Харт Н.
Геометрическое квантование в действии: Пер. с англ. — М.: Мир, 1985. — 343 с.

Книга американского специалиста, дающая картину взаимодействия разных областей математики с современной теоретической физикой. Она охватывает результаты недавних исследований по геометрическому квантованию и его применениям в квантовой статистической механике и квантовой теории поля; материал подан в компактной и доступной форме.

Для математиков-прикладников, физиков-теоретиков, аспирантов и студентов университетов.

От переводчика

Цели и задачи новой серии книг «Математика и ее приложения» издательства «Рейдель» подробно и выразительно обрисованы в предисловии ее редактора М. Хазевинкеля. Намерения автора настоящей книги отражены в написанном им предисловии. Я не буду повторять сказанного там и ограничусь несколькими замечаниями. Книга вызвала большой интерес и была высоко оценена специалистами. Действительно, автору удалось при сравнительно небольшом объеме затронуть очень много важных вопросов, находящихся сейчас в центре внимания физиков и математиков. Однако у книги есть и недостатки, почти неизбежно вытекающие из ее достоинств. По стилю это скорее записки лекций или предварительные размышления о новых результатах: многие формулы приведены с ошибками (по возможности исправленными при переводе), формулировки теорем иногда небрежны, не всегда удачны обозначения. Словом, мне как переводчику этой книги пришлось нелегко; нелегко будет и ее читателю. Однако, на мой взгляд (разделяемый математической редакцией издательства «Мир») это искупается широтой охвата материала и новизной и актуальностью обсуждаемых результатов. Список цитированной литературы содержит свыше 400 наименований, и большая часть из них — работы последних 5—10 лет.

Не со всеми утверждениями автора о роли геометрического квантования можно согласиться. Но вызывает уважение проделанная им огромная работа по просмотру литературы и осмыслению результатов. Книга, безусловно, будет интересна и полезна широкому кругу читателей.

А. А. Кириллов

Предисловие редактора серии[1])

Подходите к вашим задачам с правильного конца и начинайте с ответов. Тогда в один прекрасный день вы, возможно, найдете правильный вопрос.

Р. ван Гулик «Отшельник в журавлиных перьях». Из книги «Убийства в китайском лабиринте».

Дело не в том, что они не видят решения, а в том, что они не видят задачи.

Г. К. Честертон «Кончик булавки». Из сборника «Скандальное происшествие с патером Брауном».

Возрастающая специализация и разветвление науки породило поток монографий и учебников по все более специальным разделам. Однако древо знаний математики и смежных наук растет не только за счет образования новых ветвей. Случается также, и довольно часто, что ветви, считавшиеся совершенно различными, оказываются связанными между собой.

Кроме того, вид и уровень сложности математики, использующейся в приложениях, изменились в последние годы коренным образом: теория меры (нетривиальным образом) используется в практической и теоретической экономике, алгебраическая геометрия взаимодействует с физикой; лемма Минковского, теория кодирования и структура воды объединяются в теории покрытий и упаковок; квантовая теория поля, теория дефектов в кристаллах и математическое программирование используют гомотопические методы; теория алгебр Ли оказывается связанной с фильтрами; прогнозирование и электротехника используют пространства Штейна.

Предлагаемая серия книг «Математика и ее приложения» посвящена таким (новым) аспектам, как, например:

— общие понятия, которые играют важную роль в нескольких различных разделах математики и (или) других наук;

— новые приложения результатов и методов одной области науки к другим;

— влияние, которое результаты, проблемы и понятия из одних направлений исследований оказывают или оказали на другие направления.

С помощью книг такого содержания, которые скорее стимулируют новые исследования, чем подводят итог проделанным,

[1]) Серии «Математика и ее приложения», выпускаемой издательством «Рейдель». — *Прим. перев.*

и призваны скорее заинтересовать читателя, чем снабдить его полной информацией по данному вопросу, мы надеемся способствовать лучшему взаимопониманию между специалистами в различных областях.

Предлагаемая книга является хорошим примером синергетического эффекта, возникающего, когда входят в соприкосновение первоначально разделенные направления исследования и когда идея или метод (геометрическое квантование), предназначенные более или менее для одной области, применяются в другой (теория представлений). Есть что-то очень здоровое и обещающее в том, что в одной книге встречаются такие понятия, как дзета-функция (Эпштейна), формула следа Сельберга, клетки Шуберта, автоморфные формы, теорема Римана — Роха наряду с моделью Изинга, цепочкой Тоды, пространством де Ситтера и квантовой статистической механикой.

Необъяснимая эффективность математики в науке...

Е. Вигнер

Что ж, если вы знаете местечко получше, идите туда.

Брюс Бэрнсфазер

То, что теперь доказано, было когда-то только домыслом.

Вильям Блейк

Пока алгебра и геометрия шли раздельными путями, их развитие было медленным, а приложения ограниченными. Когда же эти науки соединились, они стали черпать друг из друга новую жизненную силу и быстрыми шагами устремились к совершенству.

Жозеф Луи Лагранж

Михил Хазевинкель

Посвящается моим родителям
и Сузан, Майклу и Джейсону

Предисловие

Хотя в геометрическом квантовании заложено много идей и оно преследует много целей, основной упор в этой книге делается на одной теме: роль геометрического квантования в построении геометрических реализаций неприводимых унитарных представлений групп, встречающихся в физике. После того как эта тема обсуждена и геометрические реализации построены, мы иллюстрируем на нескольких примерах использование теории представлений в двух областях физики — квантовой статистической механике и квантовой теории поля.

Мы даем обзор техники орбит Костанта и Кириллова. Однако основная мысль, в которой мы хотим убедить читателя, состоит в том, что почти во всех основных примерах, возникающих в элементарной квантовой теории, — гармоническом осцилляторе, атоме водорода или задаче Кеплера, частице со спином и т. д., — геометрические основы содержатся в классических результатах о когомологиях расслоений над компактными комплексными однородными многообразиями. Теория орбит становится как бы излишней. В основе результатов о независимости от поляризации и о вычислении степени вырождения собственных значений лежит теорема Римана — Роха — Хирцебруха. На самом деле именно прекрасные результаты Кодаиры, Хирцебруха, Бореля, Ботта и др. должны изучать физики.

Второе утверждение, в которое, как мы надеемся, поверит читатель, состоит в том, что вся геометрия квантовой теории была известна классикам, в частности Э. Картану. (По-видимому, прав Боб Херманн, утверждающий, что все содержится в работах Картана.)

Обращаясь к развитию квантовой статистической механики в аспекте теории представлений, мы надеемся, что читатель начинает понимать историю современной спектральной геометрии. После Г. Вейля, Джинса, Зоммерфельда и др. следующий крупный шаг вперед был сделан в работах Фаулера. Его работы предопределили дальнейшие результаты Минакшисандарама, Берже, Маккина, Зингера, Джилки и др. Члены высшего порядка в спектральном разложении были известны уже Кирквуду в его работе по статистической механике — за 20 лет до Джилки. Физик де Витт также получил многие спектральные разложения в своих работах по теории перенормировок в

50-х гг. Это приводит нас к третьему важному выводу. Читатель должен понять, что в квантовой теории поля нет ничего таинственного. Почти вся техника, используемая в ней, присутствовала уже в квантовой статистической механике.

Наконец, одна выдающаяся теорема (или теория) пронизывает всю нашу книгу. Это — формула следа Сельберга. Она содержит почти все основные результаты, которые мы используем: теоремы Планшереля и Римана — Роха, формулу суммирования Пуассона и т. д. Теория Сельберга искусно соединяет физику (например, теорию рассеяния), теорию представлений и геометрию в одной красивой формуле. Она позволяет производить вычисления в некомпактной модели Вселенной, имеющей конечный объем, что представляет интерес для специалистов в общей теории относительности. Таким образом, мы завершаем книгу введением в температурную теорию черных дыр.

Но сначала мы концентрируем внимание на теории групп, их представлений и однородных пространств, которые сыграли фундаментальную роль в физике. Конечно, для изучения большинства элементарных классических систем требуется знакомство с группами вращения $SO(n)$, евклидовыми группами $E(n)$ и обобщенными группами Лоренца $SO(n, 1)$. В последующих главах мы изложим кратко теорию представлений этих групп на основе геометрического квантования.

Автор должен поблагодарить многих коллег за помощь в течение того времени, когда писалась эта книга. Особенно он благодарен М. Стоуну, К. Бернсу, Х. Фишеру, Б. Херманну, С. Даукеру, Э. Онофри, Дж. Ронсли, К. Морену и Р. Кушману. Наконец, автор благодарен Михилу Хазевинкелю за приглашение принять участие в его новой серии книг.

Н. Харт

Глава 0 Обзор результатов

0.1. Введение

Группы симметрии и их свойства лежат в основе и квантовой, и классической механики. Обычно изучение группы симметрии проводят в рамках одной из этих наук. Цель этой книги — познакомить читателя с более общей точкой зрения на группы симметрии в физике, как в квантовой, так и в классической. Средством для этого является изучение квантовой статистической физики систем с высокой степенью симметрии, в частности изучение высокотемпературной асимптотики таких систем. Эта асимптотика доставляет естественную связь с классической (статистической) механикой.

История квантовой статистической механики излагалась многократно. Нас особенно интересуют несколько красивых и глубоких результатов, связывающих квантовые и классические системы, которые были впервые получены в период между открытием планковского закона излучения и началом современной квантовой теории. Эти результаты по существу являются теоремами об асимптотике для некоторых дифференциальных уравнений с частными производными. Однако важность этих результатов, как мы покажем в нашей книге, заключается в связи изучаемой асимптотики с группой симметрии и геометрией соответствующей физической системы. Основной вывод, который должен сделать читатель, состоит в том, что квантовая статистическая механика является просто частью так называемой спектральной геометрии. В простейшей своей форме спектральная геометрия рассматривает компактное риманово многообразие (M, g) и оператор Лапласа — Бельтрами Δ на нем со спектром $\{\lambda_n\}$. Основной вопрос спектральной геометрии — можно ли восстановить дифференциально-геометрические свойства (M, g), зная спектр $\{\lambda_n\}$? Например, можно ли вычислить размерность M, его объем, скалярную кривизну, кривизну Риччи и т. п.[1]). Мы увидим, что специалисты по спектрам и по статистической механике занимались спектральной геометрией еще до того, как она стала самостоятельной наукой. А именно, наблюдая спектр (простых) физических систем, они определяли геометрические свойства этих систем.

---

[1]) По образному выражению М. Каца (см. [К 3] в списке литературы): «Можно ли услышать форму барабана?» — *Прим. перев.*

Познакомив читателя с такой точкой зрения на статистическую механику, мы хотим показать (это вторая цель нашей книги), что этот подход переносится на совсем другую область квантовой физики — квантовую теорию поля. Столь различные области исследования требуют от читателя одновременного владения многими предварительными сведениями. Разумеется, объем этой книги не позволяет детально исследовать каждую из указанных областей физики и математики. От читателя-физика потребуется знакомство с некоторым математическим аппаратом, а от читателя-математика — элементарное знание физики.

Чтобы ввести нужные нам обозначения и дать читателю представление о результатах, обсуждаемых более подробно в следующих главах, мы кратко опишем некоторые примеры.

0.2. Некоторые элементарные квантовые системы

Квантовая система описывается дифференциальным оператором с частными производными, который обозначается через H и называется гамильтонианом этой системы. Он действует на элементы Ψ гильбертова пространства $\mathscr{H}$. Основным объектом изучения является уравнение Шрёдингера $H\Psi = E\Psi$.

Для элементарных физических систем имеются интересные зависимости между гамильтонианами.

Пример 0.2.1. Четырехмерный изотропный гармонический осциллятор описывается уравнением

$$-\frac{1}{2m}\left[\sum \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} - m^2\omega^2 \sum x_k^2\right]\Psi = E\Psi.$$

Геометрия системы определяется конфигурационным пространством $M = \mathbf{R}^4$ с координатами $(x_1, \ldots, x_4)$. Элемент длины в этом пространстве имеет вид

$$ds^2 = \sum (dx_i)^2.$$

Если мы перейдем к координатам R, ϑ, φ, ψ, где

$$x_1 = R\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}, \qquad x_2 = R\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2},$$

$$x_3 = R\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}, \qquad x_4 = R\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2},$$

то элемент длины примет вид

$$ds^2 = dR^2 + \frac{R^2}{4}(d\vartheta^2 + d\varphi^2 + d\psi^2 + 2\cos\vartheta\, d\varphi\, d\psi).$$

В этих координатах, если положить $R^2 = r$, уравнение Шрёдингера для изотропного осциллятора превращается в

$$-\frac{2}{m}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\left\{\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}-2\cos\vartheta\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\psi}\right)\right\}-\frac{m^2\omega^2 r}{4}\right]\Psi = E\Psi. \quad (*)$$

Налагая связь $\partial\Psi/\partial\psi = 0$, мы получаем уравнение Шрёдингера для атома водорода

$$-\frac{1}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\left\{\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}-\frac{k}{r}\right]\Psi = E'\Psi,$$

где $k = -mE/2$, $E' = -m\omega^2/8$. Решая $(*)$ методом разделения переменных $\Psi = \Phi_1(r)\Phi_{\mathrm{rot}}(\vartheta, \varphi, \psi)$, мы получаем уравнение Шрёдингера для сферического ротатора

$$\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}-2\cos\vartheta\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\psi}\right)+\right.$$
$$\left.+\lambda\right]\Phi_{\mathrm{rot}} = 0.$$

Решения этого уравнения, как известно, имеют вид

$$\Phi_{\mathrm{rot}} = \Theta_{JKM}(\vartheta)\, e^{iK\varphi}e^{iM\psi},$$

где

$$\Theta_{JKM}(\vartheta) = x^{|K-M|/2}(1-x)^{|K+M|/2}F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ x),$$
$$\lambda = J(J+1), \quad J = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$
$$K = J,\ J-1,\ \ldots,\ -J, \quad M = J,\ J-1,\ \ldots,\ -J,$$

а F — гипергеометрическая функция, в которой

$$x = \frac{1}{2}(1-\cos\vartheta), \quad \alpha = -J + \frac{1}{2}|K-M|,$$
$$\beta = J + \frac{1}{2}|K+M| + \frac{1}{2}|K-M|, \quad \gamma = |K-M| + 1.$$

Уравнение для Φ_1 имеет вид

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)+\left(\frac{-m^2\omega^2}{4}+\frac{mE}{2r}-\frac{\lambda}{r^2}\right)\right]\Phi_1 = 0,$$

т. е. совпадает с уравнением радиального движения частицы с угловым моментом J в кулоновском поле. Решение, как известно, имеет вид

$$\Phi_{nJ} = e^{-\rho/2}\rho^J L_{n+J}^{2J+1}(\rho),$$

где $\rho = m\omega r$, $E = 2n\omega$, $n = 1,\ 2,\ \ldots,$ L_{n+J}^{2J+1} — присоединенный многочлен Лагерра. Таким образом, волновая функция для изотропного гармонического осциллятора равна

$$\Psi_{\text{osc}} = \Phi_{nJ}(\rho)\,\Theta_{JKM}(\vartheta)\,e^{iK\varphi}e^{iM\psi},$$

а волновые функции атома водорода получаются, если положить $M = 0$, т. е.

$$\Psi_{\text{Hy}} = \Phi_{nJ}(\rho)\,\Theta_{JK0}e^{iK\varphi}.$$

Число линейно независимых волновых функций с одинаковым уровнем энергии, т. е. *степень вырождения*, легко вычисляется в каждом из описанных случаев:

$$d_{\text{osc}} = \sum_{j=0}^{n-1}(2j+1)^2 = \frac{1}{3}(2n-1)\,n\,(2n+1),$$

$$d_{\text{Hy}} = \sum_{j=0}^{n-1}(2j+1) = n^2,$$

$$d_{\text{rot}} = (2j+1)^2.$$

Операторы Шрёдингера интересующих нас систем определяются операторами Лапласа — Бельтрами Δ на многообразиях M. Напомним, что (M, g) — риманово многообразие с локальными координатами $(q_1, \ldots, q_n)$ и римановой метрикой

$$g_{ij}(q) = g\left(\frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial q_j}\right)(q).$$

Оператор Лапласа — Бельтрами определяется формулой

$$\Delta = -\sum_{i,j}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(g^{ij}\sqrt{g}\,\frac{\partial}{\partial q_j}\right),$$

где $g = \det(g_{ij})$ и $g^{ij} = (g_{ij})^{-1}$.

Пример 0.2.2. Рассмотрим координатную систему $(q_1, q_2, q_3) = (\vartheta, \varphi, \psi)$ с метрикой

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & I\cos\vartheta \\ 0 & I\cos\vartheta & I \end{pmatrix}.$$

Можно проверить, что оператор Лапласа — Бельтрами в этом случае выглядит так:

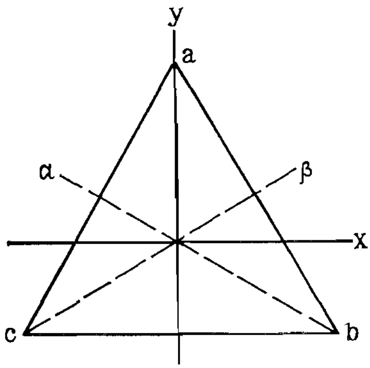
$$-\frac{1}{I}\left\{\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\left[\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\psi^2} - 2\cos\vartheta\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi\,\partial\psi}\right]\right\},$$

что совпадает с оператором Шрёдингера для ротатора; см. упр. 0.9.

0.3. Примеры представлений групп в физике

Степени вырождения собственных значений связаны с представлениями групп симметрии рассматриваемой задачи. Прежде чем перейти к изучению этой связи, введем некоторые обозначения.

Рассмотрим группу симметрии треугольника



Элементами этой группы являются: e — единичное отображение, g_1 — отражение относительно оси y, g_2 — отражение относительно прямой α, g_3 — отражение относительно прямой β, g_4 — поворот по часовой стрелке на 120°, g_5 — поворот против часовой стрелки на 120°. Рассмотрим теперь представление группы G, т. е. отображение $T\colon G \to GL(V)$, обладающее свойствами $T(gh) = T(g)T(h)$ и $T(e) = 1$. Размерность пространства V называется *степенью* представления T. Обычно мы будем рассматривать представления в комплексных линейных пространствах. Кроме того, мы будем, как правило, предполагать представления унитарными. В матричной записи[1]) это означает, что $T(g)^*_{ij} = T(g^{-1})_{ij}$.

Два представления T и T' называются *эквивалентными*, если существует $S \in GL(V)$, для которого $T'(g) = ST(g)S^{-1}$ для всех $g \in G$. Пространство $W \subset V$ называется *инвариантным* относительно T, если $T(g)w \in W$ для всех g из G и w из W. Представление называется *приводимым*, если существует собственное подпространство W в V, инвариантное относительно T. В противном случае T называется *неприводимым*. Мы обозначим через $\hat{G}$ множество классов эквивалентности неприводимых унитарных представлений группы G.

[1]) В ортонормированном базисе. — *Прим. перев.*

Читатель может убедиться в том, что следующие отображения являются представлениями группы симметрии треугольника:

	e	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
T^1	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)
T^2	(1)	(-1)	(-1)	(-1)	(1)	(1)
T^3	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ & 0\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Все эти представления неприводимы. Если через T^l_{mn} обозначить mn-й элемент матрицы T^l, то можно проверить, что. $\sum\limits_g T^k_{11}(g)\, T^k_{11}(g) = 6$ для $k=1, 2$, в то время как $\sum\limits_g T^3_{11}(g)\, T^3_{11}(g) = 3$ Верно также соотношение $\sum\limits_g T^1_{11}(g)\, T^2_{11}(g) = 0$. Все это — примеры общего соотношения ортогональности

$$\sum_g T^i_{mn}(g) \sqrt{\frac{l_i}{h}}\, T^j_{m'n'}(g)^* \sqrt{\frac{l_j}{h}} = \delta_{ij}\delta_{mm'}\delta_{nn'},$$

справедливого для любых унитарных неприводимых представлений T^j степени l_j группы G порядка h.

Характер матричного представления определяется формулой $\chi_k(g) = \sum\limits_m T^k_{mm}(g)$. Для группы симметрии треугольника таблица характеров имеет вид

	e	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	-1	-1	1	1
χ_3	2	0	0	0	-1	-1

Используя соотношения ортогональности, непосредственно получаем, что

$$\sum_g \chi_k(g)\, \chi_j(g)^* = h\delta_{kj}.$$

Рассмотрим теперь действие группы G на конфигурационном пространстве квантовомеханической системы, т. е. отображение f: $G \times M \to M$, обладающее свойствами $f(g_1, f(g_2, m)) = f(g_1 g_2, m)$ и $f(e, m) = m$. Обычно $f(g, m)$ обозначается просто через gm. Предположим, что это действие оставляет инвариантным гамильтониан H, т. е. $H(gm) = H(m)$. Легко проверить, что отображение $g \to T(g)$, где $(T(g)\Psi)(m) = \Psi(g^{-1}m)$, является представлением группы G. Обозначим через E_λ совокупность

$\{\Psi \in \mathscr{H},\ H\Psi = \lambda\Psi\}$; тогда для $\Psi \in E_\lambda$ мы имеем $HT(g)\Psi = T(g)H\Psi = \lambda T(g)\Psi$. Значит, $T(g)\Psi \in E_\lambda$ и E_λ инвариантно относительно представления T группы G. Часто собственное подпространство оказывается неприводимым относительно T; тогда размерность этого представления совпадает с кратностью соответствующего собственного значения.

Например, если гамильтониан инвариантен относительно группы симметрии треугольника, то можно ожидать наличия серии простых собственных значений с собственными функциями, инвариантными относительно действия группы. Кроме того, должна быть другая серия простых собственных значений, для которых собственные функции инвариантны относительно e, g_4, g_5 и меняют знак при действии g_1, g_2, g_3. Наконец, должна быть серия двукратно вырожденных собственных значений, в собственных подпространствах которых реализуется представление T^3.

Если заданы два представления T^1 и T^2 группы G в пространствах V^1 и V^2 соответственно, то можно построить новое представление, называемое их *произведением*:

$$(T^1 \otimes T^2)(g)(v_1 \otimes v_2) = T^1(g)v_1 \otimes T_2(g)v_2.$$

Оно действует в тензорном произведении $V^1 \otimes V^2$, и его матричные элементы являются произведениями матричных элементов T^1 и T^2: $(T^1 \otimes T^2)_{kl,\,ij}(g) = T^1_{ki}(g)T^2_{lj}(g)$. Характер $T^1 \otimes T^2$ — это $\chi_{T^1 \otimes T^2}(g) = \sum\limits_{l,\,k} T^1_{ll}(g)T^2_{kk}(g) = \chi_{T^1}(g)\chi_{T^2}(g)$, т. е. произведение характеров T^1 и T^2. Так как представления с одинаковыми характерами эквивалентны, мы видим, что $T^1 \otimes T^2$ эквивалентно $T^2 \otimes T^1$.

Если $\{T^\lambda\}$ — полный набор попарно неэквивалентных неприводимых представлений группы G, то произведение $T^\lambda \otimes T^\mu$ можно записать в виде

$$T^\lambda \otimes T^\mu = \sum_{\nu \in \widehat{G}} a_\nu^{\lambda\mu} T^\nu.$$

Числа $a_\nu^{\lambda\mu}$ называются *коэффициентами Клебша — Гордана.*

Произведение представлений возникает в так называемых правилах отбора в квантовой механике. Например, если волновые функции Ψ^λ принадлежат неприводимому представлению T^λ некоторой группы симметрии, то интеграл $\int \Psi^\lambda \Psi^\mu$ может быть отличен от нуля, лишь если в разложении $T^\lambda \otimes T^\mu$ встречается единичное представление T^I, т. е. $a_I^{\lambda\mu} \neq 0$. Если характеры группы вещественны, последнее условие выполняется только при $\lambda = \mu$. Аналогично исследуются правила отбора для средних вида $\int \Psi^\lambda f \Psi^\mu$.

Хотя мы до сих пор обсуждали примеры представлений только для конечных групп, многое из теории представлений таких групп переносится на компактные группы (в частности, на компактные группы Ли). Мы обсудим это в гл. 1. Изучение представлений некомпактных групп несколько более сложно; однако для тех групп, которые в первую очередь интересны для физиков, теория представлений вполне доступна, как мы увидим в гл. 12 и 13.

0.4. Асимптотики в статистической механике

В квантовой статистической механике считается, что квантовомеханическая система, описываемая гамильтонианом H, находится в состоянии с энергией E_λ с вероятностью $\exp(-\beta E_\lambda)/\sum\limits_\lambda \exp(-\beta E_\lambda)$. Здесь β — параметр, интерпретируемый как величина, обратно пропорциональная абсолютной температуре: $\beta = 1/kT$, где k — постоянная Больцмана. Термодинамическая внутренняя энергия системы определяется формулой $E = \sum\limits_\lambda E_\lambda \exp(-\beta E_\lambda)/Z$, где $Z = \sum\limits_\lambda \exp(-\beta E_\lambda)$. Ясно, что $E = kT^2(\partial/\partial T)\ln Z$. Теплоемкость определяется как

$$C_v = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T}\left[kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z\right].$$

Функция Z называется *функцией распределения* (или *статсуммой*); сумма здесь берется по всем возможным уровням энергии системы. Можно также записать Z в виде $Z = \sum g_\lambda \exp(-\beta E_\lambda)$, где g_λ — кратность уровня E_λ и сумма берется по всем различным уровням.

Рассмотрим гармонический осциллятор с классическим гамильтонианом $H = p^2/2m + kq^2/2$. Соответствующий оператор Шрёдингера $H = -(\hbar/2m)(d^2/dq^2) + kq^2/2$ имеет собственные значения $E_n = \hbar\sqrt{k/m}(n + 1/2) = h\nu(n + 1/2)$, где $\nu = (1/2\pi)\sqrt{k/m}$, а $n = 0, 1, 2, \ldots$. Таким образом, функция распределения для гармонического осциллятора имеет вид

$$Z_{HO}(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta E_n) = \frac{e^{-h\nu\beta/2}}{1 - e^{-h\nu\beta}} = \frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,(h\nu\beta/2)}.$$

Для классической системы, описываемой гамильтонианом $H(p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_n)$, *классическая функция распределения* имеет вид

$$Z = \frac{1}{h^n}\int \ldots \int e^{-\beta H(p,q)}\, dp_1 \ldots dp_n\, dq_1 \ldots dq_n.$$

Один из основных принципов квантовой статистической механики состоит в том, что высокотемпературной асимптотикой для Z служит классическая функция распределения, т. е.

$$Z(\beta) \sim Z_{\text{cl}}(\beta) \quad \text{при} \quad \beta \to 0.$$

Например, для одномерной системы с гамильтонианом $H(p, q) = p^2/2 + V(q)$ это значит, что

$$\sum_n \exp(-\beta E_n) \sim \frac{1}{h} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\beta\left(\frac{p^2}{2} + V(q)\right)\right) dp\, dq. \qquad (*)$$

Если обозначить через $B(\lambda)$ площадь области, где $H(p, q) = p^2/2 + V(q) \leqslant \lambda$, то можно переписать (*) в виде

$$Z(\beta) \sim \frac{1}{h} \int_0^{\infty} \exp(-\beta\lambda)\, dB(\lambda). \qquad (**)$$

Предполагая, что к $H(p, q)$ применима тауберова теорема Харди — Литтлвуда, отсюда можно заключить, что

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} 1 \sim \frac{B(\lambda)}{h} \quad \text{при } \lambda \to \infty.$$

Для гармонического осциллятора $Z(\beta) = 1/2\,\mathrm{sh}(h\nu\beta/2)$. Используя разложение

$$\frac{1}{2\,\mathrm{sh}(z/2)} = \frac{1}{z} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{2j}}{(2j)!}(1 - 2^{1-2j})\, z^{2j-1},$$

где B_k — числа Бернулли ($B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30, \ldots$), мы видим, что при $\beta \to 0$

$$Z(\beta) \sim 1/h\nu\beta.$$

Читатель может проверить, что правая часть последнего соотношения совпадает с величиной

$$\frac{1}{h} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}\right)\beta\right) dp\, dq,$$

тем самым подтверждая справедливость основного принципа в случае гармонического осциллятора. Площадь эллипса $B(\lambda)$ равна $2\pi\lambda\sqrt{m/k} = \lambda/\nu$. Поэтому для гармонического осциллятора $N(\lambda) \sim \lambda/h\nu$ при $\lambda \to \infty$.

Функция распределения для идеального газа определяется уровнями энергии частицы, заключенной в ящик размеров

(X, Y, Z). Эти уровни даются формулой

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_1^2}{X^2} + \frac{n_2^2}{Y^2} + \frac{n_3^2}{Z^2}\right).$$

Поэтому, обозначая через $V = XYZ$ объем ящика, получаем

$$Z = \sum_{n_1, n_2, n_3} \exp\left(-\frac{h^2}{8m} E_{n_1, n_2, n_3}\right) \sim \left(\frac{2\pi n}{\beta h^2}\right)^{3/2} \cdot V$$

при $\beta \to 0$, как легко показать, используя высокотемпературную асимптотику для суммы

$$Z_A = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{h^2}{8m}\frac{n^2}{A^2}\right) \sim \left(\frac{2\pi n}{\beta h^2}\right)^{1/2} \cdot A.$$

Одно из термодинамических соотношений утверждает, что сила, действующая на стенку ящика в направлении оси x, равна

$$F_x = \frac{N}{\beta}\frac{\partial \ln Z}{\partial X} = \frac{N}{\beta X}.$$

Таким образом, давление (т. е. сила, приходящаяся на единицу площади) равно $P = F_x/YZ = N/\beta V$. Но мы знаем, что для идеального газа $PV = NkT$. Таким образом, параметр β отождествляется с $1/kT$.

В случае наличия взаимодействия гамильтониан приобретает вид

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i<j} v_{ij},$$

где $v_{ij} = v(|r_i - r_j|)$. При небольших плотностях уравнение состояния идеального газа приближенно имеет вид

$$PV/NkT \approx 1 - \frac{N}{2V}\int_0^{\infty} dr\, 4\pi r^2 f_{12}(r),$$

где $f_{12}(r) = \exp(-\beta v_{12}(r)) - 1$, а $v_{12}(r)$ — термодинамический потенциал. Коэффициент при N/V называется *вторым вириальным коэффициентом.*

Следующий пример из квантовой статистической механики — плоский ротатор, для которого уравнение Шрёдингера имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2I}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\Psi = E_l \Psi,$$

где $E_l = (\hbar^2/2I)\, l^2$, $l \in \mathbf{Z}$. Собственное значение E_l при $l \neq 0$ является двукратным. Функция распределения имеет вид

$$Z_p = \sum_{l \in \mathbf{Z}} \exp(-\beta E_l) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} e^{-\pi l^2 \tilde{\beta}},$$

где $\tilde{\beta} = \beta\hbar^2/2\pi I$. Это так называемая тэта-функция Якоби $\vartheta_3(\tilde{\beta}, 0)$. Высокотемпературная асимптотика здесь имеет вид $Z_p(\beta) \sim \tilde{\beta}^{-1/2} = ((\hbar^2/2\pi I)\beta)^{-1/2}$ при $\beta \to 0$.

Рассмотрим теперь (пространственный) ротатор, состоящий из двух точечных масс m_1 и m_2, находящихся на фиксированном молекулярном расстоянии R. Эта система имеет момент инерции $I = \mu R^2$, где $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ — приведенная масса. В полярных координатах относительно центра инерции первый атом имеет координаты (a, ϑ, φ), где $a = m_2 R/(m_1 + m_2)$, а второй атом — координаты $(b, -\vartheta, \varphi + \pi)$, где $\beta = m_1 R/(m_1 + m_2)$. Кинетическая энергия первого атома равна

$$\frac{m_1}{2}\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2\right] = \frac{m_1 a^2}{2}\left[\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right].$$

Кинетическая энергия второго атома получится отсюда заменой $m_1 \to m_2$, $a \to b$. Поэтому полная кинетическая энергия равна

$$T = \frac{I}{2}\left[\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right],$$

где $I = \mu R^2 = m_1 a^2 + m_2 b^2$. Это в точности кинетическая энергия одной частицы массы I, движущейся по поверхности сферы единичного радиуса. Выражая оператор Лапласа в сферических координатах, мы приходим к уравнению Шрёдингера

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} + \frac{8\pi^2}{h^2} IE\Psi = 0.$$

Хорошо известно, что собственными функциями этого оператора являются нормализованные сферические гармоники $Y_{j,m}(\vartheta, \varphi)$ с собственными значениями $E_j = (h^2/8\pi^2 I)\, j(j+1)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Угловой момент относительно оси z принимает для этих функций значения $m\hbar$, $m = j, j-1, \ldots, -j$. Таким образом, уровень энергии E_j является $(2j+1)$-кратно вырожденным. Функция распределения для ротатора имеет вид

$$Z_{\text{rot}} = \frac{1}{\sigma}\sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)\exp(-yj(j+1)),$$

где $y = \hbar^2/2IkT$, а множитель симметрии σ равен 2 для симметричной молекулы AA и 1 для несимметричной AB. Мулхолланд и Фаулер в 1928 г. нашли высокотемпературную асимптотику для ротатора и показали, что

$$Z_{\text{rot}} = \frac{1}{\sigma y}\left(1 + \frac{y}{3} + \frac{y^2}{15} + \ldots\right) \text{ при } \beta \to 0.$$

Мы оставляем читателю проверку основного принципа для плоского и пространственного ротаторов.

Следующий пример — асимметричный ротатор, имеющий три разных момента инерции. Кинетическая энергия равна $K = (1/2)(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$, где ω_i — угловые скорости вращения вокруг осей x, y, z. Уровни энергии в этом случае выглядят довольно сложно; однако читатель может проверить, что классическая функция распределения в этом случае имеет вид

$$Z^{\mathrm{cl}}_{\mathrm{Asym\ rot}} = \frac{\pi^{1/2}}{\sigma}\prod_{i=1}^{3}\left(\frac{8\pi^2 I_i}{h^2}\right)^{1/2}.$$

Стрипп и Кирквуд в 1951 г. (см. [S 30]) вычислили следующий член высокотемпературной асимптотики:

$$Z_{\mathrm{Asym\ rot}} = \left(\frac{\pi}{a_x a_y a_z}\right)^{1/2}\left[1 + \frac{1}{12}\left(2a_x + 2a_y + 2a_z - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{a_x a_y}{a_z} - \frac{a_y a_z}{a_x} - \frac{a_z a_x}{a_y}\right) + \ldots\right],$$

где $a_u = \hbar^2/2I_u$, $u = x, y, z$. Если два из моментов инерции совпадают (скажем, $a_x = a_y = a$), мы оказываемся в ситуации симметричного волчка. В этом случае

$$Z_{\mathrm{Sym\ top}} = \frac{\pi^{1/2}}{a a_z^{1/2}}\left[1 + \frac{1}{12}\left(4a - \frac{a^2}{a_z}\right) + \ldots\right].$$

Следующий член разложения в скобках для симметричного волчка был найден Вини и Касселем в 1933 г. Он имеет вид

$$\frac{1}{480}\left(32a^2 - 24\frac{a^3}{a_z} + 7\frac{a^4}{a_z^2}\right).$$

Для асимметричного волчка соответствующий член найден в [S 30].

Уравнение Шрёдингера для симметричного волчка имеет вид

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} + \left(\frac{\cos^2\vartheta}{\sin^2\vartheta} + \frac{a}{a_z}\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial\psi^2} -$$
$$- \frac{2\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi\partial\psi} + \frac{8\pi^2 aE}{h^2}\Psi = 0.$$

Подстановка $\Psi = \Theta(\vartheta)e^{iK\varphi}e^{iM\psi}$ приводит к оператору с собственными значениями

$$E_{J,K} = \frac{\hbar^2}{2}\left[\frac{J(J+1)}{I} + K^2\left(\frac{1}{I_z} - \frac{1}{I}\right)\right],$$

где $J = j + (1/2)|K+M| + (1/2)|K-M|$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, $J = 0, 1, 2, \ldots$, $K = 0, \pm 1, \ldots, \pm J$, $M = 0, \pm 1, \ldots, \pm J$. Подробности см. в книге Полинга и Вилсона [Р 8а]. Функция распределения для симметричного волчка может быть записана в виде

$$Z_{\text{Sym top}} = \frac{1}{\sigma} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{(a-a_z)k^2} \sum_{j=|k|}^{\infty} (2j+1) e^{-aj(j+1)}.$$

В случае $I_1 = I_2 = I_3$ мы приходим к уровням энергии

$$E_{JKM} = \frac{\hbar^2}{2} \frac{J(J+1)}{I},$$

т. е. к собственным значениям оператора Шрёдингера $H = (-\hbar^2/2I)\Delta_{SO(3)}$, где $\Delta_{SO(3)}$ — оператор Лапласа на группе $SO(3)$, который мы обсуждали в п. 0.2.2.

Функция распределения в этом случае имеет вид

$$Z(\beta) = \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1)^2 \exp\left(-\frac{\hbar^2}{2I} \beta j(j+1)\right),$$

и высокотемпературная асимптотика может быть получена на основе результатов Вини или Кирквуда:

$$Z(\beta) \sim \frac{\pi^{1/2}}{y^{3/2}}\left(1 + \frac{1}{4}y + \frac{1}{32}y^2 + \ldots\right).$$

Отметим, что многообразие $SO(3)$ отождествляется с проективным пространством $RP(3)$.

Таким образом, мы видим, что спектроскописты получили формулы спектральной геометрии для компактных симметрических пространств S^1, S^3 и $RP(3)$ еще до 1933 г.

Далее, с точки зрения спектральной геометрии важно знать, должны ли быть эквивалентны два многообразия (или конфигурационных пространства), если совпадают спектры соответствующих операторов Шрёдингера (т. е. Лапласа — Бельтрами). Другими словами, определяется ли геометрия конфигурационного пространства соответствующим спектром? Мы займемся вопросами статистической механики и спектральной геометрии в гл. 16 и 17.

Как мы только что отмечали, в рассмотренных нами элементарных примерах встречаются симметрические пространства. Они играют важную роль в физике. Для удобства читателя напомним, как возникают эти пространства.

Пусть G — компактная группа Ли, ϑ — инволюция на G и K — множество неподвижных точек этой инволюции. В этом случае говорят, что (G, K) — *симметрическая пара*. Пусть K_0 —

связная компонента единицы в K. Однородное пространство G/H называется *симметрическим*, если H — любая подгруппа, заключенная между K_0 и K: $K_0 \subset H \subset K$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G распадается в прямую сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$:

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g},\ s(X) = X\}, \quad \mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g},\ s(X) = -X\},$$

где s — действие инволюции ϑ в касательном пространстве к G в единице: $s = \dot{\vartheta}(e)$. Справедливы соотношения $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{p}$, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$. Максимальная подалгебра $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{p}$ абелева и называется *картановской подалгеброй*. Ее размерность называется *рангом* симметрического пространства G/H.

Определим отображение η: $G \to G$ формулой $\eta(g) = g\vartheta(g)^{-1}$. Тогда $\eta(gK) = \eta(g)$; таким образом, η постоянно на классах смежности по K и задает вложение G/K в G: $gK \mapsto g\vartheta(g)^{-1}$. Поэтому мы можем рассматривать G/K как подмногообразие M в G. (На самом деле M оказывается вполне геодезическим подмногообразием в G. Геодезические в M, проходящие через e, совпадают с однопараметрическими подгруппами в G, лежащими в M.)

Пример 0.4.1. Пусть $G = U(n)$ и $\vartheta(A) = \bar{A}$ (комплексное сопряжение относительно какого-нибудь базиса). Множеством неподвижных точек в этом случае будет группа $O(n)$, а ее связная компонента единицы — это подгруппа $SO(n)$. Пространство $U(n)/O(n)$ симметрическое. Алгебра Ли группы $U(n)$ состоит из косоэрмитовых матриц порядка n. Ее подалгебра $\mathfrak{k}$ состоит из вещественных кососимметрических матриц, а подпространство $\mathfrak{p}$ — из чисто мнимых симметрических матриц. Диагональные матрицы из $\mathfrak{p}$ образуют максимальную (абелеву) подалгебру. Пространство $U(n)/O(n)$ можно отождествить с многообразием всех симметрических матриц в $U(n)$. А именно отображение η: $gO(n) \to g\vartheta(g)^{-1} = g\bar{g}^{-1} = gg^t$ переводит $U(n)/O(n)$ в множество всех симметрических матриц из $U(n)$.

Пример 0.4.2. Пусть $G = SO(p+q)$ и

$$I(p, q) = \begin{pmatrix} -I(p) & 0 \\ 0 & I(q) \end{pmatrix},$$

где $I(n)$ — единичная матрица порядка n. Будем считать, что $p \geqslant q$. Определим инволюцию ϑ в G формулой $\vartheta(X) = I(p, q)XI(p, q)$. Подгруппа K в этом случае совпадает с $SO(p+q) \cap (O(p) \times O(q))$, а K_0 равна $SO(p) \times SO(q)$. Симметрическое пространство $SO(p+q)/K$ называется *вещественным грассманианом* и обозначается через $G_{p+q,\,p}$.

В этом примере

$$\mathfrak{k}=\left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} A \text{ — кососимметрическая матрица} \\ \quad \text{порядка } p \\ B \text{ — кососимметрическая матрица} \\ \quad \text{порядка } q \end{array}\right\},$$

$$\mathfrak{p}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & X \\ -X^t & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} X \text{ — вещественная матрица разме-} \\ \quad \text{ра } p \times q \end{array}\right\}.$$

Максимальная (абелева) подалгебра в $\mathfrak{p}$ порождается матрицами вида $E_{i,\,p+i}-E_{p+i,\,i}$, $i=1, 2, \ldots, q$, где E_{ij} означает $(n \times n)$-матрицу с единицей на пересечении i-й строки с j-м столбцом и нулями на остальных местах.

0.5. Еще о спектральной геометрии

На языке математики функция распределения — это след матрицы плотности

$$\rho(\beta, x, y)=\sum_{k=0}^{\infty} \exp(-\lambda_k \beta)\, \Psi_k(x)\, \overline{\Psi_k(y)}, \tag{*}$$

где λ_k, Ψ_k — собственные значения и собственные функции гамильтониана H. В приведенных выше примерах H является самосопряженным оператором, а именно оператором Лапласа — Бельтрами Δ на компактном римановом многообразии M. Прежде чем идти дальше, введем некоторые обозначения. Каждому линейному дифференциальному оператору

$$P(x, D)=\sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D_x^\alpha,$$

где $x \in \mathbf{R}^N$ и

$$D_x^\alpha=(-i)^{|\alpha|} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}}, \quad |\alpha|=\sum_{k=1}^{N} \alpha_k,$$

соответствует его *символ* $\sigma(P)$:

$$\sigma(P)=p(x, \xi)=\sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) \xi^\alpha,$$

где $\xi \in \mathbf{R}^N$. Символ является многочленом степени m по ξ с коэффициентами, зависящими от x. Например, если $P=(1/i)\, a(x)\,(\partial/\partial x)$, то $\sigma(P)=a(x)\xi$, а если $Q=b(x)$, то $\sigma(Q)=b(x)$.

Лапласиан Δ на $\mathbf{R}^N$, задаваемый формулой

$$\Delta=\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

имеет символ $\sigma(\Delta) = -|\xi|^2$. Главным символом линейного дифференциального оператора порядка m называется выражение $\sigma_p(P) = \sum\limits_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$.

Как мы знаем, лапласиан является эллиптическим оператором. Это свойство целиком определяется главным символом оператора. А именно P эллиптичен, если $\sigma_p(P) \neq 0$ для $\xi \neq 0$. Ясно, что Δ обладает этим свойством. Для оператора Лапласа — Бельтрами главный символ имеет вид $\sigma_p(\Delta) = \sum\limits_{i,j} g^{ij}\xi_i\xi_j$.

Для любого неотрицательного самосопряженного эллиптического дифференциального оператора H, действующего в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, все собственные подпространства $E_\lambda = \{\Psi \in \mathscr{H} \mid H\Psi = \lambda\Psi\}$ конечномерны и отличны от нуля лишь для дискретного множества неотрицательных λ.

Гильбертово пространство $\mathscr{H}$ порождается подпространствами E_λ. Можно показать, что функция распределения $Z(\beta) = \sum\limits_\lambda e^{-\beta\lambda} \dim E_\lambda$ задается сходящимся рядом при всех $\beta > 0$. Если положить $\rho(\beta) = \exp(-\beta H)$, то можно показать, что $\rho(\beta)$ — корректно определенное семейство ограниченных операторов в $\mathscr{H}$, удовлетворяющее дифференциальному уравнению Блоха

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\rho(\beta) + H\rho(\beta) = 0$$

и граничному условию $\rho(0) = 1$. Прежде чем исследовать высокотемпературную асимптотику при $\beta \to 0$, отметим, что можно также изучать *дзета-функцию* оператора H, определяемую формулой

$$\zeta_H(s) = \sum_\lambda \lambda^{-s} \dim E_\lambda$$

(здесь предполагается, что $H > 0$, так что $\lambda \neq 0$). Дзета-функция оператора H связана с функцией распределения равенством

$$\zeta_H(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \beta^s Z_H(\beta) \frac{d\beta}{\beta}.$$

В частности, классическая дзета-функция Римана $\zeta_R(s) = \sum\limits_{n=1}^\infty n^{-s}$ связана с функцией распределения плоского ротатора $Z_p(\beta)$ равенством [1])

$$\zeta_R(2s) = \frac{1}{2\Gamma(s)} \int_0^\infty \beta^{s-1}(Z_p(\beta) - 1)\,d\beta.$$

[1]) При $I = (1/2)\hbar^2$; в этом случае уровни энергии имеют вид $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbf{Z}$. — *Прим. перев.*

В качестве второго примера дзета-функции в статистической механике рассмотрим частицу массы m, заключенную в одномерный ящик ширины a. В этом случае уровни энергии будут

$$\lambda_n = \frac{n^2h^2}{8ma^2}, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots .$$

Дзета-функция этой системы — это

$$\zeta_{PB}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} = \left(\frac{h^2}{8ma^2}\right)^{-s} \zeta_R(2s).$$

Известно, что функция $\zeta_R(s)$ аналитична на всей плоскости $\mathbf{C}$, за исключением простого полюса в точке $s=1$. Она имеет «тривиальные» нули в точках $-2n$, $n=1, 2, \ldots$. Все остальные «нетривиальные» нули расположены в полосе $0 \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant 1$. Гипотеза Римана состоит в том, что все они лежат на прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$.

В качестве третьего примера дзета-функции рассмотрим гармонический осциллятор с уровнями энергии $\lambda_n = h\nu(n + 1/2)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Дзета-функция в этом случае имеет вид

$$\zeta_{HO}(s) = (h\nu)^{-s} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{-s} = \frac{2^s - 1}{(h\nu)^s} \zeta_R(s).$$

Вернемся к функции распределения для оператора $H = \Delta_M$ на многообразии M размерности d. Как мы видели в приведенных выше примерах квантовомеханических систем, их гамильтонианы являются операторами Лапласа — Бельтрами на римановых многообразиях M. В этом случае можно показать, что ряд (*), задающий матрицу плотности, сходится равномерно на компактных подмножествах в $(0, \infty) \times M \times M$ к фундаментальному решению для оператора $(\partial/\partial\beta) - H$, причем справедливо равенство $\operatorname{tr}\rho(\beta) = \int_M \rho(\beta;\ x,\ x) = \sum_\lambda e^{-\beta\lambda}$. Кроме того, для любого целого положительного числа N справедливо разложение

$$\rho(\beta;\ x,\ x) = (4\pi\beta)^{-d/2} \{1 + \beta k_1(x) + \ldots + \beta^N k_N(x)\} + O(\beta^{N-d/2+1})$$

при $\beta \to 0$, где $k_j(x)$ — гладкие функции на M. В частности, отсюда видно, что

$$\operatorname{tr}\rho(\beta) = \int_M \rho(\beta;\ x,\ x) = (4\pi\beta)^{-d/2} \operatorname{Vol} M + O(\beta^{1-d/2}).$$

По образному высказыванию М. Каца это выражает тот факт, что объем и размерность многообразия M можно «услышать» по спектру $\{\lambda_n\}$. Если обозначить через a_j величину $(\mathrm{Vol}\, M)^{-1} \int\limits_M k_j(x)$, то высокотемпературная асимптотика для функции распределения получает следующий вид:

$$Z(\beta) = \sum_n \exp(-\lambda_n \beta) =$$
$$= (4\pi\beta)^{-d/2} \mathrm{Vol}\, M \{1 + a_1\beta \ldots + a_N \beta^N\} + O(\beta^{N-d/2+1})$$

при $\beta \to 0$.

Коэффициенты k_j в приведенном выше разложении получаются ограничением на диагональ в $M \times M$ функций $U_j(x, y)$, определяемых следующим образом. Выберем открытое множество U, содержащее точку $m \in M$, и введем в нем нормальные координаты с началом в точке m, так что $g_{ij}(m) = \delta_{ij}$. Пусть $F(r(x, y))$ — функция от геодезического расстояния $r(x, y)$ между точками x и y в U. Для любой гладкой функции α в U легко проверить, что

$$\Delta_y (F(r)\alpha) = \left(\frac{d^2F}{dr^2}(r) + \frac{d-1}{r}\frac{dF}{dr}(r) + \frac{1}{2g}\frac{dg}{dr}\frac{dF}{dr}(r)\right)\alpha +$$
$$+ \frac{2}{r}\frac{dF}{dr}\nabla r \frac{d\alpha}{dr} + F(r)\Delta\alpha, \quad \binom{*}{*}$$

где $d\alpha/dr$ означает дифференцирование вдоль геодезической, соединяющей x и y, а $g(y) = \det(g_{ij}(y))$.

Положим теперь

$$H_N(\beta;\ x,\ y) = \frac{\exp(-r^2/4\beta)}{(\pi r\beta)^{d/2}} \sum_{i=0}^{N} \beta^i U_i(x,\ y).$$

Тогда, используя $\binom{*}{*}$, получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial\beta} - \Delta_y\right) H_N(\beta;\ x,\ y) = \frac{\exp(-r^2/4\beta)}{(\pi r\beta)^{-d/2}} \sum_{i=0}^{N} \left\{\left(\frac{r^2}{4\beta^2} +\right.\right.$$
$$\left. + \frac{i-d/2}{\beta} - \frac{r^2}{4\beta^2} + \frac{1}{2\beta} + \frac{d-1}{2\beta} + \frac{r}{4g\beta}\frac{dg}{dr}\right)\beta^i U_i(x,\ y) +$$
$$\left. + \beta^{i-1}\nabla r \frac{d}{dr} U_i(x,\ y) - \beta^i \Delta_y U_i(x,\ y)\right\}.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при

$$\frac{\exp(-r^2/4\beta)}{(4\pi\beta)^{d/2}}\beta^{i-1} \quad \text{в} \quad \left(\frac{\partial}{\partial\beta} - \Delta_y\right) H_N,$$

мы приходим к равенству

$$\left(i + \frac{r}{4g}\frac{dg}{dr}\right) U_i + \nabla r \frac{d}{dr} U_i - \Delta_y U_{i-1} = 0.$$

Или, поскольку

$$\Delta_y r^2 = \frac{d}{2} + \frac{1}{4}\frac{r}{g}\frac{dg}{dr},$$

получаем

$$\frac{d}{dr}U_i(x, y) + \left(i - \frac{d}{2} + \frac{1}{4}\Delta_y r^2(x, y)\right)U_i(x, y) =$$
$$= \Delta_y U_{i-1}(x, y) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant N.$$

Эта система уравнений для U_i имеет единственное решение в достаточно малой окрестности диагонали в $M \times M$ с начальным условием $U_0(x, x) = 1$. Оператор H_k называется *параметриксом* для уравнения Блоха. Метод спектральной геометрии состоит далее в том, чтобы выразить функции $k_j(x) = U_j(x, x)$ как многочлены от частных производных в точке x метрического тензора и, следовательно, как многочлены от компонент тензора кривизны и их ковариантных производных. С помощью теории инвариантов можно показать, что $k_1 = \alpha_1\tau$, $k_2 = \alpha_2\tau^2 + \alpha_3|\rho|^2 + \alpha_4|R|^2 + \alpha_5\Delta\tau$, где τ — скалярная кривизна M, $|\rho|$ — норма тензора Риччи ρ, а $|R|$ — норма тензора кривизны. Константы α_i были вычислены и оказались следующими:

$$\alpha_1 = 1/6, \quad \alpha_2 = 1/72, \quad \alpha_3 = -1/180,$$
$$\alpha_4 = 1/180, \quad \alpha_5 = 1/30.$$

Используя нормализацию Берже (см. [B 8]), можно составить следующую таблицу для S^1, S^2 и S^3:

	S^1	S^2	S^3
$\|R\|^2$	0	4	12
$\|\rho\|^2$	0	2	12
τ^2	0	4	36
τ	0	2	6
Vol	2π	4π	$2\pi^2$

Таким образом, высокотемпературная асимптотика функции распределения имеет вид

$$Z_{S^1}(\beta) = (4\pi\beta)^{-1/2}(1 + 0\cdot\beta + 0\cdot\beta^2 + \ldots),$$
$$Z_{S^2}(\beta) = (4\pi\beta)^{-1}\left(1 + \frac{\beta}{3} + \frac{\beta^2}{15} + \ldots\right),$$
$$Z_{S^3}(\beta) = (4\pi\beta)^{-3/2}\left(1 + \beta + \frac{\beta^2}{6} + \ldots\right).$$

Первые два примера относятся к плоскому и пространственному ротаторам. Мы оставляем читателю разобрать случай $RP(3)$ (асимметричный волчок).

М. Кац предложил красивую интерпретацию соотношения

$$Z(\beta) \sim \frac{\operatorname{Vol} M}{(4\pi\beta)^{d/2}} \text{ при } \beta \to 0.$$

А именно если рассмотреть уравнение Блоха как уравнение, описывающее броуновское движение по Эйнштейну, то при $\beta \to 0$ броуновская частица не успевает заметить, что она находится на многообразии M, а не в плоском пространстве $\mathbf{R}^d$. Поэтому можно ожидать, что

$$\rho \sim \frac{\exp(-r^2/4\beta)}{(4\pi\beta)^{d/2}} \text{ при } \beta \to 0.$$

Мы будем рассматривать результаты такого рода в гл. 16. Принимая их пока на веру, заметим, что из

$$\rho(\beta;\ x,\ y) = \sum_j \exp(-\beta\lambda_j)\ \Psi_j(x)\overline{\Psi_j(y)}$$

вытекает, что

$$\sum_j \exp(-\beta\lambda_j)\,|\Psi_j|^2 \sim \left(\frac{1}{4\pi\beta}\right)^{d/2} \text{ при } \beta \to 0.$$

Интегрируя по M, получаем

$$Z(\beta) \sim \frac{\operatorname{Vol} M}{(4\pi\beta)^{d/2}} \text{ при } \beta \to 0.$$

Применяя к полученному соотношению трауберову теорему Харди — Литтлвуда, мы приходим к классическому результату Г. Вейля об асимптотике числа $N(\lambda)$ собственных значений, не превосходящих λ:

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_j \leqslant \lambda} 1 \sim \frac{\operatorname{Vol} M}{2^d \pi^{d/2}} \frac{\lambda^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)} \text{ при } \lambda \to \infty.$$

Рассмотрим кратко случай открытой области Ω в $\mathbf{R}^N$ или в римановом многообразии M. Как мы только что видели, при $\lambda \to \infty$ величина $\lambda^{-n/2}N(\lambda)$ стремится к пределу $C_n \cdot \operatorname{Vol}\Omega$. Отметим интересную связь между $N(\lambda)$ и числом $N_\alpha(\lambda)$ неположительных собственных значений оператора Шрёдингера $-\Delta_M + V(x)$, удовлетворяющих неравенству $\lambda \leqslant \alpha \leqslant 0$. А именно, согласно минимаксному принципу Куранта, имеет место оценка

$$N(\lambda) \leqslant N_\alpha((\alpha - \lambda)\chi_\Omega) \text{ для всех } \alpha \leqslant 0,$$

где χ_Ω — характеристическая функция области Ω. Либ показал, что

$$N_\alpha(V) \leqslant L_n \int_M (V(x) - \alpha)_-^{n/2}\, dx$$

для всех α и V в случае, когда $M=\mathbf{R}^N$ или M — однородное пространство неположительной кривизны и $\dim M \geqslant 3$. Здесь $V_- = (|V| - V)/2$, L_n — константа. Оценки для L_n были получены Либом и Цвикелем. В частности, комбинируя их результаты, можно получить следующие неасимптотические оценки для $N(\lambda)$:

(1) $N(\lambda) \leqslant D_n \lambda^{n/2} \operatorname{Vol} \Omega$ для всех $\lambda \geqslant 0$ и всех $\Omega \subset M$, где $M=\mathbf{R}^N$ или M — однородное многообразие неположительной кривизны.

(2) $N(\lambda) \leqslant (D_n \lambda^{n/2} + E_n) \operatorname{Vol} \Omega$ для всех $\lambda \geqslant 0$ и всех $\Omega \subset M$, где M — компактное многообразие. Здесь константы D_n и E_n не зависят от λ и Ω и определяются многообразием M.

Вернемся к общей постановке задачи и предположим, что в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, где задан наш гамильтониан H, действует группа G симметрии конфигурационного пространства с помощью представления T, сохраняющего H. Как мы отмечали в п. 0.3, в собственных подпространствах E_λ для H возникают унитарные представления группы G. Эти представления не обязательно неприводимы. Для каждого неприводимого представления μ группы G обозначим через $\nu_\mu(\lambda)$ кратность μ в E_λ. Нас интересует асимптотическое поведение величины $N_\mu(t) = \sum_{\lambda \leqslant t} \nu_\mu(\lambda)$ при $t \to \infty$. Это обобщение проблемы Г. Вейля, к которой вопрос сводится при $G=\{e\}$ и $H=\Delta$.

0.6. Статистическая механика и теория представлений

Читатель уже видел, что функция распределения из квантовой статистической механики связана со спектральной геометрией. Он, возможно, начинает также видеть связь с теорией представлений. Мы хотим теперь более тесно связать симметрии динамической системы с изучением ее функции распределения Рассмотрим систему, для которой конфигурационным пространством M служит компактная группа Ли G, а гамильтонианом H является оператор Бельтрами — Лапласа Δ, как в рассмотренном выше случае $G=S^1$. Уравнение Блоха принимает вид

$$\frac{\partial \rho_G}{\partial \beta} = \Delta_G \rho_G.$$

Простые соображения из гармонического анализа на компактных группах Ли показывают, что функция ρ_G, будучи инвариантной относительно внутренних автоморфизмов группы G, допускает разложение Фурье

$$\rho_G(\beta, g) = \sum_{\lambda \in \hat{G}} a_\lambda(\beta) \chi_\lambda(g),$$

где χ_λ — характер неприводимого представления λ группы G, имеющего размерность $d(\lambda)$. Легко проверить, что $a_\lambda(\beta) = d(\lambda)\exp(-\beta\lambda)$, где λ — собственное значение оператора H в пространстве матричных элементов неприводимого представления группы G [1]. Таким образом, матрица плотности и соответствующая функция распределения определяются группой G. Этот результат распространяется также на квантовомеханические системы, для которых $H = \Delta_M$, где $M = G/K$ — симметрическое пространство. Мы покажем в следующих главах, что и здесь спектр и функция распределения полностью определяются соответствующим представлением группы G. Кроме того, мы получим явное выражение для высокотемпературной асимптотики в случае симметрического пространства ранга 1. Интересно отметить, что все развитие этой области науки началось с работы специалиста по статистической механике Фаулера и его ученика Мулхолланда о плоском ротаторе.

0.7. Группы преобразований в физике

Определение 0.7.1. *Топологической группой преобразований* или *действием* называется тройка (G, M, f), состоящая из топологической группы G, хаусдорфова пространства M и непрерывного отображения $f\colon G \times M \to M$, удовлетворяющего условиям (1) $f(g_1, f(g_2, x)) = f(g_1 g_2, x)$ и (2) для фиксированного g отображение $x \to f(g, x)$ является гомеоморфизмом M на M. Обычно вместо $f(g, x)$ пишут просто gx. Если M — гладкое многообразие, G — группа Ли, а f — гладкое отображение, то (G, M, f) называют *гладким действием*, а M называют *G-многообразием*.

Определение 0.7.2. Пусть (G, M, f) — группа преобразований и $x \in M$. *Изотропная подгруппа*, или *стабилизатор*, точки x — это подгруппа $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$. Множество $Gx = \{gx \mid g \in G\}$ называется *орбитой* точки x.

Две орбиты в M либо совпадают, либо не имеют общих точек. Таким образом, M распадается на орбиты. Через M/G обозначается множество орбит в M. Оно снабжается фактортопологией, так что естественная проекция $p\colon M \to M/G$ является непрерывным открытым отображением. Читатель может проверить, что в случае компактной группы G отображение p будет также и замкнутым.

---

[1] Здесь автор использует возможность нумеровать представления $\lambda \in \hat{G}$ собственными значениями оператора H. — *Прим. перев.*

Определение 0.7.3. Действие называется *эффективным*, если из того, что $gx=x$ для всех $x \in M$, следует $g=e$. Действие называется *свободным*, если $G_x=\{e\}$ для всех $x \in M$.

Пример 0.7.3a. Пусть $G=\mathbf{Z}_2=\{\pm 1\}$ действует на S^n по формуле $g(x_0, x_1, \ldots, x_n)=(gx_0, gx_1, \ldots, gx_n)$, где $x_0, \ldots, x_n$ — координаты в пространстве $\mathbf{R}^{n+1}$, в котором сфера S^n выделяется уравнением $x_0^2+x_1^2+\ldots+x_n^2=1$. Это действие свободно и пространством орбит является $RP(n)=S^n/\mathbf{Z}_2$.

Определение 0.7.4. Действие называется *транзитивным*, если для любых $x, y \in M$ существует хотя бы один $g \in G$, для которого $gx=y$, т. е. $Gx=M$ для всех x. В этом случае M называется *однородным пространством*.

Мы оставляем читателю проверку того, что топологическая группа G действует транзитивно на пространстве классов смежности G/H по замкнутой подгруппе H, так что G/H является однородным пространством. Обратно, если (G, M, f) — транзитивное действие компактной группы Ли G, то отображение p: $G \to M$, задаваемое формулой $p(g)=gx$, определяет диффеоморфизм p': $G/G_x \to M$.

Пример 0.7.5. *Ортонормированным* k-*репером* в $\mathbf{C}^n$ называется упорядоченное множество v^k, состоящее из k ортонормированных векторов. Пусть $V_{n,k}(\mathbf{C})$ означает множество всех ортонормированных k-реперов в $\mathbf{C}^n$. Удобно представлять элементы $V_{n,k}(\mathbf{C})$ в виде комплексных матриц, состоящих из k ортонормированных столбцов длины n. Унитарная группа $U(n)$ транзитивно действует на $V_{n,k}(\mathbf{C})$ с помощью обычного матричного умножения. Если через v_0^k обозначить k-репер, составленный из базисных векторов $e_1, \ldots, e_k$, то его стабилизатор $G_{v_0^k}$ естественно отождествляется с подгруппой $I_k \times U(n-k) \subset U(n)$. Таким образом, $V_{n,k}(\mathbf{C})=U(n)/U(n-k)$. В частности, $V_{n,n}(\mathbf{C})=U(n)$.

Аналогично пространство $V_{n,k}(\mathbf{R})$ ортонормированных k-реперов в $\mathbf{R}^n$ отождествляется с $O(n)/O(n-k)$. В частности, $V_{n,1}(\mathbf{R})=S^{n-1}$. Можно проверить, что при $k<n$ уже группы $SU(n)$ и $SO(n)$ транзитивно действуют на $V_{n,k}(\mathbf{C})$ и $V_{n,k}(\mathbf{R})$. Поэтому $V_{n,k}(\mathbf{C})=SU(n)/SU(n-k)$, $V_{n,k}(\mathbf{R})=SO(n)/SO(n-k)$.

Однородные пространства естественно возникают в физических задачах. К сожалению, это обстоятельство часто не используется. Мы уже видели примеры S^1, S^2, S^3 и $RP(3)$ в статистической механике. Ниже мы рассмотрим n-мерную задачу Кеплера, частным случаем которой является атом водорода.

В задаче Кеплера гамильтониан имеет вид $H=p^2/2m-k/|q|$, а фазовым пространством является кокасательное расслоение $T^*(\mathbf{R}^n\setminus\{0\})$. Поверхности отрицательных уровней энергии Σ_H, где $H=-a^2$, связны, но некомпактны. После устранения сингулярности в начале координат и компактификации мы приходим к новой реализации поверхности уровня энергии в виде расслоения единичных касательных векторов на n-мерной сфере S^n. Как известно, это многообразие диффеоморфно многообразию Штифеля $V_{n+1,2}(\mathbf{R})=SO(n+1)/SO(n-1)$. Оно расслаивается на окружности, причем базой расслоения служит многообразие Грассмана ориентированных 2-плоскостей. Этот факт мы записываем в виде

$$SO(2)\to V_{n+1,2}(\mathbf{R})\to G'_{n+1,2}(\mathbf{R}).$$

Для любого k имеем $G'_{n,k}(\mathbf{R})=SO(n)/SO(k)\times SO(n-k)$. Заметим также, что $G'_{n+1,2}(\mathbf{R})$ диффеоморфно комплексной квадрике $Q_{n-1}(\mathbf{C})$, задаваемой в комплексном проективном пространстве $CP(n)$ уравнением $\sum_{i=0}^{n} z_i^2=0$, где z_i — однородные координаты. Пространства $Q_{n-1}(\mathbf{C})$ являются специальными примерами симплектических многообразий, называемых многообразиями Ходжа. Мы увидим, что многообразия Ходжа играют важную роль в геометрическом квантовании. Эти структуры изучаются в гл. 10 и 11. Они встречаются также в задаче об инстантонах (см., например, Переломов [P 12a]); однако в настоящей книге мы не будем касаться этой темы.

Возвращаясь к общей теории однородных пространств, заметим, что два однородных пространства G/H и G/H' естественно гомеоморфны, если $H'=gHg^{-1}$. Поэтому, чтобы найти все однородные пространства для данной группы G, достаточно перечислить ее замкнутые подгруппы с точностью до сопряженности.

Пример 0.7.6. Для $G=SU(2)$ собственными замкнутыми подгруппами будут $U(1)$, ее нормализатор $NU(1)$, циклические подгруппы C_n порядка $n=1, 2, \ldots$, подгруппы $\tilde{D}_{2n}$, которые являются центральными расширениями диэдральных групп D_{2n}, $n=1, 2, \ldots$, с помощью $\mathbf{Z}_2$, подгруппы $\tilde{T}$, $\tilde{O}$ и $\tilde{Y}$, которые являются центральными расширениями с помощью $\mathbf{Z}_2$ групп T, O и Y симметрии тетраэдра, куба и икосаэдра соответственно. Таким образом, однородными пространствами группы $SU(2)$ являются $SU(2)=S^3$, $SU(2)/C_n\simeq L(n,1)$ (так называемые линзовые пространства), $SU(2)/\tilde{D}_{2n}$, $SU(2)/\tilde{T}$, $SU(2)/\tilde{O}$, $SU(2)/\tilde{Y}$—все размерности 3, $SU(2)/U(1)=S^2$ и $SU(2)/NU(1)=$ $=RP(2)$ размерности 2, а также нульмерное пространство $SU(2)/SU(2)$.

Взаимодействие пространств орбит и теории представлений изучалось и физиками, и математиками. По этому поводу мы отсылаем читателя к обзорам [JS 1] и [M 33a].

Определение 0.7.7. Пусть M — некоторое G-пространство и H — замкнутая подгруппа в G. Множество $(H)=\{gHg^{-1}\,|\,g\in G\}$ называется *орбитальным типом* H.

Поскольку $G_{gx}=gG_xg^{-1}$ для $x\in M$ и $g\in G$, все точки одной орбиты имеют стабилизаторы, принадлежащие одному и тому же орбитальному типу.

Определение 0.7.8. Множество $\{(G_x)\,|\,x\in M\}$ называется *орбитальной структурой* M. Орбитальная структура называется *конечной*, если она содержит лишь конечное множество орбитальных типов. Положим $M_{(H)}=\{x\in M\,|\,(G_x)=(H)\}$. Если (H_1) и (H_2) — два орбитальных типа, мы пишем $(H_1)\leqslant(H_2)$, если найдутся такие представители $H_i\in(H_i)$ этих типов, что $H_1\supset H_2$.

Теорема 0.7.9. *Если M — связное G-многообразие, а G — компактная группа Ли, то в орбитальной структуре M существует наибольший орбитальный тип (H). Он называется* главным орбитальным типом, *и множество $M_{(H)}$ открыто и плотно в M.*

Определение 0.7.10. Пусть M — произвольное G-многообразие, а G — компактная группа Ли. Пусть $N_x=TM_x/TG(x)_x$ — нормальное пространство к орбите $G(x)$ в точке x. Тогда для каждого $g\in G_x$ дифференциал отображения $g\colon M\to M$ задает автоморфизм N_x. Таким образом, получается представление σ_x: $G_x\to GL(N_x)$. Действие (G_x, N_x, σ_x) называется *срезом* в точке $x\in M$.

Читатель может проверить, что все срезы в точках одной орбиты диффеоморфны друг другу. Множество срезов для данного G-многообразия M может быть естественным образом частично упорядочено; оно называется *диаграммой срезов* для M. Если пространство орбит M/G связно, диаграмма срезов, которую мы обозначим через $\Delta(G, M)$, имеет единственный наибольший элемент $[H, \sigma]$, где σ — тривиальное представление. Если M компактно, $\Delta(G, M)$ содержит конечное число срезов. Более подробную информацию об орбитах и срезах см. в [JS 1][1]).

[1]) См. также переведенную на русский язык монографию Г. Бредона «Введение в теорию компактных групп преобразований» (М.: Наука, 1980).— *Прим. перев.*

0.8. Расслоения

Основы теории расслоений в последнее время несколько раз излагались специально для физиков. Мы не будем повторять это изложение здесь и ограничимся тем, что введем несколько основных обозначений. Главное G-расслоение над M обозначается через $P(M, G)$ с проекцией π: $P \to M$; G действует справа на P свободно и транзитивно на каждом слое $\pi^{-1}(x)$ проекции π. В окрестности U произвольной точки $x \in M$ существует локальное сечение s: $U \to P$, обладающее свойством $\pi \circ s = 1$. Для достаточно мелкого покрытия $\{U_i\}$ многообразия M существует система локальных сечений s_i: $U_i \to P$. На пересечении $U_i \cap U_j$ сечения s_i и s_j связаны равенством $s_j(x) = s_i(x) g_{ij}(x)$, где g_{ij}: $U_i \cap U_j \to G$ — переходные функции, обладающие такими свойствами:

$$g_{ii} = e \text{ на } U_i, \quad g_{ij} g_{ji} = e \text{ на } U_i \cap U_j,$$
$$g_{ij} g_{jk} g_{ki} = e \text{ на } U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Если обозначить через $\underline{G}$ пучок ростков непрерывных отображений в G, то система $\{g_{ij}\}$ является 1-коциклом, определяющим класс когомологий $\xi \in H^1(M, \underline{G})$. Дальнейшие подробности см. в [Н 22].

Если F — левое G-многообразие, а $P = P(M, G)$ — главное расслоение, то можно определить *ассоциированное расслоение* над M со слоем F. Оно обозначается через $P \times_G F = B$ (читается: расслоенное произведение над G) и определяется как факторпространство $P \times F$ по отношению эквивалентности $(pg, y) \sim (p, gy)$, $p \in P$, $g \in G$, $y \in F$. Естественная проекция $P \times F \to B$: $(p, y) \to py$ характеризуется свойством $(pg)y = p(gy)$. Проекция π': $B \to M$ определяется равенством $\pi'(py) = \pi(p)$. Таким образом, точку $p \in P$ можно рассматривать как диффеоморфизм p: $F \to F_x$: $y \to py$, где $F_x = (\pi')^{-1}(x)$ — слой в B над точкой $x = \pi(p) \in M$.

Расслоение $B(M, E, G)$ называется *векторным расслоением*, если его слой E является линейным пространством, а G действует на E как группа линейных преобразований. Таким образом, если задано главное расслоение $P(M, G)$ и линейное представление ρ: $G \to GL(E)$ группы G в векторном пространстве E, то $B = P \times_{\rho(G)} E$ становится векторным расслоением.

0.9. Пространства орбит в алгебрах Ли

Главным предметом изучения в этой книге являются дифференциально-геометрические свойства орбит в алгебрах Ли. Мы займемся этим в гл. 7. Здесь будут рассмотрены несколько примеров, чтобы дать читателю понятие об орбитах в алгебрах Ли.

Рассмотрим группу Ли $G = U(n)$, состоящую из комплексных матриц g порядка $n \times n$, удовлетворяющих условию $gg^* = 1$, где g^* — сопряженная матрица. Касательное пространство TG_e отождествляется с пространством $\mathfrak{g}$ косоэрмитовых матриц порядка n. Экспоненциальное отображение $\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} A^n/n!$ переводит $\mathfrak{g}$ в G. Каждой матрице $A \in \mathfrak{g}$ соответствует однопараметрическая подгруппа $t \mapsto \exp tA$ в G. Легко проверить, что для любой компактной группы Ли G геодезические $\gamma(t)$, проходящие через единицу, т. е. такие, что $\gamma(0) = e$, однозначно записываются в виде $\gamma(t) = \exp(tA)$, где $A \in \mathfrak{g}$.

В пространстве $\mathfrak{g}$ определено естественное скалярное произведение (задающее риманову метрику на G), а именно $\langle A, B \rangle = \operatorname{Re} \operatorname{tr} AB^*$ для $A, B \in \mathfrak{g}$. Это скалярное произведение инвариантно относительно присоединенного действия G на $\mathfrak{g}$ по формуле $\operatorname{Ad}(g)A = gAg^{-1}$, $g \in G$, $A \in \mathfrak{g}$. Чтобы убедиться в этом, положим $A' = \operatorname{Ad}(g)A$, $B' = \operatorname{Ad}(g)B$. Тогда, поскольку $A'B'^* = gAg^{-1}(gBg^{-1})^* = gAB^*g^{-1}$, мы получаем $\operatorname{tr}(A'B'^*) = \operatorname{tr}(AB^*)$, т. е. $\langle A', B' \rangle = \langle A, B \rangle$. Отметим, что длина геодезической $\gamma(t) = \exp(tA)$ от точки $e = \gamma(0)$ до точки $\exp A = \gamma(1)$ равна $|A| = \sqrt{\operatorname{tr}(AA^*)}$.

Нас интересуют орбиты $M = G \cdot A$ для присоединенного действия G на $\mathfrak{g}$. Чтобы получить пример такой орбиты, положим $G = U(n)$ и обозначим через $I_{n_1, \ldots, n_k}$ вещественную диагональную матрицу с одинаковыми первыми n_1 элементами, одинаковыми следующими n_2 элементами и т. д. $(n_1 + \ldots + n_k = n)$. Пусть $A = iI_{n_1, \ldots, n_k} \in \mathfrak{g}$. Стабилизатор точки A, т. е. подгруппа $K = \{g \in G \mid g \cdot A = A\}$, совпадает с $U(n_1) \times U(n_2) \times \ldots \times U(n_k)$. Таким образом, орбита $M = G \cdot A$ диффеоморфна G/K. Это однородное пространство обозначается через $W(n_1, \ldots, n_k) = U(n)/U(n_1) \times \ldots \times U(n_k)$ и называется *комплексным многообразием флагов*. При $k = 2$ мы получаем грассмановы многообразия, а при $n_1 = 1$, $n_2 = n - 1$ — комплексное проективное пространство.

Пусть $\mathfrak{so}(n)$ означает пространство кососимметрических матриц размера $n \times n$. Если в качестве точки $A \in \mathfrak{so}(2n)$ взять матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -I_{n_1, \ldots, n_k} \\ I_{n_1, \ldots, n_k} & 0 \end{pmatrix},$$

то орбита этой точки относительно $SO(2n)$ будет гомеоморфна $SO(2n)/U(n_1) \times \ldots \times U(n_k)$.

Если положить

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -I_{n_1,\ldots,n_k} & 0 \\ I_{n_1,\ldots,n_k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(2n+1),$$

то $SO(2n+1)$-орбита точки A будет гомеоморфна $SO(2n+1)/U(n_1)\times\ldots\times U(n_k)$.

Наконец, если взять

$$A=\begin{pmatrix} iI_{n_1,\ldots n_k} & 0 \\ 0 & -iI_{n_1,\ldots,n_k} \end{pmatrix} \in \mathfrak{sp}(n),$$

то $Sp(n)$-орбитой точки A будет $Sp(n)/U(n_1)\times\ldots\times U(n_k)$.

Максимальная абелева подгруппа в компактной группе Ли G называется *максимальным тором*. Обозначим его через T, а его алгебру Ли — через $\mathfrak{t}$. Точка $A\in\mathfrak{t}$ называется *общей* (или *точкой общего положения*), если $\mathfrak{g}_A=\{X\in\mathfrak{g}\,|\,[X,A]=0\}=\mathfrak{t}$. Орбиты общих точек представляют интерес, потому что они, как можно показать, являются орбитами максимальной размерности. Например, в случае $G=U(n)$ и $n_1=n_2=\ldots=n_k=1$ (т. е. $k=n$) точка A будет общей и $M=G\cdot A=U(n)/T$.

Для орбиты $M_A=G\cdot A$ касательное пространство в точке A имеет вид $T_A=\{Z\in\mathfrak{g}\,|\,Z=[Y,A],\ Y\in\mathfrak{g}\}=\mathrm{ad}(A)\mathfrak{g}$. Нормальное пространство задается равенством $N_A=\{Y\in\mathfrak{g}\,|\,[Y,A]=0\}$, т. е. является *централизатором* A в $\mathfrak{g}$. Для доказательства первого утверждения достаточно проверить, что $(d/dt)\,\mathrm{Ad}(\exp tY)A\,|_{t=0}=[Y,A]$ для $Y\in\mathfrak{g}$; второе утверждение вытекает отсюда, так как $\langle[X,Y],Z\rangle=-\langle Y,[X,Z]\rangle$.

Иногда мы будем рассматривать присоединенное действие подгрупп группы G на некоторых подалгебрах в $\mathfrak{g}$. Рассмотрим случай симметрического пространства G/K, где K — множество неподвижных точек инволюции σ. Тогда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ распадается в сумму $\mathfrak{g}=\mathfrak{p}+\mathfrak{k}$. Напомним, что картановской подалгеброй симметрического пространства называется максимальная подалгебра в $\mathfrak{p}$ (автоматически коммутативная). Размерность ее называется *рангом* этого симметрического пространства. Подгруппа K действует на $\mathfrak{p}$, и нас интересуют орбиты $K\cdot A$ для $A\in\mathfrak{p}$.

В качестве примера рассмотрим инволюцию σ в $U(n)$, задаваемую равенством $\sigma(X)=\bar{X}$ (комплексное сопряжение). В этом случае $K=O(n)$, а $\mathfrak{p}$ состоит из всех чисто мнимых симметрических матриц размера $n\times n$. Пусть $A=iI_{n_1},\ldots,_{n_k}\in\mathfrak{p}$. Тогда

$K/K_A = O(n)/O(n_1) \times \ldots \times O(n_k) = G(n_1, \ldots, n_k)$ — вещественное многообразие флагов.

В качестве другого примера рассмотрим многообразия Штифеля. Пусть $G = SO(n)$, где $n = 2p + q$. Определим инволюцию $X \mapsto I(p+q, p) X I(p+q, p)$ в G, где

$$I(p+q, p) = \begin{pmatrix} 1_{p+q} & 0 \\ 0 & -1_p \end{pmatrix}.$$

Тогда $K = (O(p+q) \times O(p)) \cap SO(2p+q)$. Запишем общий элемент группы K в виде

$$k = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix},$$

где X — матрица порядка $p+q$, а Y — матрица порядка p. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разлагается в сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$, причем $\mathfrak{p}$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & Z \\ -Z^t & 0 \end{pmatrix},$$

где Z — матрица размера $(p+q) \times p$.

Выберем в $\mathfrak{p}$ точку

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_p \\ 0 & 0 & 0 \\ -1_p & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда орбита точки P под действием K имеет вид K/K_P, где

$$K_P = \left\{ \begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 \\ 0 & 0 & X \end{pmatrix} \in SO(2p+q) \right\}.$$

Эта группа изоморфна $O(p) \times SO(q)$. Проверим, что K/K_P изоморфно $V_{p+q,\,p}$. Действительно, подгруппа $SO(p)$ является нормальной и в K, и в K_P, причем $K/SO(p) = SO(p+q)$, $K_P/SO(p) = SO(q)$. Поэтому

$$K/K_P = SO(p+q)/SO(p) = V_{p+q,\,p}.$$

0.10. Теория рассеяния и статистическая механика

Все основные примеры в этой обзорной главе до сих пор относились к теории дифференциальных операторов на компактных многообразиях. Многие физические задачи требуют, однако, изучения операторов на некомпактных пространствах. Один из простейших примеров такой задачи — теория рассеяния для оператора Шрёдингера на вещественной прямой. Эта теория рассеяния составила основу первоначального вывода формулы следа Сельберга на некомпактных пространствах. Позднее спектральная теория применялась к изучению формулы Сельберга в работах Л. Д. Фаддеева, Лакса и Филлипса и др. Мы займемся этим в гл. 18. Здесь для удобства читателя мы приведем начальные сведения из теории рассеяния.

Рассмотрим одномерную систему с гамильтонианом $H = (1/2m)p^2 + V(x)$. Уравнение Шрёдингера имеет вид

$$\frac{h^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + (E - V(x))\Psi = 0.$$

Полагая $q(x) = 2mV(x)/h^2$ и $(hk)^2 = 2mE$, мы приходим к уравнению $(H - k^2)\Psi = 0$, где $H = H_0 + q(x)$ и $H_0 = -d^2/dx^2$. Если $q(x)$ — гладкая функция с компактным носителем, сосредоточенная на отрезке $[A, B]$, то при $x \to \infty$ одно из решений, которое мы обозначим через Ψ_+, будет вести себя как e^{ikx}, где $k \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. При $x \to -\infty$ функция $\Psi_+(x)$ должна иметь асимптотику вида $a(k)e^{ikx} + b(k)e^{-ikx}$, где $a(k)$ и $b(k)$ — голоморфные функции на $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Производная $d\Psi_+/dx$ будет тогда иметь асимптотику $ik(ae^{ikx} - be^{-ikx})$. Умножая равенство $(H - k^2)\Psi = 0$ на $\overline{\Psi}$ и равенство $(H - k^2)\overline{\Psi} = 0$ на Ψ, мы приходим к соотношению (при $k^2 \in \mathbf{R}$)

$$\frac{d}{dx}\left(\overline{\Psi}\frac{d\Psi}{dx} - \Psi\frac{d\overline{\Psi}}{dx}\right) = 0,$$

т. е.

$$\det\begin{vmatrix} \overline{\Psi} & \Psi \\ \dfrac{d\overline{\Psi}}{dx} & \dfrac{d\Psi}{dx} \end{vmatrix} = \text{const}.$$

Этот определитель Вронского имеет для Ψ_+ при $x \to \infty$ значение $2ik$, а при $x \to -\infty$ значение $2ik(a\bar{a} - b\bar{b})$. Поэтому $|a|^2 - |b|^2 = 1$, откуда $a \neq 0$. Аналогично можно рассмотреть решение Ψ_- уравнения $(H - k^2)\Psi = 0$, которое при $x \to -\infty$ равно e^{-ikx}, а при $x \to +\infty$ имеет вид $a_-(k)e^{-ikx} + b_-(k)e^{ikx}$. Так как определитель Вронского для двух решений уравнения $(H - k^2)\Psi = 0$ должен быть константой, мы получаем, во-первых, равенство $a_-(k) = a(k)$, во-вторых, условие унитарности на матрицу рассеяния

$$S(k) = \frac{1}{a(k)}\begin{pmatrix} 1 & b_-(k) \\ b(k) & 1 \end{pmatrix}$$

при $k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ и, в-третьих, равенство $S(k) = \overline{S(-k)}$. Наконец, единственными нулями функции $a(k)$ в области $\operatorname{Im} k \geqslant 0$

являются чисто мнимые числа вида $i\mu_l$, $\mu_l > 0$, для которых уравнение $(H + \mu_l^2)\Psi = 0$ имеет нетривиальное квадратично интегрируемое решение. В этом случае мы полагаем $c_l = \| \Psi_+(\cdot, i\mu_l) \|_{L^2}^{-1}$.

Оператор Шрёдингера H существенно самосопряжен. Он имеет конечное число простых отрицательных собственных значений $-\mu_1^2, \ldots, -\mu_n^2$ и (двукратный) непрерывный спектр $[0, \infty)$.

Мы видели, что для вещественных k функция $a(k)$ не обращается в нуль. Поэтому, заменяя Ψ_+ на Ψ/a, мы получаем решение $\Psi(x)$ с асимптотическим поведением

$$\Psi(x) \sim e^{ikx} + r_+(k) e^{-ikx} \text{ при } x \to -\infty,$$
$$\Psi(x) \sim t(k) e^{ikx} \text{ при } x \to +\infty,$$

где $t(k) = 1/a$, $r_+(k) = b/a$. Из постоянства определителя Вронского вытекает, что $|r_+|^2 + |t|^2 = 1$. Число $|t|^2$ интерпретируется как вероятность того, что частица, приходящая слева, преодолеет потенциальный барьер и уйдет вправо, а число $|r_+|^2$ — как вероятность отражения от потенциального барьера.

Обратная задача теории рассеяния состоит в восстановлении потенциала $q(x)$ по данным рассеяния $r_-(k) = b_-/a$ и (μ_l, c_l), $l = 1, 2, \ldots, n$. Для определенного класса потенциалов эта задача разрешима.

Теория рассеяния и квантовая статистическая механика связаны следующим образом. В противоположность рассмотренным выше примерам систем статистической механики в теории рассеяния гамильтониан H имеет непрерывный спектр, а оператор $\rho(\beta) = e^{-\beta H}$ не имеет следа. Однако можно показать, что оператор $e^{-\beta H} - e^{-\beta H_0}$ является ядерным (т. е. имеет корректно определенный след). А именно справедливо равенство

$$Z(\beta) = \operatorname{tr}\left(e^{-\beta H} - e^{-\beta H_0}\right) = \sum_{l=1}^{n} e^{\beta\mu_l^2} + \frac{1 - \det S(0)}{4} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-\beta\alpha^2} \operatorname{tr}\left(\overline{S(\alpha)}\, S(\alpha)^{-1}\right) d\alpha.$$

В квантовой статистической механике малые квантовые поправки при высокой температуре даются разложением Вигнера — Кирквуда. Это разложение позволяет выразить $\operatorname{tr}(e^{-\beta H})$ в виде степенного ряда по $\hbar^2 (d/dx)^2$; другими словами, кинетическая энергия рассматривается как малая величина по сравнению с потенциальной энергией. Квантовые поправки связаны с вычислением коэффициентов этого разложения и позволяют найти асимптотику при $\hbar \to 0$. Наш подход состоит в том, чтобы не заставлять $\hbar$ стремиться к нулю, когда изучается высокотемпературный предел при $\beta \to 0$. В частности, высокотемпературная асимптотика функции распределения $Z(\beta)$ может быть задана равенством

$$Z(\beta) = (4\pi\beta)^{-1/2} \sum_{j=1}^{\infty} a_j \beta^j, \qquad (*)$$

где a_j — интегралы от некоторых многочленов от q, q' и т. д. Например,

$$a_1 = -\int_{-\infty}^{\infty} q(x)\,dx, \qquad a_2 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} q^2(x)\,dx,$$
$$a_3 = -\frac{1}{6}\int_{-\infty}^{\infty}\left(q^3(x) + \frac{1}{2}q'(x)^2\right)dx, \ \ldots . \qquad (**)$$

Сравним этот результат со вторым вириальным коэффициентом, полученным методом Вигнера — Кирквуда. А именно

$$B_2 = \lim_{\hbar \to 0}\left\{-\left(\frac{4\pi\hbar}{2!}\right)^{1/2} \operatorname{tr}\left(e^{-\beta H} - e^{-\beta H_0}\right)\right\} =$$
$$= -\frac{1}{2!}\int_0^{\infty} \mathrm{d}r\left(e^{-\beta q(r)} - 1\right) = \frac{\beta}{2}\int_0^{\infty} q(r)\,\mathrm{d}r + o(\beta).$$

Здесь $H_0 = (\hbar^2/2\mu)\nabla^2$, μ — приведенная масса двух взаимодействующих частиц, а $q(r)$ — потенциал взаимодействия между ними.

Функционалы a_j в соотношениях $(*)$, $(**)$ связаны с другой актуальной областью физики — теорией уравнения Кортевега — де Фриза. Рассмотрим билинейную антисимметричную форму на пространстве Шварца $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, заданную формулой

$$\Omega(f_1, f_2) = \frac{1}{2}\iint_{x \leqslant y}\left(f_1(x) f_2(y) - f_1(y) f_2(x)\right) dx\,dy.$$

Эта форма определяет на $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ симплектическую структуру. Как мы увидим ниже, на симплектическом многообразии каждой гладкой функции F соответствует гамильтоново векторное поле X_F. В нашем случае это поле имеет вид

$$X_F(q)(x) = \frac{d}{dx} G_F(q)(x), \text{ где } G_F = \sum_{i=0}^{\infty}\left(-\frac{d}{dx}\right)^i \frac{\partial P}{\partial q^{(i)}},$$

если $F(q)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} P(q, q', \ldots, q^{\alpha})\,dx$, где P — некоторый многочлен от $\alpha+1$ переменных с нулевым свободным членом. Поле X_F удовлетворяет соотношению $\Omega(X_F, q)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_F q\,dx$. Кроме того, на пространстве гладких функций на $\mathscr{S}(\mathbf{R})$ определен аналог скобки Пуассона $\{\ ,\ \}$. Объектом изучения становится эволюционное уравнение $dq/dt=X_F(q)$. Например, при $F(q)=a_2(q)=$ $=(1/2)\int q^2\,dx$ это уравнение принимает вид $\partial q/\partial t=\partial q/\partial x$, а при $F(q)=-3a_3(q)=(1/2)\int[q^3+q'^2/2]\,dx$ — вид $\partial q/\partial t=$ $=3q(\partial q/\partial x)-\partial^3 q/\partial x^3$, т. е. превращается в уравнение Кортевега — де Фриза (уравнение КдФ). Замечательная связь между уравнением КдФ и теорией рассеяния или квантовой статистической механикой состоит в том, что функционалы $a_j(q)$ образуют систему первых интегралов в инволюции для уравнения КдФ, т. е. $\{a_i, a_j\}=0$ для всех i и j. Можно показать, что $r_-(k)(t)=r_-(k)(0)e^{4ik^3t}$, $\mu_l(t)=\mu_l(0)$, $c_l(t)=c_l(0)e^{2\mu_l^3 t}$. Эти равенства показывают полную интегрируемость уравнения КдФ.

0.11. Квантовая теория поля

Познакомим вкратце читателя с теми вопросами квантовой теории поля, о которых пойдет речь в гл. 19. Рассмотрим скалярное поле с лагранжианом

$$L=-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi-\frac{1}{2}\xi R\varphi^2-\frac{1}{2}m^2\varphi^2,$$

где R — скалярная кривизна пространства-времени, ξ — вещественное число, а m — масса. Здесь мы пользуемся системой единиц, в которой $\hbar=c=1$, а также некоторыми обозначениями, принятыми в физике. Уравнение поля, соответствующее L, имеет вид

$$-g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi+(m^2+\xi R)\varphi=0,$$

где ∇_μ — ковариантная производная. Функция Грина $G(x, x')$ определяется как решение уравнения

$$(-\nabla^\mu\nabla_\mu+\xi R+m^2)\,G(x, x')=(-g(x))^{-1/2}\delta(x-x').$$

Если интерпретировать $G(x, x')$ как матричный элемент некоторой континуальной матрицы,

$$G(x, x')=\langle x|G|x'\rangle,$$

и обозначить через H обратную матрицу, то будет справедливо равенство $G=H^{-1}=\int\limits_0^\infty i\,ds\,e^{-isH}$, или

$$G(x,\ x')=\int\limits_0^\infty i\,ds\,\langle x|\,e^{-isH}\,|x'\rangle. \qquad (*)$$

Введем следующее обозначение: $|x, s\rangle = e^{isH}|x\rangle$; тогда величина $\Psi(x,\ s)=\langle x,\ s|\Psi\rangle$ удовлетворяет «уравнению Шрёдингера»

$$\frac{i\partial\Psi}{\partial s}=H\Psi,$$

где $H(x)=-\nabla^\mu\nabla_\mu+\xi R+m^2$. Это уравнение описывает фиктивную частицу с массой 1/2, движущуюся в четырехмерном пространстве с потенциалом $\xi R+m^2$. Параметр s играет роль времени. Поскольку он не меняется при преобразовании координат x_μ, уместно назвать его собственным временем.

Подынтегральное выражение в $(*)$ записывается в виде $\langle x, s|x', 0\rangle$, и задача сводится к решению уравнения

$$i\frac{\partial}{\partial s}\langle x,\ s\,|\,x',\ 0\rangle=[-\nabla_\alpha\nabla^\alpha+\xi R+m^2]\,\langle x,\ s\,|\,x',\ 0\rangle \qquad (**)$$

с граничным условием

$$\lim_{s\to 0}\langle x,\ s\,|\,x',\ 0\rangle=(-g)^{1/2}\,\delta(x-x').$$

В пространстве Минковского, где

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}-1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1\end{pmatrix},$$

решение $(**)$ легко находится в виде

$$\langle x,\ s\,|\,x',\ 0\rangle=\frac{i}{(4\pi is)^2}\,e^{-im^2s}\exp\left(\frac{i}{4s}\,g_{\alpha\beta}\,(x^\alpha-x'^\alpha)(x^\beta-x'^\beta)\right)=$$

$$=\frac{i}{(4\pi is)^2}\,e^{-im^2s}\exp\left(\frac{i\tau^2}{4s}\right),$$

где

$$\tau=\int\limits_0^s ds'\left(g_{\alpha\beta}\,\frac{dx^\alpha}{ds'}\,\frac{dx^\beta}{ds'}\right)^{1/2}$$

— собственная длина геодезической из x в x'.

Вводя нормальные координаты в окрестности точки x (т. е. $y^\mu = \tau\xi^\mu$, где $\xi^\mu = (dx^\mu/d\tau)|_{x=x'}$ — касательный вектор к геодезической в точке x'), мы получим локально инерциальную систему в точке x'. Можно предполагать, что в точке x' метрика в нормальных координатах имеет вид $g_{\mu\nu}(0) = \eta_{\mu\nu}$. Запишем $\langle x, s | x', 0\rangle$ в форме φU, где $\varphi = i(4\pi i s)^{-2} \exp(-im^2 s) \exp(i\tau^2/4s)$ не зависит от ξ^μ. Тогда функция $F = (-g(x))^{1/4} U(x, x'; is)$ должна удовлетворять уравнению

$$i\frac{\partial F}{\partial s} = -(-g)^{1/4} \nabla^\mu \nabla_\mu \left[(-g)^{1/4} F\right] + \xi R F - \frac{i\tau}{s}\frac{\partial F}{\partial \tau}. \qquad (***)$$

Один из способов решить это уравнение состоит в том, чтобы разложить F в окрестности $s = 0$:

$$F(x, x'; is) = 1 + is f_1(x, x') + (is)^2 f_2(x, x') + \ldots$$

и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях s. Это дает систему равенств

$$f_1(x, x') = L(1) - \xi R(x) - \tau \frac{\partial f_1}{\partial \tau}(x, x'),$$

$$f_2(x, x') = \frac{1}{2}\left[L(f_1) - \xi R(x) f_1(x, x') - \tau \frac{\partial f_2}{\partial \tau}(x, x')\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

где

$$L(f) = (-g)^{-1/4} \partial_\mu \left\{\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}(x)\, \partial_\nu \left[(-g(x))^{-1/4} f(x, x')\right]\right\}$$

и $\partial_\mu = \partial/\partial y^\mu$. Нам нужно, чтобы совпали пределы $f(x)$ при $x \to x'$, т. е. при $y \to 0$. Один из подходов здесь — разложение g в ряд Тейлора в нормальных координатах. В этом случае $(-g)^{1/4} = 1 + (1/12) R_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta + O(y^3)$ и $\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + O(y^2)$. Поэтому

$$\lim_{y \to 0} L(1) = \frac{1}{6} \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{1}{6} R.$$

Поскольку $\tau = 0$ при $y = 0$, мы получаем $f(x, x') = (1/6 - \xi) R(x')$.

Дзета-функция возникает естественным образом в вопросах квантовой статистики. Хокинг и Даукер ввели понятие обобщенной ζ-функции в теории поля. А именно если $H|\varphi_n\rangle = \lambda_n |\varphi_n\rangle$, то при условии полноты $\sum_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n| = 1$ формально выполняется равенство

$$G^\nu = H^{-\nu} = \sum_n \frac{|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|}{\lambda_n^\nu}.$$

Поэтому можно определить обобщенную ζ-функцию

$$\zeta(\nu) = \operatorname{tr} G^{\nu} = \sum_n \langle \varphi_n | G^{\nu} | \varphi_n \rangle = \sum_n \lambda_n^{-\nu}.$$

Формальная выкладка приводит к соотношению

$$\zeta(\nu) = \Gamma(\nu)^{-1} \int d^4x \sqrt{-g} \int_0^{\infty} i\, ds\, (is)^{\nu-1} \langle x | e^{-isH} | x \rangle.$$

Поскольку

$$\langle x | e^{-isH} | x \rangle = e^{-im^2 s} \frac{i}{4\pi s^2} [1 + isf_1(x, x) + (is)^2 f_2(x, x) + \ldots],$$

мы получаем

$$\zeta(0) = \frac{i}{4\pi^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[f_2(x, x) - m^2 f_1(x, x) + \frac{1}{2} m^4 \right].$$

В теории поля тензор энергии-импульса $T^{\mu\nu}(x)$ связан с действием

$$S = \int d^4x L = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g}\, \varphi(x) H(x) \varphi(x)$$

равенством

$$T^{\mu\nu}(x) = \frac{2}{\sqrt{-g(x)}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}(x)}.$$

Роль функции распределения в квантовой теории поля играет величина $Z = \int d[\varphi]\, e^{iS} = e^{iW}$. Полагая, что $H|\varphi_n\rangle = \lambda_n |\varphi_n\rangle$ — полный набор собственных функций, нормированных условием

$$\int d^4x \sqrt{-g}\, \varphi_n \varphi_m(x) = \delta_{mn},$$

мы получаем, что

$$S = -\frac{1}{2} \int \varphi H \varphi \sqrt{-g}\, d^4x = -\frac{1}{2} \sum c_n^2 \lambda_n,$$

где $\varphi = \sum c_n \varphi_n$. Таким образом, суммирование в статсумме Z превращается в интегрирование по всем c_n, т. е.

$$\int d[\varphi]\, e^{iS} = \mu \prod_n \int dc_n \exp\left(-\frac{1}{2} c_n^2 \lambda_n\right) =$$

$$= \left\{ \prod_n \left[\frac{2\pi\mu^2}{i\lambda_n} \right] \right\}^{1/2} = \det\left(\frac{iH}{2\pi\mu^2}\right)^{-1/2}.$$

Отсюда

$$W = i \ln \det\left(\frac{iH}{2\pi\mu^2}\right) = \frac{i}{2} \zeta'(0) - i\zeta(0) \ln(-2\pi i\mu^2).$$

Вычисляя вариационные производные S, получаем

$$\int d^4x\,\sqrt{-g}\,\langle T^\mu_\mu\rangle = -i\zeta(0) = \frac{1}{4\pi^2}\int d^4x\,\sqrt{-g}\,f_2(x,\ x).$$

Задачи

Упражнение 0.1. Показать, что для конечной группы G число классов эквивалентности неприводимых представлений совпадает с числом классов сопряженных элементов; показать, что сумма квадратов размерностей этих классов равна порядку G.

Упражнение 0.2. Показать, что многообразие всех минимальных геодезических, соединяющих e и $-e$ в группе $SU(2m)$, гомеоморфно грассманову многообразию $G_m(\mathbf{C}^{2m})$ всех m-мерных подпространств в $\mathbf{C}^{2m}$.

Упражнение 0.3. Показать, что функция Грина для уравнения

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m^2\omega^2x^2\right)\Psi = E\Psi$$

имеет вид

$$G(x,\ x';\ E) = \sqrt{\frac{m}{\omega\pi\hbar^3}}\,\Gamma(-\nu)\,D_\nu(-y_<)\,D_\nu(y_>),$$

где $y = x\sqrt{2m\omega/\hbar}$, $y_< = \min(y,\ y')$, $y_> = \max(y,\ y')$, $E/\hbar\omega = \nu + 1/2$, а $D_\nu(y)$ — так называемая функция параболического цилиндра. Показать, что полюсы G задаются полюсами $\Gamma(-\nu)$, которые в свою очередь определяют уровни энергии $E = \hbar\omega(\nu + 1/2)$. Каковы вычеты в этих точках?

Упражнение 0.4. Показать, что функция Грина для задачи Кеплера (т. е. для радиального уравнения Шрёдингера для атома водорода)

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) + \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r}\right)\Psi = E\Psi,$$

где $A = (\hbar^2/2m)\,l(l+1)$, $l = 0, 1, \ldots$, имеет вид

$$G(r,\ r';\ E) = \frac{m}{\hbar^2k}\frac{\Gamma(s-v+1)}{\Gamma(2s+2)}(rr')^{-1}M_{v,\,s+1/2}(2kr_<)\,W_{v,\,s+1/2}(2kr_>).$$

Здесь $M_{v,\,s+1/2}$, $W_{v,\,s+1/2}$ — функции Уиттекера, $k = -2mE/\hbar$, $v = mB/\hbar^2k$, $s(s+1) = 2mA/\hbar^2$. Показать, что полюсы $\Gamma(s - v + 1)$ определяют спектр связанных состояний

$$E = -\frac{2mB}{\hbar^2}\left(2n + 1 + \sqrt{\frac{8mA}{\hbar^2} + 1}\right)^{-2}.$$

Упражнение 0.5. С помощью формулы суммирования Эйлера — Маклорена

$$\sum_{v=0}^{n} f(v) = \int_0^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}\{f(n) - f(0)\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\lambda} (-1)^{k-1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left\{ f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(0) \right\} + R_\lambda,$$

где

$$B_{2k} = 4k \int_0^\infty \frac{t^{2k-1}\,dt}{e^{2\pi t} - 1}$$

— число Бернулли, а остаток R_λ имеет вид

$$R_\lambda = \frac{B_{2\lambda+2}}{(2\lambda+2)!} \sum_{v=0}^{n} f^{(2\lambda+1)}(v + \theta), \quad 0 < \theta < 1,$$

показать, что

$$F(\sigma, \bar{\sigma}) = \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) e^{-\sigma j(j+1)} + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{j} (2j+1) e^{-\sigma j(j+1) - \bar{\sigma} n^2}$$

имеет асимптотическое разложение

$$F(\sigma, \bar{\sigma}) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{\pi}}{a^{3/2}}\left(\frac{\sigma}{4} + \frac{\bar{\sigma}}{3}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{a^{5/2}}\left(\frac{\sigma^3}{32} + \frac{\sigma^2\bar{\sigma}}{15} + \frac{\sigma\bar{\sigma}^2}{12}\right) + \ldots,$$

где $a = \sigma + \bar{\sigma}$.

Упражнение 0.6. Пусть $F(\sigma) = e^{\sigma/4} \sum\limits_{j=0}^{\infty} (2j+1)^2 e^{-\sigma(j+1/2)^2}$. Замечая, что

$$F(\sigma) = -2e^{\sigma/4} \frac{d}{d\sigma} \vartheta_2(0, e^{-\sigma}),$$

где

$$\vartheta_2(z, q) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} \cos(2n+1) z,$$

использовать тождество $\vartheta_2(0, e^{-\sigma}) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{-\pi^2 n^2 \sigma}$ для доказательства равенства

$$F(\sigma) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma^{3/2}} e^{\sigma/4} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma^{3/2}} + \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}} + \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\sigma}}{32} + \frac{\sqrt{\pi}\,\sigma^{3/2}}{384} + \ldots$$

Упражнение 0.7 (ангармонический осциллятор). Рассмотрим осциллятор с гамильтонианом $H = c^{4/3}(-d^2/dx^2 + x^4)$ и спектром $\{\lambda_n\}$. Показать, что

$$Z(\beta) = \operatorname{tr}\exp(-\beta H) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta^{i_n},$$

где $i_n = 3(2n-1)/4$, $a_0 = 3\Gamma(3/4)/8\pi$, $a_1 = -\Gamma(1/4)/6, \ldots$. Показать, что дзета-функция этого осциллятора мероморфна на плоскости $\mathbf{C}$ с простыми полюсами в точках $-i_n$ и вычетами $a_n/\Gamma(-i_n)$ в этих точках. Показать, что $\zeta(-n) = 0$ для натуральных n.

Обозначим через P оператор пространственного отражения (четности) и рассмотрим альтернированную спектральную функцию

$$Z_P(\beta) = \operatorname{tr}(P\exp(-\beta H)) = \sum (-1)^n \exp(-\beta\lambda_n).$$

Показать, что $Z_P(\beta) \sim \sum d_n \beta^{3n}/(3n)!$, где $d_0 = 1/2$, $d_1 = -9c^4/4, \ldots$.

Упражнение 0.8. Рассмотрим группу $SU(2)$ с однопараметрическими подгруппами $t \to g(t)$, удовлетворяющими условию $g(t+s) = g(t)g(s)$:

$$g_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t/2) & i\sin(t/2) \\ i\sin(t/2) & \cos(t/2) \end{pmatrix},$$

$$g_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(t/2) & -\sin(t/2) \\ \sin(t/2) & \cos(t/2) \end{pmatrix},$$

$$g_3(t) = \begin{pmatrix} e^{it/2} & 0 \\ 0 & e^{-it/2} \end{pmatrix}.$$

Показать, что матрицы $a_i = dg_i(t)/dt|_{t=0}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[a_1, a_2] = a_3, \quad [a_2, a_3] = a_1, \quad [a_3, a_1] = a_2.$$

Пусть $f(u)$ — функция на $SU(2)$ и $R(g(t))f(u) = f(ug(t))$. Операторы $\hat{A}_i$ определяются равенствами

$$\hat{A}_i = \frac{d}{dt} R(g_i(t)) f(u)|_{t=0}.$$

Если обозначить через $\varphi(t)$, $\vartheta(t)$, $\psi(t)$ углы Эйлера, параметризующие элемент $ug(t)$, то

$$\frac{df}{dt}(ug(t)) = \frac{\partial f}{\partial\varphi}\varphi'(0) + \frac{\partial f}{\partial\vartheta}\vartheta'(0) + \frac{\partial f}{\partial\psi}\psi'(0).$$

(Например, если u имеет углы Эйлера φ, ϑ и ψ, то $ug_3(t)$ имеет углы Эйлера φ, ϑ и $\psi+t$.) Отсюда

$$\hat{A}_{g(t)}=\varphi'(0)\frac{\partial}{\partial\varphi}+\vartheta'(0)\frac{\partial}{\partial\vartheta}+\psi'(0)\frac{\partial}{\partial\psi}.$$

В частности, $\hat{A}_3=\hat{A}_{g_3(t)}=\partial/\partial\psi$. Показать, что

$$\hat{A}_1=\cos\psi\frac{\partial}{\partial\vartheta}+\frac{\sin\psi}{\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\operatorname{ctg}\vartheta\sin\psi\frac{\partial}{\partial\psi},$$

$$\hat{A}_2=-\sin\psi\frac{\partial}{\partial\vartheta}+\frac{\cos\psi}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\operatorname{ctg}\vartheta\cos\psi\frac{\partial}{\partial\psi}.$$

Показать, что

$$\Delta=\hat{A}_1^2+\hat{A}_2^2+\hat{A}_3^2=$$
$$=\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-2\cos\vartheta\frac{\partial^2}{\partial\varphi\,\partial\psi}+\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\right).$$

Оператор Δ называется оператором Лапласа на группе $SU(2)$.

Упражнение 0.9. Пусть $z_0, \ldots, z_n$ — однородные координаты в $CP(n)$. Многообразие $Q(n-1)$ в $CP(n)$, определяемое уравнением

$$\sum_{i=0}^{n} z_i^2=0,$$

называется $n-1$-мерной комплексной квадрикой. Показать, что $Q(n-1)$ изометрично $SO(n+1)/SO(n-1)$. Показать, что многообразие Штифеля $SO(n+1)/SO(2)\times SO(n-1)$ является главным расслоением со слоем окружность над $Q(n-1)$. (Мы увидим ниже, что $Q(n-1)$ — компактное кэлерово многообразие и многообразие Ходжа. Детали можно узнать из книги Черна «Комплексные многообразия без теории потенциала» (Chern S. S. Complex Manifolds without Potential Theory. — New York: van Nostrand, 1965)[1]).

Упражнение 0.10. Пусть $H=(1/2m)(p^2+m^2\omega^2q^2)$ — гамильтониан гармонического осциллятора с собственными функциями

$$\varphi_n(q)=(m\omega/\pi\hbar)^{1/4}(n!)^{-1/2}D_n\left(q\sqrt{2m\omega/h}\right).$$

Заметим, что тождество Мелера утверждает, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(q)\overline{\varphi_n(Q)}e^{-i(n+1/2)(t-T)}=S(q,\ Q,\ t-T)=$$
$$=\left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\vartheta}\right)^{1/2}\exp\left[\frac{im}{2\hbar\sin\vartheta}\{(q^2+Q^2)\cos\vartheta\, 2qQ\}\right],$$

[1]) См. также Чжэнь Шэн-шэнь. Комплексные многообразия. — М.: ИЛ, 1961. — *Прим. перев.*

где $\vartheta = \omega(t - T)$. Эту величину физики записывают в форме $\langle q | Q \rangle$. Показать, что функция S удовлетворяет соотношению

$$S(q, q_1, t - t_1) = \int S(q, Q, t - T)\, S(Q, q_1, T - t_1)\, dQ.$$

Показать, что $S(q, Q, t - T)$ удовлетворяет уравнению Шрёдингера, соответствующему гамильтониану H (т. е.

$$H(q, (\hbar/i)(\partial/\partial q))\langle q | Q \rangle + (\hbar/i)(\partial/\partial t)\langle q | Q \rangle = 0).$$

(Ср. Whittaker E. T. On Hamilton's Principal Function in Quantum Mechanics. — Proc. Roy. Soc. Edinburgh A LXI (1940/41)).

Глава 1 Теория представлений

1.1. Основные понятия теории представлений

Определение 1.1.1. *Унитарным представлением* называется отображение U группы G в множество унитарных операторов в гильбертовом пространстве H, обладающее свойством $U(g_1g_2) = U(g_1)U(g_2)$ для всех $g_1, g_2 \in G$ и такое, что для любого фиксированного $f \in H$ функция $g \mapsto U(g)f$ из G в H непрерывна.

Определение 1.1.2. Замкнутое подпространство $M \subset H$ называется *инвариантным*, если $U(g)f$ лежит в M для всех $g \in G$ и $f \in M$.

Определение 1.1.3. Представление, получаемое ограничением функции U на замкнутую подгруппу $K \subset G$, обозначается через $U|K$ и называется *представлением ограничения.*

Определение 1.1.4. Для заданной пары представлений (U_i, H_i), $i = 1, 2$, группы G *прямой суммой* называется представление $U = U_1 \oplus U_2$, действующее в $H_1 \oplus H_2$ по формуле $U(g)(f_1, f_2) = (U_1(g)f_1,\ U_2(g)f_2)$.

Определение 1.1.5. Представление (U, H), не имеющее инвариантных подпространств, кроме $\{0\}$ и H, называется *неприводимым.*

Определение 1.1.6. Два представления (U_i, H_i) группы G называются *эквивалентными*, если существует такой унитарный оператор V: $H_1 \to H_2$, что $VU_1(g) = U_2(g)V$ для всех $g \in G$. Такой оператор V называется *сплетающим оператором.* Пространство всех (не обязательно унитарных) сплетающих операторов для U_1 и U_2 обозначается через $\mathrm{Hom}_G(U_1, U_2)$.

Определение 1.1.7. Если представление U эквивалентно прямой сумме неприводимых представлений, то оно называется *вполне приводимым* [1]).

Определение 1.1.8. Если представление U действует в конечномерном пространстве H, то $\dim H$ называется *степенью* (или *размерностью*) представления U.

---

[1]) Обычно вполне приводимыми называют более широкий класс представлений, допускающих разложение в непрерывную сумму неприводимых компонент. — *Прим. перев.*

Определение 1.1.9. Важным объектом изучения является множество классов эквивалентности неприводимых унитарных представлений группы G. Это множество обозначается через $\hat{G}$.

Темой геометрического квантования является описание $\hat{G}$ или некоторых частей этого множества в дифференциально-геометрических терминах, связанных с классической механикой. Множество $\hat{G}$ часто устроено очень просто.

Пример 1.1.10. Для группы вращений $SO(2)$, состоящей из матриц вида

$$g_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

неприводимые представления нумеруются целыми числами и имеют вид $U_n(g_\varphi) = e^{in\varphi}$. Таким образом, $\widehat{SO(2)} = \mathbf{Z}$.

Пример 1.1.11. Группа вращений $SO(3)$ состоит из всех вещественных матриц g размера 3×3, обладающих свойствами $g^t g = 1$, $\det g = 1$. Накрывающей группой для $SO(3)$ является группа $SU(2)$, состоящая из матриц

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},$$

где $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Неприводимые унитарные представления $SU(2)$ обозначаются через $D^{(u)}$ и реализуются в $(2u+1)$-мерном пространстве многочленов степени $\leqslant 2u$ от z: $f(z) = \sum_{j=0}^{2u} c_j z^j$. Элемент $g \in SU(2)$ действует на $f \in D^{(u)}$ по формуле

$$D^{(u)}(g) f(z) = (bz + \bar{a})^{2u} f\left(\frac{az - \bar{b}}{bz + \bar{a}}\right).$$

Известно, что множество $\widehat{SU(2)}$ состоит из классов представлений $D^{(u)}$ для $u = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$, в то время как $\widehat{SO(3)}$ совпадает с подмножеством, соответствующим $u = 0, 1, 2, \ldots$.

1.2. Индуцированные представления

Стандартным приемом построения унитарных представлений является метод индуцирования.

Определение 1.2.1. Пусть K — замкнутая подгруппа в достаточно хорошей группе G. Для заданного представления $(L, H(L))$ группы K рассмотрим множество F функций f: $G \to H(L)$, обладающих свойствами

(i) $f(kg) = L(k) f(g)$ для $k \in K$, $g \in G$;

(ii) отображение $g \to f(g)$ — борелевская функция и

$$\int_{G/K} (f(g), f(g))_{H(L)} d\mu < \infty.$$

Здесь предполагается, что на пространстве G/K имеется инвариантная мера μ. Более общий случай квазиинвариантной меры см. в [V 1].

Множество F снабжается скалярным произведением

$$(f_1, f_2) = \int_{G/K} (f_1(g), f_2(g))_{H(L)} d\mu,$$

превращающим его в гильбертово пространство. Формула

$$(U^L(g_1)f)(g_2) = f(g_2 g_1)$$

определяет унитарное представление (U^L, F) группы G в пространстве F. Оно называется *индуцированным представлением.*

Простейший пример индуцированного представления получается в случае $K = \{e\}$, $L = I$ (тривиальное представление).

Определение 1.2.2. Представление U^I называется *правым регулярным представлением.*

Отметим два свойства индуцированных представлений.

Теорема 1.2.3. *Если L и M — представления одной и той же замкнутой подгруппы $K \subset G$, то $U^{L \oplus M} \simeq U^L \oplus U^M$.*

Таким образом, U^L может быть неприводимым, только если L неприводимо. Однако даже для неприводимого L представление U^L может быть приводимым. Например, регулярное представление U^I никогда не бывает неприводимым (если только группа G не тривиальна). Структура регулярного представления легко выясняется с помощью принципа двойственности Фробениуса, который мы сейчас сформулируем.

Определение 1.2.4. Если задано неприводимое представление T группы G, то для любого вполне приводимого представления U число неприводимых компонент в U, эквивалентных T, называется *кратностью* T в U. Это число совпадает с $\dim \operatorname{Hom}_G(U, T)$.

Принцип двойственности Фробениуса связывает операции ограничения и индуцирования следующим образом.

Теорема 1.2.5 (принцип двойственности Фробениуса). *Пусть L — неприводимое унитарное представление подгруппы $K \subset G$, а U — неприводимое унитарное представление G. Тогда*

$$\dim \operatorname{Hom}_G(U, U^L) = \dim \operatorname{Hom}_K(L, U|K).$$

Если G — компактная группа и $K=\{e\}$, то мы получаем

Следствие 1.2.6. $\dim \mathrm{Hom}_G(U, U^I) = \dim H(U)$.

Это следствие является также частью теоремы Петера — Вейля, о которой будет сказано ниже.

Пример 1.2.7. Регулярное представление естественно возникает в квантовой механике. А именно предположим, что квантовая система задана с помощью гамильтониана H, действующего в гильбертовом пространстве волновых функций $\psi \in L^2(G)$. Как отмечалось выше, регулярное представление $(U, L^2(G))$ всегда приводимо. Предположим теперь, что G является группой симметрии гамильтониана H, т. е.

$$U(g)\mathsf{H} = \mathsf{H}U(g) \text{ для всех } g \in G.$$

В этом случае собственные подпространства

$$E(\lambda) = \{\psi \in L^2(G) \mid \mathsf{H}\psi = \lambda\psi\}$$

инвариантны относительно G. Эти пространства не обязательно неприводимы. Скажем, что группа G является *полной группой симметрии*, если все $E(\lambda)$ неприводимы. В этом случае можно использовать собственные значения λ для параметризации элементов $\hat{G}$ и степень вырождения числа λ совпадает с размерностью соответствующего подпространства.

Определение 1.2.8. *Характером* представления U группы G называется функция $\chi_U(g) = \mathrm{tr}\, U(g)\colon G \to \mathbf{C}$.

Пример 1.2.9. Для представления $D^{(u)}$ группы $SO(3)$

$$\chi_u(g) = \frac{\sin(u + 1/2)\varphi}{\sin(\varphi/2)},$$

если g — вращение на угол φ вокруг некоторой оси.

Заметим, что характер является центральной функцией на группе G, т. е. $\chi_U(g_1 g g_1^{-1}) = \chi_U(g)$. Кроме того, χ_U зависит только от класса эквивалентности представления U.

1.3. Теоремы Шура и Петера — Вейля

Напомним, что на любой локально компактной топологической группе G есть так называемая левоинвариантная мера Хаара μ, определенная с точностью до мультипликативной константы. Эта мера обладает свойством $\mu(gB) = \mu(B)$ для любого $g \in G$ и любого борелевского множества $B \subset G$. Если она является также правоинвариантной (т. е. $\mu(Bg) = \mu(B)$), то группа G называется *унимодулярной*. Легко проверить, что все компактные топологические группы унимодулярны. Обычно мы будем обозначать биинвариантную меру на компактной топологической группе через dg и нормировать ее условием $\int_G dg = 1$.

Пусть $\{U_\lambda\}$, $\lambda \in G$,— полный набор попарно неэквивалентных неприводимых унитарных представлений компактной группы G. Если U_λ действует в пространстве $H(\lambda)$ с ортонормированным базисом $e_1, \ldots, e_N$ и скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$, положим

$$u_{ij}^\lambda(g) = \langle e_i,\ U_\lambda(g) e_j \rangle.$$

Теорема Шура 1.3.1 (соотношения ортогональности).

$$\int_G u_{ij}^\alpha(g)\, u_{mn}^\beta(g)\, dg = 0, \quad \text{если} \quad (\alpha,\ i,\ j) \neq (\beta,\ m,\ n),$$

и

$$\int_G |\, u_{ij}^\lambda(g)\, |^2\, dg = 1/d(\lambda),$$

где $d(\lambda) = \dim H(\lambda) =$ *степень* U_λ.

Теорема 1.3.2. *Характер χ_U определяет представление U с точностью до унитарной эквивалентности; таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между $\hat{G}$ и множеством неприводимых характеров G.*

Введем следующее обобщение коэффициентов Фурье.

Определение 1.3.3. Для неприводимого унитарного представления U_λ класса $\lambda \in \hat{G}$ и функции $f \in L^2(G)$ положим

$$U_\lambda(f) = \int_G f(g)\, U_\lambda(g)\, dg.$$

Теорема 1.3.4 (Ф. Петер — Г. Вейль). *Пусть G — компактная группа. Тогда*

(i) *Каждое неприводимое унитарное представление группы G конечномерно.*

(ii) (*Формула Планшереля*) *Для* $f \in L^2(G)$

$$\| f \|_2^2 = \int_G |\, f(g)\, |^2 dg = \sum_{\lambda \in \hat{G}} d(\lambda)\, \mathrm{tr}\,(U_\lambda(f)\, U_\lambda(f)^*) =$$

$$= \int_{\hat{G}} \mathrm{tr}\,(U_\lambda(f)\, U_\lambda(f)^*)\, d\mu(\lambda).$$

(iii) *Для разных классов основных и обобщенных функций f на группе в том или ином смысле справедливо равенство*

$$f(g) = \int_{\widehat{G}} \operatorname{tr}(U_\lambda(f) U_\lambda(g)^*) \, d\mu(\lambda).$$

В частности, имеется разложение дельта-функции на G:

$$f(e) = \int_{\widehat{G}} \operatorname{tr} U_\lambda(f) \, d\mu(\lambda)$$

или $\delta(g) = \sum_{\lambda \in \widehat{G}} d(\lambda) \chi_\lambda(g).$

1.4. Группы Ли и параллелизуемость

Наиболее интересные компактные группы являются также гладкими многообразиями, причем групповые операции являются гладкими отображениями. Другими словами, они оказываются группами Ли. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$, соответствующая группе Ли G, реализуется левоинвариантными векторными полями на G.

Пример 1.4.1. Алгеброй Ли группы $SO(2)$ является

$$\mathfrak{so}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbf{R} \right\}.$$

Если

$$X_a = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad X_b = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix},$$

то форма Киллинга имеет вид

$$B(X_a, X_b) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(X_a X_b) = ab.$$

Экспоненциальное отображение $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ в этом случае выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}.$$

Наконец, если

$$g = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

то касательное пространство к $SO(2)$ в точке g имеет вид

$$T_g SO(2) = \left\{ V_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} g \,|\, a \in \mathbf{R} \right\}.$$

Ясно, что $T_e SO(2) \simeq \mathfrak{so}(2)$.

Этот пример обобщается на все группы Ли. А именно все они параллелизуемы, причем параллелизация может быть задана с помощью левоинвариантных векторных полей. Другими словами, касательное расслоение TG для группы Ли G тривиально. Приведенный выше пример является одной из трех параллелизуемых сфер: S^1, S^3 и S^7. Связанные с ними вещественные проективные пространства $RP(1) \simeq S^1$, $RP(3)$ и $RP(7)$ также параллелизуемы.

Пример 1.4.2. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы $G = SO(3)$ состоит из вещественных матриц A размера 3×3, для которых $A^t = -A$. Базис в $\mathfrak{g}$ составляют матрицы

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Они подчиняются коммутационным соотношениям

$$[L_1, L_2] = L_3, \quad [L_2, L_3] = L_1, \quad [L_3, L_1] = L_2.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{su}(2)$ накрывающей группы $SU(2)$ для $SO(3)$ состоит из косоэрмитовых комплексных матриц размера 2×2 с нулевым следом. Базис в $\mathfrak{su}(2)$ образуют матрицы

$$J_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

подчиненные коммутационным соотношениям

$$[J_1, J_2] = J_3, \quad [J_2, J_3] = J_1, \quad [J_3, J_1] = J_2.$$

1.5. Спектральная теория и теория представлений

Во второй части этой книги рассматривается несколько примеров применения теории представлений в физике. Почти во всех этих примерах теория представлений связана со спектральной теорией.

Напомним (см. разд. 0.8), что векторным G-расслоением называют набор, содержащий пару многообразий M, E, гладкое отображение $\pi\colon E \to M$ и векторное пространство V с эффективным действием группы G, такое, что для некоторого открытого покрытия $\{U_i\}$ многообразия M существуют диффеоморфизмы $h_i\colon \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times V$, переводящие слои $\pi^{-1}(m)$ в $m \times V$, и гладкие отображения $g_{ij}\colon U_i \cap U_j \to G$, для которых $h_i h_j^{-1}(m, v) = (m, g_{ij}(m)v)$ при $m \in U_i \cap U_j$ и $v \in V$. Мы предполагаем также, что читатель знаком с понятием пучка (см. Хирцебрух [H 22]). Если обозначить через $\underline{G}$ пучок, для которого множество сечений $\Gamma(U, \underline{G})$ является группой гладких функций на U

со значениями в группе G, то набор функций g_{ij} определяет коцикл $\{g_{ij}\}$ в $Z^1(\{U_i\}, \underline{G})$. Хорошо известно, что классы эквивалентности расслоений над M со слоем V и структурной группой G находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с множеством классов когомологий $H^1(M, \underline{G})$. Гладкое отображение s: $M \to E$, обладающее свойством $\pi \circ s = 1$, называется *сечением*. Будем через $\Gamma(E)$ или $C^\infty(E)$ обозначать множество всех гладких сечений.

Нас интересуют векторные расслоения с эрмитовой структурой, заданной на каждом слое E. Другими словами, на каждом слое $\pi^{-1}(m)$ задана эрмитова форма h_m так, что для любой пары гладких сечений s_1, s_2 в окрестности m отображение $m \to h_m(s_1(m), s_2(m))$ является гладкой функцией. В этом случае мы говорим, что E — *эрмитово векторное расслоение.* Для эрмитова векторного расслоения пространство $C_0(E)$ непрерывных сечений с компактным носителем является предгильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \int_M h_m(s_1(m), s_2(m))\, dm,$$

где dm — элемент объема на M. Обозначим через $L^2(E)$ соответствующее гильбертово пространство — пополнение $C_0(E)$. Если некоторая группа Γ действует на E и сохраняет меру dm, то в пространстве $L^2(E)$ возникает унитарное представление этой группы:

$$U(\gamma) f(m) = \gamma f(\gamma^{-1} m).$$

Определение 1.5.1. Если в пространстве $L^2(E)$ задан самосопряженный оператор H с областью определения $D(H)$, то говорят, что H *коммутирует* с действием группы Γ, если $U(\gamma) D(H) \subset D(H)$ и $U(\gamma) H(\psi) = HU(\gamma)\psi$ для всех $\gamma \in \Gamma$ и $\psi \in D(H)$.

Рассмотрим спектральное разложение оператора H: $H = \int_{-\infty}^{\infty} t\, dH(t)$. Если отождествить проектор $H(t)$ с пространством, на которое он проектирует, то можно сказать, что $H(t)$ Γ-инвариантно.

Определение 1.5.2. Для $\tau \in \hat{\Gamma}$ определим *кратность* τ в $H(t)$ как число $N_\tau(t) = \dim \operatorname{Hom}_\Gamma (V, H(t))$, где V — пространство представления τ.

Обычно H возникает из эллиптического дифференциального оператора P. А именно H является самосопряженным расширением P в $L^2(E)$. Таким образом, спектр H состоит из положительных собственных значений λ с конечными кратностями, которые мы обозначим через $n(\lambda)$. Тогда

$$\dim H(t) = N(t) = \sum_{\lambda \leqslant t} n(\lambda).$$

Справедлива

Теорема 1.5.3.

$$\lim_{t \to \infty} N_\tau(t) = \dim \operatorname{Hom}(V, L^2(E)) = \textit{кратность } \tau \textit{ в } L^2(E).$$

Доказательство. Из канонического гомоморфизма $\operatorname{Hom}(V, L^2(E)) = L^2(E) \otimes V^*$ следует ортогональное разложение

$$L^2(E) \otimes V^* = H(t) \otimes V^* \oplus \sum_{j=1}^{\infty} (H(t+j) - H(t+j-1)) \otimes V^*.$$

С помощью усреднения по группе Γ отсюда получается равенство $\operatorname{Hom}_\Gamma(V, L^2(E)) = \operatorname{Hom}_\Gamma(V, H(t)) \oplus \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Hom}_\Gamma(V, (H(t + j) - H(t + j - 1)))$, что доказывает теорему.

Рассмотрим теперь риманово многообразие M с расслоением E и дифференциальный оператор P: $C^\infty(E) \to C^\infty(E)$. Если P сильно эллиптичен, положителен и имеет порядок 2 (определения см. ниже), то он имеет собственные значения $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$, стремящиеся к бесконечности, и каждое собственное подпространство $P_\lambda = \{s \in C^\infty(E) \mid Ps = \lambda s\}$ имеет конечную размерность. Мы видели во введении, что в статистической и в квантовой механике представляет интерес асимптотическое поведение величины

$$N(t) = \sum_{\lambda \leqslant t} \dim P_\lambda.$$

Эта задача впервые рассматривалась Г. Вейлем в случае, когда M — ограниченная область в евклидовом пространстве, E — тривиальное одномерное расслоение, а P — оператор Лапласа. Вейль показал, что

$$N(t) \sim \mathrm{const} \cdot t^{\dim M/2k} \quad \text{при } t \to \infty,$$

где константа вычисляется в виде интеграла по сферическому кокасательному расслоению от выражения, построенного по символу оператора P.

Теория представлений возникает в этой задаче, когда мы рассматриваем расслоение E, на котором действует группа G, сохраняя риманову метрику на M, эрмитову структуру в слоях и действие оператора P. В этом случае пространства P_λ будут унитарными G-модулями. Как говорилось в п. 0.5, мы интересуемся кратностями $\nu_\rho(\lambda)$, с которыми в P_λ входит данное неприводимое представление ρ группы G. Таким образом, вместо величины $N(t)$ мы изучаем $N_\rho(t)=\sum_{\lambda\leqslant t}\nu_\rho(\lambda)$. Поскольку при $G=\{e\}$ $\nu_\rho(\lambda)=\dim P_\lambda$, новая постановка задачи является обобщением старой.

Обобщим понятие символа дифференциального оператора P: $C^\infty(E)\to C^\infty(E)$. *Главным символом* оператора P порядка k называется гладкое сечение $\sigma(P)$ расслоения $\mathrm{Hom}(\pi^*(E),\pi^*(E))$, где π: $T^*M\to M$ — естественная проекция. Определяется символ следующим образом. Пусть $p\in M$, $v\in T_p^*M$ и $e\in\pi^*E$; выберем функцию $\varphi\in C^\infty(M)$ так, чтобы $\varphi(p)=0$, $d\varphi(p)=v$, и сечение $f\in C^\infty(E)$, для которого $f(p)=e$. Тогда

$$\sigma(P)(v)(e)=P((-i\varphi)^k f)(p).$$

Оператор P называется *эллиптическим*, если $\sigma(P)(v)$ является изоморфизмом для $0\neq v\in T^*M$, и *сильно эллиптическим*, если k четно и форма $\sigma(P)(v)$ положительно определена для $v\neq 0$.

Пусть $T_G^*(M)=\{\xi\in T^*M\mid\xi(X)=0$ для всех $X\in T_{\pi(\xi)}M$, касательных к орбите $G\pi(\xi)\}$. Назовем оператор P *трансверсально эллиптическим*, если $\sigma(P)(\xi)$ является изоморфизмом при $\xi\in T_1^*(M)\cap T_G^*(M)$.

Пусть теперь M — компактное риманово многообразие, E — векторное расслоение над M с эрмитовой структурой в слоях и G — группа Ли, сохраняющая эти структуры. Пусть оператор P трансверсально эллиптичен, имеет порядок $2k$ и перестановочен с действием G. Предположим также, что P существенно самосопряжен на $L^2(E)$, что автоматически выполнено, если P — сильно эллиптический симметрический оператор.

Из теоремы 1.5.3 следует, что представление τ входит в разложение $L^2(E)$ тогда и только тогда, когда оно входит в разложение одного из спектральных пространств $H(t)$ оператора H (замыкания P). Если G действует транзитивно, то поведение N по существу не зависит от H. В общем случае пусть M_0 означает объединение G-орбит главного типа в M.

Теорема 1.5.4 (Брюнинг — Хейнце).

$$N_\tau(t)\sim\frac{t^{m/2k}}{m!\,(2\pi)^m}\int\limits_{M_0}\frac{1}{\mathrm{Vol}\,(Gx)}\int\limits_{T_1^*M_0\cap T_G^*M_0}\mathrm{tr}_{(E_x\otimes V^*)}(\sigma(P)(\xi))^{-m/2k}\otimes$$
$$\otimes\,\mathrm{id}_{V^*})\,dw(\xi)\,d\mu(x),$$

где $m=\dim(M_0/G)$, $\sigma(P)(\xi)$ — *главный символ оператора* P, *а* dw — *элемент объема, индуцированный мерой Лебега.*

Пусть $E' = \bigcup_{x \in M_0} E_x^{G_x}$ — совокупность всех элементов E, лежащих над точками M_0 и инвариантных относительно стабилизатора точки базы. Справедлива

Теорема 1.5.5. *Если P — обобщенный лапласиан, т.е. $\sigma(P) = |\xi|^{2k}\mathrm{id}_{E_{\pi(\xi)}}$, то величина $N(t) = \dim H^G(t)$ имеет асимптотику*

$$N(t) \sim t^{m/2k} \operatorname{Vol} B(m) \dim E' \cdot \operatorname{Vol}(M_0/G) / (2\pi)^m.$$

Это обобщает теорему Вейля для ограниченных областей в $\mathbf{R}^n$ и формулу Минакшисандарама — Плейеля для лапласианов на римановых многообразиях.

Следствие 1.5.6. *Пусть $G = \{e\}$, M компактно; тогда $E' = E$, $m = n$, $T_G^*M = T^*M$ и*

$$N(t) \sim \frac{t^{m/2k}}{m!\,(2\pi)^m} \iint \operatorname{tr} \sigma(P)(\xi)^{-m/2k} \dim E\, dw(\xi)\, d\mu(x).$$

Перейдем теперь к более общему вопросу о связи спектральной теории с разложением унитарных представлений. Напомним сначала один результат Гординга.

Теорема 1.5.7. *Пусть (U, H) — унитарное представление связной локально компактной сепарабельной группы Ли G; обозначим через H_∞ пространство, порожденное векторами $U(f)h$ для $h \in H$ и $f \in C_0^\infty(G)$ (пространство гладких функций на G с компактным носителем). Тогда H_∞ плотно в H. Полагая $dU(X)U(f)h = U(Xf)h$, мы получаем представление $X \to dU(X)$ универсальной обертывающей алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве H_∞. Это представление симметрично в том смысле, что симметричные элементы $X = X^+$ из $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ переходят в симметрические операторы $dU(X)$ в H.*

Операторы $dU(X)$ можно считать квантовомеханическими наблюдаемыми, только если они существенно самосопряжены, т. е. их замыкания — самосопряженные операторы. Имеется несколько результатов, связывающих квантовые наблюдаемые с теорией представлений. Например, Сигал показал, что если X лежит в центре $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, то $dU(X)$ существенно самосопряжен, если $X = X^+$.

Обобщая этот результат, К. Морен и Л. Морен развили общую теорию разложения унитарных представлений.

Теорема 1.5.8 (К. Морен, Л. Морен). *Пусть (U, H) — унитарное представление связной локально компактной группы Ли G. Тогда (U, H) допускает разложение в прямой интеграл*

$\left(\int\limits_\Lambda U(\lambda), \int\limits_\Lambda H(\lambda)\right)$, *где почти все* $H(\lambda)$ *являются общими собственными подпространствами операторов* $dU(X)$ *для* $X = X^+ \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, т. е. $\langle\psi, dU(X)e(\lambda)\rangle = X(\lambda)\cdot\langle\psi, e(\lambda)\rangle$, где $e(\lambda) \in H(\lambda)$, $\psi \in \Psi$, *а* $\Psi \subset H \subset \Psi'$ — *оснащение по Гельфанду (гельфандовская тройка).*

Напомним, что оснащением по Гельфанду называется тройка пространств $\Phi \subset H \subset \Phi'$, где H — гильбертово пространство, Φ — ядерное пространство, непрерывно и плотно вложенное в H, Φ' — сильное сопряженное к Φ пространство. Конструкция такого оснащения приведена в [M 21], теорема 18 гл. 6. Сформулированная выше теорема прямо вытекает из теоремы 19 из [M 21]. Построение квантовой механики a la Дирак с использованием гельфандовских троек неоднократно предпринималось физиками — см., например, [B 11a].

Рассмотрим случай унитарного представления U группы G в пространстве $L^2(M)$, где $M = G/K$, в предположении, что K — замкнутая подгруппа и на M есть G-инвариантная мера.

Определение 1.5.9. *Оператором Лапласа на* $M = G/K$ называется оператор вида $dU(X)$, где $X = X^+ \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$.

Таким образом, операторы Лапласа определены на пространстве Гординга H_∞ для $(U, L^2(M))$. Они существенно самосопряжены, их замыкания перестановочны с U и для любых $X_1, X_2 \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ операторы $dU(X_1)$ и $dU(X_2)$ перестановочны в сильном смысле[1]) — см. [M 21].

Следующее утверждение обобщает теорему Картана, о которой шла речь в упр. 1.2.

Теорема 1.5.10 (К. Морен, Л. Морен). *Пространство* $L^2(M)$ *допускает разложение в прямой интеграл* $L^2(M) = \int\limits_\Lambda H(\lambda)\, d\mu(\lambda)$, *где* $H(\lambda)$ — *обобщенные собственные подпространства операторов Лапласа на* M. *Элементы* $e(\lambda)$ *из теоремы* 1.5.8 *являются в этом случае обобщенными сферическими функциями.*

Пусть G — локально компактная группа, Γ — замкнутая подгруппа в G и (j, V) — унитарное представление Γ в $(V, \langle\ |\ \rangle)$. Обозначим через p: $G \to G/\Gamma$ каноническую проекцию $p(g) = g\Gamma$. Существует такая квазиинвариантная относительно G мера μ на G/Γ и такая строго положительная непрерывная функция ρ

[1]) То есть спектральные функции коммутируют. — *Прим. перев.*

на G, для которых

(i) $\rho(g\gamma)=\rho(g)\rho(\gamma), \quad g\in G, \ \gamma\in\Gamma,$

(ii) $\int\limits_G \rho(g) f(g)\, dg = \int\limits_{G/\Gamma} d\mu(g\Gamma) \int\limits_\Gamma f(g\gamma)\, d\gamma,$

где dg и $d\gamma$ — меры Хаара на G и Γ соответственно.

Обозначим через H^j пространство измеримых функций f на G со значениями в V, обладающих свойствами

(i) $f(g\gamma)=\rho(g)^{1/2} j(\gamma)^{-1} f(g),$

(ii) $\int\limits_{G/\Gamma} \rho(g)^{-1} \| f(g)\|_V^2\, d\mu(g\Gamma) < \infty.$

Введем в H^j скалярное произведение:

$$(f_1, f_2)_{H^j} = \int\limits_{G/\Gamma} \rho(g)^{-1} \langle f_1(g) \mid f_2(g)\rangle\, d\mu(g\Gamma).$$

Тогда можно определить представление U^j группы G в H^j формулой

$$U^j(g) f(x) = f(g^{-1}x), \quad g, x\in G, \quad f\in H^j.$$

Определение 1.5.11. Пусть η: $H_\infty \to V$ — непрерывное линейное отображение, обладающее свойствами

(i) $\eta(U(\gamma^{-1})\varphi)=\rho(\gamma)^{1/2} j(\gamma)\eta(\varphi)$ для $\varphi\in H_\infty$, $\gamma\in\Gamma$;

(ii) $f_{\eta,\varphi}(g) = \eta(U(g^{-1})\varphi)\in H^j$, $\|\eta(U^{-1}(\cdot)U(\psi)h\|_{H^j} \leqslant \leqslant c(K)\|\psi\|_\infty \|h\|$ для $\psi\in D(K)=\{f\in C_0^\infty(G), \operatorname{supp} f\subset K\}$, K — компакт в G. Тогда η называется *(U, j)-автоморфной формой.* Обозначим пространство (U, j)-автоморфных форм через $A(U, j)$.

Теорема 1.5.12 (К. Морен, Л. Морен). *Пусть G/Γ — компакт, а представление j неприводимо. Тогда индуцированное представление (U^j, H^j) является прямой суммой неприводимых компонент с конечными кратностями. Пространство непрерывных сплетающих операторов* $\operatorname{Hom}_G(U, U^j)$ *канонически изоморфно пространству $A(U, j)$ для $U\in\hat{G}$. Кроме того,* $\dim A(U, j)$ *совпадает с кратностью компоненты типа U в U^j.*

Определение 1.5.13. Предположим, что в G задана компактная подгруппа K. Говорят, что пара (G, K) удовлетворяет *условию Гельфанда,* если сверточная алгебра $C_0(K\backslash G/K)$ коммутативна. В этом случае общие собственные функции в H^j операторов $A_f = \int\limits_G f(g) U^j(g)\, dg$ для $f\in C_0(K\backslash G/K)$ называются *автоморфными формами Тамагавы.*

Если η — автоморфная форма Тамагавы, то $\omega(t) = (U^j(t^{-1})\eta, \eta)_{H^j}(x)$ является положительно определенной зональной сферической функцией. Хорошо известно, что каждая такая функция η определяет унитарное представление класса 1 группы G. Обозначим это представление через (U_η, H_η). Можно показать, что автоморфные формы Тамагавы выделяют подпредставления класса 1 в U^j; каждое такое представление содержит только одну автоморфную форму Тамагавы (с точностью до множителя), и различным собственным функциям операторов A_f соответствуют неэквивалентные представления класса 1. А именно справедлива

Теорема 1.5.14 (К. Морен, Л. Морен). *Пусть η — автоморфная форма Тамагавы. Обозначим через H^j_η циклическое U^j-инвариантное подпространство в H^j, порожденное вектором η, и через U^j_η — ограничение U^j на H^j_η. Тогда (U^j_η, H^j_η) — неприводимое представление, эквивалентное U_η и, следовательно, принадлежащее классу 1. Отображение $T_\eta: H_\eta \to H^j_\eta$ задает изометрический сплетающий оператор $T_\eta \in \mathrm{Hom}_G(U_\eta, U^j_\eta)$, действующий по формуле $T_\eta(\psi) = \int \psi(g) U^j_\eta(g)\eta\, dg$. Каждая автоморфная форма Тамагавы η определяет (U_η, j)-автоморфную форму по формуле $\eta(\varphi) = \int_G \varphi(g)\eta(g)\, dg$ для $\varphi \in C_0(G)$. Если элемент $\eta \in H^j$ определяет зональную сферическую функцию $\omega(g) = (U^j(g^{-1})\eta, \eta)_{H^j}$, то η — автоморфная форма Тамагавы.*

Перейдем теперь к обобщению теоремы Рёльке. Рассмотрим унитарное представление (U^j, H^j) и проектор $P = \int_K U^j(k)\, dk$. Можно проверить, что P коммутирует с $dU^j(X)$, $X \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Общие собственные векторы операторов $dU^j(X) \mid PH^j$ называются *автоморфными формами*. Поскольку операторы $dU^j(X)$ коммутируют с правыми сдвигами, можно рассматривать $dU^j(X) \mid PH^j$ как инвариантные дифференциальные операторы на $K \setminus G$ Пусть $P\Psi \subset PH^j \subset P\Psi'$ — гельфандовское оснащение, получаемое действием P на тройку $\Psi \subset H \subset \Psi'$.

Теорема 1.5.15 (Рёльке — Морен). *Гильбертово пространство $H = PH^j$ может быть разложено в прямой интеграл $\int_\Lambda H(\lambda)$, где почти все $H(\lambda) \subset P\Psi'$ являются гильбертовыми пространствами автоморфных форм. Таким образом, унитарное представление (U^j, H^j) допускает разложение $(U^j, H^j) =$*

$=\int\limits_{\Lambda}(U^j(\lambda), H^j(\lambda))\,d\lambda$, *где почти все пространства* $H^j(\lambda)\subset\Psi'$ *являются общими собственными подпространствами коммутативной алгебры операторов* $dU(X)$, $X\in\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. *Подпространство* $P\Psi'$ *лево-K-инвариантных векторов в* Ψ' *состоит из автоморфных форм.*

Возвращаясь к случаю G/K и $K\backslash G/K$, отметим, что зональные сферические функции являются собственными функциями для «радиальных частей» операторов Лапласа на G/K. Напомним, что *рангом* G/K называется размерность $K\backslash G/K$, равная 1 в случае S^2. Для евклидовых пространств или римановых глобально симметрических пространств ранга 1 единственными дифференциальными операторами, перестановочными с группой изометрий, являются многочлены от операторов Лапласа — Бельтрами Δ_M. Например, для сферы $S^2=SO(3)/SO(2)$ с метрикой $ds^2=d\vartheta^2+\sin^2\vartheta d\psi^2$ собственными функциями оператора $\Delta_{S^2}=\partial^2/\partial\vartheta^2+\operatorname{ctg}\vartheta\,(\partial/\partial\vartheta)+(1/\sin^2\vartheta)(\partial^2/\partial\psi^2)$ являются сферические функции, в то время как зональные сферические функции (многочлены Лежандра) являются собственными для радиальной части $\Delta=d^2/d\vartheta^2+\operatorname{ctg}\vartheta\,(d/d\vartheta)$.

Таким образом, разложения в ряд Фурье, даваемые теоремами Картана в следующих ниже упражнениях 1.2 и 1.3, а также их обобщения, даваемые теоремами К. Морена и Л. Морен, являются фактически спектральными разложениями Лапласа.

Задачи

Упражнение 1.1. Показать, что если $M=G/K$, то индуцированное представление U^L, определенное в 1.2.1, эквивалентно представлению

$$T(g)f(m)=J_L(m,g)f(mg)$$

для $f\in L^2(M, H(L))$, где функция J_L обладает свойствами

$$J_L(m,g_1)J_L(mg_1,g_2)=J_L(m,g_1g_2),$$
$$J_L(m,e)\equiv 1 \text{ для } m\in M.$$

Показать, что $k\to J_L(m_0,k)$ является представлением K. (Здесь m_0 — точка в M, стабилизируемая подгруппой K.)

Упражнение 1.2. Пусть U — неприводимое представление группы G в пространстве V_λ, а K — подгруппа в G. Представление U называется представлением *класса* 1 по отношению к K, если в V_λ есть K-инвариантный вектор v и ограничение $U|K$ унитарно. Если для любого представления класса 1 относительно K существует только один K-инвариантный вектор (с точностью до числового множителя), то подгруппа K называется *массивной*. Обозначим через $\hat{G}_1$ совокупность неприводимых унитарных представлений класса 1. Пусть $Z(V)$ означает подпространство K-инвариантных векторов $v \in V$. Предположим, что $\dim Z(V) = r$, и пусть $e_1, \ldots, e_r$ — базис в $Z(V)$. Матричные элементы $t^{ij}(g)$, $1 \leqslant i, j \leqslant r$, являются *зональными сферическими функциями*. Ясно, что если $v(g)$ — зональная сферическая функция, то $v(kgk') = v(g)$ для всех $k, k' \in K$.

Пусть G — компактная группа Ли и K — ее массивная подгруппа. Показать, что функции на $M = G/K$ допускают разложение вида

$$f(g) = \sum_{\lambda \in \hat{G}_1} \sum_{k=1}^{d(\lambda)} c_{k1}^{\lambda} t_{\lambda}^{k1}(g),$$

где $t_{\lambda}^{k1}(g) = (U_{\lambda}(g) e_k, e_1)$, e_1 есть K-инвариантный элемент в представлении $(U_{\lambda}, V_{\lambda})$ и

$$c_{k1}^{\lambda} = \dim V_{\lambda} \int_G f(g) \overline{t_{\lambda}^{k1}(g)}\, dg.$$

Упражнение 1.3. Пусть G и K те же, что и выше. Показать, что каждая функция на $K \backslash G/K$ разлагается в ряд по зональным сферическим функциям:

$$f(g) = \sum_{\lambda \in \hat{G}_1} c(\lambda) t_{\lambda}^{11}(g), \text{ где } c(\lambda) = \dim V_{\lambda} \cdot \int_G f(g) \overline{t_{\lambda}^{11}(g)}\, dg.$$

Упражнение 1.4. Показать, что если G — компактная группа Ли, а f — центральная функция на G, то f допускает разложение вида

$$f(g) = \sum_{\lambda \in \hat{G}} c(\lambda) \chi_{\lambda}(g), \text{ где } c(\lambda) = \int_G f(g) \overline{\chi_{\lambda}(g)}\, dg.$$

Упражнение 1.5. Пусть A есть G-модуль; обозначим через $C^n(G, A)$ совокупность отображений $G \times G \times \ldots G \to A$. Определим кограничный оператор d^n: $C^n \to C^{n+1}$ формулой

$$d^n f(g_1, \ldots, g_{n+1}) = g_1 f(g_2, \ldots, g_{n+1}) +$$
$$+ \sum (-1)^i f(g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(g_1, \ldots, g_n).$$

Пусть $H^q(G, A) = \ker d^q / \operatorname{im}(d^{q-1})$ — соответствующие группы когомологий. Ясно, что $H^0(G, A) = A^G$ (подмодуль G-инвариантных элементов). Отображение f: $G \to A$ будет 1-коциклом, если оно обладает свойством $f(gg') = gf(g') + f(g)$. Такие отображения называют также *скрещенными гомоморфизмами*. 1-коцикл f

является кограницей, если существует такой элемент $a \in A$, что $f(g) = ga - a$ для всех $g \in G$. Показать, что если G действует тривиально на A, то $H^1(G, A) = \mathrm{Hom}(G, A)$. Отображение f: $G \times G \to A$ является 2-коциклом, если

$$gf(g', g'') - f(gg', g'') + f(g, g'g'') - f(g, g') = 0.$$

Его называют также *системой факторов*.

Пусть H — подгруппа в G и A — некоторый H-модуль. Определим индуцированный модуль $I_H^G A$ как пространство отображений f: $G \to A$, для которых $f(gh) = h^{-1}f(g)$ при $h \in H$, $g \in G$. Группа G действует на $I_H^G A$ по формуле $(gf)(x) = f(g^{-1}x)$. Используя каноническое отображение m: $I_H^G A \to A$, переводящее f в $f(1)$, мы получаем для каждого G-модуля B изоморфизм $\mathrm{Hom}_G(B, I_H^G A) \simeq \mathrm{Hom}_H(B, A)$. Докажите, что соответствующий гомоморфизм

$$H^q(G, I_H^G A) \to H^q(H, A) \qquad (*)$$

является изоморфизмом.

Мы предоставляем читателю обобщить понятие группы когомологий на локально компактные сепарабельные группы G так, чтобы пространства $C^n(G, A)$ состояли из борелевских отображений G^n в A. В частности, читатель должен связать изоморфизм $(*)$ для $q = 1$ с теоремой импримитивности Макки.

Глава **2** **Евклидова группа**

2.1. Евклидова группа и полупрямые произведения

Пусть A и H — две группы, и задано отображение $t \in \operatorname{Hom}(H, \operatorname{Aut} A)$, так что каждому $h \in H$ соответствует автоморфизм t_h группы A. Если записывать $t_h(a)$ просто как $h[a]$, то мы видим, что A является H-пространством, т. е. $(h_1h_2)\,[a] = h_1[h_2[a]]$. Произведение $G = H \times A$ можно превратить в группу, определив умножение формулой

$$(h, a)\,(h', a') = (hh', at_h(a')).$$

Единицей в группе G является (e_H, e_A), а обратный элемент имеет вид $(h, a)^{-1} = (h^{-1}, h^{-1}[a^{-1}])$.

Определение 2.1.1. Построенная выше группа G называется *полупрямым произведением* H и A относительно t и обозначается через $H \ltimes A$.

Простые топологические рассуждения показывают, что если A и H — локально компактные группы и отображение t непрерывно, то G с топологией произведения является локально компактной топологической группой.

Пример 2.1.2. Евклидова группа $E(n)$ — это полупрямое произведение группы вращений $H = SO(n)$ и группы трансляций $A = \mathbf{R}^n$ относительно естественного гомоморфизма t, такого, что $t_h(a) = hah^{-1}$. Для доказательства достаточно заметить, что A — замкнутый абелев нормальный делитель в $G = E(n)$, а H — замкнутая подгруппа, причем $H \cap A = \{e\}$.

Множество $\hat{A}$ неприводимых унитарных представлений группы A в этом примере совпадает с ее группой характеров. Группа H действует на $\hat{A}$ по формуле $h(\chi)\,(a) = \chi(h^{-1}[a])$.

Следующая конструкция приводит к теореме Макки. Для каждой H-орбиты $\mathcal{O}$ в $\hat{A}$ выберем точку $\chi \in \mathcal{O}$ и неприводимое унитарное представление V стабилизатора $H_\chi = \{h \in H \mid h(\chi) = \chi\}$. Полагая $(\chi V)\,(ah) = \chi(a)\,V(h)$, мы получаем неприводимое представление χV группы $H_\chi \ltimes A$. Образуем индуцированное представление $U^{\chi V}$.

Теорема 2.1.3 (Макки). (i) *Индуцированное представление $U^{\chi V}$ неприводимо.*

(ii) *Представление $U^{\chi V}$ эквивалентно $U^{\chi' V'}$, только если орбиты χ и χ' совпадают.*

(iii) *Если разбиение $\hat{A}$ на H-орбиты гладко в смысле Макки* (см. MS 1), *то каждое неприводимое унитарное представление группы G эквивалентно некоторому $U^{\chi\nu}$.*

Эта теорема дает первый пример описания $\hat{G}$ с помощью пространства орбит, которое, как мы увидим, играет основную роль в геометрическом квантовании.

Пример 2.1.4. Пусть $G=E(2)=SO(2)\ltimes\mathbf{R}^2$. В этом случае $\hat{A}=\hat{\mathbf{R}}^2=\{\chi_a\,|\,\chi_a(x)=\exp(iax)\}$. Элемент $g\in SO(2)$ действует на характер χ_a, переводя его в χ_b, где $b=ga$. Характеры χ_a и χ_b лежат на одной орбите тогда и только тогда, когда $|a|^2=|b|^2$. Таким образом, орбиты — это окружности $|a|=r$. Для каждой окружности с ненулевым радиусом $H_{\chi_a}=1$ и представление U^{χ_a} неприводимо. Представления U^{χ_a}, соответствующие окружностям разных радиусов, неэквивалентны. Для окружности нулевого радиуса $H_{\chi_0}=H$. Таким образом, в этом случае конструкция Макки приводит к представлениям факторгруппы $SO(2)=E(2)/\mathbf{R}^2$.

Поскольку в нашем примере разбиение $\hat{\mathbf{R}}^2$ на орбиты имеет борелевское сечение — множество $\{(0,r)\,|\,r\geqslant 0\}$, теорема Макки применима и мы получили полный набор неприводимых унитарных представлений группы $E(2)$.

Рассмотрим теперь ту же группу $E(2)$ и ее односвязную накрывающую с точки зрения теории Кириллова, а потом обсудим геометрию, связывающую этот пример с квантовой теорией.

Пример 2.1.5. Пусть G — односвязная накрывающая группы $E(2)$. Она может быть реализована как множество $H\times A$, где $H=\mathbf{R}$, $A=\mathbf{C}$, с законом умножения $(t,z)(t',z')=(t+t',\exp(it)z'+z)$. Группа G имеет матричное представление

$$(t,z)\to\begin{pmatrix}\exp(it) & z\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Центр G состоит из точек $(2\pi n,0)$. Группа $E(2)$ получается факторизацией G по центру, и элементы этой группы имеют вид (t,z), где $t\in\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. Полагая $z=x+iy$, получаем вещественную реализацию $E(2)$ матрицами третьего порядка

$$g=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t & x\\ \sin t & \cos t & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Отсюда находим базис алгебры Ли группы $E(2)$:

$$e_1 = \frac{\partial g}{\partial x}\bigg|_{t=x=y=0}, \quad e_2 = \frac{\partial g}{\partial y}\bigg|_{t=x=y=0}, \quad e_3 = \frac{\partial g}{\partial t}\bigg|_{t=x=y=0}.$$

Эти элементы подчиняются коммутационным соотношениям

$$[e_3, e_1] = e_2, \quad [e_3, e_2] = -e_1, \quad [e_1, e_2] = 0$$

и, очевидно, порождают разрешимую алгебру Ли. Отождествим пространство этой алгебры с $\mathbf{R} \times \mathbf{C}$, полагая $(t, \zeta) \to te_3 + \operatorname{Re}\zeta \cdot e_1 + \operatorname{Im}\zeta \cdot e_2$. Тогда коммутатор примет вид $[(t_1, \zeta_1), (t_2, \zeta_2)] = (0, i(t_1\zeta_2 - t_2\zeta_1))$. Положим $\mathfrak{a} = \mathbf{R}e_1 + \mathbf{R}e_2$, $\mathfrak{h} = \mathbf{R}e_3$. Группа G является полупрямым произведением $H = \exp\mathfrak{h}$ и $A = \exp\mathfrak{a}$. Дуальный базис в $\mathfrak{g}^*$ обозначим через e_1^*, e_2^*, e_3^*.

Пространство $\mathfrak{a}^*$, двойственное к $\mathfrak{a}$, отождествляется с $\mathbf{C}$ по формуле $f((0, \zeta)) = \operatorname{Re}(f\zeta)$. Группа G действует на $\mathfrak{a}^*$: $gf((0, \zeta)) = f(g^{-1}(0, \zeta)g)$. Это в точности тот пример коприсоединенного действия группы G на пространстве $\mathfrak{a}^* \subset \mathfrak{g}^*$:

$$gf(Y) = f((\operatorname{Ad} g)^{-1}Y),$$

который мы рассматривали в начале книги. Это действие мы рассмотрим подробнее в гл. 7. Ясно, что в нашем случае для $g = (t, z)$ коприсоединенное действие имеет вид $gf(Y) = \exp(-it)f(Y)$. Орбиты этого действия — окружности $|\zeta| = r$, $r \geqslant 0$, с которыми мы встретились в начале этой главы.

Введем в $\mathfrak{g}^*$ координаты (s, z), полагая значение функционала $f(s, z)$ на элементе (t, ζ) равным

$$\langle (s, z), (t, \zeta) \rangle = st + \operatorname{Re}(z\zeta).$$

Орбиты коприсоединенного действия — это цилиндры $C_r = \{(s, z) \mid |z| = r \geqslant 0\}$ и точки прямой $C_0 = \{(s, 0)\}$.

Пусть $f \in C_r$, например, $f = re_1^*$. Тогда $\mathfrak{g}(f) = \mathbf{R}e_1$ и $G(f) = 2\pi\mathbf{Z} \times \mathbf{R}e_1$. Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{h}$ максимальной размерности, обладающую свойствами

(1) $\mathfrak{g}(f) \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$,

(2) $f \mid [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$.

Такая алгебра имеет размерность $(\dim\mathfrak{g} + \dim\mathfrak{g}(f))/2$. Она называется *максимальной подчиненной подалгеброй.* В рассматриваемом случае такая алгебра только одна: $\mathbf{R}e_1 + \mathbf{R}e_2$. Функционал f задает характер соответствующей группы $\exp\mathfrak{h}$:

$$\chi_r(\exp(0, \zeta)) = \exp(ir\operatorname{Re}\zeta).$$

Индуцируя с этого характера на группу $E(2)$, мы получаем представление, рассмотренное в начале главы. Предоставляем читателю убедиться, что индуцирование на односвязную накрывающую G группы $E(2)$ дает приводимое представление, которое является непрерывной суммой неприводимых представлений, нумеруемых точками окружности.

Это — первый пример метода орбит Кириллова. Для дальнейших ссылок мы введем следующее определение, которое скорее является программой исследований.

Определение 2.1.6. Пусть $f \in \mathfrak{g}^*$ и $\mathfrak{h}$ — максимальная подалгебра, подчиненная f. Обозначим через χ_f характер группы $H = \exp \mathfrak{h}$, для которого $d\chi_f(1) = if$. Образуем индуцированное представление $U^{\chi_f, \mathfrak{h}}$. Тогда метод орбит утверждает, что

(i) представление $U^{\chi_f, \mathfrak{h}}$ не зависит от $\mathfrak{h}$, обозначим его поэтому через U^f;

(ii) представление U^f неприводимо;

(iii) каждое неприводимое представление G получается таким образом;

(iv) представления U^{f_1} и U^{f_2} эквивалентны тогда и только тогда, когда f_1 и f_2 лежат на одной G-орбите в $\mathfrak{g}^*$;

(v) таким образом получается взаимно однозначное соответствие $\mathfrak{g}^*/G \simeq \widehat{G}$.

Из сказанного выше видно, что для группы $E(2)$ все эти утверждения выполняются. Частью техники, развитой Кирилловым для доказательства того, что представление зависит только от орбиты, является полученная им формула для характера неприводимого представления. Мы приведем здесь эту формулу для рассматриваемого случая.

Теорема 2.1.7 (Кириллов). *Пусть $\mathcal{O}$ — орбита в $\mathfrak{g}^*$, которая является цилиндром с направляющей окружностью $|\zeta| = r$. Отождествим $\mathfrak{g}^*$ с $\mathbf{R} \times \mathbf{C}$ и положим $f = (s, \zeta) \in \mathfrak{g}^*$. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$. Определим преобразование Фурье этой функции формулой*

$$F\varphi(f) = \int_{\mathfrak{g}} \exp(i\langle f, X\rangle)\, dX.$$

Тогда, если носитель φ не содержит точек (t, z), $t = \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$, то

$$\operatorname{tr} U^{\chi_r V}(\varphi) = \int_{\mathcal{O}} F\varphi(f)\, d\beta(f),$$

где мера $d\beta$ имеет вид $(1/2\pi)\, dx ds$. Для группы G неприводимое представление определяется не только орбитой $\mathcal{O}$, но и характером V фундаментальной группы орбиты, совпадающей с центром $2\pi\mathbf{Z}$ группы G. Это представление имеет вид $U^{\chi_r V}$, где

$$(\chi_r V)(2\pi k, z) = \exp(2\pi i k u + i \operatorname{Re} rz).$$

Для характера этого представления справедлива формула

$$\operatorname{tr} U^{\chi_r V}(\varphi) = \int_{\mathcal{O}} F\varphi(f)\, d\beta(f) + \sum_{n\in \mathbf{Z}} F\varphi(u+n,\ 0) - \int_{-\infty}^{\infty} F\varphi(s,\ 0)\, ds.$$

Следствие 2.1.8.

$$\varphi(0) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\infty} r\, dr \int_{|u|=1} \operatorname{tr} U^{\chi_r V}(\varphi)\frac{du}{iu}.$$

Как мы сейчас покажем, группа G тесно связана со многими аспектами квантовой механики.

2.2. Пространство Фока. Введение

Пусть $\mathcal{F}$ означает гильбертово пространство целых аналитических функций на $\mathbf{C}$ со скалярным произведением

$$(f,\ f') = \int_{\mathbf{C}} f(z)\overline{f'(z)}\, d\mu(z),$$

где $d\mu(z) = (1/\pi)\exp(-z\bar{z})\, dx\, dy$.

Определение 2.2.1. Пространство $\mathcal{F}$ называется *пространством Фока*.

Определим отображение W: $L^2(\mathbf{R}) \to \mathcal{F}$ равенством

$$f(z) = W\psi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} W(z,\ q)\, \psi(q)\, dq,$$

где $W(z,\ q) = \pi^{-1/4}\exp\left(-(z^2+q^2)/2 + qz/\sqrt{2}\right)$.

Теорема 2.2.2. *Отображение W является унитарным изоморфизмом между $L^2(\mathbf{R})$ и $\mathcal{F}$.*

Пусть G — односвязная накрывающая группы $E(2)$. Определим представление G в пространстве $\mathcal{F}$ следующим образом. Параллельный перенос $z = z + c$ переходит в оператор $V(c)$:

$$(V(c)f)(z) = \exp(\bar{c}(z - c/2))f(z - c),$$

а вращение $z \to uz$, $u = \exp(it)$, — в оператор $V(u)$:

$$(V(u)f)(z) = f(u^{-1}z).$$

Для произвольного элемента $g = (t,\ c)$ полагаем

$$V(g) = V(c)\,V(u).$$

Теорема 2.2.3. *Пара $(V, \mathcal{F})$ является проективным унитарным представлением G в $\mathcal{F}$, т. е.*

(1) *V сильно непрерывно,*

(2) $\|Vf\|=\|f\|$,

(3) $g(V')V(g)=\mu(g',g)V(g'g)$, *где функция* $\mu(g',g)=$ $=\exp(i\,\mathrm{Im}(c'u'c))$, *называемая* мультипликатором представления V, *обладает свойствами*

(i) $\mu(e,g)=\mu(g,e)=1$,

(ii) $|\mu(g',g)|=1$,

(iii) $\mu(gh,k)\mu(g,h)=\mu(g,hk)\mu(h,k)$,

(iv) μ — *борелевская функция на* $G\times G$.

Будем писать $V(t)$ вместо $V(u)$, где $u=e^{it}$. Тогда операторная функция $V(t)$ обладает свойством $V(t)V(t')=V(t+t')$, а представление $U(t)=W^{-1}V(t)W$ в пространстве $L^2(\mathbf{R})$ для частных значений t имеет вид

(1) $U(\pi)=P$ — оператор четности в квантовой механике: $P\psi(q)=\psi(-q)$;

(2) $U(\pi/2)=F$ — преобразование Фурье. Отметим, что F — унитарный оператор, удовлетворяющий соотношениям $F^2=P$, $F^4=1$.

Для $x,y\in\mathbf{R}$ положим $c=(1/\sqrt{2})(x+iy)$. Операторы $T(x,y)=W^{-1}V(c)W$ задают очень интересное проективное представление коммутативной группы $\mathbf{R}^2$.

Теорема 2.2.4. $T(x,\ y)\psi(q)=\exp(-iy(q-x/2))\psi(q-x)$.

Доказательство. Это элементарная проверка.

Следствие 2.2.5.

$$T(x',\ y')T(x,\ y)=\exp(i(yx'-xy')/2)\,T(x+x',\ y+y').$$

Как мы увидим ниже, это следствие выражает коммутационные соотношения Вейля, которые являются интегральной формой принципа неопределенности Гейзенберга.

Чтобы мотивировать геометрические построения следующих глав, рассмотрим этот пример с более геометрической точки зрения. Пусть M — подмногообразие в $\mathbf{C}^2$, задаваемое равенством

$$M=\{(\zeta,z)\in\mathbf{C}^2\,|\,\mathrm{Im}\,\zeta=z\bar z/4\}.$$

Пусть $z=p+iq$, $\zeta=\sigma+i\tau$. Зададим на M 1-форму $\vartheta=$ $=d\sigma+(pdq-qdp)/2=d\sigma+(1/4i)(\bar zdz-zd\bar z)$. Тогда $\Omega=$ $=d\vartheta=(i/2)\,dz\wedge d\bar z$ — замкнутая форма типа $(1,1)$. Ее можно записать в виде $\Omega=i\partial\bar\partial(|z|^2/2)$, где ∂ — голоморфный внешний дифференциал. Форма ϑ может быть записана как $d\zeta-$ $-i\partial(|z|^2/2)$.

Элемент $g=(t,c)\in G$ действует на M, переводя (ζ,z) в $(\zeta+i(\bar c\exp(it)z+c/2),\ \exp(it)z+c)$. Можно проверить, что действие G сохраняет ϑ, а значит, и Ω. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2}|g(z)|^2=\frac{1}{2}|z|^2+h_g(z)+\overline{h_g(z)},$$

где $h_g(z)$ — голоморфная функция. Отметим также, что $d(g(\zeta)-\zeta)=idh_g(z)$.

Определим представление группы G в пространстве Фока $\mathcal{F}$ формулой

$$(V(g)f)(z)=\exp(h_g(z))f(g^{-1}(z)).$$

В такой форме наша конструкция переносится на общие кэлеровы многообразия. Из общей теоремы Кобаяси следует, что представление V неприводимо.

Задачи

Упражнение 2.1. Показать, что $V(t)=\exp(-it\bar{H})$, $U(t)=\exp(-itH)$, где $\bar{H}=WHW^{-1}=zd/dz$, а $H=(p^2+q^2-1)/2$ — гамильтониан гармонического осциллятора. Справедливо равенство $H=\lim\limits_{t\to 0} it^{-1}(V(t)-1)$.

Упражнение 2.2. Показать, что инфинитезимальным генератором однопараметрической подгруппы $V(tc)$, $t\in\mathbf{R}$, является оператор $L=\bar{c}z-cd/dz$, так что $V(tc)=\exp(-itL)$.

Упражнение 2.3. Использовать коммутационные соотношения

$$V(u)V(c)V(u)^{-1}=V(uc),$$

чтобы доказать равенства

$$FqF^{-1}=-p,\quad FpF^{-1}=q,$$

где $p=-i(d/dq)$.

Упражнение 2.4. Пусть $z=(x^1+ix^2)/2$ — комплексная координата на вещественной плоскости R^2. Положим

$$\partial=\partial/\partial z,\quad \bar{\partial}=\partial/\partial\bar{z},\quad M_B=z\partial-\bar{z}\bar{\partial}$$

и

$$M_F=z\partial-\bar{z}\bar{\partial}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Показать, что $[\partial,\bar{\partial}]=0$, $[M_*,\partial]=-\partial$, $[M_*,\bar{\partial}]=\bar{\partial}$, где $*$ означает индекс B или F (бозоны или фермионы). Таким образом, операторы ∂, $\bar{\partial}$ и M_* порождают (над $\mathbf{C}$) комплексную оболочку алгебры Ли группы $E(2)$.

Пусть $\tilde{v}_l(z,\bar{z})=e^{il(\theta+\pi)}K_l(mr)$, где K_l — модифицированная функция Бесселя второго рода, $l\in\mathbf{C}$, $z=re^{i\theta}/2$. Показать, что $\tilde{v}_l$ является фундаментальным решением евклидова варианта уравнения Клейна — Гордона $(m^2-\partial\bar{\partial})v=0$, т. е.

$$(m^2-\partial\bar{\partial})\tilde{v}_1(z,\bar{z})=2\pi\delta(x^1)\delta(x^2).$$

Глава **3** **Геометрия симплектических многообразий**

3.1. Элементарный обзор лагранжевой и гамильтоновой механики. Обозначения

Объем книги не позволяет дать подробное введение в дифференциальную геометрию. От читателя предполагается знакомство с основными понятиями. Мы придерживаемся следующих обозначений. Для гладкого (класса C^∞) многообразия M через $A = A(M)$ обозначается алгебра гладких функций на M; $V = V(M)$ означает A-модуль гладких векторных полей на M; A^p означает A-модуль гладких дифференциальных p-форм.

Векторное поле X на M можно определить как отображение X: $A \to A$, которое линейно над $\mathbf{R}$ и является дифференцированием A, т. е. обладает свойством $X(fg) = X(f) \cdot g + f \cdot X(g)$. *Коммутатор*, или *скобка Ли*, полей X и Y определяется равенством

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Определение 3.1.1. *Дифференциальной р-формой* на M называется A-полилинейное кососимметричное отображение φ: $V \times V \times \ldots \times V \to A$.

Внешнее произведение p-формы и q-формы определяется как отображение

$$A^p \times A^q \to A^{p+q}: \ (\varphi, \ \psi) \to \varphi \wedge \psi,$$

A-билинейное, ассоциативное и обладающее свойствами

(i) $1 \wedge \varphi = \varphi$;

(ii) если $\varphi_i \in A^1$, то $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_p)(X_1, \ldots, X_p) = \det \|\varphi_i(X_j)\|$;

(iii) $\varphi \wedge \psi = (-1)^{pq} \psi \wedge \varphi$ для $\varphi \in A^p$, $\psi \in A^q$.

Мы будем часто употреблять сокращенное обозначение φ^n для $\varphi \wedge \ldots \wedge \varphi$ (n раз).

Внешнее дифференцирование — это $\mathbf{R}$-линейное отображение

$$d: \ A^p \to A^{p+1},$$

обладающее свойствами

(i) $d(\varphi \wedge \psi) = d\varphi \wedge \psi + (-1)^p \varphi \wedge d\psi$, если $\varphi \in A^p$; такое отображение называется *антидифференцированием*;

(ii) $d \cdot d = 0$;

(iii) $df(X) = X(f)$, если $f \in A$, $X \in V$.

Определение 3.1.2. *Внутреннее произведение* векторного поля X и p-формы α определяется равенством

$$(i(X)\alpha)(X_1, \ldots, X_{p-1}) = \alpha(X, X_1, \ldots, X_{p-1}).$$

Отображение $i(X)\colon A^p \to A^{p-1}$ является антидифференцированием и характеризуется свойствами

(i) $i(X)\cdot i(X)=0$;

(ii) $i(X)\cdot 1=0$;

(iii) $i(X)\varphi=\varphi(X)$ для $\varphi\in A^1$.

Определение 3.1.3. *Производной Ли* формы α относительно поля X называется форма

$$(\mathscr{L}(X)\alpha)(X_1, \ldots, X_p)=X\alpha(X_1, \ldots, X_p)-$$
$$-\sum_{i=1}^{p}\alpha(X_1, \ldots, [X, X_i], \ldots, X_p).$$

Следующие тождества легко проверяются:

Теорема 3.1.4.

(i) *Отображение* $\mathscr{L}$ $\mathbf{R}$-*линейно*:

(ii) $\mathscr{L}(X)(\varphi_1\wedge\varphi_2)=\mathscr{L}(X)\varphi_1\wedge\varphi_2+\varphi_1\wedge\mathscr{L}(X)\varphi_2$;

(iii) $\mathscr{L}(X)f=X(f)$ *для* $f\in A$;

(iv) $\mathscr{L}(X)d\varphi=d\mathscr{L}(X)\varphi$;

(v) $\mathscr{L}(X)i(Y)-i(Y)\mathscr{L}(X)=i([X,Y])$;

(vi) $\mathscr{L}([X,Y])=\mathscr{L}(X)\mathscr{L}(Y)-\mathscr{L}(Y)\mathscr{L}(X)$.

Для последующих ссылок и чтобы зафиксировать обозначения, мы напомним теорему де Рама. Положим

$$H^k_{\mathrm{dR}}(M, \mathbf{R})=\ker\left(d\colon A^k\to A^{k+1}\right)/dA^{k+1}, \quad k=0, 1, \ldots$$

(A^{-1} считается равным нулю). Пусть $H^k(M,\mathbf{R})$ — группы когомологий Чеха.

Теорема (де Рама) 3.1.5. *Пространство* $H^k_{\mathrm{dR}}(M, \mathbf{R})$ *канонически изоморфно* $H^k(M,\mathbf{R})$.

Определение 3.1.6. Обозначим через $d.R$ изоморфизм между $H^k_{\mathrm{dR}}(M, \mathbf{R})$ и $H^k(M,\mathbf{R})$. Размерность этих пространств называется *k-м числом* Бетти и обозначается через $b_k(M)$.

Пусть $T^k_x(M)=T_x(M)\oplus \ldots \oplus T_x(M)$ и $T^k(M)=\bigcup_{x\in M}T^k_x(M)$. Для любого векторного пространства E назовем E-значной k-формой на M гладкое отображение $\varphi\colon T^k(M)\to E$, $(X_1, \ldots, X_k)\to\varphi(X_1, \ldots, X_k)$, полилинейное и антисимметричное относительно $X_1, \ldots, X_k$. Пространство E-значных k-форм на M обозначим через $A^k(M,E)$.

Через $E^{(k)}$ будем обозначать k-ю внешнюю степень пространства E. Через $T^{(k)}(M)$ обозначим $\bigcup_{x\in M}T^{(k)}_x(M)$.

Определение 3.1.7. Пусть задано главное расслоенное пространство $P(M, G)$ и представление ρ: $G \to GL(E)$. Тогда E-значная k-форма φ на P называется *контравариантной k-формой* типа (ρ, E), если $\varphi R_g = \rho(g^{-1})\varphi$ для $g \in G$.

3.2. Связности в главных расслоениях

Пусть $G \to M \xrightarrow{\pi} B$ — главное G-расслоение с базой B и проекцией π. Через $r(g)$ обозначим правый сдвиг $r(g)m = mg$. Точку $m \in M$ можно рассматривать как отображение m: $G \to Gm$: $g \to mg$. Здесь Gm — слой M над $x = \pi(m) \in B$. Пусть $\mathfrak{g}$ означает алгебру Ли группы G. Как отмечалось выше, $\mathfrak{g} \simeq T_e(G)$.

Определение 3.2.1. Векторное поле X на M называется *вертикальным*, если $\pi_*(X) = 0$. Таким образом, значение вертикального векторного поля X в точке m имеет вид $X(m) = m_*(Y)$, где $Y \in \mathfrak{g}$. Отсюда возникает вложение

$$\lambda\colon\ M \times \mathfrak{g} \to T(M),$$

задаваемое формулой $\lambda(m, Y) = m_*(Y)$. Поскольку мы имеем $(mg)_*(g^{-1}Yg) = m_*(Y)g$ для всех $g \in G$, получаем *точную последовательность Атьи*

$$0 \to L(B) \xrightarrow{\lambda} Q(B) \xrightarrow{\pi} T(B) \to 0,$$

где $L(B) = B \times_{\mathrm{Ad}G} \mathfrak{g}$, а $Q(B) = T(M)/G$.

Определение 3.2.2. *Связностью* в главном расслоении $G \to M \to B$ называется 1-форма $\omega \in A^1(M, \mathfrak{g})$, обладающая свойствами

(i) $\omega \cdot r(g) = \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega$;

(ii) $\omega(m_*(Y)) = Y$ для $m \in M$ и $Y \in \mathfrak{g}$.

Формой кривизны связности ω называется 2-форма $\Omega \in A^2(M, \mathfrak{g})$, задаваемая формулой

$$\Omega(X, Y) = \left(d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]\right)(X, Y) = d\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)]$$

для $X, Y \in T_m(M)$.

Теорема 3.2.3. *Форма кривизны Ω обладает свойствами*

(i) $\Omega \cdot r(g) = \mathrm{Ad}(g^{-1})\Omega$;

(ii) $\Omega(X, Y) = 0$, *если X вертикально.*

Теорема 3.2.4. *Связность ω задает расщепление точной последовательности Атьи, т. е. отображение ω: $Q \to L$, для которого $\omega \cdot \lambda = 1$.*

Из последовательности

$$0 \to \mathrm{Hom}(T, L) \to \mathrm{Hom}(Q, L) \to \mathrm{End}\, L \to 0$$

получаем когомологическую последовательность

$$\xrightarrow{\pi^*} H^0(B, \underline{\mathrm{Hom}}(Q, L)) \xrightarrow{\lambda^*} H^0(B, \underline{\mathrm{End}}\, L) \xrightarrow{\delta^*} H^1(B, \underline{\mathrm{Hom}}(T, L)).$$

Таким образом, связность задает глобальное сечение $\omega \in H^0(B, \underline{\mathrm{Hom}}(Q, L))$, для которого $\lambda^*\omega = 1$.

Теорема 3.2.5. *Связность на M существует тогда и только тогда, когда $\delta^*(1) = 0$.*

Следствие 3.2.6. *На гладком главном расслоении всегда существует гладкая связность. На комплексно-аналитическом векторном расслоении препятствием к существованию комплексно-аналитической связности служит $(1, 1)$-компонента формы Ω.*

Если положить $V(M) = P \times_{\rho(G)} E$ и обозначить через $\tilde{A}^k(M, E)$ модуль всех контравариантных k-форм типа (ρ, E) на $P(M, G)$ и если

$$0 \to L(M) \to Q(M) \to T(M) \to 0$$

— точная последовательность Атьи для $P(M, G)$, то E-значная k-форма ϑ: $T^k(P) \to E$ на P задает послойно линейное отображение векторных расслоений

$$T^{(k)}(P) \to P \times E, \quad u \to (p, \vartheta(u)),$$

где $u = \sum X_1 \wedge \ldots \wedge X_k \in T^{(k)}(P)$.

Если ϑ — контравариантная форма типа (ρ, E) на $P(M, G)$, то, факторизуя $T^{(k)}(P)$ и $P \times E$ по действию G, мы можем рассматривать ϑ как отображение векторных расслоений над M, ϑ: $Q^{(k)}(M) \to V(M)$. Таким образом, имеем следующий естественный изоморфизм:

Теорема 3.2.7. $\tilde{A}^{(k)}(M, V) \simeq \Gamma(M, \mathrm{Hom}(Q^{(k)}, V))$.

Следствие 3.2.8. *Если ω — связность на $P(M, G)$, то соответствующее отображение векторных расслоений является контравариантной 1-формой ω: $T(P) \to \mathfrak{g}$ типа $(\mathrm{Ad}, \mathfrak{g})$ на $P(M, G)$, где Ad — присоединенное представление G, действующее в $\mathfrak{g}$ по формуле $\mathrm{Ad}\, x$: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$: $A \to xAx^{-1}$, $x \in G$.*

3.3. Римановы связности

Пусть (M, g) — риманово многообразие с метрикой g.

Определение 3.3.1. *Римановой ковариантной производной* называется отображение ∇: $V(M) \to \mathrm{End}\, V(M)$, обладающее свойствами

(i) $\nabla_{X+Y}(Z) = \nabla_X(Z) + \nabla_Y(Z)$;

(ii) $\nabla_{fX} = f\nabla_X$;
(iii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X(Y) + \nabla_X(Z)$;
(iv) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X(Y) + X(f)Y$;
(v) $\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) = [X, Y]$;
(vi) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X(Y), Z) + g(Y, \nabla_X(Z))$.

Если $(q^1, \ldots, q^n)$ — локальная система координат на M и ∂_i означает векторное поле $\partial/\partial q^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то положим $\nabla_i = \nabla_{\partial_i}$ и определим символы Кристоффеля Γ^k_{ij} формулой

$$\nabla_i(\partial_j) = \sum_k \Gamma^k_{ij}\partial_k.$$

Определение 3.3.2. Пусть $T = (1/2)g(\dot{q}(t), \dot{q}(t))$ — кинетическая энергия и $V(q)$ — потенциальная энергия; тогда *уравнения Лагранжа* имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}^l}\right) - \frac{\partial(T-V)}{\partial q^l} = 0, \quad l = 1, \ldots, n.$$

Кривая $t \to q(t) = (q^1(t), \ldots, q_n(t))$ называется *геодезической*, если она удовлетворяет уравнениям Лагранжа.

Из явного вида T вытекает, что геодезическая удовлетворяет уравнениям $\ddot{q}^l + \Gamma^l_{kj}\dot{q}^k\dot{q}^j = -g^{lk}\partial_k V$, $l = 1, \ldots, n$. В локальных координатах $(q^1, \ldots, q^n, v^1, \ldots, v^n)$ на касательном расслоении эти уравнения принимают вид

$$\dot{q}^l = v^l, \quad \dot{v}^l = -\Gamma^l_{kj}v^k v^j - g^{lk}\partial_k V.$$

Гамильтонова форма уравнений геодезической получается после перехода к кокасательному расслоению по формуле

$$(q^k, v^k) \to \left(q^k, p_k = \sum g_{kl}v^l\right).$$

Она имеет вид

$$\dot{q}^k = \sum g^{kl}p_l, \quad \dot{p}_l = -\frac{1}{2}\sum \partial_l g^{ab}p_a p_b - \partial_l V$$

или

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q},$$

для гамильтониана $H = \frac{1}{2}\sum g^{ab}p_a p_b + V(q)$.

Пример 3.3.3. Уравнение гармонического осциллятора в форме Лагранжа имеет вид

$$\ddot{q} + \nu^2 q = 0$$

и в форме Гамильтона —

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\nu^2 q.$$

Здесь $H=(1/2)(p^2+\nu^2q^2)$, а симплектическая форма есть $\Omega=dp\wedge dq$, см. разд. 3.4.

Пример 3.3.4. Геодезический поток на плоскости Лобачевского $\mathscr{P}$ в модели Пуанкаре выглядит следующим образом. Эта плоскость является примером поверхности Клиффорда — Клейна с постоянной кривизной $K<0$. Полагая $K=-1/r^2$, можно задать метрику формулой $ds^2=(dq^1)^2+\exp(2q^1/r)(dq^2)^2$. Подстановка $x=q^2$, $y=r\exp(-q^1/r)$ приводит к метрике

$$ds^2=r^2\,\frac{dx^2+dy^2}{y^2},\qquad y>0.$$

Для удобства положим $r=1$. Тогда

$$g_{ab}=\begin{pmatrix} 1/y^2 & 0\\ 0 & 1/y^2\end{pmatrix}.$$

Символы Кристоффеля легко вычисляются и оказывается, что

$$\Gamma^1_{11}=\Gamma^1_{22}=\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=0,\qquad \Gamma^2_{11}=1/4\ \text{ и}$$
$$\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=\Gamma^2_{22}=-1/4.$$

Символы Кристоффеля легко вычисляются и оказывается, что

$$\ddot{x}-\frac{2}{y}\dot{x}\dot{y}=0,\qquad \ddot{y}+\frac{1}{y}(\dot{x}^2-\dot{y}^2)=0.$$

Решение этих уравнений дается формулами

$$x(t)=a\,\mathrm{th}\,t+b,\qquad y(t)=a/\mathrm{ch}\,t$$

или

$$x(t)=b,\qquad y(t)=\exp t.$$

Оно представляет собой полуокружность с центром $(b,0)$ и радиусом a либо луч, параллельный оси y.

Гамильтониан этой системы имеет вид $H(1/2y^2)(p_1^2+p_2^2)$. Чтобы построить соответствующую квантовую систему, мы должны иметь правила перехода от гамильтониана на произвольном римановом многообразии к уравнению Шрёдингера.

В первых работах по квантовой механике предлагалось правило

$$-\sum g^{ab}p_ap_b\to\Delta,$$

где Δ — оператор Лапласа — Бельтрами

$$\Delta=\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{a,\,b}\partial_a\left[g^{ab}\ \sqrt{g}\ \partial_b\right].$$

Для геодезического потока на плоскости Лобачевского уравнение Шрёдингера должно тогда иметь вид

$$-\frac{y^2}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi_\lambda = E_\lambda\psi_\lambda.$$

Другие рассуждения приводят к уравнению

$$\left(-\frac{\Delta}{2}+\frac{R}{6}\right)\psi_\lambda = E_\lambda\psi_\lambda,$$

где R — скалярная кривизна. Нестационарное уравнение Шрёдингера будет тогда иметь вид

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2\Delta}{2}\psi + \frac{\hbar^2 R}{6}\psi.$$

Пример 3.3.5. Рассмотрим гамильтониан $H=(1/2)(p^2+ e^{-2q})$. Тогда уравнения Гамильтона имеют вид

$$\dot{p} = -\exp(-2q), \qquad \dot{q} = p$$

и обладают решением $q(t)=\ln \operatorname{ch} t$. Этот пример является простейшей из так называемых цепочек Тоды, о которых говорится в гл. 7.

3.4. Геометрия симплектических многообразий

Определение 3.4.0. Пусть M^{2n} — гладкое многообразие четной размерности. Если на нем задано тензорное поле J типа $(1, 1)$, обладающее свойством $J^2=-1$, то M называется *почти комплексным многообразием.*

Мы будем часто пользоваться следующим результатом.

Теорема 3.4.1. *Пусть X — векторное поле на M, а α — некоторая k-форма. Если φ_t — однопараметрическая группа диффеоморфизмов, порожденная полем X, то*

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^*(\alpha) = \varphi_t^*(\mathscr{L}(X)\alpha).$$

Определение 3.4.2. Многообразие M^{2n} называется *почти симплектическим* (ПС), если на нем задана 2-форма Ω, для которой $\Omega^n\neq 0$.

Таким образом, ПС-многообразие имеет каноническую форму объема $v=\Omega^n/n!$ и ориентируемо.

Определение 3.4.3. ПС-многообразие (M, Ω) называется *симплектическим*, если форма Ω замкнута, $d\Omega=0$.

Пример 3.4.4. Основным примером является $\mathbf{R}^{2n}$ с формой $\Omega=\sum dp_k\wedge dq^k$. Ясно, что $d\Omega=0$ и $\Omega^n\neq 0$, так как $\Omega^n=$

$= \pm n! \, dq^1 \wedge \ldots \wedge dq^n \wedge dp_1 \wedge \ldots \wedge dp_n$ пропорциональна стандартной форме объема.

Каждое гладкое многообразие с почти комплексной структурой допускает введение такой положительно определенной римановой метрики g, что $g(JX, JY) = g(X, Y)$. Почти комплексное многообразие с такой метрикой называется *почти эрмитовым*. Если (M, g, Ω, J) — симплектическое многообразие с почти эрмитовой структурой и выполнено равенство $g(X, Y) = \Omega(X, JY)$, то M называется *почти кэлеровым*.

Рассмотрим теперь векторное поле $X = (\partial H/\partial p, -\partial H/\partial q)$ в локальных координатах (q, p). Поскольку $\mathscr{L}(X) q = \partial H/\partial p$ и $\mathscr{L}(X) p = -\partial H/\partial q$, мы видим, что

$$\mathscr{L}(X)\Omega = d\left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) \wedge dq + dp \wedge d\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) =$$

$$= \left(\frac{-\partial^2 H}{\partial p\, \partial q} dp - \frac{\partial^2 H}{\partial q^2} dq\right) \wedge dq + dp \wedge \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p^2} dp + \frac{\partial^2 H}{\partial p\, \partial q} dq\right) = 0.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3.4.5 (Лиувилль). *Элемент объема v инвариантен относительно гамильтонова векторного поля X, т. е. $\mathscr{L}(X) v = 0$.*

Определение 3.4.6. Если (M, Ω) — симплектическое многообразие, то поле $X \in V(M)$ называется *симплектическим*, если $\mathscr{L}(X)\Omega = 0$.

Пусть $\mathrm{Symp}(M, \Omega)$ означает множество симплектических векторных полей на (M, Ω). Поскольку $\mathscr{L}([X, Y]) = [\mathscr{L}(X), \mathscr{L}(Y)]$, мы видим, что справедлива

Теорема 3.4.7. $\mathrm{Symp}(M, \Omega)$ — *алгебра Ли.*

Определение 3.4.8. Диффеоморфизм $f\colon M \to M$ называется *симплектоморфизмом*, если $f^*\Omega = \Omega$.

Ясно, что если поле $X \in \mathrm{Symp}(M, \Omega)$ порождает однопараметрическую группу φ_t, то

$$\frac{d}{dt} \varphi_t^* \Omega = \varphi_t^* (\mathscr{L}(X)\Omega) = 0.$$

Поэтому $\varphi_t^*\Omega = \varphi_0^*\Omega = \Omega$.

Вернемся теперь к общему случаю почти симплектического многообразия.

Теорема 3.4.9. *Если (M, Ω) есть* ПС-*многообразие, то существуют однозначно определенные отображения*

$$p\colon A^1(M) \to V(M)\colon\ \varphi \to p(\varphi),$$

$$P\colon A(M) \to V(M)\colon\ f \to P(f),$$

задаваемые формулами

$$(p(\varphi)g)\Omega^n = n\varphi \wedge dg \wedge \Omega^{n-1},$$
$$(P(f)g)\Omega^n = n\,df \wedge dg \wedge \Omega^{n-1}.$$

Доказательство. Это сразу вытекает из невырожденности Ω^n и того, что так определенные $p(\varphi)$ и $P(f)$ удовлетворяют аксиомам векторных полей.

Определение 3.4.10. Отображения p, P называются *скобкой Пуассона* для ПС-многообразия (M, Ω).

Теорема 3.4.11. *Пусть p, P — скобка Пуассона для* ПС-*многообразия (M, Ω). Тогда*

(i) $P(f) = p(df)$;

(ii) *отображение* p: $A^1(M) \to V(M)$ A-*линейно*;

(iii) *отображение* P: $A(M) \to V(M)$ $\mathbf{R}$-*линейно*;

(iv) $P(f)g = -P(g)f$.

Теорема 3.4.12. *Если (M, Ω) есть* ПС-*многообразие, то отображения p, P однозначно определяются свойствами*

(i) $X = p(\varphi)$ *для* $\varphi \in A^1(M)$, *если и только если* $i(X)\Omega = -\varphi$;

(ii) $X = P(f)$ *для* $f \in A(M)$, *если и только если* $i(X)\Omega = -df$.

Доказательства этих двух теорем элементарны и оставляются в качестве упражнения.

Следствие 3.4.13. *Отображение p: $A^1 \to V$ взаимно однозначно; обратным к нему является отображение* $\mu(X) = p^{-1}(X) = -i(X)\Omega$, $X \in V(M)$.

Мы продолжим μ до изоморфизма модуля p-контравариантных кососимметрических тензоров A_p на модуль p-форм A^p.

Теорема 3.4.14. *Для любых p-форм φ_1 и φ_2 справедливо равенство*

$$i(\mu^{-1}(\varphi_1))\varphi_2 = (-1)^p i(\mu^{-1}(\varphi_2))\varphi_1.$$

Определение 3.4.15. Оператор *симплектического сопряжения* $\tilde{*}$: $A^p \to A^{2n-p}$ задается формулой $\tilde{*}\varphi = i(\mu^{-1}(\varphi))v$. Здесь $2n = \dim M$.

Теорема 3.4.16. *Симплектическое сопряжение обладает свойствами*

(i) $\tilde{*}^2 = 1$;

(ii) $\tilde{*}(\varphi \wedge \psi) = i(\mu^{-1}(\psi))(\tilde{*}\varphi)$.

Доказательство. (i) очевидно, а (ii) следует из равенств

$$i\left(\mu^{-1}(\varphi\wedge\psi)\right)v=i\left(\mu^{-1}(\varphi)\wedge\mu^{-1}(\psi)\right)v=i\left(\mu^{-1}(\varphi)\right)i\left(\mu^{-1}(\psi)\right)v.$$

Определение 3.4.17. Определим отображение L: $A^p\to A^{p+2}$, полагая $L(\varphi)=\Omega\wedge\varphi$, и пусть $\tilde{\Lambda}=\tilde{*}^{-1}L\tilde{*}=\tilde{*}L\tilde{*}$.

Теорема 3.4.18. $\tilde{\Lambda}\varphi=i\left(\mu^{-1}(\Omega)\right)\varphi$.

Локально 2-форму Ω можно записать в виде $\Omega=\sum\vartheta^\alpha\wedge\vartheta^{\alpha+n}$. Тогда выражение $ds^2=2\sum\vartheta^\alpha\vartheta^{\alpha+n}$ определяет метрику. Это приводит к следующему результату.

Теорема 3.4.19. *Если M есть ПС-многообразие, то существует метрика ds^2, определенная формой Ω таким образом, что M является почти комплексным многообразием. Пусть J означает оператор почти комплексной структуры. Тогда (M, Ω, J) — почти эрмитова структура.*

Определение 3.4.20. Оператор J задает отображение C: $A^p\to A^p$ по формуле

$$C\varphi(X_1, \ldots, X_p)=\varphi(JX_1, \ldots, JX_p).$$

Теорема 3.4.21.

(i) $C\Omega=\Omega$;

(ii) $C(\varphi_1\wedge\varphi_2)=C\varphi_1\wedge C\varphi_2$;

(iii) $C(\varphi_1+\varphi_2)=C\varphi_1+C\varphi_2$.

Для почти эрмитова многообразия метрика ds^2 определяет оператор эрмитова сопряжения $*$: $A^p\to A^{2n-p}$ (см. [H 22]), обладающий свойствами

(i) $*^2=(-1)^p$;

(ii) $*(a_1\varphi_1+a_2\varphi_2)=\bar{a}_1(*\varphi_1)+\bar{a}_2(*\varphi_2)$;

(iii) $(*\varphi_1)\wedge\varphi_2=\overline{\varphi_1\wedge(*\varphi_2)}$;

(iv) $[C,*]=0$;

(v) если определить Λ как $*^{-1}L*$, то $\Lambda=i(\mu^{-1}(\Omega))$ и $[C,\Lambda]=0$.

Почти эрмитова и почти симплектическая структуры связаны следующим образом:

Теорема 3.4.22.

(i) $\tilde{*}=(-1)^{n(n-1)/2}C^{-1}*$:

(ii) $\tilde{*}^2=*^2C^{-2}$;

(iii) *поскольку* $\tilde{\Lambda}=\tilde{*}L\tilde{*}=*CLC^{-1}*$ *и* $[C, L]=0$, *мы получаем* $\tilde{\Lambda}=*L*=\Lambda$. *Таким образом, оператор* Λ *зависит только от* ПС-*структуры.*

Скалярное произведение двух p-форм φ_1 и φ_2 определяется формулой

$$(\varphi_1, \varphi_2) = *(\varphi_1 \wedge * \varphi_2).$$

Легко проверить, что

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \overline{(\varphi_2, \varphi_1)},$$
$$(a\varphi_1 + b\varphi_2, \varphi_3) = \bar{a}(\varphi_1, \varphi_3) + \bar{b}(\varphi_2, \varphi_3),$$
$$(\varphi, \varphi) \neq 0 \quad \text{для} \quad \varphi \neq 0.$$

Относительно этого скалярного произведения операторы L и Λ сопряжены друг другу: $(L\varphi, \psi) = (\varphi, \Lambda\psi)$. Скалярное произведение де Рама для дифференциальных форм определяется равенством

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{\mathrm{dR}} = \int_M *(\varphi_1, \varphi_2).$$

Предположим, что (M, Ω) — симплектическое многообразие. *Симплектический кодифференциал* $\tilde{\delta}$ определяется на p-формах φ формулой $\tilde{\delta}\varphi = (-1)^p \tilde{*} d \tilde{*} \varphi$.

Теорема 3.4.23. (i) $\tilde{\delta}^2 = 0$,

(ii) $d\Lambda - \Lambda d = -\tilde{\delta}$,

(iii) $\tilde{\delta}L - L\tilde{\delta} = -d$.

Для кэлерова многообразия кодифференциал определяется равенством $\delta = (-1)^p *^{-1} d *$. Легко проверяется, что δ и $\tilde{\delta}$ связаны соотношением $\tilde{\delta} = -C^{-1}\delta C$.

Оператор Лапласа на p-формах определяется как $\Delta = d\delta + \delta d$. Если $\mathscr{H}^p = \{p\text{-формы } \varphi \mid \Delta\varphi = 0\}$ — пространство гармонических форм, то имеет место изоморфизм Ходжа $H^p_{\mathrm{dR}} \simeq \mathscr{H}^p$.

Теорема 3.4.24. *Пусть (M, Ω) — симплектическое многообразие. Если $X = p(\varphi)$, то $\mathscr{L}(X)\Omega = -d\varphi$.*

Доказательство. Поскольку $d\Omega = 0$ и $i(X)\Omega = -\varphi$, получаем $\mathscr{L}(X)\Omega = i(X)d\Omega + di(X)\Omega = -d\varphi$.

Теорема 3.4.25. *Отображение p устанавливает биекцию между $\mathbf{R}$-модулем $Z^1(M)$ всех замкнутых 1-форм на симплектическом многообразии (M, Ω) и $\mathbf{R}$-модулем* $\mathrm{Symp}(M)$.

Доказательство. Отображение p взаимно однозначно и в силу предыдущей теоремы $X = p(\varphi)$ — симплектическое векторное поле тогда и только тогда, когда $d\varphi = 0$.

Отображение $\mu = p^{-1}$ позволяет перенести структуру алгебры Ли с $\mathrm{Symp}(M)$ на $Z^1(M)$, а именно

$$[\varphi, \psi] = \mu([p(\varphi), p(\psi)]),$$

или, что то же самое, $[\varphi, \psi] = i([X, Y])\Omega$, где $X = p(\varphi)$, $Y = p(\psi)$.

Согласно 3.1.4, $i([X, Y])\Omega = \mathscr{L}(X)i(Y)\Omega = di(X)i(Y)\Omega$. Таким образом, пространство dA^0 точных 1-форм является идеалом в алгебре Ли Z^1 и $[Z^1, Z^1] \subset dA^0$.

Отображение p позволяет каждой функции $f \in A$ поставить в соответствие симплектическое векторное поле $X_f = p(df)$. Если $b_1(M) = 0$, то все симплектические векторные поля получаются таким образом, так как в этом случае все замкнутые 1-формы φ имеют вид df.

Определение 3.4.26. Поле X_f называется *гамильтоновым векторным полем* с производящей функцией $f \in A(M)$.

Ясно, что $X_f \in \mathrm{Symp}(M, \Omega)$.

Определение 3.4.27. Обозначим через $\mathrm{Ham}(M, \Omega)$ совокупность гамильтоновых векторных полей на (M, Ω).

Теорема 3.4.28. $[\mathrm{Symp}(M), \mathrm{Symp}(M)] \subset \mathrm{Ham}(M)$.

Пусть $B = p(Z^1(M))$ и $B^* = p(dA(M))$. Из теоремы де Рама следует

Теорема 3.4.29. $B/B^* \simeq H^1(M, R)$.

Определение 3.4.30. Пусть B^c обозначает алгебру Ли конформно-симплектических полей, т. е. таких полей X, для которых $\mathscr{L}(X)\Omega = K_X \cdot \Omega$, где K_X — константа.

Алгебры Ли B и B^* являются идеалами в B^c. Справедливо равенство $K_X\Omega = -d\mu(X)$. Поэтому, если форма Ω не точна (например, если M компактно), то $K_X = 0$ для всех $X \in B^c$, так что $B^c = B$.

Если Ω точна, то $\Omega = d\mu(X_0)$, где X_0 — поле из B^c, для которого $K_{X_0} = -1$. Пусть C_0 — одномерное пространство, порожденное полем X_0.

Теорема 3.4.31. *Если форма Ω точна, то $B^c = B + C_0$ и $\dim B^c/B = 1$.*

Определение 3.4.32. Алгебра Ли (конечномерная или бесконечномерная) называется *полупростой*, если она не имеет ненулевых абелевых идеалов.

Теорема 3.4.33. *Алгебры Ли B^c, B и B^* полупросты.*

Определение 3.4.34. *Дифференцированием* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется линейное отображение D: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, обладающее свойством $D[u, v] = [Du, v] + [u, Dv]$. Дифференцирование D называется *внутренним*, если существует такой $X \in \mathfrak{g}$, что $DY = [X, Y]$ для всех $Y \in \mathfrak{g}$.

Теорема 3.4.35. *Все дифференцирования алгебр Ли B^c, B и B^* имеют вид $Y \to [X, Y]$, где $X \in B^c$, т. е. порождаются инфинитезимальными конформно-симплектическими преобразованиями.*

Обсудим кратко понятие когомологий алгебр Ли, которое нам понадобится для последующих результатов. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и $X \to \rho(X)$ — представление $\mathfrak{g}$ в пространстве E.

Определим *n-коцепь* как кососимметричное полилинейное отображение

$$\mathfrak{g} \times \ldots \times \mathfrak{g} \to E\colon\ X_1, \ldots, X_n \to \omega(X_1, \ldots, X_n) \in E.$$

Векторное пространство n-коцепей обозначается через $C^n(\mathfrak{g}, E)$. По определению $C^0(\mathfrak{g}, E) = E$. Кограничный оператор определяется формулой

$$d\omega(X_1, \ldots, X_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n+1-i} \rho(X_i)\, \omega(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_{n+1}) + \\ + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{n+1}, [X_i, X_j]),$$

где $\widehat{\ }$ означает, что соответствующий аргумент должен быть опущен.

Например, для $n = 0$ имеем $d\omega(X) = \rho(X)\omega$. Для $n = 1$

$$d\omega(X_1, X_2) = \rho(X_1)\,\omega(X_2) - \rho(X_2)\,\omega(X_1) - \omega([X_1, X_2]).$$

Определим операцию свертки $i(X)\colon C^n \to C^{n-1}$:

$$(i(X)\omega)(X_1, \ldots, X_{n-1}) = \omega(X, X_1, \ldots, X_{n-1}).$$

Производная Ли коцепи ω по элементу X определяется как

$$(\mathscr{L}(X)\omega)(X_1, \ldots, X_n) = \rho(X)\,\omega(X_1, \ldots, X_n) - \\ - \sum_{i=1}^{n} \omega(X_1, \ldots, [X, X_i], \ldots, X_n).$$

Мы оставляем читателю убедиться, что справедлива

Теорема 3.4.36. (1) $\mathscr{L}(X)\omega = i(X)\,d\omega + d(i(X)\omega)$,
(2) $d(d\omega) = 0$.

Как обычно, элемент $\omega \in C^n$ называется *коциклом*, если $d\omega = 0$, и *кограницей*, если $\omega \in dC^{n-1}$. Пространство n-коциклов обозначается через Z^n, а пространство n-кограниц — через B^n. По определению $C^{-1} = \{0\}$. Ясно, что $B^n \subset Z^n$. Факторпространство $H^n = Z^n/B^n$ называется n-м *пространством когомологий* пары $(\mathfrak{g}, \rho)$.

Элементы $\omega \in Z^0$ обладают свойством $0 = d\omega(X) = \rho(X)\omega$ для всех $X \in \mathfrak{g}$. Таким образом, $H^0 = Z^0$ совпадает с множеством векторов из E, аннулируемых операторами $\rho(X)$.

Рассмотрим теперь случай $E = \mathfrak{g}$, $\rho = \mathrm{ad}$. Тогда

$$d\omega(X_0, \ldots, X_p) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k [X_k, \omega(X_0, \ldots, \widehat{X}_k, \ldots, X_p)] + \\ + \sum_{k<l} (-1)^{k+l} \omega([X_k, X_l], X_0, \ldots, \widehat{X}_k, \ldots, \widehat{X}_l, \ldots, X_p).$$

Если $\omega = dY$ для $Y = \mathfrak{g}$, то $\omega(X) = [X, Y]$. Если ω есть 1-коцепь, то

$$d\omega(X, Y) = [X, \omega(Y)] + [\omega(X), Y] - \omega([X, Y]).$$

Таким образом, пространство $Z^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ совпадает с пространством дифференцирований, в то время как $B^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ состоит из внутренних дифференцирований. Из сказанного выше мы знаем, что пространство дифференцирований алгебры Ли B совпадает с B^c, а пространство внутренних дифференцирований — с B. Значит, $H^1(B, B) = B^c/B$. По теореме де Рама $H^1(M, R)$ изоморфно B/B^* (теорема 3.4.29). Комбинируя эти факты, получим

Следствие 3.4.36′. $H^1(B^c, B^c) = 0$, $H^1(B^*, B^*) = B^c/B^*$.

Теорема 3.4.37. *Если форма Ω не точна (например, если M компактно), то* $\dim H^1(B) = 0$ *и* $\dim H^1(B^*) = b_1(M)$. *Если же Ω точна, то* $\dim H^1(B) = 1$ *и* $\dim H^1(B^*) = b_1(M) + 1$.

Теорема 3.4.38 (Дарбу). *Для любой точки m на симплектическом многообразии (M, Ω) существует открытая окрестность U точки m и такие локальные координаты $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots \ldots, p_n)$ в этой окрестности, что*

$$\Omega \mid U = \sum dp_i \wedge dq_i.$$

В координатах Дарбу скобка Пуассона имеет вид

$$P(f)g = \{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right).$$

3.5. Классическая механика и группы симметрии

Определение 3.5.1. Пусть Y — векторное поле на симплектическом многообразии (M, Ω) с выделенным гамильтонианом $H \in A(M)$. Поле Y называется *инфинитезимальной симметрией* системы (M, Ω, H), если

$$\mathscr{L}(Y)\Omega = 0, \quad \mathscr{L}(Y)X_H = [Y, X_H] = 0,$$

Пусть φ_t — однопараметрическая группа, порожденная инфинитезимальной симметрией Y. Тогда, очевидно, $\varphi_t^*\Omega = \Omega$ и $(\varphi_t)_*(X_H) = X_H$.

Определение 3.5.2. Если преобразование φ удовлетворяет условиям $\varphi^*\Omega = \Omega$ и $\varphi_*(X_H) = X_H$, то оно называется *симметрией* гамильтоновой системы (M, Ω, H).

Пусть h_Y — локальная производящая функция поля Y. Тогда $\mu([X_H, Y]) = d\{H, h_Y\} = 0$.

Определение 3.5.3. Функция h называется *интегралом движения*, если $\{h, H\} = 0$.

Ясно, что гамильтониан H (энергия) является интегралом движения.

В гильбертовом пространстве $L^2(M, v)$ поток g_t, сохраняющий объем, порождает однопараметрическую группу унитарных операторов $U_t f(m) = f(g_{-t} m)$. По теореме Стоуна существует такой самосопряженный оператор H, что $U_t = \exp(-itH)$.

Аналогично в квантовой механике динамика задается однопараметрической группой $V(t) = \exp(-itH)$. Другие наблюдаемые также реализуются самосопряженными операторами A.

Определение 3.5.4. Квантовая наблюдаемая A называется *интегралом движения*, если $V(t)\exp(-isA) = \exp(-isA)V(t)$ для всех s и t.

Вычисляя производные от этого выражения, получаем такой результат:

Теорема 3.5.5. *Если A — интеграл движения, то* $[H, A] = 0$.

Связь обсуждаемых понятий с теорией унитарных представлений состоит в следующем. Если задано унитарное представление U группы Ли G, то U порождает представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G по формуле

$$\dot{U}(X) = \left.\frac{dU(\exp tX)}{dt}\right|_{t=0} \quad \text{для} \quad X \in \mathfrak{g}.$$

Инвариантность гамильтониана относительно группы G, действующей согласно представлению U, влечет за собой соотношение

$$U(\exp tX)H = HU(\exp tX).$$

Дифференцируя, получаем формально $[\dot{U}(X), H] = 0$. Таким образом, операторы $\dot{U}(X)$ для $X \in \mathfrak{g}$ формально являются интегралами движения. Например, если H инвариантен относительно группы $SO(3)$, то операторы углового момента являются интегралами движения. Чтобы сделать эти рассуждения (и утверждения) строгими, требуется более тщательный анализ, включающий рассмотрение областей определения операторов и т. п. См. [H 11].

3.6. Однородные симплектические многообразия

Определение 3.6.1. Пусть G — группа Ли, действующая на симплектическом многообразии (M, Ω) симплектоморфизмами. В этом случае мы говорим, что (G, M, Ω) — *симплектическое G-пространство*. Если G действует транзитивно, пространство называется *однородным симплектическим G-пространством.*

Определим отображение $\sigma\colon \mathfrak{g} \to V(M)$, полагая

$$(\sigma(X) f)(m) = -\frac{df}{dt}(\exp tX \cdot m)\big|_{t=0}.$$

Определение 3.6.2. Симплектическое G-пространство называется *строго симплектическим*, если $\sigma(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{Ham}(M)$.

Определение 3.6.3. Если (M, Ω) — строго симплектическое G-пространство, то отображение $\lambda\colon \mathfrak{g} \to A(M)$ называется *гладким поднятием* гомоморфизма σ, если коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r] & \mathbf{R} \arrow[r] & A(M) \arrow[r, "p"] & \mathrm{Ham}(M, \Omega) \arrow[r] & 0 \\ & & & \mathfrak{g} \arrow[ul, "\lambda"] \arrow[u, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

Если, кроме того, λ является гомоморфизмом алгебр Ли, то оно называется *поднятием Ли* гомоморфизма σ.

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} H^0(M, \mathbf{R}) \arrow[r, "p_0"] & A(M) \arrow[r, "p"] & \mathrm{Symp}(M, \Omega) \arrow[r, "p_1"] & H^1(M, \mathbf{R}) \arrow[r] & 0, \\ & & \mathfrak{g} \arrow[ul, "\lambda"] \arrow[u, "\sigma"'] \end{tikzcd} \qquad (*)$$

Поскольку $[\mathrm{Symp}(M), \mathrm{Symp}(M)] \subset p(A(M))$, p_1 является гомоморфизмом алгебр Ли, если снабдить $H^1(M, \mathbf{R})$ структурой коммутативной алгебры Ли. Аналогично если считать $H^0(M, \mathbf{R})$ коммутативной алгеброй Ли, то p_0 будет гомоморфизмом алгебр Ли. Таким образом, $(*)$ — точная последовательность в категории алгебр Ли.

Гладкое поднятие λ гомоморфизма σ существует, если $\sigma(\mathfrak{g}) \subset p(A(M))$, т. е. если $p_1 \cdot \sigma = 0$. Но $p_1 \cdot \sigma$ является гомоморфизмом алгебр Ли, а $H^1(M, \mathbf{R})$ коммутативна. Поэтому $p_1 \cdot \sigma$ аннулирует $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Если обозначить через $\bar{p}$ факторотображение

$\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \to H^1(M, \mathbf{R})$, то равенство $\bar{p}=0$ необходимо и достаточно для существования гладкого поднятия λ. Ясно, что это выполняется в следующих трех случаях:

(a) если $\mathfrak{g}$ полупроста (тогда $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\mathfrak{g}$);

(b) если $\Omega=d\omega$ и ω инвариантна относительно $\mathfrak{g}$ (тогда $\lambda(X)=-\omega(X)$ является поднятием);

(c) если $H^1(M, \mathbf{R})=0$.

Пример 3.6.4. Рассмотрим евклидову группу $E(2)$. Ее алгебра Ли состоит из матриц

$$r(a, b, c)=\begin{pmatrix} 0 & -c & a \\ c & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad a, b, c \in \mathbf{R}.$$

Базис в ней образуют элементы $I_1=r(1,0,0)$, $I_2=r(0,1,0)$, $I_3=r(0,0,1)$ с коммутационными соотношениями $[I_1, I_2]=0$, $[I_3, I_1]=I_2$, $[I_3, I_2]=-I_1$. Рассмотрим однопараметрические подгруппы $g_k(t)=\exp(tI_k)$, $k=1, 2, 3$. Тогда при действии $E(2)$ на плоскости с симплектической формой $\Omega=dp\wedge dq$ подгруппы $g_k(t)$ задают потоки, сохраняющие площадь, и, следовательно, порождаются гамильтоновыми векторными полями. А именно $\sigma(I_1)=-\partial/\partial p$, $\sigma(I_2)=-\partial/\partial q$, $\sigma(I_3)=p\partial/\partial q-q\partial/\partial p$. Ясно, что $\mathscr{L}(\sigma(I_k))\Omega=0$. Заметим, что $\Omega=d\omega$, где $\omega=(pdq-qdp)/2$. Поэтому существует поднятие λ, задаваемое формулой $\lambda(X)=$ $=-\omega(\sigma(X))$. В нашем случае $\lambda(I_1)=q/2$, $\lambda(I_2)=-p/2$, $\lambda(I_3)=H=(p^2+q^2)/2$.

Для исследования того, когда поднятие является гомоморфизмом алгебр Ли, мы используем введенное Сурьо понятие *обобщенного момента*.

Определение 3.6.5. Пусть (M, Ω) — строго симплектическое многообразие с поднятием λ. Определим отображение s: $M\to\mathfrak{g}^*$, полагая $s(m)(X)=\lambda(X)(m)$ для $X\in\mathfrak{g}$. Положим $c(X_1, X_2)=$ $=s([X_1, X_2])-\{s(X_1), s(X_2)\}$. Тогда c является билинейным кососимметричным отображением $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ в $A(M)$, для которого $p\cdot c=0$ и которое является 2-коциклом, т. е. $\sum\limits_{\text{цикл.}} c([X, Y], Z)=0$.

Теорема 3.6.6. *Поднятие Ли существует тогда и только тогда, когда c является кограницей.*

Препятствием к существованию поднятия является элемент из $H^2(\mathfrak{g}, \mathbf{R})\otimes H^0(M, \mathbf{R})$. Легко проверяется, что в перечисленных выше случаях (a) и (b) это препятствие исчезает.

Определение 3.6.7. Если (M, Ω) — строго симплектическое G-пространство с поднятием Ли λ, то (M, Ω, G, λ) называется *гамильтоновым* G-пространством.

Для $X, Y \in \mathrm{Ham}(M)$ с $\mu(X) = df$ и $\mu(Y) = dg$ положим $A(X, Y) = \int\limits_M fgv$. Поскольку

$$A([Z, X], Y) + A(X, [Z, Y]) = \int Z(fg)\,v = 0$$

для $Z \in \mathrm{Ham}(M)$, $\mu(Z) = d\varphi$, справедлива

Теорема 3.6.8. $A([Z, X], Y) + A(X, [Z, Y]) = 0$, *т. е.* A *инвариантно относительно* $\mathrm{ad\,Ham}(M)$.

Если $M = G/H$ — компактное симплектическое многообразие, положим $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g} \cap \mathrm{Ham}(M)$. Будем считать $\mathfrak{g}$ конечномерной. Пусть $\mathfrak{s}$ — подпространство в $\mathfrak{g}^0$, инвариантное относительно $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$. Тогда его ортогональное дополнение относительно A также инвариантно. Значит, представление $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}^0$ вполне приводимо и справедлива

Теорема 3.6.9. *Алгебра* $\mathfrak{g}^0$ *редуктивна, т. е.* $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{a} + [\mathfrak{g}^0, \mathfrak{g}^0]$, *где* $\mathfrak{a}$ — *абелев идеал.*

Если $X \in \mathfrak{g}$ принадлежит централизатору $\mathfrak{g}^0$ в $\mathfrak{g}$, то для 1-формы $\varphi = \mu(X)$ и любого элемента $Y \in \mathfrak{g}^0$ справедливо равенство

$$-i(Y)\,i(X)\,\Omega = -\Lambda(\varphi \wedge dg) = \mathrm{const},$$

где $dg = \mu(Y)$. Поскольку $\int\limits_M \Lambda(\varphi \wedge dg)\,\tilde{v} = 0$, мы видим, что эта константа равна нулю. Значит, $i(Y)\varphi = 0$ для всех $Y \in \mathfrak{g}^0$. Если $G^0 = \exp \mathfrak{g}^0$ транзитивна, отсюда следует, что $\varphi = 0$ и $X = 0$.

Тем самым доказана

Теорема 3.6.10. *Если* $M = G/H$ — *компактное однородное симплектическое многообразие и* $b_1(M) = 0$, *то группа* G (*компактная или некомпактная*) *полупроста.*

Классификационная теорема Вана утверждает, что пространство $M = G/H$, где G — компактная полупростая группа, является однородным симплектическим, если и только если H является централизатором некоторого тора в G. В этом случае H является кэлеровым, имеет положительную эйлерову характеристику $\chi(M)$ и односвязно. Этот результат был обобщен Костантом, см. гл. 7 о геометрии орбит.

Отметим здесь, что если $M = G/H$ — однородное симплектическое пространство, группа G не обязательно компактна, но фундаментальная группа пространства M конечна, то G полупроста. Тогда по теореме Монтгомери максимальная компактная подгруппа G^u в G действует транзитивно на M и $M = G^u/H^u$, где $H^u = H \cap G^u$ — централизатор тора в G^u. Мы увидим ниже, что пространства такого типа являются многообразиями Ходжа и, следовательно, алгебраическими многообразиями.

Задачи

Упражнение 3.1. Показать, что скобку Пуассона можно записать в виде

$$\{f, g\} = \Lambda (df \wedge dg).$$

Упражнение 3.2. Показать, что если $M = G/H$ — однородное симплектическое многообразие с компактной группой G, то соответствующая почти кэлерова структура инвариантна относительно G и $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + \mathfrak{c}$, где $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathrm{Ham}\, M$, а центр $\mathfrak{c}$ порождается прообразами гармонических форм относительно p.

Упражнение 3.3. Рассмотрим сферический ротатор, определенный в разд. 0.2.2, с координатами $q = (\vartheta, \varphi, \psi)$ и метрикой $g_{11} = g_{22} = g_{33} = I$, $g_{23} = g_{32} = I \cos\vartheta$, остальные g_{ij} равны 0. Показать, что тензор кривизны определяется равенством $R_{ijkl} = (4I)^{-1}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$. Напомним, что линейная комбинация моментов $L = \sum v^i p_i$ является интегралом движения, если и только если коэффициенты v^i удовлетворяют уравнению Киллинга $\nabla_i v^j + \nabla_j v^i = 0$, где ∇_i — ковариантная производная по координате q_i. Показать, что решениями уравнений Киллинга являются

$$v_1 = -a_1 \sin\varphi + a_2 \cos\varphi - b_1 \sin\psi + b_2 \cos\psi,$$

$$v_2 = a_3 + (b_1 \cos\psi + b_2 \sin\psi) \sin\varphi + b_3 \cos\vartheta,$$

$$v_3 = (a_1 \cos\varphi + a_2 \sin\varphi) \sin\vartheta + a_3 \cos\vartheta + b_3,$$

где a_i, b_i, $i = 1, 2, 3,$ — произвольные константы. Показать, что этим величинам соответствуют шесть операторов $-i \sum v_k \partial/\partial q_k$, которые являются квантовыми интегралами движения. А именно

$$M_1(\varphi, \psi) = i\left[\sin\varphi \frac{\partial}{\partial\vartheta} + \operatorname{ctg}\vartheta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\psi}\right],$$

$$M_2(\varphi, \psi) = i\left[-\cos\varphi \frac{\partial}{\partial\vartheta} + \operatorname{ctg}\vartheta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\psi}\right],$$

$$M_3(\varphi, \psi) = -i \frac{\partial}{\partial\varphi},$$

а также $N_k(\varphi, \psi) = M_k(\psi, \varphi)$, $k = 1, 2, 3$. Читатель должен заметить, что эти операторы представляют угловые моменты. Показать, что $[M_k, N_j] = 0$, $[M_k, M_j] = i\varepsilon_{kjl}M_l$, $[N_k, N_j] = i\varepsilon_{kjl}N_l$. Таким образом $\{M_i\}$ и $\{N_i\}$ — два коммутирующих набора операторов, каждый из которых порождает алгебру Ли группы $SO(3)$. Вместе они порождают $SO(4)$. Последняя группа является группой кинематической симметрии свободного сферического ротатора.

Глава 4 Геометрия контактных многообразий

4.1. Контактные многообразия

Определение 4.1.1. Многообразие M размерности $2n+1$ называется *контактным многообразием*, если на нем задана глобально 1-форма $\omega \in A^1(M)$, удовлетворяющая условию $\omega \wedge \wedge (d\omega)^n \neq 0$ во всех точках M.

Определение 4.1.2. Многообразие M размерности $2n+1$ называется *почти контактным многообразием*, если заданы 1-форма $\omega \in A^1(M)$ и 2-форма $\pi \in A^2(M)$, для которых $\omega \wedge \pi^n \neq 0$ всюду на M.

Ясно, что контактное многообразие является почти контактным.

Определение 4.1.3. Для заданного почти контактного многообразия (M, ω, π) определим глобальное векторное поле $V_\omega \in \in V(M)$ и отображения

$$l\colon A^1(M) \to V(M), \quad L\colon A(M) \to V(M)$$

формулами

$$V_\omega(f) \cdot \omega \wedge \pi^n = df \wedge \pi^n,$$

$$l(\varphi) f \cdot \omega \wedge \pi^n = n\varphi \wedge df \wedge \omega \wedge \pi^{n-1},$$

$$L(f) g \cdot \omega \wedge \pi^n = n\, df \wedge dg \wedge \omega \wedge \pi^{n-1}.$$

Здесь $f, g \in A(M)$, $\varphi \in A^1(M)$. Поле V_ω называется *каноническим полем*, а отображения l, L называются *скобками Лагранжа*.

Векторные поля V_ω, $l(\varphi)$ и $L(f)$ однозначно определены, так как $(2n+1)$-форма $\omega \wedge \pi^n$ является базисом в A-модуле $A^{2n+1}(M)$. Следующие соотношения легко проверяются.

Теорема 4.1.4. *Пусть l, L — скобки Лагранжа на почти контактном многообразии. Тогда*

(i) $L(f) = l(df)$,

(ii) *отображение l A-линейно,*

(iii) *отображение L $\mathbb{R}$-линейно и является A-дифференцированием,*

(iv) $L(f)g = -L(g)f$.

Теорема 4.1.5. *Каноническое векторное поле V_ω и скобки Лагранжа l, L на почти контактном многообразии однозначно определяются свойствами*

(i) $i(V_\omega)\omega = 1$, $i(V_\omega)\pi = 0$;
(ii) $i(l(\varphi))\omega = 0$, $i(l(\varphi))\pi = \varphi(V_\omega)\omega - \varphi$;
(iii) $i(L(f))\omega = 0$, $i(L(f))\pi = V_\omega(f)\omega - df$.

Доказательство оставляется в качестве упражнения.

Определение 4.1.6. Зададим отображение K: $A(M) \to V(M)$ для почти контактного многообразия M, полагая $K(f) = fV_\omega + L(f)$.

Из сформулированных выше теорем вытекает, что имеет место

Теорема 4.1.7. (i) *Отображение K $\mathbf{R}$-линейно.*
(ii) $K(fg) = fK(g) + gK(f) - fgV_\omega$,
(iii) $X = K(f)$, *если и только если* $i(X)\omega = f$ *и* $i(X)\pi = V_\omega(f)\omega - df$.

Следствие 4.1.8. *Отображение K: $A \to V$ инъективно и ω: $V \to A$ — его левый обратный.*

Доказательство. $\omega(K(f)) = i(K(f))\omega = f$, т. е. $\omega \circ K = 1$.

Определение 4.1.9. Поле $X \in V(M)$ называется *горизонтальным*, если $\omega(X) = 0$. Пусть $W = W(M)$ означает *пространство горизонтальных полей.*

Определение 4.1.10. Форма $\varphi \in A^p(M)$ называется *базовой*, если $i(V_\omega)\varphi = 0$. Обозначим через $B^1(M)$ пространство базовых 1-форм.

Теорема 4.1.11. *Следующие последовательности*

$$0 \to W \to V \xrightarrow{\omega} A \to 0,$$

$$0 \to B^1 \to A^1 \xrightarrow{i(V_\omega)} A \to 0$$

точны и допускают расщепления $r(V_\omega)$: $f \to f \cdot V_\omega$ *и* $r(\omega)$: $f \to f \cdot \omega$.

Пусть $\tilde{\pi}$: $V \to A^1$ означает отображение, переводящее X в $\tilde{\pi}(X) = i(X)\pi$.

Теорема 4.1.12. *Отображение $\tilde{\pi}$ устанавливает изоморфизм A-модулей W и B^1 так, что следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & W \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\pi}"'] & V \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\alpha"'] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B^1 \arrow[r] & A^1 \arrow[r, "i(V_\omega)"] & A \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

где $\alpha = \tilde{\pi} + r(\omega)\omega$.

Пример 4.1.13. Пространство $\mathbf{R}^{2n+1}$ с координатами $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n, z)$ является контактным многообразием с контактной формой $\omega = dz - \sum_k y^k\, dx^k$.

Пример 4.1.14. При довольно просто формулируемых условиях контактным многообразием является регулярно погруженная в $\mathbf{R}^{2n+2}$ (или, более общо, в $T^*(N)$) гиперповерхность M. В случае погружения в $\mathbf{R}^{2n+2}$ условие состоит в том, чтобы касательные гиперплоскости к M не проходили через начало координат. Например, сфера S^{2n+1}, заданная уравнением $\sum (x^i)^2 = 1$, является контактным многообразием с контактной формой $\omega = i^*(\beta)$, где $\beta = \sum_{i=0}^{n} (x^{2i+1}\, dx^{2i+2} - x^{2i+2}\, dx^{2i+1})$, а i означает вложение S^{2n+1} в $\mathbf{R}^{2n+2}$.

Поскольку так определенная контактная форма инвариантна относительно антиподального отображения $x \to -x$, мы видим, что

Пример 4.1.15. Вещественное проективное пространство $RP(2n+1)$ является контактным многообразием с контактной формой ω, определенной выше.

Контактные многообразия естественно возникают в механике. Рассмотрим уравнения геодезических

$$\dot{x}^r = X^r, \qquad \dot{X}^r = -\Gamma^r_{jk} X^j X^k, \qquad r = 1, 2, \ldots, n,$$

на открытом множестве $U \subset T(N)$ с координатами $(x^1, \ldots, x^n, X^1, \ldots, X^n)$, где N — риманово многообразие с метрикой g и ковариантной производной ∇. По теореме единственности для дифференциальных уравнений существует ровно одна (параметризованная) геодезическая, ведущая из $p(0)$ в $p(t)$ в TN. Отображение T_t: $p(0) \to p(t)$ при каждом t является диффеоморфизмом $T(N)$. Эти отображения образуют абелеву группу, называемую *геодезическим потоком* на $T(N)$ с траекториями $p(t)$.

Векторное поле на $T(N)$, задаваемое локально выражением $(X^i, -\Gamma^i_{jk} X^j X^k)$ на U, называется *геодезическим векторным полем*. Если N — риманово многообразие, на TN также есть естественная риманова метрика, а именно $ds^2 = g(dx, dx) + g(\nabla X, \nabla X)$.

Теорема 4.1.16 (Лиувилль). *Геодезический поток сохраняет риманову метрику ds^2 на $T(N)$.*

Вследствие закона сохранения энергии геодезический поток T_t сохраняет многообразие $T_1(N)$ единичных касательных векторов. Это многообразие является расслоением над N со слоем S^{n-1} и структурной группой $O(n)$. Оно является гиперповерхностью в $T(N) \simeq T^*(N)$. Мы получаем

Пример 4.1.17. Расслоение $T_1(N)$ является контактным многообразием с контактной формой $\omega = g_{ij}X^j dx^i$. В самом деле, $d\omega = g_{ij}\nabla X^j \wedge dx^i$ и поэтому $\omega \wedge (d\omega)^{n-1} \neq 0$. Мы оставляем читателю проверку того, что геодезическое поле является каноническим, т. е. удовлетворяет соотношениям $i(X)\omega = 1$, $i(X)d\omega = 0$.

Используя вложение $T_1(N) \to T(N)$, можно перенести контактную форму ω на косферическое расслоение $T_1^*(N)$ и получить

Пример 4.1.18. Косферическое расслоение $T_1^*(N)$ (состоящее из единичных ковекторов на N) является контактным многообразием.

Мы рассмотрим ниже специальные примеры сферических и косферических расслоений. Напомним сначала, что сферическое расслоение $T_1(S^n)$ над n-мерной сферой S^n — это многообразие Штифеля $V(n+1, 2) = SO(n+1)/SO(n-1)$. Простейший пример получится при $n = 2$.

Пример 4.1.19. Пусть $N = S^2$. Тогда касательное сферическое расслоение $T_1(N)$ изоморфно $RP(3)$. А именно для $p \in T_1(S^2)$ рассмотрим единичный вектор $e_1(p) = \pi(p) \in S^2$ и положим $e_2(p) = p$, $e_3(p) = e_1(p) \times e_2(p)$, где $\times$ означает векторное произведение в $\mathbf{R}^3$. Тогда диффеоморфизм f: $T_1(S^2) \to SO(3)$ определяется равенством $f(p) = (e_1(p), e_2(p), e_3(p))$. Хорошо известно, что $SO(3)$ диффеоморфно $RP(3)$. Если геодезическую на S^2 параметризовать с помощью длины дуги s, то геодезические уравнения на $T_1(S^2)$ будут

$$x'' = -by + ay', \quad y'' = cy,$$

где штрих означает производную по s, $a = (x', y)$, $b = (x', y')$, $c = -(y', y')$.

Пример 4.1.20. Пример единичного косферического расслоения получается из рассмотрения компактных римановых поверхностей вида $M = \Gamma \backslash \mathcal{P}$, где $\mathcal{P}$ — полуплоскость Пуанкаре $\{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, а Γ — дискретная группа движений $\mathcal{P}$. Легко проверяется, что $\mathcal{P} = SL(2, \mathbf{R})/SO(2)$ как однородное пространство. Мы хотим показать, что $T_1^*(M)$ диффеоморфно $SL(2, \mathbf{R})/\Gamma$. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что действие $PSL(2, \mathbf{R})$, поднятое с $\mathcal{P}$ на $T_1^*(\mathcal{P})$, транзитивно и свободно. Поэтому $T_1^*(\mathcal{P}) \simeq PSL(2, \mathbf{R})$. Факторизуя по действию Γ, получаем нужный результат.

Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ вещественных матриц второго порядка со следом 0 имеет базис

$$E_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_\alpha = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

с коммутационными соотношениями $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = 2H_\alpha$, $[H_\alpha, E_{\pm\alpha}] = \pm E_{\pm\alpha}$. Экспоненциальное отображение дает

$$\exp(tH_\alpha) = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix},$$

$$\exp((t/2)(E_\alpha - E_{-\alpha})) = \begin{pmatrix} \cos(t/2) & \sin(t/2) \\ -\sin(t/2) & \cos(t/2) \end{pmatrix},$$

$$\exp((t/2)(E_\alpha + E_{-\alpha})) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(t/2) & \operatorname{sh}(t/2) \\ \operatorname{sh}(t/2) & \operatorname{ch}(t/2) \end{pmatrix}.$$

Пусть $X_\pm$ и Y означают векторные поля на $N = SL(2, \mathbf{R})/\Gamma$, соответствующие элементам $E_{\pm\alpha}$ и H_α. Они удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям. Далее, существует единственная 1-форма ω на N, для которой $i(Y)\omega = 1$ и $i(X_\pm)\omega = 0$. Поскольку $2 = i([X_+, X_-])\omega = d\omega(X_+, X_-)$, мы видим, что $\omega \wedge d\omega \neq 0$. Значит, форма ω задает на N контактную структуру. Мы оставляем читателю проверку того, что 1-форма ω эквивалентна канонической контактной форме на $T_1^*(\Gamma\backslash\mathscr{P})$.

Теорема 4.1.21. *Если M — компактное ориентируемое 3-мерное многообразие, то на M существует 1-форма ω, задающая контактную структуру.*

Мы уже видели, что трехмерная сфера S^3 в $\mathbf{R}^4$ обладает контактной структурой

$$\omega_1 = i^*(x_1 dx_2 - x_2 dx_1 + x_3 dx_4 - x_4 dx_3),$$

где i: $S^3 \to \mathbf{R}^4$ — естественное вложение. При инволюции τ: $S^3 \to S^3 : (x_1, x_2, x_3, x_4) \to (x_1, x_2, x_3, -x_4)$ эта структура переходит в $\tau^*\omega_1 = \omega_{-1}$, где

$$\omega_{-1} = i^*(x_1 dx_2 - x_2 dx_1 - x_3 dx_4 + x_4 dx_3).$$

Определение 4.1.22. *Контактным распределением* на контактном многообразии (M, ω) называется подрасслоение Σ_ω касательного расслоения, определенное уравнением $\omega = 0$.

Легко проверяется, что это распределение вполне неинтегрируемо. А именно если записать $d\omega$ локально в виде $d\omega = \sum \alpha^i \wedge \alpha^{n+i}$ и обозначить через $\{X_i\}$ дуальный к $\{\alpha^i\}$ базис в A-модуле векторных полей, касательных к Σ_ω, то $\omega([X_i, X_j]) =$

$= -2d\omega(X_i, X_j) \neq 0$, если $i \equiv (n+j) \bmod 2n$. Таким образом, $d\omega$ невырождена на Σ_ω, т. е. Σ_ω вполне неинтегрируемо.

Теорема 4.1.23. *Если Σ_ω — вполне неинтегрируемое распределение на M, то (M, ω) — контактное многообразие.*

Определение 4.1.24. Два контактных распределения Σ, Σ' называются *изоморфными*, если существует такой диффеоморфизм f, для которого $f^*_m(\Sigma_m) = \Sigma'_{f(m)}$ для всех $m \in M$.

Определение 4.1.25. Две контактные структуры ω и ω' на M называются *сопряженными*, если существует такой диффеоморфизм f: $M \to M$ и такая функция $g \in A(M)$, что $\omega' = g \cdot f^*(\omega)$.

Теорема 4.1.26. *Структуры ω и ω' сопряжены тогда и только тогда, когда контактные распределения Σ и Σ' изоморфны.*

Мы уже видели, что на S^3 структуры, задаваемые формами ω_1 и ω_{-1}, сопряжены.

Определение 4.1.27. Две контактные структуры на M называются *изоморфными*, если соответствующие распределения изоморфны.

Теорема 4.1.28. *Пусть M — компактное ориентируемое трехмерное многообразие. Тогда на M существует бесконечно много попарно неизоморфных контактных структур.*

Следствие 4.1.29. *Утверждение теоремы справедливо, в частности, для S^3 и S^3/Γ, где Γ — конечная группа, действующая на S^3 свободно с сохранением ориентации. Таким образом, на $SO(3) = T_1(S^2) = RP(3)$ существует бесконечно много неизоморфных контактных структур.*

Другим примером, иллюстрирующим эту теорему, являются линзовые пространства $L(p, q)$. Если вместо вещественных координат $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ в $\mathbf{R}^4$ ввести комплексные координаты $z = x_1 + ix_2$ и $w = x_3 + ix_4$, то S^3 станет подмножеством в $\mathbf{C}^2$, задаваемым уравнением $|z|^2 + |w|^2 = 1$. Определим отображение γ: $S^3 \to S^3$, полагая $\gamma(z, w) = (\exp(2\pi i/p)z,\ \exp(2\pi iq/p)w)$. Ясно, что $\gamma^p = 1$. Положим $L(p, q) = S^3/\Gamma$, где Γ — подгруппа в $SO(4)$, порожденная преобразованием γ. Пространство $L(p, q)$ называется *линзовым пространством.* Это — компактное ориентируемое многообразие с фундаментальной группой $\mathbf{Z}_p$. Если обозначить через π: $S^3 \to L(p, q)$ накрывающее отображение, то форма ω на S^3 является образом относительно π^* некоторой формы ω' на $L(p, q)$, если $\gamma^*\omega = \omega$. Поскольку формы $\omega_{\pm 1}$ на S^3 инвариантны относительно γ, мы получаем пример контактной структуры на $L(p, q)$. Разумеется, $L(2, 1) \simeq RP(3)$.

Следующий аналог теоремы Дарбу принадлежит Э. Картану.

Теорема 4.1.30. *Если (M, ω) — контактное многообразие размерности $2n+1$, то локально всегда можно ввести такие координаты (q^k, p^k, z), в которых форма ω имеет вид $dz - \sum p^k dq^k$.*

4.2. Почти контактные римановы многообразия

Если M — почти контактное риманово многообразие, то структурная группа касательного расслоения редуцируется с $SO(2n+1)$ до $U(n) \times I$, а почти контактная структура может быть задана тензорным полем φ типа $(1, 1)$, векторным полем V_ω и 1-формой ω, связанными соотношениями

$$\omega(V_\omega) = 1, \quad \varphi^2 = -1 + V_\omega \cdot \omega.$$

Теорема 4.2.1. *Введенные выше объекты обладают также свойствами*

$$\varphi \cdot V_\omega = 0, \quad \omega \cdot \varphi = 0, \quad \varphi^3 + \varphi = 0, \quad \operatorname{rank} \varphi = 2n.$$

Определим риманову метрику g на M, полагая $g(X, V_\omega) = \omega(X)$, $g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \omega(X)\omega(Y)$. Эта метрика называется *ассоциированной* с почти контактной структурой. Определим 2-форму $\widetilde{\Omega}$ равенством $\widetilde{\Omega}(X, Y) = g(X, \varphi Y)$.

Теорема 4.2.2. *Если M допускает 2-форму Ω ранга $2n$, то оно допускает почти контактную структуру $(\varphi, V_\omega, \omega, g)$, для которой $\Omega(X, Y) = g(X, \varphi Y)$.*

Ясно, что всякое контактное многообразие (M, ω) допускает почти контактную метрическую структуру.

Отображение $\varphi(m)$ может быть продолжено до линейного отображения комплексифицированного касательного пространства $T_m^{\mathbf{C}}(M)$ в точке m. Собственными значениями этого отображения являются 0 и $\pm i$ с собственными подпространствами V_0 и $V_{\pm i}$ размерности 1 и n соответственно. Пусть D_0 и $D_{\pm i}$ означают соответствующие комплексные распределения на M.

Определение 4.2.3. Почти контактная структура называется *нормальной*, если распределения D_i и $D_i + D_0$ вполне интегрируемы.

Теорема 4.2.4. *Структура $(\varphi, V_\omega, \omega)$ нормальна тогда и только тогда, когда форма ω инвариантна относительно локальной группы преобразований, порожденной полем V_ω.*

Теорема 4.2.5. *Если (M, ω) — контактное многообразие, то траектории поля V_ω являются геодезическими ассоциированной* *римановой метрики. Если (M, ω) — нормальное почти контактное многообразие, то V_ω является полем Киллинга ассоциированной метрики, т. е. $\mathcal{L}(V_\omega)g = 0$.*

Теорема 4.2.6. *Пусть G — редуктивная группа Ли нечетной размерности. Тогда G допускает левоинвариантную нормальную почти контактную структуру.*

Следствие 4.2.7. *Всякая компактная нечетномерная группа Ли обладает левоинвариантной нормальной почти контактной структурой.*

4.3. Динамические системы и контактные многообразия

Изучение связи между динамическими системами и контактными многообразиями было начато Рибом. Он заметил, что с динамической системой $\dot{x} = X(x)$, задаваемой гладким векторным полем X на многообразии M, часто можно связать контактную структуру на M. Риб изучил пространство орбит и слоение, образуемое орбитами. Он обратил внимание на примеры таких систем, даваемые геодезическими потоками на сферах и проективных пространствах (вещественных, комплексных и кватернионных). С помощью результатов, описываемых ниже, Риб показал, что произведения различных нечетномерных сфер не допускают такой структуры.

Мы будем изучать геометрию орбит, определяемых ненулевым векторным полем X на $(2n+1)$-мерном многообразии.

Определение 4.3.1. Поле X называется *собственным*, если оно порождает группу диффеоморфизмов M.

Определение 4.3.2. Поле X называется *регулярным в смысле Пале*, если фактортопология пространства орбит отделима.

Теорема 4.3.3 (Пале). *Если поле X собственно и регулярно, то пространство орбит B, снабженное фактортопологией, является гладким $2n$-мерным многообразием с гладкой проекцией $M \to B$.*

Определение 4.3.4. *Функцией периода* на M называется функция $P_X(m) = \inf(t \mid t > 0,\ \varphi_t(m) = m)$, где $\varphi_t = \exp(tX)$.

Теорема 4.3.5. *Если X — собственное регулярное поле на компактном многообразии M с контактной структурой, обладающее свойствами $\mathcal{L}(X)\omega = 0$, $i(X)\omega = 1$, то функция периода P_X постоянна на M.*

Определение 4.3.6. Пусть (M, ω) — контактное многообразие с каноническим векторным полем X. Мы назовем (M, ω) *регулярным*, если поле X регулярно.

Теорема 4.3.7. *Если (M, ω) — связное компактное регулярное контактное многообразие, то оно является главным расслоенным пространством со слоем окружность.*

Доказательство. В силу теоремы 4.3.5 функция периода постоянна. Поэтому на M определено свободное действие группы вращений окружности.

Теорема 4.3.8 (Бусби — Ван). *Пусть (M, ω) — компактное регулярное контактное многообразие. Тогда на M можно ввести структуру главного расслоенного пространства $S^1 \to M \xrightarrow{p} B$ со слоем окружность и с формой связности $\tilde{\omega}$, пропорциональной ω. База B является симплектическим многообразием с формой Ω, для которой $p^*\Omega = d\tilde{\omega}$. Наконец, Ω определяет целочисленный класс когомологий B.*

Доказательство. В силу последнего результата мы можем заменить форму ω на пропорциональную форму так, чтобы каноническое поле X было генератором действия окружности S^1. Мы оставляем читателю проверку того, что $p\colon M \to B$ определяет структуру главного расслоенного пространства, а также того, что $\tilde{\omega}$ является S^1-инвариантной формой связности (при естественном отождествлении алгебры Ли группы S^1 с вещественной прямой) со свойством $\tilde{\omega}(X) = 1$.

Поскольку группа S^1 абелева, $[\tilde{\omega}(X), \tilde{\omega}(Y)] = 0$. Поэтому

$$d\tilde{\omega}(X, Y) = -\frac{1}{2}[\tilde{\omega}(X), \tilde{\omega} Y)] + \tilde{\Omega}(X, Y) = \tilde{\Omega}(X, Y).$$

Значит, $d\tilde{\omega}$ совпадает с формой кривизны $\tilde{\Omega}$. Поскольку $R(g)\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}$ для $g \in S^1$ и $i(X)\tilde{\Omega} = 0$, существует единственная 2-форма Ω на B, для которой $p^*(\Omega) = \tilde{\Omega}$. В силу изоморфизма между формами на B и горизонтальными S^1-инвариантными формами на M имеем $p^*(d\Omega) = dp^*(\Omega) = d(d\tilde{\omega}) = 0$, $p^*(\Omega^n) = (p^*\Omega)^n = (d\tilde{\omega})^n \neq 0$. Таким образом, (B, Ω) — симплектическое многообразие. Проверка целочисленности Ω оставляется читателю.

Из точной последовательности абелевых групп

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{R} \to S^1 \to 0$$

следует точная последовательность пучков абелевых групп

$$0 \to \underline{\mathbf{Z}} \to \underline{\mathbf{R}} \to \underline{S}^1 \to 0.$$

Пучок $\underline{\mathbf{R}}$ является тонким. Отсюда вытекает биекция

$$H^1(B, \underline{S}^1) \to H^2(B, \underline{\mathbf{Z}}): \ L \to \chi(L),$$

переводящая расслоение L в его класс Эйлера — Пуанкаре. Это приводит к следующему результату.

Теорема 4.3.9. *Пусть (B, Ω) — симплектическое многообразие и форма Ω задает целочисленный класс когомологий. Тогда над B существует главное расслоение M со слоем окружность и с формой связности ω; многообразие (M, ω) является контактным, и его каноническое поле совпадает с генератором действия S^1.*

Доказательство оставляем читателю.

Наконец, мы свяжем нормальную контактную риманову структуру с кэлеровыми многообразиями:

Теорема 4.3.10. *Компактное регулярное контактное риманово многообразие нормально тогда и только тогда, когда его база (в смысле теоремы Бусби — Вана) (B, Ω) является многообразием Ходжа (т. е. компактным кэлеровым многообразием, на котором форма Ω порождает целочисленный класс когомологий).*

Пример 4.3.11. Рассмотрим двумерную сферу $S^2 = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$. Это — гладкое компактное двумерное многообразие. Отождествляя S^2 с $CP(1)$, мы видим, что S^2 — кэлерово многообразие. Мы будем исследовать симплектическую структуру, пользуясь комплексными координатами. Сфера S^2 покрывается двумя открытыми множествами $U_\pm = S^2 \setminus \{(0, 0, \pm 1)\}$. Для $x \in U_\pm$ положим $z_\pm = (x_1 \pm ix_2)(1 \mp x_3)^{-1}$. Тем самым $U_\pm$ отождествляется с $\mathbf{C}$. На пересечении $U_+ \cap U_-$ справедливо равенство $z_+ z_- = 1$. Определим одномерное векторное расслоение над S^2, полагая $c_{++} = c_{--} = 1$, $c_{+-} = z_+^n$, $c_{-+} = z_-^n$.

В качестве симплектической формы на S^2 возьмем $\Omega = 2i\nu(1 + z_\pm \bar{z}_\pm)^{-2} d\bar{z}_\pm \wedge dz_\pm$. Построим 1-формы $\alpha_\pm$ так, чтобы на $U_\pm$ выполнялось равенство $\Omega = d\alpha_\pm$. Естественно положить $\alpha_\pm = 2i\nu\bar{z}_\pm(1 + z_\pm\bar{z}_\pm)^{-1} dz_\pm$. Заметим, что $\alpha_+ - \alpha_- = 2i\nu dz_+/z_+$. Но $dc_{+-}/2\pi i c_{+-} = n dz_+/2\pi i z_+$. Поэтому $\alpha_\pm$ задают связность на L, если $\nu = -n/4\pi$. Кривизна этой связности выражается формой $\Omega^{(n)}$, где $\Omega^{(n)} | U_\pm = \frac{n}{2\pi i}(1 + z_\pm\bar{z}_\pm)^{-2} d\bar{z}_\pm \wedge dz_\pm$. Пространство $H^2(S^2, \mathbf{R})$ отождествляется с $\mathbf{R}$ с помощью изоморфизма де Рама, $(\beta) \to \int\limits_{S^2} \beta$. В нашем случае

$$\int\limits_{S^2} \Omega^{(n)} = n \in \mathbf{Z}.$$

Поэтому (S^2, Ω) — многообразие Ходжа. Пространство (L, ω), где $\omega = (in/2\pi)\, d \ln z_{\pm} + \alpha_{\pm}$, является контактным многообразием над S^2. Определим поляризацию (см. разд. 6.1) на S^2, полагая $\mathcal{F}_x = \mathbf{C}\partial/\partial\bar{z}_{\pm}$ для $x \in U_{\pm}$. Тогда $(S^2, \Omega^{(n)}, \mathcal{F})$ будет кэлеровой поляризацией при $n \neq 0$. Мы оставляем читателю проверку того, что группа $SU(2)$ действует на S^2, сохраняя $\mathcal{F}$ и $\Omega^{(n)}$. Поэтому $(S^2, \Omega^{(n)}, \mathcal{F})$ — строго симплектическое многообразие с допустимой поляризацией (см. разд. 6.2). Читатель сам найдет отображения λ и σ, делающие диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{R} \arrow[r] & A(S^2) \arrow[r] & \mathrm{Ham}\,(S^2, \Omega^{(n)}) \arrow[r] & 0 \\
 & & & \mathfrak{su}(2) \arrow[ul, "\lambda"] \arrow[u, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативной, так что $(S^2, \Omega^{(n)})$ становится гамильтоновым $SU(2)$-пространством.

Определение 4.3.12. *Эрмитовой структурой h* на линейном расслоении L называется отображение, которое каждой точке базы x ставит в соответствие положительно определенное скалярное произведение h_x на слое L_x.

Определение 4.3.13. Если в расслоении L заданы связность ∇ и эрмитова структура h, то h называется *∇-инвариантной*, если

$$Xh(f, g) = h(\nabla_X f, g) + h(f, \nabla_X g).$$

Теорема 4.3.14. *Если $H^1(M, \mathbf{R}) = 0$, то ∇-инвариантная эрмитова структура на расслоении $L \to M$ существует тогда и только тогда, когда форма кривизны Ω связности ∇ является вещественной 2-формой на M.*

Обозначим через $L_c(B, \Omega)$ множество всех линейных расслоений над B с ∇-инвариантной эрмитовой структурой и формой кривизны Ω.

Теорема 4.3.15. *Множество $L_c(B, \Omega)$ непусто, если и только если класс $[\Omega] \in H^2(B, \mathbf{R})$ целочисленный. В этом случае $L_c(B, \Omega)$ отождествляется с прообразом $[\Omega]$ при отображении*

$$H^1(B, \mathbf{R}/\mathbf{Z}) \to H^2(B, \mathbf{Z})$$

(которое совпадает с отображением, переводящим класс эквивалентности расслоения L в $c_1(L)$ — его класс Эйлера — Пуанкаре).

Определение 4.3.16. Пусть $P_i(z_0, \ldots, z_n) = \sum_j \alpha_{ij} z_j^{a_{ij}}$, $i = 1, \ldots, m$, — множество из m многочленов от $n+1$ переменных, где $\alpha_{ij} \in \mathbf{R}$, a_{ij} — натуральные числа. Положим $V = \{z \in \mathbf{C}^{n+1} \mid P_i(z) = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant m\}$. Если $S(\varepsilon)$ — гиперсфера радиуса ε с центром в нуле, то $\Sigma(\varepsilon) = V \cap S(\varepsilon)$ называется *обобщенным многообразием Брискорна.*

Теорема 4.3.17. *Многообразие $\Sigma(\varepsilon)$ допускает однопараметрическое семейство нормальных контактных структур $(\varphi(t), V_\omega(t), \omega(t))$, $t \in R$. Эти структуры, вообще говоря, не регулярны.*

Пример 4.3.18. Пусть $P(z) = z_0 + \ldots + z_{m-1} + z_m^l$. Поскольку V не имеет особых точек, многообразие Σ диффеоморфно S^{2m-1}. Действие S^1 на Σ задается формулой

$$t(z_0, \ldots, z_m) = (\exp(2\pi i l t) z_0, \ldots, \exp(2\pi i l t) z_{m-1}, \exp(2\pi i t) z_m).$$

Единственный нетривиальный стабилизатор имеет вид $\mathbf{Z}_l$. Поэтому при $(k, l) = 1$ действие $\mathbf{Z}_k$ на Σ свободно, так как $\mathbf{Z}_k \cap \mathbf{Z}_l = \{e\}$. Рассмотрим многообразие $M = \Sigma/\mathbf{Z}_k$. Нормальная контактная структура (φ, V, ω) на Σ порождает аналогичную структуру $(\bar\varphi, \bar V, \bar\omega)$ на M. Мы утверждаем, что эта структура может быть регулярной лишь при $l = 1$. В этом случае контактное слоение, ассоциированное с $\bar\omega$, совпадает с расслоением Хопфа, и на M возникает регулярная контактная структура, $\pi_1(M) = \mathbf{Z}_k$; в частности, при $k = 2$ в качестве M получается вещественное проективное пространство.

Пример 4.3.19. Пусть

$$P(z) = z_0^{q_1 \cdots q_n} + \ldots + z_{n-1}^{q_1 \cdots q_{n-2} q_n} + z_n^{q_1 \cdots q_{n-1}}$$

— многочлен Брискорна. Тогда Σ диффеоморфно обобщенному линзовому пространству $L(p; q_1, \ldots, q_n) = S^{2n-1}/\Gamma$, где $\Gamma = \mathbf{Z}_p$ действует на $z \in \mathbf{C}^{n+1}$ по формуле $t(z) = (\exp(2\pi i t) z_0, \exp(2\pi i q_1 t) z_1, \ldots, \exp(2\pi i q_n t) z_n)$. Можно показать, что Σ обладает нормальной контактной структурой, вообще говоря, нерегулярной.

Определение 4.3.20. Будем говорить, что контактные структуры ω и ω' на M *строго сопряжены*, если существует диффеоморфизм f, для которого $f^*(\omega) = \omega'$.

Теорема 4.3.21. *Пусть $\Sigma^{(a_1, \ldots, a_n)}$ и $\Sigma^{(b_1, \ldots, b_n)}$ — два многообразия Брискорна с нормальными контактными структурами ω_a*

и ω_b *соответственно. Структуры* ω_a *и* ω_b *строго сопряжены только в том случае, когда их срезовые диаграммы* (см. [JS 1]) *совпадают.*

Пример 4.3.22. Положим $P_q(z) = z_0 + z_1 + z_2^q + \ldots + z_n^q$, $q > 0$. В этом случае Σ_q диффеоморфно S^{2n-1}. Действие S^1 на Σ_q задается формулой $t(z) = (\exp(2\pi iqt) z_0, \exp(2\pi iqt) z_1, \ldots$ $\ldots, \exp(2\pi it) z_n)$. Срезовые диаграммы для Σ_q и Σ_r не совпадают при $q \neq r$. Таким образом, контактные структуры ω_q, $q = 1, 2, \ldots$, все различны в смысле строгой сопряженности на S^{2n-1}. Разумеется, ω_1 является нормальной контактной структурой, связанной с расслоением Хопфа

$$S^1 \to S^{2n-1} \to CP(n-1).$$

4.4. Топология регулярных контактных многообразий

Топологические свойства регулярных контактных многообразий не зависят от вводимой на них римановой метрики.

Теорема 4.1.1. *Пусть* M — *компактное регулярное контактное многообразие, расслоенное на окружности:* $S^1 \to M \to B$. *Тогда существуют почти комплексная структура* J *и почти кэлерова метрика* h *на* B, *обладающие свойствами* $d\omega = 2p^*\Omega$ *и* $\Omega(X, Y) = h(X, JY)$.

Следствие 4.4.2. *Почти кэлерова структура на* B *является кэлеровой, если и только если контактная метрическая структура нормальна.*

Теорема 4.4.3. *Если* M — *регулярное контактное риманово многообразие, то* $b_1(M) = b_1(B)$.

Доказательство следует из точной последовательности Гизина для расслоения на окружности:

$$0 \to H^1(B, \mathbf{R}) \xrightarrow{p^*} H^1(M, \mathbf{R}) \to H^0(B, \mathbf{R}) \xrightarrow{L_0} H^2(B, \mathbf{R}) \to \ldots$$
$$\ldots \xrightarrow{L_{p-2}} H^p(B, \mathbf{R}) \xrightarrow{p^*} H^p(M, \mathbf{R}),$$

где L_p: $\alpha \to \Omega \wedge \alpha \in H^{p+2}(B, R)$ для $\alpha \in H^p(B, R)$. Поскольку L_0 является мономорфизмом, предыдущее отображение нулевое и теорема доказана.

Теорема 4.4.4. *При тех же условиях на* M, *если* φ — *гармоническая* 1*-форма на* B, *то* $p^*\varphi$ *гармонична, а если* ψ — *гармоническая форма на* M, *то* $\psi = p^*\varphi$ *для некоторой гармонической формы* φ *на* B.

Замечая, что для кэлеровой базы B отображение L_p является мономорфизмом при $p \leqslant (m-3)/2$, где $m = \dim M$, а p^* — эпиморфизм, мы получаем, что справедлива

Теорема 4.4.5. *Если M — нормальное регулярное компактное контактное риманово многообразие, то $b_1(M) = b_1(B)$, $b_p(M) = b_p(B) - b_{p-2}(B)$ для $2 \leqslant p \leqslant (m-1)/2$ и $b_p(M) = b_{p-1}(B) - b_{p+1}(B)$* для $(m+1)/2 \leqslant p < m$.

Поскольку $H^0(B, \mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}$, получаем

Следствие 4.4.6. $b_2(M) = b_2(B) - 1$.

Поскольку $b_p(B)$ четно, если p нечетно, получаем

Следствие 4.4.7. *$b_p(M)$ четно, если p нечетно и $\leqslant (m-1)/2$ или если p четно и $\geqslant (m+1)/2$.*

Следствие 4.4.8. *Для любой гармонической r-формы ψ на M при $r \leqslant (m-1)/2$ существует такая гармоническая r-форма φ на B, что $\psi = p^*\varphi$.*

4.5. Инфинитезимальные контактные преобразования

Поскольку для контактного многообразия (M, ω) определена почти контактная структура $(\omega, d\omega)$, то определены и объекты V_ω, l, L, K.

Теорема 4.5.1. *Если (M, ω) — контактное многообразие, то*

(i) $X = V_\omega \Leftrightarrow i(X)\omega = 1$ *и* $i(X)d\omega = 0$,

(ii) $X = l(\varphi) \Leftrightarrow i(X)\omega = 0$ *и* $i(X)d\omega = \varphi(V_\omega)\omega - \varphi$,

(iii) $X = L(f) \Leftrightarrow i(X)\omega = 0$ *и* $i(X)d\omega = (V_\omega f)\omega - df$,

(iv) $X = K(f) \Leftrightarrow i(X)\omega = f$ *и* $i(X)d\omega = (V_\omega f)\omega - df$.

Определение 4.5.2. Векторное поле X на контактном многообразии (M, ω) называется *инфинитезимальным контактным преобразованием*, если существует такая функция $k \in A(M)$, что $\mathscr{L}(X)\omega = k\omega$. Пусть $\mathrm{cont}(M, \omega)$ означает множество таких полей.

Определение 4.5.3. Векторное поле X называется *инфинитезимальным автоморфизмом* контактной структуры, если $\mathscr{L}(X)\omega = 0$. Пусть $\mathrm{cont}_0(M, \omega)$ означает множество таких полей.

Поскольку имеет место равенство $[\mathscr{L}(X), \mathscr{L}(Y)] = \mathscr{L}([X, Y])$, пространства $\mathrm{cont}(M, \omega)$ и $\mathrm{cont}_0(M, \omega)$ являются алгебрами Ли.

Теорема 4.5.4. *Если $X \in \mathrm{cont}(M, \omega)$, то функция $k \in A(M)$, для которой $\mathscr{L}(X)\omega = k\omega$, дается формулой $k = V_\omega\omega(X)$.*

Доказательство следует из равенства $\mathscr{L}(X)\omega = d\omega(X) + i(X)d\omega = k\omega$, если его умножить внутренне на поле V_ω.

Теорема 4.5.5. *Если (M, ω) — контактное многообразие, то K: $A(M) \to V(M)$ является биекцией $A(M)$ на* $\operatorname{cont}(M, \omega)$ *с обратным отображением* $\omega|_{\operatorname{cont}(M,\omega)}$.

Следствие 4.5.6. *Поле V_ω — это $K(1) \in \operatorname{cont}_0(M)$.*

Суммируя, получаем коммутативную диаграмму линейных пространств с точными строками

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_0(M) \arrow[r] \arrow[d, shift left] & A(M) \arrow[r] \arrow[d, shift left, "K"] & A(M) \\
0 \arrow[r] & \operatorname{cont}_0(M) \arrow[r] \arrow[u, shift left] & \operatorname{cont}(M) \arrow[r] \arrow[u, shift left, "\alpha"] & A(M)
\end{tikzcd}$$

где $A_0(M)$ — пространство первых интегралов для V_ω, а α: $X \to k$, где $\mathscr{L}(X)\omega = k\omega$.

Определение 4.5.7. *Скобка Якоби* $[f, g]$ в $A(M)$ определяется равенством

$$[f, g] = \omega([X, Y]), \text{ где } X = K(f), \ Y = K(g).$$

Справедливы

Теорема 4.5.8. $K([f, g]) = [K(f), K(g)]$.

Теорема 4.5.9. *Алгебра Ли* $\operatorname{cont}(M)$ *изоморфна* $A(M)$ *со скобкой Якоби.*

Следующие равенства элементарны:

Теорема 4.5.10. *Если $X = K(f)$ и $Y = K(g)$ для $f, g \in A(M)$, то*

(i) $L(f)g = d\omega(X, Y)$,
(ii) $[f, g] = L(f)g + fV_\omega g - gV_\omega f$.

Следствие 4.5.11. *Если $X \in \operatorname{cont}_0(M)$, т. е. X — базисное поле, то $[f, g] = K(f)g$, а если X, $Y \in \operatorname{cont}_0(M)$, то $[f, g] = L(f)g$.*

Перечислим другие свойства V_ω, K и L.

Теорема 4.5.12.
(i) $V_\omega(L(f)g) = L(V_\omega f)g + L(f)V_\omega g$;
(ii) $[fV_\omega, gV_\omega] = (fV_\omega g - gV_\omega f)V_\omega$;
(iii) $L(f)L(g)h + L(g)L(h)f + L(h)L(f)g = V_\omega fL(g)h + V_\omega gL(h)f + V_\omega hL(f)g$;
(iv) $[L(f), gV_\omega] = L(f)gV_\omega - gL(V_\omega f)$;

(v) $[L(f), L(g)] = L(L(f)g) = L(f)gV_\omega + V_\omega fL(g) - V_\omega gL(f)$.

Если локально $\omega = dz - \sum p^j\, dq^j$, то $V_\omega = \partial/\partial z$ и

$$L(f)g = \sum \frac{\partial g}{\partial p^j}\left(\frac{\partial f}{\partial q^j} + p^j\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \sum \frac{\partial f}{\partial p^j}\left(\frac{\partial g}{\partial q^j} + p^j\frac{\partial g}{\partial z}\right).$$

Таким образом,

$$[f, g] = \{f, g\} - \frac{\partial f}{\partial z}\left(g - \sum p^j\frac{\partial g}{\partial p^j}\right) + \frac{\partial g}{\partial z}\left(f - \sum p^j\frac{\partial f}{\partial p^j}\right).$$

В частности, если f базисна, то

$$K(f)g = \left(f - \sum p^j\frac{\partial f}{\partial p^j}\right)\frac{\partial g}{\partial z} + \{f, g\}.$$

Теорема 4.5.13. *Имеет место точная последовательность*

$$0 \to \mathrm{cont}_0(M, \omega) \to \mathrm{cont}(M, \omega) \to V(M) \to H^1(M, \underline{\mathrm{cont}}_0(M)) \to 0$$

и $H^q(M, \underline{\mathrm{cont}}_0) = 0$ *при* $q \geqslant 2$; *здесь* $\underline{\mathrm{cont}}_0$ *означает пучок ростков инфинитезимальных автоморфизмов.*

Пусть M — регулярное контактное многообразие, расслоенное над B со слоями $G = S^1$ или $\mathbf{R}$ с помощью поля V_ω.

Определение 4.5.14. Если φ есть p-форма на M, $0 \leqslant p \leqslant 2n+1$, то она называется *инвариантной* в случае, когда $\mathscr{L}(V_\omega)\varphi = 0$.

Определение 4.5.15. Форма φ называется *динамической*, если она инвариантна и если $i(V_\omega)\varphi = 0$ для $1 \leqslant p \leqslant 2n+1$. При $p = 0$ инвариантная p-форма называется *первым интегралом* для V_ω. Иногда динамические формы называют *абсолютными интегральными инвариантами* для V_ω.

Определение 4.5.16. Поле X называется *характеристическим для* ω, если $i(X)\omega = 1$ и $\mathscr{L}(X)\omega = 0$.

Теорема 4.5.17. *Если M — регулярное контактное многообразие над B с проекцией p: $M \to B$, то k-форма φ на M будет динамической тогда и только тогда, когда $\varphi = p^*\psi$ для некоторой k-формы ψ на B.*

Доказательство. Из равенства $i(V_\omega)\varphi = 0$ мы видим, что φ определяется своими значениями на горизонтальных векторных полях $X_1, \ldots, X_k$ в любой точке $m \in M$. Однако равенство $\mathscr{L}(V_\omega)\varphi = 0$ влечет за собой инвариантность относительно правых сдвигов $R(g)$, так что $\varphi(R(g)X_1, \ldots, R(g)X_k) = R(g)^*\varphi(X_1, \ldots, X_k)$. Таким образом, существует такая форма ψ в точке $p(m)$, что $\varphi = p^*\psi$. Обратно, если $\varphi = p^*\psi$, то $R(g)^*\varphi = \varphi$ и $i(V_\omega)\varphi = 0$; поэтому φ — динамическая форма.

Следствие 4.5.18. *Пусть* $A_0^k(M)$ — *пространство динамических* k-*форм на* M. *Тогда* p^*: $A^k(B) \to A_0^k(M)$ — *изоморфизм.*

Ясно, что множество инвариантных базисных форм образует дифференциальное кольцо.

Теорема 4.5.19. *Если* M — *компактное регулярное контактное многообразие,* $H^*_{\mathrm{dR}}(B, \mathbf{R})$ *означает когомологии де Рама, а* $H_0^*(M, \mathbf{R})$ — *кольцо замкнутых инвариантных форм на* M, *то* $H^*_{\mathrm{dR}}(B, \mathbf{R})$ *изоморфно* $H_0^*(M, \mathbf{R})$.

Ясно, что каждая инвариантная 0-форма u на M записывается в виде $u = u_1 \wedge \omega + u_0$ с динамическими u_1 и u_0 — достаточно взять $u_1 = 0$, $u_0 = u$. Это обобщается на $H_0^*(M, \mathbf{R})$.

Теорема 4.5.20. *Каждая инвариантная* k-*форма* u *на регулярном контактном многообразии* M *может быть записана в виде* $u = u_1 \wedge \omega + u_0$, *где* u_1 *и* u_0 — *динамические* $(k-1)$-*форма и* k-*форма на* M; *если* u *замкнута, то замкнута и форма* u_1.

Следствие 4.5.21. *Каждая инвариантная* 1-*форма на регулярном контактном многообразии является динамической.*

Определение 4.5.22. Пусть K^p — совокупность замкнутых p-форм φ на B, которые при умножении на характеристический класс $\Omega \in H^2(B, \mathbf{R})$ переходят в кограницу. Положим $\beta_p = \dim K^p$ при $p \geqslant 0$ и $\beta_p = 0$ при $p < 0$. Тогд $b_p(M) = b_p(B) - b_{p-2}(B) + \beta_{p-1} - \beta_{p-2}$ при $p \geqslant 0$.

4.6. Однородные контактные многообразия

Определение 4.6.1. Контактное многообразие (M, ω) называется *однородным*, если существует транзитивная группа Ли строго контактных преобразований M.

Если (M, ω) — однородное контактное многообразие и если M компактно и односвязно, то в группе Ли, транзитивно действующей на M, есть компактная полупростая подгруппа, также транзитивно действующая на M. Более того, эту группу также можно считать односвязной.

Вернемся к общей ситуации произвольного однородного контактного многообразия. Пусть $M = G/K$, где K — стабилизатор точки x_0. Определим обычную проекцию π: $G \to M$, полагая $\pi(g) = gx_0$ для $g \in G$. Тогда $\pi^{-1}(x_0) = K$.

По определению форма ω инвариантна относительно G, поэтому инвариантно и поле V_ω. Значит, орбиты этого поля транзитивно преобразуются группой G. Поэтому если одна из орбит замкнута, то все орбиты замкнуты.

Пусть ω есть G-инвариантная контактная форма на M. Полагая $\tilde{\omega} = \pi^*\omega$, определим подгруппу

$$H = \{g \in G \mid (\operatorname{Ad} g)^* \tilde{\omega} = \tilde{\omega}\}.$$

Легко проверяется, что H содержит K. Алгебра Ли подгруппы H имеет вид

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\tilde{\omega}(X, Y) = 0 \text{ для всех } Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Наконец, $\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{k} + 1$. Это следует из того, что ранг $d\tilde{\omega}$ равен рангу $d\omega$, т. е. $2n$, и из равенств $\operatorname{rank} d\tilde{\omega} = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h}$, $\operatorname{rank} d\omega = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{k} - 1$. Отсюда следует

Теорема 4.6.2 (Бусби — Ван). *Пусть G — связная группа Ли и $M = (G/K, \omega)$ — однородное контактное многообразие. Тогда ω регулярна и интегральные кривые поля V_ω являются слоями расслоения $G/K \to G/H^0K$, где H^0 — связная компонента подгруппы H. Таким образом, интегральные кривые, гомеоморфные H^0K/K, являются либо простыми замкнутыми кривыми, либо гомеоморфны интервалу.*

Как отмечалось выше, если M компактно, то мы можем считать G полупростой. Рассмотрим случай, когда $K = \{e\}$.

Теорема 4.6.3. *Если G — связная полупростая группа с левоинвариантной контактной формой ω, то она локально изоморфна либо $SO(3, \mathbf{R})$, либо $SL(2, \mathbf{R})$.*

Доказательство. Пусть B — форма Киллинга на $\mathfrak{g}$. Она невырожденна, и, значит, существует единственный элемент $A \in \mathfrak{g}$, для которого $\omega(X) = B(X, A)$ для всех $X \in \mathfrak{g}$. Если $(\operatorname{Ad} g)^*\omega = \omega$, то, поскольку $\omega(\operatorname{Ad} gX) = \omega(X)$, мы видим, что $B(A, X) = \omega(X) = \omega(\operatorname{Ad} gX) = B(A, \operatorname{Ad} gX)$. Однако $\operatorname{Ad} g$ — автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$, и он оставляет B инвариантной. Поэтому

$$B(A, X) = B(\operatorname{Ad} g^{-1}A, X).$$

Так как B невырожденна, а X произвольно, мы получаем $\operatorname{Ad} g^{-1}A = A$. Верно и обратное.

Напомним, что *централизатором* подмножества $N \subset G$ называется подгруппа

$$C(N) = \{g \in G \mid gng^{-1} = n \text{ для всех } n \in N\}.$$

Мы видим, что подгруппа H является централизатором однопараметрической подгруппы, порожденной A.

Поскольку $M = G$, т. е. $K = \{e\}$, получаем $\dim H = 1$ в силу замечания, предшествовавшего теореме 4.6.2. Так как все максимальные абелевы подгруппы в G имеют размерность $\geqslant \operatorname{rank} G$, то

$$\operatorname{rank} G \leqslant \dim H = 1.$$

Значит, G — простая группа ранга 1. Теперь наш результат следует из хорошо известной теоремы о классификации. Контактные структуры на $SO(3) = RP(3)$ и на $SL(2, \mathbf{R})$ уже были построены выше.

Пример 4.6.4. Как мы видели в примере 4.1.14, сфера S^{2n+1} наследует контактную структуру из $\mathbf{R}^{2n+2}$. Если M — нечетномерное полное связное риманово многообразие постоянной кривизны $K > 0$, то $M = S^{2n+1}/\Gamma$ является контактным многообразием с контактной структурой, наследуемой из S^{2n+1}. Здесь Γ — конечная группа матриц либо вида $\lambda 1_r$, $|\lambda| = 1$, $\lambda \in \mathbf{C}$, $r = n+1$, либо вида $\rho 1_r$, $\rho \in \mathbf{H}$ (кватернионы), $|\rho| = 1$, $r = (n+1)/2$.

Если, кроме того, M является однородным компактным многообразием, то M имеет указанный выше вид. Обратное не всегда верно.

4.7. Контактные структуры в смысле Спенсера

Определение 4.7.1. Пусть $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие $(2n + 1)$-мерного многообразия M. Если задана система 1-форм $\{\omega_\alpha\}$, $\omega_\alpha \in A^1(U_\alpha)$, со свойством $\omega_\alpha \wedge (d\omega_\alpha)^n \neq 0$ и система функций $\{g_{\alpha\beta}\}$, $g_{\alpha\beta} \in U_\alpha \cap U_\beta$, со свойством $\omega_\alpha = g_{\alpha\beta}\omega_\beta$ на $U_\alpha \cap U_\beta$, то говорят, что на M задана *контактная структура в смысле Спенсера.*

Теорема 4.7.2. *Пусть M — контактное многообразие в смысле Спенсера. Тогда*

(i) *если n нечетно, то M ориентируемо,*

(ii) *если n четно, то $w_1(L) = w_1(M)$, где L — одномерное векторное расслоение с функциями перехода $g_{\alpha\beta}$,*

(iii) *если n четно и M ориентируемо, то контактная структура в смысле Спенсера задается глобальной контактной формой.*

Доказательство. Из точной последовательности

$$0 \to \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^\times \xrightarrow{j} \mathbf{Z}_2 \to 0$$

следует точная последовательность пучков

$$0 \to \underline{\mathbf{R}}^+ \to \underline{\mathbf{R}}^\times \to \underline{\mathbf{Z}}_2 \to 0.$$

Поскольку A — тонкий пучок и отображение $\ln\colon \mathbf{R}^+ \to A$ биективно, мы видим, что $\mathbf{R}^+$ — тонкий пучок. Поэтому точна последовательность

$$0 \to H^1(M, \underline{\mathbf{R}}^\times) \xrightarrow{j^*} H^1(M, \mathbf{Z}_2) \to 0,$$

где j^* — отображение, переводящее класс эквивалентности расслоения L в класс Штифеля — Уитни этого расслоения.

Пусть L — расслоение с функциями перехода $\{g_{\alpha\beta}\}$. Поскольку

$$\omega_\alpha \wedge (d\omega_\alpha)^n = g_{\alpha\beta}^{n+1}\omega_\beta \wedge (d\omega_\beta)^n,$$

мы видим, что $L^{-(n+1)} \in H^1(M, \underline{\mathbf{R}}^*)$ — класс канонического пучка, т. е. расслоения $(2n+1)$-форм на M. Поэтому $j^*(L^{n+1}) \in H^1(M, \mathbf{Z}_2)$ совпадает с $w_1(M)$. Теорема следует из того, что при четном n $w_1(M) = (n+1)j^*(L) = j^*(L) = w_1(L)$.

Понятие контактной структуры в смысле Спенсера переносится на комплексно-аналитический случай, когда M — комплексно-аналитическое многообразие, а $\{g_{\alpha\beta}\}$ — семейство не обращающихся в 0 голоморфных функций.

Теорема 4.7.3. *Комплексно-аналитическое многообразие с контактной структурой в смысле Спенсера является (строго) контактным, если* $c_1(M) = 0$.

Доказательство. Из точной последовательности абелевых групп

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{C} \to \mathbf{C}^\times \to 0$$

получаем точную последовательность пучков над M

$$0 \to \underline{\mathbf{Z}} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}^* \to 0.$$

Соответствующая последовательность когомологий дает гомоморфизм

$$H^1(M, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta^*} H^2(M, \mathbf{Z}),$$

переводящий L в $c_1(L)$. Рассуждая, как и выше, приходим к равенству $(n+1)c_1(L) = c_1(M)$, которое и доказывает теорему.

4.8. Однородные комплексные контактные многообразия

Однородные комплексные контактные многообразия с ненулевым первым классом Черна были классифицированы Бусби с помощью классификации Вана однородных кэлеровых многообразий.

Рассмотрим однородное комплексное компактное односвязное контактное многообразие M с положительной эйлеровой характеристикой. Оно имеет вид $M = G/L$, где G — полупростая комплексная группа Ли, а L — замкнутая комплексная подгруппа. В L есть нормальная подгруппа L_1, для которой $L/L_1 = \mathbf{C}^*$. Одномерное векторное расслоение, определяемое контактной структурой, имеет вид $L/L_1 \to G/L_1 \to G/L$.

Пусть B — форма Килинга на $\mathfrak{g}$. Тогда справедлива

Теорема 4.8.1. *Существует такой вектор $Z \in \mathfrak{g}$, что*

(i) $B(Y, Z) = 0$ *для всех* $Y \in \mathfrak{l}$ — *алгебры Ли группы* L;

(ii) $\mathfrak{l}_1 = c(Z) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Z] = 0\}$ — *алгебра Ли группы* L_1;

(iii) $[\mathfrak{l}, Z] = \mathbf{C}Z$.

Из этого результата и классификации Вана получается

Теорема 4.8.2. *Многообразие M является компактным односвязным комплексным однородным контактным многообразием с положительной эйлеровой характеристикой тогда и только тогда, когда M — кэлерово многообразие типа $M = G/L$, где алгебра Ли подгруппы L имеет вид $\mathfrak{l} = c(h'_\rho) + V_\Theta$; здесь ρ — максимальный корень алгебры $\mathfrak{g}$ относительно картановской подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{l}$, h'_ρ — элемент из $\mathfrak{h}$, определяемый равенством $B(h'_\rho, Y) = \rho(Y)$ для $Y \in \mathfrak{h}$, и пространство V_Θ порождается корневыми векторами e_σ, $\sigma > 0$, не лежащими в централизаторе $c(h'_\rho)$.*

Мы не касались пока теории алгебр Ли, поэтому мы не можем здесь доказать это утверждение. Читатель может найти детали в статье Бусби [B 12].

Следствие 4.8.3. *Если M принадлежит рассматриваемому классу и не сводится к точке, то $c_1(M) \neq 0$ и существует ровно по одному такому многообразию для каждой простой комплексной алгебры Ли. Других многообразий рассматриваемого класса нет.*

Доказательство см. в [B 13].

Однородные комплексные контактные многообразия, соответствующие простым алгебрам Ли, можно представить следующим образом:

тип A_n: $M = SU(n+1)/SU(n-1) \times T^2$, $n \geqslant 1$;

тип B_n: $M = SO(2n+1)/SO(2n-3) \times SO(3) \times T^1$, $n \geqslant 2$;

тип C_n: $M = Sp(n)/Sp(n-1) \times T^1$, $n \geqslant 3$;

тип D_n: $M = SO(2n)/SO(2n-4) \times SO(3) \times T^1$, $n \geqslant 4$;

тип G_2: $M = G_2/SO(3) \times T^1$;
тип F_4: $M = F_4/Sp(3) \times T^1$;
тип E_6: $M = E_6/SU(6) \times T^1$;
тип E_7: $M = E_7/SO(12) \times T^1$;
тип E_8: $M = E_8/E_7 \times T^1$.

В случае A_n, если мы положим

$$B = SU(n+1)/SU(n) \times T^1,$$
$$F = SU(n) \times T^1/SU(n-1) \times T^2,$$

то

$$F \to M \to B = CP(n)$$

будет расслоением со слоем $F = CP(n-1)$. Это в точности проективизированное кокасательное расслоение над B. Чтобы убедиться в этом, заметим, что $SU(n+1)$ действует транзитивно на $T(CP(n))$ и стабилизатором комплексного направления служит как раз $SU(n-1) \times T^2$. Отождествляя касательное и кокасательное расслоения, мы получаем, что M гомеоморфно проективизированному кокасательному расслоению над комплексно-аналитическим многообразием. Этот случай, однако, является скорее исключением, чем правилом, как утверждает

Теорема 4.8.4. *Никакое из многообразий, перечисленных в 4.8.3, кроме типа A_n, не гомеоморфно проективизированному кокасательному расслоению над комплексным многообразием.*

Доказательство. Если бы $M = G/L$ было проективизированным кокасательным расслоением над комплексно-аналитическим многообразием B размерности $n+1$, то слой F был бы комплексным проективным пространством размерности n. Многообразие M кэлерово в силу последней теоремы, слой F также кэлеров, поэтому база B должна быть кэлеровой в силу общей теории кэлеровых многообразий. Поскольку $H^1(F) = 0$, мы получаем, что отображение трансгрессии $H^1(F) \to H^2(B)$ нулевое. Поскольку F и M односвязны, $\pi_1(B) = 0$. Согласно результату Бланшара, вещественные когомологии M изоморфны когомологиям $F \times B$. В частности, для многочленов Пуанкаре многообразий M, F и B мы получаем

$$P_M(t) = P_F(t) \cdot P_B(t) =$$
$$= (1 + t^2 + \ldots + t^{2n})(1 + at^2 + \ldots + t^{n+1}),$$

где $a \geqslant 1$, поскольку B кэлерово. Поэтому $b_2(M) \geqslant 2$. Так как $\pi_2(G) = 0$ и

$$0 \to \pi_2(G/L) \to \pi_1(L) \to \pi_1(G) \to 0,$$

то $\operatorname{rank}\pi_2(G/L) \leqslant \operatorname{rank}\pi_1(L)$. Вводя максимальные компактные подгруппы G^u и L^u групп G и L, получаем $L^u = S \times T^r$, где S — полупростая компактная группа. Итак, $\operatorname{rank}\pi_1(L) = r$. Поскольку $2 \leqslant b_2(M) \leqslant r$, должно быть $r \geqslant 2$. Но это возможно только в случае A_n, когда $G^u = SU(n+1)$, $L^u = SU(n-1) \times T^2$.

Задачи

Упражнение 4.1. Показать, что если f_1 и f_2 базисные, то $[K(f_1), K(f_2)] = K(\{f_1, f_2\})$.

Упражнение 4.2. Показать, что $\operatorname{cont}(M, \omega)$ является коммутативным кольцом относительно произведения $XY = K(fg)$, где $X = K(f)$, $Y = K(g)$. Показать, что $XY = fK(g) + gK(f) - fgV_\omega$.

Упражнение 4.3. Показать, что алгебра Ли $A(M)$ полупроста.

Упражнение 4.4. Показать, что $D = \mathscr{L}(X)$ является дифференцированием алгебры Ли $A(M)$ тогда и только тогда, когда $X \in \operatorname{cont}(M, \omega)$. Показать, что всякое дифференцирование алгебры Ли $A(M)$ внутреннее; следовательно, $H^1(A) = 0$.

Упражнение 4.5. Рассмотрим $\mathbf{R}^{2n+1}$ с контактной структурой $\omega = -ds + \sum p_j\, dq_j$. Показать, что каждое строго контактное преобразование имеет вид $(s, p, q) \mapsto (s', p', q')$, где $(p, q) \mapsto (p', q')$ — симплектоморфизм, а $s' = s + \pi(p, q)$, $d\pi = \sum (p'_j\, dq'_j - p_j\, dq_j)$.

Упражнение 4.6. Пусть G означает группу глобальных строго контактных преобразований $\mathbf{R}^{2n+1}$ (см. выше). Обозначим через C группу преобразований вида $(s, p, q) \mapsto (s + r, p, q)$, $r \in \mathbf{R}$. Показать, что C является инвариантной подгруппой в G и совпадает с ее центром. Показать, что G/C изоморфна группе глобальных симплектоморфизмов $\mathbf{R}^{2n}$.

Пусть T — подгруппа, состоящая из преобразований $(s, p, q) \mapsto (s + \sum \alpha_j q_j + r,\ p_j + \alpha_j,\ q_j + \beta_j)$, где α_j, β_j, $r \in \mathbf{R}$. Тогда $C \subset T$ и T/C изоморфна абелевой группе переносов.

Пусть L — группа преобразований

$$s' = s + \sum_{ijk} \left(\frac{1}{2} a_{ij} c_{ik} p_j p_k + \frac{1}{2} b_{ij} d_{ik} q_j q_k + b_{ij} c_{ik} q_j p_k\right) + \\ + \sum_{jk} d_{jk} \alpha_j q_k + \sigma,$$

$$p'_j = \sum_k (a_{jk} p_k + b_{jk} q_k) + \alpha_j,$$

$$q'_j = \sum_k (c_{jk} p_k + d_{jk} q_k) + \beta_j,$$

где матрица $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ симплектическая. Показать, что L — подгруппа в G и $L/T = Sp(n, \mathbf{R})$.

Упражнение 4.6′. Пусть G — группа Галилея с общим элементом $g = (a, b, v, R)$, $a \in \mathbf{R}^3$, $b \in \mathbf{R}$, $v \in \mathbf{R}^3$, $R \in SO(3)$. Пусть $(t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$; введем в $M = T^*\mathbf{R}^4$ координаты $(t, x, -h, p)$ и определим действие G на M формулами $t' = t + b$, $x' = Rx + vt + a$, $p' = Rp + mv$, $h' = h + (Rp, v) + (1/2)mv^2$. Пространство M не однородно относительно G. Пусть Y — орбита группы G, заданная равенством $h - p^2/2m = w \in \mathbf{R}$. Положим $\omega_Y = \sum p_i\, dx_i - (p^2/2m + w)\, dt$. Показать, что Y есть 7-мерное контактное многообразие с каноническим векторным полем $V_\omega = \sum p_i (\partial/\partial x_i) + m (\partial/\partial t)$. Показать, что пространство $\mathcal{O}$ орбит поля V_ω является строго симплектическим многообразием с координатами q, p, где $q_i = x_i - tp_i/m$; G действует на (q, p) по формулам $q' = Rq - b(Rp/m + v) + a$, $p' = Rp + mv$. Показать, что существует единственная G-инвариантная поляризация, порожденная полями $\{\partial/\partial q_i\}$, и что отображение σ: $\mathfrak{g} \to V(\mathcal{O})$ не допускает поднятия (см. 3.6).

Упражнение 4.7. Пусть Y — компактное риманово многообразие размерности m с лапласианом Δ. Положим $A = \sqrt{-\Delta}$. (Оператор A является эллиптическим псевдодифференциальным оператором порядка 1; можно определить символ $a = \sigma(A)$ — см. [G 13].) Пусть λ означает каноническую 1-форму $\lambda = \sum \eta_j\, dy_j$ на T^*Y, так что $d\lambda$ — каноническая симплектическая форма. Пусть $X \subset T^*Y$ — гиперповерхность, задаваемая уравнением $\sigma(A) = 1$. Положим $\alpha = \lambda | X$. Обозначим через Ξ_f гамильтоново векторное поле с производящей функцией f: $\Xi_f = \{f, \cdot\}$. Тогда Ξ_a является генератором $U(1)$-действия на T^*Y и на X.

Предположим, что X является главным расслоением с группой $U(1)$, и положим $B = X/U(1)$. Поскольку $\langle \Xi_a, \alpha \rangle = a = 1$ на X, можно показать, что α является формой связности для этого главного расслоения. Показать, что форма $d\alpha$ задает симплектическую структуру Ω на B, совпадающую с формой кривизны расслоения $X \to B$. Пусть $c_1 = \Omega/2\pi$ означает первый класс Черна этого расслоения. Пусть Td означает класс Тодда многообразия M. Спектр оператора A содержится в объединении интервалов $I_n = [n + \mu/4 + \sigma - c_1/n,\ n + \mu/4 + \sigma - c_1/n]$, где μ — индекс Арнольда — Маслова. Колэн де Вердье показал, что число $P(n)$ собственных значений A, содержащихся в I_n, является многочленом от n при достаточно большом n. Существует гипотеза, что число $P(n)$ дается аналогом теоремы Римана — Роха: $P(n) = e^{nc_1}\mathrm{Td}\,[M]$. См. Boutet de Monvel L. Sem. Bourbaki (1978/79), № 532.

Глава **5** **Задача Дирака**

5.0. Дифференцирование алгебр Ли

Определение 5.0.1. *Дифференцированием* алгебры Ли $(L, [\ ,\ ])$ называется линейное отображение $D\colon L \to L$, обладающее свойством $D([X, Y]) = [DX, Y] + [X, DY]$ для всех $X, Y \in L$. Дифференцирование D называется *внутренним*, если существует $X \in L$, для которого $DY = [X, Y]$ при всех $Y \in L$, т. е. $D = \operatorname{ad} X$. В противном случае дифференцирование D называется *внешним*.

Заметим, что все внутренние дифференцирования обращаются в нуль на центре L, в то время как для внешних дифференцирований это не обязательно.

Множество $D(L)$ всех дифференцирований алгебры Ли L само образует алгебру Ли относительно скобки Ли $[D_1, D_2]X = D_1D_2X - D_2D_1X$. Множество внутренних дифференцирований образует идеал $\operatorname{ad} L$ в $D(L)$.

Читатель может проверить также, что всякое дифференцирование кососимметрично относительно формы Киллинга B, т. е. $B(DX, Y) + B(X, DY) = 0$.

Ясно, что для коммутативной алгебры Ли L все внутренние дифференцирования — нулевые отображения и всякое ненулевое линейное преобразование является внешним дифференцированием. Другой крайний случай описывает

Теорема 5.0.2 (Цассенхауз). *Если L — полупростая алгебра Ли (т. е. алгебра Ли с невырожденной формой Киллинга), то всякое дифференцирование D этой алгебры Ли является внутренним.*

В следующем разделе мы хотим сравнить свойства алгебры Ли гладких функций на многообразии и алгебры Ли линейных операторов в гильбертовом пространстве. Начнем с изучения алгебры Ли P, которую образуют комплексные многочлены от вещественных переменных p, q относительно скобки Пуассона $\{f, g\}$.

Теорема 5.0.3 (Волленберг). *Каждое дифференцирование алгебры P имеет вид*

$$Df = \{a_\alpha, f\} + \beta\left(f - \alpha p\frac{\partial f}{\partial p} - (1 - \alpha)\, q\frac{\partial f}{\partial q}\right),$$

где $a_\alpha \in P$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, Таким образом, каждое дифференцирование P является суммой внутреннего дифференцирования $\operatorname{ad} a_\alpha$ и явно заданного внешнего дифференцирования. Однако это разложение неоднозначно [1]). Дальнейшие детали см. в [J 1].

Рассмотрим теперь ассоциативную алгебру Q над $\mathbf{C}$, порожденную образующими p, q с соотношением $pq - qp = 1$. Структура алгебры Ли в Q вводится с помощью стандартных скобок Ли $[f, g] = fg - gf$. Пусть $\operatorname{ad} X$ означает линейное преобразование в Q, задаваемое формулой $\operatorname{ad} X(Y) = [X, Y]$ для X, $Y \in Q$. Читатель может проверить, что

$$\operatorname{ad} X^m = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{k-1} X^{m-k} \operatorname{ad}^k X.$$

В частности, $[p^n, q] = np^{n-1}$ и аналогично для q. Таким образом, если некоторый элемент Q коммутирует с p или q, то он не зависит от q или p; тем самым центр Q сводится к константам.

Теорема 5.0.4. *Все дифференцирования Q внутренние.*

Определение 5.0.5. *Дифференцированием* алгебры Ли L_1 в алгебру Ли $L_2 \supset L_1$ называется такое линейное отображение D: $L_1 \to L_2$, что $D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY]$ для всех X, $Y \in L_1$. В этом случае D называется *внутренним*, если оно имеет вид $DX = [X, Y]$ для $Y \in L_2$.

В следующем разделе мы рассмотрим вопрос о существовании «отображения Дирака» $\mathfrak{q}$, которое переводит $C^\infty(M)$ в пространство линейных операторов в некотором гильбертовом пространстве и обладает свойствами $\mathfrak{q}(1) = 1$ и $[\mathfrak{q}f, \mathfrak{q}g] = \mathfrak{q}\{f, g\}$, т. е. задает изоморфизм алгебр Ли. Однако если две алгебры Ли изоморфны, то изоморфны и алгебры их дифференцирований. Поэтому если одна алгебра Ли имеет внешние дифференцирования, а другая — нет, то эти алгебры не могут быть изоморфны. В частности, пусть D — внешнее дифференцирование алгебры Ли P в $C^\infty(\mathbf{R}^2)$, для которого $D(1) = 1$: например, $D(f) = f - (1/2)(p(\partial f/\partial p) + q(\partial f/\partial q))$. В этом случае отображение Дирака $\mathfrak{q}$ может быть задано формулой $\mathfrak{q}f(\varphi) = \{f, \varphi\} + D(f)\varphi$ для $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$. Проблема возникает, если потребовать, чтобы отображение $\mathfrak{q}$ было неприводимо, т. е. чтобы единственными операторами, перестановочными с $\mathfrak{q}p$ и $\mathfrak{q}q$, были скалярные операторы. Во всяком случае, мы видим, что $\mathfrak{q}$ не может быть изоморфизмом P на Q, поскольку первая алгебра Ли имеет внешние дифференцирования, а вторая — нет.

---

[1]) Факторпространство $H^1(P, P) = D(P)/\operatorname{ad} P$ в данном случае одномерно и порождается дифференцированием $D_0 = 1 - (p(\partial/\partial p) + q(\partial/\partial q))/2$.— *Прим. перев.*

Читатель может проверить, что подалгебра в Q, порожденная элементами 1, p, q, p^2, pq, q^2, допускает внешнее дифференцирование, задаваемое формулой

$$D(p^m q^n + q^n p^m) = \alpha(2 - m - n)(p^m q^n + q^n p^m).$$

5.1. Геометрическое квантование. Введение

К сожалению, отцы-основатели квантовой теории не дали формального определения квантования. Обычно под квантованием понимают отображение $\mathfrak{q}$, определенное на некоторой подалгебре алгебры гладких функций на симплектическом многообразии и принимающее значения в пространстве самосопряженных операторов в некотором гильбертовом пространстве H, которое обладает свойствами

(q1) $\mathfrak{q}(f_1 + f_2) = \mathfrak{q}(f_1) + \mathfrak{q}(f_2)$;
(q2) $\mathfrak{q}(af) = a\mathfrak{q}(f)$ для $a \in \mathbf{R}$;
(q3) $\mathfrak{q}(\{f_1, f_2\}) = (1/i)[\mathfrak{q}(f_1), \mathfrak{q}(f_2)]$;
(q4) $\mathfrak{q}(1) = 1_H$;
(q5) $\mathfrak{q}(x^j), \mathfrak{q}(p_k)$ *унитарно эквивалентны* M_{xj} *и* $(1/i)(\partial/\partial x^k)$.

Этот подход порождает много проблем, и не ясно, имели ли в виду отцы-основатели такую простую схему.

Прежде чем разбирать недостатки этого подхода, рассмотрим процедуру, позволяющую изготавливать из функций и векторных полей самосопряженные операторы.

Теорема 5.1.1 (ван Хов). *Пусть $t \to g_X(t)$ — однопараметрическая подгруппа диффеоморфизмов гладкого многообразия M, соответствующая векторному полю X. Предположим, что на M есть борелевская мера v, инвариантная относительно $g_X(t)$. Тогда оператор B_X: $f \mapsto -iX(f)$, определенный на $A_0(M)$, будет симметрическим. Замыкание этого оператора (также обозначаемое через B_X) будет самосопряженным оператором в $H = L^2(M, v)$, и $\exp(-itB_X)\psi(m) = \psi(g_X(t)^{-1}m)$ для $\psi \in H$.*

Если предположить, что $K(f)$ — полное векторное поле, сохраняющее борелевскую меру v на M[1]), то можно определить отображение $\mathfrak{q}$ из $A_0(M) \simeq A(B)$ в пространство самосопряженных операторов в $L^2(B, v)$, которое в силу теорем 4.1.7 и 4.5.8 обладает свойствами (q1), (q2) и (q3). Однако $K(1) = \partial/\partial s$. Применяя преобразование Фурье по переменной s, можно добиться выполнения условия (q4). Условие (q5) представляет существенную проблему, которую иногда удается решить.

---

[1]) Автор использует здесь обозначения и результаты гл. 4. — *Прим. перев.*

Чтобы сформулировать этот результат, также принадлежащий ван Хову, ограничимся квантованием в евклидовом пространстве $M=\mathbf{R}^{2n+1}$. Как мы знаем из упр. 4.5, группа G строго контактных преобразований M состоит из отображений

$$(s, p, q) \mapsto (s+\pi_g(p, q),\ g(p, q)),$$

где $\pi_{g_1g_2}(y)=\pi_{g_2}(y)+\pi_{g_1}(g_2y)$.

Определение 5.1.2. *Левое квазирегулярное представление* $(U, L^2(M))$ группы G — это унитарное представление, обладающее свойством $U(g_t(f))=\exp(itH(f))$, где $H(f)\varphi=K(f)\varphi$ для $\varphi\in A_0(M)$.

Теорема 5.1.3. *Представление группы G, заданное формулой*

$$U^{(a)}(g)f(y)=\exp(ia\pi_g(g^{-1}y))f(g^{-1}y)$$

в пространстве $L^2(\mathbf{R}^{2n})$, унитарно и в качестве инфинитезимального генератора имеет оператор $H^{(a)}(f)\varphi=a\left(f-\sum p_j(\partial f/\partial p_j)\right)\varphi+$ $+i\{f,\ \varphi\}$ для $\varphi\in A^0(\mathbf{R}^{2n})$. При $a\neq 0$ представление $U^{(a)}$ неприводимо. Представление U разлагается (с помощью преобразования Фурье) в непрерывную прямую сумму представлений $U^{(a)}$.

Как отмечалось, связь между $H(f)$ и $H^{(a)}(f)$ дается преобразованием Фурье. Детали см. в [М 29].

Итак, функциям из $A_0(M)\simeq A(B)$ мы ставим в соответствие инфинитезимальные строго контактные преобразования, так что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & A_0(M) & \to & A(M) & \to & A(M)\\
 & & \downarrow\uparrow & & \downarrow\uparrow & & \parallel\\
0 & \to & \mathrm{cont}_0 & \to & \mathrm{cont} & \to & A(M)
\end{array}$$

Отметим, что не каждой функции f соответствует полное векторное поле. Более того, поле, соответствующее f_1+f_2, может не быть полным, даже если полны поля, соответствующие f_1 и f_2. Примеры имеются в [Н 29].

Определение 5.1.4. Пусть $\tilde{A}_0$ обозначает множество функций, которым соответствуют полные поля в cont_0.

Теорема 5.1.5. *Для $f\in\tilde{A}_0$ операторы $H(f)$, $H^{(a)}(f)$ существенно самосопряжены. Если вместе с f_1, f_2 в $\tilde{A}_0$ входят a_1f_1+ $+a_2f_2$ и $\{f_1, f_2\}$, то операторы*

$$a_1H(f_1)+a_2H(f_2),\quad a_1H^{(a)}(f_1)+a_2H^{(a)}(f_2),$$

$$(1/i)\,[H(f_1), H(f_2)],\quad (1/i)\,[H^{(a)}(f_1), H^{(a)}(f_2)]$$

существенно самосопряжены и их самосопряженные расширения совпадают с самосопряженными расширениями операторов

$$H(a_1f_1 + a_2f_2), \quad H^{(a)}(a_1f_1 + a_2f_2),$$
$$H(\{f_1, f_2\}), \quad H^{(a)}(\{f_1, f_2\})$$

соответственно.

Таким образом, с помощью операторов $H^{(a)}$ можно построить отображение $\mathfrak{q}$ из $\tilde{A}_0$ в самосопряженные операторы в $L^2(\mathbf{R}^{2n})$, обладающее свойствами (q1) — (q4).

Однако условие (q5), как отмечалось выше, является источником трудностей. Если мы положим $P_j = (1/a)H^{(a)}(p_j)$ и $Q_k = (1/a)H^{(a)}(q_k)$, то P_j, Q_k обладают самосопряженными расширениями (также обозначаемыми через P_j и Q_k) со свойствами

$$[Q_j, Q_k] = [P_j, P_k] = 0,$$
$$[Q_j, P_k] = (i/a^2)H^{(a)}(\{q_j, p_k\}) = (i/a^2)H^{(a)}(\delta_{jk}) = i\delta_{jk}/a^2.$$

Таким образом, мы приходим к каноническим коммутационным соотношениям в пространстве $L^2(\mathbf{R}^{2n})$.

Как известно из любого элементарного курса квантовой механики[1]), волновые функции зависят только от половины независимых переменных в $\mathbf{R}^{2n}$ — обычно от координат $q_1, \ldots, q_n$ или импульсов $p_1, \ldots, p_n$. Посмотрим, что получится, если учесть это обстоятельство. Напомним сначала теорему Стоуна — фон Неймана.

Пусть E — вещественное векторное пространство с двойственным пространством E^*.

Определение 5.1.6. Пара унитарных представлений U, V аддитивных групп E, E^* подчиняется *перестановочным соотношениям Вейля*, если

$$U(x)V(f) = \exp(if(x))V(f)U(x) \quad \text{для } x \in E, \ f \in E^*.$$

Пусть $P(x)$ и $Q(f)$ — инфинитезимальные генераторы U и V соответственно. Рассмотрим для иллюстрации одномерный случай: $\exp(itp)\exp(isq) = \exp(ist)\exp(isq)\exp(itp)$. Это в точности форма Вейля для записи канонического соотношения $[p, q] = 1/i$. Как известно, существует выделенное представление — *представление Шрёдингера*, для которого $U(tp)\varphi(x) = \varphi(x + t)$, $V(tq)\varphi(x) = \exp(itx)\varphi(x)$, $\varphi \in L^2(R)$, т. е. $p = (1/i(d/dx))$, $q = M_x$. Обобщением этого является

Определение 5.1.7. Пусть $H = L^2(E)$. *Представлением Шрёдингера* перестановочных соотношений Вейля называется пара

[1]) **Или теории представлений.** — *Прим. перев.*

U, V, такая, что

$$U(x)\,\psi(y) = \psi(x+y),$$
$$V(f)\,\psi(y) = \exp(if(y))\,\psi(y),$$

где $\psi \in H$.

Теорема 5.1.8 (Стоун — фон Нейман). *Любая система Вейля* (U, V, E) [1]) *унитарно эквивалентна прямой сумме нескольких экземпляров систем Шрёдингера.*

Если мы введем пространство $\mathscr{E} = E \oplus E^*$, то операторы $T(z) = U(x)V(f)$, где $z = (x, f)$, обладают свойством

$$T(z)\,T(z') = \exp\frac{iB(z, z')}{2}\,T(z+z'),$$

где $B(z, z') = f'(x) - f(x')$ — кососимметрическая билинейная форма (т. е. симплектическая форма). Пространство $(\mathscr{E}, B)$ является симплектическим, а T — его проективным представлением. Инфинитезимальный генератор этого представления $A(z)$, определяемый равенством $T(z) = \exp(itA(z))$, задает отображение из $\mathscr{E}$ в самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Если $\{(e_i), (f_i)\}$ — канонический базис в $(\mathscr{E}, B)$ (т. е. $B(e_i, e_j) = B(f_i, f_j) = 0$, $B(e_i, f_j) = \delta_{ij}$), то $(A(e_i), A(f_i))$ — пары канонически сопряженных динамических операторов.

Имеется общая процедура перехода от проективного представления группы к обычному представлению ее расширения.

Теорема 5.1.9. *Любому проективному представлению* V *группы* G *с мультипликатором* μ *соответствует обычное представление* $U(t, g) = tV(g)$ *расширения* G^μ *группы* G. *Расширение* G^μ *состоит из пар* (t, g), $t \in T^1$, $g \in G$, *с законом умножения, определяемым ниже. Соответствие* $V \to U$ *взаимно однозначно, если рассматривать только те представления* G^μ, *для которых* $U(t, e) = t \cdot 1$.

Определение 5.1.10. *Расширение* G^μ состоит из пар (t, g) с законом умножения $(t, g)(t', g') = (tt'/\mu(g, g'), gg')$. Если G — топологическая группа, то G^μ также снабжается естественной топологией (прямого произведения T^1 и G).

Для проективного представления $(T, \mathscr{E})$ соответствующим расширением является множество $\tilde{\mathscr{E}} = T^1 \times \mathscr{E}$ с законом умножения $(t, z)(t', z') = (tt' \exp(iB(z, z')), z + z')$. Единицей группы $\tilde{\mathscr{E}}$ служит $(1, 0)$, а обратным к (t, z) будет $(t^{-1}, -z)$. Ясно, что равенство $(t, z)(t', z') = (t', z')(t, z)$ выполняется для всех (t', z'), если и только если $B(z, z') = 0$ для всех z', т. е. при $z = 0$. Таким образом, центром $\tilde{\mathscr{E}}$ является T^1. Ядром гомомор-

[1]) С конечномерным пространством E. — *Прим. ред.*

физма $(t, z) \mapsto z\colon \tilde{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}$ служит T^1. Таким образом, справедлива

Теорема 5.1.11. *Группа $\tilde{\mathcal{E}}$ является центральным расширением $\mathcal{E}$ с помощью T^1.*

Определение 5.1.12. Группа $\tilde{\mathcal{E}}$ называется *группой Гейзенберга*[1]).

Теорема 5.1.13. *Группа $\tilde{\mathcal{E}}$ локально компактна, связна и является нильпотентной группой Ли класса 2, в которой подгруппа T^1 является центром и максимальной компактной подгруппой.*

Доказательство. Ограничимся вычислением класса нильпотентности, используя верхний центральный ряд:

$$C^0(\tilde{\mathcal{E}}) = (1, 0).$$

$$C^1(\tilde{\mathcal{E}}) = \{(t, z) \mid (t, z)(t', z') = (t', z')(t, z)\} = \\ = \{(t, z) \mid B(z, z') = 0 \bmod 2\pi\} = \{(t, 0)\} = T^1.$$

$$C^2(\tilde{\mathcal{E}}) = \{(t, z) \mid (t, z)(t', z') \equiv (t', z')(t, z) \bmod T^1\} = \tilde{\mathcal{E}}.$$

Алгеброй Ли $\mathfrak{e}$ группы $\tilde{\mathcal{E}}$ является пространство $\mathbf{R}^{2n+1}$ с коммутатором $[(x, z), (x', z')] = (2\pi B(z, z'), 0)$.

5.2. Задача Дирака

Определение 5.2.1. *Квантованием Дирака* называется отображение из некоторой подалгебры $A(B)$ в множество самосопряженных операторов в $L^2(\mathbf{R}^n)$, обладающее свойствами (q1)—(q5).

Однако такая постановка задачи некорректна, как показал ван Хов:

Теорема 5.2.2. *Пусть $a > 0$. Не существует такого отображения $f \to A(f)$ из $\tilde{A}_0$ в множество самосопряженных операторов в $H = L^2(\mathbf{R}^n)$, которое обладало бы свойствами*

(Q1) *существует общая область определения для всех операторов $A(f)$, $f \in \tilde{A}_0$, инвариантная относительно $A(f)$ и* $\exp(iatA(f))$;

(Q2) *если наряду с f_1 и $f_2 \in \tilde{A}_0$ элементы $a_1f_1 + a_2f_2$ и $\{f_1, f_2\}$ принадлежат $\tilde{A}_0$, то $a_1A(f_1) + a_2A(f_2) = A(a_1f_1 + a_2f_2)$ и* $(1/ia)[A(f_1), A(f_2)] = A(\{f_1, f_2\})$;

(Q3) *если $g_s(f_3) = g_t(f_1)g_s(f_2)g_{-t}(f_1)$, то* $\exp(iasA(f_3)) = \exp(iatA(f_1))\exp(iasA(f_2))\exp(-iatA(f_1))$;

(Q4) *операторы $A(p_j)$, $A(q_k)$ эквивалентны* $(1/ia)(\partial/\partial x_j)$, M_{x_k}, $j, k = 1, 2, \ldots, n$.

---

[1]) Обычно группой Гейзенберга называют односвязную накрывающую группы $\tilde{\mathcal{E}}$. — *Прим. перев.*

Положительным результатом ван Хова является

Теорема 5.2.3. *Существует квантование, обладающее свойствами* (Q1)—(Q4) *для пространства* $A_0^L \subset \overline{\tilde{A}}_0$, *состоящего из многочленов степени* $\leqslant 2$ (*см. упр.* 4.5).

Вместо доказательства этих теорем мы приведем конструкцию, показывающую справедливость положительного результата ван Хова.

Заметим сначала, что оператор $H^{(a)}(f)$ в терминах симплектической геометрии может быть записан в виде $H^{(a)}(f) = a(f + \omega_0(P(f)) + ip(df))$, где $\Omega = d\omega_0$. Как мы знаем из гл. 3, $p(df) = P(f) = \{f, \cdot\}$. Полагая $\omega_0 = (1/2)\sum (p_j\, dq_j - q_j\, dp_j)$, получаем $\omega_0(P(f)) = (1/2)\sum (q_i(\partial f/\partial q_i) + p_i(\partial f/\partial p_i)$.

Пример 5.2.4 (гармонический осциллтор). Гамильтониан этой системы равен $H = (1/2)(p^2 + q^2)$. Положительный результат ван Хова утверждает, что эта система допускает квантование по Дираку. Полагая $\hat{f} = H^{(1)}(f)$ и выбирая ω_0, как и выше, получаем $\hat{q} = (1/2q + i(\partial/\partial p)$, $\hat{p} = (1/2p - i(\partial/\partial q)$, $\hat{H} = i(q(\partial/\partial p) - p(\partial/\partial q))$.

Рассмотрим теперь функции $T_1 = -q$, $T_2 = p$, $M = (1/2)(p^2 + q^2)$. Хотя в классической ситуации величина $\mathcal{S} = T_1^2 + T_2^2 - 2M$ обращается в нуль, ее образ $\hat{\mathcal{S}}$ при отображении ван Хова не является даже скаляром. Мы должны выбрать инвариантное пространство в $L^2(\mathbf{R}^2)$, в котором операторы $\hat{p}, \hat{q}$ действуют неприводимо; в качестве такового годится собственное подпространство оператора $\mathcal{S}$. Полагая $z = p + iq$, можно проверить, что $2\mathcal{S} + 1 = (i\bar{z} - 2i(\partial/\partial z))(iz + 2i(\partial/\partial\bar{z}))$. Поэтому $(2\mathcal{S} + 1)\exp(-|z|^2/4)\psi(z) = 0$ для любой голоморфной функции $\psi(z)$. Ясно, что $\hat{H}, \hat{p}, \hat{q}$ оставляют инвариантным пространство голоморфных функций и что это пространство совпадает с пространством Фока $\mathcal{F}$ со скалярным произведением

$$\langle\psi_1 | \psi_2\rangle = \frac{1}{\pi}\int_C \exp(-|z|^2/2)\,\overline{\psi_1(z)}\,\psi_2(z)\,\frac{d\bar{z}\wedge dz}{2i},$$

о котором мы говорили в разд. 2.2.

Симплектическое многообразие $(\mathbf{R}^2, dp\wedge dq)$ обладает естественной структурой кэлерова многообразия, которую мы использовали в этом примере. Чтобы увидеть это, заметим, что $\omega = ds + (1/2)(pdq - qdp) = ds + (1/4i)(\bar{z}dz - zd\bar{z})$. Таким образом, $\Omega = d\omega = (1/2i)(d\bar{z}\wedge dz)$ является кэлеровой формой типа (1, 1). Замечая, что Ω можно записать в виде $\Omega = i\partial\bar{\partial}((1/2)\ln|z|^2)$, мы приходим к следующему обобщению, предложенному Онофри. Пусть N — контактное многообразие над кэлеровым многообразием M с формой $\omega = d\mathfrak{z} - i\partial f(z, \bar{z})$, где $\operatorname{Im} \mathfrak{z} = (1/2) f(z, \bar{z})$. Как и выше, $\Omega = i\partial\bar{\partial} f(z, \bar{z})$. Пусть G — группа голоморфных преобразований M, сохраняющих ω. Можно проверить (упражнение для читателя), что в этом случае $f(g(z), g(\bar{z})) = f(z, \bar{z}) + h_g(z) + h_g(\bar{z})$ для $g \in G$, где $h_g(z)$ — голоморфная функция. Мы можем построить унитарное представление G в пространстве голоморфных функций, квадратично интегрируемых по мере $\exp(-f(z, \bar{z}))\Omega^n$, полагая

$$U(g)\psi(z) = \exp(h_g(z))\psi(g^{-1}(z)).$$

По теореме Кобаяси [К 10] это представление либо тривиально, либо неприводимо.

В случае гармонического осциллятора группа G сводится к евклидовым движениям: $g(z) = \exp(it)z + c$.

Определение 5.2.5. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *нильпотентной*, если $[\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \ldots, \mathfrak{g}] \ldots] = 0$ [1]).

Очевидно, справедлива

Теорема 5.2.6. *Операторы $\hat{p}, \hat{q}, I$ порождают нильпотентную алгебру Ли.*

Это — в точности алгебра Гейзенберга.

Определение 5.2.7. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *разрешимой*, если последовательность $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_2 = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]$, $\mathfrak{g}_3 = [\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2]$, ... обрывается: $\mathfrak{g}_k = \{0\}$.

Можно проверить, что операторы $\hat{p}$, $\hat{q}$, $\hat{H}$, I порождают алгебру Ли $\mathfrak{g}$. Она называется *осцилляторной алгеброй Ли*. Поскольку $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ совпадает с алгеброй Гейзенберга, мы видим, что $\mathfrak{g}_3 = \{I\}$ и $\mathfrak{g}_4 = \{0\}$. Таким образом, справедлива

Теорема 5.2.8. *Осцилляторная алгебра Ли разрешима.*

5.3. Подход Костанта и Сурьо

Костант и Сурьо обобщили конструкцию ван Хова, заметив, что квантование ван Хова имеет вид

$$\nabla_{X_\varphi} + 2\pi i\varphi,$$

где ∇_X — ковариантная производная $\nabla_X f = Xf + 2\pi i\vartheta(X)f$, ассоциированная со связностью $\alpha = \vartheta + (1/2\pi i)(dz/z)$ в линейном расслоении $L = B \times \mathbf{C}^* \to B$. Более подробно это обобщение состоит в следующем. Пусть $L_c(B, \Omega)$ — множество линейных рас-

[1]) Число пар скобок в этом определении называется *классом нильпотентности* алгебры Ли. — *Прим. перев.*

слоений со связностью ω над симплектическим многообразием (B, Ω) с формой кривизны Ω. Пусть S — пространство гладких сечений одного из таких расслоений. Далее, ковариантная производная, ассоциированная со связностью ω, — это линейное отображение ∇: $V(B) \to \operatorname{End} S$, обладающее свойствами

(i) $\nabla_{fX} = f\nabla_X$;

(ii) $\nabla_X(fs) = Xf \cdot s + f\nabla_X s$

для $f \in A(B)$, $X \in V(B)$, $s \in S$. Ковариантная производная ∇ связана с 1-формой ω следующим образом. Отображение $X \to \nabla_X s/2\pi i s$ из $V(B)$ в $A(B)$ является $\mathbf{C}$-линейным. Поэтому однозначно определена 1-форма $\omega = \omega_s$, для которой $\nabla_X s = 2\pi i \omega_s(X) s$.

Теорема 5.3.1. (Костант — Сурьо). *Обобщенное квантование ван Хова* $\mathfrak{q}$: $A(B) \to \operatorname{End} S$ *дается формулой* $\mathfrak{q}(f) s = \nabla_{X_f} s + 2\pi i f s$ *для* $f \in A(B)$ *и* $s \in S$. *Это отображение является представлением алгебры Ли* $A(B)$, *т. е.* $\mathfrak{q}(\{f_1, f_2\}) = [\mathfrak{q}(f_1), \mathfrak{q}(f_2)]$.

Однако, как мы видели даже на простейшем примере — гармоническом осцилляторе, единственная надежда получить квантование в смысле Дирака связана с выбором некоторой подалгебры в $A(B)$ [1]).

Подход Костанта -- Сурьо основан на понятии поляризации, к которому мы перейдем в следующей главе.

Задачи

Упражнение 5.1. Пусть G — локально компактная абелева группа с группой характеров $\hat{G}$. Пусть σ: $G \to \hat{\hat{G}}$ задается формулой $\sigma(s)(\alpha) = (s, \alpha) = \alpha(s)$ для $s \in G$ и $\alpha \in \hat{G}$. Пусть R: $\alpha \to R_\alpha$ и M: $a \to M_a$ — представления $\hat{G}$ и $\hat{\hat{G}}$ в $H = L^2(\hat{G})$, задаваемые равенствами $R_\alpha f(\tau) = f(\alpha\tau)$, $M_a f(\tau) = a(\tau) f(\tau)$. Показать, что из M и σ можно построить представление M: $s \to M_{\sigma(s)}$ группы G в H. Показать, что M и R — слабо непрерывные унитарные представления групп G и $\hat{G}$ соответственно, обладающие свойством $M_s R_\alpha = (s, \alpha) R_\alpha M_s$ для всех $s \in G$, $\alpha \in \hat{G}$. В силу обобщения Макки теоремы Стоуна — фон Неймана существует линейная изометрия S пространства H на прямую сумму нескольких экземпляров $L^2(G)$, для которой

$$SM_sS^{-1}\{f_1(t), \ldots, f_k(t), \ldots\} = \{f_1(ts), \ldots, f_k(ts), \ldots\},$$

$$S'R_\alpha S^{-1}\{f_1(t), \ldots, f_k(t), \ldots\} = \{\alpha(t) f_1(t), \ldots, \alpha(t) f_k(t), \ldots\},$$

где $f \in L^2(G)$. Вывести отсюда, что G топологически изоморфна $\hat{\hat{G}}$ (принцип двойственности Понтрягина).

Упражнение 5.2. Пусть G и $\hat{G}$ такие же, как и выше. Для борелевского множества $S \subset G$ обозначим через χ_S его характе-

[1]) *И подпространства в S. — Прим. перев.*

ристическую функцию и положим $E(S)f(g)=\chi_S(g)f(g)$. Это определяет спектральную меру dE на $L^2(G)$, для которой $U(g)E(S)=E(gS)U(g)$, где $U(g)f(h)=f(gh)$ — левое регулярное представление G в $L^2(G)$. Определим представление $\hat{G}$, полагая $V(\alpha)=\int\limits_{\hat{G}}\alpha(g)\,dE(g)$, где $\alpha\in\hat{G}$. Читатель легко проверит, что $U(g)V(\alpha)=\alpha(g)V(\alpha)U(g)$. Теперь поменяем роли U и V, G и $\hat{G}$. Обозначим соответствующие представления через U' и V'. Тогда по теореме Макки существует изометрия T: $L^2(G)\to L^2(\hat{G})$, для которой $U'T=TU$, $V'T=TV$. Используя это, показать, что существует отображение $\mathscr{F}$: $\varphi\in L^2(G)\to c\int\overline{\alpha(g)}\,\varphi(g)\,dg=\mathscr{F}\varphi(\alpha)$, обладающее свойствами

$$\int\limits_{\hat{G}}|\mathscr{F}\varphi(\alpha)|^2\,d\alpha=\int\limits_{G}|\varphi(g)|^2\,dg,$$

$$\int\limits_{\hat{G}}\mathscr{F}\varphi(\alpha)\,\overline{\mathscr{F}\psi(\alpha)}=\int\limits_{G}\varphi(g)\,\overline{\psi(g)}\,dg$$

и

$$\mathscr{F}^{-1}(f)(g)=c\int\limits_{\hat{G}}\alpha(g)f(\alpha)\,d\alpha\quad\text{для } f\in L^1(\hat{G})\cap L^2(\hat{G}).$$

Упражнение 5.3. Пусть G — компактная хаусдорфова группа. Использовать обобщение Макки теоремы Стоуна — фон Неймана для вывода принципа двойственности Таннаки.

Глава 6 Геометрия поляризаций

6.1. Поляризации

Пусть M — вещественное многообразие размерности $2n$. *Почти комплексной структурой* на M называется тензорное поле J: $m \to J_m \in \operatorname{End}(T_m M)$ для $m \in M$, обладающее свойствами (i) $J_m^2 = -1$ и (ii) J — гладкое поле. Такое поле J определяет комплексное распределение F: $m \to F_m \subset T_m^{\mathbf{C}}$, для которого[1]) $T_m^{\mathbf{C}} = F_m \oplus \bar{F}_m$. Почти комплексное многообразие обозначается через (M, J). Гладкие функции $f \in A(M)$, обладающие свойством $X(f) = 0$ для всех $X \in V_F(M) = \{X \in V^{\mathbf{C}}(M) \mid X_m \in F_m$ для всех $m \in M\}$, образуют алгебру голоморфных функций.

Определение 6.1.1. Почти комплексное многообразие (M, J) называется *комплексным*, если F инволютивно, т. е. $[X, Y] \in V_F$ для всех $X, Y \in V_F$.

Определение 6.1.2. *Кэлеровым многообразием*[2]) называется симплектическое многообразие (M, Ω) с такой комплексной структурой (F, J), что $\Omega_m | F_m = 0$ для всех $m \in M$.

Пусть E — вещественное векторное пространство и B — кососимметричная билинейная форма на E. Если $E(B)$ — ядро B, т. е. $E(B) = \{x \in E \mid B(x, y) = 0$ для всех $y \in E\}$, то B определяет невырожденную кососимметричную билинейную форму на $E/E(B)$; таким образом, $\dim E/E(B)$ четна. Если W — подпространство в E, через $W(B)$ обозначается ортогональное дополнение к W относительно B.

Определение 6.1.3. Подпространство W называется *лагранжевым* или *вполне изотропным*, если $W(B) = W$, *изотропным*, если $W \subset W(B)$, и *коизотропным*, если $W \supset W(B)$.

Теорема 6.1.4. *Подпространство W лагранжево, если оно изотропно и* $\dim W = (1/2)(\dim E + \dim E(B))$.

Определение 6.1.5. Если $\dim E = 2n$ и форма B невырожденна, то совокупность всех лагранжевых подпространств (раз-

[1]) Подпространство F_m состоит из собственных векторов для J_m с собственным значением $-i$. — *Прим. перев.*

[2]) Обычно такие многообразия называют *псевдокэлеровыми*, а в определение кэлерова многообразия включают условие $\Omega(X, J(X)) \geqslant 0$ (ср. ниже определение 6.1.7). — *Прим. перев.*

мерности n) обозначается через $\Lambda(n)$ и называется *лагранжевым грассманианом.*

Теорема 6.1.6. $\Lambda(n)=U(n)/O(n)$.

Если $E^{\mathbf{C}}$ — комплексификация E и B невырожденна, то B продолжается до невырожденной формы на $E^{\mathbf{C}}$ и определяет эрмитову форму H на $E^{\mathbf{C}}$ по формуле $H(x, y)=2iB(x, \bar{y})$.

Определение 6.1.7. Лагранжево подпространство $W\subset E^{\mathbf{C}}$, на котором форма H неотрицательна, т. е. $iB(w, \bar{w})\geqslant 0$ для $w\in W$, называется *положительным.*

Определение 6.1.8. *Поляризацией* симплектического многообразия (M, Ω) размерности $2n$ называется гладкое n-мерное распределение $F\colon m\longmapsto F_m\subset T_m^{\mathbf{C}}$, обладающее свойствами (i) $\Omega_m|F_m=0$ для всех $m\in M$ (т. е. F_m — комплексное лагранжево подпространство в $T_m^{\mathbf{C}}$), (ii) F инволютивно.

Если $X\to\bar{X}$ означает комплексное сопряжение в $T^{\mathbf{C}}$, то для любой поляризации F распределение $\bar{F}\colon m\longmapsto \bar{F}_m$ также будет поляризацией.

Определение 6.1.9. Пусть (M, Ω, F) — поляризованное многообразие. Поляризация F называется *вещественной*, если $F=\bar{F}$, и *кэлеровой*, если $F\cap\bar{F}=0$ (т. е. $T_m^{\mathbf{C}}=F_m\oplus\bar{F}_m$).

Определение 6.1.10. Пусть (M, Ω, F) — поляризованное многообразие. Поляризация F называется *допустимой*, если

(i) $m\longmapsto F_m\cap\bar{F}_m$ — инволютивное распределение постоянной (комплексной) размерности k;

(ii) $m\longmapsto F_m+\bar{F}_m$ — инволютивное распределение размерности $2n-k$.

Таким образом, для допустимой поляризации определены два вещественных распределения:

$$D\colon\ m\longmapsto D_m=F_m\cap T_m=\bar{F}_m\cap T_m,$$

$$E\colon\ m\to E_m=(F_m+\bar{F}_m)\cap T_m.$$

Ясно, что $0\subset D_m\subset E_m\subset T_m$ и $\dim D_m=k$, $\dim(T_m/E_m)=k$ и $\dim(E_m/D_m)=2(n-k)$. Поляризация F вещественна тогда и только тогда, когда $E=D$; F кэлерова тогда и только тогда, когда $D=0$.

Определение 6.1.11. Пусть (M, Ω, B) — поляризованное многообразие и $V_F(M)=\{X|X_m\in F_m$ для всех $m\in M\}$. Положим $A_F(M)=\{f\in A(M)\,|\,X(f)=0$ для всех $X\in V_F(M)\}$. Эта алгебра называется *алгеброй F-голоморфных функций.* Соответствие $U \to A_F(U)$ определяет пучок $\mathcal{A}_F$ ростков F-голоморфных функций. Приведем два элементарных свойства A_F.

Теорема 6.1.12. (i) *Функция* $f \in A(M)$ *принадлежит* $A_F(M)$ *тогда и только тогда, когда* $P(f) \in V_F$, *где* P: $A(M) \to V(M)$ — *отображение Пуассона* (см. 3.4.10);

(ii) $A_F(M)$ — *абелева подалгебра Ли в* $A(M)$.

Определение 6.1.13. Пусть (M, Ω, F) — поляризованное многообразие. Положим $C_F^{(k)} = \{f \in A(M) \mid \{f_1, \{f_2, \ldots \{f_{k+1}, f\} \ldots\} = 0\}$ для всех $f_i \in A_F(U)$ и для всех открытых $U \subset M$.

Теорема 6.1.14. (i) $C_F^{(k)} \subset C_F^{(k+1)}$;

(ii) $\{C_F^{(k)}, A_F\} \subset C_F^{(k-1)}$;

(iii) *если* F — *допустимая поляризация, то* $C_F^{(0)} = A_F$ *и* $\{C_F^{(k)}, C_F^{(l)}\} \subset C_F^{k+l-1}$, *где* $C_F^{(-1)} = \{0\}$;

(iv) *если* $f \in A(M)$ *такова, что поле* $P(f)$ *порождает глобальную 1-параметрическую группу* $g(t)$, *и если* F — *допустимая поляризация, то* $g(t)_* F = F$ *для всех* $t \in R$ *и* $f \in C_F^{(1)}$.

Следствие 6.1.15. *Если* (M, Ω, F) *удовлетворяет условию п.* (iii), *то* $\{C_F^{(1)}, C_F^{(k)}\} \subset C_F^{(k)}$.

Мы видим отсюда, что $C_F^{(1)}$ — подалгебра Ли в $A(M)$ и $A_F(M)$ — абелев идеал в $C_F^{(1)}$.

Пример 6.1.16. Стандартным примером поляризованного многообразия является $M = T^*N$ с локальными координатами (p_i, q_i). Пусть F_m порождается $\{(\partial/\partial p_i)_m, i = 1, 2, \ldots, n\}$. Тогда $A_F = \{f \in A(M) \mid f(p, q) = \tilde{f}(q)\}$, а $C_F^{(1)} = \{f \in A(M) \mid f(p, q) = \sum p_i \tilde{f}_i(q) + \tilde{f}(q)\}$.

Пусть F — допустимая поляризация (M, Ω). Обозначим через (L, α) линейное расслоение над M со связностью α, для которой $d\alpha = \Omega$. Сечения L, ковариантно постоянные вдоль F, задаются следующим образом.

Определение 6.1.17. $S_F = \{f \in S \mid \nabla_X f = 0$ для всех $X \in V_F\}$.

Пример 6.1.18. Если (M, Ω, F) — кэлерово многообразие, то S_F — пространство голоморфных сечений (L, α).

Теорема 6.1.19. *Пусть* $\mathfrak{q}$ — *отображение Костанта — Сурьо. Тогда* S_F *инвариантно относительно* $\mathfrak{q}(C_F^{(1)})$. *Таким образом, мы имеем представление* $\mathfrak{q}$ *алгебры Ли* $C_F^{(1)}$ *в* S_F. *Отметим, что для* $f \in A_F \subset C_F^{(1)}$ *справедливо равенство* $\mathfrak{q}(f)s = 2\pi i f \cdot s$ *для* $s \in S_F$.

Определение 6.1.20. Поляризация F симплектического G-многообразия называется *G-инвариантной, если* $\sigma(g)_* F_m = F_{gm}$ *для всех* $g \in G$ и $m \in M$.

Представление группы G в пространстве сечений возникает, если рассмотреть поляризованное G-многообразие (M, Ω, F), для которого σ: $\mathfrak{g} \to V(M)$ допускает поднятие λ: $\mathfrak{g} \to A(M)$, так что $\lambda(\mathfrak{g}) \subset C_F^{(1)}$. Если F G-инвариантна, то S_F сохраняется при действии G, и мы получаем естественный гомоморфизм T_F: $G \to \operatorname{Aut} S_F$.

6.2. Теорема Римана — Роха для поляризаций

Пусть $F^0 \subset (T^*M)^{\mathbf{C}}$ — подрасслоение в $(T^*M)^{\mathbf{C}}$, состоящее из ковекторов, обращающихся в нуль на F. Таким образом, $f \in A_F(U)$ для открытого множества $U \subset M$, если и только если df является сечением F^0 над U. Если в $A_F(U)$ есть функции $f_1, \ldots, f_m$, для которых $(df_1, \ldots, df_m)$ образуют базис F^0 в каждой точке U, то $(f_1, \ldots, f_m)$ называют *A_F-координатной системой*, а U называют *A_F-координатной окрестностью*. Распределение F *интегрируемо*, если M может быть покрыто A_F-координатными окрестностями. Если F интегрируемо, то оно инволютивно. Обратное утверждение также верно при некоторых дополнительных условиях.

Теорема 6.2.1 (Фробениус — Ниренберг). *Если распределение F инволютивно и если выполнено одно из условий*

(i) $\dim_{\mathbf{C}}(F_m \cap \bar{F}_m) = \mathrm{const}$ *и* $F + \bar{F}$ *инволютивно,*

(ii) *M — вещественно-аналитическое многообразие и F — аналитическое подрасслоение,*

то F интегрируемо.

Пусть $\Omega_F^p(U)$ означает пространство сечений $\wedge^p F^*$ над открытым множеством $U \subset M$. В частности, $\Omega_F^0(U) = A(U)$. Рассматривая сечения $\wedge^p F^*$ как кососимметричные $A(U)$-полилинейные отображения $V_F(U)$ в $A(U)$, мы можем в случае инволютивного F определить дифференциал d_F: $\Omega_F^p(U) \to \Omega_F^{p+1}(U)$, полагая

$$(d_F\alpha)(X_1, \ldots, X_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} X_i [\alpha(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{p+1})] + $$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j-1} \alpha([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{p+1})$$

для $X_i \in V_F(U)$, $i = 1, 2, \ldots, p+1$. Легко проверить, что $d_F^2 = 0$ и $d_F f = df \mid F$ для $f \in A(M)$. Кроме того, $A_F = \{f \in A(M) \mid d_F f = 0\}$.

Группы гомологий дифференциального комплекса

$$0 \to \Omega_F^0(M) \xrightarrow{d_F} \Omega_F^1(M) \xrightarrow{d_F} \ldots \xrightarrow{d_F} \Omega_F^n(M) \to 0$$

будем обозначать через $H^p(\Omega_F^*(M))$.

Если $\mathscr{A}_F^p$ — пучок ростков гладких сечений $\wedge^p F^*$, то имеет место точная последовательность

$$0 \to \mathscr{A}_F \to \mathscr{A}_F^0 \xrightarrow{d_F} \mathscr{A}_F^1 \xrightarrow{d_F} \ldots \xrightarrow{d_F} \mathscr{A}_F^n \to 0. \qquad (*)$$

Теорема 6.2.2. *Если выполнено условие* (i) *теоремы* 6.2.1, *то* $H^p(M, \mathscr{A}_F) \simeq H^p(\Omega_F^*(M))$ *для всех* p *и* $(*)$ *является тонкой резольвентой пучка* $\mathscr{A}_F$.

Пример 6.2.3. Если $F = T^{\mathbf{C}}M$, то эта теорема сводится к обычной теореме де Рама, так как $\mathscr{A}_F$ в этом случае — постоянный пучок $\mathbf{C}$.

Пример 6.2.4. Пусть $T^{\mathbf{C}}M = F \oplus \bar{F}$ и $J \in \operatorname{End} TM$ является умножением на $-i$ в F и на i в $\bar{F}$, M является комплексным многообразием, A_F-координатные окрестности являются голоморфными системами координат; тогда $\Omega_F^p(M) \simeq \Omega^{0,\,p}(M)$, а $(*)$ есть $\bar{\partial}$-резольвента пучка ростков голоморфных функций $\mathscr{A}_F$.

Замечание. В оставшейся части этого раздела мы предполагаем, что распределение F инволютивно и удовлетворяет условию (i) из 6.2.1.

Выделяя дополнительное к F распределение F^1, например с помощью некоторой эрмитовой структуры на $T^{\mathbf{C}}M$, так что $T^{\mathbf{C}}M = F^1 \oplus F$, мы можем определить в $\wedge (T^*M)^{\mathbf{C}}$ биградуировку, полагая $\wedge^k (T^*M)^{\mathbf{C}} = \bigoplus\limits_{p+q=k} (\wedge^p F^1 \otimes \wedge^q F)^*$. Она переносится на пучок ростков дифференциальных форм на M. Тогда $\Omega_F^k(M) = \bigoplus \Omega_F^{p,\,q}$, где $\Omega_F^{p,\,q}$ — пучок ростков сечений $(\wedge^p F^1 \otimes \wedge^q F)^*$ Последовательность $(*)$ принимает вид

$$0 \to \mathscr{A}_F^p \to \Omega_F^{p,\,0} \xrightarrow{d_F} \Omega_F^{p,\,1} \to \ldots \to \Omega_F^{p,\,n} \to 0,$$

где $n = \operatorname{rank}(F)$.

Для комплексного пространства E пусть $\Omega_F^{p,\,q}(E) = \Omega_F^{p,\,q} \otimes E$ — пространство E-значных форм.

Теорема 6.2.2 допускает такую переформулировку:

Теорема 6.2.5. $H^q(M, \mathscr{A}_F^p(E)) \simeq H^q(\Omega_F^{p,\,*}(E))$.

Следствие 6.2.6. Если $q > \operatorname{rank}(F)$, *то* $H^q(M, \mathscr{A}_F^p(E)) = 0$.

Определение 6.2.7. Пусть $E \to M$ — комплексное векторное расслоение над M. Оно называется *F-голоморфным*, если существует такой атлас $\{U_\alpha\}$ на M, что $E|U_\alpha$ тривиально и 1-коцикл переходных функций $(g_{\alpha\beta})$, определяемый атласом $\{U_\alpha\}$, обладает свойством $d_F g_{\alpha\beta} = 0$.

Пусть $s \in S(E)$ — сечение, соответствующее в атласе $\{U_\alpha\}$ набору s_α: $U_\alpha \to E$. Тогда $s_\beta = g_{\beta\alpha} s_\alpha$. Применяя d_F, получаем $d_F s_\beta = d_F (g_{\beta\alpha} s_\alpha) = d_F (g_{\beta\alpha}) s_\alpha + g_{\beta\alpha} d_F s_\alpha = g_{\beta\alpha} d_F s_\alpha$. Таким образом, набор $d_F s_\alpha$ определяет сечение E, которое мы обозначим через $d_F s$. Отсюда возникает комплекс $(\Omega^{p,q}(E), d_F)$, состоящий из E-значных дифференциальных форм типа (p, q). По теореме 6.2.2 имеет место обобщенная теорема Дольбо — Серра.

Теорема 6.2.2′. *Комплекс $(\Omega^p_F(E),\ d_F)$ является тонкой резольвентой $\mathscr{A}^p_F(E)$ и $H^q(M,\ A^p_F(E)) = H^q(\Omega^p(E))$.*

Пусть $L(E_1, E_2)$ — расслоение линейных отображений $E_1 \to E_2$. Мы можем рассматривать $\Omega^{p,q}(E)$ как пространство сечений $L(\wedge^p F^1 \otimes \wedge^q F, E) = D^{p,q}(E)$. Если расслоение E F-голоморфно, то мы получаем точную последовательность

$$D^{p,0}(E) \xrightarrow{d_F} D^{p,1}(E) \xrightarrow{d_F} \dots \xrightarrow{d_F} D^{p,n}(E) \to 0.$$

Определение 6.2.8. *Символом* оператора d_F называется отображение $\sigma(d_F)$, определяемое формулой $\sigma(d_F)(m)(\alpha, \beta) = (d_F(f - f(m))s)(m)$, где $\alpha \in T^*_m(M)$ (вещественное кокасательное пространство), $\beta \in D^{p,q}(E)_m$, а функция f и сечение s расслоения $D^{p,q}(E)$ выбираются так, чтобы выполнялись равенства $df(m) = \alpha$, $s(m) = \beta$.

Как указал Х. Фишер, последовательность символов точна тогда и только тогда, когда $F + \bar{F} = T^{\mathbf{C}}M$. Таким образом, имеет место

Теорема 6.2.9. *Равенство $F + \bar{F} = T^{\mathbf{C}}M$ равносильно условию эллиптичности комплексов $(D^{p,q}(E), d_F)$ для $p \geqslant 0$ и F-голоморфного расслоения E.*

Следствие 6.2.10. *В частности, в условиях теоремы 6.2.9 пространства когомологий $H^*(M, \mathscr{A}^p(E))$ конечномерны.*

Следствие 6.2.11. *Для поляризованного симплектического многообразия эллиптичность равносильна кэлеровости.*

Введение эрмитовой структуры на расслоениях $D^{p,q}(E)$ позволяет определить формально сопряженный к d_F оператор d_F^* и, следовательно, обобщенный лапласиан $\Delta_F = d_F d_F^* + d_F^* d_F$. Вычисляя символ Δ_F, можно убедиться, что Δ_F — эллиптический оператор порядка 2.

Определение 6.2.12. Пусть $\mathscr{H}_F^{p,q}(E)$ обозначает *пространство Δ_F-гармонических сечений* расслоения $D^{p,q}(E)$.

Имеет место изоморфизм Ходжа $H^q(\Omega^{p,*}(E)) \simeq \mathscr{H}_F^{p,q}(E)$.

Рассмотрим теперь случай $p = 0$. Характеристика Эйлера — Пуанкаре для E определяется как $\chi_F(M, E) = \chi(M, \mathscr{A}_F(E)) = \sum (-1)^q \dim \mathscr{H}_F^{0,q}(E)$, где $\mathscr{A}_F(E)$ — пучок ростков F-голоморфных сечений F-голоморфного расслоения E.

Расслоение $D^{0,q}(E) = L(\wedge^q F, E)$ изоморфно $\wedge^q F^* \otimes E$. Оператор d_F: $D^{0,q}(E) \to D^{0,q+1}(E)$ имеет формальный сопряженный $\overset{*}{d}_F$, и мы полагаем $D_F = d_F + \overset{*}{d}_F$, так что $\Delta_F = D_F^2$.

Теорема 6.2.13. *Оператор D_F эллиптичен и характеристика $\chi_F(M, E)$ равна $\operatorname{ind}_a D_F$, аналитическому индексу D_F.*

Следующий результат требует некоторых сведений о характеристических классах. Объем книги не позволяет нам входить в детали. Читателю рекомендуется обратиться к [H 22]. В интересах начинающих мы включаем несколько упражнений, касающихся класса Тодда.

Прежде всего, для любого $GL(q, \mathbf{C})$-расслоения ξ над компактным почти комплексным многообразием M определены классы Черна $c_i \in H^{2i}(M, \mathbf{Z})$, $1 \leqslant i \leqslant q$. Полный класс Тодда $\operatorname{Td}(\xi)$ определяется с помощью формального разложения на линейные множители; а именно

$$\text{если } \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j = \prod_{i=1}^{q} (1 + \gamma_i x), \text{ то } \operatorname{Td}(\xi) = \prod_{i=1}^{q} \frac{\gamma_i}{1 - e^{-\gamma_i}}.$$

Характер Черна определяется равенством $\operatorname{ch} \xi = \sum_{i=1}^{q} e^{\gamma_i}$.

Фишер и Вильямс доказали следующий обобщенный вариант теоремы Римана — Роха.

Теорема 6.2.14 (обобщенная теорема Римана — Роха). *Пусть M — компактное четномерное ориентированное многообразие и распределение F эллиптично. Если распределение $D = F \cap \bar{F} \cap TM$ определяет расслоение $M \to M/D$, то M/D — комплексное многообразие с комплексной структурой J_D, индуцируемой распределением F. Для любого F-голоморфного векторного расслоения E над M справедливо равенство*

$$\chi_F(M, E) = \operatorname{ch}(E) e(D) \operatorname{Td}(TM/D)[M],$$

где $\operatorname{Td}(\cdot)$ — класс Тодда комплексного векторного расслоения, $\operatorname{ch}(\cdot)$ — характер Черна, а $e(\cdot)$ — эйлеров класс вещественного векторного расслоения.

Доказательство приведено в [F3] и весьма непосредственно.

Пример 6.2.15. Если F вещественно и $E = 1$ (тривиальное одномерное расслоение), то $d_F = d$, $TM/D = 0$, $\mathcal{A}_F(E) = \mathbf{C}$ и $\chi_F(M) = \chi(M) = e(TM)\,[M]$.

Пример 6.2.16. Если $D = 0$, т. е. M — комплексное многообразие, то $d_F = \bar{\partial}$, $TM/D = TM$ и

$$\chi(M,\ E) = \mathrm{ch}(E)\,\mathrm{Td}(M)\,[M]$$

— теорема Римана — Роха — Хирцебруха.

Наконец, Фишер и Вильямс доказали обобщенный вариант двойственности Серра. А именно пусть $k = \operatorname{rank}(D)$; положим $G = D_{\mathbf{C}}^{\perp} \cap F$, и пусть $g = \operatorname{rank}(G)$. Каноническое линейное расслоение определяется как $K_M = \wedge^g \bar{G}^*$.

Теорема 6.2.17 (двойственность Серра). *Пространства*

$$H^q(M,\ \mathcal{A}_F(K_M \otimes E)) \quad \text{и} \quad H_c^{n-q}(M,\ \mathcal{A}_F(K_M \otimes E^*))$$

находятся в двойственности (здесь индекс c означает когомологии с компактными носителями).

Следствие 6.2.18. *Если* $E = M \times \mathbf{C}$ *и* M *компактно, то* $H^q(M,\ \mathcal{A}_F)^* = H^{n-q}(M,\ \mathcal{A}_F \otimes K_M)$, *где* $n = \operatorname{rank}(F)$.

6.3. Поляризации в алгебрах Ли

Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли и $f \in \mathfrak{g}^*$. Продолжим f до линейного функционала на $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$. Тогда f определяет билинейную форму B_f: $B_f(X,\ Y) = f([X,\ Y])$, ядром которой является подалгебра $\mathfrak{g}(f)$.

Определение 6.3.1. Подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ называется *поляризацией* для f, если

(i) подпространство $\mathfrak{h}$ является лагранжевым для формы B_f; тогда $\dim \mathfrak{h} = (1/2)(\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}(f))$;

(ii) $\mathfrak{h} + \bar{\mathfrak{h}}$ — подалгебра Ли в $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$.

Определение 6.3.2. Поляризация $\mathfrak{h}$ для f называется *вещественной*, если $\mathfrak{h} = \bar{\mathfrak{h}}$.

Форма B_f задает эрмитову форму H_f на $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ по формуле $H_f(X,\ Y) = 2iB_f(X,\ \bar{Y}) = 2if([X,\ \bar{Y}])$.

Определение 6.3.2′. Поляризация $\mathfrak{h}$ для f называется *положительной*, если $H_f|\mathfrak{h}$ неотрицательна, т. е. $if([X,\ \bar{X}]) \geqslant 0$ для всех $X \in \mathfrak{h}$.

Ясно, что всякая вещественная поляризация положительна, так как в этом случае $H_f|\mathfrak{h} = 0$.

Поляризации $\mathfrak{h}$ соответствуют две вещественные подалгебры в $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{e} = (\mathfrak{h} + \overline{\mathfrak{h}}) \cap \mathfrak{g}, \text{ так что } \mathfrak{e}^{\mathbf{C}} = \mathfrak{h} + \overline{\mathfrak{e}}$$

и

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}, \text{ так что } \mathfrak{d}^{\mathbf{C}} = \mathfrak{h} \cap \overline{\mathfrak{h}}.$$

Заметим, что $\mathfrak{d}$ является ортогональным дополнением к $\mathfrak{e}$ в смысле формы B_f и что на $\mathfrak{e}/\mathfrak{d}$ возникает невырожденная кососимметричная билинейная форма. Поэтому $\dim \mathfrak{e}/\mathfrak{d}$ четна.

Теорема 6.3.3. *Если $\mathfrak{h}$ — положительная поляризация для f, то* $D = \{X \in \mathfrak{h} | f([X, \bar{X}]) = 0\}$.

Пример 6.3.4. Пусть $\mathfrak{n}$ — алгебра Гейзенберга с базисом $\{P, Q, I\}$ и коммутационным соотношением $[P, Q] = I$. Если функционал $f \in \mathfrak{n}^*$ обращается в нуль на центре $\mathfrak{z}$ алгебры Ли $\mathfrak{n}$, то $f | [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = 0$, так что $\mathfrak{g}(f) = \mathfrak{n}$ — единственная поляризация для f.

Если $f|\mathfrak{z} \neq 0$, то $\mathfrak{h}_0 = \mathbf{C}P + \mathbf{C}I$ и $\mathfrak{h}_1 = \mathbf{C}(P + iQ) \oplus \mathbf{C}I$ — поляризации. Ясно, что $\mathfrak{h}_0$ вещественна, а $\mathfrak{h}_1$ обладает свойством $\mathfrak{h}_1 \oplus \overline{\mathfrak{h}}_1 = \mathfrak{n}^{\mathbf{C}}$.

Центр $\mathfrak{z}$ одномерен и вкладывается в группу Гейзенберга N по формуле $i(t) = \exp(tI)$. Обозначим образ этого вложения через Z. Характеры Z имеют вид $\chi_\mu(i(t)) = \mathbf{e}(\mu t)$, где $\mathbf{e}(\cdot) = \exp(2\pi i \cdot)$. Рассмотрим подгруппу $H = \exp \mathfrak{h}_0$. Характер χ_μ продолжается (неоднозначно) до характера χ_f группы H, действующего по формуле $\chi_f(\exp X) = \exp(if(X))$, где $f \in \mathfrak{h}^*$ обладает свойством $f(I) = \mu$. Читатель может проверить, что представление N, индуцированное характером χ_f подгруппы H, действует в $L^2(\mathbf{R})$ по формуле

$$U_f(g)\varphi(q') = \mathbf{e}(\mu t)\mathbf{e}(\mu p q')\varphi(q + q'),$$

где $g = i(t)\exp(pP)\exp(qQ)$. Мы получили представление Шрёдингера. По теореме Стоуна — фон Неймана всякое неприводимое унитарное представление N, для которого $U(i(t)) = \chi_\mu(t) \cdot 1$, унитарно эквивалентно представлению Шрёдингера. Поэтому все неприводимые представления N индуцированы с $\mathfrak{h}_0$.

В гл. 7 мы покажем, как связаны поляризации в алгебрах Ли с поляризациями на многообразиях.

6.4. Спинорные структуры, метаплектические структуры и квадратные корни из расслоений

Клиффордова алгебра A_n порождается над $\mathbf{R}$ образующими $e_1, \ldots, e_n$ с соотношениями $e_i^2 = 1$, $e_i e_j + e_j e_i = 0$ при $i \neq j$. Пусть $\mathbf{R}^n$ — пространство, порожденное e_i. Группа обратимых элементов g алгебры A_n, обладающих свойством $gxg^{-1} \in \mathbf{R}^n$ для $x \in \mathbf{R}^n$, обозначается через $\mathrm{Pin}(n)$. Поскольку $\|gxg^{-1}\| = \|x\|$, мы видим, что преобразование α_g: $x \mapsto gxg^{-1}$ ортогонально в $\mathbf{R}^n$. Таким образом, возникает представление $\mathrm{Pin}(n) \to O(n)$: $g \mapsto \alpha_g$. Прообраз $SO(n)$ при этом представлении называется *спинорной* группой $\mathrm{Spin}(n)$. Значит,

$$0 \to \mathbf{Z}_2 \to \mathrm{Spin}(n) \to SO(n) \to 0,$$

т. е. $\mathrm{Spin}(n)$ является универсальной накрывающей $SO(n)$. Пусть $\gamma \in H^1(SO(n), \mathbf{Z}_2)$ — соответствующий класс когомологий.

Если M — ориентированное риманово многообразие, то над M определено главное $SO(n)$-расслоение $SO(n) \to P \to M$ — расслоение реперов.

Определение 6.4.1. *Спинорной структурой* на M называется двулистное накрытие $Q \to P$, которое является главным $\mathrm{Spin}(n)$-расслоением

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spin}(n) \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[d, equal] \\ SO(n) \arrow[r] & P \arrow[r] & M \end{tikzcd} \qquad (*)$$

Определение 6.4.2. Для заданного центрального расширения групп Ли

$$0 \to C \to \tilde{G} \xrightarrow{p} G \to 0 \qquad \left(\begin{smallmatrix} * \\ * \end{smallmatrix}\right)$$

и главного G-расслоения P назовем *p-поднятием* P главное $\tilde{G}$-расслоение $\tilde{P}$, связанное с P морфизмом $\tilde{p}$: $\tilde{P} \to P$, индуцированным p.

Определение 6.4.3. Два p-поднятия $(\tilde{P}', \tilde{p}')$ и $(\tilde{P}, \tilde{p})$ называются *эквивалентными*, если существтвует такой морфизм расслоений φ, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \tilde{P}' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\tilde{p}'"'] & \tilde{P} \arrow[d, "\tilde{p}"] \\ P \arrow[r, equal] & P \end{tikzcd}$$

Множество классов изоморфизма главных G-расслоений над M совпадает с $H^1(M, G)$. Точной последовательности $\left(\begin{smallmatrix} * \\ * \end{smallmatrix}\right)$ соответствует последовательность когомологий

$$\ldots \to H^1(M, \underline{C}) \to H^1(M, \underline{\tilde{G}}) \to H^1(M, \underline{G}) \xrightarrow{\delta^1} H^2(M, \underline{C}) \to \ldots .$$

Теорема 6.4.4. *Расслоение P допускает p-поднятие тогда и только тогда, когда $\delta^1(|P|) = 0$.*

Теорема 6.4.5. *Группа $H^1(M, C)$ действует просто транзитивно на множестве р-поднятий P, если последнее непусто.*

Из последовательности (*) вытекает точная последовательность

$$0 \to H^1(M, \mathbf{Z}_2) \to H^1(P, \mathbf{Z}_2) \to H^1(SO(n), \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\delta} H^2(M, \mathbf{Z}_2).$$

Отсюда следует

Теорема 6.4.6. *Спинорная структура на M существует тогда и только тогда, когда $\delta(\gamma) = w_2(M) = 0$. Если это условие выполнено, спинорные структуры нумеруются элементами $H^2(M, \mathbf{Z}_2)$-орбиты в $H^2(P, \mathbf{Z}_2)$. Если M допускает почти комплексную структуру, то $SO(2n)$-расслоение P редуцируется к $U(n)$-расслоению.*

Теорема 6.4.7. *Если M — комплексное многообразие, то множество спинорных структур на нем находится во взаимно однозначном соответствии с двулистными накрытиями расслоения $U(1) \to \det P \to M$, в котором отображение накрытия в каждом слое сводится к возведению в квадрат: $U(1) \to U(1): z \mapsto z^2$.*

Следствие 6.4.8. *Если M — комплексное многообразие, то множество спинорных структур на M находится во взаимно однозначном соответствии с классами изоморфизма линейных расслоений (L, α), где α: $L^2 \to K$ — непрерывный изоморфизм между $L^2 = L \otimes L$ и каноническим расслоением K.*

Для заданной пары (L, α) можно перенести с K на L голоморфную структуру, превращающую L в голоморфное расслоение. Поэтому справедлива

Теорема 6.4.9. *Множество спинорных структур на компактном комплексном многообразии M взаимно однозначно соответствует множеству классов изоморфизма голоморфных линейных расслоений L, для которых $L^2 \simeq K$.*

Рассмотрим теперь симплектическое многообразие (M, Ω). Структурная группа его касательного расслоения $Sp(2n, \mathbf{R})$ допускает двулистное накрытие $Mp(2n, \mathbf{R})$, называемое *метаплектической группой*:

$$0 \to \mathbf{Z}_2 \to Mp(2n, \mathbf{R}) \xrightarrow{p} Sp(2n, \mathbf{R}) \to 0.$$

Назовем *метаплектической структурой* на M класс эквивалентности p-поднятия расслоения $Sp(2n, \mathbf{R}) \to P \to M$. Поскольку максимальная компактная подгруппа в $Sp(2n, \mathbf{R})$ изоморфна $U(n)$, расслоение P редуцируется к главному $U(n)$-расслоению, т. е. (M, Ω) допускает почти комплексную структуру J. Пусть

$T_m^{\mathbf{C}}M$ — комплексификация T_mM; если положить $F_m = \{X \in T_m^{\mathbf{C}}M \mid JX = -iX\}$, то $L_m = \bigwedge^n F_m$ будет слоем линейного расслоения L над M и первый класс Черна $c_1(L)$ совпадает с классом Черна многообразия M. (Тем самым $c_1(L)$ не зависит от выбора J.)

Теорема 6.4.10. *Симплектическое многообразие (M, Ω) допускает метаплектическую структуру тогда и только тогда, когда класс $c_1(M) \in H^2(M, \mathbf{Z})$ делится на 2, т. е. существует такое линейное расслоение $\tilde{L}$ над M, что $L = \tilde{L}^2$.*

Из точной последовательности

$$0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbf{Z}_2 \to 0$$

получаем отображение α: $H^2(M, \mathbf{Z}) \to H^2(M, \mathbf{Z}_2)$. Положим $\bar{c} = \alpha(c_1(M))$.

Теорема 6.4.11. *Метаплектическая структура на (M, Ω) существует при условии, что $\bar{c} = 0$.*

В силу теоремы 6.4.5 справедлива

Теорема 6.4.12. *Если $\bar{c} = 0$, то множество классов метаплектических структур на M биективно $H^1(M, \mathbf{Z}_2)$. В частности, если M односвязно, то метаплектическая структура единственна.*

Наконец, если M допускает вещественную поляризацию F, то $\bigwedge^n F_m$ является слоем вещественного линейного расслоения над M и определяет элемент $\tau \in H^1(M, \mathbf{Z}_2)$.

Теорема 6.4.13. *Справедливо равенство $\bar{c} = \tau^2$, так что условием существования метаплектической структуры является равенство $\tau^2 = 0$.*

Пример 6.4.14. Если $M = T^*N$ и F — поляризация, определяемая кокасательными пространствами, то τ совпадает с прообразом $w_1(N)$ в $H^1(M, \mathbf{Z}_2)$. Таким образом, метаплектическая структура существует, если $w_1(N)^2 = 0$. В частности, если N ориентируемо, то $w_2(N) = 0$ и метаплектическая структура существует.

Задачи

Упражнение 6.1. Показать, что метаплектическая структура на $CP(n)$ существует только при нечетных n.

Упражнение 6.2. Пусть E, F — комплексные векторные расслоения над M, $c_j(E) \in H^{2j}(M, \mathbf{Z})$ — классы Черна. Напомним (см. [H 22]), что класс Тодда $\mathrm{Td}(E,F)\in H^*(M)$ определяется формулой

$$\mathrm{Td}(E,\ F)=\mathrm{ch}(F)\sum_j T_j(c_1(E),\ \ldots,\ c_j(E)),$$

где $\mathrm{ch}(F)$ — характер Черна расслоения F. Если F имеет одномерный слой и $d=c_1(F)$, то положим $\mathcal{T}(E,\ d)=\mathrm{Td}(E,\ F)$. Наконец, род Тодда определяется как $T(M,\ d)=\mathcal{T}(T^{\mathbf{C}}M,\ d)[M]$.

Пусть G — компактная связная группа Ли и T — ее максимальный тор. Однородное пространство G/T обладает 2^m G-инвариантными почти комплексными структурами ($m=(1/2)\dim(G/T)$), определяемыми своим первым классом Черна $c_1(G/T)\in H^2(G/T,Z)$ (см. теорему 9.1.20). Показать, что $\mathcal{T}(G/T,\ d)=\exp(d+c_1/2)$ и что $m!\,T(G/T,\ d)=(d+c_1/2)^m[G/T]$. Показать, что $\mathcal{T}(G/T,\ d)=0$, если $d+c_1/2$ — сингулярный вес, и что $\mathcal{T}(G/T,d)=\pm$ степень λ, если $d+c_1/2$ — регулярный вес и λ — неприводимое представление G с экстремальным весом d.

Глава **7** **Геометрия орбит**

7.1. Теория орбит

Пусть G — связная вещественная группа Ли и $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Группа G действует на $\mathfrak{g}$ присоединенным представлением Ad. Коприсоединенное представление определяется формулой

$$\langle g\cdot f,\ Y\rangle = \langle f,\ \mathrm{Ad}(g)^{-1}Y\rangle$$

для $g\in G$, $f\in\mathfrak{g}^*$, $Y\in\mathfrak{g}$. Соответственно определено линейное представление $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}^*$; а именно для $X\in\mathfrak{g}$ действие $X\cdot f$ в $\mathfrak{g}^*$ имеет вид

$$\langle X\cdot f,\ Y\rangle = \langle f,\ [Y,\ X]\rangle$$

для всех $Y\in\mathfrak{g}$.

Пусть G действует на $\mathfrak{g}^*$ коприсоединенным действием. Подгруппа изотропии в G для f обозначается через $G(f) = \{g\in G\,|\,g\cdot f = f\}$. Алгеброй Ли группы $G(f)$ является $\mathfrak{g}(f) = \{X\in\mathfrak{g}\,|\,X\cdot f = 0\}$. В силу орбитного отображения $g\longmapsto g\cdot f$ из G в $\mathfrak{g}^*$ орбита $\mathcal{O}_f = G\cdot f$ отождествляется с $G/G(f)$ и, таким образом, $\mathcal{O}_f$ является гладким многообразием.

Векторное поле $\sigma(\mathcal{O},\ X)$ на $\mathcal{O}$ определяется формулой

$$\sigma(\mathcal{O},\ X)_f(\varphi) = \frac{d}{dt}(\varphi(\exp tX\cdot f))\,|_{t=0},$$

где $\varphi\in A(\mathcal{O})$, $f\in\mathcal{O}$. Если φ — гладкая функция на $\mathfrak{g}^*$, то аналогичная формула задает векторное поле $\sigma(X)$ на $\mathfrak{g}^*$.

Определим дифференциал $d_f\varphi$ гладкой функции φ на $\mathfrak{g}^*$, заданной в окрестности точки f, как функционал

$$\langle d_f\varphi,\ f_1\rangle = \frac{d}{dt}(\varphi(f + tf_1))\,|_{t=0}$$

для $f_1\in\mathfrak{g}^*$. Поскольку $\exp tX\cdot f = f + tX\cdot f \bmod t^2$, имеем

$$\sigma(X)_f(\varphi) = \langle X\cdot f,\ d_f\varphi\rangle.$$

Определение 7.1.1. Для $Y\in\mathfrak{g}$ определим функцию Ψ^Y на $\mathfrak{g}^*$, полагая $\Psi^Y(f) = \langle f,\ Y\rangle$.

Теорема 7.1.2. $\sigma(X)\Psi^Y = \Psi^{[Y,\,X]}$.

Доказательство. $\sigma(X)\Psi^Y(f) = (d/dt)\Psi^Y(\exp tX\cdot f) = (d/dt)\langle\exp tX\cdot f,\ Y\rangle = \langle X\cdot f,\ Y\rangle = \langle f,\ [Y,\ X]\rangle$.

Теорема 7.1.3. *Для* $X\in\mathfrak{g}(f)$ *имеем* $d_f(\sigma(X)\varphi) = [d_f\varphi,\ X]$.

Следствие 7.1.4. *Если φ локально инвариантна относительно G, т. е. $\sigma(X)\varphi=0$ для $X\in\mathfrak{g}$, то $d_f\varphi$ принадлежит центру $\mathfrak{g}(f)$.*

Доказательство следствия. $\langle X\cdot f,\ d_f\varphi\rangle=\sigma(X)_f\varphi=0$. Значит, $d_f\varphi\in\mathfrak{g}(f)$, а в силу теоремы 7.1.3 $d_f\varphi$ принадлежит центру $\mathfrak{g}(f)$.

Поскольку $\sigma(X)_f\in T_f\mathcal{O}_f$, мы можем рассматривать $\sigma(X)_f$ как касательный вектор к орбите и положить

$$\sigma_f\colon\ \mathfrak{g}\to T_f\mathcal{O}_f\colon\ X\mapsto\sigma(X)_f.$$

Теорема 7.1.5. *Последовательность $0\to\mathfrak{g}(f)\to\mathfrak{g}\xrightarrow{\sigma_f}T_f\mathcal{O}_f$ точна.*

Мы видим, таким образом, что $T_f\mathcal{O}=\{\sigma(\mathcal{O},\ \mathfrak{g})_f\}=\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)$. Орбита $\mathcal{O}_f$ является однородным симплектическим многообразием с 2-формой

$$\Omega(\sigma(\mathcal{O},\ X)_f,\ \sigma(\mathcal{O},\ Y)_f)=\langle f,\ [X,\ Y]\rangle.$$

Теорема 7.1.6. $(\mathcal{O},\ \Omega)$ — *гамильтоново G-пространство.*

Доказательство. Пусть B_f — кососимметричная 2-форма на $\mathfrak{g}$, определенная равенством $B_f(X,Y)=\langle f,[X,Y]\rangle=-\langle X\cdot f,\ Y\rangle$. Тогда B_f индуцирует невырожденную форму Ω на $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)$. Пусть $i_{\mathcal{O}}\colon\mathcal{O}\to\mathfrak{g}^*$ – естественное вложение; рассмотрим форму $i_{\mathcal{O}}^*(d\psi)$ для $\psi\in A(\mathfrak{g}^*)$. Обозначим через p отображение $A^1(\mathcal{O})$ в $V(\mathcal{O})$, определяемое равенством $\Omega(p(\alpha),\ X)=i(X)\alpha$. Легко проверяется, что $p(i^*(d\psi))_f=\sigma(d_f\psi)_f$.

Поднятие $\lambda_{\mathcal{O}}\colon\mathfrak{g}\to A(\mathcal{O})$ задается формулой $\lambda_{\mathcal{O}}(X)=\Psi^X|\mathcal{O}$. Таким образом, $\lambda_{\mathcal{O}}(X)(f)=\langle f,\ X\rangle$. Мы оставляем читателю проверку того, что $\lambda_{\mathcal{O}}$ является поднятием, а также равенств $\mathcal{L}(\sigma(\mathcal{O},X))\Omega=0$ и $d\Omega=0$ [1]).

Следствие 7.1.7. *Для каждого $X\in\mathfrak{g}$ функция Ψ^X является производящей функцией, или гамильтонианом, векторного поля $\sigma(\mathcal{O},\ X)$.*

Теорема 7.1.8. *Скобка Пуассона на $\mathcal{O}$ задается формулой*

$$\{\psi_1,\ \psi_2\}=p(\psi_1)\psi_2$$

и относительно этой скобки $A(\mathcal{O})$ является алгеброй Ли.

Теорема 7.1.9. *Если ψ_1 и ψ_2 — две гладкие функции на $\mathfrak{g}^*$, то для $f\in\mathcal{O}$ справедливо равенство*

$$\{\psi_1|\mathcal{O},\ \psi_2|\mathcal{O}\}(f)=\langle f,\ [d_f\psi_1,\ d_f\psi_2]\rangle.$$

Доказательство. $\{\psi_1|\mathcal{O},\ \psi_2|\mathcal{O}\}(f)=p(\psi_1|\mathcal{O})_f\psi_2=\sigma(d_f\psi_1)_f\psi_2=\langle d_f\psi_1\cdot f,\ d_f\psi_2\rangle=\langle f,\ [d_f\psi_1,\ d_f\psi_2]\rangle$.

[1]) Доказательства можно найти в [А 7] или [К 8]. — *Прим. перев.*

Следствие 7.1.10. *Для $X, Y \in \mathfrak{g}$ имеем* $\{\lambda_{\mathcal{O}}(X), \lambda_{\mathcal{O}}(Y)\} = \lambda_{\mathcal{O}}([X, Y])$.

Пример 7.1.11. Пусть $G = SU(2)$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$. С помощью формы Киллинга можно отождествить $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$. Пусть f — функционал на $\mathfrak{g}$, заданный равенством

$$f(Y) = -\operatorname{tr} XY, \text{ где } X = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Подгруппа изотропии $G(f)$ изоморфна $U(1)$. Поэтому $\mathcal{O}_f = SU(2)/U(1) \simeq CP(1) \simeq S^2$.

Пример 7.1.12. Пусть

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \middle| a > 0,\ b \in \mathbf{R} \right\}.$$

Алгеброй Ли этой группы будет

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha,\ \beta \in \mathbf{R} \right\}.$$

Экспоненциальное отображение имеет вид

$$\exp\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha} & \beta \operatorname{sh} \alpha/\alpha \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix}.$$

Функционал $f \in \mathfrak{g}^*$ задается парой чисел $u, v \in \mathbf{R}$ и имеет вид $f(X) = u\alpha + v\beta$. Присоединенное действие G выглядит так:

$$\operatorname{Ad} g(X) = gXg^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & a^2\beta - 2ab\alpha \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Коприсоединенное действие описывается формулами

$$(g^{-1} \cdot f)(X) = f(\operatorname{Ad} g(X)) = u\alpha + v(a^2\beta - 2ab\alpha).$$

Отсюда следует наличие двух типов орбит:

(i) $f = (u, 0)$, каждая орбита состоит из одной точки;

(ii) $\mathcal{O}^{\pm} = \{f = (u, v) \mid v \gtrless 0\}$ — верхняя и нижняя полуплоскости.

Костант обобщил результаты Вана, отбросив условие компактности, и получил классификацию однородных симплектических многообразий [1]).

Теорема 7.1.13 (Костант). *Если $H^1(\mathfrak{g}, \mathbf{R}) = 0 = H^2(\mathfrak{g}, \mathbf{R})$ (например, если $\mathfrak{g}$ полупроста), то наиболее общее симплектиче-*

---

[1]) Этот результат независимо был получен Ж. Сурьо и переводчиком, см., например, [К 8]. — *Прим. перев.*

ское однородное G-многообразие (M, Ω) локально изоморфно орбите $\mathcal{O}_f = G/H$, где $f \in \mathfrak{g}^*$ и H — стабилизатор f.

Доказательство см. в [K 16] или [W 3].

Как мы говорили выше, метод Кириллова заключается в том, чтобы параметризовать пространство $\hat{G}$ орбитами в $\mathfrak{g}^*$. Мы видели, что в некоторых случаях можно было отождествить $\hat{G}$ с $\mathfrak{g}^*/G$. Основная идея состоит в том, чтобы найти для $f \in \mathcal{O}$ такую подалгебру $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$, для которой $f([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0$. Тогда неприводимое унитарное представление $U(f, \mathfrak{h})$ группы G строится как представление, индуцированное характером χ_f подгруппы $H = \exp \mathfrak{h}$, для которого $d\chi_f = if$ на $\mathfrak{h}$. Эта конструкция связана с условием целочисленности для симплектической формы на орбите следующим образом.

Теорема 7.1.14. *Пусть (M, Ω, λ) есть G-однородное гамильтоново многообразие. Предположим, что $H^1(M, \mathbf{R}) = 0$. Пусть $\tilde{G}$ — односвязная накрывающая группы G с накрывающим гомоморфизмом c: $\tilde{G} \to G$. Для точки $m \in M$ положим $\tilde{G}(m) = \{g \in \tilde{G} \mid c(g)m = m\}$. Тогда форма Ω целочисленна в том и только том случае, когда существует характер χ: $\tilde{G}(m) \to T^1$, для которого $d\chi(X) = 2\pi i\lambda(X)(m)$ при $X \in \mathfrak{g}(m)$.*

Пример 7.1.15. Группа Гейзенберга будет изучена в полной общности в следующей главе. Здесь мы рассмотрим простейший случай. Пусть N означает совокупность пар $(z, t) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}$, где $z = p + iq$. Закон умножения в N задается формулой $(z, t)(z', t') = (z + z', t + t' + B(z, z'))$, где $B(z, z') = pq' - qp'$. Обратный элемент к (t, z) имеет вид $(-t, -z)$. Алгебра Ли $\mathfrak{n}$ группы N состоит из пар $(\zeta, \tau) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}$ с законом коммутирования $[(\zeta, \tau), (\zeta', \tau')] = (0, B(\zeta, \zeta'))$. Центр $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{n}$ — одномерное пространство, порожденное элементом $(0, 1)$. Пусть Z означает подгруппу $\exp \mathfrak{z}$.

Проверяется, что присоединенное действие N на $\mathfrak{n}$ имеет вид $\mathrm{Ad}(z, t)(\zeta, \tau) = (\zeta, \tau + B(z, \zeta))$. Поэтому коприсоединенное действие выглядит так: для $f \in \mathfrak{n}^*$, $g = (z, t)$ $(g \cdot f)(\zeta, \zeta) = f(\zeta, \tau) - B(z, \zeta) f(0, 1)$. Таким образом, орбиты, для которых $f|\mathfrak{z} \neq 0$, являются плоскостями в $\mathfrak{n}^*$, задаваемыми уравнениями $f(0, 1) = \mu$. Если $X = (\zeta, 0)$, $Y = (\zeta', 0)$ — элементы $\mathfrak{n}$, то $\Omega(\sigma(\mathcal{O}, X)_f, \sigma(\mathcal{O}, Y)_f) = \langle f, [X, Y] \rangle = f(0, B(\zeta, \zeta'))^n \mu B(\zeta, \zeta')$. Легко проверяется, что $\mathcal{O}_\mu = N/Z$. Орбита $\mathcal{O}_\mu$ может быть также отождествлена с $\mathbf{C}$ отображением τ: $\mathbf{C} \to \mathcal{O}_\mu$: $z \longmapsto (z, 0) \cdot f$. При этом отождествлении форма Ω переходит в $\tau^*\Omega = \mu (dp \wedge dq)$. Мы оставляем читателю проверку того, что $\mathcal{O}_\mu$ является гамильтоновым G-пространством.

Теперь мы подведем итог всему, что мы уже доказали для группы Гейзенберга и для удобства дальнейших ссылок добавим формулу Кириллова для характеров.

Теорема 7.1.16 (Кириллов). *Пусть U — неприводимое унитарное представление группы N, обладающее свойством $U(0, t) = \exp(itl) \cdot 1$, где $l \neq 0$. Тогда U эквивалентно представлению T_l, действующему в $L^2(R)$ по формуле*

$$T_l(z, \ t)\varphi(x) = \exp(il(t + px))\varphi(x - q).$$

Орбиты $\mathcal{O}_l$ в $\mathfrak{n}^*$ являются симплектическими многообразиями и соответствуют представлениям $T_{2\pi l}$. Если $f \in \mathfrak{n}^*$ и $f(0, 1) = l$, то существует поляризация $\mathfrak{h}$ для f и представление T_l эквивалентно представлению, индуцированному характером χ_f подгруппы $H = \exp \mathfrak{h}$, для которого $d\chi_f = 2\pi i f$. Если обозначить через $U_{\mathcal{O}}$ представление, соответствующее орбите $\mathcal{O}$, то операторы $U_{\mathcal{O}}(\varphi)$ ядерны и

$$\operatorname{tr} U_{\mathcal{O}}(\varphi) = \int\limits_{\mathcal{O}} (\tilde{\varphi} \mid \mathcal{O})\, \beta = \frac{1}{|l|} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(0, \ t)\, e^{2\pi i l t}\, dt.$$

Тем самым, представления $U_{\mathcal{O}}$ и $U_{\mathcal{O}'}$ эквивалентны лишь при $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$. Если $\lambda \in \hat{N}$, то $\lambda = [U_{\mathcal{O}}]$ для некоторой орбиты $\mathcal{O}$. Таким образом, мы получаем биекцию (а на самом деле борелевский изоморфизм) между $\mathfrak{n}^*/N$ и $\hat{N}$. Наконец, как мы обсудим ниже, генератор представления T_l может быть получен конструкцией ван Хова.

Следующая теорема связывает G-инвариантные поляризации на орбитах с поляризациями в алгебрах Ли.

Теорема 7.1.17. *Пусть F есть G-инвариантная поляризация на $(\mathcal{O}_f, \Omega)$, $\sigma_f\colon \mathfrak{g}^C \to T_f^C\mathcal{O}$ — отображение, переводящее $X \in \mathfrak{g}^C$ в вектор $\sigma_f(X)\Psi^Y = \langle f, \ [X, \ Y] \rangle$ для $Y \in \mathfrak{g}$. Положим $\mathfrak{h}_f = \sigma_f^{-1}(F_f)$, где $F_f \subset T_f^C\mathcal{O}$. Тогда отображение $F \to \mathfrak{h}_f$ является биекцией множества G-инвариантных поляризаций на $\mathcal{O}_f$ на множество подалгебр $\mathfrak{h}_f \subset \mathfrak{g}^C$, обладающих свойствами*

(i) $\mathfrak{g}^C(f) \subset \mathfrak{h}_f \subset \mathfrak{g}^C$;

(ii) $\mathfrak{h}_f$ *является* $\operatorname{Ad} G(f)$-*инвариантной*;

(iii) $\dim_C(\mathfrak{h}_f/\mathfrak{g}^C(f)) = \dim_C(\mathfrak{g}^C/\mathfrak{h}_f)$;

(iv) $\langle f, \ [\mathfrak{h}_f, \mathfrak{h}_f] \rangle = 0$.

Наконец, F является допустимой поляризацией, если и только если $\mathfrak{h}_f$ обладает свойством

(v) $\mathfrak{h}_f + \bar{\mathfrak{h}}_f$ — *подалгебра в* $\mathfrak{g}^C$.

7.2. Полная интегрируемость

Пусть (M, Ω) — симплектическое многообразие и $f_1, \ldots, f_k \in A(M)$. Скажем, что функции $f_1, \ldots, f_k$ находятся *в инволюции*, если

(i) $\{df_i(m)\}$ линейно независимы в T^*_mM для всех $m \in M$ и
(ii) $\{f_i, f_j\} = 0$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots, k$.

Если $f_1, \ldots, f_k$ находятся в инволюции и $c = (c_1, \ldots, c_k) \in \mathbf{R}^k$, то положим $\Lambda(c) = \{m \in M \mid f_i(m) = c_i, 1 \leqslant i \leqslant k\}$. В силу (i), если $\Lambda(c)$ непусто, оно — подмногообразие в M коразмерности k. Ясно, что $\Lambda(c)$ являются коизотропными многообразиями, а если $k = n = (1/2)\dim M$, то лагранжевыми. Таким образом, система из n функций в инволюции задает слоение M на лагранжевы слои. В силу (ii) мы имеем $X_{f_i} f_j = 0$ для всех j, так что поле X_{f_i} касательно к $\Lambda(c)$ для всех i, а в силу (i) $X_{f_1}, \ldots, X_{f_n}$ — линейно независимая система попарно коммутирующих полей на $\Lambda(c)$, порождающая в каждой точке касательное пространство к $\Lambda(c)$.

Теорема 7.2.1. *Пространство $\Lambda(c)$ обладает единственной плоской аффинной связностью, относительно которой X_{f_i} являются полями параллельных векторов.*

Напомним, что из условия касания X_{f_i} к $\Lambda(c)$ следует, что интегральные кривые не покидают $\Lambda(c)$.

Определение 7.2.2. Функция $f \in A(\Lambda(c))$ называется *аффинной*, если $X_{f_i}(X_{f_j}(f)) = 0$ для всех i, j. Если задана динамическая система с n степенями свободы и с n первыми интегралами в инволюции, то, как показал Лиувилль, такая система интегрируется в квадратурах. Такие системы называются *вполне интегрируемыми.* См. об этом [A 7], [A 2] или [V 7].

Один класс вполне интегрируемых систем возникает из гамильтоновых систем на группах Ли. Рассмотрим гамильтониан H на симплектическом многообразии T^*G. Простая проверка показывает, что если H левоинвариантен, то поле X_H также левоинвариантно. Поэтому X_H задает векторное поле на $\mathfrak{g}^*$, описываемое системой *уравнений Эйлера* $\dot{f} = \langle f, dH(f)\rangle$.

Теорема 7.2.3. *Если функция ψ на $\mathfrak{g}^*$ постоянна на орбитах коприсоединенного представления, то она является первым интегралом для системы уравнений Эйлера.*

Теорема 7.2.4. *Уравнения Эйлера задают гамильтонов поток на орбите $(\mathcal{O}, \Omega)$ относительно симплектической структуры Кириллова; гамильтониан этого потока совпадает с ограничением H на орбиту.*

Доказательство вытекает из результатов разд. 7.1.

Наиболее изученным является случай геодезического потока для левоинвариантной метрики на группе G. В этом случае функция Гамильтона будет невырожденной квадратичной формой на $\mathfrak{g}^*$ и dH: $\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$ — линейное отображение.

Теорема 7.2.5 (Мищенко — Фоменко). *Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная полупростая алгебра Ли, и пусть гамильтониан H принадлежит некоторому специальному классу (описываемому в терминах алгебр Ли, но мы опускаем здесь это описание). Тогда уравнения Эйлера задают вполне интегрируемую систему в смысле Лиувилля на общих орбитах присоединенного представления.*

Доказательство основано на рассмотрении функций на $\mathfrak{g}$ вида $f_\lambda(x) = f(x + \lambda a)$, где f — функция, постоянная на орбитах присоединенного представления, а a — элемент общего положения в $\mathfrak{g}$. Проверяется, что такие функции находятся в инволюции друг с другом и с гамильтонианом H. Количество их оказывается равным половине размерности орбиты общего положения. Детали см. в [М 32].

Пример 7.2.6. Классическим примером является n-мерный волчок. См. по этому поводу [Д 9] и [М 7].

Вместо того, чтобы развивать общую теорию, мы ограничимся обсуждением примера цепочки Тоды.

Пример 7.2.7 (непериодическая цепочка Тоды). Пусть G — связная компонента единицы в группе обратимых вещественных нижнетреугольных матриц порядка n. Ее алгеброй Ли является множество $\mathfrak{g}$ всех нижнетреугольных матриц, а $\mathfrak{g}^*$ естественно отождествляется с пространством верхнетреугольных матриц. Спаривание $f \in \mathfrak{g}^*$ и $X \in \mathfrak{g}$ имеет вид $f(X) = \operatorname{tr}(fX)$, где fX — обычное матричное произведение. Присоединенное действие G на $\mathfrak{g}$ имеет вид $\operatorname{Ad} g(X) = gXg^{-1}$. Пусть $\hat{A}$ означает верхнетреугольную часть матрицы A. Тогда коприсоединенное действие можно записать так: $g \cdot f(X) = f(\operatorname{Ad} g^{-1}(X)) = f(g^{-1}Xg) = \operatorname{tr}(fg^{-1}Xg) = \operatorname{tr}(gfg^{-1}X) = (gfg^{-1})\hat{}\,(X)$. Таким образом, $g \cdot f = (gfg^{-1})\hat{}$. Если в качестве f взять матрицу

$$\begin{pmatrix} c & e_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & e_2 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & & c & e_{n-1} \\ . & . & . & & 0 & c \end{pmatrix},$$

то можно проверить, что орбита коприсоединенного действия имеет вид

$$\mathcal{O}_f = G \cdot f = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & a_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & b_{n-1} & a_{n-1} \\ & & & 0 & b_n \end{pmatrix} \right\},$$

где $a_k > 0$, $b_k \in \mathbf{R}$ и $\sum b_k = nc$.

Касательное пространство к $\mathcal{O}_f$ в точке f состоит из матриц $[f, X]^\frown$, $X \in \mathfrak{g}$. Симплектическая форма Ω_f на $\mathcal{O}_f$ задается формулой $\Omega_f([f, X_1]^\frown, [f, X_2]^\frown) = \langle f, [X_1, X_2]\rangle = \operatorname{tr}(f[X_1, X_2])$. Орбита $\mathcal{O}_f$ отождествляется с $\mathbf{R}^{2n-2}$ с помощью координат $(a_1, \dots, b_{n-1})$. В этих координатах

$$\Omega_f = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{i=j}^{n-1} \frac{da_i}{a_i} \right) \wedge db_j.$$

Гамильтоново векторное поле X_f записывается в виде

$$X_f = \sum_{i=1}^{n-1} \left[a_i \left(\frac{\partial_i}{\partial b_{i+1}} - \frac{\partial f}{\partial b_i} \right) \frac{\partial}{\partial a_i} + \left(a_i \frac{\partial f}{\partial a_i} - a_{i-1} \frac{\partial f}{\partial a_{i-1}} \right) \frac{\partial}{\partial b_i} \right],$$

где положено $a_0 = 0$.

Пример 7.2.8. (непериодическая цепочка Тоды; продолжение). Гамильтонианом цепочки Тоды является $H = (1/2) \sum p_i^2 + \exp(q_1 - q_2) + \dots + \exp(q_{n-1} - q_n)$. Одним из интегралов этой системы является $M = \sum p_i$, так как $X_H M = 0$, Поток, соответствующий M, имеет вид $q_i \to q_i + t$, $p_i \to p_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Поэтому функции $p_1, \dots, p_n$; $q_1 - q_2, \dots, q_{n-1} - q_n$ постоянны вдоль этого потока. Если обозначить через B совокупность интегральных кривых потока, лежащих на поверхности $M^{-1}(0)$, то она будет симплектическим многообразием, на котором определены координаты $p_1, \dots, p_n$; $q_1 - q_2, \dots, q_{n-1} - q_n$, удовлетворяющие условию $\sum p_i = 0$.

Индуцированная симплектическая структура имеет вид

$$\Omega = \sum dp_i \wedge dq_i = \sum_{i=1}^{n-1} dp_i \wedge dq_i - \left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i \right) \wedge dq_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} dp_i \wedge (dq_i - dq_n) = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{j} dp_i \wedge (dq_j - dq_{j+1}).$$

Полагая $a_j = \exp(q_j - q_{j+1})$, $b_i = p_i$, получаем

$$\Omega = \sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{j} db_i\right)\wedge\frac{da_j}{a_j} \text{ и } H = \frac{1}{2}\sum b_i^2 + a_1 + \ldots + a_{n-1}.$$

Чтобы показать полную интегрируемость цепочки Тоды, достаточно переписать H в виде $(1/2)\operatorname{tr}(L^2)$ для подходящего L. Тогда гамильтонова система уравнений примет форму изоспектральной системы Лакса $\dot{L} = [B, L]$ для подходящего B. Полагая $F_k = k^{-1}\operatorname{tr}(L^k)$, получаем, что F_k сохраняются нашим потоком, т. е. $\{F_2, F_i\} = 0$ при $i > 2$. Кроме того, $F_2, \ldots, F_n$ образуют независимое множество интегралов. Таким образом Мозер показал, что непериодическая цепочка Тоды — вполне интегрируемая динамическая система.

Пример 7.2.9. В разд. 0.4 мы привели описание симметрических пространств в терминах алгебр Ли. Например, $CP(1) = SL(2, \mathbf{C})/P = G/P$. Алгебра Ли группы G имеет вид $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- + \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p} = \mathbf{C}H_\alpha + \mathbf{C}E_\alpha = \mathfrak{h} + \mathfrak{n}^+$,

$$H_\alpha = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а $\mathfrak{n}^- = \mathbf{C}E_{-\alpha}$, где

$$E_{-\alpha} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть N и H означают группы, соответствующие алгебрам Ли $\mathfrak{n}^+$ и $\mathfrak{h}$. Каждая точка $m \in M = G/P$ может быть записана в виде $m = n(m)h(m)n^+(m)$, где $n^+(m)$ — матрица, эрмитово сопряженная к $n(m)$, и $n(m) \in N$, $h(m) \in H$. Это дает вложение M в G в качестве вполне геодезического подмногообразия. Таким образом, кривая $m(t)$ может быть задана векторными полями на G, а именно $X_+(t) = m(t)^{-1}\dot{m}(t)$, $X_-(t) = \dot{m}(t)m(t)^{-1}$. Мы оставляем читателю проверку того, что в случае, когда $m(t)$ является геодезической на M, справедливо равенство $(d/dt)\,(X_+(t) + X_-(t)) = 0$, а также того, что решение этого уравнения имеет вид $m(t) = g\exp tYg^+$, где $g \in G$, $Y \in \mathfrak{p}$. Переписывая это разложение с использованием сказанного в разд. 0.4 в виде $m(t) = u(t)\exp 2aq(t)u(t)^{-1}$, где $u(t) \in K$, $q(t) \in \mathfrak{h}$, приходим к выводу, что геодезический поток на M эквивалентен системе Лакса $\dot{L} = [L, B]$. Более подробно, положим $B(t) = u(t)^{-1}\dot{u}(t)$, так что $X_\pm(t) = a\operatorname{Ad}(u(t))\,(2p(t) \mp \operatorname{Ad}\exp(\mp 2aq(t))B \mp a^{-1}B)$, где $p(t) = \dot{q}(t)$. Поэтому $X_+(t) + X_-(t) = 4a\operatorname{Ad}(u(t))L$, где $L = p - (4a)^{-1}[\operatorname{Ad}(\exp 2aq(t)) - \operatorname{Ad}(\exp(-2aq(t)))]B(t)$. В частности, для цепочки Тоды в случае $n=2$ мы получаем пару Лакса

$$B=\begin{pmatrix} 0 & \exp(q_1-q_2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L=\begin{pmatrix} p_1 & \exp(q_1-q_2) \\ 1 & p_2 \end{pmatrix}.$$

Цепочка Тоды при $n=2$ эквивалентна геодезическому потоку на $CP(1)$ с этой парой Лакса.

7.3. Теория Морса для орбит

Во введении мы рассматривали примеры орбит в присоединенном представлении групп в алгебрах Ли. В этом разделе мы опишем теорию Морса для таких орбит. Мы рассматриваем орбиту M размерности n как многообразие, гладко вложенное в евклидово пространство $R=\mathbf{R}^{n+k}$ (например, орбиты присоединенного представления можно рассматривать как многообразия в $\mathfrak{g}$). Интересующие нас функции Морса имеют вид квадрата расстояния до фиксированной точки $p\in R\setminus M$. Пусть $L_p(x)$, $x\in M$, обозначает эту функцию. Принимая p за начало координат в R, мы получаем $L_p(x)=(x, x)$. Тогда $dL_p(x)=2(dx, x)$ и поэтому $dL_p(x)=0$, если и только если dx перпендикулярно x. Значит, q является критической точкой для L_p, если и только если вектор, соединяющий p и q, нормален к M в точке q.

Второй дифференциал (гессиан) имеет вид

$$d^2L_p(x)=2(dx, dx)+2(x, d^2x).$$

В критической точке q запишем x в виде $x=|x|\cdot N$, где N — единичный нормальный вектор. Тогда $d^2L_p(x)/2$ запишется в виде суммы двух квадратичных форм: $(dx, dx)+|x|(N, d^2x)$ — первой и второй фундаментальных форм поверхности M.

Выберем локальные координаты $x_1, \ldots, x_n$ в окрестности точки $q=(0, \ldots, 0)$ на M. Тогда в объемлющем пространстве R поверхность M задается уравнениями $x_{n+l}=g_l(x_1, \ldots, x_n)$, $l=1, 2, \ldots, k$, где g_l — гладкие функции. Поскольку вектор $p-q$ перпендикулярен M, имеем $p=(0, \ldots, 0, p_1, \ldots, p_k)$. Положим $tp=(0, \ldots, 0, tp_1, \ldots, tp_k)$. Тогда гессианом функции L_{tp} в точке 0 будет

$$HL_{tp}(0)=I_n-\sum_{l=1}^{k} tp_l \frac{\partial^2 g_l}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Согласно общей теории квадратичных форм, мы можем так выбрать систему координат, чтобы первая квадратичная форма стала единичной, а матрица

$$-\sum_{l=1}^{k} p_l \frac{\partial^2 g_l}{\partial x_i \partial x_j}$$

приняла диагональный вид; тогда

$$HL_{tp}(0)=\begin{bmatrix} ta_{11}+1 & & & & 0 \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & ta_{nn}+1 \end{bmatrix}.$$

Итак, q является невырожденной критической точкой для L_{tp}, если только $t \neq -1/a_{ii}$ для некоторого i. Значит, только для конечного множества значений t точка q будет вырожденной. Значения $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ называются главными кривизнами M в точке q. Значения $1/a_{11}, \ldots, 1/a_{nn}$ называются главными радиусами кривизны. Они не обязаны быть различными. Обозначим через $t_1 = 1/a_{11}, \ldots, t_m = 1/a_{mm}$ все различные значения.

Когда параметр t меняется от 0 до 1, точка tp проходит отрезок $[q, p]$. При $t = 0$ форма $HL_{tp}(0)$ положительно определена и ее индекс равен нулю. С ростом t индекс HL_{tp} возрастает скачком в точках $-t_1, \ldots, -t_m$. Величину скачка в точке t_i обозначим через $\nu\left(HL_{t_ip}(0)\right)$. Она равна размерности ядра формы $HL_{t_ip}(0)$. Итак, справедлива

Теорема 7.3.1. *Индекс гессиана* $HL_p(q)$ *равен* $\sum\limits_{0<t<1} \nu\,(HL_{(1-t)\,p+tq})$.

Вернемся теперь к теории Морса для орбит, обсуждавшейся в разд. 0.9. Напомним, что точка p алгебры Ли $\mathfrak{t}$ максимального тора T называется *общей точкой*, если $\mathfrak{g}_p = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, p] = 0\} = \mathfrak{t}$.

Теорема 7.3.2. *Если p — общая точка, то $N_p = \mathfrak{t}$ (здесь N_p — нормальное пространство к орбите точки p).*

Мы оставляем читателю проверку того, что орбиты общих точек имеют максимальную размерность. Будем обозначать орбиту точки X через M_X.

Теорема 7.3.3. *Если некоторая прямая перпендикулярна к одной из орбит, то она перпендикулярна ко всем орбитам, которые она пересекает.*

Доказательство. Пусть прямая $B + At$ перпендикулярна к орбите M_B, проходящей через точку B. Тогда

$([X, B], A) = 0$ для всех $X \in \mathfrak{g}$. Поскольку $([X, A], A) = (X, [A, A]) = 0$ для всех $X \in \mathfrak{g}$, то $([X, B + tA], A) = 0$, что и требовалось.

Теорема 7.3.4. *Пусть M_X — любая орбита, а p — общая точка. Тогда критическими точками L_p в M_X являются точки $M_X \cap \mathfrak{t}$; таким образом, эти точки не зависят от выбора p в $\mathfrak{t}$.*

Доказательство. Пусть $A \in M_X$ — критическая точка для L_p. Согласно сказанному выше, прямая pA перпендикулярна M_X в точке A, а по теореме 7.3.3 эта прямая перпендикулярна M_p. По теореме 7.3.2 pA лежит в $\mathfrak{t}$, так как p — общая точка. Значит, $A \in \mathfrak{t}$. Обратное очевидно.

Рассмотрим теперь орбиты $\mathrm{Ad}\, G$. Пусть M — орбита одной из точек $\mathfrak{g}$ относительно $\mathrm{Ad}\, G$. Пусть p — регулярная точка в $\mathfrak{g} \setminus M$, лежащая на орбите максимальной размерности, а q — невырожденная критическая точка функции L_p на M. Тогда, используя теорему 7.3.1 и теорию полей Якоби, можно показать, что индекс q дается формулой $\mathrm{Ind}\, q = \sum \nu(F_i)$, где F_i — точки отрезка $[p, q]$, лежащие на орбитах меньшей размерности, а $\nu(F_i)$ — кратность F_i — равна $\dim M_p - \dim M_{F_i}$. Здесь M_p и M_{F_i} означают орбиты точек p и F_i соответственно.

Как уже говорилось в разд. 0.9, если задано разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$, мы можем также изучить орбиты, возникающие при присоединенном действии K в $\mathfrak{p}$. В этом случае $A \in \mathfrak{t}$ называется общей точкой, если $\mathfrak{p}_A = \{Z \in \mathfrak{p} \mid [Z, A] = 0\} = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{p}$.

Читатель может проверить, что для $\mathrm{Ad}\, K$-орбиты M_X в $\mathfrak{p}$ касательное пространство к орбите в точке X имеет вид $T_X = \mathrm{ad}\, X \mathfrak{k}$, а нормальное к нему пространство N_X равно $\{Z \in \mathfrak{p} \mid [Z, X] = 0\} = \mathfrak{p}_X$.

Если мы рассматриваем орбиту $M \subset \mathfrak{p}$ и если $\langle\ ,\ \rangle$ — форма Киллинга для $\mathfrak{g}$, то функция расстояния L_X на M, соответствующая точке $X \in \mathfrak{p}$, имеет вид $L_X(Y) = \langle Y - X, Y - X \rangle$ для $Y \in \mathfrak{p}$. Разлагая L_X, получаем

$$L_X(Y) = \langle X, X \rangle - 2\langle X, Y \rangle + \langle Y, Y \rangle.$$

Таким образом, теория Морса для орбит в $\mathfrak{p}$ приводит к изучению функции $f_X(Y) = \langle X, Y \rangle$. Мы увидим, что это играет большую роль в разд. 10.3.

Задачи

Упражнение 7.1. Алгебра Ли группы $G = SL(2, \mathbf{R})$ имеет базис

$$E_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Элемент H порождает картановскую подалгебру $\mathfrak{h}=\mathbf{R}H$, а $E_\pm$ порождает подалгебру $\mathfrak{n}^\pm=\mathbf{R}F_\pm$. Подалгебра $\mathfrak{b}=\mathfrak{h}+\mathfrak{n}^+$ является максимальной разрешимой подалгеброй в $\mathfrak{g}$. Пусть $\bar{\mathfrak{b}}=\mathfrak{h}+\mathfrak{n}^-$. Обозначим через B, $\bar{B}$, N, $\bar{N}$ группы Ли, соответствующие подалгебрам $\mathfrak{b}$, $\bar{\mathfrak{b}}$, $\mathfrak{n}^+$, $\mathfrak{n}^-$. Показать, что пространство $\bar{\mathfrak{b}}^*$, двойственное к $\bar{\mathfrak{b}}$, может быть отождествлено с $\mathfrak{b}$, причем коприсоединенное действие $\bar{B}$ на $\mathfrak{b}$ сводится к сопряжению и отбрасыванию элемента, стоящего под главной диагональю. Показать, что орбита $\mathcal{O}$ элемента E_+ относительно коприсоединенного действия $\bar{B}$ в $\mathfrak{b}$ имеет вид $\mathcal{O}=\{cH+aE_+ \mid a>0\}=\bar{B}/[\bar{N},\bar{N}]\simeq\bar{B}$. Многообразие $Z=f+\mathcal{O}$, где $f=E_+^*\in\mathfrak{g}^*$, имеет вид

$$Z=\left\{\begin{pmatrix} b_1 & a\\ 1 & b_2\end{pmatrix}\middle|\, a>0,\ b_1+b_2=0\right\}.$$

Показать, что каноническая форма Кириллова на Z равна $\Omega_Z=db_1\wedge(da/a)$ и что $(1/2)B(f+y,\ f+y)=(b_1^2+b_2^2)/2+a$ — гамильтониан цепочки Тоды при $n=2$. Показать, что если $M=\bar{B}/\bar{N}$, то $\mathcal{O}=T^*M$ и орбиты Nx группы N являются лагранжевыми подмногообразиями, соответствующими кокасательным пространствам.

Упражнение 7.2. Пусть $G=GL(n,F)$, где $F=\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$. Показать, что всякая нетривиальная орбита в коприсоединенном представлении G имеет размерность $\geqslant 2\dim F\cdot(n-1)$. Показать, что равенство имеет место только для орбит $\mathcal{O}(\lambda,r)=G\cdot f_{X(\lambda,r)}$, где $X(\lambda,r)\in\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(n,F)$ имеет вид

$$X(\lambda,r)=\lambda\cdot 1+\begin{vmatrix} r & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & 0\end{vmatrix},\quad r\neq 0,$$

$$X(\lambda,0)=\lambda\cdot 1+\begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1\\ & 0 & & 0\\ & & & \cdot\\ & & & \cdot\\ & & & \cdot\\ & & & 0\end{vmatrix}.$$

Показать, что все эти орбиты минимальной размерности обладают G-инвариантной вещественной поляризацией, соответствующей максимальной параболической подалгебре $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{g}$, где

$$\mathfrak{p}=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & A\end{pmatrix},\quad a\in F,\quad b\in F^n,\quad A\in\mathfrak{gl}(n-1,\ F)\right\}.$$

Показать, что $G/P = FP(n-1)$. Функционал $i f_{X(\lambda, r)}$ порождает унитарный характер связной компоненты единицы в P для всех (λ, r) в случае $F = \mathbf{R}$ и для тех (λ, r), для которых $\operatorname{Im} \lambda \in Z$, $\operatorname{Im} r \in Z$, в случае $F = \mathbf{C}$.

Упражнение 7.3. Пусть B — невырожденная кососимметричная билинейная форма на $\mathbf{R}^{2n}$. Показать, что орбиты M минимальной размерности в коприсоединенном представлении группы $G = Sp(2n, \mathbf{R})$ имеют вид

$$G \cdot f_{u,u} \simeq (\mathbf{R}^{2n} \setminus \{0\})/\pm, \qquad (*)$$

где $f_{u,v} \in \mathfrak{g}^*$ дается формулой $f_{u,v}(A) = B(u, Av) + B(v, Au)$. Показать, что поднятие λ для $M = \mathbf{R}^{2n} \setminus \{0\}$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & R \arrow[r] & A(M) \arrow[r] & \mathrm{Ham}\,(M) \arrow[r] & 0 \\ & & \mathfrak{g} \arrow[u, "\lambda"] \arrow[r, phantom, "="] & \mathfrak{g} \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

задается равенством $\lambda(X)v = (1/2)B(Xv, v)$. Показать, что отображение момента Φ: $M \to \mathfrak{g}^*$ дается формулой $\Phi(v)(X) = (1/2)B(Xv, v)$ и что Φ влечет за собой изоморфизм $(*)$.

Упражнение 7.4. Пусть $G = U(n)$ действует на $\mathfrak{u}(n)$. Показать, что i-е число Бетти флагового многообразия равно числу критических точек индекса i.

Упражнение 7.5. Пусть $V_{p+q,\,p} = SO(p+q)/SO(q)$. Положим $G = SO(2p+q)$ и рассмотрим инволюцию $X \mapsto I(p+q, p)XI(p+q, p)$ в группе G, где $I(p+q, p)$ — диагональная матрица с $p+q$ единицами и p минус единицами по диагонали. Показать, что множество неподвижных точек этой инволюции совпадает с $(O(p+q) \times O(p)) \cap SO(2p+q)$. В картановском разложении $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ пространство $\mathfrak{p}$ состоит из матриц

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} p+q \\ q \end{array} \\ \begin{array}{cc} p+q & \;\; p \end{array} & \end{array}$$

а картановская подалгебра $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{p}$ имеет вид

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} * & & \\ & \ddots & \\ & & * \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} * & & \\ & \ddots & \\ & & * \end{matrix} & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} p+q \\ \\ \\ p \end{array} \\ \begin{array}{cc} p+q & \qquad p \end{array} & \end{array}$$

Пусть

$$P = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 1 & & & \\ & & & & & 2 & & \\ & & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & & p \\ & & & & & & & 0 \\ \hline -1 & & & & & & & \\ & -2 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & 0 & \\ & & & -p & 0 & & & \end{array}\right) \in \mathfrak{h}.$$

Показать, что P — общая точка. Описать ее орбиту. Показать, что функция расстояния $L_p(x)$ на $V_{p+q,\,p}$ имеет 2^p критических точек.

Глава 8 Пространство Фока

8.1. Пространство Фока и когомологии

Последний пример гл. 2 подсказывает следующее обобщение пространства Фока. Пусть V — вещественное векторное пространство и $V^{\mathbf{C}}$ — его комплексификация. Через $T = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ обозначим одномерный тор. Канонический гомоморфизм $\mathbf{e}$: $\mathbf{R} \to T$ имеет вид $\mathbf{e}(r) = \exp(2\pi i r)$. Предположим, что в V задана кососимметричная билинейная форма A. Тогда выражение $\mathbf{e}(A(u, v)/2)$ для $u, v \in V$ является 2-коциклом; этот коцикл задает расширение $\tilde{V}$ абелевой группы V с помощью T. Групповой закон в $\tilde{V}$ имеет вид

$$(x, u)(x', u') = (xx'\mathbf{e}(A(u, u')/2),\ u + u').$$

Алгебра Ли $\tilde{\mathfrak{v}}$ группы $\tilde{V}$ имеет вид $\mathfrak{v} = \mathfrak{z} + V$, где $\mathfrak{z}$ — одномерное подпространство, порожденное вектором $(1, 0)$. Если A невырожденна, то $\mathfrak{z}$ совпадает с центром $\tilde{\mathfrak{v}}$.

Предположим, что комплексная структура J на V выбрана так, что форма $A(x, Jy)$ симметрична и положительно определена.

Каждый элемент $V^{\mathbf{C}}$ может быть записан в виде $w = u + iv$, $u, v \in V$. Группа $\tilde{V}$ допускает естественную комплексификацию $\tilde{V}^{\mathbf{C}} = V^{\mathbf{C}} \times \mathbf{C}^*$, алгебра Ли $\tilde{\mathfrak{v}}^{\mathbf{C}}$ которой состоит из пар (z, w), $z \in \mathbf{C}$, $w \in V^{\mathbf{C}}$, с теми же соотношениями коммутации, что и в $\tilde{\mathfrak{v}}$. Пусть $\mathfrak{t}$ — алгебра Ли тора T с комплексификацией $\mathfrak{t}^{\mathbf{C}}$.

Обозначим через $W_\pm$ собственное подпространство для J в $V^{\mathbf{C}}$, отвечающее собственному значению $\pm i$.

Тогда $W_\pm$ — изотропные пространства для A, т. е. $A \mid W_\pm \times W_\pm = 0$. Каждый элемент $w \in V^{\mathbf{C}}$ однозначно записывается в виде $w = w_+ + w_-$, где $w_\pm \in W_\pm$. Отображение $w \to w_+$ задает $\mathbf{C}$-линейный изоморфизм $(V, J) \to W_+$. Пусть $\mathfrak{m}_\pm$ означает подпространство $\{(0, w) \mid w \in W_\pm\}$ в $\tilde{\mathfrak{v}}^{\mathbf{C}}$, и $\mathfrak{m} = \{(0, u) \mid u \in V\}$. Следующее утверждение проверяется легко.

Теорема 8.1.1. *Пусть $M_\pm$ и $T^{\mathbf{C}}$ — подгруппы в $\tilde{V}^{\mathbf{C}}$, соответствующие $\mathfrak{m}_\pm$ и $\mathfrak{t}^{\mathbf{C}}$. Тогда $V^{\mathbf{C}} = M_+ T^{\mathbf{C}} M_-$ и $V \cap T^{\mathbf{C}} M_- = T$.*

Экспоненциальное отображение $\exp$: $\mathfrak{m}_+ \to M_+$ биективно и переводит $(0, w)$ в $(1, w)$. Пусть π: $\tilde{V} \to D = \tilde{V}/T$ — каноническая проекция. Пространство D отождествляется с W_+ отображением

$\pi(t, u) = u_+$. Элемент $g = (t, u) \in \tilde{V}$ действует на W_+ по формуле $g(w) = w + u_+$. Положим теперь

$$J(g, w) = t\,\mathbf{e}(A(u_-, w + u_+/2)),$$
$$K(w, w') = \mathbf{e}(A(\bar{w}, w'))$$

для $w, w' \in W_+$, $g = (t, u) \in \tilde{V}$.

Теорема 8.1.2. *Для $g, g' \in \tilde{V}$ и $w, w' \in W_+$ справедливы соотношения*

(i) $J(gg', w) = J(g, g'(w))J(g', w)$,

(ii) $K(g(w'), g(w)) = J(g, w')K(w', w)/J(g, w)$.

Определение 8.1.3. Отображение J: $\tilde{V} \times D \to T^{\mathbf{C}}$, гладкое на $\tilde{V}$, голоморфное на D и обладающее свойством (α): $J(t, \pi(e)) = t$, называется *каноническим фактором автоморфности.*

Определение 8.1.4. Отображение K: $D \times D \to T^{\mathbf{C}}$, голоморфное по первому аргументу, обладающее свойством (ii) из 8.1.2, а также свойствами (β): $K(z, z') = \overline{K(z', z)}$ и (γ): $K(\pi(e), \pi(e)) = 1$, называется *нормализованной керн-функцией* с фактором автоморфности J.

Определение 8.1.5. Два фактора автоморфности J, J' для $(\tilde{V}, D)$ называются *эквивалентными*, если существует такое голоморфное отображение φ: $D \to T^{\mathbf{C}}$, что $J'(g, z) = \varphi(g(z))J(g, z)/\varphi(z)$.

Теорема 8.1.6 (Мураками). *Любые два фактора автоморфности для $(\tilde{V}, D)$ эквивалентны.*

Теорема 8.1.7 (Мураками). *Для любого фактора автоморфности для $(\tilde{V}, D)$ ядро K: $D \times D \to T^{\mathbf{C}}$, обладающее свойствами* (ii) *и* (β), *определено однозначно с точностью до умножения на константу. Таким образом, условия* (ii), (β) *и* (γ) *однозначно определяют K.*

Изоморфизм $D = \tilde{V}/T \to M_+ \simeq \mathfrak{m}_+$ задает на D инвариантную комплексную структуру. Определим над D векторное расслоение следующим образом. Пусть τ — неприводимое унитарное представление T. Оно имеет вид $\tau(t) = t^l$ для некоторого $l \in \mathbf{Z}$. Рассмотрим действие T на $\tilde{V} \times \mathbf{C}$ по формуле $t(g, z) = (gt, \tau(t)^{-1}z)$, где $g \in \tilde{V}$, а $z \in \mathbf{C}$. Тогда $E_\tau = (\tilde{V} \times \mathbf{C})/T$ является расслоением над D с одномерным слоем $\mathbf{C}$. Пусть π: $\tilde{V} \times \mathbf{C} \to E_\tau$ — каноническая проекция. Поскольку E_τ отождествляется с открытым подрасслоением в $V^{\mathbf{C}} \times \mathbf{C}/T^{\mathbf{C}}M_-$, в E_τ возникает естественная структура голоморфного расслоения. Кроме того, E_τ — эрмитово расслоение, так как на $\mathbf{C}$ есть T-инвариантная эрмитова метрика.

Пусть $C^q(E_\tau)$ означает пространство E_τ-значных гладких форм типа $(0, q)$ на D, а $C_c^q(E_\tau)$ — подпространство форм с компактным носителем. На $C_c^q(E_\tau)$ определена L_2-норма $\|\varphi\|^2 = \int\limits_D \varphi^t \Lambda^* \varphi$. Таким образом, возникает гильбертово пространство $L_2^q(E_\tau)$. С помощью оператора $\bar\partial$ можно определить гармонические формы φ в $L_2^q(E_\tau)$ как формы, аннулируемые операторами $\bar\partial$ и ϑ. Гармонические формы образуют замкнутое подпространство $H_2^q(E_\tau)$ в $L_2^q(E_\tau)$.

Цитированная выше теорема Кобаяси утверждает следующее.

Теорема 8.1.8. *Пространство $H_2^0(E_\tau)$ неприводимо.*

Однако это пространство может быть нулевым. Пусть $C^q(\tilde V, T, \tau)$ означает пространство $\mathbf{C}$-значных гладких форм степени q на $\tilde V$, обладающих свойствами $i(X)\varphi = 0$ для $X \in \mathfrak{k}^{\mathbf{C}} + \mathfrak{m}_+$ и $\varphi(gt, X) = \tau(t)^{-1}\varphi(g, \operatorname{ad} tX)$ для $g \in \tilde V$ и $t \in T$.

Теорема 8.1.9. *Пространство $C^q(\tilde V, T, \tau)$ изоморфно $C^q(E_\tau)$ относительно отображения $\varphi \to \tilde\varphi(\pi(g), \pi(X_g)) = \tilde\pi(g, \varphi(g, X))$.*

Перенося норму из $C^q(E_\tau)$ с помощью этого отображения, мы можем пополнить $C^q(\tilde V, T, \tau)$ и получить гильбертово пространство $L_2^q(\tilde V, T, \tau)$, в котором выделено подпространство $H_2^q(\tilde V, T, \tau)$ гармонических форм.

Теорема 8.1.10. *Введенные выше J и K являются фактором автоморфности и керн-функцией для $(\tilde V, W_+)$.*

Следствие 8.1.11. *Функция $J(\tilde u, w)^l$ задает голоморфную тривиализацию E_{τ_l} над W_+, т. е. $E_{\tau_l} \simeq W_+ \times \mathbf{C}$, где изоморфизм осуществляется отображением $\tilde\pi((t, u), z) \to (u_+, J(u, 0)^l z)$.*

Теорема 8.1.12. *Отображение $\varphi \mapsto f(u_+) = J(u, 0)^l \varphi(\bar w)$ устанавливает изоморфизм между $L_2^0(\tilde V, T, l)$ и пространством $L_2(W_+)^{(l)}$ измеримых функций f на W_+ с нормой $\|f\|^2 = \int\limits_{W_+} |f(w)|^2 K(w, w)^{-1} dw$, где $dw = 2^{-n} \prod\limits_i |dw_i d\bar w_i|$, а w_i — координаты в W_+, в которых форма $2i\, A(w, \bar w)$ приводится к единичному виду.*

Следствие 8.1.13. *Пространство $H_2^0(V, T, l)$ изоморфно пространству $\mathcal{F}(W_+)^{(l)}$ голоморфных функций из $L_2(W_+)^{(l)}$.*

Заметим, что $\tilde{V}$ действует на $\mathcal{F}(W_+)^{(l)}$ с помощью представления

$$(T(g)f)(w) = J(g^{-1}, w)^{-l} f(g^{-1}(w)).$$

Теорема 8.1.14. *Унитарное представление* $(T, \mathcal{F}(W_+)^{(l)})$ *неприводимо.*

Доказательство. Каждый элемент $h \in \mathcal{F}(W_+)^{(l)}$ обладает свойством

$$h(w) = \int_{W_+} h(w') k(w', w) K(w, w)^{-1} dw'$$

для подходящей функции k. Заменяя h на $T(g)h$, получаем, что k является керн-функцией. В силу теоремы единственности $k = K$. Но если $\mathcal{F}^0$ — замкнутое инвариантное подпространство в $\mathcal{F}(W_+)^{(l)}$, то ему соответствует воспроизводящее ядро k', также являющееся керн-функцией. Поэтому k' пропорционально K. Значит, $\mathcal{F}^0$ совпадает либо с $\mathcal{F}(W_+)^{(l)}$, либо с $\{0\}$.

Предположим, что форма $lA(x, Jx)$ положительно определена. Тогда справедливы

Теорема 8.1.15. $L_2^q(W_+) \simeq \mathcal{F}^q(W_+)^{(l)} \otimes \overline{\mathcal{F}^q(W_+)^{(l)}}$.

Теорема 8.1.16. *Когомологии оператора* $\bar{\partial}$ *эквивалентны когомологиям* d в $\mathcal{F}^q(W_+)^{(l)}$.

Полагая $\Delta = d\delta + \delta d$, получаем $\Delta\varphi = 2\pi l\left(\sum w_k(\partial/\partial w_k) + q\right)\varphi$ для $\varphi \in \mathcal{F}^q(W_+)^{(l)}$. Поэтому если форма φ гармоническая, то $\varphi = 0$, за исключением случая $q = 0$, когда φ — константа. Итак,

$$H^q(\tilde{V}, T, l) = \begin{cases} \{0\} & \text{при } q > 0, \\ \mathcal{F}(W_+)^{(l)} & \text{при } q > 0. \end{cases}$$

В силу двойственности Серра пространство $H^q(\tilde{V}, T, l)$ дуально к $H^{n-q}(\tilde{V}, T, -l)$. Значит, $H^q(\tilde{V}, T, -l) = 0$, за исключением случая $q = n$, и $H^n(\tilde{V}, T, -l)$ дуально к $\mathcal{F}(W_+)^{(l)}$.

Теперь отбросим условие положительной определенности и рассмотрим общий случай. Можно разложить V на положительную и отрицательную компоненты: $V = V' + V''$. Тогда

$$H^q(\tilde{V}, T, l)) = \sum_{q'+q''=q} H^{q'}(\tilde{V}', T, l) \otimes H^{q''}(\tilde{V}'', T, l).$$

Теорема 8.1.17 (Сатаке). *Пусть* $\tau_l \in \hat{T}$, $l \neq 0$, *и сигнатура формы* $lA(x, Jx)$ *равна* $(2r', 2n - 2r')$. *Тогда пространство* $H^q(E_{\tau_l})$ *отлично от* 0 *и неприводимо при* $q = n - r'$, *а при прочих* q *равно нулю.*

Определим сплетающий оператор $U_{z', z}$ формулой

$$(U_{z,z'}f)(w) = \gamma_{z', z} \int\limits_{W^{\mathbf{C}}} K(\tilde{z}', \tilde{z}) K(\tilde{z}, \tilde{z})^{-1} f(w)\, dw/z,$$

где $\tilde{z} = (w, z)$, $\tilde{z}' = (w', z')$ и

$$\gamma_{z', z} = \det((z' - z)/2i)^{1/2} (\det y)^{1/4} (\det y')^{-1/4}.$$

Теорема 8.1.18. $U_{g(z'), g(z)} T(\tilde{u}) = T(\tilde{u}) U_{z', z}$ *для* $\tilde{u} \in \tilde{V}$.

Следствие 8.1.19 (Стоун — фон Нейман). *Операторы* $U_{z', z}$ *устанавливают унитарную эквивалентность всех представлений Фока.*

8.2. Нильпотентные группы Ли

Описанные выше результаты для группы Гейзенберга обобщаются на класс связных односвязных нильпотентных групп Ли. Это было основным открытием Кириллова. Его результаты красиво изложены в [W 3]. Здесь мы только сформулируем основные факты.

Теорема 8.2.1 (Кириллов). *Пусть* N — *нильпотентная группа Ли указанного выше класса с алгеброй Ли* $\mathfrak{n}$. *Тогда* $\exp\colon \mathfrak{n} \to N$ — *гомеоморфизм. Для любого* $f \in \mathfrak{n}^*$ *существует такая поляризация* $\mathfrak{h}$, *что если обозначить через* χ_f *характер группы* $\exp \mathfrak{h}$, *заданный формулой* $\chi_f(\exp X) = \exp if(X)$, *то*

(i) *индуцированное характером* χ_f *представление* $U^{f, \mathfrak{h}}$ *неприводимо*;

(ii) *представления* $U^{f, \mathfrak{h}}$ и $U^{f', \mathfrak{h}'}$ *эквивалентны тогда и только тогда, когда* f *и* f' *лежат на одной орбите* $\mathcal{O}$ *в* $\mathfrak{n}^*$;

(iii) *пусть* $\pi\colon \mathcal{O}_f \to U(\mathcal{O}_f) = [U^{f, \mathfrak{h}}]$ — *отображение, которое каждой орбите* $\mathcal{O}_f$ *ставит в соответствие класс унитарной эквивалентности представления* $U^{f, \mathfrak{h}}$; *тогда*

$$\pi\colon \mathfrak{n}^*/N \to \hat{N}$$

— *инъективное отображение*;

(iv) *представление* $U(\mathcal{O}_f)$ *переводит финитные гладкие функции на* N *в ядерные операторы, и справедлива формула Кириллова для характера* $U(\mathcal{O}_f)$ *как обобщенной функции на* N;

(v) *если* $\lambda \in \hat{N}$, *то* $\lambda = U(\mathcal{O})$ *для некоторой орбиты* $\mathcal{O} \subset \mathfrak{n}^*$ *и, следовательно,* π — *биекция.*

Костант и Ауслендер, а также Пуканский обобщили этот подход на более широкий класс групп [1]).

Определение 8.2.2. Группа G называется *экспоненциальной*, если отображение $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ является диффеоморфизмом.

Пример 8.2.3. Группа из примера 7.1.12 экспоненциальна. Для изучения представлений разрешимых групп нам понадобится

Определение 8.2.4. Говорят, что поляризация $\mathfrak{h}$ для функционала $f \in \mathfrak{g}^*$ удовлетворяет *условию Пуканского*, если орбита $\mathcal{O}_f$ содержит целиком аффинное подмногообразие $f + \mathfrak{h}^\perp$, где $\mathfrak{h}^\perp = \{f_1 \in \mathfrak{g}^* \mid f_1(\mathfrak{h}) = 0\}$, или, что то же самое, если $\exp(\mathfrak{h}) \cdot f = f + \mathfrak{h}^\perp$.

Это условие автоматически выполняется в нильпотентном случае.

Теорема 8.2.5 (Берна — Пуканский). Пусть *G — экспоненциальная группа Ли. Для любого $f \in \mathfrak{g}^*$ и подалгебры $\mathfrak{h}$, подчиненной f, представление $U^{f,\mathfrak{h}} = \mathrm{Ind}_{\exp \mathfrak{h}}^{G}(\chi_f)$, где $\chi_f(\exp X) = \exp(if(X))$, неприводимо тогда и только тогда, когда $\mathfrak{h}$ — максимальная подчиненная подалгебра, удовлетворяющая условию Пуканского. Класс представления $U^{f,\mathfrak{h}}$ не зависит от выбора $\mathfrak{h}$ и зависит только от G-орбиты в $\mathfrak{g}^*$, содержащей f. Таким образом, отображение $G \cdot f \to [U^{f,\mathfrak{h}}]$ является биекцией $\mathfrak{g}^*/G$ на $\hat{G}$.*

Пусть U — представление разрешимой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в конечномерном комплексном векторном пространстве V. Тогда в подходящем базисе все операторы из $U(\mathfrak{g})$ записываются треугольными матрицами. Элементы главной диагонали матрицы $U(X)$, $X \in \mathfrak{g}$, являются линейными функционалами на $\mathfrak{g}$, называемыми *весами* представления U. Для $\lambda \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathbf{C}$ положим $S_\lambda(X) = 2\mathrm{sh}(\lambda(X)/2)/\lambda(X)$ для $X \in \mathfrak{g}$.

Кириллов и Пуканский показали, что формула Кириллова для характеров справедлива для экспоненциальных групп в следующей форме.

Теорема 8.2.6 (Кириллов — Пуканский). *Пусть G — экспоненциальная группа Ли и T — ее неприводимое унитарное представление. Тогда существует такая G-орбита $\mathcal{O}$ в $\mathfrak{g}^*$ и такое множество $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ корней (=весов присоединенного представления),*

---

[1]) Возможность такого обобщения была указана уже в работе переводчика [К 5]. Наиболее законченные результаты в этом направлении получены в последнее время М. Дюфло (Duflo M. Construction de représentations unitaires d'une group de Lie, in: Garmonic analisis and droup representations, C.I.M.E., 1980, Liguori, Napoli, 1982.) — *Прим. перев.*

содержащее вместе с корнем λ *и корень* $\bar{\lambda}$, *что функция* $\prod_{i=1}^{n} S_{\lambda_i}$ *положительна и для любой функции* $\alpha \in A_0(\mathfrak{g})$ *справедливо равенство*

$$\operatorname{tr} T(\alpha) = \int_{\mathcal{O}} \left\{ \int_{\mathfrak{g}} p_{\mathcal{O}}^{-1}(X)\, \alpha(X) \exp(if(X))\, dX \right\} d\beta(f),$$

где $p_{\mathcal{O}}(X) = \left(\prod_{i=1}^{n} S_{\lambda_i}(X) \right)^{1/2}$, *если только оператор* $T(\alpha)$ *имеет след. Если* $\alpha \in A_0(\mathfrak{g})$ *такова, что оператор* $T(\alpha)$ *положительный, то сходимость интеграла в правой части гарантирует существование следа у* $T(\alpha)$.

Таким образом, метод Кириллова работает и для экспоненциальных групп. Однако Берна показал, что для неэкспоненциальных групп представление $U^{f,\mathfrak{h}}$ может быть приводимым и представления $U^{f,\mathfrak{h}}$ и $U^{f,\mathfrak{h}'}$, соответствующие двум вещественным поляризациям для f, могут быть неэквивалентны. Классический пример неэкспоненциальной группы возникает в физике — это осцилляторная группа из примера 5.2.4.

Пример 8.2.7. Пусть D — осцилляторная группа. Она является полупрямым произведением $\mathbf{R}$ и группы Гейзенберга. Пусть H, P, Q, I — стандартный базис в алгебре Ли $\mathfrak{d}$ группы D и H^*, P^*, Q^*, I^* — дуальный базис в $\mathfrak{d}^*$. Обозначим через $f = (a, b, c, d)$ функционал $aI^* + bP^* + cQ^* + dH^*$. Можно показать, что орбита коприсоединенного представления, проходящая через точку (a_0, b_0, c_0, d_0), является либо точкой прямой $a = b = c = 0$, либо цилиндром $a = 0$, $b^2 + c^2 = b_0^2 + c_0^2$, либо параболоидом вращения $a = a_0 \neq 0$, $2ad - b^2 - c^2 = 2a_0d_0 - b_0^2 - c_0^2$.

Орбиты последнего типа не имеют вещественных поляризаций. Рассмотрим комплексные поляризации $\mathfrak{h} = \{H, I, P + iQ\}$ и $\bar{\mathfrak{h}} = \{I, H, P - iQ\}$. Индуцированное с $\mathfrak{h}$ представление, соответствующее функционалу f, где $a > 0$, унитарно эквивалентно представлению

$$W(t, n) f(y) = \exp(it(h - 1/2))\, U_a(n)\, V(t),$$

где $V(t) = \exp[-it(P^2 + Q^2)/2a]$, $P = -d/dx$, $Q = iax$, а $U_a(n)$ — неприводимое представление N, которое на центре имеет вид $U_a(z) = \exp(iaz)$. Для доказательства заметим, что если $U(n = (x, y, z))$ — представление Шрёдингера, то представление U_t, полученное из него автоморфизмом (переносом во времени) $n \to t(n)$, $U_t(n) = U(t(n))$, также является унитарным неприводимым представлением N. По теореме Стоуна — фон Неймана существует такой оператор $V(t)$, что $U_t(n) = V(t)U(n)V(t)^{-1}$. Мы оставляем читателю проверку того, что $V(t) = \exp(it(P^2 + Q^2 + h - 1/2))$.

По поводу общих разрешимых групп мы обращаемся к результатам Ауслендера — Костанта.

Теорема 8.2.8 (Ауслендер — Костант). *Пусть G — связная односвязная разрешимая группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Если $f \in \mathfrak{g}^*$, то*

(i) *существует строго допустимая положительная поляризация $\mathfrak{h}$ для f, удовлетворяющая условию Пуканского*;

(ii) *унитарное представление, определяемое поляризацией $\mathfrak{h}$, не зависит от выбора $\mathfrak{h}$, удовлетворяющей условиям* (i);

(iii) *если G — группа типа I, то всякое унитарное неприводимое представление G получается таким образом*;

(iv) *пусть $L_c(\mathcal{O})$ означает множество классов эквивалентности линейных расслоений со связностью над $\mathcal{O}$, для которых форма Кириллова $\Omega_{\mathcal{O}}$ является формой кривизны; тогда если G типа I, то имеет место биекция*

$$\bigsqcup_{\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*/G} L_c(\mathcal{O}) \to \widehat{G};$$

в частности, для экспоненциальных групп $L_c(\mathcal{O})$ сводится к точке, так что $\mathfrak{g}^*/G \to \widehat{G}$ — биекция.

Задачи

Упражнение 8.1. Показать, что представление T^1 группы $\tilde{V}$ в пространстве $\mathcal{F}(W_+)^{(1)}$ эквивалентно $e(-t)V(c)$, где $V(c)$ определено в упр. 2.1.

Глава 9 Теория Бореля — Вейля

9.1. Представления компактных полупростых групп Ли

В этой главе мы намерены развить теорию представлений компактных полупростых групп настолько, чтобы показать, что метод Кириллова применим и в этом случае. Это требует некоторых сведений из классической теории представлений групп и алгебр Ли. Один из основных результатов здесь — теория Бореля — Вейля, дающая геометрическую реализацию представлений. Это важно, поскольку, как мы увидим в следующих главах, геометрическое квантование некоторых механических систем укладывается в схему Бореля — Вейля, что дает возможность вычислить кратности собственных значений, даваемых квантованием.

Пусть M — компактная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{m}_0$.

Определение 9.1.1. *Рангом* M называется размерность максимальной абелевой подалгебры в $\mathfrak{m}_0$.

Ранг M совпадает с размерностью максимального тора (т. е. связной абелевой подгруппы) H в M.

Пример 9.1.2. Пусть $G = SO(n)$; тогда максимальный тор состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} \cos t_1 & \sin t_1 & & & 0 \\ -\sin t_1 & \cos t_1 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & 0 & & & \cdot \end{pmatrix}.$$

Поэтому ранг группы $SO(n)$ равен $[n/2]$.

Все неприводимые представления H одномерны и образуют группу $\hat{H} = \mathrm{Hom}(H, \mathbf{C}^*)$ — группу характеров H. Предположим теперь, что M — связная односвязная компактная группа Ли с максимальным тором H. Пусть $\mathfrak{m}_0$ и $\mathfrak{h}_0$ — алгебры Ли соответственно M и H. Обозначим через $\langle\ ,\ \rangle$ M-инвариантную форму на $\mathfrak{m}_0$, например форму Киллинга $\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, X\, \mathrm{ad}\, Y)$. Тогда $\langle \mathrm{Ad}\, gX, \mathrm{Ad}\, gY\rangle = \langle X, Y\rangle$ для $g \in M$, $X, Y \in \mathfrak{m}_0$. Поэтому мы можем отождествить $\mathfrak{m}_0$ с $\mathfrak{m}_0^*$: $X \to \hat{X}$, где $\hat{X}(Y) = \langle X, Y\rangle$. Тем самым отождествляются присоединенное и коприсоединенное представления.

Определение 9.1.2. Пусть $N(H)$ — нормализатор H в M. Конечная группа $W(H) = N(H)/H$ называется *группой Вейля*.

Теорема 9.1.3. *Пространство орбит* $\mathfrak{m}_0/\mathrm{Ad}\,M$ *отождествляется с* $\mathfrak{h}_0/W(H)$.

Пусть $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 \otimes \mathbf{C}$ — комплексификация $\mathfrak{m}_0$; на ней определена операция комплексного сопряжения.

Каждому представлению T группы M в комплексном векторном пространстве E соответствует представление $\dot{T}$ алгебры Ли $\mathfrak{m}$. Для элементов $X \in \mathfrak{m}_0$ полагаем

$$\dot{T}(X) = \lim_{t \to 0} \frac{T(\exp tX) - 1}{t},$$

а далее продолжаем по линейности так, что $\dot{T}(iX) = i\dot{T}(X)$ для $X \in \mathfrak{m}_0$.

Ограничение представления T на H дает разложение $E = \bigoplus_{\mu} E_\mu$, где $E_\mu = \{v \in E \mid T(h)v = e^\mu(h)v\}$, $\mu \in \mathfrak{h}^*$, $e^\mu(\exp X) = \exp(\mu(X))$.

Определение 9.1.4. Вектор $\mu \in \mathfrak{h}^*$ называется *весом* представления T, если $E_\mu \neq 0$. Размерность E_μ называется *кратностью* веса μ.

Если T — присоединенное представление M на $\mathfrak{m}$, то ограничение T на H приводит к разложению

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{h} + \bigoplus_{\alpha \neq 0} \mathfrak{m}_\alpha,$$

где $\mathfrak{m}_\alpha = \{X \in \mathfrak{m} \mid \mathrm{ad}\,Y(X) = \alpha(Y)X$ для $Y \in \mathfrak{h}\}$.

Определение 9.1.5. Ненулевые веса присоединенного представления называются *корнями* группы M относительно тора H. Пусть Δ означает множество корней.

Заметим, что $\overline{\mathfrak{m}_\alpha} = \mathfrak{m}_{-\alpha}$. Поэтому $\Delta = -\Delta$. Кроме того, $\dim \mathfrak{m}_\alpha = 1$. Действие $T(H)$ на $\mathfrak{m}_\alpha$ определяет характер χ_α группы H: $\chi_\alpha(\exp X) = \exp \alpha(X)$ для $X \in \mathfrak{h}$. Поскольку $\mathrm{Ad}\,h(X) = \chi_\alpha(h)X$ для $X \in \mathfrak{m}_\alpha$ и $h \in H$, мы видим, что $\Delta \in i\mathfrak{h}_0^*$. Продолжим форму $\langle\ ,\ \rangle$ на $\mathfrak{m}$.

Определение 9.1.6. Алгебра $\mathfrak{m}$ называется *полупростой*, если форма Киллинга на $\mathfrak{m}$ невырождена. В этом случае группа M также называется *полупростой*.

Выберем упорядочение на Δ, и пусть Δ^+ — множество положительных корней. Существует минимальное множество $\Pi \subset \Delta^+$, порождающее Δ над $\mathbf{Z}$. Пусть $\Pi = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$, где $l = \dim \mathfrak{h} = \mathrm{rank}\,\mathfrak{m}$. Элементы Π называются *простыми корнями*.

Определение 9.1.7. Для $\alpha \in \Delta$ определим $h'_\alpha \in i\mathfrak{h}_0$ формулой

$$\langle h'_\alpha, Y\rangle = \alpha(Y) \text{ для } Y \in \mathfrak{h}.$$

Для $\alpha, \beta \in \Delta$ положим $(\alpha, \beta) = \langle h'_\alpha, h'_\beta\rangle$. Тогда $(\ ,\ )$ — невырожденная билинейная форма на Δ.

Определение 9.1.8. Элемент $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ называется *целочисленным*, если $2(\alpha, \beta)/(\beta, \beta) \in \mathbf{Z}$ для всех $\beta \in \Delta$.

Выберем точку p в $\mathfrak{h}_0$ и положим $f_p(X) = \langle p, X\rangle$. Тогда $2\pi i f_p \in i\mathfrak{h}_0^* \subset \mathfrak{h}^*$. Для $p \in \mathfrak{h}_0$ положим $M_p = \{g \in M \mid \mathrm{Ad}(g)p = p\}$. Алгеброй Ли группы M_p будет $\mathfrak{m}_p = \{X \in \mathfrak{m}_0 \mid [X, p] = 0\}$. В нашем случае можно показать, что M_p — связная группа и, следовательно, пространство M/M_p односвязно. Очевидно, M/M_p изоморфно M-орбите $\mathcal{O}_p = M \cdot p$ точки p в $\mathfrak{m}_0^*$. Форма Кириллова Ω_p на $\mathcal{O}_p$ целочисленна тогда и только тогда, когда отображение $X \to 2\pi i f_p(X)$, $X \in \mathfrak{m}_p$, является дифференциалом характера группы M_p. Ясно, что формула $\chi(\exp X) = \exp(2\pi i f_p(X))$ определяет характер подгруппы $H \subset M_p$. Соединяя эти результаты с теорией представлений комплексных групп, мы приходим к следующему выводу.

Теорема 9.1.9. *Отображение $X \to 2\pi i f_p(X)$ является дифференциалом характера $\chi_f(\exp X) = \exp(2\pi i f_p(X))$ тогда и только тогда, когда функционал f_p и форма Кириллова Ω_p целочисленны.*

Тем самым группа $\hat{M}_p$ отождествляется с решеткой Λ в $i\mathfrak{h}_0^*$. Мы предположим, что Λ нетривиальна.

Представляет интерес случай, когда $M_p = H$ — максимальный тор (см. по этому поводу упр. 9.3). В этом случае H действует на $M \times \mathbf{C}$ по формуле $h(m, z) = (mh^{-1}, \chi_f(h)z)$. Пусть $L = M \times_H \mathbf{C}$. Тогда L — линейное расслоение над M/H.

Теорема 9.1.10. *Расслоение L обладает естественной связностью ∇ и ∇-инвариантной эрмитовой структурой, так что* $(L, \nabla) \in L_c(M/H, \Omega)$.

Доказательство. Пусть $(g, z) \in L$. Положим $p([g, z]) = gM_p$. Эрмитова структура h определяется равенством

$$h_{gM_p}([g, z], [g, w]) = z\bar{w}.$$

Ясно, что $h(gy_1, gy_2) = h(y, y_2)$. Остальное предоставляется читателю.

Можно показать также, что форма кривизны связности ∇ совпадает с $2\pi i\Omega_p$.

Теорема 9.1.11. *Предположим, что $(M/H, \Omega, \lambda)$ — гамильтоново M-пространство. Тогда Ω целочисленна в том и только том* *случае, когда $f_\rho \in \Lambda$. Отображение $\Delta \to L_c(M/H, \Omega)$: $\chi \to L_\chi$ является биекцией.*

Следствие 9.1.12. *Решетка Λ совпадает с $H^2(M/H, \mathbf{Z})$.*

Доказательство мы отложим до следующего раздела.

Определение 9.1.13. *Индексом* точки $\lambda \in \hat{H}$ называется число положительных корней α, для которых $\dot{\lambda}(h'_\alpha) < 0$.

Определение 9.1.14. Характер $\lambda \in \hat{H}$ называется *сингулярным*, если $\dot{\lambda}(h'_\alpha) = 0$ для некоторого $\alpha \in \Delta$. Если λ не сингулярен, он называется *регулярным*.

Определение 9.1.15. *Камерой Вейля* называется подмножество $D = \{\lambda \in \hat{H} \mid \operatorname{Ind} \lambda = 0\}$. Таким образом, D определяется множеством $D(\mathfrak{m}) = \{\dot{\lambda} \in \overset{*}{\mathfrak{h}_0} \mid \langle \lambda, h'_\alpha \rangle \geqslant 0$ для $\alpha \in \Delta^+\}$.

D является фундаментальной областью для действия W на $\hat{H}$, заданного равенством $w\lambda(h) = \lambda(w^{-1}(h))$, $w \in W$, $h \in H$. Пусть D^0 означает внутренность D.

Определение 9.1.16. $\delta = (1/2) \sum\limits_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$.

Теорема 9.1.17. (i) δ — *минимальный элемент в D, обладающий свойством $\delta + D \subset D^0$;*

(ii) $\delta(h'_\alpha) = (\delta, \alpha) = (\alpha, \alpha)$.

Как и в теореме 9.1.11, мы можем рассматривать камеру Вейля D как множество тех $\lambda \in H^2(M/H, \mathbf{R})$, для которых $(\psi^{-1}(\lambda), \alpha) \geqslant 0$ для всех $\alpha \in \Delta^+$, где ψ — трансгрессия (см. [B 17]). Множество $\Lambda \cap D$ отождествляется с $H^2(M/H, \mathbf{Z}) \cap D$. В следующем разделе мы покажем непосредственно, что Λ совпадает с возможными значениями 2-формы Кириллова на M/H, соответствующими целочисленным орбитам. Отметим также, что Λ инвариантна относительно коприсоединенного действия M на $\overset{*}{\mathfrak{m}_0}$.

Теорема 9.1.18. *Пусть M — связная компактная группа Ли размерности n и ранга l. Тогда она имеет $2m$ корней $\pm\alpha_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$, где $n = l + 2m$. Группа M полупроста, если и только если она имеет l линейно независимых корней.*

Ясно, что $2m = \dim(M/H)$. Следующая теорема связывает корни с когомологиями M/H.

Теорема 9.1.19. *Пусть M — компактная полупростая группа Ли. Тогда имеет место изоморфизм*

$$\overset{*}{\mathfrak{h}_0} \simeq H^1(H, \mathbf{R}) \xrightarrow{\psi} H^2(M/H, \mathbf{R}).$$

Доказательство основано на свойствах отображения трансгрессии ψ в расслоении $H \to M \to M/H$. Детали см. в [B 17].

Отметим здесь также, что пространство M/H имеет 2^m инвариантных почти комплексных структур, определяемых корнями $\pm\alpha_1 \pm \alpha_2 \ldots \pm\alpha_m$, где $2m = \dim(M/H)$. Справедлива

Теорема 9.1.20. *Первый класс Черна M/H — это $c_1(M/H) = \varepsilon_1\alpha_1 + \ldots + \varepsilon_m\alpha_m$.*

Поскольку δ является весом, отсюда следует, что $c_1/2$ — также вес, т. е. $c_1(M/H) \in H^2(M, \mathbf{Z})$ делится на 2. Другими словами, класс Штифеля — Уитни $w_2(M/H) \in H^2(M/H, \mathbf{Z}_2)$ равен нулю.

Теорема 9.1.21. *Элемент $c_1 = \sum \varepsilon_i\alpha_i$ не сингулярен тогда и только тогда, когда $\{\varepsilon_i\alpha_i\}$ образуют систему положительных корней относительно некоторого упорядочения; в этом и только в этом случае почти комплексная структура на M/H интегрируема.*

Теорема 9.1.22. *Число инвариантных комплексных структур на M/H равно порядку группы Вейля $|W(H)|$.*

В дальнейшем мы снабжаем M/H комплексной структурой, соответствующей набору Δ^+ положительных корней.

Пример 9.1.23. Пусть $M = SU(2)$. Тогда $\mathfrak{m} = \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ и $\mathfrak{h}$ — множество диагональных матриц в $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$. Ненулевые корни имеют вид

$$\alpha_{ij}\left[\begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}\right] = c_i - c_j, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant 2, \quad i \neq j.$$

Но $\bar{c}_k = -c_k$ в $\mathfrak{m}_0$; поэтому положим $c_k = i\varphi_k$. В этом случае $\Delta^+ = \Pi = \{\alpha_{12}\}$. Решетка Λ порождается в $i\mathfrak{h}_0^* \simeq \mathbf{R}$ элементами $i\varphi_1$, $i\varphi_2$. Корневое разложение имеет вид $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}) = \mathbf{C}H_\alpha \oplus \mathbf{C}E_\alpha \oplus \oplus \mathbf{C}E_{-\alpha}$, где

$$H_\alpha = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $[H_\alpha, E_\alpha] = (1/2)E_\alpha$, $\alpha(H_\alpha) = 1/2$ и $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha$. В качестве формы Киллинга мы выбираем $\langle X, Y\rangle = 4\,\mathrm{tr}(XY)$. Поэтому $\alpha(H_\alpha) = \langle H_\alpha, H_\alpha\rangle = 1/2$ — обычная нормализация.

Группой Вейля для $SU(2)$ служит группа S_2 перестановок $i\varphi_1$ и $i\varphi_2$. Поскольку $|W| = 2$, мы видим, что на M/H есть две инвариантные комплексные структуры, сопряженные друг другу. Они могут быть построены следующим образом. Пусть $\mathfrak{b} = \mathbf{C}H_\alpha + \mathbf{C}E_\alpha$. Тогда соответствующая подгруппа B в $SL(2, \mathbf{C})$ состоит из матриц

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad ac = 1.$$

Пространство M/H отождествляется с $SL(2, \mathbf{C})/B \simeq CP(1)$. Подалгебра $\mathfrak{b}$ является комплексной поляризацией, задающей кэлерову структуру на $CP(1)$.

Класс Черна $CP(1)$ вычисляется следующим образом. Пусть χ_0 — характер B, задаваемый формулой

$$\chi_0\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = a,$$

и пусть L_0 — линейное расслоение над $CP(1)$, соответствующее характеру χ_0. С другой стороны, характер χ группы B, соответствующий максимальной внешней степени кокасательного расслоения над G/B, легко вычисляется для любой полупростой группы G и ее борелевской подгруппы B. Он соответствует сумме всех отрицательных корней алгебры $\mathfrak{g}$. В нашем случае $\chi = \chi_0^{-2}$. Таким образом, если обозначить через g генератор бесконечной циклической группы $H^2(CP(1), \mathbf{Z})$, то $c_1(CP(1)) = 2\mathrm{g}$. Интегрирование по $CP(1)$ дает $c_1(CP(1))[CP(1)] = 2$. Это — частный случай следующей общей теоремы.

Теорема 9.1.24. *Если G — полупростая компактная группа Ли, а U — централизатор одномерного тора S, определенного условиями $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{l-1} = 0$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ — система простых корней группы G, то $c_1(G/U) = 2(2\delta, \alpha_l)/(\alpha_l, \alpha_l)\,\mathrm{g}$, где g — генератор группы $H^2(G/J, \mathbf{Z})$.*

Как мы видели в гл. 1, характеры неприводимых унитарных представлений параметризуют $\hat{G}$. В нашем случае это можно сделать явно с помощью формулы Вейля для характеров. Положим для $w \in W$ $\varepsilon(w) = \det\{w\colon i\overset{*}{\mathfrak{h}}_0 \to i\overset{*}{\mathfrak{h}}_0\}$. Это — гомоморфизм W на группу $\{\pm 1\}$.

Теорема 9.1.25. *Характер неприводимого унитарного представления компактной односвязной полупростой группы Ли G имеет вид χ_λ, $\lambda \in \Lambda \cap D^0$, где*

$$\chi_\lambda | H = \frac{\sum\limits_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w\lambda}}{\prod\limits_{\alpha \in \Delta^+} \left(e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}\right)}.$$

Следствие 9.1.26. $\hat{G} = \Lambda \cap D^0$.

Пример 9.1.27 (продолжение 9.1.23). Множество $\Lambda \cap D^0$ состоит из точек $\lambda = n\alpha/2$, $n > 0$. Поэтому

$$\chi_\lambda | H = \frac{\exp\lambda - \exp(-\lambda)}{\exp(\alpha/2) - \exp(-\alpha/2)},$$

как мы видели в гл. 1.

Определение 9.1.28. Элемент $\mu \in \Lambda$ называется *старшим весом* представления T, если μ — вес T, а $\mu + \alpha$ — не вес для любого $\alpha \in \Delta^+$.

Теорема 9.1.29 (о старшем весе). *Каждое неприводимое представление U группы M имеет старший вес μ кратности* 1, *принадлежащий $\Lambda \cap D^0$. Обратно, каждый вес из $\Lambda \cap D^0$ является старшим весом некоторого представления U из $\hat{M}$.*

Ни теорема о старшем весе, ни формула Вейля не дают реализации неприводимых представлений M. Это делает теория Бореля — Вейля, к которой мы теперь переходим.

9.2. Теория Бореля — Вейля

Мы видели, что многообразие M/H снабжается канонической комплексной структурой. Касательное расслоение над этим многообразием в терминах алгебр Ли описывается так.

Теорема 9.2.1. (i) $T(M/H)_{x_0} = \mathfrak{m}_0/\mathfrak{h}_0$;

(ii) $T(M/H)^{\mathbf{C}}_{x_0} = \mathfrak{m}/\mathfrak{h} = \bigoplus\limits_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{m}_\alpha + \bigoplus\limits_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{m}_{-\alpha}$;

(iii) *пучок ростков голоморфных функций на M/H имеет над открытой областью U пространство сечений $\mathcal{O}(U) = \{f \in A(p^{-1}(U)) \mid f(gh) = f(g)$ для $h \in H$ и $Xf = 0$ для $X \in \bigoplus\limits_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{m}_\alpha\}$, где p — каноническая проекция M на M/H.*

Построим линейное расслоение $E(\lambda)$ над M для $\lambda \in \Lambda$ как $M \times_H \mathbf{C}$, где $(m, z) \sim (mh, e^\lambda(h)z)$. Пусть $(m, z)_p$ — элемент $E(\lambda)$, в который проектируется пара $(m,z) \in M \times \mathbf{C}$. Группа M действует на $E(\lambda)$ по формуле $m'(m, z)_p = (m'm, z)_p$. Расслоение $E(\lambda)$ снабжается структурой голоморфного расслоения, для которого $\mathcal{O}(E(\lambda), U) = \{f \in A(p^{-1}(U)) \mid f(gh) = e^\lambda(h)f,\ Xf = 0\}$.

Таким образом, пространство $H^0(M/H, \mathcal{O}(E_\lambda))$ глобальных голоморфных сечений расслоения E_λ является M-модулем. Сечения E_λ над открытым множеством $U \in M(H)$ — это отображения $s\colon U \to E_\lambda$, для которых $s(mx_0) = (m, f_s(m))_p$, где функция f_s обладает свойством $f_s(mh) = e^{-\lambda}(h) f_s(m)$ для $h \in H$, $m \in M$.

Эта реализация M-модуля локально выглядит так. Пусть $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \times \mathbf{C} \to E_\lambda$ — локальная тривиализация, задаваемая отображением $x \to g_x$, где $g_x x_0 = x$ для $x \in U_\alpha$. Тогда действие M на E_λ дается формулой

$$g(x, z) = \left(gx,\ e^\lambda\left(g_{gx}^{-1} g g_x\right) z\right).$$

Таким образом, действие M на локальном сечении f расслоения $E(\lambda)$ имеет вид

$$(T(g)f)(x)=e^{\lambda}\left(g_x^{-1}gg_{g^{-1}x}\right)f(g^{-1}x).$$

Поскольку $h_{x_0}(z, z')=\bar{z}z'$ инвариантно относительно H, мы можем построить M-инвариантную эрмитову метрику, разнося h_{x_0} с помощью M.

M-инвариантное скалярное произведение определяется формулой

$$\langle f_1 | f_2\rangle=\int_M h(f_1, f_2)\,\Omega^n.$$

Теорема 9.2.2 (Борель — Вейль). *Пусть* $\lambda\in\Lambda$ *и* $\lambda+\delta\in D$. *Тогда*

(i) $H^q(M/H, \mathcal{O}(E_\lambda))=0$ *при* $q>0$;

(ii) $H^0(M/H), \mathcal{O}(E_\lambda))=0$, *если* $\lambda\notin D$, *т. е. если* $\lambda+\delta$ *сингулярен*;

(iii) $H^0(M/H, \mathcal{O}(E_\lambda))$ — *неприводимый* M-*модуль со старшим весом* λ, *если* $\lambda\in D\cap\Lambda$.

Доказательство будет намечено в следующем разделе после того, как будет описана геометрия Кириллова.

Пример 9.2.3 (продолжение 9.1.23). Пусть χ — голоморфный характер B, заданный формулой

$$\chi\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}=a^{2j},\quad j\leqslant 0.$$

Тогда χ определяет линейное расслоение $E(\chi)$, получаемое отождествлением $(g, z)\sim(gb, \chi^{-1}(b)z)$, где $g\in SL(2, \mathbf{C})$, $z\in\mathbf{C}$. Определим отображение

$$z\to g_z^1=\begin{pmatrix} z & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

на открытом множестве $\mathbf{C}\subset CP(1)$. Тогда тривиализация имеет вид

$$(g, z)\xrightarrow{\varphi_1}(a/d, c^{2j}z),\ \text{если}\ g=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

Аналогично определяется отображение

$$z\to g_z^2=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ z^{-1} & 1\end{pmatrix}\ \text{для}\ \mathbf{C}^{-1}\subset CP(1)$$

и тривиализация

$$(g,\ z) \xrightarrow{\varphi_2} (c/a,\ a^{2j}z),\ \text{если}\ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Сравнение двух тривиализаций дает

$$\left(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}\right)\left(z_2,\ z\right) = \left(z_2^{-1},\ z_2^{2j}z\right).$$

Таким образом, переходная функция имеет вид $c_{12} = z_2^{2j}$.

Голоморфное сечение s расслоения $E(\chi)$, как говорилось выше, имеет вид $s\,|\,U_i = f_i s_i$, где $f_1 = c_{12} f_2$ на $U_1 \cap U_2$ и $z_1 = z_2^{-1}$. Таким образом,

$$f_1\left(z_1\right) = c_{12} f_2\left(z_2\right) = z_2^{-2j} f_2\left(z_2\right) = z_1^{2j} f_2\left(z_1^{-1}\right).$$

Поэтому f_1 и f_2 — многочлены степени $\leqslant 2j$.

Локальное действие $SU(2)$ на сечениях над U_1 имеет вид

$$(T(g)f)\left(z_1\right) = \chi\left(g_z^{-1} g g_{g^{-1}z}\right) f\left(g^{-1}z\right) = \left(\bar{b}z + a\right)^{2j} f\left(\frac{\bar{a}z - b}{\bar{b}z + a}\right).$$

Таким образом, $H^0(M/H, E(\chi))$ совпадает с пространством представления $D^{(j)}$ со спином j.

Когомологии $H^k(M/H, \mathcal{O}(E(\lambda)))$ могут быть вычислены с помощью комплекса $\{A^k(E(\lambda)), \bar{\partial}\}$, где $A^k(E(\lambda))$ — пространство $E(\lambda)$-значных $(0, k)$-форм. В силу изоморфизма Ходжа эти когомологии изоморфны пространствам $\mathcal{H}^k(E(\lambda)) = \{\psi \in \in A^k(E(\lambda))\,|\,\Box\psi = 0\}$ гармонических форм. Здесь $\Box$ означает оператор Лапласа — Бельтрами на M/H. Поскольку метрика, с помощью которой определяется $\Box$, M-инвариантна, пространства $\mathcal{H}^k(E(\lambda))$ сохраняются при действии M.

Теорема 9.2.4. *Имеет место изоморфизм M-модулей*

$$\mathcal{H}^k(E(\lambda)) \simeq H^k(M/H, \mathcal{O}(E(\lambda))).$$

Независимость от поляризации следует из теоремы Римана — Роха, которую мы сейчас сформулируем.

Теорема 9.2.5 (Риман — Рох — Хирцебрух).

$$\chi(M/H, E(\lambda)) = \mathrm{Td}(M/H, E(\lambda)),$$

где Td *означает класс Тодда.*

Отсюда следует, что $\chi(M/H, E(\lambda))$ зависит только от $E(\lambda)$, $c_1(M/H)$ и класса Понтрягина многообразия M/H, определяемого структурой симплектического многообразия на M/H.

В терминах орбит пространство M/H описывается следующим образом. Пусть $\mathcal{O}(f) = M \cdot f$ — орбита функционала $f \in \overset{*}{\mathfrak{m}}_0$

относительно коприсоединенного действия M. Тогда $\mathcal{O}(f) = M/M(f)$. По теореме Кириллова симплектическая форма на $\mathcal{O}(f)$ имеет вид $\Omega_f(\sigma_f X, \sigma_f Y) = \langle f, [X, Y] \rangle$.

Выберем корневые векторы $e_\alpha \in \mathfrak{m}_\alpha$ так, чтобы выполнялись равенства $(e_\alpha, e_{-\beta}) = \delta_{\alpha\beta}$, $h_\alpha = [e_\alpha, e_{-\alpha}]$. Рассмотрим 1-формы ω^α на M, задаваемые формулой $\omega^\alpha(e_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$. Внешнее произведение $\omega_\alpha \wedge \bar{\omega}_\alpha$ инвариантно относительно $\mathrm{Ad}(H^{\mathbf{C}})$. Ограничение на M приводит к M-инвариантной 2-форме на M/H, которую мы обозначим тем же символом.

Заметим, что $(\omega_\alpha \wedge \bar{\omega}_\alpha)(e_\beta, e_\gamma) = 0$, за исключением случая $\beta = -\gamma = \pm\alpha$. Поэтому мы получаем левоинвариантную 2-форму на M, полагая

$$\Omega_f = \frac{i}{2\pi} \sum_{\alpha \in \Delta^+} (f, \alpha)\, \omega_\alpha \wedge \bar{\omega}_\alpha.$$

Поскольку

$$\Omega_f(e_\alpha, e_{-\alpha}) = \frac{i}{4\pi} f(h_\alpha)$$

совпадает с производной 1-формы f в силу формулы $d\omega(X, Y) = -\omega([X, Y])$, мы получаем следующий результат.

Теорема 9.2.6. *Форма Ω_f имеет тип $(1, 1)$ и принадлежит классу Черна расслоения L_{χ_f}.*

Теорема 9.2.7

$$\dim H^1(M/H, \Omega^1) = \dim H^2(M/H, C) = l = \operatorname{rank} \mathfrak{m}.$$

Элементы Π соответствуют при этом формам $\Omega_{\alpha_j} = \sum_{\alpha \in \Delta^+} (\alpha_j, \alpha)\, \omega_\alpha \wedge \bar{\omega}_\alpha$.

Теорема 9.2.8. *Форма Ω_δ принадлежит классу Черна расслоения $E(\delta)$, где $(\delta, h_\alpha) = (\alpha, \alpha)$.*

Теорема 9.2.9. (i) $H^p(M/H, \Omega^q) = 0$, если $p \neq q$,
(ii) $H^p(M/H, \Omega^p) = H^2(M/H, \mathbf{C})$.

Следствие 9.2.10. *Эйлерова характеристика пространства M/H равна $\chi(M/H) = |W(H)|$.*

Наметим теперь доказательство теоремы Бореля — Вейля. Пусть $\lambda \in D \cap \Lambda$. По теореме 9.2.6 форма кривизны расслоения $E(\lambda)$ имеет вид

$$\Omega_\lambda = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \langle \lambda, h_\alpha \rangle\, \omega_\alpha \wedge \bar{\omega}_\alpha,$$

а форма кривизны расслоения $E(-\lambda)\otimes K$, где $K=E(-2\delta)$, равна

$$\Omega_{-\lambda-2\delta}=\sum_{\alpha\in\Delta^+}-\langle\lambda+2\delta,\ h_\alpha\rangle\,\omega_\alpha\wedge\bar{\omega}_\alpha.$$

Поскольку $\lambda\in D$, мы имеем $\langle\lambda+2\delta, h_\alpha\rangle>0$ для всех $\lambda\in\Delta^+$. Поэтому по известной теореме Гриффитса $H^{n-q}(M/H, \mathcal{O}(E(-\lambda)\otimes K))=0$ для $q=1, 2, \ldots, n=\dim(M/H)$. В силу двойственности Серра $H^q(M/H, \mathcal{O}(E(\lambda)))$ и $H^{n-q}(M/H, \mathcal{O}(E(-\lambda)\otimes K))$ являются дуальными M-модулями. Значит, $H^q(M/H, \mathcal{O}(E(\lambda)))=0$ при $q>0$. С доказательством неприводимости нам придется подождать до следующей главы.

Определим меру Лиувилля на $\mathcal{O}(f)$, полагая $\beta=1/n!\Omega^n$; тогда $\int\limits_{\mathcal{O}(f)}\beta>0$. Отметим, что $\beta=\prod\limits_{\alpha\in\Delta^+} i(\delta+\lambda,\ \alpha)\,\omega_\alpha\wedge\bar{\omega}_\alpha$.

Теорема 9.2.11 (Кириллов). *Пусть M — компактная односвязная группа Ли, $\delta=(1/2)\sum\limits_{\alpha\in\Delta^+}\alpha$ и T^λ — неприводимое представление M со старшим весом λ. Положим*

$$p\,(X)=\prod_{\alpha\in\Delta^+}\frac{\sin\alpha\,(X)/2}{\alpha\,(X)/2}.$$

Тогда

$$\operatorname{tr}T^\lambda\,(\exp X)=p\,(X)^{-1}\int\limits_{\mathcal{O}(f)}\exp\,(if\,(X))\,\beta,$$

где $f=i^{-1}(\lambda+\delta)\in\mathfrak{h}_0^*\subset\mathfrak{m}^*$.

Полагая здесь $X=0$, получим

Следствие 9.2.12 (Борель — Хирцебрух).

$$\dim T^\lambda=\int\limits_{\mathcal{O}(f)}\beta.$$

Таким образом, мы видим, что если $\lambda\in\Delta\cap D$, т. е. λ — неотрицательный целочисленный вес, то характер неприводимого представления T^λ со старшим весом λ определяется орбитой $\mathcal{O}(\lambda+\delta)$:

$$\operatorname{tr}T^\lambda\,(\varphi)=\int\limits_{\mathcal{O}(\lambda+\delta)}\tilde{\varphi}\,dv$$

и T^{λ_1} эквивалентно T^{λ_2}, только если $\mathcal{O}(\lambda_1+\delta)=\mathcal{O}(\lambda_2+\delta)$, т. е. при $\lambda_1=\lambda_2$.

9.3. Кокомпактные группы с нильпотентным радикалом

Р. Липсман обобщил теорию Бореля — Вейля на класс групп G с односвязным нильпотентным радикалом N, для которых G/N — компактная группа. Согласно стандартным структурным теориям (см. [L 12]), такая группа G является полупрямым произведением $G = H \ltimes N$, где N — односвязный нильпотентный нормальный делитель, а H — компактная группа Ли. Этот класс включает в себя все компактные группы Ли, односвязные нильпотентные группы Ли, все группы движений (для которых радикал N абелев), обобщенные осцилляторные группы (для которых N совпадает с группой Гейзенберга, а H — либо тор, сохраняющий центр N, либо общая унитарная группа $U(n)$ и, наконец, группы типа $M \ltimes N$, где MAN — минимальная параболическая подгруппа в полупростой группе Ли.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G рассматриваемого типа. Для $f \in \mathfrak{g}^*$ пусть $G^0(f)$ означает связную компоненту единицы в $G(f)$.

Определение 9.3.1. Пусть $\Lambda(G) = \{f \in \mathfrak{g}^* |$ существует такой характер $\chi = \chi_f$ группы $G^0(f)$, что $d\chi = if|\mathfrak{g}(f)\}$.

Для $f \in \Lambda(G)$ пусть $\vartheta = f|\mathfrak{n}$, $\xi = f|\mathfrak{h}(\vartheta)$, $\nu \in H^0(\vartheta)^\wedge$ — неприводимое представление, описываемое теоремой Бореля — Вейля, $\tau \in H(f)^\wedge$ — неприводимое представление, ограничение которого на $H^0(f)$ кратно χ_ξ; ξ и τ задают представление $\sigma = \sigma_{\xi, \tau} \in \widehat{H(f)}$, как мы увидим ниже. Пусть $\gamma = \gamma(\vartheta) \in \hat{N}$ и $\tilde{\gamma}$ — его каноническое продолжение. Можно показать, что $G(f) = H(f)N(f)$ и $G(\vartheta) = H(\vartheta)N(\vartheta)$. Мы вложим $\widehat{H(f)}$ в $\widehat{G(f)}$, полагая

$$\tau(nh) = \tau(h)\chi_\vartheta(n), \qquad h \in H(f),\ n \in N(f).$$

Положим $T(f, \tau) = \operatorname{Ind}_{H(\vartheta)N}^{G} \sigma_{\xi, \tau} \otimes \tilde{\gamma}$ и $[T(f)] = \{T(f, \tau) \,|\, \tau \in \widehat{G(f)}\}$.

Теорема 9.3.2 (Липсман). *Отображение $\Lambda(G) \to \hat{G}$: $f \to [T(f)]$ является сюръективным G-эквивариантным многозначным отображением вида*

$$\widehat{G(f)} \to \hat{G} \to \Lambda(G)/G.$$

Вариант Липсмана теоремы Планшереля выглядит так:

Теорема 9.3.3. *Если $\varphi \in A_0(G)$ для группы G указанного класса, то*

$$\varphi(e) = \int\limits_{\Lambda(G)/G} \sum_{\widehat{G(f)}} \operatorname{tr}(T(f, \tau)(\varphi)) \dim \tau \, d\mu(G \cdot f).$$

Липсман предположил, что для этого класса групп остается справедливой формула Кириллова для характеров. Наконец, он показал, что, используя технику голоморфного индуцирования, развитую Аусдендером и Костантом, можно полностью описать $\hat{G}$.

Основу работы Липсмана составляет следующее обобщение теоремы Бореля — Вейля. Пусть H — компактная группа Ли (не обязательно связная) со связной компонентой единицы H^0. Пусть $f \in \Lambda(H)$ и $\nu = \nu_f$ — неприводимое унитарное представление H^0, доставляемое обычной теоремой Бореля — Вейля для $f \in \mathfrak{h}^*$. Обозначим через $h\nu_f$ представление $\nu_{h \cdot f}$ для $h \in H$. Поскольку $H(\nu) = H^0 H(f)$, мы имеем $H(\nu)/H(f) \approx H^0/H^0(f)$. Это — связное комплексное многообразие, как отмечалось выше. Тем самым на $H/H(f)$ вводится комплексная структура, так как связные компоненты этого множества имеют вид $hH(\nu)/H(f)$.

Поскольку $H^0(f)$ — нормальный делитель в $H(f)$, существует конечномерное неприводимое представление τ группы $H(f)$, для которого $\tau | H^0(f)$ кратно χ_f. Пусть V — пространство представления τ. Определим голоморфное векторное расслоение $E(\tau) = (H \times_\tau V)/H(f)$. Пусть $S = H^0(H/H(f), \mathcal{O}(E(\tau)))$ — пространство голоморфных сечений $E(\tau)$. Группа H действует на S по формуле $(\sigma_{f,\tau}(h)s)(x) = hs(h^{-1}x)$ для $s \in S$.

Теорема 9.3.4 (вариант теоремы Бореля — Вейля).

(i) *S нетривиально, $\sigma_{f,\tau}$ неприводимо и все неприводимые представления H получаются таким образом.*

(ii) *Две точки из $\Lambda(H)$, лежащие на одной H-орбите, порождают одинаковые конечные совокупности классов эквивалентности неприводимых представлений H.*

(iii) *Для $f \in \Lambda(H)$ отображение $\tau \to \sigma_{f,\tau}$ устанавливает биекцию между неприводимыми представлениями $H(f)$, ограничения которых на $H^0(f)$ кратны χ_f, и неприводимыми представлениями H, ограничения которых на H^0 кратны* $\bigoplus_{h \in H/H(\nu_f)} h \cdot \nu_f$.

(iv) *Множество $\hat{H}$ можно рассматривать как расслоение*

$$\widehat{H(f)} \to \hat{H} \to N(H)/H.$$

Задачи

Упражнение 9.1. Пусть $\mathfrak{m}$ — множество тех $f \in \mathfrak{g}^*$, для которых орбита $\mathcal{O}(f)$ имеет максимальную размерность в $\mathfrak{g}^*$. Показать, что для $f \in \mathfrak{m}$ алгебра Ли $\mathfrak{g}(f)$ коммутативна. Таким образом, если $\mathfrak{g}^*(f)$ имеет минимальную размерность, то она абелева.

Упражнение 9.2. Для $f \in \Lambda$ показать, что параболическая подалгебра $\mathfrak{p} = \sum\limits_{\alpha \in \Delta_f^+ \cup \{0\}} \mathfrak{m}_\alpha$, где $\Delta_f^+ = \{\alpha \in \Delta^+ \mid i^{-1}\langle\alpha, f\rangle < 0\}$, является единственной $M(f)$-инвариантной положительной поляризацией для f.

Упражнение 9.3. Показать, что подалгебра $\mathfrak{p}$ является борелевской тогда и только тогда, когда f удовлетворяет условию упр. 9.1. В этом случае $\mathfrak{m}(f)$ — максимальная торическая подалгебра, $\mathfrak{p} \cap \bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}(f)$. Пусть $\mathfrak{d} = \mathfrak{m}(f)$, $\mathfrak{e} = \mathfrak{m}$ и D, E — соответствующие группы. Показать, что $E/D = M/M(f)$.

Глава 10 Геометрия C-пространств и R-пространств

10.1. Геометрия C-пространств

Основные примеры квантуемых динамических систем, а именно гармонический осциллятор, задача Кеплера или атом водорода, частица со спином и т. д. основаны на C-пространствах.

Определение 10.1.1. *C-пространством* называется компактное односвязное однородное многообразие. Запишем C-пространство в виде $M = G/U$. Пространство M имеет компактную форму. А именно максимальная компактная подгруппа G^u в G действует транзитивно на M и $M = G^u/K$, где $K = G^u \cap U$. Группа G^u полупроста.

Пример 10.1.2. Пространства M/H из предыдущей главы являются C-пространствами.

Впервые классификация C-пространств была получена Ваном, и изучение однородных векторных расслоений над C-пространствами составило основу обобщения Боттом теоремы Бореля — Вейля.

Пусть $B \to P \xrightarrow{\pi} M$ — главное голоморфное расслоение над многообразием M. Пусть $G^0(P)$ — связная компонента единицы в группе всех автоморфизмов расслоения P.

Определение 10.1.3. Если $\pi(G^0(P))$ действует транзитивно на M, то P называется *однородным расслоением.*

Один из способов построения однородных расслоений состоит в том, чтобы взять расслоение на смежные классы $U \to G \to M = G/U$ и гомоморфизм ρ: $U \to B$. Пусть

$$P = \{G \times B \mid (g, b) \sim (gh, \rho(h^{-1})b),\ g \in G,\ b \in B,\ h \in U\}.$$

Группа G действует на классы эквивалентности $[g, b]$ по формуле $g'[g, b] = [g'g, b]$. Ясно, что это действие является автоморфизмом расслоения. Поэтому $P = G \times_\rho B$ — однородное расслоение.

Теорема 10.1.4. *Пусть $B \to P \to M$ — голоморфное главное расслоение над C-пространством M. Тогда P однородно в том и только том случае, когда оно имеет вид $P \times_\rho B$ для некоторого ρ.*

Пример 10.1.5. Голоморфное касательное расслоение $T(M)$ над $M = G/U$ однородно. Чтобы увидеть, как оно получается описанной выше конструкцией, заметим, что $T(M)_{eU}$ естественно отождествляется с $\mathfrak{g}/\mathfrak{u}$. Поэтому $T(M)$ изоморфно $M \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}/\mathfrak{u}$.

Пусть M является C-пространством. Тогда оно имеет вид $M = G/U$, где G — связная комплексная группа Ли. Если M не кэлерово, то существует такая подгруппа $\tilde{U}$, содержащая U в качестве замкнутого нормального делителя, что $\tilde{M} = G/\tilde{U}$ — кэлерово С-пространство. В этом случае $\tilde{U}/U$ — комплексный тор. Топологическую характеристику кэлеровых C-пространств дает

Теорема 10.1.6. *Многообразие $M = G/U$ кэлерово тогда и только тогда, когда $\chi(M) \neq 0$.*

Для C-пространств все линейные расслоения однородны, как показывает

Теорема 10.1.7. *Если $M = G/U$ есть С-пространство, то отображение* $\mathrm{Hom}(U, \mathbf{C}^*) \to H^1(M, \mathcal{O}^*)$, *действующее по формуле* $\lambda \to E(\lambda)$, *является биекцией.*

Если $M = G/U$ — кэлерово С-пространство, то существует максимальная разрешимая подгруппа $U_f \subset G$, содержащаяся в U.

Определение 10.1.8. Максимальная комплексная разрешимая подгруппа в G называется *борелевской*. Подгруппа, содержащая борелевскую подгруппу, называется *параболической*.

Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$, а Π — система простых корней. Каждый корень может быть записан в виде $\varphi = \sum_{\pi \in \Pi} n_\varphi(\pi) \cdot \pi$. Положим для $\Phi \subset \Pi$

$$\Phi^r = \{\varphi \in \Delta \mid n_\varphi(\pi) = 0 \text{ для всех } \pi \in \Pi \backslash \Phi\},$$
$$\Phi^u = \{\varphi \in \Delta \mid n_\varphi(\pi) > 0 \text{ для некоторого } \pi \in \Pi \backslash \Phi\}.$$

Определим подалгебры

$$\mathfrak{p}^r_\Phi = \mathfrak{h} + \sum_{\varphi \in \Phi^r} \mathfrak{g}_\varphi \text{ и } \mathfrak{p}^u = \sum_{\varphi \in \Phi^u} \mathfrak{g}_\varphi.$$

Наконец, положим $\mathfrak{p}_\Phi = \mathfrak{p}^r_\Phi + \mathfrak{p}^u_\Phi$.

Определение 10.1.9. Подалгебра $\mathfrak{p}_\Phi$ называется *параболической подалгеброй*, ассоциированной с данными $\mathfrak{h}$, Π и Φ.

Определение 10.1.10. Если Φ пусто, то $\mathfrak{p}_\Phi = \mathfrak{h} + \sum_{\varphi > 0} \mathfrak{g}_\varphi$ называется *борелевской подалгеброй* в $\mathfrak{g}$, ассоциированной с $\mathfrak{h}$, Π.

Перечислим несколько свойств параболических групп и алгебр Ли.

Теорема 10.1.11. *Комплексная подгруппа P в G является параболической тогда и только тогда, когда ее алгебра Ли $\mathfrak{p}$ — параболическая подалгебра в $\mathfrak{g}$. Пространство G/P компактно тогда и только тогда, когда P — параболическая подгруппа.*

Взглянем на ситуацию с точки зрения теории алгебр Ли. Пусть $(X, Y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y)$ — форма Киллинга — Картана в $\mathfrak{g}$. Мы можем с ее помощью отождествить $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$. Пусть K — максимальная компактная подгруппа в G с алгеброй Ли $\mathfrak{k}$. Если определить пространство $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid (X, Y) = 0$ для всех $Y \in \mathfrak{k}\}$, то $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ и справедливы соотношения $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$.

Определение 10.1.12. Пусть $\mathfrak{k}$ содержит картановскую подалгебру $\mathfrak{h}$. Корень α называется *компактным* (соотв. некомпактным), если $\mathfrak{g}_\alpha$ лежит в $\mathfrak{k}$ (соотв. в $\mathfrak{p}$). Пусть $\Delta_\mathfrak{k}$ (соотв. $\Delta_\mathfrak{p}$) — множество компактных (соотв. некомпактных) корней. Тогда $\Delta = \Delta_\mathfrak{k} \cup \Delta_\mathfrak{p}$. Как и прежде, мы обозначим через h'_α элемент из $\mathfrak{h}$, для которого $(X, h'_\alpha) = \alpha(X)$ при всех $X \in \mathfrak{h}$. Тогда мы можем выбрать базис Вейля $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ $(\alpha \in \Delta)$, обладающий такими свойствами:

(i) $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h'_\alpha$;

(ii) $[e_\alpha, e_\beta] = 0$, если $\alpha + \beta \neq 0$ и $\alpha + \beta \notin \Delta$;

(iii) $[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta}$, если $\alpha + \beta \in \Delta$;

(iv) $\overline{e_\alpha} = \varepsilon_\alpha e_{-\alpha}$,

где для $X \in \mathfrak{g}$ $\overline{X}$ означает комплексное сопряжение относительно вещественной формы $\mathfrak{g}_0$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Здесь $\varepsilon_\alpha = -1$, если $\alpha \in \Delta_\mathfrak{k}$, и $\varepsilon_\alpha = 1$, если $\alpha \in \Delta_\mathfrak{p}$. Обозначим через $\{\omega^\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ набор левоинвариантных 1-форм на G, дуальный к базису $\{e_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$.

Определение 10.1.13. Элемент $X \in \mathfrak{g}_0$ называется *эллиптическим*, если $\operatorname{ad} X$ — полупростой оператор и централизатор X в G компактен.

Нас интересуют G-орбиты в $\mathfrak{g}_0$, состоящие из эллиптических элементов. Вначале дадим характеризацию эллиптических элементов.

Теорема 10.1.14. *Пусть $\lambda \in \mathfrak{h}_0$ — эллиптический элемент. Положим $\Phi_\lambda = \{\alpha \in \Delta^+ \mid (\lambda, \alpha) = 0\}$.* Тогда

(i) $\Phi_\lambda \subset \Delta_\mathfrak{k}$;

(ii) $\exp(i\lambda)$ *содержится в k-мерном торе $S_\lambda \subset H$, где $k = \operatorname{rank}(G) - \operatorname{card}(\Phi_\lambda)$*;

(iii) $G(\lambda)$ *совпадает с централизатором тора S_λ в G*;

(iv) *пусть* $\Delta_u = \{\alpha \in \Delta \mid \pm\alpha \in \Phi_\lambda\}$; *тогда алгебра Ли группы* $G(\lambda)$ *имеет вид* $\mathfrak{g}(\lambda) = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_u} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{h}$;

(v) *множество* $\Delta^+ \setminus \Phi_\lambda$ *замкнуто относительно сложения: если* $\alpha, \beta \in \Delta^+ \setminus \Phi_\lambda$ *и* $\alpha + \beta \in \Delta$, *то* $\alpha + \beta \in \Delta^+ \setminus \Phi_\lambda$.

Пусть $\mathcal{O}(\lambda)$ — орбита точки λ, т. е. $\mathcal{O}(\lambda) = G/G(\lambda) = G/U$. Отметим, что G-инвариантные тензорные поля на $\mathcal{O}(\lambda)$ соответствуют $\mathrm{Ad}(G(\lambda))$-инвариантным тензорам на $T_0 = \mathfrak{g}_0/\mathfrak{g}(\lambda)_0$. Определим комплексную структуру на T_0, полагая

$$T^{\pm} = \bigoplus_{\pm\alpha \in \Delta^+ \setminus \Phi_\lambda} \mathfrak{g}_\alpha$$

и $JX = \pm iX$ для $X \in T^{\pm}$. Поскольку J коммутирует с сопряжением $X \to \bar{X}$, мы видим, что J определяет комплексную структуру на T_0. Проверяя, что J есть $\mathrm{Ad}(G(\lambda))$-инвариантный оператор на T_0, мы получаем комплексную структуру на касательном расслоении $T\mathcal{O}(\lambda)$.

Обобщая доказательство теоремы 9.2.6, получаем следующий результат.

Теорема 10.1.15. *Симплектическая форма на* $\mathcal{O}(\lambda)$ *соответствует 2-форме* Ω *на* $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{g}(\lambda)_0$, *где*

$$\Omega = \frac{i}{2\pi} \sum_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{k}} \setminus \Phi_\lambda} (\lambda, \alpha)\, \omega^\alpha \wedge \bar{\omega}^\alpha - \frac{i}{2\pi} \sum_{\Delta^+ \setminus \Delta_{\mathfrak{k}}} (\lambda, \alpha)\, \omega^\alpha \wedge \bar{\omega}^\alpha.$$

Мы хотим теперь показать, что эта форма является формой кривизны для расслоения $E(\lambda) \to \mathcal{O}(\lambda)$. По теореме 11.1.2 в этом расслоении есть каноническая связность и соответствующий ковариантный дифференциал D: $A^{p,q}(E(\lambda)) \to A^{p+1,q}(E(\lambda)) + A^{p,q+1}(E(\lambda))$, согласованный с эрмитовой метрикой, т. е. $d(f, f') = (Df, f') + (f, Df')$, где f, f' — сечения $E(\lambda)$.

Кривизна Θ является $\mathrm{Hom}(E(\lambda), E(\lambda))$-значной $(1,1)$-формой, которая, как мы увидим, связана с симплектической структурой.

Рассмотрим главное расслоение $K \to G^u \to G^u/K$. Имеется $\mathrm{Ad}(K)$-инвариантное расщепление $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$. Если $\{a_1, \ldots, a_m\}$ — такой базис в $\mathfrak{g}_0$, что $\{a_1, \ldots, a_r\}$ — базис в $\mathfrak{k}_0$, а $\{a_{r+1}, \ldots, a_m\}$ — базис в $\mathfrak{p}_0$, и если $\varphi^1, \ldots, \varphi^m$ — дуальный базис левоинвариантных форм на G, то $\vartheta = \sum_{j=1}^{r} a_j \otimes \varphi^j$ определяет G-инвариантную $\mathfrak{k}_0$-значную дифференциальную 1-форму на G. Тем самым ϑ задает связность с формой кривизны

$\Theta = d\vartheta + (1/2)\,[\vartheta, \vartheta]$.

Теорема 10.1.16. $\Theta = (-1/2) \sum\limits_{i,j>r} [a_i, a_j] \otimes \varphi^i \wedge \varphi^j$.

Доказательство. Поскольку $d\vartheta = \sum\limits_{j=1}^{r} a_j \otimes d\varphi^j$ и $[\vartheta, \vartheta] = \sum\limits_{i,j=1}^{r} [a_i, a_j] \otimes \varphi^i \wedge \varphi^j$, мы получаем $d\vartheta + (1/2)\,[\vartheta, \vartheta] = (-1/2) \sum\limits_{i,j>r} c_{ij}^k a_k \otimes \varphi^i \wedge \varphi^j$, где c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в базисе $\{a_i\}$: $[a_i, a_j] = \sum c_{ij}^k a_k$.

Перенося этот результат на комплексную оболочку, получаем $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} + \sum\limits_{\pm\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$, $\mathfrak{p} = \sum\limits_{\pm\beta \in \Delta^+ \setminus \Phi} \mathfrak{g}_\beta$, где Φ — множество положительных корней для $\mathfrak{k}$. Поскольку $[e_\alpha, e_\beta]_{\mathfrak{k}} = 0$ для $\alpha, \beta \in \Delta^+ \setminus \Phi$, справедлива

Теорема 10.1.17. *Пусть $M = G/B$ — кэлерово С-пространство. Тогда естественной связностью в расслоении $B \to G \to M$ является*

$$\Theta_M = \sum_{\alpha, \beta \in \Delta^+ \setminus \Phi} [e_\alpha, \bar{e}_{-\beta}] \otimes \omega^\alpha \wedge \bar{\omega}^\beta.$$

Проверяя, что $\omega^{-\alpha} = -\overline{\omega^\alpha}$ для $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{k}}$ и $\omega^{-\beta} = \bar{\omega}^\beta$ для $\beta \in \Delta^+ \setminus \Delta_{\mathfrak{k}}$, мы используем тот факт, что $[e_\alpha, e_{-\beta}]_{\mathfrak{p}} = 0$ для некомпактного корня $\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_{\mathfrak{k}}$ и компактного положительного корня $\beta \in \Delta_{\mathfrak{k}} \setminus \Phi$:

$$\Theta = \sum_{\alpha, \beta \in \Delta_{\mathfrak{k}}^+ \setminus \Phi} [e_\alpha, e_\beta]_{\mathfrak{p}} \otimes \omega^\alpha \wedge \bar{\omega}^\beta - \sum_{\alpha, \beta \in \Delta^+ \setminus \Delta_{\mathfrak{k}}} [e_\alpha, e_{-\beta}] \otimes \omega^\alpha \wedge \bar{\omega}^\beta.$$

Связность ϑ индуцирует связность $\lambda(\vartheta)$ в ассоциированном расслоении $E(\lambda)$. Если f — сечение $E(\lambda)$, то дифференциал, соответствующий этой связности, дается равенством

$$Df = \sum_{j=r+1}^{m} a_j f \otimes \varphi^j.$$

Теорема 10.1.18. *Дифференциал D согласован с эрмитовой метрикой на $E(\lambda)$.*

Доказательство.

$Df = df + \lambda(\vartheta) f = df + \sum \lambda(a_j) f \otimes \varphi^j = df - \sum a_j f \otimes \varphi^j$

и ${}^t\lambda(\bar{\vartheta}) = -\lambda(\vartheta)$, откуда

$$(Df, f') + (f, Df') = (df, f') + (f, df') + (\lambda(\vartheta) f, f') + (f, \lambda(\vartheta) f') = d(f, f').$$

Теорема 10.1.19. *Кривизной индуцированной связности является форма*

$$\Theta_M(\lambda) = \sum_{\alpha, \beta \in \Delta_{\mathfrak{k}} \setminus \Phi} \lambda([e_\alpha, e_{-\beta}]) \otimes \omega^\alpha \wedge \bar{\omega}^\beta - \\ - \sum_{\alpha, \beta \in \Delta^+ \setminus \Phi} \lambda([e_\alpha, e_{-\beta}]_{\mathfrak{p}}) \otimes \omega^\alpha \wedge \bar{\omega}^\beta.$$

Теорема 10.1.20. *Симплектическая форма на $\mathcal{O}(\lambda)$ совпадает с формой кривизны связности, индуцированной естественной связностью на расслоении $K \to G^u \to G^u/K$ с помощью представления $\lambda \in \Lambda \subset \mathfrak{h}^*$.*

Следствие 10.1.21. *Если $M = G^u/K$ есть С-пространство и $E(\lambda) \to M$ — однородное векторное расслоение, определяемое с помощью унитарного представления λ группы K в пространстве E, то связность в $E(\lambda)$, индуцированная естественной связностью в $K \to G^u \to G^u/K$, имеет вид*

$$\Theta_{G^u/K} = \sum_{\alpha, \beta} \lambda([e_\alpha, e_{-\beta}]) \otimes \omega^\alpha \wedge \bar{\omega}^\beta.$$

Теорема 10.1.22 (Борель — Вейль — Ботт). *Пусть $M = G/U$ — кэлерово С-пространство и (ρ, E) — неприводимое представление U. Будем рассматривать (ρ, E) как представление $V^c = V(S)H(S)$ со старшим весом λ. Тогда*

(i) *если $(\lambda + \delta)$ — сингулярный вес, то $H^p(M, \mathcal{O}(E(\lambda))) = 0$ для всех $p \geqslant 0$;*

(ii) *если $(\lambda + \delta)$ — регулярный вес и $\operatorname{ind}(\lambda + \delta) = p$, то $H^q(M, \mathcal{O}(E(\lambda))) = 0$ для $q \neq p$, а $H_p(M, \mathcal{O}(E(\lambda)))$ — неприводимый G-модуль со старшим весом $\lambda^{(p)} = \sigma_p(\lambda + \delta) - \delta$, где σ_p — единственный элемент W, для которого $\sigma_p(\lambda + \delta) \in D$.*

Доказательство. Мы докажем только часть теоремы, принадлежащую А. Борелю и А. Вейлю. Пусть $M = G/U = G^u/V$ — кэлерово C-пространство и ρ: $V \to GL(E(p))$ — неприводимое представление.

Теорема 10.1.23. *Если $H^0(M, \mathcal{O}(E(\rho))) \neq 0$, то $\rho \in D$ и $H^0(\cdot)$ — неприводимый G-модуль со старшим весом ρ.*

Доказательство. Пусть $S = H^0(M, \mathcal{O}(E(\rho)))$. Поскольку G действует на $E(\rho)$ голоморфно, S является конечномерным G-модулем. Пусть F_{m_0} — ядро оператора ограничения $S \xrightarrow{r_{m_0}} E_{m_0}(\rho)$. Поскольку $Um_0 = m_0$, мы видим, что F_{m_0} является U-подмодулем в S. Факторпространство S/F_{m_0} отождествляется с U-подмодулем в $E_{m_0}(\rho)$. Поскольку $S/F_{m_0} \neq 0$ и ρ неприводимо, $r_{m_0}(S) = E_{m_0}(\rho)$. Теперь воспользуемся формулой Фробениуса.

Теорема 10.1.24. *Для неприводимого* $\mathfrak{g}$-*модуля* W^λ $\dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{u}}(W^\lambda, E(\rho)) = \delta^\lambda_\rho$.

Доказательство. Если f — ненулевой элемент из $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{u}}(W^\lambda, E(\rho))$, то f лежит также в $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{v}}(W^\lambda, E(\rho))$ и $f(W^\lambda)$ является $\mathfrak{v}$-подмодулем в $E(\rho)$. В силу неприводимости $f(W^\lambda) = E(\rho)$. Остальное получается прямым вычислением.

Теорема 10.1.25. *Если* $\rho \in D$, *то* $H^0(M, \mathcal{O}(E(\rho)))$ — *неприводимый* G-*модуль* W^ρ *со старшим весом* ρ *и* $H^q(M, \mathcal{O}(E(\rho))) = 0$ *при* $q > 0$.

Доказательство. По теореме Фробениуса существует ненулевой элемент $f \in \mathrm{Hom}_U(W^\rho, E(\rho))$. Если $W(\rho) = W^\rho \times M$ и π: $W(\rho) \to E(\rho)$ определено равенством $\pi(w, gU) = [g, g^{-1}f(w)]$, то π будет отображением расслоений и $\pi(S(W(\rho)))$ — ненулевое подпространство в $S(E(\rho))$. (Здесь S означает пространство сечений.) Теперь первое утверждение следует из теоремы 10.1.23. Второе вытекает из «теоремы зануления» Гриффитса.

10.2. Формула Кириллова для характеров

Мы переходим теперь к обобщению формулы Кириллова для характеров на случай произвольного C-пространства. Определим поле $\tilde{X} \in S(T\mathcal{O})$ формулой $(\tilde{X}\varphi)(f) = (d/dt)\varphi(\exp(-t\, ad\, X)f) = \langle d\varphi, [f, X]\rangle$, где $\varphi \in A(\mathcal{O})$. Таким образом, мы отображаем $\mathfrak{g}_0$ на $T_f\mathcal{O}$, переводя X в $\tilde{X} = [f, X]$. Определим, как и выше, $h_X \in A(\mathfrak{g}_0^*)$, полагая $h_X(f) = \langle f, X\rangle$. Тогда $(Yh_X)(f) = \langle X, [f, Y]\rangle$.

Теорема 10.2.1. *Критические точки* h_X *в* $\mathcal{O}$ — *это те* f, *для которых* $[f, X] = 0$.

Доказательство. Если $[f, X] = 0$, то для всех $Y \in \mathfrak{g}$ имеем $(\tilde{Y}h_X)(f) = (X, [f, Y]) = ([f, X], Y) = 0$. Значит, $dh_X(f) = 0$.

Пусть $\mathfrak{g}'$ означает множество регулярных элементов в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}_0' = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{g}'$.

Теорема 10.2.2. *Для* $X \in \mathfrak{g}'$ *функция* h_X *является функцией Морса на* $\mathcal{O}(\lambda)$. *Для* $X \in \mathfrak{h}_0'$ *индекс функции* $-h_X$ *дается равенством*

$$\mathrm{ind}_\lambda(-h_X) = 2\,\mathrm{Card}\,\{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{k}} \setminus \Phi_\lambda \mid (\lambda, \alpha) < 0\} + \\ + 2\,\mathrm{Card}\,\{\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_{\mathfrak{k}} \mid (\lambda, \alpha) > 0\}.$$

Пусть $\beta = \Omega^n/n!$. *Интегралом Кириллова* называется выражение

$$J(X) = \int_{\mathcal{O}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\langle f, X\rangle\right)\beta.$$

Согласно симплектическому варианту леммы Морса, экспонента локально является гауссовой и имеет место

Теорема 10.2.3. $\dfrac{(-1)^{k(\lambda)}e^{(i/\hbar)(\lambda, X)}}{\prod\limits_{\alpha\in\Delta^+\setminus\Phi} i/\hbar\,(\alpha, X)} =$

$$= \pi^{-n}e^{(i/\hbar)(\lambda, X)}\prod_{\alpha\in\Delta^+\setminus\Phi}|(\lambda, \alpha)|\frac{(2\pi\hbar)^n}{|\det_R\mathscr{H}_\lambda|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn}(-\mathscr{H}_\alpha)\right\},$$

где

$$\mathscr{H}_\lambda(Z, Z) = -2\sum_{\alpha\in\Delta_{\mathfrak{k}}\setminus\Phi}(\lambda,\alpha)(X, \alpha)Z_\alpha\bar{Z}_\alpha + {}$$
$$+ 2\sum_{\alpha\in\Delta^+\setminus\Delta_{\mathfrak{k}}}(\lambda, \alpha)(X, \alpha)Z_\alpha\bar{Z}_\alpha.$$

Доказательство. Поскольку

$$\det{}_R\mathscr{H}_\lambda = 2^{2n}\prod_{\alpha\in\Delta^+\setminus\Phi}|(\lambda, \alpha)(X, \alpha)|$$

и

$$\exp\left(-\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn}\mathscr{H}_\lambda\right) = (-1)^{n+(1/2)\operatorname{ind}_\lambda({}^hX)} =$$
$$= (-1)^{n+k(\lambda)}\prod_{\alpha\in\Delta^+\setminus\Phi}\varepsilon(\alpha, X),$$

где

$$\varepsilon(\alpha, \cdot) = \begin{cases} 1, & \text{если } (\alpha, \cdot) > 0, \\ -1, & \text{если } (\alpha, \cdot) < 0, \end{cases}$$

мы получаем требуемый результат.

Чтобы завершить вычисление $J(X)$, изучим вначале асимптотику $J_h(X)$ при $\hbar\to 0$.

Теорема 10.2.4.

$$J_h(X) = (-1)^{k(\lambda)}\sum\det(w)\exp(i(w\lambda, X))/\prod_{\alpha\in\Delta^+}(i/\hbar)(\alpha, X) + {}$$
$$+ \text{быстро убывающие члены (при } \hbar\to 0).$$

Теорема 10.2.5.

$$J_h(X) = (-1)^{k(\lambda)}\sum_{w\in W/W(U_\lambda)}\frac{e^{(i/\hbar)(w\lambda, X)}}{\prod\limits_{\alpha\in\Delta^+\setminus\Phi}(i/\hbar)(w\alpha, X)}$$

для $\lambda\in\mathfrak{h}_0$ *и* $\lambda\perp\Phi_\lambda\subset\Delta_{\mathfrak{k}}$.

10.3. Геометрия R-пространств

Изучение C-пространств содержит значительную часть физики. Теперь мы переходим к изучению пространств, комплексификации которых являются C-пространствами. Они называются R-пространствами. Примеры R-пространств:

(1) эрмитовы симметрические пространства компактного типа;
(2) грассмановы многообразия $O(p+q)/O(p)\times O(q)$;
(3) $Sp(p+q)/Sp(p)\times Sp(q)$;
(4) $SO(m)$, $SU(m)$, $Sp(m)$;
(5) $U(2m)/Sp(m)$ и $U(m)/O(m)$;
(6) октавная проективная плоскость (плоскость Кэли);
(7) вещественные квадрики $Q_{n,v}(R)$ (см. упр. 10.9);
(8) штифелевы многообразия $V_{p+q,\,p}$.

В своей простейшей форме R-пространства появляются как примеры орбит, о которых мы говорили во введении. А именно пусть G — вещественная связная полупростая группа Ли с конечным центром и $G=KAN$ — ее разложение Ивасавы. Как обычно, мы обозначаем через $\langle\ ,\ \rangle$ форму Киллинга на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Подгруппа A является максимальным расщепимым тором в G, а через $\mathfrak{a}$ обозначается ее алгебра Ли. Система корней пары $(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ обозначается через Δ, положительные корни образуют подмножество Δ^+ и соответствующие корневые векторы порождают подалгебру $\mathfrak{n}$ — алгебру группы Ли N. Если через $\mathfrak{m}$ обозначить централизатор $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{k}$, то $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{n}$ — параболическая подалгебра.

Как и в разделе 0.9, нас интересуют орбиты присоединенного действия K на $\mathfrak{s}$ — ортогональном дополнении $\mathfrak{k}$ в $\mathfrak{g}$ относительно формы Киллинга. В дальнейшем K_X означает централизатор X в K.

Определение 10.3.1. *R-пространством* называется однородное многообразие вида K/K_H, где $H\in\mathfrak{s}$.

Легко видеть, что отображение $k\to \operatorname{Ad}k\cdot H$ задает диффеоморфизм R-пространства K/K_H на $\operatorname{Ad}K$-орбиту точки H в $\mathfrak{s}$. Если ввести обозначение $H^k=\operatorname{Ad}k\cdot H$, то интересующая нас функция запишется в виде $f_{X,H}(k)=\langle X, H^k\rangle$, где $X\in\mathfrak{s}$ (как функция на орбите M она является сферической функцией, ассоциированной с представлением $(\operatorname{Ad},\mathfrak{s})$ группы K; это — в точности функция высоты на M в направлении X, т. е. $f_X(Y)=\langle Y,X\rangle$ для $Y\in M$).

Проверяя, что

$$\frac{d}{dt}f_{X,H}(k\exp tY)\big|_{t=0}=\langle X,\ [Y,\ H]^k\rangle=-\langle [X,\ H^k],\ Y^k\rangle$$

для $Y\in\mathfrak{k}$, мы видим, что справедлива

Теорема 10.3.2. *Точка k является критической для $f_{X,H}$, если и только если* $[X, H^k]=0$.

Предполагая (без ограничения общности), что X и H лежат в $\mathfrak{a}$, можно показать, что множеством критических точек функции $f_{X,H}$ является $K_{X,H}=\bigcup_{w\in W} K_X w K_H$, где W — группа Вейля пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Гессиан функции $f_{X,H}$ в критической точке легко вычисляется. А именно если $k=ux_w v$, где $u\in K_X$, x_w — представитель $w\in W$ в K, а $v\in K_H$, то для любого $Y\in\mathfrak{k}$ мы имеем

$$\frac{d^2}{dt^2} f_{X,H}(k \exp fY) = -\sum_{\alpha\in\Delta^+} \alpha(H)(w\cdot\alpha)(X)\|F_\alpha(Y)\|^2,$$

где F_α — ортогональная проекция в $\mathfrak{k}$ на $\mathfrak{k}\cap(\mathfrak{g}_\alpha+\mathfrak{g}_{-\alpha})$.

Если S — система простых корней в Δ^+, то для любого подмножества $\Phi\subset S$ мы обозначим через $\Delta^+(\Phi)$ множество корней, которые являются неотрицательными целочисленными комбинациями корней из Φ. Пусть $\mathrm{Cl}(\mathfrak{a}^+)$ — замыкание камеры Вейля $\mathfrak{a}^+$. Элемент $H\in\mathrm{Cl}(\mathfrak{a}^+)$ можно выбрать так, чтобы Φ было в точности подмножеством корней в S, ортогональных к H. Тогда $\Delta^+\setminus\Delta^+(\Phi)$ — множество тех корней α, для которых $\alpha(H)>0$. Пусть W_H означает подгруппу в W, порожденную отражениями в гиперплоскостях, проходящих через H. Положим $\mathfrak{p}_\Phi=\mathfrak{g}(H)=\mathfrak{m}+\mathfrak{a}+\sum_{\alpha(H)>0}\mathfrak{g}_{\alpha,n}$, $P_\Phi=G(H)$ — нормализатор $\mathfrak{p}_\Phi$ в G. Поскольку $\mathfrak{p}_\Phi$ содержит $\mathfrak{p}$, это параболическая подалгебра, а P_Φ — параболическая подгруппа в G. Мы оставляем читателю проверку того, что комплексификации пространств $G/G(H)$ являются C-пространствами. Связь между R-пространствами и пространствами $G/G(H)$ дает

Теорема 10.3.3. *Пространства K/K_H и $G/G(H)$ диффеоморфны.*

Рассмотрим теперь геодезическую на K/K_H вида $\gamma(t)=\exp(tX)$ для $X\in\mathfrak{g}$. Вектор скорости для $\gamma(t)$ обозначим через v_X. Введем обозначение $\bar{k}=kK_H$ для $k\in K$, и пусть $E_\mathfrak{k}$ — проекция $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{k}$ параллельно $\mathfrak{a}+\mathfrak{n}$.

Теорема 10.3.4. $v_X(\bar{k})=E_\mathfrak{k}(X^{k^{-1}}) \bmod \mathfrak{k}_X$.

Отображение ζ: $Y+\vartheta Y\to Y-\vartheta Y$ для $Y\in\mathfrak{n}$ является линейным изоморфизмом $\mathfrak{k}/\mathfrak{m}$ на $\mathfrak{s}/\mathfrak{a}$. Продолжим его до отображения $\mathfrak{k}$ в $\mathfrak{s}$, считая, что ζ обращается в нуль на $\mathfrak{m}$. Зададим билинейную форму b_H на $\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}$ формулой

$$b_H(Z, Z')=\langle H, [z, \zeta(Z')]\rangle \text{ для } Z,\ Z'\in\mathfrak{k}.$$

Читатель может проверить, что b_H — симметрическая неотрицательно определенная билинейная форма. Кроме того,

$$b_H(Z, Z') = \sum_{\substack{\alpha(H)>0 \\ \alpha\in\Delta}} \alpha(H)(F_a(Z), F_a(Z')).$$

Ядром формы b_H является $\mathfrak{k}_H$, так что b_H задает скалярное произведение на $\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_H$.

Теорема 10.3.5. (1) *Форма b_H определяет K-инвариантную риманову метрику β_H на K/K_H.*

(2) *Для любого $X \in \mathfrak{a}$ вектор v_X совпадает с градиентом функции $f_{X,H}$, рассматриваемой как функция на K/K_H, т. е. $df_{X,H} = \beta_H(\cdot, v_X)$.*

Тем самым динамика геодезических на R-пространствах описывается следующим образом.

Теорема 10.3.6. *Пусть $X \in \mathfrak{a}$, $H \in \mathrm{Cl}(\mathfrak{a}^+)$; тогда $f_{X,H}$ имеет изолированные критические точки на K/K_H, если выполняется условие*

$$\alpha(X) = 0 \Rightarrow (w^{-1}\alpha)(H) = 0 \text{ для } \alpha \in \Delta,\ w \in W. \qquad (*)$$

Если это условие выполнено, то множество критических точек $f_{X,H}$ (или, что то же самое, множество нулей v_X) совпадает с $WK_H = W/W_H$. Для каждого $w \in W$ поток $\gamma(t)$ поля v_X на K/K_H гиперболичен в точке wK_H. Устойчивое подмногообразие задается формулой

$$S_w^+ = \left\{x \in K/K_H \mid \lim_{t\to+\infty} \gamma_t(x) = wK_H\right\}.$$

Если выполнено условие (*), то $f_{X,H}$ — функция Морса на K/K_H и число ее критических точек равно $|W/W_H|$. Можно показать, что $|W/W_H|$ совпадает с суммой чисел Бетти многообразия K/K_H для гомологий $\mathrm{mod}\, 2$. Однако неравенство Морса утверждает, что число критических точек любой функции Морса не меньше суммы чисел Бетти для гомологий с коэффициентами в произвольном поле. Таким образом, $f_{X,H}$ имеет минимальное возможное число критических точек. Это свойство характеризует вложение $k \to \mathrm{Ad}\, k \cdot H$ многообразия K/K_H в $\mathfrak{s}$.

По поводу теории гиперболических потоков и устойчивых подмногообразий читатель отсылается к книге Абрахама и Марсдена [A 2].

10.4. Разложение на клетки Шуберта

Разложения на клетки Шуберта в последнее время возникли в разных задачах прикладной математики. Мы опишем кратко связь этих разложений с теорией C-пространств и R-пространств. Связанная с этим физика еще не вполне изучена.

Начнем с классического примера. Пусть $G = SL(n+1)$, B — подгруппа треугольных матриц и T — подгруппа диагональных матриц. Таким образом, мы имеем полупростую группу G с максимальным тором T и борелевской подгруппой B. Выберем параболическую подгруппу P, состоящую из матриц $g = (g_{ij})$, $0 \leqslant i, j \leqslant n$, для которых $g_{i0} = 0$ при $i > 0$. Пространство $P \backslash G$ отождествляется с проективным пространством $P(V)$, где V — стандартное $(n+1)$-мерное пространство с координатами $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Правое действие группы G на V реализуется обычным матричным умножением, т. е. $(x_0, \ldots, x_n)(g_{ij}) = \left(\ldots, \sum_i x_i g_{ij}, \ldots\right)$. Подпространства V, состоящие из точек вида $(0, *, \ldots, *)$, $\ldots$, $(0, 0, \ldots, 0, *)$, инвариантны относительно B. Соответствующие подмногообразия в $P(V)$, задаваемые уравнениями $x_0 = 0$, $x_0 = x_1 = 0$, $\ldots$, $x_0 = x_1 = \ldots = x_{n-1} = 0$, называются *многообразиями Шуберта*. Это разложение обобщается на кэлеровы C-пространства следующим образом.

Пусть G — комплексная полупростая группа Ли ранга n, T — ее максимальный тор и $B \supset T$ — борелевская подгруппа. Пусть $W = N(T)/T$ — группа Вейля для G. Через R^+ обозначим множество положительных корней относительно B и положим $R^- = -R^+$. Будем писать $\alpha > 0$ (соотв. $\alpha < 0$), если $\alpha \in R^+$ (соотв. $\alpha \in R^-$). Обозначим через $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ систему простых корней. Для $\alpha \in R$ пусть s_α означает отражение в гиперплоскости, ортогональной α. Для краткости положим $s_i = s_{\alpha_i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Определение 10.4.1. *Длиной* элемента $w \in W$ относительно $s_1, \ldots, s_n$ называется

$$l(w) = \min\{k \mid w = s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_k}\}.$$

Если $w = s_{i_1} \ldots s_{i_k}$ и $k = l(w)$, то такое разложение w называется *приведенным*.

Теорема 10.4.2. *В W существует единственный элемент w_0 максимальной длины, так что $l(w_0) > l(w)$ для всех $w \neq w_0$.*

Элемент w_0 обладает свойством $w_0(\alpha) < 0$ для $\alpha > 0$, т. е. $w_0(R^+) = R^-$. Читатель может проверить, что $l(ww_0) = l(w_0) - l(w)$ для всех $w \in W$.

Как мы уже обсуждали выше, всякая параболическая подгруппа P, содержащая B, ассоциирована с однозначно определенным подмножеством $S_P \subset S$. Обратно, каждое подмножество в S определяет параболическую подгруппу, содержащую B. В частности, $S_B = \varnothing$, $S_G = S$. Пусть R_P^+ означает множество положительных корней, порожденное простыми корнями из S_P и $R_P^- = -R_P^+$. Подгруппа в W, порожденная s_α, $\alpha \in S_P$, называется *группой Вейля* для P и обозначается через W_P. Для каждого простого корня $\alpha \in S$ параболическая подгруппа, ассоциированная с подмножеством $\{\alpha\}$, обозначается через P_α и называется *минимальной параболической подгруппой, ассоциированной с* α. Параболическая подгруппа, ассоциированная с $S \setminus \{\alpha\}$, обозначается через P'_α.

Определение 10.4.3. Для $w \in W$ положим $R_P(w) = \{\alpha > 0 \mid w^{-1}(\alpha) \in R^- \setminus R_P^-\}$ и $N_P(w) = \operatorname{Card} R_P(w)$.

Пусть (G, T, B, P, W) — такие же, как и выше. Для $w \in W$ пусть $n(w) \in N(T)$ — представитель класса w. Тогда двойной смежный класс $Bn(w)P$ в G зависит только от смежного класса wW_P в W (а не от w или $n(w)$). Положим $C_P(w) = Bn(w)P$ и назовем это множество *открытой клеткой Брюа в* G, соответствующей классу wW_P. Замыкание в смысле топологии Зарисского множества $C_P(w)$ в G обозначается через $X_P(w)$ и называется *замкнутой клеткой Брюа. Разложение Брюа* группы G относительно P имеет вид $G = \bigsqcup_{w \in W/W_P} C_P(w)$ (дизъюнктное объединение).

Пусть π: $G \to G/P$ означает естественную проекцию. Тогда для $w \in W$ назовем $\pi(C_P(w))$ *открытой клеткой Шуберта* в G/P, соответствующей $C_P(w)$. Если обозначить через $e_0 = \pi(P)$ начальную точку в G/P, то $\pi(C_P(w))$ будет в точности B-орбитой (на самом деле даже B^u-орбитой, где B^u — унипотентный радикал B) точки w_0. Клетки Шуберта дают клеточное разбиение пространства G/P, т. е. $G/P = \bigsqcup_{w \in W/W_P} \pi(C_P(w))$. Обозначим через $X_P(w)$ замыкание по Зарисскому клетки $\pi(C_P(w))$ в G/P.

Теорема 10.4.4. $\dim X_P(w) = N_P(w)$.

Следствие 10.4.5. $\dim X_B(w) = N_B(w) = l(w)$.

Читатель может проверить, что для элемента w_0 максимальной длины справедливы равенства $X_P(w_0) = G/P$ и $\dim G/B = l(w_0) = \operatorname{Card} R^+$. Открытая клетка $C_B(w_0)$ называется *большой клеткой*. Для всех $w \in W$ многообразие Шуберта $X_B(w_0 w)$ имеет коразмерность $l(w)$ в G/B.

Пример 10.4.6. Пусть $G = SL(n+1, C)$. Диаграмма Дынкина этой группы имеет вид

$$\underset{\alpha_1}{\circ}\text{———}\underset{\alpha_0}{\circ}\ \cdots\cdots\cdots\ \underset{\alpha_{n-1}}{\circ}\text{———}\underset{\alpha_n}{\circ}.$$

Число корней равно $n(n+1)$, а порядок группы Вейля равен $(n+1)!$. Приведенное разложение элемента $w_0 \in W$ выглядит так:

$$w_0 = s_n(s_{n-1}s_n) \ \ldots \ (s_i \ \ldots \ s_n) \ \ldots \ (s_1 \ \ldots \ s_n).$$

Здесь $l(w_0) = n(n+1)/2$. Параболическая подгруппа, упомянутая в первом примере этого раздела, — это $P = P'_{\alpha_1}$. Полупростая часть P изоморфна $SL(n)$. Поэтому W_P имеет элемент максимальной длины $w_{0P} = s_n(s_{n-1}s_n) \ \ldots \ (s_2 \ \ldots \ s_n)$, т. е. $w_0 = w_{0P}(s_1 \ \ldots \ s_n)$. Число клеток Шуберта в G/P равно $[W : W_P] = n+1$. Они нумеруются элементами $w_i = w_{0P}s_1 \ \ldots \ s_{n-i}$, $0 \leqslant i \leqslant n$.

Задачи

Упражнение 10.1. Для кэлерова C-пространства $M = G/U$, используя точную последовательность Атьи для главного расслоения $U \to G \to G/U$, показать, что существует вложение $f_{\mathrm{Ad}}(gU) = \mathrm{Ad}\, g(U)$ многообразия M в $G(n, m) = GL(n, \mathbf{C})/GL(n, m, C)$, где $G(n, m)$ —грассманиан $(n-m)$-мерных подпространств в $\mathfrak{g}$. Здесь $n = \dim G$, $m = \dim M$.

Упражнение 10.2. Пусть $M = G/U$ есть C-пространство с однородным векторным расслоением $E(\lambda)$ со слоем F. Определим гомоморфизм ν: $S = H^0(M, \mathcal{O}(E(\lambda))) - F$ формулой $\nu(s) = s(e)$, e — единица в G. Пусть F' — ядро ν. Показать, что $0 \to F' \to S \to F \to 0$ является точной последовательностью U-модулей. Выберем базис $\{x_1, \ldots, x_{n-m}, \ldots, x_n\}$ в S так, чтобы $\{x_1, \ldots, x_{n-m}\}$ порождали F'. Пусть T означает действие G на S: $(T(g)s)(g') = s(g^{-1}g')$. Определим отображение $f_\lambda(gU) = T(g)G(n, m, \mathbf{C})$, переводящее M в $G(n, m)$. Показать, что если $E(\lambda)$ — однородное расслоение над кэлеровым C-пространством, то f_λ задает вложение M в $CP(m)$. Когда f_λ бирегулярно? Когда размерность m достигает минимума? Разобрать случай $M = G(n, m)$.

Упражнение 10.3. Пусть G — связная полупростая группа Ли с вещественной алгеброй Ли $\mathfrak{g}_0$. Показать, что каждый полупростой элемент в $\mathfrak{g}_0$ обладает допустимой поляризацией. (Указание. Вложить полупростой элемент X в картановскую подалгебру $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{g}_0$. Представить его в виде $X = X_1 + X_2$, где собственные значения $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0} X_1$ (соотв. $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0} X_2$) чисто мнимы (соотв. вещественны). Пусть Δ — множество корней пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Положим

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha(X)=0} \mathfrak{g}_\alpha + \sum_{\alpha(X_2)>0} \mathfrak{g}_\alpha + \sum_{\substack{\alpha(X_2)=0 \\ i\alpha(X_1)>0}} \mathfrak{g}_\alpha;$$

показать, что $\mathfrak{p}$ — искомая поляризация.)

Упражнение 10.4. Пусть G — редуктивная группа Ли и $f \in \mathfrak{g}$ — нильпотентный элемент (т. е. оператор $\operatorname{ad} f\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ нильпотентен). Пусть $\mathfrak{q}$ — комплексная поляризация f и P — параболическая подгруппа с алгеброй Ли $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap \mathfrak{g}$. Показать, что орбита $\operatorname{Ad} G \cdot f$ эквивариантно диффеоморфна открытой G-орбите в касательном расслоении $T(G/P)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{q}$ инвариантна относительно $\operatorname{Ad} G(f)$.

Упражнение 10.5. Использовать результат предыдущего упражнения в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_l + \mathfrak{c}$, где $\mathfrak{g}_l = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{so}(n+1)$, а $f \in \mathfrak{g}$ — регулярный нильпотентный элемент. Показать, что в этом случае $\operatorname{Ad} P \cdot f = \mathfrak{p}^\perp \setminus \{0\}$. Так как $T_f^*(G/P) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^* = \mathfrak{p}^\perp$, вывести отсюда, что открытая G-орбита f совпадает с $T^*(G/P) \setminus \{0\}$.

Упражнение 10.6. Показать, что в примере 10.4.6

$$G = X_B(w_0) \supset X_B(w_1) \supset \ldots \supset X_B(w_n) = P;$$

показать, что $X_B(w_i)$ имеет коразмерность 1 в $X_B(w_{i-1})$ и что $X_B(w_i)$ являются прообразами относительно π клеток Шуберта в $P \setminus G$.

Упражнение 10.7. Показать, что комплексное многообразие $V_w = \pi(C_P(w))$ является комплексной $N_P(w)$-клеткой. Поэтому каждое кэлерово C-пространство допускает аналитическое клеточное разложение. Показать, что V_w является CW-комплексом и что оно локально замкнуто в G/P и в топологии Зарисского и в обычной хаусдорфовой топологии. Пусть $\bar{V}_w$ означает фундаментальный цикл многообразия $X_P(w)$. Показать, что $\{\bar{V}_w\}$ образуют базис целочисленных гомологий G/P, причем $\bar{V}_w \in H_{N_P(w)}(G/P)$. Показать, что $\bar{V}_w \to \bar{V}_{w_0 w}$ задает двойственность Пуанкаре на G/P, т. е. индексы пересечений подчиняются соотношениям $\bar{V}_w \cdot \bar{V}_{w_0 w} = 1$, $\bar{V}_w \cdot \bar{V}_{w_1} = 0$ для $w_1 \neq w_0 w$ с условием $\dim \bar{V}_w + \dim V_{w_1} = \dim G/P$.

Упражнение 10.8. Пусть G — неприводимая вещественная алгебраическая линейная группа и $G^{\mathbf{C}}$ — ее комплексификация — комплексная полупростая группа Ли. Подгруппа $U \subset G$ называется параболической, если ее комплексификация $U^{\mathbf{C}}$ — параболическая подгруппа в $G^{\mathbf{C}}$. Пространство $M = G/U$ называется R-пространством. Показать, что M допускает клеточное разбиение $M = \bigcup V_w$, где V_w гомеоморфно $\mathbf{R}^{N_P(w)}$. Пусть $\bar{V}_w$ означает замыкание V_w в M. Показать, что отображение $\bar{V}_w \to \bar{V}_{w_0 w}$ задает двойственность Пуанкаре по модулю 2 на M.

Упражнение 10.9. Вещественная квадрика $M = Q_{n,\,v}(\mathbf{R})$ определяется как совокупность тех $x \in RP(n-1)$ с однородными координатами x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, для которых

$$\sum_{i=1}^{v} x_i x_{n+1-i} + \sum_{k=1}^{v_0} x_{v+k}^2 = 0,$$

где $n = 2v + v_0$, $\dim M = n - 2$.

Пусть

$$A = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c|c} & & \begin{matrix} & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & \end{matrix} \\ \hline & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & \\ \hline \begin{matrix} & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & \end{matrix} & & \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} v \\ \\ v_0\,; \\ \\ v \end{array}$$

положим

$$G = \{g \in SL(n, R) \mid g^t A g = A\}, \quad K = \{g \in SO(n) \mid Ag = gA\},$$

$$U = \left\{ g \in G \mid g = \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda & * & * \\ \hline & * & * \\ \hline & & \lambda^{-1} \end{array}\right) \right\},$$

$$K^* = \left\{ k \in K \mid k = \left(\begin{array}{c|c|c} \varepsilon & & \\ \hline & * & \\ \hline & & \varepsilon \end{array}\right), \ \varepsilon = \pm 1 \right\}.$$

Показать, что $M = G/U = K/K^*$.

Определим отношение эквивалентности $\sim$ на $S^{v+v_0} \times S^{v-1}$, полагая $(x, y) \sim (-x, -y)$. Пусть $E_{n,\,v}$ означает факторпространство и $[x, y]$ — класс эквивалентности пары (x, y). Определим $p\colon E_{n,\,v} \to RP(v-1)$ формулой $p([x, y]) = (y)$. Тогда $E_{n,\,v}$ станет S^{v+v_0-1}-расслоением над $RP(v-1)$. Показать, что $E_{n,\,v}$ диффеоморфно M.

Показать, что разложение на клетки Шуберта имеет вид $V_i = RP(i-1) \setminus RP(i-2)$ для $1 \leqslant i \leqslant v$ при $v_0 \geqslant 0$, где

$RP(i) = \{(x) \in RP(n-1) \mid x_{i+2} = \ldots = x_n = 0\}$ для $1 \leqslant i \leqslant n-1$. (Ясно, что в этом случае $RP(i) \subset M$.)

Упражнение 10.10. Гладкая функция f на компактном многообразии M называется *хорошей функцией*, если $\operatorname{Ind}(f)(p) = f(p)$ для любой критической точки p. Показать, что если M есть R-пространство, то $f = f_{-\delta} + (1/2)\dim M$ — хорошая функция на M $\left(\text{здесь } \delta = (1/2)\sum_{\alpha>0} \alpha\right)$.

Упражнение 10.11. Пусть $M = G/K$ — кэлерово C-пространство с почти комплексной структурой J и симплектической формой Ω. Пусть U — унитарное неприводимое представление группы G в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Предположим, что существует непрерывный базис векторов $|z\rangle$ (в другой терминологии — *переполненная система*), для которого $\langle z | \psi \rangle = \psi(z)$ для всех $\psi \in \mathscr{H}$ и $z \in M$. Пусть $H(z, \bar{z}) = \langle z | \hat{H} | z \rangle / \langle z | z \rangle$ и $\rho(z, \bar{z}) = N\langle z | \hat{\rho} | z \rangle / \langle z | z \rangle$, где $\hat{\rho} = \exp(-\beta \hat{H})$ — матрица плотности для H. Показать, что $\operatorname{tr}(\hat{\rho}\hat{H}) = \int_M \rho(z, \bar{z})(H(z, \bar{z}) + (1/2)\Delta H(z, \bar{z}))\Omega^n$.

Показать, что $\operatorname{tr}(\hat{\rho}_{\mathrm{cl}}\hat{H}) = \int_M \rho(z, \bar{z}) H(z, \bar{z})\Omega^n$, где

$$\hat{\rho}_{\mathrm{cl}} = \int_M \rho(z, \bar{z}) \frac{|z\rangle\langle z|}{\langle z | z \rangle}\Omega^n.$$

Показать, что $\rho(\beta; z, \bar{z}) = \langle z | \exp(-\beta \hat{H}) | z \rangle / \langle z | z \rangle$ удовлетворяет уравнению $\partial\rho/\partial\beta = -H\rho + (1/2)J(x)\rho$, где $X = -dH^*$ (здесь $i_{dH^*}\Omega = dH$; полагая $g(X, Y) = \Omega(JX, Y)$, получаем $dH = i_{\operatorname{grad} H} g$ и $\operatorname{grad} H = -J(dH^*)$).

Глава 11 Геометрическое квантование

11.1. Геометрическое квантование комплексных многообразий

Определение 11.1.1. *Квантовым расслоением* над C-пространством (M, Ω) называется линейное расслоение $Q \to M$, определяемое следующим образом: (i) форма Ω имеет тип $(1, 1)$ и $\operatorname{sgn} \Omega(\bar{X}, X) = \varepsilon$ для всех ненулевых голоморфных векторных полей X; (ii) характеристический класс расслоения Q равен $q = [\Omega] + (\varepsilon/2) c_1(M) \in H^2(M, Z)$; (iii) $\operatorname{sgn} \Omega[a] \neq -\operatorname{sgn} q[a]$ для любого ненулевого $[a] \in H_2(M, \mathbf{R})$.

Для данного векторного расслоения E над M связность на E задается матричной 1-формой $\vartheta = \{\vartheta^\rho_\sigma\}$. Разлагая эту форму в сумму компонент типов $(1, 0)$ и $(0, 1)$, $\vartheta = \vartheta' + \vartheta''$, мы скажем, что ϑ — *комплексная связность*, если $\vartheta'' = 0$.

Теорема 11.1.2. *Если $E \to M$ — голоморфное векторное расслоение с эрмитовой метрикой, то существует комплексная связность ϑ, согласованная с метрикой, и кривизна этой связности Θ является формой типа* $(1, 1)$.

Теорема 11.1.3. *Пусть $M \to E$ — гладкое векторное расслоение со слоем $\mathbf{C}^r$ и ϑ — связность на E. Тогда базис 1-форм $\{\omega^j\}$ и набор $\{\vartheta^\rho_\sigma\}$ определяют почти комплексную структуру J.*

Теорема 11.1.4. *Если кривизна Θ связности ϑ принадлежит типу* $(1, 1)$, *то J интегрируема.*

Пусть M — компактное кэлерово многообразие и $[\gamma] \in H^2(M, Z)$ — класс типа $(1, 1)$. Тогда существует гладкое линейное расслоение $E \to M$ с классом Черна $c_1(E) = [\gamma]$. Пусть γ означает вещественную $(1, 1)$-форму, представляющую класс $[\gamma]$, и пусть ϑ — связность на E. Тогда $(i/2\pi) d\vartheta = \gamma + d\alpha$, где α — глобальная 1-форма на M. Значит, $\vartheta + 2\pi i\alpha$ задает связность на E, кривизна которой имеет тип $(1, 1)$. Это по-существу составляет содержание теоремы Кодаиры — Спенсера. А именно справедлива

Теорема 11.1.5. *Квантовое расслоение $Q \to M$ является голоморфным линейным расслоением.*

Пусть $M = G^u/V$ — кэлерово C-пространство. Если π: $V \to GL(E)$ — неприводимое унитарное представление в комплексном векторном пространстве E, то однородное векторное расслоение $E(\pi) = G^u \times_\pi E \to M$ обладает G^u-инвариантной эрмитовой метрикой. Это расслоение может быть явно реализовано как голоморфное расслоение, если взять комплексную реализацию $M = G/B$ и продолжить до голоморфного неприводимого представления π: $B \to GL(E)$. Тогда $G \times_B E \to M$ — голоморфное векторное расслоение над M, диффеоморфное $E(\pi)$.

Итак, чтобы построить квантовое расслоение над кэлеровым C-пространством, мы действуем так. Пусть π: $V \to GL(E)$ — неприводимое унитарное представление со старшим весом λ. Квадратный корень из канонического линейного расслоения $K = E(2\delta)$ — это расслоение с характеристическим классом $c_1(M)/2$. Квантовое расслоение — это $Q = E(\pi) \otimes E(\delta)$ с неотрицательным $\lambda + \delta$ для целочисленного λ.

Пусть $H_2^0(M, \mathcal{O}(Q))$ означает гильбертово пространство квадратично интегрируемых голоморфных сечений Q со скалярным произведением

$$(s_1, s_2) = \int_M \langle s_1 \mid s_2 \rangle \Omega^n,$$

где $n = (1/2) \dim M$ а $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ означает эрмитову структуру на Q, согласованную со связностью $D(Q)$ с кривизной $\operatorname{curv}(D(Q), Q)$, принадлежащей классу q.

11.2. Гармонический осциллятор

Гармонический осциллятор можно проквантовать следующим образом. Симплектическое многообразие (M, Ω) в этом случае имеет вид $M = \mathbf{R}^{2n}$, $\Omega = h^{-1} \sum dp_j \wedge dq_j$, где h — постоянная Планка. Классический гамильтониан равен $(1/2m) \sum (p_j^2 + m^2 \nu^2 q_j^2)$. Пространство M обладает естественной комплексной структурой с комплексными координатами $z_j = p_j - im\nu q_j$. Поверхность постоянной энергии E в $\mathbf{C}^n$ является $(2n-1)$-мерной сферой $\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 = 2mE$, и каждая орбита является большим кругом $z(t) = \exp(i\nu t) z(0)$. Пространство орбит отождествляется, таким образом, с $CP(n-1)$ с помощью проекции π: $z \to [z]$, где $[z]$, как обычно, означает множество ненулевых векторов, пропорциональных z. На подмножестве $U = \{z \in CP(n-1) \mid z_n \neq 0\}$ можно ввести комплексные координаты $w_1 = z_1/z_n, \ldots, w_{n-1} = z_{n-1}/z_n$. Форма Ω постоянна вдоль классических орбит и при ограничении на поверхность постоянной энергии и последующей проекции на $CP(n-1)$ приводит к симплектической форме Фубини — Штуди, связанной с одноименной кэлеровой метрикой

$$\Omega_E | U = -\frac{iE}{\hbar}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{d\,w_k \wedge d\bar{w}_k - \sum_{l=1}^{n-1}\bar{w}_k\bar{w}_l\,(d\,w_k \wedge d\,\bar{w}_l)}{(1+|w|^2)^2}.$$

Положим $\Omega_E = -(E/\nu\hbar)\gamma$. Как мы знаем из теоремы 9.1.22, $CP(n-1)$ имеет в точности две инвариантные комплексные структуры, комплексно сопряженные друг другу. Пусть F — обычная голоморфная структура. Базой квантового расслоения является $(M = CP(n-1),\ \Omega,\ F)$. Первый класс Черна для $CP(n-1)$ равен $c_1(CP(n-1)) = n\mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ — положительная образующая в группе $H^2(CP(n-1), \mathbf{Z})$. Ясно, что $[\gamma] \in \mathfrak{g}$.

По определению (M, Ω, F) обладает квантовым расслоением, если $[\Omega_E] + ng/2$ — неположительный элемент $H^2(CP(n-1), \mathbf{Z})$, т. е. если $-(E/\nu\hbar) + n/2 = 0,\ -1, -2, \ldots$ или $E = E_N = \nu\hbar(N+n)/2$ для $N = 0, 1, \ldots$.

Связность ∇ в квантовом расслоении Q_N, допускающая ∇-инвариантную эрмитову структуру и имеющая кривизну $\mathrm{curv}(Q, \nabla) = \eta = (N\nu\hbar/E)\,\Omega_E$, задается 1-формой

$$\alpha_N | U \times \mathbf{C}\setminus\{0\} = \frac{dz}{2\pi i z} + \frac{N}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n-1} w_k\, d\bar{w}_k.$$

Пусть t — голоморфное сечение Q над U, например

$$w \to t(w) = (w,\ (1+|w|^2)^{-N}),\ \text{ где } |w|^2 = \sum_{j=1}^{n-1}|w_j|^2.$$

Тогда любое голоморфное сечение s над U имеет вид $s(w) = p(w)\,t(w)$, где p — голоморфная функция на U. Из условия голоморфности s над всем $CP(n-1)$ вытекает, что p — многочлен степени $\leqslant N$.

∇-инвариантная эрмитова структура на Q_N имеет вид

$$|(w, \mathfrak{z})|^2 = |\mathfrak{z}|^2(1+|w|^2)^N.$$

Скалярное произведение задается формулой

$$(s_1, s_2) = (-1)^{n(n-1)/2} i^{n-1}\left(\frac{N+n/2}{2\pi}\right)^{n-1}\int_{CP(n-1)}\frac{p_1(w)\,\overline{p_2(w)}}{(1+|w|^2)^N}\,dw \wedge d\bar{w},$$

где $s_i | U = p_i(w)\,(1+|w|^2)^{-N}$. Окончательно получаем

Теорема 11.2.1. *Сечение $s \in H_2^0(M, \mathcal{O}(Q))$ отождествляется с $p(w)/(1+|w|^2)^N$, где p — многочлен степени $\leqslant N$.*

Следствие 11.2.2. *Кратность собственного значения E дается формулой*

$$\mu(E_N) = \dim H_2^0(M, \mathcal{O}(Q_N)) = \binom{n+N-1}{N}.$$

Этот результат содержится в работе Кодаиры — Хирцебруха [H 23].

11.3. Задача Кеплера — атом водорода

Свободной частице в $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ соответствует фазовое пространство $M = \{(p, q) \mid p, q \in \mathbf{R}^3,\ q \neq 0\}$. В нем есть каноническая 2-форма

$$\Omega = \sum_{i=1}^{3} dp_i \wedge dq_i$$

и скобка Пуассона

$$\{f_1, f_2\} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial f_2}{\partial q_i} - \frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial f_2}{\partial p_i} \right).$$

Семь функций: $h = (m/2)p^2 - K/q$ (энергия), $l = q \times p$ (угловой момент) и $a = l \times p + mKq/|q|$ (вектор Рунге — Ленца) — подчиняются соотношениям $a \cdot l = 0$, $|a|^2 - 2mh|l|^2 = m^2K^2$ и

$$\{h, l_i\} = \{h, a_i\} = \{l_i, a_i\} = 0,$$

$$\{l_i, l_j\} = -\varepsilon_{ijk} l_k, \quad \{l_i, a_j\} = -\varepsilon_{ijk} a_k, \quad \{a_i, a_j\} = 2mh\varepsilon_{ijk} l_k.$$

Последние три равенства выражают коммутационные соотношения алгебры Ли для группы $O(4)$ при $h > 0$, группы $O(3, 1)$ при $h < 0$ и евклидовой группы $E(3)$ при $h = 0$.

Решения уравнений Ньютона

$$\ddot{q} = -Kq/|q|^3 \text{ в } \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$$

соответствуют решениям уравнений Гамильтона

$$\dot{q} = \frac{\partial h}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial h}{\partial q}$$

или траекториям векторного поля $X_h = \{h, \cdot\}$. Эти траектории называются *кеплеровыми орбитами*.

Из коммутационных соотношений $\{h, l_1\} = 0$, $\{h, l^2\} = 0$ и $\{l_1, l^2\} = 0$ мы видим, что $f_1 = h$, $f_2 = l^2$ и $f_3 = l_1$ — полный набор первых интегралов в инволюции. Поэтому задача Кеплера вполне интегрируема.

Пусть $M(E)$ означает множество кеплеровых орбит, для которых $h = -E$, $E > 0$. Положим $\rho = \sqrt{2mE}$, и пусть x и y —

вектор-функции на $M(E)$, получаемые ограничением $\rho l \pm a$. Тогда $|x|^2 = |y|^2 = m^2K^2$ и (x, y) задает диффеоморфизм $M(E)$ с $S^2(r) \times S^2(r)$, где $r = mK$.

Теорема 11.3.1. *Для атома водорода (задача Кеплера) пространство классических орбит, соответствующих уровню энергии* $-E < 0$, *имеет вид* $M = S^2 \times S^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \mid |x|^2 = |y|^2 = m^2K^2\}$; *симплектическая форма на M равна*

$$\Omega_E = \frac{1}{\sqrt{8mE}} \left(\frac{dx_1 \wedge dx_2}{x_3} + \frac{dy_1 \wedge dy_2}{y_3} \right)$$

при $x_3 \neq 0$, $y_3 \neq 0$. *Многообразие M обладает естественной комплексной структурой и может быть отождествлено с* $CP(1) \times CP(1)$ *так, что*

$$\Omega_E \mid U = K \sqrt{\frac{m}{2E}}\, i \left(\frac{dw \wedge d\bar{w}}{(1 + |w|^2)^2} + \frac{dw' \wedge d\bar{w}'}{(1 + |w'|^2)^2} \right) = 2\pi K \sqrt{\frac{m}{2E}}\, \gamma,$$

где $c_1(M) = 2[\gamma]$.

Класс квантового расслоения равен

$$q = \left(2mK \sqrt{\frac{m}{2E}} - 1 \right) [\gamma],$$

и он неотрицателен в $H^2(M, \mathbf{Z})$ при условии, что $q\,(N-1)[\gamma]$, $N = 1, 2, \ldots$. Таким образом, мы получаем формулу Бора $E_N = -m^2e^4/2\hbar^2N^2$.

Формула Римана — Роха в этом случае утверждает, что

$$\chi(M, Q_N) = \frac{1}{2} (q_N^2 + q_N c_1(M)) [M] + \frac{1}{4} (\chi(M) + \tau(M)),$$

где $\tau(M)$ — сигнатура Хирцебруха, равная 0, так как M разлагается в произведение двух многообразий. Далее, $\chi(M) = 4$, $q_N^2(M) = (N-1) \int_M \gamma \wedge \gamma = 2(N-1)$ и $(c_1(M) q_N)[M] = (N-1) \cdot \gamma^2(M) = 4(N-1)^2$. Значит, $\chi(M, Q_N) = N^2$. Нам понадобится следующая теорема Кодаиры.

Теорема 11.3.2. *Если среди представителей класса* $c(B) + c_1(M)$ *есть кэлерова форма, то* $\chi(M, B) = \dim H^0(M, \mathcal{O}(B))$.

Поскольку класс $q_N + 2[\gamma]$ содержит кэлерову форму $(N+1)\gamma$, мы получаем

Следствие 11.3.3. *Кратность уровня энергии E_N равна* $\dim H^0(M, \mathcal{O}(Q_N)) = N^2$.

11.4. Квантование Маслова

В работе Чижа [C 17] квантование Маслова связывается с геометрическим квантованием следующим образом. Пусть $(M, \Omega) = \left(\mathbf{R}^{2n}, \sum dp_i \wedge dq_i\right)$, и для гамильтониана $h\colon M \to \mathbf{R}^1$ положим $M_E = h^{-1}(E)$. Предположим, что M_E — связное односвязное компактное $(2n-1)$-мерное подмногообразие в M. Предположим также, что все орбиты уравнений Гамильтона на M_E замкнуты, и пусть $\mathcal{O}$ — пространство орбит. Обозначим через $\pi\colon M_E \to \mathcal{O}$ проекцию. Тогда имеет место

Теорема 11.4.1 (Чиж). (i) *$\mathcal{O}$ односвязно;*

(ii) *существует единственная симплектическая 2-форма $\Omega_{\mathcal{O}} \in A^2(\mathcal{Q})$, для которой $\pi^*\Omega_{\mathcal{O}} = \Omega \mid M_E$;*

(iii) *если $\omega = \sum p_i\, dq_i$, то $\int\limits_{\mathcal{O}} \omega$ для орбиты O в M_E не зависит от O;*

(iv) *для каждой замкнутой ориентируемой односвязной двумерной поверхности a в $\mathcal{O}$ существует такая поверхность b в M_E, что $\pi(b) = a$ и $\int\limits_a \Omega_{\mathcal{O}} = \int\limits_b \Omega = \int\limits_{\partial b} \omega$, где ∂b — либо орбита с некоторой целой кратностью, либо пустое множество.*

Пусть L — лагранжева поверхность в M_E. Если Σ_1 — некоторое специальное (см. [C 17]) замкнутое $(n-1)$-мерное подмногообразие в L, то для пути $d(t)$, $t \in [0, 1]$, такого, что $d(0)$ и $d(1)$ не лежат на Σ_1, определяется *индекс Маслова* $\operatorname{ind}_L d$ как разность числа точек, где $d(t)$ пересекает Σ_1, переходя с «отрицательной» стороны на «положительную», и числа точек перехода в обратную сторону (определение знака см. в [M 9]). Таким образом, для каждой орбиты $O \in \mathcal{O}_L = \pi(L)$ определен индекс Маслова $\operatorname{ind}_L O$. Поскольку все орбиты в L лежат в одном классе гомологий в $H_1(L, R)$, мы получаем $\operatorname{ind}_L O = \text{const}$ в $\mathcal{O}_L$. Обозначим эту постоянную через $\operatorname{ind}_L \mathcal{O}_L$ и положим, следуя обозначениям теоремы 11.4.1,

$$\tilde{q}(a) = \int\limits_a \Omega_{\mathcal{O}} - \frac{1}{4} \operatorname{ind}_L \partial b.$$

Определение 11.4.2. *Условие квантования по Маслову* состоит в том, что для любой замкнутой кривой c в L должно выполняться включение

$$\int\limits_c \omega + \frac{1}{4} \operatorname{ind}_L c \in \mathbf{Z}.$$

Теорема 11.4.3. *Если $n > 1$ и условие Маслова выполнено, то $\tilde{q} \in H^2(\mathcal{O}, Z)$.*

Задачи

Упражнение 11.1. Пусть G — группа Пуанкаре с общим элементом $g=(a, \Lambda)$, $a \in \mathbf{R}^4$, $\Lambda \in SO(3,1)$. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G с базисом Ξ_α и $\Lambda_{\alpha\beta}=-\Lambda_{\beta\alpha}$, $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 3$. Метрика g имеет компоненты $g_{00}=-1$ и $g_{ii}=1$ при $i=1, 2, 3$. Дуальный базис обозначается через P^α, $M^{\alpha\beta}$, где $(P^\alpha, \Xi_\beta)=\delta_{\alpha\beta}$, $(M^{\alpha\beta}, \Lambda_{\gamma\delta})=\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}-\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}$, $(P^\alpha, \Lambda_{\beta\gamma})=(M^{\alpha\beta}, \Xi_\gamma)=0$. Точка $x \in \mathfrak{g}^*$ имеет координаты p_α, $m_{\alpha\beta}$, определяемые из равенства $x=p_\alpha P^\alpha+(1/2)m_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}$. Определим многочлены $p^2=p_\alpha p^\alpha$ (где $p^\alpha=g^{\alpha\beta}p_\beta$) и $w^2=w_\alpha w^\alpha$, где $w^\alpha=\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}m_{\beta\gamma}p_\delta$. Показать, что множество M, заданное условиями $-p^2=m^2>0$, $w^2=\sigma^2 m^2$ и $p^0>0$, гомеоморфно $\mathbf{R}^6 \times S^2$. Пусть $f \in M$ — точка с координатами $p^0=m$, $p^i=0$, $m_{12}=-\sigma$, $m_{31}=m_{23}=m_{0i}=0$. Представим M в виде $G/G(f)$. Показать, что при $\sigma \neq 0$ отображение $X \to 2\pi i\langle f, X\rangle$ поднимается до характера, если и только если $4\pi\sigma \in N$. Показать, что при $\sigma \neq 0$ есть две G-инвариантные поляризации $\mathfrak{h}_f$ и $\bar{\mathfrak{h}}_f$, где $\mathfrak{h}_f$ порождается элементами Ξ_α, Λ_{12}, $\Lambda_{23}+i\Lambda_{31}$. Показать, что при $\sigma=0$ единственная G-инвариантная поляризация вещественна и имеет базис $\{\Xi_\alpha, \Lambda_{ij}\}$. Выберем в качестве стандартных координат точки $gf \in M$ величины $q \in \mathbf{R}^3$, $p=mk \in \mathbf{R}^3$ и $z \in \mathbf{C}$. Показать, что $\{q_i, p^j\}=\delta_{ij}$, $\{p_i, p_j\}=0$, но $\{q_i, q_j\}$, вообще говоря, $\neq 0$. Найти такие координаты x_i, что $\{x_i, p^j\}=\delta_{ij}$ и $\{x_i, x_j\}=0$.

Показать, что M имеет симплектическую 2-форму

$$\Omega_{\sigma, m}=(2\sigma+1)\delta+m\sum_{r=1}^{3} dp_r \wedge dq_r,$$

где

$$\delta \mid S^2=\frac{i}{2\pi}\,\frac{dw \wedge d\bar{w}}{(1+|w|^2)^2}.$$

Положим $q=[\Omega_{\sigma, m}]-[\delta]$. Показать, что q задает квантовое расслоение над M, если и только если $\sigma=l/2$, $l=0, 1, \ldots$. Выписать связность ∇ для этого расслоения, ∇-инвариантную эрмитову структуру и ковариантно постоянные сечения.

Показать, что естественное представление $SU(2)$ в квантовом гильбертовом пространстве над $S^2=CP(1)$ совпадает с представлением Вигнера для спина σ. Показать, что если $\sigma=0$, то $M \simeq \mathbf{R}^6$. Показать, что орбита M, задаваемая условиями $p^2=0$, $w^2=0$, $w_\alpha=\lambda p_\alpha$, $p^0>0$, имеет размерность 6 и 2-форма на этой поверхности целочисленна при условии, что $2\lambda \in \mathbf{Z}$. Параметр λ получил название спиральности. Если $\lambda=0$, то $M=\mathbf{R}^6 \setminus \{p_i=0\}$. Найти форму Ω и операторы координат. Для $\lambda \neq 0$ показать, что на M нет функций, которые можно было бы интерпретировать как пространственные координаты; поэтому в данном случае нет квантовомеханических операторов координат.

Упражнение 11.2. Пусть $G = SU(2)$ и $M = T^*G$. Определим расслоение $L = M \times \mathbf{C}$ и положим $(m_1, z_1) \sim_i (m_2, z_2)$, если $m_1 = \varepsilon m_2$ и $z_1 = \eta_i z_2$, где ε — неединичный элемент центра G, $\eta_1 = 1$, а $\eta_2 = -1$. Пусть $L_i = L/\sim_i$, $i = 1, 2$. Положим также $\bar{M} = M/\sim$, где $m_1 \sim m_2$, если $m_1 = \varepsilon m_2$. Показать, что $\bar{M} = T^*SO(3)$. Пусть $\bar{\Omega}$ — каноническая симплектическая форма на $\bar{M}$. Пространства L_i являются расслоениями над $\bar{M}$. Показать, что $c_1(L_1) = 0$, но $c_1(L_2) \neq 0$. Определить формы связности α_i, для которых $(L_i, \alpha_i) \in L_c(\Omega)$. Показать, что каноническая поляризация $(\bar{M}, \bar{\Omega})$ $SO(3)$-инвариантна. Показать, что угловой момент твердого тела принимает в случае $i = 1$ все целые, а в случае $i = 2$ — все полуцелые значения.

Обобщить этот пример и изучить свободное твердое тело с кинематической группой Галилея и $M = T^*(\mathrm{R}^3 \times SO(3))$.

Глава 12 Основные серии представлений

12.1. Теория представлений некомпактных полупростых групп Ли

Часть I. Основные серии представлений

В следующих главах нам понадобятся элементы теории представлений некомпактных полупростых групп Ли, в особенности тех, которые входят в аналог формулы Планшереля. Эти представления распадаются на два больших класса — основные серии и дискретные серии. Основные серии будут изучаться в этой главе.

Основная серия представлений возникает следующим образом. Пусть G^0 — связная полупростая группа Ли. Опишем разложение Ивасавы для этой группы. Пусть σ — картановская инволюция в G^0 с множеством неподвижных точек K. Обозначим через $\mathfrak{a}$ максимальное абелево подпространство в собственном пространстве для σ_* с собственным значением -1. Пусть $\Delta_{\mathfrak{a}}$ — система корней в $\mathfrak{a}^*$, так что $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{z}_{\mathfrak{a}} + \sum_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{a}}} \mathfrak{g}_0^{\alpha}$. Здесь $\mathfrak{z}_{\mathfrak{a}}$ — централизатор $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{g}_0$, а $\mathfrak{g}_0^{\alpha} = \{X \in \mathfrak{g}_0 \mid [Y, X] = \alpha(Y) X \text{ для } Y \in \mathfrak{a}\}$. Пусть D — камера Вейля в $\mathfrak{a}$. Положим $\Delta_{\mathfrak{a}}^+ = \{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{a}} \mid \alpha > 0 \text{ на } D\}$ и $\Delta_{\mathfrak{a}}^- = -\Delta_{\mathfrak{a}}^+$.

Определим алгебры Ли $\mathfrak{n} = \sum_{\Delta_{\mathfrak{a}}^+} \mathfrak{g}_0^{\alpha}$ и $\mathfrak{n}^- = \sum_{\Delta_{\mathfrak{a}}^-} \mathfrak{g}_0^{\alpha}$. Через N и A обозначим подгруппы в G^0, соответствующие подалгебрам $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{a}$. Пусть M означает централизатор A в K.

Определение 12.1.1. Разложение $G^0 = KAN$ называется *разложением Ивасавы*. Подгруппа $B = MAN$ — *минимальная параболическая подгруппа в* G^0.

Пример 12.1.2. Пусть $G^0 = SL(2, \mathbf{R})$. Тогда

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a > 0 \right\}, \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbf{R} \right\},$$

а $K = SO(2)$.

Пусть $\mathfrak{m}$ — алгебра Ли группы M и $\mathfrak{t}$ — картановская подалгебра в $\mathfrak{m}$. Она определяет систему корней $\Delta_{\mathfrak{t}}^+$, согласованную с $\Delta_{\mathfrak{a}}^+$. А именно существует система положительных корней в $\mathfrak{g}$ относительно картановской подалгебры $(\mathfrak{t} + \mathfrak{a})^{\mathbf{C}}$, такая, что $\Delta_{\mathfrak{a}}^+ = \{\varphi | \mathfrak{a} \mid \varphi \in \Delta^+, \ \varphi | \mathfrak{a} \neq 0\}$, а $\Delta_{\mathfrak{t}}^+ = \{\varphi | \mathfrak{t} \mid \varphi \in \Delta^+, \ \varphi | \mathfrak{a} = 0\}$. Обозначим через δ_t полусумму положительных корней из Δ_t^+. Положим $T^0 = \exp t$, $L_m^+ = \{\nu \in it^* \mid \exp(\nu - \delta^t) \in \hat{T}^0$ и $\langle \nu, \varphi \rangle > 0$ для $\varphi \in \Delta_t^+\}$.

Теорема 12.1.3. *Пусть $\tilde{Z}$ означает централизатор M^0 и $E = \tilde{Z} \cap M^0$. Тогда каждый $[\eta] \in \hat{M}$ имеет вид $[\eta] = [\chi \otimes \eta^0]$ для $[\chi] \in \hat{\tilde{Z}}$, $[\eta^0] \in \hat{M}^0$, и существует биекция $L_m^+ \to \hat{M}$, задаваемая формулой $\nu \to [\eta_\nu^0]$, где $\nu - \delta_t$ — старший вес представления η_ν^0.*

Пусть Ψ — система простых корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $(\mathfrak{t} + \mathfrak{a})^c$ и $\Phi \subset (\Psi \cap \Delta_t^+)$ — любое подмножество. Положим $\mathfrak{z}_\Phi = \{X \in \mathfrak{t} \mid \Phi(X) = 0\}$ и $Z_\Phi^0 = \exp \mathfrak{z}_\Phi$. Если U_Φ — централизатор Z_Φ^0 в M, то $S_\Phi = M/U_\Phi$ — однородное кэлерово многообразие. Поскольку $M = \tilde{Z}M^0$, мы получаем $U_\Phi = \tilde{Z}U_\Phi^0$ и $E = \tilde{Z} \cap U_\Phi^0$. Можно выбрать $[\mu] \in \hat{U}_\Phi$ вида $[\mu] = (\chi \otimes \mu^0]$, где $[\chi] \in \hat{\tilde{Z}}$, причем $\chi \mid E$ кратно $\xi \in \hat{E}$, а $\mu^0 \in \hat{U}_\Phi^0$, причем $\mu^0 \mid E$ кратно ξ.

Для минимальной параболической подгруппы $B = MAN$ конечномерные классы из $\hat{B}$ исчерпываются классами вида $\mu \otimes \tau$, где $\mu \in \hat{M}$, $\tau \in \hat{A}$. А именно пусть λ — неприводимое комплексное представление MAN. По теореме Ли $\lambda(N) = 1$. Поэтому $\lambda = \mu \otimes \tau$: $man \to \mu(m)\tau(a)$, где $\mu \in \hat{M}$, $\tau \in \hat{A}$. Пусть $\delta = (1/2) \sum (\dim \mathfrak{g}_0^\alpha) \cdot \alpha \in \mathfrak{a}^*$. Положим $\beta_{\mu, \eta}(man) = \mu(m) \exp((\delta + i\eta)(\ln a))$, $\eta \in \mathfrak{a}^*$. Это — неприводимое представление группы MAN в пространстве $V(\mu)$.

Определение 12.1.3′. Индуцированное представление $T(\mu, \eta) = \mathrm{Ind}_B^G(\beta_{\mu, \eta})$ называется *представлением основной серии* группы G. Поскольку μ имеет вид $\chi \otimes \eta_\nu^0$, мы будем иногда писать $T(\chi, \nu, \eta)$. Отметим, что $T(\mu, \eta)$ унитарно, если и только если η: $\mathfrak{a} \to \mathbf{R}$ — вещественный функционал. Таким образом, основная серия параметризуется элементами $\hat{M} \times \mathfrak{a}^*$.

В общем случае $T(\mu, \eta)$ является прямой суммой конечного числа неприводимых представлений, хотя для некоторого класса групп (включающего $SO_0(2n+1, 1)$) $T(\mu, \eta)$ неприводимо для всех μ и η.

Теорема 12.1.4. (i) *Представления $T(\mu, \eta)$ и $T(w\mu, w\eta)$ эквивалентны для $w \in W(\mathfrak{a})$ — группы Вейля, соответствующей $\mathfrak{a}$: $W(\mathfrak{a}) = \{k \in K \mid \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\}/M$;*

(ii) *если $\mu = 1_M$, то $T(\mu, \eta)$ неприводимо для всех $\eta \in \mathfrak{a}^*$.*

Определение 12.1.5. Часть основной серии, соответствующая $\mu = 1_M$, называется *сферической основной серией*.

Пример 12.1.6 (продолжение 12.1.2). Если $\sigma \in \hat{M}$ задается формулой

$$\sigma\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} = \varepsilon = \pm 1,$$

а $\tau \in \hat{A}$ — формулой

$$\tau\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = a^{i\rho},$$

то $T(\sigma, \tau)$ неприводимо во всех случаях, кроме $\tau = 1$, $\sigma \neq 1$. Характер $T(\sigma, \tau)$ равен

$$\Theta(h) = \frac{|a|^{i\rho} + |a|^{-i\rho}\operatorname{sgn}^{\varepsilon}(a)}{|a - a^{-1}|}$$

на множестве регулярных элементов

$$h = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \quad a^2 \neq 1,$$

в картановской подгруппе H.

Пример 12.1.7 (группа де Ситтера). Пусть $\mathbf{H}$ означает тело кватернионов, элементы которого записываются в виде $x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$, $x_i \in \mathbf{R}$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$. Пусть $\bar{x} = x_1 - x_2 i - x_3 j - x_4 k$ — кватернионное сопряжение. Положим $\hat{x} = -k\bar{x}k = x_1 + x_2 i + x_3 j - x_4 k$. Норма кватерниона x равна $|x| = (x\bar{x})^{1/2}$.

Пусть $M_2(\mathbf{H})$ означает алгебру матриц второго порядка с коэффициентами из $\mathbf{H}$. Тогда группа

$$G = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{H}) \mid \bar{a}b = \bar{c}d,\ |a|^2 - |c|^2 = |d|^2 - |b|^2 = 1 \right\}$$

изоморфна универсальной накрывающей группы де Ситтера $SO_0(4, 1)$. Определим следующие подгруппы группы G:

$$K = \left\{ g \in G \mid g = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \middle| \, |u| = |v| = 1 \right\},$$

$$A = \left\{ a_t \in G \mid a_t = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R} \right\},$$

$$M = C_K(A) = \left\{ m \in G \mid m = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}, \quad |u| = 1 \right\},$$

$$N = \left\{ n \in G \mid n = \begin{pmatrix} 1 - x & x \\ -x & 1 + x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbf{H}, \quad x + \bar{x} = 0 \right\}.$$

Разложение Ивасавы имеет вид $G = KAN$. Группа кватернионов единичной нормы изоморфна $SU(2)$, а именно

$$u \to \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \text{ где } a = x_1 + x_2 i,\ b = x_3 + x_4 i.$$

Таким образом, $\hat{M}$ в этом случае совпадает с $S\hat{U}(2)$. Пусть $\mu_n \in S\hat{U}(2)$ действует в пространстве $V(\mu_n)$ размерности $2n+1$, где n — целое или полуцелое неотрицательное число. Представление $T(n, s)$, индуцированное представлением $\beta(ma_t n) = \mu_n(m)\exp(-ist)$, унитарно при $s = 3/2 + i\nu$, $\nu \in \mathbf{R}$. Оно неприводимо во всех случаях, за исключением $n \equiv (1/2) \bmod \mathbf{Z}$ и $\nu = 0$. Наконец, $T(n, s)$ эквивалентно $T(n', s')$ для $\operatorname{Re}(s') = 3/2$, если и только если $n = n'$ и $\operatorname{Im} s = \pm \operatorname{Im} s'$.

Вулфу принадлежит вариант теорем Бореля — Вейля и Бореля — Вейля — Ботта для основной серии. Согласно этой теореме, представления основной серии реализуются на замкнутых орбитах в комплексном флаговом многообразии. Положим $G = G_0^{\mathbf{C}}$ и $X = G/P$, где P — параболическая подгруппа в G. Для $x_0 \in X$ пусть $P_{x_0} = \{g \in G \mid gx_0 = x_0\}$ и $L = M \cap P_{x_0}$.

Рассмотрим неприводимые унитарные представления ν: $L \to GL(W_\nu)$, μ: $M \to GL(V_\mu)$ и $\varkappa$: $K \to GL(U_\varkappa)$. Построим M-однородное голоморфное векторное расслоение $W(\nu) \to M/L$ над флаговым многообразием $M/L = S(x_0)$, для которого $H^0(M/L, \mathcal{O}(W(\nu))) = V_\mu$.

Пусть $\sigma_{\nu,\eta}$ — неприводимое представление группы LAN в W_ν, определяемое равенством $\sigma_{\nu,\eta}(lan) = \nu(l)\cdot\exp((\nu + i\eta)\cdot(\ln a))$. Пусть $W(\nu, \eta) \to G_0/LAN = Y$ — однородное комплексное векторное расслоение над Y. Тогда $W(\nu, \eta)$ голоморфно над M/N, поскольку оно совпадает с $W(\nu)$. Вулф называет $W(\nu, \eta)$ *частично голоморфным* расслоением.

Пусть $H_2^0(Y, \mathcal{O}_p(W(\nu, \eta)))$ означает гильбертово пространство квадратично интегрируемых частично голоморфных сечений, т. е. отображений f: $G_0 \to W_\nu$, обладающих свойствами

(i) $f(glan) = \sigma_{\nu,\eta}(lan)^{-1} f(g)$;

(ii) $f \mid gMAN$ — голоморфное сечение расслоения $W(\nu, \eta)$ над $S(gx_0)$;

(iii) $\int_K (f(k), f(k))_{W_\nu}\, dk < \infty$.

Пусть $\Pi(\nu, \eta)$ означает представление G_0 в $H_2^0(Y, \mathcal{O}_p(W(\nu, \eta)))$.

Теорема 12.1.8. *Представление* $\Pi(\nu, \eta)$ *унитарно эквивалентно* $T(\nu, \eta)$.

Характеры представлений $T(\nu, \eta)$ описывает

Теорема 12.1.9. *Пусть* $T \in \hat{P} = (MAN)^{\wedge}$. *Тогда существует такой* $f_0 \in \mathfrak{a}^*$, *что* $T(m \exp(Y) n) = \exp(i\langle f_0, Y\rangle) T(m)$ *для* $m \in M$, $Y \in \mathfrak{a}$, $n \in N$, *причем* $T|M$ *неприводимо.*

Поскольку M компактна, ее универсальная накрывающая является произведением абелевой группы и компактной полупростой группы Ли. В силу теоремы Кириллова 9.2.11 существует такой регулярный элемент $f_1 \in \mathfrak{m}^*$, что для орбиты $\mathcal{O}(f_1)$ в $\mathfrak{m}^*$ с канонической мерой $d\beta(f)$ справедливо равенство

$$\operatorname{tr} T(\exp X) = j_m(X)^{-1/2} \int_{\mathcal{O}(f_1)} \exp(i\langle f, X\rangle)\, d\beta(f).$$

Предположим, что T и f_0 из теоремы 12.1.9 таковы, что f_0 не сохраняется никаким нетривиальным элементом группы $W(\mathfrak{a})$. Пусть множество V определено условием $V = \{X \in \mathfrak{g} |$ собственные значения λ оператора $\operatorname{ad} X$ подчиняются неравенству $|\operatorname{Im} \lambda| < \pi\}$. Пусть $\mathcal{O}$ — орбита в $\mathfrak{g}^*$, содержащая $\mathcal{O}(f_1) + f_0$. Обозначим через $d\beta$ меру Кириллова на $\mathcal{O}$. Тогда для основной функции φ, сосредоточенной на V, и $f = f_0 + f_1$ справедлива

Теорема 12.1.10.

$$\operatorname{tr} T(\mu, \nu)(\varphi) = \int_{\mathcal{O}} \left[\int_{\mathfrak{g}} j(X)^{1/2} \varphi(X) \exp(i\langle f, X\rangle)\, dX \right] d\beta(f).$$

Вариант Вулфа теоремы Бореля — Вейля — Ботта выглядит следующим образом. Аналогично определению $\mathcal{O}_p(W(\mu, \sigma))$ мы определяем пространство $A_p^{0,q}(W(\mu, \sigma))$ гладких частично голоморфных $(0, q)$-форм на M/L со значениями в $W(\mu, \sigma)$. Как обычно, в гильбертовом пространстве $L_2^{0,q}(W(\mu, \sigma))$, получаемом пополнением $A_p^{0,q}(W(\mu, \sigma))$, определяется оператор Лапласа $\Box$. Пусть $H_2^{0,q}(W(\mu, \sigma)) = \{w \in L_2^{0,q} | \Box w = 0\}$ и $\pi^q_{\mu,\sigma}$ — естественное действие G на $H_2^{0,q}(W(\mu, \sigma))$.

Теорема 12.1.11 (Вулф). (i) $\pi^q_{\mu,\sigma}$ — *унитарное представление* G;

(ii) *если* $[\mu] = [\chi \otimes \mu^0]$ *определено, как и выше, и* β — *старший вес* μ^0, *то*

(a) *если* $\langle \beta + \delta_t, \varphi\rangle = 0$ *для некоторого* $\varphi \in \Delta_t^+$, *то* $H_2^{0,q} = 0$ *для всех* q;

(b) *если* $\langle \beta + \delta_t, \varphi\rangle \neq 0$ *для всех* $\varphi \in \Delta_t^+$, *то пусть* q_0 — *число тех* $\varphi \in \Delta_t^+$, *для которых* $\langle \beta + \delta_t, \varphi\rangle < 0$, *и* ν — *единственный элемент* L^+, *сопряженный с* $\beta + \delta_t$ *с помощью элемента группы*

Вейля $W(M^0, T^0)$; *тогда* $\pi^{q_0}_{\mu,\sigma} = [\pi_{\chi,\nu,\sigma}]$ *принадлежит основной серии, а при* $q \neq q_0$ *имеем* $H_2^{0,q} = 0$.

В частности, любой класс из основной серии можно реализовать в пространстве $H^{0,0}(W(\mu, \sigma))$, где $\mu = (\chi, \mu^0)$ и μ^0 имеет старший вес $\nu - \delta_{\mathfrak{k}}$.

12.2. Приложение к цепочке Тоды

В заключении этого раздела мы покажем, как теория представлений основной серии применяется к квантованию цепочки Тоды. Пусть $S(\mathfrak{g})$ — симметрическая алгебра над $\mathfrak{g}$. По теореме Шевалле алгебра инвариантов $S(\mathfrak{g})^G$ является алгеброй многочленов от однородных образующих $I_1, \ldots, I_l$, называемых примитивными элементами, $S(\mathfrak{g})^G = R[I_1, \ldots, I_l]$. В качестве I_1 можно взять форму Киллинга.

Подпространство $S(\mathfrak{g})$ в $A(\mathfrak{g}^*)$ наследует структуру Пуассона, если рассматривать его элементы как левоинвариантные функции на T^*G. Можно проверить, что если $\varphi \in S(\mathfrak{g})^G$, то скобка Пуассона φ с любым элементом из $S(\mathfrak{g})$ равна нулю.

Теорема 12.2.1. $S(\mathfrak{g})^G = S(\bar{\mathfrak{b}})_{\mathfrak{f}}$, *где* $S(\bar{\mathfrak{b}})_{\mathfrak{f}} \subset S(\bar{\mathfrak{b}})$ *определяется равенством* $S(\bar{\mathfrak{b}})_{\mathfrak{f}} = R[I_1^{\mathfrak{f}}, \ldots, I_l^{\mathfrak{f}}]$, *а* $I_j^{\mathfrak{f}}(Z) = I_j(\mathfrak{f} + Z)$; *здесь* $\mathfrak{f} = \sum_{i=1}^{l} e_{-\alpha_i}$, $Z \in \mathfrak{b}$. *Кроме того,* $S(\bar{\mathfrak{b}})_{\mathfrak{f}}$ — *коммутативная подалгебра в смысле скобки Пуассона.*

Таким образом, мы имеем l коммутирующих элементов $I_1^{\mathfrak{f}}, \ldots, I_l^{\mathfrak{f}}$ в $S(\bar{\mathfrak{b}})$. Дальнейшая программа состоит в том, чтобы построить l элементов $\tilde{I}_1, \ldots, \tilde{I}_l$ в $U(\bar{\mathfrak{b}})$ и одновременное спектральное разложение операторов $U_{\mathcal{O}}(\tilde{I}_j)$, где $U_{\mathcal{O}}$ — представление $\bar{B}$, связанное с орбитой $\mathcal{O} = \bar{B}e$.

Пусть $X \in \bar{\mathfrak{n}}$. Тогда $X = \sum_{\alpha>0} d_\alpha e_\alpha$ и характер $\bar{N}$, соответствующий e, имеет вид $\chi(\exp X) = \exp(2\pi i \sum d_j c_j)$, где $c_j = B(e_{\alpha_j}, e_{-\alpha_j})$. Представление $U_{\mathcal{O}}$ индуцировано этим характером χ.

Определение 12.2.2. Пусть $v' \in H_{-\infty}$ — функционал на пространстве Гординга. Тогда v' называется *вектором Уиттекера* относительно χ, если $U(n)v' = \chi(n)v'$ для всех $n \in \bar{N}$.

Костант показал, что если U — любое представление основной серии, то в $H_{-\infty}$ существует единственный вектор Уиттекера с точностью до скалярного множителя.

Теорема 12.2.3. *Пусть* $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{C}}$ *задает представление основной серии* U_λ *в пространстве* $H(\lambda)$. *Пусть* $v' \in H(\lambda)_{-\infty}$ — *вектор*

Уиттекера и $v \in H(\lambda)_\infty$ — *сферический вектор (т. е.* $U_\lambda(k)v = v$ *для всех* $k \in K$). *Тогда* $d_\lambda = d_{v,v'} = \langle v, U(\varphi)v'\rangle$ — *собственная функция операторов* $U_\mathscr{O}(\widetilde{I}_l)$:

$$U_\mathscr{O}(\widetilde{I}_l)\, d_\lambda = c_l(\lambda)\, d_\lambda.$$

Таким образом, функции d_λ являются общими собственными функциями для коммутирующих операторов $U_\mathscr{O}(\widetilde{I}_1), \ldots, U_\mathscr{O}(\widetilde{I}_l)$, а $c_1(\lambda), \ldots, c_l(\lambda)$ являются общими спектральными функциями, когда λ пробегает $\mathfrak{h}^*$.

Задачи

Упражнение 12.1. Пусть $G = SU(1,1)$ с базисом в алгебре Ли

$$J_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через P_k дуальный базис: $\langle P_k, J_j\rangle = \delta_{kj}$. Пусть $f = \lambda P_1 \in \mathfrak{g}^*$. Показать, что

$$G(f) = \left\{\begin{pmatrix} \exp(i\varphi) & 0 \\ 0 & \exp(-i\varphi) \end{pmatrix}\right\}, \qquad \mathfrak{g}(f) = \mathbf{R}J_1.$$

Записывая $g \in G$ как

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = (1 - z\bar{z})^{1/2}\begin{pmatrix} 1 & z \\ \bar{z} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \exp(i\varphi) & 0 \\ 0 & \exp(-i\varphi) \end{pmatrix},$$

где $\varphi = \arg a$, а $z = b/\bar{a}$, показать, что форма Кириллова на орбите $\mathscr{O}_f = G/G(f)$ имеет вид

$$\Omega = 2i\lambda\, \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 - z\bar{z})^2}$$

Показать, что существуют две поляризации $\mathfrak{h} = \mathbf{C}J_1 + \mathbf{C}(J_2 - iJ_3)$ и $\bar{\mathfrak{h}}$. Распределение F порождается полем $\partial/\partial\bar{z}$ и (M, Ω, F) — кэлерово многообразие. Показать, что голоморфно индуцированное с $G(f)$ представление эквивалентно D_k^+, где $k = 4\pi\lambda > 1$.

Показать, что стабилизатором орбиты $\mathscr{O}_f$ для $f = \lambda P_2$, $\lambda > 0$, является подгруппа

$$G(f) = \left\{ \pm\begin{pmatrix} \operatorname{ch} a & \operatorname{sh} a \\ \operatorname{sh} a & \operatorname{ch} a \end{pmatrix} \middle|\, a \in \mathbf{R} \right\} \quad \text{и} \quad \mathfrak{g}(f) = \mathbf{R}J_2.$$

Показать, что $\mathcal{O}_f$ имеет две G-инвариантные поляризации $\mathfrak{h}_f^{\pm} = \mathbf{C}J_2 + \mathbf{C}(J_1 \pm J_3)$ и что F-индуцированные представления в $H^0(M, E(\lambda)_F)$ эквивалентны $\pi(\varepsilon, \rho)$.

Показать, что коническая орбита $\mathcal{O}(f)$ для $f = P_1 - P_3$ имеет стабилизатором

$$G(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + ia & -ia \\ ia & 1 - ia \end{pmatrix} \middle| a \in R \right\} \text{ и } \mathfrak{g}(f) = \mathbf{R}(J_1 - J_3).$$

Орбита $\mathcal{O}(f)$ имеет вещественную поляризацию $\mathfrak{h}_f = \mathbf{C}J_2 + \mathbf{C}(J_1 - J_3)$, а F-индуцированное представление эквивалентно $D_{1/2}^{+} + D_{1/2}^{-}$.

Глава 13 Геометрия пространств де Ситтера

13.1. Пространства де Ситтера

Группа де Ситтера $\mathrm{Spin}(4, 1)$ — односвязная полупростая десятимерная группа Ли. Она изучалась в связи с космологией (см. Робертсон — Нунан) и в связи с динамической группой симметрии в задаче Кеплера или в атоме водорода (см. Сурьо [S 27]).

Классическая элементарная система де Ситтера — это гамильтоново G-пространство, где $G = \mathrm{Spin}(4, 1)$. Мы покажем в этом разделе, что все орбиты в $\mathfrak{g}^*$ односвязны. Поэтому любая система де Ситтера должна быть изоморфна одной из этих орбит.

Пусть C — алгебра Клифворда с антиавтоморфизмом T, соответствующая квадратичной форме сигнатуры $(1, 4)$. Пространство C градуировано: $C = \sum_{r=0}^{5} V_r$; положим $C_0 = \sum_{r=0}^{2} V_{2r}$. Группа $\mathrm{Spin}(4, 1)$ совпадает с группой обратимых элементов s в C_0, обладающих свойствами $T(s)s = 1$ и $sV_1s^{-1} = V_1$. Группа G имеет представление ρ в V_1 по формуле $\rho(s)v = svs^{-1}$ для $s \in G$ и $v \in V_1$. Образ $\rho(G)$ совпадает с $SO_0(4, 1)$, и ρ является спинорным накрытием.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G отождествляется с V_2, и экспоненциальное отображение $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ является обычной экспонентой в алгебре C. Присоединенное представление G в $\mathfrak{g}$ дается, разумеется, формулой $\mathrm{Ad}(s)X = sXs^{-1}$ для $s \in G$, $X \in \mathfrak{g}$.

Если P — проекция C на V_0 параллельно $\sum_{r=1}^{5} V_r$, то можно определить симметричную невырожденную билинейную форму T на C, полагая $T(t, s)\cdot 1 = P(st)$, s, $t \in C$. Форма T позволяет отождествить $\mathfrak{g}^*$ с $\mathfrak{g} = V_2$, считая, что элементу $a \in V_2$ соответствует линейный функционал $\hat{a}$ на $\mathfrak{g}$ по формуле $\hat{a}(b) = T(ab)$ для $b \in \mathfrak{g} = V_2$. Проверяя, что T инвариантна относительно внутренних автоморфизмов C, мы видим, что коприсоединенное действие G на $\mathfrak{g}^*$ совпадает с присоединенным действием G на $\mathfrak{g}$.

На $\mathfrak{g}$ можно определить два инвариантных многочлена. А именно $c(a) = T(a, a)$ и $w(a) = T(w_a, w_a)$, где $w_a = (a^2 - c(a)\cdot 1)\gamma$, $\gamma = e_0e_1e_2e_3e_4$. Образующие e_α допускают реализацию кватернионными матрицами второго порядка:

$$e_0=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad e_1=\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0 & j\\ j & 0\end{pmatrix},$$

$$e_3=\begin{pmatrix}0 & k\\ k & 0\end{pmatrix},\quad e_4=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Легко проверяется, что $w_{\mathrm{Ad}(s)a}=\rho(s)w_a$ для $a\in\mathfrak{g}$ и $s\in G$. Поэтому орбита элемента $a\in\mathfrak{g}$ полностью определяется $SO_0(4,1)$-орбитой w_a и значением $c(a)$. Отсюда следует

Теорема 13.1.1 (Ронсли). *Следующий список исчерпывает все орбиты G в $\mathfrak{g}$:*

(i) $\{a\in\mathfrak{g}\,|\,c(a)=\lambda,\ \ w(a)=k\},\ \ k<0;$
(ii) $\{a\in\mathfrak{g}\,|\,c(a)=\lambda, w(a)=k,\ T(w_a,e_0)\gtrless 0\},\ \ k>0;$
(iii) $\{a\in\mathfrak{a}\,|\,c(a)=\lambda,\ \ w(a)=0,\ \ T(w_a,e_0)\gtrless 0\};$
(iv) $\{a\in\mathfrak{g}\,|\,c(a)=\lambda,\ \ w_a=0,\ a\neq 0\};$
(v) $\{0\}.$

Следствие 13.1.2. *Поскольку G полупроста, всякое G-симплектическое однородное многообразие изоморфно одной из этих орбит.*

Чтобы продвинуться в описании орбит, нам нужно ввести некоторые подгруппы в G. Прежде всего, напомним, что для кватерниона $x=x_0+x_1i+x_2j+x_3k\in\mathbf{H}$ мы ввели обозначение $\hat{x}=-k\bar{x}k.$ Образ группы $\mathrm{Spin}(4,1)$ при реализации $\tilde{\rho}\colon C\to M_2(\mathbf{H})$ алгебры Клиффорда кватернионными матрицами имеет вид $G=\{A\in M_2(\mathbf{H})\,|\,A^*A=1\}$, где

$$\text{если}\quad A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},\quad\text{то}\quad A^*=\begin{pmatrix}\hat{\delta} & -\hat{\beta}\\ -\hat{\gamma} & \hat{\alpha}\end{pmatrix}.$$

Нужные нам подгруппы определяются так:

$$K=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ -\bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}\in G\,\middle|\,|a|^2+|b|^2=1,\quad a\hat{b}=\hat{b}a\right\},$$

$$A=\left\{\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}\in G\,\middle|\,\lambda=\bar{\lambda},\quad \lambda>0\right\},$$

$$M=\left\{\begin{pmatrix}\bar{u}^{-1} & 0\\ 0 & u\end{pmatrix}\in G\,\middle|\,u\bar{u}=1\right\},$$

$$M_3=\{g\in M\,|\,uk=ku\},$$

$$L=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ \bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}\in G\,\middle|\,|a|^2-|b|^2=1,\quad a\hat{b}=b\hat{a}\right\},$$

$$N^+=\left\{\begin{pmatrix}1 & z\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in G\,\middle|\,z=\hat{z}\right\}.$$

Тогда $G = KAN^+$ — разложение Ивасавы, в котором K — максимальная компактная подгруппа в G, изоморфная $\mathrm{Spin}(4)$, N^+ — нильпотентная подгруппа, A — абелева подгруппа, изоморфная $\mathbf{R}$ и интерпретируемая как группа переносов во времени, L — подгруппа Лоренца в G, переходящая при представлении ρ в подгруппу $SO_0(3, 1) \subset SO_0(4, 1)$.

Однородное пространство G/L называют иногда пространством де Ситтера. Подгруппа M изоморфна $\mathrm{Spin}(3)$; M_3 — ее подгруппа, соответствующая вращениям вокруг третьей оси; $E^{(3)} = N^+M$ является односвязной накрывающей евклидовой группы. Наконец, $P = MAN^+$ — минимальная параболическая подгруппа в G. Положим $H = MA$, $H_3 = M_3A$.

Теорема 13.1.3. $G/P \simeq S^3$.

Теорема 13.1.4. *G/H отождествляется с $T(S^3)$ или с $T^*(S^3)$.*

Доказательство. Пусть

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in KAN^+.$$

Тогда $u(g) = (a + bk)(a - bk)$ — единичный кватернион, обладающий свойством $u(gh) = u(g)$ для всех $h \in \mathbf{H}$. Кроме того, $z(g) = \lambda^2(a + bk)z\widehat{(a + bk)}$ — кватернион, обладающий свойством $z(gh) = z(g) = \widehat{z(g)}$. Одна из реализаций S^3 — множество единичных кватернионов, а $\mathbf{R}^3$ отождествляется с множеством кватернионов со свойством $\hat{z} = z$. Таким образом, мы получаем гладкое отображение $\Phi = (u, z)\colon\ G/H \to S^3 \times \mathbf{R}^3 \simeq T(S^3)$, которое, как можно видеть, является диффеоморфизмом.

Следствие 13.1.5. *Пространство G/H_3 диффеоморфно $S^3 \times \times \mathbf{R}^3 \times S^2$.*

Рассмотрим вкратце структуру орбит. Для орбит типа (i) с $a = \sigma e_1e_2 + \mu e_0e_4$ и $\lambda = \mu^2 - \sigma^2$, $k = -4\mu^2\sigma^2$ каждая орбита получается по одному разу при $\sigma > 0$ и $\mu > 0$. Стабилизатором точки a служит $G(a) = M_3A$. Отображение $2\pi i\hat{a}$: $\mathfrak{g}(a) \to i\mathbf{R}$, задаваемое формулой $2\pi i\hat{a}(\alpha e_1e_2 + \beta e_0e_4) = 2\pi i(-\sigma\alpha + \mu\beta)$, является дифференциалом характера χ_a группы $G(a)$, если и только если $2\pi\sigma = n \in \mathbf{Z}$ и $\beta \in \mathbf{R}$. Существуют 4 поляризации $\mathfrak{h}_{\varepsilon,\delta} = \{e_1e_2, (e_1 - ie_2\varepsilon)e_3, (e_0 + \delta e_4)e_1, (e_0 + \delta e_4)e_2, (e_0 + \delta e_4)e_3\}$, где $\varepsilon, \delta = \pm 1$. Две из них, соответствующие $\varepsilon = 1$, положительны. Для $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{1,1}$ алгебры Ли $\mathfrak{d} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{e} = (\mathfrak{h} + \bar{\mathfrak{h}}) \cap \mathfrak{g}$ являются алгебрами Ли групп $D = M_3AN^+ = G(a)N^+$ и $E = MAN^+ = P$. Поэтому $E/D = M/M_3 = S^2$.

Продолжая характер χ_a с $G(a)$ на D (тривиально на N^+) и индуцируя, мы получаем основную серию представлений $U^{n,\,3/2-2\pi i\mu}$ группы G.

Орбиты типов (iia) и (iib) не имеют положительных поляризаций.

Орбиты типов (iiia) и (iiib) имеют по одной положительной поляризации. Как многообразия эти орбиты изоморфны $S^3 \times \times \mathbf{R}^3 \times S^2$, но, однако, с другим действием группы G, чем в случае (i).

Представления группы G, получаемые из характеров χ_a, принадлежат основной вырожденной серии. Они одинаковы для типов (iiia) и (iiib), но отличны от типа (i).

Для типа (iv) нужно отдельно рассматривать случаи (a) $\lambda > > 0$, (b) $\lambda = 0$ и (c) $\lambda < 0$. В случае (a) существует положительная поляризация, доставляющая новые представления из основной P-серии. Орбита в этом случае диффеоморфна $S^3 \times \mathbf{R}^3 \times S^2$. В случае (b) орбита диффеоморфна $S^3 \times \mathbf{R}^3$ и есть одна положительная поляризация, дающая новые представления вырожденной основной серии. В случае (c) положительных поляризаций нет.

Мы оставляем читателю проверку этих фактов, вычисление формы Кириллова $\Omega(\sigma, \mu)$, а также доказательство того, что класс этой формы определяется классом формы $-2i\sigma(1 + + z\bar{z})^{-2} dz \wedge d\bar{z}$ на $S^2 \simeq CP(1)$, так что $\Omega(\sigma, \mu)$ целочисленна, если и только если $4\pi\sigma = 2n \in \mathbf{Z}$.

Этот пример иллюстрирует трудности геометрического квантования. Нам удалось построить всю основную серию представлений группы G (проверку этого мы оставляем читателю), но оказалось, что различные орбиты приводят к эквивалентным представлениям. Кроме того, для построения основной серии представлений пригодны лишь те орбиты, на которых есть положительные поляризации. Наконец, мы не получили представлений дискретной серии.

Глава **14** **Дискретные серии представлений**

14.1. Представления некомпактных полупростых групп Ли

Часть II. Дискретные серии

Теория Бореля — Вейля и работы Баргманна, Хариш-Чандры, Сельберга, Брюа и др. привели к появлению ряда гипотез Ленглендса о том, как строить дискретные серии представлений некомпактных полупростых групп Ли.

Определение 14.1.1. Пусть $\pi \in \hat{G}$. Представление π называется *квадратично интегрируемым*, если в его пространстве $E(\pi)$ есть ненулевой вектор ψ, для которого функция $g \to (\pi(g)\psi, \psi)$ квадратично интегрируема на G [1]). Если π имеет квадратично интегрируемые матричные коэффициенты, то говорят, что оно принадлежит дискретной серии представлений, которая обозначается через $\hat{G}_d$.

Мы перечислим кратко свойства квадратично интегрируемых представлений в следующей теореме.

Теорема 14.1.2. *Если $\pi \in \hat{G}_d$, то для любых $\psi_1, \psi_2 \in E(\pi)$ функция $f^{\pi}_{\psi_1, \psi_2}(g) = (\pi(g)\psi_1, \psi_2)$ принадлежит $L^2(G)$ и существует такая константа d_π (называемая формальной размерностью представления π), что $\int f^{\pi}_{\psi_1, \psi_2}(g)\overline{f^{\pi}_{\psi'_1, \psi'_2}(g)}\,dg = d_\pi^{-1}(\psi_1, \psi'_1)\overline{(\psi_2, \psi'_2)}$ Если представления $\pi_1, \pi_2 \in \hat{G}_d$ не эквивалентны, то $\int f^{\pi_1}_{\psi_1, \psi_2}(g)\overline{f^{\pi_2}_{\psi'_1, \psi'_2}(g)}\,dg = 0$.*

Пусть G — некомпактная вещественная полупростая группа Ли, которая является связной вещественной формой односвязной комплексной полупростой группы $G^{\mathbf{C}}$. Пусть K — максимальная компактная подгруппа в G и H — компактная картановская подгруппа: $H \subset K \subset G$. Существование такой подгруппы является, согласно теореме Хариш-Чандры, необходимым и достаточным условием наличия дискретной серии представлений. Пусть $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$, $\mathfrak{h}^{\mathbf{C}}$ — комплексные оболочки алгебр Ли $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ групп G и H. Через Δ (соотв. Δ^+) обозначается система корней (соотв. положительных корней) для пары $(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbf{C}})$. Как и выше, в силу компактности H пространство Δ лежит в вещественном линейном пространстве $i\mathfrak{h}^* \subset \mathfrak{h}^*_{\mathbf{C}}$.

---

[1]) Тогда этим свойством обладают все матричные элементы представления π. — *Прим. перев.*

Пусть $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$— картановское разложение, где $\mathfrak{k}$ — алгебра Ли группы K, а $\mathfrak{p}=\{X \mid B(X, Y)=0$ для $Y \in \mathfrak{k}\}$, B — форма Киллинга на $\mathfrak{g}$. Обозначим через $\mathfrak{g}_\alpha$ одномерное корневое подпространство в $\mathfrak{g}^C$, соответствующее корню $\alpha \in \Delta$. Обозначим через

$$\Delta_{\mathfrak{k}}^+ = \{\alpha \in \Delta^+ \mid \mathfrak{g}_\alpha \in \mathfrak{k}^C\},$$
$$\Delta_{\mathfrak{p}}^+ = \{\alpha \in \Delta^+ \mid \mathfrak{g}_\alpha \in \mathfrak{p}^C\}$$

множества *положительных компактных* (соотв. *некомпактных*) корней. Введем полусуммы

$$\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+}\alpha, \quad \delta_{\mathfrak{k}} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_{\mathfrak{k}}^+}\alpha, \quad \delta_{\mathfrak{p}} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_{\mathfrak{p}}^+}\alpha.$$

Если $X_1, \ldots, X_m$ и $Y_1, \ldots, Y_n$ — ортонормированные базисы для $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{p}$ соответственно, то оператор Казимира — это $\mathfrak{c} = -\sum_i X_i^2 + \sum_j Y_j^2$,

Как обычно, вводится скалярное произведение (,) на пространстве $\mathrm{Hom}(i\mathfrak{h}, \mathbf{R})$. Введем множество

$$\mathscr{F} = \left\{ \mu \in \mathrm{Hom}(i\mathfrak{h}, \mathbf{R}) \mid \frac{2(\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbf{Z} \text{ для } \alpha \in \Delta \right\},$$

изоморфное $\hat{H}$ с помощью отображения $\mu \to e^\mu$. Пусть $\mathscr{F}' = \{\lambda \in \mathscr{F} \mid (\lambda, \alpha) \neq 0$ для всех $\alpha \in \Delta\}$. Положим

$$\mathscr{F}_0 = \left\{ \mu \in \mathrm{Hom}(i\mathfrak{h}, \mathbf{R}) \mid \frac{2(\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbf{Z} \text{ и } > 0 \text{ для } \alpha \in \Delta_{\mathfrak{k}}^+ \right\}.$$

С каждым $\mu \in \mathscr{F}_0$ связан неприводимый K-модуль V_μ со старшим весом μ.

Пусть $W(H) = N(H)/H$ означает группу Вейля для G и H' — множество *регулярных элементов в* H, т. е. $H' = H \setminus \exp\mathfrak{h}_s$, где $\mathfrak{h}_s = \{Y \in \mathfrak{h} \mid \alpha(Y) = 0$ для некоторого $\alpha \in \Delta\}$.

Теорема 4.1.3 (Хариш-Чандра). (i) *G имеет дискретную серию представлений, если и только если* $\mathrm{rank}(G) = \mathrm{rank}(H)$.

(ii) (Обобщенная теорема о старшем весе). *Существует естественно сюръективное отображение* ω: $\mathscr{F}_0 \to \hat{G}_d$, *причем* $\omega(\lambda) = \omega(\lambda')$, *если и только если* $\lambda' = w\lambda$ *для* $w \in W(H)$.

(iii) (Обобщенная формула Вейля для характера). *Для* $\lambda \in \mathscr{F}_0$ *существует единственная обобщенная функция умеренного роста* Θ_λ, *для которой*

$$\Delta(\exp Y)\Theta_\lambda(\exp Y) = \sum_{w\in W(H)} \varepsilon(w)\exp(w\lambda(Y)),$$

где $\exp Y \in H'$, $\quad \Delta(\exp Y) = \prod_{\alpha\in\Delta^+} [\exp(\alpha(Y)/2) - \exp(-\alpha(Y)/2)].$

(iv) *Для* $\lambda \in \mathscr{F}_0$ *существует единственный класс неприводимых представлений* $\omega(\lambda) \in \hat{G}_d$, *характер которого* $\chi_{\omega(\lambda)}$ *совпадает с* $(-1)^n \varepsilon(\lambda)\Theta_\lambda$, *где* $n = (1/2)\dim G/K$, *а* $\varepsilon(\lambda) = \operatorname{sgn} \prod\limits_{\alpha \in \Delta^+} (\lambda, \alpha)$.

Наиболее изучен случай $G = SO_0(n, 1)$. Замечая, что в этом случае $\operatorname{rank} G = [(n+1)/2]$, $\operatorname{rank} K = [n/2]$, мы видим, что дискретная серия имеется лишь для четных n.

Пример 14.1.4. Классическим примером является группа $SL(2, \mathbf{R})$. В этом случае

$$M = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \text{ и } \operatorname{rank} G = \operatorname{rank} K = \dim A = 1.$$

Алгебра Ли группы K имеет вид

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbf{R} \right\}.$$

Дискретная серия представлений реализуется в гильбертовых пространствах $\mathscr{H}_n^{\pm}$, состоящих из голоморфных или антиголоморфных функций на полуплоскости Пуанкаре $\mathscr{P} = SL(2, \mathbf{R})/SO(2)$ со скалярным произведением

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{\Gamma(2n-1)} \int_{\mathscr{P}} f_1(x+iy) \overline{f_2(x+iy)}\, y^{-2+2n}\, dx\, dy$$

и задается формулами

$$\pi_n^+(g) f(z) = (bz+d)^{-2n} f\left(\frac{az+c}{bz+d}\right), \quad f \in \mathscr{H}_n^+,$$

и

$$\pi_n^-(g) f(z) = (b\bar{z}+d)^{-2n} f\left(\frac{az+c}{bz+d}\right), \quad f \in \mathscr{H}_n^-.$$

Эти представления Баргманна обозначим через $D_n^{\pm}$. Группа G имеет два класса сопряженности картановских подгрупп:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h^{-1} \end{pmatrix} \middle| h \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \right\}$$

и

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \middle| \varphi \in \mathbf{R} \right\}.$$

Минимальной параболической подгруппой является

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \quad b \in \mathbf{R} \right\}.$$

Характеры представлений $D_n^{\pm}$ при ограничении на K имеют вид

$$\Theta_n^{\pm}(k) = \frac{\exp(\pm i\varphi(2n-1))}{\pm(\exp(i\varphi) - \exp(-i\varphi))}$$

для регулярных $k \in K$.

Формула Планшереля в этом случае хорошо известна и имеет вид

$$\int_G \|f\|^2 dg = \int_0^\infty \|\pi(1, \rho)(f)\|_2^2 \rho \operatorname{th}(\pi\rho) d\rho + \\ + \int_0^\infty \|\pi(-1, \rho)(f)\|_2^2 \rho \operatorname{cth}(\pi\rho) d\rho + \\ + \sum_{\substack{n \geqslant 1 \\ 2n \in \mathbf{Z}}} (a - 1/2)\left(\|\pi_n^+(f)\|_2^2 + \|\pi_n^-(f)\|_2^2\right)$$

для $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Это ясно показывает необходимость изучения и основной и дискретной серии представлений.

Вместо того чтобы привести точный аналог теоремы Бореля — Вейля, мы изложим другой подход, связанный с использованием оператора Казимира. Пусть $U(\mathfrak{g})$ означает обертывающую алгебру для алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Каждый $X \in U(\mathfrak{g})$ задает левоинвариантный дифференциальный оператор $\nu(X)$ в пространстве $A(G)$. Это соответствие является изоморфизмом. Можно также отождествить $U(\mathfrak{g})$ как линейное пространство с пространством полиномиальных функций на $\mathfrak{g}^*$. Пусть $Z(\mathfrak{g})$ — центр $U(\mathfrak{g})$. При указанном отождествлении элементам $Z(\mathfrak{g})$ соответствуют многочлены на $\mathfrak{g}^*$, инвариантные относительно коприсоединенного действия G.

Представление T группы G порождает представление алгебры $U(\mathfrak{g})$ в пространстве Гординга. Если T неприводимо, а $z \in Z(\mathfrak{g})$, то оператор $T(z)$ скалярен: $T(z) = \chi_T(z) \cdot 1$. Гомоморфизм $z \to \chi_T(z)$: $Z(\mathfrak{g}) \to \mathbf{C}$ называется *инфинитезимальным характером* представления T.

Если $\mathfrak{c}$ — оператор Казимира, то $\mathfrak{c} \in Z(\mathfrak{g})$ и $T(\mathfrak{c}) = \chi_T(\mathfrak{c}) \cdot 1$.

Если операторы $T(f)$, $f \in A_0(G)$, имеют след $\Theta_T(f)$, то для $z \in Z(G)$ мы имеем $z\Theta_T(f) = \Theta_T(z*f) = \operatorname{tr} T(z*f) = \operatorname{tr}(T(z)T(f)) = \chi_T(z)\Theta_T(f)$. Другими словами, справедлива

Теорема 14.1.5. *Характеры неприводимых представлений являются собственными функциями операторов из $Z(\mathfrak{g})$, а инфинитезимальные характеры задают собственные значения.*

Таким образом, формула Планшереля $\delta = \int_{\hat{G}} \Theta_\pi d\mu(\pi)$ может рассматриваться как разложение δ по собственным функциям операторов из $Z(\mathfrak{g})$. Детали см. в [M 21].

Пример 14.1.6 (группа де Ситтера). Пусть G — односвязная накрывающая группы де Ситтера, K — ее максимальная компактная подгруппа и $\rho^{n,0} \in \hat{K}$. Пусть $V(\rho)$ — пространство представления ρ. Для полуцелого числа $p \geqslant 1$ обозначим через $H^{\rho,p}$ гильбертово пространство функций f: $G/K \to V(\rho)$, квадратично интегрируемых с весом:

$$(f_1, f_2) = \int_{G/K} (f_1(q), f_2(q))_{V(\rho)} (1 - |q|^2)^{2p-2} d\mu(q).$$

Пусть G действует на $H^{\rho,p}$ по формуле

$$T^{n,p}(g) f(q) = |cq + d|^{-2p-2} \rho(k(g^{-1}, q^{-1})) f\left(\frac{aq+d}{cq+d}\right),$$

$$\text{где} \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad k(g, q) = \begin{pmatrix} \frac{a+bq}{|a+bq|} & 0 \\ 0 & \frac{cq+d}{|cq+d|} \end{pmatrix}.$$

Здесь n, p — полуцелые числа, такие, что $n \geqslant p \geqslant 1$ и $n - p \in \mathbb{Z}$.

Обозначим через $S^{\rho,p}$ подпространство в $H^{\rho,p}$, состоящее из решений уравнения

$$\Big[\frac{1-|q|^2}{4}\Delta - pD - \frac{1}{2}\left(D_1^{\vee} A_n + D_2^{\vee} B_n + D_3^{\vee} C_n\right) + \\ + (n-p)(n+p+1)\Big] f = 0,$$

где Δ — оператор Лапласа, а $D_i^{\vee}$ — некоторые операторы первого порядка (см. статью Такахаси [T 2] по поводу точного определения $D_i^{\vee}$ и коэффициентов A_n, B_n, C_n). Это уравнение эквивалентно равенству

$$\nu(\mathfrak{c}) f = [-n(n+1) - (p+1)(p-2)] f. \qquad (*)$$

Теорема 14.1.7 (Такахаси). *Оператор Казимира $\nu(\mathfrak{c})$ эллиптичен и пространство $S^{\rho,p}$ гладких функций из $H^{\rho,p}$, являющихся решениями уравнения $(*)$, образует неприводимый G-модуль, принадлежащий $\hat{G}_d$.*

Формальная размерность этого представления равна $(2n+1)(2p-1)(n+p)(n-p+1)/16\pi^2$. Формула Планшереля для $f \in L^2(K \backslash G/K)$ имеет вид

$$\int |f(g)|^2 dg =$$

$$= \frac{1}{8\pi^2} \sum_n (2n+1) \int_0^\infty \left\| U^{n, \frac{3}{2}+i\nu}(f) \right\|_2^2 \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \nu^2\right] \nu \operatorname{th}(\nu + in)\, d\nu +$$

$$+ \frac{1}{16\pi^2} \sum_{n \geqslant 1} (2n+1) \sum_{\substack{1 \leqslant p \leqslant n \\ n-p \in \mathbb{Z}}} (2p-1)(n+p)(n-p+1) \| T^{n,p}(f) \|_2^2.$$

Каждому $\lambda \in \mathscr{F}_0$ соответствует класс $[\lambda] \in \hat{K}$. А именно пусть $\varepsilon_{\mathfrak{k}}(\lambda) = \operatorname{sign} \prod_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{k}}^{+}} (\lambda, \alpha)$. Если $\varepsilon_{\mathfrak{k}}(\lambda + \delta_{\mathfrak{k}}) \neq 0$, то существует единственный элемент w в $W(H)$, для которого $(w(\gamma + \delta_{\mathfrak{k}}), \alpha) > 0$ для всех $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{k}}^{+}$. Пусть $[\lambda]$ означает класс эквивалентности неприводимого K-модуля со старшим весом $w(\lambda + \delta_{\mathfrak{k}}) - \delta_{\mathfrak{k}}$. Разумеется, $[\lambda] \in \hat{K}$ реализуется по теореме Бореля — Вейля для K.

Пусть V_λ — конечномерный унитарный K-модуль. Положим $V(\lambda) = G \times_K V_\lambda$. Это — однородное векторное расслоение над G/K. Пространство квадратично интегрируемых сечений $V(\lambda)$ изоморфно $L^2(V(\lambda)) = \{f\colon G \to V_\lambda \mid f \in L^2(G)$ и $f(gk) = k^{-1}f(g)\}$. Левое регулярное представление на $L^2(G)$ порождает унитарное действие G в $L^2(V(\lambda))$. Пусть $S(V(\lambda))$ означает пространство V_λ-значных гладких функций на G, для которых $f(gk) = k^{-1}f(g)$, $k \in K$. Пусть $\mathscr{H}(\lambda) = \{f \in S(V(\lambda)) \cap L^2(V(\lambda)) \mid \nu(\Omega) f = (\lambda + 2\delta_{\mathfrak{k}}, \lambda) f\}$. Следующие утверждения являются обобщением более ранних результатов, принадлежащих Хотта, Шмиду и др.

Теорема 14.1.8 (Хотта — Партасарата). *Пусть $\Lambda \in \mathscr{F}_0$ и $(\Lambda, \alpha) > 0$ для $\alpha \in \Delta^+$. Пусть $\lambda = \Lambda - \delta$. Предположим, что* (i) $(\lambda, \alpha) \geqslant 0$ *для всех* $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{p}}^{+}$ *и* (ii) $(\lambda, \alpha) \geqslant a = \max_{Q \subset \Delta_{\mathfrak{p}}^{+}} (\delta_{\mathfrak{p}} - \langle Q \rangle, \alpha)$ *для всех* $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{k}}^{+}$. *Здесь* $\langle Q \rangle = 1/2 \sum_{\alpha \in Q} \alpha$. *Тогда класс представления* $\omega(\Lambda) = \omega(\lambda + \delta) \in \hat{G}_d$ *реализуется с помощью левого регулярного представления G в пространстве $\mathscr{H}(\lambda)$ квадратично интегрируемых $V_{\lambda + 2\delta_{\mathfrak{p}}}$-значных функций f на G, для которых $f(gk) = k^{-1}f(g)$ при $g \in G$, $k \in K$ и которые удовлетворяют уравнению $\nu(\mathfrak{c})f = (|\Lambda|^2 - |\delta|^2)f$. Характер этого представления равен $\Theta_{\omega(\lambda+\delta)} = \Theta_{\omega(\Lambda)}$.*

В случае, когда G/K допускает инвариантную комплексную структуру и все корни в $\Delta_{\mathfrak{p}}^{+}$ вполне положительны, теорема 14.1.8 сводится к теореме Нарасимхана — Окамоты из [N 1]. В этом случае голоморфное кокасательное пространство к G/K в точке eK отождествляется с $\mathfrak{p}^{+} = \sum_{\beta \in \Delta_{\mathfrak{p}}^{+}} \mathfrak{g}_\beta$, а $V(\lambda)$ является голоморфным векторным расслоением над G/K. Оператор Лапласа — Бельтрами для комплекса Дольбо, ассоциированного с $V(\lambda)$, имеет вид

$$\square = -1/2(\nu(\mathfrak{c}) - (\lambda + 2\delta, \lambda) \cdot 1).$$

Мы можем рассматривать пространства $C^{0,q}(V(\lambda))$ (соотв. $L_2^{0,q}(V(\lambda))$ гладких (соотв. квадратично интегрируемых) дифференциальных форм типа $(0, q)$ с коэффициентами в $V(\lambda)$. Как и выше, вводится пространство $\mathscr{H}_2^{0,\,q}$ гармонических форм. Пространство $\mathscr{H}(\lambda)$ эквивалентно пространству L^2-когомологий. В этом случае можно положить $a = 0$.

Если G/K не допускает комплексной структуры, теорема 14.1.8 является обобщением теоремы Такахаси 14.1.7 об односвязной накрывающей $\mathrm{Spin}(2m, 1)$ группы де Ситтера $SO_0(2m, 1)$. В этом случае также можно положить $a = 0$ и теорема 14.1.8 дает реализацию всей дискретной серии. А именно, используя диссертацию Шмида, можно показать, что теорема справедлива для всех дискретных классов представлений группы $\mathrm{Spin}(2m, 1)$.

Задачи

Упражнение 14.1. Рассмотрим группу $SO(n, 2)$ линейных преобразований $\mathbf{R}^{n+2}$, сохраняющих форму

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & 1 & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \\ 0 & & & & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathfrak{so}(n, 2)$ означает алгебру Ли этой группы с базисом $X_{ij} = -X_{ji}$ и законом коммутирования $[X_{ij}, X_{hk}] = g_{ih}X_{jk} + g_{jk}X_{ih} - g_{jh}X_{ik} - g_{ik}X_{jh}$. Положим $S = X_{12}$, $M_{\mu\nu} = X_{\mu+2,\,\nu+2}$, $Z_\mu = X_{1,\,\mu+2}$, $W_\mu = X_{2,\,\mu+2}$, $\mu, \nu = 1, \ldots, n$. Форма

$$B(X, Y) = \frac{1}{2n}\,\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\,X\,\mathrm{ad}\,Y)$$

невырожденна и можно ввести дуальный базис $X^\flat$ с помощью равенства $X^\flat(Y) = B(X, Y)$. Показать, что $B(X_{ij}, X_{hk}) = g_{ik}g_{jh} - g_{ih}g_{jk}$. Общей точкой в $\mathfrak{so}(n, 2)^*$ является $\omega = sS^\flat + \sum m_{\mu\nu}M^\flat_{\mu\nu} + \sum z_\mu Z^\flat_\mu + \sum w_\mu W^\flat_\mu$, которую мы обозначим $(s, m_{\mu\nu}, z_\mu, w_\mu)$. Пусть $\mathcal{O}_{\omega_l} = \{\omega \mid s^2 + \sum m^2_{\mu\nu} - \sum(z^2_\mu + w^2_\mu) = l^2,\ sm_{\mu\nu} = z_\mu w_\nu - z_\nu w_\mu,\ l > 0\}$. Определим $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathbf{C}^n$, полагая $\sigma_\mu = z_\mu - iw_\mu$. Показать, что отображение $\mu_l\colon \mathcal{O}_{\omega^l} \to \mathbf{C}^n$,

$$\mu_l(\omega) = \frac{i}{2s}\left(\sigma + \frac{\sigma\bar{\sigma}^T}{2s\,(s+1) - \sigma\bar{\sigma}^T}\,\sigma\right),$$

гладко, невырожденно и отождествляет $\mathcal{O}_{\omega_l}$ с однородной ограниченной областью типа IV

$$\mathscr{D} = \{\zeta \in \mathbf{C}^n \mid \zeta\bar{\zeta}^T < 1,\ 1 - 2\zeta\bar{\zeta}^T + |\zeta\zeta^T|^2 > 0\}.$$

Определим представление группы $SO(n, 2)$ в пространстве голоморфных функций на $\mathscr{D}$, полагая $U(g)\Psi(\zeta) = \mu(g, \zeta)\Psi(g^{-1}\zeta)$.

Это представление голоморфно индуцировано с характера $\exp(i(l+n/2-1)S^b)$. Вычислить $\mu(g, \zeta)$. Скалярное произведение вводится по формуле

$$\langle\Psi_1 \mid \Psi_2\rangle = N \int\limits_{\mathscr{D}} \overline{\Psi_1(\zeta)}\,\Psi_2(\zeta)\,(1-2\zeta\bar{\zeta}^T+|\zeta\zeta^T|^2)^{l-n/2-1}\prod_\mu \frac{d\zeta_\mu \wedge d\bar{\zeta}_\mu}{2i},$$

где N — нормировочная константа. Вычислить N.

Показать, что гильбертово пространство H_l с этим скалярным произведением нетривиально, если и только если $l > n/2$; в этом случае представление $SO(n, 2)$ в H_l неприводимо и унитарно.

Определим когерентные состояния $|\zeta\rangle$ в H_l равенством

$$\langle\zeta \mid \Psi\rangle = N \int\limits_{\mathscr{D}} \overline{\zeta(\xi)}\,\Psi(\xi)\,a(\xi)\,d\xi,$$

где

$$\zeta(\xi) = \langle\xi \mid \zeta\rangle = (1-2\xi\bar{\zeta}^T+\xi\xi^T\zeta\bar{\zeta}^T)^{-l-n/2+1},$$

$$a(\xi) = (1-2\xi\xi^T+|\bar{\xi}\xi^T|^2)^{l-n/2-1}$$

и

$$d\xi = \prod_\mu \frac{d\xi_\mu \wedge d\bar{\xi}_\mu}{2i}.$$

Показать, что $U(g)\,|\zeta\rangle = \overline{\mu(g^{-1}, \zeta)}\,|g\zeta\rangle$. Вычислить представление $X \to \hat{X}$ алгебры Ли $\mathfrak{so}(n, 2)$, соответствующее $U(g)$. В частности, проверить, что $\hat{S} = (l+n/2-1)+\sum \zeta_\mu\partial_\mu$, $\hat{M}_{\mu\nu} = -i(\zeta_\mu\partial_\nu-\zeta_\nu\partial_\mu)$, где $\partial_\mu = \partial/\partial\zeta_\mu$. Вычислить величину $\langle\zeta|\hat{X}|\zeta\rangle/\langle\zeta|\zeta\rangle$.

Пусть δ — полусумма положительных корней, а δ_c — полусумма положительных компактных корней. Для $n = 2r-1$ показать, что $\mathfrak{so}(n, 2) \simeq B_r$, $i\omega_l = le_1 = ilS^b$. Показать, что $\delta - \delta_c = -(r-1/2)e_1$, а $i\omega_l - \delta + \delta_c = (l+r-1/2)e_1$. Показать, что если $W_K\lambda_0 = \lambda_0$ и $w(i\omega_l + \delta_c)$ лежат в камере Вейля, то соответствие $\omega_l \to \lambda = i\omega_l - \delta + w^{-1}\delta_c + \lambda_0$ является W_K-инвариантным правилом квантования.

Пусть $\mathcal{O}_{\omega_0} = \{\omega \mid s^2 + \sum m_{\mu\nu}^2 = \sum (z_\mu^2 + w_\mu^2),\ sm_{\mu\nu} = z_\mu w_\nu - z_\nu w_\mu,\ \sum z_\mu^2 = \sum w_\mu^2,\ \sum z_\mu w_\mu = 0\}$.

Показать, что $\mathcal{O}_{\omega_0} = \mathbf{R} \times SO(n)/SO(n-2)$.

Связать $\omega = (s, m_{\mu\nu}, z_\mu, w_\mu)$ с задачей Кеплера $H = p^2/2m - k/r$ на $T^*(\mathbf{R}^{n-1} \setminus \{0\})$ с координатами $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, полагая

$$p^2 = (\mathbf{p}, \mathbf{p}), \quad r = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}, \quad \mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_{n-1}),$$

$$\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_{n-1}), \quad \boldsymbol{\rho} = (m_{1n}, \ldots, m_{n-1,\,n}).$$

Положить

$$s = mk/(-2mH)^{1/2},$$

$$\sigma = \mathbf{z} - i\mathbf{w} = (r\mathbf{p} + imk\mathbf{x}/r - (\mathbf{x},\ \mathbf{p})\,\mathbf{p}) \exp\{i(-2mH)^{1/2} + \\ + i(\mathbf{x},\ \mathbf{p})\}(-2mH)^{1/2},$$

$$\sigma_n = z_n - iw_n = \left(r\frac{p^2 - mk}{(-2mH)^{1/2}} + i(\mathbf{x},\ \mathbf{p})\right)\exp\left(i(-2mH)^{1/2} + i(\mathbf{x},\mathbf{p})\right),$$

$$m_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \quad \mu,\ \nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,$$

$$\rho = (p^2\mathbf{x} - (\mathbf{x},\ \mathbf{p})\,\mathbf{p})/(-2mH)^{1/2} - mk\mathbf{x}/r.$$

Здесь ρ — так называемый вектор Рунге — Ленца, а z_μ, w_μ — параметры Бакри — Джорджи.

Упражнение 14.2. Гамильтониан гармонического осциллятора $H = (-1/2)\,d^2/dx^2 + x^2/2$ можно записать в форме $H = a^+a + 1/2$, где $a = (1/2)(x + d/dx)$, $a^+ = (1/2)(x - d/dx)$. Проверить, что $[H, a^{+2}] = 2a^{+2}$, $[H, a^2] = -2a^2$ и $[a^{+2}, a^2] = 4H$. Таким образом, a^2, a^{+2} и H образуют алгебру Ли группы $SO(2, 1)$ (матрицы с определителем 1, сохраняющие форму $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2$). Показать, что оператор Казимира

$$c = \frac{1}{4}\left(\frac{a^2a^{+2} + a^{+2}a^2}{2} - H^2\right)$$

сводится к скаляру 3/16. Таким образом, совокупность всех волновых функций

$$\Psi_n = \sqrt{2}\sqrt{\frac{n!}{\Gamma(n + 3/2)}}\,L_n^{1/2}\left(x^2\right)e^{-x^2/2}$$

(где $L_n^{1/2}$ — многочлены Лагерра) с уровнем энергии $E_n = 2n + 3/2$ преобразуется по неприводимому представлению $D_{3/4}^+$ дискретной серии группы $SO(2, 1)$ (обратите внимание на сдвиг основного уровня энергии)[1]. Показать, что аналогичный подход применим к случаю $\tilde{H} = H + V$, где $V = g/x^2$ с заменами $a^{+2} \to B_2^+ = a^{+2} - g/x^2$, $a^2 \to B_2 = a^2 - g/x^2$ и $D_{3/4}^+ \to D_k^+$, где $k = (1/2)\left(1 + \sqrt{1/4 + 2g}\right)$.

[1] На самом деле здесь имеется лишь представление алгебры Ли, не продолжающееся до представления группы. — *Прим. перев.*

Глава 15 Представления и автоморфные формы

15.1. Геометрическое квантование и автоморфные формы

Из определения 11.1.1 следует

Теорема 15.1.1. *Пусть M — компактное комплексное многообразие, первый класс Черна которого содержит кэлерову форму. Тогда любой класс когомологий $nc_1(M)$, $n=0, 1, 2, \ldots$, является классом некоторого квантового расслоения над M.*

Такие многообразия уже изучались Кодаирой.

Теорема 15.1.2 (Кодаира). *Если M — компактное комплексное многообразие с кэлеровой формой, допускающее накрытие открытой ограниченной областью в $\mathbf{C}^n$, то $c_1(M)$ содержит кэлерову форму.*

Многообразия M, называемые *однородными ограниченными областями* в $\mathbf{C}^n$, были классифицированы Хариш-Чандрой. А именно такое пространство является произведением многообразий вида $\Gamma\backslash G/K=\Gamma\backslash N$, где G — некомпактная простая группа Ли с тривиальным центром, K — ее максимальная связная компактная подгруппа, а Γ — дискретная подгруппа в G.

Как мы видели в теореме 10.1.7, все линейные расслоения над C-пространствами однородны. В рассматриваемом здесь случае $M=\Gamma\backslash N$, где N — ограниченная симметрическая область, аналогичное утверждение доказывается с помощью рассмотрения факторов автоморфности.

Определение 15.1.3. *Фактором автоморфности* называется гладкое отображение J: $N\times\Gamma\to\mathbf{C}^*$ (или в $GL(m, \mathbf{C})$), обладающее свойствами (i) $J(z,\gamma\delta)=J(z\gamma,\delta)J(z,\gamma)$ и (ii) J голоморфно по z.

Определение 15.1.4. Γ-*автоморфной формой* с фактором J называется $\mathbf{C}$-(соотв. $\mathbf{C}^m$-) значная голоморфная функция на N, обладающая свойством $f(\gamma z)=J(z,\gamma)f(z)$ для $\gamma\in\Gamma$.

Определение 15.1.5. Два фактора автоморфности J и J' называются *эквивалентными*, если существует такая необращающаяся в нуль голоморфная функция f на N, что $J'(z,\gamma)=$ $=J(z,\gamma)f(z\gamma)/f(z)$ для всех $(z,\gamma)\in N\times\Gamma$.

Ясно, что если J и J' — факторы автоморфности, то факторами автоморфности будут и JJ' и J^{-1}. Таким образом, как сами факторы автоморфности, так и их классы эквивалентности образуют группу. Обозначим последнюю через $\mathscr{A}$. По данному фактору автоморфности J можно определить линейное расслоение $E(J)$ с помощью отношения эквивалентности $(z, \mathfrak{z}) \sim \sim (z\gamma, J(z, \gamma)\mathfrak{z})$ на $N \times \mathbf{C}$.

Теорема 15.1.6. *Расслоения $E(J)$ и $E(J')$ эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны факторы автоморфности J и J'.*

Доказательство — простая проверка.

Далее, линейное расслоение E над $M = \Gamma \backslash N$ определяется фактором автоморфности, если и только если расслоение p^*E над N аналитически тривиально (p — проекция N на M). В случае когда N — однородная ограниченная область, N является многообразием Штейна; поэтому все комплексные линейные расслоения над N аналитически тривиальны. Таким образом, справедлива

Теорема 15.1.7. *Каждое комплексное линейное расслоение над M, в частности каждое квантовое расслоение, задается фактором автоморфности. Группа классов линейных расслоений изоморфна $\mathscr{A}$.*

Пример 15.1.8. Классическим примером является $\Gamma \backslash \mathscr{P}$, где $\mathscr{P}$ — верхняя полуплоскость Пуанкаре. Элемент

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{R})$$

действует на $z \in \mathscr{P} \simeq SL(2, \mathbf{R})/SO(2)$ по формуле $z \mapsto (az + + b)/(cz + d)$. Если положить $J = cz + d$, то можно проверить, что (i) $J(gg', z) = J(g, g'z) J(g', z)$ и (ii) $\chi(k) = J(k, i) = \exp i\vartheta$, где

$$k = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \in SO(2).$$

Отобразим G на $\mathscr{P}$: $g \to z(g) = (ai + b)/(ci + d)$, и определим $\varphi(g)$ равенством $\exp i\varphi(g) = \chi(g)/\overline{\chi(g)}$, где $\chi(g) = ci + d$. Тогда $z(g)$, $\bar{z}(g)$ и $\varphi(g)$ образуют систему координат на G. Комплексная алгебра Ли $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ имеет в этих координатах базис

$$H = -\partial/\partial\varphi, \quad E = \exp(-i\varphi)(\partial/\partial\varphi + 2y\exp(-i\varphi)(\partial/\partial z),$$

$$\bar{E} = \exp(i\varphi)(\partial/\partial\varphi) + 2y\exp(i\varphi)(\partial/\partial\bar{z}), \text{ где } y = \operatorname{Im} z.$$

Оператор Казимира имеет вид

$$\mathfrak{c} = (1/4)(E\bar{E} + \bar{E}E) - (1/2)H^2 = 2y^2\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}} + y\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right).$$

Голоморфная функция на $\mathscr{P}$ называется Г-автоморфной формой веса $-(2+n)$, если для

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \subset G$$

выполняется соотношение $f(\gamma(z)) = (cz+d)^{2n} f(z)$. Обозначим через $A(\Gamma, n+2)$ пространство таких форм.

Ограниченные симметрические области на языке алгебры Ли описываются следующим образом. Пусть $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}} = \mathfrak{k}^{\mathbf{C}} + \mathfrak{p}^{\mathbf{C}}$ — картановское разложение и $\mathfrak{p}^{\mathbf{C}} = \mathfrak{n}^{+} + \mathfrak{n}^{-}$, где $\mathfrak{n}^{\pm}$ — абелевы подалгебры в $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$. Существует такое подмножество Ψ положительных корней, что $\mathfrak{n}^{+} = \sum_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_{\alpha}$ и $\mathfrak{n}^{-} = \sum_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_{\bar{\alpha}}$. Выберем $e_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ так, чтобы $\langle e_{\alpha}, e_{\bar{\alpha}} \rangle = 1$ для всех $\alpha \in \Psi$. Тогда $e_{\bar{\alpha}} = \bar{e}_{\alpha}$, где черта сверху означает сопряжение в $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ относительно вещественной формы $\mathfrak{g}$. Если $\Delta^{+} = \Psi \cup \Theta$, где $\Theta = \{\alpha \in \Delta^{+} \mid e_{\alpha} \in \mathfrak{k}^{\mathbf{C}}\}$ и $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — множество простых корней, то мы предположим, что $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ лежат в Ψ. Здесь s совпадает с числом простых сомножителей $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$.

Теорема 15.1.9. *Если* $\Psi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}$ *и* $a = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$, *то* $\sum [e_{\alpha_i}, e_{\bar{\alpha}_i}] = a$, $\langle a, \alpha_i \rangle = 1/2$ *для* $i = 1, 2, \ldots, N$.

Доказательство. Поскольку $\langle e_{\alpha_i}, e_{\bar{\alpha}_i} \rangle = 1$, мы имеем $\langle [e_{\alpha_i}, e_{\bar{\alpha}_i}], Y \rangle = \langle e_{\bar{\alpha}_i}, [Y, e_{\alpha_i}] \rangle = \alpha_i(Y)$ для $Y \in \mathfrak{h}^{\mathbf{C}}$. Остальное предоставляется читателю.

Пусть V — конечномерное комплексное векторное пространство и J есть $GL(V)$-значный фактор автоморфности на $G \times G/K$, т. е. такое гладкое отображение J: $G \times G/K \to GL(V)$, что $J(st, x) = J(s, tx) J(t, x)$ для $s, t \in G$ и $x \in G/K = N$. Пусть $A^r(\Gamma, N, J)$ — пространство всех гладких V-значных форм φ степени r на N, для которых $\varphi \circ L_{\gamma} = \nu(x, \gamma) \circ \varphi$, где L_{γ} означает оператор сдвига на $\gamma \in \Gamma$. Разумеется, $A^r(\Gamma, N, J)$ изоморфно пространству гладких r-форм со значениями в $E(J)$.

В случае когда N — ограниченная симметрическая область в $\mathbf{C}^n$, мы предположим, что J голоморфно по x. Тогда $A^r(\Gamma, N, J)$ распадается в прямую сумму $\sum A^{p,q}(\Gamma, N, J)$, что позволяет рассматривать d''-когомологии $H^{p,q}_{d''}(\Gamma, N, J)$ комплекса вектор-форм.

Мы будем также рассматривать случай, когда $J = \rho$ — представление группы G на V. Наконец, оба эти случая объединяются вместе, если рассмотреть $J_{\tau}(s, x) = \tau(J(s, x))$, где τ — голоморфное представление $K^{\mathbf{C}}$. Мы будем называть J_{τ} *каноническим* фактором автоморфности типа τ.

Пусть ρ — неприводимое представление $G^{\mathbf{C}}$ в пространстве V со старшим весом Λ и соответствующим собственным подпространством V_Λ. Пусть $S_1=\{v\in V\,|\,\rho(X)v=0$ для $X\in\mathfrak{n}^+\}$. Тогда S_1 инвариантно относительно $K^{\mathbf{C}}$, и мы обозначим через τ соответствующее представление.

Теорема 15.1.10 (Мацусима — Мураками). $H^{0,q}(\Gamma, N, J_\tau)\simeq$ $\simeq H^{0,q}_{d''}(\Gamma, N, \rho)$ *для* $q=0, 1, \ldots, n=\dim_{\mathbf{C}} N$.

Теорема 15.1.11 (Мацусима — Мураками). *Пусть* Λ — *старший вес представления* ρ *и* q_ρ — *число корней* $\alpha\in\Psi$, *для которых* $\langle\Lambda,\alpha\rangle>0$. *Тогда* $H^{0,q}_{d''}(\Gamma, N, \rho)=0$ *для* $q=0, 1, \ldots$ $\ldots, q_\rho-1$.

Следствие 15.1.12. *Если* $\langle\Lambda,\alpha_i\rangle>0$ *для* $i=1, \ldots, s$, *где* α_i — *простые корни из* Ψ, *то* $H^{0,q}_{d''}(\Gamma, N, \rho)=0$ *при* $q<n=\dim_{\mathbf{C}} N$

Следствие 15.1.13. *Пусть* $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ — *простая алгебра Ли и* τ — *голоморфное представление* $K^{\mathbf{C}}$ *в комплексном векторном пространстве* S *со старшим весом* Λ. *Пусть* $\sigma(t)=\det\mathrm{Ad}(t)$ — *одномерное представление* $K^{\mathbf{C}}$. *Тогда*

(i) *если* $\langle\Lambda,\alpha_1\rangle>0$, *то* $H^{0,q}_{d''}(\Gamma, N, J_\tau)=0$ *для* $q<n$;

(ii) *если* $r>-2\langle\Lambda,\alpha_1\rangle$, *то* $H^{0,q}_{d''}(\Gamma, N, J_{\sigma^{-r}\otimes\tau})=0$ *для* $q<n$.

Доказательство следствия оставляется читателю; первая часть непосредственно вытекает из предыдущей теоремы, а вторая часть следует из первой и теоремы 15.1.9.

Тот факт, что множитель $cz+d$ в примере 15.1.8 является якобианом преобразования γ в точке z, подсказывает

Определение 15.1.14. Голоморфная функция f на M называется *автоморфной формой* веса r относительно Γ, если для всех $m\in M$, $\gamma\in\Gamma$ справедливо равенство $f(\gamma m)=j_\gamma^{-r}(m)f(m)$, где $j_\gamma(m)$ — якобиан γ в точке m.

Теорема 15.1.15. *Пространство форм веса* r *изоморфно* $H^0(\Gamma\backslash N, \mathcal{O}(K^r))$.

По теореме Кодаиры $\dim H^0(\Gamma\backslash N, \mathcal{O}(K^r))=\chi(\Gamma\backslash N, r)$ при $r\geqslant 2$. Теорема Хирцебруха о пропорциональности вместе с теоремой Бореля — Вейля дают возможность сосчитать размерность пространства автоморфных форм. А именно

Теорема 15.1.16. $\dim \mathrm{H}^0(\Gamma\backslash N, \mathcal{O}(K^r))=\chi(\Gamma\backslash N)\chi(N^d, \mathcal{O}(K^r))$, *где* N^d — *двойственное по Картану пространство для* N, *а* $\chi(N^d, \mathcal{O}(K^r))$ *дается теоремой Бореля — Вейля.*

Пусть $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ — система положительных корней, определяющая комплексную структуру на $N^d = G^u/K$. Пусть $b = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ и $n = \dim_{\mathbf{C}}(G^u/K)$.

Следствие 15.1.17. $\dim H^0(\Gamma \backslash N, \mathcal{O}(K^r)) = (-1)^n \chi(\Gamma \backslash N) \cdot$ $\cdot \deg(G^u, (r-1)b)$ *при* $r \geqslant 2$, *где* $\deg(G^u, (r-1)b)$ — *размерность неприводимого представления* G^u *со старшим весом* $(r-1)b$.

Пример 15.1.18 (продолжение). Пусть $N = \mathcal{P}$ — верхняя полуплоскость. Пространство, двойственное к ней по Картану, — это $N^d = CP(1) = SU(2)/SO(2)$. Согласно формуле Вейля для размерности, мы имеем $\deg(SU(2), (r-1)b) = 2r - 1$. Поэтому

$$\dim H^0(M, \mathcal{O}(K^r)) = (-1)\chi(\Gamma \backslash N) \cdot (2r-1).$$

В случае когда N неприводимо, в множестве Ψ есть только один простой корень. Обозначим его через α_1. Пусть $\delta = (1/2) \sum_{\alpha > 0} \alpha$ и $a = \sum_{\alpha \in \Psi} \alpha$ — полная сумма дополнительных корней. Хирцебруху принадлежит

Теорема 15.1.19. *Если N неприводимо, то*

$$\chi(M) = \frac{(-2\pi)^{-n}}{n!} \frac{\prod_{\alpha \in \Psi} (\delta, \alpha)}{(2(a, \alpha_1))^n} \operatorname{Vol} M,$$

где $\operatorname{Vol} M$ *означает объем* M *относительно метрики Бергмана на* M.

В гл. 18 мы вернемся к вопросу о вычислении размерности пространства автоморфных форм. Идея состоит в том, чтобы привлечь теорию представлений некомпактных полупростых групп Ли. А именно мы покажем, что представления дискретной серии T_n группы $G = SL(2, \mathbf{R})$ реализуются в пространствах аналитических функций $f(z)$ на $\mathcal{P}$, обладающих свойством $\int_{\mathcal{P}} |f(z)|^2 y^{n-1} dx\, dy < \infty$. Если мы рассмотрим подпространство функций, инвариантных относительно T_n, т. е. $T_n(\gamma) f(z) = f((az+b)/(cz+d))(cz+d)^{-n-1} = f(z)$, то это и будут автоморфные формы из примера 15.1.8. Следующий шаг состоит в разложении $L^2(\Gamma \backslash G) = \sum M(n, r)$, $n \in \mathbf{Z}$, $r \in \mathbf{R}$, где $M(n, r)$ — пространство гладких функций на G со свойствами (i) $u(\gamma g) = u(g)$, (ii) $u(gk) = u(g) \chi^n(k)$ и (iii) $\mathfrak{C} u = r u$ в обозначениях этого примера.

Теорема 15.1.20. *Пространство* $A(\Gamma, n+2)$ *изоморфно* $M(-n-2, n(n+2)/8)$ *с помощью отображения* $f(z) \mapsto \chi^{-(n+2)}(g) f(z)$.

Таким образом, на плоскости (n, r) автоморфным формам соответствует парабола $8r = n^2 + 2n$. Мы оставляем читателю проверку того, что значения r совпадают со спектром оператора Шрёдингера на верхней полуплоскости, т. е. со спектром задачи $u \in A(\mathscr{P})$, $u(\gamma z) = u(z)$ при $\gamma \in \Gamma$ и $y^2(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)\mu = ru$.

15.2. Ограниченные симметрические области и голоморфные дискретные серии

Ограниченной областью называется открытое связное ограниченное подмножество D в $\mathbf{C}^N$. Область D называется *симметрической*, если каждая точка $x \in D$ является изолированной неподвижной точкой инволютивного голоморфного диффеоморфизма s_x: $D \to D$. Пусть $\operatorname{Hol} D$ — группа всех голоморфных диффеоморфизмов D на D и G — односвязная накрывающая связной компоненты единицы в $\operatorname{Hol} D$. Тогда G действует транзитивно на D и $D = G/K$, где K — стабилизатор точки $0 \in D$. Пусть σ — автоморфизм $\operatorname{Hol} D$, переводящий g в $s_0 g s_0$. Если $\mathfrak{g}_0$ — алгебра Ли группы $\operatorname{Hol} D$, то $\dot\sigma = d\sigma_e$ индуцирует разложение картановского типа $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ на собственные подпространства $\dot\sigma$ с собственными значениями ± 1.

Пусть π: $G \to D$ — обычная проекция. Пространство $\mathfrak{g}_0$ отождествляется с вещественным касательным пространством $T_0 D$ с помощью отображения $\mathfrak{g}_0 \ni Y \to d\pi_e(Y_e)$. Если через T_z (соотв. $\bar T_z$) обозначить голоморфное (соотв. антиголоморфное) касательное пространство к D в точке z, то положим $\mathfrak{p}_\pm = \{Y \in \mathfrak{p}_0^C \mid d\pi_e(Y_e) \in T_0 \text{ или } \bar T_0\}$.

Теорема 15.2.1 (Вулф — Тирао). *Пусть* τ — *непрерывное представление* K *в конечномерном векторном пространстве и* $E_\tau \to D$ — *соответствующее* G*-однородное векторное расслоение. Тогда* E_τ *снабжается структурой* G*-однородного голоморфного расслоения, для которого голоморфные сечения* s *над окрестностью* $U \subset D$ *отождествляются с функциями* f_s *на* G, *обладающими свойствами*

$$Xf_s + \tau(X) f_s = 0 \quad \text{для} \quad X \in \mathfrak{k}_0,$$
$$Xf_s = 0 \quad \text{для} \quad X \in \mathfrak{p}_+.$$

Каждая ограниченная область обладает кэлеровой структурой, задаваемой кернфункцией Бергмана. Поэтому D является эрмитовым симметрическим пространством некомпактного типа (т. е. $\mathfrak{g}_0$ полупроста без компактных факторов). Обратно, если N — эрмитово симметрическое пространство некомпактного типа, то оно допускает голоморфный диффеоморфизм на ограниченную симметрическую область D. А именно пусть $\mathfrak{g}_0$ — алгебра Ли группы $\mathrm{Hol}\, N$ с картановским разложением $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$. Обозначим через $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{p}$ соответствующие комплексные оболочки. Тогда существует такое подмножество $P_n \in \Delta$, что $\mathfrak{p}_{\pm} = \sum_{\alpha \in P_n} \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$. Можно так выбрать порядок в Δ, что P_n будет лежать в Δ^+. Подпространства $\mathfrak{p}_{\pm}$ абелевы. Пусть $P_{\pm}$, $K^{\mathbf{C}}$, G_0, K_0 — подгруппы в $G^{\mathbf{C}}$, соответствующие подалгебрам $\mathfrak{p}_{\pm}$, $\mathfrak{k}^{\mathbf{C}}$, $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{k}_0$. Можно показать, что $(q, k, p) \to qkp$ является голоморфным диффеоморфизмом $P_- \times K^{\mathbf{C}} \times P_+$ на открытое подмногообразие в $G^{\mathbf{C}}$, содержащее G_0. Для $g \in G$ пусть $\zeta(g)$ означает единственный элемент P_-, для которого $g \in \zeta(g) K^{\mathbf{C}} P_+$. Поскольку $P_{\pm}$ — односвязные абелевы группы Ли, можно определить отображение $\ln$: $P_{\pm} \to \mathfrak{p}_{\pm}$, обратное к экспоненциальному. Тогда

(i) $gK_0 \to \ln \zeta(g)$ для $g \in G_0$ является голоморфным диффеоморфизмом G_0/K_0 на ограниченную область в $\mathfrak{p}_-$;

(ii) если G — универсальная накрывающая $(\mathrm{Hol}\, D)_0$, $N = G/K$ и $g \to \bar{g}$: $G - G_0$ — накрывающий гомсморфизм, то ψ: $gK \to \ln \zeta(\bar{g})$: $G/K \to D$ — голоморфный диффеоморфизм G/K на D.

Теорема 15.2.2. *Голоморфное векторное расслоение $E_\tau \to G/K$ голоморфно эквивалентно тривиальному расслоению $D \times V \to D$, т. е. существует голоморфный диффеоморфизм Ψ, для которого коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} G \times_\tau V & \xrightarrow{\Psi} & D \times V \\ \downarrow & & \downarrow \\ G/K & \xrightarrow{\psi} & D \end{array}$$

Здесь $\Psi(g, v) = (\psi(gK), \Phi(g)v)$, а Φ: $G \to GL(V)$ — представление G.

Пусть $N = G/K$ — эрмитово симметрическое пространство некомпактного типа, Λ — старший вес неприводимого представления τ_Λ подгруппы K в пространстве V и $E_\Lambda \to G/K$ — соответствующее однородное голоморфное векторное расслоение над N. В E_Λ существует K-инвариантное скалярное произведение, если и только если Λ — вещественный линейный функционал на $\alpha \in \Delta$. В этом случае на E_Λ существует инвариантная эрмитова структура.

Пусть $H_\Lambda = H_2^{0,0}(E_\Lambda)$ — гильбертово пространство голоморфных сечений E_Λ, для которых

$$\int\limits_{G/K} (s(x),\ s(x))\,dx < \infty.$$

Пусть Π_Λ означает представление G в H_Λ по формуле

$$(\Pi_\Lambda(g)s)(x) = gs(g^{-1}x), \quad g \in G,\ x \in G/K.$$

Поскольку τ унитарно, веса τ чисто мнимы на $\mathfrak{h}$ и, следовательно, вещественны на $i\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}^{\mathbf{C}}$. Вводя порядок на $i\mathfrak{h}$, мы можем говорить о старшем весе представления τ. Следующие свойства старшего веса Λ хорошо известны:

(a) Λ — целочисленный вес, так что $\xi_\Lambda(h) = \exp(\Lambda(\ln h))$ определяет характер группы $T^{\mathbf{C}} = \exp \mathfrak{h}^{\mathbf{C}}$;

(b) Λ — доминантный вес для $\mathfrak{k}$: $\langle \Lambda, \alpha \rangle > 0$ для всех положительных компактных корней α;

(c) кратность Λ равна 1;

(d) представление τ определяется весом Λ с точностью до эквивалентности.

Теорема 15.2.3 (Хариш-Чандра). *Пространство H_Λ не сводится к нулю, если и только если $\Lambda(h'_\beta) + \delta(h'_\beta) < 0$ для всех некомпактных положительных корней β, где $\delta = (1/2)\sum\limits_{\alpha>0} \alpha$. Представление Π_Λ неприводимо и его матричные элементы квадратично интегрируемы.*

Пример 15.2.4. Пусть

$$G = SU(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \,\Big|\, |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

Группа G действует аналитическими диффеоморфизмами на диске $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ по формуле g: $z \to gz = (\bar{\alpha}z + \beta)/(\bar{\beta}z + \alpha)$. Здесь $\mathfrak{h}$ — максимальная абелева подалгебра в $\mathfrak{k}$ и

$$\mathfrak{h}^{\mathbf{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \,\Big|\, a \in \mathbf{C} \right\}.$$

Поэтому

$$\Lambda \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = -na \quad \text{и} \quad \alpha \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = 2a.$$

Поскольку $\delta = \alpha/2$, имеем

$$\delta = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = a.$$

Целочисленность Λ означает, что $n \in \mathbf{Z}$. Ясно, что Λ — доминантный вес относительно $\mathfrak{k}$, поскольку единственный положительный корень некомпактен. Если

$$\Lambda' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = c' \quad \text{и} \quad \Lambda'' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = c'',$$

то $\langle \Lambda', \Lambda'' \rangle = cc'c''$ для некоторой положительной константы c. Поэтому $\langle \Lambda + \delta, \alpha \rangle = c(-n+1)/2$. Условие Хариш-Чандры сводится к требованию $n > 1$. Тогда

$$\zeta_\Lambda \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = a^{-n}, \qquad n \geqslant 2.$$

Разумеется, соответствующее представление совпадает с представлением дискретной серии Баргманна и реализуется в пространстве голоморфных функций на диске D, обладающих свойством $\int\limits_D |f(z)|^2 (1 - |z|^2)^{n-2}\, dx\, dy < \infty$.

Теорема (Хариш-Чандра). *Формальная размерность квадратично интегрируемого представления голоморфной дискретной серии равна*

$$d_\Pi = \left| \prod_{\alpha \in \Delta^+} (\Lambda(h'_\alpha) + \delta(h'_\alpha))/\delta(h'_\alpha) \right|,$$

где Δ^+ — множество всех положительных корней в $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$.

Задачи

Упражнение 15.1. Пусть Γ действует свободно на G/K и $J(g, z)$ есть $GL(V)$-значный фактор автоморфности, $\tau_l(k) = J(k, z_0)$, где z_0 — неподвижная точка для K. Тогда, как отмечалось выше, τ_J — представление K. Определим действие $\Gamma \times K$ на G, полагая $(\gamma, k) g = \gamma g k^{-1}$. Пусть E_{τ_J} — векторное расслоение, получаемое факторизацией $G \times V$ по отношению эквивалентности $(g, v) \sim (\gamma g k, \tau_J(k) v)$. Показать, что $E(J)$ и $E(\tau_J)$ — дифференцируемо эквивалентные векторные расслоения над $M = \Gamma \backslash N$.

Глава 16 Термодинамика однородных пространств

16.1. Матрицы плотности и функции распределения

Основным понятием квантовой статистической механики в формулировке фон Неймана и Дирака является матрица плотности

$$\rho(q,\ q') = \sum w_k \psi_k(q)\,\overline{\psi_k(q')}$$

для квантовомеханической системы.

Определение 16.1.1. Для наблюдаемой A *ожидаемое значение* равно $\langle A\rangle = \operatorname{tr}(A\rho)/\operatorname{tr}\rho$, где след означает интеграл по диагонали.

Определение 16.1.2. Величина $\vartheta(\beta) = \operatorname{tr}\rho$ называется *функцией распределения* системы.

Канонический ансамбль получается, если в качестве весов взять $w_k = \exp(-\beta E_k)$, где $H\psi_k = E_k\psi_k$. Параметр β интерпретируется как $1/kT$, где T — температура, а k — постоянная Больцмана.

Функция распределения определяет все термодинамические свойства системы. Например, средняя *внутренняя энергия* равна $U = -\partial \ln\vartheta(\beta)/\partial\beta$, а *свободная энергия Гельмгольца* равна $F = -\beta^{-1}\ln\vartheta(\beta)$. Энтропия определяется равенством $S(T) = kT\partial\ln\vartheta(T)/\partial T + k\ln\vartheta(\beta)$.

Пример 16.1.3. Гармонический осциллятор с гамильтонианом $H = (1/2m)(p^2 + m^2\omega^2 q^2)$, где $p = -i\partial/\partial q$. Собственные функции имеют вид

$$\psi_k = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4}\cdot(k!)^{1/2}.D_k\left(q\sqrt{2m\omega}/\hbar\right)$$

с собственными значениями $E_k = k + 1/2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Используя тождество Мелера, находим

$$\rho(q,\ q') = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\beta(k+1/2)}\psi_k(q)\overline{\psi_k(q')} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\operatorname{sh}\beta}}\exp\left(-\frac{(q+q')^2}{4}\operatorname{th}\frac{\beta}{2} - \frac{(q-q')^2}{4}\operatorname{cth}\frac{\beta}{2}\right).$$

Вычисляя след, получаем функцию распределения

$$\vartheta(\beta) = \operatorname{tr}\rho = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sh}\frac{\beta}{2}\right)^{-1} = \frac{e^{\beta/2}}{e^{\beta}-1},$$

что совпадает с формулой Планка.

Средняя внутренняя энергия равна, как легко проверить, $U = 1/2 + 1/(e^\beta - 1)$. Используя разложение

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} - \sum (-1)^n B_{2n} x^{2n}/(2n)!,$$

где B_n — числа Бернулли, получаем высокотемпературный предел при $\beta \to +0$

$$U = \frac{1}{\beta} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n B_{2n} \frac{\beta^{2n-1}}{(2n)!}.$$

Высоко- и низкотемпературные пределы ρ легко вычисляются и оказывается, что $\rho(q, q') = (1/\sqrt{2\pi\beta})\exp(-(q-q')^2/2\beta)$ при $\beta \to 0$ и $\rho(q, q') = (1/\sqrt{\pi})\exp(-(q-q')^2)$ при $\beta \to \infty$, как видно из тождества Мелера.

Значение на диагонали равно $\rho(q, q) = \exp(-q^2 \operatorname{th} \beta/2)$ с высокотемпературным пределом $\rho(q, q) \sim \exp(-q^2/2)$. Это асимптотическое выражение является примером такого общего утверждения:

$$\operatorname{tr} \rho \approx \int \exp(-\beta(T(p) + V(q)))\, dp\, dq = \\ = c \int \exp(-\beta V(q))\, dq \quad \text{при } \beta \to +0,$$

где $T(p) = p^2/2m$ — кинетическая энергия, а $V(q)$ — потенциальная энергия. Формализуем это замечание.

Определение 16.1.4. *Принцип соответствия* в квантовой статистической механике утверждает, что в высокотемпературном пределе квантовомеханическая функция распределения должна стремиться к классической функции распределения.

Пример 16.1.5. Рассмотрим ротатор с гамильтонианом $H = (1/2I)(p_\vartheta^2 + p_\varphi^2/\sin^2\vartheta)$. Тогда классическая функция распределения равна

$$\vartheta_{cl}(\beta) = \frac{1}{\hbar^2} \iint \exp(-\beta H)\, dp_\vartheta dp_\varphi d\vartheta d\varphi = \\ = \frac{1}{\hbar^2} \frac{2\pi I}{\beta} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{2I}{\hbar^2 \beta}.$$

Мы увидим вскоре, что принцип соответствия в этом примере выполняется.

Пример 16.1.6. В одномерном случае, поскольку

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} = \frac{1}{2\pi} \int \exp\left(-\beta \frac{p^2}{2}\right) dp,$$

мы видим, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}}\int \exp(-\beta V(q))\,dq = \frac{1}{2\pi}\int \exp(-\beta(p^2+V(q)))\,dp\,dq.$$

Таким образом, принцип соответствия сводится к требованию

$$\sum \exp(-E_k\beta) \sim \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda\beta}dB(\lambda) \text{ при } \beta\to 0,$$

где $B(\lambda)$ — площадь области $p^2/2+V(q)\leqslant\lambda$. Согласно тауберовой теореме, это эквивалентно требованию, чтобы

$$N(\lambda)=\sum_{E_k\leqslant\lambda} 1 \sim \frac{1}{2\pi}B(\lambda) \text{ при } \lambda\to\infty.$$

Поскольку $\exp(-\beta H)\psi_k = \exp(-\beta E_k)\psi_k$, можно записать матрицу плотности в виде $\rho(\beta)=\sum \exp(-\beta H)\psi_k(q)\overline{\psi_k(q')}$. Отсюда видно, что формально

$$\frac{\partial\rho}{\partial\beta}=-H\rho$$

и

$$\lim_{\beta\to 0}\rho(\beta)=\sum_k \psi_k(q)\overline{\psi_k(q')}=\delta(q-q').$$

Определение 16.1.7. Это дифференциальное уравнение называется *уравнением Блоха*. В интересных ситуациях оно оказывается параболическим.

Пример 16.1.8. Рассмотрим свободную частицу на отрезке $0\leqslant q\leqslant 1$ при условии, что $\psi(0)=\psi(1)=0$. Тогда уравнение Блоха имеет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial\beta}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\rho}{\partial q^2},$$

т. е. совпадает с уравнением диффузии. Заметим, что в этом случае

$$\rho(q,q')=2\sum_{k=1}^\infty \exp(-\beta k^2\pi^2/2)\sin(\pi qk)\sin(\pi q'k)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}}\sum_l\left(e^{-(q'-q+2l)^2/2\beta}-e^{-(q'+q+2l)^2/2\beta}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\vartheta_3\left(\frac{q-q'}{2},\frac{\beta}{2}\right)-\vartheta_3\left(\frac{q+q'}{2},\frac{\beta}{2}\right)\right\},$$

где ϑ_3 — одна из тэта-функций Якоби. В этом случае также легко находятся высоко- и низкотемпературные пределы.

Вернемся теперь к примеру 16.1.5. Кинетическая энергия ротатора с осью симметрии (но без спина) равна

$$T=(1/2)\left((d\vartheta/dt)^2+\sin^2\vartheta(d\varphi/dt)^2\right).$$

Уравнение Шрёдингера записывается в форме $H\psi_\lambda = (\hbar^2/2I)\Delta\psi_\lambda = E_\lambda\psi_\lambda$, где

$$\Delta=\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

— оператор Лапласа — Бельтрами на S^2. Уровни энергии имеют вид $E_\lambda=(\hbar^2/2I)\,l(l+1)$, $l=0, 1, \ldots$, с кратностью $2l+1$. Соответствующая функция распределения равна

$$\vartheta_{\mathrm{rot}}(\beta)=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\exp\left(-\frac{l(l+1)}{I}\beta\hbar^2\right).$$

Предыдущий пример получается из этого следующей редукцией. Если мы ограничим движение ротатора вращением в плоскости $\vartheta=\pi/2$ и если результирующее многообразие $M=S^1$ имеет длину l, то уравнение Шрёдингера превратится в

$$-\frac{\hbar^2}{2I}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}=E_l\psi,$$

где

$$E_l=\frac{\hbar^2}{2I}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 l^2$$

для $l\in\mathbf{Z}$ с кратностью 2 при $l\neq 0$. Таким образом, функция распределения для плоского ротатора равна

$$\vartheta_p(\beta)=\vartheta_3(\beta, 0).$$

Аналогом тождества Мелера является здесь формула суммирования Пуассона

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}}\exp(-\pi\beta m^2)=\frac{1}{\sqrt{\beta}}\sum_{m\in\mathbf{Z}}\exp(-\pi m^2/\beta).$$

Высокотемпературный предел этой функции равен, очевидно,

$$\vartheta_p(\beta)=\frac{2I}{\hbar}L(4\pi\beta)^{-1/2}+O(e^{-1/\beta})\text{ при }\beta\to 0.$$

Этот пример указывает на наличие связи между квантовой статистической механикой и аналитической теорией чисел. Например, классическая риманова дзета-функция

$$\zeta(2s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2s}$$

может быть записана в виде

$$\zeta(2s) = \frac{\pi}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \beta^{s-1} \left[\vartheta_p(\beta) - \frac{1}{2}\right] d\beta.$$

Дзета-функция — это один из примеров L-ряда Дирихле:

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^\infty \chi(n)\, n^{-s},$$

где $|\chi(n)| = 0$ или 1 и $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$ (характер Дирихле). Ясно, что $\zeta(s) = L(s, 1)$. Другой пример L-ряда —

$$\beta(s) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^n (2n+1)^{-s}.$$

L-ряды возникают в физике твердого тела как суммы Маделунга. Для плоской решетки — это сумма вида

$$\sum_{(m,\, n) \neq (0,\, 0)} (m^2 + n^2)^{-s} = 4\zeta(s)\,\beta(s).$$

В качестве упражнения читатель может показать, что эта сумма может быть записана в виде L-ряда Дирихле.

Еще один пример у нас возникает в гл. 19, где мы рассматриваем вакуумный тензор энергии-импульса $\langle T_{\mu\nu}\rangle$ для геометрии параллельных пластин, разбитых на жесткие прямоугольники. В этом случае ренормированное по Казимиру значение равно

$$\langle T_{0,0}\rangle_c = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{n_1,\, n_2,\, n_3} (an_1^2 + bn_2^2 + cn_3^2)^{-2}.$$

В случае $a = \infty$, $b = c = 1$ величина $\langle T_{0,0}\rangle_c$ будет суммой Эвальда или Маделунга:

$$\langle T_{0,0}\rangle_c = -\frac{1}{3} L^{-4} \beta(2),$$

где $\beta(2)$ — постоянная Каталана.

16.2. Дзета-функции Эпштейна

Плоский ротатор является весьма интересным примером, поскольку его функция распределения описывает также свободную частицу в ящике D длины L, если параметр I заменить массой частицы μ.

Уравнение Шрёдингера принимает вид

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \lambda\psi$$

с граничными значениями

$$\psi(x) = \psi(x + nL), \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Волновые функции даются формулой

$$\psi(x) = A \exp\left[i \frac{2\pi\hbar n}{L} \frac{x}{\hbar}\right],$$

а собственные значения равны

$$\lambda_n = n^2 \cdot 2\pi^2\hbar^2/\mu L^2, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Если взять нулевые граничные условия $\psi(x) = 0$, $x \in \mathbf{Z}L$, то $\psi(x) = A \sin(\pi n x/L)$ с уровнями энергии

$$\lambda_n = n^2\pi^2\hbar^2/2\mu L^2, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots .$$

Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)\psi_n(y)/\lambda_n^s$ для $s \in \mathbf{C}$ изучались впервые Эпштейном в 1903 г. и называются *дзета-функциями Эпштейна.* В 1949 г. Минакшисандарам [М 28] вернулся к изучению этих функций с помощью функций Грина для уравнения теплопроводности или уравнения Блоха. А именно если $\rho(x, y; \beta)$ — фундаментальное решение уравнения Блоха

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}(x,\ y;\ \beta) = -\frac{\partial\rho}{\partial\beta}(x,\ y;\ \beta),$$

удовлетворяющее условию $\lim\limits_{\beta\to 0}\rho(x,\ y; \beta) = \delta(x - y)$, то легко показать, что

$$\rho(x,\ y;\ \beta) = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi\hbar^2\beta}} \exp\left[-\frac{\mu}{2\hbar^2\beta}(x - y)^2\right] - g(x,\ y;\ \beta),$$

где

$$|g(x,\ y;\ \beta)| \leqslant \frac{C(y)}{\beta^{-1/2}} \exp(-l_y^2/4\beta)$$

для всех $x \in D$, причем l_y — минимальное расстояние от y до границы (см. [М 28], [К 3] и т. п.).

Теорема 16.2.1 (Минакшисандарам). *Ряд* $Z(x, y; s) = \sum \psi_n(x)\psi_n(y)/\lambda_n^s$ *сходится равномерно по* x *и* y *для всех* $s \in \mathbf{C}$, *таких, что* $\operatorname{Re} s$ *достаточно велико. Функция* $Z(x, y; s)$ *продолжается до целой функции от* s *при* $x \neq y$ *из* D *и имеет «тривиальные нули» в точках* $s = 0, -1, -2, \ldots$.

Ряд $Z(x,\ x;\ s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)^2/\lambda_n^s$ представляет мероморфную функцию от s с простым полюсом в точке $s = 1/2$ с вычетом $\Gamma(1/2)^{-1}$ и с «тривиальными нулями» в точках $s = 0,\ -1,\ -2, \ldots$, Доказательство следует из приведенных выше свойств матрицы плотности и интегрального представления

$$\Gamma(s) Z(x, y; s) = \int_0^\infty \beta^{s-1} \rho(x, y; \beta) \, d\beta.$$

В качестве следствия этих результатов получается

Следствие 16.2.2 (асимптотические формулы Карлемана).
(1) $\sum\limits_{\lambda_n \leqslant \lambda} \psi_n^2(x) \sim \frac{1}{\pi} \lambda^{1/2}$ *при* $\lambda \to \infty$;

(2) $N(\lambda) \sim \frac{L}{\pi} \lambda^{1/2}$ *при* $\lambda \to \infty$.

Второе соотношение следует из первого, если заметить, что $N(\lambda) = \sum\limits_{\lambda_n \leqslant \lambda} 1 = \sum\limits_{\lambda_n \leqslant \lambda} \int \psi_n^2(x) \, dx$.

16.3. Асимптотика матрицы плотности

Высокотемпературный предел матрицы плотности $\rho(\beta; m, m')$ для ротатора должен иметь вид

$$\rho(\beta; x, y) = \frac{\exp(-g^2/2)}{2\pi\beta} \left(\sqrt{k}\, g \sin \sqrt{k}\, g\right),$$

где $k = 1/r^2$, а $g(x, y)$ — риманово расстояние на сфере $S^2(r)$. Здесь предполагается, что точки x и y не сопряжены (т. е. $g(x, y) < \pi r$). Чтобы доказать это, необходимы более глубокие сведения из дифференциальной геометрии. Пусть s означает длину геодезической и N — гиперповерхность, ортогональная к единственной кратчайшей геодезической γ, соединяющей m и m_1. Параметр s заключен между 0 и $g(m, m_1)$. Поле Якоби $Y(s)$ — это поле скоростей $Y(s) = d\gamma_\alpha(s)/d\alpha$, описывающее вариацию γ_α геодезической γ, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\gamma_0 = \gamma$. Вдоль γ поле $Y(s)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla}{ds} Y(s) + R_{\gamma(s)}(Y(s), \dot{\gamma}(s)) \dot{\gamma}(s) = 0,$$

где $R(X, Y)(Z)$ — форма кривизны на M. Рассмотрим поля Якоби, ортогональные γ, т. е. $(Y, \dot{\gamma}) = 0$. Тогда форма кривизны превращается в

$$R_{\gamma(s)}(Y(s), \dot{\gamma}(s)) \dot{\gamma}(s) = K_i^j Y^i,$$

где

$$K_i^j = R_{i1i}^j = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Пусть $K=\{K_i^j \mid i,\ j\leqslant n-1\}$. Уравнение поля Якоби принимает вид

$$\ddot{Y}+KY=0. \qquad (*)$$

Теорема 16.3.1. *Пусть $\mathfrak{y}$ — любая матрица порядка $n-1$, образованная $n-1$ независимыми полями Якоби, удовлетворяющими $(*)$. Тогда матрица*

$$\mathfrak{z}(t)=\mathfrak{y}(t)\int_0^t(\mathfrak{y}^*\mathfrak{y})^{-1}ds$$

также удовлетворяет $(*)$, причем $\mathfrak{z}(0)=0$, $\dot{\mathfrak{z}}(0)=1$.

Доказательство состоит в элементарной проверке.

Следствие 16.3.2. *Пусть $\Psi(m,m')=\det\mathfrak{z}(g(m,m'))$. Тогда $\Psi(x,y)=\Psi(y,x)$.*

Пусть $S_{m,m'}(z)=g^2(m,\ z)+g^2(z,\ m')$ — функция действия вдоль кусочно-геодезической линии $m\to z\to m'$. Если m и m' не сопряжены относительно кратчайшей геодезической, то гессиан $S(z)$ невырожден в точке $z_0=\gamma(g/2)$.

Теорема 16.3.3.

$$\det\operatorname{Hess}\left(\frac{S_{m,m'}(z_0)}{2}\right)=4g^{1-n}\frac{\Psi(m,\ m')}{\Psi(m,z_0)\Psi(z_0,m')}.$$

Используя оценку Варадхана [V 2] и этот результат о полях Якоби, получаем такой результат:

Теорема 16.3.4 (Молчанов). *Для любого компактного множества $D\subset M$ существует такая константа $\varepsilon>0$, что для всех пар m, m' из D, удовлетворяющих условию $g(m,m')<\varepsilon$, справедливо соотношение*

$$\rho(\beta;\ m,\ m')\sim\frac{\exp(-g^2(m,\ m')/2\beta)}{(2\pi\beta)^{n/2}}H(m,\ m'),$$

где $n=\dim M$, $H(m,m')=g^{(n-1)/2}(m,m')\Psi^{-1/2}(m,m')$.

Если M — односвязное симметрическое пространство, то $K_i^j=\delta_{ij}\lambda_j$, где λ_j — главные кривизны любой геодезической гиперповерхности N, ортогональной к $\overline{mm'}$. Условие $(*)$ превращается в систему $n-1$ уравнений с постоянными коэффициентами. Отсюда следует, что

$$\det\mathfrak{z}(g(m,\ m'))=g^{k_0}\prod_{i=1}^{k_+}\frac{\sin\left(g\sqrt{\lambda_i^+}\right)}{\sqrt{\lambda_i^+}}\prod_{j=1}^{k_-}\frac{\operatorname{sh}\left(g\sqrt{-\lambda_j}\right)}{\sqrt{-\lambda_j}},$$

где k_0, k_+, k_- — число нулевых, положительных и отрицательных главных кривизн; здесь $k_0 + k_+ + k_- = n - 1$.

Следствие 16.3.5. *Если M — симметрическое односвязное многообразие, то*

$$\rho(\beta;\ m,\ m') \sim \frac{\exp(-g^2(m,\ m')/2\beta)}{(2\pi\beta)^{n/2}}\cdot$$
$$\cdot\left(\prod_{i=1}^{k_+}\frac{\sqrt{\lambda_i^+}\,g}{\sin\left(g\sqrt{\lambda_i^+}\right)}\cdot\prod_{j=1}^{k_-}\frac{\sqrt{-\lambda_j}\,g}{\operatorname{sh}\left(g\sqrt{-\lambda_j}\right)}\right)^{1/2}.$$

На самом деле, если M имеет неположительную кривизну, то асимптотическая формула справедлива для всех m, m'. В частности, для симметрических пространств отрицательной кривизны

$$\rho(\beta;\ m,\ m') \sim \frac{\exp(-g^2(m,\ m')/2\beta)}{(2\pi\beta)^{n/2}}\prod_{j=1}^{n-1}\left(\frac{g\sqrt{-\lambda_j}}{\operatorname{sh} g\sqrt{-\lambda_j}}\right)^{1/2}$$

для всех m, m'.

Отметим, что разложение для ротатора имеет нужный вид. Более того, из теоремы Молчанова вытекает, что в присутствии потенциала V высокотемпературный предел также имеет предсказанный вид.

Следствие 16.3.6. *Если уравнение Блоха записывается в форме $\partial\rho/\partial\beta = H\rho$, где $H = 1/2\Delta + V$, то*

$$\rho(\beta;\ x,\ y) \sim \frac{\exp(-g^2/2\beta + A(x,\ y))}{(2\pi\beta)^{-n/2}}\,H(x,\ y),$$

где $A(x,\ y) = \int\limits_0^g (V,\ \dot\gamma(s))\,ds$ — работа поля V вдоль геодезической $\gamma(x, y)$.

Формула Молчанова является всего лишь первым членом в более общем разложении, восходящем к Адамару и использованном несколькими физиками — особенно де Виттом. Мы переходим теперь к обзору метода Адамара, или параметрикса, на языке векторных расслоений. Это нам понадобится в гл. 19.

Пусть (M, g) — риманово многообразие размерности n, а E — комплексное векторное расслоение над M. Пусть $\mathscr{V}$ — расслоение объемов над M, т. е. одномерное векторное расслоение, ассоциированное с расслоением реперов. Для расслоения E через E^* обозначим дуальное расслоение, слои которого дуальны к слоям E. Положим $E' = E^* \otimes \mathscr{V} = \operatorname{Hom}(E, \mathscr{V})$. Если s и s' — гладкие сечения E и E' соответственно, то определено сечение $m \longmapsto \langle s(m), s'(m)\rangle_m$ расслоения $\mathscr{V}$. Пусть $S(E)$ означает пространство гладких сечений E. Ковариантная производная гл. 3 обобщается до отображения

$$L\colon\ S(E) \to S(T^*M \otimes E),$$

обладающего свойством $L(fs) = df \otimes s + fL(s)$.

Определение 16.3.7. *Обобщенным лапласианом* называется оператор Δ: $S(E) \to S(E)$, обладающий свойством $\Delta(fs) = (\Delta f)s - 2\operatorname{tr}(df \otimes Ls) + f\Delta s$, где Δf — обычный оператор Лапласа $\Delta = -(\det g)^{-1/2}\partial_i(\det g)^{1/2}g^{ij}\partial_j$, а след берется относительно g:

$$\operatorname{tr}(df \otimes Ls) = g^{ij}\partial_i f L_j s.$$

Обобщенный лапласиан является формальным дифференциальным оператором второго порядка.

Определение 16.3.8. *Символом* σ_Δ оператора Δ называется функция $\sigma_\Delta(m, \alpha)u = -(1/2)\Delta(f^2 s)(m)$, где $f \in A(M)$ и $u \in E_m$ выбираются так, чтобы $f(m) = 0$, $df = \alpha \in T^*_m M$, $s(m) = u$.

Мы оставляем читателю проверку того, что

$$\sigma_\Delta(m, \alpha)u = (g^{ij}(m)\alpha_i\alpha_j)u.$$

Таким образом, если g невырожденна, то Δ — эллиптический оператор.

Определение 16.3.9. Пусть $E \boxtimes E'$ обозначает расслоение с базой $M \times M$ и слоем $E_x \otimes E'_y$ над (x, y).

Определение 16.3.10. *Параметрикс* P для обобщенного лапласиана Δ — это обобщенная функция = линейный функционал из $\mathscr{D}'(E \boxtimes E', U)$, где U — окрестность диагонали в $M \times M$, для которой существует $k \geqslant 0$ и $Q \in C^k(E \boxtimes E', U)$ со свойством

$$\Delta_m P(m, m') = \delta(m, m') + Q(m, m').$$

Конструкция параметрикса, принадлежащая Адамару, состоит в следующем. Рассмотрим в $M \times M$ нормальную окрестность U в смысле римановой метрики. Это значит, что для $(m, m') \in U$ существует единственная геодезическая $\overline{mm'}$, соединяющая m и m'. Ковариантная производная L в расслоении E определяет параллельный перенос вдоль $\overline{mm'}$. Это задает изоморфизм $E_{m'} \simeq E_m$ для $(m, m') \in U$ и тем самым локальное сечение ϑ расслоения $E \boxtimes E^*$.

Записывая компоненты g_{ij} метрики g в нормальных координатах, положим $G(m, m') = (\det g_{ij}(m))^{-1/4}$.

Определение 16.3.11. Определим последовательность ядер $u_k(m, m')$, полагая

$$u_k(m, m') = g(m, m')\vartheta(m, m')v_g,$$

где v_g — риманова мера на (M, g) и

$$u_i(m, m')\left(i - \frac{g(m, m')}{G(m, m')}\frac{\partial}{\partial r}G(m, m')\right) +$$
$$+ g(m, m')\frac{L(m)}{dr}u_i(m, m') + \Delta_m u_{i-1}(m, m') = 0.$$

Здесь выбраны полярные геодезические координаты относительно ортонормированного репера в $T_{m'}M$.

Теорема 16.3.12. *Функция*

$$P(\beta;\ m, m') = \frac{1}{(4\pi\beta)^{n/2}}\exp\left(\frac{-g^2(m, m')}{4\beta}\right)\sum_{i=0}^{N}\beta^i u_i(m, m')$$

является параметриксом для уравнения Блоха $(\partial/\partial\beta + \Delta)\rho = 0$ *при* $N > n/2$.

В частности, если $\tilde{P}$ — гладкое продолжение P на $(0, \infty)\times$ $\times M \times M$, то $s = \lim\limits_{\beta\to 0}\langle P(\beta;\ \cdot, m'), s(m')\rangle$ для гладкой финитной функции s на M.

Эта теорема обобщает на расслоения теорему Плейеля — Минакшисандарама. Другой пример применения этой теоремы получается, если в качестве обобщенного лапласиана взять лапласиан Δ_p в расслоении p-форм $E = A^p(M)$. Для физиков интерес к этому примеру обусловлен тем, что уравнения Прока, описывающие массивную частицу со спином 1, имеют вид $\Delta\varphi =$ $= -m^2\varphi$ и $\delta\varphi = 0$, где φ есть 1-форма, а $\Delta = d\delta + \delta d$. Отметим, что это полевое уравнение соответствует лагранжиану $L = -(1/2)(\varphi_\mu\Delta\varphi^\mu + m^2\varphi_\mu\varphi^\mu)$, а условие $\delta\varphi = 0$ — нет; это просто дополнительная связь, предписывающая рассматривать только бездивергентные формы. Наконец, в случае $m = 0$ нужно дополнительно наложить условие, что форма φ не точна.

Теорема 16.3.13. *Для лапласиана Δ_p в пространстве p-форм коэффициенты параметрикса u_i^p обладают свойствами*

(*i*) $\operatorname{tr} u_i^p = (-1)^{p(n-p)}\operatorname{tr} u_i^{n-p}$ *для* $p = 0, 1, \ldots, n$ *и всех* i;

(ii) $\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^n \sum\limits_{p=0}^{n}(-1)^p\int\limits_M \operatorname{tr} u_i^p = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq n/2, \\ \chi(\mu) & \text{при } i = n/2,\ n \text{ четно}; \end{cases}$

(iii) *если* $\dim M = 4m$, *то* $\int\limits_M \operatorname{tr}\left(*_m u_{2m}^{2m}(m, m')\right)\Big|_{m=m'} = 16^m\pi^{2m}\operatorname{sgn} M$, *где* $*$ — *оператор Ходжа на формах, а* $\operatorname{sgn} M$ *означает сигнатуру Хирцебруха* (см. [H 22]).

Фундаментальное решение $\rho(\beta; m, m')$ для уравнения Блоха изучалось для компактных многообразий M в работах Котаке и других. Оно принадлежит пространству $S(\mathbf{R}^+) \otimes S(E \boxtimes E')$ и с помощью параметрикса может быть найдено в виде $\rho(\beta; m, m') = P(\beta; m, m') + W(\beta; m, m')$. Здесь W дается формулой

$$W(\beta;\ m,\ m') = \int_0^\beta du \int_M \tilde{P}(\beta - u;\ m,\ n)\, R(u;\ n,\ m')\, dn,$$

а R подбирается так, чтобы ρ удовлетворяло уравнению Блоха. Легко проверяется, что отсюда вытекает равенство

$$\operatorname{tr} \rho(\beta; m, m) = \operatorname{tr} P(\beta; m, m) + \operatorname{tr} W(\beta; m, m),$$

откуда

Теорема 16.3.14. *Высокотемпературный предел следа ядра матрицы плотности имеет вид*

$$\operatorname{tr} \rho(\beta;\ m,\ m) = (4\pi\beta)^{-n/2} \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \operatorname{tr} u_i(m).$$

Поскольку $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \exp(-\lambda_i \beta) = \int\limits_M \rho(\beta;\ m,\ m)\, v(m)$, мы получаем интегрированием правой части в теореме 16.3.14 следующий результат.

Теорема 16.3.15. *Величина* $\vartheta(\beta) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \exp(-\lambda_i \beta)$ *имеет высокотемпературную асимптотику*

$$\vartheta(\beta) = (4\pi\beta)^{-n/2}(a_0 + a_1\beta + \ldots),$$

где $a_i = \int\limits_M u_i(m,\ m)\, v_g(m)$ — *спектральные инварианты, т. е. функции* $u_i(m, m)$ *допускают в любых локальных координатах инвариантное выражение через* m, *символ* σ_Δ *и его производные.*

Доказательство этого результата см. в работе Джилки [G 13].

В частном случае, когда E — тривиальное расслоение, а Δ — лапласиан в пространстве функций на M, мы имеем

(i) $a_0 = \operatorname{Vol}(M, g)$,

(ii) $a_1 = 1/6 \int\limits_M K_g v_g$,

где K_g — скалярная кривизна (M, g). Согласно формуле Гаусса — Боннэ, $\int\limits_M K_g v_g = 2\pi\chi(M)$, если $\dim M = 2$. Таким образом, для двумерного M $a_1 = \pi/3\chi(M)$:

(iii) $a_3 = \frac{1}{360}\int\limits_M (2|R|^2 - 2|\mathrm{Ric}|^2 + 5K^2)\, v_g,$

где Ric — кривизна Риччи, а R — тензор Римана.

Пример 16.2.16. Для ротатора $M = S^2$ $K_g = 2$, $|\mathrm{Ric}|^2 = 2$, $|R|^2 = 4$, $\mathrm{Vol}(S^2, g) = 4$; поэтому

$$\vartheta_{\mathrm{rot}}(\beta) = \frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{\beta}{3} + \frac{\beta^2}{15} + \ldots\right).$$

Для одномерного ротатора $M = S^1$ $|K|^2 = |R|^2 = |\mathrm{Ric}|^2 = 0$ и поэтому $\vartheta(\beta) = 1/\sqrt{\beta} + O(\exp(-1/\beta))$. Эти два результата обобщаются в следующей главе.

В гл. 18 рассматривается обобщенная формула суммирования Пуассона, которая на $M = \mathbf{R}^l/\Gamma$ имеет вид

$$\sum_{n\in\Gamma} \exp(-4\pi^2(n, n)\beta) = \frac{\mathrm{Vol}\, M}{(2\pi\beta)^{l/2}} \sum_{n\in\Gamma} \exp\left(-\frac{(n, n)}{2\beta}\right),$$

где $\Gamma = \mathbf{Z}^l$ — подгруппа точек в $\mathbf{R}^l$ с целыми координатами.

Высокотемпературный предел для $M = \mathbf{R}^l/\Gamma$ имеет вид

$$\vartheta_M(\beta) = \frac{\mathrm{Vol}\, M}{(2\pi\beta)^{l/2}} + O\left(\exp\left(-\frac{1}{\beta}\right)\right).$$

В случае $\dim M = 2$ решетка Γ восстанавливается по статистике геодезических и высокотемпературной асимптотике функции распределения. То есть, пользуясь физическим языком, мы можем определить Γ спектроскопически.

Эта реконструкция может быть проведена так. В выражение для асимптотики входят длины замкнутых геодезических. Пусть $\Lambda = \{|\gamma|\}$ — совокупность возможных длин. Выберем γ_1, для которой длина минимальна. Затем исключим из Λ длины $k|\gamma_1|$ и возьмем наименьшую из оставшихся длин $|\gamma_2|$. Тогда $|\gamma_1|$ и $|\gamma_2|$ — длины сторон фундаментального параллелограмма решетки Γ. Зная объем M из высокотемпературной асимптотики, мы можем восстановить фундаментальный параллелограмм полностью.

В более высоких размерностях единственность нарушается; в частности, в $\mathbf{R}^{16}$ пример разных решеток с одинаковыми спектроскопическими данными предложен Милнором (см. [B 8]).

16.4. Дзета-функции компактных групп Ли

Следующие объекты связаны между собой: дзета-функция $\zeta(s) = \sum \lambda_n^{-s}$ и соответствующее ей ядро $Z(p, q;\ s) = \sum \lambda_n^{-s} \psi_n(p) \psi_n(q)$; тэта-функция $\vartheta(\beta) = \sum \exp(-\lambda_n\beta)$ и соответствующее ей ядро $\Theta(p, q;\ \beta) = \sum \exp(-\lambda_n\beta)\, \psi_n(p)\, \psi_n(q)$; ядро резольвенты $R(p, q;\ \tau) = \sum \psi_n(p) \psi_n(q)/(\lambda_n + \tau)$ и ее след $R(\tau) = \sum (\lambda_n + \tau)^{-1}$. Все это восходит к работам Эпштейна, Карлемана, Бохнера, Вейля, Плейеля, Минакшисандарама и др. Разумеется, все эти объекты выражаются друг через друга, например

$$Z(p, q;\ s) = \int (-\tau)^{-s} R(p, q;\ \tau)\, d\tau,$$

где интегрирование ведется по контуру, охватывающему все полюсы резольвенты $\tau = -\lambda_n$;

$$Z(p, q;\ s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \Theta(p, q;\ \beta)\, \beta^{s-1}\, d\beta.$$

Все сводится к изучению ядра уравнения Блоха, поскольку

$$\Theta(x, x;\ \beta) = \operatorname{tr}(\rho(\beta;\ x, x)).$$

Напомним теорему Минакшисандарама и Плейеля.

Теорема 16.4.1. *Пусть M — гладкое компактное риманово многообразие с оператором Лапласа — Бельтрами Δ_M. Пусть уравнение*

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_M \psi - \lambda\psi = 0$$

имеет собственные значения и собственные функции (λ_n, ψ_n). Тогда ряд $Z(p, q; s)$ сходится равномерно по p и q для всех комплексных s с достаточно большой вещественной частью. Сумма ряда аналитически продолжается влево от абсциссы сходимости, порождая целую функцию при $p \neq q$ с нулями в неположительных целых точках. При $p = q$ получается мероморфная по s функция $Z(p, p; s)$ с простыми полюсами в точках

$$s = -d/2 - n,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \text{ если } d \text{ нечетно},$$

и

$$s = d/2,\ d/2 - 1,\ \ldots,\ 2,\ 1, \text{ если } d \text{ четно}.$$

Вычеты в этих точках являются инвариантами римановой метрики. Кроме того, $Z(p, p; s)$ имеет нули во всех неположительных целых точках, если d нечетно.

Следствие 16.4.2 (формула Карлемана).

$$\sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \psi_n^2(p) \sim \frac{(2\mu\lambda)^{d/2}}{(4\pi\hbar^2)^{d/2}\,\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)} \quad \textit{при} \quad \lambda \to \infty$$

и

$$\sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \psi_n(p)\,\psi_n(q) = o(\lambda) \quad \textit{при} \quad \lambda \to \infty \quad \textit{для} \quad p \neq q.$$

Теорема 16.4.3. *Сумма ряда Дирихле* $\zeta(s) = \sum \lambda_n^{-s}$ *может быть аналитически продолжена влево от абсциссы сходимости и получаемую функцию можно записать в виде*

$$\zeta(s) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \sum_{k=0}^{m} \frac{\int\limits_M u_k(p, p)\, dv(p)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}-k\right)\left(s-\frac{d}{2}+k\right)} + R_n(s),$$

где $m = n$, *если* d *нечетно, и* $m = (d/2) - 1$, *если* d *четно, а* $R_n(s)$ *регулярна в полуплоскости* $\operatorname{Re} s > nd/2 - 2$. *Здесь* n — *длина разложения*

$$\Theta_n(p, q;\ \beta) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} e^{-r^2/4\beta} \beta^{d/2} (u_0 + u_1\beta + \ldots + u_n\beta^n),$$

и мы положили $\hbar^2/2\mu = 1$.

Таким образом, функция $\Gamma(s)\zeta(s)$ имеет простые полюсы в точках $-k/2$, $k \geqslant -d$, и

$$\operatorname{Res}(\Gamma(s)\zeta(s))\,|_{-k/2} = \int\limits_M u_{(k+d)/2}(p,\ p)\, dv(p) = a_{(k+d)/2}.$$

Следствие 16.4.4. *Если* $N(\lambda)$ — *число собственных значений* $\lambda_n \leqslant \lambda$, *то*

$$N(\lambda) \sim \frac{\operatorname{Vol} M\,(2\mu\lambda)^{d/2}}{(4\pi\hbar^2)^{d/2}\,\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}.$$

16.5. Модель Изинга

Модель Изинга изучалась в статистической механике потому, что она — одна из простейших систем, допускающих аналитическое исследование и подверженных фазовому переходу (в двумерном случае). Эта модель представляет собой решетку, каждая точка которой может находиться в двух состояниях: $+1$ и -1. Каждая пара соседних точек соединена ребром. Энергия конфигурации

$$\{\mu\} = \{\mu_x \mid x \in \Gamma\}, \quad \mu_x = \pm 1,$$

равна

$$E(\{\mu\}) = -J \sum_{|\overline{xy}|=1} \mu_x \mu_y - \mathscr{H} \sum_{x \in \Gamma} \mu_x.$$

Здесь J — константа взаимодействия, а $\mathscr{H}$ — внешнее магнитное поле. Задача статистической механики состоит в вычислении функции распределения

$$Z = \sum_{\{\mu\}} \exp(-\beta E(\{\mu\})).$$

Пример 16.5.1. В одномерном случае при $\mathscr{H} = 0$

$$Z_N = \sum \exp\left(v \sum_{i=1}^{N-1} \mu_i \mu_{i+1}\right),$$

где $v = \beta J$. Легко видеть, что $Z_N = 2(2 \operatorname{ch} v)^{N-1}$. Свободная энергия F на единицу объема в «термодинамическом пределе» равна

$$F = \frac{1}{\beta} \lim_{N \to \infty} \frac{\ln Z_N}{N} = \frac{1}{\beta} \ln(2 \operatorname{ch} v).$$

Это выражение аналитично по v. Поэтому в одномерном случае фазовых переходов нет.

Пример 16.5.2. Рассмотрим случай $\mathscr{H} = 0$ для двумерной решетки. Функция распределения может быть записана, как обнаружил Ван-дер-Варден, в виде суммы по конечной группе. Если обозначить через G группу путей на Γ с коэффициентами в $\mathbf{Z}_2$, т. е.

$$G = \mathbf{Z}_2 \times \ldots \times \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_2^B,$$

где B — множество ребер решетки Γ, и если через H обозначить подгруппу замкнутых путей (т. е. циклов), то

$$Z = \sum_{\text{точки}} \prod_{\text{ребра}} e^{v \mu_x \mu_y},$$

где $v = J\beta$. Пусть c^* — корень уравнения $\operatorname{sh}(2c) = 1$. Тогда

$$\prod_{\text{ребра}} (e^{c^*} + \mu_x \mu_y e^{-c^*}) = \sum_{g \in G} e^{(B-2n)c^*} \prod_{\text{ребра в } g} \mu_x \mu_y,$$

где $n = n(g)$ — число ребер в $g \in G$. Если A — число точек в решетке, то

$$Z(\{\mu\}) = 2^A \left(\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2c\right)^{1/2B} \sum f(g),$$

где $f(g) = e^{(B-2n)c^*}$.

Рассмотрим теперь компактную группу Ли G с фиксированным фундаментальным весом λ. Для каждого $L = 1, 2, \ldots$ пусть $\mathscr{H}_L$ и Π_L — пространство и представление со старшим весом $L\lambda$.

Для заданного L пусть $\mathscr{H}_\alpha$ — экземпляр $\mathscr{H}_L$, связанный с точкой α подмножества Λ в $\mathbf{Z}^\nu$. Положим $\mathscr{H}_\Lambda = \bigotimes\limits_{\alpha \in \Lambda} \mathscr{H}_\alpha$. Определим на $\mathscr{H}_\Lambda$ операторы $S_\alpha(X)$, $\alpha \in \Lambda$, $X \in \mathfrak{g}$, как тензорные произведения $\Pi_L(X)$ на α-м множителе и 1 на остальных множителях. Фиксируем базис $X_1, \ldots, X_m$ в $\mathfrak{g}$ и функцию H на $|\Lambda| m$-векторах $S_{\alpha, i}$, $\alpha \in \Lambda$, $1 \leqslant i \leqslant m$, которая является полиаффинной, т. е. суммой одночленов степени один или нуль по каждой переменной. Пусть $d_L = \dim \mathscr{H}_L$. Тогда решеточная функция распределения определяется как

$$Z_Q(\nu) = d_L^{-|\Lambda|} \operatorname{tr} \exp(-H(\nu S_\alpha(X_i)/L)).$$

Пусть теперь $\mathfrak{h}$ — картановская подалгебра в $\mathfrak{g}$; продолжим вес λ на $\mathfrak{g}$, полагая $\lambda = 0$ на $\mathfrak{h}^\perp$. Пусть γ — орбита коприсоединенного представления G, проходящая через λ. Обозначим через $d\tilde{\mu}$ G-инвариантную вероятностную меру на γ. Для каждого $\alpha \in \Lambda$ рассмотрим экземпляр γ_α орбиты γ и положим $\Gamma^{|\Lambda|} = \prod\limits_\alpha \gamma_\alpha$. Классическая функция распределения определяется как

$$Z_{\mathrm{cl}}(\nu) = \int\limits_{\Gamma^{|\Lambda|}} \exp(-H(\nu f_\alpha(X_i))) \prod_\alpha d\tilde{\mu}(f_\alpha).$$

Теорема 16.5.3 (Саймон — Либ).

$$Z_{\mathrm{cl}}(\nu) \leqslant Z_Q(\nu) \leqslant Z_{\mathrm{cl}}(\nu(1 + aL^{-1})),$$

где $a = 4(\lambda, \delta)/(\delta, \delta)$, $\delta = (1/2) \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i$.

В частном случае $G = SO(3)$ мы имеем

$$Z_{\mathrm{cl}}(\nu) = \int \prod_{\alpha \in \Lambda} \frac{d\Omega}{4\pi}(S_\alpha) \exp(-H(\nu S_\alpha)),$$

где $d\Omega$ — обычная мера на $S^2 \subset \mathbf{R}^3$, а

$$Z_Q(\nu) = (2l+1)^{-|\Lambda|} \operatorname{tr} \exp(-H\nu L_\alpha/l)$$

для $l = 1/2, 1, 3/2, \ldots$ и $\{L_\alpha\}$ — семейство независимых квантовых состояний спина l.

Теорема Либа показывает, что сходимость Z_Q к Z_{cl} при $l \to \infty$ имеет место в достаточно сильном смысле, так что можно переставить пределы $l \to \infty$ и $|\Lambda| \to \infty$ в выражении для свободной энергии на единицу объема. Детали см. в [L 11a].

Основу доказательства результата Саймона — Либа составляют когерентные состояния на группе Ли, построенные по вектору старшего веса. Эти когерентные состояния параметризуются предельным многообразием, которое является орбитой коприсосдиненного действия G в $\mathfrak{g}^*$. А именно пусть $P(e)$ — проектор на вектор старшего веса в неприводимом представлении π группы G. Для $g \in G$ положим $P(g) = \pi(g) P(e) \pi(g)^{-1}$. Пусть $d\mu$ — мера Хаара на G, нормированная условием $\int\limits_G d\mu = d = \dim \pi$.

Тогда по лемме Шура $\int\limits_G P(g)\, d\mu = 1$.

Назовем функцию $g \mapsto P(g)$, принимающую значения в ортопроекторах в гильбертовом пространстве H, *семейством когерентных состояний*, если $\dim P(g) H = 1$ для всех $g \in G$ и $\int\limits_G P(g)\, d\mu(g) = 1$. Такие семейства всегда возникают из когерентных векторов: если $P(g)$ — семейство когерентных проекторов, то существует измеримое семейство $\psi(g)$ единичных векторов, для которых $P(g) = (\psi(g), \cdot)\psi(g)$. Кроме того, семейство $\{\psi(g)\}$ полно. Мы вернемся к этому предмету в гл. 20.

Задачи

Упражнение 16.1. Показать, что

(i) $\dfrac{rL(x)}{dr} \vartheta(m, m') = 0$;

(ii) $\dfrac{1}{G} \dfrac{dG}{dr} = -\dfrac{1}{2} (\det g)^{-1/2} \dfrac{\partial}{\partial r} (\det g)^{-1/2}$;

(iii) $\Delta_m g^2(m, m') = -2n + \dfrac{4g}{G} \dfrac{\partial G}{\partial r}$.

Упражнение 16.2 (Переломов). Рассмотрим уравнение Шрёдингера

$$H\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$$

на компактном многообразии M размерности d, где $H = -\Delta + u$. Пусть

$$\vartheta(\beta) = \operatorname{tr}(e^{-\beta H}) = \sum_\lambda e^{-\lambda\beta}$$

и G — функция Грина уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial G}{\partial \beta}(x, y;\ \beta) + HG(x, y;\ \beta) = \delta(\beta)\,\delta(x - y).$$

Если $u = 0$, положим $G = G_0$.

(a) Показать, что $F(x, y;\ \beta) = G_0^{-1} G$ асимптотически удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial \beta} + \beta^{-1}(x - y)\nabla_x F(x, y;\ \beta) - \Delta_x F(x, y;\ \beta) + u(x) F(x, y;\ \beta) = 0.$$

(b) Показать, что в асимптотическом разложении

$$\vartheta(\beta) \sim (4\pi\beta)^{-d/2}(1 + a_1\beta + a_2\beta^2 + \ldots)$$

коэффициенты a_k даются формулами

$$a_k = \int F_k(x, x)\, dx,$$

где $F_k(x, x)$ — многочлены от u и ее производных, а именно

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k!} \int P_k(u, u_i, u_{ij}, \ldots)\, dx,$$

где

$$P_1 = u, \quad P_2 = u^2, \quad P_3 = u^3 + \frac{1}{2}(\nabla u)^2 \quad \text{и т. д.}$$

(c) Показать, что коэффициент a_k равен числу $(-1)^k/k!$, умноженному на k-й интеграл уравнения Кортевега — де Фриза

$$U_t = 6UU_x - U_{xxx},$$

если рассматривать потенциал как однопараметрическое семейство, удовлетворяющее уравнению КдФ.

Упражнение 16.3 (Дикий). Для задачи Штурма — Лиувилля

$$-\psi'' + u(x)\psi = \lambda\psi, \quad \psi(0) = \psi(\pi) = 0$$

с бесконечно дифференцируемой функцией $u(x)$

(a) показать, что $Z(s) = \sum\limits_{\lambda} \lambda^{-s}$ имеет полюсы в точках $s = 1/2, -1/2, -3/2, \ldots$;

(b) показать, что

$$\sum_n \frac{1}{\lambda_n + z} \sim \frac{\pi}{2\sqrt{z}} + \frac{1}{2z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_k}{z^{k+1/2}}$$

для больших z, где m_k — некоторые комбинации выражений вида

$$\int_0^{\pi} u^{(k_1)}(x) \ldots u^{(k_n)}(x)\, dx$$

с $k_1 + \ldots + k_n = k - 2n$;

(c) вычислить вычеты в полюсах функции

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s};$$

(d) доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n \beta} \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi\beta}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^m}{(2m-3)!!} H_{m-1} - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-t)^p}{p!} L_p \quad \text{при} \quad \beta \to 0,$$

где H_m — «гамильтониан»

$$H_m = \int_0^{\pi} I_m(u, u', \ldots)\, dx,$$

а

$$L_p = \mu_0^p + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\mu_{\alpha i-1}^p + \mu_{\alpha i}^p - 2\lambda_i\right).$$

Дополнительные сведения см. в [М 12] и указанной там литературе, в [Н 9] и т. д.

Упражнение 16.4. Асимптотическое решение уравнения Блоха еще в 1940 г. было получено Хусими; ср. также работы Дирака 1934 г. и Копсона 1948 г. А именно для уравнения

$$\partial\rho/\partial\beta = \left\{ \frac{1}{2}\, \partial^2/\partial q^2 - V(q) \right\} \rho$$

надо искать решение в виде

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \exp\left(-(q-q')^2/2\beta - \beta U(q, q';\ \beta)\right).$$

Представить U в виде $U = U_0 + \beta U_1 + \ldots$, подставить в уравнение и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях β. Показать, что $U_0 = (q-q')^{-1} \int_{q'}^{q} V(q)\, dq$, так что при $q \to q'$ $U_0 \to V(q')$; $U_1 = (V(q) + V(q') - 2U_0)/2(q-q')^2$, так что при $q \to q'$ $U_1 \to (1/12)\, V''(q')$. Аналогично найти U_2 и показать, что

$$\rho(q, q';\ \beta) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \exp\left[-\frac{(q-q')^2}{2\beta} - \frac{\beta}{q-q'} \int_{q'}^{q} V(q)\, dq - \ldots \right]$$

и

$$\rho(q, q;\ \beta) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \exp\left[-V(q)\,\beta - V''(q)\,\frac{\beta^2}{12} - \ldots \right].$$

Глава **17** Квантовая статистическая механика

17.1. Квантовая статистическая механика на компактных симметрических пространствах

Пусть G — компактная вещественная связная группа Ли размерности N и $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Предположим, что задана двусторонне инвариантная риманова метрика на G. Пусть T — максимальный тор в G с алгеброй Ли $\mathfrak{h}$, и пусть $\dim T = n$. Как мы говорили выше, существует ортонормированный базис в $\mathfrak{g}$, состоящий из элементов $H_1, \ldots, H_n \in \mathfrak{h}$ и X_r, Y_r, $1 \leqslant r \leqslant (N-n)/2$, удовлетворяющих соотношениям

(i) $[H, X_r] = -2\alpha_r(H) Y_r$ для $H \in \mathfrak{h}$,

(ii) $[H, Y_r] = 2\alpha_r(H) X_r$ для $H \in \mathfrak{h}$,

(iii) $[Y_r, X_r] = h'_r$, где $\langle H, h'_r \rangle = 2\alpha_r(H)$. Относительно этого базиса справедлива

Теорема 17.1.1. *Оператор Лапласа на G имеет вид*

$$-\Delta = \sum_{j=1}^{n} H_j^2 + \sum_r (X_r^2 + Y_r^2).$$

Определение 17.1.2. Пусть U — неприводимое представление группы Ли G в пространстве V и K — замкнутая подгруппа в G. Предположим, что U — представление класса 1 относительно K и что K — массивная подгруппа, т. е. в V есть единственный вектор v, инвариантный относительно K. Функция $v(g) = (U(g)v, v)$ называется *зональной сферической функцией*, соответствующей вектору v.

В нашем случае справедлива

Теорема 17.1.3. *Зональные сферические функции на компактном симметрическом пространстве $M = G/K$ имеют вид*

$$\Phi(h, \lambda) = (-1)^{(N-n)/2} \prod_{\alpha > 0} \frac{(\alpha, \delta)}{(\alpha, \lambda)} \cdot \frac{\sum_w \det w \exp(i\lambda, wh)}{j(h)},$$

где

$$j(h) = \prod_{\alpha > 0} \sin \pi(\alpha, h).$$

Теорема 17.1.4. *Функция $\Phi(h, \lambda)$ является собственной для оператора Δ_M с собственным значением* — $(\lambda, \lambda) - (\delta, \delta)$, *где* $\delta = (1/2) \sum_{\alpha > 0} \alpha$.

Теорема 17.1.5. *Рассмотрим уравнение Блоха* $(1/2)\Delta_M\rho = \partial\rho/\partial\beta$ *на компактном симметрическом пространстве* $M = G/K$, *и пусть* $\Delta_M\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$. *Тогда* $E_\lambda = -(\lambda, \lambda) - (\delta, \delta)$ *и кратность* E_λ *равна* $\mathrm{Mult}(E_\lambda) = n(\lambda)\, d(\lambda)$, *где* $n(\lambda) = \int_K \chi^{(\lambda)}(k)\, dk$ $\Bigl($*с нормировкой* $\int_K dk = 1\Bigr)$, *а* $d(\lambda) = \prod_{j=1}^{n} [(a/2 + \lambda), \alpha_j]$, *где* $a = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i$ *— сумма простых корней.*

Доказательство. Пусть $E_G(\beta, g)$ — фундаментальное решение уравнения Блоха $\partial\rho/\partial\beta = \Delta_G\rho$ на G. Поскольку E_G инвариантно относительно внутренних автоморфизмов G, оно разлагается в ряд по характерам (см. упр. 1.4) вида

$$E_G(\beta, g) = \sum_{\lambda \in \widehat{G}} a_\lambda(\beta)\, \chi_\lambda(g).$$

Подставляя это в уравнение Блоха, получаем

$$a'_\lambda(\beta) = -E_\lambda a_\lambda(\beta).$$

Поэтому $\alpha_\lambda(\beta) = a_\lambda(0) \exp(-E_\lambda\beta)$, где

$$a_\lambda(0) = \lim_{\beta\to 0} \int_G E(\beta, g)\, \chi_\lambda(g^{-1})\, dg = \chi_\lambda(e) = d(\lambda).$$

Проверяя, что

$$E_{G/K}(\beta, gK) = \int_K E_G(\beta, gk)\, dk,$$

имеем

$$E_{G/K}(\beta, gK) = \sum_{\lambda \in \widehat{G}_1} d(\lambda) \exp(-E_\lambda\beta)\, \varphi_\lambda(gK), \tag{$*$}$$

где

$$\varphi_\lambda(gK) = \int_K \chi_\lambda(gk)\, dk.$$

Полагаем $E_{G/K}(\beta, xK, yK) = E_{G/K}(\beta, y^{-1}xK)$. Тогда, подставляя в $(*)$ $g = e$, получаем

$$E_{G/K}(\beta, gK, gK) = \sum_{\lambda \in \widehat{G}_1} d(\lambda) \dim V_\lambda^K \exp(-E_\lambda\beta),$$

где V_λ — пространство представления U_λ, а V_λ^K — подпространство в V_λ, состоящее из K-инвариантных векторов.

Согласно следствию 18.1.5 из теоремы двойственности Фробениуса, имеем $n(\lambda) = \int_K \chi_\lambda(k)\, dk$, а в силу формулы Вейля для характера

$$d(\lambda)=\prod_{\alpha>0}\frac{(\lambda+\delta,\alpha)}{(\delta,\alpha)}.$$

Отсюда вытекает такой результат:

Следствие 17.1.6. *Если G/K — симметрическое пространство, то* $\dim\ V_\lambda^k=1$ *и*

$$E(\beta,\ gK,\ gK)=\sum_{\lambda\in\hat{G}_1} d(\lambda)\exp(-E_\lambda\beta).$$

Более точный результат можно сформулировать на основе следующей теоремы Картана.

Пусть G — компактная связная группа Ли с инволютивным автоморфизмом σ. Пусть K — открытая подгруппа в $G^\sigma=\{g\in G\,|\,\sigma(g)=g\}$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G распадается относительно σ в сумму $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$. Выберем максимальное абелево подпространство $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{p}$, и пусть $\Delta_\mathfrak{a}^+$ — система положительных корней пары $(\mathfrak{g}^C,\ \mathfrak{a}^C)$. Положим $\mathfrak{m}=\{X\in\mathfrak{k}\,|\,[X,\mathfrak{a}]=0\}$, и пусть $\mathfrak{t}$ — картановская подалгебра в $\mathfrak{m}$. Тогда $\mathfrak{h}=\mathfrak{t}+\mathfrak{a}$ — картановская подалгебра в $\mathfrak{g}$. Любой выбор системы положительных корней пары $(\mathfrak{t}^C,\ \mathfrak{m}^C)$ дает систему положительных корней Δ^+ пары $(\mathfrak{h}^C,\ \mathfrak{g}^C)$, для которой $\Delta_\mathfrak{a}^+$ получается ограничением корней из Δ^+ на $\mathfrak{a}$. Положим

$$\Lambda^+=\{\lambda\in i\mathfrak{a}^*\,|\,(\lambda,\ \alpha)/(\alpha,\ \alpha)\in\mathbf{Z}\ \text{и}\ \geqslant 0\ \text{для всех}\ \alpha\in\Delta_\mathfrak{a}^+\}.$$

Теорема 17.1.7 (Картан). *Пусть G/K — компактное симметрическое пространство с односвязной группой G и связной подгруппой K. Тогда существует биекция $\hat{G}_1\to\Lambda^+$, при которой классу $[T]\in\hat{G}_1$ соответствует старший вес представления T относительно* $(\mathfrak{h},\Delta^+)$.

Следствие 17.1.8. *Если M — односвязное симметрическое пространство, то функция распределения имеет вид*

$$\vartheta_M(\beta)=\sum_{\lambda\in\hat{G}_1} d(\lambda)\exp(-E_\lambda\beta),$$

где $E_\lambda=\|\lambda+\delta\|^2-\|\delta\|^2=\|\lambda+\delta_\mathfrak{a}\|^2-\|\delta_\mathfrak{a}\|^2$, *причем* $\|\alpha\|^2=(\alpha,\ \alpha)$ *и* $\alpha_\mathfrak{a}=\alpha\,|\,\mathfrak{a}$.

Отметим также, что Эскину принадлежит явное выражение для матрицы плотности на компактной группе Ли. Поскольку $\rho(\beta;\ x,y)=\rho(\beta;\ y^{-1}x,e)=\rho(\beta,y^{-1}x)$, мы видим, что $g\mapsto\rho(\beta,g)$ инвариантна относительно внутренних автоморфизмов. Поэтому эта функция определяется своим ограничением на максимальный тор. Имеет место

Теорема 17.1.9 (Эскин). *Матрица плотности на компактной полупростой группе Ли G имеет вид*

$$\rho(\beta, h) = \frac{\mathrm{Vol}\,(\mathfrak{t}/\Gamma)\,\Delta^{1/2}\exp(4\pi(\delta, \delta)\beta)}{2^{(N+n)/2}\pi^{N/2}i^{N-n}\prod\limits_r(\delta, h_r')\,\beta^{n/2}} \times$$
$$\times \sum_{\gamma\in\Gamma}\frac{L(h)\exp(-(h, h)/4\beta)(H+\gamma)}{j(H+\gamma)}$$

для $h\in T'$ (T' — *множество регулярных элементов в* T), *где* Γ — *целочисленная решетка в* $\mathfrak{t}$, Δ — *дискриминант скалярного произведения в* $\mathfrak{t}$ *относительно* $\mathbf{R}^n$,

$$j(H) = \prod_r 2\,\mathrm{sh}(\pi i\alpha_r(H)),$$

а $L(h) = \prod\limits_r L(h, h_r')$, *где* $L(h, h_r')$ *означает производную в точке* h *по направлению* h_r'.

Следствие 17.1.10. *Диагональ матрицы плотности на симметрическом пространстве* G/K *имеет вид*

$$E_{G/K}(\beta;\ xK,\ xK) = \int_K E_G(\beta, k)\,dk = \frac{1}{|W|}\int_T E_G(\beta, u)\,|j(u)|^2\,du.$$

Мы не будем исследовать высокотемпературную асимптотику таких интегралов, а вместо этого опишем подход, который связывает это с квантовой теорией поля в гл. 19.

Первые интегральные примеры разложений типа Минакшисандарама для функции распределения были получены Фаулером и его учеником Мулхолландом для ротатора в 1928 г. Спустя 20 лет Минакшисандарам рассмотрел более общий случай сферы произвольной размерности. Однако лишь недавно Вулф и Кан обнаружили, что первоначальная работа Мулхолланда дает асимптотическое разложение для любого компактного симметрического пространства ранга 1. А именно можно указать формулы для всех коэффициентов высокотемпературной асимптотики

$$\vartheta(\beta) = (4\pi\beta)^{-n/2}(a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 + \ldots) \text{ при } \beta\to 0.$$

Прежде чем исследовать асимптотику, мы применим теорему 17.1.7 и теорию алгебр Ли к выводу функции распределения для симметрических пространств $M = G/K$ ранга 1. Это было сделано Вулфом и Каном, изложению которых мы следуем здесь.

Рассмотрим сначала нечетномерную сферу $S^{2n-1} = SO(2n)/SO(2n-1)$, $n \geqslant 1$. Случай $n=1$ уже был рассмотрен. В случае $n=2$ $G = SO(4)$ имеет диаграмму Дынкина $D_2 = A_1 + A_1$. Поэтому $\Delta^+ = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\Delta_a^+ = \{\alpha\}$, $\delta = \delta^a = \alpha = (1/2)(\alpha_1 + \alpha_2)$. Значит, $\Lambda^+ = \{m\alpha \mid m \geqslant 0$ и $m \in \mathbf{Z}\}$ и $E_{m\alpha} = \| m\alpha + \delta \|^2 - \| \delta \|^2 = (m^2 + 2m) \| \delta \|^2$ и

$$d(m\alpha) = \frac{\langle m\alpha + \delta, \alpha_1 \rangle}{\langle \delta, \alpha_1 \rangle} \frac{\langle m\alpha + \delta, \alpha_2 \rangle}{\langle \delta, \alpha_2 \rangle} = (m+1)^2.$$

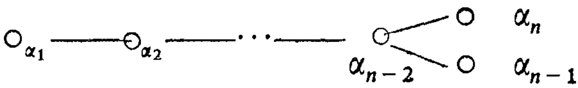
Выбирая в качестве метрики на S^3 и $P^3(\mathbf{R})$ форму Киллинга с обратным знаком, мы получаем из таблиц в [B 19], что $\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle = 1/2$, так что $\|\delta\|^2 = (1/4)\langle \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 \rangle = 1/4$ и

$$\vartheta_{S^3}(\beta) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^2 e^{-\beta (m^2 + 2m)/4}.$$

Ясно, что $T_{m\alpha}(-1) = 1$ для четных m и, значит,

$$\vartheta_{P^3(\mathbf{R})}(\beta) = \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1)^2 e^{-\beta (r^2 + r)}.$$

Этот случай рассмотрен также де Виттом в [Д 6]. Предположим теперь, что $n \geqslant 3$, так что $G = SO(2n)$ — простая группа Ли типа D_n с диаграммой Дынкина



Здесь

$$\Delta_a^+ = \{\alpha\}, \quad \alpha = \alpha_1 \mid \mathfrak{a} \quad \text{и} \quad \alpha_i \mid \mathfrak{a} = 0 \quad \text{при} \quad i > 1.$$

Относительно подходящим образом нормированной формы Картана — Киллинга пространство диагональных матриц имеет ортонормированный базис $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, для которого

$$\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant n-1 \text{ и } \alpha_n = \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n.$$

Система Δ^+ состоит из корней $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Ненулевые ограничения на $\mathfrak{a}$ имеют корни $\varepsilon_1 \pm \varepsilon_j$, $1 < j \leqslant n$. Отсюда

$$\Lambda^+ = \{m\varepsilon_1 \mid m \geqslant 0, \ m \in \mathbf{Z}\}, \quad \delta_a = (n-1)\varepsilon_1 \quad \text{и} \quad \delta = \sum_{j=1}^{n-1} (a-j)\varepsilon_j.$$

Если $1 \leqslant i < j \leqslant n$, то $\langle \delta, \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \rangle = [(n-i) \pm (n-j)] \|\varepsilon_1\|^2$, так что

$$\frac{\langle m\varepsilon_1 + \delta, \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \rangle}{\langle \delta, \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \rangle} = \begin{cases} 1 \text{ при } i > 0, \\ \dfrac{m + n - 1 \pm (n-j)}{(n-1) \pm (n-1)} \text{ при } i = 1. \end{cases}$$

Это дает

$$d(m\varepsilon_1)=\prod_{j=2}^{n}\frac{m+2n-j-1}{2n-j-1}\cdot\frac{m-1+j}{j-1}=\frac{m+n-1}{n-1}\prod_{k=1}^{2n-3}\frac{m+k}{k}.$$

Напомним, что, согласно таблицам в [B 19], $\|\varepsilon_1\|^2=(n-1)/4$. Значит,

$$E_{m\varepsilon_1}=\|m\varepsilon_1+\delta_\alpha\|^2-\|\delta_\alpha\|^2=\frac{m^2+2m(n-1)}{4(n-1)}.$$

Из следствия 17.1.8 вытекает

Теорема 17.1.11. *Пусть S^{2n-1} — нечетномерная сфера с римановой метрикой постоянной положительной кривизны, получаемой из формы Картана — Киллинга на $SO(2n)$, и $n\geqslant 3$. Тогда*

$$\vartheta_{S^{2n-1}}(\beta)=\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{m+n-1}{n-1}\sum_{k=1}^{2n-3}\frac{m+k}{k}\right\}e^{-\beta(m^2+2m(n-1))/4(n-1)}.\quad(*)$$

Вещественное проективное пространство $P^{2n-1}(\mathbf{R})=S^{2n-1}/\{\pm 1\}$ имеет функцию распределения, получаемую из $(*)$ отбрасыванием слагаемых с нечетным m.

Следствие 17.1.12.

$$\vartheta_{P^{2n-1}(\mathbf{R})}(\beta)=\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{2r+n-1}{n-1}\prod_{k=1}^{2n-3}\frac{2r+k}{k}\right\}e^{-\beta r(r+n-1)/(n-1)}.$$

Рассмотрим теперь случай сфер и вещественных проективных пространств четной размерности $2n$:

$$S^{2n}=SO(2n+1)/SO(2n),\quad n\geqslant 1,$$

и

$$P^{2n}(\mathbf{R})=S^{2n}/\{\pm 1\}=SO(2n+1)/SO(2n)\times O(1).$$

Группа $G=SO(2n+1)$ имеет диаграмму Дынкина

$$B_n:\circ_{\alpha_1}\!\!-\!\!-\!\!-\circ_{\alpha_2}\!\!-\!\!-\!\!-\cdots-\!\!-\!\!-\circ_{\alpha_{n-1}}\!\!=\!\!=\!\!=\bullet_{\alpha_n}$$

Здесь $\Delta_\alpha^+=\{\alpha\}$, $\alpha=\alpha_1\,|\,\alpha$, $\alpha_i\,|\,\alpha=0$ при $i>1$. Существует такой ортонормированный базис $\{\varepsilon_i\}$ в пространстве диагональных матриц, что

$$\alpha_i=\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1},\quad 1\leqslant i\leqslant n-1,\quad \text{и}\quad \alpha_n=\varepsilon_n.$$

Семейство Δ^+ состоит из корней $\varepsilon_i\pm\varepsilon_j$, $1\leqslant i<j\leqslant n$, и корней ε_k, $1\leqslant k\leqslant n$. Поэтому $\alpha=\varepsilon_1$ и ненулевые ограничения

на $\mathfrak{a}$ дают ε_1 и $\varepsilon_1 \pm \varepsilon_j$, $1 < j \leqslant n$. Далее,

$$\Lambda^+ = \{m\varepsilon_1 \mid m \geqslant 0 \text{ и } m \in \mathbf{Z}\}, \quad \delta_{\mathfrak{a}} = \left(n - \frac{1}{2}\right)\varepsilon_1 \text{ и}$$

$$\delta = \sum_{j=1}^{n} \left(n - j + \frac{1}{2}\right)\varepsilon_j.$$

Если $1 \leqslant i < j \leqslant n$, то $\langle \delta, \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \rangle = [(h - i + 1/2) \pm (n - j + 1/2)] \|\varepsilon_1\|^2$, так что

$$\frac{\langle m\varepsilon_1 + \delta, \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \rangle}{\langle \delta, \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \rangle} = \begin{cases} 1, \text{ если } i > 1, \\ \dfrac{(m + n - 1/2) \pm (n - j + 1/2)}{(n - 1/2) \pm (n - i + 1/2)} & \text{при } i = 1. \end{cases}$$

Если $1 \leqslant k \leqslant n$, то $\langle \delta, \varepsilon_k \rangle = (n - k + 1/2) \|\varepsilon_1\|^2$, так что

$$\frac{\langle m\varepsilon_1 + \delta, \varepsilon_k \rangle}{\langle \delta, \varepsilon_k \rangle} = \begin{cases} 1 & \text{при } k > 1, \\ \dfrac{m + n - 1/2}{n - 1/2} & \text{при } k = 1. \end{cases}$$

Это дает

$$d(m\varepsilon_1) = \frac{m + n - 1/2}{n - 1/2} \prod_{j=2}^{n} \frac{m + 2n - j}{2n - j} \, \frac{m + j - 1}{j - 1} =$$

$$= \frac{m + n - 1/2}{n - 1/2} \prod_{k=1}^{2n-2} \frac{m + k}{k}.$$

Напомним, из таблиц в [B 19], что $\|\varepsilon_1\|^2 = 1/(4n - 2)$.

Теорема 17.1.13. *Для сферы S^{2n} четной размерности $2n$ с римановой метрикой постоянной положительной кривизны, определяемой формой Картана — Киллинга на $SO(2n + 1)$,*

$$\vartheta_{S^{2n}}(\beta) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{m + n - 1/2}{n - 1/2} \prod_{k=1}^{2n-2} \frac{m + k}{k} \right\} e^{-\beta m (m + 2n - 1)/(4n - 2)}.$$

Следствие 17.1.14. *Для четномерного вещественного проективного пространства с римановой метрикой постоянной положительной кривизны*

$$\vartheta_{P^{2n}(\mathbf{R})}(\beta) = \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \frac{2r + n - 1/2}{n - 1/2} \prod_{k=1}^{2n-2} \frac{2r + k}{k} \right\} e^{-\beta r (2r + 2n - 1)/(2n - 1)}.$$

Рассмотрим теперь функции распределения для комплексных проективных пространств

$$P_n(\mathbf{C}) = U(n + 1)/U(n) \times U(1) = SU(n + 1)/S(U(n) \times U(1))$$

комплексной размерности n (или вещественной размерности $2n$). Поскольку случай $n=1$, $P^1(\mathbf{C})=S^2$ уже рассмотрен, мы предположим, что $n>1$. Группа $G=SU(n+1)/\{e^{2\pi ik/(n+1)}\cdot 1\}$ имеет диаграмму Дынкина

$$A_n: \circ_{\alpha_1} — \circ_{\alpha_2} — \cdots — \circ_{\alpha_n}$$

Здесь $\Delta_{\mathfrak{a}}^{+}=\{\alpha, 2\alpha\}$, $\alpha=\alpha_1|\mathfrak{a}=\alpha_n|\mathfrak{a}$, $\alpha_i|\mathfrak{a}=0$ при $n>i>1$. Пространство диагональных матриц в $\mathfrak{g}$ отождествляется с гиперплоскостью

$$\left\{\sum_{i=1}^{n+1} x^i\varepsilon_i \,\Big|\, \sum x^i=0\right\}$$

в $\mathbf{R}^{n+1}$ с ортонормированным базисом $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n+1}\}$. Простые корни имеют вид $\alpha_i=\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}$, а Δ^+ состоит из корней $\alpha_i+\ldots$ $\ldots+\alpha_j=\varepsilon_i-\varepsilon_j$ для $1\leqslant i<j\leqslant n+1$. Кроме того,

$\alpha=(\varepsilon_1-\varepsilon_{n+1})/2$; ненулевые ограничения α на $\mathfrak{a}$ имеют корни $\varepsilon_1-\varepsilon_j$ и $\varepsilon_j-\varepsilon_{n+1}$, $1<j<n+1$,

ограничение 2α имеет только корень $\varepsilon_1-\varepsilon_{n+1}$.

Далее,

$$\Lambda^+=\{2m\alpha=m(\varepsilon_1-\varepsilon_{n+1})\,|\,m\geqslant 0, \quad m\in\mathbf{Z}\},$$

$$\delta_{\mathfrak{a}}=n\alpha=n(\varepsilon_1-\varepsilon_{n+1})/2, \quad \delta=1/2\sum_{i<j}(\varepsilon_i-\varepsilon_j)=\sum_{j=1}^{n+1}(n/2-j+1)\,\varepsilon_j.$$

Поэтому

$$\frac{\langle m(\varepsilon_1-\varepsilon_{n+1})+\delta,\ \varepsilon_i-\varepsilon_{j+1}\rangle}{\langle\delta,\ \varepsilon_i-\varepsilon_{j+1}\rangle}=\begin{cases} 1 \text{ при } 1<i\leqslant j<n, \\ (m+j)/j \text{ при } 1=i\leqslant j<n, \\ (m+n+1-i)/(n+1-i) \text{ при } \\ 1<i\leqslant j=n, \\ (2m+n)/n \text{ при } 1\leqslant i<j\leqslant n. \end{cases}$$

Значит,

$$d(m(\varepsilon_1-\varepsilon_{n+1}))=\frac{2m+n}{n}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{m+k}{k}\right)^2.$$

Из таблиц в [B 19] следует, что $\|\varepsilon_i\|=(n+1)/2$, так что $\|\alpha\|=$ $=(n+1)/4$. Далее,

$$E_{m\alpha}=\|2m\alpha+\delta_{\mathfrak{a}}\|^2-\|\delta_{\mathfrak{a}}\|^2=\frac{m(m+n)}{n+1}.$$

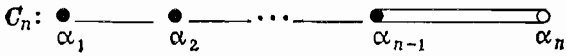
Теорема 17.1.15. *Функция распределения для комплексного проективного пространства $P^n(\mathbf{C})$ с римановой метрикой, индуцированной формой Картана — Киллинга на $SU(n+1)$, равна*

$$\vartheta_{P^n(\mathbf{C})}(\beta)=\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{2m+n}{n}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{m+k}{k}\right)^2\right\}e^{-\beta m(m+n)/(n+1)}.$$

Рассмотрим теперь функцию распределения для кватернионного проективного пространства

$$P^{n-1}(\mathbf{H}) = Sp(n)/Sp(n-1)\times Sp(1), \quad n \geqslant 2,$$

вещественной размерности $4(n-1)$. Отметим, что $P^1(\mathbf{H}) = S^4$. Группа $G = Sp(n)/\{\pm 1\}$ имеет диаграмму Дынкина



Здесь $\Delta_{\mathfrak{a}}^+ = \{\alpha, 2\alpha\}$, $\alpha = \alpha_2 | \mathfrak{a}$, $\alpha_i | \mathfrak{a} = 0$ при $i \neq 2$. Простые корни имеют вид

$$\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant n-1, \quad \alpha_n = 2\varepsilon_n.$$

Таким образом, Δ^+ состоит из корней $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$ и $2\varepsilon_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Поэтому

$\alpha = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2$; ограничение α имеют корни $\varepsilon_1 \pm \varepsilon_j$ и $\varepsilon_2 \pm \varepsilon_j$, $3 \leqslant j \leqslant n$;

ограничение $2\alpha = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ имеют корни $2\varepsilon_1$, $2\varepsilon_2$ и $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Далее,

$\Lambda^+ = \{2m\alpha = m(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \mid m \geqslant 0, \quad m \in \mathbf{Z}\}$ и

$\delta_{\mathfrak{a}} = (2n-1)\alpha = (n - 1/2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$,

$$\delta = (1/2)\sum_{i<j}(\varepsilon_i - \varepsilon_j) + (1/2)\sum_{i\leqslant j}(\varepsilon_i + \varepsilon_j) + \sum \varepsilon_k = \sum_{l=1}(n - l + 1)\varepsilon_l.$$

Вычисляя $\langle \delta, \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \rangle = ((n-i+1) \pm (n-j+1))\|\varepsilon_1\|^2$ и $\langle \delta, 2\varepsilon_k \rangle = 2(n-k+1)\|\varepsilon_1\|^2$, получаем

$$d(m(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)) = \frac{2m + 2n - 1}{2n - 1}\prod_{r=2}^{2n-2}\frac{m+r}{r}\prod_{s=1}^{2n-3}\frac{m+s}{s}.$$

Значение $\|\varepsilon_1\|^2$ равно, согласно [B 19], $1/4(n+1)$. Отсюда $\|\alpha\| = 1/8(n+1)$ и

$$E_{2m\alpha} = \|m(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \delta_{\mathfrak{a}}\|^2 - \|\delta_{\mathfrak{a}}\|^2 = \frac{m(m + 2n - 1)}{2(n+1)}.$$

Теорема 17.1.16. *Функция распределения для кватернионного проективного пространства $P^{n-1}(\mathbf{H})$ с метрикой, индуцированной формой Картана — Киллинга на $Sp(n)$, равна*

$$\vartheta_{P^{n-1}(\mathbf{H})}(\beta) = \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{2m + 2n - 1}{2a - 1}\prod_{r=2}^{2n-2}\frac{m+r}{r}\prod_{s=1}^{2n-3}\frac{m+s}{s}\right\}e^{-\beta m(m+2n-1)/(2(n+1))}.$$

Отметим, что при $n=2$ этот результат совпадает с вычисленным ранее:

$$\vartheta_{S^4}(\beta)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m+3)(m+2)(m+1)}{6}e^{-\beta(m^2+3m)/6}.$$

Наконец, вычислим функции распределения для проективной плоскости над числами Кэли

$$P^2(\mathrm{Cay})=F_4/\mathrm{Spin}\,9$$

вещественной размерности 16.

Группа $G=F_4$ имеет диаграмму Дынкина

$$F_4:\ \underset{\alpha_1}{\circ}-\underset{\alpha_2}{\circ}\Rightarrow\underset{\alpha_3}{\bullet}-\underset{\alpha_4}{\bullet}-$$

Здесь $\Delta_{\mathfrak{a}}^{+}=\{\alpha,\ 2\alpha\}$, где $\alpha=\alpha_4|\mathfrak{a}$, $\alpha_i|\mathfrak{a}=0$ при $i<4$. Простые корни имеют вид

$$\alpha_1=\varepsilon_2-\varepsilon_3,\ \alpha_2=\varepsilon_3-\varepsilon_4,\ \alpha_3=\varepsilon_4,\ \alpha_4=(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)/2.$$

Таким образом, Δ^+ состоит из корней

$\varepsilon_i,\ 1\leqslant i\leqslant 4;\quad \varepsilon_i\pm\varepsilon_j,\ 1\leqslant i<j\leqslant 4;\quad (\varepsilon_1\pm\varepsilon_2\pm\varepsilon_3\pm\varepsilon_4)/2.$

Далее,

$\alpha=\varepsilon_1/2$; ограничение α имеют корни $(\varepsilon_1\pm\varepsilon_2\pm\varepsilon_3\pm\varepsilon_4)/2$.

$2\alpha=\varepsilon_1$; ограничение 2α имеют ε_1 и $\varepsilon_1\pm\varepsilon_i$, $i=2, 3, 4$.

$$\Lambda^+=\{m\varepsilon_1\mid m\geqslant 0,\ m\in\mathbf{Z}\},\quad \delta_{\mathfrak{a}}=11\alpha=11\varepsilon_1/2,$$

$$\delta=(11\varepsilon_1+5\varepsilon_2+3\varepsilon_3+\varepsilon_4)/2.$$

Вычисление дает

$$d(m\varepsilon_1)=\frac{2m+11}{11}\prod_{q=1}^{3}\frac{m+q}{q}\prod_{r=4}^{7}\left(\frac{m+r}{r}\right)^2\prod_{s=8}^{10}\frac{m+s}{s}.$$

Величина $\|\varepsilon_1\|^2$, согласно [B 19], равна 1/18, так что $\|\alpha\|^2=1/72$ и

$$E_{m\varepsilon_1}=\|(2m+11)\alpha\|^2-\|11\alpha\|^2=\frac{m(m+11)}{18}.$$

Теорема 17.1.17. *Функция распределения для проективной плоскости над числами Кэли $P^2(\mathrm{Cay})$ с римановой метрикой, индуцированной формой Картана — Киллинга на F_4, равна*

$$\vartheta_{P^2(\mathrm{Cay})}(\beta)=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{2m+11}{11}\prod_{q=1}^{3}\frac{m+q}{q}\prod_{r=4}^{7}\left(\frac{m+r}{r}\right)^2\prod_{s=8}^{10}\frac{m+s}{s}\right\}e^{-\beta m(m+1)/18}.$$

Перейдем к рассмотрению высокотемпературной асимптотики для функций распределения на компактных симметрических пространствах ранга 1. Как отмечалось выше, Вулф и Кан показали, что результаты Мулхолланда справедливы для этих однородных пространств. Опишем эти результаты.

Теорема 17.1.18 (Мулхолланд). *Пусть* $f(t) = \sum_{s \in \mathbf{Z}} \exp(-s^2 t)$. *Тогда при* $t \to 0$ *имеем* $f(t) = (\pi/t)^{1/2} + O(\exp(-1/t))$ *и*

$$(-1)^k f^{(k)}(t) = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2k-1)}{2k} t^{-k} \sqrt{\frac{\pi}{t}} + O\left(\exp\left(-\frac{1}{t}\right)\right).$$

Доказательство. Применим формулу суммирования Пуассона к функции $\exp(-s^2 t)$ и получим

$$\sum_{s \in \mathbf{Z}} \exp(-s^2 t) = (\pi/t)^{1/2} \sum_{s \in \mathbf{Z}} \exp(-\pi^2 s^2/t).$$

Первая часть теоремы следует из того, что все слагаемые с $s \neq 0$ имеют порядок $O(\exp(-1/t))$. Вторая часть получается дифференцированием.

Определение 17.1.19. Положим $b_0 = 1$, $b_k = 1 \cdot 3 \ldots \ldots (2k-1)/2^k$.

Тогда $\pi^{1/2} b_k = \Gamma(k + 1/2)$.

Мулхолланд показал в [M 39], что справедливы

Теорема 17.1.20. *Пусть* $g(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) e^{-(j+1/2)^2 t}$.

Тогда

$$g(t) = \frac{1}{t} + c_0 + c_1 t + \ldots + c_n \frac{t^n}{n!} + O(t^{n+1}),$$

$$g^{(k)}(t) = \frac{(-1)^k k!}{t^{k+1}} + c_k + \ldots + c_{k+n} \frac{t^n}{n!} + O(t^{n+1})$$

при $t \to 0$; *здесь*

$$c_n = \frac{(-1)^n}{n+1} B_{2n+2} (1 - 2^{-2n-1}),$$

где B_n *есть* n*-е число Бернулли.*

Теорема 17.1.21. *Пусть* $g_1(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (4j+1) e^{-(2j+1/2)^2 t}$,

$$g_2(t)=\sum_{j=0}^{\infty}(4j+3)\,e^{-(2j+3/2)^2 t}.\quad \textit{Тогда}$$

$$g_i(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}+c_0+c_1t+\ldots+c_n\frac{t^n}{n!}+O(t^{n+1})\right),\quad i=1,2,$$

$$g_i^{(k)}(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^k k!}{t^{k+1}}+c_k+\ldots+c_{k+n}\frac{t^n}{n!}+O(t^{n+1})\right),\quad i=1,\ 2,$$

при $t\to 0$.

Теорема 17.1.22. *Пусть* $h(t)=\sum_{j=0}^{\infty}2je^{-j^2t}$. *Тогда*

$$h(t)=\frac{1}{t}+d_0+d_1t+\ldots+d_n\frac{t^n}{n!}+O(t^{n+1}),$$

$$h^{(k)}(t)=\frac{(-1)^k k!}{t^{k+1}}+d_k+\ldots+d_{k+n}\frac{t^n}{n!}+O(t^{n+1})$$

при $t\to 0$, *где*

$$d_n=\frac{(-1)^n}{n+1}B_{2n+2}.$$

С помощью результатов Мулхолланда можно вычислить коэффициенты a_n в высокотемпературной асимптотике для только что выведенных нами функций распределения. Здесь мы также следуем Вулфу и Кану.

Из теоремы 17.1.8 выводим:

$M=S^1$.

$$\vartheta_M(\beta)=f\left(\frac{4\pi^2}{l^2}\beta\right)$$

и, значит,

$$\vartheta_M(\beta)=\pi^{1/2}\left(\frac{4\pi^2}{l^2}\beta\right)^{-1/2}+O(e^{-1/\beta})=l\,(4\pi\beta)^{-1/2}+O(e^{-1/\beta}).$$

Таким образом, $a_0=l$ и $a_m=0$ при $m\geqslant 1$.

$M=S^3$.

$$\vartheta_M(\beta)=\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)^2e^{-\beta(m^2+m)/4}=$$

$$=\sum_{p=1}^{\infty}p^2e^{-\beta(p^2-1)/4}=-1/2e^{\beta/4}f'(\beta/4)=$$

$$=2\pi^{1/2}\beta^{-3/2}e^{\beta/4}+ES=\frac{16\pi^2e^{\beta/4}}{(4\pi\beta)^{3/2}}+ES,$$

где ES — экспоненциально малая ошибка при $\beta \to 0$. Поэтому $a_m = 16\pi^2/4^m m!$

$M = P^3(\mathbf{R})$.

$$\vartheta_M(\beta) = \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1)^2 e^{-(r^2+r)\beta} =$$

$$= \frac{1}{2} e^{\beta/4}\left(4f'(\beta) - f'\left(\frac{\beta}{4}\right)\right) = \frac{8\pi^2 e^{\beta/4}}{(4\pi\beta)^{3/2}} + ES.$$

Отсюда $a_m = 8\pi^2/4^m m!$.

$M = S^{2n-1}$, $n \geqslant 3$.

$$\vartheta_M(\beta) = \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{m+n-1}{n-1}\prod_{k=0}^{2n-3}\frac{m+k}{k}\right\} e^{-\beta m(m+2n-2)/(4(n-1))}.$$

Определим $\alpha_{k,n}$ из равенства

$$\prod_{j=0}^{n-2}(s^2 - j^2) = \prod_{k=0}^{n-1}\alpha_{k,n} s^{2k}.$$

Тогда

$$\vartheta_M(\beta) = \frac{e^{(n-1)\beta/4}}{(2n-2)!}\sum_{s\in\mathbf{Z}}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_{k,n} s^{2k} e^{-s^2\beta/4(n-1)}.$$

Отсюда (мы опускаем выкладки)

$$a_m = \frac{2^{2n-1}\pi^n}{(2n-2)!}\sum_{k=0}^{m}\frac{(n-1)^{n-1/2}}{k!}\alpha_{n-1-k,n}\cdot b_{n-1-k}\cdot 4^{n-2k-1/2}$$

при $m < n$ и

$$a_m = \frac{2^{2n-1}\pi^n}{(2n-2)!}\sum_{k=m-n}^{m}\frac{(n-1)^{m-1/2}}{k!}\alpha_{m-k-1,n}\cdot b_{n-k-1}\cdot 4^{m-2k-1/2}$$

при $m \geqslant n$.

$M = P^{2n-1}(\mathbf{R})$. Формулы аналогичны предыдущим с заменой коэффициентов $\alpha_{k,n}$ на $\alpha'_{k,n}$, получаемые из равенства

$$\prod_{j=0}^{n-2}(4s^2 - j^2) = 4^{n-1}\prod_{j=0}^{n-1}\alpha'_{j,n} s^{2j}.$$

$M = S^{2n}$. Коэффициенты a_m имеют вид

$$a_m = \frac{(4\pi)^n}{(2n-1)!}\sum_{k=0}^{m}\frac{(n-1-m+k)!}{k!}4^{n-m-1}(n-1/2)^{m-n+2k+1}\beta_{n-1-m+k,n}$$

при $m < n$ и

$$a_m = \frac{(4\pi)^n}{(2n-1)!}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!}{(m-n+k+1)!}(n-1/2)^{m-n+2k+2}\beta_{k,\,m}\cdot 4^{n-m} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{m-n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^j c_{k+j}\beta_{j,\,n}(n-1/2)^{m-n-2k}}{k!\,(m-n-k)!}\cdot 4^{n-m}\right),$$

где $\beta_{j,\,n}$ определяются равенством

$$\prod_{j=1/2}^{n-3/2}(s^2-j^2) = \sum_{j=0}^{n-1}\beta_{j,\,n}s^{2j}.$$

$M = P^{2n}(\mathbf{R})$. Формулы аналогичны предыдущим с заменой $\beta_{j,\,n}$ на $\beta'_{j,\,n}$, определяемые из равенства

$$\prod_{j=1/2}^{n-3/2}(4s^2-j^2/4) = \sum_{j=0}^{n-1}\beta'_{j,\,n}s^{2j}.$$

Явные формулы для $M = P^n(\mathbf{C})$ и $P^2(\mathrm{Cay})$ мы опускаем.

17.2. Дзета-функции на компактных группах Ли

Используя явную формулу для ядра $\rho_G(\beta; g)$ на компактной группе Ли G, Эскин в [Е 4] исследовал дзета-функцию

$$Z(g;\ s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty [\rho_G(\beta;\ g) - 1]\,\beta^{s-1}d\beta.$$

Как и в 16.2.1, он обнаружил, что при $g \neq e$ $Z(g; s)$ — целая функция от s, а при $g = e$ $Z(e, s)$ — мероморфная функция от s с полюсами в точках

$$N/2,\ N/2-1,\ \ldots,\ 2,\ 1 \text{ для четного } N$$

и

$$N/2,\ N/2-1,\ \ldots \text{ для нечетного } N,$$

где $N = \dim G$.

Теорема 17.2.1 (Эскин). *Вычеты в указанных полюсах равны*

$$\operatorname{Res} Z(e,\ s)\,|_{N/2-k} = \frac{\pi^{2k-N+n/2}V_\Gamma 2^{2k}\langle\delta,\delta\rangle^k}{2^{N+r}k!\prod_{\alpha>0}\langle\alpha,\delta\rangle\,\Gamma(N/2-k)}.$$

Задачи

Упражнение 17.1. Пусть G — компактная связная односвязная полупростая группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Обозначим через L решетку целочисленных весов, $|W|$ — порядок группы Вейля,

$$\delta = 1/2 \sum_{\alpha > 0} \alpha \text{ и } F(\Lambda) \prod_{\alpha > 0} ((\Lambda, \alpha)/(\delta, \alpha)).$$

Показать, что если ранг G равен 1, то функция распределения

$$Z(\beta) = \frac{1}{|W|} \sum_{\Lambda \in L} F^2(\Lambda) \exp[(-|\Lambda|^2 + |\delta|^2)\beta]$$

имеет вид

$$Z(\beta) = \frac{\mathrm{Vol}\, G}{(4\pi\beta)^{\dim G/2}} \exp(\beta |\delta|^2) + ES,$$

где ES — экспоненциально малая ошибка при $\beta \to 0$.

Более точно, показать, что в этом случае $L = \mathbf{Z}$, $F(\Lambda) = \Lambda$, $|\Lambda|^2 = 2\Lambda^2$ и

$$Z(\beta) = (1/2)\, e^{\beta |\delta|^2} \sum_{\Lambda \in \mathbf{Z}} \Lambda^2 e^{-\Lambda^2 \beta}.$$

Поскольку

$$\sum_{\Lambda \in \mathbf{Z}} \Lambda^2 e^{-\Lambda^2 \beta} = -\frac{d}{d\beta} \sum_{\Lambda \in \mathbf{Z}} e^{-\Lambda^2 \beta},$$

использовать формулу суммирования Пуассона для завершения доказательства. Обобщить это рассуждение на группы ранга n.

Глава 18 Теория следа Сельберга

18.1. Формула следа Сельберга

В примере 3.34 мы изучали классическую механическую систему, задаваемую геодезическим потоком на плоскости Лобачевского $\mathscr{P} = SL(2, \mathbf{R})/SO(2)$. Мы хотим исследовать функции распределения для квантовых статистических систем, связанных с этим потоком. Плоскость $\mathscr{P}$ некомпактна, поэтому мы будем рассматривать факторпространства $M = \Gamma\backslash\mathscr{P}$, где Γ — такая дискретная подгруппа в $SL(2, \mathbf{R})$, для которой M компактно. Этот пример изучали Маас, Сельберг и др. Недавно эти пространства вновь подверглись исследованию в квантовой теории поля Даукером и др., как мы увидим в следующей главе.

Рассмотрим более общий случай $M = \Gamma\backslash G/K$, где G/K — симметрическое пространство ранга 1. В этом случае G — связная полупростая группа Ли с конечным центром, а K — максимальная компактная подгруппа в G. Подгруппа Γ совпадает с фундаментальной группой пространства M. В общем случае нужно ввести в рассмотрение также конечномерное унитарное представление T группы Γ. Пусть χ — его характер.

Обозначим через $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{k}$ алгебры Ли групп G и K, и пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ — картановское разложение, а $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ — максимальное абелево пространство в $\mathfrak{p}$. Справедливы разложения Ивасавы $\mathfrak{a} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a}_\mathfrak{p} \oplus \mathfrak{n}$ или $G = KA_\mathfrak{p}N$ Предполагаем, что $\dim \mathfrak{a}_\mathfrak{p} = 1$. Пусть Λ — двойственное к $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ пространство. Положим для $X \in \mathfrak{g}$ $|X|^2 = -B(X, \tau X)$, где τ — инволюция, сохраняющая элементы $\mathfrak{k}$, а B — форма Картана — Киллинга. Обозначим через $\sigma(g)$ функцию $\sigma(k \exp X) = |X|$ для $k \in K$, $X \in \mathfrak{p}$.

Пусть $\mathfrak{a}$ — картановская подалгебра в $\mathfrak{g}$, содержащая $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$, и Δ — система корней пары $(\mathfrak{a}^\mathbf{C}, \mathfrak{g}^\mathbf{C})$. Обозначим Δ^+ систему положительных корней и $P_+ = \{\alpha \in \Delta^+ \mid \alpha \not\equiv 0 \text{ на } \mathfrak{a}_\mathfrak{p}\}$. Пусть δ — полусумма корней из P_+, а Σ означает множество ограничений на $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ корней из P_+. Поскольку $\dim \mathfrak{a}_\mathfrak{p} = 1$, существует такой элемент $b \in \Sigma$, что $\Sigma = \{b, 2b\}$. Определим $H_0 \in \mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ равенством $b(H_0) = 1$ и положим $\delta_0 = \delta(H_0)$. Для любого $h \in A_\mathfrak{p}$ положим $u(h) = b(\ln h)$.

Пусть p корней из P_+ проектируются в b, а q корней — в $2b$. Тогда $(H_0, H_0) = 2p + 8q$, $\delta(H_0) = (p + 2q)/2$, $\langle\delta, \delta\rangle = ((p + 2q^2)(2p + 8q)^{-1})/4$.

Рассмотрим пространство $A_0(K\backslash G/K)$ *сферических* функций из $A(G)$ и соответствующее пространство суммируемых функций $L_1(K\backslash G/K)$. Для $g \in G$ обозначим через $H(g) \in \mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ единственный элемент, для которого $g \in K \exp H(g) N$. Тогда для $\lambda \in \Lambda^c$ определена функция $\varphi_\lambda(g) = \int_K \exp(i\lambda - \delta)(H(gk))\,dk$ — *элементарная* сферическая функция, соответствующая λ. Для $f \in L_1(K\backslash G/K)$ и $\lambda \in \Lambda^c$ *преобразование Хариш-Чандры*, или *сферическое преобразование Фурье*, определяется формулой

$$\hat{f}(\lambda) = \int_G f(g)\,\varphi_\lambda(g)\,dg,$$

где dg — мера Хаара на G. *Преобразование Абеля*

$$F_f(a) = \exp\delta(\ln a)\int_N f(an)\,dn$$

связано с преобразованием Хариш-Чандры равенством

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{A_\mathfrak{p}} F_f(a)\exp(i\lambda(\ln a))\,da.$$

Обратное преобразование от $\hat{f}$ к f имеет вид

$$f(g) = |W|^{-1}\int_\Lambda \hat{f}(\lambda)\,\varphi_\lambda(g^{-1})\,c(\lambda)^{-1}\,c(-\lambda)^{-1}\,d\lambda,$$

где $c(\lambda)$ — так называемая функция Хариш-Чандры; для нее имеются явные формулы.

Каждое унитарное представление T группы Γ порождает индуцированное представление U группы G. Если G/Γ — компакт, то U является дискретной суммой неприводимых компонент с конечными кратностями (см. [G 10] по поводу доказательства этого утверждения). Нас интересуют сферические представления, входящие в разложение U. Пусть $\{U_j\}$ — множество этих представлений, $n_j(\chi)$ — их кратности. Представление U_j вполне определяется соответствующей элементарной сферической функцией φ_{ν_j}, $\nu_j \in \Lambda^c$. Поскольку U_j унитарно, функция φ_{ν_j} положительно определена. Поэтому ν_j либо вещественно, либо чисто мнимо, т. е. принадлежит либо Λ, либо $i\Lambda$.

Одним из подходов к изучению функции распределения является формула следа Сельберга. Мы опишем сейчас соответствующую теорию. Как мы увидим, здесь (как и в последней главе) квантовая статистическая механика рассматриваемых систем полностью определяется теорией представлений — в данном случае сферической серией.

Формула следа Сельберга является обобщением формулы суммирования Пуассона на некоммутативный случай. А именно пусть G — локально компактная группа, Γ — ее подгруппа конечного индекса и L — конечномерное представление Γ. Тогда индуцированное представление U^L группы G также конечномерно. Поскольку характер $\chi_{U^L} = \operatorname{tr} U^L(g)$ — функция классов, можно показать, что она зависит лишь от $\chi_L = \operatorname{tr} L(g)$. Обозначим через χ_L^0 продолжение характера χ_L нулем вне Γ.

Теорема 18.1.1.

$$\chi_{U^L}(g) = \frac{|\Gamma|}{|G|} \sum_{y \in G/\Gamma} \chi_L^0(ygy^{-1}).$$

Если пространство G/Γ бесконечно, то мы должны рассматривать характер как обобщенную функцию, которая на основной функции f равна $\operatorname{tr} U^L(f)$, где

$$U^L(f) = \int_G f(g)\, U^L(g)\, dg.$$

Если U^L конечномерно, то $\operatorname{tr} U^L(f) = \int \chi_{U^L}(g) f(g)\, dg$. Пусть v — конечная инвариантная мера на G/Γ, нормированная условием $\int_{G/\Gamma} dv = 1$.

Теорема 18.1.2.

$$\operatorname{tr} U^L(f) = \int_{G/\Gamma} \left(\int_\Gamma f(y\gamma y^{-1})\, \chi_L(\gamma)\, d\gamma \right) dv(y).$$

Если U^L вполне приводимо и равно $\bigoplus n_j M^j$, где $M^j \in \hat{G}$, то

$$\operatorname{tr} U^L(f) = \sum n_j \operatorname{tr} M^j(f) = \int_{\hat{G}} \operatorname{tr} M(f)\, d\mu(M).$$

Таким образом, справедлива

Теорема 18.1.3 (первый вариант формулы следа).

$$\int_{G/\Gamma} \left(\int_\Gamma f(y\gamma y^{-1})\, \chi_L(\gamma)\, d\gamma \right) dv(y) = \int_{\hat{G}} \operatorname{tr} M(f)\, d\mu(M).$$

Следствие 18.1.4 (формула суммирования Пуассона). *Пусть G — коммутативная локально компактная группа, для которой G/Γ имеет конечную инвариантную меру. Пусть $L = 1$ — тривиальное одномерное представление. Тогда формула следа дает*

$$\int_\Gamma f(\gamma)\, d\gamma = \sum_{\chi \in \Gamma^\perp} \hat{f}(\chi).$$

Доказательство. Отметим сначала, что G/Γ имеет конечную инвариантную меру, если и только если оно компактно. В этом случае $U^I = \bigoplus_{\chi \in \Gamma^\perp} \chi$. Далее, поскольку G коммутативна, левая часть формулы следа превращается в

$$\operatorname{tr} U^I(f) = \int_G f(\gamma)\, d\gamma.$$

Наконец, компоненты $M^j(g)$ представления U^I отождествляются с характерами $\chi_j(g)$ и

$$\operatorname{tr} M^j(f) = \int_G \chi_j(g) f(g)\, dg = \hat{f}(\chi_j).$$

Таким образом, $\sum \operatorname{tr} M^j(f) = \sum \hat{f}(\chi_j)$, что и требовалось.

Следствие 18.1.5. *Пусть G — компактная группа. Тогда кратность m_j, с которой M^j входит в U^L, равна*

$$m_j = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \overline{\chi_{M^j}(g)} \operatorname{tr} L(\gamma).$$

Доказательство. Положим $f(g) = \chi_{M^j}(g)$ и используем соотношения ортогональности.

Небольшое обобщение формулы следа получается, если отказаться от требования, что G/Γ имеет конечную инвариантную меру. Пусть $N(\Gamma)$ — нормализатор Γ в G и $N(\Gamma)_L$ — подгруппа в $N(\Gamma)$, сохраняющая характер χ_L.

Теорема 18.1.6 (второй вариант формулы следа). *Пусть G, Γ такие же, как и выше, и $G/N(\Gamma)_L$ имеет конечную инвариантную меру. Тогда*

$$\int_{G/N(\Gamma)_L} \left(\int_\Gamma f(y\gamma y^{-1}) \chi_L(\gamma)\, d\gamma \right) dv(y) = \int_{\hat{G}} \operatorname{tr} M(f)\, (d\mu(M)).$$

Следствие 18.1.7. *Пусть $\Gamma = \{e\}$. Тогда $N(\Gamma) = G$, и наш вариант дает*

$$f(e) = \int_{\hat{G}} \operatorname{tr} M(f)\, d\mu(M),$$

т. е. формулу обращения.

Принцип двойственности Фробениуса, сформулированный здесь в виде следствия 18.1.5, имеет красивое обобщение, называемое теоремой двойственности.

Пусть T — неприводимое унитарное представление локально компактной группы G в гильбертовом пространстве H. Пространство бесконечно дифференцируемых (или гладких) векторов v в H, для которых вектор-функция $f(g)=T(g)v$ принадлежит $A(G, H)$, называется *пространством Гординга* для H и обозначается через H_∞. Ясно, что H_∞ инвариантно относительно T и отображение $G\times H_\infty\to H_\infty$: $(g, v)\to T(g)v$ непрерывно. Пусть H^*_∞ означает двойственное к H_∞ пространство. Определим представление T^* в H^*_∞, полагая $\langle v, T^*(g)f\rangle=\langle T(g^{-1})v, f\rangle$ для $v\in H_\infty$, $f\in H^*_\infty$.

Пусть Γ — замкнутая подгруппа в G, для которой G/Γ компактно и имеет конечную инвариантную меру. Пусть V — конечномерное унитарное представление Γ в пространстве M и $U^V=$ $=\mathrm{Ind}_\Gamma^G V$ — индуцированное представление в пространстве L. Следующее обобщение принципа Фробениуса принадлежит Г. И. Ольшанскому [О 7].

Теорема 18.1.8. *Пространства непрерывных сплетающих операторов* $\mathrm{Hom}_G(H, L)$ *и* $\mathrm{Hom}_\Gamma(M^*, H^*_\infty)$ *изоморфны.*

Доказательство. Пусть $A\in\mathrm{Hom}_G(H, L)$; тогда A непрерывно отображает H_∞ в L_∞. Поскольку $A(h)$ — гладкая M-значная функция на G, мы можем определить $J\in\mathrm{Hom}(M^*, H^*_\infty)$ равенством

$$\langle h, J(\xi)\rangle=\langle A(h)(e), \xi\rangle.$$

Читатель может проверить, что $J(\xi)\in H^*_\infty$. Ясно, что соответствие $\xi\to J(\xi)$ линейно и что $JV^*(\gamma)=T^*(\gamma)J$. Обратное отображение дается формулой

$$\langle A(h)(g), \xi\rangle=\langle T(g)h, J(\xi)\rangle,$$

которая определяет оператор A: $H_\infty\to L$. Остается только проверить, что A допускает замыкание. Это мы оставляем читателю.

Следствие 18.1.8′ (теорема Фробениуса — Картье). *Пусть V есть $2n$-мерное вещественное векторное пространство с невырожденной кососимметричной билинейной формой B на $V\times V$. Предположим, что V снабжено комплексной структурой J, для которой $B(Jv, Jv')=B(v, v')$ и $H(v, v)=B(v, Jv)\geqslant 0$. Пусть L — такая решетка в V, что значения B на $L\times L$ целочисленны и отображение F: $V\to\mathbf{R}$ обладает свойством $F(l_1+l_2)=F(l_1)+$ $+F(l_2)+B(l_1, l_2)\bmod 2$ при $l_i\in L$. Тогда представление Фока $(U_J, \mathcal{F}_J)$ группы Гейзенберга, заданное формулой*

$$U_J(t, v)f(v')=\exp(2\pi i\lambda t+H(v, v')-\pi\lambda H(v, v)/2)f(v+v'),$$

в пространстве голоморфных функций f на (V, J) со скалярным произведением

$$(f, f')=\int\limits_V \exp(-\pi\lambda H(v, v))f(v)\overline{f'(v)}\,dv$$

унитарно и неприводимо. Пространство решений уравнений $U_J(0, l)\,t = \exp(\pi i F(l))\,t$ *для* $l \in L$ *образует e-мерное подпространство* Θ *в* $(\mathcal{F}_J)^*_\infty$, *где e — размерность пространства тэта-функций, т. е. решений уравнений*

$$t(v) = t(v+l)\exp(-\pi[H(l, l)/2 + H(l, v) + iF(l)]),$$

равная квадратному корню из дискриминанта формы B относительно L (т. е. $e^2 = [L^* : L]$*).*

Следствие 18.1.9 (Гельфанд — Граев — Пятецкий-Шапиро — Эренпрайс — Маутнер). *Пусть G — связная полупростая группа Ли с конечным центром, а* Γ *— кокомпактная дискретная подгруппа в G. Тогда* $\mathrm{Hom}_G(H, L^2(G/\Gamma)) \simeq (H^*_\infty)^\Gamma$.

Применяя это к случаю $G = SL(2, \mathbf{R})$, получаем

Следствие 18.1.9′. *Пусть* T_n^+ *— представление дискретной серии для* $SL(2, \mathbf{R})$. *Тогда* $N_n^+ = \dim \mathrm{Hom}_G(T_n^+, U^I) = \dim$ (*пространство автоморфных форм* $= \{f \mid f(z)$ *аналитична при* $\mathrm{Im}\, z > 0$ *и* $f(\gamma z) = f(z)(\gamma_{12}z + \gamma_{22})^{n+1}\}$).

Вычисление этой размерности можно провести с помощью формулы следа. А именно

Теорема 18.1.10. $$N_n^+ = [1 + (-1)^{n-1}\varepsilon]\deg L \cdot \frac{\mathrm{Vol}\,(G/\Gamma)}{\pi^2} n - \sum_{\gamma \in \Gamma_{\text{элл.}}} \sum_{s=1}^{k-1} \frac{1}{4ki} \frac{\mathrm{tr}\, L(\gamma^s)}{\sin(\pi s/k)} \exp(i\pi s n/k).$$

Здесь $\varepsilon = L(-e)$; *если* Γ *не содержит эллиптических элементов, то*

$$N_n^+ = N_n^- = [1 + (-1)^{n-1}\varepsilon]\deg L \frac{\mathrm{Vol}\,(G/\Gamma)}{\pi^2} n.$$

Таким образом, формула следа Сельберга по существу содержит формулу Римана — Роха.

Следующий вариант формулы Сельберга относится к случаю компактных локально симметрических пространств ранга 1 вида $\Gamma\backslash G/K$. Для $f \in L_1(G)$ оператор $U(f) = \int_G f(g)U(g)\,dg$ ограничен.

Определение 18.1.11. Функция f называется *допустимой*, если (i) ряд $\sum_\gamma f(y^{-1}\gamma x)T(\gamma)$ сходится абсолютно и равномерно на компактах в $G \times G$ к непрерывной $\mathrm{End}(V)$-значной функции $\tilde{F}(x, y; \tilde{T})$ и (ii) оператор $U(f)$ имеет след.

Теорема 18.1.12 (третий вариант формулы следа). *Если* f *допустима и* $U = \sum_{\lambda \in \widehat{G}} n_\Gamma(\lambda, T) \cdot \lambda$, *то*

$$\sum_{\lambda \in \widehat{G}} n_\Gamma(\lambda, T) \operatorname{tr} U_\lambda(f) = \int_{\Gamma \backslash G} \operatorname{tr} F(x, x; T)\, dx.$$

Пусть C_Γ означает множество представителей классов сопряженных элементов в Γ, G_γ — централизатор элемента $\gamma \in \Gamma$, $\Gamma_\gamma = \Gamma \cap G_\gamma$ и dx_γ — мера Хаара на G_γ. Положим $I_\gamma(f) = \int_{G_\gamma \backslash G} f(g^{-1}\gamma g)\, dx_\gamma^*$, где интегрирование ведется по G-инвариантной мере на $G_\gamma \backslash G$, нормированной условием $dx = dx_\gamma dx_\gamma^*$. Тогда простое вычисление показывает, что справедливо

Следствие 18.1.13 (четвёртый вариант формулы следа).

$$\sum_{\lambda \in \widehat{G}} n_\Gamma(\lambda, T) \operatorname{tr} U_\lambda(f) = \sum_{\gamma \in C_\Gamma} \operatorname{tr} T(\gamma) \operatorname{Vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma)\, I_\gamma(f).$$

Если $f \in \mathscr{S}(K \backslash G / K)$ — пространство Шварца в смысле Хариш-Чандры, то, как показали Ганголли и Уорнер, f допустима. Если f — сферическая функция, то $U_\lambda(f) = 0$, если только λ не принадлежит классу 1 относительно K. В последнем случае представлению U_λ соответствует положительно определенная элементарная сферическая функция φ_λ и $\operatorname{tr} U_\lambda(f) = \hat{f}(\lambda)$. Поэтому имеет место

Следствие 18.1.14 (пятый вариант формулы следа). *Если* $f \in \mathscr{S}(K \backslash G / K)$, *то*

$$\sum_{\lambda \in \widehat{G}_1} n_\Gamma(\lambda, T) \hat{f}(\lambda) = \sum_{\gamma \in C_\Gamma} \operatorname{tr} T(\gamma) \operatorname{Vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma)\, I_\gamma(f).$$

Определение 18.1.15. Элемент $g \in G$ называется *эллиптическим*, если он сопряжен с некоторым элементом из K (тогда этот элемент полупрост). Элемент g называется *гиперболическим*, если он полупрост, но не эллиптичен. Остальные элементы G называются *параболическими*.

Известны следующие факты, касающиеся дискретных подгрупп Γ. Если G/Γ компактно, то Γ не содержит параболических элементов. Элемент γ из Γ эллиптичен, только если он имеет конечный порядок. В дальнейшем мы предполагаем, что Γ не содержит нетривиальных эллиптических элементов (т. е. Γ действует свободно на G/K). Тогда все $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq e$, гиперболичны. Каждый такой элемент сопряжен с некоторым элементом картановской подгруппы A — централизатора $\mathfrak{a}$ в G. Здесь $A = A_\mathfrak{t} A_\mathfrak{p}$.

Выберем элемент $h(\gamma)\in A$, с которым γ сопряжен, и положим $h(\gamma)=h_{\mathfrak{k}}(\gamma)h_{\mathfrak{p}}(\gamma)$, $u_\gamma=b(\ln h_{\mathfrak{p}}(\gamma))$, так что $u_\gamma=u(\ln h_{\mathfrak{p}})$.

В рассматриваемом случае пространство G/K является односвязным накрытием $M=\Gamma\backslash G/K$, и мы отождествляем Γ с фундаментальной группой $\pi_1(M)$. Свободные гомотопические классы петель в M находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с множеством классов сопряженных элементов в Γ, т. е. с C_Γ. Для $\gamma\in C_\Gamma$ соответствующий гомотопический класс содержит периодическую геодезическую, которую мы обозначим через g_γ. Кривая g_γ имеет наименьшую длину среди гомотопных ей кривых. Пусть $l(\gamma)$ — длина g_γ. Любой замкнутый путь в этом гомотопическом классе поднимается до пути той же длины в G/K, соединяющего x с γx. Если $g(\cdot,\ \cdot)$ — риманово расстояние в G/K, то $l(\gamma)=\inf\limits_{x\in G/K} g(x,\gamma x)$. Записывая x в виде gK, получаем $g(x,\gamma x)=g(gK,\gamma gK)=\sigma(g^{-1}\gamma g)$. Значит, $l(\gamma)=\inf\limits_{g\in G}\sigma(g^{-1}\gamma g)$.

Теорема 18.1.16. *Справедливы равенства*

$$l(\gamma)=\sigma(h(\gamma))=|\ln h_{\mathfrak{p}}(\gamma)|.$$

Элемент $\gamma\in\Gamma$ называется *примитивным*, если $\gamma\neq e$ и $\gamma\neq\gamma_0^n$ для $\gamma_0\in\Gamma$ и $n>1$. Любой неединичный элемент γ однозначно записывается в виде $\gamma=\gamma_0^j$, где γ_0 — примитивный элемент и $j\geqslant 1$.

Для любого корня α определим характер ξ_α группы A, полагая $\xi_\alpha(h)=\exp\alpha(\ln h)$. Положим $\varepsilon_{\mathbf{R}}^A(h)=\operatorname{sgn}\prod\limits_{\alpha\in\Phi_{\mathbf{R}}^+}(1-\xi_\alpha(h^{-1}))$, где $\Phi_{\mathbf{R}}^+$ — множество корней пары $(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}},\ \mathfrak{a}^{\mathbf{C}})$, вещественных на $\mathfrak{a}$. Положим также

$$C(h(\gamma))=\varepsilon_{\mathbf{R}}^A(h(\gamma))\,\xi(h_{\mathfrak{p}}(\gamma))\prod_{\alpha\in P_+}\left(1-\xi_\alpha(h(\gamma))^{-1}\right)^{-1}.$$

Следствие 18.1.17 (шестой вариант формулы следа). *Если f — допустимая сферическая функция, то*

$$\sum_{\lambda\in\hat{G}_1} n_\Gamma(\lambda,\ T)\hat{f}(\lambda)=\int\limits_{\Gamma\backslash G}\sum_{C_\Gamma}\chi(\gamma)f(g^{-1}\gamma g)\,dg=$$

$$=\operatorname{Vol}(\Gamma\backslash G)f(e)+\sum_{\gamma\in C_\Gamma\backslash\{e\}}\chi(\gamma)|u_\gamma|j(\gamma)^{-1}C(h(\gamma))F_f(h_{\mathfrak{p}}(\gamma)).$$

Выберем специальную функцию f. Рассмотрим уравнение Блоха $\partial\rho/\partial\beta=\Delta\rho$, где Δ — оператор Лапласа — Бельтрами на

G/K. Гильбертово пространство квантовомеханической системы допускает естественное разложение

$$L^2(\Gamma\backslash G/K) = \sum H(\lambda).$$

Гамильтониан Δ действует на $H(\lambda)$ как умножение на $E_\lambda(\Delta) = -((\lambda, \lambda) + (\delta, \delta))$. Поэтому $\exp(-\beta E_\lambda(\Delta)) \dim H_\lambda$ — это след $\exp(-\beta\Delta)$ на $H(\lambda)$. Отсюда вытекает, что

$$\vartheta(\beta) = \sum_\lambda \exp(-\beta E_\lambda(\Delta)) \dim H_\lambda$$

— след оператора $\exp(-\beta\Delta)$ на $L^2(\Gamma\backslash G/K)$. Размерность $H(\lambda)$ в точности равна кратности $n_\Gamma(\lambda, T)$ сферического представления в индуцированном представлении U.

Мы должны еще показать, что след существует. Пусть $E(\beta)$ — фундаментальное решение уравнения Блоха. Тогда как функция на G $E(\beta)$ сферично и принимает вещественные неотрицательные значения. Справедливо соотношение $E(\beta_1 + \beta_2) = E(\beta_1) * E(\beta_2)$. При каждом $\beta > 0$ $E(\beta)$ лежит в $L_1(K\backslash G/K)$. Легко проверить, что $\hat{E}_\beta(\lambda) = \exp(-((\lambda, \lambda) + (\delta, \delta))\beta)$. Поскольку $E(\beta)$ суммируемо, $\hat{E}_\beta$ определено для всех λ, для которых функция φ_λ ограниченна.

Теорема 18.1.18. (i) $E(\beta)$ *лежит в* $\mathscr{S}(K\backslash G/K)$ *и, следовательно, допустимо;*

(ii) $F_{E(\beta)}(a) = (4\pi\beta)^{-1/2} \exp[-\beta(\delta, \delta) - |\ln a|^2/4\beta]$.

Полагая $f = E(\beta)$ в третьем варианте формулы следа, получаем такой результат:

Теорема 18.1.19 (седьмой вариант формулы следа).

$$\sum_{\lambda \in \hat{G}_1} n_\Gamma(\lambda, T) \exp(-((\lambda, \lambda) + (\delta, \delta))\beta) =$$

$$= \sum_{\delta \in C_\Gamma} \operatorname{tr} T(\gamma) \operatorname{Vol}(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma) I_\gamma(E(\beta)).$$

Ганголли со своим учеником Итоном вычислили высокотемпературный предел функции распределения на $M = \Gamma\backslash G/K$. А именно они показали, что при $\beta \to 0$ сумма $\sum_{\tau \neq e}$ стремится к нулю.

Следствие 18.1.20. $\lim_{\beta \to 0} \beta^{n/2} \vartheta(\beta) = C_G \operatorname{Vol}(\Gamma\backslash G) \deg T$, где $C_G = \lim \beta^{n/2} E_\beta(e)$ — *константа, зависящая только от* G, *а* $n = \dim G/K$.

Полагая

$$N(r, T) = \sum_{\substack{\lambda \in \widehat{G}_1 \\ |E_\lambda| \leqslant r}} n_\Gamma(\lambda, T)$$

и записывая $\vartheta(\beta)$ в виде $\int\limits_0^\infty e^{-\beta r}\, dN(r)$, получаем из допустимости $E(\beta)$, что $N(r, T)$ конечна для всех r и что $\vartheta(\beta)$ существует. Кроме того, согласно тауберовой теореме Карамата, справедлива

Теорема 18.1.21. *$r^{-n/2}N(r, T) \sim C_G\Gamma(n/2+1)\operatorname{Vol}(\Gamma\backslash G)\deg T$ при $r \to \infty$ или $N(r) \sim s \operatorname{Vol}(\Gamma\backslash G/K) M(r)$, где s — порядок пересечения Γ с центром G, и*

$$M(r) = \int\limits_{(\lambda, \lambda)+(\delta, \delta) \leqslant r} |c(\lambda)|^{-2}\, d\lambda.$$

Для простоты здесь предполагается, что $T = 1$. Используя шестой вариант формулы следа, можно записать функцию распределения в виде

$$\sum_{\lambda \in \widehat{G}_1} n_\Gamma(\lambda, 1)\, e^{-\beta((\lambda, \lambda)+(\delta, \delta))} =$$

$$= E_\beta(e)\operatorname{Vol}(\Gamma\backslash G) + (4\pi\beta)^{-1/2} \sum_{\gamma \in C_\Gamma \setminus \{e\}} C(h(\gamma))\, e^{-[(\delta, \delta)\beta + l(\gamma)^2/4\beta]},$$

где $l(\gamma) = |\ln h_p(\gamma)|$. Ясно, что это совпадает с результатами С. А. Молчанова. Фактически, используя свой подход, основанный на рассмотрении полей Якоби, Молчанов показал, что справедлива

Теорема 18.1.22. *Пусть M — связное компактное n-мерное многообразие отрицательной кривизны и $M = \Gamma\backslash N$. Тогда по теореме Варадхана для любого $\gamma \in \Gamma = \pi_1(M)$*

$$\lim_{\beta \to 0} -2\beta \ln \vartheta(\beta) = \min_{m \in M} g^2(m, \gamma m),$$

где

$$\vartheta(\beta) = \sum e^{-\lambda_k \beta} = \sum \vartheta_\gamma(\beta),$$

а

$$\vartheta_\gamma(\beta) = \int\limits_M \rho_N(\beta;\ m, \gamma m)\, dm,$$

где

$$\partial\rho_N/\partial\beta = (1/2)\Delta_N \rho_N \ \text{ и } \ \rho_M = \sum_{\gamma \in \Gamma} \rho(\beta;\ x, \gamma y),$$

и функция $\vartheta_\gamma(\beta)$ может быть вычислена асимптотически с помощью периодических полей Якоби. В частности, если M — компактное симметрическое пространство отрицательной кривизны, то рассмотрение полей Якоби дает

$$\vartheta_\gamma(\beta) \sim \frac{l(\gamma)\exp(-l^2(\gamma)/2\beta)}{\sqrt{2\pi\beta}\sum\limits_{i=1}^{n-1}\left(2\operatorname{sh}\sqrt{-k_i}\,l(\gamma)/2)\right)^{1/2}},$$

причем уравнения полей Якоби имеют вид $\ddot{y}+k_iy=0$, где k_i, $i=1, \ldots, n-1$, — собственные значения формы кривизны вдоль геодезической.

Наш последний вариант формулы следа подсказан следующими соображениями. Если $G=SL(2, \mathbf{R})$, то компактная картановская подгруппа $T\subset G$ имеет множество регулярных характеров $\hat{T}'\simeq \mathbf{Z}\setminus\{0\}$. Имеет место отображение Хариш-Чандры ω: $\hat{T}'\to G_d$. Как мы отмечали в гл. 14. если Γ не имеет эллиптических элементов, то кратности $n_{\omega(n)}(\Gamma)$ представлений дискретной серии в $L^2(\Gamma\backslash G)$ совпадают с размерностями пространств автоморфных форм веса $|n|+1$:

$$n_{\omega(n)}(\Gamma)=\begin{cases}|n|(g-1), & |n|\neq 1,\\ g, & |n|=1.\end{cases}$$

Здесь $|n|(g-1)=d_{\omega(n)}\operatorname{Vol}(\Gamma\backslash G)$, где $d_{\omega(n)}$ — формальная размерность представления $\omega(n)$ при $|n|\neq 1$, т. е. когда $\omega(n)$ интегрируемо. Более обще, справедлива

Теорема 18.1.23. *Пусть $T\subset K\subset G$ такие же, как в теореме 14.1.8, и выполнены условия* (i) *и* (ii) *из этой теоремы. Тогда если Γ — дискретная подгруппа с компактным факторпространством $\Gamma\backslash G$ и не имеет эллиптических элементов, то*

$$N_{\omega(\lambda+\delta)}=d_{\omega(\lambda+\delta)}\operatorname{Vol}(\Gamma\backslash G).$$

С помощью формы Киллинга B на G определяется левоинвариантная метрика $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$, где $\langle X, X\rangle=B(X, X)$ для $X\in\mathfrak{p}$ и $\langle X, X\rangle=-B(X, X)$ для $X\in\mathfrak{k}$. Риманова метрика на $\Gamma\backslash G$ определяется условием, что проекция π_Γ: $G\to\Gamma\backslash G$ является локально изометричной. Поскольку $\operatorname{Ad}k$ для $k\in K$ сохраняет форму Киллинга и картановское разложение, мы видим, что K действует справа на $\Gamma\backslash G$ изометрическими преобразованиями.

Элемент Казимира определяется формулой $\mathfrak{C}=\sum\limits_{i=1}^{r+s}X_iX^i$, где $r=\dim\mathfrak{p}$, $s=\dim\mathfrak{k}$, $\{X_i\}$, $1\leqslant i\leqslant r+s$, — базис в $\mathfrak{g}$, а $\{X^i\}$ — дуальный базис. Соответствующий оператор в $A(G)$ имеет вид $\tilde{\mathfrak{C}}=\sum\tilde{X}_i\tilde{X}^i$, где $\tilde{X}f(g)=(d/dt)f(g\exp tX)|_{t=0}$ для $X\in\mathfrak{g}$ и $f\in$

$\in A(G)$. Оператор $\tilde{\mathfrak{C}}$ двусторонне инвариантен и, полагая $\tilde{\mathfrak{C}}f\cdot\pi_\Gamma = \mathfrak{C}_\Gamma(f\cdot\pi_\Gamma)$, мы получаем дифференциальный оператор второго порядка $\mathfrak{C}_\Gamma$ на $\Gamma\backslash G$. Можно проверить, что символ этого оператора равен $\sigma(\mathfrak{C}_\Gamma)(\xi) = -|\xi|^2$ для $\xi \in T^*_{\Gamma\backslash G}$, так что $\tilde{\mathfrak{C}}_\Gamma$ — эллиптический оператор.

Пусть $\rho \in \hat{K}$ и V — соответствующий K-модуль. Положим $\nu_\rho(\lambda)$ равным кратности ρ в собственном пространстве C^λ оператора $-\mathfrak{C}_\Gamma$ с собственным значением λ: $\nu_\rho(\lambda) = \dim \operatorname{Hom}_K(V, C^\lambda)$. Пусть $m = \dim G/K$ и $l = \dim \operatorname{Hom}_{K_m}(V, C)$ для $m \in M_0$. Тогда по теореме 1.4.4

$$N(t) = \sum_{\lambda \leqslant t} \nu_\rho(\lambda) \sim t^{m/2} \operatorname{Vol} B(m)\, l \operatorname{Vol}(M_0/K)/(2\pi)^m.$$

Положим $N = \{g \in G \mid gxK = xK\}$ для всех $x \in G$. Тогда $\operatorname{Vol}(M_0/K) = \operatorname{Vol} M \,|\Gamma \cap N|/\operatorname{Vol} K$.

Для $\omega \in \hat{G}$ пусть $n_\Gamma(\omega)$ означает кратность вхождения ω в $L^2(\Gamma\backslash G)$ и $[\omega|K:\rho]$ — кратность ρ и $\omega|K$. Через λ_ω обозначим значение оператора Казимира в представлении класса ω. Следующий результат принадлежит Гельфанду, Ганголли и Воллаху.

Теорема 18.1.24.

$$\sum_{\substack{\lambda \leqslant t \\ \omega \in \hat{G}}} n_\Gamma(\omega)\, [\omega \mid K : \rho] \sim$$

$$\sim t^{m/2} \operatorname{Vol} B(m) \dim V^{\Gamma \cap N} \operatorname{Vol}(\Gamma\backslash G) \,|\Gamma \cap N|/(2\pi)^m \operatorname{Vol} K.$$

18.2. Функция распределения и спектр длин геодезических

Как мы отмечали в конце гл. 16, формула следа Сельберга, будучи обобщением формулы суммирования Пуассона, может иметь отношение к длинам замкнутых геодезических. В рассмотренных случаях это действительно так. Мы покажем, что функция распределения квантовой статистической механики определяется длинами геодезических.

Это требует более внимательного рассмотрения геометрии пространства $\Gamma\backslash G/K$. Поскольку G/K — односвязное накрытие M, мы отождествляем Γ с $\pi_1(M)$. В обозначениях, предшествовавших теореме 18.1.6, имеет место

Теорема 18.2.1. (i) $l(\gamma) = \sigma(h(\gamma)) = |\ln h_\mathfrak{p}(\gamma)|$,

(ii) $l(\gamma) = l(\gamma^{-1})$,

(iii) $l(\gamma^j) = jl(\gamma)$,

(iv) *если* $\gamma \neq e$, *то* $\Gamma_\gamma \simeq \mathbf{Z}$.

В силу этой теоремы каждый элемент $\gamma \neq e$ из Γ однозначно записывается как $\gamma = \gamma_0^j$, где γ_0 — примитивный элемент. Число $j \geqslant 1$ определено однозначно и обозначается через $j(\gamma)$. Отсюда и из четвертого варианта формулы следа получается

Теорема 18.2.2.

$$\vartheta(\beta) = E_\beta(e)\operatorname{Vol}(\Gamma\backslash G) +$$
$$+ \sum_{\delta \in C_\Gamma \setminus \{e\}} (4\pi\beta)^{-1/2} C(h(\gamma))\, l(\gamma)\, j(\gamma)^{-1} e^{-((\delta,\delta)\beta + l(\gamma)^2/4\beta)}.$$

Обозначим через m_i кратность l_i в $\{l(\gamma), \gamma \in C \setminus \{e\}\}$. Ясно, что длины $\{l_i\}$ определены функцией распределения $\vartheta(\beta)$. Детали алгоритма нахождения l_i см. в [G 4].

Используя формулу Сельберга, Дейстермаат, Колк и Варадараджан смогли исследовать спектр компактных локально симметрических многообразий S отрицательной кривизны. А именно пусть Spec означает совместный спектр G-инвариантных дифференциальных операторов на многообразии S. Кратность $n_\Gamma(\lambda, \chi)$ в этом случае заменяется на $m(\lambda) = |w \cdot \lambda|^{-1} n_\Gamma(\lambda, \chi)$, где w принадлежит группе Вейля W. Формула следа Сельберга дает следующий результат.

Теорема 18.2.3.

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}} m(\lambda)\exp(\lambda \ln \cdot\,) = \sum_{\gamma \in C_\Gamma} d(\gamma)\, v(\gamma)\, T_\gamma,$$

где $v(\gamma) = [G_\gamma : G_\gamma^0]^{-1} \operatorname{Vol}(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma)$ — *объем подмногообразия в* S, *состоящего из всех замкнутых геодезических гомотопического типа* γ, T_γ *есть* W-*инвариантная обобщенная функция умеренного роста, а* $d(\gamma)$ — *довольно сложная функция* (см. [D 31]).

Следствие 18.2.4. *Если расщепимый ранг* G *равен* 1 (*т. е.* $\dim A_\mathfrak{p} = 1$), *то*

$$\sum m(\lambda)\exp\lambda = K + \frac{1}{2} \sum_{c \in C_\Gamma \setminus \{e\}} l_0(c)\,|\det(1 - P_c)|^{-1/2} (\delta_{\gamma(c)} + \delta_{-\gamma(c)}),$$

где $l_0(c)$ — *длина примитивной геодезической класса* c, *а* P_c — *отображение Пуанкаре вдоль этой геодезической* (*подробности см. в* [D 31] *и* [K 13]).

Восьмой вариант формулы следа состоит в том, чтобы записать ее в виде формулы Лефшеца в смысле Атьи — Ботта. Напомним, что речь идет о компактном многообразии M, последовательности векторных расслоений E_j над M и комплексе дифференциальных операторов d_j: $S(E_j) \to S(E_{j+1})$. Если f — гладкое отображение M в M с простой неподвижной точкой p, то

$\det(1-df_p)\neq 0$. Пусть φ_j: $f^*E_j\to E_j$ — гомоморфизм расслоений и $T_j(s)=\varphi_j\cdot s\cdot f$. Если T_j коммутирует с d_j, то T_j задает отображение T_j^* на когомологиях. Теорема 18.2.3 утверждает, что

$$\sum_j(-1)^j\operatorname{tr}T_j^*=\sum_{p\in F}(-1)^j\frac{\operatorname{tr}\varphi_{j,p}}{|\det(1-df_p)|}$$

и

$$\sum(-1)^j\operatorname{tr}T_j=\sum(-1)^j\operatorname{tr}T_j^*,$$

где F — множество неподвижных точек.

Пусть Γ — дискретная кокомпактная подгруппа в G (т. е. $\Gamma\backslash G$ компактно), а G — связная полупростая группа Ли. Пусть T — унитарное представление Γ в пространстве V_0, $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ — картановское разложение и $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ — картановская подалгебра. Обозначим через H централизатор $\mathfrak{h}$ в G, а через H' — множество регулярных элементов в H.

Для $h\in H$ определим действие T_h на $\Gamma\backslash G$, полагая $T_h(\Gamma g)=\Gamma gh$. Определим также отображение $\tilde T_h$: $T_h^*E\to E$, где $E=G\times_\Gamma V_0$, полагая

$$\tilde T_h[g,v]=[gh^{-1},v].$$

Индуцированное действие G на $V=S(E)$ имеет вид $U(h)f=\tilde T_h\circ f\circ T_h$. Пусть $\{\gamma_{j_h}\}$ — полный набор представителей классов сопряженных элементов в Γ, которые сопряжены в G с $h\in H'$. Тогда найдутся $g_{j_h}\in G$, для которых $g_{j_h}^{-1}\gamma_{j_h}g_{j_h}=h$. Пусть G_h — централизатор h в G.

Элементарная проверка показывает, что множество неподвижных точек для T_h в $\Gamma\backslash G$ представляется в виде дизъюнктного объединения $\bigcup_j g_{j_h}G_h$. Заметим также, что $dT_h=\operatorname{Ad}(h^{-1})$. Пусть N_{j_h} означает нормальное расслоение к множеству $\Gamma g_{j_h}G_h$.

Обозначим через Λ совокупность $h\in H'$, для которых T_h имеет неподвижные точки, и через A_h — множество неподвижных точек для $h\in\Lambda$. Тогда $A_h=\bigcup A_h^j$, где $A_h^j=\Gamma g_{j_h}G_h$. Пусть $\tilde T_h^j$ означает действие T_h на слоях E над A_h^j. Тогда из первого варианта формулы следа мы получаем вариант Атьи — Ботта — Лефшеца:

Теорема 18.2.5. *Для $\varphi\in A_0(h')$*

$$\operatorname{tr}U(\varphi)=\sum_{h\in\Lambda}\sum_{j_h}\operatorname{Vol}A_h^j\frac{\varphi(h)\operatorname{tr}\tilde T_h^j}{\left|\det\left(1-dT_h|N_{j_h}\right)\right|}.$$

Пусть $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{a}+\mathfrak{n}^+$ — разложение Ивасавы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $G=KAN^+$ — разложение группы G, $M=C_K(A)$, $B=MAN^+$. Для любого линейного пространства E мы обозначим через $C^q(\mathfrak{n}^+, E)$ пространство $\operatorname{Hom}(\wedge^q\mathfrak{n}^+, E)$ кососимметричных полилинейных отображений $\mathfrak{n}^+\times\ldots\times\mathfrak{n}^+$ в E. Пространство $C^q(\mathfrak{n}^+, E)$ однозначно наследует топологию из E, поскольку $\mathfrak{n}^+$ конечномерна. Пусть U — представление G в пространстве V и V_∞ — подпространство Гординга в V. Тогда d_q: $C^q(\mathfrak{n}^+, V_\infty)\to C^{q+1}(\mathfrak{n}^+, V_\infty)$ определено формулой

$$d_qf(X_1, \ldots, X_{q+1})=\sum(-1)^{1-j}f(X_1, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{q+1})+ \\ +\sum_{i<j}(-1)^{i+j}f([X_i, X_j], \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots)$$

Можно проверить, что $d_{q+1}d_q=0$, и мы полагаем $H^q(\mathfrak{n}^+, V_\infty)= =\ker d_q/\operatorname{im} d_{q-1}$. Группа MA действует на $C^q(\mathfrak{n}^+, V_\infty)$; для $g\in MA$

$$T_{g,q}(f)(X_1, \ldots, X_q)=U(g)f(\operatorname{Ad}(g^{-1})X_1, \ldots, \operatorname{Ad}(g^{-1})X_q).$$

Представления $g\to T_{g,q}$ непрерывны и коммутируют с дифференциалами d_q. Пусть $T^*_{g,q}$ означает возникающее при этом представление группы MA в $H^q(\mathfrak{n}^+, V_\infty)$.

Теорема 18.2.6 (Осборн). *Пусть (U, V) — представление основной серии (не обязательно унитарное) или неприводимое унитарное представление группы $G=SL(2, \mathbf{R})$; тогда операторы d_q имеют замкнутый образ, пространства $H^q(\mathfrak{n}^+, V_\infty)$ конечномерны (в этом случае отличны от нуля лишь $H^0(\mathfrak{n}^+, V_\infty)$ и $H^1(\mathfrak{n}^+, V_\infty)$), характер $\operatorname{tr} U$ определен и аналитичен на G' и*

$$\sum(-1)^q\operatorname{tr}T_{g,q}=\sum(-1)^q\operatorname{tr}T^*_{g,q}$$

для $g\in\{MA\cap G'\,|\det(1-\operatorname{Ad}g|\mathfrak{n}^+)>0\}$.

Отметим, что Гийемин предложил аналогичную неэллиптическую версию формулы следа Сельберга для $SL(2, \mathbf{R})$ в виде теоремы Лефшеца, используя идеи геометрического квантования на контактных многообразиях.

18.3. Некомпактные пространства с конечным объемом

Результаты последнего раздела были обобщены на некомпактный случай. Исторически именно с этого случая начались исследования в связи с задачами теории чисел. В последнее время здесь достигнут значительный прогресс благодаря применению методов теории рассеяния. Основные результаты принадлежат И. М. Гельфанду, Л. Д. Фаддееву, Лаксу и Филлипсу. Мы не можем здесь подробно изложить эти результаты. Отметим лишь, что существенным вкладом в теорию явилось предложенное Я. Г. Синаем применение теоремы Стоуна — фон Неймана.

Классическим примером является случай $\Gamma = SL(2, \mathbf{Z}) \subset SL(2, \mathbf{R})$, где многообразие $M = \Gamma \backslash G/K$ некомпактно, но имеет конечный объем $\pi/3$. Именно этот случай был первоначально исследован Сельбергом. Общий случай был изучен лишь сравнительно недавно. По поводу классического случая мы отсылаем читателя к прекрасному изложению Куботы, книге Лакса и Филлипса и работам Фаддеева с соавторами.

Гармонический анализ в этой некомпактной ситуации оказывается более интересным. Левое квазирегулярное представление группы G в $L^2(G/\Gamma)$ разлагается в сумму трех попарно ортогональных частей:

$$L^2(G/\Gamma) = L^2_{\text{cus}} \oplus L^2_{\text{Eis}} \oplus L^2_{\text{res}}.$$

Эти части порождаются соответственно параболическими формами, волновыми пакетами рядов Эйзенштейна и квадратично интегрируемыми вычетами этих рядов. Пространство $L^2_{\text{cus}} \oplus L^2_{\text{res}}$ распадается в дискретную прямую сумму неприводимых унитарных представлений G с конечными кратностями, в то время как $U \mid L^2_{\text{Eis}}$ является прямым интегралом унитарных представлений основной серии.

Спектральная теория пространства $\Gamma \backslash \mathscr{P}$ вполне наглядна. Собственные функции, соответствующие непрерывной части спектра $\Delta_{\mathscr{P}}$, получаются так. Пусть

$$\Gamma_\infty = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

для $z = x + iy$ положим $a_s(z) = y^s$. Тогда a_s — собственная функция для $\Delta_{\mathscr{P}}$, инвариантная относительно Γ_∞. Мы строим из нее Γ-инвариант, суммируя по $\Gamma_\infty \backslash \Gamma$:

$$E(z, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} a_s(\gamma z).$$

Заметим, что

$$a_s(\gamma z) = \frac{y^s}{(mz + n)^{2s}}, \text{ если } \gamma = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}$$

и

$$E(z, s) = \sum y^s/(mz + n)^{2s},$$

где сумма распространена на пары (m, n) взаимно простых целых чисел.

Здесь $\Delta_{\mathscr{P}}E(z, s) = s(s-1)E(z, s)$; функция $E(z, s)$ называется рядом Эйзенштейна. Мы обобщим это понятие следующим образом. Назовем точку x расширенной прямой $\mathbf{R}\cup\infty$ *вершиной* для группы Γ, если подгруппа $\Gamma_x = \{\gamma\in\Gamma \mid \gamma x = x\}$ нетривиальна и порождается параболическим элементом. Предположим, что имеется только конечное число неэквивалентных вершин $s_1 = \infty, s_2, \ldots, s_h$. Положим $\Gamma_i = \Gamma_{s_i}$, и пусть $g_i \in G$ выбран так, что

$$g_i\infty = s_i \text{ и } g_i^{-1}\Gamma_i g_i = \Gamma_\infty = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Z} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда ряд Эйзенштейна для вершины s_i определяется как

$$E_i(z, s) = \sum_{\Gamma_i\backslash\Gamma} \left(y\left(g_i^{-1}\gamma z\right)\right)^s \text{ для } z\in\mathscr{P},\ s\in\mathbf{C}.$$

Здесь также $\Delta_{\mathscr{P}}E_i = s(s-1)E_i$. Функция E_k относительно вершины s_l разлагается в ряд Фурье:

$$E_k(g_l z, s) = \sum_{m\in\mathbf{Z}} a_{kl,m}(y, s)\exp(2\pi i m x),$$

где $a_{kl,m}(y, s) = \int\limits_0^1 E_k(g_l z, s)\exp(-2\pi i m x)\,dx$. Общая формула для коэффициентов $a_{kl,m}$ указывается в книге Куботы и других местах. В частности, $a_{11,0}(y, s) = y^s + \varphi(s)y^{1-s}$, где

$$\varphi(s) = \pi^{1/2}\frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)}\,\frac{\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)}.$$

В общем случае $a_{kl,0}(y, s) = \delta_{kl}y^s + \varphi_{kl}(s)y^{1-s}$. Набор $\Phi = \{\varphi_{kl}\}$ называется матрицей свободных членов. Легко проверить, что $\Phi(s)$ — симметрическая матрица и что $y^2 d^2 a_{kl,0}/dy^2 = s(s-1)a_{kl,0}$.

Теорема 18.3.1. *Функции φ_{kl} голоморфны в области $\operatorname{Re} s > 1/2$, за исключением конечного числа полюсов на $(1/2, 1]$. Матрица $\Phi(s)$ мероморфна на всей комплексной плоскости и удовлетворяет соотношению $\Phi(s)\Phi(1-s) = 1$.*

Теорема 18.3.2. *Функции $E_i(z, s)$ голоморфны в области $\operatorname{Re} s > 1/2$, за исключением конечного числа полюсов функций $\varphi_{ii}(s)$; они мероморфны на всей комплексной плоскости, и если обозначить через $\mathscr{E}(z, s)$ вектор-функцию ${}^t(E_1, E_2, \ldots, E_h)$, то $\mathscr{E}(z, s) = \Phi(s)\mathscr{E}(z, 1-s)$.*

Напомним, что *модулярной формой веса k, $k\in\mathbf{Z}$,* называется голоморфная функция на $\mathscr{P}$, обладающая свойствами (i) $f(\gamma z) = J(\gamma, z)^{-k}f(z)$ и (ii) f ограничена на бесконечности. Здесь $J(\gamma, z) = (cz+d)^{-2}$. Если модулярная форма f обращается в нуль в бесконечности, она называется *параболической формой.* Комплексное векторное пространство параболических форм обозначается через $\overset{0}{M}_k$.

Формы Мааса, или *волновые формы*, — это неголоморфные параболические формы, т. е. ограниченные гладкие (Γ, K)-инвариантные функции φ на G, обладающие свойством $c\varphi = [(1-s^2)/4]\varphi$. Пусть $W_s(\Gamma)$ — пространство волновых форм. Полагая $f_\varphi(z) = \varphi(g)$, где $g(i) = z$, мы видим, что пространство $W_s(\Gamma)$ изоморфно пространству гладких комплекснозначных функций на $\mathscr{P}$, обладающих свойствами (i) $f(\gamma z) = f(z)$, (ii) $\Delta_{\mathscr{P}} f = [(1-s^2)/4] f$, (iii) f ограничена.

Теорема 18.3.3. *В случае $\Gamma = SL(2, \mathbf{Z})$ имеет место разложение $L^2(\Gamma\backslash G) = L_0^2(\Gamma\backslash G) \oplus \mathbf{C} \oplus \int_0^\infty H(s)\, ds$, где $(V^{0,s}, H(s))$ — представления сферической основной серии. Представление G в пространстве $L_0^2(\Gamma\backslash G)$ распадается в дискретную сумму представлений дискретной серии T^{2k} (соотв. основной серии $V^{0,(2s-1)/4}$) с кратностями, равными размерностям пространств параболических форм $\overset{0}{M}_k$ (соотв. волновых форм Мааса $W_s(\Gamma)$).*

Пусть Θ означает пространство неполных тэта-рядов (см. Кубота [K 5]) и $\hat{\Theta}$ — подпространство, порожденное собственными функциями оператора Δ в Θ.

Теорема 18.3.4. $L^2(\Gamma\backslash G/K) = \hat{\Theta}_0 \oplus \hat{\Theta} + L_0^2(\Gamma\backslash G/K)$, *где $\hat{\Theta}_0$ — ортогональное дополнение к $\hat{\Theta}$ в Θ. Пусть $\{F_k\}$ — ортонормированный базис в $\hat{\Theta} \oplus L_0$, состоящий из собственных функций для Δ: $\Delta F_k = \lambda_k F_k$. Тогда любая функция $f \in L^2(\Gamma\backslash G/K)$ допускает разложение*

$$f(z) = \sum_k (f, F_k) F_k(z) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (f, E(\cdot, s)) E(z, s)\, dr,$$

где $s = 1/2 + ir$.

Связь с теорией рассеяния выглядит следующим образом. Рассмотрим автоморфное волновое уравнение $u_{tt} = Lu = \Delta_M u + (1/4)u$ на $M = \Gamma\backslash G/K$. Пусть $\mathscr{S}(z)$ означает матрицу рассеяния для этого уравнения. Тогда она регулярна в нижней полуплоскости, за исключением полюсов в точках $\{-i\lambda_k\}$. Оператор L имеет собственные значения λ_j^2, а оператор

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ L & 0 \end{pmatrix}$$

— собственные значения $\pm\lambda_j$. Положим $U(t)=e^{At}$ и обозначим через $P_{\pm}$ ортогональные проекторы на уходящее и приходящее подпространства. Тогда λ_j будут собственными значениями оператора B — генератора полугруппы $Z(t)=P_+U(t)P_-$.

Теорема 18.3.5 (Фаддеев — Павлов).

$$\mathcal{S}(z)=-a^{-2iz}\frac{\Gamma(1/2)\,\Gamma(iz)\,\zeta(2iz)}{\Gamma(1/2+iz)\,\zeta(1+2iz)}.$$

Матрица $\mathcal{S}(z)$ связана с квантовой механикой следующим образом. Уравнение Шрёдингера $u_t=iLu$ имеет своей матрицей рассеяния $\mathcal{S}^s(z)=\mathcal{S}(\sqrt{z})$. Последняя имеет при соответствующих условиях аналитическое продолжение, голоморфное на физическом листе, за исключением полюсов в точках $\{-\lambda_j^2\}$, задающих энергию связанных состояний, и мероморфное на нефизическом листе.

Вернемся теперь к общему случаю симметрического пространства ранга 1 G/K и его факторпространства $\Gamma\backslash G/K$ конечного объема.

Пусть d — число классов эквивалентности Γ-каспидальных минимальных параболических подгрупп, где эквивалентность определяется как сопряженность элементом Γ. Обозначим представителей классов через $P^1=P, P^2, \ldots, P^d$. Все они сопряжены с P с помощью элементов из K: $P^i=k_iPk_i^{-1}$, $1\leqslant i\leqslant d$.

Все, что связано с подгруппой P^i, мы будем снабжать верхним индексом i.

Определение 18.3.6. *Ряд Эйзенштейна* определяется формулой

$$E(P^i,\ \nu^i,\ x)=\sum_{\Gamma/\Gamma\cap P^i}\exp(\nu^i+\rho^i)(H^i(x\gamma)).$$

Определение 18.3.7. *Свободным членом* E_i в j-й вершине называется

$$E_{Pj}(P^i,\ \nu^i,\ x)=\mathrm{Vol}(N^j/\Gamma\cap N^j)^{-1}\int\limits_{N^j/\Gamma\cap N^j}E(P^i,\ \nu^i,\ xn^j)\,dn^j.$$

Пусть W_{ij} — множество биекций $A^i\to A^j$, индуцированных внутренними автоморфизмами G. Тогда

$$E_{Pj}(P^i,\ \nu^i,\ x)=\sum_{w\in W_{ij}}M_{ij}(w,\ \nu^i)\exp(w\nu^i+\rho^j)H^j(x).$$

Положим $M(\nu)=(M_{ij}(k_jwk_i^{-1},\ k_i\nu))$ и $E(\nu,\ x)={}^t(E(P^1,\ k_1\nu,\ x),\ldots$ $\ldots,\ E(P^d,\ k_d\nu,\ x))$.

Теорема 18.3.8. (i) $E(\nu, x) = M(\nu) E(-\nu, x)$ *для* $\nu \in \Lambda$.

(ii) M *не имеет полюсов в области* $\operatorname{Re}\nu > \delta$; *в области* $\operatorname{Re}\nu > 0$ *есть лишь конечное число полюсов на интервале* $0 < \nu < \delta$.

(iii) $M(\nu) M(-\nu) = 1$.

(iv) $M^*(\nu) = M(\bar{\nu})$, *где черта означает сопряжение относительно эрмитовой структуры в* $\Lambda^{\mathbf{C}}$, *задаваемой формой* $\langle \cdot, \vartheta \cdot \rangle$.

С помощью этих результатов мы можем вычислить функцию распределения для $\Gamma \backslash G/K$.

Теорема 18.3.9 (Ганголли — Уорнер — Венков). *Функция распределения для* $\Gamma \backslash G/K$ *имеет вид*

$$\vartheta(\beta) = \sum n_j \exp\left(-\left((r_j^+)^2 + \delta_0^2\right)\beta\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} |Z(\Gamma)| \operatorname{Vol}(G/\Gamma) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(r^2 + \delta_0^2\right)\beta} |c(r)|^2 \, dr +$$

$$+ (4\pi\beta)^{-1/2} \sum_{C_\Gamma \setminus \{e\}} |u_\gamma| \, j(\gamma)^{-1} C(h)(\gamma) e^{\delta_0^2\beta + u_\gamma^2/4\beta} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(r^2 + \delta_0^2\right)\beta} \psi'(ir) \psi(ir)^{-1} \, dr -$$

$$- \frac{d}{8\pi} e^{-\delta_0^2\beta} (d - \operatorname{tr} M(0)) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2\beta} \Gamma'(1 + ir) \Gamma(1 + ir)^{-1} \, dr +$$

$$+ K_5 \int e^{-\left(r^2 + \delta_0^2\right)\beta} dr + K_6 \int e^{-\left(r^2 + \delta_0^2\right)\beta} J(r) \, dr,$$

где K_5 *и* K_6 — *константы,* $J(r)$ *определяется в* [G 7], *а* $\psi(r) = \det M(r)$.

Доказательство см. в [G 7] или в [V 5].

Аналогично компактному случаю хотелось бы иметь соотношение

$$\lim_{\beta \to 0} \beta^{n/2} \vartheta(\beta) = C_G \operatorname{Vol}(G/\Gamma), \text{ так что } N(r) \sim C_G r^{n/2}.$$

Однако пока такая оценка не получена. Удается только показать, что $N(r) \leqslant Cr^k$ для достаточно большого k. Другими словами, справедлива

Теорема 18.3.10. *Функция Вейля* $N(r) = \sum\limits_{(r_j^{+2}) \leqslant r} n_j$ *имеет умеренный рост.*

Задачи

Упражнение 18.1. Показать, что в случае компактного пространства $\Gamma\backslash SL(2, \mathbf{R})/SO(2)$ функция распределения определяет спектр длин геодезических вместе с их кратностями. (Отметим, что в общем случае это — открытая проблема).

Упражнение 18.2. Пусть $A(s, L)$ — пространство аналитических автоморфных форм веса s с мультипликатором L (т. е. L — унитарное представление Γ в пространстве V и мы рассматриваем вектор-функции f: $\mathscr{P} \to V$ со свойством $f(\gamma z) = ((cz+d)/|cz+d|)^s L(\gamma) f(z)$, $\gamma \in \Gamma$). Использовать формулу следа для функции

$$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } t = s \text{ или } 1-s, \\ 0 \text{ в других случаях} \end{cases}$$

и показать, что $\dim A(s, L) = (2s-1)\operatorname{Vol}(\Gamma\backslash\mathscr{P})$.

Для $0 \leqslant k \leqslant 1$ показать, что спектр Δ_k с мультипликатором L совпадает со спектром Δ_{-k} с мультипликатором $\bar{L}$. Проверить также, что спектры $-\Delta_k$ и $-\Delta_{1-k}$ совпадают вне $k(1-k)$. Показать, что $\dim A(k, L) - \dim A(1-k, \bar{L}) = (2k-1)\operatorname{Vol}(\Gamma\backslash G) \cdot \dim V/4 = (k-1/2)(g-1)\dim V$, поскольку $\operatorname{Vol}(\Gamma\backslash G) = 2g-2$.

Упражнение 18.3. Рассмотрим пример из механики твердого тела. Пусть $G = E(3)$ — группа евклидовых движений, а Γ — дискретная подгруппа с компактным факторпространством (*кристаллографическая группа*). Гамильтониан $H = -(\hbar^2/2m)\Delta$ перестановочен с действием $E(3)$ на $\mathbf{R}^3$. Пусть L — неприводимое унитарное представление Γ и $U = \operatorname{Ind}_\Gamma^G L$. Тогда, поскольку G типа I, $U = \int_{\hat{G}} U(\lambda)\, d\lambda$. По лемме Шура $H = \int_{\hat{G}} h(\lambda) \cdot 1\, d\lambda$, где $h(\lambda)$ оказывается равным $a\lambda^2$. Показать также, что мера $d\lambda$ сосредоточена в счетном числе точек и что $\dim \operatorname{Hom}_G(U(\lambda), U) = \dim \operatorname{Hom}_\Gamma(L, U(\lambda))$.

Глава 19 Квантовая теория поля

19.1. Приложения к квантовой теории поля

Результаты геометрического квантования и теории представлений играют все большую роль в квантовой теории. Несколько примеров такого взаимодействия будет разобрано в этой главе. Значительная часть квантовой теории поля состоит из чисто формальных соотношений (или, по крайней мере, соотношений, которые мы будем рассматривать как чисто формальные). Мы покажем, что многие из них уже встречались в квантовой статистической механике.

Объекты, изучаемые в квантовой теории поля, аналогичны объектам статистической механики, а именно они имеют вид обобщенных матриц плотности $Z = \operatorname{tr}\rho = \int dg\, d\varphi \exp(iI(g, \varphi))$, где dg — мера в «пространстве метрик», а $d\varphi$ — мера в «пространстве полей». Разлагая действие $I(g, \varphi)$ в окрестности основного состояния (g_0, φ_0) с точностью до первого порядка, получаем $I(g, \varphi) = I_0 + I_1(\tilde{g}) + \bar{I}_1(\tilde{\varphi})$, где $\tilde{g} = g - g_0$, $\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_0$. Таким образом, с точностью до первого порядка

$$\ln Z = iI_0 + \ln \int d\tilde{g} \exp(iI_1(\tilde{g})) + \ln \int d\tilde{\varphi} \exp(i\bar{I}_1(\tilde{\varphi})).$$

Говорят, что второй и третий члены описывают соответственно вклады тепловых гравитонов и волн материи в основное состояние. Формально член $\bar{I}_1(\tilde{\varphi})$ имеет вид $\bar{I}_1(\tilde{\varphi}) = (1/2)\int \tilde{\varphi} A \tilde{\varphi} (-g_0)^{-1/2} d^4x$, где A — дифференциальный оператор второго порядка, например $A = -\nabla_\alpha \nabla^\alpha + m^2 + \xi R$. При $\xi = 1/6$ и $m^2 = 0$ получается конформно инвариантное волновое уравнение. Хокинг в своих первоначальных исследованиях в этой области предполагал, что A — нормальный оператор с полным набором собственных функций $A\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$. Разлагая $\tilde{\varphi}$ в виде $\tilde{\varphi} = \sum a_n \varphi_n$ и полагая $d\tilde{\varphi} = \mu \prod da_n$, мы получаем формально

$$Z(\tilde{\varphi}) = \int d\tilde{\varphi} \exp(iI_1(\tilde{\varphi})) = \mu \prod_n \int da_n e^{-\lambda_n a_n^2} = \mu \prod_n \sqrt{\pi/\lambda_n}\,.$$

Определение 19.1.1. Назовем *дзета-функцией* оператора A функцию $\zeta_A(s) = \sum \lambda_n^{-s}$.

Поскольку $\zeta'_A(s) = -\sum \ln(\lambda_n)\lambda_n^{-s}$, мы получаем формальное равенство

$$\zeta'_A(0) = -\sum_n \ln(\lambda_n) = -\ln\left(\prod_n \lambda_n\right) = -\ln\det A.$$

Это подсказывает

Определение 19.1.2. *Определителем* оператора A называется $\det A = \exp(-\zeta'_A(0))$.

Приняв это определение, получаем такой результат:

Теорема 19.1.3. $\ln Z(\tilde{\varphi}) = \mu\zeta'_A(0) = -\mu\ln\det A$.

Чтобы сделать этот результат более конкретным (а также более согласованным с реальным развитием теории) мы рассмотрим так называемый формализм пятого параметра. Пусть φ — скалярное поле с лагранжианом $\mathscr{L} = 1/2 g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\varphi - 1/2\xi R\varphi^2 - 1/2 m^2\varphi^2$, где R — скалярная кривизна пространства-времени M, ξ — произвольный вещественный параметр, m^2 — квадрат массы и $\hbar = c = 1$. Уравнение поля имеет вид $H(x)\varphi = 0$, где $H(x) = -\nabla^\mu\nabla_\mu + \xi R + m^2$. Функция Грина G этого уравнения формально задается равенством

$$G(x, x') = \int_0^\infty i\,ds\langle x|\exp(-isH)|x'\rangle = \int_0^\infty ds\langle x, s|x', 0\rangle$$

в терминах непрерывного базиса $|x\rangle$, где $\langle x, x'\rangle = [-g(x)]^{-1/2}\delta(x-x')$.

Определение 19.1.4. *Действие* поля φ определяется равенством

$$S = \int d^4x\mathscr{L} = 1/2\int d^4x\varphi^*(x)H(x)\varphi(x).$$

Определение 19.1.5. *Тензор энергии-импульса* определяется как функциональная производная

$$T^{\mu\nu}(x) = 2[-g(x)]^{-1/2}\delta S/\delta g_{\mu\nu}(x),$$

которая в нашем случае совпадает с

$$T^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu\varphi\partial^\nu\varphi - 1/2 g^{\mu\nu}(\partial_\alpha\varphi\,\partial^\alpha\varphi - m^2\varphi) + \\ + \xi\left[g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla^\alpha - \nabla^\mu\nabla^\nu + R^{\mu\nu} - 1/2 g^{\mu\nu}R\right](\varphi^2).$$

Теорема 19.1.6. *Когда* $\xi = 1/6$ *и* $m^2 = 0$ *(т. е. в конформно инвариантном случае)*, $T^\mu_\mu = 0$.

Доказательство оставляется читателю.

Определение 19.1.7. *Вакуумное ожидание* $T^{\mu\nu}$ определяется как

$$\langle T^{\mu\nu}\rangle = \frac{2}{\sqrt{-g(x)}}\int d\varphi\,\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}\exp(iS)\Big/\int d\varphi\exp(iS) = \frac{2}{\sqrt{-g(x)}}\,\frac{\delta W}{\delta g_{\mu\nu}},$$

где $W = i\ln\int d\varphi\exp(iS)$.

Таким образом, функция распределения равна $Z = \int d\varphi\exp(iS) = \exp(-iW)$.

Записывая φ в виде $\sum a_n\varphi_n(x)$ (или, как физики, $\varphi_n(x) = \langle x|\varphi_n\rangle$), получаем формально

$$S = -\frac{1}{2}\int\varphi^* H\varphi\sqrt{-g}\,d^4x = -\frac{1}{2}\sum a_n^2\lambda_n.$$

Полагая $d\varphi = \prod\mu\,da_n$ (где μ — нормировочная константа), приходим к равенству

$$Z = \prod_n \mu\,da_n e^{-ia_n^2\lambda_n/2} = \prod_n\left(\frac{2\pi\mu^2}{i\lambda_n}\right)^{1/2} = \det\left(\frac{iH}{2\pi\mu^2}\right)^{-1/2}.$$

Соединение этих результатов дает такое утверждение:

Теорема 19.1.8. $W = (i/2)\ln\det(iH/2\pi\mu^2)$.

Используя метод параметрикса из гл. 16, можно показать, что для компактных многообразий справедлива

Теорема 19.1.9.

$$\langle x, s\,|\,x', 0\,| = -\frac{i}{(4\pi s)^2}\exp\left(-im^2s + i\frac{\tau^2}{4s}\right)P(x, x'; is),$$

где функция P удовлетворяет уравнению

$$i\frac{\partial P}{\partial s} = -\nabla^\mu\nabla_\mu P + \xi RP - \frac{i\tau}{s}\frac{\partial P}{\partial\tau}.$$

Следствие 19.1.9′. *Если определить дзета-функцию $\zeta(\nu)$ как след G^ν, то*

$$\zeta(\nu) = \frac{1}{(4\pi)^2\,\Gamma(\nu)}\int d^4x\sqrt{-g}\,i\,ds\,(is)^{\nu-3}e^{-ism^2}P(x, x; is).$$

Из разложения параметрикса

$$P(x, x'; \beta) = a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 + \ldots$$

следует

Теорема 19.1.10.

$$\zeta(0) = \frac{i}{(4\pi)^2}\int d^4x\sqrt{-g}\left[a_2(x, x) - m^2a_1(x, x) + \frac{1}{2}a_0m^4\right]$$

и

$$\zeta'(0) = \frac{i}{32\pi^2}\left\{\left(\gamma - \frac{3}{2}\right)\int d^4x \sqrt{-g}\, \times \right.$$
$$\times \left[a_2(x, x) - m^2 a_1(x, x) + \frac{1}{2} a_0 m^4\right] - \int d^4x \sqrt{-g} \int i\, ds \ln(is) \times$$
$$\left. \times \frac{\partial_3 P(x, x; is)}{\partial (is)^3} \exp(-im^2 s)\right\}.$$

Пропагатор $\langle x, s | x', 0\rangle$ представляет интерес, поскольку формально он удовлетворяет уравнению Шрёдингера

$$i\frac{\partial}{\partial s}\langle x, s | x', 0\rangle = H(x)\langle x, s | x', 0\rangle$$

с начальным условием

$$\lim_{s\to 0}\langle x, s | x', 0\rangle = (-g)^{-1/2}\delta(x - x').$$

Отсюда и происходит термин «формализм пятого параметра». В случае $(\mathbf{R}^3, g_{\alpha\beta})$ пропагатор имеет вид

$$\langle x, s | x', 0\rangle = -\frac{i}{4\pi s^2}\exp(-im^2 s + i\tau/4s^2),$$

где

$$\tau = \int_0^s ds' \left(g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds'}\frac{dx^\beta}{ds'}\right)^{1/2}.$$

Определение 19.1.11. Многообразие M (пространство-время) называется *пространством Эйнштейна*, если оно имеет вид $S^3(a) \times \mathbf{R}$.

Теорема 19.1.12. *В пространстве Эйнштейна*

$$\langle x, s | x', 0\rangle = (4\pi i s)^{-1/2}\exp\left(\frac{i}{4s}\tau - \tau'\right)^2 K(q, q'; s),$$

где $K(q, q'; s)$ — пропагатор на $S^3(a)$, удовлетворяющий уравнению

$$\left(i\frac{\partial}{\partial s} + \Delta_{S^3} - \frac{R}{6}\right)K(q, q'; s) = i\delta(s)\,\delta(q, q')$$

для $q, q' \in S^3(a)$. Заметим, что здесь выбрано $\xi = 1/6$.

С помощью теории представлений это уравнение немедленно решается, как мы видели в гл. 17, и дает

$$K(q, q'; s) = (4\pi i s)^{-3/2}\frac{a}{\sin(s/a)}\sum(s + 2\pi n a)\, e^{i(s+2\pi n a)^2/4s}.$$

Мы предоставляем читателю выписать явно функцию Грина $G(x, x')$ для этого случая.

Определение 19.1.13. *Эффективный лагранжиан* определяется формулой

$$L_{\text{eff}} = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{ds}{s} \langle x,\ s \mid x',\ 0\rangle \exp(-ism^2).$$

Как мы видели в гл. 16, пропагатор $\langle x, s \mid x', 0\rangle$ допускает разложение вида

$$\langle x,\ s \mid x',\ 0\rangle = \sum e^{-i\lambda_n s} \varphi_n(x)\,\overline{\varphi_n(x')},$$

где $H\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$. Если пространство-время компактно, мы уже видели много примеров, в которых оператор H совпадал с оператором Лапласа — Бельтрами Δ_M и, следовательно, был самосопряженным с дискретными собственными значениями. Вычисление эффективного лагранжиана равносильно нахождению функции распределения

$$\vartheta(s) = \operatorname{tr}\langle x,\ s \mid x,\ 0\rangle = \sum d(n)\exp(-\lambda_n s),$$

где $d(n)$ — степень вырождения собственного значения λ_n. Поэтому эффективное действие равно

$$W_{\text{eff}} = \frac{1}{2\operatorname{Vol} M}\int \frac{ds}{s}\,\vartheta(is)\exp(-ism^2).$$

Пример 19.1.14. Пусть пространство-время M является пространством де Ситтера $S_4^1(a) = SO(1,4)/SO(1,3)$. Как можно проверить, в этом случае $d(n) = n(n+1)(2n+1)/6$, а $\operatorname{Vol} M = 8\pi^2 a^4/3$.

С помощью разложения Адамара для параметрикса можно написать

$$\langle x,\ s \mid x,\ 0\rangle = i(4\pi i s)^{-d/2}\sum_{n=0}^\infty a_n(x)(is)^n.$$

Теорема 19.1.15.

$$L_{\text{eff}} = \frac{1}{32\pi^2}\lim_{\nu\to 1}\frac{a_2 - a_1m^2 + \frac{1}{2}a_0m^4}{\nu-1} +$$

$$+\sum_{n=0}^{2}\frac{(-m^2)^{2-n}}{(2-n)!}a_n(\psi(3-n)+\gamma) + \sum_{n=3}^\infty a_n(m^2)^{2-n}\,\Gamma(n-2),$$

где $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$, *а* $\gamma = -\psi(1)$.

Метод перенормировки де Витта состоит в вычитании членов, содержащих a_0, a_1 и a_2.

С помощью формальных равенств получаем такой результат:

Теорема 19.1.16. (i) $\langle T^{\mu}_{\mu}\rangle = -2\partial \ln L_{\text{eff}}/\partial \ln (m^2)$

(ii) $\int d^4x \sqrt{-g}\, \langle T^{\mu}_{\mu}\rangle = i\zeta'(0) = \frac{1}{4\pi^2}\int d^4x \sqrt{-g}\, a_2(x, x)$.

Следствие 19.1.17. $\lim\limits_{m^2\to 0} \langle T^{\mu}_{\mu}\rangle = -\frac{1}{16\pi^2} a_2$, где $a_2(x) = \frac{1}{5}\times$
$\times\left(\frac{1}{6}-\xi\right) R^{;\alpha}_{;\alpha} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-\xi\right)^2 R^2 + \frac{1}{180} R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{180} R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}$.

Тот факт, что след T^{μ}_{μ} в классической ситуации равен нулю, а в квантовой $\langle T^{\mu}_{\mu}\rangle \neq 0$, называется *аномалией следа*. Отметим, что до перенормировки $\langle T^{\mu}_{\mu}\rangle \to 0$ при $m^2 \to 0$. Поэтому аномалия появляется в результате перенормировки, о чем уже много написано[1]).

19.2. Статическое пространство-время и периодичность

Статическое пространство-время — это многообразие вида $M = M^3 \times \mathbf{R}$; ясно, что пространство Эйнштейна является таковым. При изучении статического пространства-времени в работах Хокинга, Гиббонса и др. о черных дырах возникает фундаментальная группа. Например, записывая метрику Шварцшильда в виде

$$-ds^2 = \frac{32M^3}{r}\exp(-r/2M)\left\{d\,|V|^2 + |V|^2\, d\left(\frac{t}{2M}\right)^2 + r^2\left[d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\right]\right\},$$

где $|V| = \exp(r/2M)(r/2M - 1)$, мы видим, что имеется сингулярность в точке $|V| = 0$ (т. е. $r = 2M$), исчезающая, если отождествить t и $t + 8\pi M$. Это привело Гиббонса к выводу, что черной дыре следует приписать температуру T_0, так что $\beta = 1/kT_0 = 8\pi M$; другими словами, черная дыра находится в равновесии с термостатом при температуре, пропорциональной β^{-1} с функцией распределения $Z = \int d\varphi \exp(iS)$.

Общая идея анализа черных дыр очень похожа на то, что мы делали в формализме следа Сельберга. А именно для получения пропагатора на M нужно вычислить пропагатор на накрывающем пространстве M_∞ и затем просуммировать по фундаментальной группе Г.

[1]) И продолжают писать. — *Прим. перев.*

Пример 19.2.1 (Зоммерфельд — Карслоу). Рассмотрим уравнение Шрёдингера на конусе с метрикой $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$; оно имеет вид

$$\left(i\frac{\partial}{\partial\tau} + \nabla^2\right)\rho_\beta(r, \varphi, r', \varphi', \tau) = i\delta(\tau)\,\delta(\varphi - \varphi')\,\delta(r - r')(rr')^{-1/2}$$

для $|\varphi|$, $|\varphi'| < \beta/2$. Если φ имеет период $\beta < \infty$, то, как показал Карслоу в 1909 г., при $\beta = \infty$

$$\rho_\infty(r, \varphi, r', \varphi', \tau) = $$
$$= \frac{-i}{4\pi\tau} e^{i(r^2+r'^2)/\tau} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu\, e^{i[\mu(\varphi-\varphi') - \pi i|\mu|/2]} J_{|\mu|}\left(\frac{rr'}{2\tau}\right). \qquad (*)$$

Чтобы получить пропагатор на конусе, нужно просуммировать ряд

$$\rho_\beta(r, r'; \tau) = \sum_{m\in\mathbf{Z}} e^{2\pi i m\delta}\rho_\infty(r_m, r'; \tau),$$

где $r_m = (r, \varphi + m\beta)$. Таким образом, ρ_β имеет период β по φ. Из $(*)$ вытекает разложение ρ_β в ряд Фурье:

$$\rho_\beta(r, r'; \tau) = \frac{i}{2\pi\tau} e^{i(r-r')^2/4\tau} \sum_n \exp\left(2\pi\frac{i(n+\delta)}{\beta} \times\right.$$
$$\left.\times\left(|\varphi - \varphi'| + \frac{\pi}{2}\right)\right) J_{2n/\beta}\left(\frac{rr'}{2\tau}\right).$$

Отметим, что при $\beta = 2\pi$ и $\delta = 0$

$$\rho_{2\pi}(r, r'; \tau) = \frac{-i}{4\pi\tau} e^{i(r-r')^2/4\tau}.$$

Случай $\beta = 2\pi$ и $\delta \neq 0$ — это ситуация, рассмотренная Аароновым и Бомом; δ имеет смысл электромагнитного потока через ось.

Ситуация, рассматривавшаяся Хокингом — Гиббонсом и Перри, — это в точности модель Зоммерфельда — Карслоу, расширенная с помощью переменной ϑ.

Перейдем к общему случаю. Пусть $\rho(x, x';' s)$ удовлетворяет уравнению Шрёдингера

$$\left(i\frac{\partial}{\partial s} - \Delta + R/6\right)\rho(x, x'; s) = ig^{-1/2}\delta(x - x')\,\delta(s).$$

Пусть ρ периодично с периодом β_0 по мнимому времени. Положим

$$\zeta(s; \beta_0) = \frac{i\exp(i\pi s/2)}{\beta_0\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau\,\tau^{s-1} \sum_n \exp\frac{4\pi i n^2\tau}{\beta_0^2}\rho_3(\tau),$$

где $\rho_3(\tau) = \int d^4x g^{1/2} \rho_3(x, x; \tau)$, а ρ_3 — фундаментальное решение уравнения $(\partial/\partial\tau - \Delta_2 - R/6)\rho_3 = ig^{-1/2}\delta(x - x')\delta(\tau)$.

Теорема 19.2.2.

$$\zeta(s, \beta_0) = \frac{i}{\beta_0} \sum_{n,\, \omega_k} d(k)\left[\omega_k^2 + (4\pi^2 n^2/\beta_0^2)\right]^{-s},$$

где $d(k)$ — кратность собственного значения ω_k оператора $\Delta_2 + R/6$.

Теорема 19.2.3. *Однопетлевая регуляризация приводит к эффективному лагранжиану*

$$L_{\mathrm{eff}} = -\frac{i}{2}\frac{\zeta(0, \beta_0)}{s-1} + \zeta'(0, \beta_0).$$

Член, соответствующий нулевой температуре, обозначим через $\bar{L}$. Тогда справедливо

Следствие 19.2.4.

$$\bar{L}_\beta = -\frac{1}{\beta_0}\sum_k d(k)\ln(1 - \exp(-\beta_0\omega_k)) + \bar{L}_\infty.$$

С помощью разложения из гл. 16

$$\rho(x, x; s) = (4\pi i s)^{-3/2} \sum_{l=0,\, \frac{1}{2},\, 1,\, \ldots} a_l(is)^l + W$$

получается

Теорема 19.2.5. *Асимптотически при $\beta_0 \to 0$*

$$\zeta(s; \beta_0) \sim \frac{i}{\beta_0}\zeta_{M^3}(s) - \\ - \frac{i\pi^{3/2-s}}{8\Gamma(s)} \sum a_l \left(\frac{\beta_0}{4}\right)^{2s+l-2} \Gamma(s + l - 3)\,\zeta_R(2s + 2l - 3).$$

Здесь ζ_R — обычная дзета-функция Римана. Это позволяет вычислить свободную энергию, энтропию, энергию и т. д. в высокотемпературном пределе.

Наконец, отметим, что с помощью теоремы 18.3.9 можно получить явное выражение для эффективного лагранжиана на некомпактном, но имеющем конечный объем пространстве-времени. Физическая интерпретация этого примера предоставляется читателю.

19.3. Примеры дзета-функций в квантовой теории поля

В этом разделе мы рассмотрим скалярные поля на статическом пространстве-времени вида $M^3 \times \mathbf{R}$, где пространственное сечение M^3 является пространственной формой Клиффорда — Клейна плоского или сферического типа $\mathbf{R}^3/\Gamma$ или S^3/Γ. Выше мы уже имели дело с квантовой статистической механикой и квантовой теорией поля на неодносвязных римановых пространствах $M = N/\Gamma$. Ядра на M и N связаны соотношением $K_M(q', q''; \tau) = \sum_{\gamma \in \Gamma} a(\gamma) K_N(q', q''\gamma; \tau)$. Множитель $a(\gamma)$ до сих пор участвовал в нашем изложении лишь формально. Теперь мы подробнее изучим его физический смысл и покажем, каким образом он связан с понятием «скрученных полей», о котором говорится в упр. 19.3.

Пример 19.3.1. Рассмотрим простейший пример $M = S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Если наложить условие периодичности в форме $\psi(q\gamma) = a(\gamma)\psi(q)$, то отсюда будет следовать, что $\psi(\theta + 2\pi n) = \exp(2\pi i n\alpha)\psi(\theta)$ (мы полагаем γ: $\theta \to \theta + 2\pi$ и $a(\gamma) = \exp(2\pi i\alpha)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1/2$). Собственными значениями лапласиана $-d^2/d\theta^2$ будут $-k^2$, где $k = n - \alpha$, $n \in \mathbf{Z}$. Таким образом, поля φ^α на окружности S^1 параметризуются с помощью α.

Как и выше, вакуумное среднее гамильтониана H в этом случае дается формулой $E = \langle H \rangle = i \int_{(d-1)} \zeta_d'(0, \cdot, \cdot)$, где $\zeta(s)$ — одновременная дзета-функция на d-мерном пространстве-времени, а интегрирование ведется по пространственным координатам. Напомним, что

$$\zeta_d(s, \cdot, \cdot) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{s - 1/4}{\Gamma(s)} \zeta_{d-1}(s - 1/2, \cdot, \cdot).$$

Поэтому $E = \zeta_{d-1}(-1/2)$. В нашем примере $d = 2$ и, значит,

$$\zeta_1^{(\alpha)}(s) = \sum k^{-2s} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} (n - \alpha)^{-2s}.$$

Правая часть сводится к дзета-функции Гурвица — Лерха — Эрмита

$$\zeta_{\mathrm{HLH}}(s, w) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + w)^{-s}.$$

А именно

$$\zeta_1^{(\alpha)}(s) = \zeta_{\mathrm{HLH}}(2s, \alpha) + \zeta_{\mathrm{HLH}}(2s, 1 - \alpha).$$

Известно соотношение

$$\zeta_{\mathrm{HLH}}(-p, w) = -\frac{1}{p+1} \varphi_{p+1}(w),$$

где $\varphi_p(w)$ — многочлены Бернулли, обладающие свойством $\varphi_{2k}(w)=\varphi_{2k}(1-w)$. Отсюда

$$E=-\pi^2\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\cos(2\pi n\alpha)=\alpha-\alpha^2-1/6.$$

В частности, при $\alpha=0$ $E=-1/6$ (как было выведено Фордом для вещественных полей); это соответствует тривиальному представлению $a(\gamma)\equiv 1$ группы $\Gamma=\mathbf{Z}$. Для $\alpha=1/2$ $E=1/12$, что соответствует нетривиальному представлению $a(\gamma^n)=(-1)^n$.

Пример 19.3.2. Рассмотрим теперь случай вещественного поля на плоском пространстве-времени, в котором M^3 — волновод в форме бутылки Клейна $M^3=\mathbf{R}\times K_2$. Поверхность K_2 можно представить в виде $\mathbf{R}^2$ с отождествлением $(x,y)\sim\sim(x+pa,(-1)^p y+2mb)$, где p, $m\in\mathbf{Z}$. Фейнмановская функция Грина $G(x,x')=\zeta(1;x,x')$ для этого случая имеет вид

$$G(x,x')=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{m,n}\{[(x-x'-2na)^2+(y-y'-2mb)^2+ +(z-z')^2-(t-t')^2]^{-1}+[(x-x'-(2n+1)a)^2+ +(y+y'-2mb)^2+(z-z')^2-(t-t')^2]^{-1}\}.$$

С помощью результатов последнего раздела можно показать, что первое слагаемое в этом выражении дает

$$\langle T_{00}\rangle_1=-\frac{1}{32\pi^2}\sum{}'(n^2a^2+m^2b^2)^{-2},$$

а второе —

$$\langle T_{00}\rangle_2=\frac{1}{\pi^2}\sum\left\{\frac{2a^2(4\xi-1)(2n+1)^2}{[(2n+1)^2a^2+4(y-mb)^2]^2}-\right. \left.-\frac{6\xi-1}{[(2n+1)^2a^2+4(y-mb)^2]^2}\right\}.$$

Полная энергия на единицу длины в z-направлении получается интегрированием по бутылке Клейна и равна

$$E(a,b)=-\frac{7}{16\pi a^2}\zeta_{\mathrm{HLH}}(3)-\frac{ab}{16\pi^2}\sum{}'(n^2a^2+m^2b^2)^{-2}.$$

Модель, построенная из бесконечного листа Мёбиуса, получается, если устремить b к бесконечности. Тогда в конформном случае $\xi=1/6$ мы получаем

$$\langle T_{00}\rangle=\frac{-1}{16\pi^2a^4}\zeta_{\mathrm{HLH}}(4)-\frac{2a^2}{3\pi^2}\sum_n\frac{(2n+1)^2}{[(2n+1)^2a^2+4y^2]^3}.$$

Введение двумерных дзета-функций Эйнштейна позволяет несколько упростить эти формулы. Эти дзета-функции определяются равенствами

$$Z\begin{pmatrix} g^t \\ h^t \end{pmatrix}(s,\ A) = \sum_{m_1,\ m_2} \frac{\exp(2\pi i h^t m)}{[(m+g)\,A\,(m+g)^t]^s},$$

где m, g, h — двумерные векторы-столбцы, а A — матрица второго порядка. Функция Z удовлетворяет функциональному уравнению

$$Z\begin{pmatrix} g^t \\ h^t \end{pmatrix}(s,\ A) = (\det A)^{-1/2}\pi^{2s-1}\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)}\,e^{-2\pi i g^t h}Z\begin{pmatrix} h^t \\ -g^t \end{pmatrix}(1-s,\ A^{-1})$$

Можно проверить, что

$$\langle T_{00}\rangle_1 + \langle T_{00}\rangle_2 = \frac{1}{32\pi^2}Z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(2,\ A) -$$

$$-\frac{1}{16\pi^2}((4\xi-1)\,a^2\,\partial/\partial a^2 + 6\xi - 1)\,Z\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{y}{b} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(2,\ A),$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}.$$

Аналогично

$$E(a,\ b) = -\frac{7}{16\pi a^2}\zeta_{\mathrm{HLH}}(3) - \frac{ab}{16\pi^2}Z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(2,\ A).$$

С помощью тождества Харди

$$Z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(s,\ 1) = 4\zeta_{\mathrm{HLH}}(s)\,\beta(s)$$

получаем в случае $a = b$

$$E(a,\ a) = -\frac{1}{4\pi^2 a^2}\left(\frac{7\pi}{4}\zeta_{\mathrm{HLH}}(3) - \zeta_{\mathrm{HLH}}(2)\,\beta(2)\right).$$

Пример 19.3.3. Несколько авторов исследовало геометрию Казимира бесконечных параллельных пластин. При граничных условиях Дирихле собственные функции имеют вид $(2/a)\sin(m\pi x/a)$, $m = 1, 2, \ldots$, а соответствующая дзета-функция равна

$$\zeta_1(s;\ x,\ x') = \frac{2}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^{-2s}\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{m\pi x'}{a}.$$

С помощью дзета-функции Эпштейна

$$Z\begin{pmatrix}g\\h\end{pmatrix}(s)=\sum_m |m+g|^{-s}\exp(2\pi imh)$$

и тождества

$$Z\begin{pmatrix}g\\h\end{pmatrix}(2s)=\pi^{2s-1/2}\frac{\Gamma(1/2-s)}{\Gamma(s)}\exp(-2\pi igh)Z\begin{pmatrix}h\\-g\end{pmatrix}(1-2s)$$

получаем

$$\zeta_1(s;\ x,\ x')=\frac{a^{2s-1}}{2\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(1/2-s)}{\Gamma(s)}Z\begin{pmatrix}\frac{x-x'}{2a}\\0\end{pmatrix}(1-2s)-$$

$$-Z\begin{pmatrix}\frac{x+x'}{2a}\\0\end{pmatrix}(1-2s).$$

Пусть $\mathbf{x}=(t,x,y,z)$ означает координаты в этом пространстве-времени. Тогда предел при совпадающих значениях аргументов 4-мерной дзета-функции равен

$$\lim_{\substack{t'\to t\\y'\to y\\z'\to z}}\zeta_4(s;\ \mathbf{x},\ \mathbf{x}')=\frac{i}{(4\pi)^{3/2}}\frac{\Gamma(s-3/2)}{\Gamma(s)}\zeta_1(s-3/2;\ x,\ x').$$

В этом случае

$$\langle T_{00}\rangle=\frac{-\pi^2}{12a^4}\left[\zeta_{\mathrm{HLH}}(-3)+(1-6\xi)Z\begin{pmatrix}0\\x/a\end{pmatrix}(-3)\right].\qquad(*)$$

Случай $\xi=0$ в этом примере исследовал де Витт; его результат получается с помощью тождеств

$$Z\begin{pmatrix}0\\x/a\end{pmatrix}(-3)=\frac{3}{4\pi^4}Z\begin{pmatrix}x/a\\0\end{pmatrix}(4)$$

и

$$\sum(\theta-n)^{-4}=\pi^4\left(\operatorname{cosec}^4(\pi\theta)-\frac{2}{3}\operatorname{cosec}^2(\pi\theta)\right).$$

Отметим, что величина

$$Z\begin{pmatrix}x/a\\0\end{pmatrix}(4)$$

стремится к бесконечности, когда $x\to 0$ или $x\to a$. Полная энергия на единицу площади пластины равна здесь

$$E=\frac{i}{2}\lim_{s\to 1}\frac{\zeta_4\ (s-1)}{s-1}=-\frac{\pi^2}{12a^3}\zeta_{\mathrm{HLH}}(-3),$$

что совпадает с интегралом от первого члена в (*).

Пример 19.3.4. Прямоугольный волновод с граничными условиями Дирихле имеет дзета-функцию

$$\zeta_2(s)=\frac{1}{2\pi^{2s}}\left[\frac{1}{2}Z\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(s,\ A)-(b^{2s}+a^{2s})\,\zeta_{\mathrm{HLH}}(2s)\right],$$

где

$$A=\begin{pmatrix}a^2&0\\0&b^2\end{pmatrix}.$$

В этом случае

$$E_{a,\,b}=\frac{1}{32\pi}\left[(a^{-2}+b^{-2})\,\zeta_{\mathrm{HLH}}(3)-\frac{ab}{\pi}Z\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(2,\ A)\right].$$

Пример 19.3.5. «Скрученные поля» на пространстве-времени, построенном из бутылки Клейна, получаются, если положить $a(\gamma_{pm})=\exp(2\pi i p\alpha)$ или $a(\gamma_{pm})=\exp(2\pi i p\alpha)(-1)^m$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1/2$. Полная энергия для скрученного поля легко вычисляется и равна

$$E(a,\ b,\ \alpha)=\frac{-ab}{16\pi^2}Z\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(2,\ A)-\frac{4}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8\cos(2\pi\alpha n)-\cos(4\pi\alpha n)}{8n^3}.$$

Пример 19.3.6. Предположим, что пространство-время имеет вид $T\times S^3/\Gamma$. Мы уже рассматривали конформный вариант скалярного поля на пространстве Эйнштейна $T\times S^2$. Используя равенство $\zeta_{S^3}(s)=\sum n^2(n^2/a^2)^{-s}=a^{2s}\zeta_{\mathrm{HLH}}(2s-2)$, получаем $E=(1/2)\zeta_{S^3}(-1/2)=1/240\,a$.

В случае пространства $T\times RP(3)$, $RP(3)=S^3/\mathbf{Z}_2$, нужно рассмотреть два представления $\mathbf{Z}_2$: $a(\pm1)=1$ и $a(\pm1)=\pm1$. В первом случае дзета-функция равна $a^{2s}\sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)^{-2(s+1)}$ с $E=-7/20a$, а во втором $\zeta(s)=a^{2s}\sum_{j\in 1/2+\mathbf{N}}(2j+1)^{-2(s+1)}$ с $E=1/30\,a$.

Аналогично исследуется случай линзового пространства $T\times L(3)$, $L(3)=S^3/\mathbf{Z}_m$. В этом случае

$$\langle T_{00}\rangle=\frac{m^4+10m^2-14}{1440\pi^2a^4},\quad E=-\frac{m^3+10m-14m^{-1}}{720a}.$$

Общий случай пространства-времени вида $T\times S^3/\Gamma$ исследован в [D 29]. В частности, обнаружено, что общее выражение для $\langle T_{ab}\rangle$ не сводится к $R_{ab}-(1/2)g_{ab}R$, так как содержит дополнительную геометрическую структуру. Это приводит к трудностям при подстановке $\langle T_{\mu\nu}\rangle$ в правую часть уравнения Эйнштейна, так как она должна представлять «реакцию связи» поля на геометрию. Кроме того, мы видим, что «скрученные поля» обладают реакцией связи, совсем не похожей на обычные поля.

Задачи

Упражнение 19.1. Уравнение поля Прока было введено в гл. 16. Показать, что в этом случае

$$Z(0) = (\det(\Delta_1 + m^2))^{-1/2} (\det(\Delta_0 + m^2))^{1/2},$$

где Δ_p — лапласиан в пространстве p-форм.

Упражнение 19.2. Показать, что для бесконечного волновода M^3 минимальная энергия $E = -\bar{L}_\infty$ равна

$$E = -8\pi a^2 \zeta_R(2)\,\beta(2) - \frac{\pi}{2}\zeta_R(3),$$

где $\beta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^{-s}$ при $s > 0$.

Упражнение 19.3. Рассмотрим безмассовое поле на пространстве-времени $S^1 \times \mathbf{R}^3$ с периодом a вдоль оси x^3. Функция Грина для уравнения поля удовлетворяет соотношению $\Box G(x, x') = -\delta(x, x')$. Если $G_0(x, x')$ — функция Грина для пространства Минковского, то

$$G(x, x') = \sum_{n \in \mathbf{Z}} G_0(x, x' + nae_3).$$

Положим $G_{\mathrm{ren}} = \sum_{n \neq 0} G_0(x, x' + nae_3)$. Показать, что

$$\langle T^{\mu\nu}\rangle = i\,[\partial^2/\partial x_\mu \partial x_\nu\, G_{\mathrm{ren}}(x, x')]\,|_{x=x'} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(na)^4}\begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -3 \end{pmatrix} = \frac{\pi^2}{90a^4}\begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -3 \end{pmatrix}.$$

«Скрученное поле» определяется формулой

$$G_{\mathrm{ren}}^{\mathrm{twist}}(x, x') = \sum_{n \neq 0} (-1)^n G(x, x' + nae_3).$$

Показать, что в этом случае

$$\langle T^{\mu\nu}_{\mathrm{twist}}\rangle = -\frac{7}{8}\langle T^{\mu\nu}\rangle.$$

Отметим, что плотность энергии $\langle T^{00}\rangle$ для «скрученного поля» положительна, в то время как $\langle T^{00}\rangle$ отрицательно. Таким образом, «скручивание» увеличивает энергию вакуума.

Рассмотреть остальные пространства $\Sigma \times \mathbf{R}$, где $\Sigma = \mathbf{R}^3/\Gamma$ — одна из 18 пространственных форм Клиффорда — Клейна. В частности, показать, что для случая $\Sigma = S^1 \times S^1 \times \mathbf{R}$ с одинаковыми периодами по двум осям

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = \frac{305}{a^4} \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотреть скрученные поля в этом случае, а также в случае $\Sigma = K_2 \times \mathbf{R}$ и $\Sigma = M_2 \times \mathbf{R}$, где K_2 — бутылка Клейна, а M_2 — лист Мёбиуса длины a и бесконечной ширины.

Глава 20 Когерентные состояния и автоморфные формы

20.1. Когерентные состояния и автоморфные формы

Понятие когерентного состояния для неприводимых унитарных представлений произвольной группы Ли впервые рассматривал А. М. Переломов. Мы рассмотрим случай $G = SU(1,1)/\mathbf{Z}_2$ — группы движений плоскости Лобачевского — и наметим общую теорию в нескольких упражнениях. Как известно, группа матриц второго порядка вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1,$$

действует на единичном круге D. Для любого целого или полуцелого $k \geqslant 1$ обозначим через H^k гильбертово пространство функций f на D, квадратично интегрируемых по мере $d\mu_k(z) = (1 - |z|^2)^{2k-2}$. Определим скалярное произведение в H^k формулой

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{2k-1}{\pi} \int_D f_1(z) \overline{f_2(z)}\, d\mu_k(z).$$

Группа G действует в H^k следующим образом:

$$(T^k(g) f)(z) = (\beta z + \bar{\alpha})^{-2k} f\left(\frac{\alpha z + \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}}\right).$$

Легко видеть, что T^k — унитарное представление G в H^k. Голоморфные функции образуют гильбертово подпространство $\mathcal{H}^k$ в H^k, инвариантное относительно T^k. Ограничение $T^k | \mathcal{H}^k$ неприводимо. Легко проверить, что функции

$$f_p^k(z) = \left[\frac{\Gamma(2k+p)}{\Gamma(2k)\,\Gamma(p+1)}\right]^{1/2} z^p, \quad p = 0, 1, \ldots,$$

образуют ортонормированный базис в $\mathcal{H}^k$ и

$$T^k(u_\varphi) f_p^k = \chi_{k+p}(u_\varphi) f_p^k,$$

где

$$u_\varphi = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix}, \quad \chi_k(u_\varphi) = e^{ik\varphi}.$$

Эти представления образуют одну из двух дискретных серий представлений группы G. Другая получается, если рассматривать антиголоморфные функции и $k \leqslant -1$. Пусть $\psi_0 = f_0 \equiv 1$ — вектор младшего веса. Тогда

$$T^k(g)\,\psi_0 = (\beta z + \bar{\alpha})^{-2k} = e^{i\Phi}\psi_\zeta,$$

где

$$\zeta = -\beta/\bar{\alpha} \in D, \quad \Phi = 2k \arg \alpha, \quad \psi_\zeta = \frac{(1 - |\zeta|^2)^k}{(1 - \zeta z)^{2k}}.$$

Пусть теперь $(T, \mathbf{H})$ — любое неприводимое унитарное представление группы Ли G. Выберем вектор $\psi_0 \in \mathbf{H}$ и пусть

$$H = \{h \in G \mid T(h)\,\psi_0 = e^{i\Phi(h)}\,\psi_0, \quad \Phi(h) \in \mathbf{R}\}.$$

Обозначим через M однородное пространство G/H и выберем для каждой точки $x \in M$ представителя $g(x) \in G$. Положим $\psi_x = T(g(x))\,\psi_0$. Набор векторов $\{\psi_x\}$ называется системой когерентных состояний типа (T, ψ_0).

В нашем примере $M = G/H = D$ и каждой точке $\zeta \in D$ соответствует когерентное состояние ψ_ζ.

Теорема 20.1.1. *Справедливы равенства*

(a) $\psi_\zeta(z) = (1 - |\zeta|^2)^k \sum\limits_{n=0}^{\infty} \bar{f}_n(\zeta)\, f_n(z)$.

(b) $\dfrac{2k-1}{\pi} \displaystyle\int d\mu(\zeta)\, P_\zeta = 1$, *где* $d\mu(\zeta) = (1 - |\zeta|^2)^k\, d\xi\, d\eta$, $\zeta = \xi + i\eta$, *а* $P_\zeta = |\zeta\rangle\langle\zeta|$ — *ортопроектор на состояние* ψ_ζ.

(c) *Пусть* $K_0, K_\pm$ — *стандартный базис в алгебре Ли группы* G *с соотношениями*

$$[K_0, K_\pm] = \pm K_\pm, \quad [K_-, K_+] = 2K_0.$$

Тогда оператор Казимира имеет вид

$$\frac{1}{2}(K_+K_- + K_-K_+) - K_0^2$$

и

$$|\zeta\rangle = \psi_\zeta = (1 - |\zeta|^2)^k e^{\zeta K_+} |0\rangle.$$

Мы предоставляем читателю также

(d) определить ортонормированный базис $\{|n\rangle\}$ в $\mathscr{H}^k$, для которого

$$K_+|n\rangle = (n+1)(n+2k)\,|n+1\rangle,$$
$$K_-|n\rangle = n(n+2k-1)\,|n-1\rangle,$$
$$K_0|n\rangle = (k+n)\,|n\rangle,$$

и связать этот базис с $\{|\zeta\rangle\}$;

(e) проверить, что $\|\psi_\zeta\|_k^2 = \displaystyle\int d\mu_k(\zeta)\,|\psi_\zeta|^2$;

(f) доказать равенство $\langle\eta|T(g)|\zeta\rangle = e^{i\Phi}\langle\eta, \zeta'\rangle$, где $\Phi = 2k\arg(\alpha - \zeta\beta)$, $\zeta' = (\alpha - \zeta\beta)/(-\bar{\beta}\zeta + \bar{\alpha})$.

Теорема 20.1.2. *Пусть G — компактная полупростая группа Ли, H — ее картановская подгруппа и $(U, \mathbf{H})$ — неприводимое представление со старшим весом λ.*

Тогда существует такой вектор $|0\rangle \in \mathbf{H}$, что $U(h)|0\rangle = e^{\lambda}(h)|0\rangle$ для $h \in H$ и

$$X|0\rangle = 0 \text{ для } X \in \mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha>0} \mathfrak{g}^\alpha.$$

Представление U продолжается до голоморфного представления T группы $G^{\mathbf{C}}$, причем стабилизатором состояния $|0\rangle$ является борелевская подгруппа $B \subset G^{\mathbf{C}}$. Пусть π — голоморфный характер B, определяемый формулой $\langle 0|T(b) = \pi(b)\langle 0|$.

(a) Семейство $T(g^{-1})^+|0\rangle$ — система когерентных состояний типа $(T, \mathbf{H})$. Функция $\Psi(g) = \langle 0|T(g^{-1})|\Psi\rangle$ голоморфна на $G^{\mathbf{C}}$ и задает голоморфное сечение однородного линейного расслоения E_π над G/H, ассоциированного с главным расслоением $B \to G^{\mathbf{C}} \to G^{\mathbf{C}}/B \simeq G/H$ с помощью характера π.

(b) $|z\rangle = |g\cdot 0\rangle = U(g)|0\rangle/\langle 0|U(g)|0\rangle$.

(c) $\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle = d_\lambda \int\limits_{G/H} \overline{\Psi_1(z)}\,\Psi_2(z)\,e^{-f(z,\bar{z})}\,d\mu(z)$,

где

$$z = g\cdot 0 \in G/H, \quad f(z, \bar{z}) = \ln\langle 0|U(g)|0\rangle^{-2}$$

и

$$d_\lambda = \prod_{\alpha>0}\langle\lambda+\rho, \alpha\rangle/\langle\rho, \alpha\rangle = \dim\mathbf{H}.$$

Таким образом, пространство $\mathbf{H}$ отождествляется с пространством голоморфных сечений E_π.

(d) По поводу классической производящей функции и среднего значения соответствующего самосопряженного оператора на когерентных состояниях см. [О 2].

Вернемся к нашему примеру $D = G/H$. Семейство векторов $\{\psi_\zeta\}$ образует так называемую переполненную (или сверхполную) систему. Возникает вопрос: нельзя ли выделить из нее обычную полную систему? Пусть Γ — дискретная подгруппа в G с конечным объемом $\Gamma\backslash D$. Рассмотрим семейство векторов $\psi_n = \psi_{\gamma_n\zeta}$ для $\zeta \in D$, $\gamma_n \in \Gamma$.

В разд. 18.1 мы имели дело с автоморфными формами на верхней полуплоскости $\mathscr{P}$. Теперь нам понадобятся дополнительные сведения, которые мы приведем здесь. С факторпространством $M = \Gamma\backslash\mathscr{P}$ можно связать компактную риманову поверхность $\hat{M}$. Для каждой точки $p \in M$ положим $n_p = |\Gamma_p|$, 1 или ∞, если p — эллиптическая точка со стабилизатором Γ_p, регулярная точка или параболическая вершина. Имеем

$$\operatorname{Vol}(\Gamma\backslash\mathscr{P}) = (2n-2)\pi - \sum_i 2\pi/n_{p_i},$$
$$\chi(\hat{M}) = \sum_i 1 - n + 1 = 2g-2,$$

где g — род M, а $c = \sum_i 1$ — полное число циклов. Отсюда

$$\operatorname{Vol} M = \operatorname{Vol}\hat{M} = 2\pi(2g-2) + 2\pi \sum_{p \in \hat{M}} \left(1 - \frac{1}{n_p}\right).$$

Формула Римана — Роха для размерности пространства модулярных форм веса k имеет вид

$$d_k(\Gamma) = \begin{cases} 0 \text{ при } k < 0, \\ g \text{ при } k = 1, \text{ если } \Gamma\backslash\mathscr{P} \text{ компактно}, \\ g - 1 + \operatorname{Card}(\hat{M}\backslash M), \text{ если } k = 1 \text{ и } M \text{ некомпактно}, \\ (2k-1)(g-1) + \sum\limits_{p \in \hat{M}} k\left(1 - \dfrac{1}{n_p}\right) \text{ при } k \geqslant 2. \end{cases}$$

Числа $(g, c; n_1, \ldots, n_c)$ называются *сигнатурой* Γ. Например, классическая модулярная группа $SL(2, \mathbf{Z})$ имеет сигнатуру $(0, 3; 2, 3, \infty)$.

Пусть $d_m^+(\Gamma)$ означает размерность пространства параболических форм и m_0 (соотв. m_0^+) — наименьшее m, для которого $d_m(\Gamma) \geqslant 2$ (соотв. $d_m^+(\Gamma) \geqslant 2$). Если $\Gamma\backslash D$ — компакт, то

$$d_m(\Gamma) = d_m^+(\Gamma), \quad m_0 = m_0^+.$$

Теорема 20.1.3 (Переломов). *Пусть* $\{\psi_\zeta\}$ — *система когерентных состояний типа* (T^k, ψ_0). *Тогда подсистема* $\{\psi_n\}$, $\psi_n = \psi_{\zeta_n}$, *ассоциированная с группой* $\Gamma \subset G$, *неполна при* $k > m_0^+ + 1/2$.

Доказательство. Достаточно указать параболическую форму веса m_0^+, которая обращается в нуль в точке $\zeta_0(D)$. Тогда она равна нулю во всех точках ζ_n. Теорема вытекает из следующего факта.

Упражнение 20.1.4. Система $\{\psi_{\zeta_n}\}$ неполна, если существует такая ненулевая функция $f \in \mathscr{H}^k$, что $f(\zeta_n) = 0$ для всех n.

Упражнение 20.1.5. Показать, что $f_{m_0^+} \in \mathscr{H}^k$. Пусть S_Γ означает площадь фундаментальной области $\Gamma\backslash D$ относительно меры $d\mu(\zeta)$. Тогда

$$S_\Gamma = \pi\left[g - 1 + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{c}\left(1 - \frac{1}{n_l}\right)\right].$$

Например, для модулярной группы $S_\Gamma = \pi/12$. (Отметим, что это 1/4 объема относительно меры $d\mu = y^{-2}dxdy$ на верхней полуплоскости.)

Теорема 20.1.6 (Переломов). *Если $S_\Gamma < \infty$, то система ψ_n типа (T^k, ψ_0) полна при $S_\Gamma < \pi/(2k-1)$.*

С помощью формулы Римана — Роха для $d_m(\Gamma)$ получается

Теорема 20.1.7 (Переломов). *Пусть Γ имеет сигнатуру $(0, c; l_1, \ldots, l_{c_1}, \infty, \ldots, \infty)$. Существует всего 21 дискретная группа с такой сигнатурой, допускающая автоморфную форму с нулем в фундаментальной области. Эти группы перечислены в* [Р 9].

Задачи

Упражнение 20.1. Предметом недавних исследований является переход от сильного к слабому взаимодействию в калибровочных решеточных теориях. Двумерная калибровочная теория рассматривает плоскую квадратную решетку $L = \{x = n_1e_1 + n_2e_2 \mid (n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2\}$ и калибровочные переменные $U_{ij} \in G$, где (i, j) означает пару соседних вершин в L, а G — компактная группа. Обычно $G = U(N)$ или $G = SU(N)$. Случайные переменные U_{ij} связаны тождеством $U_{ij} = U_{ji}^{-1}$ и имеют распределение, описываемое положительной симметричной центральной функцией Φ на G. *Многопетлевые переменные* задаются формулой

$$W_n(G, N) = \left\langle \frac{1}{N}\operatorname{tr} U^n \right\rangle = \frac{\int dU\Phi(U)\operatorname{tr}(U^n)}{\int dU\Phi(U)},$$

где dU — мера Хаара на G. В решеточных калибровочных теориях интересуются пределом W_n при $N \to \infty$.

В частности, исследовалась конкретная функция Φ, связанная с так называемым *действием Валлена*:

$$e^{-A(\vartheta)} = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \exp\left[-\frac{N}{\lambda}(\vartheta + 2\pi n)^2\right] = \frac{\lambda}{2\pi N}\sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{in\vartheta - \lambda n^2/4N},$$

в котором мы узнаем ϑ_3-функцию Якоби. Мы уже говорили, что ϑ_3 является решением уравнения теплопроводности или уравнения Блоха на S^1. Многомерный случай также основывается на уравнении теплопроводности на группе G, как будет видно ниже.

Пусть $\Phi(U) = \det(\vartheta_3(U \mid q))$, где $\vartheta_3(z \mid q) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} q^{n^2} z^n$. Показать, что в терминах полярных координат на $U(N)$, т. е. собственных значений $e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_N}$ матрицы U, многопетлевая переменная принимает вид

$$W_n(q,\ N) = \frac{Z^{-1}}{N} \int \frac{d\theta_1}{2\pi} \ldots \int \frac{d\theta_N}{2\pi} \Delta(e^{i\theta})^2 \prod_{j=1}^{N} \vartheta_3\left(e^{i\theta_j} \middle| q\right) \sum_{m=1}^{N} e^{in\theta_m},$$

где

$$Z = Z(\lambda,\ N) = \frac{1}{2^N N!} \int_{-\pi}^{\pi} \ldots \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \ldots d\theta_N \, |\Delta(e^{i\theta})|^2 \prod_j e^{-A(\theta_j)}.$$

Здесь $\Delta(e^{i\theta}) = \prod_{1 \leqslant k < j \leqslant N} (e^{i\theta_k} - e^{i\theta_j})$ — определитель Вандермонда, а $q = \exp(-\lambda/4N)$.

Пусть многочлены $\varphi_j(z)$ обладают свойством

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \sum_n q^{n^2} e^{in\theta} \varphi_j(e^{i\theta}) \overline{\varphi_k(e^{i\theta})} = \delta_{jk}.$$

Показать, что

$$W_n(q,\ N) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \, \vartheta_3(e^{i\theta} \mid q) \, e^{in\theta} \, |\varphi_j(e^{i\theta})|^2 =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \, e^{in\theta} \rho_N(\theta,\ q),$$

где $\rho_N(\theta, q)$ — плотность вероятности для собственных значений U:

$$\rho_N(\theta,\ q) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} |\varphi_j(e^{i\theta})|^2 \, \vartheta_3(e^{i\theta} \mid q).$$

Онофри показал, что $1/N$-разложение для Z и W_n сходится для достаточно малых $|\lambda/N|$ и что его коэффициенты аналитичны по λ вблизи вещественной оси (т. е. не возникает особенностей Гросса — Виттена во всех порядках по $1/N$). Онофри показал, что тем не менее нельзя менять местами переходы к пределам $\lambda \to \infty$ и $N \to \infty$.

Упражнение 20.2. Показать, что W_n формально совпадает со средним значением в основном состоянии наблюдаемой $w_n =$

$=\sum_{j=1}^{N} e^{in\varphi_j}$ для квантовой системы, состоящей из N невзаимодействующих фермионов, для которых одночастичными собственными функциями являются $\varphi_j(z)$. Показать, что

$$\langle \operatorname{tr}(U^n)\rangle = \sum_{j=1}^{N} \langle \varphi_j \mid z^n \mid \varphi_j\rangle.$$

Показать, что $\langle (1/N)\operatorname{tr} U\rangle = (1/N)\,q\,(1-q^{2N})/(1-q^2)$ и т. д.

Упражнение 20.3. Показать, что

$$Z(\lambda,\ N) = \left(\frac{\lambda}{4\pi N}\right)^{N/2} \prod_{k=1}^{N} \left(1 - e^{(-1/2)\,\lambda\,(1-k/N)}\right)^k.$$

Упражнение 20.4. Пусть $\chi_{(l_1,\ \ldots,\ l_N)}$ — фундаментальные характеры $U(N)$, задаваемые формулой Вейля. Показать, что для $G = U(N)$

$$\frac{e^{-A}}{Z} = \sum_{l_1<\ldots<l_N} \chi_{(l_1,\ \ldots,\ l_N)}\, q^{\sum_j (l_j - j + 1)^2} \prod_{j>k} \frac{1 - q^{2(l_j - l_k)}}{1 - q^{2(j-k)}}.$$

Упражнение 20.5. Пусть $K_{U(N)}(\theta_j,\ \lambda)$ и $K_{SU(N)}(\theta_j,\ \lambda)$ означают фундаментальные решения уравнений теплопроводности $\partial K/\partial\lambda = \Delta_G K$ на соответствующих группах. С помощью соотношения $K_{U(N)}(\theta_j + \alpha,\ \lambda) = \sum_{\nu\in \mathbf{Z}^N} K_{SU(N)}(\theta_j^\nu,\ \lambda)\, K_{U(N)}(\alpha^\nu,\ \lambda/N)$, где $\theta_j^\nu = \theta_j - 2\pi\nu/N + 2\pi\nu\delta_{jN}$ и $\alpha^\nu = \alpha + 2\pi\nu/N$ вывести разложение по характерам для $(e^{-A}/Z)_{SU(N)}$.

Упражнение 20.6 (Кушман). Пусть $(\mathbf{R}^4, \Omega = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge \wedge dy_2)$ — симплектическое линейное пространство с гамильтонианом $H = (1/2)\left(x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2\right) + V = T + V$. Положим $X_T = \Omega^{\#}(dT)$. Предположим, что $\mathscr{L}(X_T)H = 0$. Пусть $z_1 = 2(x_1x_2 + y_1y_2)$, $z_2 = 2(x_2y_1 - x_1y_2)$, $z_3 = x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2$, $z_4 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2$.

Поток, порождаемый линейным гамильтоновым векторным полем X_T, задает действие S^1 на $\mathbf{R}^4$, которое мы обозначим через Φ_t. Показать, что $S^{-1}(h) = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid x_1y_2 - x_2y_1 = h\}$, $h \neq 0$, — гладкое многообразие, инвариантное относительно Φ_t. Показать, что ограничение Φ_t на $S^{-1}(h)$ является свободным действием S^1 с многообразием орбит $M(h) = S^{-1}(h)/S^1$. Показать, что $M(h)$ — симплектическое многообразие с формой Ω_h, где $\pi_h^*\Omega_h = i_h^*\Omega$, $\pi_h\colon S^{-1}(h) \to M(h)$, $i_h\colon S^{-1}(h) \hookrightarrow \mathbf{R}^4$.

Упражнение 20.7. Пусть группа $G = SL(2, \mathbf{R})$ действует на пространстве $(\mathbf{R}^4, \Omega)$ с помощью вложения $SL(2, \mathbf{R})$ в $Sp(4, \mathbf{R})$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Показать, что отображение момента J: $\mathbf{R}^4 \to \mathfrak{g}^*$ для этого действия имеет вид $\langle J(x), v\rangle = (1/2)\Omega(vx, x)$, $x \in \mathbf{R}^4$, $v \in \mathfrak{g}$. Записать J в координатах z_i упр. 20.6. Показать, что G действует транзитивно на $S^{-1}(h)$ при $h \neq 0$. Поэтому $J(S^{-1}(h))$ есть G-орбита $\mathcal{O}_h$ в $\mathfrak{g}^*$, проходящая через точку $J(0, h, 1, 0)$.

Упражнение 20.8. Показать, что z_1, z_2 и z_3 из упр. 20.6 образуют простую алгебру Ли относительно скобки Пуассона. Показать, что $\{z_i, z_4\} = 0$.

Библиографические и исторические замечания

Краткое изложение истории гармонического анализа можно найти у Макки (Bull. Amer. Math. Soc., v. 69, pp. 628—686) и Кириллова [K8]. Мы отсылаем читателя к этим источникам и ограничимся здесь лишь вопросами, затронутыми в книге.

Основные применения гармонического анализа в нашей книге направлены на понимание геометрических реализаций различных унитарных представлений. Этот подход возник в работах Бореля, Вейля, Ботта и Титса для случая компактных полупростых групп Ли. Он связан со многими другими областями математики, как показали Борель, Хирцебрух, Ботт, Костант и др. К сожалению, эти работы не привлекли внимания физиков.

Одновременно с развитием теории Бореля — Вейля в гармоническом анализе происходили и другие события. Макки обобщил работы Вигнера и создал то, что сейчас называют механизмом Макки (или методом малых групп Вигнера). Механизм Макки детально изучался физиками. Кроме развития техники индуцирования Макки обобщил теорему Стоуна — фон Неймана и положил начало исследованию пространства $\hat{G}$ как самостоятельного объекта.

И. М. Гельфанд, М. А. Наймарк и Баргман в это время начали теорию представлений некомпактных полупростых групп Ли. Эта теория достигла расцвета в работах Хариш-Чандры. Наконец, плодотворная работа Сельберга связала все эти достижения.

Ленглендс, изучая работу Сельберга, сформулировал свои гипотезы о геометрической реализации дискретных серий, которые стали аналогом теоремы Бореля — Вейля. Они были вскоре доказаны в разной степени общности и полноты. Завершением этой деятельности явились работы Шмида и др., соединившие результаты Хариш — Чандры с геометрическим подходом Бореля — Вейля.

Одновременно с гипотезами Ленглендса возник еще один важный подход к построению геометрических реализаций представлений широкого класса групп. Этот подход иногда называют «большой картиной Костанта». Эта «большая картина» в разных аспектах развивалась одновременно А. А. Кирилловым, Костантом и Сурьо. Кириллов основывал «большую картину» на своей формуле для характеров в случае нильпотентных и компактных полупростых групп. Как мы видели в тексте книги, результаты Кириллова в компактном случае естественно продолжают работы Бореля — Вейля — Хирцебруха. В нильпотентном случае они основаны на обобщении Макки теоремы Стоуна — фон Неймана.

Роль Костанта в этот период неадекватно отражена в его опубликованных работах. Его лекции в МТИ оказали гораздо большее влияние. Костант и Ауслендер немедленно[1]) обобщили результаты Кириллова на разрешимые группы типа 1. В связи с этим следует также упомянуть работу Пуканского.

Влияние подхода Костанта и Кириллова проникло и на континент[2]), где Диксмье, Дюфло, Берна, Вернь и др. развили эти результаты. Также на континенте и независимо от других Сурьо развивал свой подход к геометрическому квантованию. По существу его подход эквивалентен «большой картине». Сурьо разобрал много красивых примеров из физики в процессе развития своего подхода. Мало-помалу физики начали применять те или другие аспекты теории представлений и геометрического квантования к физическим задачам. Мы надеемся, что читатель видит теперь, что основные результаты в большинстве элементарных квантовых систем заключены в теореме Бореля — Вейля и связанных с ней результатах.

Сама по себе геометрия в методе геометрического квантования дает физику более глубокое понимание дифференциально-геометрических основ механики. Так же естественно геометрическая структура механики возникает при изучении групп симметрии физических систем.

Работы Мааса, Сельберга, Ленглендса и других выдвигают другую, связанную с предыдущим, область исследований — автоморфные формы. Здесь большую роль сыграли работы Рёльке, Тамагавы и Морена. Большой вклад внес И. М. Гельфанд, работа которого вызвала последующие исследования Ганголли, Л. Д. Фаддеева с соавторами и Лакса — Филлипса по теории рассеяния для автоморфных форм. (Конечно, основной результат Лакса — Филлипса восходит к теореме Стоуна — фон Неймана.)

Мы в этой книге не говорили прямо об интегралах Фейнмана. Однако многие из рассмотренных вопросов тесно связаны с историей развития метода континуальных интегралов. Читатель может узнать об этом в [K 1], [K 2], [D 6], [D 33] и т. д. Обзор связанных с этим результатов см. в [S 13a]. Следует также упомянуть работы Альбеверио и Хёг-Крона 1976—1977 гг.

---

[1]) Результаты Ауслендера и Костанта анонсированы через 5 лет, а доказательства опубликованы через 9 лет после работы [K 9]. — *Прим. перев.*

[2]) Так американские авторы называют Западную Европу. — *Прим. перев.*

Перейдем теперь к обзору литературы по главам. В главе 0 мы говорили об истории вопроса о высокотемпературных асимптотиках. Общая ссылка здесь — [F 5] и [B 8]. Цитированные нами результаты изложены в [M 39], [V 6a] и [K 3a].

Изучение геометрии орбит в алгебрах Ли (0.9) восходит к Эресманну (Ann. of Math., v. 35, 1934). Однако еще до Костанта и Кириллова важные геометрические идеи были выдвинуты Боттом (см. [B 18a]).

Детали теории рассеяния см. в [L 5], [C 12a], [C 12]. Результаты Либа и Цвикеля опубликованы в [L 11b] и [C 14a]. Ссылки на квантовую теорию поля (0.11) даются ниже в связи с гл. 19. Первоначальный материал можно найти в [D 5] и [D 2].

Ссылки к гл. 1 включают любой стандартный учебник по теории представлений групп и алгебр Ли. См., например, [V 8], [H 11], [M 4], [K 8], [M 21], [W 5]. По поводу спектральной теории см. [M 15]—[M 22] и [B 21]. Сюда относятся также [R 12], [T 3], [E 3].

Ссылки к гл. 2. По поводу полупрямых произведений см. [M 4], [K 8], [B 11], [W 20], о пространстве Фока — [B 5].

Основная ссылка к гл. 3 — [C 6]. Основы и обзор см. в [N 2a]. По поводу п. 3.2 см. [A 8]. Уравнения Шредингера на любые римановы многообразия обобщены в [D 16], [D 18] и работах, приведенных там. Результаты п. 3.4 принадлежат Либерману [L 7] и Лишнеровицу [L 8]—[L 10]. По поводу п. 3.6 см. [K 16], [S 26] и [K 8].

К гл. 4 основной ссылкой является гл. 4 книги Картана [C 6]. В теории контактных многообразий много было сделано Сасаки и его школой. Пример 4.1.20 упоминается у Гельфанда в [G 9] и [G 10], но я подозреваю, что это классический результат. Результаты о неизоморфизме контактных структур принадлежат Абе [A 1], Черну [C 11], Лютцу [L 13] и Мартине [M 8]. По поводу п. 4.3 отсылаем читателя к классической работе Риба [R 6]. Результат Пале см. в [P 1]. Другой общей ссылкой является [B 14]. Обобщенные многообразия Брискорна исследованы в [A 1], срезовые диаграммы — в [JS 1]. Основными ссылками в п. 4.4 и 4.5 являются [C 6], [R 6] и [G 20]. См. также [S 3]. По поводу п. 4.6 см. [B 14]. Пример 4.6.4 взят из [W 14]. К п. 4.7 см. [G 20], к п. 4.8 — [B 12]—[B 13].

К гл. 5 основная ссылка — [H 29]. Из более ранних работ см. [G 20a]. Недавно написано много книг, посвященных квантованию. Упомянем Сурьо, Симмса, Снятицкого, Вейнстейна, Воллаха, Гийемина — Стернберга, Маслова, Лере, Абрахама — Марсдена. Теорема Стоуна — фон Неймана обсуждается в [C 7], [W 3], [M 4], [R 11]. Изложение примера 5.2.4 следует [S 28] и [O 11]. Результат Кобаяси см. в [K 10]. К п. 5.3 см. [K 16] и [S 26].

Ссылки к гл. 6: к п. 6.1 и 6.3 — [В 1], в п. 6.2 мы следовали Фишеру — Вильямсу [F 3] и Ронсли [R 2], к п. 6.4 см. [А 12], [Н 18], [К 17].

Ссылки к гл. 7: к п. 7.1 — [К 16], [В 11], [V 6] и [К 8], к п. 7.2 — [М 32] — [М 33], [D 9], [М 7] и [А 5]. Пример 7.2.7 основан на [А 3] и [М 37], пример 7.2.9 — на [О 3] — [О 6]. По поводу упр. 7.2 см. [W 19], теория Морса обсуждается в [В 18а], [R 0а] — [R 0с] и [Т 2b].

К гл. 8. Изложение п. 8.1 следует работам Сатаке [S 5] — [S 8]. Результат Мураками см. в [М 40]. Ссылка к п. 8.2 — [К 5], [W 3], [В 11], [Р 16], [S 29], [А 13].

Основная ссылка к гл. 9 — собрание трудов Э. Картана и любая книга по теории представлений алгебр Ли, например [W 5]. Работы Костанта см. в [К 16], комплексные структуры обсуждаются в [В 17], теория Бореля — Вейля — Ботта — в [В 16] и [В 18], см. также [Т 11]. Геометрические вопросы см. в [G 22]. Формула Кириллова изложена в [К 6], см. также [К 8] и [Р 16]. Материал п. 9.3 взят из [L 12] и [Р 18].

К гл. 10. Основные ссылки [W 4], [В 18], [I 1], [W 17], [В 17], [G 21] — [G 25]. К п. 10.2 см. [S 22] и [G 25]. Теория R-пространств и клеток Шуберта изложена в [D 31а], [Н 24а], [К 18b], [Т 2а] — [Т 2с]. По поводу упр. 10.1 см. [I 1], а упр. 10.2 и 10.3 — [W 18].

Глава 11 основана на работах Чижа [С 15] — [С 18]. Результаты Кодаиры — Спенсера см. в [К 11]. По поводу п. 11.2 см. также [S 23]. Результат Кодаиры — Хирцебруха см. в [Н 23]. К п. 11.3 см. [S 27] и [Е 1]. Работы Маслова обсуждаются во многих статьях и связаны с теорией Морса.

К гл. 12 основная ссылка — [W 16]. Пример 12.1.6 принадлежит Такахаси [Т 2]. Результаты Кириллова см. в [К 6]. Результаты п. 12.2 изложены в лекциях Костанта, см. [К 18а].

Глава 13 основана на диссертации Ронсли [R 1] и его работе [R 4]. См. также [S 27] и [Н 1].

К гл. 14: [W 5], [В 4], [Н 3] — [Н 5]. Пример 14.1.6 следует [Т 2]. Обобщение теоремы Бореля — Вейля предложено Ленглендсом в [L 4], доказательство частичных результатов получено Шмидом, Окамото, Хотта, Партасарати, Нарасимханом — Окамото и др.

К гл. 15: к п. 15.1 — [К 12], [I 2], [М 11], [Н 20] — [Н 21], [М 13], [S 20]. Новый вариант «теоремы зануления» предложил Вильямс в 1981 г. (Osaka Journ. Math., v 18, pp. 147—160). К п. 15.2 — [Т 9], [Н 3], [В 4].

К гл. 16: классические ссылки — [N 3] и [D 10]. Предельные теоремы см. в [F 5]. К п. 16.2 — [Е 4], [М 27] — [М 31], основы см. в [К 3]. Гийемин и Стернберг в предисловии к [G 26] обратили внимание на то, что первые задачи спектральной геометрии были поставлены в 1882 г. сэром Артуром Шустером в его отчете по спектроскопии. Надеемся, что мы убедили читателя этой главы в правоте Шустера, утверждающего, что спектральная геометрия лежит в основе квантовой статистической механики и что основные результаты спектральной геометрии были получены Фаулером, его учеником Мулхолландом, Кирквудом и др. К п. 16.3 основные ссылки — [M 34] и [V 2]. Решение Адамара см. в [C 13], [Y 1], [D 5], [P 2] и т. д. Как мы только что говорили, спектральная теория началась с Шустера, затем была знаменитая лекция М. Каца [K 3], работы Зоммерфельда и Джинса, приведшие к работам Г. Вейля [W 9] — [W 11] и к более новым работам Маккина, Зингера, Сили, Джилки, Берже и др. По поводу п. 16.4 см. [M 31] и [E 5], к п. 16.5 см. [L 11a], [S 24a] и [M 23]. Имеется много превосходных изложений модели Изинга — см., например, Gruber C., Lecture Notes in Physics, № 66, 1977, а также Sato M., Publ. RIMS (Kyoto), v. 16, 1980, pp. 531—584. По поводу упр. 16.2 см. [P 12], упр. 16.3— [D 8] и [M 26], упр. 16.4 — [H 31], [D 11] и [C 14].

Основные ссылки к гл. 17 — [B 6], [E 5] — [E 6] и [C 6]. К п. 17.1 см. [M 39], [C 1], [D 6] и [B 19], к п. 17.2 — [E 5].

К гл. 18: [S 20], [M 24], [O 7], [C 7], [G 10], [ES 1], [L 2] — [L 4], [W 1], [G 6], [G 3] — [G 5], [M 34], [H 27], [B 21], [K 13], [D 31], [O 12], [G 28]. С основами теории лучше всего знакомиться по работам [H 8] — [H 9]. Из более новых работ отметим статью Вильямса о кратности дискретных серий в $L^2(\Gamma\backslash G)$ в Amer. J. Math. В ней существенно уточняются результаты Хотта — Партасарати (отбрасываются условия (i) и (ii) в теореме 14.1.8) и получаются наилучшие из известных оценок кратностей. Доказательство получено Воллахом. Я благодарен Вильямсу за это сообщение. Случай некомпактного пространства с конечным объемом обсуждается в [S 20], [V 4], [L 5], [K 19], [V 3], [V 5] и т. д.

Основные ссылки к гл. 19: [D 1] — [D 5], [H 7], [D 14] — [D 30], [I 3], [P 2] и [C 5].

К гл. 20: [P 9] — [P 11], [O 8] и [R 3].

Список литературы

A 1. Abe K., On a Generalization of the Hopf Fibration, Tohoku Math. J. **29** (1977), 335—374; **30** (1978), 177—210.

A 2. Abraham R. and Marsden J., Foundations of Mechanics, second edition (Benjamin, Reading, 1978).

A 3. Adler M., On a Trace Functional for Formal Pseudo Differential Operators and the Symplectic Structure for KdV Type Equations, Invent. math. **50** (1979), 219—248.

A 4. Andreotti A. and Vesentini E., Carleman Estimates for the Laplace Beltrami Operator on Complex Manifolds, Publ. IHES **25** (1965), 81—130.

A 5. Arnol'd V. I., Sur la geometrie differentielle des groupes de Lie..., Ann. Inst. Fourier **16** (1966), 319—361.

A 6. Арнольд В. И. О характеристическом классе, входящем в условия квантования. — Функц. анализ и его прилож., 1967, т. **1**, вып. 1, с. 1—13.

A 7. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974.

A 8. Atiyah M. F., Complex Connections in Fibre Bundles, Trans. Amer. Math. Soc. **85** (1957), 181—207.

A 9. Atiyah M. F. and Bott R., A Lefschetz Fixed Point Formula for Elliptic Complexes, Ann. Math. **86** (1967), 374—407; **88** (1968), 451.

A 10. Atiyah M. F. et al., On the Heat Equation and the Index Theorem, Invent. math. **19** (1973), 279—330.

A 11. Atiyah M. F. and Schmid W., A Geometric Construction of the Discrete Series, Invent. math. **42** (1977), 1—62.

A 12. Atiyah M. F., Riemann Surfaces and Spin Structures, Ann. sc. Ecole Norm. Sup. **4** (1971), 47—62.

A 13. Auslander L. and Kostant B., Polarization and Unitary Representations of Solvable Lie Groups, Invent. math. **14** (1971), 255—354.

B 1. Banach R. and Dowker J. S., Automorphic Field Theory, J. Phys. **A12** (1979), 2527—2543.

B 2. Banach R. and Dowker J. S., The Vacuum Stress Tensor for Automorphic Fields on Some Flat Spacetimes, ibid. 2545—2562.

B 3. Bander M. and Itzykson C., Group Theory and the Hydrogen Atom, Rev. Mod. Phys. **38** (1966), 330—358.

B 4. Bargmann V., Irreducible Unitary Representations of the Lorentz Group, Ann. Math. **48** (1947), 568—640.

B 5. Bargmann V., On a Hilbert Space of Analytic Functions and an Associated Integral Transform, I, Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 187—214.

B 6. Benabdallah A.-I., Noyau de diffusion sur les espaces homogenes compacts, Bull. Soc. math. Fr. **101** (1973), 265—283.

B 7. Berard-Bergery L., Laplacien et geodesiques fermes sur les formes d'espace hyperbolique compact, Sem. Bourbaki exp. **406** (1971/72).

B7a. Berezin F. A.[1], General Concept of Quantization, Comm. math. Phys. **40** (1975), 153—174.

---

[1]) См. также: Березин Ф. А. Квантование. — Изв. АН СССР, т. **38**, № 5, 1974, с. 1116—1175; Березин Ф. А. Общая концепция квантования. — Успехи матем. наук, т. **29**, вып. 6, 1974, с. 200—201. — *Прим. перев.*

B 8. Berger M. et al., Le Spectre d'un Variete Riemannienne, Lecture Notes in Math. No. 194 (1971).
B 9. Berger M., Geometry of the Spectrum, Proc. Symp. Pure Math. **27** (1975), 129—152.
B 10. Bernat P., Sur les representations unitaires des groupes de Lie resolubles, Ann. Ec. Norm. Sup. **82** (1965), 37—99.
B 11. Bernat P. et al., Representations des Groupes de Lie Resolubles (Dunod, Paris, 1972).
B 11a. Bohm A., Rigged Hilbert Spaces and Quantum Mechanics, Lecture Notes in Phys. No. 78 (1978).
B 12. Boothby W. M., Homogeneous Complex Contact Manifolds, Proc. Symp. Pure Math. **3** (1961), 144—154.
B 13. Boothby W. M., A Note on Homogeneous Complex Contact Manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 276—280.
B 14. Boothby W. M. and Wang H. C., On Contact Manifolds, Ann. Math. **68** (1958), 721—734.
B 15. Borel A. Kählerian Coset Spaces of Semisimple Lie Groups, Proc. Nat. Acad. Sci. **40** (1954), 1140—1151.
B 16. Borel A. and Weil A., Representations lineares et espaces homogenes kählenens des groupes de Lie compacts, Sem. Bourbaki (1954) exp. 100 by J. P. Serre.
B 17. Borel A. and Hirzebruch F., Characteristic Classes and Homogeneous Spaces, Amer. J. Math. **80** (1958), 459—538; **81** (1959), 315—382.
B 18. Bott R., Homogeneous Vector Bundles, Ann. Math. **66** (1957), 203—248.
B 18a. Bott R. and Samelson H., Applications of Morse Theory to Symmetric Spaces, Amer. J. Math. **70** (1958), 964—1028.
B 19. Bourbaki N., Elements de Mathematique, Groupes et Algebres de Lie, Chapters 4—6 (Hermann, Paris, 1968). [Имеется перевод: Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Главы 4—6. — М.: Мир, 1972.]
B 20. Bruhat F., Travaux de Harish-Chandra, Sem. Bourbaki exp. **143** (1957).
B 21. Bruning J. and Heintze E., Representations of Compact Lie Groups and Elliptic Operators, Invent. math. **50** (1979), 169—203.
C 1. Cahn R. S. and Wolf J. A., Zeta Functions and Their Asymptotic Expansions for Compact Locally Symmetric Spaces of Negative Curvature, Comment. Math. Helv. **51** (1976), 1—21.
C 2. Cahn R. S., Gilkey P. and Wolf J. A., Heat Equation, Proportionality Principle and Volume of Fundamental Domains, in Differential Geometry and Relativity (D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, Holland, 1976), pp. 43—54.
C2a. Cahn R. S., Asymptotic Expansion of Zeta Function on Compact Semisimple Lie Groups, Proc. AMS **54** (1976), 459—462.
C 3. Candelas P. and Raine D. J., General Relativistic Quantum Field Theory: An Exactly Soluble Model (preprint).
C 4. Carleman T., Über die asymptotische verteilund der eigenwerte partieller differential gleichungen, Ber. Ver. Akad. Leipzig 88 (1936), 119—132.
C 5. Carslaw H. S., Proc. London Math. Soc. **20** (1898), 121; **8** (1910), 365; **18** (1919), 291.
C 6. Cartan E., Lecons sur les invariants integraux (Hermann, Paris, 1922). [Имеется перевод: Картан Э. Интегральные инварианты. — М.: ГТТИ, 1940.]
CS 1. Cartan E., Sur la determination d'un systeme orthogonal complete dans un espace de Riemann symmetrique clos, Rend. del. Cir. Mat. Palermo **53** (1929), 217—252.
C 7. Cartier P., Quantum Mechanical Commutation Relations and Theta Functions, in Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Amer. Math. Soc., Providence, 1965), pp. 361—383.

C 8. Cartier P., Theorie des groupes, fonctions theta et modules des varietes abeliennes, Sem. Bourbaki 1967/68 exp., p. 338.
C 9. Cartier P., Some Numerical Computations Relating to Automorphic Functions, in Computer in Number Theory (Academic Press, New York, 1971), pp. 37—48.
C 10. Chazarain J., Formule de Poisson pour les varietes Riemanniennes, Invent. math. **24** (1974), 65—82.
C 11. Chern S., Pseudogroupes infinis, Colloq. Int. SNRS Strasbourg, 1953, p. 119.
C 12. Colin de Verdiere Y., Spectre du laplacien et longueurs des geodesiques periodiques, Compos. Math. **27** (1973), 83—106, 159—184.
C 12a. Colin de Verdiere Y., La matrice de scattering pour l'operateur de Schrödinger sur la droite réelle, Sem. Bourbaki (1979/80), 557.
C 12b. Colin de Verdiere Y., Une formule de traces pour l'opérateur de Schrödinger dans R^3 (preprint).
C 12c. Colin de Verdiere Y., Spectre conjoint d'operateurs pseudo-differentiels qui commutent, Duke, Math. J. **46** (1979), 169—182.
C 13. Combet E., Parametrix et invariants sur les varietes compactes, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **3** (1970), 247—271.
C 14. Copson E. T. On an Elementary Solution of a Partial Differential Equation of Parabolic Type, Proc. Roy. Soc. Edin. **61A** (1941), 37—60.
C 14a. Cwikel M., Wek Type Estimates for Singular Values and the Number of Bound States of Schrödinger Operators (preprint).
C 15. Czyz J., Bull. Polon. Acad. Sci. **26** (1978), 129—138.
C 16. Czyz J., On Some Approach to Geometric Quantization Lecture Notes in Math. No 676 (1978).
C 17. Czyz J., On Geometric Quantization and its Connection with Maslov Theory, Rep. Math. Phys. **15** (1979), 57—97.
C 18. Czyz J., On Geometric Quantization of Compact and Complex Manifolds (preprint, 1979).
D 1. DeWitt B. S., Dynamical Theory in Curved Spaces, Rev. Mod. Phys. **29** (1957), 377.
D 2. DeWitt B. S., Quantum Field Theory in Curved Spacetime, Phys. Reports **19C** (1975), 295—357.
D 3. DeWitt B. S., Quantum Theory: The New Synthesis (preprint Univ. Texas).
D 4. DeWitt B. S., Hart C. F. and Isham C. J., Topology and Quantum Field Theory (preprint, Univ. Texas).
D 5. DeWitt B. S., Dynamical Theory of Groups and Fields (Gordon and Breach, New York, 1965).
D 6. DeWitt C. M., L'integrale fonctionelle de Feynman, Ann. Inst. H. Poincaré **A11** (1969), 153—206.
D 7. DeWitt C. M. and Laidlaw M. G. G., Phys. Rev. **D3** (1971), 1375.
D 8. Дикий Л. А. Формулы следа для дифференциальных операторов Штурма — Лиувилля. — Успехи матем. наук, 1958, т. 13, вып. 3, с. 111—143.
D 9. Дикий Л. А. Замечание о гамильтоновых системах, связанных с группой вращений. — Функц. анал. и его прилож., 1972, т. 6, вып. 4, с. 326—327.
D 10. Dirac P. A. M., The Principles of Quantum Mechanics (Oxford University Press, London, 1958). [Имеется перевод: Дирак П. А. М. Лекции по квантовой механике. — М.: Мир, 1968.]
D 11. Dirac P. A. M., Proc. Camb. Phil. Soc. **30** (1934), 150.
D 12. Dixmier J., Representations integrables du groupe de DeSitter, Bull. Soc. math. Fr. **89** (1961), 9—41.

D 13. J. Dixmier J., Polarisations dans les algebres de Lie, Ann. sc. Ecole Norm. Sup. **4** (1971), 321—335.
D 14. Dowker J. S., Quantum Mechanics on Group Space and Huygen's Principle, Ann. Phys. **62** (1971), 361—382.
D 15. Dowker J. S., On the Degeneracies of Quantum Systems, Inter. J. Theo. Phys. **8** (1973), 319—320.
D 16. Dowker J. S., Covariant Feynman Derivation of Schrödinger Equation in Riemann Space, J. Phys. **A7** (1974), 1256.
D 17. Dowker J. S and Pettengill D. F., The Quantum Mechanics of Ideal Asymmetric Top with Spin, ibid. **A7** (1974), 1527—1536.
D 18. Dowker J. S., Covariant Schrödinger Equations, in Proc. of Conf. on Functional Integration and Applications (Clarendon Press, Oxford, 1975).
D 19. Dowker J. S., Quantum Mechanics and Field Theory on Multiply Connected and on Homogeneous Spaces, J. Phys. **A5** (1972), 936—943.
D 20. Dowker J. S. and Critchley R., Covariant Casimir Calculations, J. Phys. **A9** (1976), 535—540.
D 21. Dowker J. S. and Critchley R., Scalar Effective Lagrangian in DeSitter Space, Phys. Rev. **D13** (1976), 224—234.
D 22. Dowker J. S. and Critchley R., Effective Lagrangian and Energy Momentum Tensor in DeSitter Space, Phys. Rev. **D13** (1976), 3224.
D 23. Dowker J. S. and Critchley R., The Stress Tensor Conformal Anomaly for Scalar and Spinor Fields (preprint).
D 24. Dowker J. S. and Altaire M. B., Spinor Fields in an Einstein Universe, Phys. Rev. **D17** (1978), 417—422.
D 25. Dowker J. S., Quantum Field Theory on a Cone, J. Phys. **A10** (1977), 115—124.
D 26. Dowker J. S., Conformal Anomalies in Quantum Field Theory (preprint).
D 27. Dowker J. S., Single Loop Divergences in Six Dimensions, J. Phys. **A10** (1978), L63.
D 28. Dowker J. S. and Critchley R., Vacuum Stress Tensor in an Einstein Universe, Finite Temperature Effects, Phys. Rev. **D15** (1977), 1484.
D 29. Dowker J. S. and Banach R., Quantum Field Theory on Clifford Klein Space Times (preprint).
D 30. Dowker J. S. and Kennedy G., Finite Temperature and Boundary Effects in Static Space Time, J. Phys. **A11** (1978), 895—920.
D 30a. Duistermaat J. J. and Guillemin V. W., The Spectrum of Positive Elliptic Operators and Periodic Bicharacteristics, Invent. math. **29** (1975), 39—79.
D 31. Duistermaat J. J., Kolk J. A. C. and Varadarajan V. S., Spectra of Compact Locally Symmetric Manifolds of Negative Curvature, Invent math. **52** (1979), 27—94.
D 31a. Duistermaat J. J., Kolk J. A. C. and Varadarajan V. S., Functions, Flows and Oscillatory Integrals on Flag Manifolds (preprint).
D 32. Duncan T. E., Brownian Motion, the Heat Equation and Some Index Theorems (preprint).
D S1. Dunne S. A., Application of the Kirillov Theory to the Representations of $O(2, 1)$, J. Math. Phys. **10** (1969), 860—868.
D 33. Дынкин Е. Б. Броуновское движение в некоторых симметрических пространствах и неотрицательные собственные функции оператора Лапласа — Бельтрами. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1966, **30** : 2, с. 455—478.
E 1. Elhadad J., Sur l'interpretation en geometrie symplectique des etats quantiques de l'atome d'hydrogen, Conv. Geom. simp. é Fis. mat. INDAM, Rome (1973), 259—291.

ES 1. Ehrenpreis L. and Mautner F. I., Some Properties of the Fourier Transform on Semisimple Lie Groups II, III, Trans. Amer. Math. Soc. **84** (1957), 1—55; **90** (1959), 431—484.
E 2. Ehrenpreis L., An Eigenvalue Problem for Riemann Surfaces, Advances in Theory of Riemann Surfaces (1971), 131—140.
E 3. Elstrodt J., Die Resolvente zum Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyporbolischen Ebene, Math. Ann. **203** (1973), 295—330; Math. Z. **132** (1973), 99—134; Math. Ann. **208** (1974), 99—132.
E 4. Epstein P., Zur theorie allgemeiner Zetafunktionen I, II, Math. Ann. **56** (1903), 615—644; **63** (1907), 205—246.
E 5. Эскин Л. Д. Уравнение теплопроводности на группах Ли. — В книге: Сборник памяти Н. Г. Чеботарева. — Изд-во Казанского ун-та, 1964, с. 113—132.
E 6. Эскин Л. Д. Уравнение теплопроводности и преобразование Вейерштрасса на некоторых симметрических пространствах. — Изв. вузов, Математика, 1965, т. **5**, с. 151—165.
F 1. Фаддеев Л. Д. Разложение по собственным функциям оператора Лапласа на фундаментальной области дискретной группы на плоскости Лобачевского. — Труды Моск. матем. об-ва, 1967, т. **17**, с. 323—350.
F 2. Feynman R. P., Statistical Mechanics (Benjamin, Reading, 1972). [Имеется перевод: Фейнман Р. Статистическая механика. — М.: Мир, 1975.]
F 3. Fischer H. R. and Williams F. L., Complex Foliated Structures, Trans. Amer. Math. Soc. **252** (1979), 163—195.
F 4. Forger M. and Hess H., Universal Metaplectic Structures and Geometric Quantization, Comm. math. Phys. **64** (1979), 269—278.
F 5. Fowler R. H., Statistical Mechanics (Cambridge University Press, Cambridge, 1936).
F 6. Furry W. H., Isotropic Rotational Brownian Motion, Phys. Rev. **107** (1957), **7**.
G 1. Gaffney M. P., Asymptotic Distributions Associated with the Laplacian for Forms, Comm. Pure Appl. Math. **11** (1958), 535—545.
G 2. Gangolli R., Positive Definite Kernels on Homogeneous Spaces, Ann. Inst. H. Poincaré **3** (1967), B121—225.
G 3. Gangolli R., Asymptotic Behavior of Spectra of Compact Quotients of Certain Symmetric Spaces, Acta Math. **121** (1968), 151—192.
G 4. Gangolli R., On the Length Spectra of Certain Compact Manifolds of Negative Curvature, J. Diff. Geom. **12** (1977), 403—424.
G 5. Gangolli R., Zeta Functions of Selberg's Type for Compact Space Forms of Symmetric Spaces of Rank One, Ill. J. Math. **21** (1977), 1—41.
G 6. Gangolli R. and Warner G., On Selberg's Trace Formula, J. Math. Soc. Japan **27** (1975), 328—343.
G 7. Gangolli R. and Warner G., Zeta Functions of Selberg's Type for Some Noncompact Quotients of Symmetric Spaces of Rank One (preprint, Univ. Washington).
G 8. Gelbart S. S., Automorphic Forms on Adele Groups (Princeton University Press, Princeton, 1977).
G 9. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Геодезические потоки на многообразиях постоянной отрицательной кривизны. — Успехи мат. наук, 1952, т. **7**, вып. 1, с. 118—137.
G 10. Гельфанд И. М., Граев М. И.. Пятецкий-Шапиро И. И. Теория представлений и автоморфные функции. — М.: Наука, 1966.
G 11. Gilkey P. B., The Spectral Geometry of Real and Complex Manifolds, Proc. Symp. Pure Math. **27** (1975), 265—280.
G 12. Gilkey P. B., The Spectral Geometry of Riemannian Manifold, J. Diff. Geom. **10** (1975), 601—618.
G 13. Gilkey P. B., The Index Theorem and the Heat Equation (Publish or Perish, Inc., Boston, 1974).

G 14. Godement R., Introduction aux travaux de Selberg, Sem. Bourbaki, Exp. 144 (1956/57).
G 15. Godement R., The Decomposition of $L^2(G/\Gamma)$ for $\Gamma = CL_2(Z)$, Proc. Symp. Pure Math. **9** (1966), 211—224.
G 16. Godement R., The Spectral Decomposition of Cusp Forms, ibid. 225—234.
G 17. Godement R., Fonctions holomorphes de carre sommable dans le demi plan de Siegel, Sem. H. Cartan 1957/58, Exp. 6.
G 18. Gotay M. J. and Isenberg J. A., Geometric Quantization and Gravitational Collapse (preprint).
G 19. Gotay M. J., Functional Geometric Quantization and van Hove's Theorem (preprint).
G 20. Gray J. W., Some Global Properties of Contact Structure, Ann. Math. **69** (1959), 421—450.
G 20a. Groenwold H. J., On the Principles of Elementary Quantum Mechanics, Physica **12** (1946), 405—460.
G 20b. Gibbons G. W., Quantized Fields Propagating in Plane Wave Space Times, Comm. Math. Phys. **45** (1975), 191—202.
G 20c. Glasser M. L., The Evaluation of Lattice Sums, J. Math. Phys. **14** (1973), 409; 701.
G 21. Griffiths P. A., The Differential Geometry of Homogeneous Vector Bundles, Trans. Amer. Math. Soc. **109** (1963), 1—34.
G 22. Griffiths P. A., Some Geometric and Analytic Properties of Homogeneous Complex Manifolds, Acta Math. **110** (1963), 115—155.
G 23. Griffiths P. A., Hermitian Differential Geometry and the Theory of Positive and Ample Holomorphic Vector Bundles, J. Math. Mech. **14** (1966), 117—140.
G 24. Griffiths P. A., Curvature and Cohomology of Locally Homogeneous Vector Bundles (preprint).
G 25. Griffiths P. A. and Schmid W., Locally Homogeneous Complex Manifolds, Acta Math. **123** (1969), 253—302.
G 26. Guillemin V. and Sternberg S., Geometric Asymptotics (Amer. Math. Soc., Providence, 1977). [Имеется перевод: Гийемин В., Стернберг С. Геометрические асимптотики. — М., Мир, 1981.]
G 27. Guillemin V., Lectures on Spectral Theory of Elliptic Operators, Duke Math. J. **44** (1977), 485—517.
H 1. Hannabuss K. C., The Localizability of Particles in deSitter Space, Proc. Camb. Phil. Soc. **70** (1971), 283—302.
H 2. Hano J.-I. and Kobayashi S., A Fibering of a Class of Homogeneous Complex Manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. **94** (1960), 233—243.
H 3. Harish-Chandra, Representations of Semisimple Lie Groups IV—VI, Amer. J. Math. **77** (1955), 743—777; **78** (1956), 1—41; 564—628.
H 4. Harish-Chandra, Discrete Series for Semisimple Lie Groups, Acta Math. **113** (1965), 241—318; **116** (1966), 1—111.
H 5. Harish-Chandra, Harmonic Analysis on Semisimple Lie Groups, Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 529—587.
H 6. Harish-Chandra, Automorphic Forms on Semisimple Lie Groups, Lecture Notes in Math. No 62 (1968). [Имеется перевод: Хариш-Чандра. Автоморфные функции на полупростых группах Ли. — М.: Мир, 1971.]
H 7. Hawking S. W., Zeta Function Regularization of Path Integrals in Curved Spacetime, Comm math. Phys. **55** (1977), 133—148.
H 8. Hejhal D. A., The Selberg Trace Formula and the Riemann Zeta Function, Duke Math. J. **43** (1976), 441—482.
H 9. Hejhal D. A., The Selberg Trace Formula for $PSL(2, \mathbf{R})$, Vol. I, Lecture Notes in Math. **548** (1976).
H 10. Helgason S., Fundamental Solutions of Invariant Differential Operators in Symmetric Spaces, Am. J. Math. **84** (1963), 565—601.

H 11. Helgason S., Differential Geometry on Symmetric Spaces (Academic Press, New York, 1962). [Имеется перевод: Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. — М.: Мир, 1964.]
H 12 Hermann R., Algebraic Topics in Systems Theory, III of Interdisc. Math. (Math. Sci. Press, Brookline, mass. 1973).
H 13. Hermann R., Associative Algebras, Spinors, Clifford, and Cayley Algebra, VII, ibid. (1974).
H 14. Hermann R., Geometry of Nonlinear Differential Equations, Backlund Transformations and Solitons Part A, XII, ibid. (1976).
H 15. Herman R., Lie Algebras and Quantum Mechanics (Benjamin, New York, 1970).
H 16. Hermann R., Vector Bundles in Mathematical Physics, ibid. (1970).
H 17. Hermann R., Physical Aspects of Lie Group Theory (University of Montreal Press, Montreal, 1974).
H 18. Hess H. and Krausser D., Lifting Classes of Principle Bundles (preprint).
H 19. Hess H., On a Geometric Quantization Scheme Generalizing Those of Kostant — Souriau and Czyz (preprint).
H 20. Hirzebruch F., Automorphic formen und der satz von Riemann — Roch, Symposium internalional de Topologia Algebraica, Mexico (1958), pp. 129—144.
H 21. Hirzebruch F., Characteristic numbers of homogeneous domains, Seminars on Analytic Functions (Princeton, 1957), II, pp. 92—104.
H 22. Hirzebruch F., Topological Methods in Algebraic Geometry (Springer-Verlag, New York, 1966). [Имеется перевод: Хирцебрух Ф. Топологические методы в алгебраической геометрии. — М.: Мир, 1973.]
H 23. Hirzebruch F. and Kodaira K., On the Complex Projective Spaces, J. Math. **36** (1957), 201—216.
H 24. Hotta R., Elliptic Complexes on Certain Homogeneous Spaces, Osaka J. Math. **7** (1970), 117—160.
H 24a. Hotta R., The Generalized Schubert Cycles and the Poincaré Duality, Osaka J. Math. **4** (1967), 271—278.
H 25. Hotta R., On a Realization of the Discrete Series for Semisimple Lie Groups, J. Math. Soc. Japan **23** (1971), 384—407.
H 26. Hotta R. and Parthasarathy R., A Geometric Meaning of the Multiplicity of Integrable Discrete Classes in $L^2(\Gamma \setminus G)$, Osaka J. Math. **10** (1973), 211—234.
H 27. Hotta R. and Parthasarathy R., Multiplicity Formulae for Discrete Series, Invent. math. **26** (1974), 133—178.
H 28. van Hove L., Sur la probleme des relations entre les transformations unitaires de la mecanique et les transformations canonique, Acad. Roy. Belgique Bull. Cl. Sci. **37** (1951), 610—620.
H 29. van Hove L., Sur certains representations unitaires d'un groupe infini de transformations, Mem. Acad. Roy. Belg. Cl. Sc. **26** (1952), 61—102.
H 30. Huber H., Zur analytischen Theorie hyperbolischer Raumformen und Bewegungsgruppen, Math. Ann. **138** (1959), 1—26; **142** (1961), 385—398; **143** (1961), 463—464.
H 31. Husimi K., Some Formal Properties of the Density Matrix, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan 22 (1940), 264—314.
I 1. Ise M., Some Properties of Complex Analytic Vector Bundles over Compact Homogeneous Spaces, Osaka Math. J. **12** (1960), 217—252.
I 2. Ise M., Generalized Automorphic Forms and Certain Holomorphic Vector Bundles, Amer. J. Math. **86** (1964), 70—108.
I 3. Isham C. J., Twisted Quantum Fields in Curved Space-Time, Proc. Roy. Soc. London **A362** (1978), 383—404.
J 1. Joseph A., Derivations of Lie Brackets and Canonical Quantization, Comm. math. Phys. **17** (1970), 210.

JS 1. Janich K., Differenzielbare G-Mannigfaltigkeiten, Lecture Notes in Math. **59** (1968).

K 1. Kac M., On Some Connections between Probability Theory and Differential and Integral Equations, Proc. of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (1951), pp. 189—215.

K 2. Kac M., Probability and Related Topics in Physical Sciences (Interscience, New York, 1959). [Имеется перевод: Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике, — М.: Мир, 1965.]

K 3. Kac M., Can One Hear the Shape of a Drum?, Amer. Math. Mon. **73** (1966), 1—23.

K 3a. Kasel L. S., Mathematical Methods for Computing Thermodynamic Functions from Spectroscopic Data, J. Chem. Phys. **1** (1933), 576—585.

K 4. Keller J. B., Corrected Bohr — Sommerfeld Quantum Conditions for Nonseparable Systems, Ann. Phys. **4** (1958), 180—188.

K 5. Кириллов А. А. Унитарные представления нильпотентных групп Ли. — Успехи мат. наук, 1962, т. **17**, № 4, с. 57—110.

K 6. Кириллов А. А. Характеры унитарных представлений групп Ли. — Функц. анал. и его прилож., 1968, т. **2**, вып. 2, с. 40—55; 1969, т. **3**, вып. 1, с. 36—47.

K 7. Кириллов А. А. Конструкции унитарных представлений групп Ли. — Вестник МГУ, сер. матем., 1970, т. 25, № 2, с. 41—51.

K 8. Кириллов А. А. Элементы теории представлений. — М.: Наука, 1972, 1978.

K 8a. Kirkwood J. G., Phys. Rev. **44** (1933); 31; J. Chem. Phys. **1** (1933), 597.

K 9. Kobayashi S., Remarks on Complex Contact Manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 164—167.

K 10. Kobayashi S., Irreducibility of Certain Unitary Representations, J. Math. Soc. Japan **20** (1968), 638—642.

K 11. Kodaira K. and Spencer D. C., Groups of Complex Line Bundles over Compact Kähler Manifolds, Proc. Nat. Acad. Sci. **39** (1953) 1273—1278.

K 12. Kodaira K., On Kähler Varieties of Restricted Type, Ann. Math. **60** (1954). 20—48.

K 13. Kolk J. A. C., The Selberg Trace Formula and Asymptotic Behavior of Spectra (thesis, Rijksuniverseteit, 1974).

K 14. Konno Y., On Vanishing Theorems of Square Integrable ∂-Cohomology Spaces, Osaka J. Math. **9** (1972), 183—216.

K 15. Kostant B., Quantization and Unitary Representations, in Lecture Notes in Math. No. 170 (1970), pp. 87—208. [Имеется перевод: Костант Б. Квантование и унитарные представления. — Успехи мат. наук, 1973, т. 21, вып. 1, с. 163—225.]

K 16. Kostant B., On Certain Unitary Representations which Arise from a Quantization Theory, in Lecture Notes in Physics No. 6 (1970), pp. 237—253.

K 17. Kostant B., Symplectic Spinors, in Conv. Geom. simpl. e Fis. mat. INDAM (Rome) (1973), pp. 139—152.

K 18. Kostant B., On Whittaker Vector and Representation Theory, Invent. math. **48** (1978), 101—184.

K 18a. Kostant B., The Solution to a Generalized Toda Lattice and Representation Theory, Ad. Math. **34** (1979), 195—338.

K 18b. Kostant B., Lie Algebra Cohomology and Generalized Schubert Cells, Ann. Math. 77 (1963), 72—144.

K 19. Kubota T., Introduction to Eisenstein Series (Halsted Press, New York, 1973).

K 20. Kuga M., Fiber Varieties over a Symmetric Space whose Fibers are Abelian Varieties (The Univer. of Chicago, 1963/64).
L 1. Lang S., $SL_2(R)$ (Addison-Wesley, Reading, mass., 1975). [Имеется перевод: Ленг С. $SL_2(R)$. — М.: Мир, 1977.]
L 2. Langlands R. P., The Dimension of Spaces of Automorphic Forms, Am. J. Math. **85** (1963), 99—125.
L 3. Langlands R. P., Eisenstein Series, Proc. Symp. Pure Math. **9** (1966), 235—252.
L 4. Langlands R. P., Dimensions of Spaces of Automorphic Forms, Proc. Symp. Pure Math. **9** (1966), 253—257.
LS 1. Langlands R. P., On the Functional Equation Satisfied by Eisenstein Series, Lecture Notes in Math. **544** (1976).
L 5. Lax P. D. and Phillips R. S., Scattering Theory for Automorphic Functions (Princeton University Press, Princeton, 1977.) [Имеется перевод: Лакс П., Филлипс Р. Теория рассеяния и автоморфные функции. — М.: Мир, 1980.]
L 6. Leray J., Analyse lagrangienne et mecanique quantique (RCP 25 IRMA Strasbourg). [Имеется перевод: Лере Ж. Лагранжев анализ и квантовая механика. — М.: Мир, 1981.]
L 7. Libermann P., Sur les automorphismes infinitesmaux des structures contact, Coll. Geom. Diff. Global Bruxelles (1958), pp. 37—59.
L 8. Lichnerowicz A., Theoremes de reductivite sur des algebres d'automorphes, Rend. di Mat. **22** (1963), 197—244.
L 9. Lichnerowicz A., L'algebre de Lie des automorphes infinitesimaux sympletique, Symposia Math. **XIV** (INDAM, 1973), 11—24.
L 10. Lichnerowicz A., Derivations et cohomologies des algebres de Lie attaches d'une variete symplectique et une variete contact Geometrie symplectique et physique mathematique (Coll. Inter. CNRS, 1974), pp. 29—44.
L 11. Lichnerowicz A., Champs spinoriels et propagateurs en relativite generale, Bull. Soc. math. Fr. **92** (1964), 11—100.
L 11a. Lieb E., Comm. math. Phys. **31** (1973), 327.
L 11b. Lieb E., Estimates for the Eigenvalues of the Laplacian and Schrödinger Operators, Bull. AMS **82** (1976), 751—753.
L 12. Lipsman R. L., Orbit Theory and Harmonic Analysis on Lie Groups with Cocompact Nilradical, (preprint, Unv. Maryland).
L 13. Lutz R., Sur quelques properties des formes differentielles en dimension trois (thesis, Univ. Louis-Pasteur — Strasbourg, 1971).
M 1. Maass H., Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen..., Math. Ann. **121** (1949), 141—183.
M 2. Maass H., Lectures on Modular Functions of One Complex Variable (Tata Lecture Notes, Bombay, 1964).
M 3. Mackey G. W., Mathematical Foundations of Quantum Mechanics (Benjamin, New York, 1963). [Имеется перевод: Макки Г. Математические основания квантовой механики. — М.: Мир, 1965.]
M 4. Mackey G. W., Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics (Benjamin, New York, 1968).
M 5. Mackey G. W., Induced Representations of Locally Compact Groups and Applications, in Functional Analysis and Related Fields (Springer-Verlag, New York, 1968), pp. 132—166.
M 6. Mackey G. W., Ergodic Theory and its Significance for Statistical Mechanics and Probability Theory, Ad. Math. **12** (1974), 178—268.
MS 1. Mackey G. W., The Theory of Group Representations (The University of Chicago Lecture Notes, 1955).
MS 2. Mackey G. W., Unitary Groups Representations (Benjamin, Reading, 1978).

M 6a. Mackey G. W., A Theorem of Stone and von Neumann, Duke Math. J. **16** (1949), 313—326.
M 7. Манаков С. В. Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела. — Функц. анал. и его прилож., 1976, т. **10**, вып. 4, с. 93—95.
M 8. Martinet J., Formes de contact sur les varietes de dimension 3, Lecture Notes in Math. **209** (1972), 142—163.
M 9. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. — М.: Изд-во МГУ, 1965.
M 10. Matsushima Y., On the First Betti Number of Compact Quotient Spaces of Higher Dimensional Symmetric Spaces, Ann. Math. **75** (1962), 312—330.
M 11. Matsushima Y., On Betti Number of Compact Locally Symmetric Riemann Manifold, Osaka Math. J. **14** (1962), 1—20.
M 12. Matsushima Y., A Formula for the Betti Numbers of Compact Locally Symmetric Riemannian Manifolds, J. Diff. Geom. **1** (1967), 99——109.
M 13. Matsushima Y. and Murakami S., On Vector Bundle Valued Harmonic Forms and Automorphic Forms on Symmetric Riemannian Manifolds, Ann. Math. **78** (1963), 365—416.
M 14. Matsushima Y., On Certain Cohomology Groups Attached to Hermitian Symmetric Spaces, Osaka J. Math. **2** (1965), 1—35; **5** (1968), 223—241.
M 15. Maurin K., Automorphic Functions and Spectral Theory Non Compact Case, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. math., ast., phys. **12** (1964), 385—390.
M 16. Maurin K., Dualitatsatz für automorphe funktionen auf einer lokalkompakten unimodularen gruppe, ibid. **14** (1966), 493—496; **15** (1967), 465—472.
M 17. Maurin K. and Maurin L., Enveloping Algebra of a Locally Compact Group and Its Self Adjoint Representations, ibid. **11** (1963), 525—529.
M 18. Maurin L., Verschiedene definitionen der automorphen funktionen und ihre äquivalenz, ibid. **15** (1967), 473—478.
M 19. Maurin K. and L., Automorphic Forms, Spectral Theory and Group Representations, ibid. **13** (1965), 199—203.
M 20. Maurin K., Algemeine eigenfunktionsentwicklungen, unitaire darstellungen lokalkompakter gruppen and automorphe funktion, Math. Ann. **165** (1966), 204—222.
M 21. Maurin K., General Eigenfunction Expensions and Unitary Representations of Topological Groups (PWN, Warsaw, 1968).
M 22. Maurin K. and Maurin L., A Generalizaton of the Duality Theorem of Gelfand — Piateckii-Sapiro and Tamagawa Automorphic Forms, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **17** (1970), 331—339.
M 23. McKean H. P., Kramers — Wannier Duality for the 2-Dimensional Ising Model as an Instance of the Poisson Summation Formula J. Math. Phys. **5** (1964), 775—776.
M 24. McKean H. P., Selberg's Trace Formula as Applied to a Compact Riemann Surface, CPAM **25** (1972), 225—246.
M 25. McKean H. P. and Singer I., Curvature and the Eigenvalues of the Laplacian, J. Diff. Geom. **1** (1967), 43—69.
M 26. McKean H. P. and von Moerbeke P., The Spectrum of Hill's Equation, Invent. Math. **30** (1975), 217—274.
M 27. Minakshisundaram S., Zeta Functions on the Sphere, J. Indian Math. Soc. 13 (1949), 41—48.
M 28. Minakshisundaram S., On Epstein Zeta Functions, Can. J. Math. **1** (1949), 320—326.
M 29. Minakshisundaram S., Zeta Functions on the Unitary Sphere, ibid. **4** (1952), 26—30.

M 30. Minakshisundaram S., Eigenfunctions on Riemann Manifolds, J. Indian Math. Soc. **17** (1953), 158—165.
M 31. Minakshisundaram S. and Pleijel A., Some Properties of the Eigen functions of the Laplace Operator on Riemannian Manifolds, Can. J. Math. **1** (1949), 242—256.
M 32. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1978, т. **12**, с. 371—390.
M 33. Мищенко А. С. Интегралы геодезического потока на группах Ли. — Функц. анал. и его прилож., 1970, т. **4**, вып. 2, с. 232—235.
M 33a. Mickelsson J. and Niederle J., On Non-Linear Realizations of the Group $SU(2)$, Comm. math. Phys. **16** (1970), 191—206.
M 34. Молчанов С. А. Диффузионные процессы и риманова геометрия. — Успехи мат. наук, 1975, т. **30**, № 6, с. 1—64.
M 35. Morimoto A., On Normal Almost Contact Structure, J. Math. Soc. Japan **15** (1963), 420—436.
M 36. Morimoto A., On Normal Almost Contact Structure with a Regularity, Tohoku Math. J. **16** (1964), 90—104.
M 37. Moser J., Three Integrable Hamiltonian Systems Connected with Isospectral Deformation, Adv. Math. **16** (1975), 197—220.
M 38. Moscovici H., A Reciprocity Theorem for Unitary Representations of Lie Groups, Israel J. Math. **15** (1973), 230—236.
M 39. Mulholland H. P., An Asymptotic Expansion, Proc. Camb. Phil. Soc. **24** (1928), 280—289.
M 40. Murkami S., Cohomology Groups of Vector Valued Forms on Symmetric Spaces (Univ. Chicago Lecture Notes, 1966).
N 0. Nakamura M. and Umegaki H., Heisenberg's Commutation Relations and the Plancherel Theorem, Proc. Japan Acad. **37** (1961), 239—242.
N 1. Narasimhan M. S. and Okamoto K., Analogue of the Borel Weil Bott Theorem for Symmetric Pairs of Noncompact Type, Ann. Math. **91** (1970), 486—511.
N 2. Nichanian M., Les Transformees de Fourier des Distributions de Type Positif sur $SL(2, R)$ et la Formule des Traces, Lecture Notes in Math. **497** (1975), 349—367.
N 2a. Nelson E., Tensor Analysis (Princeton University Press, Princeton, 1967).
N 3. von Neumann J., Mathematical Foundations of Quantum Mechanics (Princeton University Press, Princeton, 1955). [Имеется перевод немецкого издания 1932 г.: фон Нейман И. Математические основы квантовой механики. — М.: Наука, 1964.]
N 4. Nirnberg L., A complex Frobenius theorem, Seminars on Analytic Functions (Princeton, 1957) I, 172—189.
O 1. Okamoto K., On Induced Representations, Osaka J. Math. **4** (1967), 85—94.
O 2. Okamoto K. and Ozeki H., On Square Integrable $\bar{\partial}$-Cohomology Spaces Attached to Hermitian Symmetric Spaces, ibid. **4** (1967), 95—110.
O 3. Ольшанецкий М. А., Переломов А. М. Геодезические потоки на симметрических пространствах нулевой кривизны и явные решения обобщенной модели Калоджеро. — Функц. анал. и его прилож., 1976, т. **10**, вып. 3, с. 86—87.
O 4. Ol'shanetskii M. A. and Perelomov A. M., Explicit Solutions of Classical Generalized Toda Models, Invent. Math. **54** (1979), 261—269.
O 5. Ol'shanetskii M. A. and Perelomov A. M., Explicit Solution of the Calogero Model, Lett. Nuovo Cim. **16** (1976), 333—339.
O 6. Ol'shanetskii M. A. and Perelomov A. M., Explicit Solution of Some Completely Integrable Systems, ibld. **17** (1976), 97—101.

O 7. Ольшанский Г. И. О двойственности Фробениуса. — Функц. анал. и его прилож., 1969, т. 3, вып. 4, с. 49—58.

O 8. Onofri E., A Note on Coherent State Representations of Lie Groups, J. Math. Phys. **16** (1975), 1087—1089.

O 9.. Onofri E. and Pauri M., Analyticity and Quantization, Lett. Nuovo Cim. **3** (1972), 35—42.

O 10. Onofri E. and Pauri M., Dynamical Quantization, J. Math. Phys. **13** (1972), 533—543.

O 11. Onofri E., Quantization Theory for Homogeneous Kähler Manifolds (preprint).

O 12. Osborne M. S., Lefschetz Formulas on Nonelliptic Complexes (thesis, Yale, 1972).

O 13. Ozeki H. and Wakimoto M., On Polarizations of Certain Homogeneous Spaces, Hiroshima Math. J. **2** (1972), 445—482.

P 1. Palais P. S., A Global Formulation of the Lie Theory of Transformation Groups, Mem. Amer. Math. Soc. **22** (1957).

P 2. Parker L., Aspects of Quantum Field Theory in Curved Spacetime: Effective Action and Energy Momentum Tensor, Cargese Lectures (ed. Levy-Deser, Plenum, 1978).

P 3. Parthasarathy R., A Note on the Vanishing of Certain «L^2 Cohomologies», J. Math. Soc. Japan **23** (1971), 676—691.

P 4. Parthasarathy R., Dirac Operators and the Discrete Series, Ann. Math. **96** (1972), 1—30.

P 5. Patodi V. K., Curvature and the Fundamental Solution of the Heat Operator, J. Indian Math. Soc. **34** (1970), 269—285.

P 6. Patodi V. K., Curvature and the Eigenforms of the Laplace Operator, J. Diff. Geom. **5** (1971), 233—249.

P 7. Patterson S. J., The Laplacian Operator on a Riemann Surface, Compositio Math. **31** (1975), 83—107; **32** (1976), 71—112.

P 8. Patterson S. J., On the Cohomology of Fuchsian Groups, Glasgow Math. J. **16** (1975), 123—140.

P 8a. Pauling L. and Wilson E. B., Introduction to Quantum Mechanics, (McGraw-Hill, New York, 1935).

P 8b. Павлов Б. С., Фаддеев Л. Д. Теория рассеяния и автоморфные функции. — Зап. Научн. семин. ЛОМИ, 1972, т. 27, с. 161—193.

P 9. Perelomov A. M., Coherent States for Arbitrary Lie Groups, CMP **26** (1972), 222—236.

P 10. Переломов А. М. Замечание о полноте систем когерентных состояний. — Теор. и матем. физика, 1971, т. **6**, с. 213—224.

P 11. Переломов А. М. Когерентные состояния на плоскости Лобачевского. — Функц. анал. и его прилож., 1973, т. **7**, вып. 3, с. 57—66.

P 12. Perelomov A. M., Schrödinger Equation Spectrum and KdV Type Invariants, Ann. Inst. H. Poincaré **A24** (1976), 161—164.

P 12a. Perelomov A. M., Comm. math. Phys. **64** (1978), 237.

P 13. Perrin F., Ann. Ec. norm. Sup. **45** (1928), 1.

P 14. Pleijel A., A Study of Certain Green's Functions with Applications in Theory of Vibrating Membranes, Ark. f. Mat. **2** (1954), 553—569.

P 15. Preissmann A., Quelques Proprietes globales des espaces de Riemann, Comm. Math. Helv. **15** (1943), 175—216.

P 16. Pukansky L., On the Characters and the Plancherel Formula of Nilpotent Groups, J. Func. Anal. **2** (1967), 255—280.

P 17. Pukansky L., Characters of Algebraic Solvable Groups, ibid. **3** (1969), 435—494.

P 18. Pukansky L., Unitary Representations of Lie Groups with Co-compact Radical and Applications, Trans. Amer. Math. Soc. **236** (1978), 1—50.

R 0a. Ramanujan S., An Application of Morse Theory to Certain Symmetric Spaces, J. Indian Math. Soc. **42** (1968), 243—275.

R 0b. Ramanujan S., Application of Morse Theory to Some Homogeneous Spaces, Tohoku Math. J. **21** (1969), 343—353.
R 0c. Ramanujan S., On Stiefel Manifolds, J. Math. Soc. Japan **2** (1969), 543—548.
R 1. Rawnsley J. H., Some Applications of Quantization (thesis, Oxford, 1972).
R 2. Rawnsley J. H., On the Cohomology Groups of a Polarization and Diagonal Quantization, Trans. Amer. Math. Soc. **230** (1977), 235—255.
R 3. Rawnsley J. H., Coherent State and Kähler Manifolds, Quart. J. Math. **28** (1977), 403—415.
R 4. Rawnsley J. H., DeSitter Symplectic Spaces and their Quantizations, Proc. Camb. Phil. Soc. **76** (1974), 473—480.
R 5. Ray D., On Spectra of Second Order Differential Operators, Trans. Amer. Math. Soc. **77** (1954), 299—321.
R 6. Reeb G., Sur certaines properties topologique des trajectoires des systemes dynamique, Mem. Acad. R. Belgique **27** (1952).
R 7. Reeb G., Varietes de Riemann dont toutes les geodesiques sont fermees, Bull. Cl. Sci. Bruxelles **36** (1950), 324—329.
R 8. Reeb G., Trois problemes de la theorie des systemes dynamique, Colloq. Geom. Diff. Global CBRM (1958), 89—94.
R 9. Renouard P., Varietes symplectiques et quantification, (thesis, Orsay, 1969).
R 10. Reyman A. G. and Semenov-Tian-Shansky M. A., Reduction of Hamiltonian Systems and Affine Lie Algebras, Invent. Math. **53** (1979), 81—100.
R 11. Rieffel M. A., On the Uniqueness of the Heisenberg Commutation Relations, Duke Math. J. **39** (1972), 745—752.
R 11a. Robertson H. P. and Noonan T. W., Relativity and Cosmology (Saunders, Philadelphia, 1968).
R 12. Roelcke W., Das Eigenwerten Problem der Automorphen Formen in der Hyperbolischen Ebene, Math. Ann. **167** (1966), 292—337; **168** (1967), 261—324.
S 0a. Sankaran S., Heisenberg, Commutation Relations and Pontryagin's Duality Theorem, Math. Z. **98** (1967), 387—390.
S 0b. Sankaran S., Imprimitivity and Duality, Bull. Unione Mat. Ital. **7** (1973), 251—259.
S 1. Sasaki S., On the Differential Geometry of Tangent Bundles of Riemann Manifolds, Tohoku Math. J. **10** (1958), 338—354; **14** (1962), 146—155.
S 2. Sasaki S., On Differential Manifolds with Certain Structures which are Closely Related to Almost Contact Structure, ibid. **12** (1960), 459—470.
S 3. Sasaki S., Almost Contact Manifolds (Lecture Notes, Tohoku University, 1965).
S 4. Sasaki S. and Hatakeyama Y., On Differentiable Manifolds with Contact Metric Structure, **14** (1962), 249—271.
S 5. Satake I., On Unitary Representations of a Certain Group Extension, Sugaku, Math. Soc. Japan **21** (1969), 241—253.
S 6. Satake I., Factors of Automorphy and Fock Representations, Adv. Math. **7** (1971), 83—110.
S 7. Satake I., Fock Representations and Theta Functions, in Advances in Theory of Riemann Surfaces, (Princeton University Press, Princeton, 1971), pp. 393—405.
S 8. Satake I., Unitary Representations of a Semidirect Product of Lie Groups on $\bar{\partial}$-Cohomology Spaces, Math. Ann. **190** (1971), 177—202.
S 9. Schmid W., Homogeneous Complex Manifolds and Representations of Semisimple Lie Groups (thesis, University of California, Berkeley, 1967).
S 10. Schmid W., On a Conjecture of Langlands, Ann. Math. **93** (1971), 1—42.

S 11. Schmid W., Some Properties of Square Integrable Representations of Semisimple Lie Groups, Ann. Math. **102** (1975), 535—564.
S 12. Schulman I. S., A Path Integral for Spin, Phys. Rev. **176** (1968), 1558—1569; Phys. Rev. **188** (1969), 1139—1142.
S 13. Schulman I. S., JMP **12** (1971), 304—308.
S 13a. Schulman I. S., Techniques and Applications of Path Integration (Wiley, New York, 1981).
S 14. Schwarzenberger R. L. E., Crystallography in Spaces of Arbitrary Dimension, Proc. Camb. Phil. Soc. **76** (1974), 23—32.
S 15. Schwinger J., On Gauge Invariance and Vacuum Polarization, Phys. Rev. **83** (1951), 664—679.
S 16. Schwinger J., The Theory of Quantized Fields V, Phys. Rev. **93** (1954), 615—628.
S 17. Schwinger J., On the Fuclidean Structure of Relativistic Field Theory, Proc. Nat. Acad. Sci. **44** (1958), 956—965.
S 18. Schwinger J., Euclidean Quantum Electrodynamics, Phys. Rev. **115** (1959), 721—731.
S 19. Seeley R. T., Complex Powers of an Elliptic Operator, Proc. Symp. Pure Math. **10** (1967), 288—307.
S 20. Selberg A., Harmonic Analysis and Discontinuous Groups in Weakly Symmetric Riemannian Spaces with Applications to Dirichlet Series, J Indian Math. Soc. **20** (1956), 47—87. [Имеется перевод: Сельберг А. Гармонический анализ и дискретные группы в слабо симметрических римановых пространствах; приложения к теории рядов Дирихле. — Математика, 1957, 1 : 4, с. 3—28.]
S 21. Selberg A., Automorphic Functions and Integral Operators, Seminars in Analytic Functions, Vol. 2, (1957), pp. 152—161.
S 22. Семенов-Тян-Шанский М. А. О свойствах интеграла Кириллова. — Записки семинаров ЛОМИ, 1973, вып. 37, с. 53—65.
S 22a. Семенов-Тян-Шанский М. А. — Известия АН СССР, сер. матем., 1976, т. **40**, с. 562—592.
S 23. Simms D. J., Geometric Quantization of Energy Levels in the Kepler Problem, Conv. di Geom. Simp. e Fis. Mat. INDAM, Rome (1973).
S 24. Simms D. J. and Woodhouse N. M. J., Lectures on Geometric Quantization, Lecture Notes in Physics **53** (1976).
S 24a. Simon B., The Classical Limit of Quantum Partition Functions, Comm. math. Phys. **71** (1980), 247—276.
S 25. Sniatycki J., Geometric Quantization and Quantum Mechinics, (Springer-Verlag, New York, 1980).
S 26. Souriau J.-M., Structure des Systemes dynamiques (Dunod, Paris, 1970).
S 27. Souriau J.-M.. Sur la varieté de Kepler, Conv. di Geom. Simp. e Fis. Mat. INDAM, Rome (1973).
S 28. Streater R. F., Canonical Quantization, Comm. math. Phys. **2** (1966), 354—374.
S 29. Streater R. F., The Representations of the Oscillator Group, ibid. **4** (1967), 217—236.
S 30. Stripp K. F. and Kirkwood J. C., Asymptotic Expansion of the Partition Function of the Asymmetric Top, J. Chem. Phys. **19** (1951), 1131—1133.
T 1. Tagirov E. A., Consequences of Field Quantization in DeSitter Type Cosmological Models, Ann. Phys. **76** (1973), 561—579.
T 2. Takahashi R., Sur les representations unitaires des groupes de Lorentz generalises, Bull. Soc. math. Fr. **91** (1963), 289—433.
T 2a. Takeuchi M., Cell Decompositions and Morse Equalities on Certain Symmetric Spaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **12** (1965), 81—192.
T 2b. Takeuchi M., Nice Functions on Symmetric Spaces, Osaka J. Math. **6** (1969), 283—288.

T 2c. Takeuchi M. and Kobayashi S., Minimal Imbeddings of R-Spaces, J. Diff. Geom. **2** (1968), 203—215.
T 3. Tamagawa T., On Selberg Trace Formula, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **8** (1960), 363—386.
T 4. Tanno S., A Theorem of Regular Vector Fields, Tohoku Math. J. **17** (1965), 235—238.
T 5. Tanno S., The Topology of Contact Riemannian Manifolds, Ill. J. Math. **12** (1968), 700—717.
T 6. Tanno S., Sasakian Manifolds with Constant φ-holomorphic Sectional Curvature, Tohoku Math. J. **21** (1969), 501—507.
T 7. Takizawa S., On the Contact Structures of Real and Complex Manifolds, Tohoku Math. J. **15** (1963), 227—252.
T 8. Takizawa S., On Soudures of Differentiable Fibre Bundles, J. Math. Kyoto Univ. **2** (1963), 237—276.
T 9. Tirao J. A. and Wolf J. A., Homogeneous Holomorphic Vector Bundles, Indiana Univ. Math. J. **20** (1970), 15—31.
T 10. Tirao J. A., Square Integrable Representations of Semi-Simple Lie Groups, Trans. Amer. Math. Soc. **190** (1974), 57—75.
T 11. Tits J., Sur certaines classes d'espaces homogenes de groupes de Lie, Mem de l'Acad. Royale Belgique **29** (1955).
V 1. Varadarajan V. S., Geometry of Quantum Theory (Van Nostrand, New York, 1970).
V 2. Varadhan S. R. S., On the Behavior of the Fundamental Solution of the Heat Equation, Comm. Pure Appl. Math. **20** (1967), 431—455; 659—685.
V 3. Венков А. Б. Разложения по автоморфным собственным функциям оператора Лапласа — Бельтрами в классических симметрических пространствах ранга один и формула следа Сельберга. — Труды МИАН, 1973, т. **125**, с. 6—55.
V 4. Венков А. Б., Калинин В. А., Фаддеев Л. Д. Неарифметический вывод формулы следа Сельберга для верхней полуплоскости. — Записки научн. семин. ЛОМИ, 1973, т. 37, с. 5—42.
V 5. Венков А. Б. Формула следа Сельберга. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1978, т. **42**, № 3, с. 484—499.
V 6. Vergne M., La structure de Poisson sur l'algebre symetrique d'une algebre de Lie nilpotent, Bull. Soc. Math. Fr. **100** (1972), 301—335.
V 6a. Viney I. E., Asymptotic Expansions of the Expressions for the Partition Function, Proc. Comb. Phil. Soc. **29** (1933), 142—148.
V 7. Виноградов А. М., Купершмидт В. А. Структура гамильтоновой механики. — Успехи матем. наук, 1977, т. 32, вып. 4, с. 175—236.
V 8. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. — М., Наука, 1965.
V 9. Voros A., Semi-Classical Approximations Ann. Inst. H. Poincaré **A24** (1973), 31—90.
V 9a. Voros A., The Zeta Function of the Quartic Oscillator, Nucl. Phys. **B165** (1980), 209—236.
V 9b. Voros A., The return to Quartic Oscillator. The Complex WKB Method., Ann. Inst. A. Poincaré, Sect. A, v. **39**, 1983, 211—338.
W 1. Wallach N. R., On the Selberg Trace Formula in the Case of Compact Quotient, BAMS **82** (1976), 171—195.
W 2. Wallach N. R., An Asymptotic Formula of Gelfand and Gangolli for the Spectrum of $\Gamma\backslash G$, J. Diff. Geom. **11** (1976), 91—101.
W 3. Wallach N. R., Symplectic Geometry and Fourier Analysis (Math. Sci. Press, Brookline, Mass., 1977).
W 4. Wang H. C., Closed Manifolds with Homogeneous Complex Structures, Amer. J. Math. **76** (1954), 1—32.

W 5. Warner G., Harmonic Analysis on Semisimple Lie Groups (Springer-Verlag, New York, 1972).
W 6. Warner G., Selberg Trace Formula for Nonuniform Lattices, the R-Rank One Case, Adv. Math. **6** (1979), 1—142.
W 7. Wawrzynczyk A., Reciprocity Theorems and the Theory of Representations of Groups and Algebras. Diss. Math. **126** (1975).
W 8. Weinstein A., Lectures in Symplectic Manifolds (CBMS, #29, Amer. Math. Soc. Providence, 1977).
W 9. Weyl H., Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenschwingungen eines beliebig gestalteten elastischen Korpers, Rend. Circ. Mat. Palermo **39** (1915), 1—50.
W 10. Weyl H., Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf di Theorie der Hohlraum strahlung), Math. Ann. **71** (1911), 441—469.
W 11. Weyl H., Ramifications, Old and New, of the Eigenvalue Problem, BAMS **56** (1950), 115—139.
W 12. Weyl H,. The Theory of Groups and Quantum Mechanics (Dover, New York, 1931).
W 12a. Wigner E. P., Phys. Rev. **40** (1932), 749.
W 13. Wolf J. Spaces of Constant Curvature (McGraw-Hill, New York, 1967).
W 14. Wolf J. A., A Contact Structure for Odd Dimensional Spherical Space Forms, Proc. Amer. Math. Soc **19** (1968), 196.
W 15. Wolf J. A., Complex Manifolds and Unitary Representations, Lecture Notes in Mathematics **185** (1971), 242—287.
W 16. Wolf J. A., Unitary Representation on Partially Holomorphic Cohomology Spaces, Mem. Amer. Math. Soc. **138** (1974).
W 17. Wolf J. A., The Action of a Real Semisimple Group on a Complex Flag Manifold, Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969), 1121—1237.
W 18. Wolf J. A., Representations Associated to Minimal Coadjoint Orbits, in Lecture Notes in Math. **676** (1978) 328—349.
W 19. Wolf J. A., Remark on Nilpotent Orbits, Proc. Amer. Math. Soc. **51** (1975), 213—216.
W 20. Wolf J. A. Unitary Representations of Maximal Parabolic Subgroups of the Classical Groups, Mem. AMS **180** (1976).
W 21. Wolf J. A., Complex Manifolds and Unitary Representations, in Lecture Notes in Math. **185** (1971), 242—287.
W 22. Wolf J. A., Conformal Group, Quantization and the Kepler Problem, Lecture Notes in Physics **50** (1976), 217—222.
W 23. Wollenberg L. S., Proc. Amer. Math. Soc. **20** (1969), 315.
Y 1. Yosida K., Lectures on Semigroup Theory and its Applications to Cauchy's Problem in Partial Differential Equations (Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1957).
Z 1. Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д. Уравнение КдФ — вполне интегрируемая система. — Функц. анал. и его прил., 1971, т. 5, вып. 4, с. 18—27.

Предметный указатель

Оглавление