\rho_1)$), множители которой можно представить в виде (см. § 2)

$$\varphi_+(t)=g_1(t)\prod_{k=1}^{n}(t-t_k)^{\gamma_k},\quad \varphi_-(t)=g_2(t)\prod_{k=1}^{n}(t-t_k)^{-\gamma_k},$$

где $g_1^{\pm1}\in H_\mu(\Gamma)$, $g_2^{\pm1}\in H_\mu(\Gamma)$. Функция $d\,(\in H_\mu(\Gamma))$ допускает факторизацию (см. § 3, гл. III) $d=d_-t^{\varkappa}d_+$, где $(d_\pm)^{\pm1}\in H_\mu(\Gamma)$. Таким образом, функция c допускает факторизацию $c=c_-t^{\varkappa}c_+$ в пространстве $L_2(\Gamma,\rho_1)$, причем ее множители удовлетворяют дополнительным условиям

$$c_+(t)=g_3(t)\prod_{k=1}^{n}(t-t_k)^{\gamma_k},\quad c_-(t)=g_4(t)\prod_{k=1}^{n}(t-t_k)^{-\gamma_k}, \tag{10.2}$$

где $g_3^{\pm1}\in H_\mu(\Gamma)$ и $g_4^{\pm}\in H_\mu(\Gamma)$. В силу теоремы 3.1 (см. также теорему 4.1, гл. VIII) оператор A обратим в пространстве $L_2(\Gamma,\rho_1)$ хотя бы с одной стороны, причем

$$(aP_\Gamma+bQ_\Gamma)^{-1}=c_+a^{-1}(bP_\Gamma+aQ_\Gamma)b^{-1}c_-^{-1}I,$$
$$(P_\Gamma aI+Q_\Gamma bI)^{-1}=b^{-1}c_+^{-1}(P_\Gamma bI+Q_\Gamma aI)a^{-1}c_+I.$$

Учитывая свойства (10.2) функций $C_\pm$, оператор A^{-1} можно представить в виде

$$A^{-1}=f_1 I+f_2\prod_{k=1}^{n}(t-t_k)^{-\gamma_k}S_\Gamma f_3\prod_{k=1}^{n}(t-t_k)^{\gamma_k}I,$$

где $f_1, f_2, f_3 \in H_\mu(\Gamma)$.

Покажем, что оператор A^{-1} ограничен в пространстве $H_\mu^0(\Gamma,\rho)$. Это, очевидно, эквивалентно тому, что оператор $\rho_0 A^{-1}\rho_0^{-1}I$, где $\rho_0(t)=\prod_{k=1}^{n}(t-t_k)^{\gamma_k}$, ограничен в пространстве $H_\mu^0(\Gamma,\rho\rho_0^{-1})$. Так как

$$\rho_0 A^{-1}\rho_0^{-1}I=f_1 I+f_2 S_\Gamma f_3 I, \qquad |\rho(t)\rho_0^{-1}(t)|=\prod_{k=1}^{n}|t-t_k|^{\alpha_k-\gamma_k}$$

и $\mu<\alpha_k-\operatorname{Re}\gamma_k<\mu+1$, то с помощью теоремы 6.2, гл. I, нетрудно доказать ограниченность оператора $\rho_0 A^{-1}\rho_0^{-1}I$ в пространстве $H_\mu^0(\Gamma,\rho\rho_0^{-1})$. Таким образом, оператор A^{-1} является обратным к оператору A с соответствующей стороны. Из теоремы 4.2 легко следует

$$\operatorname{Ker} A\,|\,L_2(\Gamma,\rho_1)=\operatorname{Ker} A\,|\,H_\mu^0(\Gamma,\rho)$$

и

$$\dim\operatorname{Coker} A\,|\,L_2(\Gamma,\rho_1)=\dim\operatorname{Coker} A\,|\,H_\mu^0(\Gamma,\rho_1).$$

Для случая, когда контур Γ замкнут, достаточность условий теоремы доказана. Общий случай сводится к рассмотренному с помощью теоремы 1.1, гл. VII, которая, очевидно, имеет место и в пространствах $H_\mu^0(\Gamma,\rho)$ и $H_\mu^0(\tilde\Gamma,\rho)$.

Доказательство необходимости условий теоремы можно найти в статье Р.В.Дудучавы [4].

§ 11. Сингулярные операторы в симметричных пространствах

Пусть Γ – составной контур. Симметричным пространством $E(\Gamma)$ называется банахово пространство комплекснозначных измеримых на Γ функций, удовлетворяющее двум условиям:

1) если $x\in E(\Gamma)$, y измерима на Γ и $|y(t)|\le|x(t)|$ $(t\in\Gamma)$, то $y\in E(\Gamma)$ и $\|y\|\le\|x\|$;

2) если $x\in E(\Gamma)$, y измерима и

$$mes\{t\in\Gamma: |x(t)|>\sigma\} = mes\{t\in\Gamma: |y(t)|>\sigma\}$$

при любом $\sigma>0$, то $y\in E(\Gamma)$ и $\|x\|=\|y\|$.

Для симметричного пространства $E=E(\Gamma)$ через $\varphi_E(t)$ обозначим фундаментальную функцию пространства $E(\Gamma)$, то есть $\varphi_E(t)=\|\chi_u\|$, где χ_u – характеристическая функция любой дуги $u\subset\Gamma$ длины t. Положим

$$m(E)=\underline{\lim}_{t\to 0}\frac{\varphi_E(2t)}{\varphi_E(t)}, \qquad M(E)=\overline{\lim}_{t\to 0}\frac{\varphi_E(2t)}{\varphi_E(t)}.$$

Пусть $x\in E(\Gamma)$; функцию $f:[0,mes\,\Gamma]\to\mathbb{R}$, измеримую на отрезке $[0,mes\,\Gamma]$, назовем равноизмеримой с функцией x, если

$$mes\{t\in\Gamma: |x(t)|>\sigma\} = mes\{s\in[0,mes\,\Gamma];\ f(s)>\sigma\}$$

при любом $\sigma>0$. Обозначим через E_0 множество всех функций $f(s)$ ($0\le s\le mes\,\Gamma$), каждая из которых равноизмерима с некоторой функцией $x_f\in E(\Gamma)$. Множество E_0 является симметричным банаховым пространством с нормой $\|f\|_{E_0}=\|x_f\|_{E(\Gamma)}$. Обозначим через W_u линейный оператор, определенный на E_0 равенством

$$(W_u f)(s) = \begin{cases} f\left(\frac{s}{u}\right) & \text{при} \quad 0\le s\le u\, mes\,\Gamma, \\ 0 & \text{при} \quad s>u\, mes\,\Gamma. \end{cases}$$

Будем в дальнейшем предполагать, что пространство $E(\Gamma)$ удовлетворяет условию

$$\|W_u\|_{E_0}\le C\sup_s\frac{\varphi_E(us)}{\varphi_E(s)} \quad (0<u<\infty). \tag{II.0}$$

При этом условии имеет место интерполяционная теорема Е.М.Семенова.

ТЕОРЕМА II.I. Пусть $0\le\alpha_j\le 1$ $(j=1,2)$ и для симметричного пространства $E(\Gamma)$ выполнены соотношения

$$2^{\alpha_1}<m(E), \quad M(E)<2^{\alpha_2}.$$

Если линейный оператор A ограничен в пространствах $L_p(\Gamma)$ для всех $p\in(\alpha_2^{-1},\alpha_1^{-1})$, то оператор A ограничен в пространстве $E(\Gamma)$.

Если симметричное пространство $E(\Gamma)$ сепарабельно, то $C(\Gamma)$ плотно в $E(\Gamma)$ (см. Е.М.Семенов [2], теорема I.4), стало быть, линеал $R(\Gamma)$ также плотен в $E(\Gamma)$. Предположим, что Γ — замкнутый составной контур, тогда оператор S_Γ переводит $R(\Gamma)$ в себя (см. § I, гл. I). Если оператор S_Γ ограничен на $R(\Gamma)$ по норме $E(\Gamma)$, то распространим его по непрерывности на все пространство $E(\Gamma)$.

В дальнейшем будем рассматривать лишь такие сепарабельные пространства $E(\Gamma)$, в которых оператор S ограничен. Так как S_Γ ограничен во всех пространствах $L_p(\Gamma)$ $(1<p<\infty)$, то в силу теоремы II.I он ограничен в любом сепарабельном симметричном пространстве $E(\Gamma)$, для которого

$$1<m(E),\quad M(E)<2.$$

В частности, оператор S ограничен в любом рефлексивном пространстве Орлича и в любом равномерном выпуклом пространстве Лоренца Λ (см. D.Boyd [I]). Все результаты о сингулярных интегральных операторах с непрерывными коэффициентами на замкнутом контуре из главы III и IV сохраняют силу в этих пространствах. Результаты этой главы допускают следующее обобщение.

ТЕОРЕМА II.2. Пусть Γ — замкнутый составной контур, $a,b\in PC(\Gamma)$ и $E(\Gamma)$ — симметричное сепарабельное пространство, удовлетворяющее условиям

$$1<m(E)=M(E)<2. \tag{II.1}$$

Для того чтобы оператор $A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ $(A=P_\Gamma aI+Q_\Gamma bI)$ был обратим в пространстве $E(\Gamma)$ хотя бы с одной стороны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$a(t+0)b(t)f_\delta(\mu)+a(t)b(t+0)(1-f_\delta(\mu))\neq 0\quad (t\in\Gamma,\ 0\le\mu\le 1), \tag{II.2}$$

где $\delta=2\pi\log_2 M(E)$.

Если выполнено условие (II.2) и $c=a/b$, то оператор A обратим, обратим только слева, обратим только справа в пространстве $E(\Gamma)$ в зависимости от того, является ли число $\mathscr{x}=\operatorname{ind} c^{p_0,1}$ $(p_0=1/\log_2 M(E))$ равным нулю, положительным или отрицательным. Если $\mathscr{x}>0$, то $\dim \operatorname{Coker} A=\mathscr{x}$, если $\mathscr{x}<0$, то $\dim \ker A=|\mathscr{x}|$.

Доказательство этой теоремы в пространстве $E(\Gamma)$ проводится так же, как доказательство теоремы 3.I. Необходимо лишь пояснить, почему оператор $\varphi_+^{-1} P_\Gamma \varphi_-^{-1}$, участвующий в определении факторизации функции $\varphi=\varphi_{t_1\gamma_1}\cdots\varphi_{t_n,\gamma_n}$ в пространстве $L_{p_0}(\Gamma)$ (в данном случае при $p_0=1/\log_2 M(E)$) ограничен в пространстве $E(\Gamma)$.

Из условия (II.2) вытекает, что $b(t\pm 0)\neq 0$ и функция $c=a/b$ является p_0-неособенной ($p_0=1/\log_2 M(E)$). Нетрудно видеть, что всякая p_0-неособенная функция является p-неособенной для всех p из интервала $(p_0-\varepsilon, p_0+\varepsilon)$, где ε – некоторое положительное число. В силу теоремы 2.4 функция φ допускает факторизацию в каждом пространстве $L_p(\Gamma)$ $(p\in(p_0-\varepsilon, p_0+\varepsilon))$, стало быть, в каждом из них ограничен оператор $\varphi_+^{-1} P_\Gamma \varphi_-^{-1}$. Из теоремы II.I вытекает ограниченность оператора $\varphi_+^{-1} P_\Gamma \varphi_-^{-1}$ в пространстве $E(\Gamma)$. Теорема доказана.

Для случая, когда $m(E)\neq M(E)$, можно привести лишь достаточные условия односторонней обратимости оператора A. Достаточно, чтобы условие (II.2) выполнялось для всех δ из интервала

$$2\pi \log_2 m(E)\leq \delta\leq 2\pi \log_2 M(E). \tag{II.3}$$

Последнее означает, что $b(t\pm 0)\neq 0$ и функция $c=a/b$ является p-неособенной для всех p из отрезка $[\log_2^{-1} M(E), \log_2^{-1} m(E)]$.

Отметим, что с помощью множителей $c_\pm$ факторизации p-неособенной функции c в пространстве $L_p(\Gamma)$ можно выписать формулы для ядра и коядра оператора A в пространстве $E(\Gamma)$, условие разрешимости уравнения $A\varphi=\psi$, а также формулу для оператора, обратного к A с соответствующей стороны.

ГЛАВА X

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА СЛОЖНОМ КОНТУРЕ

В этой главе результаты предыдущей главы обобщаются на случай сложного контура. Глава состоит из трех параграфов. Первые два носят вспомогательный характер, а в третьем доказывается основная теорема.

§ 1. Вспомогательные предложения

В этом параграфе Γ будет обозначать замкнутый сложный контур, состоящий из n простых замкнутых кривых $\Gamma_1,\dots,\Gamma_n$, имеющих одну общую точку t_0. Будем также предполагать, что области* $F^+_{\Gamma_j}(=F^+_j)$ попарно не пересекаются и при обходе вокруг точки t_0 против часовой стрелки область F^+_{j+1} следует за областью $F^+_j\ (j=1,\dots,n-1)$. Контур Γ ориентирован так, что при обходе кривой Γ_j область F^+_j остается слева. Обозначим через $PC_0(\Gamma)$ множество функций a, непрерывных в каждой точке $t\in\Gamma$, отличной от точки t_0, и имеющих конечные пределы $a_j(t_0+0)$ и $a_j(t_0-0)$ $(j=1,\dots,n)$ при стремлении t к t_0 вдоль Γ_j по дуге, направленной соответственно от точки t_0 и к точке t_0. Через $PC_+(\Gamma)$ обозначим множество функций f из $PC_0(\Gamma)$, для которых $f_j(t_0+0)=f_j(t_0-0)\ (j=1,\dots,n)$, а через $PC_-(\Gamma)$ – множество функций f из $PC_0(\Gamma)$, для которых $f_j(t_0+0)=f_{j+1}(t_0-0)(j=1,\dots,n-1)$ и $f_n(t_0+0)=f_1(t_0-0)$. Пересечение $PC_+(\Gamma)\cap PC_-(\Gamma)$ совпадает с множеством $C(\Gamma)$ всех функций, непрерывных на Γ.

Пусть $\rho(t)=\prod\limits_{k=0}^{m}|t-t_k|^{\beta_k}$, где $t_0,t_1,\dots,t_m$ – различные точки на Γ и β_k – вещественные числа, удовлетворяющие условиям

---

* Напомним, что F^+_Γ обозначает область, ограниченную контуром Γ.

$-1<\beta_k<p-1\ (k=0,1,\dots,m)$. Согласно теореме 4.3, гл. I, для любой функции $a\in C(\Gamma)$ операторы $aP_\Gamma-P_\Gamma aI$ и $aQ_\Gamma-Q_\Gamma aI$ вполне непрерывны в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$. Для функций из $PC_\pm(\Gamma)$ имеют место следующие предложения.

ЛЕММА I.I. Если $a\in PC_+(\Gamma)$, то оператор $P_\Gamma aP_\Gamma-aP_\Gamma$ вполне непрерывен в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функцию a можно представить в виде $a=bg$, где $b\in C(\Gamma)$, а функция g постоянна на каждой кривой Γ_j. Покажем, что $P_\Gamma gP_\Gamma=gP_\Gamma$. Пусть r – рациональная функция из $R(\Gamma)$ (см. гл. I, § I); в силу теоремы I.I, гл. I, $P_\Gamma r=r_+\in R_+(\Gamma)$. Так как функция gr_+ отличается лишь постоянным множителем от функции r_+ на каждом Γ_j, то $S_\Gamma gr_+=gr_+$ при $t\in\Gamma_j$ и $S_{\Gamma_j}gr_+=0$ в остальных точках контура Γ. Отсюда следует, что $S_\Gamma gP_\Gamma r=gP_\Gamma r$, стало быть, $S_\Gamma gP_\Gamma=gP_\Gamma$, или $P_\Gamma gP_\Gamma=gP_\Gamma$. Так как, кроме этого, оператор $P_\Gamma bI-bP_\Gamma$ вполне непрерывен и $a=bg$, то оператор $P_\Gamma aP_\Gamma-aP_\Gamma$ вполне непрерывен. Лемма доказана.

ЛЕММА I.2. Если $a\in PC_-(\Gamma)$, то оператор $Q_\Gamma aQ_\Gamma-aQ_\Gamma$ вполне непрерывен в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s_1,\dots,s_n$ некоторые точки, принадлежащие соответственно множествам $F_1^+,\dots,F_n^+$ и $g_j\ (j=1,\dots,n)$ – однозначная ветвь функции

$$g_j(t)=\alpha_j\left(\frac{t-s_j}{t-s_{j+1}}\right)^{\delta_j}\quad (s_{n+1}=s_1),$$

где α_j и $\delta_j\in\mathbb{C}$, голоморфная в расширенной комплексной плоскости с разрезом, соединяющим точки s_j и s_{j+1} и лежащим в $F_j^+\cup F_{j+1}^+\cup\{t_0\}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\inf\limits_{t\in\Gamma}|a(t)|\neq 0$. Числа α_j и δ_j можно подобрать так, чтобы отношение $a(t)/g_j(t)$ стремилось к единице при $t\to t_0$ вдоль по дуге, направленной к t_0, и функция $g_j(t)$ стремилась к единице при $t\to t_0$ вдоль Γ_j по дуге, направленной от точки t_0. В силу выбора разреза функции $g_j\in PC_-(\Gamma)$. Положим $g=g_1\cdot\ldots\cdot g_n$. Легко видеть, что функция $b=a/g$ непрерывна на Γ.

Покажем, что $Q_\Gamma gQ_\Gamma=gQ_\Gamma$. Пусть r – произвольная функция из $R(\Gamma)$. В силу теоремы I.I, гл. I, $Q_\Gamma r=r_-$. Функция gr_- голоморфна в F_-, непрерывна в $\bar F_-\setminus\{t_0\}$, ограничена в окрестности точки t_0 и равна нулю на бесконечности. В силу теоремы 4.8, гл.II, $Q_\Gamma gr_-=gr_-$ и, стало быть, $Q_\Gamma gQ_\Gamma=gQ_\Gamma$. Лемма доказана.

Из лемм I.I и I.2 вытекает, что если $a \in PC_+(\Gamma)$ и $b \in PC_-(\Gamma)$, то

$$Q_\Gamma a Q_\Gamma - Q_\Gamma a I \in \mathcal{T}(L_p(\Gamma,\rho)), \quad P_\Gamma b P_\Gamma - P_\Gamma b I \in \mathcal{T}(L_p(\Gamma,\rho)), \tag{I.I}$$

где $\mathcal{T}(L_p(\Gamma,\rho))$ – множество всех вполне непрерывных операторов, действующих в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$. Таким образом, имеет место

ЛЕММА I.3. Пусть a и b – произвольные функции, принадлежащие одновременно одному из множеств $PC_+(\Gamma)$ либо $PC_-(\Gamma)$, тогда операторы $P_\Gamma a P_\Gamma b P_\Gamma - P_\Gamma a b P_\Gamma$ и $Q_\Gamma a Q_\Gamma b Q_\Gamma - Q_\Gamma a b Q_\Gamma$ вполне непрерывны в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$.

ТЕОРЕМА I.I. Пусть a и b – произвольные функции, принадлежащие одновременно одному из множеств $PC_+(\Gamma)$ либо $PC_-(\Gamma)$. Для того чтобы оператор $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ был Φ-оператором в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\inf_{t\in\Gamma} |a(t)| > 0 \qquad \inf_{t\in\Gamma} |b(t)| > 0. \tag{I.2}$$

Если это условие выполнено, то

$$\operatorname{Ind} A = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n} \left[\arg b(t)/a(t)\right]_{\Gamma_j}. \tag{I.3}$$

Если условие (I.2) нарушено, то оператор A не является ни Φ_+ – ни Φ_- -оператором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим вначале, что функции a и $b \in PC_+(\Gamma)$ и выполняется условие (I.2). Положим $c = ab^{-1}$. Очевидно, $c \in PC_+(\Gamma)$. В силу леммы I.I оператор A представим в виде

$$A = b(P_\Gamma c P_\Gamma + Q_\Gamma) + T, \tag{I.4}$$

где $T \in \mathcal{T}(L_p(\Gamma,\rho))$. С помощью леммы I.3 убеждаемся в том, что оператор

$$M = (P_\Gamma c^{-1} P_\Gamma + Q_\Gamma) b^{-1} I$$

является регуляризирующим для оператора A. Стало быть, в силу теоремы 7.I$'$, гл. IУ, оператор A является Φ-оператором в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$. Определим функции $c^{(k)}$, полагая

$$c^{(k)}(t) = \begin{cases} c(t) & \text{при } t \in \Gamma_k, \\ 1 & \text{при } t \in \Gamma \setminus \Gamma_k. \end{cases}$$

Очевидно, $c^{(k)} \in PC_+(\Gamma)$ и $c = c^{(1)} c^{(2)} \dots c^{(n)}$. В силу леммы I.I оператор A можно представить в виде

$$A = b \prod_{k=1}^{n} (c^{(k)} P_\Gamma + Q_\Gamma) + T_1 \quad (T_1 \in \mathfrak{J}).$$

Так как функции $c^{(k)}$ непрерывны на Γ_k, то (см. теорему 7.I, гл. Ш*) операторы $c^{(k)} P_{\Gamma_k} + Q_{\Gamma_k}$ являются Φ-операторами в пространствах $L_p(\Gamma_k, \rho)$, причем

$$\operatorname{Ind}(c^{(k)} P_{\Gamma_k} + Q_{\Gamma_k}) = -\frac{1}{2\pi} [\arg c^{(k)}(t)]_{\Gamma_k}.$$

В силу теоремы I.I, гл. УП, $\operatorname{Ind}(c^{(k)} P_\Gamma + Q_\Gamma) = \operatorname{Ind}(c^{(k)} P_{\Gamma_k} + Q_{\Gamma_k})$. Из теоремы 6.I, гл. IУ, следует, что

$$\operatorname{Ind} A = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Ind}(c^{(k)} P_\Gamma + Q_\Gamma).$$

Отсюда и из предыдущих равенств вытекает равенство (I.3).

Докажем теперь, что если оператор A является Φ- или $\Phi_\pm$-оператором и функции $a, b \in PC_+(\Gamma)$, то выполняется условие (I.2), функцию b можно аппроксимировать функцией $d \in PC_+(\Gamma)$, такой, что $\inf_{t \in \Gamma} |d(t)| > 0$ и оператор $A_1 = aP_\Gamma + dQ_\Gamma$ продолжает оставаться Φ- или $\Phi_\pm$-оператором. Оператор A_1 представим в виде

$$A_1 = d \prod_{k=1}^{n} (g^{(k)} P_\Gamma + Q_\Gamma) + T_2, \tag{I.5}$$

где $g = ad^{-1}$ и T_2 - вполне непрерывный оператор. При перестановке сомножителей в первом слагаемом из правой части (I.5) меняется лишь вполне непрерывный оператор T_2. Следовательно, согласно теореме 7.I$'$, гл. IУ, все операторы $g^{(k)} P_\Gamma + Q_\Gamma$ являются одновременно Φ- или $\Phi_\pm$-операторами в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$.

---

* Теорема 7.I, гл. Ш, была сформулирована для контура, состоящего из ляпуновских кривых. Она, очевидно, имеет место и для кусочно-ляпуновского контура Γ.

В силу теоремы I.I, гл. УП, оператор $g^{(k)}P_{\Gamma_k} + Q_{\Gamma_k}$ $(k=1,2,\dots,n)$ является Φ - или $\Phi_\pm$ -оператором в пространстве $L_p(\Gamma_k,\rho)$. Так как функция $g^{(k)}$ непрерывна на контуре Γ_k, то в силу теоремы 7.3, гл. IУ, функция $g^{(k)} \in GC(\Gamma_k)$. Отсюда вытекает, что

$$\inf_{t\in\Gamma} |g(t)| > 0$$

и, стало быть, выполняется первое из условий (I.3).

Представим теперь оператор A в виде

$$A = a(P_\Gamma + Q_\Gamma f Q_\Gamma)(I + P_\Gamma f Q_\Gamma),$$

где $f = a^{-1}b$. Операторы aI и $I + P_\Gamma f Q_\Gamma$ обратимы, стало быть, оператор $A_2 = P_\Gamma + Q_\Gamma f Q_\Gamma$ является Φ - или $\Phi_\pm$ -оператором. Учитывая равенство

$$A_2 = \prod_{k=1}^{n} (P_\Gamma + Q_\Gamma f^{(k)} I) + T_3,$$

где $T_3 \in \mathcal{T}(L_p(\Gamma,\rho))$, заключаем, что все операторы $P_\Gamma + Q_\Gamma f^{(k)} I$ являются одновременно Φ -, Φ_+ - или Φ_- -операторами в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$. Вместе с ними Φ -, Φ_+ -или Φ_- -операторами являются также операторы $P_{\Gamma_k} + Q_{\Gamma_k} f^{(k)} I$ в соответствующих пространствах $L_p(\Gamma_k,\rho)$. Так как функции $f^{(k)}|\Gamma_k \in C(\Gamma_k)$, то в силу теоремы 7.3, гл. IУ, $f^{(k)}|\Gamma_k \in GC(\Gamma_k)$. Стало быть,

$$\inf_{t\in\Gamma} |f(t)| > 0.$$

Отсюда вытекает второе соотношение из (I.3).

Для случая, когда $a, b \in PC_+(\Gamma)$, теорема доказана. Перейдем к случаю $a, b \in PC_-(\Gamma)$. Оператор A представляется в виде $A = a(P_\Gamma + Q_\Gamma c Q_\Gamma) + T$, где $c = b/a$ и $T \in \mathcal{T}(L_p(\Gamma,\rho))$. Регуляризирующим для него служит оператор $M = (P_\Gamma + Q_\Gamma c^{-1} Q_\Gamma)a^{-1}I$. Доказательство необходимости условия теоремы и вывод формулы для индекса проводятся так же, как в случае $PC_+(\Gamma)$, с той разницей, что функция c разлагается в произведение $c = c^{(0)}c^{(1)}\cdot\ldots\cdot c^{(n)}$ иным образом. Пусть $\tau_1,\dots,\tau_n$ - некоторые точки, принадлежащие соответственно $\Gamma_1,\dots,\Gamma_n$, отличные от t_0 и разбивающие контур Γ на n разомкнутых дуг $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ (содержащих t_0). Через $c^{(0)}$ обозначим некоторую функцию, непрерывную на Γ и обладающую следующими свойствами: 1) $c^{(0)}(t) \neq 0$ $(t\in\Gamma)$; 2) $c^{(0)}(\tau_k) = c(\tau_k)$ $(k = 1,\dots,n)$ и 3) $\operatorname{ind} c^{(0)} = 0$. Положим

$$c^{(k)}(t) = \begin{cases} c(t)/c^{(0)}(t) & \text{при} \quad t\in \gamma_k , \\ 1 & \text{при} \quad t \in \Gamma\setminus\gamma_k \end{cases} \quad (k=1,\dots,n).$$

ко видеть, что

$$\mathrm{Ind}\, A = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ind}\,(P_{\gamma_k} + c^{(k)} Q_{\gamma_k}) \tag{I.6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} [\arg b(t)/a(t)]_{\Gamma_k} = \sum_{k=1}^{n} [\arg c^{(k)}(t)]_{\gamma_k}. \tag{I.7}$$

к как функция $c^{(k)}(k=1,\dots,n)$ непрерывна на γ_k и равна едице на концах дуги γ_k, то (см. теорему 4.I, гл. IX)

$$\mathrm{Ind}(P_{\gamma_k} + c^{(k)} Q_{\gamma_k}) = \frac{1}{2\pi}[\arg c^{(k)}(t)]_{\Gamma_k}.$$

Отсюда с помощью (I.6) и (I.7) вытекает формула (I.3). Теорема доказана.

§ 2. Подготовительная теорема

В этом параграфе рассматриваются сингулярные операторы с коэффициентами из $PC_0(\Gamma)$ в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$, где контур Γ и вес ρ те же, что и в предыдущем параграфе.

ТЕОРЕМА 2.I. Пусть $a, b \in PC_0(\Gamma)$. Для того чтобы оператор A был Φ-или $\Phi_\pm$-оператором в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\inf_{t\in\Gamma} |a(t)| > 0, \quad \inf_{t\in\Gamma} |b(t)| > 0 \tag{2.I}$$

и

$$c_1(t_0+0)\cdot\ldots\cdot c_n(t_0+0) f_\delta(\mu) + c_1(t_0-0)\cdot\ldots\cdot c_n(t_0-0)(1-f_\delta(\mu)) \neq 0, \tag{2.2}$$

где $\delta = 2\pi(1+\beta_0)/p$, $c = ab^{-1}$, $0 \le \mu \le 1$,

$$c_j(t_0\pm 0)=\lim_{t\to t_0\pm 0;\, t\in\Gamma_j} c(t)$$

и

$$f_\delta(u)=\begin{cases}\dfrac{\sin\theta u}{\sin\theta}e^{i\theta(u-1)} & (\theta=\pi-\delta), \text{ если } \delta\neq\pi,\\ u, & \text{если } \delta=\pi.\end{cases}$$

Если выполнены условия (2.I) и (2.2), то оператор A является Φ-оператором и

$$\operatorname{Ind} A=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n}[\arg c(t)]_{t\in\Gamma_j}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\Big[\arg(c_1(t_0+0)\cdot\ldots\cdot c_n(t_0+0)f_\delta(u)+$$

$$+c_1(t_0-0)\cdot\ldots\cdot c_n(t_0-0)(1-f_\delta(u))\Big]_{u=0}^{1}. \qquad (2.3)$$

Для доказательства этой теоремы понадобится

ЛЕММА 2.I. Всякую функцию $c\in PC_0(\Gamma)$, удовлетворяющую условиям $c_j(t_0\pm 0)\neq 0$, можно представить в виде $c=f x g$, где $g\in PC_+(\Gamma)$, $f\in PC_-(\Gamma)$, а x - функция, удовлетворяющая следующим условиям: I) $x(t)=1$ при $t\in\Gamma\setminus\Gamma_1$; 2) $x_1(t_0-0)=1$ и 3) $x_1(t_0+0)=c_1(t_0+0)\cdot\ldots\cdot c_n(t_0+0)/c_1(t_0-0)\cdot\ldots\cdot c_n(t_0-0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x - произвольная функция из $PC_0(\Gamma)$, удовлетворяющая условиям I) – 3) и не обращающаяся в нуль на Γ. Обозначим через g некоторую функцию из $PC_+(\Gamma)$, для которой $g_k(t_0+0)=c_1(t_0+0)\cdot\ldots\cdot c_k(t_0+0)/c_1(t_0-0)\cdot\ldots\cdot c_{k-1}(t_0-0)$. Будем считать, что $\inf|g(t)|>0$ $(t\in\Gamma)$. Положим $f=cg^{-1}x^{-1}$. Так как $f_k(t_0-0)=f_{k+1}(t_0+0)=c_1(t_0-0)\cdot\ldots\cdot c_k(t_0-0)/c_1(t_0+0)\cdot\ldots\cdot c_k(t_0+0)$ $(k=1,\ldots,n-1)$ и $f_n(t_0-0)=f_1(t_0+0)=c_1(t_0-0)\cdot\ldots\cdot c_n(t_0-0)/c_1(t_0+0)\cdot\ldots\cdot c_n(t_0+0)$, то $f\in PC_-(\Gamma)$.

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть выполнены условия (2.I) и (2.2). Представим функцию $c=aB^{-1}$ в виде $c=fxg$, где x, f и g - функции, удовлетворяющие условиям леммы. Тогда в силу леммы I.I и I.2 имеет место равенство

$$cP_\Gamma+Q_\Gamma=f(xP_\Gamma+Q_\Gamma)(gP_\Gamma+f^{-1}Q_\Gamma)+T, \qquad (2.4)$$

где $T\in\mathcal{J}(L_p(\Gamma,\rho))$. Оператор $gP_\Gamma+f^{-1}Q_\Gamma$ является Φ-оператором, так как он обладает регуляризирующим оператором $g^{-1}P_\Gamma+fQ_\Gamma$. Согласно теореме I.I, гл. УП, оператор $xP_\Gamma+Q_\Gamma$ является Φ-, Φ_+- или Φ_--оператором в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$ в том и только том случае, когда оператор $xP_{\Gamma_1}+Q_{\Gamma_1}$ является соответственно Φ-, Φ_+- или Φ_--оператором в пространстве $L_p(\Gamma_1,\rho)$. Из условий (2.I) и (2.2) вытекает, что

$$\inf_{t\in\Gamma_1}|x(t)|\neq 0 \quad \text{и} \quad x_1(t_0+0)f_\delta(\mu)+x_1(t_0-0)(1-f_\delta(\mu))\neq 0 \quad (0\leq\mu\leq 1).$$

В силу теоремы 3.I, гл. IX, оператор $xP_{\Gamma_1}+Q_{\Gamma_1}$ является Φ-оператором в пространстве $L_p(\Gamma_1,\rho)$ и, стало быть, оператор $xP_\Gamma+Q_\Gamma$ является Φ-оператором в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$. Достаточность условий (2.I) и (2.2) доказана. Докажем их необходимость.

Покажем сначала, что оператор $A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ не может быть $\Phi_\pm$-оператором. В самом деле, каждую пару функций a и b из $PC_0(\Gamma)$ можно равномерно аппроксимировать с любой степенью точности функциями a' и b' из $PC_0(\Gamma)$ (например, кусочно-рациональными функциями), удовлетворяющими условиям (2.I) и (2.2). Тогда оператор $A'=a'P_\Gamma+b'Q_\Gamma$ в силу доказанного выше является Φ-оператором. Так как оператор A' достаточно близок по норме к оператору A, то в силу теорем 6.4, гл. IУ, оператор A является Φ-оператором.

Покажем, что $\inf_{t\in\Gamma}|a(t)|>0$. Допустим противное, то есть что оператор A является Φ-оператором и $\inf_{t\in\Gamma}|a(t)|=0$. Тогда, очевидно, можно подобрать оператор $D=dP_\Gamma+bQ_\Gamma$, достаточно близкий по норме к оператору A, так, чтобы функция d удовлетворяла следующим условиям: $d(\tau)=0$, где τ - некоторая точка на Γ, отличная от t_0, а $d(t')\neq 0$ и $d(t'')\neq 0$, где t', t'' - концы некоторой дуги ℓ, содержащей точку τ и не содержащей точку t_0.

Пусть g - произвольная функция, непрерывная на Γ, отличная от нуля на $\Gamma\setminus\ell$ и совпадающая с d на ℓ, а h- функция, равная единице на ℓ и dg^{-1} на $\Gamma\setminus\ell$. Тогда $d=gh$ и, стало быть, $D=(hP_\Gamma+bQ_\Gamma)(gP_\Gamma+Q_\Gamma)+T$, где T - вполне непрерывный оператор. Так как оператор D является Φ-оператором, то в силу теоремы I5.2, гл. IУ, оператор $gP_\Gamma+Q_\Gamma$ является Φ- или Φ_+-оператором. Последнее невозможно, так как функция g непрерывна на Γ и равна нулю в точке τ.

Таким образом, $\inf_{t\in\Gamma}|a(t)|>0$. Аналогично доказывается, что $\inf_{t\in\Gamma}|b(t)|>0$.

Докажем необходимость условия (2.2). Для этого оператор $cP_\Gamma + Q_\Gamma$, где $c=a/b$ представим в виде (2.4). Так как оператор $cP_\Gamma + Q_\Gamma$ является Φ-оператором, то оператор $xP_\Gamma + Q_\Gamma$ является Φ_+- или Φ_--оператором (см. теорему I5.I, гл. IУ). Как уже отмечалось выше, отсюда следует, что оператор $xP_{\Gamma_1} + Q_{\Gamma_1}$ является Φ_+- или Φ_--оператором в пространстве $L_p(\Gamma_1, \rho)$. Из теоремы 3.I, гл. IX, вытекает, что $x_1(t_0+0)f_\delta((u)) + x_1(t_0-0)(1-f_\delta((u)))\neq 0$ $(0\leq u\leq 1)$, откуда следует (2.2).

Осталось доказать справедливость формулы (2.3). Так как $\operatorname{Ind} A = \operatorname{Ind}(cP_\Gamma + Q_\Gamma)$, то в силу равенства (2.4), и вытекающего из леммы I.2 равенства $gP_\Gamma + f^{-1}Q_\Gamma = (gP_\Gamma + Q_\Gamma)f^{-1}(fP_\Gamma + Q_\Gamma) + T$ $(T\in \mathcal{T}(L_p(\Gamma,\rho))$ будем иметь

$$\operatorname{Ind} A = \operatorname{Ind}(xP_\Gamma + Q_\Gamma) + \operatorname{Ind}(gP_\Gamma + Q_\Gamma) + \operatorname{Ind}(fP_\Gamma + Q_\Gamma). \tag{2.5}$$

Из теоремы 3.I, гл. IX, и теоремы I.I, гл. УП, следует, что

$$\begin{gathered}\operatorname{Ind}(xP_\Gamma + Q_\Gamma) = \operatorname{Ind}(xP_{\Gamma_1} + Q_{\Gamma_1})|L_p(\Gamma_1,\rho) = -\frac{1}{2\pi}[\arg x(t)]_{\Gamma_1} - \\ -\frac{1}{2\pi}\left[\arg(x_1(t_0+0)f_\delta((u)) + x_1(t_0-0)(1-f_\delta((u)))\right]_{u=0}^{1}.\end{gathered} \tag{2.6}$$

В силу теоремы I.I

$$\operatorname{Ind}(gP_\Gamma + Q_\Gamma) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n}[\arg g(t)]_{\Gamma_j} \tag{2.7}$$

и

$$\operatorname{Ind}(fP_\Gamma + Q_\Gamma) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n}[\arg f(t)]_{\Gamma_j}. \tag{2.8}$$

Из равенств (2.5) - (2.8) вытекает (2.3). Теорема доказана.

Аналогичная теорема имеет место для оператора $A = P_\Gamma aI + Q_\Gamma bI$ $(a, b\in PC_0(\Gamma))$. Это вытекает из теоремы 6.I, гл. УП. Правда, чтобы воспользоваться этой теоремой, необходимо предварительно показать, что если оператор $P_\Gamma aI + Q_\Gamma bI$ является Φ_+- или Φ_--оператором, то

$$\inf_{t\in\Gamma}|a(t)|>0, \qquad \inf_{t\in\Gamma}|b(t)|>0. \tag{2.9}$$

Это доказывается так же, как и для оператора $aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ в теореме 2.I.

§ 3. Основная теорема

Пусть Γ – сложный контур и $PC(\Gamma)$ – множество функций, имеющих на Γ конечное число точек разрыва первого рода. Для каждой функции $a \in PC(\Gamma)$ и точки $t_0 \in \Gamma$ определим два числа $a(t_0+0)$ и $a(t_0-0)$ следующим образом. Пусть точка t_0 является общей точкой n разомкнутых дуг $\gamma_1,\ldots,\gamma_n (n=1,2,\ldots)$ и не является внутренней точкой ни для одной из этих дуг. Предположим, что дуги $\gamma_1,\ldots,\gamma_m$ $(m \leq n)$ направлены к точке t_0, а дуги $\gamma_{m+1},\ldots,\gamma_n$ – от точки t_0. При $0<m<n$ полагаем

$$a(t_0-0)=a_1(t_0-0)\cdot\ldots\cdot a_m(t_0-0),$$

$$a(t_0+0)=a_{m+1}(t_0+0)\cdot\ldots\cdot a_n(t_0+0), \tag{3.1}$$

где

$$a_j(t_0-0)=\lim_{t\to t_0,\, t\in\gamma_j} a(t) \quad (j=1,\ldots,m);$$

$$a_j(t_0+0)=\lim_{t\to t_0,\, t\in\gamma_j} a(t) \quad (j=m+1,\ldots,n).$$

Если $m=0$, то полагаем $a(t_0-0)=1$, $a(t_0+0)=a_1(t_0+0)\cdot\ldots\cdot a_n(t_0+0)$. Если же $m=n$, то полагаем $a(t_0+0)=1$ и $a(t_0-0)=a_1(t_0-0)\cdot\ldots\cdot a_n(t_0-0)$. В частности, если точка t_0 является началом (концом) разомкнутой дуги контура Γ, то $m=0$, $n=1$ $(m=n=1)$. В случае, когда t_0 – неособенная точка контура Γ, то $a(t_0+0)$ и $a(t_0-0)$ являются соответственно пределами справа и слева функции a при $t\to t_0$.

Условимся о следующем обозначении. Пусть γ – простая дуга и точки разрыва функции $a(\in PC(\Gamma))$ разбивают ее на дуги $\gamma_1,\ldots,\gamma_q$, тогда через $[\arg a]_\gamma$ будем обозначать $\sum_{k=1}^{q}[\arg a(t)]_{\gamma_k}$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть сложный контур Γ является объединением r простых дуг $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_r$; $t_1,\ldots,t_m$ – все точки разрыва функций a, b $(\in PC(\Gamma))$; $t_{m+1},\ldots,t_s$ – все концы (и начала) разомкнутых дуг контура Γ; $\rho(t)=\prod_{k=1}^{s}|t-t_k|^{\beta_k}$ $(-1<\beta_k<p-1,\ k=1,\ldots,s)$ и $\delta_k=2\pi(1+\beta_k)/p$ $(1<p<\infty)$

I. Для того чтобы оператор $A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ был Φ-оператором в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\inf_{t\in\Gamma}|a(t)|>0, \quad \inf_{t\in\Gamma}|b(t)| \tag{3.2}$$

и

$$c(t_k+0)f_{\delta_k}(u)+c(t_k-0)(1-f_{\delta_k}(u))\neq 0 \quad (0\leq u\leq 1;\ k=1,\dots,s), \tag{3.3}$$

где $c=ab^{-1}$.

II. Если выполнены условия (3.2) и (3.3), и

$$\begin{aligned} æ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{r}[\arg c(t)]_{\Gamma_j}+ \\ &+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{s}\left[\arg\left(c(t_k+0)f_{\delta_k}(u)+c(t_k-0)(1-f_{\delta_k}(u)\right)\right]_{u=0}^{1}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

то оператор A обратим, обратим слева, обратим справа в зависимости от того, является ли число $æ$ равным нулю, положительным или отрицательным. Если $æ>0$, то $\dim \operatorname{Coker} A=æ$, если же $æ<0$, то $\dim \ker A=-æ$.

III. Если не выполнено хотя бы одно из условий (3.2) или (3.3), то оператор A не является ни Φ_+-, ни Φ_--оператором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы разобьем на несколько частей.

I. Докажем первую часть теоремы в частном случае, когда контур Γ состоит из n простых разомкнутых дуг, имеющих одну общую точку t_0, которая не является внутренней ни для какой разомкнутой дуги, а функции a и b равны единице на концах разомкнутых дуг, отличных от t_0. Дополним контур Γ до контура $\tilde\Gamma$, удовлетворяющего условиям § I, а функции a и b продолжим единицей на $\tilde\Gamma\setminus\Gamma$. Легко видеть, что для оператора $\tilde a P_{\tilde\Gamma}+\tilde b Q_{\tilde\Gamma}$, действующего в пространстве $L_p(\tilde\Gamma,\rho)$, условия

(3.2), (3.3) и формула (3.4) совпадают с условиями (2.1), (2.2) и формулой (2.3). Отсюда и из теоремы 1,1 гл. УП, вытекает справедливость первой части теоремы 3.2 в рассматриваемом частном случае, а также формула $\operatorname{Ind} A = -\varkappa$.

2. Рассмотрим случай, когда Γ – сложный замкнутый контур, функции a и b непрерывны в каждой точке контура Γ, за исключением одной точки t_0, и $\inf_{t\in\Gamma} |a(t)\, b(t)| > 0$. Пусть $c = a/b$ и γ – часть контура Γ, содержащая точку t_0 и удовлетворяющая условиям предыдущего пункта. Функцию c можно представить в виде $c = dg$, где $g \in C(\Gamma)$ и $d|\Gamma\setminus\gamma = 1$. Тогда $A = b(dP_\Gamma + Q_\Gamma)(gP_\Gamma + Q_\Gamma) + T$, где T – вполне непрерывный оператор. Так как $g \in GC(\Gamma)$, то оператор $gP_\Gamma + Q_\Gamma$ является Φ-оператором. Что касается оператора $dP_\Gamma + Q_\Gamma$, то в силу теоремы 1.1, гл. УП, он является Φ- или $\Phi_\pm$-оператором в том и только том случае, когда этим же свойством обладает оператор $dP_\gamma + Q_\gamma$. В силу доказанного в предыдущем пункте условие (3.3) (совпадающее для операторов $aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ и $dP_\gamma + Q_\gamma$) является необходимым и достаточным для того, чтобы оператор $aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ был Φ-оператором в пространстве $L_p(\gamma, \rho)$.

Так как для оператора $dP_\gamma + Q_\gamma$ справедлива формула (3.4) и $\operatorname{Ind}(gP_\Gamma + Q_\Gamma) = -\frac{1}{2\pi}\left[\arg g(t)\right]_\Gamma$, то

$$\operatorname{Ind} A = -\frac{1}{2\pi}\left[\arg (d|\gamma)^{p,\rho}(t_0, \mu)\right]_{\mu=0}^{1} - \tag{3.5}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\left[\arg d(t)\right]_\gamma - \frac{1}{2\pi}\left[\arg g(t)\right]_\Gamma = -\varkappa.$$

3. Докажем первую часть теоремы и формулу $\operatorname{Ind} A = -\varkappa$ в общем случае. В силу теоремы 1.1, гл. УП, достаточно рассмотреть случай, когда Γ – замкнутый контур. Так же, как в теореме 2.1, доказывается, что если оператор $aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ является Φ-оператором, то выполняется условие (3.2).

Пусть $c = a/b$. В силу леммы 3.1, гл. УП, оператор $cP_\Gamma + Q_\Gamma$ можно представить в виде

$$cP_\Gamma + Q_\Gamma = \prod_{j=0}^{s}(c^{(j)}P_\Gamma + Q_\Gamma) + T,$$

где T – вполне непрерывный оператор, $c^{(0)} \in C(\Gamma)$, каждая функция $c^{(j)}$ $(j = 1, \dots, s)$ непрерывна во всех точках контура Γ, кроме точки t_j, и $c = c^{(0)} c^{(1)} \cdot \ldots \cdot c^{(s)}$. Отсюда с помощью доказанного в предыдущем пункте очевидным образом выводится справедливость утверждения теоремы и формула $\mathrm{Ind}\, A = -\varkappa$.

4. Если выполнено условие (3.2), то повторяя доказательство теоремы 5.3, гл. УШ, можно показать, что одно из чисел $\dim \operatorname{Ker} A$ либо $\dim \operatorname{Ker} A^*$ равно нулю. Отсюда в силу доказанного в предыдущем пункте вытекает справедливость утверждения П доказываемой теоремы.

5. Так же, как в теореме 2.I, доказывается, что оператор A не может быть $\Phi_{\pm}$-оператором. Отсюда вытекает справедливость последнего утверждения теоремы. Теорема доказана.

Аналогичная теорема имеет место и для оператора $P_\Gamma a I + Q_\Gamma b I$ (см. замечание в конце предыдущего параграфа).

Отметим, что если функции a и b из $PC(\Gamma)$ удовлетворяют условиям (3.2) и (3.3) и Γ - замкнутый сложный контур, то функция $c = a b^{-1}$ допускает факторизацию $c = c_- t^{\varkappa} c_+$ в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$. С помощью множителей $c_\pm$ факторизации c можно получить формулу для оператора, обратного к A с соответствующей стороны, базис ядра и коядра оператора A, а также условие разрешимости уравнения $A\varphi = f$. Как и в § 4, гл. IX, это можно сделать и для произвольного (не обязательно замкнутого) сложного контура Γ.

ГЛАВА XI

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ИМЕЮЩИМИ РАЗРЫВЫ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКОГО ТИПА

В этой главе обращаются сингулярные интегральные операторы с ограниченными коэффициентами, имеющими точки разрыва второго рода, но специального типа.

Глава состоит из четырех параграфов. Основная теорема излагается в третьем параграфе. Первые два параграфа носят вспомогательный характер. Последний параграф является дополнением к § 12, гл. Ш. В нем исследуются сингулярные интегральные операторы с обращающимися в нуль непрерывными коэффициентами.

§ I. Почти-периодические функции и их факторизация

Почти-периодическим полиномом называется функция $p(\lambda)$ $(-\infty<\lambda<\infty)$, являющаяся линейной комбинацией функций вида $exp(i\delta\lambda)$, где $\delta \in \mathbb{R}$.

Через Π_c обозначим замыкание по норме $L_\infty(-\infty,\infty)$ множества всех почти-периодических полиномов. Множество Π_c является подалгеброй $L_\infty(-\infty,\infty)$, состоящей из всех почти-периодических функций по Бору.

Через Π_W обозначим подмножество Π_c, состоящее из всех функций $a\in\Pi_c$ вида

$$a(\lambda)=\sum_{j=1}^{\infty}a_j e^{i\delta_j\lambda} \quad (-\infty<\lambda<\infty), \tag{I.I}$$

удовлетворяющих условию

$$\|a\|_W \overset{def}{=} \sum_{j=1}^{\infty}|a_j|<\infty .$$

Легко видеть, что Π_W является банаховой алгеброй с нормой $\|\cdot\|_W$. Функцию $a \in \Pi_c$ назовем невырожденной, если

$$\inf_{-\infty<\lambda<\infty} |a(\lambda)| > 0.$$

Каждой невырожденной функции $a \in \Pi_c$ сопоставляется число $ind_\Pi a$, определенное равенством

$$ind_\Pi a = \lim_{\ell\to\infty} \frac{1}{2\ell} [\arg a(\lambda)]_{-\ell}^{\ell}.$$

Предел в этом равенстве существует в силу известных свойств почти-периодических функций (см. Б.М.Левитан [I], стр. I29, теорема 2.7.I). Вещественное число $ind_\Pi a$ будем называть почти-периодическим индексом функции a. Почти-периодический индекс $ind_\Pi a$ не изменяется при малых возмущениях функции a в алгебре Π_c. Легко видеть, что $ind_\Pi \exp(i\delta\lambda)=\delta$.

Как известно, (см. И.М.Гельфанд, Д.А.Райков и Г.Е.Шилов [I]), для всякой невырожденной функции $a \in \Pi_W$ функция a^{-1} также принадлежит алгебре Π_W. Аналогичное утверждение имеет место и для алгебры Π_c.

Обозначим через Π_W^+ (Π_W^-) подалгебру алгебры Π_W, состоящую из всех функций вида (I.I), для которых числа δ_j неотрицательны (неположительны). Очевидно, все функции из подалгебры Π_W^+ (Π_W^-) допускают голоморфные продолжения в верхнюю (нижнюю) полуплоскость. Отметим еще, что если $a \in \Pi_W^+$ (Π_W^-) и выполняется условие

$$\inf_{\operatorname{Im}\lambda\geq 0} |a(\lambda)| > 0 \quad \Big(\inf_{\operatorname{Im}\lambda\leq 0} |a(\lambda)| > 0\Big),$$

то функция $a^{-1} \in \Pi_W^+(\Pi_W^-)$.

ТЕОРЕМА I.I. Всякая невырожденная функция $a \in \Pi_W$ допускает факторизацию вида

$$a(\lambda)=a_-(\lambda)e^{i\lambda y}a_+(\lambda) \quad (-\infty<\lambda<\infty), \tag{I.2}$$

где $a_+ \in \Pi_W^+$, $a_- \in \Pi_W^-$ и

$$\inf_{\operatorname{Im}\lambda\geq 0} |a_+(\lambda)| > 0, \quad \inf_{\operatorname{Im}\lambda\leq 0} |a_-(\lambda)| > 0. \tag{I.3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a\in \Pi_W$ и $\nu=\mathrm{ind}_\Pi a$, тогда почти-периодический индекс функции $b=a\exp(-i\nu\lambda)$ равен нулю. Согласно известному обобщению теоремы Винера-Леви (см. И.М.Гельфанд, Д.А.Райков и Г.Е.Шилов [I] и Г.Е.Шилов [I]) функция $c=\ln b$ принадлежит алгебре Π_W. Следовательно, функция c имеет вид

$$c(\lambda)=\sum_{j=1}^{\infty} c_j \exp(i\gamma_j\lambda) \quad \left(\sum_{j=1}^{\infty}|c_j|<\infty\right).$$

Положим

$$c_+(\lambda)=\sum_{\gamma_j\geq 0} c_j \exp(i\gamma_j\lambda) \qquad c_-(\lambda)=\sum_{\gamma_j<0} c_j \exp(i\gamma_j\lambda).$$

Тогда

$$a(\lambda)=a_-(\lambda)e^{i\nu\lambda}a_+(\lambda),$$

где $a_\pm=\exp c_\pm(\lambda)$. Условия (I.3), очевидно, выполняются. Теорема доказана.

Из неравенства (I.2) непосредственно вытекает, что

$$\nu=\mathrm{ind}_\Pi a.$$

§ 2. Вспомогательные предложения о функциях с разрывами почти-периодического типа

Пусть Γ – составной замкнутый контур, состоящий из простых замкнутых контуров $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$. Пусть t_0 – произвольная точка Γ. Предположим для определенности, что $t_0\in\Gamma_k$.

Пусть ω_0 – некоторая непрерывная функция, отображающая взаимно однозначно контур Γ_k на вещественную ось так, что

$$\lim_{t>t_0,\, t\to t_0} \omega_0(t)=-\infty \quad \text{и} \quad \lim_{t<t_0,\, t\to t_0} \omega_0(t)=\infty. \tag{2.0}$$

Через p обозначим некоторую почти-периодическую функцию из Π_C. Будем говорить, что точка t_0 является точкой разрыва почти-периодического типа функции $a\in L_\infty(\Gamma)$ с характеристикой $\{p,\omega_0\}$, если*

---

* Отметим, что в этом определении используется значение функции ω_0 лишь в сколь угодно малой окрестности точки t_0.

$$\lim_{t\to t_0}\left(a(t)-p(\omega_0(t))\right)=0. \tag{2.1}$$

Отметим, что

$$\sup_{-\infty<\lambda<\infty}|p(\lambda)|\le\sup_{t\in\Gamma_k}|a(t)| \tag{2.2}$$

и

$$\inf_{-\infty<\lambda<\infty}|p(\lambda)|\ge\inf_{t\in\Gamma_k}|a(t)|. \tag{2.3}$$

Эти соотношения вытекают из (2.1) и следующего простого свойства почти-периодической функции $p(\lambda)$: для любого $\varepsilon>0$ в любой окрестности бесконечно удаленной точки найдутся числа λ_1 и λ_2, такие, что

$$|p(\lambda_1)|\ge\sup_{-\infty<\lambda<\infty}|p(\lambda)|-\varepsilon,\quad |p(\lambda_2)|\le\inf_{-\infty<\lambda<\infty}|p(\lambda)|+\varepsilon.$$

Заметим, что соотношение (2.2) и (2.3) остаются в силе, если $\sup|a(t)|$ и $\inf|a(t)|$ распространяются на произвольную окрестность точки t_0.

Функцию $a\in L_\infty(\Gamma)$ назовем невырожденной, если выполняется условие

$$\inf_{t\in\Gamma}|a(t)|>0. \tag{2.4}$$

ЛЕММА 2.1. *Пусть $a\in L_\infty(\Gamma)$ - невырожденная функция, непрерывная всюду на $\Gamma\setminus\{t_1,t_2,\dots,t_n\}$, и пусть точки $t_1,t_2,\dots,t_n$ ее различные точки разрыва почти-периодического типа с соответствующими характеристиками $\{p_j,\omega_j\}$ $(j=1,2,\dots,n)$. Тогда функцию a можно представить в виде*

$$a(t)=p_1(\omega_1(t))p_2(\omega_2(t))\cdot\ldots\cdot p_n(\omega_n(t))a_c(t), \tag{2.5}$$

где $a_c\in C(\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу соотношения (2.3) функции p_j $(j=1,2,\dots,n)$ являются невырожденными. Определим функцию a_c равенством

$$a_c(t)=\frac{a(t)}{p_1(\omega_1(t))p_2(\omega_2(t))\dots p_n(\omega_n(t))},$$

и покажем, что она непрерывна. Так как функции p_j $(j=1,2,\dots,n)$ невырождены, то $p_j^{-1}\in \Pi_c$. Из равенства $a(t)p_j^{-1}(\omega_j(t))=1+$ $+p_j^{-1}(\omega_j(t))(a(t)-p_j(\omega_j(t)))$ следует, что функция $a(t)p_j^{-1}(\omega_j(t))$ непрерывна в точке t_j. Лемма доказана.

Каждой функции a, удовлетворяющей условиям леммы 2.1, сопоставим $(n+1)$ число

$$ind(a,t_j)\overset{def}{=}ind_\Pi p_j \quad (j=1,2,\dots,n)$$

и

$$ind\, a\overset{def}{=}ind\, a_c.$$

Эти числа назовем индексами функции a. Числа $ind(a,t_j)$ являются вещественными, а число $ind\,a$ является целым числом. Числа $ind(a,t_j)$ можно вычислить по формуле

$$ind(a,t_j)=\lim_{\substack{t'\to t_j,\, t''\to t_j\\ t''<t_j<t'}}\frac{1}{\omega_j(t'')-\omega_j(t')}\left[\arg a(t)\right]_{t'}^{t''}. \qquad (2.6)$$

В самом деле

$$\frac{1}{\omega_j(t'')-\omega_j(t')}\left[\arg p_j(\omega_j(t))\right]_{t'}^{t''}=\frac{1}{\ell_2-\ell_1}\left[\arg p_j(\lambda)\right]_{\ell_1}^{\ell_2},$$

где $\ell_1=\omega_j(t')<0$ и $\ell_2=\omega_j(t'')>0$. Стало быть,

$$\lim_{\substack{t'\to t_j,\, t''\to t_j\\ t''<t_j<t'}}\frac{1}{\omega_j(t'')-\omega_j(t')}\left[\arg p_j(\omega_j(t))\right]_{t'}^{t''}=ind_\Pi p_j. \qquad (2.7)$$

Из равенства (2.5) вытекает, что функция a представима в виде $a=p_j b_j$, где b_j - непрерывная в окрестности точки t_j функция, не обращающаяся в нуль на Γ. Отсюда вытекает, что левая часть равенства (2.6) совпадает с правой частью равенства (2.7).

Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_n$ - различные точки контура Γ и $\omega_j\ (j=1,\ldots,n)$ - некоторая функция, удовлетворяющая условию (2.0) в точке t_j. Обозначим через $\mathfrak{A}(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ множество всех непрерывных на $\Gamma_0\setminus\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$ функций f, которые имеют в точках $t_1, t_2,\ldots,t_n$ разрывы почти-периодического типа с характеристиками вида $\{p,\omega_j\}$, где p пробегает все Π_c.

ЛЕММА 2.2. Множество $\mathfrak{A}(t_1,t_2,\ldots,t_m)$ является подалгеброй алгебры $L_\infty(\Gamma)$. Всякую функцию $a\in\mathfrak{A}(t_1,t_2,\ldots,t_m)$ можно представить в виде

$$a(t)=\sum_{j=1}^{m} p_j(\omega_j(t))+b(t)\quad (t\in\Gamma), \tag{2.8}$$

где $b\in C(\Gamma)$ и $p\in\Pi_c$.

Линейная оболочка всех рациональных функций из $R(\Gamma)$ и всех функций вида $exp(\nu\omega_j(t))\ (j=1,2,\ldots,m;-\infty<\nu<\infty)$ образует плотное множество в $\mathfrak{A}(t_1,t_2,\ldots,t_m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, множество $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(t_1,t_2,\ldots,t_m)$ образует алгебру относительно обычных операций над функциями. Покажем, что эта алгебра замкнута. Пусть $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ - фундаментальная последовательность функций из $\mathfrak{A}$. Эта последовательность сходится по норме $L_\infty(\Gamma)$ к функции $a\in L_\infty(\Gamma)$, которая может быть разрывной лишь в некоторых из точек $t_1,t_2,\ldots,t_m$. Пусть t_j - одна из точек разрыва функции a. Обозначим через $\{p_j^{(k)};\omega_j\}$ характеристики функций a_k в точке t_j $(k=1,2,\ldots;j=1,\ldots,m)$. Из соотношения (2.2) вытекает, что последовательность $\{p_j^{(k)}\}_1^{\infty}\ (j=1,2,\ldots,m)$ является фундаментальной. Обозначим через $p_j\ (j=1,2,\ldots,m)$ ее предел по норме $L_\infty(\Gamma)$. Очевидно, функция a имеет в точке $t_j\ (j=1,2,\ldots,m)$ разрывы почти-периодического типа с характеристикой $\{p_j,\omega_j\}$. Стало быть, $a\in\mathfrak{A}$. Легко видеть, что функция $a-p_1-p_2-\ldots-p_m\in C(\Gamma)$. Следовательно, имеют место равенство (2.8). Из этого равенства вытекает справедливость последнего утверждения леммы. Лемма доказана.

В случае, когда контур Γ является единичной окружностью, а функции ω_j задаются равенствами

$$\omega_j(t)=-i\,\frac{t+t_j}{t-t_j}\qquad (j=1,2,\ldots,m);$$

алгебру $\mathfrak{A}(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ обозначим через $\mathfrak{A}_0(t_1, t_2, \ldots, t_m)$. Без труда проверяется, что если невырожденная функция $a \in \mathfrak{A}_0(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, то

$$\operatorname{ind}(a, t_j) = \frac{1}{4} \lim_{\theta \downarrow 0} \theta [\arg a(e^{i\varphi})]_{\varphi=\theta_j+\theta}^{\theta_j+2\pi-\theta} \quad (t_j = e^{i\theta_j}).$$

§ 3. Основная теорема

В этом и следующем параграфах будет предполагаться, что функции ω_j, участвующие в определении[*] алгебры $\mathfrak{A}(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, отображают взаимно однозначно Γ на вещественную ось, дифференцируемы на Γ, причем производные $d\omega_j/dt$ всюду на Γ, отличны от нуля и принадлежат $H_\mu(\Gamma)$, где $0<\mu<1$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_m$ - различные точки составного замкнутого контура Γ, и $a, b \in \mathfrak{A}(t_1, t_2, \ldots, t_m)$. Для того чтобы оператор $aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ был Φ- или $\Phi_\pm$-оператором в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$[**], необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $\inf\limits_{t\in\Gamma} |a(t)| > 0$ и $\inf\limits_{t\in\Gamma} |b(t)| > 0$;

2) среди чисел $\operatorname{ind}(ab^{-1}, t_j)$ $(j=1, \ldots, m)$ нет чисел разных знаков (то есть эти числа либо все неотрицательны, либо все неположительны).

Если выполняется условие 1) и числа $\operatorname{ind}(ab^{-1}, t_j)$ $(j=1,2,\ldots,m)$ неотрицательны и не все равны нулю, то оператор $aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ обратим слева и

$$\dim \operatorname{Coker}(aP_\Gamma + bQ_\Gamma) = \infty.$$

Если выполняется условие 1) и числа $\operatorname{ind}(ab^{-1}, t_j)$ $(j=1,2,\ldots,m)$ неположительны и не все равны нулю, то оператор $aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ обратим справа и

$$\dim \operatorname{Ker}(aP_\Gamma + bQ_\Gamma) = \infty.$$

---

[*] Это определение приводится в предыдущем параграфе.

[**] В этом и следующем параграфе предполагается, что все $\rho(t)$ имеет вид $\rho(t) = \prod\limits_{j=1}^{r} |t-t_j|^{\beta_j}$ $(r \geq m)$ и выполняются условия $-1 < \beta_j < p-1$ $(1<p<\infty, j=1,2,\ldots,r)$.

Наконец, если выполняется условие I) и $ind(ab^{-1}, t_1) = ind(ab^{-1}, t_2) = \ldots = ind(ab^{-1}, t_m) = 0$, то оператор $aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ будет обратимым слева, справа или с двух сторон, в зависимости от того, будет ли число $ind\, ab^{-1}$ положительным, отрицательным или равным нулю, причем

$$\dim \operatorname{Coker}(aP_\Gamma + bQ_\Gamma) = ind\, ab^{-1} \quad \text{при} \quad ind\, ab^{-1} > 0$$

и

$$\dim \operatorname{Ker}(aP_\Gamma + bQ_\Gamma) = -ind\, ab^{-1} \quad \text{при} \quad ind\, ab^{-1} < 0.$$

Доказательству этой теоремы предпошлем два вспомогательных предложения.

ЛЕММА 3.I. Пусть функция a имеет вид

$$a(t) = t^{\varkappa} \exp\left(\nu \frac{t+t_0}{t-t_0}\right) \quad (|t|=1),$$

где $|t_0| = 1$, ν – вещественное число и $\varkappa$ – целое число.

Тогда при $\nu > 0$ оператор $aP_0 + Q_0$ обратим слева в $L_p(\Gamma_0, \rho)$ и $\dim \operatorname{Coker}(aP_0 + Q_0) = \infty$, а при $\nu < 0$ оператор $aP_0 + Q_0$ обратим справа и $\dim \operatorname{Ker}(aP_0 + Q_0) = \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор $aP_0 + Q_0$ можно представить в виде $aP_0 + Q_0 = (P_0 a P_0 + Q_0)(I + Q_0 a P_0)$. Оператор $I + Q_0 a P_0$ обратим:

$$(I + Q_0 a P_0)^{-1} = I - Q_0 a P_0,$$

и, следовательно, достаточно доказать теорему для оператора $B_a = P_0 a \mid L_p^+(\Gamma_0, \rho)$.

Покажем, что при $\nu < 0$ оператор $X = B_a B_{a^{-1}}$ обратим в пространстве $L_p^+(\Gamma_0, \rho)$. В случае $\varkappa \leq 0$ функция $a \in L_\infty^-(\Gamma_0)$. Следовательно, оператор $B_{a^{-1}}$ является обратным к B_a слева, то есть в этом случае $X = I$.

Рассмотрим случай $\varkappa > 0$. При этом предположении оператор B_a может быть представлен в виде $B_a = U_\varkappa D_\nu$, где

$$U_\varkappa = P_0 t^{\varkappa} \mid L_p^+(\Gamma_0, \rho) \quad \text{и} \quad D_\nu = P_0 e^{\nu \frac{t+t_0}{t-t_0}} \mid L_p^+(\Gamma_0, \rho).$$

Следовательно, $X = D_\nu U_\varkappa U_{-\varkappa} D_{-\nu}$. Учитывая, что $U_\varkappa U_{-\varkappa} = I - R_\varkappa$, где $R_\varkappa$ – проектор, определенный равенством

$$R_{\varkappa}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j\right)=\sum_{j=0}^{\varkappa-1} a_j t^j,$$

получаем

$$X = I - D_{\nu} R_{\varkappa} D_{-\nu}.$$

Подпространства $\operatorname{Im} D_{-\nu}$ и $\operatorname{Im} R_{\varkappa}$ пересекаются только в нуле. В самом деле, пусть $D_{\nu}\varphi=\eta$, где $\eta=R_{\varkappa}\eta$. Тогда, очевидно, $\varphi = D_{\nu} R_{\varkappa} \eta$. Из легко проверяемого равенства

$$D_{\nu} R_{\varkappa} = R_{\varkappa} D_{\nu} R_{\varkappa} \tag{3.1}$$

вытекает, что $\varphi = R_{\varkappa} D_{\nu} R_{\varkappa} \eta = R_{\varkappa}\varphi$. Отсюда следует, что функции φ и η являются полиномами от t степени $\leq \varkappa-1$. Равенство $D_{\nu}\varphi=\eta$ означает, что

$$e^{-\nu\frac{t+t_0}{t-t_0}}\varphi(t)=\eta(t).$$

Это возможно лишь в случае, когда $\varphi=\eta=0$.

Так как $\|D_{\nu}\|=\|D_{-\nu}\|=1$ и конечномерный проектор $R_{\varkappa}$ ортогонален в пространстве $L_2^+(\Gamma_0)$, то из доказанного утверждения вытекает, что $\|D_{\nu} R_{\varkappa} D_{-\nu}\|\leq\|R_{\varkappa} D_{-\nu}\|<1$. Следовательно, оператор $X=I-D_{\nu}R_{\varkappa}D_{-\nu}$ обратим в пространстве $L_2^+(\Gamma_0)$. В пространстве $L_p^+(\Gamma_0,\rho)$ $\operatorname{Ker} X \subseteq \operatorname{Im} R_{\varkappa}$. В самом деле, если $X\varphi=0$, то есть $\varphi=D_{\nu}R_{\varkappa}D_{-\nu}\varphi$, то в силу (3.1) $\varphi=R_{\varkappa}\varphi$. Стало быть, подпространство $\operatorname{Ker} X$ одно и то же в каждом из пространств $L_p^+(\Gamma_0,\rho)$. Поскольку в пространстве $L_2^+(\Gamma_0)$ $\operatorname{Ker} X=\{0\}$, то $\operatorname{Ker} X=\{0\}$ и во всех пространствах $L_p^+(\Gamma,\rho)$. Отсюда в силу конечномерности проектора $R_{\varkappa}$ вытекает, что оператор $I-D_{\nu}R_{\varkappa}D_{-\nu}$ обратим во всех пространствах $L_p^+(\Gamma,\rho)$.

При $\nu<0$ оператор B_a обратим справа, и обратный к нему справа имеет вид $B_{a^{-1}}(B_a B_{a^{-1}})^{-1}$. Ядро $\operatorname{Ker} D_{\nu}$ имеет бесконечную размерность, так как в него входят все функции вида

$$exp\left(\mu\frac{t+t_0}{t-t_0}\right)+\alpha_{\mu} exp\left(-\nu\frac{t+t_0}{t-t_0}\right),$$

где $0\leq\mu\leq-\nu$, а $\alpha_{\mu}=-exp((\mu+\nu))$. Отсюда и из равенства $B_a = U_{\varkappa} D_{\nu}$ следует, что $\dim\operatorname{Ker} B_a=\infty$ при $\varkappa\leq 0$.

Если $\varkappa>0$, то $\dim\operatorname{Coker} U_{\varkappa}<\infty$, следовательно, $\dim(\operatorname{Ker} D_{\nu}\cap\operatorname{Im} U_{\varkappa})=\infty$. Учитывая, что $B_a=D_{\nu}U_{\varkappa}$, получаем $\dim\operatorname{Ker} B_a=\infty$ и в случае $\varkappa>0$.

При $\nu > 0$ оператор B_a обратим слева в пространстве $\tilde{L}_p(\Gamma_0, \rho)$, и обратный слева к нему имеет вид $(B_{a^{-1}} B_a)^{-1} B_{a^{-1}}$. Так как $\dim \operatorname{Ker} B_{a^{-1}} = \infty$, то $\dim \operatorname{Coker} B_a = \infty$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. Пусть $a \in \mathfrak{A}_0(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ и выполняется условие

$$\inf_{|t|=1} |a(t)| > 0.$$

Если числа $\operatorname{ind}(a, t_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ неотрицательны, причем не все равны нулю, то оператор $aP_0 + Q_0$ обратим слева и $\dim \operatorname{Coker}(aP_0 + Q_0) = \infty$.

Если числа $\operatorname{ind}(a, t_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ неположительны и не все равны нулю, то оператор $aP_0 + Q_0$ обратим справа и $\dim \operatorname{Ker}(aP_0 + Q_0) = \infty$.

Если $\operatorname{ind}(a, t_1) = \operatorname{ind}(a, t_2) = \ldots = \operatorname{ind}(a, t_n) = 0$, то оператор $aP_0 + Q_0$ будет обратимым слева, справа или с двух сторон в зависимости от того, будет ли число $\operatorname{ind} a$ положительным, отрицательным или равным нулю, причем $\operatorname{Ind}(aP_0 + Q_0) = -\operatorname{ind} a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2.I функцию a можно представить в виде

$$a(t) = p_1\left(-i\frac{t+t_1}{t-t_1}\right) p_2\left(-i\frac{t+t_2}{t-t_2}\right) \cdot \ldots \cdot p_m\left(-i\frac{t+t_m}{t-t_m}\right) b(t),$$

где p_j – невырожденные функции из Π_C, а $b \in GC(\Gamma)$. Каждую из функций p_j $(j = 1, \ldots, m)$ приблизим достаточно хорошо функциями $q_j \in \Pi_W$, а функцию b – функцией $b_0 \in W$. Тогда получим

$$a(t) = q_1\left(-i\frac{t+t_1}{t-t_1}\right) q_2\left(-i\frac{t+t_2}{t-t_2}\right) \cdot \ldots \cdot q_m\left(-i\frac{t+t_m}{t-t_m}\right) b_0(t)(1 + m(t)),$$

где $m \in L_\infty(\Gamma)$ и $\sup |m(t)| < 1$.

Согласно теореме I.I функция $q_j(\lambda)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ допускает факторизацию

$$q_j(\lambda) = q_j^-(\lambda) e^{i\nu_j \lambda} q_j^+(\lambda) \quad (-\infty < \lambda < \infty),$$

где $q_j^{\pm}\in L_{\infty}^{\pm}(\Gamma_0)$ и $1/q_j^{\pm}\in L_{\infty}^{\pm}(\Gamma_0)$. В силу следствия 3.2, гл.III, функция b_0 допускает факторизацию $b_0=b_- t^{\varkappa} b_+$. Следовательно, функция a допускает следующую факторизацию относительно окружности Γ_0 :

$$a(t)=a_-(t)t^{\varkappa}\prod_{j=1}^{m} e^{\nu_j\frac{t+t_j}{t-t_j}}(1+n(t))a_+(t),$$

где

$$a_{\pm}(t)=\prod_{j=1}^{m} q^{\pm}\left(-i\,\frac{t+t_j}{t-t_j}\right)b_{\pm}(t),$$

$n\in L_{\infty}(\Gamma_0)$ и величина $\sup|n(t)|\ (t\in\Gamma_0)$ достаточно мала. Очевидно, $a_{\pm}\in L_{\infty}^{\pm}(\Gamma_0)$ и $1/a_{\pm}\in L_{\infty}^{\pm}(\Gamma_0)$. Кроме того, имеют место равенства $\nu_j=\operatorname{ind}(a,t_j)\ (j=1,2,\dots,m)$ и $\varkappa=\operatorname{ind}a$.

Положим

$$\varphi(t)=t^{\varkappa}\prod_{j=1}^{m} e^{\nu_j\frac{t+t_j}{t-t_j}}.$$

Тогда оператор aP_0+Q_0 можно представить в виде

$$aP_0+Q_0=a_-(\varphi(1+n)P_0+Q_0)(a_+P_0+a_-^{-1}Q_0).$$

Операторы a_-I и $a_+P_0+a_-^{-1}Q_0$ обратимы и $(a_-I)^{-1}=a_-^{-1}I$ и $(a_+P_0+a_-^{-1}Q_0)^{-1}=a_+^{-1}P_0+a_-Q_0$.

Пусть все числа $\nu_j\ (j=1,2,\dots,m)$ неотрицательны и $\nu_1>0$. Тогда

$$\varphi(1+n)P_0+Q_0=$$

$$=\left(t^{\varkappa}e^{\nu_1\frac{t+t_1}{t-t_1}}P_0+Q_0\right)\left(e^{\nu_2\frac{t+t_2}{t-t_2}}P_0+Q_0\right)\cdot\ldots\cdot\left(e^{\nu_m\frac{t+t_m}{t-t_m}}P_0+Q_0\right)+nP_0.$$

Согласно лемме 3.1 первое слагаемое из правой части этого равенства является обратимым слева оператором с бесконечным коядром. Так как величина $\sup|n(t)|$ достаточно мала, то таковым будет и оператор $\varphi(1+n)P_0+Q_0$.

Пусть все числа ν_j неположительны и $\nu_1<0$. Легко видеть, что оператор

$$\prod_{j=2}^{m}\left(e^{\nu_j\frac{t+t_j}{t-t_j}}P_0+Q_0\right)^{-1}\left(t^{\varkappa}e^{\nu_1\frac{t+t_1}{t-t_1}}P_0+Q_0\right)^{-1}$$

является обратным справа к оператору $\varphi P_0 + Q_0$. Согласно лемме 3.1 оператор (3.2) имеет бесконечномерное коядро, стало быть, $\dim \operatorname{Ker}(\varphi P_0 + Q_0) = \infty$. Отсюда следует, что и оператор $\varphi(1+n)P_0 + Q_0$ обратим справа и $\dim \operatorname{Ker}(\varphi(1+n)P_0 + Q_0) = \infty$.

В случае $\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_m = 0$ утверждение леммы очевидно. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Необходимость условий первого утверждения теоремы вытекает из теоремы 4.1, гл. VII. Достаточность условий первого утверждения теоремы будет доказана, коль скоро будут доказаны все остальные утверждения теоремы.

Согласно теоремам 1.1 и 1.2, гл. VII, можно без ограничения общности предполагать, что контур Γ является простым замкнутым контуром. В силу теоремы 3.1, гл. VII, о разделении особенностей можно ограничиться случаем, когда система $t_1, t_2, \ldots, t_m$ состоит из одной точки t_1.

Обозначим через $\{p, \omega\}$ характеристику функции $c = ab^{-1}$ в точке t_1. Рассмотрим функцию $\zeta = g(t)$, где

$$g(t) = \frac{\omega(t) - i}{\omega(t) + i},$$

отображающую контур Γ на единичную окружность Γ_0. Пусть

$$\rho(t) = \prod_{k=1}^{n} |t - t_k|^{\beta_k}, \quad \rho_0(\zeta) = \prod_{k=1}^{n} |\zeta - \zeta_k|^{\beta_k} \quad (\zeta_k = g(t_k)).$$

Введем оператор $Y \in L(L_p(\Gamma_0, \rho_0), L_p(\Gamma, \rho))$, определенный равенством $(Y\varphi)(t) = \varphi(g(t))$. Ограниченность оператора Y проверяется непосредственно. При этом используется то, что производная dg/dt непрерывна на Γ и всюду отлична от нуля. Оператор Y обратим, причем $(Y^{-1}f)(\zeta) = f(\beta(\zeta))$. Так как производная dg/dt принадлежит H_μ, то (см. § 2, гл. VII) оператор $cP_\Gamma + Q_\Gamma$ можно представить в виде

$$cP_\Gamma + Q_\Gamma = Y(c_0 P_0 + Q_0)Y^{-1} + T, \tag{3.3}$$

где $c_0(\zeta) = c(\beta(\zeta))$, а T - вполне непрерывный оператор.

Пусть выполняется условие 1). Покажем, что если оператор $A_0 = c_0 P_0 + Q_0$ обратим с какой-либо стороны, то с той же стороны обратим и оператор $A_1 = cP_\Gamma + Q_\Gamma$, причем

$$\operatorname{Ind} A_0 = \operatorname{Ind} A_1. \tag{3.4}$$

Действительно, если оператор A_0 обратим с какой-либо стороны, то в силу равенства (3.3) оператор A_1 допускает регуляризацию с соответствующей стороны и имеет место равенство (3.4). В силу теоремы 5.I, гл. УП, оператор A_1 также обратим хотя бы с одной стороны. Из равенства (3.4) вытекает, что операторы A_1 и A_0 обратимы с одной и той же стороны. Разность

$$c_0(\zeta)-p\left(-i\frac{\zeta+\zeta_1}{\zeta-\zeta_1}\right)$$

после замены ζ на $g(t)$ преобразуется в разность

$$a(t)-p(\omega(t)).$$

Отсюда следует, что функция $c_0\in \mathfrak{A}_0(t_1)$. Для завершения доказательства теоремы осталось воспользоваться леммой 3.2. Теорема 3.I доказана.

§ 4. Операторы с непрерывными обращающимися в нуль коэффициентами

Результаты предыдущего параграфа позволяют дополнить сведения из § 12, гл. Ш, об операторах вида $aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ с непрерывными коэффициентами a и b, обращающимися в нуль.

Предположим, что функции $a,\ b\in C(\Gamma)$ имеют вид $a=\rho_1 a_0$ и $b=\rho_2 b_1$, где $a_0,\ b_1\in \mathfrak{A}(t_1,t_2,\ldots,t_m)$:

$$\rho_1(t)=\prod_{j=1}^{m}(t-t_j)^{n_j},\qquad \rho_2(t)=\prod_{j=1}^{m}(t-t_j)^{k_j},$$

а n_j и k_j – целые неотрицательные числа. Обозначим через $\rho_0(t)$ наибольший общий делитель полиномов ρ_1 и ρ_2. Положим $\rho_+=\rho_1\rho_0^{-1}$, $\rho_-=t^{-m}\rho_2\rho_0^{-1}$, где m – степень полинома $\rho_2\rho_0^{-1}$. В дальнейшем понадобятся следующие представления функций a и b:

$$a=\rho_+\rho_0 a_0 \qquad \text{и} \qquad b=\rho_-\rho_0 b_0,$$

где $b_0=t^m b_1$. Напомним, что через $\widetilde{L}_p(\rho,\rho_\pm;\Gamma)$ обозначается банахово пространство, состоящее из всех функций вида

$$g=\rho_+^{-1}P_\Gamma f+\rho_-^{-1}Q_\Gamma f,$$

где f пробегает пространство $L_p(\Gamma,\rho)$, с нормой $\|g\|_{\widetilde{L}_p}=\|f\|_{L_p}$. Через $\hat{L}_p(\rho,\rho_0;\Gamma)$ обозначается банахово пространство, состоящее из всех функций вида $\rho_0 f$, где $f\in L_p(\Gamma,\rho)$, с нормой $\|\rho_0 f\|_{\hat{L}_p}=\|f\|_{L_p}$. Оператор $A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ можно представить в виде

$$A=\rho_0(a_0P_\Gamma+b_0Q_\Gamma)(\rho_+P_\Gamma+\rho_-Q_\Gamma). \tag{4.1}$$

По доказанному в § 12, гл. III, оператор $\rho_+P_\Gamma+\rho_-Q_\Gamma$ расширяется естественным образом до обратимого оператора $\rho_+\widetilde{P}_\Gamma+\rho_-\widetilde{Q}_\Gamma\in L(\widetilde{L}_p, L_p(\Gamma,\rho))$. Обратным к нему является оператор $\rho_+^{-1}P_\Gamma+\rho_-^{-1}Q_\Gamma$. Оператор $\rho_0 I\in L(L_p(\Gamma,\rho),\hat{L}_p(\rho,\rho_0;\Gamma))$ является изометрическим. С помощью равенства (4.1) оператор A можно расширить до оператора

$$\widetilde{A}=\rho_0(a_0P_\Gamma+b_0Q_\Gamma)(\rho_+\widetilde{P}_\Gamma+\rho_-\widetilde{Q}_\Gamma) \tag{4.2}$$

из $L(\widetilde{L}_p(\rho,\rho_\pm;\Gamma),\hat{L}_p(\rho,\rho_0;\Gamma))$. Основываясь на теореме 3.1, приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 4.1. *Для того чтобы оператор $\widetilde{A}$, заданный равенством (4.2), был Φ- или $\Phi_\pm$-оператором, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

1) $\inf\limits_{t\in\Gamma}|a_0(t)|>0$ и $\inf\limits_{t\in\Gamma}|b_0(t)|>0$;

2) *среди чисел $\operatorname{ind}(a_0b_0^{-1},t_j)$ $(j=1,\dots,m)$ нет чисел разных знаков.*

Если выполняется условие 1) и числа $\operatorname{ind}(a_0b_0^{-1},t_j)$ $(j=1,\dots,m)$ неотрицательны и не все равны нулю, то оператор $\widetilde{A}$ обратим слева и $\dim\operatorname{Coker}\widetilde{A}=\infty$.

Если выполняется условие 1) и числа $\operatorname{ind}(a_0b_0^{-1},t_j)$ $(j=1,2,\dots,m)$ неположительны и не все равны нулю, то оператор $\widetilde{A}$ обратим справа и $\dim\operatorname{Ker}\widetilde{A}=\infty$.

Если выполняется условие 1) и $\operatorname{ind}(a_0b_0^{-1},t_1)=\operatorname{ind}(a_0b_0^{-1},t_2)=\ldots=\operatorname{ind}(a_0b_0^{-1},t_m)=0$, то оператор $\widetilde{A}$ будет обратимым слева, справа или с двух сторон в зависимо-

ти от того, будет ли число $ind(a_0 b_0^{-1})$ положительным, отрицательным или равным нулю, причем $\operatorname{Ind}\tilde{A} = -ind(a_0 b_0^{-1})$

Отметим, что теорема 4.I позволяет указать, в частности, широкий класс сингулярных интегральных операторов $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ с непрерывными обращающимися в нуль коэффициентами a и b, для которых одно из чисел $\dim \operatorname{Ker} A$ или $\dim \operatorname{Ker} A^*$ бесконечно. Наиболее интересен случай, когда $\rho_1 = \rho_2 = \rho_0$. В этом случае пространство $\tilde{L}_p(\rho, \rho_\pm; \Gamma)$ и $L_p(\Gamma, \rho)$ совпадают, и теорема 4.I указывает примеры действующих в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$ сингулярных интегральных операторов $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ с непрерывными коэффициентами a, b, обращающимися в нуль в конечном числе точек, для которых одно из чисел $\dim \operatorname{Ker} A$ либо $\dim \operatorname{Ker} A^*$ бесконечно.

Рассмотрим еще один пример. Пусть функция $a \in C(\Gamma)$ имеет вид $a = \rho_- a_0$, где $a_0 \in \mathfrak{A}(t_1, \ldots, t_m)$, $\rho_-(t) = \prod_{j=1}^{n} (1 - t^{-1} t_j)^{k_j}$ и k_j - неотрицательные целые числа. Обозначим через $\hat{L}_p$ банахово пространство всех функций вида

$$g = P_\Gamma \rho_- P_\Gamma f + Q f,$$

где f пробегает пространство $L_p(\Gamma, \rho)$, с нормой $\|g\|_{\hat{L}_p} = \|f\|_{L_p}$. Оператор $A = aP_\Gamma + Q_\Gamma$ можно представить в виде

$$A = (P_\Gamma \rho_- + Q_\Gamma)(a_0 P_\Gamma + Q_\Gamma)(I + Q_\Gamma (a - a_0) P_\Gamma).$$

Оператор $I + Q_\Gamma (a - a_0) P_\Gamma$ обратим в $L_p(\Gamma, \rho)$ и

$$(I + Q_\Gamma (a - a_0) P_\Gamma)^{-1} = I - Q_\Gamma (a - a_0) P_\Gamma.$$

Оператор $P_\Gamma \rho_- + Q_\Gamma$ осуществляет изометрическое отображение пространства $L_p(\Gamma, \rho)$ на $\hat{L}_p$.

Рассмотрим оператор A как оператор, действующий из $L_p(\Gamma, \rho)$ в $\hat{L}_p$. Тогда имеет место утверждение.

Для того чтобы оператор $A = aP_\Gamma + Q_\Gamma$ был обратим с какой-либо стороны, необходимо и достаточно, чтобы оператор $a_0 P_\Gamma + Q_\Gamma \in \mathcal{L}(L_p(\Gamma, \rho))$ был обратим с той же стороны. Кроме того, $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Ker}(a_0 P_\Gamma + Q_\Gamma)$ и $\dim \operatorname{Coker} A = \dim \operatorname{Coker}(a_0 P_\Gamma + Q_\Gamma)$.

Это утверждение позволяет указать различные примеры операторов вида $aP_\Gamma + Q_\Gamma$ с непрерывными коэффициентами, обращающимися в нуль в конечном числе точек, для которых имеет место одно из равенств

$$\dim \operatorname{Ker}(aP_\Gamma + Q_\Gamma) = \infty, \quad \dim \operatorname{Coker}(aP_\Gamma + Q_\Gamma) = \infty$$

в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$. Аналогичные теоремы и утверждения имеют место и для операторов вида $P_\Gamma a I + Q_\Gamma$ (ср. § 12, гл. III).

ГЛАВА XII

ЛОКАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП

В этой главе излагается простой локальный принцип в теории сингулярных интегральных уравнений и его приложения. Этот локальный принцип применяется и в доказательствах теорем из последующих двух глав.

Локальный принцип приводится в первом параграфе. В остальных трех с его помощью исследуются сингулярные интегральные операторы при различных ограничениях на коэффициенты.

На весовую функцию ρ накладываются обычные ограничения.

§ I. Локализующие классы

I. Пусть $\mathfrak{A}$ – банахова алгебра с единицей e. Множество M элементов алгебры $\mathfrak{A}$ назовем *локализующим классом*, если оно не содержит нуля и для любой его пары элементов a_1, a_2 существует третий элемент $a \in M$, такой, что

$$a_j a = a a_j = a \quad (j=1,2).$$

Элементы x и y из $\mathfrak{A}$ назовем *M-эквивалентными слева*, если

$$\inf_{a \in M} \|(x-y)a\| = 0.$$

Аналогично определяется *M-эквивалентность справа*. Если элементы x и y из $\mathfrak{A}$ являются M-эквивалентными и слева, и справа, то будем их называть *M-эквивалентными*. Элемент x алгебры $\mathfrak{A}$ назовем *M-обратимым слева (справа)*, если существуют элементы $z \in \mathfrak{A}$ и $a \in M$, такие, что

$$zxa=a \quad (axz=a).$$

Рассмотрим пример. Пусть $\mathfrak{A}=C(a,b)$ и $t_0\in[a,b]$. Обозначим через M_{t_0} множество всех функций $x\in C(a,b)$, каждая из которых равна единице в некоторой окрестности точки t_0. Множество M_{t_0} образует локализующий класс. Функции x и y из $\mathfrak{A}$ являются M_{t_0}-эквивалентными в том и только том случае, когда $x(t_0)=y(t_0)$. Для того чтобы элемент $x(\in C(a,b))$ был M_{t_0}-обратим с какой-либо стороны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $x(t_0)\neq 0$.

ЛЕММА I.I. Пусть M - локализующий класс и элементы $x, y\,(\in\mathfrak{A})$ являются M-эквивалентными слева (справа). Если элемент x M-обратим слева (справа), то элемент y также M-обратим слева (справа).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x является M-обратимым слева, тогда существуют элементы $z\in\mathfrak{A}$ и $a_1\in M$, такие, что $zxa_1=a_1$. Так как элементы x и y M-эквивалентны слева, то существует элемент $a_2\in M$, для которого $\|(x-y)a_2\|<1/\|z\|$. Подберем элемент $a\in M$ так, чтобы имели место равенства $a_1a=a_2a=a$. Тогда $zya=zxa-ua$, где $u=z(x-y)a_2$. Учитывая, что $zxa=a$, получаем $zya=(e-u)a$. Так как $\|u\|<1$, то элемент $e-u$ обратим. Таким образом, $z_1ya=a$, где $z_1=(e-u)^{-1}z$, и, стало быть, элемент y M-обратим слева. Лемма доказана.

2. Систему $\{M_\tau\}_{\tau\in\mathcal{T}}$ локализующих классов M_τ назовем покрывающей, если из всякого множества $\{a_\tau\}_{\tau\in\mathcal{T}}$ элементов $a_\tau\in M_\tau$ можно выделить конечное число, сумма которых является обратимым элементом. В рассмотренном выше примере множество $\{M_\tau\}$ $(a\le\tau\le b)$ образует покрывающую систему локализующих классов.

ЛЕММА I.2. Пусть $\{M_\tau\}_{\tau\in\mathcal{T}}$ - покрывающая система локализующих классов. Для того чтобы элемент x, коммутирующий со всеми элементами из $\bigcup_{\tau\in\mathcal{T}} M_\tau$, был обратимым слева (справа) в алгебре $\mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\tau\in\mathcal{T}$ элемент x был M_τ-обратимым слева (справа).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условий леммы очевидна. Докажем их достаточность. Пусть элемент x M_τ-обратим слева для каждого $\tau\in\mathcal{T}$. Тогда существуют элементы $z_\tau\in\mathfrak{A}$ и $a_\tau\in M_\tau$, такие, что $z_\tau x a_\tau=a_\tau$. Так как система $\{M_\tau\}$ является покрывающей, то из множества $\{a_\tau\}$ можно выделить конечное число элементов $a_{\tau_1},\ldots,a_{\tau_N}$, сумма которых является обратимым элементом. Положим

$$u=\sum_{j=1}^{N} z_{\tau_j} a_{\tau_j},$$

тогда

$$ux=\sum_{j=1}^{N} z_{\tau_j} a_{\tau_j} x=\sum_{j=1}^{N} z_{\tau_j} x a_{\tau_j}=\sum_{j=1}^{N} a_{\tau_j}.$$

Таким образом, элемент x обратим слева и

$$x^{-1}=\Big(\sum_{j=1}^{N} a_{\tau_j}\Big)^{-1} u.$$

Аналогичным образом доказывается лемма в случае обратимости справа. Лемма доказана.

Из доказанных лемм непосредственно следует

ТЕОРЕМА I.I. *Пусть $\{M_\tau\}_{\tau\in\mathcal{T}}$ – покрывающая система локализующих классов и элемент x M_τ-эквивалентен слева (справа) элементу $y_\tau(\in\mathfrak{A})$ для любого $\tau\in\mathcal{T}$.*

Если элемент x коммутирует со всеми элементами из $\bigcup_{\tau\in\mathcal{T}} M_\tau$, то он обратим слева (справа) в том и только том случае, когда элемент y_τ является M_τ-обратимым слева (справа) для любого $\tau\in\mathcal{T}$.

3) Приведенные предложения можно интерпретировать и с точки зрения теории идеалов. Ограничимся здесь случаем, когда все элементы объединения $\mathfrak{M}=\bigcup_{\tau\in\mathcal{T}} M_\tau$ коммутируют между собой. Обозначим через $\mathfrak{K}$ $(\subset\mathfrak{A})$ коммутант множества $\mathfrak{M}$. Очевидно, $\mathfrak{K}$ является подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}$. Множество $\mathcal{J}_\tau$ элементов, M_τ-эквивалентных нулю, образует двусторонний замкнутый идеал алгебры $\mathfrak{K}$. В самом деле, здесь нуждается в проверке лишь то, что единица не принадлежит $\mathcal{J}_\tau$. Допустим, что $e\in\mathcal{J}_\tau$, тогда в классе M_τ существуют элементы c_n $(n=1,2,\ldots)$, стремящиеся к нулю. Для каждого c_n существует элемент $a_n\in M_\tau$ $(a_n\neq 0)$, такой, что $c_n a_n=a_n$. Отсюда вытекает, что $\|c_n\|\geqslant 1$, а это невозможно.

Обозначим через $\mathfrak{K}_\tau$ фактор-алгебру $\mathfrak{K}/\mathcal{J}_\tau$. Класс вычетов из $\mathfrak{K}_\tau$, содержащий элемент $x\in\mathfrak{K}$, обозначим через X_τ.

Класс X_τ обратим в $\mathfrak{R}_\tau$ в том и только том случае, когда элемент x является M_τ-обратимым в $\mathfrak{R}$. В самом деле, если X_τ обратим в $\mathfrak{R}_\tau$ и $Z=X_\tau^{-1}$, то элемент $zx-e$ является M_τ-эквивалентным нулю. Последнее означает, что x является M_τ-обратимым в $\mathfrak{R}$.

Обратно, если x является M_τ-обратимым элементом в $\mathfrak{R}$ ($zxa=a$, где z - некоторый элемент из $\mathfrak{R}$ и a из M_τ), то $Z_\tau X_\tau A_\tau = A_\tau$ и, следовательно, $Z_\tau X_\tau = E_\tau$.

Теорему I.I можно теперь сформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА I.2. Пусть $x\in\mathfrak{R}$. Для того чтобы элемент x был обратим в алгебре $\mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\tau\in\mathcal{T}$ элемент X_τ был обратим в $\mathfrak{R}_\tau$.

Эта теорема вытекает непосредственно из теоремы I.I и сделанных выше замечаний, если к ним еще добавить, что из обратимости элемента $x\in\mathfrak{R}$ в алгебре $\mathfrak{A}$ вытекает, что $x^{-1}\in\mathfrak{R}$.

§ 2. Локальная замкнутость множества сингулярных интегральных операторов

Пусть Γ - сложный контур, $f=\{f_1,f_2\}$ и $g=\{g_1,g_2\}$ - два вектора из $L^2_\infty(\Gamma)=L_\infty(\Gamma)\dot{+}L_\infty(\Gamma)$. Векторы f и g назовем эквивалентными в точке $\tau\in\Gamma$, если для любого $\varepsilon>0$ существует окрестность $U_\varepsilon(\tau)$ точки τ, для которой

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in U_\varepsilon(\tau)\cap\Gamma} |f_k(t)-g_k(t)|<\varepsilon \quad (k=1,2).$$

Вектор f ($\in L^2_\infty(\Gamma)$) будем относить к локальному замыканию множества $F\subset L^2_\infty(\Gamma)$, если в каждой внутренней точке $\tau\in\Gamma$ вектор f эквивалентен некоторому вектору f_τ из F.

Множество F назовем локально-замкнутым, если локальное замыкание множества F содержится в F.

Обозначим через $F_{p,\rho}$ множество векторов $\{a,b\}\in L^2_\infty(\Gamma)$, для которых сингулярный интегральный оператор $aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ является Φ-оператором в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$.

ТЕОРЕМА 2.1. Множество $F_{p,\rho}$ является локально-замкнутым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что эта теорема вытекает из леммы 1.1. Роль алгебры $\mathfrak{A}$ будет играть фактор-алгебра $L(L_p(\Gamma,\rho))/\mathcal{J}(L_p(\Gamma,\rho))$. Класс вычетов из $\mathfrak{A}$, содержащий оператор $A\in L(L_p(\Gamma,\rho))$, обозначим через $\hat{A}$. Введем в алгебре $\mathfrak{A}$ систему $\{M_\tau\}_{\tau\in\Gamma}$ локализующих классов. Пусть $\tau\in\Gamma$ и N_τ – множество непрерывных функций на Γ, каждая из которых равна единице в некоторой (своей) окрестности точки τ. Через M_τ обозначим множество всех элементов алгебры $\mathfrak{A}$ вида $\widehat{xI}$, где $x\in N_\tau$. Легко проверить, что множество $\{M_\tau\}_{\tau\in\Gamma}$ образуют покрывающую систему.

Пусть вектор $f=\{a,b\}$ принадлежит локальному замыканию множества $F_{p,\rho}$, τ – произвольная фиксированная точка на Γ и $f_\tau=\{a_\tau,b_\tau\}$ – вектор из $F_{p,\rho}$, эквивалентный в точке τ вектору $f=\{a,b\}$. Для всякой функции $x\in N_\tau$ $(0\leq x(t)\leq 1)$, носитель которой содержится в достаточно малой окрестности точки τ, числа

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\Gamma}|(a(t)-a_\tau(t))x(t)|,\quad \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\Gamma}|(b(t)-b_\tau(t))x(t)|$$

достаточно малы. Отсюда вытекает, что норма $\|x(A-A_\tau)\|$, где $A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma$, $A_\tau=a_\tau P_\Gamma+b_\tau Q_\Gamma$, достаточно мала. Так как оператор $x(A-A_\tau)-(A-A_\tau)xI$ вполне непрерывен в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$, то фактор-норма $\|(\hat{A}-\hat{A}_\tau)\widehat{xI}\|$ также достаточно мала. Таким образом, элементы $\hat{A}$ и $\hat{A}_\tau$ являются M_τ-эквивалентными. Оператор A_τ является Φ-оператором в $L_p(\Gamma,\rho)$, стало быть, класс вычетов $\hat{A}_\tau$ обратим в алгебре $\mathfrak{A}$. Таким образом, для каждого $\tau\in\Gamma$ элемент $\hat{A}$ является M_τ-эквивалентным обратимому элементу $\hat{A}_\tau$. Так как $AxI-xA\in\mathcal{J}(L_p(\Gamma,\rho))$ для каждой функции $x\in C(\Gamma)$, то $\hat{A}$ принадлежит коммутанту множества $\bigcup_{\tau\in\Gamma}M_\tau$. Из теоремы 1.1 вытекает, что элемент $\hat{A}$ обратим в $\mathfrak{A}$, и, стало быть, оператор $aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ является Φ-оператором. Теорема доказана.

Аналогично доказывается

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть вектор $f=\{a,b\}$ из $L^2_\infty(\Gamma)$ в каждой точке $\tau\in\Gamma$ эквивалентен вектору $f_\tau=\{a_\tau,b_\tau\}$. Если все операторы $A_\tau=a_\tau P_\Gamma+b_\tau Q_\Gamma$ $(\tau\in\Gamma)$ допускают регуляризацию с какой-либо стороны, то оператор $A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ допускает регуляризацию с той же стороны.

Условимся говорить, что функции a и b $(\in L_\infty(\Gamma))$ эквивалентны в точке $\tau\in\Gamma$, если векторы $\{a,1\}$ и $\{b,1\}$ эквивалентны в точке τ.

§ 3. Сингулярные операторы с линейчатыми коэффициентами

В этом параграфе с помощью локального принципа результаты главы X переносятся на случай, когда коэффициенты сингулярного оператора принадлежат замыканию $PC(\Gamma)$.

Пусть Γ - сложный контур. Обозначим через $\overline{PC(\Gamma)}$ замыкание по норме $L_\infty(\Gamma)$ множества $PC(\Gamma)$ (см. § 3, гл. X). Функции из $\overline{PC(\Gamma)}$ называются линейчатыми. Как известно (см., например, Н. Бурбаки [I], стр. 75), множество $\overline{PC(\Gamma)}$ состоит из всех функций, которые в каждой точке $\tau\in\Gamma$ имеют конечные пределы при стремлении t к τ вдоль каждой дуги γ, содержащей τ в качестве одного из своих концов. Множество точек разрыва функции $a(\in\overline{PC(\Gamma)})$ не более чем счетно.

Пусть $a\in\overline{PC(\Gamma)}$, $\tau_1,\tau_2,\ldots$ - все точки разрыва функции a.

$$\rho(t)=\prod_{k=1}^{n}|t-t_k|^{\beta_k}\quad(t_k\in\Gamma,\ -1<\beta_k<p-1,\ 1<p<\infty)\qquad \text{и}$$

$$\delta(t)=\begin{cases}\dfrac{2\pi(1+\beta_k)}{p} & \text{при } t=t_k,\\[2mm] 2\pi/p & \text{при } t\in\Gamma\setminus\{t_1,\ldots,t_n\}.\end{cases}$$

Положим

$$\xi_j^a=a(\tau_j+0)f_{\delta_j}(\mu)+a(\tau_j-0)(1-f_{\delta_j}(\mu)),\tag{3.1}$$

где $a(\tau_j\pm0)$ - числа, определенные равенством (3.I), гл. X; $\delta_j=\delta(\tau_j)$, а функция $f_\delta(\mu)$ определена в теореме 2.I, гл. X. Функцию $a\in\overline{PC(\Gamma)}$ назовем $\{p,\rho\}$-неособенной, если она удовлетворяет условиям

$$\inf_{t\in\Gamma}|a(t)|>0,\quad \xi_j^a(\mu)\neq0\quad(0\le\mu\le1,\ j=1,2,\ldots).$$

Каждой $\{p,\rho\}$-неособенной функции $a\in PC(\Gamma)$ поставим в соответствие число $ind_{p,\rho}a$, которое определим следующим образом. Разобьем контур Γ на конечное число простых разомкнутых дуг $\Gamma_1,\dots,\Gamma_\ell$, на каждой из которых функция a непрерывна. Обозначим через $\tau_1,\dots,\tau_s$ все точки разрыва функции a и положим

$$ind_{p,\rho}a=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{\ell}\left[\arg a(t)\right]_{\Gamma_j}+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{s}\left[\arg\xi_j^a(\mu)\right]_{\mu=0}^{1}. \qquad (3.2)$$

Число $ind_{p,\rho}a$ является целым. Согласно теореме 3.I, гл. X, $-ind_{p,\rho}a$ совпадает с индексом Φ-оператора $A=aP_\Gamma+Q_\Gamma$.

Пусть $a\in\overline{PC(\Gamma)}$, $a_n\in PC(\Gamma)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\|a-a_n\|_{L_\infty(\Gamma)}=0$. Нетрудно проверить, что если функция a является $\{p,\rho\}$-неособенной, то, начиная с некоторого n, функции a_n также являются $\{p,\rho\}$-неособенными и числа $ind_{p,\rho}a_n$ стабилизируются. Положим

$$ind_{p,\rho}a=\lim_{n\to\infty}ind_{p,\rho}a_n.$$

ТЕОРЕМА 3.I. Пусть $a,b\in\overline{PC}(\Gamma)$. Для того чтобы оператор $A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ был Φ-оператором в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\inf_{t\in\Gamma}|a(t)|>0,\qquad \inf_{t\in\Gamma}|b(t)|>0 \qquad (3.3)$$

и

$$\xi_j^c(\mu)\neq 0\quad (0\le\mu\le 1,\ j=1,2,\dots), \qquad (3.4)$$

где $c=ab^{-1}$, ξ_j^c - функции, определенные равенством (3.I), и $\tau_1,\tau_2,\dots$ - все точки разрыва функции c.

Если выполнены условия (3.3) и (3.4), то оператор A обратим, обратим справа, обратим слева в зависимости от того, является ли число $ind_{p,\rho}c$ равным нулю, отрицательным или положительным. При $ind_{p,\rho}c>0$ $\dim\operatorname{Coker}A=ind_{p,\rho}c$, а при $ind_{p,\rho}c<0$ $\dim\operatorname{Ker}A=|ind_{p,\rho}c|$.

Если нарушено одно из условий (3.3) или (3.4), то оператор A не является ни Φ_+-, ни Φ_--оператором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы I.I, гл. УП, достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда Γ является замкнутым контуром. Первую часть теоремы докажем с помощью локального принципа.

Пусть выполнены условия (3.3) и (3.4). Каждой точке $\tau\in\Gamma$ поставим в соответствие функцию $a_\tau(t)$, определенную следующим образом. Если τ – точка непрерывности функции a, то положим $a_\tau(t)=a(\tau)$ $(t\in\Gamma)$. Если же τ – точка разрыва функции a, то через $a_\tau(t)$ обозначим некоторую функцию, непрерывную и отличную от нуля в каждой точке $t\neq\tau$, и удовлетворяющую в точке τ условиям: $a_\tau(\tau)=a(\tau), a_\tau(\tau\pm 0)=a(\tau\pm 0)$. Аналогично определяется функция $b_\tau(t)$. Легко видеть, что вектор $\{a, b\}(\in L^2_\infty(\Gamma))$ эквивалентен вектору $\{a_\tau, b_\tau\}$ в точке τ. Из теоремы 3.I, гл. X, вытекает, что для каждого $\tau\in\Gamma$ оператор $A_\tau=a_\tau P_\Gamma+b_\tau Q_\Gamma$ является Φ-оператором в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$. Таким образом, вектор $\{a, b\}$ принадлежит локальному замыканию множества $F_{p,\rho}$ (см. § 2). В силу теоремы 2.I оператор A является Φ-оператором.

Докажем обратное утверждение. Пусть оператор A является Φ-оператором. С помощью той же теоремы 2.I нетрудно установить, что каждый из операторов A_τ является Φ-оператором. В самом деле, в точках $t_0\neq\tau$ вектор $\{a_\tau, b_\tau\}$ эквивалентен постоянному вектору $\{a_\tau(t_0), b_\tau(t_0)\}$, а в точке τ он эквивалентен вектору $\{a, b\}$. В силу теоремы 2.I оператор A_τ является Φ-оператором. Функции a_τ и b_τ принадлежат $PC(\Gamma)$. Из теоремы 3.I, гл. X, вытекает, что $a(\tau\pm 0)\neq 0$, $b(\tau\pm 0)\neq 0$, и что если $\tau=\tau_j$ – точка разрыва функции c, то $\xi_j^c(\mu)\neq 0$ $(0\le\mu\le 1)$. Таким образом, выполняются условия (3.3) и (3.4). Первое утверждение теоремы доказано.

Из теоремы 3.I, гл. УШ, в силу доказанного выше вытекает, что если выполнены условия (3.3) и (3.4), то функция $c=ab^{-1}$ допускает факторизацию в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$. Стало быть, оператор A обратим с одной стороны в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$ (теорема 4.I, гл. УШ). Функционалы $\operatorname{Ind}(aP_\Gamma+bQ_\Gamma)$ и $\operatorname{ind}_{p,\rho} ab^{-1}$ непрерывны на множестве Φ-операторов вида $aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ $(a, b\in \overline{PC}(\Gamma))$. Если $a, b\in PC(\Gamma)$, то в силу теоремы 3.I, гл. X, $\operatorname{Ind}(aP_\Gamma+bQ_\Gamma)=\operatorname{ind}_{p,\rho} ab^{-1}$. Отсюда следует второе утверждение теоремы.

Последнее утверждение теоремы докажем от противного. Допустим, что оператор $A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ является Φ_+- или Φ_--оператором. Пусть $a_n, b_n\in PC(\Gamma)$, $A_n=a_nP_\Gamma+b_nQ_\Gamma$ и $\lim_{n\to\infty}\|A-A_n\|=0$. Тогда для некоторого n оператор A_n является Φ_+- или Φ_--оператором. В силу теоремы 3.I, гл. X, это невозможно. Теорема доказана.

§ 4. Сингулярные операторы с измеримыми коэффициентами в пространстве $L_2(\Gamma)$

В этом параграфе с помощью локального принципа исследуются сингулярные операторы вида $aP_\Gamma+Q_\Gamma$ с измеримыми ограниченными коэффициентами в пространстве $L_2(\Gamma)$. Обобщения этих результатов на пространства $L_p(\Gamma)$ и $L_p(\Gamma,\rho)$ приводятся в следующей главе.

Пусть Γ – замкнутый контур. Обозначим через $\mathfrak{J}_2(\Gamma)$ множество всех функций $a\in L_\infty(\Gamma)$, удовлетворяющих следующему условию: для каждой точки $\tau\in\Gamma$ существует открытая дуга $\ell(\tau)$, содержащая точку τ, и функции $g_\tau^\pm\in L_\infty^\pm(\Gamma)$, такие, что $1/g_\tau^\pm\in L_\infty^\pm(\Gamma)$ и множество значений функции $ag_\tau^+g_\tau^-$ при $t\in\ell(\tau)$ расположено в некоторой замкнутой полуплоскости Λ_τ, не содержащей начало координат.

ТЕОРЕМА 4.I. *Если $a\in\mathfrak{J}_2(\Gamma)$, то оператор $aP_\Gamma+Q_\Gamma$ является Φ-оператором в пространстве $L_2(\Gamma)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть τ – произвольная точка на Γ, $g_\tau^\pm\in L_\infty^\pm(\Gamma)$ и $\ell(\tau)$ – окрестность точки τ, такая, что множество значений функции $ag_\tau^+g_\tau^-$ при $t\in\ell(\tau)$ расположено в полуплоскости Λ_τ. Положим

$$a_\tau(t)=\begin{cases} a(t) & \text{при } t\in\ell(\tau),\\ \alpha(g_\tau^+(t)g_\tau^-(t))^{-1} & \text{при } t\in\Gamma\setminus\ell(\tau),\end{cases}$$

где α – некоторое комплексное число из Λ_τ. Покажем, что оператор $a_\tau P_\Gamma+Q_\Gamma$ является Φ-оператором в пространстве $L_2(\Gamma)$. Пусть $b=g_\tau^-a_\tau g_\tau^+$. Множество значений функции b расположено в полуплоскости Λ_τ и ограничено. Нетрудно поэтому подобрать число $\gamma\in\mathbb{C}$, такое, что

$$\sup_{t\in\Gamma}|\gamma b(t)-1|<1. \tag{4.1}$$

Оператор $A_\tau=a_\tau P_\Gamma+Q_\Gamma$ можно представить в виде

$$A_\tau=(g_\tau^-)^{-1}((\gamma b-1)P_\Gamma+I)((\gamma g_\tau^+)^{-1}P_\Gamma+g_\tau^- Q_\Gamma). \tag{4.2}$$

Крайние сомножители в правой части равенства (4.2) являются обратимыми операторами. Обратными к ним являются соответственно операторы $g_\tau^- I$ и $\gamma g_\tau^+ P_\Gamma+(g_\tau^-)^{-1}Q_\Gamma$. Так как $\|\hat{P}_\Gamma\|=1$ (см. теорему 2.I, гл. УП), то

$$\inf\|(\gamma b-1)P_\Gamma\|<1. \tag{4.3}$$

В силу теоремы 7.2, гл. IУ, оператор A_τ является Φ-оператором, и его индекс равен нулю. Таким образом, функция a в каждой точке $\tau\in\Gamma$ эквивалентна функции a_τ и операторы $a_\tau P_\Gamma+Q_\Gamma$ являются Φ-операторами. В силу теоремы 2.I оператор A является Φ-оператором. Теорема доказана.

Отметим, что условие $a\in\mathfrak{Y}_2(\Gamma)$ является не только достаточным, но и необходимым, для того чтобы оператор $aP_\Gamma+Q_\Gamma$ был Φ-оператором в пространстве $L_2(\Gamma)$ (по этому поводу см. замечания в конце книги).

Из теоремы 4.I и теоремы 3.I, гл. УШ, вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4.I. Если функция $a\in\mathfrak{Y}_2(\Gamma)$, то она допускает факторизацию $a=a_-t^{\varkappa}a_+$ в пространстве $L_2(\Gamma)$, причем $\varkappa=\operatorname{ind}a|L_2(\Gamma)=-\operatorname{Ind}(aP_\Gamma+Q_\Gamma)$.

Обозначим через $\mathfrak{Y}_2^0(\Gamma)$ множество функций из $\mathfrak{Y}_2(\Gamma)$, удовлетворяющих следующему условию: для каждой точки $\tau\in\Gamma$ существует открытая дуга $\ell(\tau)$, содержащая точку τ, такая, что множество значений функции a при $t\in\ell(\tau)$ расположено в некоторой замкнутой полуплоскости Λ_τ, не содержащей начала координат.

Для функций a из $\mathfrak{Y}_2^0(\Gamma)$ можно дать геометрическую характеристику индекса $\operatorname{ind}a|L_2(\Gamma)$. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда Γ - простой замкнутый контур. Пусть $\ell(\tau_1),\dots,\ell(\tau_n)$ - соответствующее покрытие контура Γ и t_0 - произвольная точка на Γ. Разрежем контур Γ в точке t_0, а точку t_0 заменим двумя точками – начальной точкой t^- и конечной t^+. Зададим значение $\arg a$ в точке t^- и, следуя по направлению обхода контура Γ, будем последовательно определять функцию $\varphi_a(t)=\arg a(t)$ на встречающихся интервалах так, чтобы выполнялось условие $|\arg a(t)-\arg a(t')| < \pi$, когда t и t' принадлежат одному интервалу. Таким образом мы придем к определенному значению $\varphi_a(t^+)=\arg a(t^+)$. Оказывается, что $\operatorname{ind} a \,|\, L_2(\Gamma)=\frac{1}{2\pi}(\varphi_a(t^+)-\varphi_a(t^-))$. В самом деле, ниже (см. лемму I.2, гл. XIУ) будет доказано, что всякую функцию a из $\mathfrak{S}_2^0(\Gamma)$ можно представить в виде произведения $a=bg$, где $g\in C(\Gamma), g(t)\neq 0\,(t\in\Gamma)$ и $\operatorname{ind} g=\frac{1}{2\pi}(\varphi_a(t^+)-\varphi_a(t^-))$, а функция $b\in \mathfrak{S}_2^0(\Gamma)$ и ее множество значений находится в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant \delta > 0$. Так же, как в доказательстве теоремы 4.I, устанавливается, что $bP_\Gamma + Q_\Gamma$ является Φ-оператором и его индекс равен нулю. Отсюда следует, что $\operatorname{Ind}(aP_\Gamma+Q_\Gamma)=-\operatorname{ind} g$, стало быть,

$$\operatorname{ind} a \,|\, L_2(\Gamma)=\frac{1}{2\pi}(\varphi_a(t^+)-\varphi_a(t^-)).$$

Можно определить множество $\mathfrak{S}_2(\Gamma)$ и в случае произвольного составного контура Γ. Пусть $\tilde{\Gamma}(\supset\Gamma)$ – некоторый замкнутый контур. Будем говорить, что $a\in \mathfrak{S}_2(\Gamma)$, если $\tilde{a}\in \mathfrak{S}_2(\tilde{\Gamma})$, где

$$\tilde{a}(t) = \begin{cases} a(t) & \text{при } t\in\Gamma, \\ 1 & \text{при } t\in\tilde{\Gamma}\setminus\Gamma. \end{cases}$$

Очевидно, множество $\mathfrak{S}_2(\Gamma)$ не зависит от выбора контура $\tilde{\Gamma}$. В силу теоремы I.I, гл. УП, теорема 4.I сохраняет силу в случае любого составного контура Γ.

ГЛАВА XIII

СИНГУЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ИЗМЕРИМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Эта глава является продолжением последнего параграфа предыдущей главы. Здесь устанавливаются достаточные условия, при которых сингулярные интегральные операторы с измеримыми коэффициентами являются Φ-операторами в пространствах $L_p(\Gamma, \rho)$.

Глава состоит из шести параграфов. Основная теорема для пространства $L_p(\Gamma)$ содержится во втором параграфе. Первый и третий параграфы носят вспомогательный характер. В четвертом параграфе приводится второе доказательство названной теоремы. Обобщение этой теоремы на пространство с весом излагается в § 5. В последнем параграфе приводится теорема о возмущении коэффициентов сингулярных интегральных операторов.

§ 1. Вспомогательные предложения

Пусть Γ - замкнутый составной контур.

ТЕОРЕМА 1.1. Если множество значений функции $a \in GL_\infty(\Gamma)$ находится внутри угла с вершиной в начале координат раствора меньше чем $2\pi/\max(p,q)$ $(1<p<\infty,$ $p^{-1}+q^{-1}=1)$, то оператор $aP_\Gamma + Q_\Gamma$ обратим в пространстве $L_p(\Gamma)$.

Доказательство этой теоремы основывается на следующем предложении.

ЛЕММА 1.1. Пусть φ - вещественная измеримая функция на единичной окружности Γ_0, удовлетворяющая условию

$$\operatorname*{ess\,sup}_{|t|=1} |\varphi(t)| < \pi/p \quad (p \geqslant 2). \tag{I.1}$$

Тогда функция $exp(i\varphi)$ допускает факторизацию $exp(i\varphi)=a_- a_+$ в пространствах $L_p(\Gamma_0)$ и $L_q(\Gamma_0)$ $(p^{-1}+q^{-1}=1)$ с множителями

$$a_+ = exp(i P_0 \varphi), \quad a_- = exp(i Q_0 \varphi). \tag{I.2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $w(z)$ интеграл Шварца

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta} d\zeta \quad (|z|<1).$$

Покажем, что функции $g(z)=exp(\pm\frac{1}{2}w(z))$ принадлежат пространству Харди $H_p(=L_p^+(\Gamma_0))$. Пусть $u=\frac{1}{2}\,Re\,w$ и $v=\frac{1}{2}\,Im\,w$. Так как $v(0)=0$, то для любого числа r $(0<r<1)$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} e^{\pm ip(u+iv)(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta} = e^{\pm ipu(0)}. \tag{I.3}$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} e^{\pm ip(u+iv)(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| e^{\pm ip(u+iv)} \right| (\cos pu \pm i \sin pu)\, d\theta. \tag{I.4}$$

Из (I.4) и (I.3) вытекает, что

$$\int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^p \cos(pu(re^{i\theta}))\, d\theta = \cos(pu(0)).$$

Функция $u(\zeta)$ является гармонической функцией внутри круга $|\zeta|<1$, и ее предельные значения на Γ_0 почти всюду совпадают с $1/2\,\varphi(\zeta)$ (см. К. Гофман [I], стр. 52). Стало быть,

$$|u(z)| \leqslant 1/2 \sup_{|\zeta|=1} |\varphi(\zeta)| = M < \pi/2p.$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^p d\theta \leqslant$$

$$\leq \frac{1}{\cos(Mp)}\int_0^{2\pi}|g(re^{i\theta})|^p\cos(pu(re^{i\theta}))d\theta=\frac{\cos(pu(0))}{\cos(Mp)}.$$

Это соотношение показывает, что $g\in L_p^+(\Gamma_0)$ (см. К.Гофман [I], стр. 63).

Обозначим через $f(z)$ интеграл типа Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \quad (|z|<1),$$

и пусть $\psi=exp(\pm if)$. Так как

$$f(z)-\frac{1}{2}w(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(e^{i\theta})d\theta,$$

то $|\psi(z)g^{-1}(z)|=1$, и, стало быть, $|\psi(z)|=|g(z)|$, откуда вытекает, что ψ также принадлежит пространству $L_p^+(\Gamma_0)$. Таким образом, функция $exp(\pm iP_0\varphi)$ (являющаяся почти всюду предельным значением изнутри функции $\psi(z)$) принадлежит $L_p^+(\Gamma_0)$. Аналогично доказывается, что $exp(\pm iQ\varphi)\in L_p^-(\Gamma_0)$. Так как $p\geq 2$, то $L_p^\pm(\Gamma_0)\subset L_q^\pm(\Gamma_0)$. Отсюда следует, что $a_+, a_+^{-1}\in L_q^+(\Gamma_0)$ и $a_-, a_-^{-1}\in L_q^-(\Gamma_0)$. Докажем ограниченность оператора $a_+^{-1}P_0a_-^{-1}$. Пусть $c=exp(i\alpha\varphi)$, где число $\alpha>p/2$ выбрано так, чтобы выполнялось условие

$$\operatorname*{ess\,sup}_{|t|=1}|\alpha\varphi(t)|<\pi/2.$$

В силу теоремы 4.I, гл. XII, оператор cP_0+Q_0 обратим в пространстве $L_2(\Gamma_0)$. Из теоремы 3.I, гл. VIII, вытекает, что функция c допускает факторизацию $c=\tilde{c}_-\tilde{c}_+$ в пространстве $L_2(\Gamma_0)$. Кроме этого, в силу доказанного выше, функция c допускает представление $c=c_-c_+$, где $c_+=exp(i\alpha P_0\varphi)$, $c_-=$ $=exp(i\alpha Q_0\varphi)$ и $c_+^{\pm1}\in L_2^+(\Gamma_0)$, $c_-^{\pm1}\in L_2^-(\Gamma_0)$. Из равенства $c_-c_+=\tilde{c}_-\tilde{c}_+$ легко выводится, что $\tilde{c}_-=\mu c_-$ и $\tilde{c}_+=\mu^{-1}c_+$, где $\mu\in\mathbb{C}$. Оператор $\tilde{c}_+^{-1}P_0\tilde{c}_-^{-1}I$ ограничен в пространстве $L_2(\Gamma_0)$, стало быть, оператор $c_+^{-1}P_0c_-^{-1}I$ также ограничен в этом пространстве. Положим $h=|exp(\frac{1}{2}S_0\varphi)|$. Легко видеть, что $|c_+|=h^\alpha$, $|c_-|=h^{-\alpha}$, следовательно, оператор $h^{-\alpha}P_0h^\alpha$ ограничен в пространстве $L_2(\Gamma_0)$. Отсюда вытекает, что

$$\|h^{-\alpha}P_0f\|_{L_2(\Gamma_0)}\leq k_1\|h^{-\alpha}f\|_{L_2(\Gamma_0)} \qquad (I.5)$$

для любой функции f, непрерывной на Γ_0.

Пусть $p_1=2p(\alpha-1)/(2\alpha-p)$ и $t=1/\alpha$, тогда

$$\frac{1}{p}=\frac{t}{2}+\frac{1-t}{p_1}\ . \tag{I.6}$$

Оператор P_0 ограничен в пространстве $L_{p_1}(\Gamma_0)$ и, стало быть,

$$\|P_0 f\|_{L_{p_1}(\Gamma_0)}\leq k_2\|f\|_{L_{p_1}(\Gamma_0)}\ . \tag{I.7}$$

Из соотношений (I.5), (I.6) и (I.7) и интерполяционной теоремы I.4, гл. I, вытекает, что

$$\|h^{-1}P_0 f\|_{L_p(\Gamma_0)}\leq k\|h^{-1}f\|_{L_p(\Gamma_0)}\ .$$

Стало быть, оператор $h^{-1}P_0 hI$ ограничен в пространстве $L_p(\Gamma_0)$. Так как $|a_+|=h$ и $|a_-|=h^{-1}$, где $a_\pm$ – функции, определенные равенством (I.2), то оператор $a_+^{-1}P_0 a_-^{-1}I$ ограничен в пространстве $L_p(\Gamma_0)$. Ограниченность этого оператора в пространстве $L_q(\Gamma_0)$ доказывается переходом к сопряженному оператору. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I.I. Пусть сначала $\Gamma=\Gamma_0$; из условия теоремы вытекает, что функцию a можно представить в виде $a=\beta|a|exp(i\varphi)$, где функция φ удовлетворяет условиям леммы I.I и $\beta=const$. Отсюда и из теоремы 2.2, гл. УШ, вытекает, что функция a допускает факторизацию $a=a_-\,a_+$ в пространстве $L_p(\Gamma_0)$. В силу теоремы 4.I, гл. УШ, оператор aP_0+ $+\,Q$ обратим в пространстве $L_p(\Gamma_0)$.

Пусть Γ – простой замкнутый контур и $\nu:\Gamma_0\to\Gamma$ – отображение, обладающее производной $\nu'(z)$, отличной от нуля и удовлетворяющей условию Гельдера на Γ_0. Тогда (см. § 4, гл. I) имеет место равенство

$$B(aP_\Gamma+Q_\Gamma)B^{-1}=a_0P_0+Q_0+T,$$

где T – вполне непрерывный оператор, $(B\varphi)(\zeta)=\varphi(\nu(\zeta))$ и $a_0(\zeta)=$ $=a(\nu(\zeta))$. В силу доказанного выше оператор $aP_\Gamma+Q_\Gamma$ является Φ-оператором и его индекс равен нулю. Это утверждение с помощью теоремы I.2, гл. УП, переносится на случай любого замкнутого составного контура Γ. Из теоремы 5.4, гл. УП, вытекает, что оператор $aP_\Gamma+Q_\Gamma$ обратим. Теорема доказана.

§ 2. Сингулярные операторы с коэффициентами из $\mathfrak{S}_p(\Gamma)$

Пусть Γ – замкнутый контур. Обозначим через $\mathfrak{S}_p(\Gamma)(1<p<\infty)$ множество всех функций $a\in L_\infty(\Gamma)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\operatorname{ess\,inf}_{t\in\Gamma}|a(t)|>0$;

2) для каждой точки $\tau\in\Gamma$ существуют открытая дуга $\ell(\tau)$ $(\subset\Gamma)$, содержащая точку τ, и функции $g_\tau^\pm$, принадлежащие $L^\pm_\infty$ вместе со своими обратными $1/g_\tau^\pm$, такие, что множество значений функции $g_\tau^+ a g_\tau^-$ при $t\in\ell(\tau)$ находится внутри угла $\Lambda_\tau(p)$ (с вершиной в начале координат) раствора меньше чем $2\pi/\max(p,q)$ $(p^{-1}+q^{-1}=1)$. Напомним, что множество $\mathfrak{S}_2(\Gamma)$ было введено в § 4, гл. XII.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $a\in\mathfrak{S}_p(\Gamma)$, тогда оператор $aP_\Gamma+Q_\Gamma$ является Φ-оператором в пространстве $L_p(\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта теорема доказывается с помощью локального принципа. Пусть τ – произвольная точка контура Γ, $g_\tau^\pm\in L^\pm_\infty(\Gamma)$ и $\ell(\tau)$ – окрестность точки τ, такая, что множество значений функции $ag_\tau^+ g_\tau^-$ при $t\in\ell(\tau)$ расположено внутри угла $\Lambda_\tau(p)$. Положим

$$a_\tau(t)=\begin{cases} a(t) & \text{при}\quad t\in\ell(\tau),\\ \alpha(g_\tau^+(t)g_\tau^-(t))^{-1} & \text{при}\quad t\in\Gamma\setminus\ell(\tau),\end{cases}$$

где $\alpha\neq 0$ – некоторое комплексное число из $\Lambda_\tau(p)$. В силу теоремы 1.1 оператор $bP_\Gamma+Q_\Gamma$, где $b=a_\tau g_\tau^+ g_\tau^-$, обратим в пространстве $L_p(\Gamma)$. Из равенства $bP_\Gamma+Q_\Gamma=g_\tau^-(a_\tau P_\Gamma+Q_\Gamma)(g_\tau^+P_\Gamma+(g_\tau^-)^{-1}Q_\Gamma)$ вытекает, что оператор $a_\tau P_\Gamma+Q_\Gamma$ обратим в пространстве $L_p(\Gamma)$. Функция a в каждой точке $\tau\in\Gamma$ эквивалентна функции a_τ, и оператор $a_\tau P_\Gamma+Q_\Gamma$ обратим в пространстве $L_p(\Gamma)$. В силу теоремы 2.1, гл. XII, оператор A является Φ-оператором. Теорема доказана.

Из теоремы 2.1 и теоремы 3.1, гл. VIII, вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Если функция $a\in\mathfrak{S}_p(\Gamma)$, то она допускает факторизацию $a=a_-t^\varkappa a_+$ в пространстве $L_p(\Gamma)$, причем $\varkappa=\operatorname{ind}a\,|\,L_p(\Gamma)=-\operatorname{Ind}(aP_\Gamma+Q_\Gamma)$.

Обозначим через $\mathcal{G}_p^0(\Gamma)$ множество всех функций a $(\in \mathcal{G}_p(\Gamma))$, удовлетворяющих следующему условию. Для каждой точки $\tau\in\Gamma$ найдется открытая дуга $\ell(\tau)$, содержащая точку τ, такая, что множество значений функции a при $t\in\ell(\tau)$ содержится внутри угла $\Lambda_\tau(p)$. Множество $\mathcal{G}_2^0(\Gamma)$ было введено в § 4, гл. XII. Для функций a из $\mathcal{G}_p^0(\Gamma)$ можно дать геометрическую характеристику индекса $\operatorname{ind} a | L_p(\Gamma)$. Пусть Γ – простой замкнутый контур и $a\in\mathcal{G}_p^0(\Gamma)$. Так как $\mathcal{G}_p^0(\Gamma)\subset\mathcal{G}_2^0(\Gamma)$, то функции a можно поставить в соответствие число $(\varphi_a(t^+)-\varphi_a(t^-))/2\pi$, определенное в § 4, гл. XII. Покажем, что

$$\operatorname{ind} a | L_p(\Gamma)=\frac{1}{2\pi}(\varphi_a(t^+)-\varphi_a(t^-)). \tag{2.1}$$

Для этого понадобится следующее вспомогательное предложение.

ЛЕММА 2.2. *Всякую функцию* $a\in\mathcal{G}_p(\Gamma)$ *можно представить в виде* $a=bg$, *где* $b\in GL_\infty(\Gamma)$ *и множество значений* b *находится внутри угла с вершиной в начале координат раствора меньше чем* $2\pi/\max(p,q)$, *а* $g\in GC(\Gamma)$ *и* $\operatorname{ind} g=\frac{1}{2\pi}(\varphi_a(t^+)-\varphi_a(t^-))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для определенности $p\geq q$. Доказательство леммы сводится к построению вещественной функции φ, непрерывной в каждой точке $t\neq t_0$ контура Γ и удовлетворяющей условиям

$$\sup|\varphi_a(t)-\varphi(t)|<\pi/p,\ \varphi(t^+)-\varphi(t^-)=\varphi_a(t^+)-\varphi_a(t^-). \tag{2.2}$$

Функции g и b определяются при этом равенствами

$$g=\exp(i\varphi),\qquad b=|a|\exp i(\varphi_a-\varphi).$$

Контур Γ, очевидно, можно разбить на конечное число дуг γ_k с концами t_{k-1}, t_k $(k=1,\dots,n;\ t_0=t^-,\ t_n=t^+)$ так, чтобы выполнялось условие

$$\sup_{t\in\gamma_k}\varphi_a(t)-\inf_{t\in\gamma_k}\varphi_a(t)<2\pi/p.$$

Пусть

$$\lambda_k=\inf_{t\in\gamma_k}\varphi(t),\quad \mu_k=\sup_{t\in\gamma_k}\varphi(t).$$

Положим

$$\varphi(t_k)=\frac{1}{2}(max(\mu_k,\mu_{k+1})+min(\lambda_k,\lambda_{k+1}))\quad (k=1,\dots,n-1),$$

$$\varphi(t^-)=\frac{1}{2}(max(\mu_1,\mu_n-m)+min(\lambda_1,\lambda_n-m)),$$

где $m=\varphi(t^+)-\varphi(t^-)$ и $\varphi(t^+)=\varphi^-+m$. В остальных точках $t\in\Gamma$ функция φ определяется линейным интерполированием по дугам γ_k. Нетрудно проверить, что

$$\sup_{t\in\gamma_k}|\varphi(t)-\lambda_k|<\pi/p \quad \text{и} \quad \sup_{t\in\gamma_k}|\varphi(t)-\mu_k|<\pi/p.$$

Так как этим же соотношениям удовлетворяет функция φ и $0\le\mu_k-\lambda_k<2\pi/p$, то выполняется первое из соотношений (2.2). Справедливость второго соотношения (2.2) вытекает из определения функции φ. Лемма доказана.

Из доказанной леммы вытекает, что оператор $aP_\Gamma+Q_\Gamma$ можно представить в виде $(bP_\Gamma+Q_\Gamma)(gP_\Gamma+Q_\Gamma)+T$, где $T\in\mathcal{J}(L_p(\Gamma))$. Оператор $gP_\Gamma+Q_\Gamma$ является Φ-оператором, и по доказанному

$$\operatorname{Ind}(gP_\Gamma+Q_\Gamma)=-\operatorname{ind}g=-(\varphi_a(t^+)-\varphi_a(t^-))/2\pi.$$

В силу теоремы I.I оператор $bP_\Gamma+Q_\Gamma$ обратим. Отсюда вытекает, что $\operatorname{Ind}(aP_\Gamma+Q_\Gamma)=-(\varphi(t^+)-\varphi(t^-))/2\pi$. Стало быть,

$$\operatorname{ind}a\,|\,L_p(\Gamma)=\frac{1}{2\pi}(\varphi(t^+)-\varphi(t^-)).$$

В этом выводе рассматривался простой замкнутый контур Γ. Для произвольного замкнутого контура Γ, состоящего из простых замкнутых контуров $\Gamma_1,\dots,\Gamma_n$ имеет место равенство $\operatorname{ind}a\,|\,L_p(\Gamma)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{ind}a\,|\,L_p(\Gamma_k)$ (см. § I, гл. УШ), позволяющее дать геометрическую характеристику $\operatorname{ind}a\,|\,L_p(\Gamma)$ в пространстве $L_p(\Gamma)$.

Можно определить множество $\mathcal{G}_p(\Gamma)$ для произвольного составного контура Γ. Это делается так же, как при $p=2$ в § 4, гл. XII. Отметим, что если Γ – замкнутый составной контур, состоящий из простых замкнутых контуров $\Gamma_1,\dots,\Gamma_n$, то $a\in\mathcal{G}_p(\Gamma)$ в том и только том случае, когда $a|\Gamma_k\in\mathcal{G}_p(\Gamma_k)$ для каждого $k=1,\dots,n$. Теорема 2.I, очевидно, сохраняет силу для случая произвольного составного контура Γ. Из теоремы 2.I и теоремы 4.I, гл. IX, вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть $a \in \mathfrak{S}_p(\Gamma)$ и $\varkappa = ind\, a \mid L_p(\Gamma)$, тогда оператор $aP_\Gamma + Q_\Gamma$ обратим, обратим слева, обратим справа в пространстве $L_p(\Gamma)$ в зависимости от того, является ли число $\varkappa$ равным нулю, положительнным или отрицательным.

§ 3. Оценка нормы преобразования Гильберта

Основной в этом параграфе является

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} f_k t^k \quad (|t|=1)$$

– тригонометрический полином с коэффициентами $f_k \in \mathbb{C}$, для которых $f_{-k} = \bar{f}_k$. Тогда для функции

$$g(t) = i\left(\sum_{k=-n}^{-1} - \sum_{k=1}^{n}\right) f_k t^k \tag{3.1}$$

при $1 < p \le 2$ имеет место оценка

$$\|g\|_{L_p(\Gamma_0)} \le tg\frac{\pi}{2p}\|f\|_{L_p(\Gamma_0)}. \tag{3.2}$$

С помощью этой теоремы в следующем параграфе приводится другое доказательство теоремы 1.1, не использующее интерполяционной теоремы 1.4 из гл. 1. Вначале приведем два вспомогательных предложения.

ЛЕММА 3.1. При $|x| \le \pi/2$ и $1 < p \le 2$ имеет место соотношение

$$|\sin x|^p \le tg^p\frac{\pi}{2p}\cos^p x - \beta(p)\cos px, \tag{3.3}$$

где

$$\beta(p) = \frac{\sin^{p-1}(\pi/2p)}{\cos(\pi/2p)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$F(x)=\frac{\sin^p x+\beta(p)\cos px}{\cos^p x}$$

в интервале $0<x<\pi/2$. Легко проверить, что

$$F'(x)=p\frac{\sin^{p-1}x}{\cos^{p+1}x}\,g(x),$$

где $g(x)=1-\beta(p)\dfrac{\sin(p-1)x}{\sin^{p-1}x}$. Так как $g'(x)=-\beta(p)(p-1)\sin(2-p)x\times$ $\times\sin^{-p}x<0$, то g – убывающая функция. Кроме этого, $g(\pi/2p)=0$ и, стало быть, $F'(x)>0$ при $0<x<\pi/2p$ и $F'(x)<0$ при $\pi/2p<x<\pi/2$. Таким образом, $F(x)\leq F\left(\frac{\pi}{2p}\right)=tg^p\frac{\pi}{2p}$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$. Отсюда вытекает соотношение (3.3).

2. Пусть D – некоторая область на плоскости $\mathbb{C}$ и Γ – ее граница. Напомним, что непрерывная вещественная функция u, определенная в D, называется субгармонической, если для любого замкнутого круга $Q\subset D$ с центром в точке z_0 и радиуса r справедливо неравенство

$$u(z_0)\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+re^{i\theta})d\theta. \tag{3.4}$$

Как известно (см., например, А.Ф.Тиман и В.Н.Трофимов [I], стр. 186), для того чтобы непрерывная вещественная функция u в области D была субгармонической, необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки $z\in D$ неравенство (3.4) выполнялось при достаточно малых r.

ЛЕММА 3.2. *Функция* $g_0:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$, *определенная равенством*

$$g_0(z)=|z|^p\cos(p\alpha(z)),$$

где $\alpha(x+iy)=arctg(y/|x|)$ *и* $1<p\leq 2$, *является субгармонической в* $\mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция g_0 непрерывна в $\mathbb{C}$, то достаточно проверить, что в каждой точке $z\in\mathbb{C}$ неравенство (3.4) выполняется для всех достаточно малых r.

Функция g_0 в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ совпадает с гармонической функцией $\operatorname{Re} z^p (|\arg z| < \pi/2)$, а в левой полуплоскости – с гармонической функцией $\operatorname{Re}(-z)^p (|\arg(-z)| < \pi/2)$, следовательно, для всех z, для которых $\operatorname{Re} z \neq 0$, выполнено соотношение (3.4) при достаточно малых r.

Пусть $z = 0$, тогда для любого положительного числа r будем иметь

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_0(re^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^p \cos(p\theta)\,d\theta = \frac{2r^p}{\pi p}\sin\frac{p\pi}{2} \geq 0 = g_0(0),$$

стало быть, и при $z = 0$ соотношение (3.4) справедливо.

Осталось рассмотреть точки $z = iy$, где y – произвольное вещественное число, отличное от нуля. Пусть $h_0(z) = \operatorname{Re} z^p$, $z \neq 0$, $|\arg z| < \pi$. Функции h_0 и g_0 совпадают в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$. Покажем, что в точках левой полуплоскости, для которых $\operatorname{Im} z \neq 0$, разность $g_0 - h_0$ неотрицательна. Пусть $z = ae^{ix}$ $(a > 0, \frac{\pi}{2} \leq x < \pi)$, тогда

$$g_0(z) - h_0(z) = a^p(\cos p(x-\pi) - \cos px) = 2a^p \sin p\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{p\pi}{2} \geq 0.$$

Если же $z = ae^{ix}$ $(a > 0, -\pi < x \leq -\frac{\pi}{2})$, то

$$g_0(z) - h_0(z) = a^p(\cos p(x+\pi) - \cos px) = -2a^p \sin\left(\left(x + \frac{\pi}{2}\right)p\right)\sin\frac{p\pi}{2} \geq 0.$$

Таким образом, $g_0 - h_0 \geq 0$. Так как, кроме этого, функция h_0 является гармонической на комплексной плоскости с разрезом вдоль отрицательной вещественной полуоси, то для любого числа r $(0 < r < |y|)$ получаем соотношение

$$g_0(iy) = h_0(iy) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_0(iy + re^{i\theta})\,d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_0(iy + re^{i\theta})\,d\theta.$$

Стало быть, имеет место соотношение (3.4). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.I. Положим

$$h(z)=2\sum_{k=0}^{n} f_k z^k.$$

Нетрудно проверить, что на окружности Γ_0 $f=\operatorname{Re} h$ и $g=\operatorname{Im} h$. Наконец, через f_0 обозначим функцию $w(z)=g_0(h(z))$, где g_0 – субгармоническая функция из леммы 3.2. Так как функция h голоморфна в $\mathbb{C}$, а g_0 субгармонична, то w – также субгармоническая функция.

Пусть $\varphi(z)=\alpha(h(z))$, где $\alpha(x+iy)=\operatorname{arctg}(y/|x|)$; функция φ определена в тех точках z, в которых $h(z)\neq 0$. Доопределим ее произвольным образом в точках z, являющихся корнями полинома h, тогда функцию w можно записать в виде $w=|h|\cos(p\varphi)$. Нетрудно проверить, что при $|z|=1$ имеют место равенства

$$|f(z)|=|h(z)|\cos\varphi(z), \quad |g(z)|=|h(z)\sin\varphi(z)|. \tag{3.5}$$

Из леммы 3.I вытекает, что

$$\int_{\Gamma_0}|h(z)|^p|\sin\varphi(z)|^p|dz|\leq$$

$$\leq \operatorname{tg}^p\frac{\pi}{2p}\int_{\Gamma_0}|h(z)|^p\cos^p\varphi(z)|dz|-\beta(p)\int_{\Gamma_0}|h(z)|^p\cos(p\varphi(z))|dz| \tag{3.6}$$

Покажем, что последний интеграл в правой части равенства (3.6) неотрицателен. Так как f – вещественная функция, то $\operatorname{Im} h(0)=0$. Отсюда следует, что если $h(0)\neq 0$, то $\varphi(0)=0$, стало быть, $f(0)=|h(0)|^p$. Так как функция f_0 субгармонична, то

$$0\leq f_0(0)\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(e^{i\theta})d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_0}|h(z)|^p\cos(p\varphi(z))|dz|. \tag{3.7}$$

Из (3.5), (3.6) и (3.7) вытекает, что

$$\int_{\Gamma_0}|g(t)|^p|dt|\leq \operatorname{tg}^p\frac{\pi}{2p}\int_{\Gamma_0}|f(t)|^p|dt|.$$

Теорема доказана.

Теорема 3.I можно придать другую формулировку. Обозначим через $L_p^{\mathbb{R}}(\Gamma_0)$ вещественное пространство L_p на контуре Γ_0 и через H – оператор, определенный на вещественных тригонометрических полиномах равенством

$$H\Big(\sum_{k=-n}^{n} f_k t^k\Big)=i\Big(\sum_{k=-n}^{-1}-\sum_{k=1}^{n}\Big)f_k t^k \quad (|t|=1).$$

Преобразование H называется преобразованием Гильберта. Очевидно, оператор H отличается от оператора $-iS_{\Gamma_0}$ лишь одномерным оператором. Отсюда вытекает, что оператор H ограничен в пространстве $L_p^{\mathbb{R}}(\Gamma_0)$.

ТЕОРЕМА 3.2. Имеет место равенство

$$\|H\|_{L_p^{\mathbb{R}}(\Gamma_0)}=tg\frac{\pi}{2p}\ (1<p\le 2);\ \|H\|_{L_p^{\mathbb{R}}(\Gamma_0)}=ctg\frac{\pi}{2p}\ (2\le p<\infty). \qquad (3.8)$$

Соотношение

$$\|H\|_{L_p^{\mathbb{R}}(\Gamma_0)}\le tg\frac{\pi}{2p}\quad (1<p\le 2)$$

вытекает из теоремы 3.I. Знак равенства достигается в силу теоремы 9.2, гл. IX. Второе равенство (3.8) получается из первого переходом к сопряженному оператору.

§ 4. Второе доказательство теоремы I.I

Теорема 2.I, которая является одной из основных в настоящей главе, была доказана с помощью теоремы I.I. В доказательстве последней существенную роль сыграла интерполяционная теорема I.4, гл. I.

В этом параграфе приводится другое доказательство теоремы I.I, основанное лишь на оценке (3.2), установленной в предыдущем параграфе. Так же, как в § I (см. доказательство теоремы I.I), теорему достаточно доказать для случая, когда Γ – единичная окружность и $a=exp(i\varphi)$, где $\sup_{|t|=1}|\varphi(t)|<\pi/max(p,q)$. Очевидно, достаточно ограничиться случаем $1<p\le 2$.

Рассмотрим пространство $L_p(\Gamma_0)$ как вещественное банахово пространство с новой нормой, определенной равенством

$$\|\varphi\|'_p=\|Re\,\varphi\|_{L_p(\Gamma_0)}+\|\Im m\,\varphi\|_{L_p(\Gamma_0)}\quad(\varphi\in L_p(\Gamma_0)).$$

Очевидно, эта норма топологически эквивалентна обычной норме пространства $L_p(\Gamma_0)$. Оператор $A=aP_0+Q_0$ $(a=exp(i\varphi))$, действующий в $L_p(\Gamma_0)$, можно представить в виде

$$A=\frac{a+1}{2}\left(I+\frac{a-1}{a+1}S_0\right)=\frac{a+1}{2}\left(I-tg(\varphi/2)H+K_1\right),\tag{4.I}$$

где H – преобразование Гильберта, определенное в предыдущем параграфе, а K_1 – одномерный оператор: $(K_1\varphi)(t)=(P_0\varphi)(0)$. Положим $A_0=tg(\varphi/2)H$. Множество вещественных функций из $L_p(\Gamma_0)$ инвариантно относительно оператора A_0, следовательно,

$$\|A_0\varphi\|'_p=\|A_0(Re\,\varphi)\|_{L_p(\Gamma_0)}+\|A_0(\Im m\,\varphi)\|_{L_p(\Gamma_0)}\leq\|A_0\|_{L_p^{\mathbb{R}}(\Gamma_0)}\|\varphi\|'_p.$$

Так как $\sup\limits_{|t|=1}|\varphi(t)|<\pi/q$, то $\sup\limits_{|t|=1}|tg(\varphi/2)|\leq ctg(\pi/2p)$. В силу теоремы 3.2 $\|A_0\|_{L_p^{\mathbb{R}}(\Gamma_0)}<1$. Отсюда вытекает обратимость оператора $I-A_0$ в пространстве $L_p(\Gamma_0)$. Из равенства (4.I) вытекает, что оператор A является Φ-оператором в пространстве $L_p(\Gamma_0)$ и его индекс равен нулю. В силу теоремы 5.3, гл. УП, оператор A обратим в пространстве $L_p(\Gamma_0)$.

§ 5. Сингулярные операторы в пространстве L_p с весом

Пусть Γ – замкнутый контур, $t_1,\dots,t_n\in\Gamma$ и $\rho(t)=\prod\limits_{k=1}^{n}|t-t_k|^{\beta_k}$ $(1<p<\infty,-1<\beta_k<p-1)$. Обозначим через $\mathcal{G}_p(\Gamma,\rho)$ множество функций a из $\mathcal{G}_p(\Gamma)$ (см. § 2), удовлетворяющих следующему дополнительному условию: для каждой точки $t_k(k=1,\dots,n)$ существует открытая дуга $\ell(t_k)(\subset\Gamma)$, содержащая точку t_k, и функции $g_k^{\pm}$, принадлежащие вместе со своими обратными $L_\infty^{\pm}(\Gamma)$, такие, что множество значений функции $g_k^{+}g_k^{-}a$ при $t\in\ell(t_k)$ содержится внутри угла с вершиной в точке $z=0$ раствора меньше чем $2\pi/max(p_k,q_k)$, где $p_k=p(1+\beta_k)^{-1}$,

$$q_k^{-1} + p_k^{-1} = 1. \tag{5.1}$$

ТЕОРЕМА 5.I. П у с т ь $a \in \mathcal{G}_p(\Gamma, \rho)$, т о г д а о п е р а т о р $A = aP_\Gamma + Q_\Gamma$ я в л я е т с я Φ-о п е р а т о р о м в п р о с т р а н с т в е $L_p(\Gamma, \rho)$.

Докажем предварительно две леммы.

ЛЕММА 5.I. П у с т ь в е щ е с т в е н н а я и з м е р и м а я ф у н к ц и я φ у д о в л е т в о р я е т п р и н е к о т о р о м $p(1<p<\infty)$ и $\beta(-1<\beta<p-1)$ у с л о в и ю

$$\operatorname*{ess\,sup}_{|t|=1} |\varphi(t)| < \pi/\bar{p}, \tag{5.2}$$

г д е $\bar{p} = max(p, p(p-1)^{-1}, \quad p(1+\beta)^{-1}, p(p-1-\beta)^{-1})$, и t_0 - н е к о т о р а я т о ч к а н а е д и н и ч н о й о к р у ж н о с т и Γ_0. Т о г д а о п е р а т о р $h^{-1}P_0 h I$, г д е $h = |exp(\frac{1}{2}S_0\varphi)|$, о г р а н и ч е н в п р о с т р а н с т в е $L_p(\Gamma_0, |t-t_0|^\beta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограниченность оператора $h^{-1}P_0 h I$ в пространстве $L_p(\Gamma, |t-t_0|^\beta)$, очевидно, эквивалентна ограниченности в пространстве $L_p(\Gamma)$ оператора $M = h_1^{-1}P_0 h_1 I$, где $h_1 = h \cdot |t-t_0|^{-\beta/p}$.

Доказательство ограниченности оператора M проведем с помощью теоремы I.4, гл. I.

Пусть сначала $p \geqslant 2$. Выбор интерполяционной пары пространств зависит от числа β. В силу условия леммы можно подобрать положительное число δ, такое, что

$$\operatorname*{ess\,sup}_{|t|=1} |\varphi(t)| < \pi(1-\delta)/\bar{p}.$$

Пусть ε - некоторое положительное число, удовлетворяющее условию $\varepsilon < min(\delta, \delta(1+\beta), \delta(p-1-\beta)/p)$. Определим числа τ_1, τ_2 и ν следующими равенствами:

$$\tau_1 = \tau_2 = p, \quad \nu = 1+\beta-\varepsilon, \quad \text{если } -1<\beta\leqslant 0,$$

$$\tau_1 = 2, \ \nu = 2(1-\varepsilon)/p, \ \tau_2 = 2p(1-\nu)/(2-\nu p), \text{ если } 0<\beta<p-2,$$

$$\tau_1 = 2, \nu = 2(p-1-\beta)/p - 2\varepsilon, \tau_2 = 2p(1-\nu)/(2-\nu p), \text{ если } p-2\leqslant\beta<p-1.$$

Непосредственно проверяются следующие соотношения:

$$0 \leqslant \nu \leqslant 1, \ \frac{\nu}{\tau_1} + \frac{1-\nu}{\tau_2} = \frac{1}{p}, \ \tau_2 > 1, \ \tau_1 \geqslant 2, \tag{5.3}$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{|t|=1}\left|\frac{\varphi(t)}{\nu}\right| < \frac{\pi}{r}, \tag{5.4}$$

$$-\frac{1}{r_2} < \frac{\beta}{p(1-\nu)} < \frac{r_2-1}{r_2}. \tag{5.5}$$

Из (5.4) и леммы I.I вытекает, что оператор $h^{-\frac{1}{\nu}} P_0 h^{\frac{1}{\nu}} I$ ограничен в пространстве $L_{r_1}(\Gamma_0)$. Из (5.5) и теоремы I.4, гл. I, вытекает, что оператор P_0 ограничен в пространстве $L_{r_2}(\Gamma_0, |t-t_0|^{\frac{\beta r_2}{p(1-\nu)}})$ стало быть, оператор

$$|t-t_0|^{\frac{\beta}{p(1-\nu)}} P_0 |t-t_0|^{-\frac{\beta}{p(1-\nu)}} I$$

ограничен в пространстве $L_{r_2}(\Gamma_0)$.

Из теоремы I.4, гл. I, вытекает, что оператор $h_1^{-1} P_0 h_1 I$ ограничен в пространстве $L_p(\Gamma_0)$. Для случая $p \geq 2$ лемма доказана. Пусть $p<2$. Положим $q=p(p-1)^{-1}$ и $\beta'=\beta(1-p)^{-1}$, тогда

$$\bar{q}=\max(q, q(q-1)^{-1}, q(1+\beta')^{-1}, q(q-1-\beta')^{-1})=$$

$$=\max(p(p-1)^{-1}, p, p(p-1-\beta)^{-1}, p(1+\beta)^{-1})=\bar{p}.$$

Так как $q>2$, то в силу доказанного выше оператор $h P_0 h^{-1} I$ ограничен в пространстве $L_q(\Gamma_0, |t-t_0|^{\beta'})$. Остается перейти к сопряженному оператору $h^{-1} P_0 h I$ в сопряженном пространстве $L_p(\Gamma_0, |t-t_0|^{\beta})$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5.2. Пусть Γ – замкнутый контур, $a \in GL_\infty(\Gamma)$ и множество значений функции a при $t \in \Gamma$ содержится внутри угла с вершиной в точке $z=0$ раствора меньше чем $2\pi/\bar{p}$, где $\bar{p}=\max(p, p(p-1)^{-1}, p(1+\beta)^{-1}, p(p-1-\beta)^{-1})$, $1<p<\infty$ и $-1<\beta<p-1$. Тогда оператор $aP_\Gamma + Q_\Gamma$ обратим в пространстве $L_p(\Gamma, |t-t_0|^{\beta})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же, как в доказательстве теореме I.I, можно ограничиться случаем, когда $\Gamma=\Gamma_0$ – единичная окружность и $a=\exp(i\varphi)$, где φ – вещественная измеримая функция, удовлетворяющая условию

$$\operatorname*{ess\,sup}_{|t|=1}|\varphi(t)| < \pi/\bar{p}.$$

Так как $\bar{p} \geq max(p,q)$, то функция a удовлетворяет условию (I.1), стало быть, она допускает факторизацию $a=a_- a_+$ в пространстве $L_p(\Gamma_0)$. В силу теоремы 4.I, гл. УШ, оператор $aP_0+ +Q_0$ обратим в пространстве $L_p(\Gamma_0)$ и обратным к нему является оператор $B=(a_+^{-1}P_0+a_-Q_0)a_-^{-1}I= I+(a-1)a_+^{-1}P_0a_-^{-1}I$. В лемме I.I было показано, что множители $a_\pm$ имеют вид

$$a_+=exp(iP_0\varphi),\quad a_-=exp(iQ_0\varphi).$$

Так как

$$|a_+^{-1}|=|exp(-\frac{i}{2}S_0\varphi)|,\quad |a_-^{-1}|=|exp(\frac{i}{2}S_0\varphi)|,$$

то в силу леммы 5.I оператор B ограничен в пространстве $L_p(\Gamma_0,|t-t_0|^\beta)$. Отсюда следует, что оператор $A=aP_0+Q_0$ обратим в пространстве $L_p(\Gamma_0,|t-t_0|^\beta)$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.I. Это доказательство проводится с помощью локального принципа. Из определения множества $\mathcal{G}_p(\Gamma,\rho)$ вытекает, что у каждой точки $\tau\in\Gamma$ существует окрестность $\ell(\tau)$, и функции g_τ^+, g_τ^-, такие, что множество значений функции $ag_\tau^+g_\tau^-$ при $t\in\ell(\tau)$ находится внутри угла $\Lambda_\tau(p,\rho)$ с вершиной в начале координат раствора меньше чем $2\pi/\bar{p}$, где $\bar{p}=max(p,p(p-1)^{-1})$, если $\tau\neq t_1,\ldots,t_n$ и $\bar{p}=max(p,p(1+\beta_k)^{-1}, p(p-1)^{-1},p(p-1-\beta_k)^{-1})$, если $\tau=t_k$. Будем считать, что каждая дуга $\ell(\tau)$ содержит не более одной точки $t_k(k=1,\ldots,n)$. Положим

$$a_\tau(t)=\begin{cases} a(t) & \text{при } t\in\ell(\tau),\\ \alpha_\tau(g_\tau^+(t)g_\tau^-(t))^{-1} & \text{при } t\in\Gamma\setminus\ell(\tau),\end{cases}$$

где $\alpha_\tau\neq 0$ - некоторое комплексное число из $\Lambda_\tau(p,\rho)$. В силу леммы 5.2 оператор $bP_\Gamma+Q$ ($b=a_\tau g_\tau^+g_\tau^-$) обратим в пространстве $L_p(\Gamma,\rho_\tau)$, где $\rho_\tau(t)=1$, если $\tau\neq t_1,\ldots,t_n$ и $\rho_{t_k}(t)=|t-t_k|^{\beta_k}$ ($k=1,\ldots,n$) Отсюда вытекает, что оператор $A_\tau=a_\tau P_\Gamma+Q_\Gamma$ также обратим в пространстве $L_p(\Gamma,\rho_\tau)$. Покажем, что оператор A_τ обратим в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$. Пусть $d_\tau(t)=\alpha_\tau^{-1}a_\tau(t)$ и $D_\tau= =d_\tau P_\Gamma+Q_\Gamma$. Легко видеть, что

$$A_\tau=D_\tau(\alpha_\tau P_\Gamma+Q_\Gamma). \qquad (5.6)$$

Из этого равенства вытекает, что оператор D_τ также обратим в $L_p(\Gamma, \rho_\tau)$. Так как $d_\tau(t)=1$ при $\tau\in\Gamma\setminus\ell(\tau)$, то в силу теоремы I.I, гл. УП, оператор D_τ обратим в пространстве $L_p(\ell(\tau), \rho_\tau)$. Но $L_p(\ell(\tau),\rho_\tau)=L_p(\ell(\tau),\rho)$, стало быть, оператор D_τ обратим в $L_p(\ell(\tau),\rho)$. Применяя снова теорему I.I, гл. УП, получим обратимость оператора D_τ в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$. Из равенства (5.6) вытекает, что оператор A_τ обратим в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$. Таким образом, функция a в каждой точке $\tau\in\Gamma$ эквивалентна функции a_τ и операторы $a_\tau P_\Gamma+Q_\Gamma$ обратимы. В силу теоремы 2.I, гл. XII, оператор $aP_\Gamma+Q_\Gamma$ является Φ-оператором в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.I. Если функция $a\in\mathfrak{S}_p(\Gamma,\rho)$, то она допускает факторизацию $a=a_-t^{\varkappa}a_+$ в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$. Оператор $aP_\Gamma+Q_\Gamma$ обратим, обратим слева, обратим справа в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$ в зависимости от того, является ли число $\varkappa$ равным нулю, положительным или отрицательным.

§ 6. Возмущение коэффициентов сингулярных интегральных операторов

Пусть Γ – замкнутый контур и $a\in PC(\Gamma)$. Сопоставляя результаты § 3, гл. IX, с теоремами предыдущего параграфа легко заметить, что оператор $aP_\Gamma+Q_\Gamma$ может быть Φ-оператором в пространстве $L_p(\Gamma)$, в то время как функция a не принадлежит классу $\mathfrak{S}_p(\Gamma)$. Приводимая ниже теорема о возмущении устраняет это расхождение.

Обозначим через $\mathcal{M}_p(\Gamma)$ множество функций f вида

$$f=ag, \tag{6.I}$$

где $a\in\mathfrak{S}_p(\Gamma)$, а g принадлежит $PC(\Gamma)$ и удовлетворяет условиям

$$g(t\pm 0)\neq 0 \ (t\in\Gamma), \quad g(t-0)/g(t+0)=exp(2\pi i\gamma(t))$$

и

$$\min\left(0,\frac{2}{p}-1\right)\leq \operatorname{Re}\gamma(t)\leq \max\left(0,\frac{2}{p}-1\right)\quad (t\in\Gamma). \tag{6.2}$$

Очевидно, $\mathcal{G}_p(\Gamma)\subset\mathcal{M}_p(\Gamma)$. Покажем, что множеству $\mathcal{M}_p(\Gamma)$ принадлежат все p -неособенные функции из $PC(\Gamma)$.

Пусть f p-неособенная функция, $\tau_1,\ldots,\tau_m$ - все ее точки разрыва,

$$f(\tau_k-0)/f(\tau_k+0)=exp(2\pi i\lambda_k)\quad (1/p-1<\operatorname{Re}\lambda_k<1/p).$$

Будем считать для определенности, что $p\geq 2$. Обозначим через δ_k произвольные числа, удовлетворяющие условиям

$$\max\left(\alpha_k-\frac{1}{p},\frac{2}{p}-1\right)<\delta_k<\min(0,\alpha_k+1/p)\quad (k=1,\ldots,m), \tag{6.3}$$

где $\alpha_k=\operatorname{Re}\lambda_k$. Пусть $\varphi=\varphi_{\tau_1,\delta_1}\cdot\ldots\cdot\varphi_{\tau_m,\delta_m}$ (см. § 2, гл. IX) и $a=f/\varphi$. Нетрудно проверить, что

$$\varphi(\tau_k-0)/\varphi(\tau_k+0)=exp(2\pi i\delta_k),\ a(\tau_k-0)/a(\tau_k+0)=exp(2\pi i(\lambda_k-\delta_k)).$$

Из соотношений (6.3) вытекает, что $-1/p<\operatorname{Re}\lambda_k-\delta_k<1/p$. Отсюда следует, что $a\in\mathcal{G}_p(\Gamma)$. Из соотношения (6.3) также вытекает, что числа δ_k удовлетворяют условию (6.2) и, стало быть, функция $f=a\varphi\in\mathcal{M}_p(\Gamma)$.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $f\in\mathcal{M}_p(\Gamma)$, тогда оператор $fP_\Gamma+Q_\Gamma$ является Ф-оператором в пространстве $L_p(\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функцию f из $\mathcal{M}_p(\Gamma)$ представим в виде (6.1). В свою очередь, функцию g можно представить в виде $g=g_0\varphi$, где $g_0\in GC(\Gamma)$, $\varphi=\varphi_{\tau_1,\gamma_1}\cdot\ldots\cdot\varphi_{\tau_m,\gamma_m}$ и числа $\gamma_1,\ldots,\gamma_m$ удовлетворяют условиям (6.2). Для определенности будем считать, что $p\geq 2$.

Доказательство теоремы проводится с помощью локального принципа. Так же, как в доказательстве теоремы 2.1, достаточно ограничиться случаем, когда $a=exp(i\varphi)$, где φ - вещественная измеримая функция, удовлетворяющая условию $\sup|\varphi(t)|<\pi/p$; $\Gamma=\Gamma_0$ - единичная окружность и $g(t)=t^\gamma$, где $2/p-1\leq\operatorname{Re}\gamma\leq 0$.

Функция a допускает факторизацию $a=a_-a_+$ с множителями $a_\pm$, определенными равенством (2.1). Покажем, что равенство $f=f_-f_+$, где $f_+=a_+(t-t_0)^\gamma$, $f_-=a_-\left(\frac{t-t_0}{t}\right)^{-\gamma}$, а t_0 - точка разрыва функции g, дает факторизацию функции f в пространстве $L_p(\Gamma)$.

Положим $\beta = -\operatorname{Re}\gamma p$; так как $p \geq 2$, то $\max(p, p(p-1)^{-1}, p(1+\beta)^{-1}, p(p-1-\beta)^{-1}) = p$ и, стало быть, функция φ удовлетворяет условию леммы 5.I. Из этой леммы вытекает, что оператор $f_+^{-1} P_0 f_-^{-1} I$ ограничен в пространстве $L_p(\Gamma_0)$. Так как $a_+^{-1}, a_- \in L_p(\Gamma_0)$, то $f_+^{-1}, f_- \in L_p$. Из леммы I.I следует, что a_+, $a_-^{-1} \in L_{p+\varepsilon}(\Gamma_0)$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Так как $|t-t_0|^{\gamma} \in L_r(\Gamma_0)$ для всех $r < p(p-2)^{-1}$, то $a_+, a_-^{-1} \in L_q(\Gamma_0)$. Таким образом, функция f допускает факторизацию в пространстве $L_p(\Gamma_0)$ и, стало быть, оператор $fP_0 + Q_0$ является Φ -оператором. Теорема доказана.

Доказанная теорема в некотором смысле является точной. Имеет место следующее предложение.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть $g \in PC(\Gamma)$, $g(t \pm 0) \neq 0$; $\tau_1, \ldots, \tau_m$ все точки разрыва функции g. Для того чтобы оператор $agP_\Gamma + Q_\Gamma$ был Φ-оператором в пространстве $L_p(\Gamma)$ для любой функции $a \in \mathcal{G}_p(\Gamma)$, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке $\tau_1, \ldots, \tau_m$ отношение $g(\tau_k - 0)/g(\tau_k + 0)$ можно было представить в виде $\exp(2\pi i \gamma_k)$, где

$$\min(0, 2/p - 1) \leq \operatorname{Re}\gamma_k \leq \max(0, 2/p - 1). \qquad (6.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность условия теоремы уже доказана. Докажем его необходимость. Пусть для определенности $p \geq 2$. Отношение $g(\tau_k - 0)/g(\tau_k + 0)$ представим в виде $\exp(2\pi i \gamma_k)$, где $-1 < \operatorname{Re}\gamma_k \leq 0$. Если одно из чисел γ_k не удовлетворяет условию (6.4), то $-1 < \operatorname{Re}\gamma_k < 2/p - 1$. Положим $\delta = -\gamma_k - 1 + 1/p$. Так как $-1/p < \operatorname{Re}\delta < 1/p$, то функция $\varphi_{\tau_k, \delta} \in \mathcal{G}_p(\Gamma)$.

Так как $f(\tau_k - 0)/f(\tau_k + 0) = \exp(-2\pi i/q)$, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $f = g\varphi_{\tau_k, \delta}$, то в силу теоремы I.2, гл. IX, функция f не является p-неособенной. Теорема доказана.

Перейдем к обобщению изложенных в этом параграфе результатов на случай пространства $L_p(\Gamma, \rho)$ $(1 < p < \infty)$ с весом $\rho(t) = \prod_{j=1}^{n} |t - t_j|^{\beta_j}$, удовлетворяющим обычным условиям $-1 < \beta_j < p - 1$. Обозначим через $\mathfrak{M}_p(\Gamma, \rho)$ множество функций f вида

$$f = ag, \qquad (6.5)$$

где $a \in \mathcal{G}_p(\Gamma, \rho)$, а функция g принадлежит $PC(\Gamma)$ и удовлетворяет следующим условиям: $g(t \pm 0) \neq 0$ $(t \in \Gamma)$ и отношение $g(t-0)/g(t+0)$

можно представить в виде $exp(2\pi i \gamma(t))$, где

$$\min(0, 2/p-1) \le Re\,\gamma(t) \le \max(0, 2/p-1) \quad \text{при } t \in \Gamma \setminus \{t_1, \ldots, t_n\},$$
$$\frac{1+\beta_k}{p} + \frac{1}{\bar\tau_k} - 1 \le Re\,\gamma(t_k) \le \frac{1+\beta_k}{p} - \frac{1}{\bar\tau_k} \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{6.6}$$

и

$$\bar\tau_k = \max(p, p(p-1)^{-1}, p(1+\beta_k)^{-1}, p(p-1-\beta_k)^{-1}).$$

Очевидно, $\mathcal{M}_p(\Gamma, 1) = \mathcal{M}_p(\Gamma)$.

ТЕОРЕМА 6.3. Если функция $f \in \mathcal{M}_p(\Gamma, \rho)$, то оператор $fP_\Gamma + Q_\Gamma$ является Φ-оператором в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Благодаря локальному принципу, можно ограничиться случаем, когда $\Gamma = \Gamma_0$, $\rho(t) = |t - t_0|^\beta$ $(|t_0| = 1, -1 < \beta < p-1)$, $g = \varphi_{t_0, \gamma}$ и $a = exp(i\varphi)$, где φ – вещественная измеримая функция, удовлетворяющая условию $\sup|\varphi(t)| < \pi/\bar\tau$. Для определенности будем считать, что $p \ge 2$. В этом случае

$$\bar\tau = \max(p, p(1+\beta)^{-1}, p(p-1-\beta)^{-1}),$$

и число γ удовлетворяет условию

$$\frac{1+\beta}{p} - 1 + \frac{1}{\bar\tau} \le Re\,\gamma \le \frac{1+\beta}{p} - \frac{1}{\bar\tau}.$$

Число γ представим в виде $\gamma = \delta + \alpha + \beta/p$, где $|Re\,\delta| \le 1/p - 1/\bar\tau$, и $2/p - 1 \le \alpha \le 0$. Из условия $\sup|\varphi(t)| < \pi/\bar\tau$ вытекает, что $a\varphi_{t_0, \delta} \in \in \mathcal{G}_p(\Gamma)$. В силу теоремы 6.1 функция $b = a\varphi_{t_0, \delta}\varphi_{t_0, \alpha}$ допускает факторизацию $b = b_- b_+$ в пространстве $L_p(\Gamma)$. Отсюда непосредственно следует, что функция $f = b\varphi_{t_0, \beta/p}$ допускает факторизацию $f = f_- f_+$ в пространстве $L_p(\Gamma_0, |t - t_0|^\beta)$ с множителями

$$f_+ = b_+(t - t_0)^{\beta/p}, \quad f_- = b_- \left(\frac{t - t_0}{t}\right)^{\beta/p}.$$

Стало быть, оператор $fP_0 + Q_0$ является Φ-оператором в пространстве $L_p(\Gamma_0, |t - t_0|^\beta)$. Теорема доказана.

Отметим, что если каждое из чисел β_k $(k = 1, \ldots, n)$ удовлетворяет хотя бы одному из двух условий

$$-1 < \beta_k \le 0, \quad p - 2 \le \beta_k < p - 1,$$

то множество $\mathcal{M}_p(\Gamma, \rho)$ содержит в себе все $\{p, \rho\}$-неособенные функции.

Теорема 6.2 также переносится на пространство $L_p(\Gamma, \rho)$.

СИНГУЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ $F\ell_p$

В этой главе рассматриваются сингулярные интегральные уравнения на окружности в пространствах функций, последовательности коэффициентов Фурье которых принадлежат $\ell_p (1 \leq p \leq 2)$. Исследование проводится с помощью локального принципа.

Первые два и четвертый параграфы носят вспомогательный характер. В § 3 рассматриваются сингулярные интегральные операторы с непрерывными коэффициентами, а в § 5 – с кусочно-непрерывными коэффициентами. В последнем параграфе исследуются парные уравнения. В этом параграфе приводится основная теорема.

§ I. Пространство $F\ell_p$

Обозначим через $F\ell_p (1 \leq p \leq 2)$ множество всех функций $f \in L_2(\Gamma_0)$, коэффициенты Фурье которых удовлетворяют условию

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |f_j|^p < \infty .$$

Легко видеть, что $F\ell_p (1 \leq p \leq 2)$ -банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{F\ell_p} = \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |f_j|^p\right)^{1/p} < \infty .$$

Пространство $F\ell_2$ совпадает с $L_2(\Gamma_0)$, а $F\ell_1$ – с винеровской алгеброй W, состоящей из всех функций f, разлагающихся в абсолютно сходящиеся ряды Фурье

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j t^j \quad \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |f_j| < \infty\right).$$

Условимся через $\mathcal{R}_p(1\leq p\leq 2)$ обозначать множество функций $a\in L_\infty(\Gamma_0)$, для которых оператор aI умножения на функцию a ограничен в пространстве $F\ell_p$. Очевидно, $\mathcal{R}_2=L_\infty(\Gamma_0)$. Легко видеть, что $\mathcal{R}_1=F\ell_1$.

Напомним (см., например, Н.Бурбаки [2], стр. 70), что банахова алгебра $\mathfrak{A}$ называется инволютивной, если в ней определено отображение $x\to x^*$, такое, что

$$(x^*)^*=x,\ (\lambda x+y)^*=\bar\lambda x^*+y^*,\ (xy)^*=y^*x^* \quad \text{и} \quad \|x^*\|=\|x\|.$$

Определим на множестве $\mathcal{R}_p$ норму $\|a\|_{\mathcal{R}_p}=\|aI\|_{L(F\ell_p)}$ и инволюцию $a^*=\bar a$.

ТЕОРЕМА I.I. Множество $\mathcal{R}_p$ является инволютивной банаховой алгеброй.

Доказательство теоремы основано на следующих предложениях.

ЛЕММА I.I. Если $a\in\mathcal{R}_p$, то $\bar a\in\mathcal{R}_p$, причем

$$\|\bar a\|_{\mathcal{R}_p}=\|a\|_{\mathcal{R}_p}. \tag{I.I}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть J - оператор, определенный в $F\ell_p$ равенством

$$J\Big(\sum_{-\infty}^{+\infty}\xi_k t^k\Big)=\sum_{-\infty}^{\infty}\bar\xi_{-k}t^k.$$

Непосредственно проверяется, что для функций $\varphi(t)=t^k\ (k=0,\pm1,\dots)$ имеет место равенство $JaJ\varphi=\bar a\varphi$. Отсюда следует, что $JaJ=\bar a I$, стало быть, $\bar a\in\mathcal{R}_p$. Так как $\|J\|=1$, то $\|a\|_{\mathcal{R}_p}=\|\bar a\|_{\mathcal{R}_p}$. Лемма доказана.

ЛЕММА I.2. Пусть $a\in\mathcal{R}_p$ и число r удовлетворяет неравенству $p<r\leq 2$, тогда $a\in\mathcal{R}_r$ и выполняются следующие соотношения

$$\|a\|_{\mathcal{R}_p}\geq\|a\|_{\mathcal{R}_2}=\operatorname*{ess\,sup}_{|t|=1}|a(t)|, \tag{I.2}$$

$$\|a\|_{\mathcal{R}_r}\leq\|a\|^s_{\mathcal{R}_p}\ \operatorname*{ess\,sup}_{|t|=1}|a(t)|^{1-s}, \tag{I.3}$$

где $s=p(2-r)/r(2-p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\ell_p\ (1\leq p\leq\infty)$ банахово пространство последовательностей $\xi=\{\xi_k\}_{-\infty}^{\infty}$ с нормой

$$\|\xi\|_{\ell_p}=\Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\xi_k|^p\Big)^{1/p}.$$

Пусть $\nu: F\ell_p \to \ell_p\ (1\le p\le 2)$ – изометрический оператор, определенный равенством

$$\nu\Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\xi_k t^k\Big)=\{\xi_k\}_{-\infty}^{\infty}.$$

В силу леммы I.1 операторы $T_a=\nu a I\nu^{-1}$ и $T_{\bar a}$ ограничены в ℓ_p. Как известно, эти операторы задаются в пространстве ℓ_p бесконечными теплицевыми матрицами

$$T_a=\|a_{j-k}\|_{j,k=-\infty}^{\infty},\quad T_{\bar a}=\|\bar a_{k-j}\|_{j,k=-\infty}^{\infty}.$$

Непосредственно проверяется, что $T_{\bar a}^*=T_a$. Таким образом, оператор T_a ограничен в пространствах ℓ_p и $\ell_q\,(p^{-1}+q^{-1}=1)$, причем его нормы в этих пространствах совпадают. В силу интерполяционной теоремы М.Рисса (см., например, А.Зигмунд [I], стр.I44)

$$\|T_a\|_2\le\|T_a\|_p^{1/2}\,\|T_a\|_q^{1/2}=\|T_a\|_p.$$

Так как, кроме этого, $\|T_a\|_2=\|aI\|_{L_2(\Gamma)}=\operatorname{ess\,sup}|a(t)|$ и $\|T_a\|_p=\|a\|_{\mathcal{R}_p}$, то соотношение (I.2) доказано. Соотношение (I.3) непосредственно вытекает из интерполяционной теоремы М.Рисса. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I.I. В силу леммы I.I необходимо лишь проверить полноту $\mathcal{R}_p$. Пусть последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна в $\mathcal{R}_p$. В силу леммы I.2 $\{a_n\}$ фундаментальна в $\mathcal{R}_2\ (=L_\infty(\Gamma_0))$, и, стало быть, она сходится равномерно к некоторой функции $a\in L_\infty(\Gamma_0)$.

Последовательность a_nI фундаментальна в пространстве $L(F(\ell_p))$, следовательно, она сходится к некоторому оператору $A\in L(F(\ell_p))$. Так как $Ax=T_ax$ для всех $x\in\ell_2$, то $T_a=A$. Теорема доказана.

Условимся еще о следующих обозначениях. Пусть Ω – некоторое подмножество отрезка [I, 2] и $p\in(1,2)$; положим

$$\mathcal{R}_\Omega=\bigcap_{p\in\Omega}\mathcal{R}_p,\quad \mathcal{R}_{\langle p\rangle}=\bigcup_{\varepsilon>0}\mathcal{R}_{(p-\varepsilon,p+\varepsilon)}.$$

Приведем пример функции, принадлежащей $\mathfrak{R}_{(1,2]}$ и не принадлежащей $\mathfrak{R}_1$. Пусть α – некоторое число из интервала $(0,2\pi)$ и $a(t)$ – функция, определенная равенством

$$a(t)=\begin{cases} 1 & \text{при } 0\leq \arg t<\alpha, \\ -1 & \text{при } \alpha\leq \arg t<2\pi. \end{cases}$$

Так как a -разрывная функция, то $a\notin\mathfrak{R}_1$. Покажем, что $a\in\mathfrak{R}_{(1,2]}$. Пусть $\{a_n\}$ и $\{x_n\}$ $(n=0,\pm1,\dots)$ – соответственно коэффициенты Фурье функций a и x, где x – некоторая функция из $F\ell_p$, и $b(t)=a(t)-a_0$. Так как $a_n=(i/\pi n)\exp(in\alpha)$ $(n\neq 0)$, то

$$\|bx\|^p_{F\ell_p}=\frac{1}{\pi^p}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{x_k e^{-ik\alpha}}{j-k}\right|^p,$$

где штрих у знака суммы означает пропуск слагаемого при $j=k$. Как известно (см., например, И.Ц.Гохберг, М.Г.Крейн [3], стр.178), преобразование M, определенное равенством

$$\eta_j=\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\xi_k}{j-k}\quad (j=0,\pm1,\dots),$$

является линейным ограниченным оператором в каждом $\ell_p(1<p<\infty)$, стало быть, $\|bx\|_{F\ell_p}\leq\|M\|_p\|x\|_{F\ell_p}$, откуда вытекает, что $\|ax\|_{F\ell_p}\leq(\|M\|_p+1)\|x\|_{F\ell_p}$, стало быть, $a\in\mathfrak{R}_{(1,2]}$ и $\|a\|_{\mathfrak{R}_p}\leq\|M\|_p+1$.

Более общий класс функций, принадлежащих $\mathfrak{R}_{(1,2]}$, указывается в следующей теореме.

ТЕОРЕМА I.2. *Пусть a - функция, имеющая на Γ_0 ограниченную вариацию, тогда $a\in\mathfrak{R}_{(1,2]}$*

$$\|a\|_{\mathfrak{R}_p}\leq k_p(\operatorname{var} a+\|a\|_{L_\infty(\Gamma_0)}), \tag{I.4}$$

где k_p зависит только от p.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорему, очевидно, достаточно доказать для случая, когда $a(e^{i\theta})$ является вещественной неубывающей функцией на отрезке $[0,2\pi]$. Обозначим через χ_α характеристическую функцию дуги $\Gamma_\alpha=\{t\in\Gamma_0:\alpha<\arg t<2\pi\}$. Выше было показано, что функция $1-2\chi_\alpha(t)$ принадлежит $\mathfrak{R}_{(1,2]}$, и ее норма в алгебре $\mathfrak{R}_p$ ограничена константой, не зависящей от α. Этим же свойством обладает и функция χ_α.

Пусть $b(e^{i\theta})$ $(0\le\theta\le 2\pi)$ – неубывающая ступенчатая функция: $b(e^{i\theta})=\beta_k$ при $\theta_{k-1}\le\theta<\theta_k$ $(0=\theta_0<\theta_1<\ldots<\theta_n=2\pi)$. Функцию b можно представить в виде

$$b=\sum_{k=1}^{n-1}\chi_{\theta_k}(\beta_{k+1}-\beta_k)+\beta_1,$$

откуда следует, что $b\in\mathfrak{R}_{(1,2]}$ и

$$\|b\|_{\mathfrak{R}_p}\le c_p(\operatorname{var} b+\|b\|_{L_\infty(\Gamma_0)}), \tag{I.4'}$$

где константа c_p зависит только от p.

Пусть $x(t)=\sum x_k t^k$ – тригонометрический полином, тогда

$$\|ax\|^p_{F\ell_p}=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\Big|\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_{j-k}x_k\Big|^p.$$

Покажем, что оператор N, определенный равенствами

$$y_j=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_{j-k}x_k \quad (j=0,\pm1,\ldots),$$

ограничен в пространстве ℓ_p, откуда будет следовать, что $a\in\mathfrak{R}_p$. Обозначим через $a^{(m)}$ последовательность неубывающих ступенчатых функций, сходящихся равномерно к a на Γ_0, а через N_m – оператор, определенный равенствами

$$\eta_j=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a^{(m)}_{j-k}x_k \quad (j=0,\pm1,\ldots).$$

Пусть $\xi\in\ell_2$ и $q=p(p-1)^{-1}(\ge 2)$, тогда $\|(N-N_m)\xi\|_{\ell_1}\le\|(N-N_m)\xi\|_{\ell_2}\le$ $\le\|a-a^{(m)}\|_{L_\infty(\Gamma_0)}\|\xi\|_{\ell_2}\to 0$ при $m\to\infty$. Из леммы I.I (см.также доказательство леммы I.2) вытекает, что $\|N_m\|_q=\|N_m\|_p$. В силу соотношения (I.4')

$$\|N_m\|_q=\|a^{(m)}\|_{\mathfrak{R}_p}\le c_p(\operatorname{var}a^{(m)}+\|a^{(m)}\|_{L_\infty})\le c_p(\operatorname{var}a+\|a\|_{L_\infty}).$$

Стало быть, оператор N ограничен в пространстве ℓ_q. Так как функция a вещественна, то (см.доказательство леммы I.2) оператор N^* в пространстве ℓ_q совпадает с оператором N. Отсюда следует ограниченность оператора N в пространстве ℓ_p. Теорема доказана.

В работе И.И.Хиршмана [I] доказывается более общее предложение.

I^0. Пусть V_β $(\beta \geq 1)$ - множество функций $a : \Gamma_0 \to \mathbb{C}$, для которых

$$\sup_{0=\theta_0<\theta_1<\ldots<\theta_n=2\pi} \sum_{k=1}^{n-1} |a(e^{i\theta_{k+1}})-a(e^{i\theta_k})|^\beta < \infty,$$

тогда

$$V_\beta \subset \mathcal{R}_{(2\beta(\beta+1)^{-1},2]}. \tag{I.5}$$

В этой же работе установлены следующие предложения.

2^0. Пусть H_α - совокупность всех функций a, таких, что $a(e^{i\theta})$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем α на некотором отрезке $[\theta_0, \theta_0+2\pi]$, тогда

$$H_\alpha \subset \mathcal{R}_{(2(1+2\alpha)^{-1},2]}. \tag{I.6}$$

3^0. Если $\beta \geq 2$ и $\delta > 0$, то

$$H_\delta \cap V_\beta \subset \mathcal{R}_{(2\beta(\beta+2)^{-1},2]}.$$

На доказательстве предложений I^0 - 3^0 мы не останавливаемся, так как они в дальнейшем не используются.

С помощью теоремы I.I можно увеличить число примеров функций, принадлежащих множествам $\mathcal{R}_\Omega$.

Так, например, если $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{R}_p$ $(1<p\leq 2)$ и $y_1,\ldots,y_n \in V_1$, то

$$\sum_{j=1}^{n} x_j y_j \in \mathcal{R}_p.$$

В частности, если функции $a_1,\ldots,a_n$ разлагаются в абсолютно сходящиеся ряды Фурье, а χ_j - характеристические функции некоторых дуг единичной окружности, то

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_j \in \mathcal{R}_{(1,2]}.$$

§ 2. Обращение операторов умножения на функцию в пространстве $F\ell_p$

Напомним (см. гл. XII), что $\overline{PC}(\Gamma_0)$ обозначает множество функций a, имеющих в каждой точке $t_0 (\in \Gamma_0)$ конечные пределы $a(t_0+0)$ и $a(t_0-0)$ при стремлении t к t_0 соответственно по и против часовой стрелки. Через $\overline{PC}_{\langle p \rangle}$ будем обозначать пересечение $\overline{PC}(\Gamma_0)$ и $\mathfrak{R}_{\langle p \rangle} = \bigcup_{\varepsilon > 0} \mathfrak{R}_{(p-\varepsilon, p+\varepsilon)}$.

ТЕОРЕМА 2.I. Если функция a принадлежит $\overline{PC}_{\langle p \rangle}$ и $a(t \pm 0) \neq 0$ для всех $t \in \Gamma_0$, то функция $1/a$ также принадлежит $\overline{PC}_{\langle p \rangle}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, достаточно показать, что $1/a \in \mathfrak{R}_p$, то есть что оператор aI обратим в алгебре $L(F\ell_p)$. Доказательство этого предложения проведем с помощью теоремы I.I, гл. XII, полагая $\mathfrak{A} = L(F\ell_p)$.

Для каждой точки $\tau \in \Gamma_0$ определим локализующий класс $M_\tau \subset \mathfrak{A}$, состоящий из всех операторов fI, где $f \, (= \chi_{u(\tau)})$ - характеристическая функция некоторой окрестности $u(\tau)$ точки τ. Покажем, что множество $\{M_\tau\}_{|\tau|=1}$ образует покрывающую систему. Пусть $\{\chi_{u(\tau)}\}_{\tau \in \Gamma_0}$ - произвольное множество элементов $(\chi_{u(\tau)} \in M_\tau)$ и $\{u(\tau_k)\}_{k=1}^N$ - покрытие Γ_0. Функция

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N} \chi_{u(\tau_k)}$$

имеет ограниченную вариацию и $\varphi(t) \geq 1 \; (t \in \Gamma)$, стало быть, $1/\varphi \in V_1$. В силу теоремы I.2 $1/\varphi \in \mathfrak{R}_p$. Отсюда вытекает, что оператор $\sum_{k=1}^{N} \chi_{u(\tau_k)} I$ обратим в $F\ell_p$. Следовательно, $\{M_\tau\}_{\tau \in \Gamma_0}$ - покрывающая система локализующих классов.

Покажем, что оператор aI в каждой точке $\tau \in \Gamma_0$ является M_τ-эквивалентным обратимому оператору $a_\tau I$, определенному следующим образом. Если τ - точка непрерывности функции a, то полагаем $a_\tau(t) = a(\tau) \; (t \in \Gamma_0)$. Если точка $\tau = exp(i\theta_0)$ является точкой разрыва функции a, то полагаем

$$a_\tau(e^{i\theta}) = \begin{cases} a(\tau+0) & \text{при } \theta_0 < \theta < \theta_0 + \pi, \\ a(\tau-0) & \text{при } \theta_0 + \pi < \theta < \theta_0 + 2\pi, \\ a(\tau) & \text{при } \theta = \theta_0. \end{cases}$$

Подберем окрестность $\ell(\tau)$ точки τ, в которой величина $\sup|a(t)$

$-a_\tau(t)|$ $(t\in \ell(\tau))$ достаточно мала, и пусть χ - характеристическая функция дуги $\ell(\tau)$. В силу леммы I.2 и теоремы I.2

$$\|(a-a_\tau)\chi I\|_{F\ell_p} \leq \|(a-a_\tau)\chi I\|^{\lambda}_{F\ell_s} \|(a-a_\tau)\chi\|^{1-\lambda}_{L_\infty(\Gamma_0)} \leq$$

$$\leq \|(a-a_\tau)I\|^{\lambda}_{F\ell_s} k_s^{\lambda} 3^{\lambda} \sup_{t\in\ell(\tau)} |a(t)-a_\tau(t)|^{1-\lambda},$$

где числа s и λ не зависят от $\ell(\tau)$. Отсюда вытекает, что операторы aI и $a_\tau I$ являются M_τ-эквивалентными. Легко видеть, что для каждого $\tau\in\Gamma_0$ функция $1/a_\tau \in \mathcal{R}_p$. Таким образом, оператор aI в каждой точке $\tau\in\Gamma_0$ является M_τ-эквивалентным обратимому оператору $a_\tau I$. Так как, кроме этого, оператор aI принадлежит коммутанту множества $\bigcup_{\tau\in\Gamma_0} M_\tau$, то в силу теоремы I.I, гл. XII, оператор aI обратим в $F\ell_p$. Теорема доказана.

§ 3. Сингулярные интегральные операторы с непрерывными коэффициентами в $F\ell_p$

В этом параграфе устанавливается необходимое и достаточное условие для того, чтобы сингулярный интегральный оператор aP_0+bQ_0 с непрерывными коэффициентами a и b из $\mathcal{R}_p$ был Φ-оператором в пространствах $F\ell_p$.

Приведем сначала некоторые свойства сингулярных операторов в $F\ell_p$.

I°. Пусть $a, b\in L_\infty(\Gamma_0)$. Для того чтобы оператор aP_0+bQ_0 был ограничен в $F\ell_p$, необходимо и достаточно, чтобы его коэффициенты a и b удовлетворяли условию

$$a\in\mathcal{R}_p,\qquad b\in\mathcal{R}_p. \tag{3.I}$$

Достаточность условия (3.I) очевидна. Пусть $\varphi(t)=\sum_{k=-m}^{m}\xi_k t^k$ - тригонометрический полином. Легко видеть, что

$$a(t)\varphi(t)=t^{-m}(aP+bQ)t^m\varphi(t).$$

Так как $\|t^k I\|_p=1$, то $\|a\varphi\|_p\leq\|aP_0+bQ_0\|\|\varphi\|$, стало быть, $a\in\mathcal{R}_p$. Аналогично доказывается, что $b\in\mathcal{R}_p$.

2^0. Пусть $a\in C(\Gamma)\cap\mathfrak{R}_{p_0}$ $(1\leq p_0<2)$, тогда оператор $T=aS_0-S_0aI$ вполне непрерывен в пространствах $F\ell_p$ для всех p из интервала $p_0<p\leq 2$.

В самом деле, обозначим через R_n конечномерный оператор, определенный в $F\ell_p$ равенством

$$R_n\Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\xi_k t^k\Big)=\sum_{k=-n}^{n}\xi_k t^k.$$

Пространство $F\ell_p$ изометрично пространству ℓ_p, в котором имеет место интерполяционная теорема М.Рисса, и , стало быть,

$$\|R_nT-T\|_{L(F\ell_p)}\leq\|R_nT-T\|^{\lambda}_{L(F\ell_{p_0})}\|R_nT-T\|^{1-\lambda}_{L(F\ell_2)}\leq$$

$$\leq\|T\|^{\lambda}_{L(F\ell_{p_0})}\|R_nT-T\|^{1-\lambda}_{L(F\ell_2)},$$

где $\lambda=p_0(2-p)/p(2-p_0)$.

Так как оператор T вполне непрерывен в $F\ell_2$ $(=L_2(\Gamma_0))$ (см. § 4 гл. I), то $\|R_nT-T\|_{L(F\ell_2)}\to 0$, стало быть, $\|R_nT-T\|_{L(F\ell_p)}\to 0$, откуда следует, что $T\in\mathcal{T}(F\ell_p)$.

3^0. Пусть функции a, b $(\in PC\cap\mathfrak{R}_{\langle p\rangle})$ не имеют общих точек разрыва, тогда оператор $T=P_0aP_0bP_0-P_0abP_0$ вполне непрерывен в пространстве $F\ell_p$.

Полная непрерывность оператора T в пространстве $F\ell_2$ $(=L_2(\Gamma_0))$ установлена в § 3, гл. VII. Для остальных значений p доказательство аналогично доказательству предложения 2^0.

Условимся через $C_{\langle p\rangle}$ обозначать пересечение $C(\Gamma_0)\cap\mathfrak{R}_{\langle p\rangle}$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $a,b\in C_{\langle p\rangle}$. Для того чтобы оператор $A=aP_0+bQ_0$ был Φ-оператором в пространстве $F\ell_p$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$a(t)\neq 0\ (t\in\Gamma_0),\quad b(t)\neq 0\ (t\in\Gamma_0). \tag{3.2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены условия (3.2), тогда в силу теоремы 2.1 функции $1/a(t)$ и $1/b(t)$ принадлежат $C_{\langle p\rangle}$. Из свойства 3.2^0 вытекает, что операторы

$$(a^{-1}P_0+b^{-1}Q_0)(aP_0+bQ_0)-I \quad\text{и}\quad (aP_0+bQ_0)(a^{-1}P_0+b^{-1}Q_0)-I$$

вполне непрерывны в $F\ell_p$, стало быть (см. § 7, гл. IУ), оператор $aP_0 + bQ_0$ является Φ-оператором.

Доказательство необходимости условий (3.2) проведем с помощью теоремы I.I, гл. XII. Роль алгебры $\mathfrak{A}$ здесь будет играть фактор-алгебра $L(F\ell_p)/\mathcal{T}(F\ell_p)$. Определим систему локализующих классов. Для каждой точки $\tau \in \Gamma_0$ через $M_\tau (\subset \mathfrak{A})$ обозначим множество элементов вида $\widehat{xI}$, для которых функции x непрерывны на $\overset{\circ}{\Gamma}_0$, имеют конечную вариацию и обладают следующими свойствами: $x(t) = 1$ для всех t из некоторой окрестности точки τ, $0 \leq x(t) \leq 1$ и $\operatorname{var} x \leq 2$.

Покажем, что система $\{M_\tau\}_{\tau \in \Gamma_0}$ является покрывающей. Пусть $\{x_\tau\}_{\tau \in \Gamma_0}$ $(\widehat{x_\tau I} \in M_\tau)$ - произвольное множество функций. Так как $x_\tau(t) = 1$ в некоторой окрестности точки τ и $x_\tau(t) \geq 0$, то из множества $\{x_\tau\}_{\tau \in \Gamma_0}$ можно выделить конечное число функций, сумма которых $x \in GC(\Gamma_0)$. Из теоремы 2.I вытекает, что оператор xI обратим в алгебре $L(F\ell_p)$. Таким образом, $\widehat{xI}$ обратим в $\mathfrak{A}$, и, стало быть, система $\{M_\tau\}_{\tau \in \Gamma_0}$ является покрывающей системой. Покажем, что в каждой точке $\tau \in \Gamma$ класс вычетов $\hat{A}$, содержащий оператор $A = aP_0 + bQ_0$, является M_τ-эквивалентным классу вычетов $\hat{A}_\tau$, содержащему оператор $A_\tau = a_\tau P_0 + b_\tau Q_0$ с постоянными коэффициентами $a_\tau = a(\tau)$ и $b_\tau = b(\tau)$. Пусть U_τ - окрестность точки τ, такая, что величины $\max\limits_{t \in U_\tau} |a - a_\tau|$ и $\max\limits_{t \in U_\tau} |b - b_\tau|$ достаточно малы. Через x обозначим некоторую функцию из M_τ, носитель которой содержится в U_τ. В силу леммы I.2 и теоремы I.2

$$\|(a - a_\tau)xI\|_p \leq \|a - a_\tau\|^\lambda_{\mathcal{R}_s} \|x\|^\lambda_{\mathcal{R}_s} \max_{|t|=1} |(a(t) - a_\tau)x(t)|^{1-\lambda} \leq$$

$$\leq 3^\lambda C^\lambda_s \|a - a_\tau\|^\lambda \max_{t \in U_\tau} |a(t) - a_\tau|,$$

где числа s и λ не зависят от U_τ. Аналогичное неравенство можно записать для функции b. Из этих неравенств вытекает, что норму $\|x(A - A_\tau)\|_{L(F\ell_p)}$ и фактор-норму $\|\widehat{xI}(\hat{A} - \hat{A}_\tau)\|$ можно сделать сколь угодно малой за счет выбора окрестности U_τ. Так как $(A - A_\tau)xI - x(A - A_\tau) \in \mathcal{T}(F\ell_p)$, то $\|\widehat{xI}(\hat{A} - \hat{A}_\tau)\| = \|(\hat{A} - \hat{A}_\tau)\widehat{xI}\|$. Таким образом, классы вычетов $\hat{A}$ и $\hat{A}_\tau$ являются M_τ-эквивалентными. Пусть оператор A является Φ-оператором, тогда класс вычетов $\hat{A}$ обратим в $\mathfrak{A}$. В силу леммы I.2, гл. XII, оператор $\hat{A}_\tau$ является M_τ-обратимым. Нетрудно проверить, что класс вычетов $\hat{A}_\tau$, содержащий сингулярный оператор A_τ с постоянными коэффициентами, является обратимым в алгебре $\mathfrak{A}$ в том и только том случае, когда он является M_τ -обратимым хотя бы в одной точке. Отсюда вытекает, что оператор $a_\tau P_0 + b_\tau Q_0$ является Φ -оператором и, стало быть, $a_\tau \neq 0$ и $b_\tau \neq 0$. Так как τ - произвольная точка на Γ_0, то выполнены условия (3.2). Теорема доказана.

§ 4. Вспомогательные предложения

Основной в этом параграфе является

ТЕОРЕМА 4.I. Пусть комплексное число α удовлетворяет условию $-1/p < \operatorname{Re}\alpha < 1-1/p$. Тогда оператор

$$R=(1-t)^{-\alpha}S_0(1-t)^{\alpha}I,$$

где $(1-t)^{\alpha}=(1-exp(i\theta))^{\alpha}$ $(0<\theta\leq 2\pi)$, ограничен в пространстве $F\ell_p(1\leq p\leq 2)$.

Доказательство этой теоремы основывается на следующей лемме.

ЛЕММА 4.I. Пусть числа β и p удовлетворяют условию $-1/p<\beta<1-1/p$, $1\leq p\leq 2$ и

$$c_{nk}=\frac{n^{\beta}k^{-\beta}}{n+k},$$

тогда оператор C, определенный в пространстве ℓ_p матрицей $\|c_{nk}\|_{n,k=1}^{\infty}$, ограничен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi=\{\xi_k\}\in\ell_p(p>1)$ и $\eta=\{\eta_k\}\in\ell_q(p^{-1}+q^{-1}=1)$, тогда

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\eta}_n\sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}\xi_k\Big|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^{\beta}k^{-\beta}}{n+k}|\xi_k||\eta_k|=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{n^{\beta}k^{-\beta}}{n+k}\right)^{1/p}\left(\frac{k}{n}\right)^{1/pq}|\xi_k|\left(\frac{n^{\beta}k^{-\beta}}{n+k}\right)^{1/q}\left(\frac{n}{k}\right)^{1/pq}|\eta_n|\leq$$

$$\leq\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\beta}k^{-\beta}}{n+k}\left(\frac{k}{n}\right)^{1/q}\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^q\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^{\beta}k^{-\beta}}{n+k}\left(\frac{n}{k}\right)^{1/p}\right)^{1/q}.$$

Так как $\beta-1/q<0$, то функция $f(x)=x^{\beta-1/q}(1+x)^{-1}$ является убывающей, стало быть,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\beta}k^{-\beta}}{n+k}\left(\frac{k}{n}\right)^{1/q}=\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}<\int_0^{\infty}\frac{x^{\beta-1/q}}{1+x}\,dx.$$

Аналогично доказывается, что сумма $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^{\beta}k^{-\beta}}{n+k}\left(\frac{n}{k}\right)^{1/p}$ ограничена числом, не зависящим от n. Таким образом,

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\eta}_n\sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}\xi_k\right|\le \tau\|\xi\|_{\ell_p}\|\eta\|_{\ell_q},$$

где τ – константа. Отсюда вытекает ограниченность оператора C в пространстве $\ell_p(p>1)$. При $p=1$ утверждение леммы очевидно. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Функции $a(t)=(1-t)^{-\alpha}$ и $b(t)=(1-t)^{\alpha}$ принадлежат пространству $L_1^+(\Gamma_0)$ и, как известно, их коэффициенты Фурье имеют вид

$$a_n=\begin{cases}\binom{n}{-\alpha} & \text{при } n\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } n<0,\end{cases}\qquad b_n=\begin{cases}\binom{n}{\alpha} & \text{при } n\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } n<0,\end{cases}$$

где $\binom{n}{\alpha}=\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)/n!$ при $n>0$ и $\binom{0}{\alpha}=1$. Пусть $\nu: F\ell_p\to\ell_p\dotplus\ell_p$ – отображение, определенное равенством

$$\nu\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\xi_k t^k\right)=\left(\{\xi_k\}_0^{\infty},\ \{\xi_k\}_{-\infty}^{-1}\right),$$

тогда

$$\nu(aI)\nu^{-1}=\begin{Vmatrix}A_1 & 0\\ A_3 & A_2\end{Vmatrix},\quad \nu(bI)\nu^{-1}=\begin{Vmatrix}B_1 & 0\\ B_3 & B_2\end{Vmatrix},$$

где

$$A_1=\begin{Vmatrix}\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & a_0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & a_1 & a_0\end{Vmatrix},\quad A_2=\begin{Vmatrix}a_0 & 0 & \dots\\ a_1 & a_0 & \dots\\ \cdot & \cdot & \cdots\\ \cdot & \cdot & \cdots\end{Vmatrix},\quad A_3=\begin{Vmatrix}\dots & a_2 & a_1\\ \dots & a_3 & a_2\\ \cdots & \cdot & \cdot\\ \cdots & \cdot & \cdot\end{Vmatrix}$$

и аналогично

$$B_1=\begin{Vmatrix}\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & b_0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & b_1 & b_0\end{Vmatrix},\quad B_2=\begin{Vmatrix}b_0 & 0 & \dots\\ b_1 & b_0 & \dots\\ \cdot & \cdot & \cdots\\ \cdot & \cdot & \cdots\end{Vmatrix},\quad B_3=\begin{Vmatrix}\dots & b_2 & b_1\\ \dots & b_3 & b_2\\ \cdots & \cdot & \cdot\\ \cdots & \cdot & \cdot\end{Vmatrix}.$$

Так как $ab=1$, то

$$\begin{Vmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & A_2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} B_1 & 0 \\ B_3 & B_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A_1 B_1 & 0 \\ A_3 B_1 + A_2 B_3 & A_2 B_2 \end{Vmatrix},$$

стало быть,

$$\nu(aS_0 bI)\nu^{-1} = \begin{Vmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & A_2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} B_1 & 0 \\ B_3 & B_2 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} -A_1 B_1 & 0 \\ -A_3 B_1 + A_2 B_3 & A_2 B_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -I & 0 \\ 2A_2 B_3 & I \end{Vmatrix}. \tag{4.1}$$

Для оператора $A_2 B_3$ имеет место равенство

$$A_2 B_3 = \begin{Vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots \\ a_1 & a_0 & 0 & \dots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \dots & b_3 & b_2 & b_1 \\ \dots & b_4 & b_3 & b_2 \\ \dots & b_5 & b_4 & b_3 \\ \dots & \cdot & \cdot & \cdot \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \dots & \gamma_{0,-3} & \gamma_{0,-2} & \gamma_{0,-1} \\ \dots & \gamma_{1,-3} & \gamma_{1,-2} & \gamma_{1,-1} \\ \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dots & \cdot & \cdot & \cdot \end{Vmatrix},$$

где

$$\gamma_{j,-k} = \sum_{m=0}^{j} a_{j-m} b_{k+m} = \sum_{m=0}^{j} \binom{j-m}{-\alpha} \binom{k+m}{\alpha} \quad (j \geq 0,\ k \geq 1). \tag{4.2}$$

Нетрудно (например, индукцией по j) установить справедливость равенства

$$\sum_{m=0}^{j} \binom{j-m}{-\alpha} \binom{k+m}{\alpha} = \binom{k-1}{\alpha-1} \binom{j}{-\alpha-1} \frac{\alpha}{k+j}. \tag{4.3}$$

Пусть $\beta = \operatorname{Re}\alpha$. Так как

$$\left|\binom{k-1}{\alpha-1}\right| = \left|\prod_{m=1}^{k-1}\left(1-\frac{\alpha}{m}\right)\right| \leq \prod_{m=1}^{k-1}\left(1-\frac{\beta}{m}\right) \leq$$

$$\leq \exp\left(-\beta \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{m}\right) \leq \exp(-\beta \ln k + c_1) \leq c_2 k^{-\beta},$$

то в силу (4.2) и (4.3)

$$|\gamma_{j,-k}| \leq c \frac{k^{-\beta}(1+j)^{\beta}}{k+j},$$

где постоянная c от k и j не зависит.

Из леммы 4.1 вытекает ограниченность оператора $A_2 B_3$ в ℓ_p. Остается воспользоваться равенством (4.1) - и теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть t_0 - произвольная точка на единичной окружности,

γ - произвольное комплексное число, удовлетворяющее условию

$$-1/p < \operatorname{Re}\gamma < 1 - 1/p.$$

Тогда оператор $R_1 = (t-t_0)^{-\gamma} S_0 (t-t_0)^{\gamma}$ ограничен в пространстве $F\ell_p$ $(1 \leq p \leq 2)$.

Под функцией $(t-t_0)^{\pm\gamma}$ понимается ее однозначная ветвь $(exp(i\theta)-exp(i\theta_0))^{\pm\gamma}$, где $\theta_0 < \theta \leq \theta_0 + 2\pi$, $\theta_0 = \arg t_0$. Пусть M - оператор, определенный в $F\ell_p$ равенством $(M\varphi)(t) = \varphi(t_0 t)$, тогда, как нетрудно проверить, $MRM^{-1} = R_1$, и в силу теоремы 4.I оператор $R_1 \in L(F\ell_p)$.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть $\varphi(t) = t^{\gamma}$ - функция, непрерывная в каждой точке $t \neq t_0$ единичной окружности. Если выполняется условие $-1/p < \operatorname{Re}\gamma < 1 - 1/p$ $(1 < p < \infty)$, то оператор $A = \varphi P_0 + Q_0$ обратим в пространстве $F\ell_p$ $(1 < p \leq 2)$.

В самом деле, пусть

$$B = \frac{t^{-\gamma}+1}{2} I + \frac{t^{-\gamma}-1}{2} (t-t_0)^{-\gamma} S_0 (t-t_0)^{\gamma} I.$$

В § 4, гл. IX, было показано, что для всех тригонометрических полиномов φ имеет место равенство $BA\varphi = AB\varphi = \varphi$. Из теоремы I.2 вытекает, что $t^{-\gamma} \in \mathfrak{R}_{(1,2]}$. Так как, кроме этого, $(t-t_0)^{-\gamma} S_0 \times (t-t_0)^{\gamma} I \in L(F\ell_p)$, то $B \in L(F\ell_p)$ и, стало быть, оператор A обратим.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Пусть $\varphi = \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, где функции φ_j $(j = 1, \ldots, n)$ удовлетворяют условию следствия 4.2 и имеют разрывы в различных точках. Тогда оператор $A = \varphi P_0 + Q_0$ является Φ-оператором[ж] в пространстве $F\ell_p$ и $\operatorname{Ind} A = 0$.

Пусть $a \in \mathfrak{R}_p$. Из равенств $aP_0 + Q_0 = (P_0 a P_0 + Q_0)(I + Q_0 a P_0)$ и $(I + Q_0 a P_0)(I - Q_0 a P_0) = I$ вытекает, что оператор $aP_0 + Q_0$ является Φ-оператором и его индекс равен нулю в том и только том случае, когда этим свойством обладает оператор $P_0 a P_0 + Q_0$. В силу предложения 3° из предыдущего параграфа имеет место равенство

$$P_0 \varphi P_0 + Q_0 = \prod_{k=1}^{n} (P_0 \varphi_k P_0 + Q_0) + T,$$

где T - вполне непрерывный оператор.

[ж] В самом деле, оператор A обратим (см. сноску на стр. 398).

Из предыдущего следствия вытекает, что оператор $P_0\varphi P_0+Q_0$ является Φ-оператором и его индекс равен нулю. Стало быть, этим же свойством обладает оператор $A=\varphi P_0+Q_0$.

§ 5. Сингулярные операторы с коэффициентами из $\overline{PC}_{\langle p\rangle}$

В § I, гл. IX, и § 3, гл. XII, было введено понятие p-неособенной функции $a\in\overline{PC}(\Gamma)$. В частности, функция $a\ (\in\overline{PC}(\Gamma_0))$ называется p-неособенной, если $a^{p,1}(t,\mu)\neq 0\ (|t|=1,\ 0\le\mu\le 1)$, где

$$a^{p,1}(t,\mu)=f_\delta(\mu)a(t+0)+(1-f_\delta(\mu))a(t-0),$$

$$\delta=2\pi/p$$

и

$$f_\delta(\mu)=\begin{cases}\dfrac{\sin\theta\mu}{\sin\theta}\exp(i\theta(\mu-1)) & (\theta=\pi-\delta),\ \text{если } \delta\neq\pi,\\ \mu, & \text{если } \delta=\pi.\end{cases}$$

Там же был определен функционал $\operatorname{ind} a^{p,1}$. Напомним, что через $\overline{PC}_{\langle p\rangle}$ обозначается $\overline{PC}(\Gamma_0)\cap\mathfrak{R}_{\langle p\rangle}$.

В этом параграфе доказывается

ТЕОРЕМА 5.I. *Пусть* $a,b\in\overline{PC}_{\langle p\rangle}$. *Для того чтобы оператор* $A=aP_0+bQ_0$ $(A=P_0aI+Q_0bI)$ *был* Φ*-оператором в пространстве* ℓ_p, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:*

$$a(t+0)b(t-0)f_{2\pi/q}(\mu)+a(t-0)b(t+0)(1-f_{2\pi/q}(\mu))\neq 0$$

$$(|t|=1,\ 0\le\mu\le 1,\ p^{-1}+q^{-1}=1). \tag{5.I}$$

Если условие (5.I) *выполнено, то*

$$\operatorname{Ind} A=\operatorname{ind} g^{q,1}, \tag{5.2}$$

где $g=a/b$.*

---

*В § 6 будет показано, что если оператор A является Φ-оператором, то одно из чисел $\dim\ker A$ либо $\dim\operatorname{Coker} A$ равно нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathfrak{A}$ фактор-алгебру $L(F\ell_p)/\mathfrak{F}(F\ell_p)$. Если $A \in L(F\ell_p)$, то через $\hat{A}$ будем обозначать класс вычетов, содержащий оператор A.

Пусть $\{M_\tau\}_{\tau\in\Gamma_0}$ – покрывающая система локализующих классов, определенная в доказательстве теоремы 3.I. Так же, как в теореме 3.I, проверяется, что если a, b, c, $d \in \overline{PC}_{\langle p\rangle}$, $a(\tau\pm 0) = c(\tau\pm 0)$ и $b(\tau\pm 0) = d(\tau\pm 0)$, то классы вычетов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, содержащие соответственно операторы $A = aP_0 + bQ_0$ и $B = cP_0 + dQ_0$, являются M_τ-эквивалентными.

Пусть выполнено условие (5.I). В каждой точке $\tau\in\Gamma_0$ непрерывности функций a и b класс вычетов $\hat{A}$ является M_τ-эквивалентным классу $\tilde{A}_\tau$, где $A_\tau = a(\tau)P_0 + b(\tau)Q_0$ – сингулярный оператор с постоянными коэффициентами. Из условия (5.I) вытекает, что $a(\tau)\neq 0$ и $b(\tau)\neq 0$ и, стало быть, оператор A_τ является Φ-оператором. Следовательно, $\hat{A}_\tau$ обратим в $\mathfrak{A}$.

Пусть t_0 – точка разрыва одной из функций a либо b. Из условия (5.I) следует, что $a(t_0\pm 0)\neq 0$ и $b(t_0\pm 0)\neq 0$. Подберем функцию $x(t) = \beta t^{\alpha}$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{C}, -1/p \le \operatorname{Re}\alpha < 1-1/p)$, непрерывную в каждой точке $t\neq t_0$ и удовлетворяющую условиям $x(t_0+0) = a(t_0+0)/b(t_0+0)$, $x(t_0-0) = a(t_0-0)/b(t_0-0)$. Из условия (5.I) вытекает, что

$$x(t_0+0)f_{2\pi/q}(\mu) + x(t_0-0)(1-f_{2\pi/q}(\mu))\neq 0 \quad (0\le\mu\le 1). \tag{5.3}$$

Учитывая, что $x(t_0+0)/x(t_0-0) = \exp(-2\pi i\alpha)$, из условия (5.3) получаем соотношение

$$\exp(-2\pi i\alpha)\neq \frac{\sin\theta(\mu-1)}{\sin\theta\mu}\exp(2\pi i/p) \quad (0\le\mu\le 1,\ \theta=\pi(2-p)/p)$$

Отсюда следует, что $\operatorname{Re}\alpha\neq -1/p$, стало быть, $-1/p < \operatorname{Re}\alpha < 1-1/p$. Из следствия 4.2 вытекает, что оператор $xP_0 + Q_0$ обратим в $F\ell_p$. Пусть $A_{t_0} = b(xP_0 + Q_0)$. Из условия (5.I) вытекает, что $b(t\pm 0)\neq 0$ и, стало быть, оператор A_{t_0} также обратим в $F\ell_p$. Так как $b(t_0\pm 0)x(t_0\pm 0) = a(t_0\pm 0)$, то классы вычетов $\hat{A}$ и $\hat{A}_{t_0}$ являются M_{t_0}-эквивалентными. Таким образом, класс вычетов $\hat{A}$ в каждой точке $\tau\in\Gamma_0$ является M_τ-эквивалентным обратимому элементу $\hat{A}_\tau$. Кроме этого, из предложения 2^0, § 3, вытекает, что $\hat{A}$ коммутирует с каждым элементом из $\bigcup_{\tau\in\Gamma_0} M_\tau$. В силу теоремы I.I, гл. XII, элемент $\hat{A}$ обратим в $\mathfrak{A}$, и, следовательно, оператор A является Φ-оператором в пространстве $F\ell_p$.

Покажем, что индекс оператора A вычисляется по формуле (5.2). Для этого воспользуемся следующим предложением.

Пусть g и g_n – функции из $\overline{PC}_{<p>}$, удовлетворяющие условиям $g^{q,1}(t,\mu)\neq 0$ $(p^{-1}+q^{-1}=1, |t|=1, 0\leq\mu\leq 1)$ и $\sup\limits_{|t|=1}|g(t)-g_n(t)|\to 0$, тогда, начиная с некоторого n, выполняются равенства

$$\operatorname{ind} g_n^{q,1}=\operatorname{ind} g^{q,1}, \quad \operatorname{Ind}(g_n P_0+a_0)=\operatorname{Ind}(gP_0+a_0). \tag{5.4}$$

В самом деле, так как последовательность g_n сходится равномерно к g, то, как нетрудно проверить, последовательность $g_n^{q,1}$ сходится равномерно на цилиндре $\Gamma_0\times[0,1]$ к функциям $g^{q,1}$. Отсюда вытекает первое из равенств (5.4). Так как, начиная с некоторого n, выполняется соотношение

$$|g^{q,1}(t,\mu)-g_n^{q,1}(t,\mu)|<\frac{1}{2}\inf_{|t|=1,\,0\leq\mu\leq 1}|g^{q,1}(t,\mu)|,$$

то для всех λ из отрезка $0\leq\lambda\leq 1$

$$g^{q,1}(t,\mu)+\lambda(g_n^{q,1}(t,\mu)-g^{q,1}(t,\mu))\neq 0 \quad (|t|=1,\ 0\leq\mu\leq 1).$$

В силу доказанного выше оператор

$$W_\lambda=gP_0+a_0+\lambda((g_n-g)P_0+a_0) \quad (0\leq\lambda\leq 1)$$

является Φ-оператором. Учитывая устойчивость индекса Φ-операторов (см. § 6, гл. IУ), получаем, что $\operatorname{Ind}W_0=\operatorname{Ind}W_1$, и, следовательно, справедливо второе из равенств (5.4).

Из доказанного вытекает, что формулу (5.2) достаточно установить для случая, когда функция g имеет конечное число точек разрыва. Пусть $t_1,\dots,t_n$ – точки разрыва функции g. Так же, как в доказательстве теоремы 3.I, гл. IX, функцию g можно представить в виде произведения $g=g_0\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_n$, где $\varphi_k(t)=t^{\gamma_k}$ $(-1/p<\operatorname{Re}\gamma_k<1-1/p)$ – функция, непрерывная в каждой точке $t\neq t_k$ и удовлетворяющая условию

$$g(t_k-0)/g(t_k+0)=\varphi_k(t_k-0)/\varphi_k(t_k+0),$$

а $g_0 \in C(\Gamma_0)$. Пусть $\varphi=\varphi_1\cdot\ldots\cdot\varphi_n$. Из теоремы I.2 вытекает, что $\varphi^{-1}\in\mathcal{R}_{(1,2)}$. В силу теоремы I.I $g_0=g\varphi^{-1}\in\mathcal{R}_{\langle p\rangle}$. Так как $-1/p<\operatorname{Re}\gamma_k<1-1/p$, то (см. § I и 2, гл. IX) $ind\,\varphi_k^{q,1}=0$ и $ind\,g^{q,1}=ind\,g_0$. Так как $g_0\in C_{\langle p\rangle}$, то в силу предложения 2°, § 3,

$$gP_0+Q_0=(\varphi P_0+Q_0)(g_0P_0+Q_0)+T,$$

где T – вполне непрерывный оператор. Из следствия 4.3 вытекает, что $\mathrm{Ind}(\varphi P_0+Q_0)=0$ и, стало быть, $\mathrm{Ind}(gP_0+Q_0)=\mathrm{Ind}(g_0P_0+Q_0)$. Таким образом, формулу (5.2) достаточно установить для случая, когда $g\in C_{\langle p\rangle}$. В силу доказанного выше можно непрерывную функцию заменить тригонометрическим полиномом. Для тригонометрического полинома g формула $\mathrm{Ind}(gP_0+Q_0)=-ind\,g$ устанавливается так же, как в пространствах $L_p(\Gamma_0)$.

Докажем необходимость условия (5.I). Пусть оператор $A=aP_0+bQ_0$ является Φ-оператором. Если τ $(\in\Gamma_0)$ является точкой непрерывности функций a и b, то класс вычетов $\hat{A}$ M_τ-эквивалентен классу вычетов $\hat{A}_\tau$, содержащему оператор $A_\tau=a(\tau)P_0+b(\tau)Q_0$ с постоянными коэффициентами. Так как $\hat{A}$ обратим в $\mathfrak{A}$, то $\hat{A}_\tau$ является M_τ-обратимым, стало быть, $a(\tau)\neq 0$ и $b(\tau)\neq 0$.

Покажем, что если τ – точка разрыва одной из функций a либо b, то $a(\tau\pm 0)\neq 0$ и $b(\tau\pm 0)\neq 0$. Допустим противное, то есть что одно из чисел $a(\tau+0)$, $a(\tau-0)$, $b(\tau+0)$, $b(\tau-0)$ равно нулю. Тогда можно подобрать достаточно малое по модулю комплексное число λ, так, чтобы оператор $(a-\lambda)P_0+(b-\lambda)Q_0$ был Φ-оператором и одна из функций $a-\lambda$ либо $b-\lambda$ обращалась в нуль в точке непрерывности. В силу доказанного выше это невозможно.

Пусть $g=ab^{-1}$. Покажем, что если оператор A является Φ-оператором, то $g^{q,1}$ нигде на $\Gamma_0\times[0,1]$ не обращается в нуль. По доказанному выше $g(t\pm 0)\neq 0$ $(|t|=1)$. Допустим, что в некоторой точке (t_0,μ_0) функция $g^{q,1}$ обращается в нуль. Тогда нетрудно подобрать функции $m_1,m_2\in PC_{\langle p\rangle}$ со сколь угодно малыми нормами $\|m_1I\|$, $\|m_2I\|$, так, чтобы операторы $g_1P_0+Q_0$ и $g_2P_0+Q_0$ $(g_k=g+m_k)$ были Φ-операторами и выполнялись условия

$$\operatorname{Ind}(g_1 P_0 + Q_0) = \operatorname{Ind}(g_2 P_0 + Q_0), \quad \operatorname{ind} g_1^{q,1} \neq \operatorname{ind} g_2^{q,1}.$$

В силу доказанного выше это невозможно. Теорема доказана.

§ 6. Парные уравнения

Пусть $a, b \in L_\infty(\Gamma_0)$ и $\{a_j\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{b_j\}_{-\infty}^{\infty}$ – их коэффициенты Фурье. Обозначим через ℓ_p $(1 \le p \le \infty)$ банахово пространство последовательностей $\{\xi_j\}_{-\infty}^{\infty}$ с нормой

$$\|\xi\|_p = \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\xi_k|^p\Big)^{1/p}$$

Оператор $\Pi = \Pi(a, b)$, определенный в ℓ_p системой уравнений

$$\begin{aligned} &\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j-k}\xi_k = \eta_j \quad (j = 0, 1, \dots); \\ &\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{j-k}\xi_k = \eta_j \quad (j = -1, -2, \dots), \end{aligned} \tag{6.1}$$

называется парным оператором, а оператор $\Pi' = \Pi'(a, b)$, определены системой

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{j-k}\xi_k + \sum_{k=-\infty}^{-1} b_{j-k}\xi_k = \eta_j \quad (j = 0, \pm 1, \dots), \tag{6.2}$$

называется транспонированным к парному.

Пусть $\tau : \ell_p \to F\ell_p$ $(1 \le p \le 2)$ – естественная изометрия

$$\tau(\{\xi_k\}_{-\infty}^{\infty}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k t^k.$$

Непосредственно проверяется, что $\tau \Pi'(a, b)\tau^{-1} = aP_0 + bQ_0$ и $\tau \Pi(a, b)\tau^{-1} = P_0 aI + Q_0 bI$.

Из предложения 3.1° вытекает, что оператор $\Pi(a, b)$ $(\Pi'(a, b))$ ограничен в пространстве ℓ_p $(1 \le p \le 2)$ в том и только том случае, когда $a \in \mathcal{R}_p$ и $b \in \mathcal{R}_p$. Изучение операторов Π и Π' в пространствах ℓ_p при $p > 2$ можно свести к случаю $p \le 2$ следующим образом. Легко проверить, что для каждой финитной последовательности $\xi = \{\xi_k\}$ имеют место равенства $\Pi^*(a, b) = \Pi'(\bar a, \bar b)$ и $\Pi'^*(a, b) = \Pi(\bar a, \bar b)$. Кроме того, из теоремы 1.1 вытекает, что если $f \in \mathcal{R}_p$, то $\bar f \in \mathcal{R}_p$. Таким образом, операторы $\Pi(a, b)$ и $\Pi'(a, b)$

ограничены в пространстве $\ell_p\,(2<p<\infty)$ в том и только том случае, когда $a, b \in \mathfrak{R}_q (q^{-1}+p^{-1}=1)$. Условимся в дальнейшем через $\mathfrak{R}_p\,(p>2)$ обозначать множество $\mathfrak{R}_q\,(p^{-1}+q^{-1}=1)$.

Приведенные рассуждения позволяют перенести теоремы 3.I и 5.I на операторы Π и Π', действующие в пространствах ℓ_p $(1\leq p\leq \infty)$. Прежде чем сделать это, приведем одно вспомогательное предложение, которое позволит дополнить теорему 5.I.

ЛЕММА 6.I. *Пусть функция $a\,(\in \mathfrak{R}_p)$ отлична от нуля на множестве положительной меры. Тогда хотя бы одно из уравнений $\Pi(a,1)\xi = 0\ (\xi \in \ell_p)$, $\Pi'(\bar a,1)\eta = 0\ (\eta\in \ell_q)(p^{-1}+q^{-1}=1)$ имеет только нулевое решение.*

Аналогичное утверждение имеет место, если заменить в формулировке леммы операторы $\Pi(a,1)$ и $\Pi'(\bar a,1)$ соответственно на $\Pi(1,a)$ и $\Pi'(1,\bar a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что существуют ненулевые векторы $\xi = \{\xi_j\}_{-\infty}^{\infty} \in \ell_p$ и $\eta = \{\eta_j\}_{-\infty}^{\infty}\in \ell_q$, такие, что $\Pi(a,1)\xi = 0$ и $\Pi'(\bar a,1)=\eta$. Обозначим через $c_j\,(=\bar a_{-j})$ коэффициенты Фурье функции $c=\bar a$. Образуем матрицы

$$A=\| a_{j-k}\|_{j=-\infty}^{\infty}, \quad C=\| c_{j-k}\|_{j=-\infty}^{\infty},$$

$$X_+=\|\xi_{j-k}\|_{j=-\infty}^{\infty}, \quad Y_+=\|\eta_{j-k}\|_{j=-\infty}^{\infty}.$$

Из равенств (6.I) и (6.2) легко следует, что если $b=1$, то решения ξ и η соответствующих однородных уравнений удовлетворяют условию $\xi_j = \eta_j = 0$ при $j<0$. Отсюда вытекает, что матрицы X_+ и Y_+ являются нижними треугольными. Нетрудно проверить, что матрицы

$$X_- = A X_+ \qquad \text{и} \qquad Y_- = C Y_+ \tag{6.3}$$

являются верхними треугольными, и на главной диагонали у них все элементы равны нулю. Так как $C^* = A$, то $Y_-^* = Y_+^* A$. Умножая обе части этого равенства справа на X_+ и учитывая первое из равенств (6.3), получим

$$Y_+^* X_- = Y_-^* X_+.$$

Так как матрица $Y_+^* X$ является верхней треугольной, а $Y_-^* X_+$ — нижней треугольной и на главных диагоналях этих матриц все элементы равны нулю, то $Y_+^* X_- = 0$ и $Y_-^* X_+ = 0$. Отсюда, учитывая, что ξ и η -ненулевые векторы, получим $X_- = 0$ и $Y_- = 0$. Пусть сначала $p \leq 2$. Из равенства (6.3) вытекает, что $AX_+ = 0$ и, стало быть, $a(t)x_+(t) \equiv 0$, где $x_+(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k t^k$. Функция a в силу условия леммы отлична от нуля на множестве положительной меры, и поэтому на этом множестве $x_+(t) = 0$. Так как $\xi \in \ell_p \subset \ell_2$, то функция $x_+(t)$ принадлежит пространству Харди $H_2 (= L_2^+(\Gamma_0))$, следовательно, $x_+(t) \equiv 0$. Последнее невозможно, ибо ξ — ненулевой вектор. Если $p > 2$, то воспользуемся равенством $Y_- = 0$, откуда получим, что $c(t)\, y_+(t) \equiv 0$ и $y_+ \in H_2$. Это снова приведет к противоречию. Лемма доказана.

Из теоремы 4.I и леммы 6.I вытекает

ТЕОРЕМА 6.I. Пусть функции $a, b \in \overline{PC}_{\langle p \rangle}$ $(1 < p < \infty)$. Для того чтобы оператор $\Pi(a, b)(\Pi(a,b))$ был Φ-оператором в пространстве ℓ_p, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$a(t+0)\, b(t-0) f_{2\pi/q}(\mu) + a(t-0)\, b(t+0)(1 - f_{2\pi/q}(\mu)) \neq 0$$

$$(|t| = 1,\ 0 \leq \mu \leq 1,\ p^{-1} + q^{-1} = 1) \qquad (6.4)$$

Если условие (6.4) выполнено и $g = a/b$, то оператор A обратим, обратим слева, обратим справа в зависимости от того, будет ли число

$$\varkappa = \operatorname{ind} g^{q,1} \qquad (6.5)$$

равным нулю, положительным или отрицательным. Если выполнены условия (6.4), то при $\varkappa < 0$ $\dim \operatorname{Ker} A = |\varkappa|$, а при $\varkappa > 0$ $\dim \operatorname{Coker} A = \varkappa$.

Из этой теоремы, в частности, вытекает, что если оператор $A = aP_0 + bQ_0$ $(A = P_0 aI + Q_0 bI)$, где $a, b \in \overline{PC}_{\langle p \rangle}$, является Φ-оператором, то хотя бы одно из чисел $\dim \operatorname{Ker} A$ либо $\dim \operatorname{Coker} A$ равно нулю.

ЗАМЕЧАНИЯ И ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

К главе I

§ I. В дальнейшем рассматриваются контуры, удовлетворяющие условию Ляпунова во всех точках, за исключением, быть может, конечного числа. Теория сингулярных интегральных операторов вдоль контуров, не удовлетворяющих этим условиям, развита И.И.Данилюком [I, 2] и другими авторами (см. Данилюк и Шелепов [I], Шелепов [I]). Теорема I.3 доказана М.Риссом. Ее доказательство можно найти, например, в книге Н.Данфорда и Дж.Т.Шварца [I] (стр. 565). Теорема I.4 доказана Е.М.Стейном [I].

§ 2. Лемма 2.I без оценки (2.I) доказана М.Риссом [I]. Приводимое здесь доказательство этой леммы предложено М.Котляром [I]. Теорема 2.I в случае $p=2$ содержится в работе С.Г.Михлина [I], а в общем случае $(1<p<\infty)$ – в монографии Б.В.Хведелидзе [I].

§ 4. Теорема 4.I доказана Б.В.Хведелидзе [I] (см.также К.И.Бабенко [I]).

Теорема 4.3 при $p=2$ содержится в работе С.Г.Михлина [I]

§ 6. Пространства гельдеровых функций с весом $H^0_\omega(\Gamma; t_1,\dots$ $\dots,t_n)$ введены в статье Р.В.Дудучавы [2]. Из этой же статьи заимствована теорема 6.2.

§ 7. Теоремы 7.I и 7.2 установлены И.А.Ицковичем [I].

К главе II

Эта глава частично пересекается с § I, гл. I, книги И.Ц.Гохберга и И.А.Фельдмана [I]. Здесь материал изложен полнее и подробнее.

§ 4. Основные предложения этого параграфа заимствованы из книги И.И.Привалова [I] (см. также Г.М.Голузин [I]).

§ 7. Теорема 7.3 установлена в статье М.Г.Крейна [2].

§ 8 и 9. Эти параграфы заимствованы из статьи И.Ц.Гохберга [9].

К главе III

Теория сингулярных интегральных уравнений с гельдеровыми коэффициентами в классе гельдеровых функций изложена в известных монографиях Н.И.Мусхелишвили [I] и Ф.Д.Гахова [I] . В этих же монографиях содержатся подробные исторические сведения о развитии названной теории.

Сингулярные интегральные операторы с непрерывными коэффициентами в пространстве L_2 впервые рассмотрел С.Г. Михлин [I], а в пространствах L_p с весом – Б.В.Хведелидзе [I] . Важную роль в развитии теории сингулярных интегральных операторов с непрерывными коэффициентами сыграла статья М.Г.Крейна [2] .

§ 3. Задача факторизации по существу совпадает с задачей отыскания канонического решения соответствующей граничной задачи. Теорема 3.I при дополнительном условии плотности $R(\Gamma)$ в $\mathcal{C}$ установлена И.Ц.Гохбергом [9] . В приводимой в § 3 формулировке она доказана М.С.Будяну и И.Ц.Гохбергом [4 и 5] . Эта теорема обобщает следствие 3.I, установленное И.Племели [I,2] , и следствие 3.2, доказанное М.Г.Крейном [2] .

§ 4. Этот параграф заимствован из статьи М.С. Будяну и И.Ц.Гохберга [2] .

§ 6. Теорема 6.I установлена в более общем матричном случае в статье М.А.Шубина [I] . В этой статье теорема выведена из одного общего локального принципа Х.Рёрля [I] , основанного на теории голоморфных расслоений. Приводимое доказательство теоремы 6.I получено совместно с Ю.Лайтерером, оно по существу остается в силе и в матричном случае.

§ 7. Теорема 7.I без необходимости условия (7.I) получена И.Ц.Гохбергом [7] , В.В.Ивановым [I] , И.Б. Симоненко [I] и Б.В.Хведелидзе [I,2] . В полном объеме теорема содержится в статье И.Ц.Гохберга [9] , из которой заимствовано приводимое здесь доказательство.

§ 8. Этот параграф публикуется впервые. Близкие результаты получены ранее Ю.И.Черским [2] . Проекционные методы приближенного решения сингулярных интегральных уравнений на окружности или вещественной оси рассматриваются в монографии И.Ц. Гохберга и И.А. Фельдмана [I] .

Проекционные методы решения сингулярных интегральных уравнений на более сложных замкнутых контурах исследованы в статьях И.Ц.Гохберга и Е.М.Шпигеля [I,2] и Е.М.Шпигеля [I, 2] .

Различные методы приближенного решения сингулярных интегральных уравнений содержатся в книге В.В.Иванова [2] .

§ 9. Теорема 9.1 установлена И.Б.Симоненко [I,3] . Доказательство теоремы 7.I о локальном принципе с помощью теоремы 9.I сообщил нам Ю.Лайтерер.

§ II. Использованный в этом параграфе метод расширения контура при других предположениях был рассмотрен Ф.Д.Гаховым [I].

§ I2. В этом параграфе мы следуем статьям А.А.Семенцула [I] и З.Пресдорфа [I,2] . (По поводу вопросов, затронутых в этом параграфе, см. также статьи Г.Н.Чеботарева [I] , М.И. Хайкина [I] , В.Б.Дыбина [I] , В.Б.Дыбина и Н.К.Карапетянца [I]).

§ I3. Результаты этого параграфа получены в статье И.Ц.Гохберга. Другие абстрактные обобщения сингулярных интегральных операторов предложены З.И.Халиловым [I] и Ю.И.Черским [I] .

К главе IУ

Основные положения теории фредгольмовых операторов изложены в обзорной статье И.Ц.Гохберга и М.Г.Крейна [I] (см. также статью Т.Като [I] и статью И.Ц.Гохберга, А.С.Маркуса и И.А.Фельдмана [I]). В статье И.Ц.Гохберга и М.Г.Крейна [I] содержатся и исторические сведения.

Различные разделы теории Φ -операторов уже изложены в монографиях. Основы теории неограниченных фредгольмовых операторов с приложениями к обыкновенным дифференциальным уравнениям и дифференциальным уравнениям в частных производных изложены в монографиях С.Голдберга [I] , М.Шехтера [I] и С.Г.Крейна [I] .

Основы теории ограниченных Φ-операторов с приложениями к теории многомерных сингулярных интегральных операторов содержатся в монографии С.Г.Михлина [2] .

Теории Φ -операторов посвящена бóльшая часть книги Д.Пшеворской-Ролевич и С. Ролевича [I] .

В недавно вышедшей монографии Р.Дугласа [I] содержится теория ограниченных Φ-операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения к теории дискретных операторов Винера-Хопфа.

Очерк по теории ограниченных Φ -операторов содержится также в книгах Т.Като [2] и Р.Пале [I] .

Эта глава пересекается с перечисленными выше источниками, однако она существенно отличается от них по содержанию и по изложению.

§ I и 4. Результаты этих параграфов установлены С.Банахом [I] и Ф.Хаусдорфом [I] .

§ 2 и 3. При написании этих параграфов была использована статья И.Ц.Гохберга, А.С.Маркуса и И.А.Фельдмана [I] .

§ 5. Основные результаты этого параграфа установлены А.Ии чем [I].

§ 6. Теорема 6.I установлена Ф.В.Аткинсоном [I]. Приводимое доказательство заимствовано из статьи И.Ц.Гохберга [5] (см. также И.Ц.Гохберг и М.Г.Крейн [I]).

Теорема 6.2 установлена И.Ц.Гохбергом [I,2]. Она является обобщением одной теоремы С.М.Никольского [I]. Теорема 6.3 для гильбертова пространства получена С.Г.Михлиным [I]. В общем случае она установлена Ф.В.Аткинсоном [I], И.Ц.Гохбергом [2] и Б.Юдом [I]. Теорема 6.4 без соотношения (6.8) установлена Ж.Дьедонне [I] и Ф.В.Аткинсоном [I]. Соотношение (6.8) и лемма 6.I получены М.Г.Крейном и М.А.Красносельским [I] (см.также И.Ц.Гохберг и М.Г.Крейн [I]).

§ 7. Достаточность условий теоремы 7.I в гильбертовом пространстве установлена С.Г.Михлиным [I]. В общем виде теорема установлена Ф.В.Аткинсоном [I]. Теорема 7.I также установлена Ф.В.Аткинсоном [I]. Результаты, относящиеся к эквивалентной регуляризации, принадлежат С.Г.Михлину [I].

Первая часть теоремы 7.3 в пространстве $L_2(\Gamma)$ установлена И.Ц.Гохбергом [4]. Ее обобщения для других пространств получены Г.Ф.Манджавидзе и Б.В.Хведелидзе [I], и И.Ц. Гохбергом [6 и 9]. Вторая часть теоремы 7.3 в пространстве $L_2(\Gamma)$ установлена С.Г. Михлиным [I].

§ 8. Теорема 8.2 установлена Б.В.Федосовым [I].

О ядерных операторах в гильбертовом пространстве см.книгу И.Ц.Гохберга и М.Г.Крейна [2]. Приводимое здесь доказательство теоремы 8.I и вывод из нее теоремы 6.I предложены А.С.Маркусом.

§ 9. Этот параграф заимствован из статьи И.Ц.Гохберга [8]

§ IO. Группа $GL(\mathcal{L})$, вообще говоря, не является связной (см. А.Дуади [I] и Б.С.Митягин [I]. В последней статье дается описание широкого класса банаховых пространств $\mathcal{L}$, для которых группа $GL(\mathcal{L})$ связна. Теоремы IO.2 и IO.3 установлены в статье И.Ц.Гохберга, А.С.Маркуса и И.А.Фельдмана [I].

§ II. Теоремы II.3, II.4 и II.5 в другой форме установлены А.С.Маркусом [I].

§ I2. Теорема I2.I установлена А.С.Маркусом [I]. Более подробные сведения о растворе содержатся в статье И.Ц.Гохберга и М.Г.Крейна [I]. Впервые это понятие введено в статье М.Г.Крейна, М.А.Красносельского и Д.П.Мильмана [I]. Соотношение (I2.IO) содержится в статье А.С. Маркуса [I].

§ 13. Леммы 13.1 и 13.2 заимствованы у Н.И. Ахиезера и И.М.Глазмана [1] .

§ 14. Все результаты этого параграфа установлены Ю.Лайтерером [1] . В статье Ю.Лайтерера [2] содержатся обобщения этих результатов на оператор-функции.

§ 15. Основная часть этого параграфа взята из статьи И.Ц.Гохберга и М.Г.Крейна [1] . Леммы 15.1 и 15.2 установлены Б.Юдом [1 и 2] . Теорема 15.5 установлена в статье И.Ц.Гохберга, А.С.Маркуса и И.А.Фельдмана [1] . В менее полной форме она установлена ранее Т.Като [1] .

§ 16. Следствия 16.1 и 16.2 установлены Б.Юдом [1,2] . Теорема 16.5 является, по-видимому, новой.

§ 17. Содержание этого параграфа имеет точки соприкосновения с глубокой теорией Б.С.-Надя и Ч.Фояша [1] дилатации операторов сжатия. Рассмотренный в конце параграфа пример тесно связан с теорией теплицевых матриц, составленных из коэффициентов Фурье функций из $H^{\infty}+C$, развитой Р.Дугласом [1] .

К главе V

Результаты этой главы в основном получены И. Ц. Гохбергом и М.К.Замбицким [1, 2] .

§ 3. Лемма 3.1 установлена М.Г.Крейном [1] . Позже она была заново доказана П.Лаксом [1] и Ж.Дьедонне [2] .

§ 6. Пример, подобный примеру г), однако более сложный, содержится в статье Ж.Дьедонне [2] .

§ 7. Лемма 7.1 установлена И.А.Фельдманом, а лемма 7.2 - Н.Я.Крупником [1] . Этот параграф имеет точки соприкосновения со статьей А.И.Вольперта [1] .

К главе VI

§ 1 и 2. Эти параграфы заимствованы из статьи Ю.Лайтерера и А.С.Маркуса [1] . В этой статье доказана необходимость условия 1) теоремы 3.1 в случае любого контура Γ .

§ 3. Содержание этого параграфа принадлежит Ю.Лайтереру [3] . В статье Ю.Лайтерера [4] результаты этого параграфа распространяются на случай произвольного составного замкнутого контура.

К главе VII

§ 1. При более частных условиях предложение, подобное теореме 1.1, доказано Ф.Д.Гаховым [1] (см. § 42, гл. VI).

§ 2. Этот параграф представляет собой некоторое расширение сообщения И.Ц.Гохберга и Н.Я.Крупника [5] .

§ 3. Этот параграф содержится в статье И.Ц. Гохберга и А.А.Семенцула [I] .

§ 4. При некоторых дополнительных ограничениях теорема 4.I доказана И.Б.Симоненко [6] .

§ 5. Теорема 5.I при условиях $b=1$, $\Gamma=\Gamma_0$, $p=2$ и $\rho(t)\equiv 1$ доказана в работе Л.Кобурна [I] . Утверждения, подобные теореме 5.4, содержатся в статьях И.Ц.Гохберга [7] , И.Б.Симоненко [6], И.Ц.Гохберга и Н.Я.Крупника [8] .

К главе УШ

Основная теорема этой главы - теорема 3.I в случае $\rho(t)\equiv 1$ установлена И.Б.Симоненко [6] .

К главе IX

Теория сингулярных интегральных уравнений с кусочно-гельдеровыми коэффициентами в специальных классах кусочно-гельдеровых функций содержится в монографиях Н.И.Мусхелишвили [I] и Ф.Д.Гахова [I].

§ I-4. Исследование сингулярных интегральных уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами в пространствах L_p с весом было начато Б.В.Хведелидзе [I] .Им,в частности,получены некоторые достаточные условия для того,чтобы такие операторы были Φ-операторами.При дополнительных ограничениях теорему,близкую к теореме 3.I,установил Е.Шамир [I] в случае $\rho\equiv 1$ и $\Gamma=R$.К результатам § 3 имеет также отношение работа Видома [2] .Способ сведения сингулярных операторов с кусочно-непрерывными коэффициентами к операторам с непрерывными коэффициентами изложен в книге Ф.Д.Гахова [I] .В общем случае основные предложения § I-4 доказаны в статьях И.Ц.Гохберга и Н.Я.Крупника [I,2,4] .В статьях М.И.Хайкина [2,3] предложен метод исследования и решения сингулярных интегральных уравнений в случае,когда коэффициенты a и b не обращаются в нуль,но функция $c=ab^{-1}$ не является $\{p,\rho\}$ -неособенной.

§ 5. Теорема 5.I взята из статьи И.Ц.Гохберга и Н.Я.Крупника [9] . Там же приводятся различные обобщения теоремы 5.I. Отметим также результаты Дж.Шварца [I] и М. Шлайффа [I] , имеющие отношение к этой теореме. Достаточные условия, при которых оператор S_Γ является обратимым с какой-либо стороны в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$, были получены многими авторами (см. по этому поводу Б.В.Хведелидзе [I] , стр. 37). В общем виде теорема 5.3 получена И.Ц.Гохбергом и Н.Я.Крупником [4] . Теорема 5.4 обобщает хорошо известные предложения из монографий Н.И.Мусхелишвили [I] (стр. 393) и Ф.Д.Гахова ([I] стр. 224).

§ 7. Метод обращения сингулярных операторов, изложенный в § 7, сообщил авторам А.С.Дынин. Аналогичным способом в работе Г.И.Эскина [I] исследуются некоторые классы псевдодифференциальных операторов в пространстве L_2.

§ 8. Достаточность условий теоремы 8.I установлена К.И.Бабенко [I] в случае окружности и Б.В.Хведелидзе [I] в случае произвольного ляпуновского контура. Ограниченность оператора S_Γ в случае кусочно-ляпуновского контура Γ доказана Э.Г.Гордадзе [I]. Необходимость части условий теоремы 8.I доказана С.А.Фрейдкиным [I]. В общем случае необходимость условий теоремы 8.I доказана И.Ц.Гохбергом и Н.Я.Крупником [I].

§ 9. Оценки норм $\|S_\Gamma\|$, $\|P_\Gamma\|$ и $\|Q_\Gamma\|$ в пространствах $L_p(\Gamma)$ получены И.Ц.Гохбергом и Н.Я.Крупником [2,3]. В пространствах $L_p(\Gamma,\rho)$ эти оценки, по-видимому, приводятся впервые.

§ 10. Результаты этого параграфа установлены Р.В.Дудучавой [I,3,4].

§ II. Этот параграф заимствован из работы И.Ц.Гохберга и Н.Я.Крупника [2]. Доказательство теоремы II.I см. в статье Е.М.Семенова [1]. Е.М. Семенов обратил наше внимание на то, что в этом доказательстве используется не сформулированное явно условие (II.0).

К главе X

Теория сингулярных интегральных уравнений с кусочно-гельдеровыми коэффициентами на сложном контуре в классах кусочно-гельдеровых функций содержится в монографии Н.И.Мусхелишвили [I].

Результаты этой главы заимствованы из статьи И.Ц.Гохберга и Н.Я.Крупника [7].

К главе XI

Результаты этой главы получены И.Ц.Гохбергом, А.А.Семенцулом [I] и А.А.Семенцулом [I]. В них используются более ранние результаты И.Ц.Гохберга и И.А.Фельдмана [I], Л. Кобурна и Р.Дугласа [I].

§ I. Теорема I.I установлена И.Ц.Гохбергом и И.А.Фельдманом [I].

К главе XII

И.Б.Симоненко [4 и 5] построил общую теорию операторов локального типа и получил приложения этой теории к одномерным и многомерным сингулярным интегральным операторам. Бо́льшая часть результатов этой главы установлена И.Б.Симоненко [6] .

§ I. Приводимый в этом параграфе локальный принцип значительно проще локального принципа И.Б.Симоненко. Он предложен И.Ц.Гохбергом и Н.Я.Крупником [8] .

§ 2. Результаты этого параграфа установлены И.Б.Симоненко [6] с помощью его локального принципа. Здесь приводится доказательство, основанное на локальном принципе из § I.

§ 3. Другими способами теоремы этого параграфа установлены В.Д.Фроловым [I] , В.Ю.Шелеповым [I] , И.Ц. Гохбергом и Н.Я.Крупником [IO] .

§ 4. Результаты этого параграфа установил И.Б.Симоненко [3,6] . Как отмечено, условия теоремы 4.I являются и необходимыми. Это утверждение в случае Γ_0 доказал А.Девинац [I] .На случай произвольного контура это утверждение обобщил И.Б.Симоненко [6] . Критерий односторонней обратимости сингулярного интегрального оператора в $L_2(\Gamma_0)$ содержится в работе М. Ли и Д.Сарасона [I] .

К главе XIII

§ I и 2. Результаты этих параграфов установлены И.Б.Симоненко[3].

§ 3. Теорема 3.I установлена С.К.Пихоридесом [I] . При $p=2^n$ и $p=2^n(2^n-1)^{-1}$ аналогичные оценки были получены ранее И.Ц.Гохбергом и Н.Я.Крупником [2,3] .

§ 4. Второе доказательство теоремы 2.I И.Б.Симоненко, по-видимому, приводится впервые.

§ 5 и 6. Основная часть результатов этих параграфов установлена В.Д.Фроловым [2] .

К главе XIV

Основные результаты этой главы при более жестких ограничениях на коэффициенты сингулярных интегральных операторов другим методом установил Р.В.Дудучава [5 и 6] . Содержание этой главы в основном является обобщением результатов Р.В.Дудучавы [5 и 6]. Оно получено И.Ц.Гохбергом и Н.Я.Крупником [8] с помощью изложенного в гл. XII локального принципа.

§ I. Теорема 1.2 доказана С.Б.Стечкиным [1]. Здесь приводится другое ее доказательство, которое любезно сообщил нам В.И.Мацаев.

§ 4. Теорема 4.1 установлена Р.В.Дудучавой [5 и 6]. Лемма 4.I заимствована из книги Г.Г.Харди, Дж.Е.Литтльвуда и Г.Полиа [I].

§ 3. Теорема об интерполяции свойства полной непрерывности установлена М.А.Красносельским [I].

§ 6. При $p=2$ и $\theta=1$ теорема 6.I установлена Л.Кобурном [I].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

Аткинсон Ф.В.

I. Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах, Матем. сб. 28(70); № I (1951) 3 - 14.

Ахиезер Н.И. и Глазман И.М.

I. Теория линейных операторов. М.-Л., Гостехиздат, 1950.

Бабенко К.И.

I. О сопряженных функциях, ДАН, 62, № 2 (1948), 157 - 160.

Банах С.С.

I. Курс функціонального аналізу. Київ, "Радянська школа" 1948.

Бари Н.К.

I. Тригонометрические ряды, Физматгиз, 1961.

Бойд Д. (Boyd D.).

I. The Hilbert transform of rearrengement-invariant spaces. Canadian J.Math., 19, 3 (1967), 599 - 616.

Будяну М.С. и Гохберг И.Ц.

I. Одна общая теорема о факторизации матриц-функций, Исследования по алгебре и математическому анализу (сборник статей), Кишинев, "Картя Молдовеняскэ", 1965.

2. О задаче факторизации в абстрактных банаховых алгебрах, I. Распадающиеся алгебры. Матем. исслед. 2, вып.2, Кишинев (1967), 25 - 51.

3. О задаче факторизации в абстрактных банаховых алгебрах. II.Нераспадающиеся алгебры. Матем.исслед. 2, вып.3, Кишинев (1967), 3 - 19.

4. Общие теоремы о факторизации матриц-функций, I.Основная теорема. Матем. исслед. Кишинев, 3, вып. 2, 1968, 87 - 103.

5. Общие теоремы о факторизации матриц-функций, П. Некоторые признаки и их следствия. Матем. исслед. Кишинев, 3, вып. 3, 1968, 3 - 18.

Бурбаки Н.

1. Функции действительного переменного. М., "Наука", 1965.
2. Спектральная теория. М., "МИР", 1972.

Видом Г.(Widom H.).

1. Singular integral equations in Lp. Trans.Amer. Math. Soc., 97, N° 1 (1960), 131 - 160.
2. On the spectra of a Toeplitz operator, Pacific I.Math., 14, 1964, 365 - 375.

Вольперт А.И.

1. Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости. Тр. Моск. Матем. общества, 10 (1961), 41 - 87.

Гахов Ф.Д.

1. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.

Гельфанд И.М., Райков Д.А. и Шилов Г.Е.

1. Коммутативные нормированные кольца. М., Физматгиз, 1959.

Голдберг С.(Goldberg S).

1. Unbounded linear operators. Theory and applications.Mc. Graw-Hill Book Company, 1966.

Голузин Г.М.

1. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.-Л., Гостехиздат, ГИТТЛ, 1952.

Гордадзе Э.

1. О задаче Римана-Привалова в случае негладкой граничной линии. Тр. Тбил. матем. ин.-та им. А.М.Размадзе, 33, 1967.

Гофман К.

1. Банаховы пространства аналитических функций. М.,ИЛ,1963.

Гохберг И.Ц.

1. О линейных уравнениях в пространстве Гильберта,АН СССР, 76, № 1, 1951, 9 - 12.
2. О линейных уравнениях в нормированных пространствах ДАН СССР, 76, № 4, 1951, 477 - 480.
3. О линейных операторах, аналитически зависящих от параметра. АН СССР, 78, № 4, 1951, 629 - 632.

4. Об одном применении теории нормированных колец к сингулярным интегральным уравнениям. УМН, 7, вып. 2, 1952, 149 - 156.

5. Об индексе неограниченного оператора. Матем. сб.33,1953. 193 - 198.

6. О границах применимости теорем Ф.Нетера. Кишинев, Уч. записки ун.-та 17, 1955, 35 - 44.

7. О числе решений однородного сингулярного интегрального уравнения с непрерывными коэффициентами. ДАН СССР, 122, № 3, 1958, 327 - 330.

8. О нормальной разрешимости и индексе функций от оператора. Изв. АН МССР, 1963, № 11, 11 - 24.

9. Задача факторизации в нормированных кольцах, функции от изометрических и симметрических операторов и сингулярные интегральные уравнения. УМН, 19, вып. 1, 1964, 71 - 124.

10. О теплицевых матрицах, составленных из коэффициентов Фурье кусочно-непрерывных функций. Функциональный анализ и его приложения, 1, вып. 2, 1967, 91 - 92.

Гохберг И.Ц. и Замбицкий М.К.

1. О нормально разрешимых операторах в пространствах с двумя нормами. Изв. АН МССР, 1964, № 6 , 80 - 84.
2. К теории линейных операторов в пространствах с двумя нормами. Укр. матем.журнал, 18, № 1, 1966, 11 - 23.

Гохберг И.Ц. и Крейн М.Г.

1. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов. УМН, 12, вып. 2, 1957, 44 - 118.

2. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М., "Наука", 1965.

3. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М., "Наука", 1967.

Гохберг И.Ц. и Крупник Н.Я.

1. О спектре одномерных сингулярных интегральных операторов с кусочно-непрерывными коэффициентами. Матем.исслед. Кишинев, 3, вып. 1, 1968, 16 - 30.

2. О спектре сингулярных интегральных операторов в пространстве Lp. Studia Mathematica, 31, 1968, 347 - 362.

3. О норме преобразования Гильберта в пространстве Lp. Функциональный анализ и его приложения, 2, 2(1968),91 - 92.

4. О спектре сингулярных интегральных операторов в пространствах Lp с весом. ДАН СССР, 185, № 4, 1969, 745 - 749.

5. О фактор-норме сингулярных интегральных операторов.Матем. исслед. Кишинев, 4, вып. 3, 1969, 136 - 139.

6. О сингулярных интегральных уравнениях с неограниченными коэффициентами. Матем. исслед. Кишинев, 5, 3(1970),46 - 57.

7. О сингулярных интегральных операторах на сложном контуре. Сообщение АН Грузинской ССР, 64, № 1, 1971, 21 - 24.

8. Об одном локальном принципе и алгебрах,порожденных теплицевыми матрицами. Annalele stiintifice ale univ."AL.I. Cuza",Iasi,Sect.I,a) Matematica, 19, 1, 1973.

9. Сингулярные интегральные уравнения с непрерывными коэффициентами на составном контуре. Матем. исслед. Кишинев, 5, 2(1970),89 - 103.

10. Сингулярные интегральные операторы с кусочно-непрерывными коэффициентами и их символы. Изв. АН СССР, 35, № 4, 1971, 940 - 964.

Гохберг И.Ц., Маркус А.С. и Фельдман И.А..

1. О нормально разрешимых операторах и связанных с ними идеалах. Изв. Молдавского филиала АН СССР, 1960, № 10(76), 51 - 59.

Гохберг И.Ц. и Семенцул А.А.

1. Теплицевы матрицы, составленные из коэффициентов Фурье функций с разрывами почти-периодического типа. Матем.исслед.Кишинев, 5, вып. 4, 1970, 63 - 83.

Гохберг И.Ц. и Фельдман И.А.

1. Уравнение в свертках и проекционные методы их решения.М., "Наука", 1971.

Гохберг И.Ц. и Шпигель Е.М.

1. Проекционный метод решения сингулярных интегральных уравнений. ДАН СССР, 196, № 5, 1971, 1002 - 1005.

2. О проекционном методе решения сингулярных интегральных уравнений с полиномиальными коэффициентами. Матем.исслед. Кишинев, 6, вып. 3, 45 - 61.

Градштейн И.С. и Рыжик И.М.

1. Таблицы интегралов, сумм и рядов, М., Физматгиз, 1962.

Данилюк И.И.

1. Лекции по краевым задачам для аналитических функций и сингулярным интегральным уравнениям. Новосибирск, 1964.

2. Об ограниченности сингулярного оператора в пространствах с весом. Тр. Тбилисского матем. института, 33 (1967), 32 - 44.

Данилюк И.И. и Шелепов В.Ю.

1. Об ограниченности сингулярного оператора с ядром Коши вдоль кривой ограниченного вращения. ДАН СССР, 174, № 3, (1964), 514 - 517.

Данфорд Н. и Шварц Дж.Т.

1. Линейные операторы, общая теория. М., ИЛ, 1962.

Девинац А. (Devinatz A.).

1. Toeplitz operators on H_2 space. Trans. Amer. Math. Soc., 112, N°2, 1964 304 - 317.

Дуади А. (Douady A.).

1. Une espace de Banach dont le groupe lineaire n'est pas connexe, Indag. Math., 68, 1965, 787 - 789.

Дуглас Р. (Douglas R.G.).

1. Banach algebra techniques in operatr theory, Academic Press, 1972.

Дуглас Р.Г., Сарасон Д.Е. (Douglas R.G., Sarason D.E.).

1. Fredholm Toeplitz Operators, Proc. Amer, Math. Soc., 26, 1970, 117 - 120.

Дудучава Р.В.

1. О сингулярных интегральных операторах в пространствах Гельдера с весом, ДАН СССР, 191, 1, 1970, 16 - 19.

2. Об ограниченности оператора сингулярного интегрирования в гельдеровых пространствах с весом. Матем.исслед. Кишинев, 5, вып. I (1970), 56 - 76.

3. Сингулярные интегральные уравнения в гельдеровых пространствах с весом, I. Гельдеровы коэффициенты Матем. ислед. Кишинев, 3, вып. 2(1970), 104 - 124.

4. Сингулярные интегральные уравнения в гельдеровых пространствах с весом, П.Кусочно-гельдеровы коэффициенты.Матем. исслед. Кишинев, 5, вып. 2(1970), 58 - 82.

5. Дискретные уравнения Винера-Хопфа в пространствах l_p с весами, Сообщ. АН ГрузССР, 67, I(1972).

6. Дискретные уравнения Винера-Хопфа, составленные из коэффициентов Фурье кусочно-винеровских функций,ДАН СССР, 208, № I(1972), 19 - 22.

Дыбин В.Б.

I. Нормализация оператора Винера-Хопфа, ДАН СССР, 191, № 4 (1970), 759 - 762 .

Дыбин В.Б. и Карапетянц Н.К.

I. Применение метода нормализации к одному классу систем линейных алгебраических уравнений. Изв.вузов, Математика, 1967, № 10, 39 - 49.

Дьедонне Ж.А. (Dieudonné J.A.).

I. Sur les homomorphismes d'espaces normès. Bull sci.math. (2), 67 (1943), 72 - 84.

2. Quasi-hermitian operators.Proc.of the intern.symposium on linear spaces, Ierusalem, 1961, 115 - 122.

Зигмунд. А.

I. Тригонометрические ряды.М., "Мир", П., 1965.

Иванов В.В.

I. О применении метода моментов и "смешанного" метода к приближенному решению сингулярных интегральных уравнений, ДАН СССР, 114, 5, 1957, 945 - 948.

2. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. Киев, "Наукова Думка", 1968.

Ицкович И.А.

I. Интегралы типа Коши как операторы в гильбертовом пространстве. Уч.зап.Кишин.ун-та, V (1952), 37 - 41.

Като Т. (Kato T).

I. Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantitves of linear operators, Journal d' analise mathematique, 6, 1958, 261 - 322.

2. Теория возмущений линейных операторов. М., "Мир", 1972.

Кобурн Л.А. (Coburn L.A.).

I. Weyl's Theorem for non-normal operators. Michigan Math.J., 13, 1966, 285 - 286.

Кобурн Л.А., Дуглас Р.Г. (Coburn L.A., Douglas R.G.).

I. Translation operators on the half-line. Proc. Nat.Acad. Sci. USA, 62, 1969, 1010 - 1013.

Котляр М. (Cotlar M.).

I. A unified theory of Hilbert transforms and ergodic theorems. Revista mat.cuyana, 1, N 2(1955).

Красносельский М.А.

I. Об одной теореме М.Рисса, ДАН СССР, 131, № 2, 1960.

Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И. и Соболевский П.Е.

I. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., "Наука", 1966.

Крейн М.Г.

I. Про лінійні неперервні оператори в функціональних просторах з двома нормами. Сбірник праць ін.-та матем. АН УРСР, № 9, 1947, 104 - 129.

2. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. УМН, 13, вып. 5, 1958. 3 - 120.

Крейн М.Г., Красносельский М.А.

I. Устойчивость индекса неограниченного оператора. Матем.сб., 30, № 1, 1952, 219 - 224.

Крейн М.Г., Красносельский М.А. и Мильман Д.П.

I. О дефектных числах линейных операторов в банаховом пространстве и о некоторых геометрических вопросах. Сб.трудов ин.-та математики АН УССР, № 11, 97 - 112.

Крейн С.Г.

I. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.,"Наука", 1971.

Крупник Н.Я.

I. О многомерных сингулярных интегральных уравнениях. УМН, 20, 6, 1965, 119 - 123.

Лайтерер Ю. (Leiterer. J.).

I. Об операторе умножения на непрерывную матрицу-функцию. Матем. исслед. Кишинев, 5, 2,1970, 125-144.

2. Об операторе умножения на непрерывную оператор-функцию. Матем.исслед. Кишинев,5, 4, 1970, 115 - 135.

3. О нормальной разрешимости сингулярных интегральных уравнений на непростом контуре. Матем. исслед. Кишинев, 6, 2, 1971, 105 - 112.

4. Zur normalen Auflösbarkeit singulärer Integraloperatoren, Mathematische Nachrichten, 51, 1971, 197 - 230.

Лайтерер Ю. и Маркус А.С.

I. О нормальной разрешимости сингулярных интегральных операторов в симметричных пространствах. Матем. исслед., Кишинев, УП, 1(23), 1972, 72 - 82.

Лакс П.Д. (Lax P.D.).

I. Simmetrizable Linear Transformations. Comn.on pure and applied Math., 7, 1954, 633 - 647.

Левитан Б.М.

I. Почти-периодические функции.М., Гостехиздат, 1953.

Ли М., Сарасон Д. (Lee M., Sarason D.).

I.The spectra of Some Toeplits Operatirs, J.of Math. ann. and applic. 33, 1971, 529 - 543.

Линдерштраус И. и Тзафрири Л. (Linderstrauss J., Tzafriri L.).

1. On the complemented subspaces problem, Israel J.Math., 9, 1971, 263 - 269.

Люстерник Л.А. и Соболев В.И.

I. Элементы функционального анализа.М., "Наука",1965.

Манджавидзе Г.Ф. и Хведелидзе Б.В.

I. О задаче Римана-Привалова с непрерывными коэффициентами. ДАН СССР, 123, № 5, 1958, 791 - 794.

Маркус А.С.

I. О некоторых свойствах линейных операторов,связанных с понятием раствора.Уч.записки Кишиневского ун.-та, 39 , 1959, 265-272.

Маркушевич А.И.

I. Теория аналитических функций. I, М., "Наука", 1967.

Митягин Б.С.

I. Гомотопическая структура линейной группы банахова пространства. УМН, 25, вып. 5, 1970, 63 - 104.

Михлин С.Г.

I. Сингулярные интегральные уравнения. УМН, 3, вып. 3, 1948, 29 - 112.

2. Многомерные сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.

Мусхелишвили Н.И.

I. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.

С.-Надь Б. и Фояш Ч.

I. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М., "Мир", 1970.

Никольский С.М.

I. Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах, Изв.АН СССР, сер.матем., 7, № 3, 1943, 147 - 166.

Пале Р.

I. Обзор функционального анализа. Фредгольмовы операторы. В сб.: - Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе. М., "Мир", 1970.

Пихоридес С.К. (Pichorides S.K.).

I. On the best values of the constants in the theorems M.Riesz, Zygmund ahd Kolmogorov, Studia Mathematica, 19, 2, 1972, 165 - 179.

Пич А. (Pietsch A.).

1. Zur Theorie der σ-Transformationen in lokalkonvexen Vektorräumen. Mathematische Nachrichten, 21, 6, 1960, 347 - 369.

Племели И. (Plemely J.).

I. Ein Ergänzungssatz zur Cauchy'schen Integraldarstellung analytischer Funktionen, Randwerte betreffend, Monatsh. für Math. u. Phys., 19, 1908, 205 - 210.

2. Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe, Randwerte betreffend, Monatsh. für Math.u. Phys., 19, 1908, 211 - 245.

Пресдорф З.Б. (Prösdorf S.).

1. Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen nicht normalen Typs, Math. Ann., 183, 1969, 130 – 150.
2. Einige Klassen singulärer Gleichungen Akademie-Verlag, Berlin (в печати).

Привалов И.И.

1. Граничные свойства аналитических функций М.-Л., Гостехиздат, 1950.

Пшеворска-Ролевич Д. и Ролевич С. (Przeworska-Rolewicz D. and Rolewicz S.).

1. Equations in linear spaces, PWN, Warszawa, 1968.

Рерль X. (Röhrl H.).

1. On holomorphic families of fiber bundles over the Riemannian sphere. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 33, N 3, 1961, 435 477.

Рисс М. (Riesz M.).

1. Sur les fonctions conjuguées. Math. Z. 1937, 213 – 244.

Рисс Ф. и С.- Надь Б.

1. Лекции по функциональному анализу. М., ИЛ, 1954.

Семенов Е.М.

1. Одна новая интерполяционная теорема. Функциональный анализ и его приложения, 2, вып. 2, 1968, 68 – 80.
2. Интерполяция линейных операторов в симметричных пространствах. (Докт. диссерт.), Воронеж, 1968.

Семенцул А.А.

1. О сингулярных интегральных уравнениях с коэффициентами, имеющими разрывы почти-периодического типа, Матем. исслед. Кишинев, 6, 3(21), 1971, 92 – 114.

Симоненко И.Б.

1. Краевая задача Римана с непрерывными коэффициентами. ДАН СССР, 142, 2, 1959, 279 – 281.
2. Краевая задача Римана с измеримыми коэффициентами. ДАН СССР, 135, 3, 1960, 538 – 541.
3. Краевая задача Римана для n пар функций с измеримыми коэффициентами и ее применение к исследованию сингулярных интегралов в пространствах L_p с весами. Изв. АН СССР (сер. матем.), 28, 2, 1964, 277 – 306.

4. Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений, I. Изв. АН СССР (сер. матем.), 29, 3, 1965, 567 - 586.

5. Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений, II. Изв. АН СССР (сер. матем.), 29, 4, 1965, 757 - 782.

6. Некоторые общие вопросы теории краевой задачи Римана. Изв. АН СССР (сер. матем.), 32, 5, 1968, 1138 - 1146.

Смирнов В.И. и Лебедев Н.А.

1. Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.-Л., "Наука", 1964.

Стейн Е.М. (Stein E.M.).

1. Interpolation linear operators, Trans. Amer. Math. Soc., 83, 1956, 222 - 234.

Стечкин С.Б.

1. О билинейных формах. ДАН СССР, 71, № 2, 1950, 237 - 240.

Тиман А.Ф. и Трофимов В.Н.

1. Введение в теорию гармонических функций. М., "Наука", 1968.

Федосов Б.В.

1. Непосредственное доказательство формулы для индекса эллиптической системы в евклидовом пространстве. Функциональный анализ и его приложения, 4, 4, 1970, 83 - 84.

Фрейдкин С.А.

1. О неограниченности сингулярного оператора. Материалы научн. конф. Кишин. ун.-та (секция естеств. и эксперим. наук), Кишинев, 1970, 84 - 86.

Фролов В.Д.

1. К теории сингулярных интегральных уравнений с измеримыми коэффициентами. ДАН СССР, 189, 6, 1969, 1185 - 1188.

2. О сингулярных интегральных уравнениях с измеримыми коэффициентами в пространствах с весом. Матем. исслед. Кишинев, 5, вып. 1, 1970, 141 - 151.

Хайкин М.И.

I. Об интегральном уравнении типа свертки первого рода. Изв. вузов (матем.), № 3, 1967, 105 - 116.

2. Об особом случае сингулярного интегрального оператора с кусочно-непрерывными коэффициентами. Матем. исслед. Кишинев, 7, вып. 3, 1972, 194 - 209.

3. О нулях сингулярного интегрального оператора с кусочно-непрерывными коэффициентами в особом случае. Матем. исслед. 8, вып. I, 1973.

Халилов З.И.

I. Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах. Изд. АН АзССР. Баку, 1949.

Хаусдорф Ф.

I. Теория множеств (дополнение). М.-Л., ОНТИ, 1936.

Хведелидзе Б.В.

I. Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения. Тр. Тбил. матем. ин-та АН ГрузССР, XXIII, 1957, 129 - 136.

2. Замечание к моей работе "Линейные разрывные граничные задачи теории функций . . . ". Сообщ. АН ГрузССР, 21, № 2, 1958, 129 - 130.

Хиршман И.И. (I.I.Hirschman Ir.).

I. On multiplier transformations. Duke Math. J., 26, N 2, 1959, 221 - 242.

Чеботарев Г.Н.

I. Об одном уравнении типа свертки первого рода. Изв. вузов (матем.), № 3, 1967, 105 - 116.

Черский Ю.И.

I. Общее сингулярное уравнение и уравнение типа свертки. Матем. сб., 41, 3, 1957, 277 - 295.

2. Две теоремы об оценке погрешности и некоторые их приложения ДАН СССР, 150, № 2, 1963, 271 - 274.

Шамир Е.

I. Решение систем Римана-Гильберта с кусочно-непрерывными коэффициентами. ДАН СССР, 167, 5, 1960, 1000 - 1003.

Шварц Дж. (Schwarts J.).

I. Some Results on the Spectra and Spectral Resolutions of a class of Singular Integral Operators. Communications on pure and applied mathematics, 15, N°1, 1962, 75 - 90.

Шелепов В.Ю.

I. О задачах Римана в областях, граница которых имеет ограниченное вращение.ДАН СССР, I74, № 3, I967, 565-568.

Шехтер М. (Schecther M.).

I. Principles of Functional Analysis, Academic Press, 1971.

Шилов Г.Е.

I. О локально-аналитических функциях. УМН, 21, 6, 1966.

Шлайфф М. (Schleiff M.).

I. Über eine lineare Integrodifferentialgleichung mit Zusatzkern Wiss.Beitrag der Univ.Halle, Beiträge zur Analysis und Andewandten Mathematik, 1968/9(M1), 145 - 154.

Шпигель Е.М.

I. О проекционном методе решения сингулярных интегральных уравнений с рациональными коэффициентами. Матем. исслед. Кишинев, 7, вып. I, 1972, 163 - 185.

2. Проекционный метод решения сингулярных интегральных уравнений с рациональными коэффициентами вдоль многосвязного контура. Матем.исслед. Кишинев, 7, вып.2, 1972, 181-200.

Шубин М.А.

I. О локальном принципе в задаче факторизации. Матем.исслед. Кишинев, 6, вып.I, 1971, 174 - 180.

Эскин Г.И.

I. Системы эллиптических псевдодифференциальных уравнений. Институт проблем механики АН СССР. М., 1972 (препринт №II).

Юд Б. (Yood B.).

I. Properties of linear transformations preserved under addition of a completely continous transformation, Duke Math. J., 18, N°3, 1951, 599 - 612.

2. Difference algebras of linear transformations on a Banach space. Pacific Journ.Math., 4, N°4, 1954, 615-636.

ИЗРАИЛЬ ЦУДИКОВИЧ ГОХБЕРГ
НАУМ ЯКОВЛЕВИЧ КРУПНИК

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ОДНОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Утверждено РИСО АН МССР

Редактор С.П.Зюльковская. Корректоры: Е.А.Деде, Н.И.Яновер. Художественный редактор В.А.Чупин. Художник А.Ф.Святченко. Оператор-наборщик В.М.Горбатий

Принято к изданию 8.I 1973 г. Подписано в печать 2.III 1973 г. АБ 06414.
Бумага офсетная № 2. Формат 60x90 1/16. Печ.л. 26,75. Уч.-изд.л. 21,25. Тираж 1450.
Цена 2 р. 14 к. Заказ 176. Издательство "Штиинца", Кишинев, 277612, пр.Ленина, 1.

Типография издательства "Штиинца", Кишинев, 277004, ул. Берзарина, 10