

Л.В.Овсянников

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Предмет книги лежит на стыке алгебры и математического анализа. Излагаемая система фактов и алгоритмов открывает возможности эффективного исследования конкретных дифференциальных уравнений, возникающих в качестве математических моделей в физике, механике, теории управления, вычислительной математике и других областях знания. В книге излагается общая теория локальных групп Ли преобразований и алгебр Ли операторов, теория инвариантов и инвариантных многообразий. Рассматриваются вопросы групповой классификации дифференциальных уравнений и их решений. Даются примеры применения техники группового анализа к конкретным системам дифференциальных уравнений.

Содержание

Предисловие	8
Основные обозначения	15

Глава I

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

§ 1. Определения и примеры	18
1. Действие и представление группы (18). 2. Однопараметрическая группа (19). 3. Непрерывность (19). 4. Пример: группа переносов (20). 5. Группы линейных гомеоморфизмов (20). 6. Пример: группа растяжений (21). 7. Пример: группа вращений (21). 8. Локальная теория (22). 9. Локальная группа Ли (23). 10. Пример: проективная группа (23). 11. Подобие групп (24). 12. Пример (24). 13. Касательное векторное поле (25). 14. Уравнение Ли (25). 15. Примеры (26). 16. Подобие касательных полей (27).	
§ 2. Инфинитезимальный оператор	28
1. Задача о построении группы (28). 2. Лемма (28). 3. Теорема Ли (29). 4. Пример построения группы (30). 5. Соответствие групп и векторных полей (30). 6. Оператор группы (31). 7. Примеры (32). 8. Инвариантность оператора (32).	
§ 3. Инварианты и инвариантные многообразия	34
1. Продолжение представления группы (34). 2. Конкомитанты и инварианты (34). 3. Инварианты группы Ли (35). 4. Критерий инварианта (35). 5. Универсальный инвариант (35). 6. Конечномерный случай (38). 7. Примеры инвариантов (39). 8. Теорема о подобию (41). 9. Следствия (42). 10. Инвариантные многообразия (43). 11. Регулярно заданные многообразия (44). 12. Критерий инвариантности (45). 13. Примеры (46).	
§ 4. Теория продолжения	47
1. Пространства полилинейных отображений (47). 2. Продолжения пространства (48). 3. Продолжение операторов дифференцирования (48). 4. Продолжение отображений (49). 5. Продолжение преобразования (50). 6. Основное свойство продолжения (52). 7.	

Продолжение группы (54). 8. Продолжение инфинитезимального оператора (55). 9. Стандартные коммутаторы (56). 10. Конечномерный случай (58). 11. Пример (58). 12. Дифференциальные инварианты (59).

Литература к главе I

60

Глава II

ГРУППЫ, ДОПУСКАЕМЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

§ 5. Определяющие уравнения

63

1. Система дифференциальных уравнений (63). 2. Основное определение (64). 3. Условие инвариантности (64). 4. Определяющие уравнения (66). 5. Основная группа (67). 6. Действие на решениях (68). 7. Производство решений (69). 8. Алгоритм (69). 9. Пример (71).

§ 6. Задача групповой классификации

75

1. Общие соображения (75). 2. Преобразования уравнения (76). 3. Произвольный элемент (77). 4. Преобразования эквивалентности (78). 5. Задача классификации (80). 6. Описание процесса решения (81). 7. Пример: нелинейная теплопроводность (82). 8. Случай линейного уравнения (86).

§ 7. Алгебра Ли операторов

87

1. Коммутатор (87). 2. Действие на отображение (87). 3. Алгебраические свойства (88). 4. Определения (89). 5. Структурный тензор (89). 6. Линейные отображения алгебр Ли (90). 7. Критерий изоморфизма (91). 8. Пример (92). 9. Инвариантность относительно подобия (93). 10. Групповой коммутатор (94). 11. Допускаемые операторы (95). 12. Продолжение коммутатора (96). 13. Допускаемые алгебры Ли (98). 14. Линейные уравнения (99). 15. Абстрактные определяющие уравнения (101).

Литература к главе II

102

Глава III

ОСНОВНЫЕ ГРУППЫ КОНКРЕТНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

§ 8. Обыкновенные дифференциальные уравнения

104

1. Система уравнений первого порядка (104). 2. Определяющие уравнения (104). 3. Анализ общего решения (105). 4. Структура основной алгебры Ли (106). 5. Понижение размерности уравнения (107). 6. Примеры (108). 7. Уравнения высших порядков (109). 8. Уравнение второго порядка (110). 9. Полные системы (113). 10. Заключительные замечания (115).

§ 9. Линейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

116

1. Постановка задачи (116). 2. Инварианты Лапласа (117). 3. Ряд Лапласа (118). 4. Определяющие уравнения (120). 5. Анализ общего решения (122). 6. Классификационная теорема (123). 7. Параболическая нормальная форма (125). 8. Классификация

параболических форм (126). 9. Классификационный результат (128).	
§ 10. Уравнения пограничного слоя	129
1. Описание системы уравнений (129). 2. Предварительная информация об операторе (129). 3. Определяющие уравнения (130). 4. Общее решение (131). 5. Случай заданного давления (131). 6. Групповая классификация (132). 7. Стационарный пограничный слой (137). 8. Групповая классификация (138).	
§ 11. Уравнения газовой динамики	139
1. Описание системы уравнений (139). 2. Определяющие уравнения (140). 3. Ядро основных алгебр Ли (141). 4. Предварительный анализ (142). 5. Групповая классификация (143). 6. Сводка результатов (146).	
Литература к главе III	146
Глава IV ТЕОРИЯ ЛИ	
§ 12. Локальная группа Ли	150
1. Определения (150). 2. Свойства умножения (151). 3. Локальный изоморфизм (152). 4. Уравнение и первая теорема Ли (154). 5. Каноническое умножение (156). 6. Канонический изоморфизм (158). 7. Гомоморфизмы канонических групп (160). 8. Вторая теорема Ли (161). 9. Структурный оператор (162). 10. Банахова алгебра Ли (164). И. Определенность группы ее структурным оператором (165). 12. Третья теорема Ли (166). 13. Пример (169). 14. Аналитичность канонического умножения (170). 15. Ряд Шура — Кэмпбэлла — Хаусдорфа (173). 16. Конечномерный случай (175).	
§ 13. Алгебры Ли	177
1. Определения и примеры (177). 2. Структурные константы (178). 3. Гомоморфизмы (178). 4. Подалгебры (179). 5. Факторалгебра (181). 6. Структурные признаки подалгебр (182). 7. Некоторые классы алгебр Ли (183). 8. Радикал (184). 9. Теорема Леви (185).	
§ 14. Присоединенная алгебра	185
1. Алгебра дифференцирований (185). 2. Естественный гомоморфизм (186). 3. Представление алгеброй Ли операторов (187). 4. Внутренние автоморфизмы (188). 5. Форма Киллинга (190). 6. Структурные свойства (191). 7. Оптимальные системы подалгебр (191). 8. Малые размерности (193). 9. Пример (196).	
§ 15. Соответствие групп и алгебр Ли	199
1. Алгебра Ли группы Ли (199). 2. Подгруппы и подалгебры (201). 3. Нормальные делители и идеалы (202). 4. Центры (204). 5. Факторгруппы и факторалгебры (205). 6. Гомоморфизмы (206). 7. Группы внутренних автоморфизмов (207). 8. Оптимальные системы подгрупп (209).	
§ 16. Группы Ли преобразований	210
1. Определение (210). 2. Касательное отображение (212). 3. Критерий	

точности представления (213). 4. Первая теорема Ли (214). 5. Вторая теорема Ли (215). 6. Третья теорема Ли (216). 7. Каноническая группа второго рода (217). 8. Примеры (219). 9. Подобие групп преобразований (220). 10. Транзитивность[†] (221). 11. Подобие просто транзитивных групп (223). 12. Группы Ли, допускаемые дифференциальными уравнениями (225).

Литература к главе IV

225

Глава V

ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ

§ 17. Инварианты группы преобразований

228

1. Определенный критерий инварианта (228). 2. Полные семейства векторных полей (229). 3. Универсальный инвариант группы (232). 4. Инварианты внутренних автоморфизмов (234). 5. Примеры (235). 6. Инварианты расширений (236).

§ 18. Инвариантные многообразия

238

1. Определение (238). 2. Критерий инвариантности (239). 3. Индуцированная группа (240). 4. Индуцированная алгебра Ли (241). 5. Наименьшие инвариантные многообразия (242). 6. Особые инвариантные многообразия (243). 7. Теорема о представлении (244). 8. Ранг неособого инвариантного многообразия. (245). 9. Пример (246).

§ 19. Инвариантные решения уравнений

247

1. Сводка исходных понятий (247). 2. Определение (248). 3. Необходимые условия (249). 4. Проекции (251). 5. Продолжение инвариантного многообразия (252). 6. Теорема существования (254). 7. Факторсистема (255). 8. Случай разделения переменных (256). 9. Примеры (257). 10. Группы растяжений (258). 11. Теория размерностей (261). 12. Автомодельные решения (264).

§ 20. Классификация инвариантных решений

266

1. Классификация по рангу (266). 2. Орбиты решений (267). 3. Существенно различные решения (267). 4. Свойство факторсистемы (269). 5. Оптимальные системы решений (269). 6. Пример (270).

Литература к главе V

272

Глава VI

ЧАСТИЧНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

§ 21. Ранг и дефект многообразия

275

1. Орбита многообразия (275). 2. Ранги дефект (276). 3. Вычисление дефекта (277). 4. Переход к подгруппе (278). 5. Редукция (279). 6. Существенные параметры (280).

§ 22. Частично инвариантные решения

282

1. Необходимые условия (282). 2. Описание алгоритма (283). 3. Типы частично инвариантных решений (285). 4. Пример (286). 5. Проблема редукции (287). 6. Лемма о ранге (288). 7. Теорема о редукции (290). 8. Примеры (292).

§ 23. Кратные волны	293
1. Квазилинейные системы (293). 2. Решения типа «бегущих волн» (294). 3. Допускаемая группа (296). 4. Подгруппы и их инварианты (296). 5. Простые волны (298). 6. Пример волнового уравнения (301). 7. Двойные волны (301). 8. Пример (305). 9. Уравнения газовой динамики (306).	
Литература к главе VI	308
Глава VII	
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ	
§ 24. Общая теория	311
1. Предварительные соображения (311). 2. Инвариантное дифференцирование (313). 3. Примеры (316). 4. Базис инвариантов (317). 5. Примеры базисов (319). 6. Определяющие уравнения данной группы (320). 7. О бесконечных группах Ли (322). 8. Инварианты бесконечных групп (324). 9. Примеры (326).	
§ 25. Автоморфные системы	328
1. Определение (328). 2. Структура автоморфной системы (328). 3. Построение автоморфных систем (330). 4. Классификация автоморфных систем (332). 5. Пример (333),	
§ 26 Групповое расслоение	334
1. Постановка вопроса (334). 2. Существование группового расслоения (335). 3. Дифференциально-инвариантные решения (336). 4. Пример расслоения (337).	
Литература к главе VII	338
Глава VIII	
СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ	
§ 27. Линейное уравнение второго порядка	340
1. Уравнение и его преобразования (340). 2. Условие инвариантности (341). 3. Определяющие уравнения (344). 4. Ассоциированное риманово пространство (346). 5. Некоторые формулы римановой геометрии (347). 6. Ковариантная форма определяющих уравнений (349). 7. Инварианты уравнения (351). 8. Группы движений (352). 9. Случай группы максимального порядка (353). 10. Группы, допускаемые стандартными уравнениями (355).	
§ 28. Касательные преобразования	357
1. Специальное расширение пространства (357). 2. Основное определение (357). 3. Представление инфинитезимального оператора (359). 4. Приложения (361). 5. Продолжение касательных преобразований (363). 6. Касательные преобразования высших порядков (364). 7. Группы Ли-Бэклунда (365).	
§ 29. Краевые задачи	367
1. Общие соображения (367). 2. Системы первого порядка (368). 3. Инвариантные решения задачи Коши (369). 4. Инвариантность характеристик (371). 5. Инвариантность сильного разрыва (373). 6.	

Уравнения Навье — Стокса (375). 7. Задачи со свободной границей (376).	
§ 30. Законы сохранения	377
1. 0 законах сохранения (377). 2. Инвариантность функционала (378). 3. Основная лемма (380). 4. Теорема Нётер (382). 5. Другие законы сохранения (383). 6. Обращение теоремы Нётер (384). 7. Пример (385).	
Литература к главе VIII	386
Приложение. Таблицы вычисленных основных групп	389

ПРЕДИСЛОВИЕ

Систематическое исследование непрерывных групп преобразований было начато во второй половине прошлого столетия норвежским математиком Софусом Ли (1842—1899). Эти группы, называемые теперь группами Ли, представляют собой объединение в одном объекте алгебраической групповой и топологической структур, взаимно связанных требованием непрерывности операции группового умножения. Можно сказать, что теория групп Ли лежит на стыке двух больших математических дисциплин — алгебры и анализа. В работах Софуса Ли, его учеников и последователей эта теория получила глубокие и плодотворные применения также в различных вопросах геометрии. Вместе с тем значение этой красивой и, в известной мере, законченной теории выходит далеко за рамки ее приложений внутри самой математики. На самом деле непрерывные группы преобразований являются реальными объектами окружающего нас мира, о присутствии которых можно судить по их влиянию на наши представления о его физической структуре. К ним относятся, например, представления об однородности и изотропности пространства и времени, о динамическом подобии явлений, о галилеевой и лоренцевой инвариантности и т. п.

Поскольку математические модели многих явлений реального мира формулируются в виде дифференциальных уравнений, то становится ясным, что одним из наиболее существенных приложений теории групп Ли является их использование в общей теории дифференциальных уравнений. Уместно отметить, что первоначальной целью Софуса Ли было создание теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, аналогичной теории Абеля решения алгебраических уравнений. В этой связи он сформулировал и изучил фундаментальное понятие группы, допускаемой данной системой дифференциальных уравнений. В настоящее время математическое направление, предметом которого является совместное рассмотрение групп Ли преобразований и допускающих эти группы дифференциальных уравнений, получило название группового анализа дифференциальных уравнений.

Одной из основных задач группового анализа дифференциальных уравнений является изучение действия допускаемой данным уравнением (системой уравнений) группы на множестве решений этого уравнения. Действие допускаемой группы вносит в множество решений алгебраическую структуру, которую можно использовать в нескольких целях. Сюда относятся описание общего строения семейства всех решений, выделение определенных классов решений, отыскание которых в каком-либо смысле проще по сравнению с общим решением, производство решений из уже известных и т. д.

Обычно для дифференциальных уравнений, возникающих в какой-либо математической модели класса физических явлений, допускаемая ими группа вместе с моделью не дается. Поэтому принципиально важна чисто техническая задача об отыскании наиболее широкой группы, допускаемой данным дифференциальным уравнением (системой уравнений).

Другая интересная и практически важная задача состоит в использовании техники группового анализа для групповой классификации дифференциальных уравнений. Решение этой задачи представляет не только чисто математический интерес, но имеет также и прикладное значение. Дело в том, что дифференциальные уравнения математической физики часто содержат параметры или функции, которые находятся экспериментально и потому не строго фиксированы (как говорят, являются произвольным элементом). В то же время уравнения математической модели должны быть достаточно просты для того, чтобы их можно было успешно проанализировать и решить. Групповой подход позволяет принять в качестве критерия простоты требование, чтобы произвольный элемент был таким, что с ним моделирующее дифференциальное уравнение допускает группу с определенными свойствами или, вообще, наиболее широкую группу.

Также интересна и полезна задача о преобразованиях данного дифференциального уравнения. Если известна допускаемая группа, то можно с ее помощью искать такие преобразования, чтобы преобразованное уравнение имело по возможности наиболее простую и удобную для отыскания конкретных решений дифференциальную структуру.

Перечисленные выше и некоторые другие, более специальные, задачи образуют обширную область приложения теории и алгоритмов группового анализа дифференциальных уравнений. Методологическая основа для разработки оперативных средств этого направления была создана еще в работах Софуса Ли. С помощью доказанных им основных теорем о соответствии между группами и алгебрами Ли оказывается возможным сводить сложные нелинейные задачи к более простым линейным. Эта типичная для анализа, но необычная для алгебры идея «линеаризации» получила

свое воплощение в создании инфинитезимальной техники исследования. При этом локально действие группы преобразований заменяется действием линейных дифференциальных операторов — инфинитезимальных операторов, образующих алгебру Ли. Существенно, что переход от групп к алгебрам Ли полностью сохраняет алгебраическую структуру изучаемых объектов. Поэтому с его помощью удастся получить мощные инфинитезимальные критерии инвариантности различных объектов относительно непрерывной группы преобразований. Зато конечные преобразования группы (в отличие от инфинитезимальных) восстанавливаются, вообще говоря, неявно, как решения некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений.

Предлагаемая вниманию читателя книга посвящена систематическому изложению аппарата теории групп и алгебр Ли и его использованию для создания алгоритмов решения вышеупомянутых задач группового анализа дифференциальных уравнений. От имеющихся руководств, в которых также рассмотрены вопросы теории и приложений групп Ли, настоящую книгу отличает ряд особенностей, связанных с исходными предпосылками и стилем изложения.

Прежде всего, в духе классической теории, группы Ли, многообразия и другие объекты анализа рассматриваются локально. Локальный подход делает аппарат гибким, свободным для применения и придает ему необходимую общность, поскольку речь идет об анализе произвольных дифференциальных уравнений. Конечно, для того чтобы теория не была формальной, в ряде вопросов локальная точка зрения требует внимательного учета областей определения встречающихся (и возникающих) отображений. Необходимые по этому поводу пояснения даны в тексте первой главы.

Далее, значительное упрощение вносит предположение о бесконечной дифференцируемости рассматриваемых отображений. Все встречающиеся операции над отображениями, в том числе и определение отображения как решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, из этого класса не выводят. В силу известных фактов для групп Ли можно было бы ограничиться предположением об их аналитичности. Но тогда следовало бы предполагать и аналитичность рассматриваемых дифференциальных уравнений и их решений, что не вызывается какой-либо необходимостью. Кроме того, предположение об аналитичности усложнило бы теорию, так как потребовало бы доказательства сходимости рядов Тейлора, изображающих те или иные возникающие отображения.

Следующая особенность состоит в том, что теория Ли излагается как теория банаховых групп и алгебр Ли, когда параметрическое пространство является произвольным банаховым прост-

ранством (вообще говоря, бесконечномерным), причем в основу положен аппарат дифференциальных уравнений. Наряду с этим в теории групп преобразований можно считать произвольным банаховым пространством также и пространство представления (преобразования которого являются элементами группы). Впрочем, достичь полноты теории инвариантов и инвариантных многообразий здесь не удастся, и потому в отдельных вопросах делается предположение о конечномерности пространства представления или параметрического пространства. Кроме того, в случае основного объекта исследования — дифференциального уравнения — пространство представления обычно конечномерно.

В книге излагается вещественный групповой анализ дифференциальных уравнений, т. е. группы и алгебры Ли, банаховы пространства и дифференциальные уравнения рассматриваются над полем вещественных чисел. Необходимое для решения некоторых вспомогательных алгебраических задач привлечение поля комплексных чисел особых трудностей вызвать не может.

Основная особенность стиля изложения определяется принятой векторной (бескоординатной) формой записи величин и соотношений, которая необходима в случае бесконечномерных банаховых пространств. Кроме того, эта форма наилучшим образом подчеркивает свойство независимости векторных величин и соотношений от каких-либо систем координат. Соответственно этому широко употребляется геометрический язык многообразий, их размерностей, рангов линейных отображений и т. п. В отдельных случаях (почти во всех примерах) используется также и координатная запись, но всегда только в одной, удобной для вычислений фиксированной системе координат. Систематическое проведение векторной точки зрения влечет необходимость рассмотрения изменения величин и соотношений при преобразованиях пространства (вместо преобразований координат), на котором они определены. Поэтому в текст вошли формулы, описывающие соответствующее изменение величин и соотношений.

Унификация изложения теории классических конечномерных и бесконечномерных (банаховых) групп Ли потребовала некоторого изменения в терминологии, общепринятой для конечномерного случая. Так, вместо различных систем координат в данной локальной группе Ли рассматривается класс (локально) изоморфных групп Ли, понятие «канонические координаты первого рода» заменено понятием «каноническая группа» и т. д. Целесообразность терминов «каноническая группа» или «каноническое умножение» определяется тем, что они подчеркивают характерные внутренние свойства закона умножения.

Наконец, в книге дается подробное описание основных алгоритмов группового анализа, до которых удастся довести общую теорию. Описание алгоритмов сопровождается иллюстративными

примерами, в которых дифференциальные уравнения берутся, как правило, из механики, а точнее, из гидро- и газодинамики. Конечно, специалисты-гидромеханики извлекут из этих примеров больше информации, чем те, кто не владеет этим предметом. Однако знакомство читателя с гидродинамикой не предполагается, и все требуемые специальные термины и обозначения объяснены в тексте.

Следует отметить, что в книгу вошли далеко не все конструкции и задачи группового анализа. При отборе материала предпочтение давалось тем фактам и алгоритмам, которые достаточно хорошо отработаны и могут быть использованы в приложениях в первую очередь. В этом смысле настоящую книгу следует считать скорее введением в предмет, чем его исчерпывающим изложением. Вот некоторые из теоретических вопросов, освещение которых было бы желательно в более просторном тексте: понятие импримитивности и его применение в задаче классификации подгрупп; метод Картана в теории бесконечных групп и алгебр Ли; общие свойства инвариантности и методы построения абстрактных определяющих уравнений; проблема расширения групп и алгебр Ли; построение и классификация дифференциальных уравнений, инвариантных относительно заданной группы (или данного представления группы); проблема канонической структуры бесконечных групп Ли; инвариантность и приближенное моделирование; групповые основы теории разделения переменных в линейных уравнениях второго порядка.

Из специальных задач, которые остались вне книги, как носящие более узкий характер, можно отметить групповую классификацию Диксона обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, приложение к уравнению С. А. Чаплыгина из газовой динамики, частично инвариантные решения гидродинамических задач с контактными разрывами и т. д. Кроме того, имеется много задач, которые пока еще исчерпывающего решения не получили и находятся «в работе». К ним можно отнести классификацию римановых пространств по группам обобщенных движений, выяснение групповых основ известного принципа Гюйгенса—Адамара, групповой анализ разностных аппроксимаций дифференциальных уравнений, приложения в теории управления, групповой анализ дифференциальных уравнений с помощью групп Ли—Бэклунда и ряд других.

О содержании книги можно судить по достаточно подробному оглавлению, а здесь можно ограничиться описанием ее общей структуры. В основном она построена по индуктивному принципу. Материал первых трех глав связан с использованием только простейшего понятия однопараметрической группы и ее касательного векторного поля (оператора). Этого вполне достаточно для развития главных технических средств группового анализа диф-

ференциальных уравнений — критериев инвариантности и теории продолжения (глава I), для формирования алгоритмов вычисления основной группы и групповой классификации (глава II) и для демонстрации этой техники на конкретных нетривиальных примерах (глава III). По замыслу выделение однопараметрических групп преобразований должно облегчить усвоение материала тем, кто хотел бы поскорее использовать его в «своей» задаче. Алгебраическая структура здесь весьма проста, и лишь в конце главы II появляются алгебры Ли операторов как объекты, естественно возникающие в результате вычислений.

Глава IV необходима для полного осмысления получаемых предшествующими методами результатов и для дальнейшего развития теории. Как уже отмечалось выше, в ней дается нестандартное изложение теории банаховых групп Ли. В основном эта глава посвящена алгебраическим вопросам и только в конце нее дается, теперь уже полная, теория групп Ли преобразований.

Следующие две главы посвящены одному из основных приложений — построению классов частных решений данного дифференциального уравнения с известной допускаемой группой. Последовательно рассмотрены классы инвариантных (глава V) и частично инвариантных (глава VI) решений. Здесь находит применение чисто алгебраическая задача о классификации подгрупп данной группы Ли, которая пока четкого алгоритмического решения не получила. Теория дифференциальных инвариантов, излагаемая в главе VII, развита на инфинитезимальной основе. Особый интерес представляет то, что основной результат — теорема о конечности базиса дифференциальных инвариантов — справедлив и в случае бесконечных групп Ли.

Последняя, восьмая, глава имеет целью дать представление о том, каким образом средства группового анализа используются в различного рода специальных вопросах, связанных с дифференциальными уравнениями. Здесь рассмотрены задачи, имеющие и самостоятельный интерес: групповая классификация линейных уравнений второго порядка, элементы теории касательных преобразований, свойства инвариантности некоторых краевых задач и основы теории законов сохранения для решений вариационных задач. Данный набор задач определился возможностью сформулировать более или менее законченные результаты и в более простом тексте мог бы быть значительно расширен.

В приложении приведены таблицы вычисленных разными авторами основных групп для конкретных систем дифференциальных уравнений, представляющих практический интерес. Этот список наглядно демонстрирует разнообразие прикладных вопросов, в которых находят применение методы группового анализа.

В заключение можно выразить надежду на то, что издание настоящей книги, благодаря ее отличию от имеющихся руководств,

привлечет внимание специалистов и будет способствовать расширению круга исследователей в области группового анализа дифференциальных уравнений. Очевидно, что основные элементы группового анализа целесообразно ввести в программу университетского преподавания.

У читателя книги предполагаются некоторые специальные знания и навыки, впрочем, не выходящие за пределы университетской программы механико-математического факультета в объеме первых двух курсов. Она доступна тем, кто владеет понятиями группы, кольца, поля, отображения, непрерывности, дифференцируемости, а также понятиями векторного и банахова пространств и некоторыми (минимальными) сведениями из теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Встречающиеся в тексте (редкие) ссылки на анализ подразумевают обращение к учебнику Ж. Дьедонне «Основы современного анализа» (М., «Мир», 1964).

В тексте, за редкими исключениями, ссылки на литературу не даются и приоритетные вопросы, как правило, не обсуждаются. Литература приведена в конце глав, отдельно к каждой главе. Эти списки литературы снабжены краткими комментариями, соотносящими цитируемые источники с основным текстом.

Общий план книги детально обсуждался с проф. Н. Х. Ибрагимовым, оказавшим также помощь при отборе материала и обработке отдельных фрагментов. Доц. В. М. Меньшиков внимательно прочел всю рукопись и указал ряд мест, нуждающихся в дополнительной отшлифовке. Э. З. Боровская выполнила большую работу при подготовке рукописи к изданию. Всем упомянутым товарищам автор выражает искреннюю благодарность.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Теоретико-множественные символы:

$\times$	— произведение (банаховых) пространств
$\subset$	— знак включения
$\in$	— знак принадлежности элемента множеству
$\cap$	— пересечение множеств
$\cup$	— объединение множеств
$\rightarrow$	— символ отображения
$f: X \rightarrow Y$	— f есть отображение пространства X в пространство Y
$\otimes$	— тензорное умножение
$\oplus$	— прямая сумма подпространств (подалгебр)
$\circ$	— композиция отображений
$\cdot$	— свертывание тензоров («скалярное умножение»)
$\{ \dots \}$	— множество, характеризуемое стоящими в скобках символами
$\{x S\}$	— множество элементов x , обладающих свойством S
$\langle \rangle$	— угловые скобки используются для обозначения образов при линейных и полилинейных отображениях
B^A	— множество всех отображений $A \rightarrow B$.

Буквенные символы:

$X, Y, \dots$	— банаховы пространства
$x, y, \dots$	— векторы (точки) банаховых пространств (в особых случаях скалярные координаты точки)
$ x $	— норма вектора $x \in X$
X^n	— произведение n экземпляров пространства X
R	— одномерное пространство (или поле) вещественных чисел
$R^n(x)$	— пространство R^n , общий вектор которого есть x
$R^2(t, x)$	— пространство R^2 , в котором декартовы координаты точки суть t и x
$\mathcal{L}(X)$	— пространство непрерывных линейных отображений $X \rightarrow X$
$\mathcal{L}(X; Y)$	— пространство непрерывных линейных отображений $X \rightarrow Y$
I_X	— тождественное отображение пространства X
G	— группа

$GL(X)$	— группа всех линейных гомеоморфизмов пространства X
L	— алгебра Ли
$C_k(V)$	— класс отображений $V \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывно дифференцируемых k раз на множестве V
∂	— символ производной по аргументу, указанному либо в индексе (∂_x), либо после символа отображения ($\partial f(x)$)
D	— оператор полного дифференцирования
$\xi \cdot \partial$	— инфинитезимальный оператор, соответствующий векторному полю (семейству векторных полей) ξ
$\delta_i^j, \delta^{ij}, \dots$	— символы Кронекера
E	— дифференциальное уравнение (система)

Безоговорочно используется правило записи сумм одночленов по повторяющемуся индексу без знака суммы. Такое суммирование предполагается всегда, когда индекс входит один раз как верхний и один раз как нижний, причем множество его значений ясно из контекста.

Если дано отображение $f: X \rightarrow Y$ и $x \in X, y \in Y$, то запись $x \rightarrow f(x)$ или $y = f(x)$ называется формулой действия отображения f и говорится, что отображение f «действует по формуле» $x \rightarrow f(x)$ или $y = f(x)$. Например, композиция $v \circ u$ отображений $u: X \rightarrow Y$ и $v: Y \rightarrow Z$ действует по формуле $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.

Пункты имеют независимую нумерацию внутри каждого параграфа. Теоремы, леммы и т. д. отдельно не нумеруются, так как каждый пункт содержит, как правило, только одну теорему, лемму и т. д. Ссылка на теорему из § 12 пункта 9 обозначается как «теорема 12.9». Формулы внутри данного параграфа нумеруются двойным индексом в скобках, первое число которого есть номер пункта, а второе — номер формулы в данном пункте, например (5.3) означает формулу 3 из пункта 5. При ссылках на формулы других параграфов перед номером формулы ставится номер параграфа, например, 7 (3.1) означает формулу (3.1) из § 7.

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Многие элементы группового анализа связаны с рассмотрением однопараметрических групп преобразований, которым посвящена эта глава. Исходным является понятие однопараметрической непрерывной локальной группы Ли локальных преобразований некоторого банахова пространства (коротко называемой группой G^1).

Банаховы пространства берутся в качестве множества — носителя представления ввиду того, что на таких пространствах обычно задаются дифференциальные уравнения. При этом оказывается неудобным ограничиваться преобразованиями какого-либо множества или многообразия на себя. Вместе с тем локальным преобразованием просто оперировать лишь тогда, когда оно индивидуально. Но уже в вопросах, связанных с композициями нескольких локальных преобразований с различными областями определения, имеются определенные трудности. Здесь «выручает» свойство непрерывной зависимости преобразования от группового параметра, благодаря которому при малых изменениях параметра происходит также малое смещение области определения преобразования и гарантируется непустота пересечения прообраза с образом. При этом необходимо внимательно следить за областями определения и значения преобразований. Обычно этот момент в теории опускается, что делает ее «формальной», хотя на самом деле никакого формализма нет. По этому поводу можно принять соглашение о проведении рассуждений в «забытых терминах», т. е. так, как будто преобразования определены и обладают нужными свойствами на всем банаховом пространстве. Достаточно ясна также и необходимость рассмотрения лишь локальных групп преобразований. Только на их основе удастся построить и обосновать достаточно общую теорию и эффективные алгоритмы.

Изучение групп G^1 тесно связано с векторными полями на банаховых пространствах. Здесь существенно понятие касательного векторного поля группы G^1 , с помощью которого эта группа задается сравнительно простым обыкновенным дифференциальным уравнением Ли. На протяжении всей книги используется вводимое в этой главе понятие инфинитезимального оператора (коротко, просто оператора), эквивалентное понятию векторного поля.

Важным теоретическим фактом является взаимно однозначное соответствие групп G^1 и их операторов.

Далее, для групп G^1 изучаются фундаментальные понятия инвариантности отображения и многообразия относительно преобразований. Наиболее важны доказываемые в этой главе инфинитезимальные критерии инвариантности, позволяющие как бы «линеаризовать» те или иные задачи. Новым моментом является введение понятия универсального инварианта, которое, несмотря на свою простоту и полезность, раньше в литературе не встречалось. Существование универсального инварианта доказано в наиболее общем виде — для групп G^1 преобразований произвольного банахова пространства.

Принципиальным элементом группового анализа дифференциальных уравнений является теория продолжения. Она связана с необходимостью рассмотрения преобразований произведения двух банаховых пространств, сомножителями которого являются пространства независимых и зависимых переменных, участвующих в дифференциальных уравнениях. Помимо рабочих формул продолжения преобразований, отображений и операторов, используемых в конкретном счете, здесь устанавливается и важное для теории свойство перестановочности операций продолжения и композиции преобразований. Новым фактом является вычисленная общая форма стандартных коммутаторов, которые используются в последующих главах.

§ 1. Определения и примеры

1. Действие и представление группы. Пусть M — множество. *Преобразованием множества M называется взаимно однозначное отображение M на M .* Совокупность $\tau(M)$ всех преобразований множества M образует группу, в которой роль групповой операции («умножения») играет композиция отображений, а роль «единицы» — тождественное преобразование I_M . *Группа $\tau(M)$ называется группой преобразований множества M .*

Пусть G — группа. *Представлением группы G в $\tau(M)$ называется групповой гомоморфизм $\pi: G \rightarrow \tau(M)$.* Это означает, что для каждого элемента $g \in G$ образ $\pi(g)$ есть преобразование множества M и для любых $g_1, g_2 \in G$ справедливо равенство

$$\pi(g_1) \circ \pi(g_2) = \pi(g_1 g_2). \quad (1.1)$$

Образ $\pi(G)$ группы G есть подгруппа группы $\tau(M)$, которая также называется представлением группы G в виде группы преобразований множества M .

Отображение $(x, g) \rightarrow \pi(g)(x)$ произведения $M \times G$ в множество M называется действием группы G на множестве M . Задание действия определяет на множестве M групповую струк-

туру. В дальнейшем всюду, где это не будет приводить к недоразумению, действие будет обозначаться той же буквой, что и представление, так что $\pi(x, g) = \pi(g)(x)$.

Представление $\pi: G \rightarrow \tau(M)$ называется *точным* (или *изоморфным*), если отображение π является изоморфизмом. Представление π является *точным*, если и только если равенство $\pi(g) = I_M$ справедливо лишь для единичного элемента e группы G . Представление (или действие) π называется *тривиальным*, если $\pi(g) = I_M$ для любого элемента $g \in G$.

2. Однопараметрическая группа. В дальнейшем роль множества M будет играть некоторое банахово пространство X (не обязательно конечномерное) и будут рассматриваться представления группы R всех вещественных чисел с групповой операцией — сложением (аддитивной группы R) в группе $\tau(X)$ преобразований пространства X . В этом случае представление $f: R \rightarrow \tau(X)$ будет называться *локально точным*, если найдется такой симметричный относительно нуля интервал $\Delta \subset R$, что для $a \in \Delta$ равенство $f(a) = I_X$ возможно, только если $a = 0$.

Локально точное представление $f: R \rightarrow \tau(X)$ называется однопараметрической группой преобразований пространства X .

В дальнейшем образ точки $a \in R$ при представлении $f: R \rightarrow \tau(X)$ будет обозначаться символом f_a . Для каждого $a \in R$ этот образ есть преобразование f_a пространства X .

Соответствующее этому представлению действие f группы R на пространстве X определяется формулой $f(x, a) = f_a(x)$. Итак, согласно данным определениям, действие f задает однопараметрическую группу $f(R)$ преобразований f_a пространства X . При этом групповые свойства представления $f(R)$ равносильны следующим свойствам отображения f :

- 1°. $f(x, 0) = x$ для любого $x \in X$;
- 2°. $f(f(x, a), b) = f(x, a + b)$ для любых $a, b \in R, x \in X$;
- 3°. Существует такой симметричный относительно нуля интервал $\Delta \subset R$, что если $a \in \Delta$ и $f(x, a) = x$ для всех $x \in X$, то $a = 0$.

Каждое отображение $f: X \times R \rightarrow X$ со свойствами 1°—3° задает однопараметрическую группу $f(R)$ преобразований пространства X .

3. Непрерывность. Пусть даны банаховы пространства Y и Z и открытое множество $U \subset Y$. Отображение $u: Y \rightarrow Z$ называется *отображением класса $C_0(U)$, $C_k(U)$ ($k=1, 2, \dots$), $C_\infty(U)$ или $C_A(U)$* , если его сужение на U , т. е. отображение $u: U \rightarrow Z$, соответственно непрерывно, k раз непрерывно дифференцируемо, бесконечно дифференцируемо или аналитично на U .

Группа $f(R)$ называется *непрерывной группой класса C_k ($0 \leq k \leq \infty$)* или *класса C_A* , если отображение $f: X \times R \rightarrow X$

принадлежит соответственно к классу $C_k(X \times R)$ ($0 \leq k \leq \infty$) или к классу $C_A(X \times R)$.

В дальнейшем однопараметрическая непрерывная группа преобразований пространства X будет обозначаться символом G^1 . При необходимости подчеркнуть, что рассматриваемая группа G^1 порождена отображением $f: X \times R \rightarrow X$, будет использоваться символ $G^1(f)$. Отображение f будет записываться формулой вида

$$x' = f(x, a).$$

4. Пример: группа переносов. Пусть $x_0 \in X$ — фиксированный ненулевой вектор. Определенное формулой

$$x' = x + ax_0 \quad (x \in X, a \in R)$$

отображение f порождает однопараметрическую непрерывную группу преобразований пространства X , которая будет называться *группой переносов* (говорят также: *трансляций* или *сдвигов*) в направлении вектора x_0 . Выполнение свойств 2.1°—3° проверяется элементарно.

5. Группы линейных гомеоморфизмов. Линейные непрерывные обратимые преобразования пространства X образуют группу $GL(X)$ линейных гомеоморфизмов пространства X . Возникает задача: найти все непрерывные группы $G^1 \subset GL(X)$ класса C_1 .

Каждая такая группа определяется заданием представления $l: R \rightarrow GL(X)$ и порождается отображением

$$x' = l(a)\langle x \rangle \quad (x \in X, a \in R).$$

Для выполнения свойств 2.1°—3° необходимо, чтобы были справедливы равенства $l(0) = I_X$ и $l(b) \circ l(a) = l(b+a)$. Кроме того, отображение l должно быть дифференцируемым. В частности, существует производная $\partial l(0) = u$, которая является фиксированным линейным отображением $X \rightarrow X$. В результате дифференцирования равенства $l(b+a) = l(b) \circ l(a)$ по параметру b в точке $b=0$ получается соотношение

$$\partial l(a) = u \circ l(a). \quad (5.1)$$

Теперь задача сводится к построению решения l уравнения (5.1) при начальном условии $l(0) = I_X$. Это есть задача Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения, решение которой хорошо известно: оно дается формулой

$$l(a) = \exp(au) \quad (a \in R).$$

Эта формула и решает поставленную задачу: однопараметрические группы $G' \subset GL(X)$ получаются, когда линейное отображение u пробегает пространство $\mathcal{L}(X)$.

Дальнейшие примеры относятся к случаю конечномерного X . Если $\dim X = n$, то в каждой декартовой системе координат, в которой $x = (x^1, \dots, x^n)$, линейному отображению $u \in \mathcal{L}(X)$ со-

ответствует квадратная $n \times n$ матрица (u) . Пусть $(u)^*$ есть транспонированная матрица (u) . Отображение u называется *симметричным*, если матрица (u) симметрична, т. е. $(u)^* = (u)$, и *антисимметричным*, если матрица (u) антисимметрична, т. е. $(u)^* = -(u)$.

6. Пример: группа растяжений. Пусть линейное отображение u симметрично. Тогда найдется такая система координат $x = (x^1, \dots, x^n)$, в которой матрица (u) *диагональна*, т. е. $(u) = \text{diag}(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$ (так обозначается матрица, в которой все элементы равны нулю, кроме элементов главной диагонали, равных $\lambda^1, \dots, \lambda^n$). Соответствующая матрица $l(a) = \exp(au)$ также диагональна, а именно $(l(a)) = \text{diag}(\exp(\lambda^1 a), \dots, \exp(\lambda^n a))$. Поэтому порождающее группу G^1 отображение будет иметь вид

$$x^{i'} = x^i \exp(\lambda^i a) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Для каждого $a \in R$ соответствующее преобразование пространства X называется *растяжением*. Итак, каждое симметричное отображение $u \in \mathcal{L}(X)$ определяет некоторую группу растяжений G^1 пространства X .

Необходимо заметить, что представление группы G^1 в виде группы растяжений зависит от выбора системы координат в пространстве X . Несмотря на это, понятие группы растяжений полезно для приложений к конкретным дифференциальным уравнениям, которые обычно рассматриваются в фиксированной системе координат.

7. Пример: группа вращений. Пусть теперь u антисимметрично. Тогда линейное преобразование $l(a)$ будет обладать следующим свойством:

$$l(a)^* = \exp(au^*) = \exp(-au) = l(a)^{-1},$$

т. е. $l(a)^* \circ l(a) = I$. Такие преобразования называются *ортогональными*.

В случае $n=3$ ортогональные преобразования называются также *вращениями*. Здесь антисимметричное преобразование u наверное имеет собственный вектор $z \in X$, для которого $u \langle z \rangle = 0$. Тогда $l(a) \langle z \rangle = \exp(au) \langle z \rangle = z$ для любого $a \in R$ и найдется такая система координат, в которой $x = (x^1, x^2, x^3)$, что будет $z = (0, 0, 1)$. В этой системе координат матрица $(l(a))$ такова:

$$(l(a)) = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ей соответствует группа G^1 вращений вокруг оси (x^3) , определяемой вектором z , которая дается формулами

$$x^{1'} = x^1 \cos a - x^2 \sin a, \quad x^{2'} = x^1 \sin a + x^2 \cos a, \quad x^{3'} = x^3.$$

На этом примере видно, что введение интервала Δ в условие нетривиальности представления 2.3° существенно. В данном случае можно взять $\Delta = (-\pi, \pi)$.

8. Локальная теория. Для целей группового анализа класс однопараметрических групп оказывается слишком узким. Дело в том, что групповой анализ связан с решением нелинейных задач, когда возникают порождающие отображения f , вообще говоря, не определенные на всем пространстве $X \times R$. Расширение класса однопараметрических групп достигается за счет сужения множества, на котором рассматривается порождающее отображение. В качестве такого множества обычно берется $V \times \Delta$, где V — некоторое открытое множество в X , а Δ — некоторый симметричный (относительно нуля) интервал из R . В соответствии с этим выполнение свойств 2.2° и 2.3° для отображения $f: X \times R \rightarrow X$ класса $C_\infty(V \times \Delta)$ требуется только для $x \in V$ и $a, b, a+b \in \Delta$. Получаемое на этом пути расширение класса однопараметрических групп позволяет не интересоваться свойствами составляющих группу преобразований вне множества V и для значений параметра a , выходящих за пределы интервала Δ . Теория, основанная на таком расширении класса однопараметрических групп, называется *локальной теорией*.

Более того, в локальной теории от порождающего отображения f , вообще говоря, не требуется, чтобы оно было определено вне множества $V \times \Delta$. При этом естественно возникает задача о продолжении отображения f , первоначально заданного и обладающего свойствами 2.1°—3° лишь на множестве $V \times \Delta$, до некоторого отображения $X \times R \rightarrow X$ с теми же свойствами на всем пространстве $X \times R$. Эта интересная задача выходит, однако, за рамки локальной теории и здесь рассматриваться не будет.

Стоит отметить только, что всегда можно упомянутое отображение $f: V \times \Delta \rightarrow X$ продолжить до некоторого отображения $\hat{f}: X \times R \rightarrow X$, порождающего однопараметрическое семейство преобразований пространства X , действующих по формуле $\hat{f}_a(x) = f(x, a)$. Разумеется, такое продолжение не однозначно. Тем не менее этот факт показывает, что в локальной теории фактически сохраняются два существенных свойства однопараметрических групп: ее объектами являются преобразования пространства X и их совокупность образует однопараметрическое семейство.

Итак, локальная теория имеет дело с *локальными преобразованиями пространства X* . Этим термином называются преобразования открытых множеств $V \subset X$, т. е. такие отображения $v: V \rightarrow X$, для которых $v(V)$ открыто в X и отображение $v: V \rightarrow v(V)$ является взаимно однозначным.

Пусть Δ — интервал в R , симметричный относительно нуля. Отображение $f: V \times \Delta \rightarrow X$ называется *однопараметрическим семейством локальных преобразований* пространства X , если для

каждого $a \in \Delta$ частное отображение $f_a: V \rightarrow X$ является преобразованием открытого множества V .

9. Локальная группа Ли. Следующее определение фиксирует объект, который составляет основу развиваемого в дальнейшем группового анализа.

Локальной однопараметрической группой Ли локальных преобразований пространства X называется такое однопараметрическое семейство локальных преобразований $f: V \times \Delta \rightarrow X$, которое обладает следующими свойствами:

- 1°. $f(x, 0) = x$ для любого $x \in V$.
- 2°. $f(f(x, a), b) = f(x, a + b)$ для любых $a, b, a + b \in \Delta, x \in V$.
- 3°. Если $a \in \Delta$ и $f(x, a) = x$ для всех $x \in V$, то $a = 0$.
- 4°. $f \in C_\infty(V \times \Delta)$.

Сравнение с данным в 1.2, 1.3 определением однопараметрической группы преобразований пространства X показывает, что каждая такая группа является локальной однопараметрической группой Ли локальных преобразований пространства X . Поэтому в последующем изложении локальная однопараметрическая группа Ли локальных преобразований пространства X будет обозначаться также символом G^1 и, для краткости, будет называться просто *группой G^1* .

Отсутствие в обозначении группы G^1 множеств V и Δ объясняется тем, что они с точки зрения локальной теории играют служебную роль и их конкретизация не очень существенна. Например, если рассмотреть сужение f' порождающего отображения f на подмножество $V' \times \Delta'$, где $V' \subset V$ и $\Delta' \subset \Delta$, то отображение $f': V' \times \Delta' \rightarrow X$ также будет обладать всеми свойствами 1°—4°. В локальной теории группы, порожденные отображениями f и f' , не различаются. Поэтому локальная теория фактически оперирует с классами неразличимых групп. Хотя было бы не очень трудно дать соответствующие точные определения и ввести группы G^1 как классы неразличимых групп, для формирования алгоритмов группового анализа особой необходимости в этом нет.

Данное определение и последующие соображения показывают, что порождающее группу G^1 отображение $f: V \times \Delta \rightarrow X$ можно назвать также *локальным действием* аддитивной группы R на пространстве X . При этом группа G^1 может рассматриваться как представление $f(\Delta) \subset \tau(X)$, элементами которого являются локальные преобразования $f_a: V \rightarrow X$ пространства X . Эта терминология будет использоваться в дальнейшем.

10. Пример: проективная группа. На плоскости $R^2(x, y)$ рассматривается однопараметрическое семейство локальных преобразований $V \times \Delta \rightarrow R^2$, где V есть полоса $\{(x, y) \mid |x| < 1, y \in R\}$ и $\Delta = (-1, 1)$, порожденное отображением

Легко проверить, что все свойства 9.1°—4° выполнены, следовательно, данное отображение порождает группу G^1 . Вместе с тем, выйти за пределы множества $V \times \Delta$ без нарушения какого-либо из этих свойств здесь невозможно. Этот пример показывает, что достигаемое в локальной теории расширение класса однопараметрических групп преобразований существенно.

Данная группа G^1 является примером группы проективных преобразований плоскости R^2 .

11. Подобие групп. Пусть $\pi: M \times G \rightarrow M$ — действие группы G на множестве M и $p: M \rightarrow M$ — некоторое преобразование множества M . Легко проверяется, что отображение $\pi_1: M \times G \rightarrow M$, определенное формулой

$$\pi_1(g) = p \circ \pi(g) \circ p^{-1}, \quad (11.1)$$

также задает действие группы G на M . Очевидно, что заданное формулой (11.1) отношение $\pi_1 \sim \pi$ есть теоретико-множественный признак эквивалентности.

Если действия π_1 и π_2 группы G на множестве M эквивалентны, т. е. находятся в отношении $\pi_1 \sim \pi_2$, то им соответствующие представления $\pi_1(G)$ и $\pi_2(G)$ в группе $\tau(M)$ называются *подобными*.

Эта терминология переносится и на группы G^1 , поскольку их можно рассматривать как локальные представления аддитивной группы R в $\tau(X)$ (см. 1.9). Так как элементами групп G^1 являются локальные преобразования пространства X , то для точного определения понятия подобия таких групп следует учитывать те открытые множества, на которых определены соответствующие порождающие отображения.

Пусть отображение $f_i: V_i \times \Delta_i \rightarrow X$ порождает группу G_i^1 ($i = 1, 2$). Рассматривается совокупность $H(V_1, V_2)$ всевозможных преобразований класса C_∞ множества V_1 на множество V_2 , т. е. таких взаимно однозначных отображений $p: V_1 \rightarrow V_2$, для которых $p \in C_\infty(V_1)$, $p^{-1} \in C_\infty(V_2)$. Пусть, наконец, f_{ia} — элементы группы G_i^1 как представления $f_i(\Delta_i)$ ($i = 1, 2$).

Группы G_1^1 и G_2^1 называются *подобными*, если существует преобразование $p \in H(V_1, V_2)$ и интервал $\Delta \subset \Delta_1 \cap \Delta_2$, с которыми для всех $a \in \Delta$ справедливо равенство

$$f_{2a} = p \circ f_{1a} \circ p^{-1}. \quad (11.2)$$

12. Пример. Группа растяжений G_1^1 , как представление $f_1(R)$ в $\tau(X)$, действует в системе координат $x = (x^1, \dots, x^n)$ по формуле (см. 1.6):

$$f_{1a}^i(x) = x^i \exp(a\lambda^i) \quad (i = 1, \dots, n)$$

и рассматривается на множестве $V = \{x | x^i > 0 \ (i = 1, \dots, n)\}$ В той же системе координат преобразование $p: V \rightarrow X$ задается

формулами

$$p^i(x) = \ln x^i, \quad p^{-1}(x) = \exp x^i \quad (i = 1, \dots, n).$$

С помощью преобразования p по формуле (11.2) получается подобная группа G_2^1 как представление $f_2(K)$, элементы которого определяются равенством

$$x' = f_{2*}(x) = p \circ f_{1*} \circ p^{-1}(x).$$

Вычисление дает

$$\begin{aligned} x'^i &= \ln((f_{1*} \circ p^{-1})^i(x)) = \ln(f_{1*}^i(p^{-1}(x))) = \\ &= \ln(p^{-1i}(x) \exp(a\lambda^i)) = \ln((\exp x^i) \exp(a\lambda^i)) = x^i + a\lambda^i. \end{aligned}$$

т. е. в векторной записи $x' = x + a\lambda$, где $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^n)$ — фиксированный вектор пространства X . Следовательно, группа G_2^1 есть группа переносов пространства X . Тем самым показано, что группа растяжений пространства X подобна группе переносов пространства X .

13. Касательное векторное поле. Пусть дана группа G^1 , порожденная отображением $f: V \times \Delta \rightarrow X$. Для каждого фиксированного $x \in V$ частное отображение $f_x: \Delta \rightarrow X$ определяет некоторую кривую в пространстве X , проходящую через точку x , т. е. одномерное многообразие $f_x(\Delta)$, заданное параметрически уравнением $x' = f_x(a) = f(x, a)$. Кривая $f_x(\Delta)$ называется *орбитой точки x* .

Вектор $\xi = \partial f_x(0)$ является касательным к орбите $f_x(\Delta)$ в точке x . Тем самым на V определено *векторное поле* $\xi: V \rightarrow X$, действующее по формуле

$$\xi(x) = \partial_a f(x, 0). \quad (13.1)$$

Это векторное поле будет называться *касательным векторным полем группы G^1* .

Связь между группой G^1 и ее касательным векторным полем оказывается более тесной, чем данная только определением (13.1). На самом деле группа вполне определяется ее касательным векторным полем. Этот факт будет установлен в дальнейшем на основе специального дифференциального уравнения группы G^1 .

14. Уравнение Ли. Дифференцирование равенства 9.2° по параметру b в точке $b=0$ с учетом того, что в силу определения (13.1)

$$\partial_b f(f(x, a), 0) = \xi(f(x, a)) = \xi \circ f(x, a),$$

получается новое равенство

$$\partial_a f(x, a) = \xi \circ f(x, a). \quad (14.1)$$

Вместе с равенством $f(x, 0) = x$ (свойство 9.1°) это показывает, что для каждого $x \in V$ частное отображение $f_x: \Delta \rightarrow X$

является решением следующей задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с искомым отображением $x': R \rightarrow X$

$$\partial_a x' = \xi(x'), \quad x'(0) = x. \quad (14.2)$$

Уравнение (14.2) называется **уравнением Ли**. Простой пример конкретного уравнения Ли уже встречался в виде соотношения (5.1).

В случае конечномерного (n -мерного) пространства X в системе координат $x = (x^1, \dots, x^n)$ уравнение (14.2) принимает вид системы скалярных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^{i'}}{da} = \xi^i(x^1, \dots, x^n), \quad x^{i'}(0) = x^i \quad (i = 1, \dots, n), \quad (14.3)$$

где $\xi^i(x^1, \dots, x^n)$ — значения координат векторного поля $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ в точке x .

Уравнение Ли служит в качестве одного из основных инструментов группового анализа. Как будет показано дальше, с его помощью устанавливается взаимно однозначное соответствие между группами G^1 и их касательными векторными полями. Именно этот факт является решающим во всех приложениях теории групп Ли (в том числе и к дифференциальным уравнениям), так как он позволяет формировать четкие алгоритмы выявления и использования групповых свойств рассматриваемых объектов. За счет перехода от группы G^1 к ее касательному векторному полю многие задачи линеаризуются, что и создает возможности эффективного исследования проблем группового анализа.

15. Примеры. Касательные векторные поля групп G^1 , рассмотренных в пп. 4, 5, 6, 7 и 10, находятся непосредственно по формуле (13.1).

Для группы переносов (см. 1.4), очевидно, $\xi = x_0$ есть постоянное векторное поле. Когда x_0 пробегает все пространство X , то получается семейство постоянных векторных полей.

Для группы G^1 линейных гомеоморфизмов пространства X , порожденной отображением $x' = \exp(au)\langle x \rangle$ (см. 1.5), получается

$$\xi(x) = u\langle x \rangle, \quad (15.1)$$

где $u \in \mathcal{L}(X)$ — постоянное линейное отображение $X \rightarrow X$. Когда u пробегает все пространство $\mathcal{L}(X)$, формула (15.1) дает семейство линейных векторных полей на пространстве X .

Группа растяжений n -мерного пространства $X = R^n(x^1, \dots, x^n)$ задана формулами $x'^i = x^i \exp(\lambda^i a)$ (см. 1.6). Для ее касательного векторного поля, записанного в той же системе координат в виде $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$, получается $\xi^i = \lambda^i x^i$ для каждого $i = 1, \dots, n$ (по i

суммировать не надо) или, в векторной записи,

$$\xi(x) = (\lambda^1 x^1, \dots, \lambda^n x^n). \quad (15.2)$$

Когда числа λ^i пробегают независимо друг от друга все множество R , формула (15.2) дает n -параметрическое семейство касательных полей растяжений n -мерного пространства X в системе координат $x = (x^1, \dots, x^n)$.

В случае группы вращений вокруг оси (x^3) (см. 1.7) для вектора $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ в системе координат $x = (x^1, x^2, x^3)$ формула (13.1) дает $\xi^1 = -x^2$, $\xi^2 = x^1$, $\xi^3 = 0$ или, в векторной записи,

$$\xi(x) = (-x^2, x^1, 0). \quad (15.3)$$

Для проективной группы на плоскости $R^2(x, y)$ (см. 1.10) вычисление вектора $\xi = (\alpha, \beta)$ дает $\alpha = x^2$, $\beta = xy$ или, в векторной записи,

$$\xi(x, y) = (x^2, xy). \quad (15.4)$$

Здесь, в отличие от предыдущих примеров, касательное векторное поле ξ является квадратичным (второй степени) относительно координат точки (x, y) .

16. Подобие касательных полей. При переходе от группы $G_1^1(f_1)$ к ей подобной группе $G_2^1(f_2)$ с помощью преобразования p (см. 1.11) касательное векторное поле ξ_1 группы G_1^1 преобразуется в касательное векторное поле ξ_2 группы G_2^1 . Для вывода соответствующей формулы перехода $\xi_1 \rightarrow \xi_2$ надо дифференцировать равенство (11.2) по параметру a в точке $a = 0$. В силу определения (13.1), с учетом равенства $f(x, 0) = x$, это дает

$$\xi_2(x) = \partial p(p^{-1}(x)) \langle \xi_1(p^{-1}(x)) \rangle$$

или, в более простой записи, окончательно

$$\xi_2(x) = \partial p(x) \langle \xi_1(x) \rangle, \quad x = p(x). \quad (16.1)$$

Формула (16.1) будет называться *формулой подобия векторных полей*.

Например, при переходе от группы растяжений G_1^1 к ей подобной с помощью преобразования p из 1.12, производная $\partial p(x)$ в матричной записи имеет вид

$$(\partial p(x)) = \text{diag}\left(\frac{1}{x^1}, \dots, \frac{1}{x^n}\right).$$

Поэтому формула (16.1) дает

$$\xi_2(x) = \partial p(x) \langle (\lambda^1 x^1, \dots, \lambda^n x^n) \rangle = (\lambda^1, \dots, \lambda^n) = \lambda,$$

т. е. постоянное касательное векторное поле группы переносов.

§ 2. Инфинитезимальный оператор

1. Задача о построении группы. В связи с определением 1.13 возникает вопрос: в какой мере группа G^1 определяется ее касательным векторным полем ξ ? Более широкая постановка вопроса приводит к следующей задаче: дано векторное поле $\xi: V \rightarrow X$ класса $C_\infty(V)$; требуется выяснить, существует ли группа G^1 , для которой данное ξ является ее касательным векторным полем.

Решение этой задачи основано на использовании уравнения Ли 1 (14.2). Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что если данное векторное поле $\xi: V \rightarrow X$ непрерывно дифференцируемо на V , то решение задачи Коши 1 (14.2) существует и единственно для любого $x \in V$. Это решение задает отображение $f: V \times R \rightarrow X$, определенное и непрерывно дифференцируемое в некоторой окрестности точки $(x, 0) \in V \times R$, действующее по формуле $x' = f(x, a)$.

2. Л е м м а. Пусть $x' = f(x, a)$ есть решение задачи 1 (14.2) с непрерывно дифференцируемым на V векторным полем $\xi: V \rightarrow X$. Тогда для любой точки $x_0 \in V$ найдутся такие шар $B(x_0, r) \subset V$, симметричный интервал $\Delta \subset R$ и число $\nu > 0$, что для всех $(x, a) \in B(x_0, r) \times \Delta$ выполнено неравенство

$$|f(x, a) - x| \geq |a| |\xi(x)| - \nu |a|^2 \quad (2.1)$$

и для любого $a \in \Delta$ отображение $f_a: V \rightarrow X$ является взаимно однозначным отображением шара $B(x_0, r)$ на $f_a(B(x_0, r))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу непрерывности отображения f и равенства $f(x, 0) = x$ для любого $r_1 > 0$ можно так выбрать число $r < r_1$ и интервал $\Delta \subset R$, что для всех $(x, a) \in B(x_0, r) \times \Delta$ будет справедливо неравенство $|f(x, a) - x_0| < r_1$. Далее, в силу предположений о векторном поле ξ можно так выбрать число r_1 , чтобы оба отображения ξ и $\partial \xi$ были ограничены на шаре $B(x_0, r_1)$. При этих условиях вычисленная в силу уравнения 1 (14.2) вторая производная

$$\partial_a^2 f(x, a) = \partial \xi(f(x, a)) \langle \xi(f(x, a)) \rangle$$

будет ограничена на множестве $B(x_0, r) \times \Delta$. Поэтому на том же множестве ограничено и отображение ϕ , участвующее в формуле Тейлора

$$f(x, a) = x + a\xi(x) + a^2\phi(x, a), \quad (2.2)$$

например, $|\phi(x, a)| < \nu$. Теперь неравенство (2.1) следует непосредственно из формулы (2.2).

Далее, производная $g(a) = \partial f_a(x_0)$ существует как решение задачи Коши, получаемой дифференцированием уравнений 1(14.2)

$$\partial g(a) = \partial \xi(f_a'(x_0)) \circ g(a), \quad g(0) = I_x.$$

Поэтому для определенного выше интервала Δ отображение $g: \Delta \rightarrow \mathcal{L}(X)$ непрерывно. Как известно, множество линейных гомеоморфизмов банахова пространства X открыто в $\mathcal{L}(X)$. Значит, уменьшая при необходимости интервал Δ , можно считать, что для всех $a \in \Delta$ линейное отображение $g(a): X \rightarrow X$ является линейным гомеоморфизмом пространства X . Отсюда и следует в силу известного из анализа достаточного условия локального гомеоморфизма (теорема об обратной функции), что найдутся такие $r > 0$ и интервал Δ , с которыми для всех $a \in \Delta$ отображение $f_a: B(x_0, r) \rightarrow f_a(B(x_0, r))$ будет взаимно однозначным. ■

Эта лемма показывает, что построенное как решение задачи Коши 1 (14.2) отображение $f: B(x_0, r) \times \Delta \rightarrow X$ образует однопараметрическое семейство локальных преобразований пространства X (см. 1.8).

3. Теорема Ли.

Т е о р е м а. Пусть дано векторное поле $\xi: V \rightarrow X$ класса $C_\infty(V)$, причем $\xi(x_0) \neq 0$ для $x_0 \in V$. Тогда построенное как решение задачи 1 (14.2) с этим ξ отображение f порождает локальную однопараметрическую группу Ли, для которой векторное поле ξ является ее касательным векторным полем.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как тот факт, что получаемое в результате решения задачи 1 (14.2) отображение f является однопараметрическим семейством локальных преобразований пространства X уже доказан в 2.2, то остается проверить выполнение условий 1°—4° определения 1.9.

Проверка условия 1° тривиальна. Для проверки условия 2° берутся шар $B(x_0, r)$ и интервал Δ , определенные в лемме 2.2. Пусть $a, b, a+b \in \Delta$ и $x \in B(x_0, r)$. Вводятся обозначения $y = f(x, a)$, $u = f(y, b)$ и $v = f(x, a+b)$. Отображения u и v рассматриваются как функции параметра b при фиксированных x и a . Так как $u = f(f(x, a), b)$, то надо доказать равенство $u = v$. Отображение $x' = u$ удовлетворяет уравнению 1 (14.2) с начальным условием $u(0) = y$. Отображение $x' = v$ удовлетворяет тому же уравнению с начальным условием $v(0) = f(x, a) = y$. Следовательно, оба отображения, u и v , являются решениями одной и той же задачи Коши и в силу единственности ее решения совпадают.

Для проверки условия 3° используется неравенство (2.1) из леммы 2.2. Из него следует, что при $a \neq 0$ равенство $f(x, a) = x$ возможно лишь для таких $(x, a) \in B(x_0, r) \times \Delta$, для которых $|a| \geq |\xi(x)|$. Учитывая условие $|\xi(x_0)| \neq 0$, можно выбрать шар $B(x_0, r)$ настолько малым, чтобы для всех $x \in B(x_0, r)$ выполнялось неравенство $|\xi(x)| > \frac{1}{2} |\xi(x_0)|$. Тогда получится, что

при $a \neq 0$ равенство $f(x, a) = x$ возможно лишь для значений a , удовлетворяющих неравенству $|a| \geq |\xi(x_0)|/(2\nu)$. Следовательно, если интервал Δ настолько мал, что $|\xi(x_0)|/(2\nu) \notin \Delta$,

то равенство $f(x, a) = x$ для $a \in \Delta$ и $x \in B(x_0, r)$ возможно, только если $a = 0$.

Наконец, условие 4° выполнено в силу известного из теории обыкновенных дифференциальных уравнений факта: если правая часть уравнения принадлежит классу C_∞ , то этому классу принадлежат и все его решения.

Последнее утверждение теоремы Ли о том, что полученная в результате решения задачи 1 (14.2) группа G^1 имеет данное векторное поле ξ своим касательным векторным полем, следует непосредственно из уравнения 1 (14.2) при $a = 0$ и из определения 1.13. ■

4. Пример построения группы. Одним из применений теоремы Ли является использование ее для построения группы G^1 по заданному касательному векторному полю. В конечномерном случае это построение связано с интегрированием системы обыкновенных дифференциальных уравнений 1 (14.3), что может оказаться не простой задачей. Однако во многих практически важных случаях такое интегрирование выполнить удастся.

Простой пример дает векторное поле в трехмерном пространстве $R^3(t, x, u)$, заданное формулой $\xi = (0, t, 1)$. Соответствующая система уравнений 1 (14.3) в данном случае имеет вид

$$\left. \begin{aligned} dt'/da &= 0, & t'(0) &= t; \\ dx'/da &= t', & x'(0) &= x; \\ du'/da &= 1, & u'(0) &= u \end{aligned} \right\}$$

и интегрируется элементарно. Решение задачи Коши таково:

$$t' = t, \quad x' = x + at, \quad u' = u + a.$$

В механике, где t — время, x — пространственная координата и u — скорость, полученная группа G^1 называется *группой галилеевых переносов вдоль оси (x)*.

5. Соответствие групп и векторных полей. Теорема Ли вместе с определением 1.13 устанавливает определенное соответствие между группами G^1 и векторными полями ξ . Возникает вопрос: является ли это соответствие взаимно однозначным? Очевидно, что данному векторному полю ξ соответствует одна определенная группа G^1 . Это следует из теоремы Ли. Однако обратное неверно, так как векторным полям ξ и $\lambda\xi$ для любого $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$, соответствует одна и та же группа G^1 .

Действительно, если группа G^1 порождена отображением f , задающим принадлежащие G^1 преобразования формулой $x' = f(x, a)$, то отображение f^λ , действующее по формуле $f^\lambda(x, a) = f(x, \lambda a)$, обладает всеми свойствами, требуемыми определением 1.9. Тем самым f^λ также порождает некоторую группу $G^{1\lambda}$. Но группы G^1 и $G^{1\lambda}$ неразличимы, так как они являются, очевидно, множествами одних и тех же преобразований пространства X .

Можно показать, что этим и исчерпывается неоднозначность соответствия групп G^1 и векторных полей ξ . Действительно, в силу определения 1.9 эта неоднозначность определяется возможностью введения различных *аддитивных структур* на R . Но если преобразование $\mu: R \rightarrow R$ вводит новую аддитивную структуру на R , то для любых $a, b \in R$ должно выполняться равенство

$$\mu(a + b) = \mu(a) + \mu(b).$$

Как известно, каждое непрерывное в нуле решение этого функционального уравнения имеет вид $\mu(a) = \lambda a$, где $\lambda \in R$. Это и есть тот набор аддитивных структур на R , который был рассмотрен выше.

Приведенные рассуждения показывают, что *существует взаимно однозначное соответствие между группами G^1 и векторными полями ξ , рассматриваемыми с точностью до произвольного ненулевого числового множителя*. Это соответствие в дальнейшем будет отмечаться обозначением $G^1(\xi)$.

6. Оператор группы. Пусть $f: V \times \Delta \rightarrow X$ есть отображение, порождающее группу $G^1(\xi)$, и пусть Y — банахово пространство. Рассматриваются значения дифференцируемого отображения $F: X \rightarrow Y$ на орбите точки $x \in V$, равные $F \circ f(x, a)$. В силу определения 1.13 «скорость» изменения этих значений в точке $a=0$ дается формулой

$$\partial_a (F \circ f(x, a))|_{a=0} = \partial F(x) \cdot \xi(x).$$

В случае, когда $Y=R$ (т. е. $F(x)$ — скаляр), правую часть можно переписать в виде $\xi \cdot \partial F(x)$ (точкой обозначается скалярное произведение векторов ξ и ∂F), т. е. как результат действия на отображение F линейного дифференциального оператора $\xi \cdot \partial$. Это обозначение удобно перенести и на общий случай, приняв следующее определение.

Линейный дифференциальный оператор $\xi \cdot \partial$, действующий на отображение $F: X \rightarrow Y$ по формуле

$$(\xi \cdot \partial) F(x) = \partial F(x) \cdot \xi(x), \quad (6.1)$$

называется инфинитезимальным оператором группы $G^1(\xi)$.

Слово «инфинитезимальный» означает «бесконечно малый». Его употребление является данью старой классической теории, свободно оперировавшей бесконечно малыми и бесконечно большими величинами. С помощью инфинитезимального оператора записывается главная линейная часть изменения отображения F вдоль орбиты точки x

$$F \circ f(x, a) = F(x) + a(\xi \cdot \partial) F(x) + O(a^2). \quad (6.2)$$

В случае n -мерного пространства X в системе координат, в которой $x = (x^1, \dots, x^n)$, $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$, следует положить

$\partial = (\partial_1, \dots, \partial_n)$, где $\partial_i = \partial/\partial x^i$. Тогда инфинитезимальный оператор запишется в виде

$$\xi \cdot \partial = \xi^i \partial_i = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (6.3)$$

В этом случае формула действия инфинитезимального оператора на отображение $F: X \rightarrow Y$ принимает привычный вид

$$(\xi \cdot \partial)F = \xi^i \partial_i F = \xi^i \frac{\partial F}{\partial x^i}. \quad (6.4)$$

В конечномерном случае, при координатном представлении векторов, координаты касательного векторного поля ξ^i будут называться также координатами инфинитезимального оператора $\xi \cdot \partial$.

В дальнейшем изложении прилагательное «инфинитезимальный» будет, как правило, опускаться и будет безоговорочно использоваться термин оператор группы или даже просто оператор.

Установленное в 2.4 соответствие между группами G^1 и векторными полями естественным образом индуцирует соответствие между группами G^1 и их операторами. Соответствие между группами $G^1(\xi)$ и их операторами $\xi \cdot \partial$ является взаимно однозначным, если инфинитезимальный оператор считать определенным с точностью до произвольного ненулевого числового множителя.

7. Примеры. Обычно оператору группы присваивается то же название, которое как-то характеризует саму группу. Следующие инфинитезимальные операторы соответствуют касательным векторным полям, рассмотренным в 1.15:

Оператор переноса: $\xi \cdot \partial = x_0 \cdot \partial = x_0^i \partial_i$.

Оператор линейного преобразования: $\xi \cdot \partial = u \langle x \rangle \cdot \partial = u_j^i x^j \partial_i$.

Оператор растяжения: $\xi \cdot \partial = \sum_{i=1}^n \lambda^i x^i \partial_i$.

Оператор вращения вокруг оси (x^3) : $\xi \cdot \partial = -x^2 \partial_1 + x^1 \partial_2$.

Оператор проективного преобразования: $\xi \cdot \partial = x^2 \partial_x + xy \partial_y$.

Здесь всюду $\partial_i = \partial/\partial x^i$, а в последнем примере $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_y = \partial/\partial y$.

Операторы вращения вокруг осей (x^1) и (x^2) получаются из оператора вращения вокруг оси (x^3) круговой перестановкой индексов $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$

$$(x^1): \xi \cdot \partial = -x^3 \partial_2 + x^2 \partial_3;$$

$$(x^2): \xi \cdot \partial = -x^1 \partial_3 + x^3 \partial_1.$$

8. Инвариантность оператора. Важным свойством инфинитезимального оператора является то, что он инвариантен относительно перехода от группы G^1 к любой ей подобной группе. Если группа $G^1(\xi)$ получена с помощью преобразования подобия $p: X \rightarrow X$, действующего по формуле $x = p(x)$, из группы $G^1(\xi)$, то касатель-

ные векторные поля этих групп связаны формулой 1 (16.1), которая здесь переписывается в виде

$$\xi(x) = \partial p(x) \langle \xi(x) \rangle, \quad x = p(x). \quad (8.1)$$

Если ввести оператор дифференцирования $\bar{\partial}$, который действует на отображения $x \rightarrow u(x)$ (т. е. $\bar{\partial}$ есть производная по переменному x), то преобразованный оператор $\xi \cdot \partial$ запишется в виде $\xi \cdot \bar{\partial}$. Вычисление результата действия оператора $\xi \cdot \bar{\partial}$ на отображение $F: X \rightarrow Y$, для которого $F(x) = F'(x)$, дает

$$\begin{aligned} (\xi \cdot \bar{\partial}) F(x) &= \partial_a (F \circ p \circ f)(x, 0) = \bar{\partial} F(x) \langle \partial p(x) \langle \xi(x) \rangle \rangle = \\ &= \bar{\partial} F(x) \langle \xi(x) \rangle = (\xi \cdot \bar{\partial}) F(x) = (\xi \cdot \bar{\partial}) F(x). \end{aligned}$$

Отсюда и следует, что оба оператора $\xi \cdot \partial$ и $\xi \cdot \bar{\partial}$ действуют на любое отображение $F: X \rightarrow Y$ одинаково, в силу чего справедливо равенство

$$\xi \cdot \partial = \xi \cdot \bar{\partial}, \quad (8.2)$$

которое и выражает свойство инвариантности оператора относительно преобразования подобия $p: X \rightarrow X$.

Фактически это свойство можно не связывать с группами G^1 , если принять формулу (8.1) в качестве определения подобия векторных полей.

Полезно иметь в виду, что операторы дифференцирования ∂ и $\bar{\partial}$, рассматриваемые как векторы сопряженного пространства X^* , при преобразовании $x = p(x)$ связаны формулой

$$\bar{\partial} = \partial p^* \langle \bar{\partial} \rangle, \quad (8.3)$$

где звездочка означает сопряженное линейное отображение. С помощью формулы (8.3) свойство инвариантности (8.2) инфинитезимального оператора получается совсем просто:

$$\xi \cdot \bar{\partial} = \partial p \langle \xi \rangle \cdot (\partial p^*)^{-1} \langle \bar{\partial} \rangle = ((\partial p)^{-1} \circ \partial p) \langle \xi \rangle \cdot \bar{\partial} = \xi \cdot \bar{\partial}.$$

Например, для оператора растяжения $\xi \cdot \bar{\partial} = \sum_{i=1}^n \lambda^i x^i \bar{\partial}_i$ и преобразования p , заданного формулами $x^i = \ln x^i$, будет $\partial p(x) = \text{diag}(\frac{1}{x^1}, \dots, \frac{1}{x^n})$, в силу чего справедливы выражения

$$\xi = \text{diag}(\frac{1}{x^1}, \dots, \frac{1}{x^n}) \langle (\lambda^1 x^1, \dots, \lambda^n x^n) \rangle = (\lambda^1, \dots, \lambda^n),$$

$$\bar{\partial} = \text{diag}(x^1, \dots, x^n) \langle (\partial_1, \dots, \partial_n) \rangle = (x^1 \partial_1, \dots, x^n \partial_n),$$

с помощью которых хорошо иллюстрируется равенство (8.2).

§ 3. Инварианты и инвариантные многообразия

1. Продолжение представления группы. Пусть G — группа и M, N — множества. Предполагается, что заданы представления $\pi_M: G \rightarrow \tau(M)$ и $\pi_N: G \rightarrow \tau(N)$ группы G (см. 1.1). Рассматривается множество N^M всевозможных отображений $u: M \rightarrow N$. По данным представлениям π_M, π_N можно построить новое представление π_{NM} группы G в множестве $\tau(N^M)$. Это новое представление, выводимое из представлений π_M и π_N , называется *продолжением пары представлений* (π_M, π_N) до представления π_{NM} и определяется формулой

$$\pi_{NM}(g)(u) = \pi_N(g)^{-1} \circ u \circ \pi_M(g) \quad (g \in G). \quad (1.1)$$

Согласно формуле (1.1) каждому отображению $u: M \rightarrow N$ и каждому элементу $g \in G$ ставится в соответствие (взаимно однозначно) новое отображение $u': M \rightarrow N$, действующее по формуле

$$u'(x) = \pi_{NM}(g)(u)(x) = \pi_N(g)^{-1}(u(\pi_M(g)(x))). \quad (1.2)$$

Частные случаи формулы (1.2) получаются, когда одно из представлений π_N или π_M тривиально. Для дальнейшего особенно важен случай тривиального π_N , когда формула (1.2) принимает вид

$$u'(x) = u(\pi_M(g)(x)). \quad (1.3)$$

2. Конкомитанты и инварианты. Элемент $x_0 \in M$ называется *неподвижным элементом* относительно представления $\pi: G \rightarrow \tau(M)$, если для любого $g \in G$ справедливо равенство $\pi(g)(x_0) = x_0$.

Неподвижный элемент продолженного представления $\pi_{NM}: G \rightarrow \tau(N^M)$ называется конкомитантом группы G относительно пары представлений (π_M, π_N) . В силу формулы (1.2) это означает, что отображение $u: M \rightarrow N$ есть конкомитант группы относительно пары (π_M, π_N) , если для любых $g \in G, x \in M$ выполнено равенство

$$\pi_N(g)(u(x)) = u(\pi_M(g)(x)). \quad (2.1)$$

В том случае, когда представление π_N тривиально, конкомитант $u: M \rightarrow N$ называется *инвариантным отображением или инвариантом группы G относительно ее представления π в множестве $\tau(M)$* . В силу формулы (1.3) это означает, что отображение $u: M \rightarrow N$ есть инвариант группы G относительно ее представления π , если для любых $g \in G, x \in M$ выполнено равенство

$$u(x) = u(\pi(g)(x)). \quad (2.2)$$

Термин «конкомитант» означает «согласованный совместный инвариант», т. е. инвариант относительно согласованного (в смысле равенства (1.1)) совместного действия пары (π_M, π_N) .

3. Инварианты группы Ли. Здесь начинается изучение инвариантов группы G^1 , как локального представления $f: R \rightarrow \tau(X)$, описанного в § 1. В целях упрощения формулировок в дальнейшем иногда (когда это не вредит существу дела) будут использоваться термины и обозначения, «забывающие» о том, что вся теория является локальной. Например, порождающее группу G^1 отображение f будет записываться как отображение $f: X \times R \rightarrow X$, не всегда будет уточняться область определения векторного поля ξ и т. п.

Рассматриваются отображения $F: X \rightarrow Y$, где Y — банахово пространство, и предполагается, что группа R действует на Y тривиально. Согласно данному определению (2.2) отображение F есть инвариант группы G^1 , порожденной отображением $f: X \times R \rightarrow X$, если для любых $(x, a) \in X \times R$ выполнено равенство

$$F(f(x, a)) = F(x). \quad (3.1)$$

Изучение инвариантов основано на лемме, в которой предполагается, что $\xi \cdot \partial$ есть инфинитезимальный оператор группы $G^1(\xi)$ и используется обозначение $x' = f(x, a)$.

Лемма. Для любого отображения $F: X \rightarrow Y$ класса $C_1(X)$ и для любых $(x, a) \in X \times R$ справедливо равенство

$$\partial_a F(x') = (\xi \cdot \partial) F(x'). \quad (3.2)$$

Доказательство. Равенство (3.2) следует из уравнения Ли 1 (4.2) и определения инфинитезимального оператора 2 (6.1), в силу которых

$$\partial_a F(x') = \partial F(x') \langle \partial_a x' \rangle = \partial F(x') \langle \xi(x') \rangle = (\xi \cdot \partial) F(x'). \quad \blacksquare$$

4. Критерий инварианта. В следующей теореме дается необходимое и достаточное условие того, что некоторое отображение $F: X \rightarrow Y$ есть инвариант группы $G^1(\xi)$.

Теорема. Отображение $F: X \rightarrow Y$ класса $C_1(X)$ является инвариантом группы $G^1(\xi)$, если и только если для любого $x \in X$ выполнено равенство

$$(\xi \cdot \partial) F(x) = 0. \quad (4.1)$$

Доказательство. Если F — инвариант, то верно равенство (3.1), дифференцирование которого по параметру a дает в правой части нуль, а в левой, в силу (3.2), левую часть равенства (4.1). Обратно, если выполнено равенство (4.1), то в силу (3.2) будет справедливо равенство $\partial_a F(x') = 0$. Это означает, что вектор $F(x') = F(f(x, a)) \in Y$ не зависит от параметра a и равен его значению при $a=0$, т. е. $F(x') = F(x)$. Поэтому F — инвариант группы $G^1(\xi)$ в силу определения (3.1). $\blacksquare$

5. Универсальный инвариант. Если $F: X \rightarrow Y$ есть инвариант группы G^1 и Z — банахово пространство (на котором R также

действует тривиально), то для любого отображения $\Phi: Y \rightarrow Z$ композиция $\Phi \circ F$ тоже является инвариантом той же группы G^1 .

Инвариант J : $X \rightarrow Y$ группы G^1 называется ее **универсальным инвариантом**, если для любого банахова пространства Z и любого инварианта $F: X \rightarrow Z$ найдется такое отображение $\Phi: Y \rightarrow Z$, что будет справедливо равенство $F = \Phi \circ J$.

В силу этого определения с помощью универсального инварианта можно получить все возможные инварианты группы G^1 . Поэтому отыскание универсального инварианта является основной задачей теории инвариантов.

К универсальному инварианту группы G^1 естественно предъявить также требование гладкости: он должен быть *локальным* отображением класса C_∞ .

Теорема. Для любой группы $G^1 = f(R) \subset \tau(X)$ существует банахово пространство Y и универсальный инвариант $J: X \rightarrow Y$ класса C_∞ .

Доказательство. Пусть ξ — касательное векторное поле группы G^1 . Берется точка $x_0 \in X$, в которой вектор $e = \xi(x_0) \neq 0$, и пространство X представляется в виде прямой суммы $X = T \oplus Y$, где T есть одномерное пространство векторов вида te ($t \in R$), а Y — прямое дополнение T в X . Тогда для векторов $x, x_0 \in X$ справедливы формулы разложения

$$x = te + y, \quad x_0 = t_0 e + y_0,$$

в которых число $t \in R$ и вектор $y \in Y$ однозначно определены вектором x .

Благодаря этому представлению любое отображение $u: X \rightarrow Z$ можно рассматривать как отображение $R \times Y \rightarrow Z$, действующее по формуле $z = u(t, y)$. При этом касательное векторное поле ξ группы G^1 и порождающее ее отображение f запишутся в виде

$$\xi(x) = c(t, y)e + \eta(t, y), \quad f(x, a) = p(t, y, a)e + \varphi(t, y, a).$$

Кроме того, в силу определения вектора $e = \xi(x_0)$, верны равенства

$$c(t_0, y_0) = 1, \quad \eta(t_0, y_0) = 0.$$

Далее, пусть $x' = f(x, a) = t'e + y'$. Тогда

$$t' = p(t, y, a), \quad y' = \varphi(t, y, a). \quad (5.1)$$

В этих обозначениях групповое свойство $f(x', b) = f(x, a + b)$ принимает вид

$$p(t', y', b) = p(t, y, a + b), \quad \varphi(t', y', b) = \varphi(t, y, a + b). \quad (5.2)$$

Уравнение Ли 1 (14.2) переписывается в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \partial_a t' = c(t', y'), & t'(0) = t; \\ \partial_a y' = \eta(t', y'), & y'(0) = y. \end{cases}$$

Пусть $\epsilon = |a| + |t - t_0| + |y - y_0|$. Благодаря равенству $c(t_0, y_0) = 1$ для достаточно малого ϵ будет верно неравенство $c(t', y') > 1/2$. Поэтому первое из равенств (5.1) можно разрешить относительно параметра a в виде $a = \alpha(t, y, t')$. Теперь можно исключить параметр a как «аргумент» отображения φ и сформировать новое отображение $\psi: R \times Y \times R \rightarrow Y$, действующее по формуле

$$\psi(t, y, t') = \varphi(t, y, a) = \varphi(t, y, \alpha(t, y, t')). \quad (5.3)$$

Наконец, если зафиксировать значение $t' = t_0$, то получится отображение $J: R \times Y \rightarrow Y$, определенное формулой

$$J(t, y) = \psi(t, y, t_0). \quad (5.4)$$

Утверждается, что отображение J — универсальный инвариант группы G^1 . Сначала устанавливается, что J — инвариант. Действительно, так как равенство $\varphi(t, y, b) = \varphi(t, y, p(t, y, b))$ является тождеством по переменным t, y, b , то оно справедливо и для значений (5.1), т. е.

$$\varphi(t', y', b) = \varphi(t', y', p(t', y', b))$$

или, в силу группового свойства (5.2),

$$\varphi(t, y, a + b) = \varphi(t', y', p(t, y, a + b)).$$

С другой стороны, в силу определения (5.3), выполнено тождество

$$\varphi(t, y, a + b) = \psi(t, y, p(t, y, a + b)).$$

Сравнение этих двух тождеств приводит к равенству

$$\psi(t', y', p(t, y, a + b)) = \psi(t, y, p(t, y, a + b)),$$

в котором b — свободный параметр, так как t' и y' зависят только от значений t, y, a . Поэтому при достаточно малом ϵ , за счет выбора значения параметра b можно удовлетворить равенству $p(t, y, a + b) = t_0$. Это следует из того, что оно равносильно равенству $a + b = \alpha(t, y, t_0)$, причем $\alpha(t_0, y_0, t_0) = 0$ в силу начального условия $p(t, y, 0) = t$. Но если $p(t, y, a + b) = t_0$, то, согласно определению (5.4), последнее равенство принимает вид $J(t', y') = J(t, y)$ или, что то же самое, $J(x') = J(x)$ для всех достаточно малых значений параметра a . Следовательно, отображение J — инвариант.

Проследивая процесс построения инварианта J , легко установить, что он является отображением класса $C_\infty(V)$ некоторой окрестности V точки x_0 .

Остается доказать, что построенный инвариант J универсален. Вначале надо убедиться в том, что отображение $J_1: X \rightarrow X$, которое, будучи представлено как отображение $J_1: R \times Y \rightarrow R \times Y$, действует по формуле

$$J_1(t, y) = (t, J(t, y)),$$

является взаимно однозначным отображением некоторой окрестности V точки x_0 . Для этого достаточно установить, что производная $\partial_y J(t_0, y_0)$ есть гомеоморфизм $Y \rightarrow Y$, так как тогда и производная $\partial J_1(x_0)$ будет гомеоморфизмом $X \rightarrow X$. Вычисление дает

$$\partial_y J(t, y) = \partial_y \varphi(t, y, a) + \eta(t', y') \otimes \partial_y \alpha(t, y, t_0).$$

Легко проверить, используя определение функции α и уравнение Ли, что $\partial_y \alpha(t_0, y_0, t_0) = 0$. Поэтому для малого ε второе слагаемое будет малым по норме пространства $\mathcal{L}(Y)$. Что же касается первого слагаемого, то оно при $a \rightarrow 0$ стремится к I_Y . Значит, для малого ε производная $\partial_y J(t, y)$ мало отличается от I_Y и, тем самым, есть гомеоморфизм пространства Y .

Итак, J_1 взаимно однозначно на V , и потому существует обратное отображение $J_1^{-1}: X \rightarrow X$. Если $F: X \rightarrow Z$ — какой-нибудь инвариант группы G^1 , то определено отображение $\Phi_1 = F \circ J_1^{-1}: X \rightarrow Z$, с которым справедливо равенство $F = \Phi_1 \circ J_1$ или

$$F(t, y) = \Phi_1(t, J(t, y)).$$

Утверждается, что на самом деле значение $\Phi_1(t, y)$ не зависит от t . Действительно, так как F и J — инварианты, то равенство $F(t', y') = \Phi_1(t', J(t', y'))$ можно переписать в виде $F(t, y) = \Phi_1(t', J(t, y))$ и сравнение его с исходным дает $\Phi_1(t', J) = \Phi_1(t, J)$ для любого $a \in R$. Так как для каждого t при некотором a будет $t' = t_0$, то $\Phi_1(t, J) = \Phi_1(t_0, J)$. Тем самым определено отображение $\Phi: Y \rightarrow Z$, действующее по формуле $\Phi(y) = \Phi_1(t_0, y)$, с которым справедливо равенство $F = \Phi \circ J$. Этим универсальность инварианта J доказана. ■

6. Конечномерный случай. Если $X = R^n$, то изложенный в доказательстве теоремы 3.5 алгоритм построения универсального инварианта показывает, что пространство Y , в которое универсальный инвариант J отображает пространство X , также конечномерно, а именно $Y = R^{n-1}$. Значит, в этом случае J имеет вид

$$J = (J^1, \dots, J^{n-1}), \quad (6.1)$$

где каждая координата $J^k: X \rightarrow R$ является скалярным инвариантом. Полученные этим способом скалярные инварианты обладают важным свойством функциональной независимости.

Скалярные инварианты $J^k: X \rightarrow R$ ($k = 1, \dots, m$) называются функционально зависимыми, если существует такое не тождественно

постоянное отображение $\Phi: R^m \rightarrow R$, что для любого $x \in X$ выполнено равенство

$$\Phi(J^1(x), \dots, J^m(x)) = 0.$$

В противном случае эти скалярные инварианты называются *функционально независимыми*.

Если для инвариантов (6.1) найдется отображение $\Phi: Y \rightarrow R$, с которым $\Phi \circ J(x) = 0$ для всех $x \in X$, то, как показано при доказательстве теоремы 3.5, также будет справедливо равенство $\Phi_1 \circ J_1(x) = 0$, где $\Phi_1(t, y) = \Phi(y)$ и $J_1(x) = (t, J(t, y))$. Но отображение $J_1: X \rightarrow X$ обратимо, в силу чего отсюда следует, что $\Phi_1(t, y) = \Phi(y) = 0$ для всех $y \in Y$. Это и означает функциональную независимость скалярных инвариантов (6.1).

Другое важное свойство набора скалярных инвариантов (6.1) состоит в том, что через них выражается любой инвариант группы G^1 . Действительно, через инварианты (6.1) выражается универсальный инвариант J , а с помощью него, согласно определению 3.5, можно получить все возможные инварианты группы G^1 .

Набор функционально независимых скалярных инвариантов группы, через которые можно выразить любой ее инвариант, называется функциональным базисом инвариантов группы G^1 .

О функциональном базисе инвариантов имеет смысл говорить только в случае конечномерного пространства X . Изложенные выше факты показывают, что понятие универсального инварианта является естественным обобщением понятия функционального базиса инвариантов группы G^1 преобразований произвольного банахова пространства X .

В силу критерия (4.1) отыскание скалярных инвариантов группы $G^1(\xi)$ в случае $X = R^n$, когда $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$, сводится к построению решений линейного однородного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка

$$\xi^i \partial_i F = 0 \quad (\partial_i = \partial / \partial x^i). \quad (6.2)$$

Как известно, та же задача может быть решена путем построения первых интегралов сопряженной с уравнением (6.2) системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x)} = \dots = \frac{dx^n}{\xi^n(x)}. \quad (6.3)$$

7. Примеры инвариантов. Универсальные инварианты групп G^1 с приведенными в 2.7 инфинитезимальными операторами представляются как функциональные базисы скалярных инвариантов формулой вида (6.1).

Группа переносов в R^n . Оператор есть $x_0^i \partial_i$ и система (6.3) такова

$$\frac{dx^1}{x_0^1} = \dots = \frac{dx^n}{x_0^n}.$$

Если предположить, что $x_0^n \neq 0$, то первые интегралы имеют вид $c^j = x_0^n x^j - x_0^j x^n$ ($j = 1, \dots, n-1$) и базис инвариантов найден:

$$J = (x_0^n x^1 - x_0^1 x^n, \dots, x_0^n x^{n-1} - x_0^{n-1} x^n).$$

Группа линейных преобразований в R^n . Оператор есть $u_j^i x^j \partial_i$. Если в соответствующую систему (6.3) ввести вспомогательный параметр t , то она перепишется в виде однородной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$dx^i/dt = u_j^i x^j \quad (i = 1, \dots, n).$$

Процедура решения такой системы хорошо известна. Пусть

$$x_k(t) = (x_k^1(t), \dots, x_k^n(t)) \quad (k = 1, \dots, n)$$

есть фундаментальная система ее решений, и пусть $\varphi_j^i(t)$ — элементы матрицы, обратной к матрице $(x_k^i(t))$. Если предположить, что уравнение $x^j \varphi_j^n(t) = 1$ разрешимо относительно t и его решение есть $t = \alpha(x)$, то базис инвариантов будет иметь вид

$$J = (x^i (\varphi_i^1 \circ \alpha)(x), \dots, x^i (\varphi_i^{n-1} \circ \alpha)(x)).$$

Группа растяжений в R^n . Оператор есть $\sum_{i=1}^n \lambda^i x^i \partial_i$ и система (6.3) такова:

$$\frac{dx^1}{\lambda^1 x^1} = \dots = \frac{dx^n}{\lambda^n x^n}.$$

Не нарушая общности решения, можно принять, что $\lambda^n = 1$. Тогда первые интегралы будут $c^j = x^j (x^n)^{-\lambda^j}$ ($j = 1, \dots, n-1$). Следовательно, базис инвариантов построен:

$$J = (x^1 (x^n)^{-\lambda^1}, \dots, x^{n-1} (x^n)^{-\lambda^{n-1}}).$$

Группа вращений в R^3 . Оператор вращения вокруг оси (x^3) есть $-x^2 \partial_1 + x^1 \partial_2$, и система (6.3) такова:

$$\frac{dx^1}{-x^2} = \frac{dx^2}{x^1} = \frac{dx^3}{0}.$$

Один первый интеграл очевиден: $c^1 = x^3$. Второй находится интегрированием уравнения $x^1 dx^1 + x^2 dx^2 = 0$ и может быть взят таким: $c^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2$. Поэтому базис инвариантов есть

$$J = (x^3, (x^1)^2 + (x^2)^2).$$

Проективная группа в $R^2(x, y)$. Оператор есть $x^2\partial_x + xy\partial_y$, а система (6.3) состоит из одного уравнения

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

с очевидным первым интегралом $c = y/x$. Базис инвариантов состоит из одного инварианта $J = y/x$.

8. Теорема о подобии. Формула подобия касательных векторных полей 1(16.1) при переходе от группы G_1^1 к ей подобной группе G_2^1 может рассматриваться при заданных векторных полях ξ_1, ξ_2 как уравнение для отображения $p: X \rightarrow X$, преобразующего поле ξ_1 в поле ξ_2 . В частности, возникает задача: дано векторное поле $\xi: X \rightarrow X$ и некоторое не нулевое постоянное векторное поле $\eta \in X$; требуется выяснить, существует ли диффеоморфизм $p: X \rightarrow X$, с которым

$$\partial p(x) \langle \xi(x) \rangle = \eta \quad (8.1)$$

для всех $x \in X$. Эта задача поставлена в «забывающих» терминах и должна рассматриваться в рамках локальной теории. Оказывается, что ее можно решить с помощью универсального инварианта.

Теорема. Пусть заданы ненулевой вектор $\eta \in X$ и векторное поле $\xi: V \rightarrow X$ класса $C_\infty(V)$, причем $\xi(x_0) \neq 0$ для $x_0 \in V$. Тогда найдется такой диффеоморфизм $p: V_0 \rightarrow X$ некоторой окрестности V_0 точки x_0 , с которым выполнено тождество (8.1).

Доказательство. Используются обозначения и величины, введенные при доказательстве теоремы 3.5. Универсальный инвариант J группы $G^1(\xi)$ является отображением $X = T \oplus Y \rightarrow Y$, и уравнение $J(t, y) = z$ однозначно разрешимо относительно y при любом z из достаточно малой окрестности точки $z_0 = J(x_0)$. Пусть это решение дается отображением $y = \Phi(t, z)$. Берется разложение векторного поля $\xi(x) = c(t, y)e + \eta(t, y)$, где $e = \xi(x_0)$ и полагается $\tilde{c}(t, z) = c(t, \Phi(t, z))$. Тогда $\tilde{c} = 1$ в точке (t_0, z_0) и отлично от нуля в окрестности V_1 этой точки. Поэтому определено отображение $v: X \rightarrow R$ класса $C_\infty(V_1)$, действующее по формуле

$$v(t, z) = \int_{t_0}^t \frac{d\tau}{\tilde{c}(\tau, z)}.$$

Рассматривается отображение $k: X \rightarrow X$ класса $C_\infty(V_1)$, действующее по формуле

$$k(t, y) = ev(t, J(t, y)) + J(t, y),$$

и утверждается, что k есть гомеоморфизм некоторой окрестности V_0 точки x_0 на открытое множество пространства X .

Действительно, с любым вектором $r = ea + b \in X$, где $a \in R$, $b \in Y$, справедливо равенство

$$\partial k \langle r \rangle = e((\partial_i v) a + \partial_i v \cdot ((\partial_i J) a + \partial_y J \langle b \rangle)) + ((\partial_i J) a + \partial_y J \langle b \rangle).$$

В силу тождества $\partial_i v(t_0, z) = 0$ из этого равенства легко следует однозначная разрешимость уравнения $\partial k \langle r \rangle = s$ для любого $s \in X$. Остальное вытекает из теоремы о неявной функции.

При $r = \xi$ предыдущее равенство, с учетом того, что J является инвариантом группы $G^1(\xi)$, в силу определения v и $\tilde{c}$ принимает вид

$$\partial k \langle \xi \rangle = e(\partial_i v) c = e.$$

Наконец, с линейным преобразованием $l \in GL(X)$, которое переводит вектор e в вектор η , образуется преобразование $p = l \circ k: X \rightarrow X$ класса $C_\infty(V_0)$, для которого, очевидно, выполнено равенство (8.1). ■

9. Следствия. (а) *Все векторные поля (локальные) на данном пространстве X подобны друг другу.* Действительно, в силу доказанной теоремы каждое векторное поле подобно постоянному векторному полю, а отношение подобия векторных полей является, как легко проверить, теоретико-множественным признаком эквивалентности.

(б) *Все группы G^1 преобразований (локальных) пространства X подобны друг другу.* Действительно, без труда проверяется, что подобным касательным векторным полям соответствуют подобные группы G^1 .

В частности, всякая группа G^1 подобна группе переносов. Это свойство групп G^1 замечательно тем, что его использование позволяет существенно упростить доказательство ряда утверждений, инвариантных относительно преобразования подобия.

В конечномерном случае, когда $X = R^n(x^1, \dots, x^n)$, всегда можно считать, что рассматриваемая группа G^1 подобна группе переносов по координате x^n , порождающее отображение которой имеет вид

$$x'^j = x^j \quad (j = 1, \dots, n-1), \quad x'^n = x^n + a.$$

Касательное векторное поле такой группы есть

$$\xi = (0, \dots, 0, 1),$$

а ее инфинитезимальный оператор таков:

$$\xi \cdot \partial = \partial_n = \partial / \partial x^n.$$

Универсальный инвариант этой группы $J: R^n \rightarrow R^{n-1}$ дается формулой

$$J(x) = (x^1, \dots, x^{n-1}).$$

10. Инвариантные многообразия. Пусть X — банахово пространство, и пусть $\omega: R^k \rightarrow X$ — отображение класса $C_\infty(R^k)$, взаимно однозначно отображающее R^k на $\omega(R^k)$. Образ $\Omega = \omega(R^k) \subset X$ называется *многообразием размерности k* (или *k -мерным многообразием*) в пространстве X .

В локальной теории вместо R^k берется некоторое открытое множество $V \subset R^k$, например шар $B_r \subset R^k$ с центром в нуле радиуса r . С помощью отображения $\omega: V \rightarrow X$ класса $C_\infty(V)$, отображающего V на $\omega(V)$ взаимно однозначно, получается локальное k -мерное многообразие $\Omega = \omega(V)$ в пространстве X (в дальнейшем прилагательное «локальное», как правило, опускается). Указанный в этом определении способ задания многообразия Ω называется *параметрическим заданием*, а R^k — *пространством параметров*.

Пусть $G^1(f)$ — группа преобразований пространства X . Многообразие Ω называется *инвариантным многообразием группы $G^1(f)$* , если орбита $f_x(\Delta)$ любой точки $x \in \Omega$ принадлежит Ω . Другими словами, многообразие $\Omega \subset X$ инвариантно относительно группы $G^1(f)$, если оно, как целое, является неподвижным в X и переходит в себя при всех преобразованиях $f_a \in G^1(f)$.

Если $\Omega = \omega(V)$ есть инвариантное многообразие группы $G^1(f)$, то группу $G^1(f)$ можно рассматривать как группу преобразований множества Ω . В этом смысле говорят, что аддитивная группа R действует на Ω . В силу свойства взаимной однозначности отображения $\omega: V \rightarrow X$ это действие f группы R на Ω индуцирует некоторое действие φ группы R на пространстве параметров R^k . Тем самым возникает группа $G^1(\varphi)$ преобразований пространства R^k . Очевидно, что производящие отображения f и φ групп $G^1(f)$ и $G^1(\varphi)$ связаны соотношением

$$f(\omega(t), a) = \omega(\varphi(t, a)) \quad (t \in R^k). \quad (10.1)$$

Сравнение (10.1) с (2.1) показывает, что отображение ω является конкомитантом относительно пары действий (f, φ) .

С помощью касательного векторного поля $\eta: V \rightarrow R^k$ группы $G^1(\varphi)$ в результате дифференцирования соотношения (10.1) по a в точке $a=0$ получается инфинитезимальный аналог этого соотношения

$$\partial \omega \langle \eta \rangle = \xi \circ \omega \quad (10.2)$$

(где ξ — касательное векторное поле группы $G^1(f)$), выражающий необходимое условие инвариантности многообразия Ω . Как показывает следующая теорема, соотношение (10.2) дает инфинитезимальный критерий инвариантности многообразия Ω .

Т е о р е м а. Многообразие $\Omega = \omega(V)$ является инвариантным многообразием группы $G^1(f)$, если и только если существует такое векторное поле $\eta: V \rightarrow R^k$, с которым отображение $\omega: V \rightarrow X$ удовлетворяет соотношению (10.2).

Доказательство. Необходимость соотношения (10.2) уже доказана выше. Достаточность доказывается с помощью утверждения о том, что если соотношение (10.2) выполнено, то порождающие отображения f и φ групп $G^1(\xi)$ и $G^1(\eta)$ связаны соотношением (10.1). Это утверждение следует из того, что если положить $t' = \varphi(t, a)$, то в силу уравнения Ли 1 (14.2) и соотношения (10.2) будут справедливы равенства

$$\partial_a \omega(t') = \xi(\omega(t')), \quad \omega(t')|_{a=0} = \omega(t).$$

С другой стороны, вектор $x' = f(\omega(t), a)$ удовлетворяет уравнению Ли

$$\partial_a x' = \xi(x'), \quad x'|_{a=0} = \omega(t).$$

Тем самым, оба вектора x' и $\omega(t')$ являются решениями одной и той же задачи Коши. Следовательно, в силу единственности решения верно равенство $x' = \omega(t')$, т. е. выполнено соотношение (10.1). Но это соотношение и означает, что точка $x = \omega(t) \in \Omega$ в результате любого преобразования f_a переходит в точку $x' = \omega(\varphi(t, a)) \in \Omega$, т. е. многообразие Ω инвариантно относительно группы $G^1(\xi)$. ■

11. Регулярно заданные многообразия. В приложениях вместо параметрического задания часто используется так называемое *неявное задание многообразия*. Поскольку для дальнейшего наиболее существенно рассмотрение многообразий в конечномерном пространстве X , далее неявное задание изучается только для этого случая.

Пусть размерность пространства X равна n и $s \leq n$. Для любого непрерывно дифференцируемого отображения $\phi: X \rightarrow R^s$ вводится понятие ранга этого отображения на открытом множестве $V \subset X$. С этой целью рассматривается производная $\partial\phi(x)$, которая есть линейное отображение $X \rightarrow R^s$. *Ранг матрицы $(\partial\phi(x))$ этого линейного отображения* (не зависящий, как известно, от выбора системы координат в X) *называется* **рангом отображения ϕ в точке x** . Говорят, что отображение ϕ имеет ранг на множестве V , если его ранг один и тот же во всех точках $x \in V$.

Если отображение ϕ имеет ранг на V , равный q , то число q называется *рангом отображения ϕ на множестве V* .

Как известно из дифференциальной геометрии, всякое отображение $\phi: V \rightarrow R^s$ класса $C_1(V)$, имеющее ранг на V и такое, что $\phi(x_0) = 0$ для некоторого $x_0 \in V$, задает (локально, в окрестности точки x_0) некоторое многообразие $\Psi \subset X$ как множество тех точек $x \in V$, для которых выполнено равенство

$$\phi(x) = 0. \quad (11.1)$$

Это равенство называется *уравнением многообразия Ψ* . Задание многообразия с помощью уравнения и есть его *неявное задание*.

Уравнение (11.1) называется *регулярным*, а задаваемое им многообразие Ψ — *регулярно заданным многообразием*, если ранг отображения ψ на V равен s . В этом случае размерность многообразия Ψ равна $n - s$.

В системе координат, в которой $x = (x^1, \dots, x^n)$, уравнение (11.1) имеет вид системы из s уравнений

$$\psi^j(x^1, \dots, x^n) = 0 \quad (j = 1, \dots, s), \quad (11.2)$$

а условие регулярности сводится к тому, чтобы матрица Якоби $(\partial_i \psi^j)$ имела ранг s всюду на окрестности V точки x_0 .

Л е м м а. Если многообразие Ψ регулярно задано уравнениями (11.2), то существует такое отображение $x = q(x)$, являющееся диффеоморфизмом некоторой окрестности точки x_0 , что многообразие $\Psi = q(\Psi)$ задается уравнениями

$$x^j = 0 \quad (j = 1, \dots, s). \quad (11.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не нарушая общности, можно считать, что ранговый минор матрицы $(\partial_i \psi^j)$ построен на первых s столбцах (этого всегда можно добиться перенумерацией координат x^i). Тогда всем условиям удовлетворяет отображение q , заданное формулами

$$x^j = \psi^j(x), \quad x^l = x^l \quad (j = 1, \dots, s; l = s + 1, \dots, n). \quad \blacksquare$$

12. Критерий инвариантности. Согласно данному в 3.10 определению инвариантности многообразия заданное уравнением (11.1) многообразие Ψ инвариантно относительно группы $G^1(f)$, если для любых $x \in \Psi$, $a \in K$ будет $\psi(f(x, a)) = 0$. Дифференцирование этого равенства по параметру a в точке $a = 0$ с учетом обозначения 2 (6.1) приводит к необходимому условию инвариантности многообразия (11.1)

$$(\xi \cdot \partial) \psi|_{\Psi} = 0, \quad (12.1)$$

где $\xi \cdot \partial$ — оператор группы G^1 , а знак $|_{\Psi}$ заменяет слова «на многообразии Ψ » и означает, что равенство выполнено для точек $x \in \Psi$.

Оказывается, что для многообразий, регулярно заданных уравнением (11.1), равенство (12.1) является и достаточным условием инвариантности.

Т е о р е м а. Многообразие $\Psi \subset X$, регулярно заданное уравнением (11.1), инвариантно относительно группы $G^1(\xi)$, если и только если выполнено равенство (12.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предыдущего надо доказать только, что если (12.1) выполнено, то многообразие Ψ инвариантно. С этой целью используется свойство инвариантности условия (12.1) относительно подобия. Действительно, если $x = p(x)$ есть диффеоморфизм некоторой окрестности точки $x_0 \in \Psi$, причем $\tilde{\psi}(x) = \psi(x)$, то уравнение $\tilde{\psi}(x) = 0$ задает многообразие $\tilde{\Psi} = p(\Psi)$ и группа $G^1(\xi)$

переходит в подобную ей группу $G^1(\xi)$. При этом, в силу 2(8.2), равенство (12.1) переходит в равенство $(\xi \cdot \partial)\bar{\psi}(x) = 0$ для $x \in \Psi$. Если последнее влечет инвариантность Ψ относительно $G^1(\xi)$, то многообразие Ψ инвариантно относительно $G^1(\xi)$.

Поэтому, в силу регулярности задания Ψ уравнением (11.1) и леммы 3.11, достаточно доказать требуемое утверждение для многообразия Ψ , заданного в системе координат $x = (x^1, \dots, x^n)$ уравнениями (11.3). Пусть в той же системе координат $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ и $f = (f^1, \dots, f^n)$. Тогда условие (12.1) для многообразия (11.3) примет вид

$$\xi^j(0, \dots, 0, x^{s+1}, \dots, x^n) = 0 \quad (j = 1, \dots, s). \quad (12.2)$$

Пусть $x'^j = f^j|_{\Psi} = f^j(0, \dots, 0, x^{s+1}, \dots, x^n, a)$. Тогда уравнение Ли 1(14.2) запишется в виде двух подсистем уравнений

$$\partial_a x'^j = \xi^j(x'^1, \dots, x'^s, x'^{s+1}, \dots, x'^n), \quad x'^j(0) = 0 \quad (j = 1, \dots, s);$$

$$\partial_a x'^l = \xi^l(x'), \quad x'^l(0) = x^l \quad (l = s+1, \dots, n).$$

Теперь видно, что в силу условия (12.2) функции $x'^j \equiv 0$ ($j = 1, \dots, s$) образуют решение первой из этих подсистем. Так как решение задачи Коши для уравнения Ли единственно, то отсюда следует, что для всех $x \in \Psi$ будет $x'^j = f^j(x, a) = 0$ ($j = 1, \dots, s$) для любого $a \in R$, т. е. точка $x' \in \Psi$. Согласно определению 3.10 это и означает, что многообразие (11.3) инвариантно относительно группы $G^1(\xi)$. ■

13. Примеры. Следующие примеры иллюстрируют различные особенности понятия инвариантного многообразия и критерия инвариантности. В них рассматриваются группы G^1 преобразований плоскости $R^2(x, y)$, заданные своими инфинитезимальными операторами вида $\xi \cdot \partial = \alpha(x, y)\partial_x + \beta(x, y)\partial_y$, и многообразия (кривые), заданные уравнением вида $\psi(x, y) = 0$.

(а) Пусть $\xi \cdot \partial = \partial_x + \partial_y$ — оператор переноса и $\psi = x - y$. Здесь $(\xi \cdot \partial)\psi \equiv 0$ и многообразие $\psi = 0$ инвариантно в силу того, что ψ — инвариант группы $G^1(\xi)$. Эта ситуация является общей в двух отношениях.

Во-первых, любое многообразие Ψ , заданное таким уравнением (11.1), в левой части которого находится инвариант ψ , всегда есть инвариантное многообразие. Этот факт очевиден.

Во-вторых, любое инвариантное многообразие Ψ , в определенном смысле не особое для группы преобразований, всегда можно задать таким уравнением вида (11.1), в левой части которого находится инвариант ψ . Этот факт во всей полноте будет изучен в главе V.

(б) Пусть $\xi \cdot \partial = x\partial_x + y\partial_y$ — оператор растяжения и $\psi = x - y$. Здесь $(\xi \cdot \partial)\psi = x - y$ и условие (12.1) выполнено, хотя ψ и не есть инвариант группы $G^1(\xi)$. Универсальный инвариант этой

группы есть $J=y/x$, и с помощью него многообразие $\psi=0$ задается уравнением $J=1$ всюду, кроме особой точки $x=y=0$.

(с) Пусть $\xi \cdot \partial = \partial_y$ — оператор переноса и $\psi=y^2$. Тогда $(\xi \cdot \partial)\psi|_{y=0} = 2y|_{y=0} = 0$ и условие (12.1) выполнено. Однако многообразие $y^2=0$ не инвариантно относительно преобразований группы $G^1(\xi)$, имеющих вид $x'=x$, $y'=y+a$. Здесь противоречия с теоремой 3.12 нет, так как уравнением $y^2=0$ многообразие $y=0$ задано не регулярно.

§ 4. Теория продолжения

1. Пространства полилинейных отображений. Пусть X, Y — банаховы пространства. Отображение $\varphi: X^k \rightarrow Y$ называется *полилинейным* (*k-линейным*), если оно непрерывно в нуле и если для каждого l , $1 \leq l \leq k$, любых векторов $x_1, \dots, x_k, x'_l \in X$ и любых чисел $a, a' \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\begin{aligned} \varphi \langle x_1, \dots, x_{l-1}, ax_l + a'x'_l, x_{l+1}, \dots, x_k \rangle = \\ = a\varphi \langle x_1, \dots, x_{l-1}, x_l, x_{l+1}, \dots, x_k \rangle + \\ + a'\varphi \langle x_1, \dots, x_{l-1}, x'_l, x_{l+1}, \dots, x_k \rangle. \end{aligned}$$

Совокупность всех полилинейных отображений $\varphi: X^k \rightarrow Y$ образует банахово пространство, обозначаемое символом $\mathcal{L}^k(X; Y)$. Частным случаем полилинейных отображений являются линейные отображения $X \rightarrow Y$, образующие банахово пространство $\mathcal{L}(X; Y)$.

Полилинейное отображение $\varphi: X^k \rightarrow Y$ называется *симметричным*, если равенство

$$\varphi \langle x_{r_1}, x_{r_2}, \dots, x_{r_k} \rangle = \varphi \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle$$

выполнено для любых векторов $x_1, \dots, x_k \in X$ и любых перестановок $(r_1, \dots, r_k)$ индексов $(1, \dots, k)$. Симметричные k -линейные отображения $\varphi: X^k \rightarrow Y$ также образуют банахово пространство, которое будет обозначаться символом $\mathcal{L}_s^k(X; Y)$. Очевидно, что $\mathcal{L}_s^1(X; Y) = \mathcal{L}(X; Y)$.

Примером симметричных полилинейных отображений являются производные отображения $u: X \rightarrow Y$ класса $C_\infty(X)$. Как известно из анализа, производная $\partial^k u(x)$ есть симметричное k -линейное отображение $X^k \rightarrow Y$, значение которого на наборе векторов $x_1, \dots, x_k \in X$ есть $\partial^k u(x) \langle x_1, \dots, x_k \rangle$. При этом справедлива формула дифференцирования

$$\partial(\partial^k u(x) \langle x_1, \dots, x_k \rangle) \langle x_{k+1} \rangle = \partial^{k+1} u(x) \langle x_1, \dots, x_k, x_{k+1} \rangle.$$

В дальнейшем, если это не будет вызывать недоразумений, производная $\partial^k u(x)$ будет обозначаться просто символом $\partial^k u$ (точка x подразумевается).

2. Продолжения пространства. Пространство $Y_k = \mathcal{L}_k^p(X; Y)$ будет называться *k -м продолжением пространства Y с помощью X* . Общий вектор пространства Y_k будет обозначаться y_k .

Пусть $Z = X \times Y$. Пространство $Z_1 = Z \times Y_1$ называется *первым продолжением пространства Z* . Продолжения высших порядков определяются индуктивно: $Z_k = Z_{k-1} \times Y_k$ ($k = 2, 3, \dots$). Пространство Z_k называется *k -м продолжением пространства Z* . Общий вектор пространства Z_k обозначается символом z_k .

Если $x \in X$, $y \in Y$, то этот вектор представляет собой набор

$$z_k = (x, y, y_1, \dots, y_k). \quad (2.1)$$

В конечномерном случае, когда $X = R^n$, $Y = R^m$, $Z = R^{n+m}$, координатная запись рассматриваемых векторов такова:

$$x = (x^1, \dots, x^n), \quad y = (y^1, \dots, y^m), \\ y = (y_1^1, \dots, y_1^m, \dots, y_k^1, \dots, y_k^m), \dots, y_k = (\dots, y_k^1, \dots, y_k^m),$$

где индексы $i, i_1, \dots, i_k$ независимо друг от друга пробегают значения $1, \dots, n$, а индекс l принимает значения $1, \dots, m$. При этом величины $y_{i_1 \dots i_k}^l$ предполагаются симметричными относительно индексов $i_1, \dots, i_k$ (т. е. не зависят от их перестановок). Размерность пространства Y_k есть $\dim Y_k = m \binom{n+k-1}{k}$.

3. Продолжение операторов дифференцирования. В соответствии с записью (2.1) оператор дифференцирования ∂ отображений $Z_k \rightarrow P$ представляется в виде набора операторов дифференцирования отображений пространств $X, Y, Y_1, \dots, Y_k$, а именно

$$\partial = (\partial_x, \partial_0, \partial_1, \dots, \partial_k),$$

где $\partial_0 = \partial_y$. Дифференциальный оператор

$$D = \partial_x + y_1 \cdot \partial_0 + y_2 \cdot \partial_1 + \dots + y_k \cdot \partial_{k-1} + \dots \quad (3.1)$$

называется *оператором полного дифференцирования*. Формально сумму можно считать продолженной до бесконечности, так как оператор полного дифференцирования будет применяться только к отображениям $F: Z_k \rightarrow P$ с конечным k , на которые он действует по формуле

$$DF = \partial_x F + y_1 \cdot \partial_0 F + y_2 \cdot \partial_1 F + \dots + y_{k+1} \cdot \partial_k F. \quad (3.2)$$

Наряду с оператором полного дифференцирования (3.1) в некоторых вопросах удобно пользоваться *усеченными* операторами полного дифференцирования

$$D = \partial_x, \quad D = \partial_x + y \cdot \partial_y, \quad D = \partial_x + y \cdot \partial_y + y \cdot \partial_z, \dots, \quad (3.3)$$

определяемыми рекуррентной формулой

$$D_{k+1} = D_k + y \cdot \partial_y \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (3.4)$$

Оператор дифференцирования ∂ следует рассматривать как вектор сопряженного пространства Y_k^* . В конечномерном случае в обозначениях 4.2 его координаты суть частные производные

$$\partial_{i_1 \dots i_k}^l = \partial^k / \partial y_{i_1 \dots i_k}^l.$$

Оператор $y \cdot \partial_{k+1}$ есть вектор сопряженного пространства X^* . В конечномерном случае его j -я координата представляет собой сумму (k фиксировано)

$$y_{i_1 \dots i_{k+j}}^l (\partial^k / \partial y_{i_1 \dots i_k}^l)$$

по всем значениям $l=1, \dots, m$ и всевозможным сочетаниям $(i_1, \dots, i_k)$ чисел $(1, 2, \dots, n)$. Всего в этой сумме $\dim Y_k$ слагаемых.

Соответственно этому оператор полного дифференцирования D также есть вектор сопряженного пространства X^* . В конечномерном случае его j -я координата обозначается символом D_j (не смешивать с символом D !).

4. Продолжение отображений. Каждое отображение $u: X \rightarrow Y$ класса $C_\infty(X)$, действующее по формуле $y = u(x)$, продолжается до отображения $X \rightarrow Y_k$. Это продолжение осуществляется с помощью операторов дифференцирования ∂_x^k и дается производными $\partial_x^k u: X \rightarrow Y_k$, $\partial_x^2 u: X \rightarrow Y_2, \dots$, действующими по формуле

$$y = \partial_x^k u(x) \quad (k=1, 2, \dots).$$

Тем самым каждое отображение $u: X \rightarrow Y$ продолжается до отображения $u: X \rightarrow Z_k$. Продолженное отображение u действует по формуле

$$u(x) = (x, u(x), \partial_x u(x), \dots, \partial_x^k u(x)) \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (4.1)$$

В частности, $u(x) = (x, u(x))$ есть «нулевое продолжение» отображения $u: X \rightarrow Y$ до отображения $u: X \rightarrow Z$.

Необходимо заметить, что в силу определений (2.1) и (4.1) для отображений $v: Z_k \rightarrow P$ и $u: X \rightarrow Y$ можно образовать композицию $v \circ_k u: X \rightarrow P$, действующую по формуле $(v \circ_k u)(x) = v(u(x))$. Дифференцирование таких композиций осуществляется с помощью оператора полного дифференцирования (3.1).

Лемма. Для отображений $v: Z_k \rightarrow P$ и $u: X \rightarrow Y$ справедливы формулы дифференцирования композиции

$$\partial_x (v \circ_k u)(x) = (Dv)_{k+1} \circ_k u(x) \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (4.2)$$

Доказательство. Применение правила дифференцирования композиции дает

$$\begin{aligned} \partial_x (v \circ_k u)(x) &= \\ &= \partial_x v(u(x)) + (\partial v(u))_0 \circ_k (\partial_x u(x)) + (\partial v(u))_1 \circ_k (\partial_x^2 u(x)) + \dots + \\ &+ (\partial v(u))_k \circ_k (\partial_x^{k+1} u(x)) = ((\partial_x + y \cdot \partial + y \cdot \partial + \dots + y \cdot \partial) v) \circ_k u(x) = \\ &= (Dv)_{k+1} \circ_k u(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

5. Продолжение преобразования. В обозначениях 4.2 рассматривается преобразование $h: Z \rightarrow Z$ класса $C_\infty(Z)$, действующее по формуле $z' = h(z)$. Так как $Z = X \times Y$, то эта формула может быть записана в компонентах $z' = (x', y')$, где

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y). \quad (5.1)$$

Предполагается выполненным следующее условие: линейное отображение $\partial_x f(z): X \rightarrow X$ является гомеоморфизмом пространства X . В локальной теории выполнение этого условия требуется лишь для точек $z \in W$, где W — некоторое открытое множество в Z , в связи с чем это условие записывается в виде

$$\partial_x f(z) \in GL(X) \quad (z \in W). \quad (5.2)$$

Если условие (5.2) выполнено и если $B_\rho \subset Y_1$ есть шар с центром в нуле радиуса ρ , то, сужая при необходимости множество W , всегда можно найти такое ρ , что для всех $z \in W_1 = W \times B_\rho$ линейное отображение $Df(z) = \partial_x f(z) + y \cdot \partial_y f(z)$ также будет гомеоморфизмом пространства X . Дальнейшие рассуждения относятся к точкам $z \in W_1$.

Преобразование h продолжается до преобразования $h: Z_s \rightarrow Z_s$ ($s=1, 2, \dots$), первые две компоненты которого суть (5.1), а

последующие записываются формулами вида

$$y'_k = v_k(z) = v_k(x, y, y_1, \dots, y_k) \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (5.3)$$

где отображения $v_k: Z_k \rightarrow Y_k$ определяются рекуррентными формулами

$$v_1 = (Dg)_1 \circ (Df)_1^{-1}, \quad v_k = (Dv_k)_{k-1} \circ (Df)_1^{-1} \quad (k = 2, 3, \dots). \quad (5.4)$$

Полученное преобразование $h: Z_s \rightarrow Z_s$ действует по формуле $z'_s = h(z_s) = (f, g, v_1, \dots, v_s)$ и называется s -м продолжением преобразования h .

На первый взгляд формулы (5.4) выглядят искусственными, но в действительности они имеют простую аналитическую природу. Пусть дано отображение $u: X \rightarrow Y$, действующее по формуле $y = u(x)$. С помощью преобразования (5.1) отображение u переходит в новое отображение u' , действующее по формуле $y' = u'(x')$. Это новое отображение получается исключением x из уравнений

$$x' = f(x, u(x)), \quad u' = g(x, u(x)). \quad (5.5)$$

Формулы (5.4) устроены так, что они дают значения производных $\partial_x^k u'(x')$, выражая их через значения производных $\partial_x^k u(x)$. В следующей лемме это свойство формулируется в обозначениях (4.1).

Лемма. С отображениями (5.4) справедливы тождества

$$\partial_x^k u'(x') = v_k \circ u(x), \quad x' = f \circ u(x) \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (5.6)$$

Доказательство. Из определения отображения u' с помощью уравнений (5.5) следует тождество

$$\begin{aligned} \partial_x u'(x') \circ [\partial_x f(u(x)) + \partial_y f(u(x)) \circ \partial_x u(x)] &= \\ &= \partial_x g(u(x)) + \partial_y g(u(x)) \circ \partial_x u(x), \end{aligned}$$

в котором $x' = f(u(x))$. В силу очевидного равенства

$$\partial_x f(u(x)) + \partial_y f(u(x)) \circ \partial_x u(x) = (Df)_1 \circ u(x)$$

и ему аналогичного для отображения g это тождество переписывается в виде

$$\partial_x u'(x') \circ (Df)_1 \circ u(x) = Dg_1 \circ u(x).$$

С другой стороны, если первое из равенств (5.4) переписать в виде $v \circ D f = D g$ и взять его композицию с $u(x)$, то получится тождество

$$(v \circ u(x)) \circ (D f \circ u(x)) = D g \circ u(x).$$

Сравнение с предыдущим тождеством показывает, что $\partial_x u'(x') = v \circ u(x)$, т. е. что (5.6) верно при $k=1$.

Пусть теперь (5.6) верно при некотором k . Дифференцирование его по x и использование леммы 4.4 дает

$$(\partial_x^{k+1} u'(x')) \circ (D f \circ u(x)) = (D v) \circ u(x).$$

С другой стороны, если равенство (5.4) после замены k на $k+1$ переписать в виде $v \circ D f = D v$ и взять его композицию с $u(x)$, то получится

$$(v \circ u(x)) \circ (D f \circ u(x)) = (D v) \circ u(x).$$

Сравнение с предыдущим приводит к равенству (5.6) с $k+1$ вместо k . ■

6. Основное свойство продолжения. Пусть h и $\bar{h}$ — два преобразования пространства $Z = X \times Y$. Для группового анализа имеет фундаментальное значение свойство равенства двух преобразований продолженного пространства Z_k : k -го продолжения композиции $\bar{h} \circ h$ и композиции k -х продолжений $\bar{h} \circ h$. Хотя это свойство почти очевидно, ввиду его исключительной важности для всего дальнейшего его стоит выделить и подробно доказать.

Лемма. Продолжение композиции преобразований равно композиции продолженных преобразований, т. е. $\bar{h} \circ h = \bar{h} \circ h$.

Доказательство. Пусть $h = (f, g)$, $\bar{h} = (\bar{f}, \bar{g})$ и $z' = h(z)$.

Вначале устанавливается тождество, справедливое для любого отображения $F: Z_k \rightarrow P$

$$D F'(z) = D F(z') \circ D f(z), \quad (6.1)$$

в котором $F'(z) = F \circ h(z) = F(z')$. Для его получения надо заметить, что в силу определения (5.3) операторы ∂ действуют на отображение $z \rightarrow F'(z)$ по формуле

$$\partial F'(z) = \sum_{\sigma=1}^k \partial F(z') \circ \partial v(z),$$

где принято условное обозначение $\partial = \partial_x$. Если положить еще $y = I_x$, то с помощью этой формулы и (5.4) получается, что

$$\begin{aligned} DF'_k(z) &= \sum_{s=-1}^k y_{s+1} \cdot \partial F'_k(z) = \\ &= \sum_{\sigma=-1}^k \partial F(z') \circ \sum_{s=-1}^k y_{s+1} \cdot \partial v(z) = \sum_{\sigma=-1}^k \partial F(z') \circ D v(z) = \\ &= \sum_{\sigma=-1}^k y'_{\sigma+1} \cdot \partial F(z') \circ D f(z) = DF(z') \circ D f(z), \end{aligned}$$

т. е. равенство (6.1) верно.

Введение компонент произведения $Z_k = Z \times Y_1 \times \dots \times Y_k$ приводит к представлению

$$\bar{h} \circ h(z) = \bar{h}(z') = (\bar{h}(z'), \bar{v}(z'), \dots, \bar{v}(z')),$$

где отображения $\bar{v}$ определены формулами (5.4) через отображение $\bar{h} = (\bar{f}, \bar{g})$. Пусть аналогичное представление продолжения композиции есть

$$\bar{h} \circ h(z) = (\bar{h} \circ h(z), \bar{v}(z), \dots, \bar{v}(z)).$$

Так как $\bar{h}(z') = \bar{h} \circ h(z)$, то для доказательства леммы требуется установить справедливость равенств

$$\bar{v}(z) = \bar{v}(z') \quad (s = 1, 2, \dots, k), \quad (6.2)$$

где $z' = h(z)$.

Пусть $\bar{f}(z) = f(z')$, $\bar{g}(z) = g(z')$, так что $\bar{h} \circ h = (\bar{f}, \bar{g})$. В силу тождества (6.1) справедливы равенства

$$D\bar{f}(z) = Df(z') \circ Df(z), \quad D\bar{g}(z) = Dg(z') \circ Df(z).$$

Отсюда в силу определения (5.4) получается

$$\bar{v}(z) = D\bar{g}(z) \circ [D\bar{f}(z)]^{-1} = Dg(z') \circ [Df(z')]^{-1} = \bar{v}(z'),$$

т. е. равенство (6.2) для $s=1$. Если допустить, что (6.2) верно для $s=k-1$, то тогда в силу (5.4) и (6.1) получится

$$\begin{aligned} \bar{v}(z) &= D\bar{v}(z) \circ [D\bar{f}(z)]^{-1} = \\ &= D(\bar{v}(z')) \circ [D\bar{f}(z)]^{-1} = [D\bar{v}(z') \circ Df(z)] \circ [Df(z') \circ Df(z)]^{-1} = \\ &= D\bar{v}(z') \circ [Df(z')]^{-1} = \bar{v}(z'), \end{aligned}$$

т. е. равенство (6.2) для $s=k$. ■

7. Продолжение группы. Пусть G^1 — группа Ли преобразований пространства $Z = X \times Y$, порожденная локальным действием $h: Z \times R \rightarrow Z$. В результате продолжения каждого преобразования $h_a \in G^1$ до преобразования h_a пространства Z_k получится однопараметрическое семейство преобразований, порожденное отображением $h_k: Z_k \times R \rightarrow Z_k$.

Отображение h_k является действием аддитивной группы R на пространстве Z_k . Действительно, в силу леммы 4.6 соотношению $h_a \circ h_b = h_{a+b}$ соответствует соотношение $h_a \circ h_b = h_{a+b}$, т. е. выполнено определение действия 1.1.

Благодаря этому факту легко проверяется, что отображение h_k обладает всеми описанными в определении 1.9 свойствами отображения, порождающего локальную непрерывную однопараметрическую группу локальных преобразований пространства Z_k . В частности, множество V , на котором определены и принадлежат классу $C_\infty(V)$ все преобразования h_a для $a \in \Delta$, формируется с учетом замечания, сделанного в 4.5 в связи с условием (5.2).

Итак, продолженное отображение $h_k: Z_k \times R \rightarrow Z_k$ порождает группу $G^1(h_k)$ локальных преобразований пространства Z_k . Эта группа обозначается G_k^1 или $G_k^1(h)$ и называется *продолженной группой, получаемой k -м продолжением группы $G^1(h)$* .

В дальнейшем порождающее группу G^1 преобразований пространства $Z = X \times Y$ отображение $h = (f, g)$ будет задаваться формулами вида

$$x' = f(x, y, a), \quad y' = g(x, y, a), \quad (7.1)$$

а лежащие в Y_k компоненты k -го продолжения h_k отображения h — формулами вида

$$y'_k = v(x, y, y_1, \dots, y_k, a), \quad (7.2)$$

причем отображения v определяются по f, g формулами (5.4).

Пример. Группа переносов в $Z = X \times Y$ порождается отображением $h(x, y, a) = (x, y) + (\lambda, \mu)a$, где $x, \lambda \in X, y, \mu \in Y$ и $a \in R$, причем λ и μ — постоянные векторы. Здесь $f(x, y, a) = x + \lambda a, g(x, y, a) = y + \mu a$ и формула (3.2) дает $Df = I_X, Dg = I_Y$. Поэтому здесь $v = y$, и так как, согласно формуле (3.2), $Dy = y$ для любого k , то формула (5.4) дает $v = y$. Следовательно,

при всех $a \in R$ продолженные преобразования имеют вид

$$(x', y', y'_1, \dots, y'_k) = (x + \lambda a, y + \mu a, y_1, \dots, y_k),$$

т. е. все преобразования h_a группы G^1 оставляют неизменными все компоненты $y, \dots, y_k$ и фактически сводятся к преобразованиям пространства Z . Другими словами, продолженные отображения h_k действуют тривиально на пространстве $Y_1 \times \dots \times Y_k$. Выражая этот факт, говорят, что группа переносов «не продолжаема».

Замечание. Если группы $G^1(h)$ и $\bar{G}^1(h)$ подобны (см. 1.11), т. е. с некоторым преобразованием p пространства Z преобразования h_a и $\bar{h}_a$ связаны формулой $\bar{h}_a = p \circ h_a \circ p^{-1}$, то в силу леммы 4.6 продолженные преобразования будут связаны формулой $\bar{h}_a = p \circ h_a \circ p^{-1}$. Следовательно, продолженные группы G^1 и $\bar{G}^1$ также подобны и для них преобразованием подобия является продолженное преобразование p .

8. Продолжение инфинитезимального оператора. Пусть ζ есть касательное векторное поле группы $G^1(h)$ преобразований пространства $Z = X \times Y$. Поскольку ζ есть отображение $Z \rightarrow Z$, то можно положить $\zeta = (\xi, \eta)$, где ξ — компонента вектора ζ в X и η — его компонента в Y . Если порождающее группу отображение h задано формулами (7.1), то эти компоненты в силу формулы 1 (13.1) вычисляются так:

$$\xi(x, y) = \partial_a f(x, y, 0), \quad \eta(x, y) = \partial_a g(x, y, 0). \quad (8.1)$$

Соответственно этим обозначениям инфинитезимальный оператор группы $G^1(\zeta)$ имеет вид

$$\zeta \cdot \partial = \xi \cdot \partial_x + \eta \cdot \partial_y. \quad (8.2)$$

Касательный вектор ζ продолженной группы $G^1(h)$ записывается в виде

$$\zeta = (\xi, \eta, \eta_1, \dots, \eta_k), \quad (8.3)$$

где η ($s = 1, \dots, k$) — компоненты вектора $\zeta \in Z_k$ в продолженном пространстве Y_k . Все компоненты η ($k = 1, 2, \dots$) выражаются через ξ, η с помощью так называемых *формул продолжения векторного поля* $\zeta = (\xi, \eta)$.

Вывод формул продолжения основан на том, что в силу (7.2) и определения 1.13 справедливо равенство $\eta = \partial_a v(z, 0)$. Так как

оператор полного дифференцирования D перестановочен с дифференцированием по параметру a , то рекуррентная формула (5.4), переписанная в виде $v \cdot Df = Dv$, после дифференцирования по a в точке $a=0$ и учета того, что $v(z, 0) = y$, перейдет в соотношение

$$\eta_{k+1} + y \cdot D\xi = D\eta.$$

Отсюда, считая, что $\eta = \eta_0$, окончательно получается рекуррентная формула продолжения векторного поля

$$\eta_{k+1} = D\eta_k - y \cdot D\xi_k \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (8.4)$$

В некоторых приложениях удобна равносильная этому рекуррентному соотношению явная формула

$$\eta_k = D^k(\eta - y \cdot \xi) + y \cdot \xi, \quad (8.5)$$

где D^k есть k -я степень оператора полного дифференцирования (3.1).

В соответствии с представлением (8.3) касательного вектора продолженной группы $G^1_k(\zeta)$ ее инфинитезимальный оператор таков:

$$\zeta \cdot \partial = \xi \cdot \partial_x + \eta \cdot \partial_y + \eta_1 \cdot \partial_1 + \dots + \eta_k \cdot \partial_k. \quad (8.6)$$

Оператор (8.6) называется *продолженным оператором* или *k -м продолжением оператора* (8.2).

9. Стандартные коммутаторы. Пусть дана последовательность отображений $\sigma: Z_k \rightarrow Z_\infty$ класса $C_\infty(Z_k)$ ($k=-1, 0, 1, 2, \dots$), где $Z_{-1} = Z_0 = Z$, а Z_∞ обозначает бесконечное продолжение пространства Z (объединение всех Z_k). Рассматривается образованный с помощью этой последовательности бесконечный оператор (сумма формальная)

$$\sigma \cdot \partial = \sum_{k=-1}^{\infty} \sigma_k \cdot \partial_k \quad (\partial = \partial_x, \partial = \partial_y). \quad (9.1)$$

Пусть $\tau \cdot \partial$ — другой, аналогичный (9.1), бесконечный оператор. Коммутатором этих операторов называется бесконечный оператор

$$[\tau \cdot \partial, \sigma \cdot \partial] = ((\tau \cdot \partial)\sigma - (\sigma \cdot \partial)\tau) \cdot \partial = \sum_{k=-1}^{\infty} ((\tau \cdot \partial)_k \sigma_k - (\sigma \cdot \partial)_k \tau_k) \cdot \partial_k. \quad (9.2)$$

Ниже рассматриваются некоторые коммутаторы, называемые *стандартными* в том смысле, что для них дается явное выражение. Они образуются для операторов полного дифференцирования D_k

или бесконечного оператора полного дифференцирования (3.1),

$$D = \sum_{k=-1}^{\infty} y_{k+1} \cdot \partial_k,$$

где $y_{-1} \cdot \partial_{-1} = \partial_x$, и продолженного до бесконечности оператора (8.2)

$$\zeta \cdot \partial = \sum_{k=-1}^{\infty} \eta_k \cdot \partial_k,$$

где $\eta_{-1} \cdot \partial_{-1} = \xi \cdot \partial_x$, $\eta_0 \cdot \partial_0 = \eta \cdot \partial_y$. Вначале получается выражение для основного стандартного коммутатора.

Лемма. Справедливо равенство

$$[D, \zeta \cdot \partial] = D\xi \cdot D. \quad (9.3)$$

Доказательство. В силу формулы (8.4)

$$D\eta_k - (\zeta \cdot \partial) y_{k+1} = \eta_{k+1} + y_{k+1} \cdot D\xi_1 - \eta_{k+1} = y_{k+1} \cdot D\xi_1.$$

Поэтому, согласно определению коммутатора (9.2),

$$\begin{aligned} [D, \zeta \cdot \partial] &= \sum_{k=-1}^{\infty} (D\eta_k - (\zeta \cdot \partial) y_{k+1}) \cdot \partial_k = \sum_{k=-1}^{\infty} (y_{k+1} \cdot D\xi_1) \cdot \partial_k = \\ &= D\xi_1 \cdot \sum_{k=-1}^{\infty} y_{k+1} \cdot \partial_k = D\xi \cdot D, \end{aligned}$$

где предпоследнее равенство выполнено благодаря симметрии $(k+1)$ -линейного отображения y_{k+1} , а последнее — ввиду того, что $\xi: Z \rightarrow X$. ■

Из (9.3) выводятся другие стандартные коммутаторы. Например, если оператор $\zeta \cdot \partial$ заменить оператором $\zeta_k \cdot \partial_k$, то все суммы оказываются конечными и (9.3) дает формулу стандартного коммутатора

$$[D, \zeta_k \cdot \partial_k] = D\xi_k \cdot D. \quad (9.4)$$

Далее с помощью равенства (9.3), переписанного в виде

$$D(\zeta \cdot \partial) = (\zeta \cdot \partial)D + D\xi \cdot D,$$

вычисляется коммутатор

$$\begin{aligned} [D^2, \zeta \cdot \partial] &= D^2(\zeta \cdot \partial) - (\zeta \cdot \partial)D^2 = D((\zeta \cdot \partial)D + D\xi \cdot D) - (\zeta \cdot \partial)D^2 = \\ &= (D(\zeta \cdot \partial))D + D^2\xi \cdot D + D\xi \cdot D^2 - (\zeta \cdot \partial)D^2 = D^2\xi \cdot D + 2D\xi \cdot D^2. \end{aligned}$$

Путем аналогичных вычислений без каких-либо особых затруднений получается выражение стандартного коммутатора (проверяется индукцией по k)

$$[D^k, \zeta \cdot \partial] = \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} D^{k-l} \xi \cdot D^{l+1}, \quad (9.5)$$

частным случаем которого (при $k=1$) является (9.3). Найденные стандартные коммутаторы будут использованы в §§ 19, 24.

10. Конечномерный случай. Если $X=R^n$, $Y=R^m$, $Z=R^{n+m}$, то принимаются обозначения 4.2 и предполагается, что $\xi=(\xi^1, \dots, \xi^n)$ и $\eta=(\eta^1, \dots, \eta^m)$. В этом случае оператор (8.2) записывается в виде

$$\zeta \cdot \partial = \xi^i \partial_i + \eta^k \partial_k, \quad (10.1)$$

где $\partial_i = \partial_{x^i}$, $\partial_k = \partial_{y^k}$. Вектор η имеет скалярные компоненты $\eta_{i_1 \dots i_k}^l$ симметричные относительно перестановок нижних индексов, каждый из которых пробегает значения $1, \dots, n$; индекс l принимает значения $1, \dots, m$. В этих предположениях, с учетом обозначений 4.3, из формул продолжения (8.4) следуют выражения для координат вектора η_{k+1}

$$\begin{aligned} \eta_{i_1 \dots i_{k+1}}^l &= \\ &= \left(\partial_j + \sum_{s=0}^k y_{j_1 \dots j_s}^r \partial_{j_s}^{j_1 \dots j_s} \right) \eta_{i_1 \dots i_k}^l - y_{i_1 \dots i_k}^l (\partial_j + y_j^r \partial_r) \xi^l, \end{aligned} \quad (10.2)$$

где предполагается суммирование по индексам i, r, l и всевозможным различным (с учетом симметрии) наборам $(j_1, \dots, j_s)$.

В приложениях особенно часто встречаются значения $k=0$ или $k=1$. При $k=0$ из (10.2) получаются *формулы первого продолжения* для координат вектора η_1

$$\eta_j^l = \partial_j \eta^l + y_j^r \partial_r \eta^l - y_j^l \partial_j \xi^r - y_j^r y_j^s \partial_s \xi^r. \quad (10.3)$$

При $k=1$ получаются *формулы второго продолжения*, которые состоят из формул (10.3) и вытекающих из (10.2) формул для координат вектора η_2

$$\eta_{ij}^l = \partial_j \eta_i^l + y_j^r \partial_r \eta_i^l + y_{ij}^r \partial_r \eta_i^l - y_{ij}^l \partial_j \xi^r - y_{ij}^r y_j^s \partial_s \xi^r. \quad (10.4)$$

11. Пример. Для группы проективных преобразований плоскости из примера 1.10 $X=R(x)$, $Y=R(y)$, $Z=R^2(x, y)$ и формулы (7.1) таковы:

$$x' = f(x, y, a) = \frac{x}{1-ax}, \quad y' = g(x, y, a) = \frac{y}{1-ax}.$$

Инфинитезимальный оператор этой группы есть $\zeta \cdot \partial = x^2 \partial_x + xy \partial_y$. Так как здесь все пространства $Y_k = \mathcal{L}_k^*(R; R)$ одномерны, то все $y \in R$ и можно использовать упрощенные обозначения $y = y_k$.

Последовательное вычисление первого продолжения дает

$$Df_1 = (1 - ax)^{-2}, \quad Dg_1 = (ay + (1 - ax)y_1)(1 - ax)^{-2}$$

и по формуле (5.4)

$$y'_1 = ay + (1 - ax)y_1.$$

Следовательно, $\eta_1 = \partial_a y'_1(0) = y - xy_1$ и первое продолжение оператора $\zeta \cdot \partial$ таково:

$$\zeta \cdot \partial = x^2 \partial_x + xy \partial_y + (y - xy_1) \partial_{y_1}.$$

Для построения второго продолжения вычисляется

$$Dv_1 = (\partial_x + y_1 \partial_y + y_2 \partial_{y_1})(ay + (1 - ax)y_1) = (1 - ax)y_2.$$

По формуле (5.4) находится $v_2 = (1 - ax)^3 y_2$ и затем

$$\eta_2 = \partial_a ((1 - ax)^3 y_2)(0) = -3xy_2.$$

Второе продолжение оператора $\zeta \cdot \partial$ таково:

$$\zeta \cdot \partial = x^2 \partial_x + xy \partial_y + (y - xy_1) \partial_{y_1} - 3xy_2 \partial_{y_2}.$$

12. Дифференциальные инварианты. Инварианты продолженной группы G_k^1 называются *дифференциальными инвариантами группы G_k^1* . Они представляют собой отображения $F: Z_k \rightarrow R$. *Инвариант группы G_k^1 , фактически зависящий от вектора y , называется дифференциальным инвариантом порядка k группы G_k^1* . В этом смысле все инварианты группы G_k^1 суть ее дифференциальные инварианты нулевого порядка.

Универсальный инвариант продолженной группы G_k^1 называется *универсальным дифференциальным инвариантом порядка k группы G_k^1* .

В силу критерия 3(4.1) все дифференциальные инварианты F группы $G_k^1(\zeta)$ порядка не выше чем k являются решениями дифференциального уравнения

$$(\zeta \cdot \partial)_k F(z) = 0, \quad (12.1)$$

в котором $(\zeta \cdot \partial)_k$ есть продолженный оператор (8.6). Универсальный дифференциальный инвариант порядка k производит общее решение уравнения (12.1).

Например, для группы проективных преобразований плоскости из 4.11 все дифференциальные инварианты F порядка не выше второго должны быть решениями уравнения

$$x^2 \partial_x F + xy \partial_y F + (y - xy_1) \partial_{y_1} F - 3xy_2 \partial_{y_2} F = 0.$$

Здесь универсальный инвариант, как отображение $R^4(x, y, y_1, y_2) \rightarrow R^3$, легко строится путем отыскания трех независимых первых интегралов сопряженной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy} = \frac{dy_1}{y - xy_1} = \frac{dy_2}{-3xy_2}$$

и может быть взят таким:

$$J(x, y, y_1, y_2) = (y/x, y - xy_1, x^3 y_2).$$

Поэтому общий вид дифференциального инварианта порядка не выше второго таков:

$$F(x, y, y_1, y_2) = \Phi \circ J(x, y, y_1, y_2) = \Phi(y/x, y - xy_1, x^3 y_2),$$

где $\Phi: R^3 \rightarrow P$ — произвольная функция трех переменных.

Если многообразие $\Psi \subset Z_k$, заданное с помощью некоторого отображения $\psi: Z_k \rightarrow R^s$ уравнением вида

$$\psi(z) = 0, \quad (12.2)$$

является инвариантным многообразием группы G^1 , то Ψ называется также *дифференциальным инвариантным многообразием группы G^1* .

Дифференциальные инварианты и дифференциальные инвариантные многообразия групп G^1 являются одним из основных объектов группового анализа дифференциальных уравнений. Развитие соответствующей теории связано с решением ряда конкретных задач, которые будут рассмотрены в последующих главах.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ I

Первое подробное изложение основных элементов теории непрерывных групп преобразований дано в трехтомной монографии Ли—Энгеля [1]. За прошедшие сто лет оформление этой теории претерпело значительные изменения. Хотя в сравнительно недавно вышедших книгах [2], [3] она еще преподносилась в духе Ли, ее современное изложение [4] имеет мало общего с первоначальным. Необходимая для группового анализа дифференциальных уравнений теория продолжения в ее полном объеме, данном в § 4, излагается здесь впервые. Современное состояние и основные задачи группового анализа дифференциальных уравнений освещались в ряде обзоров, например в статье [5] и докладе [6]. Результаты решения ряда конкретных задач, рассмотренных в настоящей книге, систематизированы в [7]. В обзоре [8] содержатся сведения о результатах, полученных методами теории групп Ли до 1973 г.

- [1] Lie S., Engel F. Theorie der Transformationsgruppen, Bd. 1—3. Leipzig, Teubner, 1888, 1890, 1893.
- [2] Эйзенхарт Л. П. Непрерывные группы преобразований. М., ИЛ, 1974.
- [3] Чеботарев Н. Г. Теория групп Ли. М., Гостехиздат, 1949.
- [4] Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. М., Гостехиздат, 1954.
- [5] Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнений механики — В сб. «Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа», М., «Наука», (1972), 381—393.
- [6] Овсянников Л. В. Some Problems Arising in Group Analysis of Differential Equations. — Proc. of Symposium «Symmetry, Similarity and Group Theoretic Methods in Mechanics», Calgary, Canada, Aug. 19—21 (1974), 181—202.
- [7] Ибрагимов Н. Х. Группы Ли в некоторых вопросах математической физики. Новосибирск, НГУ, 1972.
- [8] Овсянников Л. В., Ибрагимов Н. Х. Групповой анализ дифференциальных уравнений механики. — Итоги науки и техники. Общая механика, 2, М. (1975), 5—52.

ГЛАВА II

ГРУППЫ, ДОПУСКАЕМЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Для целей группового анализа оказывается удобной и существенной трактовка дифференциального уравнения E (системы дифференциальных уравнений) как многообразия в продолженном пространстве. Геометрический язык позволяет вполне естественно определить понятие инвариантности дифференциального уравнения относительно группы преобразований и использовать инфинитезимальный критерий инвариантности. По предложению С. Ли, говорят, что E допускает группу (или оператор), если E есть инвариантное многообразие надлежаче продолженной группы. В настоящей главе ставится и решается задача об отыскании и предварительном изучении совокупности всех групп G^1 , допускаемых данным дифференциальным уравнением E .

Эта задача дает замечательный пример того, что при инфинитезимальном подходе (т. е. при использовании оператора вместо самой группы) происходит линеаризация задачи. Условие инвариантности E приводит к системе линейных и однородных дифференциальных уравнений, в которых искомыми являются координаты допускаемого оператора, — системе определяющих уравнений DE . Здесь действует четкий и хорошо апробированный алгоритм перехода $E \rightarrow DE$, который может выполняться с помощью ЭВМ. Теоретическое значение таких построений состоит в том, что при этом возникает понятие основной группы GE преобразований, допускаемой уравнением E .

Наиболее важным для приложений свойством основной группы GE является то, что она действует на множестве решений, т. е. любое решение уравнения E преобразует снова в решение того же уравнения E . Изучение этого действия и его использование для конструирования решений есть одна из главных задач группового анализа дифференциальных уравнений, которая будет подробно рассмотрена в главе V.

Другой практически важной задачей, рассматриваемой в этой главе, является задача групповой классификации дифференциальных уравнений $E(\theta)$, содержащих так называемый «произвольный элемент» θ . Здесь приведены все необходимые сведения и разработаны алгоритмы, используемые при решении этой задачи, что открывает возможность для целенаправленного отбора зна-

чений и форм экспериментально определяемых физических величин и зависимостей θ , входящих в математическую модель $E(\theta)$.

Определяющие уравнения естественным образом порождают новый математический объект — алгебру Ли операторов. Хотя подробное абстрактное описание этого объекта будет дано только в главе IV, уже здесь имеются все средства для того, чтобы познакомиться с ним на конкретном материале. Это позволяет осмыслить результат вычисления допускаемой группы — общее решение определяющих уравнений DE , которое оказывается алгеброй Ли операторов. Возникающий неизбежный повтор оправдан еще и тем, что для практического решения многих вопросов группового анализа чаще приходится иметь дело не с самими группами преобразований, а с их алгебрами Ли операторов.

§ 5. Определяющие уравнения

1. Система дифференциальных уравнений. Ниже используются понятия и обозначения, введенные в § 4. Рассматриваются конечномерные пространства $X = R^n(x)$, $Y = R^m(y)$ и $Z = X \times Y = R^{n+m}(z)$, причем $z = (x, y)$. Пусть Z_k — продолженные пространства, введенные в 4.2.

Уравнение вида

$$\varepsilon(z) = 0, \quad (1.1)$$

образованное с помощью некоторого отображения $\varepsilon: Z_k \rightarrow R^s$, называется *дифференциальным уравнением*.

Натуральные числа n , m , k и s являются основными характеристиками дифференциальной структуры (или «типа») уравнения (1.1). Поэтому в дальнейшем уравнение (1.1) будет иногда обозначаться символом $E(n, m, k, s)$. Если числа n , m , k , s имеют конкретные значения (или в каком-либо вопросе играют второстепенную роль), то уравнение (1.1) будет обозначаться просто через E .

С геометрической точки зрения уравнением (1.1) задается некоторое многообразие в продолженном пространстве Z_k ; это многообразие также будет обозначаться символом E .

Каждое уравнение вида (1.1), будучи записано в координатной форме, может рассматриваться как система из s скалярных дифференциальных уравнений для m искоемых функций $y = (y^1, \dots, y^m)$ от n независимых переменных $x = (x^1, \dots, x^n)$. Поэтому уравнение (1.1) называется также *системой дифференциальных уравнений*, или, для краткости, просто *системой E* .

Число k называется *порядком системы* (1.1), если хотя бы одно из ее скалярных уравнений может быть разрешено относительно какой-нибудь координаты вектора $y \in Y_k$.

В дальнейшем будет предполагаться, что задающее систему (1.1) отображение ε удовлетворяет условию, для формулировки которого надо представить продолженное пространство Z_k в виде произведения $Z \times \bar{Z}_k$, где $\bar{Z}_k = Y_1 \times \dots \times Y_k$ и положить $z_k = (z, \bar{z})$. Тогда для любого отображения $\varepsilon: Z_k \rightarrow R^r$ можно образовать частное отображение $\varepsilon_k: \bar{Z}_k \rightarrow R^r$, действующее по формуле $\varepsilon_k(\bar{z}) = \varepsilon(z, \bar{z})$.

Условие. Отображение ε принадлежит классу $C_\infty(Z_k)$, а многообразие E уравнением (1.1) задано регулярно (см. 3.11), причем для любого $z \in Z$ частное отображение ε_k имеет ранг на $\bar{Z}_k$, равный s .

2. Основное определение. Пусть даны множество M , его подмножество N и преобразование $T \in \tau(M)$. Говорят, что N инвариантно относительно T , если $T(N) = N$. Очевидно, что совокупность всех преобразований T , относительно которых инвариантно данное подмножество N , образует подгруппу группы $\tau(M)$.

В групповом анализе дифференциальных уравнений роль множества M играет продолженное пространство Z_k , а роль подмножества N — система дифференциальных уравнений вида (1.1), рассматриваемая как многообразие $E \in Z_k$. При этом все уравнения, многообразия, различные соотношения и т. п. рассматриваются в рамках локальной теории (см. 1.8), хотя в дальнейшем изложение ведется, как правило, в «забывающих терминах» (см. 3.3). Применительно к этим объектам основное определение гласит следующее.

Система дифференциальных уравнений E допускает преобразование h пространства Z , если многообразие $E \subset Z_k$ инвариантно относительно продолженного преобразования h пространства Z_k . Если система E допускает любое преобразование из некоторой группы G^1 , то говорят, что E допускает группу G^1 . Если система E допускает группу $G^1(\zeta)$, характеризуемую ее оператором $\zeta \cdot \partial$, то говорят также, что система E допускает оператор $\zeta \cdot \partial$. При этом h , G^1 или $\zeta \cdot \partial$ называются соответственно преобразованием, группой или оператором, допускаемыми уравнением E .

В связи с этим определением возникает задача: найти все группы G^1 локальных преобразований пространства Z , допускаемые данной системой дифференциальных уравнений E . Равносильная формулировка: найти все операторы $\zeta \cdot \partial$, допускаемые данной системой E .

3. Условие инвариантности. В дальнейшем задача об отыскании всех групп G^1 , допускаемых системой E , рассматривается в предположении, что для отображения ε , задающего многообразие E уравнением (1.1), выполнено условие 5.1.

В этом случае может быть применен критерий 3.12 инвариантности многообразия относительно группы $G^1(\zeta)$ с инфинитезимальным оператором $\zeta \cdot \partial$. Этот критерий в данной ситуации выглядит так: система E (1.1), удовлетворяющая условию 5.1, допускает группу $G^1(\zeta)$, если и только если выполнено условие инвариантности

$$(\zeta \cdot \partial) \varepsilon(z)|_E = 0. \quad (3.1)$$

Решение поставленной в 5.2 задачи состоит в том, что условие инвариантности (3.1) рассматривается как уравнение относительно неизвестного векторного поля ζ . Структура этого уравнения зависит только от заданной системы E и полностью определена алгоритмом его построения.

Процесс формирования условия инвариантности состоит из трех этапов: (а) вычисление продолженного оператора $\zeta \cdot \partial$; (б) действие полученным оператором на отображение ε ; (в) переход на многообразии E .

На этапе (а) задается общий вид оператора $\zeta \cdot \partial$, т. е. компонент вектора $\zeta = (\xi, \eta)$. При этом важно, что ζ является отображением $Z \rightarrow Z$, т. е. компоненты ξ, η зависят только от переменных $(x, y) \in X \times Y$. После этого по формулам продолжения 4(8.4) или 4(8.5) вычисляются координаты $\eta^1, \dots, \eta^s$ ($1 \leq s \leq k$) продолженного оператора $\zeta \cdot \partial$.

На этапе (б) полученный оператор применяется к отображению ε , которое обычно бывает задано с помощью аналитических выражений его координат через координаты вектора z . Так как оператор $\zeta \cdot \partial$ является скалярным дифференциальным оператором, то им можно действовать на каждую из координат вектора ε в отдельности. В результате получается новое отображение $(\zeta \cdot \partial) \varepsilon: Z_k \rightarrow R^s$, причем образ $(\zeta \cdot \partial) \varepsilon(z)$ состоит из s функций $Z_k \rightarrow R$.

На этапе (в) для перехода на многообразии E выбирается s таких различных координат $r^1, \dots, r^s$ вектора $z = (y, \dots, y)$, что относительно них уравнения E могут быть «алгебраически» решены. Это требование всегда выполнимо в силу условия 5.1. В результате такой операции «зависимые» координаты $r = (r^1, \dots, r^s)$ выражаются через остальные, «свободные» координаты вектора z , образующие набор скаляров $t = (t^1, \dots, t^q)$, число которых q зависит от E . После этого полученные выражения $r = r(t)$ подставляются в найденные на этапе (б) функции $(\zeta \cdot \partial) \varepsilon(z)$ и результат приравнивается нулю.

4. Определяющие уравнения. Следующим этапом формирования условий инвариантности является этап (d) *расщепления* уравнения (3.1) относительно «свободных» координат t вектора $\underset{k}{z}$, введенных на этапе (с). С этой целью учитывается, что левая часть ψ уравнения (3.1) является функцией независимых переменных x, y, t и производных от координат вектора ζ , причем последние зависят только от $z=(x, y)$, но не от t . Поэтому условие (3.1), записанное в виде $\psi(\zeta, x, y, t)=0$, расщепляется и порождает последовательность уравнений, которую можно получить, например, с помощью разложения отображения ψ по формуле Тейлора в какой-нибудь точке t_0 . Обычно для этой цели берется точка $t=0$, и в результате расщепления получается последовательность уравнений

$$\left. \begin{aligned} \psi(\zeta, x, y, 0) &= 0, \\ \partial_t \psi(\zeta, x, y, 0) &= 0, \\ \partial_t^2 \psi(\zeta, x, y, 0) &= 0, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Уравнения (4.1) называются *определяющими уравнениями* и будут обозначаться символом DE . Они рассматриваются как уравнения относительно искомого векторного поля ζ или оператора $\zeta \cdot \partial$.

Основное свойство определяющих уравнений вытекает из критерия 3.12: какова бы ни была группа $G^1(\zeta)$, допускаемая уравнением E , ее касательное векторное поле ζ удовлетворяет уравнениям DE ; обратно, каждое решение $\zeta: Z \rightarrow Z$ класса $C_\infty(Z)$ уравнений DE есть такое векторное поле, с которым соответствующая группа $G^1(\zeta)$ допускается уравнением E . Можно сказать также, что уравнениям DE удовлетворяют те и только те операторы $\zeta \cdot \partial$, которые допускаются уравнением E .

Определяющие уравнения представляют собой систему дифференциальных уравнений для искомого векторного поля ζ . В силу ее происхождения эта система уравнений обладает рядом свойств, благодаря которым она становится самостоятельным объектом исследования.

Первое важное свойство системы DE заключается в том, что все ее уравнения *линейны и однородны* относительно координат искомого вектора ζ . Это свойство следует из того, что им обладает инфинитезимальный оператор $\zeta \cdot \partial$ (см. формулы про-

должения 4 (8.4) или 4 (8.5)), и оно, как легко проверить, не нарушается ни на одном из этапов (a) — (d) построения уравнений DE .

Следовательно, множество решений определяющих уравнений DE , образует векторное пространство. Это пространство в дальнейшем будет обозначаться символом L .

5. Основная группа. Пусть Γ есть совокупность таких преобразований h пространства Z , что каждое из них принадлежит какой-нибудь группе $G^1(\zeta)$, касательное векторное поле которой ζ является решением класса C_∞ уравнений $D\bar{E}$. В силу предыдущего все преобразования, принадлежащие Γ , допускаются системой E . Но из определения 5.2 и леммы 4.6 следует, что если система E инвариантна относительно преобразований h и $\bar{h}$, то она инвариантна и относительно их композиции $\bar{h} \circ h$. Поэтому для любых двух преобразований $h, \bar{h} \in \Gamma$ их композиция $\bar{h} \circ h$ также допускается системой E .

В общем случае нет оснований утверждать, что такая композиция $\bar{h} \circ h$ принадлежит какой-либо группе G^1 , допускаемой системой E , и потому неизвестно, будет ли $\bar{h} \circ h \in \Gamma$. Этот вопрос нетривиален, даже в локальной теории. Если композиция $\bar{h} \circ h$ не содержится в Γ , то совокупность преобразований Γ не является группой. Тем не менее множество Γ всегда можно считать порождающим (с помощью композиции) группу преобразований, допускаемых системой E . Итак, возникает группа, рассматриваемая как конечно порожденная множеством Γ (т. е. каждый ее элемент есть композиция конечного числа элементов из Γ), которая фиксируется следующим определением.

Основной группой системы дифференциальных уравнений E называется группа локальных преобразований пространства Z , конечно порожденная множеством Γ преобразований, принадлежащих однопараметрическим группам Ли G^1 , допускаемым системой E .

В дальнейшем основная группа системы E обозначается символом GE .

Оказывается, что в практически важном случае, когда пространство L решений системы DE конечномерно, имеет место совпадение $\Gamma = GE$. Это будет показано в главе IV. Стоит отметить также, что система E может допускать преобразования, не принадлежащие основной группе GE . Конечно, такие преобразования не содержатся ни в какой группе G^1 , допускаемой системой E .

Пример последней возможности дает любое уравнение, допускающее группу всех ортогональных преобразований пространства R^3 и только ее. В этом случае Γ есть совокупность всех вращений (см. 1.15 и 2.7) и совпадает с GE , а отражение в какой-либо координатной плоскости (которое является ортогональным преобразованием пространства R^3) в GE не входит и не может быть получено никакой комбинацией вращений.

6. Действие на решениях. Используя обозначения из 4.4, можно сформулировать следующее определение.

*Отображение $u: X \rightarrow Y$ называется **решением** дифференциального уравнения (1.1), если для всех $x \in X$ выполнено равенство*

$$\varepsilon_k(u(x)) = 0. \quad (6.1)$$

В ряде вопросов удобно пользоваться равносильным этому геометрическим определением понятия решения. Для его формулировки надо рассмотреть в пространстве Z_k многообразие U_k , заданное параметрически отображением $u: X \rightarrow Z_k$, действующим по формуле $z_k = u_k(x)$, т. е. множество

$$U_k = \{z_k \mid z_k = u_k(x), x \in X\}. \quad (6.2)$$

Тогда непосредственно из определения (6.1) следует, что отображение $u: X \rightarrow Y$ является решением уравнения (1.1), рассматриваемого как многообразие $E \subset Z_k$, если и только если для многообразия U_k верна формула включения

$$U_k \subset E. \quad (6.3)$$

Эта формула включения и дает геометрическое определение понятия решения уравнения E .

Для понимания доказательства фундаментального факта о преобразовании решений надо обратиться к 4.5, где объяснено, каким образом преобразование h пространства $Z = X \times Y$ действует на отображения $u: X \rightarrow Y$. В частности, лемма 4.5 показывает, что если преобразованное отображение u' определено формулами 4(5.5), то для продолженного отображения u'_k справедлива формула

$$u'_k(x') = h_k \circ u_k(x), \quad x' = f_0 \circ u(x). \quad (6.4)$$

Пусть, кроме того, U'_k обозначает многообразие в Z_k , заданное формулой (6.2) с преобразованным отображением u' .

Т е о р е м а. *Если дифференциальное уравнение E допускает преобразование h , то любое решение $u: X \rightarrow Y$ уравнения E преобразуется с помощью h снова в решение $u': X \rightarrow Y$ того же уравнения E .*

Доказательство. Если u — решение, то для соответствующего многообразия U_k справедлива формула включения (6.3). Значит, если $z_k = u_k(x) \in U_k$, то в силу инвариантности многообразия E точка $z'_k = h_k(z_k) = h_k \circ u_k(x)$ также принадлежит E . В силу (6.4) отсюда следует, что точка $z'_k = u'_k(x') \in E$ для любого $x' = f_0 \circ u(x)$.

Так как $f \circ u: X \rightarrow X$ есть гомеоморфизм, то это все равно, что точка $x' = u'_k(x) \in E$ для любого $x \in X$. Это и означает, что $U'_k \subset E$. ■

Выражая этот факт другими словами, можно сказать, что преобразование $h: Z \rightarrow Z$, допускаемое уравнением E , действует на множестве решений этого уравнения. Пусть GE — основная группа уравнения E . Применение доказанной теоремы к любому преобразованию $h \in GE$ приводит к важному следствию.

Следствие. Для каждого дифференциального уравнения E определено действие основной группы GE на множестве решений этого уравнения. Говоря короче, основная группа GE действует на множестве решений уравнения E .

7. Производство решений. Утвержденный предыдущим следствием факт в полной мере будет использован в главах V—VII. Здесь уместно отметить лишь его применение для производства новых решений из каких-либо известных.

Пусть $u: X \rightarrow Y$ есть какое-то решение уравнения E , и пусть группа $G^1(h)$ допускается уравнением E . В результате преобразования решения u с помощью элемента $h_a \in G^1(h)$ получится новое решение u_a для любого $a \in R$. Тем самым допускаемая группа G^1 из одного решения производит однопараметрическое семейство решений $\{u_a\}$. Если имеется другая допускаемая группа G^1 , то это построение можно применить к каждому из решений u_a и получить тем самым двухпараметрическое семейство решений и т. д.

Для конкретного производства решений требуются формулы, задающие преобразования $h_a \in G^1(h)$ (см. 4 (7.1))

$$x' = f(x, y, a), \quad y' = g(x, y, a), \quad (7.1)$$

и используются изложенные в 4.5 общие правила преобразования отображений. Если заданное формулами (7.1) преобразование h_a переводит отображение u в отображение u_a , то значение $u_a(x')$ находится исключением вектора x из уравнений

$$x' = f(x, u(x), a), \quad u_a(x') = g(x, u(x), a). \quad (7.2)$$

В результате преобразованное решение может быть записано в виде

$$u_a(x) = (g_a \circ u) \circ (f_a \circ u)^{-1}(x), \quad (7.3)$$

где отображение $u: X \rightarrow X \times Y$ действует по формуле $u(x) = (x, u(x))$.

8. Алгоритм. Отыскание основной группы GE данной системы дифференциальных уравнений E является первым шагом группового анализа этой системы. Здесь еще раз в сжатой форме описывается алгоритм построения основной группы и отмечаются некоторые его особенности.

Упомянутый алгоритм состоит из трех частей: формирование определяющих уравнений DE , построение пространства решений L уравнений DE и образование множества Γ групп $G^i(\zeta)$ для всех векторных полей $\zeta \in L$.

Первая часть — формирование определяющих уравнений или переход $E \rightarrow DE$ — требует применения только операций дифференцирования и исключения. Она подразделяется на четыре этапа (а) — (д), описанные в 5.3 и 5.4. Накопленный опыт реализации этой части алгоритма позволил установить два существенных обстоятельства. Во-первых, в случае уравнений E не очень сложной алгебраической структуры относительно координат вектора $\tilde{z}$ все вычисления успешно доводятся до конца. Во-вторых, эта часть алгоритма является весьма трудоемкой ввиду необходимости выполнить большое число монотонных и длинных арифметических выкладок и тождественных преобразований уравнений с большим числом членов.

Для того чтобы иметь ориентир для оценки количества этой работы, полезно подсчитать полное число определяющих уравнений, получаемых в конце этапа (д). Пусть, например, заданная уравнением (1.1) система первого порядка $E(n, m, 1, s)$ является квазилинейной, т. е. линейной (неоднородной) относительно вектора y . Здесь общее число координат вектора $\tilde{z} = y$ равно nm , а число «свободных» координат (см. 5.3) есть $nm - s$. Теперь надо заметить, что получаемые по формулам продолжения 4 (9.3) дополнительные координаты η_i^j продолженного оператора $\tilde{\partial}$ являются квадратичными формами (неоднородными) от координат вектора y . Поэтому, ввиду линейности уравнения E относительно y , после перехода на E (этап (с)) левые части системы уравнений (3.1) также будут неоднородными квадратичными формами от $q = nm - s$ «свободных» координат $t^1, \dots, t^q$. Теперь легко подсчитать, что число скалярных уравнений (4.1) в этом случае равно $s(q+1)(q+2)/2$. Итак, для квазилинейного уравнения $E(n, m, 1, s)$ полное число N определяющих уравнений таково:

$$N = \frac{1}{2} s(nm - s + 1)(nm - s + 2). \quad (8.1)$$

Некоторые конкретные, типичные для прикладных задач числа приведены в следующей табличке, где принято $s=m$,

n	2	2	3	3	4	4
m	2	3	3	4	4	5
N	12	20	84	180	364	680

Аналогичный подсчет может быть сделан и для других типов уравнений $E(n, m, k, s)$. Он показывает, что, вообще говоря, число определяющих уравнений довольно велико.

Все это привело к мысли поручить выполнение перехода $E \rightarrow DE$ вычислительной машине. Эта идея реализована в процессорах КИНО (по первым буквам слов Координаты Инфинитезимальных Операторов) и ПАССИВ, разработанных в ВЦ СО АН СССР.

Вторая часть — построение пространства решений L определяющих уравнений DE — может вызвать определенные трудности, связанные как с большим числом этих уравнений, так и с тем фактом, что они являются уравнениями с частными производными для $n+m$ неизвестных функций — искомых координат вектора $\zeta = (\xi, \eta)$. Однако большая величина числа N уравнений DE не должна быть пугающей по двум причинам. Во-первых, среди этих уравнений встречается, вообще говоря, некоторое количество тождеств, ввиду чего число фактически решаемых уравнений будет меньше N . Во-вторых, у сильно переопределенной системы должно быть сравнительно немного решений, и потому найти их относительно легко. Конечно, построить полное решение удастся не всегда, и в ряде случаев приходится ограничиваться общим анализом пространства L и выборкой из него каких-либо полезных подпространств. Это надо делать с учетом дополнительной алгебраической структуры пространства L , о которой пойдет речь в § 7.

Третья часть — образование множества Γ и, тем самым, завершение процесса построения основной группы GE . Возможности ее конкретной реализации связаны со степенью успеха, достигнутого во второй части алгоритма. В главе IV будет подробно изучен случай конечномерного пространства L , когда образование множества $\Gamma = GE$ требует только интегрирования некоторой, вполне определенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. На этом теория описанного алгоритма кончается. Что же касается приложений, то в ряде вопросов бывает достаточно какой-либо одной (или нескольких) из допускаемых групп $G^1(\zeta)$, построение которой по ее касательному векторному полю ζ уже было описано в 2.3.

9. Пример. Если все числа n, m, k, s невелики, например ≤ 2 , то целесообразны индивидуальные обозначения координат встречающихся векторов. Например, для уравнения типа $E(2, 2, 1, 2)$ удобно принять, что $X = R^2(x, y)$, $Y = R^2(u, v)$, $Z = R^4(x, y, u, v)$ и $Y_1 = R^4(y)$, где y есть матрица

$$y = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях рассматривается следующая система E :

$$u_2 = v_1, \quad v_2 = -u_1, \quad (9.1)$$

содержание которой раскрывается через определение решения: это есть отображение $(u, v): R^2 \rightarrow R^2$, действующее по формуле $(u, v)(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, причем

$$u_1 = \partial_x u(x, y), \quad u_2 = \partial_y u(x, y), \quad v_1 = \partial_x v(x, y), \quad v_2 = \partial_y v(x, y).$$

Теперь видно, что (9.1) — это известные в газовой динамике *уравнения околосзвукового установившегося плоскопараллельного течения газа*. Для системы (9.1) решается задача о построении ее основной группы GE .

Первая часть, этап (а). Задается вид инфинитезимального оператора

$$\zeta \cdot \partial = \xi \partial_x + \eta \partial_y + \sigma \partial_u + \tau \partial_v, \quad (9.2)$$

где каждая из координат есть искомое отображение $Z \rightarrow R$. Затем требуется построить первое продолжение оператора (9.2). С этой целью вводятся координаты оператора полного дифференцирования $D = (D_1, D_2)$, где

$$D_1 = \partial_x + u_1 \partial_u + v_1 \partial_v, \quad D_2 = \partial_y + u_2 \partial_u + v_2 \partial_v,$$

а один раз продолженный оператор (9.2) представляется в виде

$$\zeta_1 \cdot \partial = \zeta \cdot \partial + \xi_1 \partial_{u_1} + \xi_2 \partial_{u_2} + \eta_1 \partial_{v_1} + \eta_2 \partial_{v_2}.$$

Дополнительные координаты вычисляются по формулам первого продолжения (см. 4 (8.4) при $k=0$) и оказываются такими:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= D_1 \sigma - u_1 D_1 \xi - u_2 D_1 \eta, & \xi_2 &= D_2 \sigma - u_1 D_2 \xi - u_2 D_2 \eta, \\ \eta_1 &= D_1 \tau - v_1 D_1 \xi - v_2 D_1 \eta, & \eta_2 &= D_2 \tau - v_1 D_2 \xi - v_2 D_2 \eta. \end{aligned}$$

Этап (b) заключается в действии оператором $\zeta_1 \cdot \partial$ на каждое из уравнений (9.1), что приводит к уравнениям

$$\xi_2 = \eta_1, \quad \eta_2 = -u_1 - u \xi_1.$$

Для записи этих уравнений в развернутой форме целесообразно упростить обозначение частных производных и для любого отображения $\varphi: Z \rightarrow R$ положить $\partial_x \varphi = \varphi_x$, $\partial_y \varphi = \varphi_y$, $\partial_u \varphi = \varphi_u$, $\partial_v \varphi = \varphi_v$. Тогда предыдущие уравнения в развернутой форме таковы:

$$\begin{aligned} \sigma_y + u_2 \sigma_u + v_2 \sigma_v - u_1 (\xi_y + u_2 \xi_u + v_2 \xi_v) - u_2 (\eta_y + u_2 \eta_u + v_2 \eta_v) = \\ = \tau_x + u_1 \tau_u + v_1 \tau_v - v_1 (\xi_x + u_1 \xi_u + v_1 \xi_v) - v_2 (\eta_x + u_1 \eta_u + v_1 \eta_v); \\ \tau_y + u_2 \tau_u + v_2 \tau_v - v_1 (\xi_y + u_2 \xi_u + v_2 \xi_v) - v_2 (\eta_y + u_2 \eta_u + v_2 \eta_v) = \\ = -u_1 \sigma - u [\sigma_x + u_1 \sigma_u + v_1 \sigma_v - u_1 (\xi_x + u_1 \xi_u + v_1 \xi_v) - \\ - u_2 (\eta_x + u_1 \eta_u + v_1 \eta_v)]. \end{aligned}$$

Этап (с) — переход на многообразие (9.1) — здесь выполняется совсем просто, заменой в полученных равенствах величин u_2, v_2 их выражениями (9.1) через u_1, v_1 . После перегруппировки слагаемых результат этого этапа записывается в виде уравнений, выражающих условие инвариантности уравнений (9.1) относительно оператора (9.2):

$$\begin{aligned} (\sigma_y - \tau_x) + u_1(\tau_u + u\sigma_v + \xi_y + u\eta_x) + v_1(\tau_v - \sigma_u + \eta_y - \xi_x) + \\ + u_1^2(u\eta_u - u\xi_v) + v_1^2(\eta_v - \xi_u) = 0, \\ (u\sigma_x + \tau_y) + u_1(\sigma + u\sigma_u - u\tau_v + u\eta_y - u\xi_x) + v_1(\tau_u + u\sigma_v - \xi_y - u\eta_x) - \\ - u_1^2(u^2\eta_v + u\xi_u) - v_1^2(u\eta_v + \xi_u) = 0. \end{aligned}$$

Здесь хорошо видно, что левые части являются неоднородными квадратичными формами от «свободных» переменных u_1, v_1 .

Этап (d) — расщепление условий инвариантности — сводится к тому, что надо приравнять нулю коэффициенты при u_1, v_1, u_1^2, v_1^2 . Это и дает определяющие уравнения. По формуле (8.1) должно получиться 12 уравнений, но в данном случае четыре из них оказываются выполненными тождественно. Остается всего восемь нетривиальных определяющих уравнений, которые после небольшой обработки записываются в виде двух подсистем

$$\xi_y = \eta_u, \quad \xi_u = -u\eta_v, \quad \xi_y = -u\eta_x, \quad \xi_x = \eta_y + \sigma/(2u); \quad (9.3)$$

$$\tau_u = -u\sigma_v, \quad \tau_v = \sigma_u + \sigma/(2u), \quad \tau_x = \sigma_y, \quad \tau_y = -u\sigma_x. \quad (9.4)$$

Определяющие уравнения сформированы и первая часть алгоритма 5.8 закончена.

Вторая часть — построение пространства решений системы (9.3), (9.4) в этом примере, в определенном смысле, также доводится до конца. Следует заметить, что уравнения (9.4) дают выражения для всех производных от τ , ввиду чего из них следуют шесть условий совместности, имеющих вид уравнений второго порядка для одной функции σ . Легко проверить, что необходимым следствием этих уравнений являются равенства $\sigma_x = \sigma_y = 0$. Но тогда из (9.4) получается, что также $\tau_x = \tau_y = 0$. Поэтому координаты σ, τ фактически суть функции только от переменных u, v и, как таковые, должны удовлетворять первым двум уравнениям (9.4).

Аналогично уравнения (9.3) дают выражения для всех производных от ξ , что влечет еще шесть условий совместности, необходимыми следствиями которых являются уравнения

$$\eta_x = -\frac{1}{2}\sigma_v, \quad \sigma_u = \frac{\sigma}{u}. \quad (9.5)$$

Общее решение второго из этих уравнений есть $\sigma = uf(v)$. Подстановка этого выражения в первые два уравнения (9.4) дает

общий вид функций σ , τ , удовлетворяющих (9.4), (9.5)

$$\sigma = 2C^1 uv + 2C^2 u, \quad \tau = C^1 \left(-\frac{2}{3} u^3 + \frac{3}{2} v^2 \right) + 3C^2 v + C^3, \quad (9.6)$$

где C^1 , C^2 , C^3 — произвольные постоянные. Из (9.5) в силу (9.6) следует равенство $\eta_x = -C^1 u$, присоединение которого к уравнениям (9.3) позволяет найти общий вид координат ξ , η :

$$\begin{aligned} \xi &= C^1(-xv + yu^2) + C^2 x + C^4 x + \xi^0, \\ \eta &= -C^1(xu + 2yv) + C^4 y + \eta^0, \end{aligned} \quad (9.7)$$

где C^4 — еще одна произвольная постоянная, а ξ^0 и η^0 — функции $R^2(u, v) \rightarrow R$, удовлетворяющие уравнениям

$$\xi_v^0 = \eta_u^0, \quad \xi_u^0 = -u\eta_v^0. \quad (9.8)$$

Таким образом, общее решение определяющих уравнений (9.3), (9.4) дается формулами (9.6), (9.7) и зависит от четырех произвольных постоянных C^i и от произвольного решения (ξ^0, η^0) системы (9.8). Так как линейные уравнения (9.8) имеют бесконечное множество линейно независимых решений, то пространство решений L здесь *бесконечномерно*. Видно, что L можно представить в виде прямой суммы $L = L^4 \oplus L^\infty$, где L^4 — четырехмерное пространство таких решений, для которых $\xi^0 = \eta^0 = 0$, а подпространство L^∞ бесконечномерно и состоит из таких решений, для которых все $C^i = 0$.

Базис в L^4 можно выбрать, полагая одну из постоянных C^i равной единице, а остальные — равными нулю. Это дает операторы

$$\begin{aligned} \zeta_1 \cdot \partial &= (-xv + yu^2) \partial_x - (xu + 2yv) \partial_y + 2uv \partial_u + \left(-\frac{2}{3} u^3 + \frac{3}{2} v^2 \right) \partial_v, \\ \zeta_2 \cdot \partial &= x \partial_x + 2u \partial_u + 3v \partial_v, \\ \zeta_3 \cdot \partial &= \partial_v, \\ \zeta_4 \cdot \partial &= x \partial_x + y \partial_y. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Общий оператор $\zeta \cdot \partial \in L^4$ есть произвольная линейная комбинация операторов (9.9)

$$\zeta \cdot \partial = C^i \zeta_i \cdot \partial. \quad (9.10)$$

Подпространству L^∞ соответствует бесконечное множество линейно независимых операторов вида

$$\zeta^0 \cdot \partial = \xi^0(u, v) \partial_x + \eta^0(u, v) \partial_y. \quad (9.11)$$

На этом вторая часть алгоритма заканчивается. Дальнейшее изучение пространства L связано с его алгебраической структурой, о которой пойдет речь в § 7.

Третья часть алгоритма — образование множества Γ всех групп $G^1(\zeta)$, соответствующих найденным операторам $\zeta \cdot \partial$, в этом примере может быть проведена до конца. Как будет показано в главе IV, для этого достаточно найти группы $G^1(\zeta_i)$ ($i=1, 2, 3, 4$) с базисными операторами (9.9) и общий вид группы $G^1(\zeta^0)$ с оператором (9.11). Для оператора переноса $\zeta_3 \cdot \partial$ и операторов растяжения $\zeta_2 \cdot \partial$, $\zeta_4 \cdot \partial$ построение очевидно (см. 1.15). Для оператора $\zeta_1 \cdot \partial$ решение уравнений Ли (14.3) таково:

$$\begin{aligned} x' &= \left[x - 3au^{3/2} \frac{3vx - 2u^2y}{4u^3 + 9v^2} \right] w^{1/2}, & u' &= \sqrt{w} w^{1/2}, \\ y' &= \left[y - 3au^{3/2} \frac{2ux + 3vy}{4u^3 + 9v^2} \right] w^{-1/2}, & v' &= (v - au^{3/2})w; \\ w &= \frac{4u^3 + 9v^2}{4u^3 + 9(v - au^{3/2})^2}. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Наконец, для оператора (9.11) преобразования группы $G^1(\zeta^0)$ с любым конкретным решением (ξ^0, η^0) системы (9.8) таковы:

$$x' = x + a\xi^0(u, v), \quad y' = y + a\eta^0(u, v), \quad u' = u, \quad v' = v. \quad (9.13)$$

Здесь справедливо утверждение: множество преобразований, порожденное преобразованиями — элементами групп $G^1(\zeta_i)$ и $G^1(\zeta^0)$ совпадает с множеством Γ , которое в свою очередь совпадает с основной группой GE системы (9.1); доказательство связано с привлечением теории, развитой в главе IV.

§ 6. Задача групповой классификации

1. Общие соображения. При изолированном рассмотрении каждого из множеств: дифференциальных уравнений и групп преобразований — вопросы классификации принадлежащих им объектов решаются на основе введения признаков разной природы. Для дифференциальных уравнений классифицирующими признаками могут быть тип (n, m, k, s) , свойства линейности и квазилинейности, свойства активности и пассивности и многие другие. Для групп преобразований в качестве таких признаков служат изоморфизмы и гомоморфизмы, структурные свойства, подобие, включение и много других. Однако в групповом анализе эти два множества изучаются совместно, на основе установленного в § 5 соответствия $E \rightarrow GE$ между системой дифференциальных уравнений E и ее основной группой GE .

Это соответствие является отображением и приводит к расширению классификационных возможностей для каждого из упомянутых множеств. Так как отображение $E \rightarrow GE$ не является взаимно однозначным, то влияние классифицирующих признаков

групп преобразований на классификационные возможности для дифференциальных уравнений должно быть, вообще говоря, более сильным, чем обратное влияние. Поэтому на первый план выдвигаются задачи групповой классификации дифференциальных уравнений (а не задачи «дифференциально-уравненной» классификации групп).

Одним из сильных классифицирующих признаков является подобие групп преобразований. Если основные группы каких-либо уравнений подобны, то групповые свойства этих уравнений, вообще говоря, одинаковы. Например, если систему E преобразовать путем «замены переменных» в систему E' , то основные группы GE и GE' оказываются подобными. Поэтому групповой анализ одного уравнения E является на самом деле групповым анализом сразу всего класса уравнений, получаемых из E «заменой переменных».

В дальнейшем ставится задача о такой классификации дифференциальных уравнений, которая индуцируется частичным порядком — упорядочением по включению, существующим в множестве групп преобразований фиксированного пространства Z . В полной постановке эта задача весьма сложна ввиду того, что одна и та же группа GE может быть основной группой уравнений E совершенно различной структуры. Поэтому здесь задача сужается до рассмотрения класса уравнений фиксированного строения, меняющихся лишь за счет так называемого «произвольного элемента».

Оказывается, что, несмотря на такое сужение задачи групповой классификации дифференциальных уравнений, она все еще играет большую роль в прикладных вопросах, позволяя оптимизировать выбор аналитической формы экспериментальных зависимостей, входящих в математические модели физических процессов.

2. Преобразования уравнения. Пусть дано уравнение E вида 5(1.1) с отображением $\varepsilon: Z_k \rightarrow R^r$. С помощью преобразований $p \in \tau(Z)$ и $q \in \tau(R^r)$ (дiffeоморфизмов класса C_∞ , причем p удовлетворяет условию 4.5) можно построить новое отображение $\varepsilon' = q \circ \varepsilon \circ p^{-1}$, где k -е продолжение p отображения p определено в 4.5. Отображение ε' будет называться *подобным* отображению ε , а пара (p, q) — *преобразованием подобия*. Уравнение $E': \varepsilon'(z) = 0$ или

$$q \circ \varepsilon \circ p^{-1}(z) = 0 \quad (2.1)$$

равносильно уравнению 5(1.1), если и только если $q(0) = 0$. При выполнении этого условия заданное уравнением (2.1) многообразие $E' \subset Z_k$ называется *подобным* многообразию E . Очевидно, что переход $E \rightarrow E'$ осуществляется преобразованием p

пространства Z_k , под действием которого по формуле $z' = p(z)$ точка $z \in E$ переходит в точку $z' \in E'$.

Основное классификационное свойство пары (E, GE) утверждается следующим простым, но важным предложением.

Теорема. Основные группы GE и GE' равносильных уравнений E и E' подобны, причем соотношение подобия 1 (11.2) преобразований $h \in GE$ и $h' \in GE'$ есть $h' = p \circ h \circ p^{-1}$.

Доказательство. Так как E допускает преобразование h , то $z \in E$ влечет $z = h(z) \in E$. Преобразование p переводит точку z в точку $z' = p(z) \in E'$, причем z' — произвольная точка многообразия E' . Так как

$$q \circ \varepsilon \circ p^{-1}(h'(z')) = (q \circ \varepsilon \circ p^{-1}) \circ (p \circ h \circ p^{-1})(p(z)) = q \circ \varepsilon(z) = 0,$$

то $h'(z') \in E'$. ■

На практике эта теорема широко используется при изучении групповых свойств какого-либо уравнения E для предварительного упрощения этого уравнения за счет подходящего преобразования подобия (p, q) . Последнее есть не что иное, как уже упоминавшаяся классическая «замена переменных», которая, таким образом, никак не влияет на групповую структуру дифференциального уравнения.

3. Произвольный элемент. Рассматривается вспомогательное пространство $T = R^l$ векторов $t \in T$, называемое пространством параметров, и отображение $\varepsilon: T \times Z_k \rightarrow R^l$. Предполагается, что для любого $t \in T$ частное отображение $\varepsilon_t: Z_k \rightarrow R^l$ удовлетворяет условию 5.1.

Для каждого отображения $\theta: Z \rightarrow T$, действующего по формуле $t = \theta(z)$, определяется сложное отображение $\varepsilon(\theta): Z_k \rightarrow R^l$, действующее по формуле $\varepsilon(\theta)(z) = \varepsilon(\theta(z), z)$. Эта конструкция позволяет определить класс дифференциальных уравнений, представители которого определяются заданием отображения $\theta: Z \rightarrow T$ и имеют вид

$$\varepsilon(\theta)(z) = 0. \quad (3.1)$$

Уравнение (3.1) будет называться уравнением с произвольным элементом θ и обозначаться символом $E(\theta)$.

Данное определение может быть расширено, если рассмотреть произвольный элемент θ как отображение $Z_{k'} \rightarrow T$ для некоторого $k' < k$, большего нуля. Многие свойства, вытекающие из такого расширенного истолкования произвольного элемента, аналогичны тем, которые получаются на основе данного определения.

Можно сказать, что все уравнения класса (3.1) имеют одну и ту же дифференциальную структуру (иногда то же самое выражают, говоря, что эти уравнения имеют один и тот же «вид»), определяемую частным отображением $\varepsilon_i: Z_k \rightarrow R'$ и отличаются друг от друга только «значением» произвольного элемента θ . Эта конструкция дает возможность подвергнуть групповому анализу такие дифференциальные уравнения, которые содержат какие-либо параметры или функции, не строго фиксированные в конкретном исследовании.

Понятие произвольного элемента возникло из того факта, что многие конкретные задачи математической физики связаны с решением дифференциальных уравнений, содержащих экспериментально определяемые параметры или функции. При этом последние часто задаются в виде таблиц или графиков. Эти-то параметры и функции и играют роль произвольного элемента. Техника групповой классификации позволяет целенаправленно выбирать аналитический вид таких функций. Одной из целей, которой при этом можно добиваться, может служить *достижение максимально широкой основной группы*.

4. Преобразования эквивалентности. Под действием преобразования $p: Z \rightarrow Z$ из 6.2 произвольный элемент θ переходит в $\theta \circ p^{-1}$. Для всего класса уравнений $E(\theta)$ преобразование подобия действует на отображение $\varepsilon(\theta): Z_k \rightarrow R'$ по формуле

$$\varepsilon(\theta) \rightarrow \varepsilon'(\theta) = q \circ \varepsilon(\theta \circ p^{-1}) \circ p^{-1}_k.$$

При этом уравнение $\varepsilon'(\theta)(z) = 0$, которое в предположении $q(0) = 0$ может быть записано в виде

$$\varepsilon(\theta \circ p^{-1}) \circ p^{-1}_k(z) = 0, \quad (4.1)$$

равносильно уравнению (3.1).

Для задач групповой классификации существенно определение таких преобразований, которые действуют только на произвольный элемент θ , сохраняя дифференциальную структуру уравнения $E(\theta)$. С этой целью рассматриваются преобразования w пространства $T \times Z$, действующие по формуле вида $w(t, z) = (\psi(t, z), p(z))$, где p — преобразование пространства Z , а отображение $\psi: T \times Z \rightarrow T$ обладает тем свойством, что для каждого $z \in Z$ частное отображение $\psi_z: T \rightarrow T$ является преобразованием пространства T . Продолжением w преобразования w называется его продолжение только по второй компоненте, т. е. отображение $w: T \times Z_k \rightarrow T \times Z_k$, действующее по формуле

$$w(t, z) = (\psi(t, z), p(z)).$$

Определение. Преобразование w пространства $T \times Z$ называется **преобразованием эквивалентности** отображения $\varepsilon: T \times Z_k \rightarrow R^s$, если существует такое преобразование q пространства R^s , с которым выполнено равенство отображений

$$\varepsilon \circ w = q \circ \varepsilon. \quad (4.2)$$

Значение преобразований эквивалентности для задач групповой классификации определяется двумя свойствами этих преобразований.

Во-первых, преобразование эквивалентности действует только на произвольный элемент θ , сохраняя структуру дифференциального уравнения $E(\theta)$. Для того чтобы это показать, достаточно записать равенство (4.2) в точке $(\theta(\bar{z}), \bar{z})$, где $\bar{z} = p^{-1}(z)$, в виде

$$q \circ \varepsilon(\theta \circ p^{-1}(z), p^{-1}(z)) = \varepsilon(\bar{\theta}(z), z),$$

где $\bar{\theta} = \psi \circ (\theta \circ p^{-1}, p^{-1})$. В силу (4.1) уравнение $\varepsilon(\bar{\theta})(z) = 0$ равносильно уравнению (3.1) с тем же отображением ε . Следовательно, уравнение $E(\bar{\theta})$ — это то же самое уравнение $E(\theta)$, но с другим произвольным элементом — $\bar{\theta}$ вместо θ . Поэтому применительно к уравнению преобразование w можно назвать также преобразованием эквивалентности произвольного элемента θ . Это преобразование может быть выделено в явном виде

$$\theta(z) \rightarrow \bar{\theta}(z) = \psi(\theta(p^{-1}(z), p^{-1}(z))). \quad (4.3)$$

Кроме того, так как уравнение $E(\bar{\theta})$ равносильно уравнению $E(\theta)$, то в силу теоремы 6.2 группы, допускаемые этими уравнениями, подобны.

Во-вторых, преобразования эквивалентности образуют группу. Действительно, если w' — другое преобразование эквивалентности (вместе с соответствующим ему q'), то

$$\varepsilon \circ w \circ w' = q \circ \varepsilon \circ w' = q \circ q' \circ \varepsilon,$$

и остается заметить, что $w \circ w' = w \circ w'$. Последнее равенство следует из определения w и основного свойства продолжения (лемма 4.6), так как, если $w' = (\psi', p')$, то

$$w \circ w' = (\psi \circ \psi', p \circ p') = (\psi \circ \psi', p \circ p') = w \circ w'.$$

Уместно отметить еще, что в силу определения (4.2) продолженное преобразование эквивалентности w оставляет инвариантным

уравнение $E(t)$:

$$\varepsilon(t, z)_k = 0. \quad (4.4)$$

Поэтому любое преобразование эквивалентности w допускается уравнением (4.4) в смысле 5.2.

В дальнейшем, как правило, будут рассматриваться только такие преобразования эквивалентности, которые принадлежат однопараметрическим группам G^1 преобразований вида w пространства $T \times Z$. Группа $GE(t)$, порожденная такими группами G^1 преобразований эквивалентности, будет называться *группой эквивалентностей* любого уравнения $E(\theta)$, получаемого из уравнения $E(t)$ для какого-либо конкретного отображения $\theta: Z \rightarrow T$.

Отыскание группы эквивалентностей осуществляется с помощью алгоритма 5.8. При этом следует учитывать специфическое строение искомого преобразования w , а также возможные специальные, заранее известные свойства произвольного элемента (например, независимость от некоторых координат вектора z).

5. Задача классификации. Пусть $GE(\theta)$ — основная группа уравнения $E(\theta)$, заданного равенством (3.1). Когда θ пробегает множество отображений $Z \rightarrow T$, получается некоторое множество групп $GE(\theta)$. Группа GE_0 , равная пересечению всех групп $GE(\theta)$, будет называться **ядром основных групп**. В силу ее определения, группа GE_0 допускается уравнением $E(\theta)$ с любым произвольным элементом θ . Так как $GE_0 \subset GE(\theta)$ для каждого конкретного θ , то каждая группа $GE(\theta)$ является расширением группы GE_0 .

Каждое конкретное отображение $\theta: Z \rightarrow T$ можно назвать *специализацией произвольного элемента*. В этих терминах ставится следующая задача групповой классификации класса уравнений.

Задача. Для класса дифференциальных уравнений $E(\theta)$ найти ядро основных групп GE_0 и все специализации произвольного элемента θ , дающие расширение группы GE_0 .

Отыскание ядра основных групп упрощается в силу приводимой ниже теоремы, формулировка которой имеет следующий смысл. По определению, каждое преобразование эквивалентности $w: T \times Z \rightarrow T \times Z$ состоит из двух компонент $w = (\psi, p)$, вторая из которых есть некоторое преобразование пространства Z . Поэтому можно сказать, что преобразование эквивалентности w содержит преобразование p .

Теорема. Ядро основных групп GE_0 содержится в группе эквивалентностей $GE(t)$.

Доказательство. Пусть $\zeta \cdot \partial$ есть оператор какой-либо группы $G^1 \subset GE(t)$. Ввиду специального строения преобразования эквивалентности w этот оператор можно представить в виде $\zeta \cdot \partial = \tau \cdot \partial_t + \zeta \cdot \partial_z$ с касательными векторами $\tau: Z \times T \rightarrow T$ и $\zeta: Z \rightarrow Z$. Тогда

условие инвариантности уравнения (4.4) относительно группы $G^1(\zeta)$ будет

$$[(\tau \cdot \partial_t) \varepsilon(t, z) + (\zeta \cdot \partial_z) \varepsilon(t, z)]|_{E(t)} = 0. \quad (5.1)$$

С другой стороны, условие инвариантности уравнения $E(\theta)$ относительно группы $G^1(\zeta) \subset GE_0$ с касательным вектором $\zeta: Z \rightarrow Z$ таково:

$$\{((\zeta \cdot \partial_z) \theta(z)) \cdot \partial_t \varepsilon(\theta(z), z) + (\zeta \cdot \partial_z) \varepsilon(\theta(z), z)\}|_{E(\theta)} = 0. \quad (5.2)$$

Для группы GE_0 равенство (5.2) должно быть выполнено, каково бы ни было отображение θ . Поэтому можно заменить $\theta(z)$ на t всюду, кроме члена $(\zeta \cdot \partial_z) \theta(z)$. Кроме того, всегда можно выбрать отображение θ как решение уравнения $(\zeta \cdot \partial_z) \theta = \tau$. После этих операций условие инвариантности (5.2) полностью совпадает с (5.1). Следовательно, касательный вектор ζ группы $G^1(\zeta) \subset GE_0$ входит в решение уравнения (5.1), и потому группа $G^1(\zeta)$ содержится в группе $GE(t)$. ■

6. Описание процесса решения. Для решения задачи классификации строится условие инвариантности (5.2), которое расщепляется относительно «свободных» координат векторов $y_1, \dots, y_k$.

В полученных определяющих уравнениях $DE(\theta)$ делается предположение о произвольности θ (и производной $\partial\theta$), что приводит к дополнительному расщеплению уравнений $DE(\theta)$ и дает определяющие уравнения DE_0 ядра основных групп. Множество решений уравнений DE_0 образует пространство векторных полей L_0 . В конечномерном случае пространство L_0 задается указанием его базиса.

Затем решаются определяющие уравнения $DE(\theta)$. Ввиду переопределенности системы $DE(\theta)$ это связано с формированием условий совместности, в результате чего возникают уравнения, содержащие только произвольный элемент θ . Эти последние уравнения являются *классифицирующими*: для каждого их решения θ получается некоторое пространство $L(\theta)$ векторных полей, касательных к группам G^1 , допускаемым уравнением $E(\theta)$. В силу теоремы 6.5 каждое пространство $L(\theta)$ содержит L_0 и потому (в конечномерном случае) может быть задано указанием дополнения базиса пространства L_0 до базиса пространства $L(\theta)$.

Классификация получаемых решений выполняется по признаку эквивалентности. Для этого предварительно строится группа эквивалентностей $GE(t)$ уравнения $E(\theta)$, как основная группа уравнения $E(t)$. Ее определяющие уравнения получаются из условия инвариантности (5.1).

Важным свойством классифицирующих уравнений является то, что они допускают группу эквивалентностей $GE(t)$. Это следует

из того, что классифицирующие уравнения по построению зависят только от дифференциальной структуры уравнения $E(\theta)$, а эта структура инвариантна относительно любых преобразований эквивалентности. В силу теоремы 5.6 указанное свойство приводит к тому, что преобразования произвольного элемента вида (4.3) для $w \in GE(t)$ действуют на множестве решений классифицирующих уравнений. Поэтому задача классификации сводится к разбиению множества всех решений классифицирующих уравнений на классы решений, эквивалентных относительно действия группы $GE(t)$ на этом множестве.

Это действие определяется по формуле (4.3) и с помощью него из каждого класса эквивалентных решений отбираются их типичные представители, имеющие по возможности наиболее простой аналитический вид.

Окончательным итогом решения задачи групповой классификации класса уравнений $E(\theta)$ является таблица с указанием отобранных представителей произвольного элемента θ и соответствующих пространств векторных полей $L(\theta)$ (их базисов), расположенных в порядке возрастания по включению.

7. Пример: нелинейная теплопроводность. Рассматривается уравнение типа $E(2, 1, 2, 1)$, которое в индивидуальных обозначениях координат $X = R^2(x, t)$, $Y = R(y)$, $Z = R^3(x, t, y)$, $Y_1 = R^2(y_1, y_2)$ и $Y_2 = R^3(y_{11}, y_{12}, y_{22})$ имеет вид

$$y_2 = \theta(y) y_{11} + \theta'(y) y_1^2. \quad (7.1)$$

Здесь $\theta: R \rightarrow R$ — произвольный элемент и $\theta'(y) = \partial \theta(y)$. Если $u: R^2(x, t) \rightarrow R$ есть решение этого уравнения, заданное формулой $y = u(x, t)$, то его продолжение таково:

$$y_1 = \partial_x u(x, t), \quad y_2 = \partial_t u(x, t), \quad y_{11} = \partial_x^2 u(x, t), \dots$$

В силу этих обозначений решение удовлетворяет тождеству

$$\partial_t u = \partial_x [\theta(u) \partial_x u],$$

которое показывает, что (7.1) является одномерным уравнением нелинейной теплопроводности, причем $u(x, t)$ есть температура в точке x в момент времени t , а коэффициент теплопроводности θ — некоторая функция температуры. Для уравнения (7.1) решается задача групповой классификации по отношению к произвольному элементу θ . Предполагается, что $\theta > 0$.

Допускаемый уравнением (7.1) оператор ищется в виде

$$\zeta \cdot \partial = \xi \partial_x + \eta \partial_t + \sigma \partial_y, \quad (7.2)$$

где каждая из координат ξ, η, σ есть искомая функция $Z \rightarrow R$. С помощью операторов полного дифференцирования D_1, D_2 — координат оператора D

$$D_1 = \partial_x + y_1 \partial_y + y_{11} \partial_{y_1} + y_{12} \partial_{y_2}, \quad D_2 = \partial_t + y_2 \partial_y + y_{12} \partial_{y_1} + y_{22} \partial_{y_2},$$

вычисляется первое продолжение оператора (7.2)

$$\zeta \cdot \partial = \zeta \cdot \partial + \alpha_1 \partial_{y_1} + \alpha_2 \partial_{y_2},$$

$$\alpha_1 = D_1 \sigma - y_1 D_1 \xi - y_2 D_1 \eta, \quad \alpha_2 = D_2 \sigma - y_1 D_2 \xi - y_2 D_2 \eta$$

и его второе продолжение

$$\zeta \cdot \partial = \zeta \cdot \partial + \beta_{11} \partial_{y_{11}} + \beta_{12} \partial_{y_{12}} + \beta_{22} \partial_{y_{22}},$$

$$\beta_{11} = D_1 \alpha_1 - y_{11} D_1 \xi - y_{12} D_1 \eta, \quad \beta_{12} = \dots, \quad \beta_{22} = \dots$$

Выражения для β_{12} и β_{22} в результат действия оператора $\zeta \cdot \partial$ на уравнение (7.1) не входят.

Дальнейшие выкладки, согласно этапам (b) — (d), первой части алгоритма 5.8 выполняются автоматически. Переход на многообразие E осуществляется просто подстановкой выражения y_2 из (7.1). При этом роль «свободных» координат играют y_1 , y_{11} , y_{12} , y_{22} . В результате расщепления условия инвариантности по этим переменным получаются после небольшой обработки следующие уравнения DE , в которых индексами x , t , y обозначены соответствующие производные ∂_x , ∂_t , ∂_y и $\theta'' = \partial_y^2 \theta$:

$$\eta_x = 0, \quad \eta_y = 0, \quad \xi_y = 0;$$

$$\sigma_{yy} = 0, \quad \theta(2\xi_x - \eta_t) - \theta' \sigma = 0; \quad (7.3)$$

$$\theta(2\sigma_{xy} - \xi_{xx}) + 2\theta' \sigma_x + \xi_t = 0, \quad \theta \sigma_{xx} - \sigma_t = 0.$$

Определяющие уравнения DE_0 ядра основных групп получаются из (7.3) как результат предположения о том, что величины θ и θ' суть независимые «свободные» параметры. Следовательно, уравнения DE_0 состоят из уравнений первой строки (7.3) и дополнительных уравнений

$$\sigma = 0, \quad \xi_t = 0, \quad \xi_{xx} = 0, \quad 2\xi_x - \eta_t = 0.$$

Отсюда следует, что $\xi = \xi(x)$, $\eta = \eta(t)$ и функция ξ линейна. Поэтому общее решение уравнений DE_0 таково:

$$\xi = C_3 x + C_1, \quad \eta = 2C_3 t + C_2, \quad \sigma = 0, \quad (7.4)$$

где C_1 , C_2 , C_3 — произвольные постоянные. Итак, группа GE_0 порождена преобразованиями, принадлежащими трем группам $G'(\zeta)$, касательные векторы которых $\zeta = (\xi, \eta, \sigma)$ получаются из (7.4), если одну из постоянных C_i положить равной единице, а остальные — равными нулю. Это дает базисные векторы пространства L_0

Группа эквивалентностей уравнения (7.1) ищется в классе уравнений, объединенных условием, чтобы произвольный элемент θ зависел только от y и чтобы $\theta'(y) = \partial\theta(y)$. Поэтому преобразования, действующие на θ , должны допускаться системой уравнений

$$\partial_x \theta = 0, \quad \partial_t \theta = 0, \quad \partial_y \theta = \theta'. \quad (7.6)$$

Для отыскания группы эквивалентностей уравнение (7.1) записывается в виде

$$y_2 = \theta y_{11} + \theta' y_1^2 \quad (7.7)$$

и для системы (7.6), (7.7) решается задача построения основной группы преобразований пространства $Z \times T = R^5(x, t, y, \theta, \theta')$. Инфинитезимальный оператор ищется в виде

$$\zeta \cdot \partial = \zeta \cdot \partial + \pi \partial_\theta + \rho \partial_{\theta'}, \quad (7.8)$$

где $\zeta \cdot \partial$ есть оператор вида (7.2), а π, ρ являются искомыми функциями $Z \times T \rightarrow R$. При этом ввиду независимости вектора ζ от переменных θ, θ' условие инвариантности должно быть расщеплено также и по этим переменным.

Счет здесь вполне элементарен, и можно привести конечный результат. Пространство L оказывается шестимерным, причем для всех допускаемых векторов $\rho = 0$. Базисные векторы (7.8) могут быть выбраны такими (нулевые значения последних координат опущены):

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= (1, 0, 0), & \zeta_2 &= (0, 1, 0), & \zeta_3 &= (0, 0, 1), \\ \zeta_4 &= (x, 2t, 0), & \zeta_5 &= (0, 0, y), & \zeta_6 &= (0, -t, 0, \theta). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Сравнение (7.5) с (7.9) дает иллюстрацию к теореме 6.5.

Поскольку θ есть функция только от y , преобразования эквивалентности, действующие на θ , порождаются группами $G^1(\zeta_3)$, $G^1(\zeta_5)$ и $G^1(\zeta_6)$. Легко проверить, что при этом получается следующее трехпараметрическое (с независимыми параметрами a, b, c) семейство преобразований

$$\bar{y} = ay + b, \quad \bar{\theta} = c\theta.$$

Отсюда следует общая формула преобразования эквивалентности произвольного элемента (4.3), которая может быть записана в виде

$$\bar{\theta}(y) = c\theta(ay + b). \quad (7.10)$$

Теперь можно приступить к классификации. Первым классификационным шагом является рассмотрение двух возможностей: $\theta' \neq 0$ или $\theta' = 0$. Уравнение $\theta' = 0$ является классифицирующим (см. 6.6), и оно, очевидно, инвариантно относительно преобразования (7.10). Эта возможность относится к линейному уравнению (7.1) и будет рассмотрена позже.

Пусть $\theta' \neq 0$. Тогда из (7.3) следует выражение

$$\sigma = (\theta/\theta')(2\xi_x - \eta_t). \quad (7.11)$$

Так как $\sigma_{yy} = 0$, а ξ , η не зависят от y , то отсюда

$$(\theta/\theta')''(2\xi_x - \eta_t) = 0,$$

где штрихами обозначены производные по y . Предположение $2\xi_x - \eta_t = 0$ влечет $\sigma = 0$, и тогда из (7.3) следуют равенства $\xi_t = 0$, $\xi_{xx} = 0$, т. е. получаются в точности уравнения DE_0 . Альтернативой этому предположению является равенство

$$(\theta/\theta')' = 0, \quad (7.12)$$

которое является классифицирующим уравнением. Расширение основной группы $GE(\theta)$ по сравнению с GE_0 возможно, только если функция θ удовлетворяет уравнению (7.12). Из (7.12) следует, что

$$\theta/\theta' = ky + l$$

с некоторыми постоянными k , l . Если перейти к эквивалентной функции $\bar{\theta}$ согласно (7.10), то это уравнение примет вид (черта над θ опускается)

$$\theta/\theta' = ky + (kb + l)/a.$$

Теперь видно, что надо изучить две возможности: $k=0$ и $k \neq 0$.

Если $k=0$, то за счет выбора $a=l$ получается уравнение $\theta' = \theta$ с общим решением $\theta = Ce^y$. В силу (7.10) представителем этого класса является функция $\theta = e^y$. В этом случае из (7.11) получается $\sigma = 2\xi_x - \eta_t$ и оставшиеся определяющие уравнения (7.3) (последняя строка) приводятся к следующим:

$$\xi_t = 0, \quad \xi_{xx} = 0, \quad \eta_{tt} = 0.$$

Общее решение всей системы $DE(e^y)$ таково:

$$\xi = C_3x + C_1, \quad \eta = (2C_3 - C_4)t + C_2, \quad \sigma = C_4,$$

где C_i — произвольные постоянные. Сравнение с (7.4) показывает, что пространство решений $L(e^y)$ получается из L_0 путем расширения (за счет константы C_4) с помощью вектора $\zeta_4 = (0, -t, 1)$.

Если $k \neq 0$, то за счет выбора $b = -l/k$ получается уравнение $\theta/\theta' = ky$ или $\theta'/\theta = my^{-1}$, где $m = 1/k$. Общее решение есть $\theta = Cy^m$, представителем которого в силу (7.10) является функция $\theta = y^m$. Здесь (7.11) дает $\sigma = k(2\xi_x - \eta_t)y$ и оставшиеся уравнения (7.3) после расщепления по переменному y приводятся к следующим:

$$\xi_t = 0, \quad (3m + 4)\xi_{xx} = 0, \quad 2\xi_{xxx} - 2\xi_{xt} + \eta_{tt} = 0. \quad (7.13)$$

Предположение $3m + 4 = 0$ является классифицирующим. Если $3m + 4 \neq 0$, то расширение L_0 происходит лишь на один вектор

$\zeta_4 = (mx, 0, 2y)$. Если же $3m+4=0$, т. е. $m=-4/3$, то решение оставшихся определяющих уравнений (7.3) и (7.13) показывает, что, кроме вектора $\zeta_4 = (-2x, 0, 3y)$, получается еще один независимый вектор $\zeta_5 = (-x^2, 0, 3xy)$.

Итак, в случае $\theta' \neq 0$ получается следующая классификационная схема (верхний индекс в символе пространства L^k решений определяющих уравнений указывает размерность этого пространства):

$$L_0^3 \subset \begin{cases} L^4(e^y), \\ L^4(y^m) \subset L^5(y^{-4/3}). \end{cases} \quad (7.14)$$

8. Случай линейного уравнения. Если в предыдущем примере $\theta = \text{const}$, то уравнение (7.1) становится линейным, эквивалентным уравнению

$$y_2 = y_{11}. \quad (8.1)$$

В этом случае система определяющих уравнений (7.3) упрощается до следующей:

$$\begin{aligned} \eta_x = 0, \quad \eta_y = 0, \quad \xi_y = 0, \quad 2\xi_x = \eta_t; \\ \sigma_{yy} = 0, \quad 2\sigma_{xy} = -\xi_t, \quad \sigma_{xx} = \sigma_t. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Общее решение системы (8.2) находится без каких-либо затруднений и может быть представлено формулами

$$\begin{aligned} \xi = C_1 + C_3x - 2C_4t - 4C_5xt, \quad \eta = C_2 + 2C_3t - 4C_5t^2, \\ \sigma = (C_6 + C_4x + C_5(x^2 + 2t))y + u^0(x, t), \end{aligned}$$

где C_i — произвольные постоянные, а u^0 — любое решение уравнения (8.1). Это приводит к тому, что пространство $L(1)$ для уравнения (8.1) оказывается бесконечномерным. Выражая этот факт, говорят, что *основная группа является бесконечной*.

Свойство основной группы быть бесконечной всегда справедливо для любых линейных уравнений E . С точки зрения действия группы на множестве решений это свойство равносильно тому, что множество решений линейного уравнения образует бесконечномерное векторное пространство (решения можно складывать и умножать на числа, не выходя за пределы множества решений). Аналогичный факт уже отмечался в примере 5.9.

Если обозначить бесконечную часть пространства $L(1)$, образованную векторами $\zeta = (0, 0, u^0(x, t))$ символом L^∞ , то $L(1)$ можно представить в виде прямой суммы $L(1) = L^6(1) \oplus L^\infty$, где шестимерное пространство $L^6(1)$ получается, если положить $u^0 = 0$. Базис в $L^6(1)$ можно выбрать состоящим из векторов (7.5), соответствующих постоянным C_1, C_2 и C_3 , и дополнительных

векторов, получаемых за счет постоянных C_4 , C_5 и C_6 :

$$\zeta_4 = (-2t, 0, xy), \zeta_5 = (-4xt, -4t^2, (x^2 + 2t)y), \zeta_6 = (0, 0, y). \quad (8.3)$$

Тем самым задача групповой классификации уравнения (7.4) решена до конца.

§ 7. Алгебра Ли операторов

1. Коммутатор. Пусть X — банахово пространство. Рассматриваются векторные поля $\xi: X \rightarrow X$ класса $C_\infty(X)$. Так как операции сложения и умножения на вещественные числа векторных полей дают снова векторные поля, то множество всех векторных полей на пространстве X само образует векторное пространство (над полем R). Это пространство будет обозначаться символом $\Xi(X)$ (или просто Ξ , если это не вызовет недоумений) и называться *пространством векторных полей на пространстве X* . В локальной теории рассматриваются векторные поля на открытом множестве $V \subset X$ класса $C_\infty(V)$, соответственно чему образуется пространство векторных полей $\Xi(V)$ на множестве V .

Коммутатором векторных полей $\xi_1, \xi_2 \in \Xi$ называется *векторное поле, обозначаемое символом $[\xi_1, \xi_2]$ и определенное формулой*

$$[\xi_1, \xi_2] = \partial \xi_2 \langle \xi_1 \rangle - \partial \xi_1 \langle \xi_2 \rangle. \quad (1.1)$$

С использованием понятия инфинитезимального оператора 2.6 это определение может быть записано в виде

$$[\xi_1, \xi_2] = (\xi_1 \cdot \partial) \xi_2 - (\xi_2 \cdot \partial) \xi_1. \quad (1.2)$$

Понятие коммутатора векторных полей обычно переносится и на определяемые этими полями операторы. Именно, оператор $[\xi_1, \xi_2] \cdot \partial$ называется *коммутатором операторов $\xi_1 \cdot \partial$ и $\xi_2 \cdot \partial$* , что выражается формулой

$$[\xi_1 \cdot \partial, \xi_2 \cdot \partial] = [\xi_1, \xi_2] \cdot \partial. \quad (1.3)$$

Эта формула означает, что символ коммутатора $[\ , \]$ векторных полей перестановочен со скалярным умножением векторного поля на оператор дифференцирования ∂ , в силу чего безразлично, говорить ли о коммутаторе операторов или о коммутаторе векторных полей.

2. Действие на отображение. Первоначально понятие коммутатора операторов возникло из определения действия операторов на отображения, когда такое действие требуется произвести несколько раз последовательно, но разными операторами. При этом оказывается справедливой формула

$$(\xi_1 \cdot \partial)(\xi_2 \cdot \partial) - (\xi_2 \cdot \partial)(\xi_1 \cdot \partial) = [\xi_1, \xi_2] \cdot \partial, \quad (2.1)$$

выражающая тот факт, что результаты действия левой и правой частей на любое отображение между собою равны.

Для проверки формулы (2.1) надо вспомнить, что результат действия оператора $\xi \cdot \partial$ на какое-нибудь дифференцируемое отображение $F: X \rightarrow Y$ определяется как значение производной ∂F на векторе ξ , т. е. $(\xi \cdot \partial) F = \partial F \langle \xi \rangle$. Следовательно, в силу этого определения и правил дифференцирования

$$(\xi_1 \cdot \partial)(\xi_2 \cdot \partial) F = \partial(\partial F \langle \xi_2 \rangle) \langle \xi_1 \rangle = \partial^2 F \langle \xi_1, \xi_2 \rangle + \partial F \langle \partial \xi_2 \langle \xi_1 \rangle \rangle.$$

Если переставить векторы ξ_1, ξ_2 и учесть свойство симметричности второй производной $\partial^2 F$, то после вычитания и использования (1.1) получится

$$\begin{aligned} (\xi_1 \cdot \partial)(\xi_2 \cdot \partial) F - (\xi_2 \cdot \partial)(\xi_1 \cdot \partial) F &= \partial F \langle \partial \xi_2 \langle \xi_1 \rangle - \partial \xi_1 \langle \xi_2 \rangle \rangle = \\ &= \partial F \langle [\xi_1, \xi_2] \rangle = ([\xi_1, \xi_2] \cdot \partial) F, \end{aligned}$$

т. е. равенство (2.1).

Приведенные выкладки показывают, что операторное равенство (2.1) равносильно определению коммутатора $[\xi_1, \xi_2]$.

3. Алгебраические свойства. Определением (1.1) в пространстве векторных полей Ξ вводится бинарная операция, сопоставляющая упорядоченной паре (ξ_1, ξ_2) векторное поле $[\xi_1, \xi_2] \in \Xi$. Она называется *операцией коммутации*.

Введение операции коммутации наделяет пространство Ξ определенной алгебраической структурой. В главе IV эта структура будет описана аксиоматически в абстрактных терминах. Здесь в силу конструктивного определения операции коммутации на пространстве векторных полей можно установить следующие ее алгебраические свойства.

1°. *Операция коммутации билинейна.* Это означает, что для любых векторных полей ξ_1, ξ_2, ξ_3 и любых чисел a, b справедливы тождества

$$\begin{aligned} [a\xi_1 + b\xi_2, \xi_3] &= a[\xi_1, \xi_3] + b[\xi_2, \xi_3], \\ [\xi_1, a\xi_2 + b\xi_3] &= a[\xi_1, \xi_2] + b[\xi_1, \xi_3]. \end{aligned}$$

2°. *Операция коммутации антисимметрична.* Это означает, что для любых векторных полей ξ_1, ξ_2 справедливо тождество

$$[\xi_1, \xi_2] = -[\xi_2, \xi_1].$$

3°. *Операция коммутации удовлетворяет соотношению Якоби.* Это означает, что для любых векторных полей ξ_1, ξ_2, ξ_3 справедливо тождество

$$[[\xi_1, \xi_2], \xi_3] + [[\xi_2, \xi_3], \xi_1] + [[\xi_3, \xi_1], \xi_2] = 0.$$

Проверка этих свойств выполняется просто с помощью любого из определений коммутатора (1.1), (1.2) или (2.1). Например,

для проверки 3° с помощью (2.1) достаточно заметить, что

$$\begin{aligned} [[\xi_1, \xi_2], \xi_3] \cdot \partial &= ([\xi_1, \xi_2] \cdot \partial)(\xi_3 \cdot \partial) - (\xi_3 \cdot \partial)([\xi_1, \xi_2] \cdot \partial) = \\ &= (\xi_1 \cdot \partial)(\xi_2 \cdot \partial)(\xi_3 \cdot \partial) - (\xi_2 \cdot \partial)(\xi_1 \cdot \partial)(\xi_3 \cdot \partial) - \\ &\quad - (\xi_3 \cdot \partial)(\xi_1 \cdot \partial)(\xi_2 \cdot \partial) + (\xi_3 \cdot \partial)(\xi_2 \cdot \partial)(\xi_1 \cdot \partial), \end{aligned}$$

и сделать круговую перестановку индексов $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. После сложения трех полученных равенств все слагаемые справа взаимно сократятся и 3° доказано.

4. Определения. Рассматривается подпространство L пространства векторных полей $\mathbb{E}$, т. е. подмножество $L \subset \mathbb{E}$, само являющееся векторным пространством.

Пространство $L \subset \mathbb{E}$ называется алгеброй Ли операторов (или векторных полей), если оно замкнуто относительно операции коммутации, т. е. если для любых $\xi_1, \xi_2 \in L$ также $[\xi_1, \xi_2] \in L$.

Примерами алгебры Ли операторов являются все пространство $\mathbb{E}$ и нулевое подпространство $\{0\} \subset \mathbb{E}$, состоящее из одного нулевого векторного поля. Другой пример дает любая одномерная алгебра Ли — множество всех векторных полей вида $a\xi$, получаемых умножением фиксированного векторного поля ξ на всевозможные числа $a \in \mathbb{R}$.

Размерностью алгебры Ли операторов L называется размерность L как векторного пространства. Конечномерная алгебра Ли размерности r называется также r -мерной алгеброй Ли и обозначается символом L^r . В частности, любая одномерная алгебра Ли имеет размерность, равную единице, и обозначается символом L^1 .

Алгебра Ли L называется абелевой (или коммутативной), если $[\xi_1, \xi_2] = 0$ для любых $\xi_1, \xi_2 \in L$. Например, любая одномерная алгебра Ли L^1 — абелева.

Если L — алгебра Ли операторов и подпространство $L' \subset L$ само является алгеброй Ли, то L' называется *подалгеброй алгебры Ли L* . Другими словами, подпространство $L' \subset L$, есть подалгебра в L , если $[\xi_1, \xi_2] \in L'$ для любых $\xi_1, \xi_2 \in L'$. В частности, любая алгебра Ли $L \subset \mathbb{E}$ может рассматриваться как подалгебра алгебры Ли $\mathbb{E}$.

Подалгебра Ли $L' \subset L$ называется идеалом, если для любого $\xi' \in L'$ и любого $\xi \in L$ коммутатор $[\xi', \xi] \in L'$.

5. Структурный тензор. Пусть дана алгебра Ли операторов $L^r \subset \mathbb{E}(X)$. Конечномерность векторного пространства L^r означает, что в нем существует базис — набор из r линейно независимых векторных полей $\{\xi_i\} = (\xi_1, \dots, \xi_r)$. Для любого векторного поля $\xi \in L^r$ существует однозначно определяемый по ξ набор чисел $\{c^i\} = (c^1, \dots, c^r)$ — координат векторного поля ξ в базисе $\{\xi_i\}$, с которым выполнено равенство $\xi = c^i \xi_i$.

Поскольку для любых $i, j = 1, \dots, r$ коммутатор $[\xi_i, \xi_j] \in L'$, то справедлива формула разложения по базису $\{\xi_k\}$

$$[\xi_i, \xi_j] = C_{ij}^k \xi_k. \quad (5.1)$$

Числа C_{ij}^k называются *структурными константами алгебры Ли L' в базисе $\{\xi_i\}$* .

Следующий очевидный, но практически важный критерий используется в приложениях для установления того, что некоторое векторное пространство $L' \subset \mathfrak{E}$ есть алгебра Ли.

К р и т е р и й. Векторное пространство $L' \subset \mathfrak{E}$ является алгеброй Ли векторных полей, если и только если для векторов какого-либо базиса $\{\xi_i\} \subset L'$ выполнены соотношения вида (5.1).

Легко проверяется, что при переходе от одного базиса в L' к другому числа C_{ij}^k изменяются как компоненты тензора третьего ранга. Поэтому набор чисел $\{C_{ij}^k\}$ называется также *тензором структурных констант* или просто *структурным тензором алгебры Ли L'* . Сам этот тензор, конечно, от базисов в L' не зависит и потому будет обозначаться одним символом C . Тогда определяемые равенством (5.1) структурные константы C_{ij}^k суть компоненты структурного тензора C в базисе $\{\xi_i\}$.

Свойствам 3.1°—3° операции коммутации соответствуют определенные, равносильные им для алгебр Ли L' свойства структурных констант. Свойство 3.1° билинейности коммутатора равносильно тому, что C_{ij}^k являются компонентами структурного тензора C . Свойство 3.2° антисимметричности равносильно антисимметричности C_{ij}^k по нижним индексам:

$$C_{ij}^k = -C_{ji}^k. \quad (5.2)$$

Наконец свойство 3.3° — тождество Якоби — равносильно соотношению

$$C_{ij}^s C_{sk}^l + C_{jk}^s C_{si}^l + C_{ki}^s C_{sj}^l = 0, \quad (5.3)$$

которое также называется соотношением Якоби для структурных констант.

6. Линейные отображения алгебр Ли. В теории алгебр Ли большую роль играют определенные классы линейных отображений алгебр Ли как векторных пространств. Пусть L и K — две алгебры Ли операторов, причем $L \subset \mathfrak{E}(X)$ и $K \subset \mathfrak{E}(Y)$, где базисы пространства X и Y , вообще говоря, различны.

Линейное отображение $\gamma: L \rightarrow K$ называется гомоморфизмом (или гомоморфным отображением) алгебры Ли L в алгебру Ли K , если для любых $\xi, \xi' \in L$ выполнено равенство

$$\gamma \langle [\xi, \xi'] \rangle = [\gamma \langle \xi \rangle, \gamma \langle \xi' \rangle]. \quad (6.1)$$

В силу (6.1) при гомоморфизме $\gamma: L \rightarrow K$ образ $\gamma(L)$ является подалгеброй алгебры Ли K .

Гомоморфизм $\gamma: L \rightarrow K$ называется *изоморфизмом*, если линейное отображение γ является взаимно однозначным. Следует различать случаи изоморфизма, когда образ $\gamma(L) = K$ или когда только $\gamma(L) \subset K$. Если изоморфизм γ таков, что $\gamma(L) = K$, то говорят об *изоморфизме на* или об *изоморфном соответствии* алгебр Ли L и K . В этом случае алгебры Ли L и K называются *изоморфными*. Если же имеет место строгое включение $\gamma(L) \subset K$, то говорят об *изоморфном вложении* алгебры Ли в алгебру Ли K ; в этом случае обратный изоморфизм γ^{-1} определен только на подалгебре $\gamma(L) \subset K$.

Если дан гомоморфизм $\gamma: L \rightarrow K$, то множество тех $\xi \in L$, для которых $\gamma\langle\xi\rangle = 0$, называется *ядром гомоморфизма* γ . Очевидно, что ядро любого изоморфизма состоит из одного нуля (нулевого векторного поля). Ядро гомоморфизма γ обозначается естественным символом $\gamma^{-1}(0)$.

Каков бы ни был гомоморфизм $\gamma: L \rightarrow K$, его ядро $\gamma^{-1}(0)$ есть идеал в L . Действительно, если $\xi_0 \in \gamma^{-1}(0)$, то $\gamma\langle\xi_0\rangle = 0$ и для любого $\xi \in L$ будет

$$\gamma\langle[\xi, \xi_0]\rangle = [\gamma\langle\xi\rangle, 0] = 0,$$

в силу чего также $[\xi, \xi_0] \in \gamma^{-1}(0)$.

Изоморфизм $\alpha: L \rightarrow L$ называется *автоморфизмом алгебры Ли* L . Другими словами, автоморфизм алгебры Ли есть такое линейное преобразование векторного пространства L , которое удовлетворяет тождеству (6.1).

7. Критерий изоморфизма. Очевидно, что конечномерные изоморфные алгебры Ли имеют одинаковую размерность. Для установления изоморфизма алгебр Ли L' и K' используется следующий критерий.

Лемма. Алгебры Ли L' и K' изоморфны, если и только если их структурные тензоры совпадают. Это означает, что если $\gamma: L' \rightarrow K'$ есть изоморфизм, то структурные константы алгебры Ли L' в базисе $\{\xi_i\}$ равны соответствующим структурным константам алгебры Ли K' в базисе $\{\gamma\langle\xi_i\rangle\}$; обратно, если в алгебрах Ли L' и K' можно так выбрать базисы $\{\xi_i\}$ и $\{\eta_i\}$, что структурные константы данных алгебр в этих базисах соответственно равны, то алгебры Ли L' и K' изоморфны.

Доказательство. Если в L' структурные константы определены формулой (5.1) и $\gamma: L' \rightarrow K'$ есть изоморфизм, то в силу (6.1) также

$$[\gamma\langle\xi_i\rangle, \gamma\langle\xi_j\rangle] = C_{ij}^k \gamma\langle\xi_k\rangle. \quad (7.1)$$

Обратно, если наряду с (5.1) в алгебре K' также

$$[\eta_i, \eta_j] = C_{ij}^k \eta_k, \quad (7.2)$$

то для линейного преобразования $\gamma: L' \rightarrow K'$, однозначно определенного заданием на его векторах базиса равенством $\gamma\langle \xi_i \rangle = \eta_i$ ($i=1, \dots, r$), оба соотношения (7.1) и (7.2) выполнены. Отсюда (6.1) следует для любой пары базисных векторов (ξ_i, ξ_j) . Поэтому в силу билинейности коммутатора равенство (6.1) справедливо и для любых $\xi, \xi' \in L'$. ■

8. Пример. Если r -мерное пространство векторных полей L' задано указанием его базиса $\{\xi_i\}$, то свойство L' быть алгеброй Ли устанавливается с помощью критерия 7.5 путем составления *таблицы коммутаторов*. Так называется квадратная $r \times r$ матрица, в которой на пересечении i -й строки и j -го столбца находится коммутатор $[\xi_i, \xi_j]$. В силу свойства 3.3° эта матрица *антисимметрична* и фактически надо вычислять только ее верхнюю половину.

В качестве примера берется пространство L^6 операторов, допускаемых линейным уравнением теплопроводности 6 (8.1). Базис в L^6 образован векторными полями 6 (7.5) и 7 (8.3) на пространстве $Z = R^3(x, t, y)$. Этот базис таков:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= (1, 0, 0), \quad \zeta_2 = (0, 1, 0), \quad \zeta_3 = (x, 2t, 0), \quad \zeta_4 = (-2t, 0, xy), \\ \zeta_5 &= (-4xt, -4t^2, (x^2 + 2t)y), \quad \zeta_6 = (0, 0, y). \end{aligned} \quad (8.1)$$

Вычисление по формуле (1.2), где надо положить $\partial = (\partial_x, \partial_t, \partial_y)$, приводит к следующей таблице коммутаторов.

	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4	ζ_5	ζ_6
ζ_1	0	0	ζ_1	0	$2\zeta_4$	0
ζ_2	0	0	$2\zeta_2$	$-2\zeta_1$	$-4\zeta_5 + 2\zeta_6$	0
ζ_3	$-\zeta_1$	$-2\zeta_2$	0	ζ_4	$2\zeta_5$	0
ζ_4	0	$2\zeta_1$	$-\zeta_4$	0	0	0
ζ_5	$-2\zeta_4$	$4\zeta_3 - 2\zeta_6$	$-2\zeta_5$	0	0	0
ζ_6	0	0	0	0	0	0

(8.2)

Из этой таблицы следует, что критерий 7.5 выполнен, следовательно, L^6 есть алгебра Ли. С помощью таблицы можно сделать некоторые заключения о структуре этой алгебры Ли. Ниже для упрощения записи подпространства в L^6 кодируются указанием только номеров i векторов базиса $\{\zeta_i\}$; например, $L^3(2, 3, 6)$ означает подпространство с базисом $(\zeta_2, \zeta_3, \zeta_6)$.

В цепочке вложений

$$L^3(1, 2, 6) \subset L^4(1, 2, 3, 6) \subset L^5(1, 2, 3, 4, 6) \subset L^6$$

каждое подпространство есть подалгебра в последующем, причем

L^3 — абелев идеал всей алгебры Ли L^6 . Можно заметить и ряд других структурных особенностей, например, что L^4 есть идеал в L^5 , и т. п.

9. Инвариантность относительно подобия. Согласно определению 1.16 векторное поле $\xi \in \Xi(X)$ называется подобным векторному полю $\xi \in \Xi(X)$, если существует такое преобразование p пространства X , с которым справедлива формула подобия векторных полей

$$\xi(x) = \partial p(x) \langle \xi(x) \rangle, \quad x = p(x). \quad (9.1)$$

В этих обозначениях формулируется следующее свойство инвариантности коммутатора относительно преобразования подобия (9.1).

Л е м м а. *Коммутатор векторных полей, подобных данным, подобен коммутатору данных векторных полей, т. е. выполнено равенство*

$$[\xi_1, \xi_2] = \overline{[\xi_1, \xi_2]}. \quad (9.2)$$

Доказательство. Пусть ∂ есть по-прежнему символ дифференцирования отображений $x \rightarrow f(x)$, и пусть $\bar{\partial}$ есть символ дифференцирования отображений $x \rightarrow f(x)$. Тогда, если $x = p(x)$ и $\bar{\partial}(x) = v(x)$, то справедлива формула $\bar{\partial} \bar{\eta} = \partial v \circ (\partial p)^{-1}$. Согласно определению (1.1) левая часть равенства (9.2) в этих обозначениях такова: $[\xi_1, \xi_2] = \bar{\partial} \xi_2 \langle \xi_1 \rangle - \bar{\partial} \xi_1 \langle \xi_2 \rangle$. В силу предыдущей формулы дифференцирования и определения подобия (9.1) верны равенства

$$\begin{aligned} \bar{\partial} \xi_2 \langle \xi_1 \rangle &= \partial(\partial p \langle \xi_2 \rangle) \circ (\partial p)^{-1} \langle \partial p \langle \xi_1 \rangle \rangle = \\ &= \partial(\partial p \langle \xi_2 \rangle) \langle \xi_1 \rangle = \partial^2 p \langle \xi_2, \xi_1 \rangle + \partial p \langle \bar{\partial} \xi_2 \langle \xi_1 \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Вычитание аналогичной формулы с переставленными индексами и учет симметричности второй производной $\partial^2 p$ дает $[\xi_1, \xi_2] = \partial p \langle \bar{\partial} \xi_2 \langle \xi_1 \rangle - \bar{\partial} \xi_1 \langle \xi_2 \rangle \rangle = \partial p \langle [\xi_1, \xi_2] \rangle$, что в силу определения подобия (9.1) совпадает с $\overline{[\xi_1, \xi_2]}$. ■

С л е д с т в и е. *Если $L \subset \Xi(X)$ — алгебра Ли и все векторные поля $\xi \in L$ подвергнуты преобразованию подобия p по формуле (9.1), то совокупность L преобразованных векторов ξ также есть алгебра Ли.*

Это вытекает непосредственно из доказанного равенства (9.2).

Полученная этим построением алгебра Ли L называется подобной алгебре Ли L . Очевидно, что подобные алгебры Ли изоморфны. Действительно, определяемое формулой подобия векторных полей (9.1) отображение $\gamma: L \rightarrow L$ является линейным, взаимно однозначным и в силу леммы сохраняет коммутатор.

В частности, полученный в 3.8 результат можно переформулировать, сказав, что одномерная алгебра Ли $L^1(\xi)$ подобна алгебре Ли $L^1(\lambda)$ с постоянным на X векторным полем $\lambda \in X$.

10. Групповой коммутатор. Если $G^1(f_1)$ и $G^1(f_2)$ — группы Ли преобразований пространства X , порожденные отображениями f_1 и f_2 , то для любого $a \in R$ можно образовать *групповой коммутатор*

$$q_a = f_{2a} \circ f_{1a} \circ f_{2a}^{-1} \circ f_{1a}^{-1}. \quad (10.1)$$

Для каждого $a \in R$ групповой коммутатор является преобразованием пространства X . Поэтому отображение $q: X \times R \rightarrow X$, действующее по формуле $q(x, a) = q_a(x)$, порождает однопараметрическое семейство преобразований пространства X , причем $q(x, 0) = x$. Хотя это семейство, вообще говоря, не является группой G^1 , ему можно сопоставить вполне определенное векторное поле на X аналогично тому, как это делается для групп G^1 (см. 1.13). Именно, это поле строится, как поле касательных векторов к «орбитам» $q_x(R)$ точек x при $a=0$. Однако здесь нельзя вычислить такой касательный вектор по формуле $\partial_a q_x(0)$, так как эта производная оказывается равной нулю тождественно. Это происходит исключительно из-за «плохой» параметризации кривых $q_x(R)$ параметром a в точке $a=0$, так как $\partial_a q(x, 0) = 0$. Оказывается, что «хорошая» параметризация достигается, если положить $a = \sqrt{t}$. Тогда искомое векторное поле дается формулой

$$\partial_t q(x, \sqrt{t})|_{t=0} = \frac{1}{2} \partial_a^2 q(x, 0).$$

Лемма. Касательное векторное поле группового коммутатора (10.1) существует для любых $G^1(f_1)$ и $G^1(f_2)$, причем, если ξ_1 и ξ_2 — касательные векторные поля этих групп, то

$$\partial_t q(x, \sqrt{t})|_{t=0} = [\xi_1, \xi_2]. \quad (10.2)$$

Доказательство. Для любой группы $G^1(f)$ с касательным векторным полем ξ на основании уравнения Ли 1(14.1) получается следующая формула Тейлора разложения отображения f_a :

$$f_a(x) = x + a\xi(x) + \frac{1}{2} a^2 \partial \xi(x) \langle \xi(x) \rangle + a^3 F(x, a).$$

Здесь норма $|F(x, a)|$ ограничена в окрестности точки $a=0$ (в дальнейшем этот факт выражается записью $|F(x, a)| < \infty$). Для групп $G^1(f_1)$ и $G^1(f_2)$, имеющих касательные векторные поля ξ_1 и ξ_2 , с помощью предыдущей формулы получается следующая:

$$f_{2a} \circ f_{1a} = I_X + a(\xi_1 + \xi_2) + \frac{1}{2} a^2 (\partial \xi_1 \langle \xi_1 \rangle + \partial \xi_2 \langle \xi_2 \rangle) + a^2 \partial \xi_2 \langle \xi_1 \rangle + a^3 F'_a, \quad (10.3)$$

где отображение $F'_a: X \rightarrow X$ таково, что $|F'_a(x)| < \infty$. Кроме того, если некоторое отображение $h_a: X \rightarrow X$ имеет вид

$$h_a(x) = x + a\lambda(x) + a^2\mu(x) + a^3\nu(x, a),$$

где $|\nu(x, a)| < \infty$, то разложение композиции $q_a \circ h_a$ по формуле

Тейлора таково:

$$q_a \circ h_a(x) = x + a(\partial_a q(x, 0) + \lambda(x)) + \\ + a^2 \left(\frac{1}{2} \partial_a^2 q(x, 0) + \partial_x(\partial_a q(x, 0)) \langle \lambda(x) \rangle + \mu(x) \right) + a^3 v_1(x, a),$$

причем $|v_1(x, a)| < \infty$.

В силу (10.3) композиция $f_{1a} \circ f_{2a}$ имеет вид отображения h_a , причем $\lambda = \xi_1 + \xi_2$, $\mu = \frac{1}{2}(\partial \xi_1 \langle \xi_1 \rangle + \partial \xi_2 \langle \xi_2 \rangle) + \partial \xi_1 \langle \xi_2 \rangle$. Поэтому определение (10.1), взятое в виде $q_a \circ f_{1a} \circ f_{2a} = f_{2a} \circ f_{1a}$, с использованием (10.3) и предыдущей формулы разложения композиции $q \circ (f_{1a} \circ f_{2a})$ приводит к следующему соотношению:

$$a \partial_a q(x, 0) + a^2 \left(\frac{1}{2} \partial_a^2 q(x, 0) + \partial_x(\partial_a q(x, 0)) \langle \xi_1(x) + \xi_2(x) \rangle + \right. \\ \left. + a^2 \partial \xi_1(x) \langle \xi_2(x) \rangle = a^2 \partial \xi_2(x) \langle \xi_1(x) \rangle + a^3 \omega(x, a), \right.$$

где $|\omega(x, a)| < \infty$. Отсюда следует, что $\partial_a q(x, 0) = 0$, в силу чего это соотношение после сокращения на a^2 и предельного перехода $a \rightarrow 0$ принимает вид

$$\frac{1}{2} \partial_a^2 q(x, 0) + \partial \xi_1(x) \langle \xi_2(x) \rangle = \partial \xi_2(x) \langle \xi_1(x) \rangle.$$

Теперь видно, что в силу определения (1.1) верно (10.2). ■

11. Допускаемые операторы. Здесь и в следующих пунктах устанавливаются факты, необходимые для понимания групповых свойств дифференциальных уравнений.

Согласно 3.3 отображение $F: X \rightarrow Y$ инвариантно относительно группы $G^1(\xi)$ преобразований пространства X , характеризуемой ее оператором $\xi \cdot \partial$, если для всех $x \in X$ выполнено равенство $(\xi \cdot \partial)F(x) = 0$. В этом случае говорят также, что *отображение F допускает оператор $\xi \cdot \partial$* .

Очевидно, что если отображение F допускает операторы $\xi_1 \cdot \partial$ и $\xi_2 \cdot \partial$, то оно допускает и их коммутатор $[\xi_1, \xi_2] \cdot \partial$. Действительно в силу (7.2)

$$([\xi_1, \xi_2] \cdot \partial)F(x) = (\xi_1 \cdot \partial)(\xi_2 \cdot \partial)F(x) - (\xi_2 \cdot \partial)(\xi_1 \cdot \partial)F(x) = 0.$$

Аналогичный факт для многообразий не столь тривиален. Согласно 3.12 многообразие Ψ , регулярно заданное с помощью отображения $\psi: X \rightarrow R^*$, инвариантно относительно группы $G^1(\xi)$, если и только если выполнено равенство $(\xi \cdot \partial)\psi(x)|_\Psi = 0$. В этом случае говорят также, что *многообразие Ψ допускает оператор $\xi \cdot \partial$* .

Лемма. Если многообразие Ψ допускает операторы $\xi_1 \cdot \partial$ и $\xi_2 \cdot \partial$, то оно допускает и их коммутатор $[\xi_1, \xi_2] \cdot \partial$.

Доказательство. Пусть $G^1(\xi_1)$ и $G^1(\xi_2)$ — соответствующие группы Ли преобразований пространства X , порожденные отображениями f_1 и f_2 . Так как многообразие Ψ инвариантно относи-

тельно любых преобразований $f_{1a} \in G^1(\xi_1)$, $f_{2a} \in G^1(\xi_2)$, то Ψ также инвариантно и относительно группового коммутатора q_a . Это означает, что для любой точки $x \in \Psi$ выполнено равенство $\psi \circ q(x, \sqrt{t}) = 0$. Но тогда также в силу леммы 7.10

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t (\psi \circ q(x, \sqrt{t}))|_{t=0} = \partial \psi(q) \langle \partial_t q(x, \sqrt{t}) \rangle|_{t=0} = \\ &= \partial \psi(x) \langle [\xi_1, \xi_2] \rangle = ([\xi_1, \xi_2] \cdot \partial) \psi(x). \blacksquare \end{aligned}$$

12. Продолжение коммутатора. Здесь устанавливается важное свойство перестановочности операции коммутации и операции продолжения. Ниже используются обозначения и факты из § 4. Рассматриваются банаховы пространства $X, Y, Z = X \times Y$ и соответствующие продолженные пространства Z_k .

В 4.8 определено k -е продолжение любого векторного поля $\zeta \in \Xi(Z)$, как касательное векторное поле ζ продолженной группы $G^1(\zeta)$, и ему соответствующий продолженный оператор $\zeta \cdot \partial$. Если имеются два

векторных поля $\zeta, \zeta' \in \Xi(Z)$, то с помощью операций продолжения и коммутации можно образовать два векторных поля (или два оператора) на продолженном пространстве Z_k : коммутатор $[\zeta, \zeta']_{k \ k}$ продолжений векторных полей ζ и ζ' и k -е продолжение их коммутатора $[\zeta, \zeta']_k$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма. Коммутатор продолженных операторов равен продолжению коммутатора этих операторов

$$[\zeta, \zeta']_{k \ k} = [\zeta, \zeta']_k. \quad (12.1)$$

Доказательство. Исходным пунктом является основное свойство продолженных преобразований, сформулированное в лемме 4.6. Можно дать два варианта доказательства, в каждом из которых используется почти очевидное свойство перестановочности операции продолжения с одной из операций: дифференцирования по параметру или преобразования подобия. В обоих вариантах рассматриваются группы $G^1(\zeta)$, порожденные отображениями $h: Z \times R \rightarrow Z$ и соответствующие продолженные группы $G^1(\zeta)_k$ и отображения $h: Z_k \times R \rightarrow Z_k$.

$Z_k \times R \rightarrow Z_k$.

Вариант первый. В силу определения 4.8 и равенства $\zeta = \partial_a h(0)$ справедлива формула перестановочности операции продолжения с операцией дифференцирования по параметру

$$\zeta = \underbrace{\partial_a h(0)}_k = \partial_a h(0)_k.$$

Пусть группа $G^1(\zeta')$ порождена отображением h' . Из леммы 7.10 следует, что коммутатор $[\zeta, \zeta']$ продолженных векторных полей может быть вычислен через групповой коммутатор $h'_a \circ h_a \circ h'^{-1}_a \circ h^{-1}_a$ по формуле $[\zeta, \zeta'] = \partial_i (h'_{\sqrt{i}} \circ h_{\sqrt{i}} \circ h'^{-1}_{\sqrt{i}} \circ h^{-1}_{\sqrt{i}})|_{t=0}$. В силу леммы 4.6, только что отмеченного свойства перестановочности и еще раз леммы 7.10 это выражение равно

$$\partial_i \underbrace{(h'_{\sqrt{i}} \circ h_{\sqrt{i}} \circ h'^{-1}_{\sqrt{i}} \circ h^{-1}_{\sqrt{i}})}_k \Big|_{t=0} = \partial_i \underbrace{(h'_{\sqrt{i}} \circ h_{\sqrt{i}} \circ h'^{-1}_{\sqrt{i}} \circ h^{-1}_{\sqrt{i}})}_k \Big|_{t=0} = [\zeta, \zeta']_k,$$

что и требовалось доказать.

Вариант второй. Пусть p есть некоторое преобразование пространства Z . Рассматриваемое как преобразование подобия групп согласно 1.11, оно переводит отображение h_a в отображение $\bar{h}_a = p \circ h_a \circ p^{-1}$, откуда следует аналогичная 1(16.1) формула подобия соответствующих векторных полей $\bar{\zeta}(\bar{z}) = \partial p(z) \langle \zeta(z) \rangle$, где $\bar{z} = p(z)$. В силу леммы 4.6 справедливо равенство

$$\overline{\boxed{h_a}_k} = \boxed{\bar{h}_a}_k$$

где левая часть есть результат преобразования h_a с помощью продолженного подобия p . Отсюда следует формула перестановочности операции продолжения векторного поля ζ с преобразованием подобия

$$\overline{\boxed{\zeta}_k} = \boxed{\bar{\zeta}}_k.$$

Объединение этого факта с леммой 7.9 показывает, что равенство (12.1) инвариантно относительно преобразования подобия.

Теперь надо заметить, что, согласно теореме о подобии 3.8, для данного векторного поля ζ' всегда найдется такое преобразование подобия p , что подобное векторное поле $\bar{\zeta}'$ будет постоянным на пространстве Z . Поэтому равенство (12.1) достаточно доказать для случая, когда векторное поле $\zeta' = \lambda$ постоянно. В этом случае равенство (12.1) равносильно следующему:

$$(\lambda \cdot \partial) \zeta_k = (\lambda \cdot \partial) \zeta_k. \quad (12.2)$$

Так как $\zeta = (\xi, \eta, \eta_1, \dots, \eta)$, то

$$(\lambda \cdot \partial) \zeta_k = ((\lambda \cdot \partial) \xi, (\lambda \cdot \partial) \eta, (\lambda \cdot \partial) \eta_1, \dots, (\lambda \cdot \partial) \eta_k).$$

С другой стороны, так как оператор $\lambda \cdot \partial$ в силу постоянства λ перестановочен с оператором полного дифференцирования D , то из формулы 4(8.5) следует равенство

$$(\lambda \cdot \partial) \eta = D^s ((\lambda \cdot \partial) \eta - y_1 \cdot (\lambda \cdot \partial) \xi) + y_{s+1} \cdot (\lambda \cdot \partial) \xi = \underbrace{(\lambda \cdot \partial) \eta}_s$$

$$(s = 1, \dots, k),$$

в силу которого (12.2) очевидно. ■

13. Допускаемые алгебры Ли. Применение предыдущих результатов к дифференциальным уравнениям приводит к следующей теореме, в формулировке которой использовано определение 5.2.

Теорема. Если дифференциальное уравнение допускает операторы $\zeta \cdot \partial$ и $\zeta' \cdot \partial$, то оно допускает и их коммутатор $[\zeta, \zeta'] \cdot \partial$.

Доказательство. Согласно определению 5.2 дифференциальное уравнение E допускает оператор $\zeta \cdot \partial$, если многообразие $E \subset Z_k$ инвариантно относительно оператора $\zeta \cdot \partial$. В силу леммы 7.11 многообразии E , инвариантного относительно операторов $\zeta \cdot \partial$ и $\zeta' \cdot \partial$, инвариантно также относительно их коммутатора $[\zeta, \zeta'] \cdot \partial = [\zeta, \zeta'] \cdot \partial$, где последнее равенство справедливо в силу леммы 7.12. Поэтому, согласно определению 5.2, уравнение E допускает оператор $[\zeta, \zeta'] \cdot \partial$. ■

Из этой теоремы в силу определения 7.4 вытекает следующий факт, имеющий фундаментальное значение.

С л е д с т в и е. Множество всех операторов, допускаемых данным дифференциальным уравнением, образует алгебру Ли.

Если имеется некоторая алгебра Ли L операторов, допускаемых данным дифференциальным уравнением, то говорят, что это уравнение допускает алгебру Ли L ; в этом случае L называется допускаемой алгеброй Ли данного уравнения.

Наиболее широкая допускаемая алгебра Ли уравнения E , содержащая все операторы, допускаемые этим уравнением, будет называться основной алгеброй Ли уравнения E и обозначаться символом LE .

В этих терминах можно сказать, что любая допускаемая алгебра Ли уравнения E является подалгеброй основной алгебры Ли LE .

Теперь ясно, что в приведенных ранее примерах вычисления основных групп фактически были вычислены некоторые допускаемые алгебры Ли соответствующих уравнений. Например, система уравнений околосзвукового течения газа 5.9 допускает основную бесконечномерную алгебру Ли LE , которая может быть представлена в виде прямой суммы подпространств $LE = L^4 \oplus L^\infty$, причем базис в L^4 образован операторами 5 (9.9), а общий вид оператора $\zeta \cdot \partial \in L^\infty$ дается формулой 5 (9.11). Путем составления таблицы коммутаторов операторов 5 (9.9) можно убедиться в том, что

L^4 есть алгебра Ли. Операторы 5 (9.11) также образуют алгебру Ли L^∞ , которая является абелевой. Очевидно, что коммутаторы $[\zeta^0, \zeta] \cdot \partial$ для любого оператора $\zeta \cdot \partial \in LE$ имеют вид операторов $\zeta^0 \cdot \partial$, в силу чего подалгебра $L^\infty \subset LE$ является идеалом в LE .

Уравнение $E(\theta)$ нелинейной теплопроводности при $\theta \neq 1$ допускает, в зависимости от значения произвольного элемента θ , основные алгебры Ли, представленные в схеме 6 (7.14). Легко проверяется, что алгебра Ли L_θ , допускаемая уравнением $E(\theta)$ независимо от значения произвольного элемента θ , является идеалом в любой из указанных в схеме алгебр L^4, L^5 .

14. Линейные уравнения. Дифференциальное уравнение E называется *линейным* (и *однородным*), если задающее его в виде 5 (1.1) отображение $\varepsilon : Z_k \rightarrow R'$ таково, что для любого $x \in X$ частное отображение $\varepsilon_x : Y \times Y_1 \times \dots \times Y_k \rightarrow R'$ является линейным отображением.

Основная алгебра Ли операторов

$$\zeta(z) \cdot \partial = \xi(x, y) \cdot \partial_x + \eta(x, y) \cdot \partial_y, \quad (14.1)$$

допускаемых линейным уравнением E всегда содержит абелеву подалгебру операторов вида

$$\zeta^0(z) \cdot \partial = v(x) \cdot \partial_y, \quad (14.2)$$

с отображением $v : X \rightarrow Y$. Существенное свойство таких операторов состоит в том, что они определяются решениями уравнения E .

Теорема. *Линейное уравнение E допускает оператор вида (14.2), если и только если отображение v есть решение уравнения E .*

Доказательство. Оператору (14.2) соответствует группа G^1 преобразований пространства $Z = X \times Y$, порожденная отображением

$$x' = x, \quad y' = y + av(x). \quad (14.3)$$

Если $u : X \rightarrow Y$ есть решение уравнения E , то преобразования этой группы производят из него однопараметрическое семейство решений, получаемых согласно 5 (7.3),

$$u'(x) = u(x) + av(x).$$

Отсюда следует, что если уравнение E допускает оператор (14.2), то отображение v является решением E . Обратно, если v есть решение, то группа G^1 , порожденная отображением (14.3), допускается уравнением E . Действительно здесь $f = I_X$, $g = I_Y + av$ и формулы 4 (5.3), 4 (5.4) дают $y'_k = y_k + av$. Поэтому в силу линейности отображения ε справедливо равенство $\varepsilon_k(z') = \varepsilon_k(z) + a\varepsilon_k(v)$, в котором $\varepsilon_k(v) = 0$ по определению решения 5.6. Это означает, что отображе-

ние ε является инвариантом группы (14.3) и тем более допускает эту группу, а значит, и оператор (14.2). ■

Так как множество всех решений линейного уравнения образует векторное пространство, то этим свойством обладает и совокупность всех операторов вида (14.2). Очевидно, что коммутатор любых двух таких операторов равен нулю. Следовательно, их совокупность есть абелева алгебра Ли. Вообще говоря, эта алгебра Ли бесконечномерна и потому будет обозначаться символом L^∞ .

Другой типичной алгеброй Ли, допускаемой линейным уравнением, является множество операторов вида

$$\zeta(x) \cdot \partial = \xi(x) \cdot \partial_x + \beta(x) \langle y \rangle \cdot \partial_y, \quad (14.4)$$

где компонента векторного поля $\xi: X \times Y \rightarrow X$ не зависит от $y \in Y$ и β есть отображение $X \rightarrow \mathcal{L}(Y)$, так что компонента векторного поля η линейна относительно y . Конечно, здесь отображения ξ и β определяются не так просто, как в предыдущем случае; они должны быть решениями соответствующих определяющих уравнений DE.

Так как коммутатор операторов вида (14.4)

$$[\zeta_1, \zeta_2] \cdot \partial = \\ = [\xi_1, \xi_2] \cdot \partial_x + ((\xi_1 \cdot \partial_x) \beta_2 - (\xi_2 \cdot \partial_x) \beta_1 + \beta_2 \circ \beta_1 - \beta_1 \circ \beta_2) \langle y \rangle \cdot \partial_y$$

есть снова оператор вида (14.4), то совокупность всех таких операторов, допускаемых уравнением E , также образует алгебру Ли. Эта алгебра Ли обычно оказывается конечномерной и есть некоторая L' . Легко проверяется, что прямая сумма векторных пространств $L' \oplus L^\infty$ так же есть алгебра Ли. При этом коммутатор любых операторов $\zeta^0 \cdot \partial \in L^\infty$ и $\zeta \cdot \partial \in L'$

$$[\zeta^0 \cdot \partial, \zeta \cdot \partial] = (\beta \langle v \rangle - (\xi \cdot \partial_x) v) \cdot \partial_y \quad (14.5)$$

в силу доказанной теоремы принадлежит алгебре Ли L^∞ . Поэтому справедливо следующее утверждение.

Следствие. Подалгебра L^∞ является идеалом в $L' \oplus L^\infty$.

Важное значение двух рассмотренных типичных алгебр Ли определяется тем, что для большинства линейных уравнений их основная алгебра Ли операторов есть $L' \oplus L^\infty$. Другими словами, для линейных уравнений, как правило, нетривиальные допускаемые операторы имеют вид (14.4). Очевидный критерий того, чтобы основная алгебра Ли линейного уравнения E имела структуру $L' \oplus L^\infty$, где L' состоит из операторов вида (14.4), заключается в следующем. Уравнения

$$\partial_y \xi = 0, \quad \partial_y^2 \eta = 0 \quad (14.6)$$

должны быть частью системы определяющих уравнений DE.

Формула (14.5) интересна тем, что ее можно рассматривать как *инфинитезимальную формулу производства решений*. Действительно, в силу доказанной теоремы вместе с отображением ν решением является также и координата оператора (14.5). Поэтому инфинитезимальная формула производства решений u' , получаемых из решения u с помощью операторов вида (14.4) такова:

$$u'(x) = \beta \langle u(x) \rangle - (\xi \cdot \partial_x) u(x). \quad (14.7)$$

На самом деле эта формула может быть получена из общей формулы производства решений 5 (7.5) с группой G^1 преобразований, оператор которой есть (14.4). Для этого надо заметить только, что если $\{u_a\}$ — произведенное этой группой однопараметрическое семейство решений, то производная $\partial_a u_a|_{a=0}$ также есть решение в силу линейности уравнения E . Вычисление этой производной от правой части равенства 5 (7.3) дает в точности выражение (14.7).

Например, как показано в 6.8, основная алгебра Ли линейного уравнения теплопроводности 6 (8.1) есть $L^0 \oplus L^\infty$. Здесь инфинитезимальные формулы вида (14.7) производства решений с помощью операторов $\zeta_1, \dots, \zeta_5$ таковы:

$$\begin{aligned} u' &= u_x; \quad u' = u_t; \quad u' = xu_x + 2tu_t; \\ u' &= xu + 2tu_x; \quad u' = (x^2 + 2t)u + 4xtu_x + 4t^2u_t, \end{aligned}$$

где $u_x = \partial_x u$, $u_t = \partial_t u$. Оператор ζ_6 новых решений не производит.

15. Абстрактные определяющие уравнения. В силу теоремы 7.13 для любого дифференциального уравнения E определяющие уравнения DE обладают тем свойством, что если ζ и ζ' — их решения, то коммутатор $[\zeta, \zeta']$ также есть решение уравнений DE . Это свойство может быть положено в основу аксиоматического определения специального класса дифференциальных уравнений.

Говорят, что *система дифференциальных уравнений с искомым векторным полем $\xi: X \rightarrow X$ является абстрактной системой определяющих уравнений* (коротко: *AS-системой*), если эта система линейна и однородна и если для любых ее решений ξ, ξ' коммутатор $[\xi, \xi']$ также есть ее решение.

В силу этого определения множество всех решений AS-системы образует алгебру Ли векторных полей на пространстве X . Предыдущее свойство определяющих уравнений DE означает, что эти уравнения всегда являются AS-системой.

Естественно возникает вопрос: для всякой ли алгебры Ли векторных полей (операторов) $L \subset \mathfrak{E}(X)$ найдется такая AS-система, что пространство ее решений совпадает с L ? В главе VII на основе теории дифференциальных инвариантов будет показано, что это верно для конечномерных алгебр Ли.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ II

Первые приложения теории Ли к дифференциальным уравнениям принадлежат ее автору, посвятившему этому вопросу ряд работ [1]—[3]. Им было введено понятие допускаемой группы, а также даны первые примеры групповой классификации дифференциальных уравнений. Современное оформление эти вопросы получили лишь за последние 20 лет в работах [4]—[7] в связи с задачами группового анализа конкретных уравнений механики и физики. Можно отметить также исследования, в которых делаются попытки видоизменения теории Ли в применении к дифференциальным уравнениям [8], [9]. В работах [10], [11] была решена проблема «механизации» вычислений, связанных с построением определяющих уравнений. Данные в § 6 алгоритмы решения задачи групповой классификации излагаются здесь впервые. Пример из 6.7 дается по работе [12]. Недавно эта задача получила неожиданное приложение в теории разностных схем [13]. Качественные свойства абстрактных определяющих уравнений рассмотрены в [14].

- [1] Lie S. Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse lineare partiellen Differentialgleichungen. — Arch. Math., 6, Hef 3 (1881), 328—368.
- [2] Lie S. Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y , die eine Gruppe von Transformationen gestatten. — Arch. Math. Naturv., Christiania 9 (1883), 371—393.
- [3] Lie S. Allgemeine Untersuchungen über Differentialgleichungen, die eine continuirliche, endliche Gruppe gestatten. — Math. Ann. 25, № 1, (1885), 71—151.
- [4] Овсянников Л. В. Группы и инвариантно-групповые решения дифференциальных уравнений. — ДАН СССР 118, № 3, (1958), 439—442.
- [5] Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, Изд. СО АН СССР, 1962.
- [6] Овсянников Л. В. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. Новосибирск, НГУ, 1966.
- [7] Kucharszyk P. Teoria grup Liego w zastosowaniu do równań różniczkowych czastkowych. Warszawa, PAN, 1967.
- [8] Harrison B. K., Estabrook F. S., Geometric approach to invariance groups and solution of partial differential systems. — J. Math. Phys. 12, № 4 (1971), 653—666.
- [9] Anderson R., Kumei S., Wulfman C. E. Generalisation of the concept of invariance of differential equations. Results of applications to some Schrödinger equations. — Phys. Rev. Lett. 28, № 15 (1972), 988—991.
- [10] Катков В. Л., Костюкова Н. И. Процессор КИНО. — В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 1. Новосибирск (1969), 48—60.
- [11] Костюкова Н. И. Процессор ПАССИВ. — Вычисл. мат. и вычисл. техн., вып. 3. Харьков, Физ.-техн. ин-т низких температур АН УССР, (1972), 38—41.
- [12] Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности. — ДАН СССР, 125, № 3 (1959), 492—495.
- [13] Яненко Н. Н., Шокин Ю. И. О групповой классификации разностных схем для системы одномерных уравнений газовой динамики. — В сб. «Некоторые проблемы математики и механики». Л., «Наука», (1970), 277—283.
- [14] Овсянников Л. В. Групповое свойство определяющих уравнений. — В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 7. Новосибирск, (1971), 5—11.

ГЛАВА III

ОСНОВНЫЕ ГРУППЫ КОНКРЕТНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Действенность теории необходимо подтвердить нетривиальными примерами ее применения. Этой цели и служит настоящая глава, посвященная вычислению основной группы и групповой классификации для некоторых уравнений, имеющих прикладное значение.

Начало исследованию групповых свойств обыкновенных дифференциальных уравнений было положено С. Ли, имевшим в виду поставить теорию интегрирования таких уравнений на столь же надежную групповую основу, какая была создана Абелем для решения алгебраических уравнений. Для уравнений первого порядка это удалось сделать в той мере, в какой можно считать известными нетривиальные операторы, допускаемые такими уравнениями (см. 8.5 и 8.10). Однако оказывается, что задача отыскания нетривиальных операторов равносильна задаче интегрирования исходных уравнений. В тексте главы дано объяснение того, почему вызываемая этим фактом неудовлетворенность должна смениться оптимизмом в случае обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков.

В задачах математической физики особенно часто встречается линейное уравнение с частными производными второго порядка по двум независимым переменным. Для таких уравнений приведены все вычисления, дающие в итоге исчерпывающий классификационный результат. Окончательные формулы выведены для гиперболической (а также параболической) нормальной формы с расчетом на то, что интересующийся читатель самостоятельно преобразует их в соответствующие формулы для эллиптического случая.

Из более специальных систем уравнений рассмотрены уравнения двумерного пограничного слоя, дающие пример вырожденной системы с нетривиальной классификацией, а также уравнения газовой динамики. Последний пример интересен тем, что в нем именно путем группового анализа были обнаружены значения физической константы (показателя адиабаты), приводящие к расширению основной группы.

§ 8. Обыкновенные дифференциальные уравнения

1. Система уравнений первого порядка. Рассматривается дифференциальное уравнение типа $E(1, m, 1, m)$. В этом случае $X = R(x)$, $Y = R^m(y)$, $Z = R^{m+1}(z)$, где $z = (x, y)$ и первое продолженное пространство есть $Y_1 = R^m(y)$. Если предположить, что отображение ε , с помощью которого задается такое уравнение $\varepsilon(x, y, y_1) = 0$, удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции по отношению к y_1 , то его можно разрешить относительно y_1 . В дальнейшем предполагается, что это сделано и уравнение E задано в нормальной форме

$$y_1 = f(x, y) \quad (1.1)$$

с некоторым отображением $f: Z \rightarrow R^m$ класса $C_\infty(Z)$.

В координатной форме обычно полагают $y = (y_1, \dots, y_m)$, $y_1 = (y'_1, \dots, y'_m)$ и $f = (f_1, \dots, f_m)$ и записывают уравнение (1.1) в виде системы

$$y'_k = f_k(x, y_1, \dots, y_m) \quad (k = 1, \dots, m),$$

которая называется *системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка*.

В дальнейшем решается задача об отыскании и изучении структуры основной алгебры Ли уравнения (1.1).

2. Определяющие уравнения. Применяется алгоритм 5.8. Оператор, допускаемый уравнением (1.1), ищется в виде

$$\zeta \cdot \partial = \xi \partial_x + \eta \cdot \partial_y \quad (2.1)$$

с компонентами $\xi: Z \rightarrow X$ и $\eta: Z \rightarrow Y$. С помощью оператора полного дифференцирования $D = \partial_x + y \cdot \partial_{y_1}$ строится первое продолжение оператора (2.1)

$$\begin{aligned} \zeta \cdot \partial &= \xi \partial_x + \eta \cdot \partial_y + \eta_1 \cdot \partial_{y_1}, \\ \eta_1 &= D\eta - yD\xi = \partial_x \eta + \partial_y \langle y \rangle - y \partial_x \xi - (y \cdot \partial_y \xi) y. \end{aligned}$$

Результат действия оператора $\zeta \cdot \partial$ на уравнение (1.1)

$$\eta_1 = \xi \partial_x f + \eta \cdot \partial_y f$$

после перехода на многообразие (1.1) дает условие инвариантности

$$\partial_x \eta + \partial_y \langle f \rangle - f \partial_x \xi - (f \cdot \partial_y \xi) f = \xi \partial_x f + \partial_y \langle \eta \rangle.$$

Здесь этап 5.4 (d) расщепления условия инвариантности отсутствует, так как в этом условии «свободных» координат вектора y_1 нет. Поэтому здесь условие инвариантности совпадает с определяющим уравнением DE для уравнения (1.1).

3. Анализ общего решения. В координатной форме определяющее уравнение DE представляет собой систему из m скалярных уравнений для $m+1$ неизвестных функций-координат вектора $\zeta = (\xi, \eta^1, \dots, \eta^m)$. Поэтому одну из этих функций можно, вообще говоря, задать произвольно, в силу чего основная алгебра Ли уравнения (1.1) наверное будет бесконечномерной.

Это явно обнаруживается, если ввести новое искомое отображение $\beta: Z \rightarrow Y$, связанное с вектором $\zeta = (\xi, \eta)$ формулой

$$\eta = \xi f + \beta. \quad (3.1)$$

В силу выражений для производных этого вектора

$$\begin{aligned} \partial_x \eta &= \xi \partial_x f + f \partial_x \xi + \partial_x \beta, \\ \partial_y \eta \langle f \rangle &= (f \cdot \partial_y \xi) f + \xi \partial_y f \langle f \rangle + \partial_y \beta \langle f \rangle \end{aligned}$$

определяющее уравнение упрощается до

$$\partial_x \beta + \partial_y \beta \langle f \rangle = \partial_y f \langle \beta \rangle.$$

Если ввести еще векторные поля на пространстве Z

$$\varphi = (1, f), \quad \beta_1 = (0, \beta),$$

то окончательно определяющее уравнение запишется с использованием символа коммутатора в следующей изящной форме:

$$[\varphi, \beta_1] = 0. \quad (3.2)$$

Отображение $\beta_1 = 0$ является решением уравнения (3.2). С этим решением формула (3.1) дает $\eta = \xi f$. Отсюда следует вывод: уравнение (1.1) допускает оператор

$$\varphi \cdot \partial = \partial_x + f \cdot \partial_y \quad (3.3)$$

и все операторы вида $\zeta_0 \cdot \partial = \xi \varphi \cdot \partial$ с любым отображением $\xi: Z \rightarrow R$. Так как для любых ξ, ξ' коммутатор

$$[\xi \varphi, \xi' \varphi] = (\xi \varphi \cdot \partial \xi' - \xi' \varphi \cdot \partial \xi) \varphi$$

есть снова вектор вида ζ_0 , то операторы $\zeta_0 \cdot \partial$ образуют алгебру Ли. Эта бесконечномерная алгебра Ли будет обозначаться L^∞ .

Если из оператора (2.1) вычесть $\xi \varphi \cdot \partial$, то получится оператор, в котором компонента $\xi = 0$. Очевидно, что множество L^0 операторов с $\xi = 0$, т. е. операторов вида $\beta_1 \cdot \partial = \beta \cdot \partial_y$, является прямым дополнением к L^∞ в основной алгебре Ли LE , так что $LE = L^0 \oplus L^\infty$.

Для получения представления общего решения определяющего уравнения (3.2) вводится в рассмотрение группа $G^1(\varphi)$, оператор которой есть $\varphi \cdot \partial$. Пусть $J : Z \rightarrow Y$ — универсальный инвариант (см. 3.5) этой группы. Так как векторное поле $\varphi = (1, f) \in \Xi(Z)$ имеет ненулевую компоненту в X , то линейное отображение $\partial_y J(x, y) : Y \rightarrow Y$ есть линейный гомеоморфизм пространства Y . Вывод искомого представления основан на следующем предложении.

Лемма. *Отображение $\beta : Z \rightarrow Y$ есть решение уравнения (3.2), если и только если отображение $\Phi : Z \rightarrow Y$, связанное с β формулой*

$$\Phi = \partial_y J \langle \beta \rangle,$$

является инвариантом группы $G^1(\varphi)$.

Доказательство. По определению коммутатора 7 (1.3) справедливо тождество

$$([\varphi, \beta_1] \cdot \partial) J = (\varphi \cdot \partial)(\beta_1 \cdot \partial) J - (\beta_1 \cdot \partial)(\varphi \cdot \partial) J.$$

Но $(\varphi \cdot \partial) J = 0$ в силу критерия 3.4 инварианта группы $G^1(\varphi)$. Поэтому в силу приведенной в лемме формулы это тождество равносильно следующему:

$$\partial_y J \langle [\varphi, \beta_1] \rangle = (\varphi \cdot \partial) \Phi.$$

Отсюда оба утверждения следуют снова из критерия 3.4 и из того, что $\partial_y J \in \mathcal{L}(Y)$ — гомеоморфизм. ■

Из этой леммы следует представление общего решения уравнения (3.2)

$$\beta = (\partial_y J)^{-1} \langle \Phi \rangle, \quad (3.4)$$

где $\Phi : Z \rightarrow Y$ — произвольный инвариант группы $G^1(\varphi)$. Поэтому пространство L^0 также бесконечномерно.

4. Структура основной алгебры Ли. Если β и β' — два решения уравнения (3.2), то коммутатор $[\beta, \beta']$ также является решением этого уравнения. Действительно, $[\beta, \beta']_1 = [\beta_1, \beta'_1]$ и тождество Якоби 7.3.3° дает

$$[\varphi, [\beta_1, \beta'_1]] = [\beta_1, [\varphi, \beta'_1]] - [\beta'_1, [\varphi, \beta_1]] = [\beta_1, 0] - [\beta'_1, 0] = 0.$$

Следовательно, пространство L^0 является алгеброй Ли.

Далее, подалгебра L^∞ есть идеал в LE . Это следует из того, что коммутатор любого решения β_1 уравнения (3.2) и любого вектора $\xi \varphi \in L^\infty$

$$[\beta_1, \xi \varphi] = (\beta \cdot \partial_y \xi) \varphi$$

также принадлежит алгебре Ли L^∞ .

Тем самым структура основной алгебры Ли уравнения (1.1) описывается ее разложением в прямую сумму $LE = L^0 \oplus L^\infty$ беско-

нечномерной подалгебры L^0 и бесконечномерного идеала L^∞ , где L^0 состоит из всех операторов вида $\beta \cdot \partial_y$ с любым решением β уравнения (3.2) (все эти решения даются формулой (3.4)), а идеал L^∞ состоит из операторов $\xi \varphi \cdot \partial$, получаемых умножением оператора (3.3) на произвольное отображение $\xi: Z \rightarrow R$.

5. Понижение размерности уравнения. Операторы $\zeta_0 \cdot \partial \in L^\infty$ получаются «даром», без применения каких-либо существенных аналитических построений. Однако с точки зрения задачи интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений знание этих операторов существенной информации не дает. Очевидно, что задача построения групп G^1 , соответствующих этим операторам, фактически равносильна задаче интегрирования уравнения (1.1).

Напротив, дополнительные операторы $\beta \cdot \partial_y \in L^0$, как показывает формула (3.4), выражаются через решения исходного уравнения (1.1). Поэтому знание какого-либо оператора $\beta \cdot \partial_y$ должно быть связано с какой-то реализацией процесса интегрирования. Это дает основание тому факту, что операторы $\beta \cdot \partial_y$ могут быть эффективно использованы для интегрирования (хотя бы частичного) уравнения (1.1). При этом следует иметь в виду, что задача построения универсального инварианта для групп вида $G^1(\beta)$ с касательным векторным полем β , удовлетворяющим уравнению (3.2), существенно отличается от такой же задачи для группы $G^1(\varphi)$ и может оказаться (и на практике часто оказывается) значительно более простой. Можно сказать, что успех решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений в аналитической форме в значительной мере определяется широтой известной алгебры Ли операторов $L \subset L^0$. В его полном объеме этот факт будет рассмотрен в главе V. Ниже приводится один частный, но практически полезный результат, в котором понижение размерности понимается как сведение уравнения (1.1) к уравнению типа $E(1, m-1, 1, m-1)$.

Т е о р е м а. *Знание универсального инварианта оператора $\beta \cdot \partial_y$ ($\beta \neq 0$), удовлетворяющего уравнению (3.2), позволяет понизить размерность уравнения (1.1).*

Доказательство. Для каждого $x \in X$ рассматривается группа $G^1(\beta)$ преобразований пространства Y . Пусть $K': Y \rightarrow R^{m-1}$ — ее универсальный инвариант. Строится функция $H: Y \rightarrow R$, удовлетворяющая уравнению $(\beta \cdot \partial_y)H = 1$, и отображение K' дополняется до отображения

$$K = (K', H): Y \rightarrow R^m.$$

Как будет показано ниже, отображение $\bar{y} = K(x, y)$ при фиксированном x является локальным преобразованием простран-

ства Y . Поэтому уравнение (1.1), преобразованное с помощью этого отображения согласно равенствам

$$\bar{y} = DK = \partial_x K + (y \cdot \partial_y) K = (\partial_x + f \cdot \partial_y) K = (\varphi \cdot \partial) K,$$

переходит в ему равносильное уравнение

$$\bar{y} = (\varphi \cdot \partial) K(x, y), \quad \bar{y} = K(x, y). \quad (5.1)$$

В тождестве, справедливом по определению коммутатора 7(1.3),

$$([\varphi, \beta_1] \cdot \partial) K = (\varphi \cdot \partial)(\beta \cdot \partial_y) K - (\beta \cdot \partial_y)(\varphi \cdot \partial) K;$$

левая часть и первое слагаемое справа равны нулю в силу определения β и построения K . Следовательно, это тождество приводится к равенству $(\beta \cdot \partial_y)((\varphi \cdot \partial) K) = 0$, показывающему, что $(\varphi \cdot \partial) K$ есть инвариант группы $G^1(\beta)$. В силу универсальности инварианта K' отсюда следует существование такого отображения $\Phi: R^{m-1} \rightarrow R^m$, с которым будет $(\varphi \cdot \partial) K(x, y) = \Phi \circ K'(x, y) = \Phi(\bar{y}')$, где $\bar{y}'$ — компонента представления $\bar{y} = (K', H)$. Поэтому, если положить $\Phi = (\Phi', P)$, $\bar{y} = (\bar{y}', p)$, и вспомнить, что Φ может зависеть от x , то уравнение (5.1) можно записать в виде системы из двух уравнений

$$\bar{y}' = \Phi'(x, \bar{y}'), \quad \partial_x p = P(x, \bar{y}'). \quad (5.2)$$

Первое из них имеет тип $E(1, m-1, 1, m-1)$, а второе интегрируется с помощью одной квадратуры, если известно решение первого.

Остается показать, что $\bar{y} = K(x, y)$ есть локальное преобразование пространства Y . Для этого достаточно доказать существование такой точки (x_0, y_0) , что линейное отображение $\partial_y K(x_0, y_0): Y \rightarrow Y$ есть линейный гомеоморфизм пространства Y . Но если такой точки нет, то существует векторное поле $\alpha: Z \rightarrow Y$, с которым выполнено тождество $\partial_y K \langle \alpha(x, y) \rangle = 0$ или, в компонентах $K = (K', H)$

$$(\alpha \cdot \partial_y) K' = 0, \quad (\alpha \cdot \partial_y) H = 0.$$

Первое из этих тождеств означает, что для фиксированного x отображение $K': Y \rightarrow R^{m-1}$ есть универсальный инвариант группы $G^1(\alpha)$, а второе — что H есть инвариант этой группы. В силу универсальности K' отсюда следует существование отображения $\Psi: R \rightarrow R$, с которым будет $H = \Psi \circ K'$. Но тогда $(\beta \cdot \partial_y) H = \partial \Psi \langle (\beta \cdot \partial_y) K' \rangle = 0$, в противоречие с построением отображения H . ■

6. Примеры. В случае уравнения типа $E(1, 1, 1, 1)$, т. е. одного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, вектор y одномерен и обозначается более наглядным символом y_x . Пусть это уравнение имеет вид

$$y_x = f(x, y). \quad (6.1)$$

Можно сказать, что все классические специализации этого уравнения, когда оно интегрируется в квадратурах, основаны на знании некоторой допускаемой уравнением (6.1) группы G^1 преобразований пространства $R^2(x, y)$. В этих случаях преобразование искомого y по формуле $\bar{y} = J(x, y)$, где $J: R^2(x, y) \rightarrow R$ — универсальный инвариант допускаемой группы G^1 , приводит (6.1) к уравнению с разделяющимися переменными.

Например, «обобщенно однородное» уравнение $y_x = x^{k-1}F(yx^{-k})$ допускает оператор $x\partial_x + ky\partial_y$, и универсальный инвариант группы G^1 есть $J = yx^{-k}$. Переход к переменной $\bar{y} = yx^{-k}$ приводит это уравнение к следующему:

$$x\bar{y}_x = F(\bar{y}) - k\bar{y},$$

которое интегрируется одной квадратурой.

Другой прием интегрирования уравнения (6.1) в квадратурах связан с понятием *интегрирующего множителя* — функции $\mu: R^2(x, y) \rightarrow R$, удовлетворяющей уравнению

$$\partial_x \mu + \partial_y (f\mu) = 0. \quad (6.2)$$

Легко проверяется, что если положить $\mu = 1/\beta$, то условие (6.2) приведет к (3.2). Поэтому в силу формулы (3.1) знание допускаемого уравнением (6.1) оператора $\xi\partial_x + \eta\partial_y$ дает интегрирующий множитель $\mu = 1/(\eta - \xi f)$.

Например, уравнение

$$y_x = y/(x(y + \ln x))$$

допускает оператор $xy\partial_x$. Поэтому интегрирующий множитель есть $\mu = (y + \ln x)y^{-2}$, после умножения на который оно записывается с оператором полного дифференцирования $D_1 = \partial_x + y_x\partial_y$ в виде

$$D_1(\ln y - (\ln x)/y) = 0$$

и дает общий интеграл $\ln y - (\ln x)/y = c$, где c — произвольная постоянная.

7. Уравнения высших порядков. Существенно новые факты появляются для одного скалярного обыкновенного дифференциального уравнения порядка $k > 1$, т. е. уравнения типа $E(1, 1, k, 1)$. В этом случае $X = R(x)$, $Y = R(y)$, $Z = R^2(x, y)$ и все пространства Y_s одномерны, в связи с чем символ y можно заменить более простым y_s ; тогда $z = (x, y, y_1, \dots, y_s)$. Уравнение E предполагается приведенным к нормальной форме

$$y_k = f(x, y, y_1, \dots, y_{k-1}) \quad (7.1)$$

с данным отображением $f: Z_{k-1} \rightarrow R$.

Допускаемый уравнением (7.1) оператор ищется в виде (2.1). Здесь для записи условия инвариантности требуется k -е продолжение оператора (7.1)

$$\zeta \cdot \partial = \xi \partial_x + \eta \partial_y + \eta_1 \partial_{y_1} + \dots + \eta_k \partial_{y_k}.$$

Согласно формуле 4(8.5)

$$\eta_l = D^l \eta - (D^l(y_1 \xi) - y_{l+1} \xi), \quad D = \partial_x + y_1 \partial_y + y_2 \partial_{y_1} + \dots$$

Методом полной индукции по l устанавливается справедливость формул вида

$$D^l \eta = \sum_{\alpha, r, s} A_{\alpha}^{lrs} y_1^{\alpha_1} \dots y_l^{\alpha_l} \partial_x^r \partial_y^s \eta, \quad (7.2)$$

где A_{α}^{lrs} — целые положительные числа, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ и сумма берется по всем индексам α, r, s , удовлетворяющим соотношениям

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + l\alpha_l &= l - r, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l &= s, \quad 0 \leq s \leq l. \end{aligned}$$

Аналогично

$$D^l(y_1 \xi) - y_{l+1} \xi = \sum_{\alpha, r, s} B_{\alpha}^{lrs} y_1^{\alpha_1} \dots y_l^{\alpha_l} \partial_x^r \partial_y^s \xi, \quad (7.3)$$

где B_{α}^{lrs} — целые положительные числа, а индексы α, r, s удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + l\alpha_l &= l - r + 1, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l &= s + 1, \quad 0 \leq s \leq l. \end{aligned}$$

Условие инвариантности уравнения (7.1) таково:

$$(\eta - (\zeta \cdot \partial) f) \Big|_{y_k = f(y_{k-1})} = 0. \quad (7.4)$$

При $k > 1$ это условие содержит в качестве «свободных» параметров переменные $y_1, \dots, y_{k-1}$, по которым оно должно расщепляться. Это приводит, вообще говоря, к переопределенной системе DE для двух функций ξ, η и влечет конечномерность основной допускаемой уравнением (7.1) алгебры Ли LE . Возникающая задача групповой классификации уравнений вида (7.1) по произвольному элементу — правой части f в полном объеме пока не решена. Один из известных результатов для уравнения второго порядка приводится ниже.

8. Уравнение второго порядка. Для уравнения типа $E(1, 1, 2, 1)$

$$y_2 = f(x, y, y_1) \quad (8.1)$$

требуется второе продолжение оператора (2.1)

$$\zeta \cdot \partial = \xi \partial_x + \eta \partial_y + \eta_1 \partial_{y_1} + \eta_2 \partial_{y_2}.$$

Формулы (7.2) и (7.3) дают следующие выражения, в которых (и ниже) использованы сокращенные обозначения производных $\eta_x = \partial_x \eta$, $\eta_y = \partial_y \eta$, $\xi_{xy} = \partial_x \partial_y \xi$ и т. п.

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \eta_x + y_1(\eta_y - \xi_x) - y_1^2 \xi_y, \\ \eta_2 &= \eta_{xx} + y_1(2\eta_{xy} - \xi_{xx}) + y_1^2(\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) - y_1^3 \xi_{yy} + \\ &\quad + y_2(\eta_y - 2\xi_x - 3y_1 \xi_y). \end{aligned}$$

С этими значениями условие инвариантности (7.4) таково:

$$\begin{aligned} \eta_{xx} + y_1(2\eta_{xy} - \xi_{xx}) + y_1^2(\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) - y_1^3 \xi_{yy} + (\eta_y - 2\xi_x - 3y_1 \xi_y)f = \\ = \xi \partial_x f + \eta \partial_y f + (\eta_x + y_1(\eta_y - \xi_x) - y_1^2 \xi_y) \partial_{y_1} f. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Уравнение (8.2) должно быть расщеплено по «свободному» параметру y_1 . Проще всего это сделать, предположив, что функция f представлена в виде степенного ряда

$$f(x, y, y_1) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x, y) y_1^n.$$

При этом операция расщепления сводится к подстановке этого ряда в (8.2) и сравнению слагаемых с одинаковой степенью параметра y_1 . В результате получится, вообще говоря, бесконечная система уравнений DE , в которой наиболее существенны первые четыре определяющие уравнения, соответствующие степеням y_1^0 , y_1^1 , y_1^2 и y_1^3 :

$$\begin{aligned} \eta_{xx} &= f_{0x} \xi + f_{0y} \eta - f_0 \eta_y + 2f_0 \xi_x + f_1 \eta_x, \\ 2\eta_{xy} - \xi_{xx} &= f_{1x} \xi + f_{1y} \eta + 2f_2 \eta_x + f_1 \xi_x + 3f_0 \xi_y, \\ \eta_{yy} - 2\xi_{xy} &= f_{2x} \xi + f_{2y} \eta + 3f_3 \eta_x + f_2 \eta_y + 2f_1 \xi_y, \\ -\xi_{yy} &= f_{3x} \xi + f_{3y} \eta + 4f_4 \eta_x + 2f_3 \eta_y - f_3 \xi_x + f_2 \xi_y, \\ &\dots \end{aligned}$$

Свойство конечномерности основной допускаемой алгебры Ли L' и максимально возможное значение ее размерности r утверждаются следующей теоремой, впервые доказанной еще Софусом Ли.

Т е о р е м а. Уравнение (8.1) может допускать пространство L' операторов вида (2.1) только для значений $r \leq 8$. Наибольшее возможное значение $r=8$ достигается для уравнения $y_2=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первые четыре определяющие уравнения переписываются в сокращенной форме:

$$\eta_{xx} = \varphi_1, \quad 2\eta_{xy} - \xi_{xx} = \varphi_2, \quad \eta_{yy} - 2\xi_{xy} = \varphi_3, \quad \xi_{yy} = \varphi_4, \quad (8.3)$$

где φ_i — некоторые линейные функции величин ξ , η , ξ_x , ξ_y , η_x , η_y . Путем дифференцирования уравнений (8.3) и последующего комбинирования получаются определенные выражения всех производных третьего порядка от искомых функций ξ , η . Эти выражения можно записать сокращенно в виде одного векторного равенства

$$\partial^3 \zeta = \psi(x, y, \zeta, \partial \zeta, \partial^2 \zeta), \quad (8.4)$$

где $\zeta = (\xi, \eta)$ и правая часть ψ линейна относительно ζ , $\partial \zeta$, $\partial^2 \zeta$. Общее решение такого уравнения может зависеть не более чем от 12 произвольных постоянных, на которые уравнения (8.3) накладывают четыре независимых соотношения. Поэтому остается не более чем восемь произвольных постоянных, в силу чего размерность пространства решений $r \leq 8$. Фактическое число остающихся в решении системы DE произвольных постоянных может быть и меньше восьми, если, кроме уравнений (8.3), в DE содержатся другие нетривиальные уравнения.

В случае уравнения $y_2 = 0$ в (8.3) все $\varphi_i = 0$ и в (8.4) также $\psi = 0$. Общее решение уравнения $\partial^3 \zeta = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \zeta = & (A_1, B_1) + (A_2, B_2)x + (A_3, B_3)y + \\ & + (A_4, B_4)xy + (A_5, B_5)x^2 + (A_6, B_6)y^2 \end{aligned}$$

с произвольными постоянными A_j, B_j . Уравнения (8.3) подчиняют эти постоянные следующим соотношениям:

$$B_5 = 0, \quad B_4 - A_5 = 0, \quad B_6 - A_4 = 0, \quad A_6 = 0.$$

Окончательно получается общее решение определяющих уравнений

$$\begin{aligned} \xi &= A_1 + A_2x + A_3y + A_4xy + B_4x^2, \\ \eta &= B_1 + B_2x + B_3y + A_4y^2 + B_4xy, \end{aligned} \quad (8.5)$$

в котором A_j, B_j независимы. Множество операторов $\zeta \cdot \partial$ с компонентами (8.5) образует алгебру Ли L^8 . ■

В качестве одного из следствий этой теоремы можно сформулировать классификационный результат для линейного уравнения второго порядка:

$$y_2 = a(x)y_1 + b(x)y. \quad (8.6)$$

С л е д с т в и е. Любое уравнение (8.6) допускает алгебру Ли L^8 .

Доказательство. Как известно, с помощью преобразования искомого y по формуле $\bar{y}=p(x)$ и уравнение (8.6) приводится к такому же уравнению, но с $a=0$. Для этого надо взять $p=\exp\left(-\frac{1}{2}\int a\,dx\right)$. Кроме того, уравнение $y_2=b(x)y$ в результате преобразования с помощью любого его решения $u\neq 0$

$$\bar{y}=y/u(x), \quad x=\int (u(x))^{-2}dx$$

переходит в уравнение $\bar{y}_2=0$. Поэтому любое уравнение (8.6) равносильно уравнению $y_2=0$ в смысле 6.2 и требуемый результат следует из предыдущей теоремы и теоремы 6.2. ■

9. Полные системы. Рассматривается линейное уравнение типа $E(n, 1, 1, s)$, для которого $X=R^n(x)$, $Y=R(y)$, $Y_1=R^n(y)$, где $y=(y_1, \dots, y_n)$, заданное с помощью отображения $\phi: X \rightarrow \mathcal{L}(Y_1; R^s)$

$$\phi(x)\langle y \rangle = 0.$$

Отображение ϕ может быть представлено матрицей (ϕ_j^i) размером $s \times n$. Тогда в координатной форме это уравнение имеет вид системы E

$$\phi_j^i(x)y_i=0 \quad (j=1, \dots, s). \quad (9.1)$$

Для решения $u: X \rightarrow R$, действующего по формуле $y=u(x)$, будет $y_i=\partial_i u(x)$, где $\partial_i=\partial/\partial x^i$ и $\phi_j^i y_i=(\phi_j \cdot \partial)u(x)$ с оператором $\partial=(\partial_1, \dots, \partial_n)$. Поэтому решение u системы (9.1) должно удовлетворять системе тождеств $(\phi_j \cdot \partial)u(x)=0$ для каждого из операторов

$$\phi_1 \cdot \partial, \dots, \phi_s \cdot \partial \quad (9.2)$$

и в силу критерия 3.4 может быть истолковано как совместный инвариант набора операторов (9.2). Но, как показано в 7.11, тогда решение u есть инвариант любого коммутатора $[\phi_j, \phi_i] \cdot \partial$. Этот факт приводит к двум возможностям в зависимости от того, появляются при этом новые операторы или нет. Поскольку возникающая здесь ситуация в дальнейшем будет часто встречаться, целесообразно закрепить ее введением специального понятия.

Пусть $\xi_1, \dots, \xi_m$ — векторные поля на пространстве X . Говорят, что эти поля (или соответствующие операторы $\xi_j \cdot \partial$) **линейно связаны**, если существуют такие функции $\omega^j: X \rightarrow R$ ($j=1, \dots, m$), не все равные нулю, с которыми выполнено тождество

$$\omega^j \xi_j(x) = 0;$$

в противном случае говорят, что векторные поля ξ_j (операторы $\xi_j \cdot \partial$) линейно не связаны. Очевидно, что операторы линейно связаны тогда и только тогда, когда один из них линейно выражается через остальные, т. е. может быть представлен в виде линейной комбинации остальных с переменными коэффициентами.

Система уравнений (9.1) называется *полной*, если коммутатор $[\psi_j, \psi_l] \cdot \partial$ любых двух операторов (9.2) линейно выражается через операторы (9.2).

Как известно, отыскание решений полной системы сводится к интегрированию некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В этой теории доказывается, что всякая полная система уравнений (9.1) равносильна некоторой *якобиевой системе*, в которой $s \leq n$ и $[\psi_j, \psi_l] = 0$ для любых $j, l = 1, \dots, s$. Приведение произвольной полной системы к якобиевой требует выполнения только алгебраических операций и осуществляется с помощью такого отображения $v: X \rightarrow \mathcal{L}(R^s)$, что $v(x)$ есть преобразование пространства R^s для любого $x \in X$ и матрица $(\bar{\psi}_j^i)$ отображения $\bar{\psi} = v \langle \psi \rangle: X \rightarrow R^s$ содержит единичную матрицу I_{R^s} , например, $\bar{\psi}_j^i = \delta_j^i$ для $i, j = 1, \dots, s$.

В дальнейшем рассматривается якобиева система (9.1), операторы которой (9.2) линейно не связаны, в частности их число $s \leq n$. Для этой системы решается ограниченная задача об отыскании алгебры Ли допускаемых этой системой операторов вида :

$$\xi(x) \cdot \partial = \xi^i(x) \partial_i. \quad (9.3)$$

Применение алгоритма, изложенного в 5.3, приводит к следующему условию инвариантности системы (9.1), обозначенной символом E :

$$[\psi_j, \xi] \cdot \partial = 0 \quad (j = 1, \dots, s).$$

Расщепление этого условия относительно $n-s$ «свободных» параметров — тех координат вектора $y = (y_1, \dots, y_n)$, через которые выражаются s из них с помощью уравнений (9.1), приводит к определяющим уравнениям вида

$$[\psi_j, \xi] = \lambda_j^i \psi_i \quad (j = 1, \dots, s), \quad (9.4)$$

где (λ_j^i) — матрица некоторого отображения $\lambda: X \rightarrow \mathcal{L}(R^s)$.

Из (9.4) сразу следует, что совокупность допускаемых системой (9.1) операторов (9.3) образует алгебру Ли L . В силу полноты системы (9.1) уравнениям (9.4) удовлетворяет любой из операторов (9.2), более того, любой оператор

$$\xi \cdot \partial = v^j \psi_j \cdot \partial, \quad (9.5)$$

линейно выражающийся через операторы (9.2) с произвольными отображениями $v^j: X \rightarrow R$. Оказывается, что этими операторами и исчерпывается алгебра Ли L .

Т е о р е м а. *Алгебра Ли L операторов (9.3), допускаемых якобиевой системой (9.1), операторы (9.2) которой линейно не связаны, есть совокупность всех операторов вида (9.5).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать существование функций v^j , с которыми оператор (9.5) удовлетворяет уравнениям (9.4) с заданными λ_j^i . Подстановка (9.5) в (9.4) в силу якобиевости системы (9.1) приводит к уравнению $(\psi_j \cdot \partial v^i) \psi_i = \lambda_j^i \psi_i$. Благодаря линейной несвязанности операторов (9.2) это уравнение распадается на отдельные уравнения для каждого коэффициента v^i

$$(\psi_j \cdot \partial) v^i = \lambda_j^i \quad (j=1, \dots, s). \quad (9.6)$$

Как известно из теории дифференциальных уравнений, условия интегрируемости уравнений (9.6) сводятся, в силу перестановочности операторов (9.2) (якобиевости системы (9.1)), к тому, чтобы для всех $k, j=1, \dots, s$ были выполнены тождества

$$(\psi_k \cdot \partial) \lambda_j^i = (\psi_j \cdot \partial) \lambda_k^i. \quad (9.7)$$

Эти тождества проверяются с помощью соотношения Якоби 7.3.3°

$$[\psi_k, [\psi_j, \xi]] + [\psi_j, [\xi, \psi_k]] + [\xi, [\psi_k, \psi_j]] = 0.$$

После подстановки выражений (9.4), учета якобиевости системы (9.1) и линейной несвязанности операторов (9.2) это соотношение принимает в точности вид равенств (9.7). ■

10. Заключительные замечания. Рассмотрения этого параграфа показывают, что как в случае обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, так и в случае полных систем, задача интегрирования которых, как известно, сводится к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений, допускаемая основная алгебра Ли операторов оказывается бесконечномерной. Однако задача построения даже каких-либо групп G^1 , не говоря уже об основной группе GE , которые можно было бы использовать для производства решений соответствующей системы E , оказывается не проще задачи интегрирования исходных дифференциальных уравнений. Поэтому знание бесконечномерной составляющей основной алгебры Ли фактически не дает возможности сформировать эффективные алгоритмы решения упомянутых дифференциальных уравнений.

Возможность направленного поиска решений открывается лишь тогда, когда удастся найти допускаемые операторы, существенно более простые по сравнению с операторами, входящими

в состав системы E . Примерами могут служить обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков.

Хотя отмеченный факт является несколько разочаровывающим в отношении перспектив применения группового анализа к решению обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, тем не менее знание структуры основной допускаемой алгебры Ли операторов может быть полезным в общих теоретических исследованиях, не связанных непосредственно с задачей поиска конкретных решений. Как будет показано в главе V, ситуация резко меняется в случае дифференциальных уравнений с частными производными, для которых алгоритмы группового анализа оказываются эффективными.

Результаты, полученные для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и для уравнений высших порядков, несколько различны. Сопоставление этого факта с тем, что одно уравнение $E(1, 1, k, 1)$ порядка k равносильно системе $E(1, k, 1, k)$ из k уравнений первого порядка, приводит к постановке вопроса о связи основных групп таких уравнений. Этот вопрос до конца не изучен. Характерная трудность здесь заключается в том, что продолженные пространства, в которых лежат соответствующие многообразия, имеют разную размерность. Многообразие $E(1, 1, k, 1)$ лежит в пространстве $Z_k = R^{k+1}$, многообразие $E(1, k, 1, k)$ — в пространстве $Z_1 = R^{2k+1}$. При этом только переход $E(1, k, 1, k) \rightarrow E(1, 1, k, 1)$ может рассматриваться как результат некоторого отображения $Z_1 \rightarrow Z_k$, в то время как обратный переход $E(1, 1, k, 1) \rightarrow E(1, k, 1, k)$ отображением не является.

§ 9. Линейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

1. Постановка задачи. Для уравнения типа $E(2, 1, 2, 1)$ на протяжении всего § 9 используются индивидуальные обозначения координат, а именно $X = R^2(x, y)$, $Y = R(z)$, $Z = R^3(x, y, z)$, $Y_1 = R^2(z_1, z_2)$, $Y_2 = R^3(z_{11}, z_{12}, z_{22})$. Общее линейное уравнение этого типа имеет вид

$$a^{11}z_{11} + 2a^{12}z_{12} + a^{22}z_{22} + b^1z_1 + b^2z_2 + cz = 0,$$

коэффициенты которого предполагаются *аналитическими функциями*, т. е. отображениями $a^{ik}, b^i, c: X \rightarrow R$ класса $C_4(X)$.

Для этого уравнения рассматривается задача групповой классификации (см. § 6) по отношению к произвольному элементу — набору коэффициентов $\{a^{ik}, b^i, c\}$. Наиболее общие преобразования эквивалентности, сохраняющие дифференциальную структуру этого уравнения, таковы

$$x = u(x, y), \quad y = v(x, y), \quad z = \omega(x, y)z. \quad (1.1)$$

Из общей теории линейных уравнений второго порядка известно, что подходящим преобразованием эквивалентности (1.1) это уравнение приводится к одной из *нормальных форм*, а именно, к *гиперболической нормальной форме*

$$z_{12} + Az_1 + Bz_2 + Cz = 0, \quad (1.2)$$

или к *эллиптической нормальной форме*

$$z_{11} + z_{22} + Az_1 + Bz_2 + Cz = 0, \quad (1.3)$$

или к *параболической нормальной форме*

$$z_{11} + Az_1 + Bz_2 + Cz = 0 \quad (1.4)$$

с известными коэффициентами $A, B, C: X \rightarrow R$ класса $C_4(X)$.

С точки зрения локальной аналитической теории в рассматриваемом случае аналитических коэффициентов эллиптической нормальной форма эквивалентна гиперболической. Соответствующее преобразование эквивалентности (1.1) осуществляется путем выхода в область комплексных значений независимых переменных по формулам $\bar{x} = x + iy$, $\bar{y} = x - iy$, $\bar{z} = z$. В результате этого преобразования уравнение (1.3) переходит в ему равносильное

$$4z_{12} + (A + iB)\bar{z}_1 + (A - iB)\bar{z}_2 + Cz = 0$$

и любые классификационные аналитические результаты для уравнений (1.2) и (1.3) можно поставить во взаимно однозначное соответствие.

В пп. 2—6 рассматривается задача групповой классификации уравнений вида (1.2) по отношению к произвольному элементу $\theta = (A, B, C)$.

2. Инварианты Лапласа. Для уравнения вида (1.2) совокупность преобразований эквивалентности (1.1) сужается до следующей:

$$x = \alpha(x), \quad \bar{y} = \beta(y), \quad z = \omega(x, y)z. \quad (2.1)$$

Два равносильных уравнения (1.2) называются *эквивалентными по функции*, если они переходят друг в друга при преобразованиях (2.1), в которых $\alpha(x) = x$, $\beta(y) = y$, т. е. только за счет преобразования $z = \omega z$.

Классы равносильных относительно преобразований эквивалентности (2.1) уравнений (1.2) удобно различать в терминах так называемых инвариантов Лапласа этих уравнений. *Инвариантами Лапласа уравнения (1.2) называются функции*

$$h = \partial_x A + AB - C, \quad k = \partial_y B + AB - C. \quad (2.2)$$

Оправдание названию «инварианты» для этих функций дают две следующие леммы, в которых используется обозначение уравнения (1.2) символом (h, k) — парой его инвариантов Лапласа.

Л е м м а 1. Уравнение $(\bar{h}, \bar{k})$ эквивалентно по функции уравнению (h, k) , если и только если $\bar{h}=h$, $\bar{k}=k$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В результате подстановки $z=\omega z$ в (1.2) получается уравнение той же структуры с коэффициентами

$$\bar{A}=A+\frac{\omega_2}{\omega}, \quad \bar{B}=B+\frac{\omega_1}{\omega}, \quad \bar{C}=C+A\frac{\omega_1}{\omega}+B\frac{\omega_2}{\omega}+\frac{\omega_{12}}{\omega}, \quad (2.3)$$

где $\omega_1=\partial_x\omega$, $\omega_2=\partial_y\omega$, $\omega_{12}=\partial_x\partial_y\omega$. Отсюда

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \partial_x \bar{A} + \bar{A} \bar{B} - \bar{C} = \\ &= \partial_x A + \frac{\omega_{12}}{\omega} - \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega^2} + AB + A \frac{\omega_1}{\omega} + B \frac{\omega_2}{\omega} + \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega^2} - C = h \end{aligned}$$

и аналогично для k . Обратно, если $\bar{h}=h$ и $\bar{k}=k$ и $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ — коэффициенты уравнения $(\bar{h}, \bar{k})$, то из определения (2.2) следует равенство

$$\partial_x(\bar{A}-A)=\partial_y(B-\bar{B}),$$

в силу которого существует функция ω , удовлетворяющая первым двум уравнениям (2.3). С этой функцией равенство $\bar{h}=h$ оказывается равносильным третьему равенству (2.3). Поэтому подстановка $z=\omega z$ преобразует уравнение (h, k) в уравнение $(\bar{h}, \bar{k})$. ■

С л е д с т в и е. Уравнение (1.2) эквивалентно по функции уравнению $z_{12}=0$, если и только если $h=k=0$.

Л е м м а 2. Уравнение $(\bar{h}, \bar{k})$ равносильно уравнению (h, k) , если и только если существуют функции $x=\alpha(x)$ и $y=\beta(y)$, с которыми для всех $(x, y) \in X$ выполнены равенства

$$h(x, y)=\alpha'(x)\beta'(y)\bar{h}(x, \bar{y}), \quad k(x, y)=\alpha'(x)\beta'(y)\bar{k}(x, \bar{y}), \quad (2.4)$$

где $\alpha'=\partial_x\alpha$, $\beta'=\partial_y\beta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Преобразование (2.1) можно выполнить в два этапа, причем на этапе (а): $x=x$, $\bar{y}=y$, $z=\omega z$ и на этапе (б): $x=\alpha(x)$, $\bar{y}=\beta(y)$, $z=z$. В результате этапа (а) инварианты Лапласа сохраняются в силу леммы 1. В результате этапа (б) они преобразуются, как показывает легкое вычисление, в точности по формулам (2.4). Поэтому, если уравнение $(\bar{h}, \bar{k})$ равносильно уравнению (h, k) , то равенства (2.4) выполнены. Обратно, если эти равенства выполнены, то этап (б) с функциями α, β из (2.4) переводит уравнение (h, k) в некоторое уравнение $(\bar{h}, \bar{k})$, причем $\bar{h}=h$, $\bar{k}=k$. В силу леммы 1 уравнение $(\bar{h}, \bar{k})$ эквивалентно по функции уравнению (h, k) , т. е. переходит в него с помощью этапа (а). ■

3. Ряд Лапласа. Помимо (2.1) существуют другие преобразования уравнения (1.2), сохраняющие дифференциальную структуру этого уравнения — так называемые преобразования Лапласа.

Вводится вспомогательная функция z^1 , связанная с z уравнениями

$$z_2 + Az = z^1, \quad z_1^1 + Bz^1 = hz. \quad (3.1)$$

Легко проверяется, что исключение z^1 из этих уравнений дает в точности уравнение (1.2). Наоборот, при $h \neq 0$ исключение z из системы (3.1) приводит к некоторому уравнению для z^1 , также имеющему вид (1.2). Это новое уравнение будет называться *x-преобразованием Лапласа уравнения* (1.2). Его инварианты Лапласа h^1, k^1 находятся простым вычислением и оказываются такими:

$$h^1 = 2h - k - \partial_x \partial_y \ln h, \quad k^1 = h. \quad (3.2)$$

Аналогично вводится вспомогательная функция z^2 , связанная с z уравнениями

$$z_1 + Bz = z^2, \quad z_2^2 + Az^2 = kz. \quad (3.3)$$

Легко проверяется, что исключение z^2 из этих уравнений дает в точности уравнение (1.2). Наоборот, при $k \neq 0$ исключение z из системы (3.3) приводит к некоторому уравнению для z^2 , также имеющему вид (1.2). Это новое уравнение будет называться *y-преобразованием Лапласа уравнения* (1.2). Его инварианты Лапласа h^2, k^2 оказываются такими:

$$h^2 = k, \quad k^2 = 2k - h - \partial_x \partial_y \ln k. \quad (3.4)$$

Прямым вычислением инвариантов устанавливаются равенства $(h^1)^2 = (h^2)^1 = h$, $(k^1)^2 = (k^2)^1 = k$, показывающие в силу леммы 1, что *y-преобразование* Лапласа уравнения (h^1, k^1) эквивалентно по функции уравнению (h, k) и что *x-преобразование* Лапласа уравнения (h^2, k^2) эквивалентно по функции уравнению (h, k) . Поэтому множество неэквивалентных уравнений, выводимых из данного уравнения (h, k) , «одномерно». Для наглядной иллюстрации этого свойства удобно положить $h = h^0$ и $k = h^{-1}$, так что исходное уравнение имеет обозначение (h^0, h^{-1}) . Пусть h^n для любого целого n определено рекуррентной формулой

$$h^{n+1} + h^{n-1} = 2h^n - \partial_x \partial_y \ln(h^n). \quad (3.5)$$

Тогда (3.2) показывает, что при $n=0$ эта формула дает инвариант h^1 уравнения (h^1, k^1) , а при $n=-1$ — инвариант $k^2 = h^{-2}$ уравнения (h^2, k^2) . Легко проверяется, что вообще *x-преобразование* Лапласа переводит (h^n, h^{n-1}) в (h^{n+1}, h^n) , а *y-преобразование* Лапласа переводит (h^{n+1}, h^n) в (h^n, h^{n-1}) для любого целого n . Так получается *ряд Лапласа*

$$\dots; (h^{-2}, h^{-3}); (h^{-1}, h^{-2}); (h^0, h^{-1}); (h^1, h^0); (h^2, h^1); \dots,$$

в котором движение вправо осуществляется *x-преобразованиями*, а движение влево — *y-преобразованиями* Лапласа.

Ряд Лапласа можно продолжать до тех пор, пока какой-нибудь из инвариантов h^n не обратится тождественно в нуль. Замечательным свойством этого ряда является то, что если при каком-нибудь n оказывается $h^n=0$, то для исходного уравнения может быть построена формула общего решения с двумя произвольными функциями, содержащая квадратуры. Если же ряд Лапласа «обрывается» с двух концов, то можно построить формулу общего решения исходного уравнения, не содержащую квадратур. Эти красивые аналитические факты здесь не доказываются, поскольку в дальнейшем они использоваться не будут. С ними можно познакомиться, например, по указанному в списке литературы к этой главе классическому трактату Дарбу.

■ Для дальнейшего важен случай, когда инварианты h^n находятся в постоянном отношении.

Л е м м а. Если уравнение (h, k) таково, что отношения

$$k/h = p, \quad (\partial_x \partial_y \ln h)/h = q \quad (3.6)$$

постоянны, то все инварианты ряда Лапласа этого уравнения находятся в постоянном отношении.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В обозначениях ряда Лапласа равенства (3.6) переписываются в виде

$$h^{-1} = ph^0, \quad \partial_x \partial_y \ln h^0 = qh^0.$$

Из формулы (3.5) при $n=0$ следует постоянство отношения $h^1/h^0 = 2 - p - q$. На основании этого постоянство отношения h^n/h^0 устанавливается с помощью формулы (3.5) индукцией по n . ■

В случае постоянных p, q для отыскания отношения h^n/h^0 при любом n надо рассмотреть формулу (3.5) как уравнение в конечных разностях

$$h^{n+1} - 2h^n + h^{n-1} = -qh^0$$

с начальными условиями $h^{-1} = ph^0, h^0 = h^0$. Решение этой задачи (очевидно, единственное) есть

$$h^n/h^0 = 1 + (1-p)n - \frac{1}{2}qn^2(n+1). \quad (3.7)$$

4. Определяющие уравнения. Если искать допускаемый уравнением (1.2) оператор вида $\alpha \partial_x + \beta \partial_y + \gamma \partial_z$ с координатами $\alpha, \beta, \gamma: Z \rightarrow R$, то окажется, что частью системы определяющих уравнений будут уравнения вида 7 (14.6), т. е. в данном случае уравнения $\partial_x \alpha = \partial_x \beta = 0, \partial_x^2 \gamma = 0$. Из этого факта и результатов 7.14 следует, что для уравнения (1.2) его основная алгебра Ли есть $LE = L' \oplus L^\infty$, где L' образована операторами вида

$$\zeta \cdot \partial = \xi(x, y) \partial_x + \eta(x, y) \partial_y + \sigma(x, y) z \partial_z. \quad (4.1)$$

Очевидно, что преобразования растяжения с оператором $z\partial_z$ допускаются любым уравнением (1.2), т. е. входят в ядро основных групп класса уравнений (1.2). Поэтому оператор $z\partial_z$ можно включить в L^∞ и считать, что функция σ в операторе (4.1) определена с точностью до постоянного слагаемого.

Определяющие уравнения выводятся, следуя алгоритму 5.8. Применение дважды продолженного оператора (4.1)

$$\zeta \cdot \partial = \zeta \cdot \partial + \tau_1 \partial_{x_1} + \tau_2 \partial_{x_2} + \tau_{11} \partial_{x_{11}} + \tau_{12} \partial_{x_{12}} + \tau_{22} \partial_{x_{22}};$$

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \sigma_x z + (\sigma - \xi_x) z_1 - \eta_x z_2, & \tau_2 &= \sigma_y z - \xi_y z_1 + (\sigma - \eta_y) z_2; \\ \tau_{11} &= \sigma_{xx} z + (2\sigma_x - \xi_{xx}) z_1 - \eta_{xx} z_2 + (\sigma - 2\xi_x) z_{11} - 2\eta_x z_{12}, \\ \tau_{12} &= \sigma_{xy} z + (\sigma_y - \xi_{xy}) z_1 + (\sigma_x - \eta_{xy}) z_2 - \xi_y z_{11} + \\ &\quad + (\sigma - \xi_x - \eta_y) z_{12} - \eta_x z_{22}, \\ \tau_{22} &= \sigma_{yy} z - \xi_{yy} z_1 + (2\sigma_y - \eta_{yy}) z_2 - 2\xi_y z_{12} + (\sigma - 2\eta_y) z_{22},\end{aligned}$$

к уравнению (1.2) дает условие инвариантности

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} z + (\sigma_y - \xi_{xy}) z_1 + (\sigma_x - \eta_{xy}) z_2 - \xi_y z_{11} - \\ - (\sigma - \xi_x - \eta_y)(Az_1 + Bz_2 + Cz) - \eta_x z_{22} + A(\sigma_x z + (\sigma - \xi_x) z_1 - \eta_x z_2) + \\ + B(\sigma_y z - \xi_y z_1 + (\sigma - \eta_y) z_2) + Cz + (\xi \partial_x A + \eta \partial_y A) z_1 + \\ + (\xi \partial_x B + \eta \partial_y B) z_2 + (\xi \partial_x C + \eta \partial_y C) z = 0,\end{aligned}$$

где $\sigma_x = \partial_x \sigma$, $\sigma_{xy} = \partial_x \partial_y \sigma$ и т. д.

Расщепление относительно «свободных» параметров z , z_1 , z_2 , z_{11} , z_{22} приводит к определяющим уравнениям, которые после небольшой обработки и использования инвариантов Лапласа (2.2) равносильны следующим:

$$\xi_y = 0, \quad \eta_x = 0;$$

$$\partial_x (\sigma + B\xi + A\eta) = (h - k)\eta, \quad \partial_y (\sigma + B\xi + A\eta) = (k - h)\xi; \quad (4.2)$$

$$\partial_x (k\xi) + \partial_y (k\eta) = 0, \quad \partial_x (h\xi) + \partial_y (h\eta) = 0. \quad (4.3)$$

Первые два уравнения (4.2) показывают, что ξ зависит только от x , а η — только от y . Следующие два уравнения (4.2) служат для определения функции σ после того, как найдены ξ и η ; условие совместности этих уравнений следует из (4.3). При этом функция σ определена уравнениями (4.2) однозначно с точностью до постоянного слагаемого, что соответствует предположению об операторах (4.1) допускаемой уравнением (1.2) алгебры Ли L^* . Таким образом, ответственными за общее решение определяющих уравнений и за результаты групповой классификации являются уравнения (4.3). На самом деле, используя леммы 9.2, легко проверить,

что уравнения (4.3) инвариантны относительно любого преобразования эквивалентности (2.1). Поэтому (4.3) являются классифицирующими уравнениями в смысле 6.6.

5. Анализ общего решения. В дальнейшем анализе можно ограничиться тем случаем, когда хотя бы один из инвариантов h, k отличен от нуля. Если это классификационное предположение не выполнено, т. е. если $h=k=0$, то, согласно следствию 9.2, уравнение (1.2) равносильно уравнению $z_{12}=0$ и допускает бесконечномерную алгебру Ли операторов

$$\zeta^0 \cdot \partial = \xi(x) \partial_x + \eta(y) \partial_y \quad (5.1)$$

с произвольными функциями ξ и η .

Для определенности пусть $h \neq 0$. В обозначениях (3.6) из (4.3) следует уравнение

$$\xi p_x + \eta p_y = 0,$$

показывающее, что либо $p=k/h$ есть инвариант группы G^1 с оператором (4.1), либо $p=\text{const}$.

Если отношение p инвариантов Лапласа уравнения (1.2) не есть постоянная, то алгебра Ли операторов (4.1), допускаемых этим уравнением, не более чем одномерна. Действительно, если (ξ, η) и (ξ_1, η_1) удовлетворяют предыдущему уравнению, то при $p \neq \text{const}$ будет $\xi_1 = Q\xi, \eta_1 = Q\eta$, где Q — постоянная, так как она есть функция одновременно только от x и только от y . Но тогда из (4.2) также получается, что $\sigma_1 = Q\sigma$, в силу чего оператор $\zeta_1 \cdot \partial = Q\zeta \cdot \partial$.

Пусть $p=\text{const}$. Тогда из двух уравнений (4.3) остается одно, а именно второе. Оно может быть переписано в следующем виде:

$$\xi \partial_x \ln h + \eta \partial_y \ln h + \xi' + \eta' = 0,$$

где $\xi' = \partial_x \xi, \eta' = \partial_y \eta$. Применение к этому уравнению операции $\partial_x \partial_y$ дает

$$\xi \partial_x \ln (\partial_x \partial_y \ln h) + \eta \partial_y \ln (\partial_x \partial_y \ln h) + \xi' + \eta' = 0.$$

Если отсюда вычесть предыдущее уравнение и использовать обозначение (3.6), то получится новое уравнение

$$\xi q_x + \eta q_y = 0.$$

Поэтому снова можно заключить, что либо $q=(\partial_x \partial_y \ln h)/h$ есть инвариант группы G^1 с оператором (4.1), либо $q=\text{const}$. Отсюда следует вывод, аналогичный предыдущему. Тем самым получается следующий классификационный результат.

Если для уравнения (1.2) хотя бы одна из функций p, q не является тождественно постоянной, то алгебра Ли операторов (4.1), допускаемых этим уравнением, не более чем одномерна.

В случае постоянного q инвариант h не может быть произвольным — он должен быть решением уравнения Лиувилля

$$\partial_x \partial_y \ln h = qh. \quad (5.2)$$

Л е м м а. *Общее решение уравнения (5.2) в случае постоянного q имеет вид*

$$\begin{aligned} h(x, y) &= \frac{2}{q} \cdot \frac{\alpha'(x)\beta'(y)}{(\alpha(x) + \beta(y))^2} \quad (q \neq 0); \\ h(x, y) &= \alpha'(x)\beta'(y) \quad (q = 0), \end{aligned} \quad (5.3)$$

где α, β — произвольные функции и $\alpha' = \partial_x \alpha$, $\beta' = \partial_y \beta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Случай $q=0$ тривиален. Если $q \neq 0$, то формула (5.3) дает решение уравнения (5.2) при любых функциях α, β , что проверяется прямой подстановкой. Пусть $h = \chi^{-2}$; тогда (5.3) приводится к уравнению

$$\chi \chi_{xy} - \chi_x \chi_y = -q/2,$$

дифференцирование ∂_x которого приводит к равносильному следствию $\partial_y \ln(\chi_{xx}/\chi) = 0$, откуда с некоторой функцией $r: x \rightarrow r(x)$

$$\chi_{xx} = r\chi.$$

Если χ_1 и χ_2 — два линейно независимых решения этого линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, то его общее решение есть $\chi = c_1(y)\chi_1(x) + c_2(y)\chi_2(x)$ с произвольными функциями c_1, c_2 . Этому выражению можно придать вид $\chi = m(x)n(y)(\alpha(x) + \beta(y))$. Подстановка в уравнение для χ приводит к результату

$$2\alpha'\beta'(mn)^2 = q,$$

в силу которого $h = \chi^{-2}$ имеет вид (5.3). ■

6. Классификационная теорема. Здесь формулируется наиболее существенный результат групповой классификации уравнений вида (1.2).

Т е о р е м а. *Уравнение (1.2) допускает более чем одномерную алгебру Ли операторов (4.1), если и только если функции*

$$p = k/h, \quad q = (\partial_x \partial_y \ln h)/h$$

тождественно постоянны. Если p и q постоянны, то уравнение (1.2) равносильно либо уравнению Эйлера—Пуассона ($q \neq 0$)

$$z_{12} - \frac{2/q}{x+y} z_1 - \frac{2p/q}{x+y} z_2 + \frac{4p/q^2}{(x+y)^2} z = 0, \quad (6.1)$$

либо уравнению ($q = 0$)

$$z_{12} + xz_1 + pyz_2 + pxyz = 0 \quad (6.2)$$

и его алгебра Ли операторов (4.1) трехмерна.

Доказательство. Необходимость постоянства функций p и q установлена в предыдущем пункте. Если же p и q постоянны, то в силу леммы 9.5 инварианты Лапласа уравнения (1.2) имеют вид (случай $q \neq 0$)

$$h(x, y) = \frac{2}{q} \cdot \frac{\alpha'(x) \beta'(y)}{(\alpha(x) + \beta(y))^2}, \quad k(x, y) = \frac{2p}{q} \cdot \frac{\alpha'(x) \beta'(y)}{(\alpha(x) + \beta(y))^2}.$$

С другой стороны, инварианты Лапласа $\bar{h}$, $\bar{k}$ уравнения (6.1) таковы:

$$\bar{h}(x, y) = \frac{2}{q} \cdot \frac{1}{(x+y)^2}, \quad \bar{k}(x, y) = \frac{2p}{q} \cdot \frac{1}{(x+y)^2}.$$

Сравнение этих выражений с предыдущими показывает, что выполнены условия (2.4) леммы 9.2.2, в силу которой уравнение (1.2) равносильно уравнению (6.1). В случае $q=0$ лемма 9.5 дает выражения для инвариантов уравнения (1.2)

$$h = \alpha'(x) \beta'(y), \quad k = p \alpha'(x) \beta'(y),$$

в то время как инварианты уравнения (6.2) суть $\bar{h}=1$, $\bar{k}=p$. Поэтому снова в силу леммы 9.2.2 уравнение (1.2) равносильно (6.2).

Так как равносильные уравнения допускают подобные алгебры Ли (см. 7.9), то для завершения доказательства остается показать, что каждое из уравнений (6.1), (6.2) допускает трехмерную алгебру Ли операторов вида (4.1). В случае $q \neq 0$ второе из уравнений (5.1) с инвариантом $\bar{h}$ уравнения (6.1) приводится к виду

$$x\xi' - 2\xi + y\eta' - 2\eta + y\xi' + x\eta' = 0.$$

Применение операции $\partial_x \partial_y$ дает $\xi'' + \eta'' = 0$, откуда $\xi'' = -\eta'' = = 2C_0 = \text{const}$. Интегрирование дает выражения

$$\xi = C_0 x^2 + C_1 x + C_2, \quad \eta = -C_0 y^2 + C_3 y + C_4,$$

подстановка которых в предыдущее уравнение показывает, что $C_3 = C_1$, $C_4 = -C_2$. Итак, общий вид координат ξ , η , удовлетворяющих уравнениям (4.3), таков:

$$\xi = C_0 x^2 + C_1 x + C_2, \quad \eta = -C_0 y^2 + C_1 y - C_2.$$

Интегрирование уравнений (4.2) приводит к формуле

$$\sigma = C_0 \frac{2}{q} (px - y).$$

Окончательно получается трехмерная допускаемая уравнением (6.1) алгебра Ли L^3 операторов вида (4.1), причем базис в L^3 образован операторами

$$\begin{aligned} \zeta_1 \cdot \partial &= \partial_x - \partial_y, & \zeta_2 \cdot \partial &= x\partial_x + y\partial_y, \\ \zeta_3 \cdot \partial &= x^2\partial_x - y^2\partial_y + \frac{2}{q}(px - y)z\partial_z. \end{aligned} \quad (6.3)$$

В случае $q=0$ вычисления столь же просты и дают допускаемую уравнением (6.2) алгебру Ли L^3 операторов вида (4.1) с базисом

$$\zeta_1 \cdot \partial = x\partial_x - y\partial_y, \quad \zeta_2 \cdot \partial = \partial_x - yz\partial_z, \quad \zeta_3 \cdot \partial = \partial_y - pxz\partial_z. \quad (6.4)$$

С л е д с т в и е. Два уравнения вида (1.2), допускающие трехмерную алгебру Ли операторов (4.1), равносильны, если и только если они имеют одинаковые значения параметров p и q .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если рассматриваемые уравнения имеют одинаковые p и q , то, согласно доказанной теореме, они оба равносильны одному из уравнений (6.1) или (6.2). Обратно, если данные уравнения равносильны, то равенство значений p следует из (2.4). Равенство значений q также вытекает из соотношений (2.4), в силу которых

$$(\partial_x \partial_y \ln h)/h = (\partial_x \partial_y \ln (\alpha' \beta' h))/(\alpha' \beta' h) = (\partial_x \partial_y \ln h)/h. \quad \blacksquare$$

7. Параболическая нормальная форма. Дифференциальная структура уравнения (1.4) сохраняется при всех преобразованиях (1.1) при условии, что $\partial_x v = 0$. С помощью подходящего преобразования (1.1) легко проверяется, что уравнение (1.4) равносильно такому, в котором $A=0$ и $B=-1$. Поэтому в случае параболической нормальной формы можно ограничиться классом уравнений

$$z_{11} = z_2 + Hz \quad (7.1)$$

с произвольным элементом $H: X \rightarrow R$. В дальнейшем это уравнение будет обозначаться символом $E(H)$.

Наиболее общее преобразование эквивалентности, сохраняющее дифференциальную структуру уравнения (7.1), зависит от трех произвольных функций $y \rightarrow a(y)$, $b(y)$, $c(y)$ и имеет вид

$$x = ax + b, \quad \bar{y} = \int a^2 dy, \quad z = z \exp\left(\frac{a'}{4a} x^2 + \frac{b'}{2a} x + c\right). \quad (7.2)$$

Под действием этого преобразования коэффициент H переходит в коэффициент $\bar{H}$, определяемый формулой

$$a^2 \bar{H}(x, \bar{y}) = H(x, y) + \frac{aa'' - 2a'^2}{4a^2} x^2 + \frac{ab'' - 3a'b'}{4a^2} x + \left(c' - \frac{a'}{2a} - \frac{b'^2}{4a^2}\right), \quad (7.3)$$

где $a' = \partial_y a$, $a'' = \partial_y^2 a$ и т. д.

Уравнение $E(\bar{H})$ равносильно уравнению $E(H)$ относительно преобразования эквивалентности (7.2), если и только если коэффициенты $\bar{H}$ и H связаны формулой (7.3).

Определяющие уравнения $DE(H)$ для операторов вида (4.1), допускаемых уравнением (7.1), получаются применением алгоритма 5.8 и оказываются такими:

$$\begin{aligned}\eta_x &= 0, \quad 2\xi_x - \eta_y = 0, \quad 2\sigma_x + \xi_y = 0; \\ \xi\partial_x H + \eta\partial_y H + \eta_y H &= \sigma_{xx} - \sigma_y.\end{aligned}\quad (7.4)$$

Общее решение системы из первых трех уравнений (7.4) находится без затруднений и выражается через три произвольные функции $y \rightarrow \varphi(y)$, $\psi(y)$, $\chi(y)$ по формулам

$$\xi = 2x\varphi' + \psi, \quad \eta = 4\varphi, \quad 2\sigma = -x^2\varphi'' - x\psi' - \chi, \quad (7.5)$$

где штрихами обозначены производные ∂_y . Подстановка этих выражений в последнее уравнение (7.4) приводит к следующему уравнению, связывающему функции φ , ψ , χ и H :

$$2(2x\varphi' + \psi)\partial_x H + 8\varphi\partial_y H + 8\varphi'H = x^2\varphi''' + x\psi'' + \chi' - 2\varphi''. \quad (7.6)$$

Пусть $h = \partial_x^3 H$. Применение оператора ∂_x^3 к уравнению (7.6) дает

$$(2x\varphi' + \psi)\partial_x h + 4\varphi\partial_y h + 10\varphi'h = 0.$$

Очевидно, что предположение $h=0$ является классифицирующим. Если $h \neq 0$, то для $k = \partial_x \ln h$ из предыдущего уравнения получается

$$(2x\varphi' + \psi)\partial_x k + 4\varphi\partial_y k + 2\varphi'k = 0.$$

С помощью этих двух уравнений для величины $p = kh^{-1/5}$ выводится следующее:

$$(2x\varphi' + \psi)\partial_x p + 4\varphi\partial_y p = 0. \quad (7.7)$$

Отсюда, аналогично тому, как это было сделано в 9.5, можно заключить, что если $p \neq \text{const}$, то уравнение (7.1) допускает не более одного оператора (4.1). Поэтому, для того чтобы алгебра Ли L^* была более чем одномерной, необходимо, чтобы функция h с некоторой постоянной p удовлетворяла классифицирующему уравнению $h^{-1/5}\partial_x \ln h = p$, которое равносильно уравнению

$$\partial_x h = ph^{6/5}. \quad (7.8)$$

8. Классификация параболических форм. Классификационное уравнение (7.8) удовлетворяется функцией $h=0$. В этом случае $\partial_x^3 H = 0$ и произвольный элемент H имеет вид

$$H = \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

с некоторыми функциями $y \rightarrow \beta(y)$, $\gamma(y)$, $\delta(y)$. Очевидно, что всегда можно найти подходящее преобразование эквивалентности (7.2), в результате которого эта функция H переходит в $H=0$. Уравнение (7.1) при $H=0$ уже рассматривалось в 6.8, где найдена его основная алгебра Ли L^6 .

В дальнейшем предполагается, что $h \neq 0$. Если в уравнении (7.8) константа $p=0$, т. е. оно есть $\partial_x^4 H=0$, то произвольный элемент имеет вид

$$H = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — некоторые функции переменного y , причем $\alpha \neq 0$. Легко проверить, что эта функция H эквивалентна такой:

$$H = x^3 + \gamma(y)x.$$

Подстановка в определяющее уравнение (7.6) показывает, что в этом случае $\varphi' = \psi = \chi' = 0$ и $\varphi\gamma' = 0$. Это означает следующее: либо алгебра Ли L' нулевая (если $\varphi=0$), либо она есть L^1 (если $\varphi=C_0$ и $\gamma'=0$). Но последняя возможность дает функцию H , зависящую только от x . Этот случай можно считать тривиальным, так как если $\partial_y H=0$, то уравнение (7.1) всегда допускает оператор ∂_y .

Итак, нетривиальные алгебры Ли L' возможны лишь в предположении, что $p \neq 0$. В этом случае интегрирование уравнения (7.8) дает

$$h = \partial_x^3 H = -24m(x + \lambda)^{-5}, \quad 24m = (5/p)^5,$$

с некоторой функцией $y \rightarrow \lambda(y)$. Трехкратное интегрирование приводит к общему выражению произвольного элемента

$$H = m(x + \lambda)^{-2} + \beta x^2 + \gamma x + \delta,$$

которое подходящим преобразованием эквивалентности (7.2), (7.3) приводится к более простому, а именно

$$H(x, y) = m(x + \mu(y))^{-2}.$$

В свою очередь, эта функция эквивалентна следующей:

$$H(x, y) = mx^{-2} + \theta(y)x \quad (8.1)$$

с некоторой функцией $\theta: y \rightarrow \theta(y)$.

Подстановка функции (8.1) в определяющее уравнение (7.6) и расщепление последнего относительно переменного x дает уравнения

$$\varphi''' = 0, \quad \psi = 0, \quad \chi' = 2\varphi'', \quad 3\varphi'\theta + 2\varphi\theta' = 0. \quad (8.2)$$

Так как из последнего уравнения (8.2) функция φ определяется однозначно, с точностью до постоянного множителя, то в случае $\theta \neq 0$ уравнением (7.1) допускается не более чем алгебра Ли L^1 .

Наконец, если $\theta=0$, то остаются первые три уравнения (8.2), общее решение которых таково (в силу (7.5) функция χ должна определяться с точностью до постоянного слагаемого):

$$\varphi = C_1 + C_2 y + C_3 y^2, \quad \psi = 0, \quad \chi = 4C_3 y.$$

Это решение дает по формулам (7.5) алгебру Ли L^3 операторов вида (4.1), допускаемых в данном случае уравнением (7.1), базис которой таков:

$$\zeta_1 = (0, 1, 0), \quad \zeta_2 = (x, 2y, 0), \quad \zeta_3 = (-4xy, -4y^2, (x^2 + 2y)z). \quad (8.3)$$

9. Классификационный результат. Окончательный результат групповой классификации параболических нормальных форм (7.1) уравнения второго порядка формулируется в следующей теореме.

Т е о р е м а. Уравнение (7.1) допускает какой-либо оператор (4.1), если и только если оно равносильно уравнению этого вида с функцией H , не зависящей от одной из координат, x или y . Расширение основной алгебры Ли возможно, только если уравнение (7.1) равносильно такому же уравнению с функцией $H = tx^{-2}$ ($t = \text{const}$); последнее при $t \neq 0$ допускает алгебру Ли L^3 операторов (8.3), а при $t = 0$ — алгебру Ли L^5 , найденную в 6.8.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предыдущего надо доказать только первую часть утверждения. Легко проверить, пользуясь формулой подобия векторных полей 1.16, что в случае преобразования, определяемого формулами (7.2), вектор $(\xi, \eta, \sigma z)$ переходит в вектор $(\xi, \eta, \bar{\sigma} z)$ с координатами

$$\xi = a\xi + (a'x + b')\eta, \quad \eta = a^2\eta, \quad \bar{\sigma} = \sigma + \rho_x\xi + \rho_y\eta,$$

где $\rho = \frac{a'}{4a}x^2 + \frac{b'}{2a}x + c$. В силу равенств (7.5) это влечет преобразование функций φ, ψ, χ по формулам

$$\bar{\varphi} = a^2\varphi, \quad \bar{\psi} = a\psi + 4b'\varphi, \quad \bar{\chi} = \chi - \frac{b'}{2a}\psi - 4c'\varphi. \quad (9.1)$$

Пусть уравнение (7.1) допускает ненулевой оператор (4.1) с функциями φ, ψ, χ . Если $\varphi \neq 0$, то можно выбрать функции a, b, c такими, что формулы (9.1) дадут $\bar{\varphi} = \text{const} \neq 0, \bar{\psi} = \bar{\chi} = 0$. В этом случае определяющее уравнение (7.6) после преобразования (7.2), (7.3) примет вид $4\bar{\varphi}\partial_y\bar{H} = 0$, откуда следует, что $\bar{H}$ не зависит от y . Если же $\varphi = 0$, но $\psi \neq 0$, то с помощью (9.1) можно сделать $\bar{\psi} = \text{const} \neq 0$ и $\bar{\chi} = 0$ и определяющее уравнение (7.6) после преобразования (7.2), (7.3) будет $\bar{\psi}\partial_x\bar{H} = 0$, т. е. $\bar{H}$ не зависит от x . Наконец, из (7.6) следует, что если $\varphi = \psi = 0$, то оператор (4.1) нулевой. ■

С л е д с т в и е. Если уравнение (7.1) допускает два линейно независимых оператора вида (4.1), то оно равносильно уравнению

$$z_{11} = z_2 + tx^{-2}z.$$

§ 10. Уравнения пограничного слоя

1. Описание системы уравнений. Рассматриваются известные из гидродинамики уравнения двумерного нестационарного пограничного слоя (уравнения Прандтля), описывающие движения вязкой несжимаемой жидкости вблизи непроницаемой твердой поверхности при больших числах Рейнольдса. Эта система имеет тип $E(3, 3, 2, 3)$ и будет описываться в индивидуальных обозначениях координат, принятых в гидродинамике. Здесь $X = R^3(t, x, y)$, $Y = R^3(u, v, p)$, причем t — время, x, y — пространственные координаты, u, v — координаты вектора скорости и p — давление. Оператор дифференцирования отображений $Z = X \times Y \rightarrow P$ записывается в виде $\partial = (\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_u, \partial_v, \partial_p)$ и для частных производных используются сокращенные обозначения с соответствующими индексами, например $\partial_t u = u_t$, $\partial_x u = u_x$, $\partial_y^2 u = u_{yy}$ и т. п.

Не нарушая общности рассмотрения, можно принять, что плотность жидкости и коэффициент вязкости равны единице. При этих соглашениях исследуемая система уравнений такова:

$$\left. \begin{aligned} u_t + u u_x + v u_y + p_x &= u_{yy}, \\ p_y &= 0, \\ u_x + v_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Давление p играет в этой системе особую роль. В силу второго уравнения p есть функция только от (t, x) . В задачах гидродинамики эта функция часто может считаться заданной. В этом случае, если функцию $p_x = \theta(t, x)$ предположить известной, то система (1.1) станет системой типа $E(3, 2, 2, 2)$ и примет вид

$$\left. \begin{aligned} u_t + u u_x + v u_y + \theta &= u_{yy}, \\ u_x + v_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

В отличие от системы (1.1), здесь функция θ может рассматриваться в качестве произвольного элемента, в то время как система (1.1) произвольных элементов не содержит. Поэтому для этих систем уравнений задачи группового анализа различны: для системы (1.1) это просто задача вычисления ее основной группы (основной алгебры Ли операторов), а для системы (1.2) — задача групповой классификации по отношению к произвольному элементу $\theta: (t, x) \rightarrow \theta(t, x)$. Дальнейшее изложение и посвящено решению этих задач.

2. Предварительная информация об операторе. Для координат искомого оператора здесь целесообразно применить индивидуальные обозначения, в которых координата обозначается той же буквой, что и скалярная переменная, но со звездочкой наверху.

При этом соглашении допускаемый системой (1.1) оператор имеет вид

$$\zeta \cdot \partial = \dot{t} \partial_t + \dot{x} \partial_x + \dot{y} \partial_y + \dot{u} \partial_u + \dot{v} \partial_v + \dot{p} \partial_p, \quad (2.1)$$

координаты которого $\dot{t}, \dots, \dot{p}$ суть искомые отображения $Z \rightarrow R$. Формулы продолжения оператора (2.1) строятся с помощью оператора полного дифференцирования $D = (D_t, D_x, D_y)$, имеющего компоненты

$$\begin{aligned} D_t &= \partial_t + u_t \partial_u + v_t \partial_v + p_t \partial_p + \dots, \\ D_x &= \partial_x + u_x \partial_u + v_x \partial_v + p_x \partial_p + \dots, \\ D_y &= \partial_y + u_y \partial_u + v_y \partial_v + p_y \partial_p + \dots + u_{yy} \partial_{u_y} + \dots, \end{aligned}$$

где явно указаны только слагаемые, фактически участвующие в построении определяющих уравнений.

Вначале целесообразно конкретизировать функциональный вид координат оператора (2.1), подчинив его только условию, чтобы он допускался уравнением $u_x + v_y = 0$ — последним в системах (1.1), (1.2). Алгоритм 5.8, в процессе реализации которого условие инвариантности берется на всем многообразии (1.1) в продолженном пространстве Z_2 , приводит к представлению

$$\begin{aligned} \dot{t} &= 2\alpha(t), \quad \dot{x} = \beta(t, x), \quad \dot{y} = \gamma(t, y), \\ \dot{u} &= (\sigma + \beta_x)u + \lambda, \quad \dot{v} = (\sigma + \gamma_y)v + \mu, \end{aligned} \quad (2.2)$$

в котором функции $\sigma, \lambda, \mu: X \rightarrow R$ удовлетворяют уравнениям

$$\sigma_x + \beta_{xx} = 0, \quad \sigma_y + \gamma_{yy} = 0, \quad \lambda_x + \mu_y = 0, \quad (2.3)$$

составляющим часть системы определяющих уравнений для любой из систем (1.1), (1.2).

3. Определяющие уравнения. Применение алгоритма 5.8 ко второму уравнению (1.1) дает представление последней координаты оператора (2.1)

$$\dot{p} = \psi(t, x, p). \quad (3.1)$$

Наконец, первое уравнение с помощью алгоритма 5.8 порождает следующие определяющие уравнения:

$$\begin{aligned} \beta_{ts} &= \alpha_{tt}, \quad \beta_{xx} = 0, \quad \gamma_y = \alpha_t; \\ \sigma &= -2\alpha_t, \quad \lambda = \beta_t, \quad \mu = \gamma_t; \quad \psi_s = -\lambda_t, \quad \psi_p = 2\beta_s - 4\alpha_t. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Полная система определяющих уравнений DE для уравнения (1.1) состоит из уравнений (2.3) и (3.2).

Для системы $E(\theta)$ уравнений (1.2) с произвольным элементом θ алгоритм 5.8 дает те же определяющие уравнения (2.3), (3.2)

со следующим изменением: из (3.2) исключаются последние два уравнения для ψ , и их место занимает определяющее уравнение

$$2\alpha\partial_t\theta + \beta\partial_x\theta = (\beta_x - 4\alpha_t)\theta - \lambda_t. \quad (3.3)$$

4. Общее решение. Подстановка выражений (3.2) для λ , μ в последнее уравнение (2.3) и учет первых трех уравнений (3.2) показывает, что $\alpha_{tt}=0$. В силу этого общее решение уравнений (2.3)–(3.2) оказывается следующим:

$$\begin{aligned} 2\alpha &= C_1 + 2C_2t, \quad \beta = C_3x + \delta(t), \quad \gamma = C_2y + \varepsilon(t), \quad \sigma = -2C_2, \\ \lambda &= \delta'(t), \quad \mu = \varepsilon'(t), \quad \psi = (2C_3 - 4C_2)p - \delta''(t)x + \pi(t), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, $t \rightarrow \delta(t), \varepsilon(t), \pi(t)$ — произвольные функции и штрихами обозначены производные по t . На основании этого решения по формулам (2.2), (3.1) получается основная алгебра Ли допускаемых системой (1.1) операторов (2.1) с координатами

$$\begin{aligned} \dot{t} &= C_1 + 2C_2t, \quad \dot{x} = C_3x + \delta(t), \quad \dot{y} = C_2y + \varepsilon(t), \\ \dot{u} &= (C_3 - 2C_2)u + \delta'(t), \quad \dot{v} = -C_2v + \varepsilon'(t), \\ \dot{p} &= (2C_3 - 4C_2)p - \delta''(t)x + \pi(t). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь постоянная C_1 дает оператор ∂_t переноса по времени, а постоянные C_2 и C_3 — операторы растяжения

$$2t\partial_t + 2x\partial_x + y\partial_y - v\partial_v, \quad x\partial_x + u\partial_u + 2p\partial_p.$$

Произвольные функции δ, ε дают оператор

$$\delta(t)\partial_x + \varepsilon(t)\partial_y + \delta'(t)\partial_u + \varepsilon'(t)\partial_v - \delta''(t)x\partial_p,$$

соответствующий преобразованиям перехода на плоскости $R^2(x, y)$ в систему координат, поступательно движущуюся со временем по произвольному закону. Произвольная функция π дает оператор $\pi(t)\partial_p$, соответствующий тому факту, что уравнениями (1.1) давление p определяется с точностью до слагаемого, равного произвольной функции времени.

Примечательной особенностью полученной основной алгебры Ли LE системы E , заданной уравнениями (1.1), является то, что она бесконечномерна: ее операторы зависят от трех произвольных функций δ, ε, π времени t .

5. Случай заданного давления. При переходе к системе $E(\theta)$, заданной уравнениями (1.2), оператор (2.1) «укорачивается» за счет отбрасывания слагаемого $\dot{p}\partial_p$, а к определяющим уравнениям (2.3), (3.2) добавляется уравнение (3.3). Для групповой классификации уравнений (1.2) надо прежде всего найти ядро основных алгебр Ли системы $E(\theta)$.

Очевидно, что уравнение (3.3) при произвольной функции θ может быть удовлетворено, лишь если $\alpha = \beta = \lambda_i = 0$. Добавление этих уравнений к системе (2.3), (3.2) показывает, что в общем решении (4.1) будет $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ и $\delta = 0$. Поэтому ядро основных алгебр Ли L_0 уравнения $E(\theta)$ образовано операторами вида

$$\zeta \cdot \partial = \varepsilon(t) \partial_y + \varepsilon'(t) \partial_v, \quad (5.1)$$

с одной произвольной функцией $t \rightarrow \varepsilon(t)$.

Затем следует вычислить преобразования эквивалентности класса уравнений $E(\theta)$, которые должны быть преобразованиями пространства $R^5(t, x, y, u, v)$. Применение алгоритма, изложенного в § 6, дает следующий результат. Общее преобразование эквивалентности состоит из всех преобразований, соответствующих ядру основных алгебр Ли (5.1) и из преобразований, зависящих от трех произвольных постоянных k, l, m и от одной произвольной функции $t \rightarrow \omega(t)$, которые даются формулами

$$\bar{t} = k^2 t + l, \quad \bar{x} = mk^4(x + \omega), \quad \bar{y} = ky, \quad \bar{u} = mk^2(u + \omega'), \quad \bar{v} = k^{-1}v, \quad (5.2)$$

где $\omega' = \partial_t \omega$. При этом произвольный элемент θ преобразуется так:

$$\bar{\theta}(\bar{t}, \bar{x}) = m(\theta(t, x) - \omega''(t)). \quad (5.3)$$

6. Групповая классификация. Определяющее уравнение (3.3), в силу уже найденных без обращения к этому уравнению выражений для функций (4.1), принимает вид

$$(C_1 + 2C_2 t) \theta_t + (C_3 x + \delta(t)) \theta_x = (C_3 - 4C_2) \theta - \delta''(t), \quad (6.1)$$

где для краткости использованы обозначения $\theta_t = \partial_t \theta$, $\theta_x = \partial_x \theta$. Отсюда ясна общая структура классифицирующего уравнения, ответственного за групповую классификацию систем $E(\theta)$: любая конкретная функция, с которой возможно расширение ядра основных алгебр Ли (5.1), должна быть решением уравнения вида

$$(A + Bt) \theta_t + (Cx + v(t)) \theta_x = (C - 2B) \theta - v''(t) \quad (6.2)$$

с некоторыми постоянными A, B, C и функцией $t \rightarrow v(t)$.

Легко проверяется, что уравнение (6.2) инвариантно относительно преобразований эквивалентности (5.2), (5.3), дополненных следующими преобразованиями постоянных A, B, C и функции v

$$\bar{A} = k^2 A - lB, \quad \bar{B} = B, \quad \bar{C} = C, \quad \bar{v} = mk^4(v + (A + Bt)\omega' - C\omega). \quad (6.3)$$

Первую классификационную возможность дает функция $\theta = 0$ или, общее, любая функция θ , зависящая только от t , так как в силу (5.3) она всегда эквивалентна функции $\theta = 0$. В этом случае определяющее уравнение принимает вид $\delta'' = 0$ с общим решением

$\delta = C_4 + C_5 t$. Согласно формулам (4.2) это дает пятимерное расширение L^5 ядра основных алгебр Ли, имеющее базис

$$\begin{aligned} \zeta_1 \cdot \partial &= \partial_t, \quad \zeta_2 \cdot \partial = 2t\partial_t + y\partial_y - 2u\partial_u - v\partial_v, \\ \zeta_3 \cdot \partial &= x\partial_x + u\partial_u, \quad \zeta_4 \cdot \partial = \partial_x, \quad \zeta_5 \cdot \partial = t\partial_x + \partial_u. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Далее рассматриваются альтернативные возможности: (а) все постоянные A, B, C равны нулю и (б) хотя бы одна из этих постоянных отлична от нуля.

С л у ч а й (а). Здесь классифицирующее уравнение (6.2) имеет вид $v\theta_x = -v''$. Решение этого уравнения, с точностью до преобразования эквивалентности (5.2), (5.3), есть $\theta = \varphi(t)x$ с некоторой вполне определенной функцией $\varphi: t \rightarrow \varphi(t)$. Подстановка этой функции θ в определяющее уравнение (6.1) и расщепление относительно «свободного» переменного x дает уравнения

$$C_1\varphi' + 2C_2(t\varphi' + 2\varphi) = 0, \quad \delta'' + \varphi\delta = 0. \quad (6.5)$$

Если $C_1 = C_2 = 0$, то первое уравнение не накладывает никаких ограничений на функцию φ . Второе же всегда имеет два линейно независимых решения δ_1 и δ_2 и его общее решение есть $\delta = C_4\delta_1 + C_5\delta_2$. Следовательно, в этом случае ядро основных алгебр Ли L_0 расширяется подалгеброй L^3 с базисом, образованным оператором $\zeta_3 \cdot \partial$ из (6.4) и операторами

$$\zeta_4^0 \cdot \partial = \delta_1(t)\partial_x + \delta_1'(t)\partial_u, \quad \zeta_5^0 \cdot \partial = \delta_2(t)\partial_x + \delta_2'(t)\partial_u. \quad (6.6)$$

Если $C_2 \neq 0$, то первое уравнение (6.5) эквивалентно уравнению $t\varphi' + 2\varphi = 0$ с общим решением $\varphi = qt^{-2}$, где $q = \text{const}$. Здесь второе уравнение (6.5) есть $t^2\delta'' + q\delta = 0$ и при $q = n(1-n) \neq 1/4$ имеет два линейно независимых решения

$$\delta_1 = t^n, \quad \delta_2 = t^{1-n},$$

а при $q = 1/4$ — два решения

$$\delta_1 = t^{1/2}, \quad \delta_2 = t^{1/2} \ln t.$$

Итак, если $\theta = qt^{-2}x$, то расширяющая L_0 алгебра Ли есть L^4 с базисом, состоящим из операторов $\zeta_2 \cdot \partial$ и $\zeta_3 \cdot \partial$ из (6.4) и операторов вида (6.6) с предыдущими конкретными функциями δ_1 и δ_2 .

Наконец, если $C_2 = 0$, но $C_1 \neq 0$, то из (6.5) следует $\varphi' = 0$, откуда $\varphi = \text{const}$. За счет преобразования эквивалентности эта постоянная может быть сделана равной ± 1 , так что второе уравнение (6.5) есть $\delta'' \pm \delta = 0$. Итак, для функции $\theta = \pm x$ расширяющая алгебра Ли есть снова L^4 , но с базисом, состоящим из операторов $\zeta_1 \cdot \partial$ и $\zeta_3 \cdot \partial$ из (6.4) и операторов вида (6.6), где либо $\delta_1 = \sin t$, $\delta_2 = \cos t$ (для $\theta = x$), либо $\delta_1 = \text{sh } t$, $\delta_2 = \text{ch } t$ (для $\theta = -x$).

С л у ч а й (б). Если хотя бы одна из постоянных A, B, C не равна нулю, то из (6.3) следует, что для любой функции v

можно подобрать такую функцию ω из преобразования эквивалентности (5.2), (5.3), с которой будет $\nabla=0$. Следовательно, в этом случае произвольный элемент эквивалентен функции θ , удовлетворяющей уравнению

$$A\theta_t + B(t\theta_t + 2\theta) + C(x\theta_x - \theta) = 0. \quad (6.7)$$

Здесь возникают различные возможности в зависимости от того, равны нулю постоянные B и C или нет. Это дает четыре подслучая

$$(b_1) \ C = B = 0, \quad (b_2) \ C = 0, \quad B \neq 0, \\ (b_3) \ C \neq 0, \quad B = 0, \quad (b_4) \ C \neq 0, \quad B \neq 0.$$

(b_1) Уравнение (6.7) есть $\theta_t = 0$ с общим решением $\theta = \psi(x)$. Определяющее уравнение (6.1) принимает вид

$$C_3(x\psi' - \psi) + \delta\psi' + 4C_2\psi = -\delta''.$$

При произвольной функции ψ отсюда следуют равенства $C_2 = C_3 = 0$ и $\delta = 0$, ввиду чего остается одномерная алгебра Ли L^1 с оператором $\zeta_1 \cdot \partial$ из (6.4), соответствующим постоянной C_1 в (4.2). Дифференцирование ∂_x дает уравнение

$$C_3x\psi'' + \delta(t)\psi'' + 4C_2\psi' = 0.$$

Очевидно, что предположение $\psi'' = 0$ возвращает к случаям $\theta = 0$ или (а). Поэтому надо считать, что $\psi'' \neq 0$, а тогда функция δ должна быть постоянной $\delta = C_4$. Здесь определяющее уравнение будет таким:

$$(C_3x + C_4)\psi' = (C_3 - 4C_2)\psi.$$

При $C_3 \neq 0$ решение этого уравнения эквивалентно степенной функции $\psi = x^n$, причем $n \neq 0$ и $n \neq 1$. С этой функцией из уравнения получаются соотношения $C_4 = 0$, $(n-1)C_3 = 4nC_2$, что дает подалгебру Ли $L^2 \subset L^5$ с базисом операторов

$$\zeta_1 \cdot \partial, \quad \zeta_2 \cdot \partial + \frac{4n}{n-1} \zeta_3 \cdot \partial.$$

Если же $C_3 = 0$, то решение эквивалентно функции e^x и $C_4 = C_3 - 4C_2$. Значит, в случае $\theta = e^x$ получается подалгебра $L^3 \subset L^5$ с базисом

$$\zeta_1 \cdot \partial, \quad \zeta_2 \cdot \partial - 4\zeta_4 \cdot \partial, \quad \zeta_3 \cdot \partial + \zeta_4 \cdot \partial.$$

(b_2). Так как из (6.3) следует, что при $B \neq 0$ можно считать $A = 0$, то здесь функция θ эквивалентна решению уравнения $t\theta_t + 2\theta = 0$, т. е. функции $\theta = \psi(x)t^{-2}$. С этой функцией определяющее уравнение (6.1) принимает вид

$$-2C_1t^{-1}\psi + C_3(x\psi' - \psi) + \delta\psi' = -t^2\delta'',$$

дифференцирование ∂_x которого дает уравнение

$$-2C_1 t^{-1} \psi' + C_3 x \psi'' + \delta \psi'' = 0.$$

При произвольной функции ψ отсюда следуют равенства $C_1 = C_3 = 0$ и $\delta = 0$, ввиду чего остается лишь L^1 с оператором $\zeta_2 \cdot \partial$ из (6.4). Предположение $\psi'' = 0$ возвращает к случаям $\theta = 0$ или (а). Если же $\psi'' \neq 0$, то необходимо $C_3 = 0$ и $(t\delta)' = 0$, т. е. $\delta = C_4 t^{-1}$. Поэтому предыдущее уравнение показывает, что функция ψ должна быть решением уравнения $\psi'' = q\psi'$, где $q \neq 0$ или, с точностью до эквивалентности, функцией $\psi = e^x$. При этом определяющее уравнение сводится к равенству $C_4 = 2C_1$. Следовательно, для $\theta = e^x t^{-2}$ получается алгебра Ли L^2 с операторами

$$\zeta_2 \cdot \partial, \quad \zeta_1 \cdot \partial + 2t^{-1} \partial_x - 2t^{-2} \partial_{xx}.$$

(b₃) Очевидно, что здесь предположение $A = 0$ возвращает к случаям $\theta = 0$ или (а). Если же $A \neq 0$, то за счет преобразования эквивалентности (6.3) можно сделать $A = \pm C$, в силу чего уравнение (6.7) примет вид $\pm \theta_x + x \theta_{xx} = \theta$ с общим решением $\theta = e^{\pm t} f(xe^{\pm t})$, где f — произвольная функция. Подстановка функции $\theta = e^{-t} f(z)$, $z = xe^t$ в определяющее уравнение (6.1) дает

$$(C_1 + C_3 + 2C_2 t)(zf' - f) + e^t \delta f' = -4C_2 f - e^t \delta'',$$

откуда для произвольной f получается алгебра Ли L^1 , оператор которой определяется соотношением $C_1 + C_3 = 0$, т. е. есть $\zeta_1 \cdot \partial - \zeta_3 \cdot \partial$. Дифференцирование ∂_x приводит к уравнению

$$(C_1 + C_3 + 2C_2 t)zf'' + e^t \delta f'' + 4C_2 f' = 0.$$

Предположение $f'' = 0$ возвращает к случаям $\theta = 0$ или (а). Если же $f'' \neq 0$, то из этого уравнения следует, что $C_2 = 0$ и $(e^t \delta)' = 0$, откуда $\delta = C_4 e^{-t}$. Но тогда необходимо также $C_4 = 0$ и $C_1 + C_3 = 0$ и новых операторов, кроме $\zeta_1 \cdot \partial - \zeta_3 \cdot \partial$, нет.

(b₄) Здесь, как и в (b₂), можно считать $A = 0$ и привести уравнение (6.7) к следующему:

$$t\theta_x - nx\theta_{xx} = -(n+2)\theta,$$

причем $n \neq 0$. Общее решение этого уравнения есть $\theta = t^{-n-2} f(z)$, где $z = xt^n$. С этой функцией θ определяющее уравнение (6.1) сводится к

$$(nC_1 + (2nC_2 + C_3)t)(zf' - f) + t^{n+1} \delta f' - 2C_1 f = -t^{n+3} \delta''.$$

При произвольной функции f это уравнение влечет равенства $C_1 = 0$, $2nC_2 + C_3 = 0$, $\delta = 0$, что дает алгебру Ли L^1 с оператором $\zeta_2 \cdot \partial - 2n\zeta_3 \cdot \partial$. Дифференцированием ∂_x получается уравнение

$$(nC_1 + (2nC_2 + C_3)t)zf'' + t^{n+1} \delta f'' - 2C_1 f' = 0.$$

И здесь предположение $f''=0$ возвращает к случаям $\theta=0$ или (а). Если же $f'' \neq 0$, то из этого уравнения с помощью дифференцирования ∂_i следуют равенства $2nC_2 + C_3 = 0$ и $(t^{n+1}\delta)' = 0$, откуда $\delta = C_4 t^{-n-1}$. С этими значениями определяющее уравнение принимает вид

$$C_4(f' + (n+1)(n+2)) + C_1(nzf' - (n+2)f) = 0.$$

Так как здесь $C_1 \neq 0$, то можно положить $C_4 = nqC_1$ с некоторой новой постоянной q . В силу этого соотношения предыдущее уравнение становится классифицирующим

$$n(z+q)f' = (n+2)f - n(n+1)(n+2)q.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$f = N(z+q)^{(n+2)/n} + n(n+1)q \quad (N = \text{const}),$$

в силу чего функции $\theta = t^{-n-2}f(z)$ можно придать вид

$$\theta = N(x + qt^{-n})^{(n+2)/n} + n(n+1)qt^{-n-2}.$$

Но если в (5.2) положить $m=k=1$ и $\omega = qt^{-n}$, то по формуле (5.3) получится $\bar{\theta} = Nx^{(n+2)/n}$. Следовательно, найденная функция θ эквивалентна функции $\theta = x^n$, уже рассмотренной в (b₁).

Сводка полученных результатов групповой классификации системы (1.2) дана в нижеследующей таблице, где в первом столбце

	θ	Специализация	r	Операторы	Примечание
(a)	0		5	$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5$	(6.4)
	$\varphi(t)x$	$\sim$	3	$\zeta_3, \zeta_4, \zeta_5$	$\delta'' + \varphi\delta = 0$
		$n(1-n)t^{-2}$	4	$\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5$	$\delta_1 = t^n, \delta_2 = t^{1-n}$
		$(1/4)t^{-2}$	4	$\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4^2, \zeta_5^2$	$\delta_1 = t^{1/2}, \delta_2 = t^{1/2} \ln t$
		1	4	$\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4^2, \zeta_5^2$	$\delta_1 = \sin t, \delta_2 = \cos t$
		-1	4	$\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4^2, \zeta_5^2$	$\delta_1 = \text{sh } t, \delta_2 = \text{ch } t$
(b ₁)	$\psi(x)$	$\sim$	1	ζ_1	
		x^n	2	$\zeta_1, \zeta_2 + \frac{4n}{n-1}\zeta_3$	$n(n-1) \neq 0$
		e^x	3	$\zeta_1, \zeta_2 - 4\zeta_4, \zeta_3 + \zeta_4$	
(b ₂)	$\psi(x)t^{-2}$	$\sim$	1	ζ_2	
		e^x	2	$\zeta_2, \zeta_1 + \zeta_4^5$	$\delta = 2t^{-1}$
(b ₃)	$e^{\pm t}f(xe^{\mp t})$	$\sim$	1	$\zeta_1 \pm \zeta_3$	
(b ₄)	$t^{-n-2}f(xt^n)$	$\sim$	1	$\zeta_2 - 2n\zeta_3$	

указаны индексы рассмотренных случаев, во втором — вид функции θ , в третьем — специализации входящей в θ произвольной функции, в четвертом — размерность r получаемой алгебры Ли L' , в пятом — список операторов (векторных полей) и в шестом — дополнительная информация. Все операторы с двойным индексом имеют вид $\delta(t)\partial_x + \delta'(t)\partial_u$.

7. Стационарный пограничный слой. Наряду с (1.1) представляет интерес аналогичная система, в которой искомые u , v , p не зависят от времени t . Эта система уравнений стационарного пограничного слоя, имеющая тип $E(2, 3, 2, 3)$, причем теперь $X = \mathbb{R}^2(x, y)$, $Y = \mathbb{R}^3(u, v, p)$, $Z = \mathbb{R}^5(x, y, u, v, p)$, такова:

$$\left. \begin{aligned} m_x + m_y + p_x &= u_{yy}, \\ p_y &= 0, \\ u_x + v_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Если давление p является задаваемой функцией от x , то с функцией $\theta = \partial_x p$ получается аналог системы (1.2)

$$\left. \begin{aligned} m_x + m_y + \theta &= u_{yy}, \\ u_x + v_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

Для систем (7.1) и (7.2) решаются те же задачи группового анализа, которые были решены выше для систем (1.1) и (1.2). Допускаемый оператор ищется снова в виде (2.1) с $\dot{t}=0$ и координатами $\hat{x}, \dots, \hat{p}: Z \rightarrow R$.

Пусть E обозначает систему (7.1) и $E(\theta)$ — систему (7.2). Построение определяющих уравнений DE и их общего решения выполняется без каких-либо затруднений и дает следующий результат:

$$\hat{x} = C_1 + (C_2 + 2C_3)x, \quad \hat{y} = C_3y + \varphi, \quad \hat{u} = C_2u, \quad \hat{v} = -C_3v + \varphi'u, \quad (7.3)$$

$$\hat{p} = 2C_2p + C_4, \quad (7.4)$$

где $C_1, \dots, C_4$ — произвольные постоянные, а $\varphi: x \rightarrow \varphi(x)$ — произвольная функция и $\varphi' = \partial_x \varphi$. Так как в это общее решение входит произвольная функция, то основная алгебра Ли LE оказывается бесконечномерной.

Бесконечномерная часть L^∞ алгебры Ли LE состоит из операторов $\varphi\partial_y + \varphi'u\partial_u$ с произвольной функцией $\varphi: x \rightarrow \varphi(x)$. Легкое вычисление показывает, что L^∞ есть идеал в LE . Прямым дополнением этого идеала является подпространство $L^4 \subset LE$, порожденное операторами, соответствующими константам $C_1, \dots, C_4$ в (7.3) и (7.4):

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1 \cdot \partial &= \partial_x, & \zeta_2 \cdot \partial &= x\partial_x + u\partial_u + 2p\partial_p, \\ \zeta_3 \cdot \partial &= 2x\partial_x + y\partial_y - v\partial_v, & \zeta_4 \cdot \partial &= \partial_p. \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

Эти операторы образуют базис в L^4 . Легко проверяется, что L^4 есть алгебра Ли, следовательно, подалгебра в LE . Итак, основная алгебра Ли системы уравнений (7.1) раскладывается в прямую сумму $LE = L^\infty \oplus L^4$ своего бесконечномерного идеала L^∞ и четырехмерной подалгебры L^4 с базисом (7.5).

В случае системы $E(\theta)$ переменная p в число координат пространства Z не входит, так что $Z = \mathbb{R}^4(x, y, u, v)$. Построение определяющих уравнений $DE(\theta)$ и их решение приводит к следующему результату.

Справедливо представление общего решения (7.3), в котором, однако, постоянные C_1, C_2, C_3 связаны еще одним определяющим уравнением с произвольным элементом θ

$$(C_1 + (C_2 + 2C_3)x)\theta' = (C_2 - 2C_3)\theta, \quad (7.6)$$

где $\theta' = \partial_x \theta$. Бесконечномерный идеал L^∞ входит в алгебру Ли $LE(\theta)$ для любого конкретного произвольного элемента θ . Ввиду выпадения переменной p разложение основной алгебры Ли $LE(\theta)$ в прямую сумму имеет вид $LE(\theta) = L^\infty \oplus L'$, где L' есть некоторая подалгебра трехмерной алгебры Ли L^3 с базисом, состоящим из первых трех операторов (7.5). Конкретизация алгебр Ли L' осуществляется в процессе решения задачи групповой классификации систем $E(\theta)$ на основе определяющего уравнения (7.6).

Очевидно, что полная алгебра Ли L^3 получается в случае $\theta = 0$. С другой стороны, так как при произвольной θ равенство (7.6) возможно, только если $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, то ядро основных алгебр Ли L' является нулевым. Поэтому ядро основных алгебр Ли $LE(\theta)$ совпадает с L^∞ .

8. Групповая классификация. Уравнение (7.6) показывает, что классифицирующее системы $E(\theta)$ уравнение должно иметь вид

$$(A + Bx)\theta' = C\theta \quad (8.1)$$

с некоторыми постоянными A, B, C . Решение задачи групповой классификации основано на использовании следующих преобразований эквивалентности системы $E(\theta)$:

$$x = kx + l, \quad \bar{y} = m^{-1}y, \quad \bar{u} = km^2u, \quad \bar{v} = mv, \quad \bar{\theta} = km^4\theta, \quad (8.2)$$

где k, l, m — вещественные параметры, причем $km \neq 0$.

В результате преобразования (8.2) константы в уравнении (8.1) преобразуются по формулам $\bar{A} = kA - lB, \bar{B} = B, \bar{C} = C$, в связи с чем удобно различать два случая: (а) $B = 0$ и (б) $B \neq 0$.

С л у ч а й (а). Если $B = 0$, то можно считать, что $A \neq 0$, ибо иначе получится либо $\theta = 0$, либо $C = 0$, а это дает уже рассмотренные возможности. Если же $A \neq 0$, то решение уравнения (8.1) есть $\theta = qe^{ax}$ с некоторыми постоянными q, n . В силу (8.2) эта функция эквивалентна либо $\pm e^x$ (если $n \neq 0$), либо 1 (если $n = 0$),

С функцией $\theta = \pm e^x$ уравнение (7.6) приводит к равенствам $C_1 = -4C_3$, $C_2 = -2C_3$, что дает подалгебру Ли L^1 с оператором

$$4\partial_x + 2u\partial_u - y\partial_y + v\partial_v.$$

С функцией $\theta = 1$ получается равенство $C_2 = 2C_3$, что дает подалгебру Ли L^2 с базисом $\zeta_1 \cdot \partial$, $2\zeta_2 \cdot \partial + \zeta_3 \cdot \partial$.

С л у ч а й (b). Если $B \neq 0$, то с помощью подходящего преобразования эквивалентности можно сделать $A = 0$. Но если $A = 0$ и $B \neq 0$, то решение уравнения (8.1) есть степенная функция $\theta = qx^n$, причем можно считать, что $q \neq 0$ и $n \neq 0$. Эта функция эквивалентна функции $\theta = \pm x^n$. Подстановка в определяющее уравнение (7.6) приводит к соотношениям

$$C_1 = 0, \quad (n-1)C_2 + 2(n+1)C_3 = 0.$$

Это дает алгебру Ли L^1 с оператором $2(n+1)\zeta_2 - (n-1)\zeta_3$.

Сводка полученных результатов групповой классификации системы (7.2) приведена в нижеследующей таблице, где в первом столбце указаны индексы рассмотренных случаев, во втором — специализации функции θ , в третьем — размерность r получаемой алгебры Ли L' , в четвертом — базис операторов (векторных полей) и в пятом — дополнительная информация. При этом в операторе $\zeta_2 \cdot \partial$ из (7.5) надо отбросить слагаемое $2r\partial_r$.

	θ	r	Операторы	Примечание
	0	3	$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$	(7.5)
(a)	$\pm e^x$	1	$4\zeta_1 + 2\zeta_2 - \zeta_3$	
	1	2	$\zeta_1, 2\zeta_2 + \zeta_3$	
(b)	$\pm x^n$	1	$2(n+1)\zeta_2 - (n-1)\zeta_3$	$n \neq 0$

§ 11. Уравнения газовой динамики

1. Описание системы уравнений. Уравнения адиабатических движений газа в пространстве R^n ($n = 1, 2, 3$), связывающие компоненты вектора скорости $u \in R^n$, плотность ρ и давление p , как функции координат точки $x \in R^n$ и времени t , таковы:

$$\rho_d u + \text{grad } p = 0, \quad d_t \rho + \rho \text{ div } u = 0, \quad d_t S(p, \rho) = 0.$$

Здесь символ d_t обозначает «материальную производную», т. е. дифференциальный оператор $\partial_t + u \cdot \partial_x$, а $S: R^2 \rightarrow R$ есть некоторая заданная функция, называемая энтропией. Предполагается, что функция S является достаточно гладкой и удовлетворяет

условию $\partial_p S \neq 0$, в силу которого можно ввести другую задаваемую функцию $A: R^2 \rightarrow R$, определяемую формулой

$$A = -\rho \partial_p S / \partial_p S.$$

В случае политропного газа эта функция равна $A = \gamma p$, где постоянная γ называется показателем адиабаты. С помощью функции A последнему уравнению системы можно придать равносильную форму

$$d_p p + A \operatorname{div} u = 0.$$

Рассматриваемая система имеет тип $E(n+1, n+2, 1, n+2)$. В дальнейшем она изучается для любого натурального n , что не приносит каких-либо дополнительных усложнений по сравнению с «физическими» случаями $n=1, 2, 3$. Вычисления ведутся в индивидуальных обозначениях согласно представлениям $X = R^{n+1}(t, x^1, \dots, x^n)$ и $Y = R^{n+2}(u^1, \dots, u^n, p, \rho)$. При этом оператор дифференцирования отображений $X \rightarrow Y$ записывается в виде $\partial_x = (\partial_0, \partial_1, \dots, \partial_n)$, где $\partial_0 = \partial_t$ и «материальная производная» дается формулой $\partial_0 + u^i \partial_i$. Кроме того, первые производные обозначаются сокращенно в соответствии с равенствами

$$\partial_\alpha u^i = u_\alpha^i, \quad \partial_\alpha p = p_\alpha, \quad \partial_\alpha \rho = \rho_\alpha \quad (\alpha = 0, 1, \dots, n).$$

Ниже используется соглашение о том, что латинские индексы $i, j, k, \dots$ принимают значения $1, \dots, n$, а греческие индексы $\alpha, \beta, \dots$ — значения $0, 1, \dots, n$. В этих обозначениях исследуемая система имеет вид

$$\left. \begin{aligned} u_0^i + u^k u_k^i + \rho^{-1} p_i &= 0, \\ \rho_0 + u^k \rho_k + \rho u_k^k &= 0, \\ \rho_0 + u^k \rho_k + A u_k^k &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Для системы (1.1), обозначаемой также символом $E(A)$, решается задача групповой классификации по отношению к произвольному элементу A как функции $(p, \rho) \rightarrow A(p, \rho)$ в предположении, что $A \neq 0$.

2. Определяющие уравнения. Для координат оператора, допускаемого системой (1.1), также вводятся индивидуальные обозначения, а именно

$$\zeta \cdot \partial = \xi^\alpha \partial_\alpha + \eta^i \partial_{u^i} + \sigma \partial_p + \tau \partial_\rho, \quad (2.1)$$

где все $\xi^\alpha, \eta^i, \sigma, \tau$ суть искомые отображения $X \times Y \rightarrow R$.

Применение изложенного в 5.8 алгоритма перехода $E \rightarrow DE$ никаких принципиальных затруднений не встречает. Так как (1.1) есть система первого порядка, то требуется лишь первое продолжение оператора (2.1). Переход на многообразие E осуществляется просто исключением величин u_0^i, ρ_0, ρ_0 с помощью

(1.1), причем в полученных условиях инвариантности все оставшиеся координаты точки продолженного пространства u_k^i, p_k, ρ_k являются «свободными» параметрами. Так как уравнения (1.1) квазилинейны, то полное число N_n определяющих уравнений, получаемых после расщепления, может быть вычислено по формуле 5 (8.4). Подсчет дает $N_1=30$, $N_2=180$ и $N_3=680$.

Расщепление условий инвариантности относительно «свободных» параметров приводит к следующим результатам. Обращение в нуль совокупности квадратичных слагаемых равносильно выполнению равенств

$$\partial_p \xi^\alpha = \partial_p \xi^\alpha = \partial_u \xi^\alpha = 0 \quad (\alpha = 0, 1, \dots, n; i = 1, \dots, n). \quad (2.2)$$

Обращение в нуль совокупности слагаемых первой степени равносильно выполнению равенств

$$\partial_i \xi^0 = 0, \quad \partial_1 \xi^1 = \partial_2 \xi^2 = \dots = \partial_n \xi^n = \lambda, \quad \partial_k \xi^i + \partial_i \xi^k = 0; \quad (2.3)$$

$$\eta^i = u^k \partial_k \xi^i - u^i \partial_0 \xi^0 + \partial_0 \xi^i; \quad (2.4)$$

$$\partial_p \sigma = \partial_u \sigma = 0, \quad \partial_p \tau = 0, \quad \tau = \rho (\partial_p \sigma + 2 \partial_0 \xi^0 - 2\lambda); \quad (2.5)$$

$$\sigma \partial_p A + \tau \partial_p A = A \partial_p \sigma, \quad (2.6)$$

где введена вспомогательная функция $\lambda: X \rightarrow R$. Наконец, оставшиеся слагаемые с нулевой степенью «свободных» параметров образуют систему

$$\left. \begin{aligned} \partial_0 \eta^i + u^k \partial_k \eta^i + \rho^{-1} \partial_i \sigma &= 0, \\ \partial_0 \tau + u^k \partial_k \tau + \rho \partial_k \eta^k &= 0, \\ \partial_0 \sigma + u^k \partial_k \sigma + A \partial_k \eta^k &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Уравнения (2.2)–(2.7) образуют полную систему определяющих уравнений $DE(A)$.

3. Ядро основных алгебр Ли. Если функция A вполне произвольна, то уравнение (2.6) может быть удовлетворено только значениями $\sigma = \tau = 0$. В этом случае из (2.5) следует, что $\lambda = \partial_0 \xi^0$, а уравнения (2.7) сводятся к следующим:

$$\partial_0 \eta^i + u^k \partial_k \eta^i = 0, \quad \partial_k \eta^k = 0. \quad (3.1)$$

Подстановка в эти уравнения выражения (2.4) и последующее расщепление полученных равенств относительно «свободных» в силу (2.2) и (2.4) параметров u^k приводит к системе уравнений, содержащих только координаты ξ^i

$$\partial_k \partial_j \xi^i = 0, \quad 2 \partial_k \partial_0 \xi^i = \delta_k^i \partial_0^2 \xi^0, \quad \partial_0^2 \xi^i = 0. \quad (3.2)$$

Эти уравнения показывают, что все производные второго порядка от координат ξ^i равны нулю и, кроме того, $\partial_0^2 \xi^0 = 0$. Поэтому

общее решение строится без каких-либо затруднений и оказывается таким:

$$\begin{aligned}\xi^i &= C_2 x^i + C_k^i x^k + B^i t + B_0^i \quad (C_k^i = -C_k^i), \\ \xi^0 &= C_1 + C_2 t, \quad \eta^i = C_k^i u^k + B^i,\end{aligned}\quad (3.3)$$

где $C_1, C_2, C_k^i, B^i, B_0^i$ — произвольные постоянные, причем матрица (C_k^i) антисимметрична.

Следовательно, ядро основных алгебр Ли L_0 системы уравнений $E(A)$ конечномерно и его размерность, равная числу независимых произвольных постоянных в общем решении (3.3), есть

$$2 + \frac{1}{2} n(n-1) + 2n = 2 + \frac{1}{2} n(n+3).$$

Этому решению соответствует базис операторов (2.1) алгебры Ли L_0

$$\left. \begin{aligned}\zeta_1 \cdot \partial &= \partial_t, \quad \zeta_2 \cdot \partial = t\partial_t + x^i \partial_i, \\ \zeta_1^i \cdot \partial &= \partial_i, \quad \zeta_2^i \cdot \partial = t\partial_i + \partial_{u^i}, \\ \zeta_{ik} \cdot \partial &= x^k \partial_i - x^i \partial_k + u^k \partial_{u^i} - u^i \partial_{u^k} \quad (i < k).\end{aligned}\right\} \quad (3.4)$$

4. Предварительный анализ. Из уравнений (2.5) следует, что $\partial_p^2 \sigma = 0$ и для функции σ получается представление

$$\sigma = rp + s \quad (4.1)$$

с новыми неизвестными функциями $x \rightarrow r(x)$ и $x \rightarrow s(x)$. Подстановка этого выражения для σ и ему соответствующего, согласно (2.5), выражения для τ в (2.6) приводит к уравнению

$$(p\partial_p A + p\partial_p A - A)r + (\partial_p A)s + 2(p\partial_p A)(\partial_0 \xi^0 - \lambda) = 0. \quad (4.2)$$

Далее, если выражения (2.4) и (4.1) подставить в первое уравнение (2.7), то в силу (2.2), (2.3) и (2.5) получатся уравнения (3.2) и, кроме того, равенства

$$\partial_i r = \partial_i s = 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

показывающие, что функции r и s могут зависеть только от t . Кроме того, из (2.3) и (3.2) следует, что это верно также для функции λ , а значит, и для функции ξ^0 в силу вытекающего из (3.2) соотношения

$$2\partial_0 \lambda = \partial_0^2 \xi^0. \quad (4.3)$$

Поэтому исключение τ и η^k из второго уравнения (2.7) с учетом предыдущих дает соотношение

$$\partial_0 r + (n+2)\partial_0 \lambda = 0. \quad (4.4)$$

Наконец, исключение σ и η^k из третьего уравнения (2.7) с учетом предыдущих приводит к уравнению

$$\partial_0 s + (nA - (n+2)p) \partial_0 \lambda = 0. \quad (4.5)$$

Полученные соотношения (4.2)–(4.5) составляют основу для проведения групповой классификации систем $E(A)$. Решение этой задачи связано с использованием легко проверяемого преобразования эквивалентности, в котором величины t , x^i , u^i не меняются и фактически преобразуются только p , ρ , A по формулам

$$\bar{p} = ap + b, \quad \bar{\rho} = a\rho, \quad \bar{A}(\bar{p}, \bar{\rho}) = aA(p, \rho) \quad (4.6)$$

с параметрами a , b , причем $a \neq 0$.

5. Групповая классификация. Характерной классифицирующей величиной является $nA - (n+2)p$. Следует заметить, что если эта величина постоянная, то за счет подходящего преобразования эквивалентности (4.6) она может быть сделана равной нулю. Поэтому надо рассмотреть два основных случая:

$$(a) \quad nA - (n+2)p \neq \text{const} \quad \text{и} \quad (b) \quad nA = (n+2)p.$$

Случай (а). Здесь из (4.5) следуют равенства $\partial_0 s = \partial_0 \lambda = 0$, а из (4.3) и (4.4) также $\partial_0 \xi^0 = 0$ и $\partial_0 r = 0$. Поэтому величины r , s , λ и $\partial_0 \xi^0$ являются постоянными. Однако теперь не обязательно $\partial_0 \xi^0 = \lambda$, в силу чего в аналогичном (3.3) представлении координат ξ^0 , ξ^i , η^i появится, вообще говоря, еще одна постоянная $q = \partial_0 \xi^0 - \lambda$. Если положить $\lambda = C_2$, то это представление, включая выражения для σ и τ , таково:

$$\begin{aligned} \xi^i &= C_2 x^i + C_k^i x^k + B^i t + B_0^i \quad (C_k^i = -C_i^k), \\ \xi^0 &= C_1 + (C_2 + q)t, \quad \eta^i = C_k^i u^k - qu^i + B^i, \\ \sigma &= rp + s, \quad \tau = (r + 2q)\rho. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Эти формулы дают общее решение всей системы определяющих уравнений, за исключением уравнения (4.2), которое теперь принимает вид (в упрощенной записи $\partial_p A = A_p$, $\partial_\rho A = A_\rho$)

$$(pA_p + \rho A_\rho - A)r + A_p s + 2\rho A_\rho q = 0. \quad (5.2)$$

Теперь ясно, что расширение ядра основных алгебр Ли L_0 в рассматриваемом случае возможно лишь за счет трех новых постоянных q , r , s , причем не более чем на алгебру Ли L^1 или L^2 . Из (5.1) видно, что постоянным q , r , s соответствуют операторы

$$\zeta'_1 \cdot \partial = t\partial_t - u^i \partial_{u^i} + 2\rho \partial_\rho, \quad \zeta'_2 \cdot \partial = p\partial_p + \rho \partial_\rho, \quad \zeta'_3 \cdot \partial = \partial_s, \quad (5.3)$$

причем общий вид вектора расширяющей алгебры таков:

$$\zeta' = q\zeta'_1 + r\zeta'_2 + s\zeta'_3. \quad (5.4)$$

Для классификации возможностей, представляемых уравнением (5.2), удобно истолковать множители при r, s, q как координаты трехмерного вектора

$$v = (pA_p + \rho A_\rho - A, A_p, 2\rho A_\rho).$$

Если функция A такова, что найдутся (при изменении p и ρ) три некомпланарных вектора v , то (5.2) может быть выполнено, только если $q=r=s=0$, и расширения ядра L_0 не получается. Поэтому надо рассмотреть только три подслучая, в зависимости от размерности аффинного многообразия V , содержащего все возможные векторы v , а именно, (a_1) V двумерно, (a_2) V одномерно и (a_3) V нульмерно.

(a_1) . Пусть постоянный вектор $v' = (a', b', c')$ ортогонален V . Тогда $v' \cdot v = 0$, т. е. функция A должна быть решением уравнения

$$(a'p + b')A_p + (a' + 2c')\rho A_\rho - a'A = 0. \quad (5.5)$$

Если $a' \neq 0$, то подходящим преобразованием эквивалентности (4.6) можно сделать $a' = 1$, $b' = 0$, $c' = m$, и (5.5) примет вид $pA_p + (1 + 2m)\rho A_\rho = A$. Общее решение этого уравнения таково:

$$A = pf(p^{1+2m}\rho^{-1}). \quad (5.6)$$

Если $a' = 0$, но $b' \neq 0$, то в случае $c' \neq 0$ можно подходящим преобразованием (4.6) сделать $b' = c'$ и (5.5) превратится в уравнение $A_p + 2\rho A_\rho = 0$ с общим решением

$$A = f(\rho e^{-2p}). \quad (5.7)$$

В случае же, когда $c' = 0$, из (5.5) получается уравнение $A_p = 0$ с общим решением

$$A = f(\rho). \quad (5.8)$$

Наконец, если $a' = b' = 0$, но $c' \neq 0$, то (5.5) примет вид $A_\rho = 0$ с общим решением

$$A = f(p). \quad (5.9)$$

В формулах (5.6)–(5.9) f — произвольная функция $R \rightarrow R$.

(a_2) . Пусть постоянный вектор $v' = (a', b', 2c')$ порождает V , причем вектор v не является постоянным. Тогда с некоторой функцией $B: R^2 \rightarrow R$ будут выполнены равенства

$$pA_p + \rho A_\rho - A = a'B, \quad A_p = b'B, \quad \rho A_\rho = c'B.$$

Отсюда

$$A = (b'p + c' - a')B$$

и, кроме того,

$$(b'p + c' - a')B_p = 0, \quad (b'p + c' - a')\rho B_\rho = c'B. \quad (5.10)$$

Теперь видно, что необходимо $b' = 0$, так как в противном случае из (5.10) следовало бы, что $B = \text{const}$. Далее, если $b' = 0$, то также необходимо $c' \neq a'$ и $c' \neq 0$. Поэтому общее решение системы (5.10) имеет вид $B = B_0 \rho^m$, в силу чего

$$A = A_0 \rho^m \quad (m \neq 0). \quad (5.11)$$

При этом можно считать, что $a' = m - 1$ и $c' = m$.

(а₃) Если вектор $v = \text{const}$, то очевидно, что с точностью до преобразования эквивалентности либо

$$A = \gamma p \quad (\gamma = \text{const} \neq 0), \quad (5.12)$$

либо

$$A = 1.$$

В каждом из подслучаев дополнительные операторы вида (5.4) получаются в результате подстановки одной из найденных функций A в уравнение (5.2) и соответствующей конкретизации постоянных q, r, s .

С л у ч а й (b). Здесь

$$A = \frac{n+2}{n} p \quad (5.13)$$

и из (4.5) уже не следует равенство $\partial_0 \lambda = 0$. Однако нетрудно убедиться в том, что величина $\partial_0 \lambda$ должна быть постоянной. Действительно, единственными условиями совместности уравнений (3.2), не выполненными тождественно в силу (2.2), являются равенства

$$\partial_k (\partial_0^2 \xi^i) = \partial_0 (\partial_0 \partial_k \xi^i),$$

которые в силу (3.2) и (2.3) сводятся к $\partial_0^2 \lambda = 0$, откуда и следует постоянство $\partial_0 \lambda$.

С функцией (5.13) уравнение (4.2) удовлетворяется, если и только если $s = 0$. Поэтому здесь общее решение уравнений (4.2) — (4.5) имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda &= C_2 + \lambda_0 t, \quad \xi^0 = C_1 + (C_2 + q_0) t + \lambda_0 t^2, \\ r &= r_0 - \lambda_0 (n + 2) t, \quad s = 0. \end{aligned}$$

Это решение расширяет алгебру Ли L_0 на алгебру Ли L^3 за счет добавления трех новых операторов, соответствующих постоянным q_0, r_0, λ_0 . При этом постоянные q_0, r_0 дают уже известные операторы $\zeta'_1 \cdot \partial$ и $\zeta'_2 \cdot \partial$ из (5.3). Существенно новый оператор, соответствующий постоянной λ_0 , получается в результате решения системы (2.3) — (2.5) и оказывается таким:

$$\zeta'_4 \cdot \partial = t^2 \partial_t + t x^i \partial_i + (x^i - t u^i) \partial_{u^i} - (n + 2) t p \partial_p - n t p \partial_p. \quad (5.14)$$

6. Сводка результатов. Вычисление с помощью уравнения (5.2) операторов для каждого из рассмотренных случаев приводит к следующему классификационному результату.

При произвольной функции A система уравнений (1.1) допускает основную алгебру Ли L_0 размерности $2 + \frac{1}{2}n(n+3)$ с базисом операторов (3.4), которая является идеалом (см. 7.4) в любой из допускаемых алгебр Ли $LE(A)$. Справедливо представление $LE(A) = L_0 \oplus L'$, причем возможны только такие расширения, для которых $r=1, 2, 3$.

Все случаи расширения алгебры Ли L_0 перечислены в ниже-следующей таблице. Здесь в первом столбце приведены индексы рассмотренных классификационных случаев, во втором даны специализации функции A , в третьем — размерность r расширяющей алгебры Ли L' , в четвертом — базис в L' , где использованы обозначения (5.3) и (5.14) и в пятом — дополнительная информация.

Особый интерес представляет случай (b), когда достигается максимально возможное расширение на алгебру Ли L^3 . Найденный оператор (5.14) является нетривиальным в том смысле, что он не может быть получен, в отличие от остальных операторов, на основе только так называемых «физических соображений».

	A	r	Операторы	Примечание
	$\sim$	0		
(a ₁)	$pf(p^{1+2m}p^{-1})$	1	$m\zeta'_1 + \zeta'_2$	$f \sim$
	$f(pe^{-2p})$	1	$\zeta'_1 + \zeta'_3$	
	$f(p)$	1	ζ'_3	
	$f(p)$	1	ζ'_1	
(a ₂)	$A_0 \zeta^m$	2	$\zeta'_3, (m-1)\zeta'_1 - 2m\zeta'_2$	$A_0 = \text{const}, m \neq 0$
(a ₃)	γp	2	ζ'_1, ζ'_2	$\gamma = \text{const}$
	1	2	ζ'_1, ζ'_3	
(b)	$\frac{n+2}{n}p$	3	$\zeta'_1, \zeta'_2, \zeta'_4$	$n = 1, 2, \dots$

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ III

К настоящему времени выполнено довольно много работ, связанных с вычислением основной группы и групповой классификацией конкретных систем дифференциальных уравнений. По обыкновенным дифференциальным уравнениям первые результаты были получены С. Ли (см. II [2]). Классифи-

кация уравнений второго порядка была выполнена Диксоном [1]. В теории управления техника группового анализа использована в [2].

Теорема о том, что линейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными допускает не более чем трехпараметрическую группу нетривиальных преобразований, принадлежит С. Ли [3]. Идея классификации гиперболических форм с помощью инвариантов Лапласа возникла при изучении мемуара [4]; в настоящем виде она была выполнена в [5], где дано также ее приложение к газодинамическому уравнению С. А. Чаплыгина. К этой теме примыкает также работа [6].

По групповому анализу уравнений двумерного пограничного слоя первой работой была [7]. Данный в § 10 исчерпывающий анализ этих уравнений приводится впервые. Представляют интерес исследования [8] и [9], посвященные трехмерному пограничному слою.

Кроме работы II [4], уравнения газовой динамики изучались в [10] и [11]. Полная классификация впервые была приведена в II [5]. Определенный интерес представляет работа [12], где сделана попытка применения метода внешних форм Картана.

Имеется также несколько работ [13]—[23] (список не претендует на полноту) по групповому анализу других конкретных уравнений механики и физики.

- [1] Dickson L. E. Differential equations from the group standpoint. — Ann. Math. 25 (1924), 287—378.
- [2] Павловский Ю. Н. Групповые свойства управляемых динамических систем и фазовые организационные структуры. — Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 14, № 4 (1974), 862—872 и № 5 (1974), 1093—1103.
- [3] Lie S. Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linearer partiellen Differentialgleichungen. — Arch. Math. 6, Heft 3 (1881), 328—368.
- [4] Darboux G. Leçons sur la théorie générale des surfaces 3 (1889).
- [5] Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнений С. А. Чаплыгина. — Ж. прикл. мех. и техн. физ. № 3 (1960), 126—145.
- [6] Hainzi J. Zur Gruppeninvarianz lineare partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. — Arch. Rat. Mech. Anal. 59, № 2 (1975), 149—158.
- [7] Павловский Ю. Н. Исследование некоторых инвариантных решений уравнений пограничного слоя. — Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 1, № 2 (1961), 280—294.
- [8] Ланкеревич М. Я. Групповые свойства уравнений трехмерного пограничного слоя на произвольной поверхности. — В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 7. Новосибирск (1971), 12—24.
- [9] Каплан В. С. Условия существования инвариантных решений уравнений трехмерного ламинарного пограничного слоя на разветвляющихся поверхностях. — Уч. зап. ЦАГИ 3, № 3 (1972), 36—44.
- [10] Гладышев М. Т. Групповая классификация дифференциальных уравнений, описывающих одномерное неустановившееся движение жидкости. — Дифференц. уравнения 2, № 5 (1966), 695—700.
- [11] Суровихин К. П. Групповая классификация уравнений, описывающих одномерные нестационарные течения газа. — ДАН СССР 156, № 3 (1964), 533—536.
- [12] Суровихин К. П. О групповой классификации методом Картана уравнений одномерного течения газа. — ДАН СССР 172, № 1 (1966), 55—58.
- [13] Ибрагимов Н. Х. Групповые свойства некоторых дифференциальных уравнений. Новосибирск, «Наука», 1967.
- [14] Ибрагимов Н. Х. Групповые свойства волновых уравнений для частиц с нулевой массой. — ДАН СССР 178, № 3 (1968), 566—568.

- [15] Ибрагимов Н. Х. Об инвариантности уравнений Дирака. — ДАН СССР, 185, № 6 (1969), 1226—1228.
- [16] Бучнев А. А. Группа Ли, допускаемая уравнениями движения идеальной несжимаемой жидкости. — В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 7. Новосибирск (1971), 212—214.
- [17] Ленский Э. В. О групповых свойствах уравнений движения нелинейной вязко-пластической среды. — Вестник МГУ, мат., мех., № 5 (1966), 116—125.
- [18] Леонова М. А. Групповая классификация и инвариантные решения уравнений течения и теплообмена вязко-пластической среды. — Ж. прикл. мех. и техн. физ. № 4 (1966), 3—18.
- [19] Мамонтов Е. В. К теории нестационарных околосзвуковых течений. — ДАН СССР 185, № 3 (1969), 538—540.
- [20] Нгуен Ван Дьеп. Об уравнениях пограничного слоя жидкости с моментными напряжениями. — Прикл. мат. и мех. 32, № 4 (1968), 748—753.
- [21] Овсянников Л. В. Уравнения динамической конвекции моря. Новосибирск, Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1967.
- [22] Чиркунов Ю. А. Групповое свойство уравнений Ламе. — В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 14. Новосибирск (1973), 138—140.
- [23] Müller E. A., Matschat K. Über das Auffinden von Ähnlichkeitslösungen partieller Differentialgleichungssysteme unter Benutzung von Transformationsgruppen, mit Anwendung auf Probleme der Strömungsphysik. — Miszellen angew. Mech. Berlin (1962), 190—205.

ГЛАВА IV

ТЕОРИЯ ЛИ

Дальнейшее развитие методов группового анализа дифференциальных уравнений опирается на теорию локальных групп Ли и алгебр Ли во всей ее полноте. Изложению этой теории с выделением ряда фактов, используемых в первую очередь, и посвящена настоящая глава.

В теории Ли существенную роль играют так называемые три основные теоремы Ли, которые в совокупности приводят к установлению взаимно однозначного соответствия между группами (локальными) Ли и алгебрами Ли. Здесь эти теоремы доказаны для произвольных банаховых групп и алгебр Ли, для которых параметрическое пространство может быть и бесконечномерным. Важным фактом является существование в каждом классе изоморфных групп канонического представителя, т. е. группы, у которой все ее однопараметрические подгруппы—прямые. Этот результат получен в третьей «обратной» теореме Ли с помощью дифференциального уравнения, решение которого построено в виде известного SCH -ряда из сложных коммутаторов. Дана оценка области сходимости SCH -ряда для произвольного банахова пространства. Заодно получен еще один фундаментальный результат теории Ли об аналитичности закона умножения.

Основные факты теории алгебр Ли излагаются конспективно, причем некоторые важные теоремы (например, теорема Леви об отщеплении радикала) приведены без доказательства. Применение методов группового анализа для изучения действия допускаемой уравнением группы на множестве решений связано с классификацией подалгебр данной алгебры Ли (с точностью до подобия). К сожалению, эта проблема алгебры до настоящего времени полного решения не получила. Поэтому введенное здесь понятие оптимальной системы подалгебр (или подгрупп) остается не подкрепленным достаточно четким алгоритмом построения этого объекта. Алгебры Ли операторов, допускаемые дифференциальными уравнениями, часто имеют нетривиальный радикал, а иногда и вообще оказываются разрешимыми. Оптимальные системы подалгебр в каждом конкретном случае приходится строить «полукустарно», опираясь лишь на теоремы Леви и Мальцева—Хариш-Чандра, а также на другие общие факты теории алгебр Ли.

Распространение соответствия групп и алгебр Ли на подгруппы и подалгебры, а также группы внутренних автоморфизмов выполнено в более или менее традиционном стиле. Некоторое сокращение изложения дает использование для этих целей SCH -ряда.

Группы Ли преобразований и здесь трактуются как представления групп Ли в множестве локальных преобразований произвольного банахова пространства. Еще раз демонстрируются три основные теоремы Ли, но специально для групп преобразований. Для конструктивного восстановления группы Ли преобразований конечномерного пространства по ее алгебре Ли операторов рекомендуется конструкция канонической группы второго рода, которая полезна и в некоторых теоретических вопросах.

В конце главы даны элементы теории подобия групп преобразований. Обсуждается также новое по сравнению с абстрактными группами Ли понятие транзитивности (интранзитивности) группы преобразований. Для свойств подобия и транзитивности приведены инфинитезимальные критерии.

Одним из итогов этой главы является возможность адекватного описания результатов, полученных в первых трех главах. Однако наряду с классической теорией групп Ли групповой анализ дифференциальных уравнений вынужден иметь дело с «бесконечными группами» Ли, теория которых пока еще завершенной считаться не может.

§ 12. Локальная группа Ли

1. Определения. Пусть B — банахово пространство. Символом O обозначаются окрестности нуля пространства B . В частности, O_r есть открытый шар с центром в нуле радиуса r .

Пара (O, φ) , состоящая из окрестности нуля $O \subset B$ и отображения $\varphi: O \times O \rightarrow B$ называется **групповым ядром**, если выполнены аксиомы:

1°. $\varphi(a, 0) = \varphi(0, a) = a$ для любого $a \in O$.

2°. $\varphi(\varphi(a, b), c) = \varphi(a, \varphi(b, c))$ для любых таких $a, b, c \in O$, для которых $\varphi(a, b) \in O$ и $\varphi(b, c) \in O$.

3°. $\varphi \in C_\infty(O \times O)$.

Два групповых ядра (O, φ) и (O', φ') считаются неразличимыми, если $\varphi = \varphi'$ на пересечении $O \cap O'$. Следующее определение оправдано тем, что свойство неразличимости есть теоретико-множественный признак эквивалентности.

Непустой класс неразличимых групповых ядер (O, φ) называется локальной (банаховой) группой Ли.

Локальная (банахова) группа Ли вполне характеризуется заданием отображения φ , удовлетворяющего аксиомам 1°—3° с какой-нибудь окрестностью нуля $O \subset B$ и потому обозначается символом (B, φ) . В дальнейшем, если это не будет вызывать не-

доразумений, локальная (банахова) группа Ли (B, φ) будет называться просто *группой* (B, φ) .

Отображение φ называется *законом умножения* (или просто *умножением*) в группе (B, φ) , а значение $\varphi(a, b)$ — *произведением* a на b , которое иногда ради краткости записи обозначается также символом $a \cdot b$. В частности, аксиома 2° может быть записана как $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ и является выражением свойства *ассоциативности умножения* в группе (B, φ) .

Понятие «произведение определено» вводится индуктивно: произведение $a \cdot b$ определено, если $a, b \in O$; произведение $a \cdot b \cdot c$ определено, если определены и принадлежат O произведения $a \cdot b$ и $b \cdot c$, и т. д.

2. Свойства умножения. Из аксиом 1°—3° п. 1 вытекают важные свойства закона умножения φ , которые, в частности, оправдывают употребление термина «группа». Пусть дано групповое ядро (O, φ) .

(а) *Найдутся такие число $\rho > 0$ и отображение $i: O_\rho \rightarrow O$ класса $C_\infty(O_\rho)$, с которыми для любого $a \in O_\rho$ выполнены равенства*

$$\varphi(i(a), a) = \varphi(a, i(a)) = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ∂_1 и ∂_2 обозначают дифференцирование отображения φ по первому и второму аргументам. Очевидно, что из 1° и 3° следуют равенства $\partial_1 \varphi(0, 0) = \partial_2 \varphi(0, 0) = I_B$. Поэтому отображение φ удовлетворяет всем условиям известной из анализа теоремы о «неявной функции», в силу которой для некоторого $\rho > 0$ существуют такие отображения $i_1, i_2: O_\rho \rightarrow O$ класса $C_\infty(O_\rho)$, что для $a \in O_\rho$ выполнены равенства $\varphi(i_1(a), a) = 0$, $\varphi(a, i_2(a)) = 0$ или, короче, $i_1(a) \cdot a = 0$, $a \cdot i_2(a) = 0$. Но в силу 2° справедливы равенства $i_1(a) = i_1(a) \cdot a \cdot i_2(a) = i_2(a)$ и можно положить $i = i_1 = i_2$. ■

В силу этого свойства при умножении φ элемент $i(a)$ является *обратным* для элемента a и может быть обозначен обычным символом a^{-1} . При этом роль *единичного элемента* играет нуль пространства B . Поэтому i есть *отображение обращения*, действующее по формуле $a^{-1} = i(a)$.

(б) *Для каждого натурального n найдется такое вещественное число $\rho(n) > 0$, что для любых $a_1, \dots, a_n \in O_{\rho(n)}$ определены все произведения $b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n$, в которых каждое b_k есть либо a_k , либо a_k^{-1} .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $n=2$ справедливость утверждения следует из свойства (а), а для любого $n > 2$ устанавливается индукцией по n . ■

(γ) *Пусть число ρ выбрано в соответствии со свойством (а). Тогда отображение $\psi: O_\rho \times O_\rho \rightarrow B$, действующее по формуле $\psi(a, b) = a \cdot b^{-1}$, непрерывно, более того, класса $C_\infty(O_\rho \times O_\rho)$.*

Доказательство. Так как $\varphi(a, b) = \varphi(a, i(b))$, то справедливость утверждения следует из аксиомы 3°, свойства (α) и известных теорем анализа о непрерывной дифференцируемости композиции. ■

Свойства (α)–(γ) показывают, что единственное отличие группового ядра (O, φ) от группы в ее точном определении состоит в том, что в (O, φ) операции умножения и обращения элементов определены и непрерывны не для любых элементов из O , а только для элементов из достаточно малой окрестности O_p единичного элемента. Поэтому групповое ядро (или группа (B, φ)) является топологическим групповым ядром или, в общепринятом смысле, локальной топологической группой.

В случае, если пространство B конечномерно, группа (B, φ) называется локальной группой Ли.

Пример. Пусть l — линейный непрерывный функционал на пространстве B , т. е. линейное отображение $B \rightarrow R$, действующее по формуле $a \rightarrow l\langle a \rangle$. Тогда отображение φ , заданное формулой

$$\varphi(a, b) = a + b + l\langle a \rangle b,$$

определяет группу (B, φ) . Выполнение аксиом 1°–3° п. 1 проверяется без каких-либо затруднений. Здесь операция умножения определена и непрерывна на всем пространстве B , но для операции обращения элементов это не так. Действительно, вычисление обратного дает выражение

$$a^{-1} = -(1 + l\langle a \rangle)^{-1}a,$$

и гарантированные свойства определенности и гладкости отображения $a \rightarrow a^{-1}$ справедливы только в окрестности нуля $O = \{a \mid |l\langle a \rangle| < 1\}$.

Этот пример является, пожалуй, простейшим из возможных примеров неабелевых групп (B, φ) в случае произвольного банахова пространства B . В дальнейшем на нем будут иллюстрироваться некоторые элементы теории групп (B, φ) .

3. Локальный изоморфизм. Пусть B и B' — банаховы пространства и O — окрестность нуля пространства B . Рассматривается совокупность $\Gamma(B, B')$ отображений $\gamma: B \rightarrow B'$ класса $C_\infty(O)$, для которых $\gamma(0) = 0$. Отображение $\gamma \in \Gamma(B, B')$ будет называться *локально обратимым*, если найдутся такие окрестности нуля $O \subset B$ и $O' \subset B'$, что $O' \subset \gamma(O)$, соответствие $O \rightarrow \gamma(O)$ взаимно однозначно и $\gamma^{-1}: O' \rightarrow B$ есть отображение класса $C_\infty(O')$. Из анализа известно, что отображение $\gamma \in \Gamma(B, B')$ локально обратимо, если производная $\partial\gamma(0)$ является линейным изоморфизмом пространств B и B' , т. е. линейное отображение $\partial\gamma(0): B \rightarrow B'$ является взаимно однозначным отображением B на B' и обратное отображение $(\partial\gamma(0))^{-1}: B' \rightarrow B$ непрерывно.

Пусть даны группы (B, φ) и (B', φ') . Отображение $\gamma \in \Gamma(B, B')$ называется **локальным гомоморфизмом** группы (B, φ) в (или на) группу (B', φ') , если $\gamma \circ \varphi = \varphi' \circ \gamma$, точнее, если существует такое число $\rho > 0$, что для всех $a, b \in O_\rho \subset B$ справедливо равенство

$$\gamma(\varphi(a, b)) = \varphi'(\gamma(a), \gamma(b)). \quad (3.1)$$

Равенство (3.1) означает, что гомоморфизм групп есть отображение, перестановочное с умножением.

Локальный гомоморфизм γ группы (B, φ) в группу (B', φ') называется **локальным изоморфизмом** группы (B, φ) на группу (B', φ') , если отображение γ локально обратимо. В этом случае говорят также, что группа (B', φ') локально изоморфна группе (B, φ) .

Замечание. Если даны группа (B, φ) и обратимое отображение $\gamma \in \Gamma(B, B)$, то можно определить новое отображение φ' , действующее по формуле

$$\varphi'(a, b) = \gamma^{-1}(\varphi(\gamma(a), \gamma(b))).$$

Легко проверяется, что φ' удовлетворяет аксиомам 1.1°—1.3°, т. е. является новым законом умножения. Сопоставление этой формулы с (3.1) показывает, что полученная этим построением группа (B, φ') локально изоморфна группе (B, φ) .

Локальный изоморфизм группы (B, φ) на (B, φ) называется **локальным автоморфизмом** этой группы. Очевидно, что множество всех локальных автоморфизмов, обозначаемое $\text{Aut}(B, \varphi)$, образует некоторую группу локальных преобразований пространства B , оставляющих неподвижным нулевой элемент этого пространства.

В дальнейшем для краткости прилагательное «локальный» опускается и, если это не вызывает недоразумений, говорится просто о гомоморфизме, об изоморфизме или автоморфизме групп (B, φ) .

Очевидно, что каждая группа (B, φ) изоморфна самой себе и что если группа (B', φ') изоморфна группе (B, φ) , то также группа (B, φ) изоморфна группе (B', φ') . Последнее следует из того, что равенство $\gamma \circ \varphi = \varphi' \circ \gamma$ в случае изоморфизма равносильно равенству $\gamma^{-1} \circ \varphi' = \varphi \circ \gamma^{-1}$. Далее, если γ — изоморфизм группы (B, φ) на группу (B', φ') и γ' — изоморфизм группы (B', φ') на группу (B'', φ'') , то $\gamma' \circ \gamma$ есть изоморфизм группы (B, φ) на группу (B'', φ'') . Это следует из равенств

$$\gamma' \circ \gamma \circ \varphi = \gamma' \circ \varphi' \circ \gamma = \varphi'' \circ \gamma' \circ \gamma.$$

Таким образом, отношение изоморфизма групп (B, φ) является теоретико-множественным признаком эквивалентности, в силу которого совокупность всех групп (B, φ) разбивается на непересекающиеся классы изоморфных групп. Класс групп, изоморфных группе (B, φ) , будет обозначаться $Q(B, \varphi)$.

Основной целью излагаемой ниже теории Ли является исчерпывающая характеристика класса $Q(B, \varphi)$ в терминах более простого понятия нормированной (банаховой) алгебры Ли и выделение в каждом данном классе простейшего канонического представителя, особенно удобного при изучении подгрупп, гомоморфизмов и автоморфизмов групп (B, φ) .

4. Уравнение и первая теорема Ли. Для данной группы (B, φ) вводится в рассмотрение *вспомогательное отображение* $A: B \rightarrow \mathcal{L}(B)$, действующее по формуле

$$A(a) = \partial_2 \varphi(a, 0). \quad (4.1)$$

Из аксиомы 1.1° следует, что $A(0) = I_B$ есть тождественное отображение пространства B . Поэтому для достаточно малого ρ и всех $a \in O_\rho$ линейное отображение $A(a) \in \mathcal{L}(B)$ является линейным гомеоморфизмом пространства B . Следовательно, для $a \in O_\rho$ существует обратное отображение $V(a) = (A(a))^{-1} \in \mathcal{L}(B)$, которое также может быть определено непосредственно формулой

$$V(a) = \partial_2 \varphi(a^{-1}, a). \quad (4.2)$$

Действительно, в силу 1.2° верно равенство $\varphi(a^{-1}, \varphi(a, b)) = b$, дифференцирование которого (по аргументу b в точке $b=0$) дает

$$\partial_2 \varphi(a^{-1}, \varphi(a, 0)) \circ \partial_2 \varphi(a, 0) = \partial_2 \varphi(a^{-1}, a) \circ A(a) = I_B.$$

Дифференцирование соотношения ассоциативности 1.2° по аргументу c в точке $c=0$ дает равенство

$$\partial_2 \varphi(\varphi(a, b), 0) = \partial_2 \varphi(a, b) \circ \partial_2 \varphi(b, 0),$$

которое в силу определения вспомогательных отображений A и V может быть переписано в виде

$$\partial_2 \varphi(a, b) = A(\varphi(a, b)) \circ V(b).$$

Это равенство, справедливое для всех $a, b \in O_\rho$, выражает тот факт, что частное отображение $\varphi_a: O_\rho \rightarrow B$, действующее по формуле $\varphi_a(b) = \varphi(a, b)$, является решением дифференциального уравнения (с начальным условием)

$$\partial \varphi(b) = A(\varphi) \circ V(b), \quad \varphi(0) = a. \quad (4.3)$$

Уравнение (4.3) называется **уравнением Ли**. Следующая **первая теорема Ли** устанавливает связь группы (B, φ) со свойством вполне интегрируемости уравнения (4.3).

Теорема. Если A и V суть вспомогательные отображения группы (B, φ) , то отображение $A(\varphi) \circ V(b) \in \mathcal{L}(B)$ вполне интегрируемо в окрестности нуля пространства B , т. е. существует такое $\rho > 0$, что уравнение (4.3) для любых $c, a \in O_\rho$ имеет решение ψ , удовлетворяющее условию $\psi(c) = a$.

Обратно, пусть дано отображение $A: O_r \rightarrow \mathcal{L}(B)$ класса $C_\infty(O_r)$, причем $A(0) = I_B$ и для любого $a \in O_r$ отображение $A(a)$ есть линейный гомеоморфизм пространства B на B , и пусть $V(a) = (A(a))^{-1}$. Тогда, если отображение $A(\varphi) \circ V(b)$ вполне интегрируемо в окрестности нуля пространства B , то решение $\varphi = \varphi_a$ задачи (4.3) определяет группу (B, φ) с законом умножения $\varphi(a, b) = \varphi_a(b)$ и для этой группы данное A является ее вспомогательным отображением (4.1).

Доказательство. (Прямое утверждение.) При фиксированных $a, c \in O_{r(3)}$ рассматривается отображение $\psi: O_{r(3)} \rightarrow B$, действующее по формуле $\psi(b) = \varphi(a, \varphi(c^{-1}, b))$ (символ $r(n)$ определен в п. 2 (β)). Тогда $\psi(c) = a$ и, в силу (4.3) и ассоциативности композиции линейных отображений,

$$\begin{aligned} \partial\psi(b) &= \partial_2\varphi(a, \varphi(c^{-1}, b)) \circ \partial_2\varphi(c^{-1}, b) = \\ &= A(\psi) \circ V(\varphi(c^{-1}, b)) \circ A(\varphi(c^{-1}, b)) \circ V(b) = A(\psi) \circ V(b). \end{aligned}$$

Следовательно, ψ есть решение уравнения (4.3), удовлетворяющее для любых $c, a \in O_{r(3)}$ начальному условию $\psi(c) = a$, а это и означает, что отображение $A(\varphi) \circ V(b)$ вполне интегрируемо.

(Обратное утверждение.) Пусть φ_a есть решение задачи (4.3) и $\varphi(a, b) = \varphi_a(b)$. Тогда $\varphi(a, 0) = a$ в силу начального условия (4.3). Кроме того, при $a = 0$ единственным решением задачи (4.3) является $\varphi_0(b) = b$, откуда $\varphi(0, b) = b$. Этим доказано выполнение аксиомы 1.1°. Далее, пусть $x = \varphi(a, b)$, $y = \varphi(b, c)$, $u = \varphi(x, c)$, $v = \varphi(a, y)$. По построению для отображений $c \rightarrow u(c) = \varphi_x(c)$, $c \rightarrow v(c) = \varphi_a \circ \varphi_b(c)$ справедливы равенства

$$\partial u(c) = \partial_2\varphi(x, c) = A(u) \circ V(c), \quad u(0) = x;$$

$$\begin{aligned} \partial v(c) &= \partial_2\varphi(a, y) \circ \partial_2\varphi(b, c) = A(v) \circ V(y) \circ A(y) \circ V(c) = \\ &= A(v) \circ V(c), \quad v(0) = \varphi(a, b) = x. \end{aligned}$$

Следовательно, оба отображения u и v являются решениями одной и той же задачи (4.3) (с начальным значением x вместо a) и в силу единственности ее решения совпадают. Но равенство $u(c) = v(c)$ равносильно $\varphi(\varphi(a, b), c) = \varphi(a, \varphi(b, c))$, чем доказано выполнение аксиомы 1.2°. Наконец, аксиома 1.3° также выполнена, ибо из предположений теоремы следует, что правая часть уравнения (4.3) бесконечно дифференцируема, а тогда решение задачи (4.3) тоже бесконечно дифференцируемо в окрестности нуля пространства B . Этот факт известен из анализа. Справедливость последнего утверждения теоремы следует непосредственно из уравнения (4.3) при $b = 0$, так как $V(0) = I_B$. ■

С л е д с т в и е. Группа (B, φ) однозначно определена заданием вспомогательного отображения A , удовлетворяющего перечисленным в формулировке теоремы условиям.

З а м е ч а н и е. Излагаемая здесь и ниже теория Ли групп (B, φ) основана на использовании вспомогательного отображения $A(a) = \partial_2 \varphi(a, 0)$, описывающего так называемую «правую структуру» группы (B, φ) . Наряду с этим можно развить теорию «левой структуры», положив в основу вспомогательное отображение $A^*(a) = \partial_1 \varphi(0, a)$. Обе эти теории приводят к одинаковым результатам.

П р и м е р. Для группы (B, φ) , приведенной в примере 12.2, вспомогательные отображения таковы:

$$A(a) = (1 + l\langle a \rangle) I_B, \quad V(a) = (1 + l\langle a \rangle)^{-1} I_B.$$

Уравнение Ли (4.3) имеет вид

$$\partial \varphi(b) = (1 + l\langle \varphi \rangle)(1 + l\langle b \rangle)^{-1} I_B.$$

5. Каноническое умножение. Рассматриваются функции $g: \Delta \rightarrow B$ класса $C_\infty(\Delta)$, определенные на интервалах вещественной оси $\Delta = (-\alpha, \alpha)$ и действующие по формуле $t \rightarrow g(t)$, причем $g(0) = 0$. Образ $g(\Delta) \subset B$ есть некоторая гладкая кривая в B , в частности, существует вектор $p = dg(0) \in B$, касательный к этой кривой в нуле пространства B .

Кривая $g(\Delta) \subset B$ называется *однопараметрической подгруппой* группы (B, φ) , если $dg(0) \neq 0$ и если для любых t, s , $t + s \in \Delta$ справедливо равенство

$$\varphi(g(t), g(s)) = g(t + s). \quad (5.1)$$

Вектор $p = dg(0)$ называется *направляющим вектором* однопараметрической подгруппы $g(\Delta)$.

Задача об отыскании однопараметрических подгрупп данной группы (B, φ) состоит в отыскании решений g функционального уравнения (5.1) при заданном отображении φ . Оказывается, что это уравнение равносильно некоторому дифференциальному уравнению.

Т е о р е м а. Если A — вспомогательное отображение [4.1] группы (B, φ) , то любая однопараметрическая подгруппа $g(\Delta)$ с направляющим вектором p удовлетворяет дифференциальному уравнению с начальным условием

$$\partial g = A(g)\langle p \rangle, \quad g(0) = 0. \quad (5.2)$$

Обратно, каков бы ни был ненулевой вектор $p \in B$, решение $t \rightarrow g(t)$ задачи (5.2) дает однопараметрическую подгруппу группы (B, φ) с направляющим вектором p .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцирование равенства (5.1) по s в точке $s = 0$ дает (5.2) в силу определения (4.1). Обратно, если g есть решение задачи (5.2), то в силу уравнения Ли (4.3) и урав-

нений (5.2) функции $s \rightarrow u(s) = \varphi(g(t), g(s))$ и $s \rightarrow v(s) = g(t+s)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}\partial u(s) &= \partial_2 \varphi(g(t), g(s)) \langle \partial g(s) \rangle = A(u) \circ V(g(s)) \circ A(g(s)) \langle p \rangle = \\ &= A(u) \langle p \rangle, \quad u(0) = g(t); \\ \partial v(s) &= A(v) \langle p \rangle, \quad v(0) = g(t).\end{aligned}$$

Следовательно, для каждого фиксированного t функции u и v являются решениями одного и того же дифференциального уравнения (5.2) с одинаковым начальным значением $g(t)$. В силу теоремы единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, эти решения совпадают, что и дает равенство (5.1). Наконец, так как $A(0) = I_B$, то из (5.2) при $t=0$ следует равенство $\partial g(0) = p$. ■

Наиболее простое строение имеют те однопараметрические подгруппы, для которых $g(\Delta)$ есть прямая в B , т. е. когда $g(t) = tp$. В общем случае для группы (B, φ) среди прямых вида tp однопараметрических подгрупп нет — все они существенно «кривые». Противоположный случай выделяется следующим определением.

Группа (B, ω) называется канонической, если любая прямая $g(t) = tp$ является ее однопараметрической подгруппой. Закон умножения ω в канонической группе называется каноническим умножением.

Свойство каноничности умножения ω выражается соотношением

$$\omega(tp, sp) = (t+s)p. \quad (5.3)$$

К р и т е р и й к а н о н и ч н о с т и. *Группа (B, ω) является канонической, если и только если ее вспомогательные отображения A и V для всех $a \in O_p$ удовлетворяют соотношениям*

$$A(a) \langle a \rangle = a, \quad V(a) \langle a \rangle = a. \quad (5.4)$$

Доказательство. Если группа (B, ω) каноническая, то из (5.3) следует, что $\partial_s \omega(ta, sa)|_{s=0} = a$. С другой стороны, в силу уравнения Ли (4.3)

$$\partial_s \omega(ta, sa)|_{s=0} = \partial_2 \omega(ta, 0) \langle a \rangle = A(ta) \langle a \rangle.$$

Сравнение этих двух выражений при $t=1$ дает соотношение (5.4) для A , а значит, и для V . Обратно, пусть (5.4) выполнено. Тогда для любого $p \in B$ отображение $(t, p) \rightarrow tp$ таково, что $(tp)|_{t=0} = 0$ и

$$\partial_t (tp) = p = A(tp) \langle p \rangle.$$

Тем самым отображение $t \rightarrow tp$ является решением задачи (5.2). В силу теоремы 12.5 это отображение дает однопараметрическую подгруппу. Следовательно, выполнено условие из определения канонической группы. ■

6. Канонический изоморфизм. Один из фундаментальных результатов теории Ли заключается в том, что в каждом классе изоморфных групп $Q(B, \varphi)$ содержится канонический представитель (B, ω) .

Теорема. Для любой группы (B, φ) существует ее изоморфизм κ на некоторую каноническую группу (B, ω) , удовлетворяющий условию $\partial\kappa(0) = I_B$.

Доказательство. С целью построения искомого изоморфизма рассматривается зависимость решения задачи (5.2) от вектора $p \in B$, как от параметра. Это приводит к отображению $(t, p) \rightarrow g(t, p)$ некоторой окрестности нуля $U \subset R \times B \rightarrow B$. Утверждается, что на самом деле при этом отображении образ зависит только от произведения tp . Действительно, для достаточно малого $|\lambda - 1|$, где $\lambda \in R$, преобразование $t \rightarrow t/\lambda$, $p \rightarrow \lambda p$, $g \rightarrow g$ не меняет уравнений задачи (5.2) (задача (5.2) допускает это преобразование!). Поэтому отображение $(t, p) \rightarrow g(t/\lambda, \lambda p)$ является ее решением при любом λ и в силу единственности решения совпадает с отображением $(t, p) \rightarrow g(t, p)$. Отсюда следует, что найдется такое $\rho > 0$, что образ $g(t, p)$ определен для всех $p \in O_\rho$ и $t \in (-\alpha, \alpha)$, где $\alpha > 1$. Тогда в соотношении $g(t, p) = g(t/\lambda, \lambda p)$ можно положить $\lambda = t$, что дает представление решения в виде $g(t, p) = g(1, tp)$. Тем самым возникает отображение $\kappa: O_\rho \rightarrow B$, определенное формулой

$$\kappa(p) = g(1, p). \quad (6.1)$$

Утверждается, что κ обладает свойствами, требуемыми от изоморфизма в определении 12.3, т. е. что $\kappa \in \Gamma(B, B)$ и локально обратимо. Прежде всего, если $p = 0$, то единственное решение задачи (5.2) есть $g = 0$; а тогда из (6.1) следует, что $\kappa(0) = 0$. Далее, правая часть уравнения (5.2) является отображением класса $C_\infty(O_\rho \times O_\rho)$, в силу чего решение $(t, p) \rightarrow g(t, p)$, как это известно из теории дифференциальных уравнений, есть отображение класса $C_\infty(\Delta \times O_\rho)$. Поэтому $\kappa \in \Gamma(B, B)$. Для доказательства обратимости κ рассматривается производная $\partial\kappa(tp)\langle h \rangle = \partial_2 g(t, p)\langle h \rangle$ с произвольным вектором $h \in B$, которая может быть найдена как решение «уравнений в вариациях» для задачи (5.2), а именно, уравнений

$$\begin{aligned} \partial_t(\partial_2 g(t, p)\langle h \rangle) &= \partial A(g)\langle \partial_2 g(t, p)\langle h \rangle, p \rangle + A(g)\langle h \rangle, \\ \partial_2 g(0, p)\langle h \rangle &= 0. \end{aligned}$$

В точке $p = 0$ эти уравнения принимают вид

$$\partial_t(\partial_2 g(t, 0)) = I_B, \quad \partial_2 g(0, 0) = 0$$

и имеют единственное решение $\partial_2 g(t, 0) = tI_B$. Поэтому формула (6.1) дает $\partial x(0) = I_B$. Как было отмечено в начале п. 3, отсюда следует обратимость отображения x .

В силу замечания 12.3 группа (B, ω) , закон умножения в которой определен формулой

$$\omega(p, q) = x^{-1}(\varphi(x(p), x(q))), \quad (6.2)$$

изоморфна исходной группе (B, φ) . Утверждается, что (B, ω) — каноническая группа. Действительно, по построению для $p \in O_p$ образ интервала Δ при отображении $x(tp) = g(t, p)$ есть однопараметрическая подгруппа в группе (B, φ) с направляющим вектором p . Поэтому в силу определения 12.5 справедливы равенства

$$\begin{aligned} \omega(tp, sp) &= x^{-1}(\varphi(g(t, p), g(s, p))) = \\ &= x^{-1}(g(t + s, p)) = x^{-1}(x((t + s)p)) = (t + s)p, \end{aligned}$$

т. е. умножение ω является каноническим. ■

Изоморфизм x группы (B, φ) на каноническую группу (B, ω) , удовлетворяющий условию $\partial x(0) = I_B$, называется каноническим изоморфизмом группы (B, φ) .

Следствие. Для любой группы (B, φ) существует такая окрестность $O_p \subset B$, что для каждого $a \in O_p$ имеется одна и только одна однопараметрическая подгруппа, лежащая в O_p и содержащая элемент a .

Доказательство. Для канонической группы утверждение очевидно. Для любой группы (B, φ) его справедливость следует из доказанной теоремы и из того, что при изоморфизме однопараметрические подгруппы переходят в однопараметрические подгруппы. ■

Этот факт означает, что элементы всевозможных однопараметрических подгрупп группы (B, φ) заполняют некоторую окрестность нуля пространства B . Иногда его выражают, говоря, что группа (B, φ) «соткана» из своих однопараметрических подгрупп.

П р и м е р. Группа из примера 12.2 не является канонической. Для построения ее канонического изоморфизма надо решить соответствующее уравнение (5.2), которое, согласно примеру 12.4, имеет вид

$$\partial_t g = (1 + l\langle g \rangle)p, \quad g(0) = 0.$$

Решение этой задачи есть

$$g(t, p) = (l\langle p \rangle)^{-1}(\exp(l\langle tp \rangle) - 1)p.$$

Искомый канонический изоморфизм получается по формуле (6.1)

$$x(p) = (l\langle p \rangle)^{-1}(\exp(l\langle p \rangle) - 1)p.$$

Для построения закона умножения в соответствующей канонической группе надо еще найти обратное отображение κ^{-1} , т. е. решить относительно вектора $p \in B$ уравнение $\kappa(p) = a$. Это решение таково:

$$p = \kappa^{-1}(a) = (l\langle a \rangle)^{-1} (\ln(1 + l\langle a \rangle)) a.$$

Теперь канонический закон умножения получается по формуле (6.2) и после небольших преобразований оказывается таким:

$$\omega(p, q) = \frac{\exp(l\langle p \rangle) - 1}{\exp(l\langle p + q \rangle) - 1} \cdot \frac{l\langle p + q \rangle}{l\langle p \rangle l\langle q \rangle} (pl\langle q \rangle - ql\langle p \rangle) + \frac{l\langle p + q \rangle}{l\langle q \rangle} q.$$

Здесь легко проверяется свойство (5.3) каноничности умножения ω .

7. Гомоморфизмы канонических групп. Определенные в п. 3 гомоморфизмы групп (B, φ) являются локальными отображениями. Существенным свойством канонических групп является то, что для них любой гомоморфизм продолжается до глобального отображения соответствующих банаховых пространств.

Теорема. Если обе группы (B, ω) и (B', ω') канонические, то любой локальный гомоморфизм γ группы (B, ω) в группу (B', ω') может быть продолжен до линейного отображения $\gamma: B \rightarrow B'$.

Доказательство. В силу равенства (3.1) и каноничности группы для любого $a \in B$ с достаточно малой нормой

$$\gamma(\omega(a, a)) = \gamma(2a) = \omega'(\gamma(a), \gamma(a)) = 2\gamma(a),$$

т. е. $\gamma(2a) = 2\gamma(a)$. Аналогично доказывается, что для любого целого n справедливо равенство $\gamma(na) = n\gamma(a)$ (индукция по n).

Далее, если $mb = a$, то $m\gamma(b) = \gamma(a)$ или $\gamma\left(\frac{1}{m}a\right) = \frac{1}{m}\gamma(a)$. Поэтому для любых целых m, n

$$\gamma\left(\frac{n}{m}a\right) = \frac{n}{m}\gamma(a).$$

Таким образом, равенство $\gamma(\lambda a) = \lambda\gamma(a)$ выполнено для $a \in O_p$ и для любого рационального λ , $|\lambda| < 1$. В силу непрерывности отображения γ на O_p это равенство верно для любого $\lambda \in (-1, 1)$. Так как γ непрерывно дифференцируемо на O_p и $\gamma(0) = 0$, то справедливы равенства

$$\partial\gamma(0)\langle a \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}(\gamma(ta) - \gamma(0)) = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}(t\gamma(a)) = \gamma(a).$$

Итак, на O_p гомоморфизм γ совпадает с линейным отображением $\partial\gamma(0): B \rightarrow B'$, которое ограничено в некоторой окрестности нуля пространства B . Поэтому можно положить $\gamma(a) = \partial\gamma(0)\langle a \rangle$ для всех $a \in B$. ■

Из этой теоремы вытекают важные следствия. Прежде всего, она дает существенное дополнение к теореме 12.6.

Следствие 1. *Существует только один канонический изоморфизм χ группы (B, φ) .*

Доказательство. Пусть $\chi: B \rightarrow B$ есть канонический изоморфизм группы (B, φ) на каноническую группу (B, ω) , построенный в теореме 12.6. Если $\chi': B \rightarrow B$ — другой канонический изоморфизм группы (B, φ) на каноническую группу (B, ω') , то $\gamma = \chi' \circ \chi^{-1}$ есть изоморфизм группы (B, ω) на группу (B, ω') . В силу только что доказанной теоремы γ есть линейное отображение B на B . Поэтому из равенства $\chi' = \gamma \circ \chi$ следует равенство $\partial \chi'(0) = \gamma \circ \partial \chi(0)$, откуда $\gamma = I_B$ и $\chi' = \chi$. ■

Кроме того, можно дать описание всех канонических представителей данного класса изоморфных групп.

Следствие 2. *В каждом классе изоморфных групп $Q(B, \varphi)$ имеется один и, с точностью до линейного изоморфизма, только один канонический представитель.*

Доказательство. Любые два канонических представителя связаны изоморфизмом, который в силу только что доказанной теоремы линеен. ■

В дополнение к этому следствию полезно отметить, что любой линейный изоморфизм канонической группы всегда отображает ее на каноническую группу.

8. Вторая теорема Ли. Эта теорема фактически является просто специализацией известной из анализа *теоремы Фробениуса о вполне интегрируемости* отображения $f: X \times Y \rightarrow \mathcal{L}(X; Y)$, т. е. об условии существования при любых начальных данных (x_0, y_0) решения следующей задачи о восстановлении отображения $u: X \rightarrow Y$, действующего по формуле $y = u(x)$:

$$\partial u(x) = f(x, y), \quad u(x_0) = y_0.$$

Это условие заключается в том, чтобы для любой точки $(x, y) \in X \times Y$ билинейное отображение

$$(h, k) \rightarrow \partial_1 f(x, y) \langle h, k \rangle + \partial_2 f(x, y) \langle f(x, y) \langle h \rangle, k \rangle \quad (8.1)$$

было симметричным. Здесь $h, k \in X$ — произвольные векторы.

Теорема. Если A и V — вспомогательные функции группы (B, φ) и $O_p \subset B$, то линейное отображение $A(\varphi) \circ V(b): B \rightarrow B$ вполне интегрируемо на $O_p \times O_p$, если и только если существует билинейное отображение $C \in \mathcal{L}^2(B; B)$, с которым для любых $a \in O_p$ и $h, k \in B$ выполнено соотношение

$$\partial V(a) \langle h, k \rangle - \partial V(a) \langle k, h \rangle = C \langle V(a) \langle k \rangle, V(a) \langle h \rangle \rangle, \quad (8.2)$$

или ему равносильное соотношение

$$\partial A(a) \langle A(a) \langle k \rangle, h \rangle - \partial A(a) \langle A(a) \langle h \rangle, k \rangle = A(a) \langle C \langle k, h \rangle \rangle. \quad (8.3)$$

Доказательство. В силу теоремы Фробениуса дело сводится к преобразованию условия (8.1) применительно к отображению $(b, \varphi) \rightarrow f(b, \varphi)$, действующему по формуле $f(b, \varphi) = A(\varphi) \circ V(b)$. При этом надо учесть, что

$$\partial_1 f \langle h, k \rangle = A \langle \partial V \langle h, k \rangle \rangle, \quad \partial_2 f \langle h, k \rangle = \partial A \langle h, V \langle k \rangle \rangle.$$

Поэтому билинейное отображение (8.1) здесь таково:

$$(h, k) \rightarrow A(\varphi) \langle \partial V(b) \langle h, k \rangle \rangle + \partial A(\varphi) \langle A(\varphi) \langle h \rangle, V(b) \langle k \rangle \rangle.$$

Дифференцирование тождества $A(\varphi) \circ V(\varphi) \langle k \rangle = k$ дает соотношение

$$\partial A(\varphi) \langle h, k \rangle = -A(\varphi) \langle \partial V(\varphi) \langle h, A(\varphi) \langle k \rangle \rangle \rangle,$$

в силу которого симметричность предыдущего билинейного отображения равносильна симметричности следующего:

$$(h, k) \rightarrow \partial V(b) \langle h, k \rangle - \partial V(\varphi) \langle A(\varphi) \circ V(b) \langle h \rangle, A(\varphi) \circ V(b) \langle k \rangle \rangle.$$

Так как вместе с вектором (h, k) произволен и вектор $(A(b) \langle h \rangle, A(b) \langle k \rangle)$, то последнее билинейное отображение можно заменить таким:

$$(h, k) \rightarrow \partial V(b) \langle A(b) \langle h \rangle, A(b) \langle k \rangle \rangle - \partial V(\varphi) \langle A(\varphi) \langle h \rangle, A(\varphi) \langle k \rangle \rangle.$$

Симметричность этого билинейного отображения равносильна равенству

$$\begin{aligned} \partial V(b) \langle A(b) \langle h \rangle, A(b) \langle k \rangle \rangle - \partial V(b) \langle A(b) \langle k \rangle, A(b) \langle h \rangle \rangle = \\ = \partial V(\varphi) \langle A(\varphi) \langle h \rangle, A(\varphi) \langle k \rangle \rangle - \partial V(\varphi) \langle A(\varphi) \langle k \rangle, A(\varphi) \langle h \rangle \rangle, \end{aligned}$$

которое должно выполняться для любой точки $(b, \varphi) \in O_p \times O_p$. В частности, здесь можно положить $\varphi = 0$. Тогда в правой части возникает билинейное отображение $C: B \times B \rightarrow B$

$$C \langle k, h \rangle = \partial V(0) \langle h, k \rangle - \partial V(0) \langle k, h \rangle, \quad (8.4)$$

с которым предыдущее равенство после замены (h, k) на $(V(b) \langle h \rangle, V(b) \langle k \rangle)$ и b на a примет в точности вид (8.2). Соотношение (8.3) получается из (8.2) с помощью формулы $\partial V(a) \langle h, k \rangle = -V(a) \langle \partial A(a) \langle h \rangle, V(a) \langle k \rangle \rangle$, выводимой дифференцированием тождества $A(a) \circ V(a) = I_B$. ■

Уравнение (8.2) или (8.3) называется **уравнением Маурера—Картана**.

9. Структурный оператор. Билинейное отображение C , определенное формулой (8.9), называется **структурным оператором группы** (B, φ) .

Так как $\partial V(0) = -\partial A(0)$, то формула (8.4) равносильна формуле

$$C \langle k, h \rangle = \partial A(0) \langle k, h \rangle - \partial A(0) \langle h, k \rangle. \quad (9.1)$$

Согласно теореме 12.8 каждой группе (B, φ) однозначно соответствует ее структурный оператор C . Оказывается, что и, наоборот, каждому наперед заданному билинейному отображению $C: B \times B \rightarrow B$, удовлетворяющему некоторым условиям, можно сопоставить группу (B, φ) , для которой заданное C является ее структурным оператором. Этот факт составляет содержание третьей теоремы Ли, которая подразделяется на «прямую» и «обратную» теоремы. Следующая прямая третья теорема Ли выясняет необходимые свойства структурного оператора.

Теорема. Структурный оператор C группы (B, φ) обладает следующими свойствами (здесь h, k, l — произвольные векторы из B):

1°. C есть билинейное отображение $B \times B \rightarrow B$.

2°. Отображение C антисимметрично

$$C\langle h, k \rangle = -C\langle k, h \rangle.$$

3°. Отображение C удовлетворяет соотношению Якоби

$$C\langle C\langle h, k \rangle, l \rangle + C\langle C\langle k, l \rangle, h \rangle + C\langle C\langle l, h \rangle, k \rangle = 0.$$

4°. Отображение C ограничено, т. е. существует такое число $\delta > 0$, с которым

$$|C\langle h, k \rangle| \leq \delta |h| |k|.$$

Доказательство. Свойства 1° и 2° следуют из определения (8.4). Соотношение 3° выводится путем дифференцирования (8.2) в точке $a=0$, в результате чего с учетом свойства 2° получается равенство

$$\partial^2 V\langle l, h, k \rangle - \partial^2 V\langle l, k, h \rangle = C\langle \partial V\langle l, k \rangle, h \rangle - C\langle \partial V\langle l, h \rangle, k \rangle.$$

Здесь надо сделать два раза круговую перестановку $h \rightarrow k \rightarrow l \rightarrow h$ и все три равенства сложить. С учетом свойства симметричности второй производной, которое для трилинейного отображения $\partial^2 V: B^3 \rightarrow B$ записывается в виде равенства

$$\partial^2 V\langle l, h, k \rangle = \partial^2 V\langle h, l, k \rangle,$$

в левой части сумма будет равна нулю. В правой части после использования определения (8.4) получится в точности выражение, входящее в 3°. Наконец, свойство 4° вытекает из того, что производная $\partial V \in C_\infty(O_p)$, в силу чего $\partial V(0)$ есть непрерывное билинейное отображение $B \times B \rightarrow B$. Поэтому в 4° можно взять $\delta = 2|\partial V(0)|$. ■

Пример. Структурный оператор группы (B, φ) из примера 12.2, 12.4, вычисленный по формуле (9.1), оказывается таким:

$$C\langle h, k \rangle = l\langle k \rangle h - l\langle h \rangle k.$$

10. Банахова алгебра Ли. Отображение $C: B \times B \rightarrow B$ со свойствами 9.1°—9.3° наделяет пространство B структурой алгебры Ли, коммутатор в которой определен формулой

$$[h, k] = C\langle h, k \rangle. \quad (10.1)$$

Хотя этот факт будет строго установлен лишь в следующем параграфе, уже здесь можно отметить полное согласование свойств 9.1°—9.3° отображения C со свойствами коммутатора векторных полей, отмеченными в 7.3. Более того, на пространстве B можно рассмотреть семейство векторных полей $\{\xi_h\}$, где каждое векторное поле ξ_h определяется заданием вектора $h \in B$ и действует по формуле $\xi_h(a) = A(a)\langle h \rangle$. Тогда семейство $\{\xi_h\}$ образует алгебру Ли векторных полей на пространстве B в точном определении 7.4, так как равенство (8.3) равносильно равенству $[\xi_h, \xi_k] = \xi_{C\langle h, k \rangle}$.

Дополнительное свойство 9.4° означает, что эта алгебра Ли является нормированной. В связи с этими замечаниями в дальнейшем банахово пространство B с отображением $C: B \times B \rightarrow B$, обладающим свойствами 9.1°—9.4°, будет называться *банаховой алгеброй Ли* и обозначаться символом (B, C) .

Можно сказать, что в силу прямой третьей теоремы Ли каждой группе (B, φ) по формулам (8.4) или (9.1) сопоставляется банахова алгебра Ли (B, C) . Естественно возникает вопрос о том, каким образом это соответствие распространяется на класс изоморфных групп $Q(B, \varphi)$. С этой целью надо выяснить, как меняется структурный оператор при изоморфизме групп.

Лемма. При изоморфизме γ группы (B, φ) на группу (B', φ') структурные операторы этих групп связаны соотношением

$$C'\langle \partial\gamma(0)\langle h \rangle, \partial\gamma(0)\langle k \rangle \rangle = \partial\gamma(0)\langle C\langle h, k \rangle \rangle. \quad (10.2)$$

Доказательство. Дифференцирование равенства (3.1) по аргументу b в точке $b=0$ и использование определения (4.1) дает равенство

$$A'(\gamma(a))\langle \partial\gamma(0)\langle k \rangle \rangle = \partial\gamma(a)\langle A(a)\langle k \rangle \rangle$$

с любым вектором $k \in B$. Дифференцирование этого равенства по a в точке $a=0$ с вектором $h \in B$ приводит к соотношению

$$\partial A'(0)\langle \partial\gamma(0)\langle h \rangle, \partial\gamma(0)\langle k \rangle \rangle = \partial^2\gamma(0)\langle h, k \rangle + \partial\gamma(0)\langle \partial A(0)\langle h, k \rangle \rangle.$$

Отсюда в результате перестановки векторов h, k , почленного вычитания, использования симметричности второй производной $\partial^2\gamma(0)$ и определения (9.1) получается (10.2). ■

Следствие 1. Канонический изоморфизм группы (B, φ) сохраняет ее структурный оператор.

Доказательство. Этот факт следует из определения 12.6 и формулы (10.2). ■

Банахова алгебра Ли (B', C') называется *изоморфной* банаховой алгебре Ли (B, C) , если существует обратимое линейное отображение u пространства B на пространство B' , с которым справедлива формула $C' \circ u = u \circ C$ или, точнее, для любых векторов $h, k \in B$

$$C' \langle u \langle h \rangle, u \langle k \rangle \rangle = u \langle C \langle h, k \rangle \rangle. \quad (10.3)$$

Очевидно, что отношение изоморфизма разбирает множество всех банаховых алгебр Ли на непересекающиеся классы изоморфных банаховых алгебр Ли. Класс, содержащий данную банахову алгебру Ли (B, C) , будет обозначаться символом $Q(B, C)$.

Следствие 2. *Существует отображение множества $\{Q(B, \varphi)\}$ классов $Q(B, \varphi)$ изоморфных групп в множество $\{Q(B, C)\}$ классов $Q(B, C)$ банаховых алгебр Ли.*

Доказательство. Этот факт следует из леммы и определения (10.3). ■

В третьей обратной теореме Ли будет доказано, что упомянутое в следствии 2 отображение является взаимно однозначным отображением на.

Следствие 3. *Изоморфизм γ канонической группы (B, ω) на каноническую группу (B', ω') является одновременно изоморфизмом соответствующих банаховых алгебр Ли (B, C) и (B', C') .*

Доказательство. Согласно теореме 12.7 изоморфизм γ есть обратимое линейное отображение $B \rightarrow B'$. Поэтому утверждение справедливо в силу леммы и определения (10.3). ■

11. Определенность группы ее структурным оператором. Если дан структурный оператор, т. е. отображение $C: B \times B \rightarrow B$ со свойствами 9.1°—9.4°, то для восстановления группы (B, φ) достаточно найти вспомогательное отображение A как решение уравнения Маурера—Картана (8.3) с данным C . Действительно, тогда с полученным A и ему соответствующим V отображение $A(\varphi) \circ V(b)$ будет вполне интегрируемо (теорема 12.8) и закон умножения φ получится как единственное решение уравнения Ли (4.3). При этом в общем случае решение уравнения (8.3) не единственно. Иначе обстоит дело для канонических групп.

Лемма. *В случае канонической группы (B, ω) вспомогательное отображение $A: O_p \rightarrow \mathcal{L}(B)$ определено структурным оператором этой группы единственным образом.*

Доказательство. Рассматривается отображение $(t, a) \rightarrow tV(ta)$ и для произвольно фиксированного $h \in B$ полагается $w(t) = tV(ta) \langle h \rangle$. Дифференцирование функции w по t дает выражение

$$\partial_t w = t \partial V(ta) \langle a, h \rangle + V(ta) \langle h \rangle.$$

С другой стороны, в силу критерия каноничности 12.5 справедливо равенство $a = V(ta) \langle a \rangle$, дифференцирование которого по a на векторе h приводит к равенству

$$h = t \partial V(ta) \langle h, a \rangle + V(ta) \langle h \rangle.$$

В результате почленного вычитания этого равенства из предыдущего и использования уравнения (8.2) получается уравнение

$$\partial_i w - h = tC \langle V(ta) \langle h \rangle, V(ta) \langle a \rangle \rangle,$$

которое в силу билинейности C , определения w и соотношения $V(ta) \langle a \rangle = a$ равносильно следующему:

$$\partial_i w = h + C \langle w, a \rangle, \quad w(0) = 0. \quad (11.1)$$

При фиксированных $a, h \in B$ это есть линейное обыкновенное дифференциальное уравнение (с начальным условием), которому удовлетворяет отображение $w: R \rightarrow B$. Так как его правая часть, как отображение $(t, w): R \times B \rightarrow B$, есть отображение класса $C_\infty(R \times B)$, то в силу известной теоремы существования и единственности решения обыкновенных дифференциальных уравнений отображение $w: R \rightarrow B$ однозначно определено заданием структурного оператора C . Следовательно, однозначно определены также $V(a) \langle h \rangle = w(1)$, $V(a)$ и $A(a) = (V(a))^{-1}$. ■

Дифференциальное уравнение (11.1) имеет принципиальное значение в теории Ли, так как оно служит основой алгоритма построения группы по ее структурному оператору.

12. Третья теорема Ли. Прямая третья теорема Ли уже доказана как теорема 12.9. Поэтому здесь формулируется и доказывается только обратная третья теорема Ли.

Т е о р е м а. Каждому отображению $C: B \times B \rightarrow B$, удовлетворяющему условиям 9.1°—9.4°, соответствует группа (B, φ) , для которой данное отображение C является ее структурным оператором.

Д о к а з а т е л с т в о. *Программа.* Группа (B, φ) строится в три этапа. Первый состоит в решении задачи (11.1). Ее решение является функцией $w = W(t, a, h)$ в силу зависимости от параметров a, h , входящих в уравнение (11.1). Устанавливается, что отображение $(a, h) \rightarrow W(1, a, h)$ линейно по h и потому порождает отображение $V: B \rightarrow \mathcal{L}(B)$. Доказывается, что так построенное V удовлетворяет уравнению Маурера—Картана (8.2) с данным C и что $V(0) = I_B$. Вторым этапом состоит в построении отображения A , причем $A(a) = (V(a))^{-1}$. Третий этап заключается в решении уравнения Ли (4.3) с полученными A и V . В силу теорем 12.4 и 12.8 это и дает искомую группу (B, φ) .

Д е т а л и. В силу известной теоремы о непрерывной зависимости решения обыкновенного дифференциального уравнения от параметров, входящих в правую часть, решение задачи (11.1) как отоб-

ражение $(t, a, h) \rightarrow W(t, a, h)$ во всяком случае принадлежит классу $C_\infty(R \times B \times B)$. При фиксированных t и a отображение W линейно по h : аддитивность и однородность следуют из линейности задачи (11.1) по w и h , а непрерывность — из непрерывной зависимости решения от h .

Следующее свойство отображения W состоит в том, что вектор $t^{-1}W(t, a, h)$ на самом деле зависит только от двух «переменных»: произведения ta и h . Действительно, преобразование $t \rightarrow t/\lambda$, $a \rightarrow \lambda a$, $w \rightarrow w/\lambda$ не меняет уравнений задачи (11.1), в силу чего вместе с $W(t, a, h)$ ее решением является также и $\lambda W(t/\lambda, \lambda a, h)$ при любом $\lambda \in R$. В силу единственности решения справедливо равенство $W(t, a, h) = \lambda W(t/\lambda, \lambda a, h)$, откуда при $\lambda = t$ получается соотношение $W(t, a, h) = tW(1, ta, h)$. Поэтому можно положить

$$W(t, a, h) = tV(ta)\langle h \rangle. \quad (12.1)$$

Этой формулой определено отображение $V: B \rightarrow \mathcal{L}(B)$ класса $C_\infty(B)$.

Для доказательства того, что построенное отображение V удовлетворяет уравнению Маурера—Картана (8.2), вводится в рассмотрение функция $z: R \rightarrow B$, зависящая от пары векторов $h, k \in B$ и заданная формулой

$$z(t) = \partial V(ta)\langle h, k \rangle - \partial V(ta)\langle k, h \rangle - C\langle V(ta)\langle k \rangle, V(ta)\langle h \rangle \rangle.$$

Производная по t этой функции равна

$$\begin{aligned} \partial_t z &= \partial^2 V(ta)\langle a, h, k \rangle - \partial^2 V(ta)\langle a, k, h \rangle - \\ &- C\langle \partial V(ta)\langle a, k \rangle, V(ta)\langle h \rangle \rangle - C\langle V(ta)\langle k \rangle, \partial V(ta)\langle a, h \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Входящие сюда значения производных ∂V и $\partial^2 V$ исключаются с помощью тождеств, первое из которых получается подстановкой выражения (12.1) в уравнение (11.1):

$$t \partial V(ta)\langle a, h \rangle = h - V(ta)\langle h \rangle + tC\langle V(ta)\langle h \rangle, a \rangle,$$

а второе — дифференцированием первого по a :

$$\begin{aligned} t \partial^2 V(ta)\langle k, a, h \rangle &= \\ &= -2\partial V(ta)\langle k, h \rangle + C\langle V(ta)\langle h \rangle, k \rangle + tC\langle \partial V(ta)\langle k, h \rangle, a \rangle. \end{aligned}$$

В результате этого исключения, а также использования определения функции z и свойства 9.2° отображения C , возникает выражение для вектора $t\partial_t z + 2z - tC\langle z, a \rangle$, в котором правая часть равна нулю в силу свойства 12.9.3° отображения C . Тем самым для z получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$t\partial_t z + 2z = tC\langle z, a \rangle,$$

которое после упрощения подстановкой $z' = t^2 z$ приводит к задаче

$$\partial_t z' = C\langle z', a \rangle, \quad z'(0) = 0.$$

Так как единственное решение этой задачи есть $z' = 0$, то и $z = 0$. Но равенство $z(t) = 0$ при $t = 1$ равносильно равенству (8.2), так что, действительно, построенное V удовлетворяет уравнению Маурера—Картана.

Равенство $V(0) = I_B$ вытекает из того, что при $a = 0$ уравнение (11.1) принимает вид $\partial_i w = h$ и имеет решением функцию $w = th$. С этим решением формула (12.1) дает $V(0) = I_B$. В силу непрерывности отображения V найдется такая окрестность нуля $O_p \subset B$, что для всех $a \in O_p$ линейное отображение $V(a): B \rightarrow B$ будет линейным гомеоморфизмом пространства B . Поэтому определено отображение $A: O_p \rightarrow \mathcal{L}(B)$, действующее по формуле $A(a) = (V(a))^{-1}$, причем A класса $C_\infty(O_p)$.

С найденными A и V линейное отображение $A(\varphi) \circ V(b)$ вполне интегрируемо в силу теоремы 12.8. Поэтому уравнение Ли (4.3) имеет единственное решение φ , которое в силу теоремы 12.4 дает группу (B, φ) .

Наконец, из уравнения Маурера—Картана (8.2) следует, что заданное отображение C есть структурный оператор построенной группы (B, φ) . ■

О группе (B, φ) , полученной исходя из данного отображения C со свойствами 9.1° — 9.4° (или из данной банаховой алгебры Ли (B, C)) построением, описанным в доказательстве этой теоремы, будет говориться, что она порождена отображением C .

З а м е ч а н и е. Группа (B, φ) , порожденная отображением C , является канонической. Действительно, если в (11.1) положить $h = a$, то так как $C \langle a, a \rangle = 0$, решением задачи (11.1) будет $w = ta$. Поэтому формула (12.1), определяющая отображение V , примет вид $a = V(ta) \langle a \rangle$, а это, согласно критерию каноничности 12.6, достаточно для требуемого заключения.

Следствие 1. Если C есть структурный оператор группы (B, φ) и если C порождает группу (B, φ') , то группа (B, φ') изоморфна группе (B, φ) .

Доказательство. Группа (B, φ) изоморфна каноническому представителю (B, ω) класса $Q(B, \varphi)$, причем группы (B, φ) и (B, ω) имеют один и тот же структурный оператор (следствие 1 леммы 12.10). Поэтому в силу леммы 12.11 и предыдущего замечания справедливо равенство $\varphi' = \omega$. Значит, группа $(B, \varphi') = (B, \omega)$ изоморфна группе (B, φ) . ■

Следствие 2. Изоморфные банаховы алгебры Ли (B, C) и (B', C') порождают изоморфные группы (B, ω) и (B', ω') .

Доказательство. Пусть γ есть изоморфизм (B, C) на (B', C') . Так как γ является обратимым линейным отображением B на B' , то γ можно рассматривать как изоморфизм группы (B, ω) на некоторую каноническую группу (B', ψ) , которой соответствует банахова алгебра Ли (B', C') (следствие 3 леммы 12.10). Итак, обе

группы (B', ω') и (B', ψ) "канонические" и имеют один и тот же структурный оператор C' . Согласно лемме 12.11 отсюда следует, что $\psi = \omega'$. ■

Следствие 3. Множество $\{Q(B, \varphi)\}$ классов изоморфных групп $Q(B, \varphi)$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $\{Q(B, C)\}$ классов $Q(B, C)$ изоморфных банаховых алгебр Ли.

Доказательство. Существование отображения $\{Q(B, \varphi)\} \rightarrow \{Q(B, C)\}$ установлено в следствии 2 леммы 12.10. Обратное отображение получено в обратной третьей теореме Ли, а его однозначность гарантирована следствием 2. ■

Сформулированный в следствии 3 факт составляет один из фундаментальных результатов теории Ли о соответствии групп и алгебр Ли.

13. Пример. Весь путь построения группы (B, ω) по ее структурному оператору C , изложенный в теореме 12.12, можно проследить на примере группы 12.2. С ее структурным оператором, приведенным в 12.9, уравнение (11.1) таково:

$$\partial_t w = h + l\langle w \rangle a - l\langle a \rangle w, \quad w(0) = 0.$$

Решение этой задачи строится без особых трудностей

$$w = W(t, a, h) = (l\langle a \rangle)^{-1} (1 - \exp(-l\langle ta \rangle)) h + \\ + (l\langle a \rangle)^{-2} (l\langle ta \rangle - 1 + \exp(-l\langle ta \rangle)) l\langle h \rangle a.$$

По формуле (12.1) находится отображение V

$$V(a)\langle h \rangle = (l\langle a \rangle)^{-1} (1 - \exp(-l\langle a \rangle)) h + \\ + (l\langle a \rangle)^{-2} (l\langle a \rangle - 1 + \exp(-l\langle a \rangle)) l\langle h \rangle a.$$

Для построения уравнения Ли надо еще найти обратное к $V(a)$ отображение $A(a)$, т. е. для данного вектора $k \in B$ решить относительно вектора $h \in B$ уравнение $V(a)\langle h \rangle = k$. Это решение дается формулой

$$h = A(a)\langle k \rangle = \\ = (1 - \exp(-l\langle a \rangle))^{-1} [l\langle a \rangle k - (l\langle a \rangle)^{-1} (l\langle a \rangle - 1 + \\ + \exp(-l\langle a \rangle)) l\langle k \rangle a].$$

Поскольку с найденными A и V уравнение Ли (4.3) вполне интегрируемо, то решение задачи (4.3) можно построить «интегрированием по лучам». Это означает, что достаточно найти отображение $\psi: R \rightarrow B$, действующее по формуле $\psi(t) = \omega(tb)$. В силу каноничности искомого умножения ω (замечание 12.12) для ψ получается более простая задача

$$\partial_t \psi = A(\psi)\langle b \rangle, \quad \psi(0) = a,$$

решение которой дает $\omega(a, b) = \psi(1)$. В данном примере эта задача имеет вид

$$\partial_t \psi = (1 - \exp(-l\langle\psi\rangle))^{-1} [l\langle\psi\rangle b - (l\langle\psi\rangle)^{-1}(l\langle\psi\rangle - 1 + \\ + \exp(-l\langle\psi\rangle)) l\langle b\rangle \psi], \quad \psi(0) = a.$$

Несмотря на кажущуюся сложность этого уравнения, оно решается явно. Сначала находится $l\langle\psi\rangle = l\langle a + tb\rangle$, после чего остается проинтегрировать линейное уравнение. В результате получается формула

$$\psi(t) = l\langle a + tb\rangle (\exp(l\langle a + tb\rangle) - 1)^{-1} [(l\langle b\rangle)^{-1} (\exp(l\langle a + tb\rangle)) b + \\ + (l\langle a\rangle)^{-1} (\exp(l\langle a\rangle) - 1) a - (l\langle b\rangle)^{-1} (\exp(l\langle a\rangle)) b].$$

Это дает закон умножения $\omega(a, b) = \psi(1)$, который после небольших преобразований оказывается таким:

$$\omega(a, b) = \frac{\exp(l\langle a\rangle) - 1}{\exp(l\langle a + b\rangle) - 1} \cdot \frac{l\langle a + b\rangle}{l\langle a\rangle l\langle b\rangle} (al\langle b\rangle - bl\langle a\rangle) + \frac{l\langle a + b\rangle}{l\langle b\rangle} b.$$

Как и следовало ожидать, эта формула совпадает с полученной в примере 12.6.

14. Аналитичность канонического умножения. Пусть X и Y — банаховы пространства. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *аналитическим в окрестности точки $x_0 \in X$* , если оно может быть представлено в виде ряда

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x - x_0), \quad (14.1)$$

где $u_n \in \mathcal{L}_s^n(X; Y)$ — полилинейные симметричные n -линейные отображения $X^n \rightarrow Y$ и

$$u_n(\xi) = u_n\langle \xi, \dots, \xi \rangle \quad (\xi \in X),$$

причем для некоторого $\rho > 0$ ряд (14.1) сходится по норме, если $|x - x_0| < \rho$. Коэффициенты ряда (14.1), т. е. n -линейные отображения u_n вычисляются по формулам

$$u_n = \frac{1}{n!} \partial^n f(x_0) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

в силу которых (14.1) является рядом Тейлора отображения f в точке x_0 .

Анализ приведенного в 12.12 алгоритма построения закона умножения по структурному оператору дает следующий результат.
теорема. *Закон умножения в канонической группе является аналитическим в окрестности нуля пространства $B \times B$.*

Доказательство. В силу следствия 2 теоремы 12.7 достаточно доказать этот факт для группы (B, ω) , порожденной структурным оператором S . Правая часть линейного уравнения

(11.1), как функция вектора a , аналитична на всем пространстве B . Поэтому решение $W(t, a, h)$ задачи (11.1) является аналитическим для всех $t \in R$ и $a, h \in B$. Значит, и определяемое этим решением отображение V аналитично на всем пространстве B . В силу равенств $A(a) = (V(a))^{-1}$, $V(0) = I_B$, отображение A также аналитично, но лишь в некоторой окрестности нуля $O \subset B$. Следовательно, правая часть уравнения Ли (4.3) аналитична на $O \times O$. В силу теоремы анализа об аналитичности решений аналитических дифференциальных уравнений, с некоторым $\rho > 0$ закон умножения также будет аналитическим отображением $\omega: O_\rho \times O_\rho \rightarrow B$. ■

Этой теоремой фиксируется еще один фундаментальный результат теории Ли — аналитичность локальных групп Ли.

Заранее ясно, что ряды вида (14.1), представляющие аналитические отображения V , A и ω в окрестности нуля пространства B должны быть *стандартными* в том смысле, что их коэффициенты однозначно определяются структурным оператором C и должны как-то выражаться через C . Целью дальнейшего изложения является получение явных формул для этих коэффициентов.

Здесь удобны следующие упрощенные обозначения. Вводится коммутатор $[a, b] = C \langle a, b \rangle$ и для $n > 2$ «длинные» коммутаторы, определяемые рекуррентно

$$[a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] = [[a_1, \dots, a_{n-1}], a_n] \quad (n = 3, 4, \dots).$$

«Длинные» коммутаторы, в которых $a_2 = \dots = a_n$, обозначаются сокращенным символом, а именно

$$a = [a, b^0], \quad [a, \underbrace{b, \dots, b}_m] = [a, b^m] \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Решение уравнения (11.1) ищется в виде ряда по степеням t :

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n w_n,$$

подстановка которого в уравнение приводит к рекуррентным формулам

$$w_1 = h, \quad w_n = [w_{n-1}, a] \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Сравнение с определением «длинного» коммутатора показывает, что для любого $n = 1, 2, \dots$ справедлива формула $w_n = [h, a^{n-1}]$. По формуле (12.1) для отображения V получается представление

Оценка сходимости ряда (14.2) вытекает из 9.4°, откуда следует

$$|[h, a^{n-1}]| \leq \delta^{n-1} |a|^{n-1} |h|.$$

Эта оценка показывает, что ряд (14.2) сходится по норме на всем B .

Построение отображения A равносильно решению уравнения $V(a) \langle h \rangle = k$ относительно h . Удобнее искать $A(ta) = (V(ta))^{-1}$, решая уравнение $V(ta) \langle h \rangle = k$. Это решение ищется в виде ряда

$$A(ta) \langle h \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^{n-1} [h, a^{n-1}],$$

коэффициенты которого β_n (числа) вычисляются методом неопределенных коэффициентов из тождества $A(ta) \circ V(ta) \langle h \rangle = h$, а именно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^{n-1} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} t^{m-1} [h, a^{m-1}], a^{n-1} \right] = h.$$

Если заметить, что $[[h, a^r], a^s] = [h, a^{r+s}]$, то сравнение коэффициентов при одинаковых степенях t приведет к рекуррентной формуле

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_n = - \sum_{s=1}^{n-1} \beta_s / (n-s+1)! \quad (n=2, 3, \dots).$$

Легко проверить, что с числами β_n выполнено тождество по z

$$(e^z - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n z^n = z^2,$$

в силу которого β_n равны коэффициентам степенного ряда по степеням z , изображающего аналитическую функцию $z^2/(e^z - 1)$. Радиус сходимости этого степенного ряда равен 2π и справедлива оценка

$$|\beta_n| < 4(2\pi)^{1-n} \quad (n=1, 2, \dots). \quad (14.3)$$

Итак, отображение A реализовано в виде ряда

$$A(a) \langle h \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n [h, a^{n-1}], \quad (14.4)$$

который в силу (14.3) сходится по норме в окрестности нуля $O_\rho \subset B$, где $\rho = 2\pi/\delta$.

Решение ω уравнения Ли (4.3) строится методом «интегрирования по лучам», в котором разыскивается функция $\psi: B \rightarrow B$, действующая по формуле $\psi(t) = \omega(tb)$. Ввиду каноничности получаемой группы, т. е. равенства $V(a) \langle a \rangle = a$ (очевидного из (14.2)), справедлива формула

$$\partial_t \psi = \partial \omega(tb) \langle b \rangle = A(\omega) \circ V(tb) \langle b \rangle = A(\psi) \langle b \rangle,$$

в силу которой уравнение Ли принимает вид

$$\partial_t \psi = A(\psi) \langle b \rangle, \quad \psi(0) = a, \quad (14.5)$$

где линейное отображение $A(\psi)$ задано рядом (14.4). И здесь в принципе можно строить решение в виде степенного ряда по степеням t . Однако при этом результат будет трудно обозримым, ввиду чего удобнее применить другой прием, излагаемый в следующем пункте.

15. Ряд Шура — Кэмпбелла — Хаусдорфа. Эффективный метод решения задачи (14.5) состоит в разложении решения по возрастающим степеням однородности выражений, однородных относительно векторов a и b . С этой целью задача (14.5) преобразуется заменой $a \rightarrow xa$, $b \rightarrow xb$ с вещественным параметром x . Это приводит к задаче для отображения $(t, x) \rightarrow \psi(t, x)$

$$\partial_t \psi = xA(\psi) \langle b \rangle, \quad \psi(0, x) = xa. \quad (15.1)$$

Решение задачи (15.1) ищется в виде ряда по степеням x :

$$\psi(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(t) x^m. \quad (15.2)$$

Здесь коэффициенты $\psi_m(t)$ пропорциональны производным по x в точке $x=0$, а именно $m! \psi_m(t) = \partial_x^m \psi(t, 0)$. Функции ψ_m удовлетворяют «уравнениям в вариациях», получаемым m -кратным дифференцированием уравнений (15.1) по x в точке $x=0$

$$\begin{aligned} \partial_t \psi_1 &= b, \quad \psi_1(0) = a; \\ \partial_t \psi_{m+1} &= \rho_m, \quad \psi_{m+1}(0) = 0 \quad (m=1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (15.3)$$

где правые части ρ_m имеют выражения

$$\rho_m = \frac{1}{m!} \partial_x^m (A(\psi) \langle b \rangle) |_{x=0}$$

и вычисляются m -кратным дифференцированием вытекающего из (14.4) ряда

$$A(\psi) \langle b \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n+1} [b, \underbrace{\psi, \dots, \psi}_n].$$

В силу полилинейности «длинного» коммутатора коэффициент p_m в разложении

$$[b, \underbrace{\psi, \dots, \psi}_n] = \sum_{m=n}^{\infty} p_m x^m$$

отличен от нуля, только если $n \leq m$, и дается формулой

$$p_m = \sum_{|\alpha|=m} [b, \psi_{\alpha_1}, \dots, \psi_{\alpha_n}],$$

где $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ и сумма берется по всем представлениям с перестановками числа m в виде суммы n слагаемых $\alpha_i > 0$. Окончательно для правых частей в уравнениях (15.3) получаются формулы

$$\rho_m = \sum_{n=1}^m \sum_{|\alpha|=m} \beta_{n+1} [b, \psi_{\alpha_1}, \dots, \psi_{\alpha_n}] \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (15.4)$$

Уравнения (15.3), (15.4) позволяют вычислить последовательно все коэффициенты ряда (15.2) и, следовательно, найти закон умножения $\omega(a, b) = \psi(1, 1)$, для которого получается представление в виде ряда

$$\begin{aligned} \omega(a, b) &= \sum_{m=1}^{\infty} q_m(a, b) = \\ &= (a + b) + \frac{1}{2} [a, b] + \frac{1}{12} ([a, [a, b]] + [[a, b], b]) + \dots, \end{aligned} \quad (15.5)$$

где все отображения $q_m: (a, b) \rightarrow q_m(a, b) = \psi_m(1)$ однородны степени m и явно выражаются через структурный оператор $C \langle a, b \rangle = [a, b]$. Ряд (15.5) и есть знаменитый ряд Шура—Кэмпбелла—Хаусдорфа или, сокращенно, SCH-ряд. Обоснование этого построения сводится к исследованию сходимости ряда (15.5).

Теорема. Если структурный оператор C удовлетворяет неравенству $|C \langle a, b \rangle| \leq \delta |a| |b|$, то ряд (15.5) равномерно сходится по норме в окрестности нуля $U \subset B \times B$, где

$$U = \{(a, b) \mid |a| + 4|b| < \pi/\delta\}. \quad (15.6)$$

Доказательство. Применяется метод мажорант. В силу (15.4) оценка решения задачи (15.3) при $t \geq 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} |\psi_1(t)| &\leq |a| + t|b|; \\ |\psi_{m+1}(t)| &\leq \int_0^t \sum_{n=1}^m \sum_{|\alpha|=m} |b| |\beta_{n+1}| \delta^n |\psi_{\alpha_1}(\tau)| \dots |\psi_{\alpha_n}(\tau)| d\tau. \end{aligned} \quad (15.7)$$

В качестве мажорантной рассматривается следующая задача для отображения $\xi: R \rightarrow R$, в которой p, q, σ — вещественные числа, причем $p > 0, q > 0$:

$$\partial_t \xi = xq\sigma(\sigma - \xi), \quad \xi(0) = xp. \quad (15.8)$$

Если решать задачу (15.8) тем же методом, которым решалась задача (15.1), т. е. искать ее решение в виде ряда

$$\xi(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m(t) x^m, \quad (15.9)$$

то аналогом системы (15.3) будет система

$$\begin{aligned}\partial_t \xi_1 &= q, \quad \xi_1(0) = p; \\ \partial_t \xi_{m+1} &= \hat{p}_m, \quad \xi_{m+1}(0) = 0 \quad (m = 1, 2, \dots),\end{aligned}$$

где $\hat{p}_m$ вычисляется по формуле

$$\hat{p}_m = \frac{1}{m!} \partial_x^m (q\sigma/(\sigma - \xi))|_{x=0}$$

и дается выражением, аналогичным (15.4),

$$\hat{p}_m = \sum_{n=1}^m \sum_{|\alpha|=m} q \sigma^{-n} \xi_{\alpha_1} \dots \xi_{\alpha_n}.$$

Поэтому коэффициенты ряда (15.9) могут быть найдены по рекуррентным формулам

$$\xi_1 = p + tq, \quad \xi_{m+1}(t) = \int_0^t \sum_{n=1}^m \sum_{|\alpha|=m} q \sigma^{-n} \xi_{\alpha_1}(\tau) \dots \xi_{\alpha_n}(\tau) d\tau. \quad (15.10)$$

Сравнение неравенств (15.7) с равенствами (15.10) показывает, что если $|\psi_i(t)| \leq \xi_i(t)$ для $i = 1, \dots, m$, то также $|\psi_{m+1}(t)| \leq \xi_{m+1}(t)$ при условии, что для любого n выполнено неравенство $|b| |\beta_{n+1}| \delta^n \leq q \sigma^{-n}$. Учитывая оценку (14.3), этого можно добиться, приняв $\sigma = 2\pi/\delta$ и $q \geq 4|b|$. Кроме того, неравенство $|\psi_1(t)| \leq \xi_1(t)$ обеспечено, если $p = |a|$ и $q \geq |b|$. Итак, со значениями

$$\sigma = 2\pi/\delta, \quad p = |a|, \quad q = 4|b| \quad (15.11)$$

неравенства $|\psi_m(t)| \leq \xi_m(t)$ верны при $t \geq 0$ для всех $m = 1, 2, \dots$. Поэтому из сходимости ряда (15.9), взятого при $t = x = 1$, в области $U_0 \subset R^2(p, q)$ следует равномерная сходимость по норме ряда (15.5) в окрестности нуля $U = \{(a, b) | (|a|, 4|b|) \in U_0\} \subset \subset B \times B$. Область U_0 легко найти, решив задачу (15.8) явно. Вычисление дает

$$\xi(1, x) = \sigma - \sqrt{\sigma^2 - 2\sigma(p + q)x + p^2x^2},$$

откуда следует, что можно взять $U_0 = \{(p, q) | 2(p + q) < \sigma, p \geq 0, q \geq 0\}$. В силу (15.11) это и дает оценку (15.6). ■

16. Конечномерный случай. В классической теории локальных групп Ли банахово пространство B конечномерно. Обычно принимается, что $B = R^r$ и группа (B, φ) обозначается символом G^r или, если это необходимо, $G^r(\varphi)$. В этом случае все соотношения записываются в координатной форме. Координаты вектора $a \in R^r$ обозначаются a^α , так что $a = (a^1, \dots, a^r)$. Закон умножения векторов $a, b \in R^r$ задается с помощью r функций $\varphi^\alpha: R^r \times R^r \rightarrow R$

$$(a \cdot b)^\alpha = \varphi^\alpha(a^1, \dots, a^r, b^1, \dots, b^r) \quad (\alpha = 1, \dots, r).$$

Преобразование пространства R^r можно трактовать как локально обратимый переход к другой, вообще говоря, «криволинейной» системе координат в R^r или, проще, как *преобразование координат*. При этом сама группа G^r рассматривается как объект, от выбора системы координат не зависящий, и изучению подлежат те ее свойства, которые также не зависят от систем координат.

Вспомогательные отображения $A(a)$ и $V(a)$ представляются их матричными элементами A_β^α и V_β^α , которые удовлетворяют соотношениям

$$A_\beta^\alpha(a) = \partial_\beta \varphi^\alpha(a, 0), \quad V_\beta^\alpha(a) A_\beta^\sigma(a) = \delta_\beta^\sigma \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, r).$$

Канонический изоморфизм группы G^r трактуется как переход в этой группе к *каноническим координатам первого рода*. При этом задание канонической группы G^r есть ее задание в канонических координатах первого рода. Критерий каноничности группы G^r рассматривается как критерий того, что система координат является канонической первого рода и выглядит так:

$$a^\beta A_\beta^\alpha(a) = a^\alpha, \quad a^\beta V_\beta^\alpha(a) = a^\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, r).$$

Координатная форма действия структурного оператора C имеет вид

$$(C \langle h, k \rangle)^\alpha = C_{\beta\gamma}^\alpha h^\beta k^\gamma \quad (\alpha = 1, \dots, r),$$

где $C_{\beta\gamma}^\alpha$ — вещественные числа, называемые *структурными константами группы G^r* . Свойство 9.1° структурного оператора означает, что набор структурных констант $\{C_{\beta\gamma}^\alpha\}$ образует *тензор третьего ранга*, дважды ковариантного (индексы β, γ) и один раз контравариантного (индекс α). Свойство 9.2° равносильно *антисимметричности* структурных констант по нижним индексам

$$C_{\beta\gamma}^\alpha = -C_{\gamma\beta}^\alpha,$$

а свойство 9.3° — *соотношению Якоби* для структурных констант

$$C_{\beta\sigma}^\alpha C_{\gamma\delta}^\sigma + C_{\gamma\sigma}^\alpha C_{\delta\beta}^\sigma + C_{\delta\sigma}^\alpha C_{\beta\gamma}^\sigma = 0.$$

Наконец, свойство 9.4° в конечномерном случае выполнено всегда и каким-либо ограничением не является. Непосредственное определение структурных констант получается из формул (8.4) и (9.1), которые в координатной форме соответственно таковы:

$$C_{\beta\gamma}^\alpha = \partial_\gamma V_\beta^\alpha(0) - \partial_\beta V_\gamma^\alpha(0) = \partial_\beta A_\gamma^\alpha(0) - \partial_\gamma A_\beta^\alpha(0).$$

Критерий изоморфизма групп G'^r и G^r со структурными константами $C_{\beta\gamma}^{\prime\alpha}$ и $C_{\beta\gamma}^\alpha$ формулируется так:

Если структурные константы этих групп соответственно равны, т. е. $C_{\beta\gamma}^{\prime\alpha} = C_{\beta\gamma}^\alpha$, то группа G'^r изоморфна группе G^r ; обратно,

если группа G'^r изоморфна группе G^r , то найдется такая система координат в R^r , что структурные константы $C_{\beta\gamma}^{\alpha}$ группы G'^r в этой системе координат будут соответственно равны структурным константам группы G^r в исходной системе координат, т. е. $C_{\beta\gamma}^{\alpha} = C_{\beta\gamma}^{\alpha}$.

§ 13. Алгебры Ли

1. Определения и примеры. Векторное пространство L над полем вещественных чисел называется **алгеброй Ли**, если на нем определена бинарная операция коммутации $(u, v) \rightarrow [u, v]$, сопоставляющая векторам $u, v \in L$ их коммутатор $[u, v]$ и удовлетворяющая аксиомам:

1° **билинейности**: для любых $u, v, w \in L$ и $a, b \in R$

$$[au + bv, w] = a[u, w] + b[v, w], \quad [u, av + bw] = a[u, v] + b[u, w];$$

2° **антисимметричности**: для любых $u, v \in L$

$$[u, v] = -[v, u];$$

3° **справедливости тождества Якоби**: для любых $u, v, w \in L$

$$[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0.$$

Если пространство L бесконечномерно, но является банаховым пространством с нормой $|u|$ вектора $u \in L$, то алгебра Ли L называется **банаховой алгеброй Ли**, если выполнена еще аксиома

4° **непрерывности**: существует число $\delta > 0$, с которым для любых $u, v \in L$

$$|[u, v]| \leq \delta |u| |v|.$$

Примерами алгебр Ли могут служить:

(а) множество векторных полей $\Xi(X)$ на банаховом пространстве X , коммутатор в котором определен в 7.1;

(б) множество операторов, допускаемых данной системой дифференциальных уравнений E , рассмотренное в 7.13;

(с) банахова алгебра Ли (B, C) , задаваемая структурным оператором C группы (B, φ) , рассмотренная в 12.10;

(д) множество векторов a трехмерного евклидова пространства R^3 с операцией коммутации — векторным умножением $[a, b] = a \times b$;

(е) множество $\mathcal{L}(X)$ линейных отображений $A: X \rightarrow X$ некоторого банахова пространства X в себя с операцией коммутации $[A, B] = A \circ B - B \circ A$.

Размерностью алгебры Ли L называется размерность ее векторного пространства L ; если оно имеет конечную размерность r , то алгебра Ли L называется **конечномерной** и обозначается символом L^r ; если же оно бесконечномерно, то и алгебра Ли L называется **бесконечномерной** (иногда обозначается L^∞).

2. Структурные константы. Конечномерная алгебра Ли L' обычно задается указанием *векторного базиса* $\{u_\alpha\}$ в *пространстве* L' . В этом случае, в силу аксиомы 1° операция коммутации в L' полностью определяется таблицей коммутаторов — квадратной матрицей $r \times r$, в которой на пересечении β -й строки и γ -го столбца помещен коммутатор $[u_\beta, u_\gamma]$. Такие таблицы уже составлялись в 7.8 для алгебр Ли операторов. При этом формула разложения коммутатора базисных векторов по базису имеет вид

$$[u_\beta, u_\gamma] = C_{\beta\gamma}^\alpha u_\alpha \quad (\beta, \gamma = 1, \dots, r). \quad (2.1)$$

Входящие в формулу (2.1) числа $C_{\beta\gamma}^\alpha$ называются **структурными константами** алгебры Ли L' в базисе $\{u_\alpha\}$. В силу аксиом 1°—3° они обладают соответствующими, легко проверяемыми свойствами, а именно, они:

1° образуют тензор третьего ранга $(C_{\beta\gamma}^\alpha)$ над пространством L' ;

2° антисимметричны по нижним индексам $C_{\beta\gamma}^\alpha = -C_{\gamma\beta}^\alpha$;

3° удовлетворяют тождеству Якоби $C_{\beta\gamma}^\alpha C_{\gamma\delta}^\sigma + C_{\gamma\delta}^\alpha C_{\delta\beta}^\sigma + C_{\delta\beta}^\alpha C_{\beta\gamma}^\sigma = 0$.

Эти свойства можно положить в основу конструирования алгебр Ли L' . Для этого надо в L' выбрать базис $\{u_\alpha\}$, задать систему чисел $(C_{\beta\gamma}^\alpha)$ со свойствами 2° и 3°, определить операцию коммутации на базисных векторах формулой (2.1) и билинейно продолжить ее на все пространство L' . Тогда коммутатор векторов $u = a^\beta u_\beta$ и $v = b^\gamma u_\gamma$ будет даваться формулой

$$[u, v] = C_{\beta\gamma}^\alpha a^\beta b^\gamma u_\alpha. \quad (2.2)$$

3. Гомоморфизмы. Пусть $[,]$ есть символ коммутатора в алгебре Ли L и $[,]'$ — символ коммутатора в алгебре Ли L' .

Линейное отображение $\Gamma: L \rightarrow L'$ называется **гомоморфизмом алгебры Ли** L в алгебру Ли L' , если для любых $u, v \in L$ справедливо равенство

$$\Gamma\langle [u, v] \rangle = [\Gamma\langle u \rangle, \Gamma\langle v \rangle]'. \quad (3.1)$$

Множество векторов $u \in L$, переходящих при гомоморфизме $\Gamma: L \rightarrow L'$ в нулевой вектор (нуль) пространства L' , называется **ядром гомоморфизма** Γ .

Гомоморфизм $\Gamma: L \rightarrow L'$ называется **изоморфизмом**, если отображение $\Gamma: L \rightarrow \Gamma(L) \subset L'$ обратимо. Следует различать **изоморфизм** v , когда $\Gamma(L)$ есть собственное подпространство в L' и **изоморфизм** na , когда $\Gamma(L) = L'$.

Алгебры Ли L и L' называются **изоморфными**, если существует изоморфизм L на L' .

Изоморфизм алгебры Ли L на L (на «себя») называется **автоморфизмом** алгебры Ли L .

Для автоморфизма A алгебры Ли L определяющее равенство (3.1) принимает вид

$$A\langle u, v \rangle = [A\langle u \rangle, A\langle v \rangle]. \quad (3.2)$$

Если A_1 и A_2 — автоморфизмы алгебры Ли L , то их композиция $A_1 \circ A_2$ также является ее автоморфизмом, так как

$$(A_1 \circ A_2)\langle u, v \rangle = A_1\langle A_2\langle u \rangle, A_2\langle v \rangle \rangle = [(A_1 \circ A_2)\langle u \rangle, (A_1 \circ A_2)\langle v \rangle].$$

Поэтому множество всех автоморфизмов данной алгебры Ли L является группой, а именно, подгруппой группы линейных гомеоморфизмов пространства L . Группа всех автоморфизмов алгебры Ли L носит название *голоморф* алгебры Ли L и будет обозначаться символом $\text{Aut } L$.

В конечномерном случае изоморфные алгебры Ли имеют одинаковую размерность. Критерий изоморфизма конечномерных алгебр Ли формулируется в терминах их структурных констант.

Л е м м а. Если структурные константы алгебры Ли L' равны соответствующим структурным константам алгебры Ли L'' , то эти алгебры Ли изоморфны. Обратно, если алгебры Ли L' и L'' изоморфны, то в них найдутся такие базисы, в которых их структурные константы будут соответственно равны.

Доказательство. Пусть $C_{\beta\gamma}^\alpha$ — структурные константы алгебры Ли L' в базисе $\{u_\alpha\}$ и $C'_{\beta\gamma}^\alpha$ — структурные константы алгебры Ли L'' в базисе $\{u'_\alpha\}$. Если $C_{\beta\gamma}^\alpha = C'_{\beta\gamma}^\alpha$ и для $u \in L'$ положить $u = a^\alpha u_\alpha$, то линейное отображение $\Gamma: L' \rightarrow L''$, действующее по формуле

$$\Gamma\langle u \rangle = a^\alpha \Gamma\langle u_\alpha \rangle = a^\alpha u'_\alpha = u' \in L'',$$

есть изоморфизм L' на L'' . Действительно, если еще $v = b^\alpha u_\alpha$, то в силу формулы (2.2)

$$\Gamma\langle [u, v] \rangle = a^\beta b^\gamma C_{\beta\gamma}^\alpha \Gamma\langle u_\alpha \rangle = a^\beta b^\gamma C'_{\beta\gamma}^\alpha u'_\alpha = [u', v'] = [\Gamma\langle u \rangle, \Gamma\langle v \rangle].$$

Обратно, пусть Γ есть изоморфизм L' на L'' и $\{u_\alpha\}$ — базис в L' . Тогда $\{u'_\alpha\}$, где $u'_\alpha = \Gamma\langle u_\alpha \rangle$, есть базис в L'' и в силу (2.2) и (3.1)

$$[u'_\beta, u'_\gamma] = [\Gamma\langle u_\beta \rangle, \Gamma\langle u_\gamma \rangle] = \Gamma\langle [u_\beta, u_\gamma] \rangle = C_{\beta\gamma}^\alpha \Gamma\langle u_\alpha \rangle = C_{\beta\gamma}^\alpha u'_\alpha,$$

откуда $C'_{\beta\gamma}^\alpha = C_{\beta\gamma}^\alpha$. ■

4. Подалгебры. Векторное подпространство $N \subset L$ называется *подалгеброй* алгебры Ли L , если для любых $u, v \in N$ также $[u, v] \in N$.

В случае бесконечномерной банаховой алгебры Ли выделяются *замкнутые подалгебры* $N \subset L$, для которых N является замкнутым подпространством банахова пространства L .

Подалгебра $J \subset L$ называется **идеалом** алгебры Ли L , если для любых $u \in L$, $v \in J$ также $[u, v] \in J$.

В любой алгебре Ли L выделяются две подалгебры (они являются также идеалами в L): *нулевая подалгебра*, состоящая из одного нулевого элемента пространства L , и *сама алгебра Ли L* . Все остальные подалгебры и идеалы алгебры Ли L называются ее **собственными подалгебрами и идеалами**.

При гомоморфизме алгебр Ли $\Gamma: L \rightarrow L'$ ядро гомоморфизма J является идеалом в L . Действительно, так как $\Gamma \langle v \rangle = 0$ для $v \in J$, то в силу (3.1) для любого $u \in L$ также

$$\Gamma \langle [u, v] \rangle = [\Gamma \langle u \rangle, 0] = 0,$$

а это означает, что $[u, v] \in J$.

Элемент $z \in L$ называется **центральный**, если $[z, u] = 0$ для любого $u \in L$. Совокупность Z всех центральных элементов называется **центром** алгебры Ли L . Центр есть подалгебра в L , так как для любых $z_1, z_2 \in Z$, очевидно, $az_1 + bz_2 \in Z$ и $[z_1, z_2] = 0$. Ясно, что центр Z является идеалом в L .

Пусть N и M — подпространства алгебры Ли L . *Подпространство в L , порожденное всевозможными коммутаторами $[u, v]$, где $u \in N$, $v \in M$ называется левым произведением пространства N и M и обозначается символом $[N, M]$.*

Лиево произведение любых двух идеалов алгебры Ли L является идеалом в L . Этот факт следует из того, что если N, M — идеалы в L , то для любых элементов $u \in N$, $v \in M$, $w \in L$ в тождестве Якоби 1.3° будет $[v, w] \in M$ и $[w, u] \in N$, в силу чего также $[[u, v], w] \in [N, M]$.

В частности, идеал $L^{(1)} = [L, L]$ называется **коммутантом** (или **производной алгеброй**) алгебры Ли L . Коммутант коммутанта $L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}]$ называется **вторым коммутантом** алгебры Ли L . Индуктивно определяется $k+1$ -й коммутант как коммутант k -го коммутанта: $L^{(k+1)} = [L^{(k)}, L^{(k)}]$. Так возникает ряд коммутантов алгебры Ли L

$$L \supset L^{(1)} \supset L^{(2)} \supset \dots \supset L^{(n)} \supset \dots \quad (4.1)$$

Для конечномерной алгебры Ли L ее ряд коммутантов заканчивается либо нулевым идеалом $L^{(n)} = \{0\}$, либо таким $L^{(n)}$, для которого $L^{(n-1)} \neq L^{(n)} = L^{(n+1)}$.

Аналогично определяются **левые степени** алгебры Ли L , а именно, $L^{[2]} = [L, L]$, $L^{[3]} = [L^{[2]}, L]$, $\dots$, $L^{[k+1]} = [L^{[k]}, L]$, $\dots$, которые являются идеалами в L . При этом, конечно, $L^{[2]} = L^{(1)}$. Так возникает **нижний центральный ряд** алгебры Ли L

Для конечномерной алгебры Ли L ее нижний центральный ряд заканчивается либо нулевым идеалом $L^{(n)} = \{0\}$, либо таким $L^{(n)}$, для которого $L^{(n-1)} \neq L^{(n)} = L^{(n+1)}$.

При гомоморфизме алгебр Ли подалгебры переходят в подалгебры и идеалы — в идеалы. При изоморфизмах, кроме того, центр переходит в центр и коммутант — в коммутант.

5. Факторалгебра. Пусть L — алгебра Ли и J — ее идеал. Для векторов пространства L вводится отношение $\sim$ эквивалентности относительно идеала J , а именно $u \sim v$, если $u - v \in J$. Очевидно, что это отношение есть теоретико-множественный признак эквивалентности, по которому L разбивается на непересекающиеся классы $U, V, \dots$ эквивалентных элементов.

Легко проверяется, что множество $\{U\}$ этих классов образует алгебру Ли, если в нем ввести векторные операции и операцию коммутации по следующему правилу: если $u \in U, v \in V$, то $aU + bV$ ($a, b \in R$) есть класс, содержащий элемент $au + bv$ и $[U, V]$ есть класс, содержащий элемент $[u, v]$. Корректность этого определения коммутатора $[U, V]$ следует из того, что если $u' \sim u, v' \sim v$, то $[u', v'] = [u' - u, v' - v] + [u' - u, v] + [u, v' - v] + [u, v] \sim [u, v]$ так как первые три слагаемых принадлежат идеалу J .

Алгебра Ли классов, эквивалентных относительно идеала $J \subset L$ элементов алгебры Ли L , называется **факторалгеброй** (или **алгеброй вычетов**) алгебры Ли L по ее идеалу J и обозначается символом L/J .

Существует естественный гомоморфизм Γ алгебры Ли L на фактор-алгебру L/J , действующий по формуле $\Gamma\langle u \rangle = U$, если $u \in U$. Идеал J является ядром этого гомоморфизма.

Лемма 1. Если Γ есть гомоморфизм алгебры Ли L на алгебру Ли L' и J — его ядро, то факторалгебра L/J изоморфна L' .

Доказательство. Отображение $\Gamma': L/J \rightarrow L'$, определенное на классе U с помощью элемента $u \in U$ формулой

$$\Gamma'\langle U \rangle = \Gamma\langle u \rangle,$$

не зависит от выбора представителя $u \in U$, линейно отображает L/J на L' и взаимно однозначно. Последнее следует из того, что равенство $\Gamma'\langle U \rangle = \Gamma'\langle V \rangle$ равносильно равенству $\Gamma\langle u \rangle = \Gamma\langle v \rangle$, откуда $\Gamma\langle u - v \rangle = 0$, т. е. $u \sim v$ и $U = V$. ■

Суммой $J_1 + J_2$ идеалов J_1 и J_2 алгебры Ли L называется векторное подпространство в L , равное векторной сумме подпространств J_1 и J_2 . Очевидно, что $J_1 + J_2$ — идеал в L . В дальнейшем используется следующая лемма об изоморфизме.

Лемма 2. Если J_1 и J_2 — идеалы алгебры Ли L , то факторалгебра $(J_1 + J_2)/J_2$ изоморфна факторалгебре $J_1/(J_1 \cap J_2)$.

Доказательство. Если фиксирован элемент $u \in J_1$, то для любого $v \in J_2$ элементы $u + v$ являются представителями

одного и того же класса $U \subset J_1 + J_2$ элементов, эквивалентных в $J_1 + J_2$ относительно идеала J_2 . Поэтому класс U однозначно определен элементом u . Тем самым определен гомоморфизм $\Gamma: (J_1 + J_2)/J_2 \rightarrow J_1/(J_1 \cap J_2)$, действующий по формуле $\Gamma \langle U \rangle = U'$, где $U' \subset J_1$ есть класс элементов, эквивалентных в J_1 относительно идеала $J_1 \cap J_2$, содержащий u . Если $\Gamma \langle U_1 \rangle = \Gamma \langle U_2 \rangle$, то $u_1 - u_2 \in J_1 \cap J_2 \subset J_2$ и в силу предыдущего $U_1 = U_2$. Поэтому Γ — изоморфизм. ■

6. Структурные признаки подалгебр. Подалгебры, идеалы, центральные идеалы и факторалгебра конечномерной алгебры Ли L' могут быть охарактеризованы в терминах структурных констант.

Пусть размерность подпространства N равна s , и пусть базис $\{u_\alpha\}$ в L' выбран так, что первые s базисных векторов $u_1, \dots, u_s$ образуют базис в N . Тогда базис $\{u_\alpha\}$ является объединением

$$\{u_\alpha\} = \{u_{\alpha'}\} \cup \{u_{\alpha''}\},$$

где $\{u_{\alpha'}\}$ — базис в N и $\{u_{\alpha''}\}$ — его дополнение до базиса в L' . Предполагается, что индекс с одним штрихом типа α' принимает значения $1, \dots, s$, а индекс с двумя штрихами типа α'' — значения $s+1, \dots, r$. Пусть $C_{\beta\gamma}^\alpha$ — структурные константы алгебры Ли L в базисе $\{u_\alpha\}$.

Лемма. Подпространство N размерности s является подалгеброй $N \subset L'$, если и только если

$$C_{\beta'\gamma'}^{\alpha''} = 0 \quad (\beta', \gamma' = 1, \dots, s; \alpha'' = s+1, \dots, r), \quad (6.1)$$

идеалом $I \subset L'$, если и только если

$$C_{\beta'\gamma}^{\alpha''} = 0 \quad (\gamma = 1, \dots, r; \beta' = 1, \dots, s; \alpha'' = s+1, \dots, r), \quad (6.2)$$

центральным идеалом $I \subset Z \subset L'$, если и только если

$$C_{\beta'\gamma}^\alpha = 0 \quad (\alpha, \gamma = 1, \dots, r; \beta' = 1, \dots, s). \quad (6.3)$$

Кроме того, если $N = I$ — идеал в L' , то факторалгебра L'/I есть алгебра Ли L^{r-s} и в базисе $\{U_{\alpha''}\}$, где класс $U_{\alpha''}$ содержит $u_{\alpha''}$, имеет структурные константы $C_{\beta''\gamma''}^{\alpha''}$.

Доказательство. Произвольный вектор $u' \in N$ представляется в виде $u' = a^{\beta'} u_{\beta'}$. Если $v = b^{\gamma} u_{\gamma}$ — любой вектор из L' , то, согласно формуле (2.2),

$$[u', v] = C_{\beta'\gamma}^{\alpha} a^{\beta'} b^{\gamma} u_{\alpha}.$$

Отсюда и из определений 13.4 следуют утверждения, выражаемые равенствами (6.1), (6.2) и (6.3). Наконец, если $N = I$ есть идеал в L' , то размерность факторалгебры L'/I равна $r - s$. Пусть $U_{\alpha''}$

есть класс эквивалентности, содержащий $u_{\alpha''}$. Тогда $\{U_{\alpha''}\}$ есть базис в L'/J , причем $[U_{\beta''}, U_{\gamma''}]$ есть класс, содержащий элемент

$$[u_{\beta''}, u_{\gamma''}] = C_{\beta''\gamma''}^{\alpha''} u_{\alpha''} \sim C_{\beta''\gamma''}^{\alpha''} U_{\alpha''},$$

который принадлежит классу $C_{\beta''\gamma''}^{\alpha''} U_{\alpha''}$. Поэтому $[U_{\beta''}, U_{\gamma''}] = C_{\beta''\gamma''}^{\alpha''} U_{\alpha''}$. ■

7. Некоторые классы алгебр Ли. Нижеследующая классификация алгебр Ли является основой их теории и приложений.

Алгебра Ли L называется **абелевой** (или **коммутативной**), если $[u, v] = 0$ для любых $u, v \in L$.

В абелевой алгебре Ли L любое подпространство векторного пространства L является идеалом. Факторалгебра $L/L^{(1)}$ любой алгебры Ли L по ее коммутанту — абелева: если u, v — представители классов U, V , то $[U, V]$ есть класс, содержащий $[u, v] \in L^{(1)}$, и потому $[U, V] = 0$.

Алгебра Ли L называется **простой**, если в L нет собственных идеалов и если ее коммутант $L^{(1)} \neq \{0\}$.

Очевидно, что алгебры Ли L^1 и L^2 размерностей один и два не просты. Простые конечномерные алгебры Ли существуют, начиная с размерности три. Например, трехмерная алгебра Ли 13.1 (d) проста.

Алгебра Ли L называется **разрешимой**, если ее ряд коммутантов (4.1) заканчивается нулевым идеалом.

Очевидно, что любая абелева алгебра Ли разрешима. Это верно также для алгебр Ли размерностей один и два.

Л е м м а 1. Любая подалгебра и любой гомоморфный образ разрешимой алгебры Ли L разрешимы. Если L содержит такой разрешимый идеал J , что факторалгебра L/J разрешима, то и L разрешима.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разрешимость подалгебры следует из того, что каждый ее коммутант содержится в соответствующем коммутанте алгебры. Далее, при гомоморфизме всегда лиево произведение (см. 13.4) переходит в лиево произведение, т. е. $\Gamma\langle[N, M]\rangle = [\Gamma\langle N\rangle, \Gamma\langle M\rangle]'$, откуда и следуют разрешимость гомоморфного образа. Наконец, пусть Γ есть естественный гомоморфизм L на L/J , определенный в 13.5. Тогда

$$\Gamma\langle L^{(n)}\rangle = (\Gamma\langle L\rangle)^{(n)} = (L/J)^{(n)} = \{0\}$$

для некоторого n . Поэтому $L^{(n)} \subset J$, и если $J^{(m)} = \{0\}$, то, так как $L^{(n+m)} \subset J^{(m)}$, также $L^{(n+m)} = \{0\}$. ■

Алгебра Ли L называется **полупростой**, если L не содержит разрешимых идеалов, отличных от нулевого.

Всякая простая алгебра Ли полупроста, так как в противном случае для разрешимого идеала $J \subset L$ было бы $J = L$ и идеал $J^{(1)}$ должен был бы быть нулевым, откуда $L^{(1)} = \{0\}$ в противоречие с определением простой алгебры Ли.

Алгебра Ли L полупроста, если в ней нет ненулевых абелевых идеалов. Действительно, если J — разрешимый идеал в L , $J \neq \{0\}$, то для некоторого $n \geq 1$ будет $J^{(n)} = \{0\}$ и $J^{(n-1)} \neq \{0\}$, причем $J^{(n-1)}$ является абелевым идеалом в L .

Алгебра Ли L называется **нильпотентной**, если ее нижний центральный ряд (4.2) заканчивается нулевым идеалом.

Всякая одномерная (и вообще любая абелева) алгебра Ли нильпотентна. Легко проверяется, что для двумерной неабелевой алгебры Ли это уже не так. Поэтому разрешимая алгебра Ли не обязательно нильпотентна.

Л е м м а . 2. *Всякая нильпотентная алгебра Ли разрешима.*

Доказательство. С помощью тождества Якоби 1.3° легко доказывается индукцией по l , что коммутатор двух «длинных» коммутаторов (определение дано в 12.14) $[[a_1, \dots, a_k], [b_1, \dots, b_l]]$ есть линейная комбинация «длинных» коммутаторов длины $k+l$. Поэтому $[L^{(k)}, L^{(l)}] \subset L^{(k+l)}$ для любых k, l . Следовательно, $L^{(k)} \subset L^{(2k)}$ для любого $k=1, 2, \dots$ Поэтому если L нильпотентна, т. е. $L^{(2^n)} = \{0\}$ для некоторого n , то $L^{(n)} = \{0\}$. ■

Алгебра Ли L называется прямой суммой подалгебр N и M , что записывается равенством $L = N \oplus M$, если пространство L есть прямая сумма подпространств N и M , т. е. если $N \cap M = \{0\}$ и любой вектор $u \in L$ представим в виде $u = v + w$, где $v \in N$, $w \in M$.

Подалгебры N и M — компоненты прямой суммы $L = N \oplus M$ — являются идеалами в L , если и только если $[N, M] = \{0\}$.

Если J — идеал в прямой сумме $L = J \oplus N$, то подалгебра N изоморфна факторалгебре L/J .

8. Радикал. В различного рода классификационных вопросах, связанных с алгебрами Ли, большую роль играет один специальный идеал, существующий в любой алгебре Ли.

Т е о р е м а . *Среди разрешимых идеалов данной конечномерной алгебры Ли L существует максимальный разрешимый идеал R , который содержит любой разрешимый идеал $J \subset L$. При этом факторалгебра L/R полупроста.*

Доказательство. Сумма любых двух разрешимых идеалов разрешима. Действительно, если J_1 и J_2 — разрешимые идеалы в L , то факторалгебра $J_1/(J_1 \cap J_2)$ разрешима как гомоморфный образ разрешимой алгебры J_1 (лемма 13.7.1), откуда следует разрешимость изоморфной ей факторалгебры $(J_1 + J_2)/J_2$ (лемма 13.5.2), а значит, и разрешимость идеала $J_1 + J_2$ (снова лемма 13.7.1). Поэтому, если R есть разрешимый идеал конечномерной алгебры Ли, имеющий максимальную размерность в L , и J — какой-нибудь разрешимый идеал, то $R + J = R$. Следовательно, $J \subset R$. Далее, любой разрешимый идеал факторалгебры L/R имеет вид N/R , где N — идеал в L . Идеал N разрешим в силу

леммы 13.7.1, откуда следует, что $N \subset R$ и $N/R = \{0\}$. Поэтому факторалгебра L/R полупроста. ■

Максимальный разрешимый идеал $R \subset L$ называется радикалом алгебры Ли L .

9. Теорема Леви. Нижеследующая теорема Леви является важной структурной характеристикой алгебр Ли: она показывает, что любая алгебра Ли может быть получена путем расширения некоторой полупростой алгебры Ли посредством разрешимой алгебры Ли.

Т е о р е м а. Если R есть радикал конечномерной алгебры Ли L , то существует полупростая подалгебра $N \subset L$, с которой $L = N \oplus R$.

Доказательство можно найти в книге Джекобсона «Алгебры Ли».

Полупростая подалгебра N , входящая в прямую сумму $L = N \oplus R$, называется *фактором Леви* алгебры Ли L . В противовес радикалу R фактор Леви, вообще говоря, определен не однозначно.

§ 14. Присоединенная алгебра

1. Алгебра дифференцирований. *Дифференцированием алгебры Ли L называется линейное отображение $d: L \rightarrow L$, удовлетворяющее условию*

$$d\langle[u, v]\rangle = [d\langle u \rangle, v] + [u, d\langle v \rangle]. \quad (1.1)$$

Легко проверяется, что если d_1 и d_2 — дифференцирования алгебры Ли, то для любых $a, b \in R$ линейное отображение $ad_1 + bd_2$ — также ее дифференцирование. Поэтому совокупность всех дифференцирований данной алгебры Ли L образует векторное пространство, а именно, подпространство в ${}^*_{\mathcal{L}}(L)$, которое будет обозначаться dL .

Кроме того, если $d_1, d_2 \in dL$, то

$$\begin{aligned} d_1 \circ d_2 \langle[u, v]\rangle &= \\ &= [d_1 \circ d_2 \langle u \rangle, v] + [d_2 \langle u \rangle, d_1 \langle v \rangle] + [d_1 \langle u \rangle, d_2 \langle v \rangle] + [u, d_1 \circ d_2 \langle v \rangle]. \end{aligned}$$

Перестановка d_1 с d_2 и вычитание полученного равенства из предыдущего приводит к соотношению

$$\begin{aligned} (d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1) \langle[u, v]\rangle &= \\ &= [(d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1) \langle u \rangle, v] + [u, (d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1) \langle v \rangle]. \end{aligned}$$

Поэтому с коммутатором $[d_1, d_2] = d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1$ пространство dL является алгеброй Ли, а именно, подалгеброй в алгебре Ли всех линейных отображений $L \rightarrow L$, рассмотренной в примере 13.1 (е).

Алгебра Ли dL называется алгеброй Ли дифференцирований алгебры Ли L .

Каждому элементу $x \in L$ соответствует линейное отображение $L \rightarrow L$, обозначаемое $\text{ad}(x)$ и действующее по формуле

$$\text{ad}(x)\langle u \rangle = [u, x]. \quad (1.2)$$

Отображение $\text{ad}(x)$ называется **присоединенным отображением**, заданным элементом $x \in L$.

Сравнение тождества Якоби 13.1.3°, переписанного в виде

$$[[u, v], x] = [[u, x], v] + [u, [v, x]]$$

с определениями (1.1) и (1.2), показывает, что $\text{ad}(x)$ является дифференцированием алгебры Ли L .

Дифференцирование $\text{ad}(x)$, определенное формулой (1.2), называется **внутренним дифференцированием** алгебры Ли L .

Лемма. Совокупность $\mathcal{D}$ всех внутренних дифференцирований алгебры Ли L является идеалом в алгебре Ли dL .

Доказательство. Для любых $x, y \in L$ и $a, b \in R$ справедливо равенство

$$(a \text{ad}(x) + b \text{ad}(y))\langle u \rangle = [u, ax + by] = \text{ad}(ax + by)\langle u \rangle, \quad (1.3)$$

в силу которого $\mathcal{D}$ есть векторное пространство в dL . Далее, если $x \in L$ и $d \in dL$, то для любого $u \in L$

$$\begin{aligned} (d \circ \text{ad}(x) - \text{ad}(x) \circ d)\langle u \rangle &= d\langle [u, x] \rangle - [d\langle u \rangle, x] = \\ &= [u, d\langle x \rangle] = \text{ad}(d\langle x \rangle)\langle u \rangle. \end{aligned}$$

Поэтому $d \circ \text{ad}(x) - \text{ad}(x) \circ d = \text{ad}(d\langle x \rangle) \in \mathcal{D}$. ■

Алгебра Ли $\mathcal{D}$ всех внутренних дифференцирований называется **присоединенной алгеброй** алгебры Ли L .

2. Естественный гомоморфизм. Определение присоединенного отображения (1.2) показывает, что существует отображение $\text{ad}: L \rightarrow \mathcal{D}$ алгебры Ли L на ее присоединенную алгебру $\mathcal{D}$, действующее по формуле $x \rightarrow \text{ad}(x)$. Следующая лемма фиксирует алгебраические свойства этого отображения.

Лемма. Отображение $\text{ad}: L \rightarrow \mathcal{D}$ есть гомоморфизм алгебры Ли L на ее присоединенную алгебру $\mathcal{D}$. Ядром этого гомоморфизма является центр $Z \subset L$.

Доказательство. Линейность отображения ad следует из равенства (1.3). Далее, в силу определения (1.2) и тождества Якоби 13.1.3° справедливо равенство

$$\begin{aligned} \text{ad}([x, y])\langle u \rangle &= [u, [x, y]] = [[u, x], y] - [[u, y], x] = \\ &= (\text{ad}(y) \circ \text{ad}(x) - \text{ad}(x) \circ \text{ad}(y))\langle u \rangle, \end{aligned}$$

откуда в силу определения коммутатора в $\mathcal{D}$ следует, что

$$-\text{ad}([x, y]) = [-\text{ad}(x), -\text{ad}(y)],$$

т. е. выполнено условие гомоморфизма 13 (3.1). Наконец, равенство $\text{ad } (x)\langle u \rangle = 0$, равносильное равенству $[u, x] = 0$, выполнено для всех $u \in L$, если и только если $x \in Z$. ■

Гомоморфизм $\text{ad}: L \rightarrow \mathcal{D}$ называется *естественным гомоморфизмом* алгебры Ли L на ее присоединенную алгебру Ли $\mathcal{D}$.

С л е д с т в и е. *Присоединенная алгебра Ли $\mathcal{D}$ изоморфна факторалгебре L/Z алгебры Ли L по ее центру Z .* Это следует из предыдущей леммы и 13.5.1.

3. Представление алгеброй Ли операторов. Пусть L — конечномерная алгебра Ли и ее векторное пространство рассматривается как банахово пространство. Отображение $\text{ad}: L \rightarrow \mathcal{L}(L)$ задает на пространстве L семейство $\mathcal{E}$ векторных полей $e: L \rightarrow L$ по следующему правилу: каждое векторное поле $e \in \mathcal{E}$ определяется заданием вектора $u \in L$, обозначается символом e_u и действует по формуле

$$e_u(x) = \text{ad } (u)\langle x \rangle = [x, u]. \quad (3.1)$$

В силу равенства $e_{au+bv} = ae_u + be_v$, вытекающего из (3.1) и справедливости для любых $u, v \in L$ и $a, b \in R$, семейство $\mathcal{E}$ является векторным пространством, а именно, подпространством пространства $\mathcal{E}(L)$ векторных полей на пространстве L .

Из определения (3.1) следует, что каждое векторное поле e_u является линейным отображением $L \rightarrow L$. Поэтому $e_u \in C_\infty(L)$ для любого $u \in L$. В § 7 уже был определен коммутатор векторных полей. Так как, очевидно, $\partial e_u(x)\langle h \rangle = [h, u]$, то вычисление по формуле 7 (1.1) дает

$$\begin{aligned} [e_u(x), e_v(x)] &= [e_u(x), v] - [e_v(x), u] = \\ &= [[x, u], v] - [[x, v], u] = [x, [u, v]] = e_{[u, v]}(x), \end{aligned}$$

где предпоследнее равенство следует из тождества Якоби. Окончательно получается важное соотношение

$$[e_u, e_v] = e_{[u, v]}. \quad (3.2)$$

В силу определения 7.4 равенство (3.2) показывает, что пространство $\mathcal{E}$ является алгеброй Ли векторных полей. Кроме того, из (3.2) следует, что отображение $\Gamma: L \rightarrow \mathcal{E}$, действующее по формуле $\Gamma\langle u \rangle = e_u$, есть гомоморфизм алгебры Ли L на алгебру Ли $\mathcal{E}$ векторных полей (3.1).

Согласно сказанному в § 7 вместо векторных полей e_u можно говорить о соответствующих операторах $e_u \cdot \partial$, где ∂ есть символ дифференцирования отображений $L \rightarrow P$. Поэтому алгебру Ли $\mathcal{E}$ можно рассматривать как алгебру Ли операторов

$$e_u(x) \cdot \partial = [x, u] \cdot \partial. \quad (3.3)$$

З а м е ч а н и е. Алгебра Ли $\mathcal{E}$ изоморфна присоединенной алгебре $\mathcal{D}$. Изоморфизм $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ задан равенством (3.1). Действительно, это равенство можно рассматривать просто как определение нового обозначения e_u для $\text{ad } (u)$.

4. Внутренние автоморфизмы. Согласно теореме Ли 2.3 по каждому векторному полю $e_u \in \mathcal{E}$ на банаховом пространстве L можно построить группу $G^1(e_u)$ преобразований этого пространства. Производящее отображение этой группы должно быть решением уравнения $\partial_t x' = e_u(x')$ с начальным условием $x'(0) = x$. В силу определения (3.1) это приводит к задаче

$$\partial_t x' = [x', u], \quad x'(0) = x. \quad (4.1)$$

Так как уравнение (4.1) линейно относительно искомого x' , то решение задачи (4.1) должно быть результатом действия на вектор $x \in L$ некоторого линейного обратимого отображения $L \rightarrow L$. Это отображение будет обозначаться символом $A_u(t)$, так что решение задачи (4.1) есть $x' = A_u(t) \langle x \rangle$.

Это решение выражается явной формулой, для вывода которой надо заметить, что в силу (3.1) уравнения задачи (4.1) могут быть записаны непосредственно для преобразований $A_u(t)$

$$\partial_t A_u = \text{ad } (u) \circ A_u, \quad A_u(0) = I_L.$$

Здесь коэффициент $\text{ad } (u)$ есть постоянное отображение (не зависит от t) и решение находится явно

$$A_u(t) = \exp(t \text{ad } (u)). \quad (4.2)$$

Отсюда следует явное выражение решения задачи (4.1) в виде формулы для производящего отображения группы $G^1(e_u)$ при условии, что $e_u = \text{ad } (u) \neq 0$.

$$x' = A_u(t) \langle x \rangle = \exp(t \text{ad } (u)) \langle x \rangle. \quad (4.3)$$

Формула (4.2) показывает, что полученные преобразования $A_u(t)$ пространства L определены и обратимы без каких-либо ограничений на значения группового параметра t и определяющего вектора $u \in L$.

Т е о р е м а. Преобразования (4.2) пространства L являются автоморфизмами алгебры Ли L .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть под действием преобразования (4.2) векторы $x, y \in L$ переходят в векторы $x', y' \in L$ согласно (4.3). Тогда уравнения (4.1) выполнены как для x' , так и для y' . Поэтому в силу тождества Якоби получаются уравнения

$$\begin{aligned} \partial_t [x', y'] &= [[x', u], y'] + [x', [y', u]] = [[x', y'], u], \\ [x', y'](0) &= [x, y]. \end{aligned}$$

Они показывают, что коммутатор $[x', y']$, как функция $R \rightarrow L$ есть решение той же задачи (4.1) и, тем самым, дается формулой (4.3), т. е. $[x', y'] = A_u(t) \langle [x, y] \rangle$. Это равенство, будучи переписано в виде

$$A_u(t) \langle [x, y] \rangle = [A_u(t) \langle x \rangle, A_u(t) \langle y \rangle],$$

совпадает с равенством 13 (3.2), определяющим автоморфизмы алгебры Ли L . ■

Аutomорфизмы $A_u(t)$, получаемые вышеописанным построением, называются *внутренними автоморфизмами* алгебры Ли L .

Группа преобразований пространства L , порожденная преобразованиями $A_u(t)$, принадлежащими всевозможным группам $G^1(e_u)$, называется *группой внутренних автоморфизмов* алгебры Ли L . Эта группа будет обозначаться $\text{Int } L$.

Для конструктивного построения группы автоморфизмов следует заметить, что алгебра Ли $\mathcal{E}$ операторов $e_{u,\delta}$ изоморфна факторалгебре L/Z алгебры Ли L по ее центру Z . Этот факт очевиден в силу леммы 14.2 и замечания 14.3. Кроме того, как будет установлено в § 16, для построения группы преобразований достаточно найти только группы G^1 , порожденные базисными векторами соответствующей алгебры Ли.

Пусть $\{u_\alpha\}$ — базис в L , выбранный так же, как в 13.6 для $N=Z$, и пусть однопараметрическая группа $G^1(e_{u_\gamma})$, порожденная оператором $e_{u_\gamma} \cdot \partial$, обозначается просто G_γ^1 . Так как $e_{u_{\gamma'}}(x) = [x, u_{\gamma'}] = 0$ ввиду того, что $u_{\gamma'} \in Z$ для $\gamma' = 1, \dots, s$, то группы $G_{\gamma'}^1$ состоят из одного тождественного преобразования. Следовательно, нетривиальными будут только группы $G_{\gamma''}^1$ для $\gamma'' = s+1, \dots, r$.

Если в этом базисе положить $x = x^\alpha u_\alpha$ и ввести структурные константы $C_{\beta\gamma}^\alpha$ алгебры Ли L , то в силу свойства 13 (6.3) будет $[x, u_{\gamma''}]^\alpha = C_{\beta\gamma''}^\alpha x^{\beta''}$. Поэтому для группы $G_{\gamma''}^1$ уравнение (4.1) в базисе $\{u_\alpha\}$ примет вид линейной системы скалярных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\partial_t x'^\alpha = C_{\beta\gamma''}^\alpha x'^{\beta''}, \quad x'^\alpha(0) = x^\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, r). \quad (4.4)$$

Порожденные решением системы (4.4) автоморфизмы $A_{\gamma''}(t) \in G_{\gamma''}^1$ представляются в том же базисе матрицей $(A_\sigma^\alpha(t))$ и действуют по формуле, равносильной (4.3)

$$x'^\alpha = A_\sigma^\alpha(t) x^\sigma \quad (\alpha = 1, \dots, r). \quad (4.5)$$

Общий внутренний автоморфизм $A \in \text{Int } L$ получается по следующему правилу: для каждого $\gamma'' = s+i$ ($i = 1, \dots, r-s$) параметр группы $G_{\gamma''}^1$ обозначается через t^i и образуется композиция из $r-s$ сомножителей

$$A(t^1, t^2, \dots, t^{r-s}) = A_{s+1}(t^1) \circ A_{s+2}(t^2) \circ \dots \circ A_r(t^{r-s}). \quad (4.6)$$

Доказательство того, что (4.6) есть общий элемент группы $\text{Int } L$, будет дано в § 16.

5. Форма Киллинга. Симметричная билинейная форма Φ на пространстве L , т. е. билинейное отображение $\Phi: L \times L \rightarrow R$, называется *инвариантной* (относительно группы $\text{Int } L$), если для любого внутреннего автоморфизма $A \in \text{Int } L$ и любых $x, y \in L$

$$\Phi\langle A\langle x \rangle, A\langle y \rangle \rangle = \Phi\langle x, y \rangle. \quad (5.1)$$

Если в (5.1) положить $A = A_u(t)$ и продифференцировать по t в точке $t=0$, то в силу свойства билинейности Φ и уравнений (4.1) получится равенство, дающее инфинитезимальный критерий инвариантности формы Φ

$$\Phi_*\langle [x, u], y \rangle + \Phi\langle x, [y, u] \rangle = 0. \quad (5.2)$$

Замечательным свойством инвариантных форм является то, что с помощью них можно задавать идеалы алгебры Ли. Именно, множество J таких элементов $y \in L$, для которых $\Phi\langle x, y \rangle = 0$ с любым элементом $x \in L$, есть идеал в L . Это следует из того, что J есть подпространство в L ввиду билинейности Φ и, кроме того, для любых $y \in J, z \in L$ в силу (5.2) справедливо равенство $\Phi\langle x, [y, z] \rangle = -\Phi\langle [x, z], y \rangle = 0$, т. е. $[y, z] \in J$.

В структурной теории алгебр Ли большую роль играет специальная билинейная форма K , определение которой связано с понятием следа линейного отображения. Следом линейного отображения $A: L \rightarrow L$ называется след матрицы этого отображения в каком-либо базисе $\{u_\alpha\} \subset L$. Если эта матрица есть (A_β^α) , то след, обозначаемый символом tr , дается формулой $\text{tr } A = A_\alpha^\alpha$. Так как число $\text{tr } A$ не зависит от базиса в L , то эта формула определяет линейное отображение $\text{tr}: \mathcal{L}(L) \rightarrow R$. Существенным свойством отображения tr является его симметричность относительно композиции: для любых $A, B \in \mathcal{L}(L)$ справедливо равенство

$$\text{tr}(A \circ B) = \text{tr}(B \circ A).$$

Симметричная билинейная форма K , действующая по формуле

$$K\langle x, y \rangle = \text{tr}(\text{ad}(x) \circ \text{ad}(y)), \quad (5.3)$$

называется формой Киллинга. Эта форма инвариантна, что устанавливается на основании легко проверяемого тождества

$$\text{ad}([x, u]) \circ \text{ad}(y) + \text{ad}(x) \circ \text{ad}([y, u]) = A \circ \text{ad}(u) - \text{ad}(u) \circ A,$$

где $A = \text{ad}(x) \circ \text{ad}(y)$, и свойства симметричности отображения tr .

С помощью формы Киллинга может быть охарактеризован радикал R алгебры Ли L .

Т е о р е м а. *Радикал R конечномерной алгебры Ли L есть множество элементов $x \in L$, для которых $K\langle x, y \rangle = 0$ с любым элементом $y \in L$ ⁽¹⁾.*

Доказательство можно найти в книге Джекобсона «Алгебры Ли».

Пусть $C_{\beta\gamma}^{\alpha}$ — структурные константы r -мерной алгебры Ли L в базисе $\{u_{\alpha}\}$. Если в этом базисе $x = x^{\alpha}u_{\alpha}$, то вычисленная по формулам (1.2) и 13 (2.2) матрица линейного отображения $\text{ad}(x): L \rightarrow L$ такова:

$$(\text{ad}(x)) = (C_{\beta\gamma}^{\alpha}x^{\gamma}). \quad (5.4)$$

Если в том же базисе $y = y^{\alpha}u_{\alpha}$, то значение формы Киллинга в базисе $\{u_{\alpha}\}$ на векторах $x, y \in L$, вычисленное согласно (5.3), имеет вид

$$K\langle x, y \rangle = K_{\alpha\beta}x^{\alpha}y^{\beta}, \quad K_{\alpha\beta} = C_{\alpha\gamma}^{\gamma}C_{\beta\gamma}^{\gamma} \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, r). \quad (5.5)$$

6. Структурные свойства. В этом пункте собраны факты, характеризующие структурные свойства разрешимости и полупростоты алгебр Ли, которые полезны в классификационных вопросах группового анализа семейства решений дифференциальных уравнений. Доказательства приведенных ниже теорем можно найти в книге Джекобсона «Алгебры Ли».

Следующая теорема Ли справедлива, если алгебра Ли L рассматривается над полем комплексных чисел.

Т е о р е м а Л и. Для всякой r -мерной разрешимой алгебры Ли L (над полем комплексных чисел) существует такая цепочка идеалов

$$L = L_r \supset L_{r-1} \supset \dots \supset L_1 \supset \{0\},$$

в которой размерность идеала L_s равна s ($s=1, 2, \dots, r$).

С помощью формы Киллинга K формулируются следующие два критерия Картана. Форма K называется вырожденной, если $\det(K_{\alpha\beta})=0$. В противном случае форма называется невырожденной.

К р и т е р и й разрешимости. Алгебра Ли L разрешима, если и только если $K\langle x, x \rangle = 0$ для любого $x \in L^{(1)}$.

К р и т е р и й полупростоты. Алгебра Ли L полупроста, если и только если форма Киллинга невырождена.

Классификация полупростых алгебр Ли основана на следующей теореме.

С т р у к т у р н а я т е о р е м а. Конечномерная алгебра Ли L полупроста тогда и только тогда, когда существует разложение

$$L = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_k,$$

где L_i — идеалы, являющиеся простыми алгебрами Ли.

С помощью этой теоремы устанавливается, что каждый идеал полупростой алгебры Ли полупрост и что для полупростой алгебры Ли L всегда $L^{(1)} = L$.

7. Оптимальные системы подалгебр. Для группового анализа дифференциальных уравнений существенна задача о перечислении всех подалгебр данной конечномерной алгебры Ли L . При этом

можно считать известной группу $\text{Int } L$ внутренних автоморфизмов: обычно она строится без особых затруднений по алгоритму, изложенному в 14.4. Так как под действием автоморфизма каждая подалгебра переходит снова в некоторую подалгебру той же размерности, то поставленную задачу достаточно решить с точностью до преобразований, определяемых внутренними автоморфизмами.

Подалгебры N и M алгебры Ли L называются подобными, если существует внутренний автоморфизм $A \in \text{Int } L$, с которым $A(N) = M$.

По отношению подобия, которое, очевидно, есть теоретико-множественный признак эквивалентности, все подалгебры данной алгебры Ли разбиваются на классы подобных подалгебр.

Совокупность представителей классов подобных подалгебр данной размерности s (по одному из каждого класса) будет называться оптимальной системой (порядка s) и обозначаться символом Θ_s .

Таким образом, итогом решения поставленной задачи для данной конечномерной алгебры Ли L должны быть таблицы оптимальных систем Θ_s для каждого $s = 1, 2, \dots, r-1$.

Отыскание подалгебр данной размерности $s > 1$ сводится к некоторой алгебраической задаче. Пусть $\{u_\alpha\}$ — базис алгебры Ли L и $C_{\beta\gamma}^\alpha$ — ее структурные константы в этом базисе. Очевидно, что векторы $x_i = x_i^\alpha u_\alpha$ ($i = 1, \dots, s < r$) образуют базис подалгебры N размерности s , если и только если ранг матрицы (x_i^α) (обозначаемый символом rank) равен s и выполнены соотношения $[x_i, x_j] = N_{ij}^k x_k$ или

$$\text{rank}(x_i^\alpha) = s, \quad C_{\beta\gamma}^\alpha x_i^\beta x_j^\gamma = N_{ij}^k x_k^\alpha \quad (i, j = 1, \dots, s; \alpha = 1, \dots, r), \quad (7.1)$$

где N_{ij}^k — структурные константы подалгебры N . Следовательно, задача сводится к решению системы алгебраических уравнений (7.1) с неизвестными x_i^α , N_{ij}^k .

Эта трудная алгебраическая задача до настоящего времени не получила окончательного решения в смысле формирования определенного алгоритма, по которому оптимальные системы Θ_s выстраивались бы однозначно. Сравнительно просто построение оптимальных систем осуществляется лишь для малых размерностей $s \leq 3$, да и здесь она пока выполняется «полукустарным» методом, в котором на определенных этапах делается выбор из нескольких возможностей, связанный с довольно расплывчатыми соображениями «простоты» получаемого результата.

Поэтому теория построения оптимальных систем подалгебр нуждается в дальнейшем развитии. К данной задаче имеет отношение один общий результат, дающий важное дополнение к тео-

реме Леви 13.9. Для простоты здесь он формулируется в ослабленной форме.

Т е о р е м а *М а л ь ц е в а — Х а р и ш - Ч а н д р а.* Если $L = R \oplus N$, где R — радикал, а N — фактор Леви конечномерной алгебры Ли L , то для любой полупростой подалгебры $N_1 \subset L$ найдется такой автоморфизм $A \in \text{Int } L$, что $A(N_1) \subset N$.

Доказательство можно найти в книге Джекобсона «Алгебры Ли».

8. Малые размерности. При построении оптимальных систем подалгебр данной алгебры Ли L особую роль играет ее центр Z . Дело в том, что каждый вектор $z \in Z$ инвариантен относительно любого автоморфизма $A \in \text{Int } L$. Действительно, так как $[z, u] = 0$ для любого $u \in L$, то единственным решением задачи (4.1) для элемента $z' = A_u(t) \langle z \rangle$, имеющей вид $\partial_t z' = [z', u]$, $z'(0) = z$, является решение $z' = z$. Поэтому центральные элементы порождают подалгебры (идеалы), которые нельзя изменить никакими внутренними автоморфизмами. Они могут входить в виде прямого слагаемого в любую подалгебру алгебры Ли L . Это означает, что если оптимальные системы подалгебр известны для факторалгебры L/Z , то их можно считать известными и для всей алгебры Ли L . Следовательно, методы построения оптимальных систем достаточно описать только для алгебр Ли с нулевым центром.

Пусть в алгебре Ли L' с нулевым центром фиксирован базис $\{u_\alpha\}$. Общий внутренний автоморфизм этой алгебры Ли зависит от r параметров и дается формулой (4.6), где надо положить $s=0$.

Построение системы Θ_1 начинается с того, что берется некоторый ненулевой вектор $x = x^\alpha u_\alpha$ и рассматривается его образ $x' = A \langle x \rangle$, получаемый действием общего автоморфизма $A = A(t^1, \dots, t^r)$. Если (A_β^α) есть матрица автоморфизма A в базисе $\{u_\alpha\}$, то координаты вектора x' в этом базисе даются формулами вида (4.5)

$$x'^\alpha = A_\beta^\alpha x^\beta \quad (\alpha = 1, \dots, r).$$

Дальнейшее заключается в том, чтобы подбором значений параметров $t^1, \dots, t^r$, от которых зависит автоморфизм A , добиться максимально возможного упрощения набора $(x'^1, \dots, x'^r)$ координат вектора x' с целью выбора «простейшего» представителя того класса подобных подалгебр, к которому принадлежит элемент x . Обычно под этим понимается достижение максимально возможного числа нулевых значений этих координат. Возникающие при этом альтернативные случаи дают классы подобных однопараметрических подалгебр и, тем самым, оптимальную систему Θ_1 .

При построении оптимальной системы Θ_2 можно заранее предполагать, что один из базисных векторов двумерной подалгебры $N \subset L'$ взят из системы Θ_1 . Пусть этот вектор есть $x = x^\alpha u_\alpha$. К нему

подбирается такой вектор $y = y^a u_a$, чтобы он удовлетворял системе уравнений (7.1), которая здесь принимает вид

$$C_{\beta\gamma}^{\alpha} x^{\beta} y^{\gamma} = \lambda y^{\alpha} + \mu x^{\alpha} \quad (\alpha = 1, \dots, r) \quad (8.1)$$

и содержит $r+2$ неизвестных y^a , λ и μ . Множество решений системы (8.1) дает все двумерные подалгебры, содержащие вектор x . Так как векторы x и y можно умножить на любые ненулевые множители, то вместо двухпараметрического множества систем (8.1) с параметрами λ и μ достаточно рассмотреть только такие системы, в которых $(\lambda, \mu) = (0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, 1)$. Очевидно, что случай $(\lambda, \mu) = (1, 1)$ сводится к случаю $(\lambda, \mu) = (1, 0)$ заменой $y \rightarrow y + x$. В случае $(\lambda, \mu) = (0, 1)$ решений может не быть вообще. Если же $\mu = 0$, то (8.1) имеет вид системы, возникающей в задаче на собственные значения для линейного отображения $\text{ad}(x)$ с матрицей $(C_{\beta\gamma}^{\alpha} x^{\beta})$ и может быть записана в виде $\text{ad}(x) \langle y \rangle = \lambda y$. Следовательно, ее решение сводится к отысканию корней характеристического многочлена $\det(\lambda I_L - \text{ad}(x))$, который в развернутой форме имеет вид

$$\det(\lambda I_L - \text{ad}(x)) = \lambda^r - \tau_1(x) \lambda^{r-1} + \tau_2(x) \lambda^{r-2} - \dots + (-1)^l \tau_{r-l}(x) \lambda^l, \quad (8.2)$$

где $\tau_{r-l}(x) \neq 0$ и $l \geq 0$. Так как $\text{ad}(x) \langle x \rangle = 0$ и $x \neq 0$, то всегда $l > 0$.

Каждому вещественному ненулевому корню многочлена (8.2) соответствует одно или несколько линейно независимых решений уравнения (8.1) (при $\mu = 0$). В случае $l > 1$ также имеется одно или несколько решений, соответствующих корню $\lambda = 0$. Если же $l = 1$ и ненулевых вещественных корней нет, то элемент x не принадлежит никакой двумерной подалгебре этого типа (с $\mu = 0$ в (8.1)).

В итоге получается, что могут существовать такие векторы $x \in L$, которые не принадлежат никаким двумерным подалгебрам алгебры Ли L .

Многочлен (8.2), рассматриваемый для переменного $x \in L^r$, называется **полиномом Киллинга** (или **характеристическим многочленом**) алгебры Ли L^r . Минимальное значение числа l в выражении полинома Киллинга (8.2), получаемое когда вектор x пробегает все пространство L^r , называется **рангом алгебры Ли L^r** . Элемент $x \in L^r$, для которого значение l в (8.2) равно рангу, называется **регулярным элементом алгебры Ли L^r** .

После построения всех двумерных подалгебр для каждого $x \in \Theta_1$, они подлежат обработке автоморфизмами с целью их упрощения и отсева подобных аналогично тому, как это делалось для одномерных подалгебр. В итоге получается оптимальная система Θ_2 .

Систему Θ_3 можно строить *методом расширения* двумерных подалгебр. Для этого берется какая-нибудь двумерная подалгебра

из системы Θ_2 с базисом $\{x_1, x_2\}$ и ищется такой вектор $y = y^\alpha u_\alpha$, с которым тройка (x_1, x_2, y) образовывала бы базис трехмерной подалгебры. Для этого необходимо и достаточно, чтобы вектор y удовлетворял уравнениям, вытекающим из системы (7.1):

$$\left. \begin{aligned} C_{\beta\gamma}^\alpha x_1^\beta y^\gamma &= \lambda_1 y^\alpha + \mu_1 x_1^\alpha + \nu_1 x_2^\alpha, \\ C_{\beta\gamma}^\alpha x_2^\beta y^\gamma &= \lambda_2 y^\alpha + \mu_2 x_1^\alpha + \nu_2 x_2^\alpha \end{aligned} \right\} \quad (\alpha = 1, \dots, r) \quad (8.3)$$

с $r+6$ неизвестными $y^\alpha, \lambda_i, \mu_i, \nu_i$. Каждое решение системы (8.3), линейно независимое с $\{x_1, x_2\}$, дает трехмерную подалгебру алгебры Ли L^r .

Возникает вопрос, все ли трехмерные подалгебры получаются этим построением? Очевидно, что этот вопрос равносильен такому: всякая ли трехмерная подалгебра содержит двумерную подалгебру? В более широкой постановке он сводится к выяснению того, существуют ли трехмерные вещественные алгебры Ли, не содержащие двумерных подалгебр.

Ответ положительный и примером служит алгебра Ли с базисом $\{u_1, u_2, u_3\}$ и структурой

$$[u_1, u_2] = u_3, \quad [u_2, u_3] = u_1, \quad [u_3, u_1] = u_2. \quad (8.4)$$

Эта алгебра Ли соответствует группе вращений трехмерного пространства R^3 в смысле 12.10 и потому будет кратко называться *алгеброй Ли вращений*. Оказывается, что этот пример является единственно возможным.

Л е м м а. *Любая трехмерная вещественная алгебра Ли, не содержащая двумерных подалгебр, изоморфна алгебре Ли вращений (8.4).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть L^3 не имеет двумерных подалгебр и $x \in L^3$. Тогда необходимо ранг L^3 равен единице и ее характеристическое уравнение сводится к квадратному

$$\lambda^2 - \tau_1(x)\lambda + \tau_2(x) = 0,$$

не имеющему вещественных корней. Пусть $\lambda = \lambda_1 \pm i\lambda_2$ — его комплексные корни ($\lambda_2 \neq 0$). Тогда решение y уравнения $\text{ad}(x)\langle y \rangle = (\lambda_1 + i\lambda_2)y$ также будет комплексным, например $y = y_1 + iy_2$, где $y_1, y_2 \in L^3$, и это уравнение после разделения действительной и мнимой частей даст соотношения

$$\text{ad}(x)\langle y_1 \rangle = \lambda_1 y_1 - \lambda_2 y_2, \quad \text{ad}(x)\langle y_2 \rangle = \lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2.$$

Отсюда легко получается равенство

$$\text{ad}(x)\langle [y_1, y_2] \rangle = 2\lambda_1 [y_1, y_2],$$

в силу которого требование отсутствия двумерных подалгебр необходимо влечет равенство $\lambda_1 = 0$ и существование такого $\mu \neq 0$, с которым

$$[y_1, y_2] = \mu x.$$

Следовательно, векторы y_1, y_2, x линейно независимы и образуют базис в L^3 с таблицей коммутаторов

$$[y_1, y_2] = \mu x, \quad [y_2, x] = \lambda_2 y_1, \quad [x, y_1] = \lambda_2 y_2. \quad (8.5)$$

В результате преобразования $y'_1 = ay_1, y'_2 = ay_2, x' = bx$ с вещественными a, b постоянные μ и λ_2 примут значения

$$\mu' = (a^2/b)\mu, \quad \lambda'_2 = b\lambda_2.$$

Теперь видно, что выбором подходящих значений a и b можно добиться того, чтобы было $\lambda'_2 = 1$ и $\mu' = \pm 1$. Однако если $\lambda_2 = 1$ и $\mu = -1$, то из (8.5) следует равенство

$$[y_2, x + y_1] = x + y_1,$$

показывающее, что пара $(y_2, x + y_1)$ порождает двумерную подалгебру. Поэтому остается единственная возможность $\lambda_2 = \mu = 1$, а тогда (8.5) совпадает с (8.4) с точностью до обозначений. ■

9. Пример. Рассматривается алгебра Ли операторов L^4 , полученная в примере 5.9. Для упрощения выкладок базис 5 (9.9) заменяется следующим базисом:

$$u_1 = \zeta_1, \quad u_2 = 2\zeta_4 - \zeta_2, \quad u_3 = \zeta_3, \quad u_4 = \zeta_4.$$

Вычисление коммутаторов базисных векторов по формуле 7 (1.2) приводит к таблице коммутаторов

	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	0	$3u_1$	u_3	0
u_2	$-3u_1$	0	$3u_3$	0
u_3	$-u_2$	$-3u_3$	0	0
u_4	0	0	0	0

(9.1)

Общий вектор $x \in L^4$ представляется в виде $x = x^a u_a$. В дальнейшем подалгебра N с базисом $\{x_1, \dots, x_k\}$ обозначается символом $N(x_1, \dots, x_k)$.

Таблица (9.1) дает следующие сведения о структуре алгебры Ли L^4 . Сразу видны ее центр $Z = N(u_4)$ и справедливость разложения $L^4 = Z \oplus N(u_1, u_2, u_3)$. Как выяснится ниже, подалгебра $N(u_1, u_2, u_3)$ полупроста, откуда в силу теоремы Мальцева—Харриш-Чандра 14.7 следует, что $N(u_4) = R$ есть радикал, а $L^3 = N(u_1, u_2, u_3)$ — фактор Леви.

Присоединенное отображение (внутреннее дифференцирование) $\text{ad}(v)$ для общего вектора $v = v^1 u_1 + v^2 u_2 + v^3 u_3 \in L^3$ вычисляется автоматически по формуле (1.2) и оказывается таким:

$$\text{ad}(v)\langle x \rangle = (3v^2 x^1 - 3v^1 x^2)u_1 + (v^3 x^1 - v^1 x^3)u_2 + (3v^3 x^2 - 3v^2 x^3)u_3. \quad (9.2)$$

Отсюда следует представление отображения $\text{ad}(v)$ в матричной форме

$$\text{ad}(v) = \begin{pmatrix} 3v^2 & -3v^1 & 0 \\ v^3 & 0 & -v^1 \\ 0 & 3v^3 & -3v^2 \end{pmatrix}. \quad (9.3)$$

Форма Киллинга (5.2) находится перемножением двух матриц вида (9.3)

$$K \langle x, y \rangle = 6(3x^2y^2 - x^1y^3 - x^3y^1)$$

и, очевидно, не вырождена. Поэтому полупростота алгебры Ли L^3 следует из критерия Картана 14.6.

Общий автоморфизм группы $\text{Int } L^3$ удобно находить методом, изложенным в 14.4 путем построения однопараметрических групп автоморфизмов $A_\alpha(t)$ для каждого базисного вектора u_α ($\alpha=1, 2, 3$). Например, чтобы найти соответствующую вектору u_1 группу $A_1(t)$, надо решить уравнение (4.1) с $u=u_1$. В силу (9.2), где надо положить $v^1=1$, $v^2=v^3=0$, это дает уравнение

$$\partial_t x'^1 u_1 + \partial_t x'^2 u_2 + \partial_t x'^3 u_3 = -3x'^2 u_1 - x'^3 u_2,$$

равносильное системе

$$\partial_t x'^1 = -3x'^2, \quad \partial_t x'^2 = -x'^3, \quad \partial_t x'^3 = 0,$$

которую надо решить с начальными условиями $x'^\alpha = x^\alpha$ ($\alpha=1, 2, 3$). Это решение строится элементарно и дает матрицу автоморфизма

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & -3t & \frac{3}{2}t^2 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогичные вычисления для векторов u_2 и u_3 дают автоморфизмы

$$A_2(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}, \quad A_3(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ \frac{3}{2}t^2 & 3t & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее надо действовать по правилу (4.6). Здесь удобно положить $t=2a$ для A_1 , $t=\frac{1}{3}\ln b$ для A_2 и $t=2c$ для A_3 и составить произведение $A = A_1(2a) \circ A_3(2c) \circ A_2(\frac{1}{3}\ln b)$. В результате получается общий автоморфизм $A \in \text{Int } L^3$, зависящий от трех параметров a, b, c

$$A = \begin{pmatrix} p^2b & -6pa & 6a^2b^{-1} \\ 2pbc & 1-12ac & -2ab^{-1} \\ 6bc^2 & 6c & b^{-1} \end{pmatrix}, \quad (9.4)$$

где $p = 1 - 6ac$, $b > 0$ и тождественный автоморфизм получается при $a = c = 0$, $b = 1$.

Теперь можно найти координаты вектора $x' = A\langle x \rangle$ в базисе $\{u_a\}$:

$$\left. \begin{aligned} x'^1 &= p^2 b x^1 - 6 p a x^2 + 6 a^2 b^{-1} x^3, \\ x'^2 &= 2 p b c x^1 + (1 - 12 a c) x^2 - 2 a b^{-1} x^3, \\ x'^3 &= 6 b c^2 x^1 + 6 c x^2 + b^{-1} x^3. \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

Разбиение пространства L^3 на классы подобных векторов здесь удобно выполнить на основании свойства инвариантности формы Киллинга, в силу которого функция

$$(1/6) K\langle x, x \rangle = 3(x^2)^2 - 2x^1 x^3$$

является инвариантом группы $\text{Int } L^3$. Этот факт легко проверяется и прямым вычислением на основании формул (9.5). Поэтому все векторы $u = x^a u_a$ (одномерные подалгебры) подразделяются на три непересекающиеся класса

$$(\alpha) \ K\langle x, x \rangle > 0, \quad (\beta) \ K\langle x, x \rangle < 0, \quad (\gamma) \ K\langle x, x \rangle = 0.$$

Представителем класса (α) является вектор u_2 . Легко проверяется, что преобразованием (9.5) любой вектор $u = x^a u_a$, принадлежащий классу (α) , можно перевести в u_2 . Аналогично любой вектор класса (β) подобен вектору $u_1 + u_3$. В классе (γ) не может быть $x^1 = x^3 = 0$. Поэтому за счет выбора в (9.5) подходящих значений параметров a или c всегда можно добиться того, чтобы было $x'^2 = 0$. Но тогда в классе (γ) будет $x^1 x^3 = 0$ и либо $x^1 = 0$, $x^3 \neq 0$, либо $x^1 \neq 0$, $x^3 = 0$. Это дает векторы u_1 и u_3 . Но вектор u_3 подобен вектору u_1 , так как автоморфизм (9.5), примененный к u_1 , дает вектор с координатами

$$x'^1 = p^2 b, \quad x'^2 = 2 p b c, \quad x'^3 = 6 b c^2,$$

который при $p = 0$ отличается лишь несущественным множителем от вектора u_3 . Поэтому в качестве единственного представителя класса (γ) можно взять вектор u_1 . Окончательно оптимальная система Θ_1 алгебры Ли L^3 такова:

$$N(u_1), \quad N(u_2), \quad N(u_1 + u_3). \quad (9.6)$$

Построение системы Θ_2 . Один из базисных векторов любой двумерной подалгебры можно считать совпадающим с каким-либо вектором (9.6). Пусть эта подалгебра есть $N(u_1, u)$. Тогда второй вектор достаточно взять в виде $u = x^2 u_2 + x^3 u_3$. Так как $[u_1, x^2 u_2 + x^3 u_3] = 3x^2 u_1 + x^3 u_2$, то уравнение (8.1) будет таким:

$$3x^2 u_1 + x^3 u_2 = \lambda x^2 u_2 + \lambda x^3 u_3 + \mu u_1,$$

откуда $3x^2 = \mu$, $x^3 = \lambda x^2$, $0 = \lambda x^3$ и единственное (с точностью до множителя) решение есть $u = u_2$. Это дает подалгебру $N(u_1, u_2)$.

Далее, пусть искомая подалгебра есть $N(u_2, u)$, где $u = x^1 u_1 + x^3 u_3$. Здесь уравнение (8.1) таково:

$$-3x^1 u_1 + 3x^3 u_3 = \lambda x^1 u_1 + \lambda x^3 u_3 + \mu u_2,$$

откуда $\mu = 0$, $(\lambda + 3)x^1 = 0$, $(\lambda - 3)x^3 = 0$. Если $x^3 = 0$, то снова получается подалгебра $N(u_1, u_2)$, а если $x^3 \neq 0$, то $\lambda = 3$ и $x^1 = 0$. Это дает подалгебру $N(u_2, u_3)$.

Аналогичный анализ для подалгебр типа $N(u_1 + u_3, u)$ показывает, что таковых нет вообще. Следовательно, оптимальная система Θ_2 для алгебры Ли L^3 состоит из двух подалгебр

$$N(u_1, u_2), \quad N(u_2, u_3). \quad (9.7)$$

Наконец, оптимальная система Θ_3 содержит лишь одну подалгебру — саму алгебру Ли $L^3 = N(u_1, u_2, u_3)$. Тем самым задача построения оптимальных систем подалгебр решена для L^3 .

Добавление оператора типа qu_4 к любому из полученных и проверка свойства быть подалгеброй окончательно приводит к следующей таблице оптимальных систем Θ_k для алгебры Ли L^4 :

k	1	2	3	4
Θ_k	$u_1 + qu_4$ $u_2 + qu_4$ $u_1 + u_3 + qu_4$ u_4	u_1, u_4 u_2, u_4 $u_1 + u_3, u_4$ $u_1, u_2 + qu_4$ $u_2 + qu_4, u_3$	u_1, u_2, u_3 u_1, u_2, u_4 u_2, u_3, u_4	u_1, u_2, u_3, u_4

(9.8)

Здесь q — произвольный вещественный параметр. Различным значениям q соответствуют не подобные подалгебры.

§ 15. Соответствие групп и алгебр Ли

1. Алгебра Ли группы Ли. Согласно 12.12 существует взаимно однозначное соответствие классов $Q(B, \varphi)$ изоморфных банаховых групп Ли и классов $Q(B, C)$ изоморфных банаховых алгебр Ли. В данном параграфе будет показано, что это соответствие продолжается на подчиненные объекты, а именно, подгруппы и подалгебры, нормальные делители и идеалы и т. п. При этом удобно пользоваться следующим определением.

Банахова алгебра Ли L называется алгеброй Ли банаховой группы (B, φ) , если векторное пространство L совпадает с B и если коммутатор $[u, v]$ в L задается с помощью структурного оператора C группы (B, φ) формулой

$$[u, v] = C \langle u, v \rangle. \quad (1.1)$$

Для простоты ниже рассматриваются только группы и алгебры Ли конечной размерности. В этом случае, в силу определения 12.16 структурных констант группы G' и свойства 13 (2.2) структурных констант алгебры Ли L' , из данного определения вытекает следующий вывод. Алгебра Ли L' есть алгебра Ли группы G' , если и только если структуры L' и G' определены на одном и том же g -мерном банаховом пространстве $B=K'$ и если в B существует такой базис, в котором структурные константы алгебры Ли L' равны соответствующим структурным константам группы G' .

Установленное данным определением соответствие алгебр и групп Ли сохраняется при изоморфизмах. Действительно, изоморфизм группы G' на группу G'' , структура которой определена на пространстве B' есть, согласно определению 12.3 и критерию 12.16, такое обратимое отображение $\gamma: B \rightarrow B'$, которое сохраняет структурные константы группы G' . Поэтому структурные константы алгебры Ли L'' группы G'' равны соответствующим структурным константам алгебры Ли L' и в силу леммы 13.3 алгебра Ли L'' изоморфна L' . Этот последний изоморфизм, согласно формулам 12 (10.2) и 13 (3.1), есть $\partial\gamma(0)$.

В дальнейшем векторы $e \in L'$ алгебры Ли L' группы G' рассматриваются как направляющие векторы однопараметрических подгрупп группы G' (см. 12.5). Это означает, что если $\{g(t)\}$ есть однопараметрическая подгруппа в G' , то $\partial_t g(0) = e$. Детализация соответствия групп и алгебр Ли связана с важным свойством группового коммутатора $q: B^2 \rightarrow B$, действующего по формуле $q(a, b) = a \cdot b \cdot a^{-1} \cdot b^{-1}$. Если взять однопараметрические подгруппы $\{g_1(t)\}, \{g_2(t)\} \subset G'$, то для любого $t \in K, t \geq 0$, можно рассмотреть групповой коммутатор

$$q(t) = g_1(\sqrt{t}) \cdot g_2(\sqrt{t}) \cdot g_1^{-1}(\sqrt{t}) \cdot g_2^{-1}(\sqrt{t}).$$

Лемма (о коммутаторе). Если $\partial_t g_i(0) = e_i$ ($i = 1, 2$), то

$$\partial_t q(0) = [e_1, e_2]. \quad (1.2)$$

Доказательство. В силу теоремы 12.5 для любой однопараметрической подгруппы $\{g(t)\}$ с направляющим вектором e справедливо представление

$$g(t) = te + \frac{1}{2} t^2 \partial A(0) \langle e, e \rangle + t^3 F(t),$$

где функция $F: R \rightarrow B$ ограничена в окрестности нуля. Выкладки, аналогичные проделанным при доказательстве леммы 7.10, приводят к выражению

$$\partial_t q(0) = \partial A(0) \langle e_1, e_2 \rangle - \partial A(0) \langle e_2, e_1 \rangle,$$

которое, согласно определению 12 (9.1), равно значению структурного оператора $C \langle e_1, e_2 \rangle$. Поэтому равенство (1.2) следует из (1.1). ■

2. Подгруппы и подалгебры. Пусть дана банахова группа Ли $G' = (B, \varphi)$, причем размерность пространства B равна r , и пусть $0 < s \leq r$. Рассматриваются s -мерные многообразия $H \subset B$, заданные параметрически формулой $H = \sigma(R^s)$ с помощью обратимого отображения $\sigma: R^s \rightarrow B$ класса $C_\infty(R^s)$, удовлетворяющего условиям $\sigma(0) = 0$ и $\text{rank}(\partial\sigma(0)) = s$. Пусть O — некоторая окрестность нуля пространства R^s и $O' = \sigma(O)$ — ее образ в H при отображении σ .

Пара (O', φ) называется *подгрупповым ядром группы* (B, φ) , если $\varphi(a, b) \in H$ для любых $a, b \in O'$. В локальной теории подгрупповые ядра, получаемые при изменении окрестности O' и пространства R^s не различаются и образуют класс эквивалентности, определяемый свойствами многообразия H в сколь угодно малой окрестности нуля пространства B .

Непустой класс неразличимых подгрупповых ядер (O', φ) называется s -параметрической подгруппой Ли группы Ли (B, φ) .

Подгруппа Ли группы (B, φ) , заданная как многообразие $H \subset B$, будет обозначаться символом (H, φ) или H^s , или просто H .

Пространство R^s и отображение σ играют в этой конструкции служебную роль. В частности, R^s всегда можно рассматривать как подпространство $B' \subset B$ и считать совпадающим с подпространством $B' = \partial\sigma(0)(R^s)$, касательным к многообразию H в нуле, а отображение σ предполагать нормированным так, чтобы было $\partial\sigma(0) = I_{B'}$.

На многообразии $H = \sigma(B')$ можно ввести векторную структуру, определив сложение $\#$ и умножение $*$ на числа $\lambda \in R$ векторов $a \in H$ формулами

$$a \# b = \sigma(\sigma^{-1}(a) + \sigma^{-1}(b)), \quad \lambda * a = \sigma(\lambda \sigma^{-1}(a)),$$

где обычные сложение и умножение на числа выполняются на подпространстве $B' \subset B$. Легко проверить, что с этой векторной структурой и нормой $\|a\| = |\sigma^{-1}(a)|$ многообразие H становится банаховым пространством.

Сравнение определения подгруппового ядра с определением 12.1 показывает, что пара (O', φ_H) , где φ_H есть сужение умножения φ на многообразие H , есть групповое ядро на банаховом пространстве H . Поэтому *всякая подгруппа Ли группы (B, φ) сама является группой Ли.*

Так как в определении 12 (5.1) однопараметрической подгруппы группы Ли (B, φ) существен только закон умножения, а векторная структура пространства B не участвует, то любая однопараметрическая подгруппа подгруппы Ли $H \subset (B, \varphi)$ является также однопараметрической подгруппой группы (B, φ) . Поэтому каждая однопараметрическая подгруппа $\{g(t)\}$ группы (B, φ) локально либо лежит в H целиком, либо ее пересечение с H есть $\{0\}$.

Л е м м а. Если (B, φ) — каноническая группа, то любая ее s -параметрическая подгруппа Ли H^s является «плоским» многообразием $H^s \subset B$, т. е. в окрестности нуля $O \subset B$ совпадает с s -мерным подпространством пространства B . Кроме того, H^s — также каноническая группа Ли.

Доказательство. Любая однопараметрическая подгруппа $\{g(t)\} \subset H^s$ есть прямая в B , а потому локально для любых $a \in H^s$, $\lambda \in \mathbb{R}$ также $\lambda a \in H^s$. Следовательно, если $|t| < 1$, то для любых $a, b \in O'$ также $t^{-1}\varphi(ta, tb) \in H^s$, и так как подмножество H^s замкнуто в B , то и $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}\varphi(ta, tb) \in H^s$. Вычисление дает

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}\varphi(ta, tb) = \partial\varphi(0, 0)\langle a, b \rangle = a + b$$

и в силу предыдущего $a + b \in H^s$. Это показывает, что локально H^s есть векторное пространство и потому совпадает с s -мерным подпространством B' пространства B . Так как векторные структуры многообразия H^s и подпространства B' при этом также совпадают (в качестве σ можно взять вложение $H^s \rightarrow B$), то все однопараметрические подгруппы группы (H^s, φ) — прямые в группе Ли H^s , т. е. H^s — каноническая группа. ■

Теорема. Пусть L^* есть алгебра Ли канонической группы $G^* = (B, \varphi)$. Если H^s — подгруппа Ли группы G^* , то алгебра Ли L^s группы H^s есть подалгебра алгебры Ли L^* .

Обратно, если дана подалгебра $L^s \subset L^*$, то существует подгруппа $H^s \subset G^*$, для которой L^s есть ее алгебра Ли.

Доказательство. Пусть H^s — подгруппа Ли группы G^* . В силу леммы $B' = H^s$ есть векторное подпространство в B . Если $e_1, e_2 \in B'$, то однопараметрические подгруппы $\{te_1\}$ и $\{te_2\}$ принадлежат B' . Так как H^s — группа, то также $q(t) = (te_1) \cdot (te_2) \cdot (te_1)^{-1} \cdot (te_2)^{-1} \in B'$ для любого t . В силу леммы 15.1 отсюда следует, что $\partial_t q(\sqrt{t})|_{t=0} = [e_1, e_2] \in B'$. Поэтому $B' = L^s$ есть алгебра Ли группы H^s и операция коммутации в L^s совпадает с операцией коммутации в $B = L^*$. Согласно определению 13.4 это означает, что L^s есть подалгебра в L^* .

Обратно, пусть дана подалгебра $L^s \subset L^*$. Согласно 12.15 умножение φ может быть представлено SCH -рядом 12 (15.5), который выражает $\varphi(a, b)$ через значения «длинных» коммутаторов, составленных из элементов a, b . Поэтому, если $a, b \in B' = L^s$, то в силу определения подалгебры 13.4 также $\varphi(a, b) \in B'$. Следовательно, (B', φ) есть подгруппа Ли группы (B, φ) . Кроме того, по построению, сужение C на B' есть структурный оператор подгруппы (B', φ) , в силу чего L^s есть ее алгебра Ли. ■

3. Нормальные делители и идеалы. В 12.3 уже было определено понятие автоморфизма группы (B, φ) как такого преобразования $P: B \rightarrow B$ класса $C_\infty(O)$ на некоторой окрестности

нуля $O \subset B$, которое для любых $a, b \in O$ удовлетворяет соотношению

$$P(a \cdot b) = P(a) \cdot P(b). \quad (3.1)$$

В группе $\text{Aut}(B, \varphi)$ всех автоморфизмов группы $G' = (B, \varphi)$ выделяются специальные автоморфизмы, порождаемые элементами самой группы G' .

Преобразование $P_a: B \rightarrow B$ группы G' , действующее по формуле

$$P_a(b) = a^{-1} \cdot b \cdot a, \quad (3.2)$$

называется **внутренним автоморфизмом группы G'** .

Очевидно, что для P_a выполнено соотношение (3.1), так что любой внутренний автоморфизм является автоморфизмом группы G' . В дальнейшем выяснится, что совокупность всех внутренних автоморфизмов P_a группы G' , получаемая когда a пробегает всю группу G' , образует локальную группу Ли. Эта группа называется **группой внутренних автоморфизмов группы $G' = (B, \varphi)$** и будет обозначаться символом $\text{Int}(B, \varphi)$ или $\text{Int } G'$.

Если (B, φ) — каноническая группа, то в силу теоремы 12.7 любой ее автоморфизм есть линейное преобразование пространства B . В этом случае внутренние автоморфизмы могут быть выражены явно через вспомогательные отображения $A(a)$ и $V(a)$ группы (B, φ) .

Лемма. Если (B, φ) — каноническая группа, то

$$a^{-1} \cdot b \cdot a = V(a) \circ A(-a) \langle b \rangle. \quad (3.3)$$

Доказательство. Так как P_a есть линейное отображение, то $P_a \langle b \rangle = \partial P_a(0) \langle b \rangle$. Для вычисления производной надо заметить, что в канонической группе $a^{-1} = -a$, в силу чего

$$\partial P_a(0) = \partial_b \varphi(\varphi(-a, b), a)|_{b=0} = \partial_1 \varphi(-a, a) \circ \partial_2 \varphi(-a, 0).$$

Но $\partial_2 \varphi(-a, 0) = A(-a)$ и дифференцирование тождества $\varphi(-a, a) = 0$ дает $\partial_1 \varphi(-a, a) = \partial_2 \varphi(-a, a) = V(a)$ (см. 12.4). Поэтому $\partial P_a(0) = V(a) \circ A(-a)$. ■

Подгруппа $H^* \subset G'$ называется **нормальным делителем группы G'** , если она инвариантна относительно любого внутреннего автоморфизма $P_a \in \text{Int } G'$. Это означает, что для каждого $a \in G'$ и любого $b \in H^*$ также $P_a(b) \in H^*$.

Теорема. Пусть H^* — подгруппа Ли канонической группы $G' = (B, \varphi)$, L^* — алгебра Ли группы G' и L^* — алгебра Ли подгруппы Ли H^* . Тогда H^* является нормальным делителем группы G' , если и только если L^* есть идеал в L^* .

Доказательство. Повторение первой части доказательства теоремы 15.2 с векторами $e_1 \in B'$, $e_2 \in B$ показывает, что если $B' = H^*$ есть нормальный делитель группы G' , то $[e_1, e_2] \in B'$.

Согласно определению 13.4 это означает, что $B' = L'$ есть идеал в L' . Обратно, если L' есть идеал в L' и $a \in L'$, $b \in L'$, то любой «длинный» коммутатор, составленный из векторов a, b , принадлежит подпространству $L' = B'$. В силу представления умножения φ в виде SCH -ряда 12 (15.5) также $\varphi(a, b) = a \in B'$. Поэтому линейное отображение $A(a) = \partial_2 \varphi(a, 0)$ отображает B' в B' . Но тогда это верно также для $V(a)$, $A(-a)$ и $V(a) \circ A(-a)$. Согласно лемме это означает, что подпространство B' , которое по теореме 15.2 есть подгруппа $H^s \subset G'$, является нормальным делителем группы G' . ■

4. Центры. Элемент $b \in G'$ называется **центральным элементом**, если для любого $a \in G'$ выполнено равенство $a \cdot b = b \cdot a$. Переписанное в виде $b = a^{-1} \cdot b \cdot a$ это равенство показывает, что данное определение равносильно следующему: элемент $b \in G'$ является центральным, если он остается неподвижным при любом внутреннем автоморфизме P_a .

Совокупность всех центральных элементов группы G' образует ее подгруппу, называемую **центром** этой группы.

Центр является подгруппой Ли группы G' . Действительно, если $G' = (B, \varphi)$ — каноническая группа, то, так как любой ее внутренний автоморфизм есть линейное отображение, вместе с b он оставляет неподвижными все элементы вида tb , т. е. всю однопараметрическую подгруппу, проходящую через центральный элемент b . Как и в доказательстве леммы 15.2 отсюда следует, что если центру принадлежат a и b , то ему принадлежит и $a + b$. Поэтому центр локально, в некоторой окрестности нуля $O \subset B$, совпадает с векторным подпространством $B' \subset B$. Следовательно, центр канонической группы есть ее подгруппа Ли. Наконец, легко проверяется, что при изоморфизмах групп центр переходит в центр.

Так как центр, очевидно, инвариантен относительно любых внутренних автоморфизмов, то в силу предыдущего он является нормальным делителем. Следующая теорема устанавливает соответствие между центрами группы G' и ее алгебры Ли L' .

Теорема. Если $H^s = B'$ есть центр канонической группы $G' = (B, \varphi)$, то подпространство $B' \subset B$ является центром алгебры Ли L' группы G' .

Обратно, если Z есть центр алгебры Ли L' , то $H^s = Z$ есть центр группы G' .

Доказательство. Повторение первой части доказательства теоремы 15.3 применительно к центру $H^s = B'$ группы G' показывает, что $[e_1, e_2] = 0$ для любых $e_1 \in B'$, $e_2 \in B$. Согласно определению 13.4 это означает, что $B' = L'$ есть центр алгебры Ли L' . Обратно, если Z — центр в L' и $a \in L'$, $b \in Z$, то все «длинные» коммутаторы, составленные из векторов a, b равны нулю и SCH -ряд 12 (15.5) принимает вид $\varphi(a, b) = a + b$. Отсюда $a \cdot b = b \cdot a$ и b — цен-

тральный элемент группы G^r . Следовательно, элементы $b \in Z$ и только они — центральные в группе G^r , т. е. $H^s = Z$ есть ее центр. ■

5. Факторгруппы и факторалгебры. Пусть H^s — подгруппа группы G^r . Для элементов $a, b \in G^r$ определяется отношение $\sim$ по следующему правилу: $b \sim a$, если $ba^{-1} \in H^s$. Очевидно, что отношение $\sim$ является теоретико-множественным признаком эквивалентности. Тем самым, по отношению $\sim$ группа G^r разбивается на непересекающиеся классы элементов, эквивалентных относительно подгруппы H^s . Здесь эти классы будут обозначаться $\bar{a}, \bar{b}, \dots$

Если H^s есть нормальный делитель группы $G^r = (B, \varphi)$, то для классов $\bar{a}, \bar{b}, \dots$ корректно определена операция умножения

$$\psi(\bar{a}, \bar{b}) = \overline{\varphi(a, b)}, \quad (5.1)$$

где $a \in \bar{a}, b \in \bar{b}$. При этом значение $\psi(\bar{a}, \bar{b})$ не зависит от выбора элементов a, b — представителей классов $\bar{a}, \bar{b}$. Легко проверяется, что для умножения ψ выполнены аксиомы группового умножения, чем оправдано следующее определение.

Совокупность классов $\{\bar{a}\}$ элементов группы G^r , эквивалентных относительно ее нормального делителя H^s , называется факторгруппой группы G^r по H^s . Факторгруппа обозначается символом G^r/H^s .

Ниже устанавливается, что факторгруппа G^r/H^s является группой Ли.

Пусть $G^r = (B, \varphi)$ — каноническая группа. Тогда ее нормальный делитель $H^s = B'$ есть подпространство в B и существует разложение в прямую сумму $B = B' \oplus B''$, так что каждый вектор $a \in B$ однозначно представим в виде $a = a' + a''$, где $a' \in B', a'' \in B''$. При этом, как показано в 15.3, подпространство $B' = L^s$ есть идеал в алгебре Ли $B = L^r$ группы (B, φ) . Это означает, что для любых $a, b \in B$ справедливо равенство

$$[a, b']'' = 0. \quad (5.2)$$

Лемма. Пусть $a \in \bar{a}, b \in \bar{b}$. Тогда $\bar{b} = \bar{a}$, если и только если $b'' = a''$.

Доказательство. Используется соотношение $a^{-1} = -a$, справедливое в канонической группе. Вначале устанавливается, что свойство подпространства $H^s = B'$ быть нормальным делителем группы (B, φ) равносильно выполнению равенства

$$\varphi''(a, b) = \varphi''(a'', b'') \quad (5.3)$$

для любых $a, b \in B$. Действительно, если B' — нормальный делитель, то $[a, b]'' = [a'', b'']''$ в силу (5.2) и аналогичное равенство справедливо для любого «длинного» коммутатора, входящего в SCH-ряд 12 (15.5). Поэтому верно равенство (5.3). Обратно,

если (5.3) выполнено, то для любых $a \in B$, $b' \in B'$ справедливы равенства

$$\varphi''(\varphi(a, b'), -a) = \varphi''(\varphi''(a, b'), -a'') = \varphi''(a'', -a'') = 0,$$

откуда следует включение $a \cdot b' \cdot a^{-1} \in B'$. Поэтому B' — нормальный делитель группы (B, φ) .

Если $b = \bar{a}$, то $b \cdot a^{-1} \in B'$ или $\varphi''(b, -a) = 0$. В силу (5.3) это означает, что $\varphi''(b'', -a'') = 0$, откуда $b'' = a''$. Обратно, если $b'' = a''$, то из (5.3) следует, что $\varphi''(b, -a) = 0$, а это означает включение $\varphi(b, -a) \in B'$ или $b \cdot a^{-1} \in H^s$. Поэтому $b \sim a$ и $b = \bar{a}$. ■

Из равенства (5.3) следует, что элементы $a'' \in B''$ вместе с законом умножения φ'' образуют локальную группу Ли. В силу леммы вместо a'' элементами этой группы можно считать классы $\bar{a}$, причем закон умножения (5.1) переписывается в виде $\psi(\bar{a}, \bar{b}) = \varphi''(a'', b'')$. Тем самым показано, что факторгруппа G'/H^s канонической группы G' является локальной группой Ли. Для произвольной (не канонической) группы G'' этот факт справедлив в силу того, что при изоморфизме групп нормальный делитель переходит в нормальный делитель и класс эквивалентных элементов — в класс эквивалентных элементов. Поэтому, если γ — изоморфизм и $G'^r = \gamma(G')$, $H'^s = \gamma(H^s)$, то также $G''^r/H'^s = \gamma(G'/H^s)$, и если G'/H^s — группа Ли, то такой является и G''^r/H'^s .

Т е о р е м а. Пусть J^s есть идеал в алгебре Ли L' группы G' , являющийся алгеброй Ли нормального делителя H^s группы G' . Тогда факторалгебра L'/J^s есть алгебра Ли факторгруппы G'/H^s .

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу свойства сохранения соответствия групп и алгебр Ли при изоморфизмах достаточно доказать этот факт для канонической группы $G' = (B, \varphi)$. В этом случае алгеброй Ли нормального делителя $H^s = B'$ является прямое слагаемое $B' = J^s$ в разложении $B = B' \oplus B''$. Из доказательства леммы следует, что операция коммутации в алгебре Ли факторгруппы G'/H^s дается формулой $[\bar{a}, \bar{b}] = [a'', b'']'$. Но классы $\bar{a}$ являются элементами факторалгебры L'/J^s и простая проверка определения 13.5 показывает, что их коммутатор совпадает с $[a'', b'']'$. ■

6. Гомоморфизмы. Пусть даны группы Ли G , G_1 и гомоморфизм $\gamma: G \rightarrow G_1$. Совокупность G_0 элементов $b \in G$, для которых $\gamma(b) = 0$, называется **ядром гомоморфизма** γ .

Из определения 12.3 гомоморфизма групп следует, что если $b \in G_0$, то для любого $a \in G$ справедливы равенства

$$\gamma(a^{-1} \cdot b \cdot a) = \gamma(a^{-1}) \cdot \gamma(b) \cdot \gamma(a) = (\gamma(a))^{-1} \cdot \gamma(a) = 0,$$

т. е. также $a^{-1} \cdot b \cdot a \in G_0$. Согласно определениям 15.3 это означает, что G_0 есть нормальный делитель группы G и является группой Ли. Кроме того, образ $\gamma(G)$ в группе G_1 есть подгруппа, связь которой с группой G утверждается следующим предложением.

Л е м м а. Группа $\gamma(G)$ изоморфна факторгруппе G/G_0 .

Доказательство. Пусть $\sim$ есть отношение эквивалентности в группе G относительно ее нормального делителя G_0 . Если $b \sim a$, т. е. $b \cdot a^{-1} \in G_0$, то $\gamma(b \cdot a^{-1}) = \gamma(b) \cdot (\gamma(a))^{-1} = 0$, откуда $\gamma(b) = \gamma(a)$. Так как и, наоборот, $\gamma(b) = \gamma(a)$ влечет $b \sim a$, то элементы $\gamma(a) \in \gamma(G)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами $\bar{a}$ факторгруппы G/G_0 . Поэтому отображение $\gamma_1: G/G_0 \rightarrow \gamma(G)$, определенное для $a \in \bar{a}$ формулой $\gamma_1(\bar{a}) = \gamma(a)$, есть изоморфизм. ■

Элементы группы G_1 , лежащие вне ее подгруппы $\gamma(G)$, на свойства рассматриваемого гомоморфизма γ никак не влияют, в силу чего можно ограничиться рассмотрением гомоморфизмов на. Кроме того, очевидно, что поведение алгебр Ли при гомоморфизмах групп достаточно изучить для канонических групп.

Теорема. Пусть L^r есть алгебра Ли канонической группы $G^r = (B, \varphi)$ и $\gamma: G^r \rightarrow G_1^r$ — гомоморфизм группы G^r на каноническую группу $G_1^r = (B_1, \varphi_1)$, алгебра Ли которой есть L_1^r . Тогда γ есть гомоморфизм алгебры Ли L^r на алгебру Ли L_1^r , ядро которого является алгеброй Ли ядра $G_0 \subset G^r$ группового гомоморфизма.

Доказательство. В силу теоремы 12.7 гомоморфизм γ можно считать линейным отображением $B \rightarrow B_1$. Из леммы 12.10, справедливой не только для изоморфизмов, но и для гомоморфизмов, следует, что $\gamma = \partial\gamma(0)$ есть гомоморфизм L^r на L_1^r . Кроме того, равенство $\gamma \langle a \rangle = 0$ определяет в B одно и то же подпространство B_0 независимо от того, рассматривается γ как гомоморфизм групп или как гомоморфизм их алгебр Ли. Поэтому идеал $J_0 \subset L^r$, являющийся алгеброй Ли ядра G_0 группового гомоморфизма γ , совпадает с B_0 и есть ядро отображения γ как гомоморфизма алгебр Ли. ■

7. Группы внутренних автоморфизмов. Понятие внутреннего автоморфизма было определено независимо для алгебр Ли в 14.4 и для групп Ли в 15.3. Здесь устанавливается соответствие между группами внутренних автоморфизмов групп и их алгебр Ли.

Лемма 1. Внутренние автоморфизмы группы G^r с центром Z образуют группу Ли $\text{Int } G^r$, изоморфную факторгруппе G^r/Z .

Доказательство. Из определения (3.2) внутреннего автоморфизма P_a следует, что $P_a \circ P_c = P_{a \cdot c}$. Поэтому отображение $\gamma: G^r \rightarrow \text{Int } G^r$, действующее по формуле $\gamma(a) = P_a$, есть гомоморфизм группы $G^r = (B, \varphi)$ в группу преобразований пространства B . Его ядро определяется уравнением $\gamma(a) = I_B$, т. е. равенством $a^{-1} \cdot b \cdot a = b$ для любого $b \in G^r$. Это равенство равносильно включению $b \in Z$. Остальное следует из леммы 15.6 и выводов 15.5. ■

Лемма 2. Пусть $\gamma: a \rightarrow P_a$ есть гомоморфизм канонической группы G^r в группу линейных преобразований конечномерного пространства X , и пусть $E_a = \partial_a P_{1a}|_{t=0}$ — направляющие векторы

однопараметрических подгрупп группы $\gamma(G^r)$. Тогда операция коммутации в алгебре Ли $\{E_a\}$ группы $\gamma(G^r)$ дается формулой

$$[E_a, E_b] = E_a \circ E_b - E_b \circ E_a. \quad (7.1)$$

Доказательство. В силу леммы 15.1 коммутатор $[E_a, E_b]$ равен производной по t при $t=0$ группового коммутатора

$$q(t) = P_{\sqrt{t}a} \circ P_{\sqrt{t}b} \circ P_{\sqrt{t}a}^{-1} \circ P_{\sqrt{t}b}^{-1}.$$

В силу определения E_a справедливо представление

$$P_{ta} = I_X + tE_a + t^2F_a + t^3\Phi(t, a),$$

где норма $|\Phi(t, a)|$ ограничена при $t \rightarrow 0$. Вычисление $q(t)$ с учетом равенства $P_a^{-1} = P_{-a}$, справедливого в силу каноничности группы G^r , и четности F_a (т. е. $F_{-a} = F_a$) дает требуемое выражение

$$q(t) = t(E_a \circ E_b - E_b \circ E_a) + t^{3/2}\Phi_1(t, a, b),$$

где норма $|\Phi_1(t, a, b)|$ ограничена при $t \rightarrow 0$. ■

Теорема. Алгебра Ли группы $\text{Int } G^r$ изоморфна присоединенной алгебре $\mathcal{D}$ алгебры Ли L^r группы G^r .

Доказательство. Пусть $G^r = (B, \varphi)$ — каноническая группа. В силу леммы 15.3 ее внутренние автоморфизмы являются линейными преобразованиями пространства B . Они выражаются через вспомогательные отображения $A(a)$, $V(a)$ этой группы по формуле

$$P_a = V(a) \circ A(-a).$$

Согласно лемме 1 отображение $\gamma: a \rightarrow P_a$ есть гомоморфизм группы G^r на группу $\text{Int } G^r$, т. е. выполнены условия леммы 2. Поэтому операция коммутации в алгебре Ли группы $\text{Int } G^r$ может быть вычислена по формуле (7.1), для чего достаточно найти направляющие векторы E_a однопараметрических подгрупп $\{P_{ta}\}$. При вычислении последних надо учесть два соотношения, первое из которых есть $\partial V(0) + \partial A(0) = 0$ и справедливо для любой группы (B, φ) , а второе, означающее антисимметричность билинейного отображения $\partial V(0): B \times B \rightarrow B$,

$$\partial V(0) \langle h, k \rangle + \partial V(0) \langle k, h \rangle = 0,$$

справедливо в силу каноничности группы (B, φ) . Последнее соотношение равносильно равенству $\partial V(0) \langle a, a \rangle = 0$, которое легко получается дифференцированием по t при $t=0$, необходимого условия каноничности $V(ta) \langle a \rangle = a$, доказанного в 12.5. С учетом этих соотношений вычисление в векторной форме с любым вектором $h \in B$ дает

$$\begin{aligned} E_a \langle h \rangle &= \partial_t P_{ta} \langle h \rangle|_{t=0} = \partial_t (V(ta) \langle A(-ta) \langle h \rangle \rangle)|_{t=0} = \partial V(0) \langle a, h \rangle - \\ &- \partial A(0) \langle a, h \rangle = 2\partial V(0) \langle a, h \rangle = \partial V(0) \langle a, h \rangle - \partial V(0) \langle h, a \rangle = \\ &= C \langle h, a \rangle = [h, a] = \text{ad}(a) \langle h \rangle, \end{aligned}$$

где последнее равенство следует из определения 14 (1.2). Отсюда $E_a = \text{ad}(a)$, т. е. элементами алгебры Ли группы $\text{Int } G'$ являются присоединенные отображения алгебры Ли L' группы G' . Кроме того, в силу леммы 2

$$[E_a, E_b] = \text{ad}(a) \circ \text{ad}(b) - \text{ad}(b) \circ \text{ad}(a),$$

а это есть, согласно 14.2, в точности коммутатор в присоединенной алгебре $\mathcal{D}$.

Итак, в случае канонической группы G' алгебра Ли группы $\text{Int } G'$ совпадает с присоединенной алгеброй $\mathcal{D}$ алгебры Ли L' группы G' . Переход к произвольной группе G'' осуществляется с помощью изоморфизма $G' \rightarrow G''$, который индуцирует изоморфизмы $\text{Int } G' \rightarrow \text{Int } G''$ и $L' \rightarrow L''$, а потому также изоморфизм алгебр Ли групп $\text{Int } G'$ и $\text{Int } G''$ и присоединенных алгебр $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$. Поэтому алгебра Ли группы $\text{Int } G''$ изоморфна присоединенной алгебре $\mathcal{D}'$ (но, вообще говоря, не совпадает с ней). ■

С л е д с т в и е 1. В случае канонической группы $G' = (B, \varphi)$ группа $\text{Int } G'$ совпадает с группой $\text{Int } L'$.

Действительно, они обе являются группами линейных преобразований пространства B с одинаковыми, как было показано в доказательстве теоремы, алгебрами Ли, совпадающими с $\mathcal{D}$.

Интересно отметить, что этот факт можно доказать прямым вычислением отображения $V(a) \circ A(-a)$ с помощью формул 12 (14.2), 12 (14.4) и сравнением результата с 14 (4.2).

С л е д с т в и е 2. Группы внутренних автоморфизмов $\text{Int } G'$ и $\text{Int } L'$ группы G' и ее алгебры Ли L' изоморфны.

Это вытекает из доказанной теоремы и следствия 2 теоремы 12.12.

8. Оптимальные системы подгрупп. Подгруппы H' и H группы G' называются **подобными**, если существует внутренний автоморфизм $P_a \in \text{Int } G'$, с которым $H' = P_a(H)$.

Это отношение подобия подгрупп является, очевидно, теоретико-множественным признаком эквивалентности, с помощью которого всевозможные подгруппы группы G' разбиваются на непересекающиеся классы подобных подгрупп. Тем самым возникает задача о построении *оптимальной системы подгрупп* данной группы G' , т. е. множества представителей классов подобных подгрупп, аналогичная уже рассмотренной в 14.7 задаче для алгебр Ли. Оптимальная система s -параметрических подгрупп группы G' ($0 < s \leq r$) будет обозначаться, как и в случае алгебр Ли, символом Θ_s .

Из предыдущих результатов следует, что оптимальные системы подгрупп группы G' и подалгебр ее алгебры Ли L' находятся во взаимно однозначном соответствии. Тем самым задача построения оптимальных систем подгрупп сводится к соответствующей задаче для подалгебр.

В приложениях обычно вначале строится оптимальная система подалгебр, по которой затем однозначно реконструируется оптимальная система подгрупп. Этот путь представляется более алгоритмичным, так как группа $\text{Int } L'$ есть всегда группа линейных преобразований основного пространства, в отличие от группы $\text{Int } G'$, для которой это верно, вообще говоря, лишь в случае канонической группы G' .

§ 16. Группы Ли преобразований

1. Определение. Система понятий, относящихся к группам Ли преобразований, вполне аналогична той, которая была развита в главе I, с заменой аддитивной группы R некоторой группой (B, φ) . Здесь излагаются элементы теории Ли групп преобразований, зависящих от конечного числа параметров, в связи с чем предполагается, что группа (B, φ) есть r -параметрическая группа G' .

Пусть даны банахово пространство X и группа (B, φ) . Рассматриваются представления группового ядра (O, φ) группы (B, φ) в группе $\tau(X)$ преобразований пространства X . Такое представление есть отображение $\pi: O \rightarrow \tau(X)$, удовлетворяющее условию группового гомоморфизма: для любых $a, b \in O$

$$\pi(b) \circ \pi(a) = \pi(\varphi(a, b)).$$

Представление π называется *точным*, если существует такая окрестность нуля $O \subset B$, что для $a \in O$ равенство $\pi(a) = I_X$ выполнено, только если $a = 0$. Ясно, что точное представление является групповым изоморфизмом группы (B, φ) в группу $\tau(X)$.

Если (O_1, φ) и (O_2, φ) — групповые ядра одной и той же группы (B, φ) , то в локальной теории представления $\pi_i: O_i \rightarrow \tau(X)$ ($i=1, 2$), совпадающие на $O_1 \cap O_2$, считаются неразличимыми. Тем самым каждое представление локально вполне характеризуется группой (B, φ) . Это позволяет говорить о представлениях группы (B, φ) , а не ее групповых ядер.

Представление π задает действие группы (B, φ) на пространстве X , при котором элемент $a \in B$ действует на $x \in X$ посредством преобразования $\pi(a)$ по формуле $x \rightarrow \pi(a)(x)$. Тем самым возникает отображение $f: X \times B \rightarrow X$, определенное формулой $f(x, a) = \pi(a)(x)$. Это отображение f называется *порождающим* представлением π .

В локальной теории (см. 1.8) рассматриваются локальные преобразования пространства X , определенные на некотором открытом множестве $U \subset X$. В этих терминах формулируется следующее основное определение.

Локальной группой Ли локальных преобразований пространства X называется образ $\pi(O)$ такого точного представления $\pi: O \rightarrow \tau(X)$ окрестности нуля $O \subset B$ группы $B(\varphi)$, для которого порождающее отображение $f: U \times O \rightarrow X$ является отображением класса $C_\infty(U \times O)$.

Эта группа будет обозначаться одним из символов, (B, φ, π, X) или (G', π, X) , или просто $G'(f)$. Отображение f будет называться также порождающим отображением группы $G'(f)$.

В силу данного определения порождающее отображение обладает следующими свойствами, аналогичными 1.9:

- 1°. $f(x, 0) = x$ для любого $x \in U$.
- 2°. $f(f(x, a), b) = f(x, \varphi(a, b))$ для любых $a, b \in O, x \in U$.
- 3°. Если $a \in O$ и $f(x, a) = x$ для всех $x \in U$, то $a = 0$.
- 4°. $f \in C_\infty(U \times O)$.

Эти свойства могут быть приняты в качестве аксиом, определяющих группу $G'(f)$. Тогда предыдущее определение переформулируется так.

Пусть дана группа $G' = (B, \varphi)$. Группой $G'(f)$ называется r -параметрическое семейство преобразований $\{f_a\}$ пространства X , соответствующих векторам $a \in B$ и действующих по формуле $f_a(x) = f(x, a)$, если существуют окрестность нуля $O \subset B$ и открытое множество $U \subset X$, с которыми отображение $f: U \times O \rightarrow X$ удовлетворяет аксиомам 1°—4°.

Участвующие в этой формулировке условия не являются минимальными. На самом деле требование, чтобы группа (B, φ) была задана заранее, является лишним и может быть заменено более слабым требованием принадлежности участвующего в 2° отображения $\varphi: O \times O \rightarrow B$ (существование которого предполагается) классу $C_\infty(O \times O)$ вместе с немного усиленным по сравнению с 3° требованием «существенности параметров»: если $f(x, a) = f(x, b)$ для всех $x \in U$, то $a = b$. Можно показать, что тогда φ есть закон умножения в некоторой группе (B, φ) , т. е. удовлетворяет аксиомам 12.1.1° — 12.1.3°. Именно в этой редакции определение непрерывной группы преобразований использовалось в классических работах С. Ли и его последователей.

Группа (B, φ) называется *параметрической группой* группы преобразований (B, φ, π, X) . Согласно данному определению группа (B, φ, π, X) изоморфна своей параметрической группе. Поэтому группы преобразований изоморфны, если и только если изоморфны их параметрические группы.

З а м е ч а н и е. Пусть γ есть изоморфизм группы (B', φ') на группу (B, φ) . Тогда представление $\pi: B \rightarrow \tau(X)$ переходит в представление $\pi' = \pi \circ \gamma: B' \rightarrow \tau(X)$, что влечет преобразование порождающего отображения $f \rightarrow f'$, определяемое формулой

$$f'(x, a') = f(x, \gamma(a')), \quad (1.1')$$

где $a' \in B'$. При этом группа (B', φ', π', X) , как множество преобразований пространства X , совпадает с группой (B, φ, π, X) . Меняется только параметризация этой группы.

Пример 1. Рассмотренные в главе I однопараметрические группы преобразований являются частным случаем групп $G^r(f)$ и получаются, если $G^r = (B, \varphi)$ есть каноническая группа при $r=1$.

Пример 2. Для любой группы (B, φ) умножение φ задает представление π этой группы в группе $\tau(B)$ по формуле $\pi(a)(x) = \varphi(x, a)$. Действительно, в силу аксиомы 12.1.2°

$$\begin{aligned}\pi(b) \circ \pi(a)(x) &= \pi(b)(\varphi(x, a)) = \\ &= \varphi(\varphi(x, a), b) = \varphi(x, \varphi(a, b)) = \pi(\varphi(a, b))(x),\end{aligned}$$

откуда $\pi(b) \circ \pi(a) = \pi(\varphi(a, b))$. Порождающим отображением полученной группы преобразований пространства B является закон умножения φ . Эта группа $G_1^r(\varphi)$ называется первой параметрической группой группы (B, φ) . Аналогично определяется вторая параметрическая группа $G_2^r(\varphi)$ группы (B, φ) , получаемая с помощью действия $\pi(a)(x) = \varphi(a, x)$.

2. Касательное отображение. Группе $G^r(f)$ сопоставляется частная производная порождающего отображения f по a в нуле пространства B ,

$$\xi(x) = \partial_a f(x, 0). \quad (2.1)$$

Согласно определению производной, для каждого $x \in U$ значение $\xi(x)$ является линейным отображением пространства B в пространство X . Возникающее при этом отображение $\xi: U \rightarrow \mathcal{L}(B; X)$ называется *касательным отображением группы $G^r(f)$* .

Для каждого $a \in B$ значение $\xi(x)\langle a \rangle$ есть вектор пространства X , и когда x пробегает множество U , то $\xi(x)\langle a \rangle$ дает некоторое векторное поле на U . Поэтому касательное отображение ξ задает *семейство векторных полей*, являющееся, очевидно, векторным пространством. По причинам, которые выяснятся в дальнейшем, это векторное пространство удобно обозначить символом $L^r(\xi)$. Тем самым каждой группе $G^r(f)$ преобразований пространства X сопоставляется пространство $L^r(\xi)$ векторных полей $\xi_a: X \rightarrow X$, соответствующих элементам $a \in B$ и действующих по формуле

$$\xi_a(x) = \xi(x)\langle a \rangle. \quad (2.2)$$

Детальное изучение соответствия групп $G^r(f)$ и пространств $L^r(\xi)$ составляет фундаментальную часть теории групп Ли преобразований.

Пусть $A(a)$, $V(a)$ — вспомогательные отображения группы (B, φ) . Дифференцирование равенства аксиомы 16.1.2° по b

в точке $b=0$ и учет определения (2.1) дает соотношение

$$\xi(f(x, a)) = (\partial_a f(x, a)) \circ A(a),$$

равносильное соотношению

$$\partial_a f(x, a) = \xi(f(x, a)) \circ V(a).$$

Вместе с 16.1.1° это соотношение показывает, что значение

$$x' = f(x, a) \quad (2.3)$$

порождающего отображения f , как функция вектора $a \in B$, удовлетворяет дифференциальному уравнению и начальному условию

$$\partial_a x' = \xi(x') \circ V(a), \quad x'(0) = x. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) называется *уравнением Ли группы $G^r(f)$* . Это уравнение аналогично уравнению Ли 1(14.2) для групп G^1 и является ключевым при изучении соответствия групп $G^r(f)$ и пространств $L^r(\xi)$.

З а м е ч а н и е. При изменении параметризации группы $G^r(f)$ посредством изоморфизма $\gamma: B' \rightarrow B$ она становится группой $G^r(f')$, причем преобразование $f \rightarrow f'$ дается формулой (1.1). При этом касательное отображение ξ преобразуется в ξ' по формуле

$$\xi'(x) = \xi(x) \circ \partial\gamma(0). \quad (2.5)$$

3. Критерий точности представления. Свойство точности представления π , участвующего в формировании группы $G^r(f)$, выражаемое аксиомой 1.3°, формулируется с помощью касательного отображения ξ .

Л е м м а. В системе аксиом 1.1°—1.4° аксиома 3° равносильна следующей:

3°. Если $\xi(x)\langle a \rangle = 0$ для всех $x \in U$, то $a=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу замечания 16.1 и формулы (2.5) можно предполагать группу (B, φ) канонической. Из уравнения Ли и критерия каноничности 12.5 вдоль прямой $\{ta\}$ получается равенство

$$\partial_t f(x, ta) = \xi(f(x, ta))\langle a \rangle. \quad (3.1)$$

Поэтому если с некоторым $a \in B$ будет $\xi(x)\langle a \rangle = 0$ для всех $x \in U$, то также $\partial_t f(x, ta) = 0$. Следовательно, $f(x, ta) = x$, и если выполнена аксиома 1.3°, то $ta=0$, т. е. $a=0$.

Повторное дифференцирование равенства (3.1) дает

$$\partial_t^2 f(x, ta) = \partial \xi(x') \langle \xi(x') \langle a \rangle, a \rangle,$$

где $x' = f(x, ta)$. Так как производная $\partial \xi$ непрерывна на U , то для любой точки $x_0 \in U$ найдется такая окрестность U_0 точки x_0 и такая окрестность O_ρ (радиуса ρ) нуля пространства B , что

для всех $(x, a) \in U_0 \times O_p$ выполнено неравенство

$$\rho |f(x, a) - x - \xi(x) \langle a \rangle| \leq |a| \cdot |\xi(x) \langle a \rangle|.$$

Поэтому, если для некоторого $a \in O_p$ и всех $x \in U_0$ справедливо равенство $f(x, a) = x$, то предыдущее неравенство принимает вид

$$0 \leq (|a| - \rho) |\xi(x) \langle a \rangle|,$$

и так как $|a| < \rho$, то $\xi(x) \langle a \rangle = 0$. Следовательно, если выполнена аксиома 3_1^* , то $a = 0$. ■

С л е д с т в и е. *Размерность пространства векторных полей $L'(\xi)$ группы $G^r(f)$ равна r .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\xi(x)$ линейно отображает r -мерное пространство B в X , то размерность $L'(\xi)$ не больше r . Кроме того, если $\{e_a\}$ — базис в B , то векторные поля $\{\xi_{e_a}\}$ линейно независимы. Действительно, равенство $\lambda^a \xi_{e_a} = 0$, равносильное равенству $\xi(x) \langle \lambda^a e_a \rangle = 0$ для всех x , в силу леммы влечет равенство $\lambda^a e_a = 0$, откуда $\lambda^a = 0$ ($a = 1, \dots, r$). ■

4. Первая теорема Ли. Эта теорема констатирует возможность восстановления производящего отображения группы $G^r(f)$ по ее касательному отображению путем решения уравнения (2.4).

Т е о р е м а. *Группе $G^r(f)$ соответствует касательное отображение ξ , порождающее r -мерное пространство векторных полей $L'(\xi)$ на пространстве X ; с этим ξ порождающее группу отображение f удовлетворяет уравнению Ли (2.4).*

Обратно, если дано r -мерное пространство векторных полей $L'(\xi)$ на открытом множестве $U \subset X$ класса $C_\infty(U)$ и дана локальная группа Ли (B, φ) с вспомогательным отображением $V(a)$ и если уравнение Ли (2.4) с данными ξ и V имеет единственное решение для любого $x \in U$, то это решение (2.3) является порождающим отображением группы $G^r(f)$, для которой (B, φ) есть ее параметрическая группа и ξ есть ее касательное отображение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первая часть теоремы уже доказана в 16.2. Утверждение о размерности пространства векторных полей следует из аксиомы 1.3° в силу следствия леммы 16.3.

Обратно, пусть отображение $f: U \times B \rightarrow X$ определяет по формуле (2.3) решение уравнения Ли (2.4). Тогда аксиома 1.1° выполнена в силу начального условия (2.4), аксиома 1.3° выполнена в силу предположения о размерности пространства $L'(\xi)$ и леммы 16.3, а аксиома 1.4° выполнена в силу известной теоремы о дифференцируемости решений дифференциальных уравнений по параметрам, от которых зависят начальные данные. Остается проверить выполнение аксиомы 1.2°. С этой целью рассматриваются отображения $b \rightarrow y(b)$ и $b \rightarrow z(b)$, действующие по формулам $y = f(x', b)$, где $x' = f(x, a)$, и $z = f(x, \varphi(a, b))$. Дифферен-

цирование этих отображений в силу (2.4) дает тождества

$$\begin{aligned}\partial_b y &= \partial_b f(x', b) = \xi(y) \circ V(b), \quad y(0) = x'; \\ \partial_b z &= \partial_\varphi f(x, \varphi) \circ \partial_b \varphi \stackrel{*}{=} \xi(z) \circ V(\varphi) \circ A(\varphi) \circ V(b) = \\ &= \xi(z) \circ V(b), \quad z(0) = x',\end{aligned}$$

где равенство $\stackrel{*}{=}$ получено с помощью уравнения Ли 12(4.3) параметрической группы (B, φ) . Эти тождества показывают, что оба отображения y и z являются решениями уравнения (2.4) с одинаковым начальным условием. В силу единственности решения отсюда следует равенство $y=z$, т. е. $f(x', b) = f(x, \varphi(a, b))$, а это и есть аксиома 1.2°. Итак, с группой (B, φ) решение уравнения Ли (2.4) дает группу $G'(f)$. Непосредственно из уравнений (2.4) при $a=0$ следует, что ее касательным отображением является данное ξ . ■

5. Вторая теорема Ли. Здесь устанавливается связь группы $G'(f)$ и ее параметрической группы (B, φ) в терминах их алгебр Ли. Эта связь является следствием свойства вполне интегрируемости уравнения Ли.

Т е о р е м а. *Пространство $L'(\xi)$ группы $G'(f)$ есть алгебра Ли векторных полей, изоморфная алгебре Ли L' группы (B, φ) .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение Ли (2.4) группы $G'(f)$ вполне интегрируемо (см. 12.8) на множестве $U \times O$, т. е. имеет решение, удовлетворяющее начальному условию $x'(b) = x$ для любой точки $(x, b) \in U \times O$. Действительно, таким решением является $x'(a) = f(x, \varphi(b^{-1}, a))$. Поэтому стоящее в правой части уравнения (2.4) отображение $\xi \circ V: U \times O \rightarrow \mathcal{L}(B; X)$ должно удовлетворять условию вполне интегрируемости 12.8. Для вывода этого условия берутся векторы $h, k \in B$ и вычисляется значение на векторе k производной по a (в силу уравнения (2.4)) от обеих частей тождества $\partial_a x' \langle h \rangle = \xi(x') \langle V(a) \langle h \rangle \rangle$. Это дает $\partial_a^2 x' \langle k, h \rangle = \xi(x') \langle \partial V(a) \langle k, h \rangle \rangle + \partial \xi(x') \langle \xi(x') \langle V(a) \langle k \rangle \rangle, V(a) \langle h \rangle \rangle$.

Поэтому искомое условие, выражающее факт симметричности второй производной

$$\partial_a^2 x' \langle k, h \rangle = \partial_a^2 x' \langle h, k \rangle$$

с обозначениями $k' = V(a) \langle k \rangle$, $h' = V(a) \langle h \rangle$, оказывается таким:

$$\begin{aligned}\xi(x) \langle \partial V(a) \langle h, k \rangle - \partial V(a) \langle k, h \rangle \rangle = \\ = \partial \xi(x) \langle \xi(x) \langle k' \rangle, h' \rangle - \partial \xi(x) \langle \xi(x) \langle h' \rangle, k' \rangle.\end{aligned}$$

Согласно уравнению Маурера—Картана 12(8.2) и определению 15(1.1) коммутатора в алгебре Ли L' группы $G'(f)$

$$\partial V(a) \langle h, k \rangle - \partial V(a) \langle k, h \rangle = C \langle V(a) \langle k \rangle, V(a) \langle h \rangle \rangle = [k', h'].$$

С другой стороны, согласно определению 7 (1.1) коммутатора векторных полей

$$\partial \xi(x) \langle \xi(x) \langle h' \rangle, h' \rangle - \partial \xi(x) \langle \xi(x) \langle h' \rangle, k' \rangle = [\xi(x) \langle k' \rangle, \xi(x) \langle h' \rangle].$$

Поэтому условие вполне интегрируемости отображения $\xi \circ V$ равносильно выполнению для любых $x \in U$ и $k, h \in B$ равенства

$$\xi(x) \langle [k, h] \rangle = [\xi(x) \langle k \rangle, \xi(x) \langle h \rangle]. \quad (5.1)$$

Следовательно, пространство векторных полей $L'(\xi)$, получаемых с помощью касательного отображения ξ группы $G^*(f)$ по формуле (2.2), является алгеброй Ли. Кроме того, отображение $\gamma: B \rightarrow L'(\xi)$, действующее по формуле $\gamma(h) = \xi(x) \langle h \rangle$, является взаимно однозначным отображением на, в силу следствия леммы 16.3, и изоморфизмом, в силу (5.1). ■

6. Третья теорема Ли. Согласно второй теореме Ли группе $G^*(f)$ преобразований банахова пространства X однозначно сопоставляется r -мерная алгебра Ли $L'(\xi)$ касательных векторных полей, порожденная ее касательным отображением ξ . Следующая теорема устанавливает справедливость обратного утверждения, в связи с чем она обычно называется «обратной третьей теоремой Ли для групп преобразований». Здесь задание r -мерного пространства векторных полей $L'(\xi)$ на открытом множестве $U \subset X$ понимается как задание r -мерного банахова пространства B и отображения $\xi: U \rightarrow \mathcal{L}(B; X)$, удовлетворяющего аксиоме 3.3₁. При этом элементами алгебры Ли $L'(\xi)$ являются векторные поля ξ_a , получаемые с помощью векторов $a \in B$ и действующие по формуле (2.2).

Т е о р е м а. *Каждой r -мерной алгебре Ли $L'(\xi)$ векторных полей класса $C_\infty(U)$ на открытом множестве $U \subset X$ соответствует группа $G^*(f)$ локальных преобразований пространства X , для которой $L'(\xi)$ является ее алгеброй Ли касательных векторных полей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждой паре векторных полей (ξ_a, ξ_b) в силу операции коммутации в $L'(\xi)$ сопоставляется векторное поле $\xi_c = [\xi_a, \xi_b]$. При этом вектор c определен парой векторов (a, b) однозначно, так как равенство $\xi_c = 0$ означает, что $\xi(x) \langle c \rangle = 0$ для всех $x \in U$, откуда $c = 0$ в силу аксиомы 3.3₁. Это позволяет определить на пространстве B алгебраическую структуру с операцией $[a, b] = c$. Легко проверить, что эта операция удовлетворяет аксиомам 13.1.1°—13.1.3°. Поэтому с так введенным коммутатором $[a, b]$ пространство B становится алгеброй Ли L' . Кроме того, по определению этого коммутатора векторные поля алгебры Ли $L'(\xi)$ удовлетворяют соотношению (5.1).

Согласно теореме 12.12 существует группа (B, φ) , алгебра Ли которой есть L' . Пусть $V(a)$ — вспомогательное отображение

для этой группы. Тогда вместе с заданным отображением ξ можно построить уравнение (2.4). В силу справедливости равенства (5.1) это уравнение вполне интегрируемо на множестве $U \times B$. По теореме 16.4 его решение порождает группу $G^r(f)$, для которой заданное ξ есть ее касательное отображение. Следовательно, $L^r(\xi)$ есть алгебра Ли группы $G^r(f)$. ■

7. Каноническая группа второго рода. Если параметрическая группа (B, φ) группы преобразований $G^r(f)$ является канонической (см. 12.5), то группа $G^r(f)$ называется канонической первого рода.

Для приложений важно иметь эффективный и достаточно простой алгоритм построения группы $G^r(f)$ по ее алгебре Ли $L^r(\xi)$. С этой точки зрения алгоритм, описанный в доказательстве теоремы 16.6, приводящий к канонической группе первого рода, неудобен и фактически никогда не применяется. На практике используется другой алгоритм, связанный с отысканием однопараметрических подгрупп и последующим «перемножением» получаемых преобразований, каждое из которых берется со своим независимым параметром. Ниже дается описание этого алгоритма и его обоснование.

Пусть дана алгебра Ли $L^r(\xi)$ векторных полей на открытом множестве $U \subset X$, и пусть B есть r -мерное пространство, идентифицирующее элементы из $L^r(\xi)$ так, как это описано в 16.6. Выбирается базис $\{e_a\} \subset B$, которому соответствует базис $\{\xi_a\} \subset L^r(\xi)$, где $\xi_a(x) = \xi(x) \langle e_a \rangle$. Для каждого векторного поля ξ_a строится однопараметрическая группа $G^1(\xi_a)$ путем интегрирования уравнения Ли 1(14.2), которое здесь имеет вид

$$\partial_t x' = \xi_a(x'), \quad x'(0) = x. \quad (7.1)$$

В случае конечномерного X эта задача сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений и на практике для векторных полей простой аналитической природы может быть решена. В результате получаются однопараметрические группы $G^1(f_a)$ преобразований пространства X , элементами которых являются преобразования $f_{a,t}$ с параметром $t \in R$. Наконец, берется произвольный вектор $b = b^a e_a \in B$ и ему сопоставляется «произведение»

$$f'_b = f_{1,b} \circ f_{2,b} \circ \dots \circ f_{r,b}. \quad (7.2)$$

В итоге получается множество $G^r(f')$ «произведений» (7.2), соответствующих всевозможным векторам b из некоторой окрестности нуля $O \subset B$. Это множество порождается отображением $f': U \times O \rightarrow X$, действующим по формуле $f'(x, b) = f'_b(x)$.

Теорема. *Множество $G^r(f')$ является группой преобразований, алгебра Ли которой есть данная $L^r(\xi)$.*

Доказательство. Согласно теореме 16.6 существует группа $G^r(f)$ с данной алгеброй Ли $L^r(\xi)$. Каждая однопараметрическая

подгруппа $G^1(f_a)$, построенная в описанном алгоритме, принадлежит $G^r(f)$. Поэтому каждое преобразование f'_b (7.2) также принадлежит $G^r(f)$, т. е. есть некоторое преобразование f_a . При этом данному f'_b может соответствовать лишь одно f_a , так как равенство $f_a = f_c$, равносильное равенству $f_{a \cdot c^{-1}} = I_X$, возможно лишь, когда $a \cdot c^{-1} = 0$, т. е. при $a = c$ (аксиома 16.1.3°). Тем самым возникает отображение $\gamma: B \rightarrow B$, определенное формулой $a = \gamma(b)$, и справедливо тождество

$$f'(x, b) = f(x, \gamma(b)). \quad (7.3)$$

Так как f' есть, очевидно, отображение класса $C_\infty(U \times O)$ и таково же f , то γ также является отображением класса $C_\infty(O)$.

При $b=0$ формула (7.2) дает $f'(x, 0) = x$, откуда в силу (7.3) и аксиомы 1.3° следует, что $\gamma(0) = 0$. Утверждается, что отображение γ локально обратимо. Действительно, вычисление производной по b в точке $b=0$ на векторе $h = h^x e_x \in B$ от «произведения» (7.2) с учетом равенства $f_{x, b^x}|_{b=0} = I_X$ в силу уравнений (7.1) дает

$$\partial_b f'(x, 0) \langle h \rangle = h^x \xi_x(x) = \xi(x) \langle h \rangle. \quad (7.4)$$

С другой стороны, аналогичное дифференцирование правой части тождества (7.3) в силу определения отображения f дает

$$\partial_b f(x, \gamma(b)) \langle h \rangle = \xi(x) \circ \partial \gamma(0) \langle h \rangle.$$

Сравнение этого выражения с (7.4) и применение леммы 16.3 приводит к равенству $\partial \gamma(0) \langle h \rangle = h$, откуда $\partial \gamma(0) = I_B$. Поэтому γ обратимо.

С отображением γ определяется отображение $\varphi': O \times O \rightarrow B$:

$$\varphi'(a, b) = \gamma^{-1}(\varphi(\gamma(a), \gamma(b))). \quad (7.5)$$

Легко проверяется, что φ' удовлетворяет всем аксиомам 12.1.1°—12.1.3° закона умножения. Тем самым определена группа (B, φ') , причем γ есть изоморфизм этой группы на группу (B, φ) (см. 12.3).

В силу предыдущего отображение f' удовлетворяет аксиомам 1.1°, 1.3° и 1.4°. Кроме того, в силу определений (7.3) и (7.5) справедливы равенства

$$\begin{aligned} f'(f'(x, a), b) &= f(f(x, \gamma(a)), \gamma(b)) = f(x, \varphi(\gamma(a), \gamma(b))) = \\ &= f(x, \gamma(\varphi'(a, b))) = f'(x, \varphi'(a, b)), \end{aligned}$$

откуда следует, что вместе с φ' для f' выполнена также аксиома 1.2°. Поэтому $G^r(f')$ — группа преобразований пространства X , причем (7.4) показывает, что $L^r(\xi)$ — ее алгебра Ли. ■

Группа $G^r(f')$, порожденная отображением f' согласно формуле (7.2), будет называться *канонической второго рода*.

С л е д с т в и е. *Композиция из r преобразований, принадлежащих однопараметрическим подгруппам $G^1(f_a)$ ($a=1, \dots, r$)*

группы $G^r(f)$, соответствующим r линейно независимым векторным полям ее алгебры Ли $L^r(\xi)$, рассматриваемая для изменяющихся независимо друг от друга параметров групп $G^1(f_a)$, дает любое преобразование группы $G^r(f)$.

З а м е ч а н и е 1. Важная особенность алгоритма построения группы $G^r(f)$, как канонической второго рода, состоит в том, что в нем отсутствует этап предварительного отыскания параметрической группы (B, φ) , которая в ряде задач бывает не нужна. Параметрическая группа, как видно из доказательства теоремы, формируется автоматически и может быть найдена на основании формулы (7.2) путем вычисления композиции $f'_b \circ f'_a$. Именно эта особенность делает указанный алгоритм практически удобным.

З а м е ч а н и е 2. При доказательстве теоремы было отмечено, что в силу формулы (7.5) отображение γ является изоморфизмом параметрических групп (B, φ') на (B, φ) . Поэтому, если группа преобразований (B, φ, π, X) была задана заранее, то при ее восстановлении, как канонической второго рода, параметрическая группа восстанавливается с точностью до изоморфизма γ , удовлетворяющего условию $\partial\gamma(0) = I_B$.

8. Примеры. (α) Первым общим примером является выполненное в 14.4 построение группы внутренних автоморфизмов $\text{Int } L^r$ конечномерной алгебры Ли L^r . Теперь ясно, что сформулированное там правило получения любого автоморфизма $A \in \text{Int } L^r$ по формуле 14(4.6), аналогичной (7.2), дает группу $\text{Int } L^r$ как каноническую второго рода и что это правило обосновано теоремой 16.7.

(β) Другой общий пример дает первая параметрическая группа группы (B, φ) , рассмотренная в примере 16.1.2. Согласно определению (2.1) ее касательное отображение совпадает с вспомогательным отображением A . Поэтому, если отображение $A: B \rightarrow \mathcal{L}(B)$ известно, то группу (B, φ) можно восстановить с точностью до изоморфизма как каноническую второго рода. Для этого надо выбрать базис $\{e_\alpha\} \in B$ и с матрицей $(A^\beta_\alpha(a))$ отображения $A(a)$ решить для каждого $\alpha = 1, \dots, r$ систему уравнений для вектора $x' = x'^\beta e_\beta$:

$$\partial_i x'^\beta = A^\beta_\alpha(x'), \quad x'^\beta(0) = x^\beta \quad (\beta = 1, \dots, r).$$

Ее решение дает преобразования $x'(t) = f_{\alpha, t}$, с помощью которых общее преобразование первой параметрической группы, соответствующее вектору $b = b^\alpha e_\alpha$, получается по формуле (7.2):

$$\psi(x, b) = f_{1, b^1} \circ f_{2, b^2} \circ \dots \circ f_{r, b^r}.$$

С другой стороны, преобразования первой параметрической группы имеют вид $x \rightarrow \varphi(x, b)$. Поэтому тождество (7.3) здесь

принимает вид $\psi(x, b) = \varphi(x, \gamma(b))$, откуда $\gamma(b) = \psi(0, b)$. Следовательно, закон умножения φ' в канонической группе второго рода (B, φ') , изоморфной группе (B, φ) , получаемый по формуле (7.5), оказывается таким:

$$\varphi'(a, b) = \gamma^{-1}(\psi(\gamma(a), b)), \quad \gamma(b) = \psi(0, b).$$

(γ) В качестве простого конкретного примера можно рассмотреть группу G^3 дробно-линейных преобразований прямой $R(x)$, алгебра Ли $L^3(\xi)$ которой имеет базис

$$\xi_1(x) = 1, \quad \xi_2(x) = x, \quad \xi_3(x) = x^2.$$

Здесь последовательное решение уравнений Ли (7.1) дает следующие преобразования $x \rightarrow f_{\alpha, t}(x)$:

$$f_{1,t}(x) = x + t, \quad f_{2,t}(x) = x \exp t, \quad f_{3,t}(x) = \frac{x}{1 - tx}.$$

Общее преобразование группы $G^3(f)$ канонической второго рода, получаемое по формуле (7.2) с вектором $b = (b^1, b^2, b^3)$, таково:

$$f_b(x) = \frac{b^1 + (\exp(b^2) - b^1 b^3)x}{1 - b^3 x}.$$

9. Подобие групп преобразований. Специальный вид изоморфизма групп преобразований, получаемого с помощью преобразований пространства X , называется *подобием групп*. Это понятие сравнивает различные представления π одной и той же группы (B, φ) в группе $\tau(X)$. Аналогично понятию, которое было сформулировано в 1.11 для однопараметрических групп преобразований, оно дается следующим определением.

Группа $G'(f') = (B, \varphi, \pi', X)$ называется подобной группе $G(f) = (B, \varphi, \pi, X)$, если существует такое преобразование p пространства X класса $C_\infty(X)$, с которым порождающие отображения f' и f этих групп для любого $a \in O \subset B$ связаны соотношением

$$f'_a = p \circ f \circ p^{-1}. \quad (9.1)$$

Следующая теорема дает инфинитезимальный критерий подобия групп, выражая это свойство через соответствующее свойство их касательных отображений.

Т е о р е м а. *Группа $G'(f')$ подобна группе $G(f)$, если и только если существует такое преобразование p пространства X , с которым их касательные отображения связаны соотношением*

$$\xi'(x') = \partial p(x) \circ \xi(x), \quad x' = p(x). \quad (9.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство (9.2) получается в результате дифференцирования соотношения (9.1) по a в точке $a=0$ и использования определения (2.1). Обратно, пусть вы-

полнено соотношение (9.2). Тогда для отображения f , действующего по формуле

$$f(x', a) = p(f(x, a)), \quad x' = p(x),$$

в силу уравнения Ли (2.4) справедливы тождества

$$\begin{aligned} \partial_a f(x', a) &= \partial p(f) \circ \xi(f) \circ V(a) = \xi'(f(x', a)) \circ V(a), \\ f(x', 0) &= p(x). \end{aligned}$$

С другой стороны, порождающее отображение f' также удовлетворяет уравнению Ли (2.4):

$$\partial_a f'(x', a) = \xi'(f'(x', a)) \circ V(a), \quad f'(x', 0) = x' = p(x).$$

Следовательно, оба отображения, f и f' , удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению Ли с одинаковым начальным условием. В силу единственности решения отсюда следует совпадение этих отображений, т. е. $f'(x', a) = p(f(x, a))$ для $x' = p(x)$, а это и есть соотношение подобия (9.1). ■

Алгебры Ли векторных полей $L'(\xi')$ и $L'(\xi)$, порождающие отображения которых ξ' и ξ связаны соотношением (9.2), называются подобными. Поэтому доказанную теорему можно переформулировать, сказав, что группы $G'(f')$ и $G'(f)$ подобны, если и только если подобны их алгебры Ли $L'(\xi')$ и $L'(\xi)$.

Замечание. Если дана алгебра Ли $L'(\xi)$ векторных полей на пространстве X и если с помощью некоторого преобразования $p: X \rightarrow X$ отображение ξ' определено равенством (9.2), то пространство векторных полей $L'(\xi')$, порожденное отображением ξ' , является алгеброй Ли, изоморфной $L'(\xi)$. Этот факт легко проверяется прямым вычислением коммутатора $[\xi'_a, \xi'_b]$, где $\xi'_a = \partial p \langle \xi_a \rangle$ и т. д.

10. Транзитивность. Свойство транзитивности является одной из важных характеристик группы преобразований как представления. Оно формулируется в терминах орбит, получаемых под действием группы $G'(f) = (B, \varphi, \pi, X)$, порожденной отображением $f: U \times O \rightarrow X$. **Орбитой точки $x \in U$** называется множество точек $f(x, a)$, получаемых когда вектор a пробегает окрестность нуля $O \subset B$. Орбита точки x будет обозначаться символом $f_x(O)$.

Группа $G'(f)$ называется **транзитивной в точке $x \in U$** (на множестве U), если орбита точки x (любой точки $x \in U$) есть открытое множество в X . Группа, не являющаяся транзитивной, называется **интранзитивной**.

Это определение можно сформулировать иначе, сказав, что группа $G'(f)$ называется транзитивной, если точку $x \in U$ можно перевести в любую точку некоторой ее окрестности подходящим преобразованием группы. Ясно также, что группа $G'(f)$ транзитивна на U тогда и только тогда, когда любые две достаточно

близкие точки множества U можно перевести друг в друга некоторым преобразованием этой группы.

Если группа $G^r(f)$ транзитивна в точке x , то в общем случае орбита $f_x(O)$ покрывает окрестность точки x неоднократно, т. е. некоторые точки $x' \in f_x(O)$ могут получаться из x различными преобразованиями группы. С целью выделения тех случаев, когда подобная ситуация исключается, вводится понятие просто транзитивной группы.

Группа $G^r(f)$ называется *просто транзитивной* в точке $x \in U$ (на множестве U), если для данного x (для каждого $x \in U$) найдется такая окрестность нуля $O \subset B$, что отображение $f_x: O \rightarrow f_x(O)$ является взаимно однозначным (и взаимно непрерывно дифференцируемым класса C_∞).

Ясно, что группа $G^r(f)$ может быть транзитивной, только если размерность пространства X не больше числа r , т. е. $\dim X \leq r$. Точные критерии транзитивности формулируются с помощью касательного отображения ξ .

С этой целью вводится понятие общего ранга линейного отображения. Пусть B и X — конечномерные пространства. Рассматривается отображение $\xi: X \rightarrow \mathcal{L}(B; X)$. Для каждого $x \in X$ значение $\xi(x)$ есть линейное отображение $B \rightarrow X$ и потому имеет определенный ранг, обозначаемый символом $\text{rank } \xi(x)$. Это число равно рангу матрицы линейного отображения $\xi(x)$, взятой в каких-либо базисах пространств B и X (от выбора этих базисов ранг не зависит), и может быть вычислено по формуле

$$\text{rank } \xi(x) = \dim \xi(x)(B),$$

где $\xi(x)(B)$ есть векторное подпространство в X , являющееся образом пространства B при отображении $\xi(x)$.

Общим рангом отображения $\xi: X \rightarrow \mathcal{L}(B; X)$ на открытом множестве $U \subset X$ называется число

$$r_* = r_*(\xi) = \max_{x \in U} \text{rank } \xi(x). \quad (10.1)$$

Очевидно, что если дано отображение ξ класса $C_\infty(U)$, то множество точек $x \in U$, для которых

$$\text{rank } \xi(x) = r_*(\xi), \quad (10.2)$$

открыто в пространстве X . Напротив, множество точек, в которых $\text{rank } \xi(x) < r_*(\xi)$, замкнуто. Поэтому в локальной теории всегда можно ограничиться рассмотрением таких множеств U , во всех точках которых выполнено равенство (10.2). В этом случае говорят, что *отображение ξ имеет ранг на U (равный его общему рангу)*. В этих терминах формулируется следующий критерий транзитивности группы.

Теорема. Пусть $\dim X = n$, и пусть касательное отображение ξ группы $G^r(f)$ имеет ранг на открытом множестве $U \subset X$. Тогда группа $G^r(f)$ транзитивна на U , если и только если общий ранг отображения ξ на U равен n , т. е.

$$r_*(\xi) = n. \quad (10.3)$$

Доказательство. Для порождающего отображения f в окрестности нуля $O \subset B$ справедливо представление

$$f(x, a) = x + \xi(x)\langle a \rangle + F(x, a), \quad |F(x, a)| < K|a|^2 \quad (10.4)$$

с некоторой константой $K > 0$. Поэтому транзитивность группы $G^r(f)$ в точке $x \in U$ равносильна разрешимости уравнения

$$\xi(x)\langle a \rangle = x' - x - F(x, a)$$

относительно a для точек x' , близких к x . Но если норма $|x' - x|$ достаточно мала, то в силу оценки (10.4) разрешимость этого уравнения равносильна разрешимости линейного уравнения

$$\xi(x)\langle a \rangle = x' - x.$$

В свою очередь это уравнение разрешимо относительно a для любого $x' \in X$, если и только если $\text{rang } \xi(x) = \dim X = n$. ■

Следствие 1. Группа $G^r(f)$ интранзитивна, если и только если

$$r_*(\xi) < n. \quad (10.5)$$

Так как упомянутое в доказательстве теоремы линейное уравнение имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\text{rang } \xi(x) = n = r$, то справедливо также следующее утверждение.

Следствие 2. Группа $G^r(f)$ просто транзитивна, если и только если

$$r_*(\xi) = n = r. \quad (10.6)$$

Примером просто транзитивной группы является первая (и вторая) параметрическая группа любой локальной группы Ли (B, φ) , рассмотренная в примерах 16.1.2 и 16.8 (β). Действительно, в этом случае $n = r$. Так как касательное отображение первой параметрической группы (B, φ) есть вспомогательное отображение A группы (B, φ) и $A(0) = I_B$, то найдется такая окрестность нуля $O \subset B$, что $\text{rang } A(a) = r$ для всех $a \in O$, т. е. $r_* = n$.

11. Подобие просто транзитивных групп. Приводимая ниже теорема обобщает отмеченное в 3.8, 3.9 свойство подобия однопараметрических групп преобразований на случай r -параметрических групп. Кроме того, она показывает, что результаты классификации просто транзитивных групп по отношению изоморфизма и по отношению подобия совпадают.

Т е о р е м а. Любые две изоморфные просто транзитивные группы преобразований пространства X подобны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ξ' и ξ — касательные отображения просто транзитивных групп $G'(f')$ и $G^r(f)$ преобразований r -мерного пространства X . Для установления подобия этих групп достаточно, в силу теоремы 16.9, доказать существование преобразования p пространства X , с которым выполнено соотношение (9.2). Так как для просто транзитивной группы линейное отображение $\xi(x): B \rightarrow X$ обратимо, то этому соотношению можно придать вид

$$\partial p(x) = \xi'(p(x)) \circ (\xi(x))^{-1}. \quad (11.1)$$

Следовательно, для доказательства существования преобразования p требуется восстановить это отображение по его производной, заданной как функция x и p . Решение этой задачи, наверное, существует, если правая часть (11.1) удовлетворяет условию вполне интегрируемости. Так как это условие равносильно симметрии второй производной $\partial^2 p(x)$, вычисленной в силу (11.1), то его удобно вывести путем дифференцирования равносильного (11.1) соотношения

$$\xi'_a(p) = \partial p \langle \xi_a(x) \rangle.$$

Вычисление производной по x на векторе $k \in X$ дает

$$\partial \xi'_a(p) \langle \partial p \langle k \rangle \rangle = \partial^2 p \langle k, \xi_a(x) \rangle + \partial p \langle \partial \xi_a(x) \langle k \rangle \rangle.$$

Если здесь положить $k = \xi_b(x)$, переставить векторы a и b , вычесть почленно одно равенство из другого и учесть равенство (11.1), то условие симметрии $\partial^2 p(x)$ будет равносильно соотношению

$$\partial \xi'_a(p) \langle \xi'_b(p) \rangle - \partial \xi'_b(p) \langle \xi'_a(p) \rangle = \partial p \langle \partial \xi_a(x) \langle \xi_b(x) \rangle \rangle - \partial \xi_b(x) \langle \xi_a(x) \rangle \rangle.$$

Согласно определению коммутатора векторных полей 7(1.1) это равенство может быть переписано в виде

$$[\xi'_b(p), \xi'_a(p)] = \partial p \langle [\xi_b(x), \xi_a(x)] \rangle,$$

а это есть тождество, так как заданное формулой (11.1) отображение $\xi \rightarrow \xi'$ является изоморфизмом. Поэтому отображение (11.1) вполне интегрируемо и существование решения уравнения (11.1) следует из теоремы Фробениуса. ■

С л е д с т в и е 1. Множество преобразований p , переводящих данную просто транзитивную группу $G^r(f)$ в данную просто транзитивную группу $G^r(f')$, зависит от r произвольных постоянных.

Действительно, такими постоянными являются координаты вектора $p_0 \in X$ в начальном условии $p(x_0) = p_0$, которому всегда можно подчинить решение уравнения (11.1).

С л е д с т в и е 2. *Всякая просто транзитивная группа подобна своей первой параметрической группе (B, φ) .*

Действительно, изоморфизм указанных групп очевиден, а кроме того, как было замечено в 16.10, первая параметрическая группа (B, φ) просто транзитивна.

12. Группы Ли, допускаемые дифференциальными уравнениями. В свете результатов этого параграфа введенное в 5.5 понятие основной группы GE , допускаемой системой дифференциальных уравнений E , обогащается новым содержанием.

В 7.13 было доказано, что множество LE допускаемых системой E операторов (векторных полей), как пространство решений системы DE определяющих уравнений, является алгеброй Ли. Поэтому, если LE есть конечномерная алгебра Ли $L'(\zeta)$, то система E допускает соответствующую этой алгебре Ли группу Ли преобразований $G'(h)$. Действительно, по определению система E допускает любую однопараметрическую группу, соответствующую произвольному оператору из LE , а группа $G'(h)$ есть объединение элементов (преобразований), принадлежащих ее однопараметрическим подгруппам. Итак, *в случае конечномерной алгебры Ли LE основная группа системы E есть группа Ли.*

Если алгебра Ли LE бесконечномерна, то следует придерживаться определения основной группы, данного в 5.5. Однако и в этом случае любой конечномерной подалгебре $L'(\zeta) \subset LE$ соответствует локальная группа Ли преобразований $G'(h)$, допускаемая системой E . Кроме того, в приложениях часто оказывается, что в бесконечномерной алгебре Ли LE естественно выделяется в каком-то смысле «тривиальный» бесконечномерный идеал J , по которому факторалгебра LE/J уже конечномерна. Обычно этой факторалгебре также соответствует определенная группа Ли, допускаемая системой E .

В случае бесконечномерной алгебры Ли LE о группе GE говорят, что она является «бесконечной» (в смысле размерности) группой Ли. Общее преобразование «бесконечной» группы Ли зависит уже не от конечного числа параметров, как это имеет место для групп $G'(h)$, а, вообще говоря, от произвольных функций.

Несмотря на то, что «бесконечные» группы Ли довольно часто встречаются и используются в приложениях (см., например, 10.4), законченная теория таких групп пока еще не создана.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ IV

Классическая теория Ли излагалась многими авторами в различных формах. Для разработки ее приложений к дифференциальным уравнениям особенно полезными были уже цитированные монографии I [1]—[4]. Основные идеи теории банаховых групп Ли высказаны в [1]. Ее систематическое изложение, опирающееся на аппарат дифференциальных уравнений, было

впервые дано в [2] в связи с изучением возможности распространения этой теории на бесконечные группы Ли. Некоторые конкретные бесконечные группы Ли рассматривались в [3] и [4].

Проблема топологической структуры бесконечных групп Ли не решена до сих пор, хотя этим группам посвящено немало работ [5]—[9]. Особое место занимают группы Дельсарта [10], соотношение которых с группами Ли, по-видимому, не выяснено.

- [1] Birkhoff G. Analitical groups. — Trans. Amer. Math. Soc. 43, № 1 (1938), 61—101.
- [2] Овсянников Л. В. Аналитические группы. Новосибирск, НГУ, 1972.
- [3] Овсянников Л. В. О бесконечных группах отображений, задаваемых дифференциальными уравнениями. — ДАН СССР 148, № 1 (1963), 36—39.
- [4] Хабиров С. В. Бесконечномерные непрерывные группы преобразований трехмерного пространства, задаваемые системами дифференциальных уравнений первого порядка. — В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 12, Новосибирск (1972), 131—146.
- [5] Lie S. Untersuchungen über unendliche kontinuierliche Gruppen. — Ber. Sachs. Ges. 21 (1895), 43—150.
- [6] Medolaghi P. Sulla teoria dei gruppi infiniti continui. — Ann. Mat. 25 (1897), 179—217.
- [7] Cartan E. Sur la structure des groupes infinis de transformation. — Oeuvres, Partie 2, 2. Paris (1963), 571—714.
- [8] Kuranishi M. On the local theory of continuous infinite pseudo-groups, 1—2. — Nagoya Math. 15 (1959), 225—260; 19 (1961), 55—91.
- [9] Singer I., Sternberg S. The infinite groups of Lie and Cartan. — J. analyse math. 15 (1965), 1—114.
- [10] Delsarte J. Les groupes de transformations linéaires dans l'espace de Hilbert. — Mém. Acad. Sci., fasc. 57, Paris (1932).

ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ

Изучение действия допускаемой группы на множестве решений дифференциального уравнения начинается в настоящей главе с рассмотрения «неподвижных точек» этого действия — инвариантных решений, т. е. таких, которые при преобразованиях из допускаемой группы переходят в себя. Для этого необходима рассматриваемая здесь общая теория инвариантов и инвариантных многообразий, предварительные основы которой были заложены в главе I. Это связано с тем, что определение инвариантов многопараметрических групп требует анализа не одного векторного поля, а семейства векторных полей. При этом возникают новые объекты, например особые инвариантные многообразия, которые теория должна учитывать. Один из важных результатов теории инвариантов — теорема существования универсального инварианта, так же как и соответствующая ей теорема из главы I, доказана для групп Ли преобразований произвольного банахова пространства.

В теории инвариантных многообразий, помимо критерия инвариантности, существенны понятие и свойства индуцированной группы и алгебры Ли. Наиболее важный теоретический результат заключается в теореме о представлении неособого инвариантного многообразия уравнениями, связывающими только инварианты группы. Здесь же естественно возникает понятие ранга неособого инвариантного многообразия, которое нужно для решения классификационных вопросов.

При изучении решений какого-либо дифференциального уравнения E полезна геометрическая трактовка решения $y=u(x)$ как (локального) многообразия U в пространстве «переменных» (x, y) . Это удобно в теоретических вопросах, так как позволяет записать тот факт, что U есть многообразие — решение простой формулой включения $U_k \subset E$ для надлежаще продолженного многообразия U_k .

Для любой группы H , допускаемой данным дифференциальным уравнением E , вводится фундаментальное понятие инвариантного H -решения как многообразия U , инвариантного относительно группы H . Применение предыдущих результатов к задаче отыскания инвариантных H -решений приводит к теореме

существования факторсистемы E/H , обладающей двумя основными свойствами: она дает все инвариантные H -решения и число независимых переменных в ней меньше, чем в исходной системе E . Для построения факторсистемы имеется четкий и апробированный алгоритм.

Особое внимание уделено важному для приложений случаю группы растяжений и вытекающему из рассмотрения таких групп понятию автомодельного решения. Последнее предлагается понимать в широком смысле, а именно как решение, инвариантное относительно абелевой группы H . Этому предложению дается достаточное обоснование.

Если основная группа GE данного дифференциального уравнения E является более чем однопараметрической, то возникает обилие возможностей для построения инвариантных H -решений с различными подгруппами $H \subset GE$. Естественно, что этот факт вызывает потребность в классификации таких решений. В качестве основных классификационных признаков выступают значение ранга решения и свойство подобия подгрупп. Итогом классификации являются оптимальные системы инвариантных решений.

§ 17. Инварианты группы преобразований

1. Определение и критерий инварианта. Здесь используются терминология и обозначения, принятые в § 3. Рассматриваются: группа $G^r(f) = (B, \varphi, \pi, X)$ как образ при представлении π : $(B, \varphi) \rightarrow \tau(X)$ локальной группы Ли (B, φ) в группе всех преобразований пространства X и некоторое банахово пространство P , на котором группа (B, φ) действует тривиально.

Не постоянное отображение $F: X \rightarrow P$ называется инвариантом группы (B, φ, π, X) , если оно является неподвижным элементом продолженного представления π_{rX} . Другими словами, отображение $F \neq \text{const}$ есть инвариант группы $G^r(f)$, если для любых $(x, a) \in X \times B$ выполнено равенство

$$F(f(x, a)) = F(x). \quad (1.1)$$

По внешнему виду определение (1.1) совпадает с 3(3.1). Различие состоит в том, что в (1.1) «параметр» a уже не есть вещественное число, а является r -мерным вектором $a \in B$. При этом определение 3(3.1) есть частный случай определения (1.1).

С помощью уравнения Ли 16(2.4) для любого дифференцируемого отображения $F: X \rightarrow P$ получается аналог равенства 3(3.2):

$$\partial_a F(x') = \partial F(x') \circ \xi(x') \circ V(a), \quad x' = f(x, a), \quad (1.2)$$

где $V(a)$ — вспомогательное отображение группы (B, φ) . Следующая теорема, являющаяся аналогом теоремы 3.4, дает инфинитезимальный критерий инвариантности отображения F .

Теорема. *Образование $F: X \rightarrow P$, $F \neq \text{const}$, класса $C_1(X)$ является инвариантом группы $G'(f)$ с касательным отображением ξ , если и только если для любого $x \in X$ выполнено равенство*

$$\partial F(x) \circ \xi(x) = 0. \quad (1.3)$$

Доказательство. Так как $V(0) = I_B$, то в силу (1.2) остается повторить доказательство теоремы 3.4. ■

Данное в 3.5 определение универсального инварианта без изменений переносится и на случай r -параметрических групп преобразований. Основная задача теории инвариантов теперь состоит в том, чтобы доказать существование универсального инварианта данной группы $G'(f)$ и дать алгоритм его отыскания. Здесь, как и в 3.5, эта задача решается для произвольного (вообще говоря, бесконечномерного) банахова пространства X .

2. Полные семейства векторных полей. Рассматриваются: z -мерное банахово пространство B , произвольное банахово пространство X , открытое множество $U \subset X$ и отображение $\xi: U \rightarrow \mathcal{L}(B; X)$ класса $C_\infty(U)$.

Образ $\xi(x)(B) \subset X$ называется *семейством векторных полей на пространстве X* . Каждое конкретное векторное поле ξ_a этого семейства определяется заданием вектора $a \in B$ и действует по формуле $\xi_a(x) = \xi(x)\langle a \rangle$. Ясно, что семейство векторных полей есть конечномерное векторное пространство, а именно подпространство пространства всех векторных полей на множестве U . Так же как и в 16.10, определяется ранг $\text{rang } \xi(x)$ и общий ранг $r_* = r_*(\xi)$ на U отображения ξ по формуле 16 (10.1). В дальнейшем предполагается, что множество U выбрано так, чтобы отображение ξ имело ранг на U , равный его общему рангу.

Семейство векторных полей $\xi(x)(B)$ называется полным, если оно удовлетворяет двум условиям: (а) $r_* = z$ и (б) для любых $a, b \in B$ существует отображение $\omega_{ab}: U \rightarrow B$, с которым справедливо тождество

$$[\xi_a, \xi_b](x) = \xi(x)\langle \omega_{ab}(x) \rangle. \quad (2.1)$$

Л е м м а 1. *Следующие два преобразования $\xi \rightarrow \xi$ сохраняют свойство полноты семейства векторных полей: композиция с любым отображением $\omega: U \rightarrow GL(B)$*

$$\xi(x) = \xi(x) \circ \omega(x) \quad (2.2)$$

и изменение под действием обратимого преобразования $p: U \rightarrow U'$, для которого $dp(x)$ есть гомеоморфизм пространства X для любого $x \in U$,

$$\xi(x') = dp(x) \circ \xi(x), \quad x' = p(x). \quad (2.3)$$

Доказательство. В силу обратимости отображений $\omega(x)$ и $dp(x)$ выполнение условия (а) в обоих случаях очевидно. Условие (б)

проверяется прямым вычислением коммутаторов. Если $a' = \omega(x)\langle a \rangle$, $b' = \omega(x)\langle b \rangle$, то в силу (2.1)

$$[\xi_a, \xi_b] = \xi(x)\langle \omega_{a'b'}(x) + \partial\omega\langle \xi_b', a \rangle - \partial\omega\langle \xi_a', b \rangle \rangle = \xi(x)\langle \bar{\omega}_{ab}(x) \rangle,$$

т. е. (2.1) верно для ξ , заданного формулой (2.2). Далее, с помощью равенства $\partial_x \xi(x') = \partial \xi(x') \circ \partial p(x)$ из (2.3) получается следующее:

$$\partial \xi_a(x')\langle \xi_b(x') \rangle = \partial^2 p(x)\langle \xi_b(x), \xi_a(x) \rangle + \partial p(x)\langle \partial \xi_a(x)\langle \xi_b(x) \rangle \rangle,$$

откуда в силу (2.1)

$$[\xi_a(x'), \xi_b(x')] = \partial p(x)\langle \xi(x)\langle \omega_{ab}(x) \rangle \rangle = \xi(x')\langle \bar{\omega}_{ab}(x') \rangle,$$

т. е. (2.1) верно для ξ , заданного формулой (2.3). ■

Инвариантом семейства векторных полей $\xi(x)(B)$ называется отображение $F: U \rightarrow P$, удовлетворяющее равенству (аналог (1.3))

$$\partial F(x) \circ \xi(x) = 0 \quad (2.4)$$

для любого $x \in U$. Здесь P — произвольное банахово пространство. Аналогично тому, как это было сделано для групп преобразований, определяется понятие универсального инварианта семейства векторных полей. Это такой инвариант $J: X \rightarrow Y$, что для любого инварианта $F: X \rightarrow P$ найдется отображение $\Phi: Y \rightarrow P$, с которым выполнено равенство $F = \Phi \circ J$. При преобразованиях (2.2) и (2.3) инварианты переходят в инварианты согласно следующему предложению.

Лемма 2. Пусть $F: X \rightarrow P$ есть инвариант семейства векторных полей $\xi(x)(B)$. Если сделано преобразование $\xi \rightarrow \bar{\xi}$ по формуле (2.2), то F также есть инвариант семейства $\bar{\xi}(x)(B)$. Если сделано преобразование по формуле (2.3), то $F = F \circ p^{-1}$ есть инвариант семейства $\bar{\xi}(x')$. В обоих случаях универсальный инвариант переходит в универсальный инвариант.

Доказательство. Для преобразования (2.2) утверждение следует из тождества

$$\partial F(x) \circ \xi(x) = \partial F(x) \circ \bar{\xi}(x) \circ \omega(x),$$

а для преобразования (2.3) — из тождества

$$\partial F(x) \circ \xi(x) = \partial \bar{F}(x') \circ \bar{\xi}(x'), \quad x' = p(x).$$

Последнее утверждение очевидно. ■

Теорема. Для любого полного семейства векторных полей $\xi(x)(B)$, удовлетворяющего условию

$$r_*(\xi) < \dim X, \quad (2.5)$$

существует его универсальный инвариант.

Доказательство. Индукция по s . Для $s=1$ утверждение доказано в теореме 3.5. Пусть $s > 1$. Берется ненулевой век-

тор $q \in B$ и рассматривается векторное поле $\xi(x)\langle q \rangle = \xi_q(x)$. В силу теоремы о подобии 3.8 найдется преобразование вида (2.3), которое переводит $\xi_q(x)$ в постоянное векторное поле, причем семейство $\xi(x)(B)$ преобразуется в семейство, по-прежнему удовлетворяющее условиям теоремы. Поэтому из леммы 17.2.2 следует, что без нарушения общности доказательства можно с самого начала считать поле $\xi_q(x) = e$ постоянным, что и предполагается в дальнейшем.

Пусть $T = \{te\}$ есть одномерное подпространство в X , порожденное вектором e , и Y — его прямое дополнение, так что $X = T \oplus Y$. Тогда для любого векторного поля $\xi_a(x) = \xi(x)\langle a \rangle$, где $a \in B$, справедливо представление

$$\xi_a(x) = c_a(x)e + \eta_a(x) \quad (2.6)$$

с отображением $\eta_a: X \rightarrow Y$. По построению для $a = q$

$$c_q(x) = 1, \quad \eta_q(x) = 0.$$

Далее, пусть B' — прямое дополнение в B одномерного подпространства $\{\lambda q\} \subset B$, так что для любого $a \in B$ верна формула разложения $a = \lambda_a q + a'$, где $a' \in B'$. Так как c_a и η_a в (2.6) линейно зависят от a , то $c_a = \lambda_a + c_{a'}$ и $\eta_a = \eta_{a'}$. При этом без нарушения общности рассуждения можно считать, что $c_{a'} = 0$.

Действительно, в противном случае можно сделать преобразование вида (2.2) с отображением $\omega: X \rightarrow GL(B)$, заданным формулой $\omega(x)\langle a \rangle = (\lambda_a - c_{a'}(x))q + a'$, в результате которого получится семейство векторных полей $\xi(x) = \xi(x) \circ \omega(x)$ с требуемым свойством. Это следует из равенств

$$\begin{aligned} \xi_a(x) &= \xi(x)\langle (\lambda_a - c_{a'}(x))q + a' \rangle = \\ &= (\lambda_a - c_{a'}(x))e + c_{a'}(x)e + \eta_{a'}(x) = \lambda_a e + \eta_{a'}(x). \end{aligned}$$

Итак, достаточно доказать теорему в случае, когда $c_{a'}(x) = 0$ для любого $a' \in B'$ и представление (2.6) имеет вид

$$\xi_a(x) = \lambda_a e + \eta_{a'}(x). \quad (2.7)$$

Согласно разложению $X = T \oplus Y$ можно положить $x = (t, y)$, где $t \in R$, $y \in Y$. Тогда для каждого $t \in R$ формулой (2.7) определено семейство векторных полей $\eta(t, y)(B')$ на пространстве Y , действующих по формуле $\eta(t, y)\langle a' \rangle = \eta_{a'}(x)$. Утверждается, что это семейство — полное.

Действительно, так как $\xi_q(x) = e$, то равенство $\eta_{a'}(x) = 0$ влечет $\xi_a(x) = \lambda_a \xi_q(x)$, откуда $a = \lambda_a q$ в силу полноты семейства $\xi(x)(B)$, т. е. $a' = 0$. Этим доказано свойство (α) из определения 17.2. Далее, для коммутатора $[e, \xi_a]$ в силу (2.7) получается выражение

$$[e, \xi_a](x) = \partial_t \eta_{a'}(t, y).$$

Из полноты $\xi(x)(B)$ следует, что этот коммутатор равен $\xi\langle\omega_a\rangle = \lambda_{\omega_a}e + \eta_{\omega'_a}$, где $\omega_a = \lambda_{\omega_a}q + \omega'_a$. Но вектор $\partial_i\eta_{a'}$ лежит в Y , а потому $\lambda_{\omega_a} = 0$ и справедливо равенство $\partial_i\eta_{a'} = \eta\langle\omega'_a\rangle$. Тем самым возникает отображение $\omega': X \rightarrow \mathcal{L}(B')$, с которым

$$\partial_i\eta = \eta \circ \omega'. \quad (2.8)$$

Вычисление коммутатора $[\xi_a, \xi_b]$ с учетом представления (2.7) дает (нижний индекс при коммутаторе показывает, по какому переменному выполняется дифференцирование)

$$[\xi_a, \xi_b]_x = \lambda_a \partial_i \eta_b - \lambda_b \partial_i \eta_a + [\eta_a, \eta_b]_y.$$

С другой стороны, в силу полноты семейства $\xi(x)(B)$

$$[\xi_a, \xi_b]_x = \xi\langle\omega_{ab}\rangle = \lambda_{\omega_{ab}}e + \eta_{\omega'_{ab}},$$

где $\omega_{ab} = \lambda_{\omega_{ab}}q + \omega'_{ab}$. Сравнение этих выражений показывает, что $\lambda_{\omega_{ab}} = 0$ и, кроме того, в силу (2.8) справедливо равенство вида (2.1):

$$[\eta_a, \eta_b]_y = \eta\langle\omega'_{ab} - \lambda_a\omega'_b + \lambda_b\omega'_a\rangle = \eta\langle\omega_{a'b'}\rangle,$$

т. е. выполнено свойство (β) из определения 17.2.

Так как $\dim B' = s-1$, то согласно предположению индукции семейство $\eta(B')$ имеет универсальный инвариант, который, вообще говоря, зависит от t . Утверждается, наконец, что можно выбрать универсальный инвариант не зависящим от t . С этой целью рассматривается преобразование вида (2.2), а именно $\eta = \eta \circ \theta$ с некоторым отображением $\theta: X \rightarrow GL(B')$. В силу (2.8) справедливо равенство

$$\partial_i\eta = \eta \circ (\partial_i\theta + \omega' \circ \theta).$$

Можно взять в качестве θ решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\partial_i\theta + \omega' \circ \theta = 0, \quad \theta(0) = I_{B'},$$

и тогда $\partial_i\eta = 0$, т. е. преобразованное семейство $\eta(B')$ уже не зависит от t . В силу леммы 17.2.2 его универсальный инвариант $J: Y \rightarrow Z$ является также универсальным инвариантом семейства $\eta(B')$, а так как $\partial_i J = 0$, то и семейства $\xi(x)(B)$. ■

Уместно заметить, что метод доказательства этой теоремы дает индуктивный процесс построения универсального инварианта в s шагов, на каждом из которых размерность пространства B уменьшается на единицу. Если учесть выводы, сделанные в 3.6, то получится полезное следствие.

Следствие. Если $\dim X = n$ и выполнено неравенство (2.5), т. е. $r_* < n$, то универсальный инвариант J семейства $\xi(x)(B)$ может рассматриваться как отображение $J: X \rightarrow R^{n-r_*}$.

3. Универсальный инвариант группы. Пусть дана группа $\tau(f) = (B, \varphi, \pi, X)$ преобразований открытого множества $U \subset X$

конечномерного пространства X , причем $\dim B = r$, $\dim X = n$. В силу теоремы 17.1 любой инвариант этой группы является инвариантом семейства векторных полей $\xi(x)(B)$, построенного с помощью касательного отображения ξ группы $G^r(f)$. Пусть общий ранг отображения ξ на U есть $r_* = r_*(\xi)$. При этих условиях справедлив следующий результат.

Теорема. *Группа $G^r(f)$ имеет инварианты, если и только если $r_* < n$. Если это неравенство выполнено, то существует универсальный инвариант I группы $G^r(f)$, являющийся отображением $I: X \rightarrow R^{n-r_*}$.*

Доказательство. Из определения 16(10.1) числа r_* следует, что всегда $r_* \leq n$. Равенство $r_* = n$ в силу теоремы 16.10 равносильно транзитивности группы $G^r(f)$. В этом случае для инварианта F должно быть $F(x') = F(x)$, где $x' = f(x, a)$ — любая точка из некоторой окрестности точки x , т. е. на этой окрестности $F = \text{const}$, что противоречит определению инварианта. Следовательно, инварианты существуют только у интранзитивных групп.

Пусть $r_* < n$. Тогда для каждого $x \in U$ образ $\xi(x)(B)$ является подпространством в X и, значит, $r_* \leq r$. В этом образе можно выбрать r_* линейно независимых векторных полей $\xi_i(x)$, соответствующих линейно независимым векторам $e_i \in B$ ($i = 1, \dots, r_*$), причем $\xi_i(x) = \xi(x) \langle e_i \rangle$. Пусть B_0 есть подпространство в B (собственное, если $r_* < r$), порожденное множеством $\{e_i\}$. Утверждается, что семейство векторных полей $\xi(x)(B_0)$ является полным.

Действительно, условие полноты (а) из определения 17.2 выполнено, так как по построению $\dim B_0 = r_*$. Кроме того, для любого $a \in B$ и каждого $x \in U$ справедливо представление

$$\xi_a(x) = \lambda_a^i(x) \xi_i(x), \quad (3.1)$$

в котором коэффициенты, вообще говоря, зависят от точки x . Так как пространство $\xi(x)(B)$ есть алгебра Ли, то для любых $a, b \in B_0$

$$[\xi_a(x), \xi_b(x)] = \xi_{[a, b]}(x) = \lambda_{[a, b]}^i(x) \xi_i(x) = \xi(x) \langle \lambda_{[a, b]}^i(x) e_i \rangle,$$

т. е. выполнено условие полноты (б), выражаемое равенством (2.1).

Любой инвариант (универсальный инвариант) группы $G^r(f)$ является инвариантом (универсальным инвариантом) семейства векторных полей $\xi(x)(B_0)$. Это следует из критерия теоремы 17.1 и представления (3.1). Поэтому, если $r_* < n$, то существование универсального инварианта группы $G^r(f)$, указанного в теореме строения, следует из теоремы 17.2 и ее следствия. ■

Из этой теоремы можно, как и в 3.6, сделать следующий вывод.

Следствие. *Для любой группы $G^r(f)$, удовлетворяющей условию теоремы, существует полный набор из $n - r_*$ скалярных*

функционально независимых инвариантов

$$J^k: X \rightarrow R \quad (k=1, \dots, n-r_*), \quad (3.2)$$

обладающий тем свойством, что любой инвариант этой группы может быть представлен как функция от инвариантов (3.2).

На практике полный набор функционально независимых инвариантов обычно строится индуктивно с помощью процедуры, аналогичной той, которая реализована в доказательстве теоремы.

В соответствии с полученными результатами всякая группа $G^r(f) = (B, \varphi, \pi, X)$ преобразований пространства X размерности $\dim X = n$ оказывается снабженной тремя целочисленными характеристиками (r, n, r_*) , где r есть размерность группы, n — размерность пространства представления и r_* — общий ранг касательного отображения группы. Между этими числами существуют обязательные соотношения

$$r_* \leq r, \quad r_* \leq n. \quad (3.3)$$

Поэтому группа, для которой $r < n$, всегда имеет инварианты. Но группа $G^r(f)$ может иметь инварианты и в том случае, когда $r \geq n$, лишь бы было $r_* < n$.

Вообще, если $r_* < r$, то касательные векторные поля ξ_a , получаемые для всевозможных $a \in B$, называются линейно связанными. Это означает, что существует такое разложение в прямую сумму $B = B_* \oplus B'$, что $\dim B_* = r_*$, пространство векторных полей $\xi(x)(B'_*)$ имеет общий ранг, равный r_* , и для любого вектора $a' \in B'$ справедливо представление

$$\xi_{a'}(x) = \xi(x) \langle \omega_{a'}(x) \rangle \quad (3.4)$$

с некоторым отображением $\omega_{a'}: X \rightarrow B_*$. При этом число $\dim B' = r - r_*$ называется числом независимых линейных связей векторных полей $\xi_a \in \xi(x)(B)$. Поэтому, если $r \geq n$, то группа имеет инварианты, только если ее касательные векторные поля ξ_a линейно связаны, причем число независимых линейных связей достаточно велико.

4. Инварианты внутренних автоморфизмов. При построении оптимальных систем подалгебр (см. 14.7) полезно знать инварианты группы внутренних автоморфизмов $\text{Int } L^r$ данной алгебры Ли L^r .

Согласно определениям 14.3 и 14.4 касательное отображение e группы $\text{Int } L^r$ задает для любого $u \in L^r$ векторное поле $e_u = \text{ad } (u)$, действующее по формуле $e_u(x) = \text{ad } (u) \langle x \rangle = [x, u]$ (см. 14(3.1)). Так как здесь $B = L^r$, то максимальная размерность векторного пространства $\text{ad } (L^r)$ равна максимальному рангу линейного отображения $\text{ad } (u)$, когда вектор u пробегает L^r . Следовательно,

$$r_* = \max_{u \in L^r} \text{rank ad } (u). \quad (4.1)$$

Но ранг линейного отображения $\text{ad}(u): L' \rightarrow L'$ равен числу ненулевых корней характеристического многочлена этого отображения. Этот многочлен есть полином Киллинга алгебры Ли L' (см. 14.8). Поэтому в силу данного в 14.8 определения ранга l алгебры Ли L' формула (4.1) дает $r_* = r - l$. Так как $l > 0$ и $n = r$, то группа автоморфизмов $\text{Int } L'$ всегда интранзитивна и полный набор ее функционально независимых инвариантов состоит из $n - r_* = l$ скалярных инвариантов. Итак, универсальный инвариант J группы $\text{Int } L'$ есть отображение $J: L' \rightarrow R'$, где $l = \text{ранг алгебры Ли } L'$.

Легко устанавливается, что все ненулевые коэффициенты $\tau_i(x)$ полинома Киллинга $\det(\lambda I_r - \text{ad}(x))$ (см. 14 (8.2)) являются инвариантами группы $\text{Int } L'$. Действительно, пусть $\lambda = \lambda(x)$ — какой-нибудь корень характеристического многочлена и y — соответствующий собственный вектор линейного отображения $\text{ad}(x)$, т. е. справедливо равенство

$$[y, x] = \lambda(x)y.$$

Под действием внутреннего автоморфизма $A \in \text{Int } L'$ это равенство переходит в следующее:

$$[A\langle y \rangle, A\langle x \rangle] = \lambda(x)A\langle y \rangle,$$

показывающее, что $A\langle y \rangle$ есть собственный вектор отображения $\text{ad}(A\langle x \rangle)$, соответствующий тому же самому собственному значению $\lambda(x)$. Это означает, что каждое собственное значение $\lambda(x)$ равно некоторому собственному значению $\lambda(A\langle x \rangle)$. Так как верно и обратное, то совокупность собственных значений отображения $\text{ad}(x)$ совпадает с совокупностью всех собственных значений отображения $\text{ad}(A\langle x \rangle)$. Следовательно, все коэффициенты (ненулевые) полинома Киллинга, как симметрические функции его корней, суть инварианты группы $\text{Int } L'$.

Кроме того, пусть Z есть центр алгебры Ли L' , и пусть $L' = Z \oplus L^s$, где L^s — подалгебра в L' . Тогда, если базис в L' выбран так, что он содержит базис центра Z , то в разложении произвольного вектора $x \in L'$ по базису ненулевые коэффициенты при базисных центральных векторах — также инварианты группы $\text{Int } L'$.

5. Примеры. (а) Иллюстрацией к п. 17.4 служит пример 14.9, в котором $L^4 = L^3 \oplus Z$, где центр Z порожден вектором u_4 и базис в L^3 есть $\{u_1, u_2, u_3\}$. С помощью формулы 14 (9.3) для $\text{ad}(v)$ получается полином Киллинга алгебры Ли L^3

$$\det(\lambda I_3 - \text{ad}(x)) = \begin{vmatrix} \lambda - 3x^2 & 3x^1 & 0 \\ -x^3 & \lambda & x^1 \\ 0 & -3x^3 & \lambda + 3x^3 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3(3(x^2)^2 - 2x^1x^3)\lambda.$$

Единственный ненулевой коэффициент есть $\tau_2(x) = \frac{1}{2} K \langle x, x \rangle$, где K — форма Киллинга, найденная в 14.9. Здесь $l=1$ и есть один скалярный инвариант $J_1: R^3 \rightarrow R$ группы $\text{Int } L^3$, действующий по формуле $J_1(x) = K \langle x, x \rangle$. Кроме того, если $x = x^a u_a \in L^4$, то инвариантом будет также x^4 . Поэтому универсальный инвариант $J: R^4 \rightarrow R^2$ группы $\text{Int } L^4$ может быть взят в виде

$$J(x) = (J_1(x^1, x^2, x^3), x^4).$$

(β) Пусть $G^3(f)$ — группа вращений пространства $R^3(x, y, z)$. Базис ее алгебры Ли операторов $L^3(\xi)$ таков:

$$\xi_1 \cdot \partial = z \partial_y - y \partial_z, \quad \xi_2 \cdot \partial = -z \partial_x + x \partial_z, \quad \xi_3 \cdot \partial = y \partial_x - x \partial_y. \quad (5.1)$$

Здесь $r=n=3$, но операторы (5.1) линейно связаны, так как $x\xi_1 + y\xi_2 + z\xi_3 = 0$, причем это единственная независимая их связь. Поэтому $r_* = 2$, в силу чего должен быть один скалярный инвариант. При его вычислении один из операторов (5.1), например, $\xi_3 \cdot \partial$, можно отбросить.

Сначала находится универсальный инвариант оператора $\xi_1 \cdot \partial$. Очевидно, его можно взять таким:

$$J = (x, \sqrt{y^2 + z^2}).$$

При этом вектор $\xi_1(0, 1, 0) = (0, 0, -1)$ — ненулевой и можно принять, что $T = R(z)$. Тогда разложение $X = T \oplus Y$ можно выбрать в виде $R^3(x, y, z) = R(z) \oplus R^2(x, y)$. Затем делается преобразование вида (2.3) с отображением $p: (x, y, z) \rightarrow (x, \bar{y}, \bar{z})$, заданным формулами

$$x = x, \quad \bar{y} = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad \bar{z} = z,$$

в результате которого первые два оператора базиса (2.3) перейдут в следующие:

$$\xi_1 \cdot \partial = -y \partial_z, \quad \xi_2 \cdot \partial = -\bar{z} \partial_x + \frac{xz}{\bar{y}} \partial_y + x \partial_z.$$

С помощью подходящего преобразования вида (2.3) оператор $\xi_2 \cdot \partial$ можно перевести в оператор

$$\xi_2 \cdot \partial = -\bar{y} \partial_x + x \partial_y$$

с очевидным инвариантом $J_1(x, \bar{y}) = x^2 + \bar{y}^2$. Окончательно искомым универсальным инвариантом группы вращений получается по формуле

$$J_1 \circ J(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

6. Инварианты расширений. Под расширением группы (B, φ, π, X) здесь будут пониматься некоторые естественные переходы от нее к группам (B, φ, π', X') , основанные на расширении пространства X

до пространства X' и ему соответствующего расширения представления π до представления π' .

Первый способ такого расширения заключается в переходе к *кратным группам* — удвоенной, утроенной и т. д. Для построения удвоенной группы пространство X расширяется до $X^2 = X \times X$ и предполагается, что представление π одинаково для обоих сомножителей. Тем самым определено удвоенное представление $\pi^2: (B, \varphi) \rightarrow X^2$, а значит, и удвоенная группа (B, φ, π^2, X^2) . Если исходная группа порождается отображением $f: X \times B \rightarrow X$ и ее касательное отображение есть ξ , то удвоенная группа порождается отображением $f^2: X^2 \times B \rightarrow X^2$, действующим по формуле

$$f^2(x_1, x_2, a) = (f(x_1, a), f(x_2, a)), \quad (6.1)$$

где $x_1 \in X$, и $x_2 \in X$ — независимо меняющиеся векторы. Касательное отображение ξ^2 удвоенной группы есть отображение $X^2 \rightarrow X^2$, действующее по формуле

$$\xi^2(x_1, x_2) = (\xi(x_1), \xi(x_2)).$$

Для записи операторов удвоенной группы надо положить $\partial = (\partial_1, \partial_2)$, где ∂_1 и ∂_2 — операторы дифференцирования по векторам x_1 и x_2 соответственно. В этих обозначениях инфинитезимальный оператор удвоенной группы, соответствующий вектору $a \in B$ и секторному полю $\xi_a^2 = (\xi_a, \xi_a)$, имеет вид

$$\xi_a^2(x_1, x_2) \cdot \partial = \xi_a(x_1) \cdot \partial_1 + \xi_a(x_2) \cdot \partial_2. \quad (6.2)$$

Аналогично определяется утроенная и т. д., вообще, k -кратная группа (B, φ, π^k, X^k) преобразований пространства X^k .

Пространство B и группа (B, φ) при переходе к k -кратной группе не меняются, а размерность $\dim X^k = k \dim X$ (в случае конечномерного X) возрастает в k раз. Поэтому для достаточно большого k расширенная k -кратная группа necessarily интранзитивна и тем самым имеет инварианты. *Инварианты k -кратной группы называются k -точечными инвариантами исходной группы.*

Например, группа $G^1(f)$ переносов одномерного пространства $X = R(x)$, порожденная отображением $x' = x + a$, транзитивна. Удвоенная группа $G^1(f^2)$, порождающее отображение которой есть

$$x'_1 = x_1 + a, \quad x'_2 = x_2 + a,$$

дает двухточечный инвариант $J = x_1 - x_2$ группы $G^1(f)$.

Второй способ расширения, составляющий основу группового анализа дифференциальных уравнений, состоит в переходе к *продолженной группе*. Он относится к группам $G^r(h) = (B, \varphi, \pi, Z)$ преобразований произведения $Z = X \times Y$. Продолжение группы осуществляется путем продолжения каждого принадлежащего ей преобразования h_a до преобразования h_a по правилу, описанному

в 4.5, и аналогично выполненному в 4.7 продолжению однопараметрической группы. В этом случае пространство $Z = X \times Y$ расширяется до продолженного пространства $Z_k = X \times Y \times Y_1 \times \dots \times Y_k$ и соответственно представление $\pi: (B, \varphi) \rightarrow \tau(Z)$ — до представления $\pi_k: (B, \varphi) \rightarrow \tau(Z_k)$. При этом продолженные преобразования образуют группу $G^r_k(h) = G^r_k(h) = (B, \varphi, \pi_k, Z_k)$, изоморфную исходной. Это гарантируется леммой 4.6.

Одновременно с группой продолжается и ее касательное отображение ζ по правилам, описанным в 4.8. При этом продолженное касательное отображение ζ является касательным отображением продолженной группы $G^r_k(h)$ и порождает продолженную алгебру Ли $L^r_k(\zeta) = L^r_k(\zeta)$ векторных полей (или операторов) на продолженном пространстве Z_k . Лемма 7.12 гарантирует, что алгебра Ли $L^r_k(\zeta)$ изоморфна исходной алгебре Ли $L^r(\zeta)$.

При продолжении группы $G^r(h)$ размерность пространства Z_k растет неограниченно вместе с k и потому продолженная группа $G^r_k(h)$ для достаточно большого k необходимо интранзитивна и имеет инварианты. Инварианты продолженной группы называются *дифференциальными инвариантами* исходной группы. Они уже обсуждались в 4.11. Для дифференциальных инвариантов справедливы все критерии и правила отыскания, изложенные в настоящем параграфе. В частности, имеет смысл понятие универсального дифференциального инварианта порядка k как универсального инварианта продолженной группы $G^r_k(h)$.

§ 18. Инвариантные многообразия

1. Определение. Понятие многообразия $\Psi \subset X$, инвариантного относительно однопараметрической группы G^1 преобразований пространства X , уже рассматривалось в 3.10. Это понятие тривиально обобщается на случай произвольной группы (B, φ, π, X) в силу того, что каждая такая группа является объединением принадлежащих ей однопараметрических подгрупп (следствие теоремы 12.6). Вместе с тем в случае g -параметрических групп возникают некоторые новые факты, подлежащие изучению. Поэтому уместно сформулировать независимо основное определение понятия инвариантного многообразия группы $G^r(f) = (B, \varphi, \pi, X)$.

Многообразие $\Psi \subset X$ называется инвариантным многообразием группы $G^r(f)$ (или многообразием, инвариантным относительно группы $G^r(f)$), если для каждой точки $x \in \Psi$ найдется такая окрестность нуля $O \subset B$, что для любого $a \in O$ точка $x' = f(x, a)$ также принадлежит Ψ .

Ясно, что Ψ инвариантно относительно $G'(f)$, если и только если Ψ есть инвариантное многообразие любой ее однопараметрической подгруппы. Кроме того, если Ψ — инвариантное многообразие группы $G'(f)$, то оно также является инвариантным многообразием любой подгруппы (см. 15.2) этой группы.

Ниже будут рассматриваться многообразия Ψ , заданные неявно (см. 3.11) в конечномерном пространстве X , $\dim X = n$. Это означает, что задается открытое множество $U \subset X$ и отображение $\psi: U \rightarrow R^s$ (где $0 < s < n$) класса $C_\infty(U)$, причем $\psi(x_0) = 0$ для некоторой точки $x_0 \in U$ и множество $\psi(U_0)$ открыто в R^s для любой окрестности $U_0 \subset U$ точки x_0 . При этих условиях многообразие Ψ определяется как геометрическое место точек $x \in U$, для которых

$$\psi(x) = 0. \quad (1.1)$$

2. Критерий инвариантности. В дальнейшем предполагается, что уравнением (1.1) многообразие Ψ задано регулярно (см. 3.11). Это означает, что для каждого $x \in U$ производная $\partial\psi(x)$, как линейное отображение $X \rightarrow R^s$, имеет ранг на U , равный s . Тогда этот ранг равен общему рангу r_* векторного поля $\partial\psi$ на U (см. 17.2) и условие регулярности многообразия (1.1) записывается так:

$$r_*(\partial\psi) = s. \quad (2.1)$$

При этих условиях размерность многообразия Ψ равна $\dim \Psi = n - s$. Инфинитезимальный критерий инвариантности многообразия формулируется с помощью касательного отображения ξ группы $G'(f)$.

Т е о р е м а. Многообразие Ψ , регулярно заданное уравнением (1.1), инвариантно относительно группы $G'(f)$, если и только если

$$\partial\psi(x) \circ \xi(x)|_\Psi = 0. \quad (2.2)$$

Доказательство. Пусть ξ_a есть векторное поле на U , соответствующее вектору $a \in B$, т. е. $\xi_a(x) = \xi(x)\langle a \rangle$. Очевидно, что равенство (2.2) равносильно равенству $\partial\psi(x)\langle \xi_a(x) \rangle|_\Psi = 0$ или, что то же самое, равенству $(\xi_a \cdot \partial)\psi|_\Psi = 0$. Последнее совпадает с 3 (12.1) и в силу теоремы 3.12 дает критерий инвариантности многообразия Ψ относительно однопараметрической группы $G^1(\xi_a)$. Поэтому оба утверждения теоремы следуют из того, что группа $G'(f)$ есть объединение всех групп $G^1(\xi_a)$, получаемое когда вектор a пробегает пространство B . ■

Существует простой способ формирования инвариантных многообразий данной интранзитивной группы $G'(f)$. Берется любой ее инвариант $F: X \rightarrow R^s$ и образуется уравнение $F(x) = 0$. Заданное этим уравнением многообразие в X инвариантно относительно группы $G'(f)$. Этот факт очевиден в силу определения инварианта 17.1 (или в силу критерия 17 (1.3)). В дальнейшем

будет показано, что этот способ образования инвариантных многообразий, кажущийся на первый взгляд сильно ограниченным, на самом деле является общим.

Замечание. При переходе от группы $G^r(f)$ к ей подобной группе $G^r(f')$ с помощью преобразования p пространства X (см. 16.9) любое инвариантное многообразие Ψ группы $G^r(f)$ переходит, очевидно, в инвариантное многообразие Ψ' группы $G^r(f')$. При этом, если Ψ задано уравнением (1.1), то уравнение преобразованного многообразия Ψ' таково:

$$\psi \circ p^{-1}(x) = 0. \quad (2.3)$$

3. Индуцированная группа. Согласно данному в 17.1 определению инвариантного многообразия Ψ группы $G^r(f) = (B, \varphi, \pi, X)$ для каждой точки $x \in \Psi$ и для любого $a \in O$ определен образ $x' = f_a(x) \in \Psi$. Для получения этого образа нет необходимости рассматривать преобразование f_a на всем пространстве X ; достаточно использовать лишь его сужение $f_a|_{\Psi}$ на многообразии Ψ . Ясно, что это сужение является локальным преобразованием многообразия Ψ .

Преобразования $f_a|_{\Psi}: \Psi \rightarrow \Psi$ называются индуцированными преобразованиями инвариантного многообразия Ψ группы $G^r(f)$. Множество индуцированных преобразований задается сужением $f|_{\Psi}$ порождающего группу $G^r(f)$ отображения f . Это сужение $f|_{\Psi}$ будет называться индуцированным отображением $\Psi \times O \rightarrow \Psi$; оно может рассматриваться как отображение окрестности нуля $O \subset B$ в группу $\tau(\Psi)$ всех преобразований многообразия Ψ , действующее по формуле $(f|_{\Psi})_a = f_a|_{\Psi}$.

Легко проверяется, что индуцированное отображение $f|_{\Psi}$ порождает представление π_{Ψ} группы (B, φ) в группе $\tau(\Psi)$, действующее по формуле $\pi_{\Psi}(a) = f_a|_{\Psi}$. Действительно, согласно данным определениям для $x \in \Psi$ будет $\pi_{\Psi}(a)(x) = f(x, a)$ и справедливы равенства $\pi_{\Psi}(b) \circ \pi_{\Psi}(a)(x) = f(f(x, a), b) = f(x, \varphi(a, b)) = \pi_{\Psi}(\varphi(a, b))$. Полученное представление $\pi_{\Psi}: O \rightarrow \tau(\Psi)$ является гомоморфизмом группы (B, φ) в группу $\tau(\Psi)$. Поэтому его образ $\pi_{\Psi}(O)$ есть группа преобразований многообразия Ψ .

Группа $\pi_{\Psi}(O)$ называется *индуцированной группой* на инвариантном многообразии Ψ группы $G^r(f)$ и будет обозначаться также символом $G(f|_{\Psi})$.

На самом деле индуцированная группа $G(f|_{\Psi})$ является локальной группой Ли преобразований многообразия Ψ (рассматриваемого как локально банахово пространство — см. 15.2). Для установления этого факта рассматривается ядро представления π_{Ψ} , которое, очевидно, образовано теми и только теми $a \in O$, для которых преобразование f_a оставляет неподвижными все точки $x \in \Psi$.

Л е м м а. Совокупность преобразований f_a , оставляющих неподвижными все точки инвариантного многообразия Ψ , есть нормальный делитель группы $G^r(f)$.

Доказательство. Пусть $f_b \in G^r(f)$ и $f_a(x) = x$ для всех $x \in \Psi$. Тогда, если $x' = f_b(x)$, то $x' \in \Psi$ в силу инвариантности Ψ и $f_b^{-1} \circ f_a \circ f_b(x) = f_b^{-1} \circ f_a(x') = f_b^{-1}(x') = x$. ■

Теорема. Группа $G(f|\Psi)$, индуцированная группой $G^r(f)$ на ее инвариантном многообразии Ψ , является группой Ли преобразований многообразия Ψ .

Доказательство. Нормальному делителю группы $G^r(f)$ соответствует нормальный делитель H^p ее параметрической группы $G^r = (B, \varphi)$. Пусть $G^r/H^p = (\bar{B}, \bar{\varphi})$ — соответствующая факторгруппа (см. 15.5) с законом умножения классов $(\bar{a}, \bar{b}) \rightarrow \bar{\varphi}(\bar{a}, \bar{b})$. Легко проверяется, что отображение $\pi: (\bar{B}, \bar{\varphi}) \rightarrow \tau(\Psi)$, действующее по формуле $\pi(\bar{a}) = f_a|_{\Psi}$, если $a \in \bar{a}$, есть представление группы $(\bar{B}, \bar{\varphi})$. Утверждается, что представление π — точное. Действительно, если $\pi(\bar{a}) = I_{\Psi}$, т. е. $\pi(\bar{a})(x) = f(x, a) = x$ для всех $x \in \Psi$, то по построению $a \in H^p$ и $\bar{a} = 0$. Остальное следует из определения 16.1, все условия которого выполнены. ■

Нормальный делитель H^p с помощью представления π дает группу (H^p, φ', π, X) преобразований пространства X , элементы которой, и только они, оставляют на месте все точки инвариантного многообразия Ψ .

Группа (H^p, φ', π, X) называется **стационарной группой** многообразия Ψ .

Для отыскания порядка p стационарной группы можно, не нарушая общности вывода, считать группу (B, φ) канонической. Тогда равенство $f_{ia}(x) = x$ для однопараметрической подгруппы $G^1(f_{ia}) \subset G^r(f)$ равносильно равенству $\xi(x)\langle a \rangle = 0$. Это означает, что если $x \in \Psi$, то последнее равенство выполнено для всех $a \in H^p$, и только для них. Поэтому для любого $x \in \Psi$ справедлива формула $\dim \xi(x)(B) = r - p$. С другой стороны, пусть $r_*(\xi|\Psi)$ обозначает общий ранг касательного отображения ξ группы $G^r(f)$ на многообразии Ψ . Этот ранг вычисляется через размерность пространства векторных полей $\xi(x)(B)$ по формуле $r_*(\xi|\Psi) = \dim \xi(x)(B)$. Следовательно, размерности стационарной подгруппы (H^p, φ', π, X) инвариантного многообразия Ψ группы $G^r(f)$ и индуцированной на Ψ группы $(\bar{B}, \bar{\varphi}, \pi_{\Psi}, \Psi)$ даются формулами

$$\begin{aligned} \dim H^p &= p = r - r_*(\xi|\Psi), \\ \dim \bar{B} &= r - p = r_*(\xi|\Psi). \end{aligned} \quad (3.1)$$

4. Индуцированная алгебра Ли. Пусть ξ_a — векторное поле на пространстве X , принадлежащее алгебре Ли $L^r(\xi)$ группы $G^r(f)$. Сужение этого векторного поля на некоторое многообразие Ψ

обозначается символом $\xi_a|\Psi$. Для любых двух векторных полей $\xi_a, \xi_b \in L^*(\xi)$ коммутатор их сужений на Ψ определяется формулой

$$[\xi_a|\Psi, \xi_b|\Psi] = [\xi_a, \xi_b]|\Psi. \quad (4.1)$$

Очевидно, что множество всех сужений $\xi_a|\Psi$, получаемых когда вектор a пробегает пространство B , с операцией коммутации (4.1) образует алгебру Ли. Она будет называться *индуцированной алгеброй Ли* на многообразии Ψ и будет обозначаться символом $L(\xi|\Psi)$. В случае произвольного многообразия Ψ польза от введения этого понятия невелика ввиду его слабой связи с исходной группой. Иначе обстоит дело, когда Ψ есть инвариантное многообразие группы $G^r(f)$.

Теорема. Если Ψ — инвариантное многообразие группы $G^r(f)$, то индуцированная алгебра Ли $L(\xi|\Psi)$ является алгеброй Ли индуцированной группы $G(f|\Psi)$ и ее размерность равна $r_*(\xi|\Psi)$.

Доказательство. Для реализации алгебры Ли $L(\xi)$ группы $G(f)$, где $j = f|\Psi$, используются обозначения и факты из доказательства теоремы 18.3. Предполагается, что параметрическая группа $G^r = (B, \varphi)$ группы $G^r(f)$ является канонической. Тогда ее нормальный делитель H^p и факторгруппа $G^r/H^p = (\bar{B}, \bar{\varphi})$ также канонические. Поэтому однопараметрические подгруппы группы $G(f)$ имеют вид $\{j_{t\bar{a}}\}$, где $\bar{a} \in \bar{B}$. Но по определению $j_{t\bar{a}}(x) = f(x, ta)$, если $a \in \bar{a}$. Поэтому вычисление касательного векторного поля $\xi_{\bar{a}}$ однопараметрической подгруппы $\{j_{t\bar{a}}\}$ дает

$$\xi_{\bar{a}}(x) = \partial_t j_{t\bar{a}}(x)|_{t=0} = \partial_t f(x, ta)|_{t=0} = \xi(x)\langle a \rangle = (\xi_a|\Psi)(x),$$

т. е. $\xi_{\bar{a}} = \xi_a|\Psi$. Определенное этим равенством отображение алгебр Ли $L(\xi) \rightarrow L(\xi|\Psi)$ является взаимно однозначным, так как если $\xi_a|\Psi = \xi_b|\Psi$, то $\xi(x)\langle a - b \rangle = 0$ для любого $x \in \Psi$, откуда следует, что $a - b \in H^p$ и $\bar{a} = \bar{b}$ в силу леммы 15.5. Следовательно, алгебры Ли $L(\xi)$ и $L(\xi|\Psi)$ совпадают как множества. Кроме того, в силу соотношений $[\xi_{\bar{a}}, \xi_{\bar{b}}] = \xi_{[\bar{a}, \bar{b}]} = \xi_{[\bar{a}, \bar{b}]}|\Psi = [\xi_a, \xi_b]|\Psi$ и определения (4.1) в этих алгебрах Ли совпадают и операции коммутации. Наконец, утверждение о размерности индуцированной алгебры Ли следует из формулы (3.1). ■

5. Наименьшие инвариантные многообразия. Пусть группа $G^r(f)$ порождена отображением $f: U \times O \rightarrow X$ произведения открытого множества $U \subset X$ на окрестность нуля $O \subset B$. Рассматривается орбита $f_x(O)$ некоторой фиксированной точки $x \in U$. Как уже было отмечено в 16.10, если эта орбита содержит окрестность точки x , то группа $G^r(f)$ транзитивна в этой точке. В этом случае точка x не может принадлежать никакому инвариантному многообразию группы $G^r(f)$.

Напротив, пусть орбита $f_x(O)$ не содержит никакой окрестности точки x . Тогда эта орбита есть многообразие в X , заданное параметрически уравнением $x = f(x, a)$ с векторным параметром $a \in O$. В этом случае орбита $f_x(O)$ является инвариантным многообразием группы $G^r(f)$, так как если $x \in f_x(O)$, то $x = f(x, a)$ с некоторым $a \in O$ и для любого $b \in O$ (при условии, что $|b|$ достаточно мала) также $f(x, b) = f(x, \varphi(a, b)) \in f_x(O)$. Кроме того, ясно, что всякое инвариантное многообразие группы $G^r(f)$, содержащее x , необходимо содержит и орбиту $f_x(O)$. Поэтому орбита $f_x(O)$ является наименьшим инвариантным многообразием группы $G^r(f)$, содержащим точку x . В соответствии с результатами 16.10 размерность орбиты $f_x(O)$ дается формулой

$$\dim f_x(O) = \text{rank } \xi(x). \quad (5.1)$$

Лемма. *Группа $G(f|f_x(O))$, индуцированная на орбите $f_x(O)$ любой точки $x \in U$, просто транзитивна.*

Доказательство. Если $x_1 = f(x, a)$ и $x_2 = f(x, b)$ — любые две точки из $f_x(O)$, то $x_2 = f(x_1, \varphi(a^{-1}, b))$, т. е. x_1 переводится в x_2 преобразованием, принадлежащим группе. Поэтому группа $G(f|f_x(O))$ транзитивна. Кроме того, как как размерность индуцированной группы дается формулой (3.1) и тем самым равна общему рангу $r_*(\xi|f_x(O))$, то свойство просто транзитивности группы $G(f|f_x(O))$ вытекает из следствия 17.10.2 ■

6. Особые инвариантные многообразия. Пусть $r_* = r_*(\xi)$ есть общий ранг касательного отображения ξ группы $G^r(f)$ на множестве U , определенный формулой 16(10.1), причем не предполагается, что ξ имеет ранг на U (т. е. в разных точках $x \in U$ ранг $\text{rank } \xi(x)$ может быть различным). С помощью числа r_* все точки $x \in U$ подразделяются на особые и неособые.

Точка x называется особой точкой (группы $G^r(f)$), если $\text{rank } \xi(x) < r_*$, и неособой точкой (группы $G^r(f)$), если $\text{rank } \xi(x) = r_*$.

Многообразие $\Psi \subset U$ называется особым многообразием группы $G^r(f)$ (или ее алгебры Ли $L^r(\xi)$), если все его точки — особые и если касательное отображение ξ имеет ранг на Ψ . Другими словами, особое многообразие характеризуется тем, что для любой точки $x \in \Psi$

$$\text{rank } \xi(x) = r_*(\xi| \Psi) < r_*. \quad (6.1)$$

Многообразие $\Psi \subset U$ называется неособым многообразием группы $G^r(f)$ (или ее алгебры Ли $L^r(\xi)$), если все его точки — неособые, т. е. если выполнено равенство

$$r_*(\xi| \Psi) = r_*. \quad (6.2)$$

Этими определениями, в частности, все инвариантные многообразия группы $G^r(f)$ подразделяются на особые и неособые инвариантные многообразия.

Для отыскания особых многообразий имеется простой алгоритм, реализуемый в каких-нибудь системах координат в пространствах B и X . Пусть $\{u_\alpha\}$ — базис в B ($\alpha = 1, \dots, r$) и $\{e_i\}$ — базис в X ($i = 1, \dots, n$), причем разложения векторов $x, \xi \in X$ имеют вид $x = x^i e_i, \xi = \xi^i e_i$, и базис алгебры Ли $L'(\xi)$ образован векторами $\xi_\alpha(x) = \xi(x) \langle u_\alpha \rangle$. Тогда касательное отображение ξ адекватно описывается $r \times n$ матрицей

$$M(x) = (\xi_\alpha^i(x)) \quad (i = 1, \dots, n; \alpha = 1, \dots, r), \quad (6.3)$$

где i — номера столбцов и α — номера строк. При этом справедливо равенство

$$\text{rank } \xi(x) = \text{rank } M(x), \quad (6.4)$$

в силу которого на матрицы вида (6.3) очевидным образом переносятся понятия « M имеет ранг на U », «общий ранг $r_*(M)$ », «общий ранг $r_*(M|\Psi)$ » и т. д. Удобство этого представления состоит в том, что ранг матрицы вычисляется с помощью простых алгебраических операций, которые для не очень больших значений r и n выполняются до конца.

Для отыскания общего ранга матрицы M надо найти ее минор наибольшего порядка, не тождественно равный нулю; порядок этого минора равен $r_*(M)$.

Для того чтобы найти особые многообразия, надо вычислить все миноры матрицы M порядка $r_*(M)$ и приравнять их нулю. Совокупность S всех решений (наборов координат $\{x^i\}$ точки x) полученной системы уравнений является множеством всех особых точек матрицы M , а значит, и группы $G^r(f)$. Любое многообразие $\Psi \subset S$, на котором M имеет ранг, есть особое многообразие группы $G^r(f)$. В общем случае многообразие Ψ не обязано быть инвариантным. Проверка многообразия на инвариантность выполняется с помощью критерия 18.2.

7. Теорема о представлении. Алгоритм, изложенный в предыдущем пункте, не позволяет находить неособые инвариантные многообразия группы $G^r(f)$. Их описание дается следующей теоремой о представлении неособого инвариантного многообразия, в которой речь идет о многообразиях Ψ , удовлетворяющих условию

$$\dim \Psi < n. \quad (7.1)$$

Т е о р е м а. Неособые инвариантные многообразия группы $G^r(f)$ существуют, если и только если эта группа интранзитивна. Если неособое инвариантное многообразие группы $G^r(f)$ задано регулярно уравнением (1.1), то существует такой инвариант этой группы $F: X \rightarrow \mathbb{R}^s$, что это многообразие задается уравнением $F(x) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если группа $G^r(f)$ транзитивна и Ψ — ее неособое инвариантное многообразие, то орбита $f_x(O)$ точки $x \in \Psi$ принадлежит Ψ и одновременно содержит окрестность

точки x в пространстве X . Поэтому $\dim \Psi = \dim X = n$, что противоречит условию (7.1). Если же эта группа интранзитивна, то она имеет инварианты, а значит, и неособые инвариантные многообразия, получаемые по способу, изложенному в 18.2.

Пусть Ψ есть неособое инвариантное многообразие группы $G^r(f)$, регулярно заданное уравнением (1.1). Регулярность этого задания означает, что $\dim \Psi = n - s$, и так как для любой точки $x \in \Psi$ ее орбита $f_x(O) \subset \Psi$, то справедливо неравенство $r_* \leq n - s$.

Так как группа $G^r(f)$ интранзитивна, то она имеет универсальный инвариант $J: X \rightarrow R^{n-r_*}$. Далее, если $r_* < n - s$, то существует универсальный инвариант $\bar{J}$ индуцированной группы $G(f|\Psi)$, который в силу неособости Ψ и равенства (6.2) является отображением $\bar{J}: \Psi \rightarrow R^{n-s-r_*}$. С другой стороны, сужение $J|_{\Psi}$ есть, очевидно, инвариант индуцированной группы $G(f|\Psi)$ и потому может быть представлен в виде $J|_{\Psi} = \Phi \circ \bar{J}$ с некоторым отображением $\Phi: R^{n-s-r_*} \rightarrow R^{n-r_*}$. Ввиду того, что образ $\bar{J}(\Psi)$ содержит открытое множество $W \subset R^{n-s-r_*}$, отображением Φ задано многообразие $\Phi(W) \subset R^{n-r_*}(y)$ размерности $n - r_* - s' \leq n - r_* - s$, где $s \leq s'$. Многообразие $\Phi(W)$ может быть задано также неявно уравнением $\omega(y) = 0$ с некоторым отображением $\omega: R^{n-r_*} \rightarrow R^{s'}$, причем $r_*(\partial\omega) = s'$. Тем самым определен инвариант F группы $G^r(f)$ как отображение $X \rightarrow R^{s'}$, действующее по формуле $F(x) = \omega \circ J(x)$. Утверждается, что многообразие $\Psi' \subset X$, заданное уравнением $F(x) = 0$, совпадает с Ψ .

Действительно, для любого $x \in \Psi$ по построению $y = J(x) \in W$ и $\Phi(y) \in \Phi(W)$ в силу чего $F(x) = \omega(\Phi(y)) = 0$. Это означает, что $\Psi \subset \Psi'$ и потому $\dim \Psi \leq \dim \Psi'$. Но $\dim \Psi' = n - s'$, так как $r_*(\partial\omega) = s'$. Поэтому справедливо неравенство $n - s \leq n - s'$, откуда $s' \leq s$. Вместе с ранее полученным неравенством $s \leq s'$ это дает $s' = s$. Следовательно, оба многообразия Ψ и Ψ' имеют одинаковую размерность, и из включения $\Psi \subset \Psi'$ следует их совпадение.

Если же $r_* = n - s$, то индуцированная группа $G(f|\Psi)$ просто транзитивна в силу равенства (3.1) и следствия 16.10.2. Поэтому Ψ есть наименьшее инвариантное многообразие группы $G^r(f)$ и совпадает (локально) с орбитой некоторой точки $x_0 \in \Psi$. Но этим же свойством обладает многообразие Ψ' , заданное уравнением $J(x) = J(x_0)$, также имеющее размерность $n - s$. Поэтому Ψ' совпадает с Ψ и утверждение теоремы справедливо с отображением $x \rightarrow F(x) = J(x) - J(x_0)$. ■

8. Ранг неособого инвариантного многообразия. В ходе доказательства теоремы 18.7 установлено, что размерность любого неособого инвариантного многообразия группы $G^r(f)$ не меньше числа $r_* = r_*(\xi)$. Она равна этому числу только для неособых наименьших инвариантных многообразий (орбит неособых точек),

которые все задаются с помощью универсального инварианта J группы $G^r(f)$ уравнением вида $J(x) = J(x_0)$.

Теорема 18.7 позволяет снабдить каждое неособое инвариантное многообразие важной числовой характеристикой — рангом.

Рангом неособого инвариантного многообразия Ψ размерности $\dim \Psi = n - s$ группы $G^r(f)$ называется число

$$\rho = \rho(\Psi) = n - s - r_*. \quad (8.1)$$

Геометрический смысл ранга выясняется путем рассмотрения пространства $R^{n-r_*}(y)$, в которое действует универсальный инвариант J группы $G^r(f)$. Это пространство будет называться **пространством инвариантов**. Точками (векторами) пространства инвариантов являются значения универсального инварианта $y = J(x)$, получаемые когда точка x пробегает открытое множество $U \subset X$. В силу теоремы о представлении 18.7 неособое инвариантное многообразие Ψ задается уравнением $\omega \circ J(x) = 0$, которое можно рассматривать как уравнение в пространстве инвариантов $\omega(y) = 0$ и считать уравнением многообразия Ψ в этом пространстве. В силу равенства $r_*(\partial\omega) = s$ размерность последнего равна разности $n - r_* - s$, т. е. числу (8.1). Следовательно, ранг неособого инвариантного многообразия равен размерности этого многообразия в пространстве инвариантов.

На практике универсальный инвариант J группы $G^r(f)$ обычно представляется в виде полного набора $\{J^1, \dots, J^{n-r_*}\}$ функционально независимых скалярных инвариантов (см. 17.3). В этих терминах теорема о представлении неособого инвариантного многообразия размерности $n - s$ означает, что такое многообразие всегда может быть задано системой уравнений в пространстве инвариантов

$$\omega^\sigma(y^1, \dots, y^{n-r_*}) = 0 \quad (\sigma = 1, \dots, s). \quad (8.2)$$

Уравнения (8.2) независимы в том смысле, что $r_*(\partial_y \omega^\sigma) = s$. Уравнения этого многообразия в пространстве X получаются, если положить $y^\nu = J^\nu(x)$ ($\nu = 1, \dots, n - r_*$), и имеют вид

$$\omega^\sigma(J^1(x), \dots, J^{n-r_*}(x)) = 0 \quad (\sigma = 1, \dots, s).$$

9. Пример. Рассматривается алгебра Ли $L^3(\xi)$ группы $G^3(f)$ преобразований пространства $R^3(x, y, z)$, порожденная операторами

$$\begin{aligned} \xi_1 \cdot \partial &= \partial_x, & \xi_2 \cdot \partial &= x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z, \\ \xi_3 \cdot \partial &= x^2\partial_x + 2xy\partial_y + 2xz\partial_z. \end{aligned}$$

Соответствующая матрица M здесь такова:

$$M(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y & z \\ x^2 & 2xy & 2xz \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что ее общий ранг $r_*(M)=2$. Видно также, что эта матрица не имеет ранга ни в какой окрестности начала координат. Так как здесь $r_* < n=3$ и $n-r_*=1$, то группа $G^3(f)$ интранзитивна, а ее универсальный инвариант есть отображение $J: \mathbf{R}^3(x, y, z) \rightarrow \mathbf{R}$. Этот скалярный инвариант легко находится как решение системы уравнений

$$\begin{aligned}\partial_x J &= 0, & x\partial_x J + y\partial_y J + z\partial_z J &= 0, \\ x^2\partial_x J + 2xy\partial_y J + 2xz\partial_z J &= 0\end{aligned}$$

и может быть взят в виде $J=y/z$. Множество S особых точек группы $G^3(f)$ получится, если вычислить все миноры второго порядка матрицы M и приравнять их нулю. Эта система здесь равносильна следующей:

$$y=0, \quad z=0, \quad (9.1)$$

т. е. задает ось x . Во всех точках этой оси $\text{rank}(M|S)=1$, в силу чего $M|S$ имеет ранг и (9.1) есть особое многообразие. Применение критерия 18.2 показывает, что (9.1) является инвариантным многообразием группы $G^3(f)$. Оно не может быть задано никаким уравнением вида $F(y/z)=0$ с отображением F класса C_∞ в окрестности оси x .

Легко проверяется, что плоскость Ψ с уравнением

$$y-z=0$$

является неособым (кроме точек оси x) многообразием, инвариантным относительно группы $G^3(f)$. С помощью универсального инварианта J она задается также уравнением $J=1$. Ранг этого инвариантного многообразия равен нулю.

§ 19. Инвариантные решения уравнений

1. Сводка исходных понятий. Рассматривается дифференциальное уравнение E (система из s скалярных уравнений) вида 5(1.1), удовлетворяющее условиям, описанным в 5.1. Это уравнение задано с помощью отображения $\epsilon: \mathbf{Z}_k \rightarrow \mathbf{R}^s$ продолженного пространства $\mathbf{Z}_k$ (см. 4.2), полученного продолжением пространства $\mathbf{Z}=\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, где $\mathbf{X}=\mathbf{R}^n(x)$, $\mathbf{Y}=\mathbf{R}^m(y)$. При этом вектор $x \in \mathbf{X}$ называется «независимым переменным», а вектор $y \in \mathbf{Y}$ — «искомой функцией».

Предполагается известной и фиксированной некоторая группа Ли $G^r(h)=(B, \varphi, \pi, \mathbf{Z})$ преобразований h_a пространства $\mathbf{Z}$, допускаемая уравнением E (см. 16.12). Эта группа может совпадать с основной группой GE уравнения E , а может быть только некоторой подгруппой основной группы. В большинстве построений участвует лишь алгебра Ли $L^r(\zeta)$ группы $G^r(h)$, элементами которой являются векторные поля $\zeta_a: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$, действующие по формуле $\zeta_a(z)=(\xi_a(z), \eta_a(z))$

и записываемые в виде операторов

$$\zeta_a \cdot \partial = \xi_a \cdot \partial_x + \eta_a \cdot \partial_y, \quad (a \in B). \quad (1.1)$$

В соответствии с понятиями продолженной группы $G^r(h) = G^r(h)$, как группы продолженных преобразований $h_a: Z_k \rightarrow Z_k$, и продолженной алгебры Ли $L^r(\zeta) = L^r(\zeta)$, как алгебры Ли операторов $\zeta_a \cdot \partial$, и с определением 5.2 уравнение E , как многообразие $E \subset Z_k$, является инвариантным многообразием группы $G^r(h)$ (алгебры Ли $L^r(\zeta)$) или дифференциальным инвариантным многообразием (см. 4.11) исходной группы $G^r(h)$ (алгебры Ли $L^r(\zeta)$).

В дальнейшем предполагается, что многообразие E является неособым (в смысле 18.6) инвариантным многообразием продолженной группы $G^r(h)$.

Каждое решение u уравнения E есть отображение $X \rightarrow Y$, действующее по формуле $y = u(x)$. Множество всех решений класса $C_\infty(V)$ на открытом множестве $V \subset X$ будет обозначаться символом SE . Решению u соответствует многообразие $U \subset Z$, заданное уравнением

$$y = u(x). \quad (1.2)$$

С помощью отображения $u: X \rightarrow Z$, действующего по формуле $u(x) = (x, u(x))$, многообразие U может быть задано также параметрически, а именно, $U = u(V)$. Продолжение решения выполняется по формуле 4(4.1), в силу которой многообразие U также продолжается до многообразия $U_k \subset Z_k$, определенного формулой 5(6.2). Как и в 7.6, свойство отображения $u: V \rightarrow Y$ быть решением уравнения E равносильно вложению $U_k \subset E$.

Фундаментальное значение ситуации «уравнение E допускает группу $G^r(h)$ » состоит в том, что группа $G^r(h)$ действует на множестве решений SE (см. 5.6). Это означает, что под действием любого преобразования $h_a \in G^r(h)$ каждое решение $u \in SE$ преобразуется в решение того же уравнения E . Преобразование решений $u \rightarrow u_a$ выполняется по формуле 5(7.3), которая может быть переписана в виде

$$u_a = (g_a \circ u) \circ (f_a \circ u)^{-1}, \quad (1.3)$$

если преобразование $h_a = (f_a, g_a)$ действует по формуле $h_a(z) = (f_a(z), g_a(z))$.

2. Определение. Если дифференциальное уравнение E допускает группу $G^r(h)$, то оно допускает и любую ее подгруппу H .

В соответствии с этим понятие инвариантного решения определяется так, чтобы оно охватывало все подгруппы $H \subset G^r(h)$.

Решение $u \in SE$ называется инвариантным H -решением уравнения E , если ему соответствующее многообразие U является инвариантным многообразием группы H .

Ясно, что многообразие — решение U имеет размерность $\dim U = n = \dim X$. С другой стороны, очевидно, что $r_*(\partial(y - u(x))) = m$. Следовательно, так как $\dim Z = n + m$, многообразие U уравнением (1.2) задано регулярно (см. 18.2). Пусть ζ есть касательное отображение группы H и справедливо представление (1.1). Применение к U критерия инвариантности регулярно заданного многообразия 18.2 дает следующий критерий инвариантности решения $u \in SE$: для любого $x \in V$

$$\eta(x, u(x)) - \partial u(x) \langle \xi(x, u(x)) \rangle = 0. \quad (2.1)$$

Инвариантное H -решение u называется *особым* или *неособым* в зависимости от того, является соответствующее многообразие U особым или неособым многообразием группы H .

3. Необходимые условия. Пусть $r_* = r_*(\zeta)$ — общий ранг касательного отображения ζ группы H . Для выяснения вопроса о том, будет ли данное инвариантное H -решение u особым или неособым, надо, согласно 18.6, найти число $r_*(\zeta|U)$ и сравнить его с r_* . Но в силу условия инвариантности (2.1)

$$r_*(\zeta|U) = r_*(\xi(x, u(x)), \eta(x, u(x))) = r_*(\xi(x, u(x))) = r_*(\xi|U).$$

Поэтому решение u особое, если $r_*(\xi|U) < r_*$, и неособое, если $r_*(\xi|U) = r_*$.

Итак, решение u неособое, если и только если

$$r_*(\xi|U) = r_*. \quad (3.1)$$

Если u есть неособое инвариантное H -решение, то соответствующее инвариантное многообразие U имеет определенный ранг, равный его размерности в пространстве инвариантов. Но универсальный инвариант группы H является отображением $J: Z \rightarrow R^{n+m-r_*}$, а размерность U равна $(n+m) - m = n$. Поэтому формула 18(8.1) дает следующее значение ранга неособого инвариантного H -решения:

$$\rho = \rho(H) = n - r_*. \quad (3.2)$$

Кроме того, в силу теоремы о представлении 18.7 неособое инвариантное многообразие U , регулярно заданное уравнением (1.2), может быть задано регулярно уравнением вида

$$\omega \circ J(z) = 0 \quad (3.3)$$

с некоторым отображением $\omega: R^{n+m-r_*} \rightarrow R^m$ класса C_∞ , причем $r_*(\partial\omega) = m$.

Лемма. Для того чтобы уравнение E , допускающее группу H , имело неособые инвариантные H -решения, необходимо выполнение соотношений

$$r_* \leq n, \quad r_*(\partial_y J) = m. \quad (3.4)$$

Доказательство. Так как уравнение (3.3) равносильно уравнению (1.2), то из него можно найти «искомый» m -мерный вектор $y = u(x)$. Поэтому должно быть выполнено равенство $r_*(\partial_y(\omega \circ J)) = m$. Но $\partial_y(\omega \circ J) = \partial\omega(J) \circ \partial_y J$, и так как $r_*(\partial_y J) \leq m$, то в силу известной теоремы о ранге композиции линейных отображений и равенства $r_*(\partial\omega) = m$ отсюда следует второе соотношение (3.4). Первое фактически уже доказано выше: оно следует из равенства (3.2), так как $\rho \geq 0$. ■

В приложениях пользоваться равенством (3.4) не очень удобно, так как это требует предварительного знания универсального инварианта. Более тонкое инфинитезимальное условие существования инвариантных H -решений, проверка которого вместе с тем значительно проще, имеет вид

$$r_* \leq n, \quad r_*(\xi) = r_* \quad (3.5)$$

и вытекает из следующей теоремы.

Теорема. Для существования неособых инвариантных H -решений необходимо выполнение соотношений (3.5), причем равенство (3.4) есть следствие равенства (3.5).

Доказательство. Так как $r_*(\xi|U) \leq r_*(\xi) \leq r_*$, то равенство (3.5) следует из (3.1) и необходимость соотношений (3.5) очевидна. Пусть (3.5) выполнено. В силу равенства $r_*(\zeta) = r_*$ линейное отображение $\zeta(z): B \rightarrow Z$, где $B = R^r$, можно сузить до такого отображения $\bar{\zeta}(z): B_0 \rightarrow Z$, где $B_0 = R^r \subset B$, что отображение $\bar{\zeta}(z)$ — полное и универсальное инвариантное для ζ совпадает с J (см. доказательство теоремы 17.3). Ясно, что подпространство B_0 можно выбрать таким, что если положить $\bar{\zeta} = (\xi, \eta)$, то $r_*(\xi) = r_*$. Тогда ξ можно представить в виде $\xi = (\xi', \xi'')$, где $r_*(\xi') = r_*$ и линейное отображение $\xi'(z): B_0 \rightarrow \xi'(z)(B_0)$ обратимо. Пусть этому представлению соответствует разложение пространства X в произведение $X = X' \times X''$, причем $X' = \xi'(z)(B_0)$, и пусть $x = (x', x'')$. В этих обозначениях условие того, что J — инвариант, принимает вид

$$\xi' \cdot \partial_{x'} J + \xi'' \cdot \partial_{x''} J + \eta \cdot \partial_y J = 0$$

и после действия на него обратного отображения ξ'^{-1} таково:

$$\partial_{x'} J + (\xi'' \circ \xi'^{-1}) \cdot \partial_{x''} J + (\eta \circ \xi'^{-1}) \cdot \partial_y J = 0.$$

Следовательно,

$$\rho + m = r_*(\partial J) = r_*(\partial_{x'} J, \partial_{x''} J, \partial_y J) = r_*(\partial_{x''} J, \partial_y J).$$

Но справедливо общее неравенство $r_*(\partial_{x''}J, \partial_y J) \leq r_*(\partial_{x''}J) + r_*(\partial_y J)$, в котором, очевидно, $r_*(\partial_{x''}J) \leq \rho$ и $r_*(\partial_y J) \leq m$. Поэтому предыдущее равенство возможно, только если $r_*(\partial_y J) = m$. ■

4. Проекция. Пусть $\bar{Z} = R^{m+p}(\bar{z})$ есть пространство инвариантов, в которое действует универсальный инвариант J группы H . В силу теоремы о представлении 18.7 для любого неособого инвариантного многообразия $\Psi \subset Z$ группы H определена его проекция $\bar{\Psi} = J(\Psi)$ в пространстве инвариантов $\bar{Z}$. Соответствие между неособыми инвариантными многообразиями и их проекциями является взаимно однозначным, так как справедливо следующее утверждение.

Лемма. Неособое инвариантное многообразие Ψ однозначно определено своей проекцией $\bar{\Psi}$ в пространстве инвариантов.

Доказательство. Пусть $\Psi' = J^{-1}(\bar{\Psi})$ есть многообразие — полный прообраз многообразия $\bar{\Psi}$ в Z . Тогда $\bar{\Psi} = J(\Psi')$ и потому многообразие Ψ' инвариантно. Действительно, если $z \in \Psi'$ и $z' = h_a(z)$ с некоторым преобразованием $h_a \in H$, то $J(z') = J(z)$, т. е. $z' \in \Psi'$. Кроме того, $\Psi \subset \Psi'$, и поэтому многообразие Ψ' — неособое. Значит, Ψ' имеет ранг ρ' , равный его размерности в пространстве инвариантов (см. 18.8), т. е. размерности многообразия $\bar{\Psi}$ в $\bar{Z}$. Но эта размерность равна рангу ρ неособого инвариантного многообразия Ψ , так что $\rho' = \rho$. В силу формулы 18(8.1) отсюда следует, что размерности многообразий Ψ' и Ψ равны. Следовательно, $\Psi' = \Psi$. ■

Следствие. Для любого заданного многообразия $\bar{\Psi} \subset \bar{Z}$ существует одно и только одно неособое инвариантное многообразие $\Psi \subset Z$, проекцией которого является $\bar{\Psi}$.

Замечание 1. Справедливо правило вложения проекций: $\Psi_1 \subset \Psi_2$, если и только если $\bar{\Psi}_1 \subset \bar{\Psi}_2$.

Замечание 2. Если Ψ задано уравнением $\phi(z) = 0$, то согласно теореме о представлении 18.7 оно задается также уравнением вида $\bar{\phi} \circ J(z) = 0$ или, если положить $\bar{z} = J(z)$, уравнением $\bar{\phi}(\bar{z}) = 0$. Уравнение $\bar{\phi}(\bar{z}) = 0$ будет называться проекцией уравнения $\phi(z) = 0$ в пространстве инвариантов. При этом проекция $\bar{\phi}(\bar{z}) = 0$ задает многообразие $\bar{\Psi} \subset \bar{Z}$, которое является проекцией многообразия Ψ . Действительно, если $z \in \Psi$, то $\phi(z) = 0$, что равносильно равенству $\bar{\phi} \circ J(z) = 0$, т. е. $\bar{z} = J(z) \in \bar{\Psi}$. Так как это верно для любого $z \in \Psi$, то $J(\Psi) = \bar{\Psi}$.

В дальнейшем пространстве инвариантов $\bar{Z}$ рассматривается как произведение $\bar{Z} = \bar{X} \times \bar{Y}$, где $\bar{X} = R^p(\bar{x})$, $\bar{Y} = R^m(\bar{y})$, так что $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$. Соответственно этому универсальный инвариант J представляется в виде $J = (J_1, J_2)$, причем его компоненты — инварианты $J_1: Z \rightarrow \bar{X}$ и $J_2: Z \rightarrow \bar{Y}$ действуют по формулам

$x = J_1(x, y)$ и $\bar{y} = J_2(x, y)$. Предполагается, что это представление выбрано так, чтобы были выполнены равенства

$$r_*(\partial_x J_1) = p, \quad r_*(\partial_y J_2) = m, \quad (4.1)$$

что всегда возможно при условиях (3.4).

В этих обозначениях неособое инвариантное многообразие U с уравнением (1.2) может быть задано в пространстве инвариантов уравнением вида $\bar{y} = \bar{u}(x)$ с некоторым отображением $\bar{u}: \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$. Это уравнение задает проекцию $\bar{U}$ многообразия U в $\bar{Z}$. Отображение $\bar{u}$ будет называться *проекцией отображения u* в пространстве инвариантов.

Обратный переход от проекции $\bar{u}$ к u выполняется путем решения относительно y уравнения

$$J_2(x, y) = \bar{u}(J_1(x, y)). \quad (4.2)$$

В общем случае предыдущими условиями разрешимость уравнения (4.2) не гарантируется. Отображение $\bar{u}: \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ будет называться *восстанавливаемым*, если уравнение (4.2) разрешимо, т. е. определяет (неявно) отображение $u: X \rightarrow Y$, действующее по формуле (1.2). Таким образом, каждое восстанавливаемое отображение $\bar{u}$ является проекцией некоторого отображения u , задающего с помощью уравнения (1.2) неособое инвариантное многообразие группы H . В силу леммы соответствие между u и $\bar{u}$ является взаимно однозначным.

5. Продолжение инвариантного многообразия. Пусть инвариантное многообразие U группы $G^r(h)$ задано уравнением $\Phi(z) = 0$ с помощью отображения $\Phi: Z \rightarrow R^m$, удовлетворяющего уравнению

$$(\zeta \cdot \partial) \Phi = \lambda \cdot \Phi \quad (5.1)$$

с некоторым коэффициентом $\lambda: Z \rightarrow \mathcal{L}(R^m)$, а также условию

$$r_*(\partial_v \Phi) = m. \quad (5.2)$$

Для некоторого $k \geq 1$ образуется продолженное многообразие $U_k \subset \subset Z_k$, заданное системой уравнений $\Phi = 0$ и

$$D\Phi = 0, \quad D^2\Phi = 0, \quad \dots, \quad D^k\Phi = 0, \quad (5.3)$$

где D — оператор полного дифференцирования 4(3.1). В силу условия (5.2) уравнения (5.3) могут быть разрешены относительно величин $y_1, \dots, y_k$, так что система (5.3) равносильна системе вида

$$y_1 = v_1(x, y), \quad y_2 = v_2(x, y), \quad \dots, \quad y_k = v_k(x, y). \quad (5.4)$$

Лемма. Многообразие U_k является дифференциальным инвариантным многообразием группы $G^r(h)$.

Доказательство. В силу условия (5.2) многообразие U_k уравнения (5.3) задано регулярно. Пусть $\zeta_a \cdot \partial$ есть любой оператор алгебры Ли $L^r(\zeta)$ группы $G^r(h)$. Применение стандартного коммутатора 4(9.5), образованного с оператором $\zeta_a \cdot \partial$, к отображению Φ дает соотношение

$$D^s(\zeta_a \cdot \partial \Phi) - (\zeta_a \cdot \partial) D^s \Phi = \sum_{l=0}^{s-1} \binom{s}{l} D^{s-l} \xi_a \cdot D^{l+1} \Phi,$$

справедливое для каждого $s=1, \dots, k$. Так как $\zeta_a \cdot \partial \Phi = \lambda \cdot \Phi$, то предыдущее соотношение на многообразии U_k , заданном системой уравнений (5.3) (а также $\Phi=0$), принимает вид

$$(\zeta_a \cdot \partial) D^s \Phi|_{U_k} = 0 \quad (s=1, 2, \dots, k).$$

Следовательно, U_k инвариантно в силу критерия 18.2. ■

Пусть дан дифференциальный инвариант $F: Z_k \rightarrow P$, т. е. инвариант продолженной группы $G^r(h)_k$, и его сужение $F|_{U_k}$. В силу задания многообразия U_k системой уравнений (5.4) это сужение может рассматриваться как отображение $F|_{U_k}: Z \rightarrow P$.

Следствие 1. Отображение $F|_{U_k}$ является инвариантом группы $G^r(h)$.

Доказательство. Так как U_k — инвариантное многообразие группы $G^r(h)_k$, то сужение $F|_{U_k}$ ее инварианта F является инвариантом индуцированной группы $G^r(h)_k|_{U_k}$. Но в силу представления U_k системой уравнений (5.4) все преобразования $h_a|_{U_k}$ совпадают с преобразованиями h_a , принадлежащими группе $G^r(h)$, так что индуцированная группа $G^r(h)_k|_{U_k}$ совпадает с $G^r(h)$. Поэтому $F|_{U_k}: Z \rightarrow P$ есть инвариант группы $G^r(h)$. ■

Доказанную лемму можно применить, в частности, к неособому инвариантному многообразию U с уравнением $y=u(x)$ в случае группы H , удовлетворяющей условиям леммы 19.3. Здесь система уравнений вида (5.4), задающая продолженное многообразие U_k , такова:

$$y = \partial_1 u(x), \quad y = \partial_2^2 u(x), \dots, \quad y = \partial_k^k u(x). \quad (5.5)$$

Легко установить, что в силу условий (4.1) то же самое многообразие U_k может быть задано системой уравнений вида (5.3) с помощью инварианта Φ , действующего по формуле $\Phi(x, y) =$

$= J_2(x, y) - \bar{u}(J_1(x, y))$, где $\bar{u}$ — проекция отображения u , причем равенство $\Phi(z) = 0$, т. е. $\bar{y} = \bar{u}(x)$, равносильно равенству $y = u(x)$. Поэтому из леммы следует, что многообразие (5.5) является дифференциальным инвариантным многообразием группы H . Более того, каждое уравнение $D^s \Phi = 0$ ($s = 1, \dots, k$) разрешимо относительно величин $\bar{y} = \partial^s \bar{u}(x)$. Это означает, что система (5.5) равносильна следующей системе уравнений в продолженном пространстве инвариантов $\bar{Z}_k$, получаемом продолжением пространства $\bar{Y}$ с помощью $\bar{X}$ (см. 4.2):

$$\bar{y} = \partial \bar{u}(x), \quad \bar{y} = \partial^2 \bar{u}(x), \quad \dots, \quad \bar{y} = \partial^k \bar{u}(x), \quad (5.6)$$

где $\bar{y}$ есть элемент пространства $\bar{Y}_s$. Но система (5.6) связывает только инварианты продолженной группы H . В силу замечания 19.4.2 эта система является проекцией системы (5.5) и тем самым задает проекцию $\bar{U}_k$ продолженного многообразия U_k в пространстве инвариантов продолженной группы H . С учетом правила продолжения отображений 4.4 полученный результат суммируется в виде следствия леммы.

Следствие 2. Если $y = u(x)$ есть неособое инвариантное многообразие U группы H и $\bar{u}$ — проекция отображения u в пространстве инвариантов этой группы, то продолженное многообразие U_k есть инвариантное многообразие продолженной группы H , причем его проекция $\bar{U}_k$ в пространстве инвариантов группы H является продолжением проекции $\bar{u}$.

6. Теорема существования. Здесь устанавливается основной результат теории инвариантных решений — теорема об их условном существовании. Используются предыдущие обозначения, термины и результаты.

Т е о р е м а. Пусть система дифференциальных уравнений E допускает группу H , для которой выполнены необходимые условия (3.5). Тогда существует факторсистема E/H , обладающая следующим свойством: проекция $\bar{y}$ любого неособого инвариантного H -решения y есть решение факторсистемы E/H , и обратно, каждое восстанавливаемое решение $\bar{y}$ факторсистемы E/H является проекцией некоторого инвариантного H -решения системы E .

Доказательство. Согласно принятому в 19.1 соглашению многообразие E является неособым инвариантным многообразием продолженной группы H (здесь k — порядок уравнения E). В силу теоремы 18.7 существует проекция $\bar{E}$ многообразия (и уравнения) E в пространстве инвариантов группы H . Если u есть неособое ин-

вариантное H -решение уравнения E , то справедлива формула включения $U_k \subset E$ (здесь U_k есть многообразие (5.5), дополненное уравнением $y = u(x)$). Кроме того, в силу следствия 19.5.2 многообразие U_k инвариантно относительно H и его проекция $\bar{U}_k$ (многообразие (5.6), дополненное уравнением $\bar{y} = \bar{u}(x)$) является продолжением многообразия $\bar{U}$, заданного уравнением $\bar{y} = \bar{u}(x)$ с помощью проекции $\bar{u}$ решения u . Поэтому в силу замечания 19.4.2 справедливо вложение $\bar{U}_k \subset \bar{E}$, т. е. $\bar{u}$ есть решение уравнения $\bar{E}$. Если $\bar{u}$ восстанавливаемо, то это рассуждение обратимо. Следовательно, утверждение теоремы верно для факторсистемы $E/H = \bar{E}$. ■

Если система E задана уравнением $\varepsilon_k(z) = 0$ с отображением $\varepsilon: Z_k \rightarrow R^s$, то факторсистема E/H задается уравнением $\bar{\varepsilon}(\bar{z}) = 0$ с отображением $\bar{\varepsilon}: \bar{Z}_k \rightarrow R^s$, которое является проекцией уравнения E в пространстве инвариантов продолженной группы H .

Доказанная теорема называется *теоремой об условном существовании инвариантных H -решений* ввиду того, что существование хотя бы одного решения факторсистемы E/H ею не гарантируется. Ниже будет приведен пример, когда E/H не имеет решений.

7. Факторсистема. Согласно теореме 19.6 для любой группы H , допускаемой системой E и удовлетворяющей необходимым условиям (3.4), определено преобразование системы E в факторсистему E/H , которое можно рассматривать как отображение $(E, H) \rightarrow E/H$. Суммирование предыдущих результатов приводит к следующему алгоритму выполнения этого преобразования.

Алгоритм. (α_1) Проверка необходимых условий (3.5). (α_2) Построение универсального инварианта группы H . (α_3) Представление пространства инвариантов в виде произведения $\bar{Z} = \bar{X} \times \bar{Y}$ и универсального инварианта в виде $J = (J_1, J_2)$ так, чтобы выполнялись условия (4.1). (α_4) Введение новых переменных по формулам $x = J_1(x, y)$, $\bar{y} = J_2(x, y)$. (α_5) Запись общего вида (4.2) проекции $\bar{y} = \bar{u}(x)$ инвариантного H -решения $y = u(x)$ с неопределенным отображением $\bar{u}: \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$. (α_6) Продолжение отображения u путем вычисления производных $y_1, \dots, y_k$ из уравнений, получаемых дифференцированием уравнения (4.2), и выражения их через x, y и производные $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k$. (α_7) Подстановка найденных выражений для производных в систему E . (α_8) Окончательное приведение полученной системы к виду проекции $\bar{E} = E/H$.

Из результатов 19.4—19.6 следует, что если исходная система имеет тип $E(n, m, k, s)$, то факторсистема E/H является системой типа $E(\rho, m, k, s)$, где $0 \leq \rho < n$ в силу равенства (3.2). Следовательно, факторсистема обладает принципиально важным

свойством: ее «искомые функции» $\bar{y} \in \bar{Y}$ зависят от меньшего, чем в исходной системе, числа «независимых переменных» $x \in \bar{X}$. Число последних равно рангу $p < n$ искомым инвариантных H -решений, который дается формулой (3.2) и определяется только группой H .

С помощью указанного алгоритма за счет выбора подгрупп $H \subset G' (h)$ можно, вообще говоря, получать инвариантные H -решения различных рангов: нуль, один, два и т. д. Полезно заметить, что в случае решений ранга нуль факторсистема E/H является системой конечных (не дифференциальных) уравнений, а в случае решений ранга один — системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

8. Случай разделения переменных. Реализация перехода $(E, H) \rightarrow E/H$ значительно упрощается, если универсальный инвариант J группы H обладает следующим свойством: существует такое его представление $J = (J_1, J_2)$ (см. этап (α_3) алгоритма 19.7), в котором компонента J_1 зависит только от x , т. е. является отображением $X \rightarrow \bar{X}$, так что $\bar{x} = J_1(x)$. Тогда говорят, что в инварианте J возможно *разделение переменных*. Упрощение достигается благодаря тому, что в этом случае выражение общего вида инвариантного H -решения (см. этап (α_5) алгоритма 19.7) находится в явной форме. Действительно, если уравнение $\bar{y} = J_2(x, y)$ разрешено относительно y в виде $y = v(x, \bar{y})$, то общий вид инвариантного H -решения таков:

$$y = v(x, \bar{y}(x)), \quad \bar{x} = J_1(x). \quad (8.1)$$

Ясно, что продолжение этого отображения требует выполнения только операций дифференцирования. Этот случай заслуживает того, чтобы быть отмеченным, так как он очень часто встречается на практике.

Замечание. С теоретической точки зрения указанное свойство разделения переменных является общим, если только рассматривать не одну фиксированную систему E , а класс систем, получаемых из E преобразованиями пространства Z . Действительно, пространство инвариантов $\bar{Z}$ всегда можно дополнить до пространства Z' , изоморфного Z и представимого в виде $Z' = \bar{Z} \times T$, где $T = R^{r \cdot}(t)$. Тогда можно найти такое отображение $t: Z \rightarrow T$, чтобы отображение $p: Z \rightarrow Z'$, действующее по формуле

$$p(z) = (J(z), t(z)) = (z, t), \quad (8.2)$$

было обратимым (локально) преобразованием класса $C_\infty(Z)$. В результате такого преобразования система E перейдет в ей равносильную систему E' , а группа H — в ей подобную группу H' . Но универсальный инвариант группы H' есть, по построению, $\bar{z} = (x, \bar{y})$ и для него свойство разделения переменных очевидно.

Несмотря на это замечание, выделение свойства разделения переменных имеет смысл, так как выполнение преобразования (8.2) может оказаться очень трудоемким и практически не оправданным.

Общий вид (8.1) инвариантного H -решения позволяет делать определенные выводы о структуре факторсистемы. Например, справедливо утверждение: *если система E квазилинейна и группа H такова, что переменные разделяются, то факторсистема E/H также квазилинейна*. Это следует из того, что для каждого $k = 1, 2, \dots$ величина y , получаемая дифференцированием D^k равенства (8.1), выражается через $\bar{y}$ линейно (неоднородно) с коэффициентами, зависящими от $x, \bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(k-1)}$.

9. Примеры. (а) Простой пример того, что факторсистема может не иметь решений, дает уравнение E , для которого $X = R^2(t, x)$, $Y = R(y)$,

$$t\partial_t y + x\partial_x y = 1. \quad (9.1)$$

Легко проверяется, что уравнение (9.1) допускает однопараметрическую группу H преобразований пространства $Z = R^3(t, x, y)$ с оператором $\zeta \cdot \partial = t\partial_t + x\partial_x$. Здесь в области $\{(t, x) | t > 0, x > 0\}$ векторное поле ζ имеет общий ранг $r_* = 1 < n = 2$. Универсальный инвариант $J: Z \rightarrow R^2$ этой группы может быть взят в виде $J = (t/x, y)$, и для него, очевидно, $r_*(\partial_y J) = 1 = m$. Поэтому необходимые условия (3.4) выполнены. Здесь переменные разделяются и согласно алгоритму 19.7 общий вид инвариантного H -решения таков: $y = \bar{y}(t/x)$. Но для этого выражения

$$t\partial_t y + x\partial_x y = t \frac{1}{x} \partial \bar{y} - x \frac{t}{x^2} \partial \bar{y} \equiv 0$$

и потому его подстановка в (9.1) дает в качестве факторуравнения E/H противоречивое равенство $0 = 1$. Поэтому инвариантных H -решений у уравнения (9.1) на самом деле нет.

Дальнейшие примеры относятся к системе E уравнений пограничного слоя 10(1.2) с $\theta = 0$, допускающей алгебру Ли операторов $L^5(\zeta)$, базис которой приведен в 10(6.4). Ей соответствует допускаемая группа $G^5(h)$ преобразований пространства $Z = X \times Y$, где $X = R^3(t, x, y)$, $Y = R^2(u, v)$. Ниже символом $H(\zeta_1, \dots, \zeta_k)$ будет обозначаться подгруппа $H \subset G^5(h)$, базис алгебры Ли операторов которой образован операторами $\zeta_{\alpha_1} \cdot \partial, \dots, \zeta_{\alpha_k} \cdot \partial$.

(в) Подгруппа $H(\zeta_1)$, где $\zeta_1 \cdot \partial = \partial_t$, имеет универсальный инвариант $J = (x, y, u, v)$ и удовлетворяет необходимым условиям (3.5). Переменные разделяются, и общий вид инвариантного $H(\zeta_1)$ -решения таков:

$$u = \bar{u}(x, y), \quad v = \bar{v}(x, y).$$

Очевидно, что здесь факторсистема E/H совпадает с системой (7.2), взятой при $\theta=0$. Следовательно, инвариантные $H(\zeta_1)$ -решения суть просто стационарные решения системы E . Здесь ранг $\rho(H)=2$.

(γ) Подгруппа $H(\zeta_2, \zeta_5)$ с операторами

$$\zeta_2 \cdot \partial = 2t\partial_t + y\partial_y - 2u\partial_u - v\partial_v, \quad \zeta_5 \cdot \partial = t\partial_x + \partial_u$$

имеет универсальный инвариант $J = (y^2/t, tu - x, yv)$. Здесь $r_* = 2$, $n = 3$ и $r_*(\partial_{(u,v)}, J) = 2 = m$, так что необходимые условия (3.4) выполнены. Переменные разделяются, и если положить $x = y^2/t$, $\bar{u} = tu - x$, $\bar{v} = yv$, то общий вид инвариантного $H(\zeta_2, \zeta_5)$ -решения есть

$$u = \frac{1}{t}(x + \bar{u}(x)), \quad v = \frac{1}{y}\bar{v}(x), \quad x = \frac{y^2}{t}.$$

Ранг этого решения $\rho = 1$. В результате вычисления производных и подстановки в систему E получается факторсистема E/H обыкновенных дифференциальных уравнений

$$2\bar{v}' = \bar{v}/x - 1, \quad 4x\bar{u}'' = (2\bar{v} - 2 - x)\bar{u}',$$

где штрихами обозначены соответствующие производные по x . Эта система легко интегрируется в квадратурах.

(δ) Для подгруппы $H(\zeta_3, \zeta_4, \zeta_5)$ с операторами

$$\zeta_3 \cdot \partial = x\partial_x + u\partial_u, \quad \zeta_4 \cdot \partial = \partial_x, \quad \zeta_5 \cdot \partial = t\partial_x + \partial_u$$

оказывается, что $r_* = 2 < n = 3$. Однако здесь универсальный инвариант есть $J = (t, y, v)$ и для него $r_*(\partial_{(u,v)}, J) = 1 < m = 2$. Поэтому первое из необходимых условий (3.4) выполнено, а второе — нет. Следовательно, нет и инвариантных H -решений.

10. Группы растяжений. Однопараметрические группы растяжений уже рассматривались в 1.6 и 1.13, а также в 3.7, где были найдены их инварианты. Здесь вопрос об инвариантах групп растяжений изучается в общем случае r -параметрической группы.

С целью приложений к дифференциальным уравнениям рассматривается пространство $Z = X \times Y$, где $X = R^n(x)$, $Y = R^m(y)$. Фиксируются базисы $\{e_i\} \subset X$ и $\{f_k\} \subset Y$; тогда базисом в Z будет $\{e_i, f_k\}$. Для упрощения последующих формул удобно представить пространство Z как прямую сумму $Z = X \oplus Y$. Тогда, если $x = x^i e_i \in X$ и $y = y^k f_k \in Y$, то разложение вектора $z \in Z$ по базису $\{e_i, f_k\}$ может быть записано в виде

$$z = x^i e_i + y^k f_k. \quad (10.1)$$

Растяжением пространства Z в базисе $\{e_i, f_k\}$ называется преобразование $h: Z \rightarrow Z$, действующее на вектор (10.1) по

формуле

$$h(z) = \sum_{i=1}^n c^i x^i e_i + \sum_{k=1}^m d^k y^k f_k \quad (c^i > 0, d^k > 0). \quad (10.2)$$

Следовательно, растяжение пространства Z в базисе $\{e_i, f_k\}$ является линейным преобразованием, матрица которого в этом базисе диагональна, и все элементы ее главной диагонали положительны. Ясно, что множество всех растяжений (в данном базисе) образует абелеву группу преобразований пространства Z . Эта группа будет обозначаться символом $\text{Diag } Z\{e_i, f_k\}$. Очевидно, что она является $(n+m)$ -параметрической группой Ли.

Группой растяжений пространства Z называется любая подгруппа $H \subset \text{Diag } Z\{e_i, f_k\}$. В дальнейшем рассматриваются группы растяжений H^r , которые являются группами Ли размерности r , причем $0 < r \leq n+m$.

В связи с тем, что единицей группы $\text{Diag } Z\{e_i, f_k\}$ является преобразование с единичной матрицей, параметрическую группу (B, φ) группы растяжений H^r удобно выбрать так, чтобы ее групповое ядро $B^+ \{u_\alpha\}$ в фиксированном базисе $\{u_\alpha\} \subset B$, где $a = a^\alpha u_\alpha$, задавалось неравенствами $a^\alpha > 0$ ($\alpha = 1, \dots, r$). Тогда закон умножения

в $B^+ \{u_\alpha\}$ можно задать формулой $\varphi(a, b) = \sum_{\alpha=1}^r a^\alpha b^\alpha u_\alpha$, причем групповой единицей является вектор $1_0 = \sum_{\alpha=1}^r u_\alpha$.

При этих соглашениях общее преобразование $h_a \in H^r$ имеет вид

$$x'^i = x^i \prod_{\alpha=1}^r (a^\alpha)^{\lambda_\alpha^i}, \quad y'^k = y^k \prod_{\alpha=1}^r (a^\alpha)^{\mu_\alpha^k} \quad (i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m). \quad (10.3)$$

В силу указанной параметризации касательное отображение группы H^r следует вычислять по формуле $\zeta = \partial_a h_a|_{a=1_0}$. Если положить $\zeta \langle u_\alpha \rangle = \zeta_\alpha$, то базис алгебры Ли операторов $L^r(\zeta)$ будет таким:

$$\zeta_\alpha \cdot \partial = \sum_{i=1}^n \lambda_\alpha^i x^i \partial_{x^i} + \sum_{k=1}^m \mu_\alpha^k y^k \partial_{y^k} \quad (\alpha = 1, \dots, r). \quad (10.4)$$

Соответствующая матрица $M(z)$ из координат операторов (10.4) (см. 18(6.3)) может быть представлена в виде

$$M(z) = M_1 \circ \text{diag} \{x^1, \dots, x^r, y^1, \dots, y^r\},$$

где

$$M_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \dots & \lambda_r^1 & \mu_1^1 & \dots & \mu_r^1 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1^r & \dots & \lambda_r^r & \mu_1^r & \dots & \mu_r^r \end{pmatrix} \quad (10.5)$$

есть постоянная числовая матрица. Очевидно, что $r_*(M) = \text{rank } M_1$. Кроме того, легко проверяется, что любая линейная связь операторов (10.4) (см. 17.3) влечет их линейную зависимость. Поэтому операторы (10.4), будучи линейно независимыми по определению, линейно не связаны. Следовательно, для группы растяжений H^r всегда $r_* = r$.

В силу равенства $r_* = r$ для интранзитивности группы H^r необходимо и достаточно, чтобы было $r < n + m$. В этом случае отыскание инвариантов группы H^r сводится к задаче линейной алгебры.

Теорема. Для группы растяжений H^r пространства $Z = \mathbb{R}^{n+m}(x, y)$ при условии $r < n + m$ существует универсальный инвариант $J: Z \rightarrow \mathbb{R}^{n+m-r}$, независимые компоненты которого имеют вид одночленов:

$$J^\tau(z) = \prod_{i=1}^n (x^i)^{\theta_i^\tau} \cdot \prod_{k=1}^m (y^k)^{\varphi_k^\tau} \quad (\tau = 1, \dots, n + m - r). \quad (10.6)$$

Доказательство. В силу критерия инварианта (теорема 17.1) одночлен (10.6) является инвариантом алгебры Ли $L^r(\zeta)$ с базисом операторов (10.4), если и только если

$$\lambda_i^\alpha \theta_i^\tau + \mu_k^\alpha \varphi_k^\tau = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, r). \quad (10.7)$$

Равенства (10.7) образуют систему из r линейных алгебраических уравнений с $n + m$ неизвестными $\theta_i^\tau, \varphi_k^\tau$, матрица которой есть M_1 (10.5). Так как $\text{rank } M_1 = r < n + m$, то эта система имеет $n + m - r$ линейно независимых решений. Пусть это будут решения

$$(\theta_1^\tau, \dots, \theta_n^\tau, \varphi_1^\tau, \dots, \varphi_m^\tau) \quad (\tau = 1, \dots, n + m - r). \quad (10.8)$$

Утверждается, что одночлены (10.6), образованные с показателями (10.8), независимы. Очевидно, что достаточно доказать их степенную независимость, т. е. тот факт, что равенство

$$\prod_{\tau=1}^{n+m-r} (J^\tau(z))^{c_\tau} = 1$$

с некоторыми вещественными c_τ возможно, только если все $c_\tau = 0$. Но предыдущее равенство в силу (10.6) и независимости переменных x^i, y^k равносильно системе равенств

$$\theta_i^\tau c_\tau = 0, \quad \varphi_k^\tau c_\tau = 0 \quad (i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m).$$

Они означают, что решения (10.8) линейно зависимы, в противоречие с построением этих решений. ■

С л е д с т в и е. Группа растяжений H^r , элементы которой заданы равенствами (10.3), удовлетворяет необходимым условиям

существования инвариантных H^r -решений (3.5), если и только если

$$\text{rank}(\lambda_\alpha^i) = r \leq n. \quad (10.9)$$

Доказательство. Оба утверждения следуют из теоремы 19.3, так как $r_* = r$ и для базисных операторов (10.4) справедливо равенство $r_*(\xi) = r_*(\lambda_\alpha^i x^i) = \text{rank}(\lambda_\alpha^i)$. ■

З а м е ч а н и е. Если группа растяжений H^r удовлетворяет условиям (10.9), то ее универсальный инвариант с компонентами (10.6) всегда может быть выбран так, что в нем переменные разделяются. Действительно, в этом случае система $\lambda_\alpha^i \theta_i = 0$ ($\alpha = 1, \dots, r$) имеет ровно $n - r$ линейно независимых решений, которые можно взять в качестве части всего набора (10.8) из $n + m - r$ решений.

11. Теория размерностей. Понятие группы растяжений тесно связано с теорией размерностей физических величин. Каждая физическая величина Φ характеризуется указанием единицы ее измерения E и числовым значением $|\Phi|$ с этой единицей, так что $\Phi = |\Phi|E$. Если E_α ($\alpha = 1, \dots, r$) — некоторые независимые единицы измерения и если существует выражение E через них, имеющее вид одночлена $E_1^{\lambda_1} \dots E_r^{\lambda_r}$, то это выражение называется **размерностью физической величины Φ в единицах $\{E_\alpha\}$** и обозначается символом $[\Phi]$, так что

$$E = [\Phi] = E_1^{\lambda_1} \dots E_r^{\lambda_r}.$$

Тем самым для физической величины Φ справедливо представление

$$\Phi = |\Phi|[\Phi] = |\Phi|E_1^{\lambda_1} \dots E_r^{\lambda_r}. \quad (11.1)$$

Из формулы (11.1) следует, что умножение и возведение в любую (вещественную) степень физических величин сводится к тем же операциям над их числовыми значениями и их размерностями. Кроме того, если физическая величина Φ является функцией физической величины x , то размерность производной вычисляется по правилу $[\partial_x \Phi] = [\Phi]/[x]$.

Величина Φ с нулевой размерностью ($\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$) называется **безразмерной**. Величины $\Phi_1, \dots, \Phi_N$ называются **зависимыми** (с точки зрения их размерностей), если существуют числа $x_1, \dots, x_N$, не все равные нулю, с которыми «комбинация» этих величин

$$\Phi_1^{x_1} \dots \Phi_N^{x_N}$$

является безразмерной. В противном случае величины $\Phi_1, \dots, \Phi_N$ называются **независимыми**.

Одна из основных задач теории размерностей состоит в том, чтобы выяснить, сколько среди физических величин из данного набора $\Phi_1, \dots, \Phi_N$ имеется независимых, отобрать их и выразить остальные величины через независимые.

Пример. В классической системе CGS в качестве независимых единиц измерения принимаются $E_1 = \text{см}$ (сантиметр), $E_2 = \text{г}$ (грамм-масса) и $E_3 = \text{сек}$ (секунда). Тогда размерности скорости v , ускорения g , плотности вещества ρ и давления p таковы:

$$\begin{aligned} [v] &= \text{см} \cdot \text{сек}^{-1} = E_1 E_3^{-1}, \quad [g] = \text{см} \cdot \text{сек}^{-2} = E_1 E_3^{-2}, \\ [\rho] &= \text{г} \cdot \text{см}^{-3} = E_2^{-1} E_1^3, \quad [p] = \text{г} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{сек}^{-2} = E_1^{-1} E_2 E_3^{-2}. \end{aligned}$$

Здесь v , g , ρ независимы, а величина $p/\rho v^2$ безразмерна.

Изменение масштабов измерения путем перехода от единиц E_α к новым единицам E'_α (по α не суммируется!):

$$E'_\alpha = a^\alpha E_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, r) \quad (11.2)$$

влечет изменение числового значения величины Φ в соответствии с вытекающим из (11.1) равенством

$$|\Phi|' = |\Phi| (a^1)^{\lambda_1} \dots (a^r)^{\lambda_r} E_1'^{\lambda_1} \dots E_r'^{\lambda_r} = |\Phi|' [\Phi]',$$

где $[\Phi]' = E_1'^{\lambda_1} \dots E_r'^{\lambda_r}$ есть размерность Φ в новых единицах и

$$|\Phi|' = |\Phi| \prod_{\alpha=1}^r (a^\alpha)^{\lambda_\alpha}. \quad (11.3)$$

Сравнение последнего равенства с (10.3) показывает, что изменение числового значения величины Φ при переходе к новым единицам измерения есть групповое преобразование, принадлежащее группе растяжений H^r (одномерного пространства). При этом и группа H^r , и размерность $[\Phi]$ однозначно определены одним и тем же набором чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Если имеется некоторый конечный набор $\{\Phi_\nu\}$ из N физических величин, то каждой из величин Φ_ν соответствует набор $\lambda_1^\nu, \dots, \lambda_r^\nu$, определяющий ее размерность по формуле (11.1). В этом случае аналогично получается группа H^r растяжений N -мерного пространства $R^N(|\Phi_1|, \dots, |\Phi_N|)$. Окончательно связь размерностей с группами растяжений дается следующей формулировкой.

Вывод. Каждому конечному набору $\{\Phi_\nu\}$ из N физических величин, которые могут быть измерены в системе $\{E_\alpha\}$ из r независимых единиц измерения, взаимно однозначно соответствует группа H^r растяжений пространства R^N , определяемая только размерностями величин Φ_ν в системе $\{E_\alpha\}$. Преобразования, принадлежащие группе H^r , задают закон изменения вида (11.3) числовых значений $|\Phi_\nu|$ при переходе от системы единиц $\{E_\alpha\}$ к системе $\{E'_\alpha\}$ согласно формулам (11.2).

Важное следствие установленной связи состоит в том, что величина Φ является безразмерной, если и только если ее числовое значение $|\Phi|$ есть инвариант соответствующей группы H^r . Поэтому любой результат теории размерностей может быть получен как некоторый результат теории групп растяжений.

Например, упомянутая выше задача теории размерностей решается просто построением универсального инварианта группы H' . Кроме того, из теорем 19.10 и 18.7 сразу получается следующее предложение, известное в теории размерностей под названием **П - т е о р е м ы**.

Любая безразмерная функция физических величин является функцией от безразмерных «комбинаций» этих величин; любое соотношение между физическими величинами равносильно некоторому соотношению между их безразмерными «комбинациями».

Полезно отметить также обратное влияние теории размерностей на задачи группового анализа, которое часто используется в приложениях. Дело в том, что дифференциальные уравнения математической физики всегда являются соотношениями между физическими величинами. В силу предыдущего уравнения всегда допускают группу H' растяжений, определяемую размерностями всех переменных (независимых, искомых и параметров), входящих в рассматриваемые уравнения. Если же дифференциальные уравнения заданы абстрактно, то допускаемая группа растяжений может быть найдена путем введения независимых единиц по определению и отыскания размерностей остальных величин с помощью самих уравнений на основании требования равенства размерностей отдельных слагаемых в этих уравнениях. Этот прием можно называть *сравнением размерностей*.

Например, для уравнений пограничного слоя 10 (1.1) в качестве независимых единиц измерения можно принять $[u]=E_1$ и $[v]=E_2$. Если предположить, что размерности остальных переменных таковы:

$$[t]=E_1^a E_2^a, \quad [x]=E_1^b E_2^b, \quad [y]=E_1^c E_2^c, \quad [p]=E_1^d E_2^d,$$

то сравнение размерностей приведет к системе линейных уравнений для показателей, имеющей единственное решение. В результате получается следующая таблица показателей, определяющая размерности всех входящих в систему 10 (1.1) переменных:

	t	x	y	u	v	p
E_1	0	1	0	1	0	2
E_2	-2	-2	-1	0	1	0

по которой сразу пишутся операторы алгебры Ли группы растяжений, допускаемой этой системой,

$$x\partial_x + u\partial_u + 2p\partial_p, \quad -2t\partial_t - 2x\partial_x - y\partial_y + v\partial_v.$$

Эти операторы совпадают с операторами растяжения, [найденными в 10.4 путем решения определяющих уравнений.

12. Автомоделные решения. Пусть система дифференциальных уравнений E задана в пространстве $Z = X \times Y$, и пусть фиксирован базис $\{e_i, f_k\} \subset Z$ (см. 19.10).

Инвариантное H^r -решение системы E называется автомоделным (в узком смысле), если H^r есть группа растяжений пространства Z в данном базисе, т. е. если $H^r \subset \text{Diag } Z\{e_i, f_k\}$.

Критерий условного существования автомоделных H^r -решений для допускаемой системой E группы растяжений H^r дается следствием 19.10. При этом, если соотношения (10.9) выполнены, то универсальный инвариант J группы H^r может быть выбран так, что в нем переменные разделяются. Более того, в этом случае компоненты J вида (10.6) всегда можно взять такими:

$$J_1^\beta(x) = \prod_{i=1}^n (x^i)^{\theta_i^\beta}, \quad J_2^k(x, y) = y^k \prod_{i=1}^n (x^i)^{\theta_i^{\beta+k}} \quad (12.1)$$

$$(\beta = 1, \dots, \rho; k = 1, \dots, m),$$

где $\rho = n - r$. Поэтому формулы общего вида автомоделного (в узком смысле) H^r -решения таковы:

$$y^k = \prod_{i=1}^n (x^i)^{-\theta_i^{\rho+k}} \cdot u^k(x^1, \dots, x^\rho), \quad x^\beta = J_1^\beta(x) \quad (12.2)$$

$$(\beta = 1, \dots, \rho; k = 1, \dots, m),$$

причем число ρ есть ранг этого решения.

Данное понятие автомоделного (в узком смысле) решения вызывает неудовлетворенность в связи с тем, что оно не инвариантно относительно преобразований пространства Z . При преобразованиях пространства Z группа растяжений H^r переходит в ей подобную группу, уже не являющуюся, вообще говоря, группой растяжений. Например, преобразование, заданное в базисе $\{e_i, f_k\} \subset Z$ формулами

$$x'^i = \ln x^i, \quad y'^k = \ln y^k \quad (i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m), \quad (12.3)$$

переводит операторы растяжения (10.4) в операторы переноса

$$\zeta'_\alpha \cdot \partial = \lambda'_\alpha \partial_{x'^i} + \mu'_\alpha \partial_{y'^k} \quad (\alpha = 1, \dots, r) \quad (12.4)$$

и, следовательно, группу растяжений H^r в группу переносов H'^r .

В основу инвариантного понятия автомоделного решения целесообразно положить структурное свойство, состоящее в том, что *любая группа растяжений абелева*. Тогда инвариантность относительно преобразований пространства Z гарантируется тем, что подобные группы изоморфны. Итак, принимается следующее определение.

Инвариантное H^r -решение системы E называется автомодельным (в широком смысле), если H^r — абелева группа.

Следующая теорема, обобщающая теорему 3.8 на случай r -мерного пространства векторных полей, показывает, что достигаемое этим определением расширение понятия автомодельного решения сохраняет возможность его представления в виде (12.2) после некоторого преобразования пространства Z .

Т е о р е м а. *Абелева группа H^r , касательное отображение которой удовлетворяет условию $r_*(\zeta) = r$, подобна группе растяжений.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу отмеченного выше подобия группы растяжений группе переносов и соответствия групп и их алгебр Ли операторов достаточно доказать, что в условиях теоремы абелева алгебра Ли $L^r(\zeta)$ подобна алгебре Ли переносов.

Пусть $\bar{Z}$ есть пространство инвариантов группы H^r и $J: Z \rightarrow \bar{Z}$ — ее универсальный инвариант. Согласно замечанию 19.8 пространство $\bar{Z}$ можно дополнить до пространства Z' , изоморфного Z , причем $Z' = \bar{Z} \times T$, а инвариант J — до обратимого отображения $p: Z' \rightarrow Z'$, данного формулой (8.2). Этим отображением алгебра Ли $L^r(\zeta)$ переводится в изоморфную ей алгебру Ли $L^r(\zeta')$, где $\zeta' = (\zeta, \tau)$. Но здесь $\zeta = \partial J \circ \zeta = 0$ в силу критерия 17(1.3) инвариантности J . Поэтому операторы алгебры Ли $L^r(\zeta')$ имеют вид

$$\zeta'_a \cdot \partial' = \tau_a \cdot \partial_t \quad (a \in B), \quad (12.5)$$

где B — параметрическое пространство группы H^r . При этом линейное отображение $\tau(z, t): B \rightarrow T$ является отображением на и обратимо, так как $r_*(\tau) = r = \dim B$ и $\dim T = r$. Утверждается, что для каждого фиксированного $z \in \bar{Z}$ найдется такое преобразование $q: T \rightarrow T$, с которым будет

$$\partial q(t) \circ \tau(z, t) = \sigma, \quad (12.6)$$

где σ — не зависящий от (z, t) линейный изоморфизм пространства B на T . Благодаря только что отмеченному свойству τ это равенство можно переписать в виде $\partial q(t) = \sigma \circ (\tau(z, t))^{-1}$. Следовательно, отыскание q сводится к решению задачи о восстановлении отображения по его производной. Согласно теореме Фробениуса (см. 12.8) эта задача разрешима, если вычисленная в силу уравнения (12.6) вторая производная $\partial^2 q(t)$ симметрична. Но если записать (12.6) с некоторым $a \in B$ в виде $\partial q \langle \tau_a \rangle = \sigma \langle a \rangle$ и вычислить производную по t на векторе τ_b , то получится равенство

$$\partial^2 q \langle \tau_b, \tau_a \rangle + \partial q \langle \partial \tau_a \langle \tau_b \rangle \rangle = 0,$$

откуда в силу определения коммутатора 7(1.1) и абелевости алгебры Ли $L^r(\zeta')$

$$\partial^2 q \langle \tau_b, \tau_a \rangle - \partial^2 q \langle \tau_a, \tau_b \rangle = \partial q \langle [\tau_a, \tau_b] \rangle = 0.$$

Итак, уравнение (12.6) имеет решение q , которое благодаря выбору σ таково, что $r_*(\partial q) = r$. Поэтому q является преобразованием пространства T . Под действием q операторы (12.5) перейдут, согласно теореме 16.9, в операторы

$$\partial q(t) \langle \tau_a(z, t) \rangle \cdot \partial_{t'} = \sigma_a \cdot \partial_{t'}, \quad t' = q(t),$$

где $\sigma_a = \sigma \langle a \rangle$. Очевидно, что последние являются операторами переносов. ■

Замечание. Если касательное отображение ζ абелевой группы H^* таково, что $r_*(\zeta) < r$, то в H^* найдется подгруппа H'^* , удовлетворяющая условию теоремы. Очевидно, что универсальные инварианты групп H^* и H'^* совпадают. Поэтому автомодельные (в широком смысле) H^* -решения и H'^* -решения одни и те же.

Следствие. Для любого автомодельного (в широком смысле) H^* -решения найдется такая подгруппа $H' \subset H^*$ и такое преобразование пространства Z , что в преобразованном пространстве это решение является автомодельным (в узком смысле) H' -решением.

§ 20. Классификация инвариантных решений

1. Классификация по рангу. Пусть дана система дифференциальных уравнений E , допускающая группу Ли G преобразований пространства Z . С помощью алгоритма 19.7 можно осуществить поиск частных решений системы E как некоторых инвариантных H -решений с любой подгруппой $H \subset G$, удовлетворяющей необходимым условиям 19 (3.5).

Важной числовой характеристикой инвариантного H -решения является его ранг ρ , равный числу независимых переменных в факторсистеме E/H . Поэтому основная классификация инвариантных H -решений идет по их рангам. Согласно 19 (3.2) ранг дается формулой $\rho = n - r_*$, где $r_* = r_*(\zeta) > 0$. Следовательно, ранг инвариантного H -решения может иметь, вообще говоря, значения $\rho = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

При фиксированном ρ различные H -решения должны получаться с помощью разных подгрупп, имеющих одно и то же значение r_* . Тем самым возникает задача о перечислении подгрупп $H \subset G$ с данным r_* . При этом возникает некоторое неудобство, связанное с тем, что число r_* является в основном характеристикой группы H как представления некоторой абстрактной группы Ли, а не ее структурной характеристикой. Действительно, если группа G есть представление (точное!) группы Ли (B, φ) , то эти группы изоморфны и их подгруппы находятся во взаимно однозначном соответствии, в то время как числа r_* соответствующих подгрупп, рассматриваемых как представления, вообще говоря, различны. Поэтому с групповой точки зрения удобнее вместо числа r_* оперировать с числом r — порядком группы H . При этом разность

$r = r_*$ равна числу независимых линейных связей между операторами базиса алгебры Ли группы H , ввиду чего знание всех подгрупп данного порядка r без особых трудностей дает возможность классифицировать их и по значениям r_* .

Итак, задача классификации инвариантных H -решений по рангам сводится к задаче перечисления всех подгрупп данного порядка группы G и последующей сортировке полученных подгрупп по рангам.

2. Орбиты решений. Основой классификации инвариантных решений служит фундаментальный факт, установленный в теореме 5.6 и повторенный в 19.1: «допускаемая уравнением E группа G действует на множестве SE его решений». В силу указанного действия каждому решению $u \in SE$ сопоставляется его *орбита*, т. е. множество всех тех решений, в которые u переходит под действием всевозможных преобразований группы G (см. также 1.13 и 16.10). Здесь орбита решения u будет обозначаться символом (u, G) . Аналогичный смысл имеет обозначение (u, H) для любой подгруппы $H \subset G$.

Инвариантные H -решения $u \in SE$ характеризуются тем, что для них справедливо равенство $u = (u, H)$.

Пусть h — некоторое преобразование пространства $Z = X \times Y$. В 4.5 — объяснено, каким образом преобразование h действует на любое отображение $u: X \rightarrow Y$. Для краткости образ при этом действии будет обозначаться здесь символом hu . Кроме того, если H есть группа преобразований пространства Z , то множество преобразований $\{h \circ h_a \circ h^{-1}\}$, получаемое когда h_a пробегает группу H , есть группа, подобная (сопряженная) группе H ; эта группа будет обозначаться hHh^{-1} .

Л е м м а. Справедлива формула преобразования орбит:

$$h(u, H) = (hu, hHh^{-1}). \quad (2.1)$$

Доказательство. Если $v \in h(u, H)$, то $v = (h \circ h_a)u$ с некоторым $h_a \in H$. Но тогда $v = (h \circ h_a \circ h^{-1})(hu)$, а это означает, что $v \in (hu, hHh^{-1})$. Ясно, что это рассуждение обратимо. ■

3. Существенно различные решения. Решения $u_1, u_2 \in SE$ будут называться *существенно различными* (относительно группы G), если $u_2 \notin (u_1, G)$ (при этом, конечно, также $u_1 \notin (u_2, G)$). В противном случае эти решения называются *несущественно различными* (относительно группы G). Другими словами, решения u_1, u_2 несущественно различны, если одно из них переводится в другое некоторым преобразованием, принадлежащим группе G , и существенно различны, если такого преобразования нет.

Пусть G есть группа Ли преобразований пространства Z , допускаемая системой E , и пусть фраза «найти инвариантное H -решение» понимается в смысле построения соответствующей фактор-системы E/H .

В этих терминах ставится следующая задача: найти всевозможные существенно различные (относительно G) инвариантные H -решения системы E , которые имеют данный ранг ρ и могут быть получены с подгруппами $H \subset G$.

При решении так поставленной задачи надо иметь в виду, что инвариантное H -решение u может быть одновременно некоторым инвариантным H' -решением того же самого или меньшего ранга. Для учета этой возможности удобны следующие вспомогательные понятия.

Инвариантное H -решение u ранга ρ называется *вырожденным*, если существует подгруппа $H' \subset G$, причем $H \subset H'$ и u является инвариантным H' -решением ранга $\rho' < \rho$. Подгруппа $\bar{H}$ называется *максимальным расширением* подгруппы H (в группе G), если $H \subset \bar{H}$ и универсальные инварианты групп H и $\bar{H}$ совпадают и если любая другая подгруппа с этими свойствами содержится в $\bar{H}$. Ясно, что максимальному расширению подгруппы H соответствует максимальное расширение ее алгебры Ли операторов в алгебре Ли группы G . Последнее легко находится путем рассмотрения линейных связей между операторами.

Т е о р е м а. Для данной подгруппы $H \subset G$ среди инвариантных H -решений имеются несущественно различные невырожденные решения, если и только если максимальное расширение $\bar{H}$ является собственным нормальным делителем в некоторой подгруппе $H' \subset G$.

Доказательство. Прямое утверждение. Пусть $\bar{H}$ — нормальный делитель в H' . Если инвариантное H -решение u подвергнуть преобразованию $h \in H'$, не входящему в $\bar{H}$, то получится решение hu , которое ввиду максимальной $\bar{H}$ отлично от u . Кроме того, в силу формулы (2.1) и равенства $\bar{H} = h\bar{H}h^{-1}$ справедливы равенства

$$hu = h(u, \bar{H}) = (hu, h\bar{H}h^{-1}) = (hu, \bar{H}) = (hu, H),$$

т. е. hu также есть инвариантное H -решение, несущественно отличающееся от u .

Обратное утверждение. Если невырожденные H -решения u_1 и u_2 несущественно различны, то $u_2 = hu_1$ для некоторого преобразования $h \in G$, причем $h \notin \bar{H}$. Тогда для любого $h_a \in \bar{H}$ справедливо равенство $(h \circ h_a \circ h^{-1})u_2 = u_2$. Утверждается, что $h \circ h_a \circ h^{-1} \in \bar{H}$. Действительно, в противном случае существовала бы такая более широкая группа $H_1 \supset \bar{H}$, что u_2 было бы инвариантным H_1 -решением. Пусть ρ есть ранг u_2 как инвариантного $\bar{H}$ -решения и ρ_1 — его же ранг как инвариантного H_1 -решения. Тогда должно было бы быть $\rho_1 \leq \rho$. Но неравенство $\rho_1 < \rho$ означает, что u_2 есть вырожденное $\bar{H}$ -решение, а равенство $\rho_1 = \rho$ означает, что $\bar{H}$ и H_1 имеют одинаковые универсальные инварианты. Так как первая возмож-

ность противоречит предположению о невырожденности H -решения u_2 , а вторая — определению H , то $h \circ h_a \circ h^{-1} \in H$. Итак, существуют преобразования $h \notin H$, с которыми $hNh^{-1} = H$. Совокупность всех таких h образует подгруппу $H' \subset G$, причем H есть нормальный делитель в H' . ■

4. Свойство факторсистемы. В ходе доказательства предыдущей теоремы установлено, что некоторые преобразования, не принадлежащие группе H , переводят инвариантные H -решения снова в инвариантные H -решения. Этот факт наводит на мысль о том, что такие преобразования должны допускаться факторсистемой E/H . Точная формулировка соответствующего существенного результата группового анализа дается с использованием понятия нормализатора.

Нормализатором подгруппы $H \subset G$ называется наиболее широкая подгруппа $H' \subset G$, обладающая тем свойством, что H есть нормальный делитель в H' . Очевидно, что нормализатор H' подгруппы H есть множество всех таких элементов $h \in G$, для которых выполнено равенство $hNh^{-1} = H$.

Т е о р е м а. Если H' есть нормализатор подгруппы H в G , то факторсистема E/H допускает факторгруппу H'/H .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $h \in H'$; тогда для любого $h_a \in H$ справедливо равенство $h \circ h_a = h_b \circ h$ с некоторым $h_b \in H$. Поэтому если F есть какой-нибудь инвариант группы H , то

$$(F \circ h) \circ h_a = (F \circ h_b) \circ h = F \circ h,$$

т. е. $F \circ h$ — также инвариант группы H . Очевидно, что это свойство справедливо и для продолженных групп и их инвариантов. Поэтому факторсистема E/H , связывающая только инварианты группы H , в результате любого преобразования $h \in H'$ перейдет в систему, тоже связывающую только инварианты группы H . Но эта последняя система равносильна системе E/H , и, следовательно, с ней совпадает. ■

5. Оптимальные системы решений. Из формулы преобразования орбит (2.1) следует, что равенство $u = (u, H)$ влечет $hu = (hu, hNh^{-1})$. Следовательно, каждое инвариантное H -решение u под действием любого преобразования $h \in G$ переходит в инвариантное hNh^{-1} -решение. Ясно, что при этом ранг решения не меняется. Так как подгруппа hNh^{-1} подобна подгруппе H , то можно сделать вывод: несущественно различные инвариантные решения получаются относительно подобных подгрупп. Тем самым поставленная в 20.3 задача классификации инвариантных H -решений сводится к задаче классификации подгрупп группы G с точностью до подобия. Эта задача уже обсуждалась в 15.8, где показано, что она в свою очередь сводится к соответствующей задаче для алгебр Ли.

Следовательно, с учетом сделанного в 20.1 замечания о замене ранга инвариантного H -решения порядком группы H , обсуждаемая задача классификации сводится в основном к задаче построения оптимальных систем Θ , классов подобных подалгебр алгебры Ли группы G . Алгоритм решения последней задачи рассмотрен в 14.7 и 14.8. Если оптимальные системы Θ построены, то из входящих в них подгрупп (подалгебр) надо отобрать те подгруппы H , для которых выполнены необходимые условия 19 (3.5) существования инвариантных H -решений. Наконец, для каждой удовлетворяющей этим условиям подгруппы H следует найти ее универсальный инвариант, определить общий вид инвариантного H -решения и построить соответствующую факторсистему E/H .

В результате получается оптимальная система инвариантных H -решений уравнения E , обозначаемая символом $S_G E$. Оптимальность системы $S_G E$ означает, что она является наименьшим подмножеством в множестве SE , обладающим следующим свойством: любое инвариантное H -решение, которое можно получить с помощью какой-нибудь подгруппы $H \subset G$, содержится в орбите (u, G) некоторого решения $u \in S_G E$.

6. Пример. Система уравнений околосзвукового движения газа 5 (9.1) допускает группу G^4 , базис операторов алгебры Ли L^4 которой приведен в 5 (9.9). Оптимальные системы подалгебр для L^4 найдены в 14.9 и сведены в таблицу 14 (9.8).

Так как здесь $n=m=2$, то представляют интерес инвариантные H -решения ранга $\rho=1$, которые получаются для однопараметрических подгрупп H . Таблица 14 (9.8) показывает, что имеются четыре класса не подобных однопараметрических подгрупп, первые три из которых содержат бесконечное множество подгрупп. Ниже рассматриваются два конкретных примера. Для проведения выкладок уравнения 5 (9.1) записываются в индивидуальных обозначениях координат: (x, y) — независимые переменные, (u, v) — искомые функции, $\partial_x u = u_x$ и т. д., в которых система E такова:

$$u_y - v_x = 0, \quad uu_x + v_y = 0. \quad (6.1)$$

(а) $H(u_4)$. Здесь $u_4 \cdot \partial = x\partial_x + y\partial_y$, и универсальный инвариант есть $J = (x/y, u, v)$. Переменные разделяются, и общий вид инвариантного $H(u_4)$ -решения таков:

$$u = \bar{u}(t), \quad v = \bar{v}(t), \quad t = x/y.$$

Подстановка в уравнения (6.1) приводит к факторсистеме $E/H(u_4)$:

$$t\bar{u}' + \bar{v}' = 0, \quad \bar{u}\bar{u}' - t\bar{v}' = 0,$$

где штрихом обозначена производная ∂_t . Все не постоянные ($\bar{u}' \neq 0$) инвариантные $H(u_4)$ -решения легко находятся; здесь они зависят

от одной произвольной постоянной C и имеют вид

$$u = -t^2 = -(x/y)^2, \quad v = (2/3)t^3 + C = (2/3)(x/y)^3 + C.$$

(β) $H(u_1)$. Вычисление универсального инварианта оператора

$$u_1 \cdot \partial = (-xv + yu^2) \partial_x - (xu + 2yv) \partial_y + 2uv \partial_u + \left(-\frac{2}{3}u^3 + \frac{3}{2}v^2\right) \partial_v,$$

приводит к его представлению в виде

$$J = (J^1, J^2, J^3),$$

где

$$\begin{aligned} J^1 &= u^{-3/2}(4u^3 + 9v^2), \quad J^2 = u^{1/4}(2ux + 3vy), \\ J^3 &= u^{-1/4}(3vx - 2u^2y). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Переменные не разделяются. Однако, если преобразовать систему (6.1) к ей равносильной за счет изменения ролей переменных, т. е. путем рассмотрения (x, y) как искомым функций от независимых переменных (u, v) , то система E перейдет в следующую $(x_v = \partial_v x$ и т. д.):

$$x_v - y_u = 0, \quad uy_v + x_u = 0. \quad (6.3)$$

По отношению к системе (6.3) переменные в (6.2) разделяются и инвариантное $H(u_1)$ -решение можно искать в виде

$$J^2 = x(t), \quad J^3 = \bar{y}(t), \quad t = J^1. \quad (6.4)$$

Так как инварианты J^2 и J^3 зависят от (x, y) линейно, то соотношения (6.4) легко разрешить относительно x и y , в результате чего общий вид инвариантного $H(u_1)$ -решения будет таким:

$$\begin{aligned} x &= 2u^{1/4}\varphi(t) + 3vu^{-5/4}\psi(t), \quad y = 3vu^{-7/4}\varphi(t) - 2u^{-1/4}\psi(t), \\ t &= u^{-3/2}(4u^3 + 9v^2), \end{aligned} \quad (6.5)$$

где функции (φ, ψ) связаны с функциями $(x, \bar{y})$ формулами $x = t\varphi$, $\bar{y} = t\psi$. Для системы E , взятой в форме (6.3), построение фактор-системы $E/H(u_1)$ никаких затруднений не вызывает и факторсистема оказывается такой:

$$6t\varphi' + 7\varphi = 0, \quad 6t\psi' + 5\psi = 0, \quad (6.6)$$

где штрихом обозначена производная ∂_t . Уравнения (6.6) интегрируются элементарно и окончательно получается следующее семейство инвариантных $H(u_1)$ -решений системы (6.3):

$$\begin{aligned} x &= 2C_1 u^{2/3} r^{-7/6} + 3C_2 v r^{-5/6}, \quad y = 3C_1 v r^{-7/6} - 2C_2 u r^{-5/6}, \\ r &= 4u^3 + 9v^2, \end{aligned} \quad (6.7)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ V

Актуальный для приложений поиск классов частных решений, на которых исходные дифференциальные уравнения существенно упрощаются, ранее обычно выполнялся либо на основании «соображений симметрии», либо с помощью теории размерностей [1]—[4]. Вместе с тем эта проблема давно привлекала внимание исследователей, обращавших внимание на ее групповую природу [5]. Особенно убедительно настаивал на использовании теории групп в гидродинамике и других прикладных дисциплинах Г. Биркгоф [6]. На возможность строить классы частных решений с помощью любой допускаемой группы впервые было указано в II [4]. После появления монографии II [5] активность в этой области резко возросла и был выполнен ряд интересных работ по отысканию групповыми методами инвариантных решений в разных конкретных прикладных задачах [7]—[19]. Этой же цели служили работы III [13], [17], [18], [21], [22]. Построению оптимальных систем подгрупп по изложенному в § 20 методу, который был впервые реализован в II [5], посвящены работы [20], [21].

- [1] Buckingham E. Model experiments and the forms of empirical equations. — Trans. Amer. Soc. Mech. Eng. 37 (1915), 263—296.
- [2] Birkhoff G. Dimensional analysis of partial differential equations. — Electr. Enging. 67 (1948), 1185—1188.
- [3] Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1967.
- [4] Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В. Теория точечного взрыва. М., Физматгиз, 1961.
- [5] Morgan A. J. A. The reduction by one of the number of independent variables in some systems of partial differential equations. — Quart. J. Math. Oxford. 3, № 12 (1952), 250—259.
- [6] Биркгоф Г. Гидродинамика. М., ИЛ, 1963.
- [7] Катков В. Л. Один класс точных решений уравнений прогноза геопотенциала. — Изв. АН СССР. Физ. атмосфер. и океана 1, № 10 (1965), 1088—1090.
- [8] Катков В. Л. Групповая классификация решений уравнения Хопфа. — Ж. прикл. мех. и техн. физ. № 6 (1965), 105—106.
- [9] Катков В. Л. Точные решения некоторых задач конвекции. — Прикл. матем. и техн. 32, № 3 (1968), 482—486.
- [10] Сыровый В. А. Инвариантно-групповые решения уравнений пространственного и стационарного пучка заряженных частиц. — Ж. прикл. мех. и техн. физ. № 3 (1963), 26—35.
- [11] Сыровый В. А. О некоторых новых решениях, полученных при помощи инвариантных преобразований. — Ж. прикл. мех. и техн. физ. № 3 (1965), 56—62.
- [12] Сухарев М. Г. Инвариантные решения уравнений, описывающие движение жидкости и газа в длинных трубопроводах. — ДАН СССР 175, № 4 (1967), 781—784.
- [13] Фалькович А. И. Инвариантно-групповые решения гидродинамической модели циркуляции атмосферы для экваториальной области. — Изв. АН СССР. Физ. атмосфер. и океана 4, № 6 (1968), 579—585.
- [14] Филиппов Ю. Г. Применение инвариантно-группового метода к решению задачи определения течений неоднородного океана. — Метеорол. и гидрология. № 9 (1968), 53—62.
- [15] Хабиров С. В. Одно инвариантное решение уравнений мелкой воды. — В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 3 (1969), Новосибирск, 82—90.

- [16] Хабилов С. В. О структуре псевдогруппы, допускаемой уравнениями идеальной несжимаемой жидкости. — В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 24 (1967), Новосибирск, 105—114.
- [17] Bluman G. W., Cole J. D. The general similarity of the heat equation. — J. Math. and Mech. 18, № 11 (1969), 1025—1042.
- [18] Жмудский А. А., Таранов В. Б. О симметрии движения двухкомпонентной плазмы. — ЖТФ 45 (1975), 158—161.
- [19] Таранов В. Б. О симметрии одномерных высокочастотных движений бесстолкновительной плазмы. — ЖТФ 46 (1976), 1271—1277.
- [20] Ибрагимов Н. Х. Классификация инвариантных решений уравнений двумерного нестационарного движения газа. — Ж. прикл. мех. и техн. физ. № 4 (1966), 19—22.
- [21] Лапко Б. В. Построение оптимальных систем подгрупп группы Ли преобразований, допускаемых уравнениями газовой динамики. — В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 15 (1973), Новосибирск, 122—129.

ЧАСТИЧНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

Дальнейшее расширение возможностей поиска частных решений дифференциальных уравнений возможно за счет отказа от свойства инвариантности решения. Возникает вопрос о том, чем можно заменить это свойство с сохранением тех преимуществ, которые характерны для инвариантных решений. Оказалось, что цель достигается с помощью рассматриваемого в настоящей главе понятия частичной инвариантности многообразия.

Это понятие естественно формулируется в терминах орбит. Если дана группа H , то орбита, описываемая многообразием Ψ под действием всевозможных преобразований из H , является наименьшим инвариантным многообразием группы H , содержащим данное многообразие Ψ . Ранг ρ указанной орбиты называется рангом многообразия Ψ . Кроме того, Ψ снабжается еще одной числовой характеристикой, показывающей, «насколько» не инвариантным относительно группы H является Ψ . Это число, обозначаемое δ и называемое дефектом инвариантности (или просто дефектом) многообразия Ψ , определяется как разность размерностей орбиты многообразия Ψ и самого Ψ . Существенно, что для дефекта имеется явная инфинитезимальная формула. Многообразие Ψ называется частично инвариантным относительно группы H , если его орбита не совпадает со всем пространством и его дефект $\delta > 0$.

Применение понятия частичной инвариантности для отыскания решений приводит к алгоритму, похожему на тот, который применяется в случае инвариантных решений. Существенное различие состоит в том, что, кроме факторсистемы E/H , при этом возникает некоторая дополнительная пассивная система P , условия интегрируемости которой входят в систему E/H .

Частично инвариантные решения поддаются классификации, причем новым классифицирующим параметром служит их дефект. В связи с классификационными вопросами возникает новая интересная проблема, называемая проблемой редукции частично инвариантных решений. Редукция имеет место тогда, когда при переходе от группы H к ее подгруппе ранг данного частично инвариантного многообразия Ψ не меняется, а его дефект убывает. Важность этой проблемы определяется тем, что решения с меньшим дефектом искать, вообще говоря, легче. В § 22 доказана теорема о редукции, дающая достаточные условия редукции частично

инвариантных решений системы дифференциальных уравнений первого порядка. Ограничение, наложенное в условии этой теоремы на решение, оказывается полезным для приложений.

Одним из приложений методов исследования частичной инвариантности является теория так называемых кратных волн — в определенном смысле вырожденных решений квазилинейных однородных систем дифференциальных уравнений первого порядка. Эти решения могут быть интерпретированы как частично инвариантные относительно естественной и очень просто описываемой группы, допускаемой такими уравнениями. Она порождена преобразованиями переноса и одного растяжения пространства независимых переменных.

В § 23 дано полное описание простых волн (волн кратности единица) и рассмотрены также двойные волны (волны кратности два). Для двойных волн доказана новая теорема об их редукции, которая применена к уравнениям газовой динамики. Полученный результат состоит в том, что известное в газовой динамике свойство изэнтропичности простых волн в определенном смысле переносится и на двойные волны.

§ 21. Ранг и дефект многообразия

1. Орбита многообразия. Пусть $G = G^r(f)$ есть локальная группа Ли преобразований n -мерного пространства X , порожденная отображением $f: V \times O \rightarrow X$ произведения открытого множества $V \subset X$ и окрестности нуля $O \subset B$ параметрического пространства B этой группы. В дальнейшем предполагается, что множество V не содержит особых точек группы G . В этом случае любое многообразие $\Psi \subset V$ является неособым по отношению к группе G (см. 18.6). Следующее определение связано с понятием орбит точек $x \in V$, введенным в 16.10.

Орбитой многообразия $\Psi \subset V$ называется множество $f(\Psi, O)$ точек, принадлежащих орбитам $f_*(O)$ всевозможных точек $x \in \Psi$. Другими словами, орбита $f(\Psi, O)$ многообразия Ψ есть объединение орбит всех точек этого многообразия.

Имеются две альтернативные возможности. Орбита $f(\Psi, O)$ либо совпадает (локально) с пространством X (содержит некоторое открытое множество пространства X), либо является многообразием в X размерности, меньшей $\dim X = n$. Вообще, если некоторое многообразие $M \subset X$ таково, что $\dim M < \dim X$, то M называется **собственным многообразием** пространства X . Итак, орбита $f(\Psi, O)$ многообразия Ψ есть собственное многообразие в X , если

$$\dim f(\Psi, O) < n. \quad (1.1)$$

Очевидно, что если орбита многообразия Ψ удовлетворяет неравенству (1.1), то она является неособым инвариантным много-

образом (как объединение инвариантных многообразий — орбит $f_x(O)$ точек $x \in \Psi$) группы G . В силу теоремы 18.7 отсюда следует, что группа G интранзитивна. Поэтому существование многообразий Ψ , орбиты которых являются собственными многообразиями в X , возможно только для интранзитивных групп. Конечно, в общем случае обратное утверждение неверно, т. е. одно только свойство интранзитивности группы G не гарантирует, что для любого многообразия Ψ его орбита будет собственным многообразием в X .

Для любого инвариантного многообразия Φ группы G , содержащего многообразие Ψ , справедливо включение $f(\Psi, O) \subset \Phi$. Поэтому орбита $f(\Psi, O)$ является наименьшим инвариантным многообразием группы G , содержащим Ψ . В частном случае, когда $\Psi = \{x\}$ состоит из одной точки $x \in V$, этот факт отмечен в 18.5. Ясно, что если Ψ само есть инвариантное многообразие группы G , то $f(\Psi, O) = \Psi$.

2. Ранг и дефект. Пусть для данного многообразия Ψ выполнено неравенство (1.1). Его орбита $f(\Psi, O)$, будучи неособым инвариантным многообразием группы G , имеет определенный ранг (см. 18.8). Следующим определением этот же ранг приписывается и многообразию Ψ (вообще, говоря, не инвариантному).

Рангом многообразия Ψ относительно группы G называется ранг его орбиты $f(\Psi, O)$. Рассматриваемый как функция пары (Ψ, G) , этот ранг обозначается символом $\rho(\Psi, G)$.

Другая важная числовая характеристика многообразия Ψ , называемая дефектом инвариантности (или просто дефектом), определяется так.

Дефектом многообразия Ψ относительно группы G называется разность между размерностью его орбиты $f(\Psi, O)$ и размерностью многообразия Ψ . Рассматриваемый как функция пары (Ψ, G) , этот дефект обозначается символом $\delta(\Psi, G)$, так что

$$\delta(\Psi, G) = \dim f(\Psi, O) - \dim \Psi. \quad (2.1)$$

Термин «дефект» подчеркивает, что число $\delta(\Psi, G)$ дает количественную характеристику того, насколько не инвариантным является данное многообразие Ψ . Ясно, что равенство $\delta(\Psi, G) = 0$ есть критерий инвариантности многообразия Ψ . Многообразие Ψ , для которого $\delta(\Psi, G) > 0$, называется *частично инвариантным многообразием* группы G с дефектом инвариантности, равным $\delta(\Psi, G)$.

Ранг $\rho = \rho(\Psi, G)$ и дефект $\delta = \delta(\Psi, G)$ не являются независимыми. Связывающее их соотношение удобно описать с помощью пространства инвариантов $\bar{X}$ группы G , размерность которого равна $n - r_*$ (теорема 17.3), где r_* есть общий ранг (на множестве V) касательного отображения ξ группы G . В дальнейшем размерность пространства инвариантов $\bar{X}$ обозначается через t , так что $t = n - r_*$.

Тогда размерность орбиты $f(\Psi, O)$ может быть выражена через ранг ρ из формулы 18 (8.1), которая дает $\dim f(\Psi, O) = \rho + n - t$. Кроме того, пусть рассматриваемое многообразие Ψ регулярно задано уравнением

$$\psi(x) = 0 \quad (2.2)$$

с отображением $\psi: X \rightarrow R^s$ (т. е. задано системой из s скалярных уравнений). Тогда $\dim \Psi = n - s$. Подстановка найденных выражений для размерностей в (2.1) дает искомое соотношение

$$\delta = \rho + s - t. \quad (2.3)$$

Лемма. *Справедливо неравенство*

$$\delta(\Psi, G) \leq r_*. \quad (2.4)$$

Доказательство. Согласно формуле 18 (5.1) размерность орбиты $f_x(O)$ любой точки $x \in \Psi$ равна r_* . Поэтому положение каждой точки орбиты $f(\Psi, O)$ может быть задано не более чем $r_* + \dim \Psi$ параметрами. Следовательно, $\dim f(\Psi, O) \leq r_* + \dim \Psi$, в силу чего (2.4) следует из (2.1). ■

Из соотношений (2.3) и (2.4) получаются неравенства, которым необходимо удовлетворяет дефект инвариантности любого многообразия Ψ , для орбиты которого выполнено (1.1),

$$\max\{s - t, 0\} \leq \delta \leq \min\{n - t, s - 1\}. \quad (2.5)$$

Например, если $s = 1$ и $t = 1$, т. е. многообразие Ψ задано одним скалярным уравнением (2.2) и группа G имеет только один независимый скалярный инвариант, то неравенства (2.5) дают $\delta = 0$. Это означает, что либо Ψ есть инвариантное многообразие группы G , либо его орбита совпадает (локально) с пространством X .

3. Вычисление дефекта. Формулы (2.1) или (2.3) неудобны для вычисления дефекта данного многообразия Ψ , так как они предполагают известными либо размерность орбиты $\dim f(\Psi, O)$, либо ранг этой орбиты. Оказывается, что существует более простая **инфинитезимальная формула для дефекта**, выражающая его непосредственно через отображение ψ , регулярно задающее многообразие Ψ в виде (2.2), и касательное отображение $\xi: V \rightarrow \mathcal{L}(B; X)$ группы G .

Теорема. *Справедливо равенство*

$$\delta(\Psi, G) = r_*((\partial\psi \circ \xi)|\Psi). \quad (3.1)$$

Доказательство. Используя свойство инвариантности каждой из частей равенства (3.1) относительно преобразований пространства X , можно сделать многообразие Ψ «плоским», т. е. представить пространство X в виде $X = X_1 \times X_2$, причем $\Psi = \{0\} \times X_2$ и $\dim X_2 = \dim \Psi = n - s$. Пусть соответственно этому представлению все векторы представлены в виде пар своих компонент

в сомножителях X_1 и X_2 , т. е. $x = (x_1, x_2)$, $f = (f_1, f_2)$ и $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, так что порождающее группу G отображение f действует по формулам

$$x'_1 = f_1(x_1, x_2, a), \quad x'_2 = f_2(x_1, x_2, a).$$

Пусть $y = (0, x_2, a) \in \Psi \times B$. Тогда орбиту $f(\Psi, O)$ можно представить как многообразие, явно заданное уравнением

$$x' = f(y) = (f_1(y), f_2(y)), \quad y \in \Psi \times B.$$

Так как f есть отображение класса C_∞ , то размерность многообразия $f(\Psi, O)$ равна общему рангу производной $\partial_y f$, который можно вычислить при $a = 0$ и произвольном $x_2 \in X_2$. Пусть $y_0 = (0, x_2, 0)$. Тогда, в силу определения касательного отображения, эта производная в компонентах дается формулой

$$\partial_y f(y_0) = \begin{pmatrix} 0 & \xi_1(y_0) \\ I_{R^{n-s}} & \xi_2(y_0) \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$\text{rank}(\partial_y f(y_0)) = (n - s) + \text{rank}(\xi_1(y_0))$$

или, в терминах размерностей,

$$\dim f(\Psi, O) = \dim \Psi + r_*(\xi_1(y_0)). \quad (3.2)$$

Согласно определению дефекта (2.1) из (3.2) следует формула

$$\delta(\Psi, G) = r_*(\xi_1(y_0)). \quad (3.3)$$

Остается заметить, что в выбранном представлении уравнение Ψ есть $x_1 = 0$, т. е. $\phi = x_1$, а потому $\partial\phi \circ \xi = \xi_1$, в силу чего (3.3) совпадает с (3.1). ■

С л е д с т в и е. Многообразие Ψ , заданное уравнением (2.2), имеет данный дефект инвариантности δ относительно группы $G(\xi)$, если и только если $r_*((\partial\phi \cdot \xi)|\Psi) = \delta$.

Именно в этой формулировке утверждение теоремы удобно использовать в приложениях.

Полезно заметить, что критерий инвариантности многообразия 18 (2.2) является частным случаем формулы (3.1). Действительно, в силу (3.1) равенство $\delta(\Psi, G) = 0$ равносильно равенству $(\partial\phi \circ \xi)|\Psi = 0$.

4. Переход к подгруппе. Инвариантные многообразия группы G являются также инвариантными многообразиями любой подгруппы $G' \subset G$. Поэтому всякое частично инвариантное многообразие Ψ группы G есть одновременно частично инвариантное многообразие ее подгруппы G' . Для целей группового анализа семейства решений дифференциальных уравнений важно выяснить, что происходит с рангом и дефектом данного многообразия Ψ при пере-

ходе от группы G к ее подгруппе G' . Пусть ρ и δ — ранг и дефект пары (Ψ, G) , а ρ' и δ' — ранг и дефект пары (Ψ, G') .

Л е м м а. При переходе к подгруппе ранг многообразия Ψ не убывает, а его дефект не возрастает, т. е. всегда

$$\rho' \geq \rho, \quad \delta' \leq \delta. \quad (4.1)$$

Доказательство. Пусть $t = \dim \bar{X}$, где $\bar{X}$ — пространство инвариантов группы G , и $t' = \dim \bar{X}'$, где $\bar{X}'$ — пространство инвариантов подгруппы $G' \subset G$. Тогда $t' \geq t$ [и можно считать, что $\bar{X} \subset \bar{X}'$]. Если Φ есть наименьшее инвариантное многообразие группы G , содержащее Ψ , то ранг $\rho = \rho(\Psi, G)$, по определению 21.2, равен рангу $\rho(\Phi, G)$. Последний равен размерности проекции $\bar{\Phi}$ (см. 19.4) инвариантного многообразия Φ в пространстве инвариантов $\bar{X}$, т. е. $\rho = \dim \bar{\Phi}$. Пусть μ есть число независимых уравнений, задающих Φ (или $\bar{\Phi}$); тогда $\rho = t - \mu$. Аналогично, наименьшее инвариантное многообразие подгруппы G' , содержащее Ψ , есть Φ' , и $\rho' = \dim \bar{\Phi}'$, где $\bar{\Phi}'$ есть проекция Φ' в пространстве инвариантов $\bar{X}'$. Если μ' — число уравнений, задающих Φ' (или $\bar{\Phi}'$), то $\rho' = t' - \mu'$. Так как $\Phi' \subset \Phi$, а значит, и $\bar{\Phi}' \subset \bar{\Phi}$, то система уравнений, задающая $\bar{\Phi}$, входит в качестве подсистемы в систему уравнений, задающую $\bar{\Phi}'$. При этом прирост числа уравнений $\mu' - \mu$ может произойти только за счет прироста размерности пространства инвариантов $t' - t$. В противном случае многообразие Φ не было бы наименьшим инвариантным многообразием, содержащим Ψ . Поэтому $\mu' - \mu \leq t' - t$, откуда

$$\rho' - \rho = t' - t - (\mu' - \mu) \geq 0,$$

т. е. справедливо первое неравенство (4.1). Второе неравенство (4.1) очевидно в силу включения $\Phi' \subset \Phi$. ■

5. Редукция. Особо выделяется случай перехода от группы G к подгруппе G' , когда ранг многообразия Ψ сохраняется, а его дефект уменьшается. В этом случае говорят, что имеет место **редукция пары** (Ψ, G) относительно подгруппы $G' \subset G$ или что пара (Ψ, G) **редуцируется к паре** (Ψ, G') с меньшим дефектом. Итак, редукция (Ψ, G) относительно подгруппы $G' \subset G$ описывается соотношениями

$$\rho(\Psi, G') = \rho(\Psi, G), \quad \delta(\Psi, G') < \delta(\Psi, G). \quad (5.1)$$

Пример. Рассматривается группа G^2 преобразований пространства $X = R^4(x, y, z, v)$, алгебра Ли которой имеет базис

$$\xi_1 \cdot \partial = x \partial_y, \quad \xi_2 \cdot \partial = \partial_z.$$

Двумерное многообразие $\Psi \subset X$, заданное уравнениями

$$y = \lambda xz, \quad v = 0 \quad (\lambda = \text{const}),$$

не инвариантно относительно группы G^2 . Здесь $\psi = (y - \lambda xz, v)$ и $(\xi_1 \cdot \partial)\psi = (x, 0)$, $(\xi_2 \cdot \partial)\psi = (-\lambda x, 0)$, так что $r_*(\partial\psi \circ \xi|_{\Psi}) = 1$. Поэтому $\delta = 1$ и так как $s = 2$, $t = 2$, то по формуле (2.3) находится ранг $\rho = 1$. Для подгруппы $G^1 \subset G^2$ с оператором $(\lambda\xi_1 + \xi_2) \cdot \partial = \lambda x \partial_y + \partial_z$ справедливо равенство $(\lambda x \partial_y + \partial_z)\psi = (0, 0)$, т. е. ψ — инвариант. Поэтому многообразие Ψ инвариантно относительно G^1 и дефект $\delta(\Psi, G^1) = 0$. Но пространство инвариантов группы G^1 трехмерно, ее универсальный инвариант есть $J = (x, y - \lambda xz, v)$, в силу чего $\rho(\Psi, G^1) = 1$. Следовательно, пара (Ψ, G^2) с дефектом $\delta = 1$ редуцировалась к паре (Ψ, G^1) с дефектом $\delta = 0$. Этот пример интересен тем, что в нем подгруппа, относительно которой происходит редукция, зависит от значения параметра λ , входящего в уравнение многообразия Ψ .

6. Существенные параметры. Пусть даны банаховы пространства $X = R^n(x)$, $Y = R^m(y)$, $B = R^r(a)$ и отображение $\varphi: X \times B \rightarrow Y$ класса $C_\infty(X \times B)$. Координаты вектора $a \in B$ называются *параметрами*, от которых зависит отображение φ , рассматриваемое как отображение $\varphi_a: X \rightarrow Y$.

Параметры a называются несущественными, если найдутся отображения $\gamma: B \rightarrow B$ и $\bar{\varphi}: X \times \gamma(B) \rightarrow Y$ класса C_∞ , удовлетворяющие соотношениям (для всех $(x, a) \in X \times B$)

$$\varphi(x, a) = \bar{\varphi}(x, \gamma(a)), \quad r_*(\partial_a \gamma) = q < r. \quad (6.1)$$

Если отображений γ с указанными свойствами нет, то параметры a называются существенными.

Если параметры a несущественны, то среди всевозможных отображений γ , удовлетворяющих соотношениям (6.1), найдется такое, для которого число $q = r_*(\partial_a \gamma)$ минимально. В этом случае размерность образа $\gamma(B)$ равна q и говорят, что φ *зависит от q существенных параметров*.

В связи с этими определениями возникает задача об отыскании числа существенных параметров, от которых зависит данное отображение φ . Это задача анализа, которая имеет известное алгоритмическое решение. Предварительно устанавливается важное вспомогательное предложение.

Л е м м а. *Если число существенных параметров отображения φ равно $q < r$, то найдется такое полное $(r - q)$ -мерное семейство ω векторных полей на пространстве B , с которым*

$$\partial_a \varphi(x, a) \circ \omega(a) = 0. \quad (6.2)$$

Обратно, если найдется такое полное $(r - q)$ -мерное семейство ω векторных полей со свойством (6.2), для которого q минимально, то число существенных параметров отображения φ равно q .

Доказательство. Если некоторое отображение $\gamma: B \rightarrow B$ таково, что $r_*(\partial_a \gamma) = q < r$, то найдутся такие пространство B_0 , $\dim B_0 = r - q$, и отображение $\omega: B \rightarrow \mathcal{L}(B_0; B)$ класса $C_\infty(B)$, что будут выполнены равенства

$$\partial_a \gamma(a) \circ \omega(a) = 0, \quad r_*(\omega) = r - q. \quad (6.3)$$

Дифференцирование равенства (6.1) и образование его композиции с $\omega(a)$ приводит к (6.2). Полнота семейства векторных полей $\omega(a)(B_0)$ (см. 17.2) следует из равенства $r_*(\partial_a \gamma) = q$. Обратно, если с отображением $\omega: B \rightarrow \mathcal{L}(B_0; B)$, задающим на B полное семейство векторных полей $\omega(a)(B_0)$, выполнено (6.2), то для каждого фиксированного $x \in X$ частное отображение $\varphi_x: B \rightarrow Y$ есть инвариант этого семейства. Пусть $\gamma: B \rightarrow \bar{B}$ — универсальный инвариант семейства векторных полей ω , существование которого гарантируется теоремой 17.2. Тогда для каждого $x \in X$ найдется такое отображение $\bar{\varphi}_x: \bar{B} \rightarrow Y$, с которым будет $\varphi_x = \bar{\varphi}_x \circ \gamma$, т. е. выполнено равенство (6.1). Так как при этом q минимально, то число существенных параметров, от которых зависит φ , равно q . ■

Упомянутый алгоритм отыскания числа существенных параметров состоит в следующем. Отображение $\varphi_a: X \rightarrow Y$ продолжается так, как это описано в 4.4, до отображения $\varphi_a: X \rightarrow Z'_k$ и вычисляются общие ранги $r_k = r_*(\partial_a \varphi_a)$ для $k = 0, 1, 2, \dots$ (при этом $\varphi_a = \varphi_0$). Возникает неубывающая последовательность рангов

$$r_0 \leq r_1 \leq \dots \leq r_k \leq \dots \leq r, \quad (6.4)$$

которая должна стабилизироваться, начиная с некоторого r_k , так что $r_k = r_{k+1} = \dots$. Искомое число находится применением следующего правила.

Теорема. Число существенных параметров отображения φ равно наименьшему из чисел r_k последовательности (6.4), для которого $r_k = r_{k+1}$.

Доказательство. Пусть число существенных параметров отображения φ равно q . Из тождества (6.2) следует, что $r_k \leq q$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Для доказательства обратного неравенства надо заметить, что из равенства $r_*(\partial_a \varphi_a) = r_{k+1}$ следует существование отображения $\omega: X \times B \rightarrow \mathcal{L}(B_0; B)$, где $\dim B_0 = r - r_{k+1}$, с которым

$$\partial_{a_{k+1}} \varphi(x, a) \circ \omega(x, a) = 0. \quad (6.5)$$

Использование условия $r_k = r_{k+1}$ показывает, что на самом деле ω от x не зависит, т. е. является отображением $\omega: B \rightarrow \mathcal{L}(B_0; B)$. Кроме того, из равенства $r_k = r_*(\partial_a \varphi_a)$ следует, что семейство векторных полей $\omega(a)(B_0)$ — полное. Поэтому, если γ — универсальный

инвариант этого семейства (теорема 17.2), то с отображением $\gamma: B \rightarrow \bar{B}$, где $\dim \bar{B} = r_k$, выполнено равенство (6.1), т. е. $q \leq r_k$. ■

Замечание. Число существенных параметров a , от которых зависит порождающее отображение $f: X \times B \rightarrow X$ группы $G^r(f)$, равно $r = \dim B$. Действительно, если бы это число было меньше r , то согласно лемме нашлось бы такое ненулевое векторное поле $\chi: B \rightarrow B$, с которым $\partial_a f(x, a) \langle \chi(a) \rangle = 0$. Но в силу уравнения Ли $\partial_a f(x, a) = \xi(f) \circ V(a)$, и если $\chi_1(a) = V(a) \langle \chi(a) \rangle$, то $\xi(f) \langle \chi_1(a) \rangle = 0$. Согласно критерию точности представления последнее равенство влечет $\chi_1(a) = 0$, а значит, и $\chi(a) = 0$, что противоречит предположению.

§ 22. Частично инвариантные решения

1. Необходимые условия. В этом параграфе рассматривается обобщение понятия инвариантного H -решения, изученного в §§ 19, 20. Это обобщение достигается за счет отказа от полной инвариантности решения и как многообразия $U \subset Z$. Ниже используются обозначения и предположения, принятые в § 19.

Решение $\eta \in SE$ называется **частично инвариантным H -решением уравнения E** , если многообразие U является частично инвариантным многообразием группы H , допускаемой уравнением E .

Согласно результатам § 21, каждое многообразие-решение U может быть снабжено целочисленными характеристиками, а именно рангом ρ и дефектом δ , относительно группы H . При этом $\text{ранг } \rho = \rho(U, H)$ и $\text{дефект } \delta = \delta(U, H)$ называются соответственно **рангом и дефектом (инвариантности) соответствующего частично инвариантного H -решения U** .

В силу специфики многообразия-решения U , которое лежит в $(n+t)$ -мерном пространстве $Z = X \times Y$ и задается уравнением вида $y = u(x)$, так что оно всегда имеет фиксированную размерность $n = \dim X$, ранг и дефект любой пары (U, H) должны удовлетворять некоторым необходимым условиям. В основном эти условия вытекают из соотношений 21 (2.3) и 21 (2.5), к которым делается следующее дополнение. Так как ранг ρ равен числу независимых переменных в уравнениях, выводимых из E , а интерес представляют лишь такие решения, для которых число независимых переменных во вспомогательных уравнениях меньше n , то целесообразно наложить еще условие на ранг: $\rho \leq n-1$. В упомянутых соотношениях надо число n заменить на $n+t$ и положить $s=t$. Кроме того, удобно ввести в рассмотрение число μ , равное числу уравнений, задающих орбиту $h(U, O)$ многообразия U . Наконец, через t обозначается, как и в 21.2, размерность пространства инвариантов $\bar{Z}$ группы H , а через r_* — общий ранг

ее касательного отображения ζ . Введенные числа удовлетворяют соотношениям

$$t = n + m - r_*, \quad \rho = \delta + n - r_*, \quad \mu = m - \delta. \quad (1.1)$$

Дополнительное ограничение на входящие в (1.1) числа накладывает тот факт, что если $\Phi(\bar{z})=0$ есть уравнение (система из μ скалярных уравнений) проекции орбиты $h(U, O)$ в пространстве инвариантов $\bar{Z}$, то его следствием не может быть уравнение, связывающее только независимые переменные x . Это означает, что необходимо выполнение условия $r_*(\partial_y \Phi) = \mu$ или

$$r_*(\partial_z \Phi \circ \partial_y J) = \mu,$$

где J — универсальный инвариант группы H . Так как $r_*(\partial_z \Phi) = \mu$, то согласно теореме о ранге композиции линейных отображений отсюда следует неравенство $\mu \leq \min\{\mu, r_*(\partial_y J)\}$, равносильное неравенству $\mu \leq r_*(\partial_y J)$ или $m - r_*(\partial_y J) \leq \delta$. Присоединение этого неравенства к 21 (2.5) приводит к следующему выводу.

Для существования частично инвариантных H -решений ранга $\rho < n$ необходимо, чтобы дефект δ этих решений удовлетворял неравенствам

$$\max\{r_* - n, 0\} \leq \delta \leq \min\{r_* - 1, m - 1\} \quad (1.2)$$

и чтобы универсальный инвариант J группы H был таким, что

$$m - \delta \leq r_*(\partial_y J). \quad (1.3)$$

2. Описание алгоритма. Пусть дана группа H , допускаемая уравнением (системой) E , для которой определено число r_* и найден ее универсальный инвариант J . По r_* выбирается любое значение δ , удовлетворяющее неравенствам (1.2), и по формулам (1.1) определяются числа ρ и μ . Затем проверяется неравенство (1.3). Если оно выполнено, то приводится в действие следующий алгоритм.

Пространство инвариантов $\bar{Z} = R^t(\bar{z})$ представляется в виде произведения $\bar{Z} = \bar{X} \times \bar{Y}$, где $\bar{X} = R^p(x)$, $\bar{Y} = R^q(y)$, и универсальный инвариант разбивается на две части $J = (J_1, J_2)$, где $J_1: Z \rightarrow \bar{X}$, $J_2: Z \rightarrow \bar{Y}$, с таким расчетом, чтобы было выполнено равенство $r_*(\partial_y J_2) = \mu$. С помощью этого разбиения формируется общий вид уравнения орбит искомых частично инвариантных H -решений как уравнения их проекций в пространстве инвариантов, а именно, $\bar{y} = \bar{a}(x)$ или, подробнее,

$$J_2'(x, y) = \bar{a}(J_1'(x, y)) \quad (2.1)$$

с неопределенным отображением $\bar{a}$. Внешне это уравнение похоже на 19 (4.3), однако, если дефект $\delta > 0$, то из (2.1) в принципе нельзя получить выражения для y , так как здесь имеется только

$\mu = m - \delta < m$ скалярных уравнений. Поэтому дальнейшая процедура отличается от той, которая применялась в случае инвариантных решений (см. 19.7).

Пространство Y рассматривается как множество пар $y = (y_1, y_2)$, т. е. представляется в виде произведения $Y = Y_1 \times Y_2$, причем $\dim Y_1 = \mu$, с таким расчетом, чтобы $r_*(\partial_y J_2) = \mu$. Переменные y_1 называются главными, а y_2 — параметрическими. Из уравнения (2.1) определяются выражения главных переменных и их производных до нужного порядка и полученные выражения подставляются в систему дифференциальных уравнений E . В результате получается некоторая переопределенная система E_2 уравнений, связывающих параметрические переменные y_2 (при известном отображении $\bar{y}$ из (2.1)).

Система E_2 , вообще говоря, будет «активной», т. е. может породить новые независимые уравнения как условия совместности уравнений E_2 . Из общей теории дифференциальных уравнений известно, что в принципе всегда может быть реализован процесс приведения «активной» системы к «пассивной», условия совместности которой выполняются тождественно в силу уравнений самой системы. В общем виде проследить этот процесс до конца невозможно. В рассматриваемом случае можно лишь утверждать, что результирующая «пассивная» система будет состоять из некоторой собственно пассивной системы P , связывающей параметрические переменные y_2 , независимые переменные x и отображение $\bar{y}$, и некоторой факторсистемы E/H , гарантирующей свойство пассивности системы P . При этом система E/H не содержит явно параметрических переменных и связывает только функции $\bar{y}$ и переменные $x = J_1(x, y)$ из представления (2.1).

Итак, указанный алгоритм реализует равносильное представление данной системы E на семействе решений, удовлетворяющих соотношению (2.1), в виде объединения двух систем: системы E/H в пространстве инвариантов группы H и пассивной системы P . При этом по каждому решению системы E/H можно найти некоторое решение пассивной системы P , т. е. отображение $u_2: X \rightarrow Y_2$, дающее значения параметрических переменных $y_2 = u_2(x)$, после чего из уравнения (2.1) определяется отображение $u_1: X \rightarrow Y_1$, дающее значения главных переменных $y_1 = u_1(x)$, в результате чего получается решение $u = (u_1, u_2)$ системы E . Это решение является, по построению, частично инвариантным H -решением ранга ρ и дефекта δ .

Ясно, что задача отыскания частично инвариантных H -решений проще задачи отыскания произвольных решений системы E , так как только часть y_2 искомого y зависит, вообще говоря, от всех n независимых переменных x , а отображение $\bar{y}$, определяющее главные переменные y_1 , является решением факторсистемы E/H , содержащей лишь $\rho < n$ независимых переменных x .

3. Типы частично инвариантных решений. В алгоритме отыскания частично инвариантных решений содержится некоторый произвол, связанный с выбором дефекта δ , удовлетворяющего неравенствам (1.2). Естественно возникает вопрос о широте этого произвола. Для ответа на этот вопрос целесообразно дать список всех возможных типов решений независимо от группы H и уравнения E . Такие списки называются *таблицами типов* частично инвариантных решений. Если заметить, что в силу соотношений (1.2) из семи характеризующих решение чисел $n, m, r_*, \delta, \rho, t, \mu$ независимыми являются четыре, и предположить, что числа n, m фиксированы, то «свободными» останутся только два числа, в качестве которых удобно выбрать r_* и δ .

Например, если $n=2$ и $m=3$, то эти числа будут подчинены неравенствам

$$1 \leq r_* \leq 4, \quad \max \{r_* - 2, 0\} \leq \delta \leq \min \{r_* - 1, 2\}.$$

Здесь получается следующая таблица типов частично инвариантных H -решений, где в последней графе схематически изображен вид уравнения (2.1) орбиты $h(U, O)$ путем указания набора скалярных инвариантов, образующих J_2 (слева от черты $\parallel$), и набора скалярных инвариантов, образующих J_1 (справа от черты $\parallel$), причем, если подпространство $\bar{X}$ нульмерно, т. е. $\bar{y} = C = \text{const}$, то справа от черты $\parallel$ стоит C :

№	r_*	δ	ρ	t	μ	$h(U, O)$
1	1	0	1	4	3	$J^1, J^2, J^3 \parallel J^4$
2	2	0	0	3	3	$J^1, J^2, J^3 \parallel C$
3	2	1	1	3	2	$J^1, J^2 \parallel J^3$
4	3	1	0	2	2	$J^1, J^2 \parallel C$
5	3	2	1	2	1	$J^1 \parallel J^2$
6	4	2	0	1	1	$J^1 \parallel C$

В общем случае число типов, получаемых для данных n и m , равное числу различных пар (r_*, δ) , зависит только от n, m . Простой подсчет показывает, что *максимально возможное число типов частично инвариантных решений равно nm* . Конечно, для конкретного уравнения $E(n, m, k, s)$ реальное число типов частично инвариантных решений, которые можно искать с помощью подгрупп H группы G , допускаемой этим уравнением, может быть меньше nm . Это может произойти как за счет недостаточно большой размерности группы G , так и за счет необходимого условия (1.3), которое при составлении таблицы типов не учитывалось.

В целом классификация частично инвариантных решений данного дифференциального уравнения E выполняется на основе тех же принципов, которые использовались для классификации инвариантных решений в 20.5. При этом необходимо учитывать дополнительную характеристику решения — его дефект. Очевидно, что дефект инвариантен относительно преобразования подобия групп. Поэтому признак подобия подгрупп применительно к частично инвариантным решениям ничего нового по сравнению со случаем инвариантных решений не дает и оптимальные системы подгрупп в равной мере служат и для классификации частично инвариантных решений. Однако здесь появляется новая возможность, связанная с отмеченным в 21.5 явлением редукции частично инвариантных многообразий. Влияние этого явления на классификацию частично инвариантных решений будет обсуждаться в 22.5.

4. Пример. Рассматриваются уравнения 20 (6.1) околозвукового течения газа и ищутся частично инвариантные решения относительно группы $H^2 = H(\zeta_3, \zeta_4)$ с базисом алгебры Ли операторов (см. 5 (9.9))

$$\zeta_3 \cdot \partial = \partial_x, \quad \zeta_4 \cdot \partial = x\partial_x + y\partial_y.$$

Здесь $n=m=2$, $r_*=2$, неравенства (2.1) принимают вид $0 \leq \delta \leq 1$ и дают две возможности: $\delta=0$ и $\delta=1$. Однако универсальный инвариант этой группы есть $J=(x/y, u)$ и $r_*(\partial_u, J)=1$, так что необходимое условие (1.3) дает $\delta \geq 1$. Поэтому остается только $\delta=1$ и по формулам (1.1) находятся $\rho=1$ и $\mu=1$. Следовательно, относительно рассматриваемой группы возможны только частично инвариантные H^2 -решения ранга $\rho=1$ и дефекта $\delta=1$. Общий вид орбиты такого решения есть

$$u = \varphi(\lambda), \quad \lambda = x/y. \quad (4.1)$$

Здесь переменная u является главной, а v — параметрической. Вычисление производных и подстановка в уравнения 20 (6.1) дает

$$\partial_x v = -\frac{1}{y} \lambda \varphi', \quad \partial_y v = -\frac{1}{y} \varphi \varphi', \quad (4.2)$$

где штрихом обозначена производная ∂_λ . Система (4.2) переопределена относительно искомой функции v . Условие совместности уравнений (4.2):

$$\partial_y \left(\frac{1}{y} \lambda \varphi' \right) = \partial_x \left(\frac{1}{y} \varphi \varphi' \right)$$

после упрощения приводится к виду

$$((\lambda^2 + \varphi) \varphi')' = 0. \quad (4.3)$$

Уравнение (4.3) является единственным условием совместности (пассивности) системы (4.2). Итак, здесь (4.3) образует факторсистему E/H , а (4.2) — пассивную систему P .

Поскольку этот пример будет использован в дальнейшем, целесообразно построить решение полученных уравнений. Первый интеграл уравнения (4.3) есть

$$(\lambda^2 + \varphi)\varphi' = c \quad (c = \text{const}), \quad (4.4)$$

и, несмотря на то, что уравнение (4.4) в квадратурах не интегрируется, функцию v удастся выразить через φ , а именно,

$$v = -c \ln y - \int \lambda \varphi'(\lambda) d\lambda. \quad (4.5)$$

5. Проблема редукции. Понятие частично инвариантного решения позволяет организовать процесс поиска частных решений уравнения E , допускающего группу G , с помощью различных подгрупп $H \subset G$. В этом поиске целесообразно продвигаться, последовательно увеличивая ранги исследуемых H -решений, так как решения меньшего ранга находить, вообще говоря, легче ввиду того, что ранг равен числу независимых переменных в фактор-системе E/H . При этом рост ранга связан в основном с уменьшением порядка группы H , т. е. с переходом от некоторой группы H к ее подгруппе H' . Можно потребовать, чтобы при переходе от группы H к подгруппе $H' \subset H$ ранг не возрастал. Но в силу леммы 21.4 при этом переходе ранг и не убывает. Следовательно, поставленное требование означает, что ранг должен сохраняться, т. е. $\rho' = \rho$. С другой стороны, если при переходе к подгруппе $H' \subset H$ сохраняется и дефект δ , т. е. $\delta' = \delta$, то из формул (1.1) следует, что $t' = t$, другими словами, группа H и ее подгруппа H' имеют один и тот же универсальный инвариант. В этом случае переход к подгруппе новых решений не дает. Если же $\delta' < \delta$, то, согласно 21.5, для некоторых частично инвариантных H -решений будет иметь место их редукция к частично инвариантным H' -решениям. Тем самым естественно возникает вопрос о редукции частично инвариантных решений, который ставится в следующей формулировке.

Проблема редукции. Пусть дано частично инвариантное H -решение U , имеющее ранг ρ и дефект δ . Требуется выяснить, существует ли подгруппа $H' \subset H$, для которой пара (U, H) редуцируется к паре (U, H') , т. е. U является также частично инвариантным H' -решением и справедливы соотношения $\rho' = \rho$, $\delta' < \delta$.

Важность этой проблемы определяется тем, что в упомянутом выше процессе поиска частично инвариантных решений обнаружение редукции позволяет избежать большого количества фактически бесполезной работы, так как в этом процессе, когда $H' \subset H$, частично инвариантные H' -решения отыскиваются раньше, чем H -решения.

К сожалению, какой-либо общий и практически удобный критерий редукции частично инвариантных решений пока не найден. Имеются лишь отдельные частные теоремы, дающие достаточные условия редукции. Одна из таких теорем общего характера приводится ниже.

6. Лемма о ранге. Для дальнейшего потребуется одно свойство продолжения касательного отображения ζ группы $G^r(\zeta)$ преобразований пространства $Z = X \times Y$. Рассматривается первое продолжение ζ_1 , определенное в 4.8.

Лемма. Если группа $G^r(\zeta)$ интранзитивна и

$$r_*(\zeta) = r_*(\zeta_1), \quad (6.1)$$

то общий ранг отображения ζ равен порядку группы, т. е. $r_*(\zeta) = r$.

Доказательство. Если $r_*(\zeta) = r_0 < r$, то в параметрическом пространстве B группы $G^r(\zeta)$ найдется такое подпространство B_0 , что $\dim B_0 = r_0$ и семейство векторных полей $\zeta(z)(B_0)$ — полное (см. доказательство теоремы 17.3). При этом любое векторное поле $\zeta_\alpha(z)$ для $\alpha \in B$ выражается через базис $\{\zeta_\alpha(z)\}$ ($\alpha = 1, \dots, r_0$) по формуле, аналогичной 17 (3.1):

$$\zeta_\alpha(z) = \omega_\alpha^a(z) \zeta_a(z).$$

В силу (6.1) такое же выражение (с теми же коэффициентами ω_α^a) справедливо и для продолженных векторных полей (см. 4.8),

$$\zeta_\alpha(z) = \omega_\alpha^a(z) \zeta_a(z),$$

так как в противном случае ранг $r_*(\zeta)$ был бы больше ранга $r_*(\zeta_1)$.

Утверждается, что для интранзитивной группы последнее соотношение возможно, только если все коэффициенты ω_α^a суть постоянные отображения $Z \rightarrow R$. Но если это так, то семейство векторных полей $\zeta(z)(B)$ совпадает с $\zeta(z)(B_0)$, что противоречит неравенству $r_0 < r$.

Итак, остается доказать следующее утверждение. Если на пространстве $Z = X \times Y$ дано полное семейство векторных полей с базисом $\{\zeta_\alpha\}$ ($\alpha = 1, \dots, r$), причем $r < \dim Z = n + m$, то для какого-либо векторного поля ζ равенство

$$\zeta(z) = \omega^\alpha(z) \zeta_\alpha(z) \quad (6.2)$$

возможно только с постоянными ω^α .

В компонентах $\zeta = (\xi, \eta, \eta)$ равенство (6.2) равносильно системе

$$\xi = \omega^\alpha \xi_\alpha, \quad \eta = \omega^\alpha \eta_\alpha, \quad \eta = \omega^\alpha \eta_\alpha, \quad (6.3)$$

где η выражается через ξ , η по формуле продолжения 4 (8.4) и имеет вид $\eta = D\eta - y \cdot D\xi$. В силу равенств (6.3) это дает

$$\eta = \omega^\alpha (D\eta_\alpha - y \cdot D\xi_\alpha) + (\eta_\alpha - y \langle \xi_\alpha \rangle) D\omega^\alpha = \omega^\alpha \eta_\alpha + (\eta_\alpha - y \langle \xi_\alpha \rangle) D\omega^\alpha,$$

откуда снова в силу (6.3), а также равенства $D\omega^\alpha = \partial_x \omega^\alpha + y \cdot \partial_y \omega^\alpha$

$$(\eta_\alpha - y \langle \xi_\alpha \rangle) (\partial_x \omega^\alpha + y \cdot \partial_y \omega^\alpha) = 0. \quad (6.4)$$

Так как в (6.4) отображения ξ_α , η_α и ω^α от y не зависят, то это тождество расщепляется относительно y . Дальнейший анализ удобно провести в координатной форме, введя координаты векторов $x = \{x^i\}$, $y = \{y^k\}$, $y = \{y_l^k\}$, $\xi_\alpha = \{\xi_\alpha^i\}$, $\eta_\alpha = \{\eta_\alpha^k\}$ и положив $\partial_x \omega^\alpha = p_i^\alpha$, $\partial_y \omega^\alpha = q_k^\alpha$. В этих обозначениях расщепление тождества (6.4) относительно переменных y_l^k дает три серии уравнений:

$$(a) \eta_\alpha^k p_i^\alpha = 0; \quad (b) \delta_i^j \eta_\alpha^k q_l^\alpha = \delta_l^j \xi_\alpha^k p_i^\alpha; \quad (c) \xi_\alpha^j q_l^\alpha = 0,$$

где $i, j = 1, \dots, n$; $k, l = 1, \dots, m$. Остается доказать, что из этих уравнений следуют равенства $p_i^\alpha = q_l^\alpha = 0$.

Пусть в матрице $M = (\xi_\alpha^i, \eta_\alpha^k)$ индекс α нумерует столбцы, так что в ней r столбцов и $n + m$ строк. В силу полноты семейства векторных полей с базисом $\{\xi_\alpha\}$ общий ранг матрицы M равен $r < n + m$. Поэтому в M найдется строка, после вычеркивания которой остается матрица M' , все еще имеющая ранг r . Пусть это будет строка с номером i_0 (для номера k_0 рассуждение аналогично). Если в уравнениях (a) и (b) положить $i = i_0$ и $j \neq i_0$, то для набора $\{p_i^\alpha\}$ получится система линейных однородных уравнений

$$\eta_\alpha^k p_{i_0}^\alpha = 0, \quad \xi_\alpha^j p_{i_0}^\alpha = 0 \quad (j \neq i_0),$$

матрица коэффициентов которой есть M' . Так как $\text{rang } M' = r$, то отсюда следует, что $p_{i_0}^\alpha = 0$ ($\alpha = 1, \dots, r$). Поэтому, если в уравнениях (b) положить $i = j = i_0$, то вместе с уравнениями (c) получится система линейных однородных уравнений для q_l^α

$$\eta_\alpha^k q_l^\alpha = 0, \quad \xi_\alpha^j q_l^\alpha = 0$$

с матрицей коэффициентов M . Отсюда $q_l^\alpha = 0$ ($\alpha = 1, \dots, r$; $l = 1, \dots, m$). Наконец, если в (b) положить $k = l$, то вместе с (a) получится система

$$\eta_\alpha^k p_i^\alpha = 0, \quad \xi_\alpha^j p_i^\alpha = 0,$$

откуда, как и выше, $p_i^\alpha = 0$ ($\alpha = 1, \dots, r$; $i = 1, \dots, n$). ■

Требование интранзитивности группы $G'(\zeta)$ в этой лемме существенно. Для транзитивных групп утверждение леммы о ранге может быть неверным. Например, для группы G^3 преобразований пространства $R^2(x, y)$ (x и y — скаляры) с базисом алгебры Ли

$$\zeta_1 \cdot \partial = \partial_x, \quad \zeta_2 \cdot \partial = \partial_y, \quad \zeta_3 \cdot \partial = x\partial_x + y\partial_y,$$

легко найти, что $\zeta = \zeta_1$ и условие (6.1) выполнено. Однако здесь

$r_*(\zeta) = 2$, а порядок группы $r = 3$, т. е. заключение леммы не справедливо. Это произошло потому, что группа $G^3(\zeta)$ транзитивна.

7. Теорема о редукции. Согласно 22.2 на классе частично инвариантных H -решений система E представляется в виде равносильного ей объединения факторсистемы E/H и пассивной системы P . При этом, конечно, система P также допускает группу H . Здесь будет доказана теорема о редукции частично инвариантных H -решений при следующем дополнительном условии.

На частично инвариантном H -решении пассивная система P содержит такую подсистему первого порядка, что ее уравнения, вместе с уравнениями E/H , можно разрешить относительно первых производных всех искомым функций (т. е. относительно вектора $y \in Y_1$) и привести к виду

$$y = F(x, y). \quad (7.1)$$

Т е о р е м а. Для любого частично инвариантного H -решения ранга ρ , на котором из системы E получаются уравнения вида (7.1), найдется такая подгруппа $H' \subset H$, что это решение есть инвариантное H' -решение ранга $\rho' = \rho$.

Доказательство. Так как (7.1) есть инвариантное многообразие продолженной группы H , то согласно теореме о представлении 18.7 оно может быть задано в равносильной форме $\Phi(x, y, y) = 0$, где Φ — инвариант группы H . Поэтому универсальный инвариант $J: Z_1 \rightarrow Z_1$ группы H должен быть таким, чтобы $r_*(\partial_y J) = \dim Y_1 = nm$. Следовательно, размерность пространства инвариантов продолженной группы H равна $t + nm$, где t — размерность пространства инвариантов группы H . Так как эти размерности связаны с общими рангами касательных отображений формулой (1.1), то

$$r_*(\zeta) = n + m + nm - (t + nm) = n + m - t = r_*(\zeta),$$

т. е. выполнено условие (6.1) леммы о ранге. Кроме того, группа H , по условию, интранзитивна (только для таких групп определяются частично инвариантные решения). Поэтому порядок группы H необходимо равен $r = n + m - t$.

Пусть U есть рассматриваемое частично инвариантное H -решение с уравнением $y=u(x)$. Под действием преобразования $h_a \in H$ многообразие U перейдет в многообразие U_a с уравнением вида

$$y = \varphi(x, a), \quad (7.2)$$

причем $\varphi(x, 0) = u(x)$. Тогда число $\delta = r_*(\partial_a \varphi)$ равно дефекту многообразия U относительно группы H . Действительно, если записать (7.2) в виде m скалярных уравнений, то δ из них можно разрешить относительно того же числа координат вектора $a = (a^1, \dots, a^n)$, например, относительно $a' = (a^1, \dots, a^b)$. Если полученные выражения для a' подставить в оставшиеся $m - \delta$ уравнений, то последние образуют подсистему, равносильную такой, в которую параметры a не войдут (в противном случае было бы $r_*(\partial_a \varphi) > \delta$). Следовательно, это и есть уравнения наименьшего инвариантного многообразия группы H , содержащего U , т. е. уравнения орбиты $h(U, O)$. Число этих уравнений равно $\mu = m - \delta$, а потому размерность орбиты есть $n + \delta$ и согласно определению 21 (2.1) дефект многообразия U равен $n + \delta - n = \delta$.

Если многообразие U_a продолжить на пространство Z_1 , дополнив уравнения (7.2) уравнениями

$$y_1 = \partial_x \varphi(x, a),$$

и в эти новые уравнения подставить найденные ранее выражения для параметров a' , то в результате параметры a не войдут вообще. Это следует из того, что результирующие уравнения должны быть равносильны (на решении U) уравнениям системы (7.1), которая инвариантна относительно H и параметров a не содержит. Поэтому ранги $r_*(\partial_a \varphi)$ и $r_*(\partial_a \varphi, \partial_x \partial_a \varphi)$ равны. Это означает, что последовательность 21 (6.4) здесь имеет вид $r_0 = r_1$. В силу теоремы 21.6 о числе существенных параметров отсюда следует, что это число в точности равно дефекту δ . Согласно лемме 21.6 найдется такое отображение $\gamma: B \rightarrow B_0$, где $\dim B_0 = \delta$, что существенными параметрами будут $\gamma(a)$ и неинвариантную часть системы (7.2) можно переписать в такой форме, что в нее будут входить только параметры $\gamma(a)$. Более того, эти уравнения можно разрешить относительно $\gamma(a)$ и представить в виде

$$\psi_i(x, y) = \gamma_i(a) \quad (7.3)$$

с некоторым отображением $\psi: Z \rightarrow B_0$, которое необходимо должно быть инвариантом группы H . Пусть H' есть совокупность всех таких преобразований $h_a \in H$, для которых

$$\gamma(a) = \gamma(0). \quad (7.4)$$

Очевидно, что H' есть группа, а именно подгруппа $H' \subset H$.¹ Так как при $a=0$ получается исходное решение $U_0 \equiv U$, то все преобра-

зования $h_* \in H'$ оставляют инвариантным многообразие U . Следовательно, U есть инвариантное H' -решение. Далее, размерность многообразия (7.4) в групповом пространстве B группы H равна $r - \delta$, а потому и порядок подгруппы H' равен $r - \delta$. Кроме того, подгруппа H' также интранзитивна, и для ее касательного отображения, очевидно, выполнено равенство (6.1). По лемме о ранге ее порядок связан с числом ее инвариантов t' соотношением $r - \delta = n + m - t'$. Поэтому ранг U как инвариантного H' -решения равен

$$\rho' = t' - m = n + \delta - r = n + \delta - r_* = \rho,$$

где, согласно (1.1), число ρ есть ранг решения U как частично инвариантного H -решения. ■

В приложениях эта теорема хорошо работает в случае систем дифференциальных уравнений E первого порядка и обычно применяется для того, чтобы априори выяснить возможный вид нередуцируемых частично инвариантных решений. При этом оказывается, что такие решения являются довольно редкими и вместе с тем интересными с точки зрения описываемых системой E физических процессов.

8. Примеры. В следующих двух иллюстративных примерах рассматриваются уравнения 20 (6.1) околзвучового течения газа.

Первый пример относится к решению, построенному в 22.4. Здесь из (4.1) и (4.2) можно найти все производные первого порядка от u, v по x, y . Поэтому, в силу теоремы 22.6, каждое решение (4.1), (4.5) должно быть инвариантным относительно некоторой однопараметрической подгруппы H^1 группы H^2 . Эту подгруппу можно найти, разыскивая ее оператор в виде

$$\zeta' \cdot \partial = (\zeta_4 - c_1 \zeta_3) \cdot \partial = x \partial_x + y \partial_y - c_1 \partial_v, \quad (c_1 = \text{const}). \quad (8.1)$$

Универсальный инвариант группы H^1 есть $J = (x/y, u, v + c_1 \ln y)$, и инвариантное H^1 -решение можно искать в виде

$$u = \varphi(\lambda), \quad v = -c_1 \ln y + \psi(\lambda), \quad \lambda = x/y.$$

Соответствующая факторсистема оказывается такой:

$$-\lambda \varphi' = \psi', \quad \lambda \psi' + c_1 = \varphi \varphi',$$

где штрихом обозначена производная ∂_λ . Исключение ψ приводит к уравнению

$$(\lambda^2 + \varphi) \varphi' = c_1,$$

совпадающему с (4.4) при $c = c_1$. Кроме того, $\psi(\lambda) = -\int \lambda \varphi' d\lambda$, и получается в точности решение (4.5). Итак, каждое частично инвариантное H^2 -решение (4.1), (4.5) есть инвариантное $H^1(\zeta')$ -решение, где ζ' есть оператор (8.1) при $c_1 = c$.

В качестве второго примера решается задача отыскания всевозможных нередуцируемых частично инвариантных решений системы 20 (6.1) ранга $\rho=1$ и дефекта $\delta=1$. Уравнение наименьшего инвариантного многообразия, содержащего такое решение, может быть взято в виде

$$v = f(x, y, u). \quad (8.2)$$

Подстановка в систему 20 (6.1) приводит к уравнениям

$$f_u u_x - u_y = -f_x, \quad u u_x + f_u u_y = -f_y, \quad (8.3)$$

где $f_u = \partial_u f$ и т. д. Если эти уравнения можно решить относительно u_x, u_y , то будет выполнено условие (7.1). Поэтому на нередуцируемых решениях вида (8.2) должно выполняться равенство

$$f_u^2 + u = 0. \quad (8.4)$$

Отсюда следует вывод: на любом нередуцируемом частично инвариантном решении рассматриваемого типа должно быть $u < 0$. В теории околосвуковых течений газа это соответствует сверхзвуковым течениям.

Если соотношение (8.4) выполнено, то из уравнений (8.3) легко определяется вид зависимости (8.2) и оказывается таким:

$$v = \pm \frac{2}{3} (-u)^{3/2} + c \quad (c = \text{const}). \quad (8.5)$$

С этой функцией f уравнения (8.3) сводятся к одному уравнению

$$\pm (-u)^{1/2} u_x + u_y = 0,$$

общее решение которого легко находится известным методом и задается неявно конечным уравнением вида

$$x \mp (-u)^{1/2} y = F(u) \quad (8.6)$$

с произвольной функцией F . Решения вида (8.5), (8.6) в теории околосвуковых течений газа называются *простыми волнами*. Тем самым установлен следующий замечательный факт.

Любое нередуцируемое частично инвариантное решение системы 20 (6.1) ранга $\rho=1$ и дефекта $\delta=1$ есть простая волна.

§ 23. Кратные волны

1. Квазилинейные системы. Общий вид квазилинейной системы первого порядка в пространстве $Z = X \times Y$ есть

$$e \langle y \rangle = f \quad (1.1)$$

с заданными отображениями $e: Z \rightarrow \mathcal{L}(Y_1; R')$ и $f: Z \rightarrow R'$, где Y_1 — первое продолжение пространства Y с помощью X (см. 4.2).

При этом предполагается, что $r_*(e) = s$. Для записи уравнения (1.1) в координатной форме в пространствах $X = R^n(x)$ и $Y = R^m(y)$ выбираются системы координат и вводятся координаты векторов $x = \{x^i\}$, $y = \{y^k\}$ и $y = \{y_i^k\}$. Отображение e также представляется набором координат $\{e_{k\sigma}^i\}$, где отображения $e_{k\sigma}^i: Z \rightarrow R$ действуют по формуле $z \rightarrow e_{k\sigma}^i(z)$. В этих обозначениях уравнение (1.1) принимает вид системы скалярных уравнений

$$e_{k\sigma}^i(x, y) y_i^k = f_\sigma(x, y) \quad (\sigma = 1, \dots, s). \quad (1.2)$$

В качественной теории систем (1.2) важную роль играет понятие характеристик, которое определяется следующим образом. Пусть X^* — пространство, сопряженное к X . С каждым вектором $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in X^*$ можно образовать матрицу $(\lambda_i e_{k\sigma}^i(z))$, строки которой нумерует индекс σ , а столбцы — индекс k . Вектор λ называется *нормальным характеристическим вектором* системы (1.2) в точке $z \in Z$, если $\text{rang}(\lambda_i e_{k\sigma}^i(z)) < s$. Пусть многообразие U с уравнением $y = u(x)$ есть некоторое решение системы (1.2). Гладкая гиперповерхность $\Gamma \subset X$ называется *характеристической гиперповерхностью* (или просто *характеристикой*) на решении U , если в каждой точке $x \in \Gamma$ вектор нормали к Γ является нормальным характеристическим вектором системы (1.2) в точке $z = (x, u(x))$.

Система (1.2) называется *недоопределенной, определенной* или *переопределенной*, если соответственно $s < m$, $s = m$ или $s > m$.

Система (1.2) называется *автономной*, если отображения e и f не зависят от x , и *однородной*, если $f = 0$.

В дальнейшем будут рассматриваться автономные однородные квазилинейные системы, имеющие вид

$$e_{k\sigma}^i(y) y_i^k = 0 \quad (\sigma = 1, \dots, s). \quad (1.3)$$

З а м е ч а н и е. Систему (1.3) естественно изучать с точностью до преобразований эквивалентности (см. 6.4), которые здесь представляют собой любые обратимые линейные преобразования в пространствах X, Y и R^s . Очевидно, что такие преобразования сохраняют дифференциальную структуру уравнения (1.3), изменяя только функции $e_{k\sigma}^i$. Эта группа эквивалентностей будет обозначаться символом $\bar{G}(e)$.

2. Решения типа «бегущих волн». Пусть $X = R^2(t, x)$ и переменная t интерпретируется как время, а переменная x — как расстояние. Отображение $u: X \rightarrow Y$, заданное с помощью функции $v: R \rightarrow Y$ и действующее по формуле $u(t, x) = v(x - ct)$, где $c = \text{const}$, называется *бегущей волной*. Этот термин отражает тот факт, что график $y = u(t, x)$ в любой момент времени $t > 0$ получается из графика $y = u(0, x) = v(x)$ перемещением последнего как целого на расстояние ct в положительном (если $c > 0$) направлении оси x . Это перемещение зависит от времени t , и его скорость равна $c = \partial_t x$, так что волна $y = v(x)$ как бы «бежит» со скоростью c .

Понятие бегущей волны распространяется на случай n -мерного пространства $X = R^n(x)$. Этим термином называется отображение вида $u(x) = v(\lambda)$, где $\lambda = \lambda_i x^i$, образованное с помощью вектора $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in X^*$ и функции $v: R \rightarrow Y$. Более того, для каждого $p < n$ можно рассмотреть отображение $v: R^p \rightarrow Y$, задающее p -кратную бегущую волну по формуле $u(x) = v(\lambda^1, \dots, \lambda^p)$, где линейные формы $\lambda^* = \lambda_i^* x^i$ образованы с помощью линейно независимых векторов $(\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*) \in X^*$ ($\pi = 1, \dots, p$). При этом каждая составляющая волна, соответствующая некоторому λ^* , «бежит» в своем подпространстве X_π размерности $n - p + 1$, определенном заданием постоянных значений остальных $(p - 1)$ форм. Эта терминология применяется и к решениям систем вида (1.3).

Решение $U \{y = u(x)\}$ системы (1.3) называется p -кратной бегущей волной, если отображение $u: X \rightarrow Y$ есть определенная выше p -кратная бегущая волна.

Существенно следующее свойство бегущих волн. Если решение U с уравнением $y = u(x)$ есть p -кратная бегущая волна и $p < m$, то функции u^k ($k = 1, \dots, m$) функционально зависимы, причем число функциональных связей этих функций не меньше, чем $m - p$. В общем случае можно считать, что таких связей ровно $m - p$. Равносильное выражение этого свойства дается с помощью матрицы Якоби $(\partial_{x^i} u^k(x))$, ранг которой должен быть равен p . Итак, для p -кратных бегущих волн U справедливы соотношения

$$r_*(y|U) = p < \min\{n, m\}. \quad (2.1)$$

Ясно, что соотношения (2.1) являются лишь необходимыми, но не обязательно достаточными для того, чтобы решение U было p -кратной бегущей волной. Поэтому их можно положить в основу обобщения понятия бегущих волн, вводимого следующим определением.

Решение U системы (1.3) называется p -кратной волной, если оно удовлетворяет соотношениям (2.1). При этом 1-кратная волна называется простой волной, 2-кратная волна — двойной волной и т. п.

Другими словами, решение $y = u(x)$ есть p -кратная волна, если существуют такие отображения $\lambda: X \rightarrow R^p$ и $v: R^p \rightarrow Y$, с которыми выполнено равенство $u = v \circ \lambda$ или, в координатной форме,

$$u^k(x) = v^k(\lambda^1(x), \dots, \lambda^p(x)) \quad (k = 1, \dots, m). \quad (2.2)$$

Переменные $\lambda^1, \dots, \lambda^p$ называются параметрами волны.

Итак, достигнутое данным определением обобщение состоит в том, что параметры p -кратной волны, в отличие от p -кратной бегущей волны, уже не обязаны быть линейными формами на пространстве X .

Целью этого параграфа является изучение кратных волн как частично инвариантных решений системы (1.3).

3. Допускаемая группа. Очевидно, что любая система вида (1.3) допускает группу G^{n+1} с алгеброй Ли L^{n+1} , базис операторов которой есть

$$\xi_0 \cdot \partial = x^i \partial_i, \quad \xi_i \cdot \partial = \partial_i, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (3.1)$$

где $\partial_i = \partial_{x^i}$. Здесь $\xi_0 \cdot \partial$ есть оператор растяжения, а $\xi_i \cdot \partial$ — операторы переноса в направлениях координатных осей пространства X . Можно показать, что в общем случае G^{n+1} есть основная группа (см. 5.5) системы (1.3), т. е. что никаких других преобразований пространства Z (принадлежащих однопараметрическим группам) эта система не допускает.

Алгебраическая структура группы G^{n+1} исследуется элементарно. Ясно, что подпространство $L^n \subset L^{n+1}$ с базисом $\{\xi_i\}$ есть абелева подалгебра, которой соответствует подгруппа $G^n \subset G^{n+1}$ всех переносов пространства X . Более того, так как $[\xi_i, \xi_0] = \xi_i$, то L^n — абелев идеал и одновременно производная алгебра. Отсюда следует, что G^n — абелев нормальный делитель в G^{n+1} и что группа G^{n+1} разрешима (см. 13.7). Кроме того, равенство $[\xi_i, \xi_0] = \xi_i$ показывает, что алгебра Ли L^{n+1} (а значит, и группа G^{n+1}) имеет нулевой (единичный) центр.

Как представление в группе преобразований пространства Z , группа G^{n+1} также описывается весьма просто. Фактически она является группой преобразований пространства X , и для ее касательного отображения ξ , заданного формулами (3.1), справедливо равенство $r_*(\xi) = n$. Поэтому группа G^{n+1} транзитивна в X и ее универсальный инвариант в Z есть $y = (y^1, \dots, y^m)$. Как каноническая группа второго рода (см. 16.7), она порождается отображением $x \rightarrow x' = ax + b$ или, в координатах,

$$x'^i = ax^i + b^i \quad (i = 1, \dots, n), \quad (3.2)$$

где групповые параметры a и b^i — вещественные числа.

4. Подгруппы и их инварианты. Для классификации подалгебр алгебры Ли L^{n+1} (а тем самым и подгруппы группы G^{n+1}) любое векторное поле $\xi_p \in L^{n+1}$ представляется его координатами $p = (p^0, p^1, \dots, p^n)$ в базисе (3.1), так что

$$\xi_p = p^0 \xi_0 + p^i \xi_i. \quad (4.1)$$

Если $\xi_q = q^0 \xi_0 + q^i \xi_i$ — другое векторное поле из L^{n+1} , то коммутатор $[\xi_q, \xi_p]$ дается формулой

$$[\xi_q, \xi_p] = (q^i p^0 - q^0 p^i) \xi_i. \quad (4.2)$$

По формуле (4.2) сразу пишется матричное выражение присоединенного отображения (см. 14.1) алгебры Ли L^{n+1} в базисе (3.1):

$$\text{ad}(\xi_p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -p^1 & p^0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p^n & 0 & \dots & p^0 \end{pmatrix}.$$

С помощью этого выражения легко строится группа внутренних автоморфизмов $\text{Int } L^{n+1}$ при использовании алгоритма, изложенного в 14.4. Действие общего автоморфизма $A \in \text{Int } L^{n+1}$ на вектор (4.1) по правилу $A\langle \xi_p \rangle = p'^0 \xi_0 + p'^i \xi_i$ определяется формулами

$$p'^0 = p^0, \quad p'^i = ap^i + b^i p^0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (4.3)$$

где a и b^i — групповые параметры группы $\text{Int } L^{n+1}$. Следует отметить, что поскольку группа G^{n+1} имеет единичный центр, то она должна быть изоморфна группе $\text{Int } L^{n+1}$ (см. 15.7). Этот факт хорошо подтверждается сравнением (3.2) с (4.3).

Все подалгебры $N \subset L^{n+1}$ разбиваются на два типа в зависимости от того, содержат они векторное поле с ненулевой координатой p^0 или нет. *K типу (α) относится любая подалгебра $N \subset L^n$; все операторы этой подалгебры суть операторы переноса ($p^0 = 0$). K типу (β) относятся все прочие подалгебры.*

Теперь полезно заметить, что любое обратимое линейное преобразование V пространства X индуцирует преобразование подобия алгебры L^{n+1} в алгебру операторов того же вида (в новой системе координат). Действительно, если $x' = V\langle x \rangle$ или, в координатах, $x'^i = V^i_j x^j$, то

$$\xi_i \cdot \partial = V^j_i \xi'_j \cdot \partial', \quad \xi_0 \cdot \partial = \xi'_0 \cdot \partial', \quad (4.4)$$

где $\partial' = \partial_{x'}$, и если $\partial_{x'^i} = \partial'_{i'}$, то $\xi'_j \cdot \partial' = \partial'_{j'}$, $\xi'_0 \cdot \partial' = x'^i \partial'_{i'}$. Отсюда, ввиду обратимости матрицы (V^j_i) , в координатах $x' = (x'^1, \dots, x'^n)$ получается снова базис (3.1). Но преобразование $x' = V\langle x \rangle$ есть элемент группы $G(e)$ преобразований эквивалентности системы (1.3) (см. замечание 23.1). Поэтому классификацию подалгебр алгебры Ли L^{n+1} достаточно сделать с точностью до преобразований подобия V .

Полезно заметить, что справедливо разложение $L^{n+1} = N^1(\xi_0) \oplus L^n$, каждая из компонент которого инвариантна относительно любого преобразования подобия V . Это следует из формул (4.4).

Пусть N^{n-p} есть подалгебра типа (α) и ее базис векторных полей есть

$$\xi_\mu = a_\mu^i \xi_i \quad (\mu = 1, \dots, n-p).$$

Тогда $\text{rank}(a_\mu^i) = n-p$ и, очевидно, можно найти такое преобразование подобия V , с которым будет $\xi'_\mu = \xi_\mu$. Следовательно, любая

подалгебра типа (α) характеризуется числом p , где $1 \leq p \leq n-1$, и подобна стандартной подалгебре N_{α}^{n-p} этого типа с базисом

$$\xi_{\mu} \cdot \partial = \partial_{\mu} \quad (\mu = 1, \dots, n-p). \quad (4.5)$$

Пусть N^{n-p} есть подалгебра типа (β) . Тогда в ней найдется такой вектор ξ_q вида (4.1), у которого $q^0 \neq 0$. За счет подходящего преобразования подобия (4.3) можно добиться того, чтобы у преобразованного вектора ξ_q было $q^{i'} = 0$ ($i = 1, \dots, n$). Поэтому можно считать, что подалгебра N^{n-p} содержит вектор ξ_0 . Тогда ее можно разложить в прямую сумму $N^{n-p} = N^1(\xi_0) \oplus N^{n-p-1}$, причем $N^{n-p-1} \subset L^n$. С учетом сделанного выше замечания об инвариантности подпространств $N^1(\xi_0)$ и L^n действие внешнего автоморфизма на N^{n-p} сводится к его действию на компоненту $N^{n-p-1} \subset L^n$. Но N^{n-p-1} есть подалгебра типа (α) и можно использовать предыдущий вывод. Следовательно, любая подалгебра типа (β) характеризуется числом p , где $1 \leq p \leq n-1$, и подобна стандартной подалгебре N_{β}^{n-p} этого типа с базисом

$$\xi_0 \cdot \partial = x' \partial_x, \quad \xi_{\mu} \cdot \partial = \partial_{\mu} \quad (\mu = 1, \dots, n-p-1). \quad (4.6)$$

Каждой из стандартных подалгебр соответствует подгруппа группы G^{n+1} , а именно подалгебре L_{α}^{n-p} — стандартная подгруппа H_{α}^{n-p} и подалгебре L_{β}^{n-p} — стандартная подгруппа H_{β}^{n-p} .

Инварианты найденных стандартных подгрупп (в пространстве X) находятся элементарно. Универсальный инвариант подгруппы H_{α}^{n-p} есть

$$J(x) = (x^{n-p+1}, x^{n-p+2}, \dots, x^n), \quad (4.7)$$

а для подгруппы H_{β}^{n-p} может быть взят таким:

$$J(x) = (x^{n-p}/x^n, x^{n-p+1}/x^n, \dots, x^{n-1}/x^n). \quad (4.8)$$

В обоих случаях размерность пространства инвариантов равна p .

5. Простые волны. В силу определения 23.2 каждая p -кратная волна является частично инвариантным G^{n+1} -решением ранга $\rho = p$. Так как для группы G^{n+1} выполнено равенство $r_{\ast} = n$, то из формул 22(1.1) следует, что $\delta = p$, т. е. дефект этого решения также равен числу p . Пространство инвариантов группы G^{n+1} есть Y . Поэтому наименьшее инвариантное многообразие Φ этой группы, содержащее p -кратную волну, есть p -мерное многообразие в пространстве Y . Это многообразие может быть задано системой из $(n-p)$ уравнений, связывающих переменные y , или параметрически, путем выражения всех y через p параметров волны (см. (2.2)). Параметрическое задание Φ в координатной форме имеет вид

$$y^k = v^k(\lambda^1, \dots, \lambda^p) \quad (k = 1, \dots, m). \quad (5.1)$$

Для отыскания кратных волн надо подставить представление (5.1) в систему (1.3) и исследовать совместность получаемых урав-

нений относительно искомым параметров волны λ . В общем случае такой анализ труден. Ниже рассматриваются более подробно лишь простые и двойные волны.

Простая волна есть частично инвариантное G^{n+1} -решение ранга $r=1$ и дефекта $\delta \leq 1$. Ее параметрическое представление таково:

$$y^k = v^k(\lambda) \quad (k=1, \dots, m). \quad (5.2)$$

В результате подстановки в систему (1.3) получится система уравнений, связывающая искомые функции v^k переменного λ и искомый параметр λ :

$$e_{k\sigma}^i v^{k!} \lambda_{\sigma} = 0 \quad (\sigma=1, \dots, s), \quad (5.3)$$

где штрих обозначает производную ∂_{λ} и $\lambda_{\sigma} = \partial_{x^{\sigma}} \lambda$.

Структура решения системы (5.3) в значительной мере зависит от числа $r_*(e_{k\sigma}^i v^{k!}) = r \leq \min\{n, s\}$, которое определяется не только исходной системой (4.3), но и отображением $v: R \rightarrow R^m$. Например, если $r=n$, то единственным решением будет $\lambda_i = 0$ ($i=1, \dots, n$), т. е. $\lambda = \text{const}$. В дальнейшем этот тривиальный случай исключается и предполагается выполненным условие

$$r_*(e_{k\sigma}^i v^{k!}) = r < n. \quad (5.4)$$

Гиперповерхности $\Lambda \subset X$, на которых $\lambda = \text{const}$, называются **поверхностями уровня** простой волны. Описание всех простых волн дается следующей теоремой.

Теорема. Поверхности уровня простой волны, удовлетворяющей условию (5.4), образованы r -мерными плоскостями, а ее параметр определяется неявно уравнением вида

$$\lambda = f(a(\lambda, x)), \quad (5.5)$$

где f — произвольное отображение $\bar{R}^{n-r} \rightarrow R$ и $a = (a^1, \dots, a^{n-r})$,

$$a^{\tau}(\lambda, x) = a_{\tau}^{\tau}(\lambda) x^{\tau} \quad (\tau=1, \dots, n-r),$$

причем векторы $a^{\tau} = (a_1^{\tau}, \dots, a_n^{\tau})$ образуют полную систему линейно независимых решений системы линейных уравнений

$$e_{k\sigma}^i v^{k!} a_i^{\tau} = 0 \quad (\sigma=1, \dots, s). \quad (5.6)$$

Доказательство. В силу условия (5.4) в системе (5.3) содержится лишь $r \leq s$ линейно независимых уравнений и потому без нарушения общности рассуждения можно считать, что $r=s$. Пусть Λ_0 есть поверхность уровня, соответствующая значению $\lambda = \lambda_0$, и пусть точка $x_0 \in \Lambda_0$. Вводится вспомогательное пространство $T = R^r(t)$, где $t = (t^1, \dots, t^r)$. Утверждается, что для любого $t \in T$ точка x_t с координатами

$$x_t^i = x_0^i + t^{\sigma} e_{k\sigma}^i v^{k!}(\lambda(x_t)) \quad (i=1, \dots, n)$$

также лежит на Λ_0 . Действительно, для каждого $\sigma = 1, \dots, r$ значение $\lambda = \lambda(x_i)$ является единственным решением задачи Коши

$$\partial_{t^\sigma} \lambda = \lambda_i e_{k\sigma}^i v^{k'}(\lambda), \quad \lambda(x_0) = \lambda_0,$$

которая, в силу уравнений (5.3), имеет постоянное решение $\lambda = \lambda_0$. Так как при переменном $t \in T$ точка x_i , ввиду условия (5.4), описывает r -мерную плоскость в X , то поверхность уровня Λ_0 состоит из этих r -мерных плоскостей.

Благодаря условию (5.4) параметры t^σ являются независимыми на Λ_0 и могут быть выражены явно через $x \in \Lambda_0$ с помощью решения системы уравнений $e_{k\sigma}^i v^{k'} a_i^{n-r+\theta} = \delta_\sigma^\theta$ ($\sigma, \theta = 1, \dots, r$), а именно,

$$t^\theta = a_i^{n-r+\theta} (x^i - x_0^i).$$

Пусть векторы a^τ ($\tau = 1, \dots, n-r$) образуют полную систему решений системы (5.6). Тогда все построенные векторы a^j ($j = 1, \dots, n$) в совокупности линейно независимы и в пространстве X можно выбрать в качестве координат переменные $x^{i'j} = a_i^j (x^i - x_0^i)$. В этих координатах, по построению, точки вида $(0, \dots, 0, x^{i'n-r+1}, \dots, x^{i'n})$ принадлежат Λ_0 . Поэтому значение λ определяется только значениями координат $x^{i'\tau} = a_i^\tau x^i$ ($\tau = 1, \dots, n-r$), т. е. необходимо справедливо представление вида (5.5). Тот факт, что функция λ , определяемая неявно уравнением (5.5), является решением системы (5.3), легко проверяется прямым вычислением производных и подстановкой в систему. ■

В приложениях особенно часто встречается случай, когда $r = n-1$. Тогда имеется лишь один вектор $(a_1, \dots, a_n)$ — решение системы (5.6) и представление решения (5.5) может быть заменено таким:

$$a_i(\lambda) x^i = F(\lambda), \quad (5.7)$$

где F — произвольная функция $R \rightarrow R$.

З а м е ч а н и е 1. В случае определенной или переопределенной системы (1.3) (т. е. если $m \leq s$) поверхности уровня простой волны являются характеристиками этой системы. Действительно, в силу уравнений (5.3) ранг матрицы $(e_{k\sigma}^i \lambda_i)$ необходимо меньше числа m .

З а м е ч а н и е 2. Условие (5.4) существования нетривиальных простых волн может не выполняться для произвольного отображения v . Тогда это условие становится требованием, накладываемым на v , и приводит к некоторым уравнениям, которым должно удовлетворять это отображение. Такие уравнения называются *уравнениями простых волн*. Во втором примере 22.8 таким уравнением было уравнение 22 (8.4). Если функции v определяются уравнениями простых волн не полностью, то оставшийся произвол можно использовать для того, чтобы подчинить рассматриваемые простые волны каким-либо дополнительным условиям.

6. Пример волнового уравнения. Волновое уравнение для функции $\varphi: R^3(x, y, t) \rightarrow R$ (индексами обозначены производные $\partial_x \varphi = \varphi_x$ и т. д.)

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = \varphi_{tt} \quad (6.1)$$

равносильно системе уравнений для функций $u = \varphi_x, v = \varphi_y, w = \varphi_t$

$$v_x - u_y = 0, \quad w_x - u_t = 0, \quad w_y - v_t = 0, \quad u_x + v_y - w_t = 0. \quad (6.2)$$

Здесь $n = m = 3, s = 4$. Простые волны удобно искать, выбрав в качестве параметра функцию w . Тогда для функций $w \rightarrow u(w)$ и $w \rightarrow v(w)$ получается следующая система вида (5.3):

$$v'w_x - u'w_y = 0, \quad w_x - u'w_t = 0, \quad w_y - v'w_t = 0, \\ u'w_x + v'w_y - w_t = 0,$$

где штрихом обозначена производная ∂_w . Легко проверить, что при произвольных функциях u и v ранг (5.4) этой системы $r = 3$. Кроме того, $r = 2$, если и только если

$$u'^2 + v'^2 = 1. \quad (6.3)$$

Вектор $a = (a_1, a_2, a_3)$, являющийся решением соответствующей системы (5.6), здесь может быть взят таким: $a_1 = u', a_2 = v', a_3 = 1$. Поэтому параметр простой волны будет определяться уравнением вида (5.7):

$$xu'(w) + yv'(w) + t = f'(w), \quad (6.4)$$

где $f' = \partial_w f$ и f — произвольная функция. Потенциал φ (решение уравнения (5.7)) восстанавливается интегрированием полного дифференциала $d\varphi = u dx + v dy + w dt$ и оказывается таким:

$$\varphi(x, y, t) = xu(w) + yv(w) + tw - f(w). \quad (6.5)$$

Семейство получаемых из (6.3) и (6.4) простых волн — частично инвариантных решений системы (6.2) — зависит от двух произвольных функций f и u , а функция v определяется из (6.3). Имеющийся произвол может быть использован для того, чтобы удовлетворить каким-либо дополнительным условиям (начальным, граничным и т. п.).

7. Двойные волны. *Двойная волна есть частично инвариантное решение ранга $r = 2$ и дефекта $\delta \leq 2$.* Для $n = 1$ двойных волн не может быть вообще, а если $n = 2$, то любое решение — двойная волна. Поэтому имеет смысл искать двойные волны, только если $n > 2$.

Параметрическое представление двойной волны имеет вид

$$y^k = v^k(\lambda, \mu) \quad (k = 1, \dots, m). \quad (7.1)$$

В результате подстановки в систему (1.3) получается система уравнений, связывающая искомые функции v параметров λ, μ

и искомые параметры λ, μ

$$e_{k\sigma}^i v_{\lambda}^k \lambda_i + e_{k\sigma}^i v_{\mu}^k \mu_i = 0 \quad (\sigma = 1, \dots, s), \quad (7.2)$$

где индексы λ и μ обозначают производные ∂_{λ} и ∂_{μ} .

Вообще говоря, система (7.2) является активной. Условия совместности уравнений (7.2) дают новые уравнения относительно искомых λ, μ . Например, если уравнения (7.2) разрешены относительно λ_i и λ_j ($i \neq j$) в виде $\lambda_i = p$, $\lambda_j = q$, то новым будет уравнение

$$\partial_j p = \partial_i q, \quad (7.3)$$

которое необходимо присоединить к системе (7.2). Может случиться, что условия вида (7.3) порождают новые уравнения первого порядка, ввиду чего общее число таких уравнений в получаемой из (5.3) пассивной системе может быть больше, чем s . В общем виде проанализировать всю пассивную систему не представляется возможным. Тем не менее оказывается, что полезную информацию может дать ее подсистема первого порядка. Пусть эта подсистема состоит из N независимых уравнений вида

$$a_v^i(\lambda, \mu) \lambda_i + b_v^i(\lambda, \mu) \mu_i = 0 \quad (v = 1, \dots, N). \quad (7.4)$$

Справедлива следующая теорема о редукции двойных волн.

Т е о р е м а. Если в системе (7.4) число независимых уравнений $N = 2n - 1$, то двойная волна (7.1) есть инвариантное решение относительно некоторой подгруппы $H^{n-1} \subset G^{n+1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как общее число неизвестных λ_i, μ_i равно $2n$, то в условиях теоремы систему (7.4) можно привести к такому виду, когда все эти неизвестные выражены через одну из них, например через λ_1 . Пусть в этой приведенной форме система (7.4) такова ($p_1 = 1$):

$$\lambda_i = p_i(\lambda, \mu) \lambda_1, \quad \mu_i = q_i(\lambda, \mu) \lambda_1 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (7.5)$$

Вначале система (7.5) приводится к некоторому простейшему виду с помощью обратимой замены параметров $(\lambda, \mu) \rightarrow (\bar{\lambda}, \bar{\mu})$, где

$$\bar{\lambda} = \varphi(\lambda, \mu), \quad \bar{\mu} = \psi(\lambda, \mu). \quad (7.6)$$

В результате этого преобразования коэффициенты p, q переходят в

$$\bar{p}_i = \frac{\varphi_{\lambda} p_i + \varphi_{\mu} q_i}{\varphi_{\lambda} + \varphi_{\mu} q_1}, \quad \bar{q}_i = \frac{\psi_{\lambda} p_i + \psi_{\mu} q_i}{\varphi_{\lambda} + \varphi_{\mu} q_1} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (7.7)$$

Эту замену параметров можно использовать для того, чтобы сделать $\bar{q}_1 = 0$. Для этого достаточно в качестве ψ взять решение уравнения $\psi_{\lambda} + \psi_{\mu} q_1 = 0$. Равенство $q_1 = 0$ сохраняется при любых заменах (7.6), если только $\psi_{\lambda} = 0$. С помощью такой замены можно добиться того, чтобы было $\bar{q}_2 = 1$ за счет выбора в качестве φ решения уравнения $\varphi_{\lambda} = \psi_{\mu} q_2$. Одновременное сохранение равенств

$q_1=0$ и $q_2=1$ при заменах (7.6) имеет место, если и только если $\psi_\lambda=0$ и $\varphi_\lambda=\psi_\mu$, т. е. когда

$$\bar{\lambda}=\lambda\psi'(\mu)+\omega(\mu), \quad \bar{\mu}=\psi(\mu). \quad (7.8)$$

При этом формулы преобразования коэффициентов (7.7) принимают вид

$$p_i=p_i+\frac{1}{\psi'}(\lambda\psi''+\omega')q_i, \quad \bar{q}_i=q_i. \quad (7.9)$$

Дальнейшие упрощения связаны с рассмотрением условий совместности уравнений (7.5). Прежде всего, так как $\mu_1=0$ и $\mu_2=\lambda_1$, то $\lambda_{11}=0$. С учетом этого получаются равенства

$$p_{i1}=p_{i\lambda}\lambda_1^2, \quad q_{i\lambda}=0 \quad (i=2, \dots, n). \quad (7.10)$$

Вычисление двумя способами производных λ_{ij} и μ_{ij} ($i \neq j$) в силу уравнений (7.5) и (7.10) приводит к выводу о существовании функций $a(\lambda, \mu)$ и $b(\lambda, \mu)$, с которыми выполнены равенства

$$p_{i\mu}=aq_i, \quad p_{i\lambda}=q_{i\mu}+bq_i \quad (i=2, \dots, n). \quad (7.11)$$

В частности, при $i=2$ эти равенства имеют вид $p_{2\mu}=a$, $p_{2\lambda}=b$, откуда следует соотношение $a_\lambda=b_\mu$. В силу этого соотношения и (7.10) условие совместности уравнений (7.11) сводится к равенству $q_{i\mu\mu}+bq_{i\mu}=0$, приводящему к двум возможностям: (а) функция b зависит только от μ и (б) $q_{i\mu}=0$ ($i=2, \dots, n$), и тогда все $q_i=C_i$ — постоянные.

С л у ч а й (а). Если $b=b(\mu)$, то за счет подходящего преобразования вида (7.8), (7.9) можно добиться того, чтобы было $b=0$. Тогда $a_\lambda=0$ и функция a зависит только от μ . При этом еще одним преобразованием вида (7.8), (7.9) можно добиться и равенства $a=0$. В результате система уравнений (7.10), (7.11) упрощается до следующей:

$$p_{i\mu}=0, \quad p_{i\lambda}=q_{i\mu}, \quad q_{i\lambda}=0 \quad (i=2, \dots, n).$$

Решение этой системы (при каждом i) таково:

$$p_i=\lambda A_i+B_i, \quad q_i=\mu A_i+C_i,$$

где A_i, B_i, C_i — произвольные постоянные. Итак, в случае (а) система (7.5) приводится к следующему простейшему виду:

$$\lambda_i=(\lambda A_i+B_i)\lambda_1, \quad \mu_i=(\mu A_i+C_i)\mu_2, \quad \mu_2=\lambda_1 \quad (i=2, \dots, n), \quad (7.12)$$

где $A_2=0$ и $C_2=1$.

С л у ч а й (б). Если $q_{i\mu}=0$, то $q_i=C_i=\text{const}$ ($i=1, 2, \dots, n$). Кроме того, из равенства $a_\lambda=b_\mu$ следует существование такой функции $h=h(\lambda, \mu)$, что $a=h_\mu$, $b=h_\lambda$. Поэтому система (7.11) оказывается такой:

$$p_{i\mu}=h_\mu C_i, \quad p_{i\lambda}=h_\lambda C_i$$

и интегрируется в виде $p_i = hC_i + D_i$. Итак, в случае (β) система (7.5) приводится к простейшему виду

$$\lambda_i = (h(\lambda, \mu)C_i + D_i)\lambda_1, \quad \mu_i = C_i\lambda_1 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (7.13)$$

где $C_1 = 0$, $D_1 = 1$ и $C_2 = 1$.

Второй этап состоит в преобразовании полученной системы за счет подходящего линейного преобразования пространства X . В случае (α) с учетом того, что $B_1 = 1$ и $C_1 = 0$, используется преобразование $x \rightarrow x$ (суммы по $i = 1, \dots, n$):

$$x^1 = B_j x^j, \quad x^2 = C_j x^j, \quad x^j = x^j \quad (j = 3, \dots, n).$$

В результате этого преобразования система переходит в такую:

$$\lambda_2 = 0, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = \lambda_1, \quad \lambda_j = A_j \lambda_1, \quad \mu_j = A_j \mu_2 \quad (j = 3, \dots, n). \quad (7.14)$$

Далее надо различать два подслучая: (α₁) все $A_j = 0$ ($j = 3, \dots, n$) и (α₂) не все A_j равны нулю.

В подслучае (α₁) общее решение системы (7.14) таково:

$$\lambda = Kx^1 + L, \quad \mu = Kx^2 + M$$

с произвольными постоянными K, L, M , причем $K \neq 0$. С помощью дополнительных преобразований переноса и растяжения (или замены вида (7.6)) это решение приводится к стандартному: $\lambda = x^1$, $\mu = x^2$. Следовательно, λ и μ суть инварианты стандартной (с точностью до нумерации координат) подгруппы $H_{\alpha}^{n-2} \subset G^{n+1}$ с базисом операторов

$$\xi_j \cdot \partial = \partial_j \quad (j = 3, \dots, n). \quad (7.15)$$

В подслучае (α₂), не нарушая общности решения, можно считать, что $A_3 \neq 0$. Используется еще одно линейное преобразование пространства X , а именно,

$$x^1 = x^1, \quad x^2 = x^2, \quad x^3 = A_j x^j, \quad x^j = x^j \quad (j = 4, \dots, n).$$

В результате система (7.14) перейдет в такую:

$$\begin{aligned} \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \lambda \lambda_1; \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_3 = \mu \mu_2; \quad \mu_2 = \lambda_1; \\ \lambda_j = \mu_j = 0 \quad (j = 4, \dots, n). \end{aligned}$$

Решение линейной подсистемы имеет вид

$$\lambda = \lambda(x^1, x^3), \quad \mu = \mu(x^2, x^3),$$

причем в силу уравнения $\mu_2 = \lambda_1$ должно быть выполнено равенство $\mu_2(x^2, x^3) = \lambda_1(x^1, x^3) = \gamma(x^3)$. Поэтому общий вид решения линейной подсистемы таков:

$$\lambda = \gamma(x^3)x^1 + \alpha(x^3), \quad \mu = \gamma(x^3)x^2 + \beta(x^3). \quad (7.16)$$

Подстановка в нелинейные уравнения $\lambda_3 = \lambda\lambda_1$ и $\mu_3 = \mu\mu_2$ приводит к системе (штрихом обозначена производная по x^3)

$$\gamma' = \gamma^2, \quad \alpha' = \gamma\alpha, \quad \beta' = \gamma\beta$$

с общим решением

$$\gamma = \frac{1}{C - x^3}, \quad \alpha = \frac{A}{C - x^3}, \quad \beta = \frac{B}{C - x^3}$$

с произвольными постоянными A, B, C . Подстановка в (7.16) и очевидное дополнительное преобразование переноса приводит это решение к стандартному: $\lambda = x^1/x^3$, $\mu = x^2/x^3$, а это инварианты стандартной подгруппы $H_{\beta}^{n-2} \subset G^{n+1}$ с базисом операторов

$$\xi_0 \cdot \partial = x^i \partial_i, \quad \xi_j \cdot \partial = \partial_j, \quad (j=4, \dots, n). \quad (7.17)$$

В случае (β), когда система (7.5) привелась к (7.13), выполняется линейное преобразование пространства X :

$$x^1 = D_j x^j, \quad x^2 = C_j x^j, \quad x^j = x^j \quad (j=3, \dots, n).$$

В результате (7.13) перейдет в систему

$$\lambda_2 = h\lambda_1; \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = \lambda_1; \quad \lambda_j = \mu_j = 0 \quad (j=3, \dots, n),$$

из которой сразу следует, что $\lambda = \lambda(x^1, x^2)$, $\mu = \mu(x^1, x^2)$. Заменой вида (7.6) это решение приводится к $\lambda = x^1$, $\mu = x^2$, так что λ, μ — инварианты стандартной подгруппы $H_{\alpha}^{n-2} \subset G^{n+1}$ с базисом (7.15). ■

Практическое значение этой теоремы связано с тем, что задача построения инвариантных двойных волн намного проще задачи построения двойных волн с дефектом $\delta > 0$. Поэтому нередуцируемые двойные волны представляют особый интерес. При решении вопроса об их существовании, в процессе формирования условий совместности для параметров двойной волны необходимо накладывать *запрет на редукцию*, т. е. на то, чтобы получалось $N=2n-1$ независимых уравнений вида (7.4). Аналитически этот запрет сводится к требованию, чтобы функции (7.1) удовлетворяли некоторым уравнениям, которые будут добавляться к фактор-системе E/G^{n+1} . Этим и объясняется своеобразие нередуцируемых двойных волн.

8. Пример. Рассматриваются двойные волны для системы (6.1), равносильной волновому уравнению (6.1). Здесь $2n-1=5$ и, согласно теореме 23.7, всякий раз, как для некоторой двойной волны из условий совместности для параметров двойной волны получается пять уравнений вида (7.4), эта двойная волна будет инвариантным решением ранга два относительно группы G^4 . Оказывается, что нередуцируемые двойные волны для системы (6.1) существуют. К этому классу принадлежат, в частности, так

называемые функционально-инвариантные решения волнового уравнения, которые и анализируются ниже.

Решение φ уравнения (6.1) называется функционально-инвариантным, если с любой функцией $F: R \rightarrow R$ композиция $F \circ \varphi$ также есть решение этого уравнения.

Легко устанавливается, что решение φ является функционально-инвариантным, если и только если $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 = \varphi_t^2$, т. е. в обозначениях 3.6 выполнено соотношение $u^2 + v^2 = w^2$. Применительно к системе (6.1) это и означает, что функционально-инвариантное решение есть ее двойная волна (специального вида).

Аналитическое описание этих двойных волн получается наиболее простым, когда в качестве параметров берутся w и θ , причем

$$u = w \cos \theta, \quad v = w \sin \theta. \quad (8.1)$$

В результате подстановки выражений (8.1) в систему (6.1) последняя после небольших тождественных преобразований приводится к виду

$$\begin{aligned} w_x &= w_t \cos \theta - w \theta_y, & w_y &= w_t \sin \theta + w \theta_x; \\ \theta_x &= \theta_t \cos \theta, & \theta_y &= \theta_t \sin \theta. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Условия совместности уравнений (8.2) выполнены тождественно. Поэтому пять уравнений вида (7.4) здесь в общем случае получить нельзя.

Для построения общего решения системы (8.2) вводятся величины

$$\sigma = x \sin \theta - y \cos \theta, \quad \tau = x \cos \theta + y \sin \theta + t, \quad (8.3)$$

с которыми общее решение этой системы дается формулами

$$\theta = f(\tau), \quad w = \frac{g'(\tau)}{1 + \sigma f'(\tau)}, \quad (8.4)$$

где f и g — произвольные функции и штрихом обозначена производная ∂_τ . Соответствующее функционально-инвариантное решение волнового уравнения (6.1) есть $\varphi = g(\tau)$.

З а м е ч а н и е. Система первого порядка, равносильная волновому уравнению в трехмерном пространстве ($n=4$)

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = \varphi_{tt}, \quad (8.5)$$

которая получается для функций $u = \varphi_x$, $v = \varphi_y$, $w = \varphi_z$, $p = \varphi_t$, состоит из семи уравнений. Поэтому и в соответствующей системе (7.4) будет $N = 7 = 2n - 1$ уравнений. Значит, согласно теореме 23.6 любая двойная волна общего характера (т. е. такая, для которой функции v (7.1) произвольны) редуцируется к инвариантному решению.

9. Уравнения газовой динамики. Рассматривается система уравнений адиабатических движений газа 11.1 в двумерном про-

странстве, так что $X=R^3(x, y, t)$ и вектор скорости имеет две компоненты (u, v) . Если вместо плотности ρ (см. 11.1) ввести удельный объем $\tau=1/\rho$, то эта система запишется в виде (индексами обозначены частные производные по соответствующим аргументам)

$$\left. \begin{aligned} u_t + w_x + v u_y + \tau p_x &= 0, \\ v_t + w_y + v v_y + \tau p_y &= 0, \\ \tau_t + u \tau_x + v \tau_y - \tau(u_x + v_y) &= 0, \\ S_t + u S_x + v S_y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

причем функция $\tau = \tau(p, S)$ считается заданной и такой, что $\tau_p \neq 0$.

Решение системы (9.1) называется *изэнтропическим*, если в этом решении энтропия $S = \text{const}$, и называется *изобарическим*, если в нем $p = \text{const}$.

Легко устанавливается известное свойство системы (9.1): *любая не изобарическая простая волна есть изэнтропическое решение*. Возникает вопрос о том, в какой мере это свойство переносится на двойные волны. Ответ дается следующей теоремой, в которой термин «волна общего характера» означает, что функция $\tau(p, S)$ не подчинена никаким специальным ограничениям (произвольная).

Т е о р е м а. *Не изобарическая двойная волна общего характера, имеющая дефект инвариантности $\delta=2$, изэнтропична.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть двойная волна не изэнтропична. Тогда в качестве параметров двойной волны общего характера можно взять переменные p и S , т. е. положить

$$u = u(p, S), \quad v = v(p, S), \quad \tau = \tau(p, S), \quad (9.2)$$

где функция $\tau(p, S)$ задана заранее. В этом представлении утверждение теоремы равносильно тому, что двойная волна общего характера непременно должна быть редуцируема.

Для установления этого факта рассматривается вытекающая из (9.1) и (9.2) система вида (7.2):

$$\left. \begin{aligned} u_p p_t + (\tau + w_p) p_x + v u_p p_y &= 0, \\ v_p p_t + w_p p_x + (\tau + v v_p) p_y &= 0, \\ \tau_p p_t + (u \tau_p - w_p) p_x + (v \tau_p - w_p) p_y &= u S_x + v S_y, \\ S_t + u S_x + v S_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

Если предположить, что двойная волна не редуцируема, то, так как здесь $n=3$ и $2n-1=5$, вступает в силу запрет на редукцию, диктуемый теоремой 23.7: любое условие совместности уравнений (9.3), имеющее вид линейного соотношения между производными первого порядка от p и S , должно быть алгебраическим следствием уравнений (9.3) (*запрет пятого уравнения*).

Например, первые два уравнения (9.3) можно записать в виде

$$p_x = Ap_t, \quad p_y = Bp_t$$

и получить условие совместности

$$\partial_x(Bp_t) = \partial_y(Ap_t),$$

которое после упрощения в силу уравнений (9.3) оказывается таким:

$$(\tau u_{ps} - u_p \tau_s - u_p^2 u_s - u_p v_p v_s) S_x - (\tau v_{ps} - v_p \tau_s - u_p v_p u_s - v_p^2 v_s) S_y = 0.$$

Запрет пятого уравнения требует обращения в нуль обоих коэффициентов при S_x и S_y , т. е. выполнения соотношений

$$\tau u_{ps} = u_p(\tau_s + u_p u_s + v_p v_s), \quad \tau v_{ps} = v_p(\tau_s + u_p u_s + v_p v_s). \quad (9.4)$$

Для функции p при заданной S из первых трех уравнений (9.3) получаются еще два условия совместности, которые содержат первые и вторые производные от функции S . Из них с помощью четвертого уравнения (9.3) все вторые производные от S могут быть исключены, в результате чего остается одно нетривиальное уравнение, связывающее S_x и S_y . Запрет пятого уравнения дает еще два соотношения между функциями (9.2), одно из которых не выполняется тождественно в силу (9.4). Но тогда функции u , v , τ должны удовлетворять системе из трех дифференциальных уравнений и функция τ не может быть произвольной. Это означает, что рассматриваемая двойная волна не является волной общего характера. Поэтому для волн общего характера запрет пятого уравнения не может быть выполнен, следовательно, она редуцируема. ■

Следует заметить, что существуют изобарические двойные волны общего характера с дефектом $\delta=2$. Кроме того, для некоторых специального вида функций $\tau(p, S)$ существуют не изобарические и не изэнтропические двойные волны, для которых $\delta=2$. Что же касается двойных волн с дефектом $\delta < 2$, то все они могут быть найдены как частично инвариантные решения ранга $p=2$ относительно однопараметрических или двухпараметрических подгрупп группы G^4 (с базисом операторов 23 (3.1) при $n=3$).

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ VI

Понятие частично инвариантного решения впервые было введено в II [4] и изложено также в [1]. На произвольные многообразия оно распространено в [2], где предложен термин «дефект инвариантности». Там же поставлена и задача о редукции частично инвариантных многообразий, которая рассматривалась также в [3]. Поиск частично инвариантных решений конкретных уравнений осуществлялся в работах [4]—[9]. Начало систематическому изучению понятия «бегущих волн» положено в работе [10].

Функционально инвариантные решения волнового уравнения были найдены в [11]. Полное доказательство теоремы 23.7 о редукции двойных волн здесь излагается впервые.

- [1] Овсянников Л. В. Ovsyannikov L. V. Partly invariant solutions of the equations admitting a group. — Proc. 11-th Int. Congr. Appl. Mech., Munich (1964), 868—870.
- [2] Овсянников Л. В. Частичная инвариантность. — ДАН СССР 186, № 1 (1969), 22—25.
- [3] Бытев В. О. К задаче о редукции. — В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 5 (1970), Новосибирск, 146—148.
- [4] Ибрагимов Н. Х. Обобщенные движения в римановых пространствах. — ДАН СССР 178, № 1 (1968), 27—30.
- [5] Ибрагимов Н. Х. Группы обобщенных движений. — ДАН СССР 187, № 1 (1969), 25—28.
- [6] Меньшиков В. М. Решения уравнений двумерной газовой динамики типа простых волн. — Ж. прикл. мех. и техн. физ. № 3 (1969), 129—134.
- [7] Меньшиков В. М. К теории частично инвариантных решений дифференциальных уравнений. — В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 11 (1972), Новосибирск, 82—93.
- [8] Пухначев В. В. Неустановившиеся движения вязкой жидкости со свободной границей, описываемые частично инвариантными решениями уравнений Навье—Стокса. — В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 10 (1972), Новосибирск, 125—137.
- [9] Вережанина Л. И. Об одном решении уравнений пространственного нестационарного пограничного слоя. — Вестн. Ленингр. ун-та, вып. 2, № 7 (1974), 102—106.
- [10] Яненко Н. Н. Бегущие волны системы квазилинейных уравнений. — ДАН СССР, 109, № 1 (1956), 44—47.
- [11] Смирнов В. И., Соболев С. Л. Новый метод решения плоской задачи упругих колебаний. — Труды сейсмологического института, вып. 20 (1932), 1—37.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ

Настоящая глава посвящена вопросам теории и приложений дифференциальных инвариантов данной группы Ли преобразований, которая может быть и бесконечной. Понятие дифференциального инварианта уже встречалось в 17.6: этим термином называют инвариант продолженной группы. Через дифференциальные инварианты записываются дифференциальные уравнения, допускающие данную группу, с их помощью конструируются и классифицируются такие уравнения, а также организуется специальное преобразование дифференциального уравнения — так называемое групповое расслоение.

Центральной теоремой этой главы является теорема 24.4 о конечности базиса дифференциальных инвариантов произвольной группы Ли, а также ее обобщение 24.8 для бесконечных групп. В предлагаемом варианте эта теорема Тресса доказывается полностью на инфинитезимальном языке с помощью операторов инвариантного дифференцирования.

Уравнение E называется *автоморфным* относительно данной группы G , если все его решения находятся на орбите одного из них. Другими словами, из одного данного решения U можно получить все решения путем применения к U преобразований группы G . Классические задачи построения и классификации автоморфных систем дают превосходный пример приложения общей теории и играют важную роль в вопросах инвариантного преобразования дифференциальных уравнений.

Постановка задачи о групповом расслоении данного дифференциального уравнения E с помощью допускаемой им группы G восходит к С. Ли.

Эта задача была полностью решена в начале нашего столетия и затем прочно забыта. Здесь ее решение приведено в связи с тем интересом, который наметился в последние годы к вопросам изучения дифференциальных уравнений математической физики и механики методами группового анализа. Кроме того, эта задача дает хороший повод для того, чтобы обратить внимание читателя на не разработанную область исследования дифференциально-инвариантных решений.

§ 24. Общая теория

1. Предварительные соображения. Результаты, изложенные в главах I, V и VI, связаны с понятием дифференциальных инвариантов группы G^r преобразований пространства $Z = X \times Y$. Согласно 17.6 этим термином называются инварианты продолженных групп G^r для $x = 1, 2, \dots$. Важность этого понятия обусловлена

тем, что через дифференциальные инварианты записываются дифференциальные уравнения, допускающие группу G^r (теорема о представлении 18.7). С этим фактом связана постановка некоторых новых задач. К их числу относится, например, задача о построении дифференциальных уравнений, допускающих наперед заданную группу G^r , которая должна решаться на основе предварительного знания дифференциальных инвариантов этой группы.

Настоящий параграф посвящен изучению функционально-алгебраической структуры совокупности всех дифференциальных инвариантов данной группы G^r . Основной вопрос заключается в том, чтобы выяснить возможность выделения некоторого минимального количества дифференциальных инвариантов, через которые можно было бы выразить все остальные с помощью определенных операций.

Существенно, что для любой группы G^r дифференциальные инварианты достаточно высокого порядка всегда существуют (см. 17.6). При этом каждый дифференциальный инвариант порядка x , как инвариант x -го продолжения G^r группы G^r , является также инвариантом и любого продолжения G^r при $\sigma > 0$. Поэтому

для каждого $x \geq 0$ универсальный дифференциальный инвариант порядка $x+1$ получается расширением универсального дифференциального инварианта порядка x , происходящим за счет расширения пространства представления Z_x до Z_{x+1} .

Пусть $\zeta = (\xi, \eta)$ — касательное отображение группы $G^r(\zeta)$. В дальнейшем универсальный инвариант группы $G^r(\zeta)$ обозначается через J , а универсальный инвариант продолженной группы $G^r(\zeta) = G^r(\zeta)$ — через J_x (при этом $J_0 = J$). Для отыскания размерности пространства Z_x дифференциальных инвариантов порядка не больше x (в которое действует J_x) вводятся в рассмотрение общие ранги $r_x = r_x(\zeta)$, которые образуют неубывающую ограниченную последовательность

$$r_0 \leq r_1 \leq \dots \leq r_x \leq r_{x+1} \leq \dots \leq r. \quad (1.1)$$

Кроме того, простым подсчетом находится размерность $v_x = \dim Z_x$ продолженного пространства. Она дается формулой

$$v_x = n + m \binom{n+x}{n} \quad (x=0, 1, 2, \dots). \quad (1.2)$$

Следовательно (см. 17.3), размерность пространства инвариантов равна

$$\dim \bar{Z}_x = v_x - r_x \quad (x=0, 1, 2, \dots). \quad (1.3)$$

В силу ограниченности последовательность (1.1) непременно стабилизируется, т. е. $r_x = r_{x+1} = r_{x+2} = \dots$ для некоторого $x \geq 0$. Из общих соображений, основанных на том, что число существенных параметров в порождающей группу $G^r(h)$ отображений $(z, a) \rightarrow h(z, a)$ равно ее порядку r (см. 21.6), ясно, что значение r_x , на котором наступает стабилизация, должно быть равно r . Ниже дается прямое доказательство этого факта.

Лемма. Если $r_x = r_{x+1} = r_{x+2}$, то $r_x = r$.

Доказательство. Продолженные векторные поля ζ_x имеют следующую структуру (см. 4.8):

$$\zeta_x = (\xi_x, \eta_x, \eta_{x+1}, \dots, \eta_x) \quad (\alpha = 1, \dots, r), \quad (1.4)$$

причем η_{α} получаются по формулам продолжения

$$\eta_{\alpha} = D\eta_{\alpha} - y \cdot D\xi_{\alpha} \quad (\sigma = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.5)$$

где D — оператор полного дифференцирования.

Пусть $r_x = r_{x+1} < r$. Последнее неравенство означает, что векторные поля ζ_{x+1} линейно связаны, причем число независимых линейных связей равно $r - r_x$. Без нарушения общности рассмотрения можно считать, что линейные связи имеют вид (индекс ν пробегает значения $1, \dots, \mu = r_x$, а индекс τ — значения $1, \dots, r - r_x$)

$$\zeta_{\mu+\tau} = \varphi_{\tau}^{\nu} \zeta_{\nu}, \quad (\tau = 1, \dots, r - \mu)$$

с некоторыми отображениями $\varphi_{\tau}^{\nu}: Z_x \rightarrow R$. В силу (1.4) это означает, что выполнены равенства

$$\xi_{\mu+\tau} = \varphi_{\tau}^{\nu} \xi_{\nu}, \quad \eta_{\mu+\tau} = \varphi_{\tau}^{\nu} \eta_{\nu}, \quad \eta_{\mu+\tau} = \varphi_{\tau}^{\nu} \eta_{\nu}, \quad (\sigma = 1, \dots, x). \quad (1.6)$$

С теми же коэффициентами φ_{τ}^{ν} должны быть выполнены равенства

$$\eta_{\mu+\tau} = \varphi_{\tau}^{\nu} \eta_{\nu}, \quad (\tau = 1, \dots, r - \mu),$$

так как в противном случае было бы $r_x < r_{x+1}$. В силу (1.5) и (1.6) эти равенства приводятся к следующим:

$$D\varphi_{\tau}^{\nu} \cdot \eta_{\nu} = y \cdot D\varphi_{\tau}^{\nu} \cdot \xi_{\nu}, \quad (\sigma = 0, 1, \dots, x; \tau = 1, \dots, r - \mu). \quad (1.7)$$

Но для отображения $\varphi_{\tau}^{\nu}: Z_x \rightarrow R$ справедлива формула

$$D\varphi_{\tau}^{\nu} = D\varphi_{\tau}^{\nu} = D\varphi_{\tau}^{\nu} + y \cdot \partial_{\mu} \varphi_{\tau}^{\nu},$$

где $w = y$. Теперь видно, что во все равенства (1.7) вектор y входит только там, где он выписан явно. Поэтому равенства (1.7) легко расщепляются относительно переменного y и порождают следующую систему соотношений:

$$\left. \begin{aligned} p_{\tau}^{\sigma} \cdot \xi_{\sigma} &= 0, \\ p_{\tau}^{\sigma} \cdot \eta_{\sigma} &= 0, \\ p_{\tau}^{\sigma} \cdot \eta_{\sigma} &= A_{\tau}^{\sigma} \delta_w^{\sigma} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} q_{\tau}^{\sigma} \cdot \xi_{\sigma} &= A_{\tau}^{\sigma} \delta_w^{\sigma}, \\ q_{\tau}^{\sigma} \cdot \eta_{\sigma} &= y \cdot A_{\tau}^{\sigma}, \\ q_{\tau}^{\sigma} \cdot \eta_{\sigma} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\sigma = 0, 1, \dots, x-1), \quad (1.8)$$

где $p_{\tau}^{\sigma} = \partial_w \varphi_{\tau}^{\sigma}$ и $q_{\tau}^{\sigma} = D_{x-1} \varphi_{\tau}^{\sigma}$ с некоторыми отображениями $A_{\tau}: Z_x \rightarrow R$

Символами δ_w^{σ} и δ_x^{σ} обозначены тождественные отображения соответственно пространств R^n и Y_x .

Итак, система соотношений (1.8) есть следствие того, что $r_x = r_{x+1} < r$. Если также $r_{x+1} = r_{x+2}$, то выполняется аналогичная система соотношений с заменой x на $x+1$ и отображений A_{τ} некоторыми отображениями B_{τ} . Но тогда из (1.8) следует, что $A_{\tau} = 0$ ($\tau = 1, \dots, r-\mu$) и на самом деле система (1.8) является однородной относительно величин p_{τ}^{σ} и q_{τ}^{σ} . Так как $r_{*x}(\zeta) = r_x = \mu$, то единственное решение этой системы — нулевое, т. е. $p_{\tau}^{\sigma} = q_{\tau}^{\sigma} = 0$ или

$$\partial_w \varphi_{\tau}^{\sigma} = 0, \quad D_{x-1} \varphi_{\tau}^{\sigma} = 0 \quad (w = y).$$

Из этих равенств следует, что

$$\partial_x \varphi_{\tau}^{\sigma} = 0, \quad \partial_y \varphi_{\tau}^{\sigma} = 0, \quad \partial_{\sigma} \varphi_{\tau}^{\sigma} = 0 \quad (\sigma = 1, \dots, x),$$

т. е. все коэффициенты φ_{τ}^{σ} суть постоянные. Но существование линейных связей векторных полей ζ_{α} с постоянными коэффициентами противоречит факту линейной независимости этих полей. ■

2. Инвариантное дифференцирование. Рассматриваются векторные поля δ на продолженном пространстве Z_{∞} и образованные с их помощью линейные дифференциальные операторы $\delta \cdot \partial$. Каждой группе $G^r(\zeta)$ сопоставляются операторы этого вида, выделяемые следующим определением.

Оператор $\delta \cdot \partial$ называется оператором инвариантного дифференцирования (группы $G^r(\zeta)$), если для любого дифференциального инварианта F группы $G^r(\zeta)$ отображение $(\delta \cdot \partial)F$ также является дифференциальным инвариантом этой группы.

Можно сказать, что совокупность всех скалярных дифференциальных инвариантов группы $G^r(\zeta)$ (включая константы $c \in R$) образует алгебраическое поле. Поэтому указанная совокупность будет называться *полем инвариантов группы $G^r(\zeta)$* . Справедливо следующее утверждение.

Лемма. Множество операторов инвариантного дифференцирования группы $G^r(\zeta)$ является алгеброй Ли над полем инвариантов этой группы.

Доказательство. Очевидно, что операторы инвариантного дифференцирования образуют векторное пространство над полем инвариантов группы $G^r(\zeta)$. Кроме того, если даны два таких оператора, $\delta_1 \cdot \partial$ и $\delta_2 \cdot \partial$, то для любого дифференциального инварианта F группы $G^r(\zeta)$ ее дифференциальными инвариантами являются $(\delta_1 \cdot \partial)F$ и $(\delta_2 \cdot \partial)F$. Поэтому

$$(\delta_1 \cdot \partial) \circ (\delta_2 \cdot \partial) F - (\delta_2 \cdot \partial) \circ (\delta_1 \cdot \partial) F = ([\delta_1, \delta_2] \cdot \partial) F$$

также есть дифференциальный инвариант группы $G^r(\zeta)$. ■

Замечание. Любой оператор $\delta \cdot \partial$, который коммутирует с каждым оператором $\zeta \cdot \partial$ алгебры Ли группы $G^r(\zeta)$ (т. е. $[\zeta, \delta] = 0$), является оператором инвариантного дифференцирования.

Действительно, если

$$(\zeta \cdot \partial) \circ (\delta \cdot \partial) = (\delta \cdot \partial) \circ (\zeta \cdot \partial),$$

то $(\zeta \cdot \partial)((\delta \cdot \partial)F) = 0$ для любого дифференциального инварианта F , следовательно, $(\delta \cdot \partial)F$ — инвариант группы $G^r(\zeta)$ в силу критерия 17 (1.3).

Теорема. Для любой группы $G^r(\zeta)$ преобразований пространства $Z = X \times Y$ существуют $n = \dim X$ операторов инвариантного дифференцирования, линейно независимых над полем инвариантов этой группы.

Доказательство. Пусть число $k \geq 0$ выбрано так, чтобы $r_k = r$. Рассматривается оператор полного дифференцирования D (см. 4.3) и утверждается, что существуют такие ненулевые отображения $\lambda: Z_k \rightarrow R^n$, с которыми оператор $\lambda \cdot D$ коммутирует с любым оператором $\zeta \cdot \partial$. Для доказательства этого факта вычисляется коммутатор $[\lambda \cdot D, \zeta \cdot \partial]$ с помощью стандартного коммутатора 4(9.3):

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot D) \circ (\zeta \cdot \partial) - (\zeta \cdot \partial) \circ (\lambda \cdot D) &= \lambda \cdot (D \circ (\zeta \cdot \partial) - (\zeta \cdot \partial) \circ D) - \\ &- ((\zeta \cdot \partial) \lambda) \cdot D = ((\lambda \cdot D) \zeta - (\zeta \cdot \partial) \lambda) \cdot D. \end{aligned}$$

В силу этого равенства отображение λ обладает требуемым свойством, если и только если для любого базисного оператора $\zeta \cdot \partial$

алгебры Ли $L^r(\zeta)$.

$$(\zeta_\alpha \cdot \partial)_\lambda = (\lambda \cdot D) \xi_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, r) \quad (2.1)$$

и дело сводится к доказательству существования решения этой системы уравнений относительно неизвестного λ . Здесь удобно искать λ в неявной форме, задавая его уравнением вида

$$\varphi(z, \lambda) = 0 \quad (2.2)$$

с помощью отображения $\varphi: Z_k \times R^n \rightarrow R^n$, удовлетворяющего условию $r_*(\partial_\lambda \varphi) = n$. Применение оператора $\zeta_\alpha \cdot \partial$ к тождеству $\varphi(z, \lambda(z)) = 0$ и учет предыдущего условия показывает, что система уравнений (2.1) равносильна системе

$$(\zeta_\alpha \cdot \partial + (\lambda \cdot D) \xi_\alpha \cdot \partial_\lambda) \varphi = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, r). \quad (2.3)$$

Другими словами, отображение φ должно быть инвариантом семейства $\{\bar{\zeta}_\alpha\}$ векторных полей $\bar{\zeta}_\alpha = (\zeta_\alpha, (\lambda \cdot D) \xi_\alpha)$ на пространстве $Z_k \times R^n$.

Для любого векторного поля $\zeta = (\xi, \eta)$ удобно обозначить $\xi = \zeta_x$. Тогда прямым вычислением проверяется равенство

$$[\bar{\zeta}_\alpha, \bar{\zeta}_\beta] = ([\zeta_\alpha, \zeta_\beta], (\lambda \cdot D)[\zeta_\alpha, \zeta_\beta]_x),$$

показывающее, что семейство $\{\bar{\zeta}_\alpha\}$ — полное.

В силу равенства $r_k = r$ также $r_*(\{\bar{\zeta}_\alpha\}) = r$. Поэтому универсальный инвариант J семейства векторных полей $\{\bar{\zeta}_\alpha\}$ (существование которого гарантируется теоремой 17.2) должен быть отображением в пространство $\bar{Z}_k \times R^n$ и может быть представлен в виде $J = (J, J')$, где $J': Z_k \times R^n \rightarrow R^n$ и $r_*(\partial_\lambda J') = n$. С помощью J' уравнение (2.2) может быть взято в виде

$$J'(z, \lambda) = c \quad (2.4)$$

с произвольным вектором $c \in R^n$. По построению каждый вектор λ , определенный из (2.4) с некоторым c , есть решение системы (2.3) и дает оператор $\lambda \cdot D$, коммутирующий с любым оператором $\zeta \cdot \partial$,

т. е., согласно предыдущему замечанию, оператор инвариантного дифференцирования. Ввиду того, что $r_*(\partial_\lambda J') = n$, всегда можно выбрать n таких векторов c , с которыми получаемые по формуле (2.4) операторы $\lambda \cdot D$ будут линейно независимы над полем инвариантов, ■

Полезно заметить, что если векторы $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — независимые решения системы (2.1) и $\Phi^1, \dots, \Phi^n$ — любые дифференциальные инварианты $Z_k \rightarrow R$, то вектор

$$\lambda = \Phi^i \lambda_i \quad (2.5)$$

тоже есть решение этой системы. Более того, в силу линейности системы (2.1) формула (2.5) является представлением ее общего решения.

3. Примеры. В приводимых ниже примерах $X = R^2(x^1, x^2)$, $Y = R(y)$. Используются обозначения $\partial_1 = \partial_{x^1}$, $\partial_2 = \partial_{x^2}$, а также $y_1 = \partial_1 y$, $y_2 = \partial_2 y$, $y_{11} = \partial_1^2 y$ и т. д. Оператор полного дифференцирования имеет две компоненты $D = (D_1, D_2)$, где

$$D_i = \partial_i + y_i \partial_y + y_{i1} \partial_{y_1} + y_{i2} \partial_{y_2} + \dots \quad (i = 1, 2).$$

Операторы инвариантного дифференцирования ищутся в виде

$$\delta \cdot D = \lambda D_1 + \mu D_2.$$

(а) Группа G^4 с базисом алгебры Ли операторов

$$\zeta_1 \cdot \partial = \partial_1, \quad \zeta_2 \cdot \partial = \partial_2, \quad \zeta_3 \cdot \partial = x^1 \partial_1 + x^2 \partial_2, \quad \zeta_4 \cdot \partial = x^2 \partial_1 - x^1 \partial_2.$$

Здесь $r_0 = 2$, а $v_0 = n + m = 3$, в силу чего группа имеет один скалярный инвариант, а именно $J = y$. После первого продолжения получается группа G^4_1 , для которой $r_1 = 4$. Так как $v_1 = 5$, то G^4_1 имеет тот же инвариант $J = y$ и никаких других (независимых от y). Соответствующая система операторов (2.3) такова (здесь $\bar{\partial} = (\partial, \partial_\lambda, \partial_\mu)$):

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}_1 \cdot \bar{\partial} &= \partial_1, & \bar{\zeta}_2 \cdot \bar{\partial} &= \partial_2, & \bar{\zeta}_3 \cdot \bar{\partial} &= \zeta_3 \cdot \partial - y_1 \partial_{y_1} - y_2 \partial_{y_2} + \lambda \partial_\lambda + \mu \partial_\mu, \\ \bar{\zeta}_4 \cdot \bar{\partial} &= \zeta_4 \cdot \partial - y_2 \partial_{y_1} + y_1 \partial_{y_2} + \mu \partial_\lambda - \lambda \partial_\mu. \end{aligned}$$

Универсальный инвариант этой системы операторов может быть взят в виде $\bar{J} = (y, p^2, \varphi)$, где

$$p^2 = (\lambda^2 + \mu^2)(y_1^2 + y_2^2), \quad \varphi = \arctg \frac{\mu}{\lambda} + \arctg \frac{y_1}{y_2}.$$

Отсюда легко находятся λ и μ :

$$\begin{aligned} \lambda &= pq^{-1} \cos\left(\varphi - \arctg \frac{y_1}{y_2}\right), & \mu &= pq^{-1} \sin\left(\varphi - \arctg \frac{y_1}{y_2}\right), \\ q &= \sqrt{y_1^2 + y_2^2}. \end{aligned}$$

В итоге получается множество операторов инвариантного дифференцирования, когда в качестве p и φ берутся любые функции от y . В частности, выбор $(p, \varphi) = (1, 0)$ или $(1, \pi/2)$ дает два

независимых оператора инвариантного дифференцирования:

$$\delta_1 \cdot \partial = q^{-2}(y_1 D_1 + y_2 D_2), \quad \delta_2 \cdot \partial = q^{-2}(y_2 D_1 - y_1 D_2). \quad (3.1)$$

(β) Группа G^4 с базисом алгебры Ли операторов

$$\zeta_1 \cdot \partial = \partial_1, \quad \zeta_2 \cdot \partial = \partial_2, \quad \zeta_3 \cdot \partial = \partial_y, \quad \zeta_4 \cdot \partial = x^1 \partial_1 + x^2 \partial_2 + y \partial_y.$$

Здесь $r_0 = 3$ и после первого продолжения получается также $r_1 = 3$. Универсальный инвариант группы G^4 есть $J = (y_1, y_2)$. Соответствующая система (2.3), построенная для первого продолжения, дает еще только один скалярный инвариант λ/μ , что не позволяет найти операторы инвариантного дифференцирования. После второго продолжения получается $r_2 = 4$, $v_2 = 8$ и легко находится универсальный инвариант группы G^4 в виде $J = (y_1, y_2, y_{12}/y_{11}, y_{22}/y_{11})$.

Соответствующая система операторов (2.3) здесь такова:

$$\bar{\zeta}_1 \cdot \bar{\partial} = \partial_1, \quad \bar{\zeta}_2 \cdot \bar{\partial} = \partial_2, \quad \bar{\zeta}_3 \cdot \bar{\partial} = \partial_y, \\ \bar{\zeta}_4 \cdot \bar{\partial} = \zeta_4 \cdot \partial - y_{11} \partial_{y_{11}} - y_{12} \partial_{y_{12}} - y_{22} \partial_{y_{22}} + \lambda \partial_\lambda + \mu \partial_\mu.$$

Компоненту J' (см. (2.4)) универсального инварианта этой системы операторов можно взять в виде $J' = (\lambda y_{11}, \mu y_{11})$. Если положить $\lambda y_{11} = p$, $\mu y_{11} = q$, то выбор $(p, q) = (1, 0)$ или $(0, 1)$ дает два независимых оператора инвариантного дифференцирования:

$$\delta_1 \cdot \partial = y_{11}^{-1} D_1, \quad \delta_2 \cdot \partial = y_{11}^{-1} D_2. \quad (3.2)$$

4. Базис инвариантов. Пусть $J: Z_\infty \rightarrow \bar{Z}_\infty$ есть универсальный инвариант неограниченно продолженной группы G^r . Пространство $\bar{Z}_\infty$ можно представить в виде произведения $\bar{Z}_\infty = \bar{Z} \times \bar{Y}_1 \times \bar{Y}_2 \times \dots$, где каждый сомножитель $\bar{Y}_k$ является пространством дифференциальных инвариантов порядка $k > 0$ (пространством инвариантов порядка нуль является $\bar{Z}$). Соответственно этому представлению универсальный инвариант J может быть представлен его компонентами в каждом сомножителе:

$$J = (J, J'_1, J'_2, \dots). \quad (4.1)$$

При этом J'_k является универсальным дифференциальным инвариантом порядка k в следующем смысле: для любого дифференциального инварианта $F: Z_k \rightarrow P$ порядка k найдется такое отображение $\Phi: \bar{Z}_k = \bar{Z}_{k-1} \times \bar{Y}_k \rightarrow P$, что с частным отображением $\Phi_M: \bar{Y}_k \rightarrow P$ (где $M = J$) справедливо представление $F = \Phi_M \circ J'_k$.

В силу леммы 24.1, начиная с некоторого k , необходимо должно быть $\bar{Y}_k = Y_k$. Поэтому для достаточно большого k универсальный

дифференциальный инвариант J'_k может рассматриваться как отображение $Z_k \rightarrow Y_k$, причем если положить $w = y$, то $r_*(\partial_w J'_k) = \dim Y_k = v_k - v_{k-1}$ (см. (1.2)). При этом «достаточно большое k » означает любое $k > x$, где x — наименьшее число, для которого $r_x = r$ в последовательности (1.1).

Пусть λ означает набор $\{\lambda_i\}$ линейно независимых над полем инвариантов векторных полей $\lambda_i: Z_x \rightarrow R^n$ ($i = 1, \dots, n$), с которыми $\lambda_i \cdot D$ являются операторами инвариантного дифференцирования (существование такого набора гарантируется теоремой 24.2), и пусть $\lambda \cdot D = \{\lambda_i \cdot D\}$.

Лемма. Если $k > x$ и J'_k — универсальный дифференциальный инвариант порядка k , то $(\lambda \cdot D) J'_k$ есть универсальный дифференциальный инвариант порядка $k+1$.

Доказательство. Из теоремы 24.2 следует, что $(\lambda \cdot D) J'_k$ есть инвариант. Кроме того, так как λ зависит только от вектора пространства Z_x и оператор D действует из Z_k в Z_{k+1} , то этот инвариант имеет порядок $k+1$. Для доказательства его универсальности достаточно установить равенство

$$r_*(\partial_w((\lambda \cdot D) J'_k)) = \dim Y_{k+1} \quad (v = y), \quad (4.2)$$

означающее, что образ при отображении $(\lambda \cdot D) J'_k: Z_{k+1} \rightarrow Y_{k+1}$ содержит открытое множество $U \subset Y_{k+1}$. Действительно, тогда на U можно выразить через $(\lambda \cdot D) J'_k$ вектор y , а тем самым и любой инвариант порядка $k+1$ (с привлечением инвариантов порядка $\leq k$).

Для установления равенства (4.2) надо заметить, что с точки зрения действия на J'_k оператор $\lambda \cdot D$ можно заменить оператором

$$\lambda \cdot D = \lambda \cdot D_{k-1} + \lambda \cdot y \cdot \partial_w \quad (w = y).$$

Поэтому

$$(\lambda \cdot D) J'_k = (\lambda \cdot D_{k-1}) J'_k + \lambda \cdot y \cdot \partial_w J'_k,$$

и если положить $v = y$, то с любым вектором $a \in Y_{k+1}$ будет

$$\partial_w((\lambda \cdot D) J'_k) \langle a \rangle = \lambda \cdot a \cdot \partial_w J'_k.$$

Рассмотрение равенства $\lambda \cdot a \cdot \partial_w J'_k = b$, как уравнения относительно вектора a , показывает, что оно имеет единственное решение для любого $b \in Y_{k+1}$ в силу обратимости линейных отображений $\lambda(z): R^n \rightarrow R^n$ и $\partial_w J'_k(z): Y_k \rightarrow Y_k$, а именно, $a = \lambda^{-1} \cdot b \cdot (\partial_w J'_k)^{-1}$.

Поэтому линейное отображение $\partial_w((\lambda \cdot D) J'_k)(z): Y_{k+1} \rightarrow Y_{k+1}$ также обратимо, откуда и следует равенство (4.2). ■

В 3.6 уже говорилось о функциональном базисе инвариантов (порядка нуль). Теперь это понятие можно распространить на со-

вокупность всех дифференциальных инвариантов данной группы. Ясно, что для получения конечного базиса здесь нельзя ограничиться только функциональной операцией, т. е. переходом от инварианта $F: Z_k \rightarrow P$ с помощью отображения $\Phi: P \rightarrow Q$ к инварианту $\Phi \circ F$, так как при этом порядок инварианта сохраняется. Однако добавление операций инвариантного дифференцирования повышает порядок инварианта и этого оказывается достаточным для установления существования базиса.

Теорема. Для любой группы $G^r(\zeta)$ существует конечный базис дифференциальных инвариантов, т. е. такой конечный набор скалярных дифференциальных инвариантов, что любой дифференциальный инвариант этой группы получается из инвариантов базиса с помощью конечного числа функциональных операций и операций инвариантного дифференцирования.

Доказательство. Пусть, как и выше, x есть наименьшее число, для которого $r_x = r$ в последовательности (1.1). Тогда универсальный дифференциальный инвариант J состоит из

конечного набора скалярных инвариантов порядка $\leq x+1$, причем эти инварианты функционально независимы. Утверждается, что с помощью J можно построить функциональный базис

инвариантов (т. е. универсальный инвариант J'_k) любого порядка $k > x$. Это следует из предыдущей леммы и доказывается индукцией по k : в результате применения операторов инвариантного дифференцирования $\lambda \cdot D$ к универсальному инварианту J'_{x+1} получается универсальный инвариант J'_{x+2} и т. д. Но тогда для любого $k \geq 0$ построен универсальный инвариант k -го продолжения J . Все прочие дифференциальные инварианты порядка не выше k выражаются с помощью функциональной операции через инвариант J в силу его универсальности. ■

Следствие. Базис дифференциальных инвариантов группы $G^r(\zeta)$ содержится в ее универсальном дифференциальном инварианте J , где x — наименьшее число, для которого $r_x = r$ в последовательности (1.1). В частности, если $r_0 = r$, то этот базис содержится в J .

Естественно возникает вопрос: не будет ли базис дифференциальных инвариантов содержаться уже в J_x ? Приведенные ниже примеры показывают, что ответ иногда положительный, а иногда — нет. В общем виде эта ситуация, по-видимому, не изучена.

5. Примеры базисов. В примере 24.3 (а) было $x=1$. Если операторы инвариантного дифференцирования (3.1) применить к универсальному инварианту $J = y$, то получится $(\delta_1 \cdot \partial)y = 1$ и $(\delta_2 \cdot \partial)y = 0$, т. е. новых инвариантов не получается. Поэтому

базис дает только универсальный инвариант J . Так как здесь $\dim \tilde{Z}_2 = 4$, то J имеет четыре скалярные компоненты, которые могут быть взяты такими:

$$y, q^{-2}y_{11}, q^{-2}y_{22}, y_{12}/(y_{11} + y_{22}) - \arctg(y_1/y_2). \quad (5.1)$$

В примере 24.3 (β) было $x=2$. Здесь универсальный инвариант имеет компоненты

$$J^1 = y_1, J^2 = y_2, J^3 = y_{12}/y_{11}, J^4 = y_{22}/y_{11}. \quad (5.2)$$

В результате применения операторов (3.2) к J^1 и J^2 получаются инварианты J^3 и J^4 . Если теми же операторами подействовать на J^3 и J^4 , то будет

$$\begin{aligned} (\delta_1 \cdot \partial) J^3 &= y_{11}^{-3} (y_{11}y_{112} - y_{12}y_{111}), & (\delta_1 \cdot \partial) J^4 &= y_{11}^{-3} (y_{11}y_{122} - y_{22}y_{111}), \\ (\delta_2 \cdot \partial) J^3 &= y_{11}^{-3} (y_{11}y_{122} - y_{12}y_{112}), & (\delta_2 \cdot \partial) J^4 &= y_{11}^{-3} (y_{11}y_{222} - y_{22}y_{112}) \end{aligned}$$

и легко проверить, что все компоненты $y_{i,j,k}$ вектора y отсюда можно определить, т. е. полученные инварианты третьего порядка независимы. Следовательно, в этом примере базис дифференциальных инвариантов совпадает с $J = (y_1, y_2)$, несмотря на то, что $1 < x=2$.

6. Определяющие уравнения данной группы. Базис дифференциальных инвариантов можно использовать для построения определяющих уравнений алгебры Ли данной группы G^r . Они уже встречались в 5.4 в связи с отысканием группы, допускаемой данной системой дифференциальных уравнений. Абстрактные системы определяющих уравнений называются AS -системами. Ниже рассматривается задача о построении AS -системы для данной группы (или алгебры Ли операторов).

Пусть даны группа G^r и какой-нибудь ее дифференциальный инвариант F . С любым векторным полем $\zeta: Z \rightarrow Z$ образуется уравнение (система уравнений)

$$(\zeta \cdot \partial) F = 0. \quad (6.1)$$

Критерий теоремы 17.1 показывает, что если в качестве ζ взято векторное поле из алгебры Ли операторов L^r группы G^r , то равенство (6.1) является тождеством. Поэтому, если уравнение (6.1) рассматривать как уравнение относительно ζ (при данном F), то любой оператор из L^r является его решением. Возникает вопрос: не имеет ли уравнение (6.1) «посторонних» решений, т. е. нет ли таких векторных полей, которые удовлетворяют уравнению (6.1) и не входят в L^r ? Оказывается, что если данный инвариант F содержит базис инвариантов группы G^r , то ответ отрицательный,

т. е. уравнению (6.1) могут удовлетворять только векторные поля из алгебры Ли L' .

Лемма. Если инвариант F группы G' содержит ее базис дифференциальных инвариантов, то любое решение системы (6.1) содержится в алгебре Ли L' операторов группы G' .

Доказательство. Необходимо заметить, что если F содержит базис дифференциальных инвариантов группы G' , то, каково бы ни было решение ζ системы (6.1), для любого дифференциального инварианта Φ группы G' выполнено тождество $(\zeta \cdot \partial)\Phi = 0$.

Из результатов 7.12, 7.13 следует, что множество решений системы (6.1) является алгеброй Ли L' , причем, в силу предыдущих соображений, $L' \subset L'$. Пусть $r'_0 \leq r'_1 \leq \dots$ есть последовательность рангов вида (1.1) для семейства векторных полей, образующих L' . Если $L' \neq L'$, то найдется такое k , для которого $r'_k < r'_k$. Это неравенство означает, что универсальный инвариант J'_k существенно шире, чем J'_k , т. е. что существует дифференциальный инвариант F_k порядка k алгебры Ли L' , не являющийся дифференциальным инвариантом алгебры Ли L' . Но тогда хотя бы для одного оператора $\zeta \cdot \partial \in L'$ равенство (6.1) с $F = F_k$ невозможно, так как иначе F_k был бы инвариантом L' в силу критерия 17.1.

Однако этот факт противоречит замечанию, сделанному в начале доказательства. ■

С л е д с т в и е. Базис дифференциальных инвариантов группы G' однозначно определяет эту группу.

Доказательство. Если в (6.1) в качестве F взят базисный дифференциальный инвариант, то в силу предыдущей леммы множество решений уравнений (6.1) есть в точности алгебра Ли операторов L' группы G' , по которой эта группа восстанавливается однозначно (теорема 16.6). ■

Например, для группы G^4 из примера 24.3 (β), базис инвариантов которой, как установлено в 24.5, есть $J_1 = (y_1, y_2)$, система (6.1) состоит из двух уравнений:

$$(\zeta \cdot \partial)y_1 = 0, \quad (\zeta \cdot \partial)y_2 = 0,$$

и так как

$$\zeta \cdot \partial = \xi^1 \partial_1 + \xi^2 \partial_2 + \eta \partial_y + \eta^1 \partial_{y_1} + \eta^2 \partial_{y_2},$$

то на самом деле из уравнений $\eta^1 = 0$, $\eta^2 = 0$. В результате вычисления дополнительных координат η^1 , η^2 первого продолжения по формулам 4 (8.4) и учета того, что координаты оператора $\zeta \cdot \partial$

от вектора $y = (y_1, y_2)$ не зависят (расщепление по переменным y_1, y_2), окончательно получается следующая AS -система, определяющая группу G^4 :

$$\xi_2^1 = \xi_y^1 = \xi_1^2 = \xi_y^2 = \eta_1 = \eta_2 = 0, \quad \xi_1^1 = \xi_2^2 = \eta_y. \quad (6.2)$$

где нижними индексами обозначены производные $\partial_1, \partial_2, \partial_y$.

Уместно заметить, однако, что строить определяющие уравнения данной алгебры Ли L' с помощью ее базиса дифференциальных инвариантов практически не рационально. Для этой цели существует более простой способ, состоящий в *исключении параметров из представления общего оператора алгебры Ли L' через базисные операторы*. Этот способ реализуется так. Пусть $\{\zeta_\alpha\}$ есть базис L' . Берется формула представления с произвольным вектором $a = (a^1, \dots, a^r) \in R^r$

$$\zeta = a^\alpha \zeta_\alpha \quad (6.3)$$

и из нее и формул, получаемых ее дифференцированием, определяются все параметры a^α ($\alpha = 1, \dots, r$); затем параметры a^α исключаются путем приравнивания нулю всех их производных первого порядка по z (что гарантирует независимость a от z). Полученные уравнения и образуют систему определяющих уравнений алгебры Ли L' .

Например, если для группы G^4 из примера 24.3 (β) положить $\zeta = (\xi^1, \xi^2, \eta)$, то представление (6.3) будет таким:

$$\xi^1 = a^1 + a^4 x^1, \quad \xi^2 = a^2 + a^4 x^2, \quad \eta = a^3 + a^4 y.$$

В результате применения описанного способа получается в точности система определяющих уравнений (6.2).

7. О бесконечных группах Ли. Развитие теории дифференциальных инвариантов для так называемых *бесконечных групп Ли* (или бесконечномерных алгебр Ли операторов) представляет практический интерес. Это объясняется тем, что бесконечные группы Ли естественно возникают в качестве основных групп, допускаемых дифференциальными уравнениями (см. 16.12, а также примеры 5.9, 6.8, 7.14, 8.3, 9.5 и 10.4). В дальнейшем бесконечная группа Ли будет обозначаться символом G^∞ и соответствующая алгебра Ли операторов — символом L^∞ .

Общий способ задания алгебр Ли L^∞ состоит в задании AS -систем абстрактных определяющих уравнений. Согласно данному в 7.15 определению система дифференциальных уравнений с искомым отображением $\zeta: Z \rightarrow Z$ называется AS -системой, если она линейна и однородна и если вместе с любыми двумя ее решениями ζ_1 и ζ_2 коммутатор $[\zeta_1, \zeta_2]$ также есть решение этой системы. Вообще говоря, общее решение AS -системы может быть выражено через некоторые произвольные функции. Число и строение

этих функций заранее предсказать не просто. Можно утверждать лишь, что число независимых произвольных функций, которые являются отображениями $\varphi: Z \rightarrow R$, должно быть меньше $\nu_0 = \dim Z$ (в противном случае ζ было бы произвольным отображением $Z \rightarrow Z$ и AS -система должна быть пустой). Итак, теорию дифференциальных инвариантов алгебр Ли L^∞ целесообразно развивать непосредственно на основе AS -систем определяющих уравнений.

В дальнейшем существенную роль играет определенное представление дифференциальной структуры AS -системы. Прежде всего, эта система состоит из конечного числа уравнений и без нарушения общности анализа может считаться *пассивной*. Свойство пассивности означает, что любые условия совместности уравнений AS выполнены тождественно в силу только уравнений (быть может, продифференцированных) системы AS . Существование такой дифференциальной структуры AS -системы гарантируется известными результатами общей теории дифференциальных уравнений.

Далее, пассивная AS -система будет называться *приведенной*, если все ее уравнения разрешены относительно некоторых производных так, что эти производные, называемые *главными*, выражены как функции независимых переменных и прочих производных, причем выполнено следующее условие. Ни одна из главных производных и никакие производные от них не содержатся в правых частях уравнений приведенной системы и, кроме того, любая производная в правой части какого-либо уравнения имеет порядок не больше порядка главной производной, находящейся в левой части того же уравнения.

Предположение о том, что AS -система является приведенной, очевидно, ограничением не является, так как всегда может быть выполнено приведение пассивной AS -системы.

Пусть дана AS -система, которая является пассивной и приведенной; она будет обозначаться просто S . Все производные (любого порядка) от главных производных, находящиеся в левых частях уравнений S , также называются *главными производными*. Все прочие производные называются *параметрическими*. Следующий важный факт, который на самом деле следует из общей теории интегрирования пассивных систем, здесь устанавливается применительно к системе S .

Л е м м а. *Любая главная производная пассивной приведенной системы S выражается линейно и однородно через параметрические производные.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Все уравнения системы S разбиваются на разряды, причем разряд S^p с индексом p образуют те уравнения, в которых порядок главных производных равен p .

Это дает представление

$$S = S^{p_1} \cup S^{p_2} \cup \dots \cup S^{p_l}, \quad (7.1)$$

где $p_1 < p_2 < \dots < p_l$. Если $p_{k+1} > p_k + 1$, то между разрядами S^{p_k} и $S^{p_{k+1}}$ есть пробел. Эти пробелы можно заполнить последовательно, начиная с S^{p_1} , с помощью следующей операции повышения разряда.

Пусть первый пробел встретился между S^{p_k} и $S^{p_{k+1}}$, т. е. $p_{i+1} = p_i + 1$, если $1 \leq i \leq k - 1$ и $p_{k+1} > p_k + 1$. Все уравнения разряда S^{p_k} дифференцируются один раз по всем независимым переменным и все главные производные порядка меньше $p_k + 1$, которые появились в правых частях, заменяются их выражениями из уравнений разрядов S^{p_i} ($1 \leq i \leq k$). В итоге получается система линейных уравнений относительно главных производных порядка $p_k + 1$. Никакое соотношение между параметрическими производными не может быть следствием этой системы в силу пассивности системы S . Поэтому все главные производные порядка $p_k + 1$ выражаются линейно через параметрические, что и дает разряд $S^{p_{k+1}}$.

Если в представлении (7.1) все пробелы уже заполнены, то операцию повышения разряда можно применить к высшему разряду S^{p_l} . Это дает разряд $S^{p_{l+1}}$, добавление которого к системе S приводит к продолженной системе S_1 . Наконец, в результате неограниченного повторения операции продолжения получается продолженная система S_∞ , дающая требуемое выражение для всех главных производных. ■

8. Инварианты бесконечных групп. Вопрос о существовании дифференциальных инвариантов групп G^∞ решается, как и для групп G^r , сравнением размерности ν_k продолженного пространства Z_k с общим рангом r_k продолженного отображения ζ_k . Для оты-

скания ранга r_k надо заметить, что в случае группы G^∞ он определяется не числом линейно несвязанных строк в матричном представлении отображения ζ_k (в конечномерном случае строки нумеровались индексом $\alpha = 1, \dots, r$), так как это число здесь бесконечно, а числом линейно несвязанных столбцов, соответствующих всевозможным различным производным от координат вектора ζ . Но эти производные связаны определяющими уравнениями системы S_∞ , с помощью которых все главные производные могут быть исключены путем замены их выражениями через параметрические производные. Так как последние являются независимыми величинами, то общий ранг $r_k = r_*(\zeta_k)$ для группы G^∞ равен числу различных параметрических производных порядка $\leq k$.

В общем случае с ростом k число параметрических производных порядка $\leq k$ растет быстрее, чем размерность ν_k продолженного

пространства Z_k . Поэтому для достаточно большого k дифференциальных инвариантов может и не быть. Но можно заметить, что если для некоторого k разность $v_k - r_k > 0$, то необходимо $v_{k+1} - r_{k+1} \geq v_k - r_k$. Это следует из того, что разность $v_k - r_k$ равна числу скалярных инвариантов порядка не больше k , и из того, что универсальный инвариант J содержит универсальный инвариант J_k . Поэтому упомянутая ситуация, когда $r_k > v_k$ для достаточно большого k , может реализоваться, только если $r_0 \geq v_0$. Из этих соображений следует, что критерий существования неограниченного числа дифференциальных инвариантов группы G^∞ записывается равенством

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (v_k - r_k) = \infty. \quad (8.1)$$

Можно заметить, что быстрый рост числа r_k обусловлен главным образом тем, что искомые координаты в AS -системе зависят от $n+m = \dim Z$ независимых переменных. В то же время рост числа v_k определяется главным образом числом $n = \dim X$ независимых координат точки пространства X . Поэтому равенство (8.1) можно гарантировать лишь тогда, когда зависимость компонент вектора ζ от некоторых переменных, число которых не меньше m , заранее фиксирована. Оказывается, что во всех случаях для группы G^∞ справедливо утверждение о конечности базиса дифференциальных инвариантов, аналогичное теореме 24.4 для групп G' .

Т е о р е м а. *Для любой группы G^∞ существует конечный базис ее дифференциальных инвариантов.*

Доказательство. Ясно, что утверждение теоремы нетривиально, только если выполнено равенство (8.1). Тогда найдется такое $k \geq 1$, для которого $v_k > r_k$. Если наряду с продолженным векторным полем ζ рассмотреть векторное поле $\bar{\zeta} = (\zeta, (\lambda \cdot D)\xi)$ на пространстве $Z_k \times R^n(\lambda)$, то будет $r_*(\bar{\zeta}) = r_*(\zeta) = r_k$. Это следует из того, что в $\bar{\zeta}$ входят все производные первого порядка от ξ .

Так как поле $\bar{\zeta}$ задано на пространстве размерности $v_k + n$, то оно имеет универсальный инвариант $\bar{J}_k$, состоящий из $v_k + n - r_k > n$ независимых скалярных инвариантов. Следовательно, этот инвариант можно представить в виде $\bar{J}_k = (J, J')$, где инвариант J' : $Z_k \times R^n \rightarrow R^n$ обладает тем свойством, что $r_*(\partial_\lambda J') = n$. Поэтому, как и в случае групп G' , можно построить n независимых над полем инвариантов операторов инвариантного дифференцирования вида $\lambda \cdot D$ (аналог теоремы 24.2).

Пусть J_p есть универсальный инвариант порядка p . В силу предыдущего J_{k+1} существует. Утверждается, что найдется такое $k \geq k+1$, что для всех $p \geq k$ инвариант $(\lambda \cdot D) J_p$ функционально эквивалентен инварианту J_{p+1} , т. е. связан с J_{p+1} обратимым отображением. Очевидно, что если это так, то конечный базис дифференциальных инвариантов существует и содержится в универсальном инварианте J .

Справедливость предыдущего утверждения вытекает из того факта, что оператор инвариантного дифференцирования $\lambda \cdot D$ с точки зрения количества получаемых его применением функционально независимых скалярных компонент эквивалентен оператору дифференцирования ∂_x . Поэтому, если для каждого $q > 1$ представить универсальный инвариант J_{k+q} в виде

$$J_{k+q} = ((\lambda \cdot D) J_{k+q-1}, J'_{k+q}) \quad (q = 2, 3, \dots), \quad (8.2)$$

то, начиная с некоторого $q = q_*$, добавок J'_{k+q} исчезнет и не возникнет для $q > q_*$. ■

9. Примеры. В обозначениях, введенных в 24.3, операторы алгебры Ли L^∞ на пространстве $Z = X \times Y$ задаются формулой

$$\zeta \cdot \partial = \xi^1 \partial_1 + \xi^2 \partial_2 + \eta \partial_y. \quad (9.1)$$

(α) Следующий пример был рассмотрен С. Ли. Пусть $\xi^1 = \alpha(x^1)$, $\xi^2 = 0$, $\eta = \alpha'(x^1)y$ с произвольной функцией $\alpha: R \rightarrow R$, $\alpha' = \partial_1 \alpha$, т. е.

$$\zeta \cdot \partial = \alpha \partial_1 + \alpha' y \partial_y. \quad (9.2)$$

Эта алгебра Ли имеет инвариант $J = x^2$. Для отыскания дифференциальных инвариантов удобно действовать непосредственно с оператором (9.2) (хотя нетрудно написать и соответствующую AS -систему). Первое продолжение таково:

$$\zeta \cdot \partial = \alpha \partial_1 + \alpha' y \partial_y + \alpha'' y \partial_{y_1} + \alpha' y_2 \partial_{y_2}.$$

Если записать его в виде

$$\zeta \cdot \partial = \alpha \partial_1 + \alpha' (y \partial_y + y_2 \partial_{y_1}) + \alpha'' y \partial_{y_1},$$

то видно, что любой инвариант есть инвариант системы операторов

$$\partial_1, y \partial_y + y_2 \partial_{y_1}, y \partial_{y_1}.$$

Отсюда следует, что есть только один инвариант первого порядка, а именно $J_1 = y_2/y$. Для отыскания операторов инвариантного дифференцирования вида $\lambda D_1 + \mu D_2$ рассматривается оператор вида (2.3), который здесь оказывается таким:

$$\bar{\zeta} \cdot \bar{\partial} = \alpha \partial_1 + \alpha' y \partial_y + \lambda \alpha' \partial_1.$$

Его инварианты μ и λ/y дают два независимых оператора инвариантного дифференцирования:

$$\delta_1 \cdot \partial = yD_1, \quad \delta_2 \cdot \partial = D_2,$$

с помощью которых, отправляясь от инварианта J_1 , можно найти все дифференциальные инварианты. Следовательно, базис последних образован инвариантами x^2 и y_2/y .

(3) Легко проверить, что для операторов вида $\zeta \cdot \partial = \xi^1 \partial_1 + \xi^2 \partial_2$, где ξ^1 и ξ^2 не зависят от y , уравнение

$$\xi_1^1 + \xi_2^2 = 0$$

является определяющим уравнением. Соответствующая группа G^∞ образована всеми преобразованиями плоскости $X = R^2(x^1, x^2)$, сохраняющими площадь. Для таких преобразований ставится задача об отыскании дифференциальных инвариантов отображений $y: X \rightarrow Y$ при условии, что на пространстве Y группа G^∞ действует тривиально.

Пусть сначала $Y = R(y)$. Тогда $\eta = 0$ в операторе (9.1) и соответствующая пассивная приведенная система S определяющих уравнений такова:

$$\xi_2^2 = -\xi_1^1, \quad \xi_y^1 = \xi_y^2 = 0, \quad \eta = 0. \quad (9.3)$$

Здесь параметрическими являются все производные от ξ^1 , а также все производные $\partial_1^k \xi^2$ ($k = 0, 1, \dots$). Общее число параметрических производных порядка $\leq k$ равно

$$p_k = k + 1 + \frac{1}{2}(k+1)(k+2).$$

В то же время размерность пространства Z_k есть (формула (1.2))

$$v_k = 2 + \frac{1}{2}(k+1)(k+2).$$

Путем более детального анализа продолженных операторов устанавливается, что ранг отображения ζ таков:

$$r_k = 1 + \frac{1}{2}(k+1)(k+2).$$

Поэтому для любого $k \geq 0$ имеется лишь один независимый скалярный инвариант $J = y$, который и образует базис.

Пусть теперь $Y = R^2(y^1, y^2)$. В этом случае определяющее уравнение $\eta = 0$ в системе (9.3) заменяется уравнениями $\eta^1 = \eta^2 = 0$, причем число параметрических производных p_k остается прежним. Однако теперь размерность пространства Z_k равна

$$v_k = 2 + (k+1)(k+2)$$

и $\nu_k > p_k$ для любого $k \geq 0$, причем выполнено свойство (8.1). При этом меняются также ранги r_k и можно найти, что $r_1 = 5$. Так как $\nu_1 = 8$, то универсальный инвариант J_1 состоит из трех независимых компонент, которые можно взять в виде

$$J^1 = y^1, \quad J^2 = y^2, \quad J^3 = y_1^1 y_2^2 - y_2^1 y_1^2. \quad (9.4)$$

Два независимых оператора инвариантного дифференцирования находятся уже из первого продолжения ξ_1 и оказываются такими:

$$\delta_1 \cdot \partial = y_2^2 D_1 - y_1^2 D_2, \quad \delta_2 \cdot \partial = y_1^1 D_1 - y_1^2 D_2. \quad (9.5)$$

Применение их к инвариантам J^1 и J^2 новых инвариантов не дает. В результате действия операторов (9.5) на J^3 получаются два независимых дифференциальных инварианта второго порядка. Дальнейший анализ показывает, что (9.4) есть базис дифференциальных инвариантов.

§ 25. Автоморфные системы

1. Определение. Пусть дана группа Ли G (быть может, бесконечная) преобразований конечномерного пространства $Z = X \times Y$. Рассматриваются дифференциальные уравнения E (системы), заданные на Z .

Система E называется автоморфной относительно группы G , если любое решение этой системы получается из одного фиксированного ее решения преобразованием, принадлежащим группе G .

В связи с этим определением возникает ряд задач об описании дифференциальной структуры автоморфных систем, о построении автоморфной системы, имеющей наперед заданное решение и т. п. Кроме того, в следующем параграфе будет дано приложение понятия автоморфной системы к задаче о некотором равносильном преобразовании данной системы дифференциальных уравнений, допускающей группу G .

В дальнейшем автоморфные (относительно G) системы будут обозначаться символом AG .

Оказывается, что общая теория AG -систем тесно связана с понятием частичной инвариантности многообразия, на основе которого она и будет развита ниже. При этом будет употребляться термин «дифференциальное частично инвариантное многообразие» для обозначения частично инвариантных многообразий, лежащих в продолженных пространствах Z_k .

2. Структура автоморфной системы. Рассматривается группа Ли $G^r(h)$, порожденная отображением $h: Z \times B \rightarrow Z$. Пусть дано отображение $u: X \rightarrow Y$ и требуется установить вид AG^r -системы, для которой u является ее решением.

С этой целью рассматривается орбита $h(U, O)$ многообразия $U \{y=u(x)\}$ (см. 21.1). Вообще говоря, эта орбита не является собственным многообразием в пространстве Z . Однако, если рассмотреть продолженные многообразия U_k , заданные уравнениями

$$y = \partial^l u(x) \quad (l=0, 1, \dots, k), \quad (2.1)$$

и соответствующие продолженные пространства Z_k , то можно утверждать, что найдется такое $k \geq 0$, для которого продолженная орбита $h(U_k, O_k)$ будет собственным многообразием в Z_k . Это следует из того, что размерность продолженной орбиты не превосходит числа $n+r$ (где $n = \dim X$), а $\dim Z_k$ растет неограниченно вместе с k .

Пусть k — наименьшее число, для которого $h(U_k, O_k)$ есть собственное многообразие в Z_k . Теперь надо заметить, что продолженная орбита $h(U_k, O_k)$ по построению является инвариантным многообразием продолженной группы G^r_k . В общем случае можно считать, что это многообразие является неособым. Поэтому согласно теореме о представлении 18.7 многообразие $h(U_k, O_k)$ имеет проекцию в пространстве дифференциальных инвариантов $\bar{Z}_k$ и может быть задано системой уравнений, связывающих только дифференциальные инварианты группы G^r порядка $\leq k$, т. е. системой вида

$$\Phi^\sigma(J_k) = 0 \quad (\sigma = 1, \dots, s), \quad (2.2)$$

где J_k — универсальный инвариант группы G^r_k . Система (2.2), по построению, такова, что данное отображение u является ее решением.

Система (2.2) автоморфна. Действительно, если u' — какое-нибудь решение этой системы, то его орбита $h(U'_k, O_k)$ есть инвариантное многообразие в Z_k , проекция которого должна лежать в многообразии (2.2) (по определению решения), т. е. в проекции орбиты $h(U_k, O_k)$. В силу правила вложения проекций (замечание 19.4.1) отсюда следует, что орбита $h(U'_k, O_k) \subset h(U_k, O_k)$. В частности, $U'_k \subset h(U_k, O_k)$ и, тем более, $U'_k \subset U_k$, а это и означает, что решение u' получается из u некоторым преобразованием группы G^r .

Итак, всякая AG^r -система имеет вид системы уравнений (2.2), удовлетворяющей следующему условию: продолженная орбита

$h_{\underset{k}{k}}(U, O)$ некоторого ее решения U , как инвариантное многообразие в $Z_{\underset{k}{k}}$, совпадает с многообразием, заданным системой (2.2).

3. Построение автоморфных систем. Изложенное выше представление об общей структуре AG^r -системы показывает, что в продолженном пространстве возникает ситуация, аналогичная рассмотренной в 22.1. Именно, продолженное многообразие $U_{\underset{k}{k}}$ лежит в собственном инвариантном многообразии группы $G^r_{\underset{k}{k}}$ и потому является частично инвариантным многообразием этой группы. При этом орбита $h_{\underset{k}{k}}(U, O)$ есть, очевидно, наименьшее инвариантное многообразие группы $G^r_{\underset{k}{k}}$, содержащее $U_{\underset{k}{k}}$. Это позволяет определить дефект и ранг многообразия $U_{\underset{k}{k}}$.

Для вычисления дефекта δ_k многообразия $U_{\underset{k}{k}}$ надо воспользоваться формулой 21(3.1), в которой согласно заданию (2.1) в качестве ψ следует взять набор $\{y - \partial^i u(x)\}$ и в качестве ξ — продолженное отображение ζ , полученное по формулам 4(8.5), 4(8.6). Это приводит к выражению

$$\partial\psi\langle\xi\rangle = (\eta - \xi \cdot \partial u, \quad \eta - \xi \cdot \partial^2 u, \dots, \eta - \xi \cdot \partial^k u). \quad (3.1)$$

При переходе на многообразие $U_{\underset{k}{k}}$ это выражение упрощается и окончательный результат формулируется в следующей лемме.

Лемма. С отображением $\omega: X \rightarrow Y$, действующим по формуле

$$\omega(x) = (\eta - y \cdot \xi) \circ u(x) = \eta(x, u(x)) - \partial u(x)\langle\xi(x, u(x))\rangle, \quad (3.2)$$

дефект инвариантности многообразия $U_{\underset{k}{k}}$ равен

$$\delta_k = r_*(\omega, \partial\omega, \dots, \partial^k\omega). \quad (3.3)$$

Доказательство. Согласно лемме 4.4 для любого отображения $v: Z_k \rightarrow P$ справедливо соотношение 4(4.2), которое по индукции легко обобщается на случай любого l в виде

$$\lceil (D^l v) \circ u \rceil_{l+k}(x) = \partial^l (v \circ u)_{\underset{k}{k}}(x) \quad (l=1, 2, \dots). \quad (3.4)$$

В силу (3.4), формулы 4(8.5) и определения (3.2), для любого $l \leq k$

$$\begin{aligned} (\eta - \xi \cdot \partial^{l+1} u) \rceil_{\underset{k}{k}} U &= (D^l (\eta - y \cdot \xi)) \rceil_{\underset{k}{k}} U = (D^l (\eta - y \cdot \xi)) \circ u \rceil_{l+1} \\ &= \partial^l ((\eta - y \cdot \xi) \circ u) \rceil_{\underset{k}{k}} = \partial^l \omega. \end{aligned}$$

Поэтому (3.3) следует из (3.1) и 21(3.1). ■

До сих пор речь шла об автоморфных системах, имеющих данное решение u . Если же никакого решения заранее не задано, то возникает классификационная задача о перечислении всех автоморфных систем данной группы G^r . Решение этой задачи основано на теории частичной инвариантности и связано со следующим алгоритмом построения AG^r -систем.

Дефект δ_k должен удовлетворять условиям 22(1.2), 22(1.3), в которых следует положить $r_* = r_k = r_*(\zeta_k)$ и $m = v_k - n$, где

$v_k = \dim Z_k$. При этом необходимо заметить, что правое неравенство 22(1.2) является чрезмерно ограничительным и здесь может быть заменено неравенством типа $\delta \leq \min \{r_*, m\}$. Это связано с тем, что число $r_* - 1$ было введено в § 22 с целью снижения числа независимых переменных, от которых зависят рассматриваемые частично инвариантные решения, а число $m - 1$ — для того, чтобы орбита $h(U, O)$ не заполняла (локально) все пространство Z . Для автоморфных систем оба эти требования не являются необходимыми. Поэтому для любого $k=0, 1, 2, \dots$ необходимые условия существования AG^r -системы порядка k имеют вид неравенств

$$\max \{r_k - n, 0, v_k - n - r_k\} \leq \delta_k \leq \min \{r_k, v_k - n\}; \quad r_k > 0, \quad (3.5)$$

где $r_k = r_*(\partial_k J)$, причем $v = \varepsilon_k = (y, y, \dots, y)_k$. Через дефект δ_k выражается ранг ρ_k по формуле 22(1.1), так что

$$\rho_k = \delta_k + n - r_k \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (3.6)$$

Если для некоторого $k \geq 0$ существует число δ_k , удовлетворяющее неравенствам (3.5), то автоморфная система, продолженные решения которой имеют дефект δ_k и ранг ρ_k , строится с помощью алгоритма, описанного в 22.2. Эта система задается уравнениями проекций орбит $h_k(U, O)$ в пространстве инвариантов

$$J''_k(z) = \varphi(J'_k(z)), \quad (3.7)$$

где $J = (J', J'')$ есть разбиение универсального инварианта J_k соответственно значению (3.6) ранга ρ_k (т. е. J' состоит ровно из ρ_k независимых скалярных инвариантов). При этом свойство автоморфности гарантируется тем, что (3.7) суть уравнения наименьшего инвариантного многообразия в Z_k , содержащего k -е продолжение какого-то решения системы (3.7).

В отличие от 22.2, здесь нет никакой системы E , в которую надо было бы подставлять выражения главных производных, найденных из уравнений (3.7). Однако система (3.7) может быть активной и потому главные производные должны удовлетворять некоторым «внутренним» условиям совместности. Эти условия имеют

вид дифференциальных уравнений, в которых искомым является отображение φ .

Итак, любая AG^r -система порядка k имеет вид системы уравнений (3.7), к которым добавлены уравнения относительно искомого φ , выражающие условия совместности уравнений (3.7).

В дальнейшем число ρ_k , равное числу независимых переменных в уравнениях (3.7), будет называться *рангом автоморфной системы*.

Изложенный алгоритм построения AG -систем применим и в случае бесконечных групп Ли с учетом тех особенностей, которые отмечены в 24.7.

4. Классификация автоморфных систем. Согласно предыдущему тип автоморфной системы определяется порядком продолжения k , рангом ρ_k и универсальным инвариантом J_k . Наиболее важным результатом классификации AG -систем является тот факт, что число различных типов автоморфных систем конечно для любой группы G (возможно, бесконечной). Особо выделяется *регулярный случай*, когда наименьшее k , для которого J_k содержит базис дифференциальных инвариантов, совпадает с наименьшим k , для которого выполнены неравенства (3.5).

Для классификации удобно ввести в рассмотрение число

$$n_0 = v_0 - r_0 - \bar{r}_0, \quad (4.1)$$

грубо говоря, равное числу тех независимых инвариантов нулевого порядка, которые не зависят от y . С помощью n_0 можно существенно упростить неравенства (3.5). Действительно, по определению числа $\bar{r}_k$ размерность пространства инвариантов равна $r_k + n_0$, в силу чего справедливо равенство $v_k = r_k + \bar{r}_k + n_0$. Отсюда, в частности, $v_k - \bar{r}_k \geq n$. Поэтому левая часть неравенства (3.5) равна $v_k - n - \bar{r}_k = r_k - n + n_0$, а правая — равна r_k , и это неравенство имеет вид $r_k - n + n_0 \leq \delta_k \leq r_k$. Отсюда согласно (3.6) для ранга ρ_k получаются неравенства

$$n_0 \leq \rho_k \leq n. \quad (4.2)$$

Т е о р е м а. Для любой группы Ли G существует конечное число различных типов AG -систем, причем в регулярном случае это число равно $n - n_0 + 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используется теорема 24.8 о конечности базиса дифференциальных инвариантов. Если число независимых скалярных дифференциальных инвариантов произвольного порядка группы G конечно, то утверждение тривиально. Пусть выполнено условие 24 (8.1) и пусть x есть число, определенное в доказательстве теоремы 24.8, обладающее тем свойством, что для любого $k \geq x$ универсальный инвариант J_{k+1} получается из J_k применением операторов инвариантного дифференцирования. При этом можно считать также, что $r_k + n = v_k - r_k + n - n_0 \geq x$.

При соблюдении этих условий в процессе построения автоморфных систем данного ранга ρ_k и любых порядков $k \geq x$, задаваемых в виде (3.7), инвариант $J'(z)$ может быть взят одним и тем же, совпадающим с $J'_x = J'_x(z)$. Пусть ψ_k есть та часть отображения φ , которая в AG -системе порядка k задает выражение для инварианта J_k , имеющее вид

$$J_k = \psi_k(J'_x). \quad (4.3)$$

Тогда эти уравнения войдут и в AG -систему порядка $k+1$, имеющую тот же ранг. Кроме того, в этой AG -системе будут еще уравнения вида

$$J_{k+1} = \psi_{k+1}(J'_x).$$

Но в силу определения числа x можно считать, что $J_{k+1} = (\lambda \cdot D) J_k$, откуда следует, что последние уравнения необходимо должны быть равносильны уравнениям, получаемым применением оператора $\lambda \cdot D$ к уравнениям (4.3). Это означает, что в силу (4.3) должно быть выполнено тождество $\psi_{k+1} = (\lambda \cdot D) \psi_k$, т. е. уравнения порядка $k+1$ являются просто дифференциальными следствиями уравнений (4.3). То же самое будет происходить и при дальнейшем увеличении порядка AG -системы. Остается заметить, что в силу (4.2) ранги ρ_k ограничены в совокупности и что число типов AG -систем порядка $\leq x$ конечно.

В регулярном случае значение x может быть взято равным наименьшему k , для которого выполнены неравенства (3.5). Тогда различные типы AG -систем будут получаться только за счет выбора различных значений ранга ρ_x , число которых в точности равно $n - n_0 + 1$ в силу (4.2). ■

Более детальная классификация AG -систем должна учитывать групповую структуру группы G и возможную редукцию к меньшему дефекту.

5. Пример. Рассматривается группа G^∞ из 24.9 (а) с касательным отображением 24 (9.1). Здесь $v_0 = 3$, $r_0 = 2$, $r_0 = 0$ и по формуле (4.1) получается $n_0 = 1$. Кроме того, $r_1 = 1$, так что необходимые условия существования автоморфных систем выполнены, начиная с $k = 1$. Неравенство (4.2) имеет вид $1 \leq \rho_k \leq 2$, т. е. возможны AG -системы рангов $\rho_k = 1$ и $\rho_k = 2$.

Автоморфная система ранга один образуется с помощью универсального инварианта $J = (x^2, y_2/y)$ и имеет вид

$$y_2 = \omega(x^2)y \quad (5.1)$$

с произвольной функцией $\omega: R \rightarrow R$. Все автоморфные системы ранга один порядка выше первого получаются просто применением к (5.1) операторов инвариантного дифференцирования yD_1 и D_2 .

Для построения автоморфных систем ранга два требуются инварианты второго порядка, которые легко вычисляются с помощью инвариантного дифференцирования

$$yD_1(y_2/y) = y_{12} - (y_1 y_2/y), \quad D_2(y_2/y) = y_{22}/y - (y_2/y)^2$$

и дают универсальный инвариант

$$J = (x^2, y_2/y, y_{12} - y_1 y_2/y, y_{22}/y).$$

Следовательно, автоморфная система ранга два второго порядка имеет вид

$$y_{12} = qy_1 + \varphi(p, q), \quad y_{22} = \psi(p, q)y, \quad (5.2)$$

где введены обозначения $p = x^2$ и $q = y_2/y$. При этом функции φ и ψ должны удовлетворять условию совместности, вытекающему из формулы сравнения производных $(y_{12})_2 = (y_{22})_1$. После упрощения в силу системы (5.2) это условие оказывается таким:

$$\varphi_p + (\psi - q^2)\varphi_q - \varphi\psi_q - q\varphi^2 = 0. \quad (5.3)$$

Все прочие автоморфные системы ранга два получаются из (5.2) применением операторов yD_1 и D_2 .

§ 26. Групповое расслоение

1. Постановка вопроса. Здесь снова рассматривается дифференциальное уравнение E (система) и допускаемая им группа Ли G (которая может быть бесконечной).

Как уже отмечалось в § 20, действие группы G на множестве SE решений уравнения E приводит к разбиению этого множества на классы эквивалентных решений. Именно, решения u_1 и u_2 эквивалентны относительно G , если существует принадлежащее G преобразование, с помощью которого u_1 переводится в u_2 (такие решения в 20.3 были названы несущественно различными). Ясно, что решения u_1 и u_2 эквивалентны относительно группы G , если и только если они принадлежат одной и той же орбите (u, G) некоторого решения u . Таким образом, множество классов эквивалентных решений есть множество всевозможных орбит (u, G) .

Следующая задача была поставлена С. Ли: для данного уравнения E и допускаемой им группы G найти уравнения орбит любых его решений и уравнения, решения которых определяют совокупность всех орбит. Другими словами, требуется найти представление общего решения уравнения E в виде композиции, составленной из некоторого отображения множества SE в множество орбит решений $u \in SE$ и группового преобразования группы G , действующего внутри каждой орбиты.

Решение этой задачи опирается на результаты из § 25, согласно которым орбиты решений, как инвариантные многообразия в некотором Z_k , описываются с помощью автоморфных систем группы G . Поэтому одной из составляющих, на которые требуется разбить уравнение E , является некоторая AG -система. Она содержит, вообще говоря, произвольные функции (типа φ и ψ в 25 (5.2)), которые следует определить с таким расчетом, чтобы все решения AG -системы были решениями уравнения E . С этой целью уравнение E записывается в виде его проекции $\bar{E}$ в пространстве инвариантов и все дифференциальные инварианты заменяются их выражениями через независимые. Так возникает вторая составляющая разбиения уравнения E , которая представляет собой объединение $\bar{E}$ с проекцией AG -системы в пространстве инвариантов и условиями совместности уравнений AG . Эта составляющая называется *разрешающей системой*; она будет обозначаться символом RE .

Итак, решение задачи С. Ли должно приводить к представлению пары (E, G) , выражаемому символической формулой

$$(E, G) \Rightarrow AG \cup RE. \quad (1.1)$$

Представление вида (1.1), в котором правая часть равносильна уравнению E , будет называться групповым расслоением уравнения E относительно допускаемой им группы G .

2. Существование группового расслоения. Требование равносильности представления (1.1) накладывает ограничение на входящую в него AG -систему. Действительно, орбиты разных решений могут иметь различную размерность в пространстве инвариантов, определяемую рангом соответствующей AG -системы. Чтобы гарантировать охват всех решений уравнения E , необходимо искать орбиты максимальной размерности. С точки зрения результатов 25.4 это означает, что групповое расслоение вида (1.1) может получиться только в том случае, если берется AG -система ранга $r_k = n$. В этом рассуждении и в следующей теореме предполагается выполненным условие 24 (8.1).

Т е о р е м а. *Если дифференциальное уравнение E допускает группу Ли G , то существует однозначно определенное групповое расслоение вида (1.1) этого уравнения на автоморфную систему AG и разрешающую систему RE .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно результатам 25.4 значение $r_k = n$ дает один определенный тип AG -системы вида 25 (3.7). Пусть $\bar{E}$ есть проекция уравнения E в пространстве дифференциальных инвариантов $\bar{Z}_\infty$ группы G , с помощью которой однозначно строится соответствующая разрешающая система RE , в которой искомым является отображение φ . По любому решению φ системы RE можно найти некоторое решение AG -системы, которое по построению является решением уравнения E . Остается доказать, что этим путем получится любое решение $u \in SE$.

Для этого достаточно установить, что решению u соответствует некоторое отображение φ , входящее в AG -систему 25 (3.7). Действительно, тогда с найденным φ данное u является решением AG -системы и уравнения E , а значит, должно удовлетворять и всем следствиям этих уравнений, в частности, всем уравнениям RE .

Для построения φ по данному u вводится в рассмотрение отображение $p = J' \mid U: X \rightarrow X$. В общем случае $r_*(\partial p) = n$ и существует обратное отображение p^{-1} , с помощью которого искомое φ однозначно определено формулой

$$\varphi = (J' \mid U) \circ p^{-1}. \quad (2.1)$$

На тех решениях, для которых $r_*(\partial p) < n$, скалярные компоненты инварианта J' функционально зависимы, т. е. ранг AG -системы снижается ($\rho_k < n$). С учетом этого факта повторение предыдущего рассуждения показывает, что и такие решения также воспроизводятся как решения системы — объединения $AG \cup RE$. ■

Практическое значение группового расслоения состоит в том, что решения AG -системы получаются весьма просто за счет свойства ее автоморфности (действием группового преобразования на какое-нибудь одно решение), а разрешающая система RE оказывается более простой по сравнению с исходным уравнением E . Последнее происходит благодаря тому, что у системы RE решений меньше, чем у E , за счет устранения тех излишеств, которые вносил в нее факт существования допускаемой группы G . Это упрощение должно быть тем сильнее, чем шире группа G . В частности, метод группового расслоения целесообразно применять в случае бесконечной группы Ли G . Следует заметить, однако, что точный смысл термина «упрощение уравнения» с точки зрения его применения к дифференциальной структуре не вполне ясен и этот вопрос нуждается в дальнейшем исследовании.

3. Дифференциально-инвариантные решения. В связи с групповым расслоением естественно возникает вопрос о том, что дают другие AG -системы, рангов $\rho_k < n$, с которыми также можно построить объединение вида (1.1). Конечно, в этом случае уже не будет иметь место равносильность уравнения E объединению $AG \cup RE$. На самом деле, это объединение определяет лишь некоторый класс частных решений уравнения E . Такие решения будут называться *дифференциально-инвариантными решениями* ранга ρ_k .

Эти решения, вообще говоря, не являются инвариантными. Действительно, любое инвариантное (в смысле 19.2) решение, будучи продолжено, остается инвариантным многообразием и в продолженном пространстве (см. 19.5), а дифференциально-инвариантное решение в продолженном пространстве является лишь частично инвариантным многообразием.

В настоящее время понятие дифференциально-инвариантного решения разработано недостаточно полно. Прежде всего отсутствует достаточно широкий набор содержательных примеров таких решений. Кроме того, нуждаются в детальном исследовании вопросы их классификации, в частности, редукции к меньшему дефекту и т. п.

4. Пример расслоения. Рассматривается система уравнений стационарного пограничного слоя 10 (7.2) с заданной функцией $x \rightarrow \theta(x)$. В 10.7 показано, что эта система допускает группу G^∞ с оператором

$$\zeta \cdot \partial = \tilde{\varphi} \partial_y + \tilde{\varphi}' u \partial_v, \quad (4.1)$$

где $\tilde{\varphi}: R(x) \rightarrow R$ — произвольная функция и $\tilde{\varphi}' = \partial_x \tilde{\varphi}$. Порождающее отображение этой группы таково:

$$x' = x, \quad y' = y + \tilde{\varphi}(x), \quad u' = u, \quad v' = v + \tilde{\varphi}'(x)u. \quad (4.2)$$

Группа G^∞ имеет универсальный инвариант (нулевого порядка) $J = (x, u)$. Так как здесь $n=2$, то автоморфную систему ранга два с помощью J построить нельзя и требуется рассмотреть первое продолжение группы. Вычисление по формулам 4 (8.4) дает

$$\zeta_1 \cdot \partial = \tilde{\varphi} \partial_y + \tilde{\varphi}' u \partial_v - \tilde{\varphi}' u_y \partial_{u_x} + (\tilde{\varphi}'' u + \tilde{\varphi}'(u_x - v_y)) \partial_{v_x} + \tilde{\varphi}' u_y \partial_{v_y},$$

где $u_x = \partial_x u$ и т. д. Здесь $r_1 = 3$ и универсальный инвариант J_1 должен быть инвариантом системы операторов (получаемых как коэффициенты при $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\varphi}'$ и $\tilde{\varphi}''$)

$$\partial_y, \quad u \partial_v - u_y \partial_{v_x} + u_y \partial_{v_y} + (u_x - v_y) \partial_{v_x}, \quad u \partial_{v_x}$$

и легко находится в виде

$$J_1 = (x, u, u_x + v_y, u_y, uu_x + vu_y).$$

Поэтому AG -система ранга $\rho_1 = 2$ может быть записана так:

$$u_x + v_y = \omega, \quad u_y = \varphi, \quad uu_x + vu_y = \psi \quad (4.3)$$

с неизвестными пока функциями $\omega, \varphi, \psi: R^2(x, u) \rightarrow R$. Условия совместности системы (4.3) с исходной системой 10 (7.2) таковы:

$$\omega = 0, \quad \psi + \theta = \varphi \varphi_u,$$

откуда определяются функции ω и ψ . В силу этих уравнений, составляющих часть разрешающей системы, исходные уравнения равносильны системе (4.3). Еще одно уравнение разрешающей системы дает условие совместности уравнений (4.3), которое здесь удобно получить следующим путем. Можно считать, что функция v определяется из третьего уравнения (4.3), а именно:

$$v = \varphi_u - (\theta + uu_x)/\varphi. \quad (4.4)$$

Подстановка этого выражения в первое уравнение (4.3) и дает, с учетом второго уравнения (4.3), искомое разрешающее уравнение

$$u\varphi_x = \varphi^2\varphi_{uu} + \theta\varphi_u. \quad (4.5)$$

Окончательно групповое расслоение системы 10 (7.2) относительно группы G^∞ с оператором (4.1) есть объединение автоморфной AG^∞ -системы

$$u_x + v_y = 0, \quad u_y = \varphi(x, u), \quad uu_x + vv_y = \varphi\varphi_u - \theta(x), \quad (4.6)$$

и разрешающей системы RE , состоящей из одного уравнения (4.5).

Интересно отметить, что формальный (без использования группового свойства) переход от системы 10 (7.2) к одному уравнению (4.5) известен в гидродинамике под названием «преобразование Крокко». Можно показать, что решение основной краевой задачи теории пограничного слоя фактически сводится к построению определенного решения уравнения (4.5), с которым решение автоморфной системы (4.6) сводится к интегрированию одного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ VII

В классической теории дифференциальных инвариантов, начало которой было положено С. Ли [1], использовались построения, связанные с конечными преобразованиями группы. Основной результат — теорема о конечности базиса — принадлежит Трессу [2]. Доказательство этой теоремы с помощью операторов инвариантного дифференцирования излагается здесь впервые. Задача С. Ли о групповом расслоении данной системы дифференциальных уравнений на автоморфную и разрешающую системы в общем виде была решена Вессю [3], использовавшим параметрическое представление всех переменных через вспомогательные инвариантные параметры. Пример группового расслоения по Вессю конкретной системы уравнений, возникающей в газовой динамике, выполнен в [4]. Возможности и преимущества явного представления группового расслоения были продемонстрированы в [5], откуда и взят пример 26.4. Этим вопросам посвящены также работы [6], [7].

- [1] Lie S. Über Differentialinvarianten. — Math. Ann. 24, № 1 (1884), 52—89.
- [2] Tresse A. Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations. — Acta math. 18 (1894), 1—88.
- [3] Vessiot E. Sur l'intégration des systèmes différentiels qui admettent des groupes continus de transformations. — Acta math. 28 (1904), 307—349.
- [4] Кухарчик П. Групповые свойства уравнений коротких волн в газовой динамике. — Bull. Acad. pol. sci. sér. sci. techn. 13, № 5 (1969), 469—477.
- [5] Овсянников Л. В. Групповое расслоение уравнений пограничного слоя. — В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 1 (1969), Новосибирск, 24—35.
- [6] Субоч Ю. Ф. Об одном групповом свойстве систем дифференциальных уравнений. — В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 6 (1971), Новосибирск, 201—207.
- [7] Вережгина Л. И. Групповое расслоение уравнений пространственного нестационарного пограничного слоя. — Вестн. Ленингр. ун-та, вып. 3, № 13 (1973), 82—86.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Имеется целый ряд специальных задач группового анализа дифференциальных уравнений, изложение подходов к которым представляло бы несомненный интерес для тех, кто освоил предыдущие главы и хотел бы попробовать продвинуться дальше в теории и приложениях. Выбор задач, представленных в настоящей главе, определился, с одной стороны, неизбежными ограничениями, а с другой, — стремлением показать разнообразие возможностей, предоставляемых методами группового анализа.

Групповой анализ линейного уравнения второго порядка с любым числом n независимых переменных (в приложениях чаще всего встречаются значения $n=2, 3, 4$), в отличие от рассмотренного в § 9 случая $n=2$, встречает значительные трудности. В настоящее время для них нет полной групповой классификации даже при $n=3$. Тем большую ценность представляют те общие закономерности, которые удается установить сравнительно просто. Наиболее замечательным фактом здесь является связь, существующая между группой, допускаемой уравнением, и группой конформных преобразований (или движений) ассоциированного с уравнением риманова пространства. Стоит обратить внимание на так называемые стандартные уравнения, допускающие максимально широкую группу, которые, по-видимому, пока с точки зрения краевых задач детально не исследовались.

Касательные преобразования являются естественным обобщением рассмотренных в настоящей книге точечных преобразований. Основы теории и здесь были заложены работами С. Ли. Однако предоставляемые этим обобщением возможности сильно ограничены, так как оно оказывается содержательным лишь в случае одномерного пространства искомых функций, и притом, если преобразование имеет первый порядок. В остальных случаях касательные преобразования сводятся к продолженным точечным (или касательным первого порядка) преобразованиям.

Существенно более широкие возможности открывают так называемые преобразования Ли—Бэклунда, в которых порядки производных заранее не ограничены. В настоящее время к этой перспективной области привлечено внимание ряда исследователей.

Одной из важных проблем является распространение методов группового анализа на краевые задачи для дифференциальных

уравнений. Здесь возникают определенные трудности, обусловленные локальным характером теории, что не всегда хорошо совместимо с краевыми задачами, определяющими решение «в целом». Пока имеются лишь отдельные примеры изучения свойств инвариантности решений таких краевых задач, которые априори могут быть поставлены локально. К ним относятся задачи Коши, Гурса, некоторые смешанные задачи и ряд других. В § 29 демонстрируются также некоторые возможности изучения вопросов инвариантности характеристик и сильных разрывов для специального класса дифференциальных уравнений. Кроме того, установлено свойство инвариантности задачи со «свободной границей» для уравнений Навье—Стокса.

Классической областью применения методов группового анализа являются законы сохранения, отыскание которых важно для решения различных задач физики и механики. Основопологающая теорема, устанавливающая связь между свойствами инвариантности вариационного функционала и законами сохранения, принадлежит Э. Нётер. В этом вопросе существенно, что группа, допускаемая функционалом, допускается и соответствующим дифференциальным уравнением Эйлера для его экстремалей. Важное усиление теоремы Нётер было получено сравнительно недавно на основе одного замечательного тождества, связывающего уравнение Эйлера, условие инвариантности функционала и законы сохранения. При этом также получено и достаточное условие справедливости обратной теоремы Нётер. Перечисленные общие результаты изложены в § 30. Имеются многочисленные интересные примеры приложения этих результатов к конкретным задачам, изложение которых, к сожалению, выходит за рамки книги.

§ 27. Линейное уравнение второго порядка

1. Уравнение и его преобразования. Рассматривается линейное дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка типа $E(n, 1, 2, 1)$ с искомым отображением $u: X \rightarrow R$

$$F[u] \equiv a^{ij} u_{,ij} + b^i u_{,i} + cu = 0. \quad (1.1)$$

В этой записи предполагается, что в пространстве независимых переменных $X = R^n(x)$ введены координаты вектора $x = (x^1, \dots, x^n)$, соответственно чему векторы $u \in Y_1$ и $u \in Y_2$, как элементы первого и второго продолжений пространства $Y = R(u)$ с помощью X (см. 4.2), представлены в виде $u = (u_1, \dots, u_n)$ и $u = (u_{11}, u_{12}, \dots, u_{nn})$, причем $u_i = \partial_i u$, $u_{ij} = \partial_i \partial_j u$, где $\partial_i = \partial_{x^i}$ ($i = 1, \dots, n$). Коэффициенты $a^{ij} = a^{ji}$, b^i , c считаются заданными функциями $X \rightarrow R$ класса $C_\infty(X)$.

Для уравнения (1.1) ставится задача групповой классификации (см. § 6) по отношению к произвольному элементу — набору $\{a^{ij}, b^i, c\}$ всех коэффициентов этого уравнения. Эта задача уже была рассмотрена в § 8 для $n=1$ и в § 9 для $n=2$. Поэтому в дальнейшем, если потребуется, будет предполагаться, что $n > 2$.

Согласно 6.4 задачу групповой классификации следует решать с точностью до преобразований эквивалентности, сохраняющих общую дифференциальную структуру уравнения (1.1). С целью последующего геометрического истолкования целесообразно рассматривать преобразования линейного оператора F , определяемого уравнением (1.1), и различать три типа таких преобразований.

(α) Преобразование пространства X вида $x' = p(x)$ (в координатах $x^{i*} = p^i(x)$, $i = 1, \dots, n$), которое включает преобразование $u \rightarrow u'$ по формуле $u = u' \circ p$ и, соответственно, преобразование $F \rightarrow F'$, где $F[u] = F'[u']$. При этом уравнение (1.1) переходит в уравнение

$$F'[u'] = a'^{ij}u'_{i,j} + b'^i u'_i + c'u', \quad (1.2)$$

причем $u'_i = \partial'_i u'$ и т. д., где $\partial'_i = \partial_{x^{i*}}$. Новые (штрихованные) коэффициенты выражаются через старые по формулам

$$a'^{ki} \circ p = a^{ij} p^k_j p^i_i, \quad b'^k \circ p = a^{ij} p^k_j p^i_i + b^i p^k_i, \quad c' \circ p = c. \quad (1.3)$$

(β) Линейное преобразование искомой функции $u \rightarrow e^\theta u$ с любой функцией $\theta: X \rightarrow \mathbb{R}$ класса $C_\infty(X)$ и одновременное умножение оператора F на множитель $e^{-\theta}$, т. е. преобразование

$$F'[u] = e^{-\theta} F[e^\theta u], \quad (1.4)$$

которое переводит уравнение (1.1) в уравнение

$$F'[u] \equiv a'^{ij}u_{i,j} + b'^i u_i + c'u = 0 \quad (1.5)$$

с теми же a^{ij} , но с новыми

$$b'^i = b^i + 2a^{ij}\theta_j, \quad c' = c + b^i\theta_i + a^{ij}\theta_{i,j} + a^{ij}\theta_i\theta_j. \quad (1.6)$$

(γ) Умножение оператора F на множитель, например, $F' = e^{-2\theta}F$ с функцией $\theta: X \rightarrow \mathbb{R}$, т. е. переход к уравнению

$$F'[u] \equiv \bar{a}^{ij}u_{i,j} + \bar{b}^i u_i + \bar{c}u = 0, \quad (1.7)$$

где

$$a'^{ij} = e^{2\theta} \bar{a}^{ij}, \quad b'^i = e^{2\theta} \bar{b}^i, \quad c = e^{2\theta} \bar{c}. \quad (1.8)$$

2. Условие инвариантности. Оператор группы $G^1(\zeta)$ преобразований пространства $Z = X \times Y$, допускаемой уравнением (1.1), ищется в виде

$$\zeta \cdot \partial = \xi \cdot \partial_x + \eta \partial_u = \xi^i \partial_i + \eta \partial_u \quad (2.1)$$

с векторным полем $\zeta = (\xi, \eta): Z \rightarrow Z$. Для записи условия инвариантности уравнения (1.1) относительно оператора (2.1) требуется второе продолжение этого оператора

$$\zeta \cdot \partial = \zeta \cdot \partial + \eta \cdot \partial + \eta \cdot \partial,$$

где $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ и $\eta = (\eta_{11}, \eta_{12}, \dots, \eta_{nn})$ вычисляются с помощью операторов полного дифференцирования

$$D_i = \partial_i + u_i \partial_u + u_{ij} \partial_{u_j} + \dots \quad (i = 1, \dots, n)$$

по формулам продолжения 4(8.4), а именно,

$$\eta_i = D_i \eta - u_j D_i \xi^j, \quad \eta_{ik} = D_k \eta_i - u_{ij} D_k \xi^j.$$

С учетом того, что ζ не зависит от u , это дает

$$\begin{aligned} \eta_i &= \partial_i \eta + u_i \partial_u \eta - u_j \partial_i \xi^j - u_j \partial_u \xi^j, \\ \eta_{ik} &= \partial_k \eta_i + u_k \partial_u \eta_i + u_{ki} \partial_{u_i} \eta_i - u_{ij} (\partial_k \xi^j + u_k \partial_u \xi^j). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Очевидно, что в результате действия оператора $\zeta \cdot \partial$ на $F[u]$ получится линейная неоднородная форма от u . Поэтому условие инвариантности

$$(\zeta \cdot \partial) F[u] |_{F[u]=0} = 0$$

может быть записано с помощью неопределенного множителя Лагранжа λ в виде равенства

$$(\zeta \cdot \partial) F[u] = \lambda F[u]. \quad (2.3)$$

При этом априори можно утверждать лишь то, что λ не зависит от u , но следует считать λ функцией от (x, u, u) . Равенство (2.3) легко расщепляется относительно u и дает уравнения

$$\begin{aligned} a^{kj} \partial_{u_i} \eta_j - a^{ij} (\partial_j \xi^k + u_j \partial_u \xi^k) + \xi^j \partial_j a^{ik} &= \lambda a^{ik} \quad (i, k = 1, \dots, n); \\ a^{ik} (\partial_k \eta_i + u_k \partial_u \eta_i) + b^i \eta_i + c \eta + u_i \xi^k \partial_k b^i + u \xi^k \partial_k c &= \lambda b^i u_i + \lambda c u. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Сюда надо еще подставить η_i из (2.2). Дальнейшее расщепление уравнений (2.4) относительно u можно было бы выполнить совсем просто, если бы заранее было известно, что λ не зависит от u . Оказывается, что это свойство действительно верно, если только уравнение (1.1) удовлетворяет некоторым естественным предположениям.

Именно, предполагается, что матрица (a^{ij}) ненулевая и исключается случай **сильно вырожденного** уравнения (1.1), когда оно эквивалентно уравнению вида

$$u_{11} + bu_1 + cu = 0, \quad (2.5)$$

т. е. фактически обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка, уже изученному в 8.8.

Лемма. Если матрица (a^{ij}) ненулевая и уравнение (1.1) не сильно вырождено, то компонента ξ оператора (2.1) не зависит от u , а множитель λ не зависит от u .

Доказательство. В силу первого уравнения (2.4) множитель λ есть, самое большее, линейная функция от u и без ограничения общности можно положить

$$\lambda = \lambda^i u_i + \lambda_0. \quad (2.6)$$

Подстановка этого выражения в первое уравнение (2.4) и расщепление полученного равенства относительно u дает уравнения

$$a^{jk} \partial_u \xi^i + a^{ki} \partial_u \xi^j + a^{ij} \partial_u \xi^k = -a^{ki} \lambda^j \quad (i, j, k = 1, \dots, n), \quad (2.7)$$

$$a^{ik} \partial_u \eta - a^{kj} \partial_j \xi^i - a^{ij} \partial_j \xi^k + \xi^j \partial_j a^{ik} = \lambda_0 a^{ik} \quad (i, k = 1, \dots, n). \quad (2.8)$$

Левая часть уравнения (2.7) не меняется при любых перестановках индексов i, j, k . Отсюда следуют равенства

$$a^{ki} \lambda^j = a^{kj} \lambda^i \quad (i, j, k = 1, \dots, n).$$

Пусть не все множители λ^i равны нулю, например, $\lambda^1 \neq 0$. Тогда можно положить $q^i = \lambda^i / \lambda^1$ и предыдущее соотношение дает

$$a^{ik} = q^i a^{k1} \quad (i, k = 1, \dots, n).$$

Повторное применение этого соотношения приводит к равенству

$$a^{ik} = q^i q^k a^{11} \quad (i, k = 1, \dots, n).$$

При этом $a^{11} \neq 0$, так как иначе матрица (a^{ik}) была бы нулевой. Поэтому совокупность слагаемых с производными второго порядка в уравнении (1.1) приводится к виду $q^i q^k u_{ik}$. Согласно теореме 3.8 найдется преобразование подобия $y: X \rightarrow X$, которое преобразует векторное поле $q = \{q^i\}$ в постоянное, например в $(1, 0, \dots, 0)$. Тогда в координатах $y = (y^1, \dots, y^n)$ сумма членов с производными второго порядка в уравнении (1.1) будет состоять из одного слагаемого u_{11} .

Итак, не нарушая общности вывода, можно считать, что в рассматриваемом случае (т. е. когда не все λ^i равны нулю) исходное

уравнение (1.1) таково, что $a^{11}=1$ и $a^{ik}=0$ ($ik > 1$). Тогда (2.7) при $k=i=j=1$ и $k=j=1, i > 1$ дает

$$3\partial_u \xi^1 = -\lambda^1, \quad \partial_u \xi^i = -\lambda^i = 0 \quad (i=2, 3, \dots, n). \quad (2.9)$$

Кроме того, из (2.8) при $i=1, k > 1$ следуют равенства

$$\partial_1 \xi^k = 0 \quad (k=2, 3, \dots, n). \quad (2.10)$$

Далее необходимо обратиться ко второму уравнению (2.4) и подставить в него выражения (2.2) и (2.6). В общем случае расщепление этого уравнения относительно u приводит к уравнениям

$$\partial_u \xi^j = 0 \quad (j=1, \dots, n), \quad (2.11)$$

$$a^{ik} \partial_u^2 \eta - a^{ij} \partial_u \partial_j \xi^k - a^{jk} \partial_u \partial_j \xi^i - b^i \partial_u \xi^k = \lambda^k b^i \quad (i, k=1, \dots, n), \quad (2.12)$$

$$2a^{ik} \partial_u \partial_k \eta - a^{jk} \partial_j \partial_k \xi^i - b^i \partial_u \eta - b^k \partial_k \xi^i + \xi^k \partial_k b^i = \\ = \lambda_0 b^i + \lambda^i c u \quad (i=1, \dots, n), \quad (2.13)$$

$$a^{ik} \partial_i \partial_k \eta + b^i \partial_i \eta + c \eta + \xi^k u \partial_k c = \lambda_0 c u. \quad (2.14)$$

В рассматриваемой здесь ситуации из (2.12) при $k=1, i > 1$ с учетом (2.10) следуют равенства

$$-b^i \partial_u \xi^1 = \lambda^1 b^i \quad (i=2, \dots, n)$$

или в силу (2.9)

$$\lambda^1 b^i = 0 \quad (i=2, \dots, n).$$

Так как равенство $\lambda^1=0$ противоречит сделанному предположению о том, что вектор $\{\lambda^i\}$ не нулевой, то отсюда следуют равенства $b^i=0$ ($i=2, \dots, n$). Это означает, что преобразованное к переменным y уравнение (1.1) приводится к виду (2.5), т. е. сильно вырождено.

Следовательно, если (1.1) не сильно вырождено, то $\lambda^i=0$ ($i=1, \dots, n$), а тогда из (2.7) и (2.11) получается, что $\partial_u \xi^i=0$ ($i=1, \dots, n$). ■

3. Определяющие уравнения. Для уравнения (1.1), удовлетворяющего условиям предыдущей леммы, компонента ξ оператора (2.1) от u не зависит, в силу чего из (2.12) следует $\partial_u^2 \eta=0$. Тем самым уравнения $\partial_u \xi=0, \partial_u^2 \eta=0$ входят в систему определяющих уравнений и, согласно 7.14, основная алгебра Ли уравнения (1.1) имеет структуру $L' \oplus L^\infty$, где подалгебра L' состоит из операторов

$$\zeta \cdot \partial = \xi(x) \cdot \partial_x + \sigma(x) u \partial_u, \quad (3.1)$$

а L^∞ образована операторами вида $v(x) \partial_u$, где v — любое решение уравнения (1.1). Поэтому можно ограничиться рассмотрением системы DE определяющих уравнений алгебры Ли L' . Если положить еще $\lambda_0 = \sigma + \mu$, то окончательно эта система DE , в которую

нетривиальный вклад дают только уравнения (2.8), (2.13) и (2.14), оказывается такой:

$$a^{ik}\partial_k\xi^j + a^{jk}\partial_k\xi^i - \xi^k\partial_k a^{ij} = \mu a^{ij} \quad (i, j=1, \dots, n), \quad (3.2)$$

$$2a^{ik}\partial_k\sigma = a^{jk}\partial_j\partial_k\xi^i + b^k\partial_k\xi^i - \xi^k\partial_k b^i - \mu b^i \quad (i=1, \dots, n), \quad (3.3)$$

$$a^{ij}\partial_i\partial_j\sigma + b^i\partial_i\sigma = -\xi^k\partial_k c - \mu c, \quad (3.4)$$

причем функция σ определяется с точностью до постоянного слагаемого. Эта система DE используется при доказательстве следующего важного факта.

Т е о р е м а. Уравнение (1.1) допускает ненулевой оператор вида (3.1), если и только если оно эквивалентно уравнению, все коэффициенты которого не зависят от одной из координат.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что если все коэффициенты не зависят (например) от x^1 , то уравнение (1.1) допускает группу G^1 переносов по координате x^1 , т. е. преобразования с оператором $\zeta \cdot \partial = \partial_1$. Легко убедиться в том, что этот оператор удовлетворяет уравнениям DE .

Обратно, в силу теоремы 3.8 с помощью подходящего преобразования типа 27.1 (а) всегда можно добиться того, чтобы координаты компоненты ξ оператора (3.1) имели значения $\xi^i = \delta_i^1$. В этом случае уравнения DE (3.2)–(3.4) принимают вид

$$\partial_1 a^{ij} = -\mu a^{ij}, \quad \partial_1 b^i = -\mu b^i - 2a^{ik}\partial_k\sigma, \quad \partial_1 c = -\mu c - a^{ij}\partial_i\partial_j\sigma - b^i\partial_i\sigma. \quad (3.5)$$

Если ввести функции

$$\omega = \int \sigma dx^1, \quad \nu = - \int \mu dx^1,$$

положить

$$a^{ij} = e^{\nu} \bar{a}^{ij}, \quad b^i = e^{\nu} (\bar{b}^i - 2\bar{a}^{ij}\omega_j), \quad c = e^{\nu} (\bar{c} - \bar{a}^{ij}\omega_i\omega_j - \bar{b}^i\omega_i + \bar{a}^{ij}\omega_i\omega_j), \quad (3.6)$$

где $\omega_i = \partial_i\omega$, $\omega_{ij} = \partial_i\partial_j\omega$, и подставить эти выражения в уравнения (3.5), то последние приведутся к таким:

$$\partial_1 \bar{a}^{ij} = 0, \quad \partial_1 \bar{b}^i = 0, \quad \partial_1 \bar{c} = 0 \quad (i, j=1, \dots, n). \quad (3.7)$$

С другой стороны, если сделать преобразование типа 27.1 (β) с $\theta = \omega$, затем преобразование типа 27.1 (γ) с $2\theta = \nu$ и использовать (3.6), то простой подсчет показывает, что (1.1) перейдет в эквивалентное уравнение

$$\bar{a}^{ij}u_{ij} + \bar{b}^i u_i + \bar{c}u = 0,$$

коэффициенты которого в силу (3.7) не зависят от x^1 . ■

Независимость коэффициентов уравнения (1.1) от одной из координат позволяет построить для него класс частных (инвариантных

или частично инвариантных) решений методом разделения переменных (неполного), а также свести задачу отыскания общего решения к уравнению меньшей размерности (методом Фурье). Тем самым предыдущий результат устанавливает связь между допускаемыми операторами и упомянутыми классическими методами построения решений.

4. Ассоциированное риманово пространство. Дальнейший анализ определяющих уравнений (3.2)—(3.4) будет проведен для случая, когда матрица (a^{ij}) не вырождена, т. е. когда $\det(a^{ij}) \neq 0$. Это предположение существенно облегчает исследование, в чем можно убедиться на примере выполненной в § 9 групповой классификации линейного уравнения в случае $n=2$. Для вырожденных уравнений при $n > 2$ законченных результатов, по-видимому, нет.

Формулы (1.3) показывают, что коэффициенты a^{ij} являются компонентами контравариантного тензора. Если он не вырожден, т. е. $\det(a^{ij}) \neq 0$, то ковариантные компоненты a_{ij} того же тензора определяются из уравнений

$$a_{jk}a^{ij} = \delta_k^i \quad (i, k = 1, \dots, n). \quad (4.1)$$

Тензор a_{ij} симметричен вместе с тензором a^{ij} и можно ввести в рассмотрение метрическую фундаментальную квадратичную форму

$$ds^2 = a_{ij}dx^i dx^j. \quad (4.2)$$

Риманово пространство V_n с метрикой (4.2), построенной по формулам (4.1), будет называться пространством, ассоциированным с дифференциальным уравнением (1.1).

Формулы (1.3) и (1.5) показывают, что преобразования типа 27.1 (α) и 27.1 (β) уравнения (1.1) не изменяют пространство V_n . Следовательно, ассоциированное с уравнением (1.1) риманово пространство является инвариантным объектом относительно этих преобразований. Что же касается преобразования типа 27.1 (γ), то оно приводит к уравнению, ассоциированное пространство которого является конформным пространству V_n .

Следует отметить, что компонента ξ оператора (3.1) есть контравариантный вектор ассоциированного V_n и что величина σ есть скаляр. Ниже будет показано, что определяющим уравнениям (3.2)—(3.4) можно придать ковариантную форму относительно этого V_n , т. е. записать их с помощью величин и операций, внутренним образом определяемых пространством V_n .

Непосредственно из определяющих уравнений вытекает один важный результат. Предварительно необходимо заметить следующее. Пусть G^r есть группа преобразований пространства $Z = X \times Y$, соответствующая алгебре Ли L^r и, тем самым, допускаемая урав-

нением (1.1). Очевидно, что подпространство $X \times \{0\} \subset Z$, которое задается уравнением $u=0$ и может быть отождествлено с пространством X , инвариантно относительно G' . Поэтому определена группа $G'|X$, индуцированная группой G' на ее инвариантном многообразии X (см. 18.3). Операторы алгебры Ли $L'|X$ группы $G'|X$ получаются, если в (3.1) положить $u=0$. Легко проверить, что алгебры Ли L' и $L'|X$ (а значит, и группы G' и $G'|X$) изоморфны. Действительно, если $\xi=0$, то (3.2) дает $\mu=0$ и тогда из (3.3) получается, что $\partial_i \sigma=0$ ($i=1, \dots, n$), т. е. $\sigma=0$, так как функция σ определена с точностью до постоянного слагаемого.

Теорема. Если невырожденное уравнение (1.1) допускает группу G' , то группа $G'|X$ является подгруппой группы конформных преобразований ассоциированного риманова пространства.

Доказательство. Умножение уравнения (3.2) на $a_i a_j$ и суммирование по i, j с использованием (4.1) приводит к уравнениям

$$a_{ik} \partial_i \xi^k + a_{il} \partial_k \xi^l + \xi^l \partial_l a_{ki} = \mu a_{ki} \quad (k, l=1, \dots, n). \quad (4.3)$$

Как известно из римановой геометрии, эти уравнения являются определяющими уравнениями алгебры Ли операторов $\xi \cdot \partial = \xi^i \partial_i$ конформных преобразований риманова пространства с метрикой (4.2). Поэтому любой оператор (3.1), являющийся решением системы (3.2)–(3.4), индуцирует в указанном выше смысле некоторый оператор конформных преобразований пространства V_n . ■

5. Некоторые формулы римановой геометрии. Для преобразования уравнений (3.2)–(3.4) потребуются приводимые ниже формулы римановой геометрии, в которых все индексы принимают значения $1, \dots, n$.

Символы Кристоффеля второго рода определяются формулами

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2} a^{ij} (\partial_i a_{kj} + \partial_k a_{ij} - \partial_j a_{ki}). \quad (5.1)$$

Для любого тензора $T_{k_1 \dots k_s}^{i_1 \dots i_r}$ его ковариантные производные относительно фундаментального тензора a_{ij} отмечаются запятой и имеют выражения

$$\begin{aligned} T_{k_1 \dots k_s, j}^{i_1 \dots i_r} = & \partial_j T_{k_1 \dots k_s}^{i_1 \dots i_r} + \sum_{\alpha=1}^r T_{k_1 \dots k_s}^{i_1 \dots i_{\alpha-1} i_{\alpha+1} \dots i_r} \cdot \Gamma_{ij}^{i_{\alpha}} - \\ & - \sum_{\beta=1}^s T_{k_1 \dots k_{\beta-1} k_{\beta+1} \dots k_s}^{i_1 \dots i_r} \cdot \Gamma_{k_{\beta} j}^{k_{\beta}}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

В частности, для контравариантного вектора с компонентами ξ^i

$$\xi^i_{,j} = \partial_j \xi^i + \xi^l \Gamma_{lj}^i, \quad (5.3)$$

а для его ковариантных компонент $\xi_k = a_{ik} \xi^i$

$$\xi_{k,j} = \partial_j \xi_k - \xi_i \Gamma_{kj}^i. \quad (5.4)$$

Компоненты тензоров a_{ik} и a^{ik} при ковариантном дифференцировании ведут себя как постоянные

$$a_{ik,j} = 0, \quad a^{ik}_{,j} = 0. \quad (5.5)$$

Компоненты тензора римановой кривизны пространства V_n определяются формулами

$$R^i_{j k} = \partial_j \Gamma^i_{ik} - \partial_k \Gamma^i_{ij} + \Gamma^s_{ik} \Gamma^i_{sj} - \Gamma^s_{ij} \Gamma^i_{sk} \quad (5.6)$$

и удовлетворяют тождествам

$$R^i_{j k} = -R^i_{k j}, \quad R^i_{j k} + R^i_{k i} + R^i_{i j} = 0. \quad (5.7)$$

Тензор Риччи $R_{ij} = R^k_{ijk}$ является симметричным. Скаляр

$$R = a^{ij} R_{ij} = a^{ij} R^k_{ijk} \quad (5.8)$$

носит название *скалярной кривизны* пространства V_n .

Тензор $R_{ijkl} = a_{is} R^s_{jkl}$ удовлетворяет тождествам

$$R_{ijkl} = R_{klij} = -R_{ikij}. \quad (5.9)$$

Для тензора $R^i_k = a^{ij} R_{jk}$ и скаляра (5.8) справедливо равенство

$$\partial_k R = 2R^i_{k,i}. \quad (5.10)$$

Для любого вектора a^i справедливы тождества Риччи

$$a^i_{,kl} - a^i_{,lk} = a^s R^i_{s lk}. \quad (5.11)$$

Если в определяющих уравнениях (4.3) конформных преобразований пространства V_n перейти к ковариантным компонентам $\xi_k = a_{ik} \xi^i$ вектора ξ , то эти уравнения примут вид

$$\xi_{i,j} + \xi_{j,i} = \mu a_{ij}. \quad (5.12)$$

Условия совместности последних уравнений таковы:

$$\xi_{i,jk} = \frac{1}{2} (a_{ij} \mu_{,k} + a_{ik} \mu_{,j} - a_{jk} \mu_{,i}) + \xi_s R^s_{kji}, \quad (5.13)$$

где $\mu_{,k} = \partial_k \mu$. Кроме того, справедливо соотношение

$$a^{ij} \mu_{i,j} = \frac{2}{n-1} (R^i_{k,i} \xi^k + R^k_{k,i} \xi^i), \quad (5.14)$$

где $R^i_k = a^{ij} R_{jk}$. Соотношение (5.14) может быть записано в равносильной форме с помощью (5.10) и вытекающего из (5.12) равенства $R^i_k \xi^k_{,i} = (1/2) R \mu_{,i}$, а именно:

$$a^{ij} \mu_{i,j} = \frac{1}{n-1} (\xi^k \partial_k R + R \mu). \quad (5.15)$$

Символы Кристоффеля не являются компонентами тензора. При преобразовании 27.1 (α) они преобразуются по формулам

$$\Gamma^s_{ij} p^k_s = p^k_i + \Gamma^s_{ij} p^s_i p^k_j. \quad (5.16)$$

6. Ковариантная форма определяющих уравнений. Уравнение (3.2) уже записано в ковариантной форме (5.12). Для преобразования уравнений (3.3) и (3.4) надо учесть, что коэффициенты b^i уравнения (1.1) не являются компонентами вектора. Однако величины

$$a^i = b^i + a^{kl} \Gamma_{kl}^i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (6.1)$$

образуют контравариантный вектор. Действительно, при преобразовании 27.1(х) в силу (5.16) и (1.3) справедливы равенства

$$\begin{aligned} a^{ik} &= b^{ik} + a^{is} \Gamma_{si}^k = a^{ij} p_{ij}^k + b^i p_i^k + a^{ij} p_j^i \Gamma_{si}^k = \\ &= a^{ij} p_{ij}^k + b^i p_i^k + a^{ij} \Gamma_{ij}^s p_s^k - a^{ij} p_{ij}^k = (b^i + a^{sj} \Gamma_{sj}^i) p_i^k = a^i p_i^k. \end{aligned}$$

Преобразование уравнения (3.3). Входящая в правую часть производная $\partial_j \partial_k \xi^i$ выражается с помощью (5.2) и (5.3) через ковариантные производные. В результате получается

$$\begin{aligned} a^{jk} \partial_j \partial_k \xi^i &= a^{jk} \xi_{,jk}^i - a^{jk} \Gamma_{ij}^l \xi_{,k}^l - a^{jk} \Gamma_{ik}^l \xi_{,j}^l + a^{jk} \Gamma_{jk}^l \xi_{,l}^i - \\ &\quad - a^{jk} (\partial_k \Gamma_{ij}^l - \Gamma_{ik}^s \Gamma_{sj}^l) \xi^i. \end{aligned}$$

Далее, в силу (6.1) после простых преобразований находится

$$\begin{aligned} b^k \partial_k \xi^i &= \xi^i \partial_k b^k - \mu b^i = a^{kj} \xi_{,k}^i - a^{jk} \Gamma_{jk}^l \xi_{,l}^i - a^i \xi_{,k}^k + \\ &\quad + a^{jk} (\partial_j \Gamma_{jk}^i + \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^i - \Gamma_{ji}^s \Gamma_{sk}^i - \Gamma_{ki}^s \Gamma_{js}^i) \xi^i - \mu a^i + \mu a^{kl} \Gamma_{kl}^i. \end{aligned}$$

Сложение этих выражений, использование определения (5.6) и уравнения (5.12) приводит правую часть уравнения (3.3) к виду

$$a^{jk} \xi_{,jk}^i + a^{kj} \xi_{,k}^i - a^i \xi_{,k}^k - \mu a^i + a^{jk} R_{jlk}^i \xi^l.$$

Но в силу (5.13)

$$a^{jk} \xi_{,jk}^i = \frac{2-n}{2} a^{ik} \mu_k + a^{jk} a^{is} R_{kjs}^i \xi_i \quad (6.2)$$

и согласно (5.9)

$$R_{jlk}^i = a^{is} R_{sjlk}^i = -a^{is} R_{ikjs}^i = -a^{is} R_{kjs}^i \xi_i.$$

Поэтому правая часть (3.3) оказывается такой:

$$\frac{2-n}{2} a^{ik} \mu_k + a^{kj} \xi_{,k}^i - a^i \xi_{,k}^k - \mu a^i.$$

Наконец, если ввести в рассмотрение ковариантные компоненты $a_k = a_{,k} a^i$ и учесть уравнения (5.12), то предыдущее выражение приведет к виду

$$a^{ik} \left(\frac{2-n}{2} \mu_k - a_{j,k} \xi^j - a_{k,j} \xi^j \right).$$

Поэтому уравнение (3.3) имеет ковариантную форму

$$2\partial_k \sigma = \frac{2-n}{2} \mu_k - a_j \xi^j_{,k} - a_{k,j} \xi^j. \quad (6.3)$$

Удобно ввести еще кососимметричный тензор

$$K_{ij} = a_{i,j} - a_{j,i}, \quad (6.4)$$

с помощью которого уравнение (3.3) примет окончательный вид

$$2\partial_i \sigma = \frac{2-n}{2} \mu_i - (a_k \xi^k)_{,i} - K_{ij} \xi^j. \quad (6.5)$$

Отсюда функция σ определяется однозначно по данным ξ и μ , если выполнены условия совместности

$$(K_{ij} \xi^j)_{,i} = (K_{ji} \xi^i)_{,j}. \quad (6.6)$$

Они являются дополнительными к (5.12) уравнениями первого порядка для искомого вектора ξ .

Преобразование уравнения (3.4). Если левую часть уравнения (3.4) обозначить через $(1/2)N$, то, с помощью (3.3) и определения (6.1) вектора a^i , получается

$$N = 2a^{ij}(\partial_i \sigma)_{,j} + 2a^i \partial_i \sigma.$$

Подстановка сюда выражения для $2\partial_i \sigma$ из (6.3) дает

$$N = \frac{2-n}{2} a^{ij} \mu_{i,j} - \left(a_k a^{ij} \xi^k_{,i,j} - \frac{2-n}{2} a^i \mu_{i,j} + a^i_{,k} \xi^k \right) - \\ - (a^{ij} a_{k,j} \xi^k_{,i} + a^j_{,k} \xi^k_{,j}) - (a^i a_{k,i} \xi^k + a^i a_{i,k} \xi^k) = N_1 - N_2 - N_3 - N_4.$$

Здесь N_1 определяется формулой (5.15). Для преобразования N_2 используются соотношения (6.2), (5.11), (5.9), с помощью которых получается

$$N_2 = a^i_{,ik} \xi^k.$$

Преобразование N_3 с помощью (5.12) приводит к формуле

$$N_3 = a^i_{,i} \mu.$$

Наконец, N_4 , также с помощью (5.12), приводится к виду

$$N_4 = \frac{1}{2} a^i a_{i,\mu} + \frac{1}{2} (a^i a_i)_{,k} \xi^k.$$

В результате для N получается выражение

$$N = \left(\frac{2-n}{2n-2} R - a^i_{,i} - \frac{1}{2} a^i a_i \right)_{,k} \xi^k + \left(\frac{2-n}{2n-2} R - a^i_{,i} - \frac{1}{2} a^i a_i \right) \mu.$$

Следовательно, уравнение (3.4), имеющее вид $N + 2c_{,k} \xi^k + 2c\mu = 0$, окончательно приводится к ковариантной форме

$$\xi^k H_{,k} + \mu H = 0, \quad (6.7)$$

где скаляр H определен формулой

$$H = -2c + a^i_{,i} + \frac{1}{2} a^i a_i + \frac{n-2}{2(n-1)} R. \quad (6.8)$$

Итак, в ковариантной форме система определяющих уравнений состоит из уравнений (5.12), (6.5), (6.6) и (6.7). Эти уравнения сохраняют свой вид при любых преобразованиях типа 27.1 (α).

7. Инварианты уравнения. Входящие в систему определяющих уравнений тензор K_{ij} и скаляр H будут называться **инвариантами уравнения** (1.1). Это название оправдано тем, что упомянутые величины являются аналогом инвариантов Лапласа невырожденного уравнения в случае $n=2$ (см. 9.2). Именно, справедливо следующее утверждение:

Т е о р е м а 1. Уравнения, имеющие одинаковые ассоциированные римановы пространства (одинаковые коэффициенты a^{ij}), эквивалентны относительно преобразования 27.1 (β), если и только если они имеют одинаковые тензоры K_{ij} и скаляры H .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если верно (1.4), то соотношения (1.6) для b^i , записанные в ковариантных компонентах a_i вектора (6.1), имеют вид

$$a'_i = a_i + 2\theta_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad (7.1)$$

откуда в силу определения (5.4) следуют равенства

$$K'_{ij} = K_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, n). \quad (7.2)$$

Кроме того, с помощью соотношений (1.6) и (7.1) простым вычислением устанавливается равенство

$$-2c' + a'^i_{,i} + \frac{1}{2} a'^i a'_i = -2c + a^i_{,i} + \frac{1}{2} a^i a_i,$$

откуда в силу определения (6.8) следует равенство

$$H' = H. \quad (7.3)$$

Обратно, пусть выполнены равенства (7.2) и (7.3). Из (7.2) следует, что $a'_i - a_i$ есть градиент некоторой функции, например, 2θ . Тогда выполнены равенства (7.1), а значит, и равносильная им первая серия равенств (1.6). Кроме того, можно обратить выкладку, которая привела к равенству (7.3), и получить для c' выражение (1.6). Поэтому с так выбранной функцией θ справедливо равенство

$$e^{-\theta} F[e^\theta u] = a'^i u_{,i} + b'^i u_i + c' u = F'[u],$$

а это и означает, что к уравнению (1.1) применено преобразование 17.1 (β). ■

Важно выяснить также поведение инвариантов при преобразованиях 27.1 (γ), т. е. при умножении левой части уравнения (1.1)

на множитель. При этом ассоциированное риманово пространство V_n переходит в ему конформное риманово пространство $\bar{V}_n$ с фундаментальной формой $\bar{a}_{ij}dx^i dx^j$.

Т е о р е м а 2. При преобразовании типа 17.1 (γ) инвариант K_{ij} сохраняется, а инвариант H приобретает множитель, а именно:

$$\bar{H} = e^{-2\theta} H. \quad (7.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из римановой геометрии известна следующая связь символов Кристоффеля пространств V_n и $\bar{V}_n$:

$$\Gamma_{ij}^k = \bar{\Gamma}_{ij}^k - \delta_i^k \theta_j - \delta_j^k \theta_i + \bar{a}_{ij} \bar{a}^{kl} \theta_l. \quad (7.5)$$

Из (1.8), (7.5) и определения вектора $\bar{a}^k$ для преобразованного уравнения получается соотношение

$$a^k = e^{2\theta} [\bar{a}^k + (n-2) \bar{a}^{kl} \theta_l]. \quad (7.6)$$

Для перехода к ковариантным компонентам этого вектора обе части равенства (7.6) умножаются на $a_{ik} = e^{-2\theta} \bar{a}_{ik}$ и суммируются по k . Это дает

$$a_i = \bar{a}_i + (n-2) \theta_i, \quad (7.7)$$

откуда и следует равенство $K_{ij} = \bar{K}_{ij}$. Далее, различая ковариантное дифференцирование в V_n , которое по-прежнему обозначается запятой в индексе, и в $\bar{V}_n$, которое будет обозначаться точкой с запятой в индексе, и используя (7.5) и (7.6), легко получить соотношение

$$a_{i,j}^{\cdot} = e^{2\theta} [\bar{a}_{i,j}^{\cdot} + (n-2) \bar{a}^{lj} \theta_{i,j} - (n-2) \bar{a}^l \theta_{i,j} - (n-2)^2 \bar{a}^{lj} \theta_l \theta_j].$$

Кроме того, перемножением (7.6) и (7.7) получается равенство

$$a^i a_i = e^{2\theta} [\bar{a}^i \bar{a}_i + 2(n-2) \bar{a}^i \theta_i + (n-2)^2 \bar{a}^{ij} \theta_i \theta_j].$$

Отсюда

$$a_{i,j}^{\cdot} + \frac{1}{2} a^i a_i = e^{2\theta} \left[\bar{a}_{i,j}^{\cdot} + \frac{1}{2} \bar{a}^i \bar{a}_i + (n-2) \bar{a}^{ij} \theta_{i,j} - \frac{1}{2} (n-2)^2 \bar{a}^{ij} \theta_i \theta_j \right].$$

С другой стороны, из римановой геометрии известно соотношение

$$R = e^{2\theta} [\bar{R} - 2(n-1) \bar{a}^{ij} \theta_{i,j} + (n-1)(n-2) \bar{a}^{ij} \theta_i \theta_j].$$

С помощью этих двух равенств из (6.8) получается (7.4). ■

8. Группы движений. Из римановой геометрии известно, что пространство V_n допускает группу движений с операторами вида $\xi^i(x) \partial_i$, если и только если выполнены уравнения Киллинга

Известно также, что размерность группы движений не превосходит числа $(1/2)n(n+1)$. С помощью этих фактов устанавливаются дальнейшие свойства группы, допускаемой уравнением (1.1).

Теорема. Если для уравнения (1.1) инвариант $H \neq 0$, то группа $G^r|X$, изоморфная допускаемой этим уравнением группе G^r , есть подгруппа группы движений риманова пространства, конформного ассоциированному с (1.1) пространству V_n .

Доказательство. Если уравнения $F'[u]=0$ и $F[u]=0$ связаны преобразованием 27.1 (γ), то они допускают одну и ту же группу. Но при $H \neq 0$ можно выбрать функцию θ так, чтобы было $H=e^{2\theta}$. При этом в силу (7.4) уравнение $F'[u]=0$ будет иметь инвариант $\bar{H}=1$. Но тогда определяющее уравнение (6.7) примет вид $\bar{\mu}=0$ и уравнения (5.12) сведутся к уравнениям Киллинга (8.1). ■

Следствие. Порядок группы G^r , допускаемой уравнением (1.1) с инвариантом $H \neq 0$, удовлетворяет неравенству

$$r \leq \frac{1}{2}n(n+1). \quad (8.2)$$

9. Случай группы максимального порядка. Согласно теореме 27.8 уравнение (1.1), у которого инвариант $H \neq 0$, эквивалентно уравнению, для которого $H=\text{const}$. Здесь будет показано, что если такое уравнение допускает группу максимально возможного порядка (8.2), то оно эквивалентно некоторому стандартному уравнению.

Этот результат получается с помощью известного из римановой геометрии факта, состоящего в том, что риманово пространство V_n с группой движений максимального порядка (8.2) необходимо имеет постоянную кривизну K_0 , связанную со скалярной кривизной соотношением

$$R = -n(n-1)K_0. \quad (9.1)$$

Кроме того, в пространстве V_n постоянной кривизны существует такая система координат, в которой его фундаментальная метрическая форма имеет вид *римановой формы*

$$ds^2 = P^{-1} \sum_{i=1}^n \epsilon_i (dx^i)^2, \quad (9.2)$$

где

$$P = \left(1 + \frac{1}{4} K_0 \rho^2\right)^2, \quad \rho^2 = \sum_{i=1}^n \epsilon_i (x^i)^2,$$

причем $\epsilon_i = \pm 1$ ($i=1, \dots, n$). Если все $\epsilon_i=1$, то ρ есть расстояние точки x от начала координат. Общий случай (когда не все $\epsilon_i=1$) приводится к этому с помощью формального рассмотрения X как комплексного пространства.

Т е о р е м а. Уравнение (1.1) с инвариантом $H \neq 0$, допускающее группу G^r порядка $r = n(n+1)/2$, при $n > 2$ эквивалентно уравнению

$$\left(1 + \frac{1}{4} K_0 \rho^2\right)^2 \Delta u = \frac{1}{2} H u, \quad (9.3)$$

где $H = \text{const}$ и Δ — обобщенный оператор Лапласа

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \partial_i^2, \quad (9.4)$$

причем ε_i имеют те же значения, что и в (9.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предполагается, что уравнение (1.1) уже приведено к такому, для которого $H = \text{const}$. Вначале устанавливается, что для рассматриваемого уравнения тензор $K_{ij} = 0$. Действительно, как было показано при доказательстве 27.8, здесь $\mu = 0$. Тогда уравнения (5.12) сводятся к уравнениям (8.1) и кроме них не должно быть никаких уравнений, связывающих значения компонент ξ_i и производных $\xi_{i,j}$ (иначе порядок r будет меньше числа $n(n+1)/2$). Это означает, что из уравнений (6.6), переписанных в виде

$$K_{is} \xi_s - K_{js} \xi_s + (K_{is,j} - K_{js,i}) \xi^s = 0,$$

должно следовать соотношение $K_{is} \xi_s - K_{js} \xi_s = 0$ или, в ковариантных компонентах вектора ξ ,

$$K_{is} a^{si} \xi_{i,j} - K_{js} a^{si} \xi_{i,i} = 0.$$

Отсюда в силу (8.1) вытекают тождества

$$K_{is} a^{si} \delta_j^k - K_{js} a^{si} \delta_i^k - K_{is} a^{sk} \delta_j^i + K_{js} a^{sk} \delta_i^i = 0.$$

Если здесь положить $k = j$ и просуммировать по j , то получится равенство $(n-2) K_{is} a^{si} = 0$, откуда $K_{is} = 0$.

Из этого факта следует, что вектор a_i есть градиент некоторой функции ψ , т. е. $a_i = \partial_i \psi$. В силу (9.2) рассматриваемое уравнение может быть взято в виде

$$P \Delta u + b^i u_i + cu = 0. \quad (9.5)$$

Утверждается, что оно эквивалентно уравнению, у которого все $b^i = 0$. Действительно, простой подсчет символов Кристоффеля приводит к формуле

$$a^{ki} \Gamma_{ki}^i = \frac{n-2}{2} \delta^{is} \partial_s P.$$

Поэтому из определения (6.1) следует, что b^i — компоненты вектора и что его ковариантные компоненты таковы:

$$b_i = a_i - \frac{n-2}{2} \partial_i \ln P = \partial_i \left(\psi - \frac{n-2}{2} \ln P \right) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Следовательно, преобразование 17.1 (β) с функцией

$$\theta = \frac{n-2}{4} \ln P - \frac{1}{2} \psi$$

в силу формул (1.6) приведет к уравнению, для которого $b''=0$. При этом инвариант H не меняется, в частности, остается постоянным.

Итак, можно считать, что в уравнении (9.5) коэффициенты $b'=0$. В этом случае элементарное вычисление инварианта H по формуле (6.8) приводит к значению $H=-2c$, в силу чего (9.5) совпадает с (9.3). ■

С л е д с т в и е. Всякое уравнение (1.1) с инвариантом $H \neq 0$, допускающее группу G' максимального порядка, эквивалентно одному из следующих стандартных уравнений: если $K_0=0$, то уравнению

$$\Delta u = \pm u, \quad (9.6)$$

а если $K_0 \neq 0$, то уравнению

$$(1 \pm \rho^2)^2 \Delta u = \lambda u \quad (\lambda = \text{const}). \quad (9.7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $K_0=0$ с помощью подходящего растяжения вектора x можно добиться равенства $H=\pm 1$. При $K_0 \neq 0$ аналогичным преобразованием получается $K_0=\pm 4$, а значит, уравнение (9.7) с $\lambda=2H/K_0$. ■

10. Группы, допускаемые стандартными уравнениями. Для простоты здесь будут найдены алгебры Ли L' , допускаемые стандартными уравнениями в эллиптическом случае, когда все $\varepsilon_i=1$. Общий случай получается отсюда заменой $x'^i = \sqrt{-1} x^i$ для тех значений i , для которых $\varepsilon_i=-1$, если $K_0>0$ (или для $\varepsilon_i=1$, если $K_0<0$).

Группа G' , допускаемая уравнением (9.6), видна непосредственно: она порождается n переносами по направлениям координатных осей и $n(n-1)/2$ вращениями вокруг этих осей, причем величина u остается неизменной. Базис алгебры Ли этой группы состоит из операторов переноса

$$\zeta_i \cdot \partial = \partial_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (10.1)$$

и операторов вращения

$$\zeta_{ij} \cdot \partial = x^i \partial_j - x^j \partial_i \quad (i, j=1, \dots, n; i < j). \quad (10.2)$$

Уравнение (9.7) также допускает операторы (10.2). Для отыскания остальных n операторов удобно переписать уравнение в виде

$$\Delta u - \lambda(1 + \rho^2)^{-2} u = 0. \quad (10.3)$$

Здесь $a'^j = \delta'^j$, $a_{ij} = \delta_{ij}$ и все $\Gamma_{ki}^i = 0$, в силу чего ковариантные производные совпадают с обычными ∂_i . Кроме того, тензор

кривизны $R'_{kij}=0$. Использование уравнений (5.13) показывает, что при $n > 2$ функция μ линейна, а любая координата ξ^i квадратична относительно $\{x^i\}$. С учетом этого обстоятельства для уравнений (5.12) легко находится следующее общее решение (штрих при знаке суммы указывает на то, что надо опустить слагаемое с $s=i$):

$$\xi_i = A_i \left[(x^i)^2 - \sum_{s=1}^n (x^s)^2 \right] + 2 \sum_{s=1}^n A_s x^s x^i + B x^i + \sum_{s=1}^n C_{is} x^s + C_i, \quad (10.4)$$

$$\mu = 4A_k x^k + 2B,$$

где A_i , B , C_{ij} и C_i — произвольные постоянные, причем $C_{ij} = -C_{ji}$.

В силу (10.4) и того, что $a_i = 0$ и $K_{ij} = 0$, уравнение (6.5) легко интегрируется и дает

$$\sigma = -(n-2)A_k x^k, \quad (10.5)$$

а уравнение (6.6) удовлетворено тождественно. Остается удовлетворить последнему из определяющих уравнений (6.7), которое здесь принимает вид

$$\xi^k \partial_k c + \mu c = 0,$$

причем $c = -\lambda(1+\rho^2)^{-2}$. Подстановка в это уравнение общего решения (10.4) показывает, что оно выполняется, если и только если $B=0$ и $C_k = A_k$ ($k=1, \dots, n$).

Окончательно общее решение определяющих уравнений алгебры Ли L^r операторов вида (3.1), допускаемых уравнением (10.3), есть

$$\xi^i = A_i \left[(x^i)^2 - \sum_{s=1}^n (x^s)^2 + 1 \right] + 2 \sum_{s=1}^n A_s x^s x^i + \sum_{s=1}^n C_{is} x^s, \quad (10.6)$$

$$\sigma = -(n-2)A_k x^k.$$

Здесь постоянные A_i произвольны, а C_{ij} связаны только соотношениями $C_{ij} = -C_{ji}$. Штрих при знаке суммы имеет тот же смысл, что и в (10.4).

Очевидно, что постоянные C_{ij} дают базисные операторы (10.2). Постоянные A_i соответствуют новым операторам, заменяющим для уравнения (10.3) операторы переноса (10.1). Эти новые операторы таковы (так как ассоциированное с уравнением (10.3) пространство V_n евклидово, то можно отождествить $x^i = x_i$):

$$\zeta_i \cdot \partial = (2x_i x^k + (1-\rho^2)\delta_i^k) \partial_k - (n-2)x_i \partial_u \quad (i=1, \dots, n). \quad (10.7)$$

Группы G^r , допускаемые уравнениями (9.6) и (10.3), имеют одинаковую размерность, но не изоморфны, так как алгебра Ли операторов с базисом (10.1), (10.2) содержит разрешимый (абелев) идеал с базисом (10.1), а алгебра Ли (10.2), (10.7) полупроста. Последний факт нетрудно проверить с помощью критерия Картана 14.6.

§ 28. Касательные преобразования

1. Специальное расширение пространства. Для формулировки определения и различных свойств касательных преобразований удобна следующая абстрактная конструкция расширения пространства, в которой продолженные пространства как бы дублируются.

Пусть даны банаховы пространства $Z = X \times Y$ и пусть $Y_1 = \mathcal{L}(X; Y)$ есть первое продолжение Y с помощью X (см. 4.2). Продолженное пространство $Z_1 = Z \times Y_1$ может рассматриваться как произведение пространств X и $Y^{(1)} = Y \times Y_1$. В этом случае оно будет обозначаться также через $Z^{(1)}$. Это представление $Z^{(1)} = X \times Y^{(1)}$ и кладется в основу специального расширения. Для векторов пространств X и Y принимаются обычные обозначения, а именно $x \in X$, $y \in Y$, и вводится новое обозначение $p \in Y_1$; тогда пара (y, p) представляет общий вектор пространства $Y^{(1)}$.

Так же как и в 4.2, рассматриваются продолжения $Y_k^{(1)}$ пространства $Y^{(1)}$ с помощью X и им соответствующие продолжения $Z_k^{(1)}$ пространства $Z^{(1)}$. Ясно, что каждое продолжение $Y_k^{(1)}$ является произведением соответствующих продолжений Y_k и $(Y_1)_k$, т. е. $Y_k^{(1)} = Y_k \times (Y_1)_k$ в силу чего общий вектор пространства $Y_k^{(1)}$ записывается в виде пары (y, p) . Следовательно, векторы $z_k^{(1)} \in Z_k^{(1)}$ имеют представление

$$z_k^{(1)} = (x, (y, p), (y, p), \dots, (y, p)). \quad (4.1)$$

В теории продолжения важную роль играет оператор полного дифференцирования отображений $Z_k^{(1)} \rightarrow P$, который в соответствии с 4.3 здесь имеет вид

$$D = \partial_x + y \cdot \partial_y + p \cdot \partial_p + y \cdot \partial_y + p \cdot \partial_p + \dots \quad (4.2)$$

2. Основное определение. Рассматриваются преобразования пространства $Z^{(1)}(x, y, p)$ класса $C_\infty(Z^{(1)})$ с компонентами $f: Z^{(1)} \rightarrow X$, $g: Z^{(1)} \rightarrow Y$ и $h: Z^{(1)} \rightarrow Y_1$, действующими по формулам

$$x' = f(x, y, p), \quad y' = g(x, y, p), \quad p' = h(x, y, p). \quad (2.1)$$

Каждое такое преобразование, удовлетворяющее условию, аналогичному 4(5.2), может быть продолжено по правилам, изложенным в 4.5, до преобразования $Z_1^{(1)} \rightarrow Z_1^{(1)}$. При этом дополнительные компоненты продолженного преобразования даются формулами (см. 4(5.4))

$$y_1' = (Dg) \circ (Df)^{-1}, \quad p_1' = (Dh) \circ (Df)^{-1}. \quad (2.2)$$

Среди всех преобразований вида (2.1) касательные преобразования выделяются следующим определением.

Преобразование (2.1) называется касательным преобразованием пространства $Z^{(1)}$, если многообразие в $Z^{(1)}$, заданное уравнением

$$y = p, \quad (2.3)$$

инвариантно относительно продолженного преобразования (2.1), (2.2). Это означает, что на многообразии (2.3) выполнено тождество

$$y' = p'. \quad (2.4)$$

Геометрический смысл этого определения раскрывается через аналитическое истолкование многообразия (2.3) путем рассмотрения действия преобразования (2.1) на отображения $X \rightarrow Y^{(1)}$ вида $y = u(x)$, $p = v(x)$. Согласно 4.4 продолжение такого отображения дается формулами $y = du(x)$, $p = dv(x)$, в силу которых на многообразии (2.3) выполнено тождество $v(x) = du(x)$. Тем самым задание многообразия (2.3) равносильно рассмотрению специального класса отображений $X \rightarrow Y^{(1)}$, действующих по формулам

$$y = u(x), \quad p = du(x). \quad (2.5)$$

Если первое из этих равенств рассматривать как уравнение многообразия $U \subset Z$, то второе можно считать задающим касательное пространство к многообразию U в том смысле, что для любого $a \in X$ вектор $p\langle a \rangle = du(x)\langle a \rangle$ является касательным к U в точке x . Следовательно, данное определение касательного преобразования означает, что для любого многообразия $U \subset Z$ с уравнением $y = u(x)$ верно следующее: если U переходит в U' , то одновременно касательное многообразие к U переходит в касательное многообразие к U' .

В частности, когда отображения f и g в (2.1) не зависят от p , первая из формул (2.2) дает уже известное из 4 (5.4) продолжение преобразования пространства Z и в силу (2.4) совпадает с последней формулой (2.1). Такое касательное преобразование называется *продолженным точечным преобразованием*.

В связи с данным определением возникают вопросы о том, существуют ли касательные преобразования, не являющиеся продолженными точечными и о возможно более простом представлении любого касательного преобразования. В дальнейшем эти и другие вопросы будут изучаться для групп Ли касательных преобразований. Благодаря введенной выше конструкции, связанной с рассмотрением инвариантного многообразия (2.3), ответы на них могут быть даны на инфинитезимальной основе (т. е. в терминах алгебр Ли операторов), изложенной в предыдущих главах.

3. Представление инфинитезимального оператора. Оператор однопараметрической группы $G^1(\tau)$ касательных преобразований задается векторным полем $\tau: Z^{(1)} \rightarrow Z^1$ и записывается формулой

$$\tau \cdot \partial = \xi \cdot \partial_x + \eta \cdot \partial_y + \zeta \cdot \partial_p \quad (3.1)$$

с некоторыми отображениями $\xi: Z^{(1)} \rightarrow X$, $\eta: Z^{(1)} \rightarrow Y$ и $\zeta: Z^{(1)} \rightarrow Y_1$ класса $C_\infty(Z^{(1)})$. Первое продолжение оператора (3.1) имеет вид

$$\tau_1 \cdot \partial = \tau \cdot \partial + \alpha \cdot \partial_y + \beta \cdot \partial_p$$

и выполняется по формулам 4 (8.4) с помощью оператора полного дифференцирования (1.2), а именно:

$$\alpha = D\eta - y \cdot D\xi, \quad \beta = D\zeta - p \cdot D\xi. \quad (3.2)$$

Из основного определения 28.2 и критерия инвариантности многообразия 3(12.4) следует, что (3.1) есть оператор группы $G'(\tau)$ касательных преобразований, если и только если на многообразии (2.3) выполнено тождество $\alpha = \zeta$ или, в силу (3.2), в развернутой форме

$$[\partial_x \eta + p \cdot \partial_y \eta + p \cdot \partial_p \eta - p \cdot (\partial_x \xi + p \cdot \partial_y \xi + p \cdot \partial_p \xi)] = \zeta.$$

Так как отображения ξ , η , ζ не зависят от p , то это условие расщепляется относительно p и дает следующие определяющие уравнения касательных преобразований:

$$\partial_p \eta = p \circ \partial_p \xi, \quad (3.3)$$

$$\zeta = \partial_x \eta + p \cdot \partial_y \eta - p \cdot (\partial_x \xi + p \cdot \partial_y \xi). \quad (3.4)$$

Лемма. Если $\dim Y > 1$, то необходимо $\partial_p \xi = \partial_p \eta = 0$, т. е. любое касательное преобразование является продолженным точечным.

Доказательство. Этот факт следует из условия интегрируемости уравнения (3.3), как уравнения относительно неизвестного η . С помощью произвольного постоянного (пробного) вектора $A \in Y_1$ уравнение (3.3) переписывается в виде

$$\partial_p \eta \langle A \rangle = p \langle \partial_p \xi \langle A \rangle \rangle.$$

Повторное дифференцирование по p , взятие производной на пробном векторе $B \in Y_1$ и запись условия симметричности вторых производных вида $\partial_p^2 \eta \langle B, A \rangle$ приводит к соотношению

$$A \langle \partial_p \xi \langle B \rangle \rangle = B \langle \partial_p \xi \langle A \rangle \rangle. \quad (3.5)$$

В частности, если в качестве A и B взять диады, а именно, $A = a \otimes c$ и $B = b \otimes d$, где $a, b \in Y$ и $c, d \in X^*$, то в силу формулы

вида $(a \otimes c) \langle e \rangle = a(c \cdot e)$, справедливой для любого вектора $e \in X$, предыдущее соотношение примет вид

$$a(\partial_p(c \cdot \xi) \langle B \rangle) = b(\partial_p(d \cdot \xi) \langle A \rangle),$$

где множители вида $\partial_p(c \cdot \xi) \langle B \rangle$ — скаляры. Поэтому, если $\dim Y > 1$, то найдутся линейно независимые векторы $a, b \in Y$, и из этого соотношения следует равенство $\partial_p(c \cdot \xi) \langle B \rangle = 0$, равносильное равенству $\partial_p \xi = 0$. ■

Замечание. Если $\dim Y = 1$, то в качестве A и B в соотношении (3.5) можно взять векторы пространства X^* . Тогда (3.5) можно переписать в виде

$$A \cdot \partial_p \xi \langle B \rangle = B \cdot \partial_p \xi \langle A \rangle,$$

а это соотношение равносильно факту вполне интегрируемости отображения $\xi: Y_1 \rightarrow X$, т. е. существованию решения уравнения

$$\partial_p W = \xi \quad (3.6)$$

с искомым отображением $W: Y_1 \rightarrow R$.

Общее представление операторов касательных преобразований пространства $Z^{(1)}$ дается следующей теоремой.

Теорема. *Группа $G^1(\tau)$ касательных преобразований пространства $Z^{(1)}$ не является группой продолженных точечных преобразований пространства $Z = X \times Y$, только если $\dim Y = 1$. В последнем случае $G^1(\tau)$ является группой касательных преобразований, если и только если существует такая функция $W: Z^{(1)} \rightarrow R$, с которой для компонент оператора (3.1) этой группы справедливо представление*

$$\xi = \partial_p W, \quad \eta = p \cdot \partial_p W - W, \quad \zeta = -\partial_x W - p \partial_y W. \quad (3.7)$$

Доказательство. Первое утверждение следует из предыдущей леммы. Если $\dim Y = 1$, то с любой функцией $W: Z^{(1)} \rightarrow R$ формулы (3.7) дают решение определяющих уравнений (3.3), (3.4). Обратно, если такое решение дано, то можно определить функцию W формулой

$$W = p \cdot \xi - \eta, \quad (3.8)$$

с которой, как нетрудно проверить, будут выполнены равенства (3.7). ■

Из этой теоремы следует, что каждому оператору касательных преобразований взаимно однозначно соответствует *характеристическая функция* W , через которую его координаты выражаются по формулам (3.7). Если имеются два оператора касательных преобразований $\tau_1 \cdot \partial$ и $\tau_2 \cdot \partial$, то их коммутатор $[\tau_1, \tau_2] \cdot \partial$ также является оператором касательного преобразования. Это вытекает из леммы 7.11, в силу которой многообразие, допускающее два

оператора, допускает и их коммутатор, и из того, что касательные преобразования определены как преобразования, допускаемые многообразием (2.3). В силу предыдущей теоремы коммутатору $[\tau_1, \tau_2] \cdot \partial$ соответствует характеристическая функция, которая должна определяться характеристическими функциями W_1 и W_2 операторов $\tau_1 \cdot \partial$ и $\tau_2 \cdot \partial$. Эта функция будет называться *коммутатором функций* W_1 и W_2 и будет обозначаться символом $[W_1, W_2]$. Простое вычисление дает для этого коммутатора выражение

$$[W_1, W_2] = \partial_p W_1 \cdot \partial_x W_2 + (p \cdot \partial_p W_1 - W_1) \partial_y W_2 - \\ - \partial_p W_2 \cdot \partial_x W_1 - (p \cdot \partial_p W_2 - W_2) \partial_y W_1. \quad (3.9)$$

Касательное преобразование (2.1) называется *однородным*, если $g(x, y, p) = y$, а отображения f и h не зависят от y . Характеристическая функция W группы $G^1(\tau)$ однородных касательных преобразований не зависит от y и оператор такой группы имеет вид

$$\tau \cdot \partial = (\partial_p W) \cdot \partial_x - (\partial_x W) \cdot \partial_p. \quad (3.10)$$

При этом из (3.7) следует, что $p \cdot \partial_p W = W$, т. е. в силу теоремы Эйлера характеристическая функция W однородна относительно p степени однородности, равной единице. Ясно, что и обратно, оператор (3.10) с любой однородной функцией W степени однородности, равной единице, является оператором группы $G^1(\tau)$ однородных касательных преобразований. Коммутатор (3.9) таких однородных характеристических функций сводится к выражению

$$[W_1, W_2] = \partial_p W_1 \cdot \partial_x W_2 - \partial_p W_2 \cdot \partial_x W_1, \quad (3.11)$$

которое обычно называется *скобкой Пуассона* функций W_1 и W_2 .

4. Приложения. Многие применения касательных преобразований в геометрии и механике вытекают из следующего факта. Пусть на пространстве $Z^{(1)} = X \times Y \times Y_1$, где $\dim Y = 1$, дано дифференциальное уравнение первого порядка

$$W(x, y, y') = 0. \quad (4.1)$$

Тогда группа $G^1(\tau)$ касательных преобразований пространства $Z^{(1)}$, для которой W есть характеристическая функция, обладает тем свойством, что получаемые ее действием орбиты точек пространства $Z^{(1)}$ совпадают с характеристиками уравнения (4.1). Действительно, в силу (3.7) уравнения Ли группы $G^1(\tau)$ (которые и являются дифференциальными уравнениями орбит) имеют вид

$$\partial_x x = \partial_p W, \quad \partial_x y = p \cdot \partial_p W - W, \quad \partial_x p = -\partial_x W - p \partial_y W, \quad (4.2)$$

а это и есть дифференциальные уравнения характеристик уравнения (4.1).

В случае группы $G^1(\tau)$ однородных касательных преобразований уравнения (4.2) принимают вид *гамильтоновой системы*

$$\partial_a x = \partial_p W, \quad \partial_a p = -\partial_x W,$$

что открывает возможность применения группового анализа в механике динамических систем. Дальнейшие подробности о приложениях в геометрии и механике можно найти в книге Эйзенхарт «Непрерывные группы преобразований».

Представляет интерес также использование касательных преобразований для группового анализа дифференциальных уравнений. Например, С. Ли была дана групповая классификация общего (нелинейного) уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными по группам касательных преобразований. Полное изложение этого результата требует слишком много места и ниже в качестве примера будет рассмотрено только *уравнение Монжа—Ампера*. Уже на этом примере хорошо видно, что переход к касательным преобразованиям существенно расширяет допускаемую группу.

Пусть $Z = X \times Y$, где $X = R^2(x^1, x^2)$ и $Y = R(y)$. Простейшее уравнение Монжа—Ампера есть

$$y_{11}y_{22} - y_{12}^2 = 0, \quad (4.3)$$

где $y_{ij} = \partial_i \partial_j y$. Ищется группа однородных касательных преобразований, допускаемых уравнением (4.3). Допускаемый оператор записывается в виде

$$\tau \cdot \partial = W_p \partial_1 + W_q \partial_2 - W_1 \partial_p - W_2 \partial_q, \quad (4.4)$$

где $p = y_1$, $q = y_2$ и индексами при W обозначены производные $\partial_i = \partial_{x^i}$, ∂_p и ∂_q . Продолжение оператора (4.4) на производные $r = y_{11}$, $s = y_{12}$, $t = y_{22}$ (обозначения Монжа) есть

$$\tau \cdot \partial = \tau \cdot \partial - \pi \partial_r - \rho \partial_s - \sigma \partial_t,$$

где π , ρ , σ находятся по формулам (3.2) и имеют выражения:

$$\begin{aligned} \pi &= W_{11} + 2rW_{1p} + 2sW_{1q} + r^2W_{pp} + 2rsW_{pq} + s^2W_{qq}, \\ \rho &= W_{12} + rW_{2p} + s(W_{1p} + W_{2q}) + tW_{1q} + rsW_{pp} + \\ &\quad + (rt + s^2)W_{pq} + stW_{qq}, \\ \sigma &= W_{22} + 2sW_{2p} + 2tW_{2q} + s^2W_{pp} + 2stW_{pq} + t^2W_{qq}. \end{aligned}$$

В результате действия оператором $\tau \cdot \partial$ на функцию $rt - s^2$, перехода на многообразие $rt = s^2$ и расщепления относительно

переменных r, t получаются определяющие уравнения

$$W_{1p} + W_{2q} = 0, \quad W_{11} = W_{12} = W_{22} = 0.$$

Построение общего решения этих уравнений особых трудностей не вызывает и приводит к следующему результату:

$$W = x^1 \varphi_q - x^2 \varphi_p + \psi \quad (4.5)$$

с произвольными функциями $\varphi, \psi: R^2(p, q) \rightarrow R$ подчиненными лишь условию, чтобы они были однородными, причем φ — второй степени, а ψ — первой степени однородности.

Расширение допускаемой группы здесь очевидно, так как с характеристической функцией (4.5) оператор (4.4) будет оператором группы продолженных точечных преобразований, только если φ есть однородный полином второй степени, а ψ — первой степени.

Вообще, полезно иметь в виду, что поскольку группы касательных преобразований являются группами Ли преобразований, для них справедливы все факты, выводы и алгоритмы, рассмотренные в предыдущих главах. В частности, с их помощью можно организовать поиск классов частных решений дифференциальных уравнений с одной искомой функцией, осуществлять групповую классификацию и групповое расслоение таких уравнений и т. п.

5. Продолжение касательных преобразований. В связи с данным в 28.2 основным определением касательных преобразований необходимо выяснить, какую роль играет в нем «дублирование» продолженных пространств X_k . Возникает вопрос о том, не является ли второй экземпляр этого пространства «лишним». Оказывается, что это действительно так и этот второй экземпляр можно убрать за счет перехода на инвариантное многообразие. Для простоты изложения здесь соответствующие результаты будут получены в случае групп Ли касательных преобразований (достаточно ограничиться группами $G^1(\tau)$).

Рассматриваются уже введенные в 28.1 продолженные пространства $Z_k^{(1)}$ точек вида (1.1) и многообразие $T_k \subset Z_k^{(1)}$, заданное уравнениями

$$y_1 = p, \quad y_2 = p, \dots, y_k = p. \quad (5.1)$$

Пусть $G^{(1)}(\tau)$ есть группа касательных преобразований пространства $Z^{(1)}$ с оператором (3.1) и $G_k^{(1)}(\tau)$ — ее продолжение на пространство $Z_k^{(1)}$.

Лемма. Для любого $k \geq 1$ многообразие T_k инвариантно относительно группы $G_k^{(1)}(\tau)$. Оператор, индуцированный продолженным оператором $\tau \cdot \partial$ на многообразии T_k , совпадает с $(k+1)$ -м

продолжением оператора, индуцированного на T_1 оператором $\xi \cdot \partial_x + \eta \cdot \partial_y$.

Доказательство. Очевидно, что многообразие T_k является продолженным многообразием, получаемым продолжением многообразия T_1 по способу, описанному в 19.5. Легко проверить, что в силу (3.3) и (3.4) справедливо представление

$$(\tau \cdot \partial)(y - p) = F \cdot (y - p)$$

с некоторым отображением $F: Z_1^{(1)} \rightarrow Y_1$. Поэтому здесь выполнены условия леммы 19.5 и первое утверждение является ее частным случаем.

Далее, k -е продолжение оператора (3.1) есть

$$\begin{aligned} \tau \cdot \partial = & \xi \cdot \partial_x + \eta \cdot \partial_y + (\zeta \cdot \partial_p + \eta \cdot \partial_y) + \dots \\ & \dots + (\zeta \cdot \partial_{p_{k-1}} + \eta \cdot \partial_y) + \zeta \cdot \partial_p, \end{aligned} \quad (5.2)$$

и условие инвариантности многообразия (5.1) состоит в том, что на T_k

$$\zeta = \eta, \quad \zeta = \eta, \dots, \zeta = \eta. \quad (5.3)$$

В результате замены $(y, p) \rightarrow (y, \theta)$, где $\theta = y - p$ ($s=1, \dots, k$), оператор, индуцированный оператором (5.2) на T_k в силу (5.3) и того, что $\zeta = \eta$, $p = y$, оказывается таким:

$$\tau \cdot \partial = \xi \cdot \partial_x + \eta \cdot \partial_y + \eta \cdot \partial_{y_1} + \dots + \eta \cdot \partial_{y_k} + \eta \cdot \partial_{y_{k+1}}. \quad (5.4)$$

Кроме того, аналогичный переход на многообразии (5.1) в операторе полного дифференцирования D дает выражение

$$\bar{D} = \partial_x + y \cdot \partial_{y_1} + y \cdot \partial_{y_2} + \dots$$

Поэтому оператор (5.4) совпадает с $(k+1)$ -м продолжением оператора $\tau \cdot \partial = \xi \cdot \partial_x + \eta \cdot \partial_y$, взятого на многообразии $p = y$. ■

Эта лемма показывает, что при операциях с касательными преобразованиями переменные p фактически оказываются «лишними» и их можно не рассматривать. Эти переменные выполняют служебную роль при определении касательных преобразований.

6. Касательные преобразования высших порядков. Предыдущие построения относились к касательным преобразованиям и группам касательных преобразований первого порядка. Естественно возникает вопрос о том, не приведет ли к дальнейшему расширению класса групп рассмотрение касательных преобразований высших порядков.

Понятие таких преобразований формируется по аналогии с тем, которое изложено в 28.1, 28.2 и является его обобщением. Продолженное пространство Z_l представляется в виде произведения $Z^{(l)} = X \times Y^{(l)}$, где $Y^{(l)} = Y \times Y_1 \times \dots \times Y_l$ и рассматривается продолженное пространство $Z_1^{(l)}$, получаемое путем продолжения $Y^{(l)}$ с помощью X . При этом $Z_1^{(l)} = X \times Y^{(l)} \times Y_1^{(l)}$, где $Y_1^{(l)} = \mathcal{L}(X; Y^{(l)})$. В соответствии с представлением $Y^{(l)}$ и $Y_1^{(l)}$ в виде произведения, векторы этих пространств записываются в виде наборов

$$(y, p^{(1)}, \dots, p^{(l)}) \in Y^{(l)}, \quad (y, p_1^{(1)}, \dots, p_1^{(l)}) \in Y_1^{(l)}.$$

Рассматриваются преобразования пространства $Z^{(l)}$ класса C_∞ и их продолжения на пространство $Z_1^{(l)}$. Основное определение здесь таково:

Преобразование пространства $Z^{(l)}$ называется касательным преобразованием порядка l , если многообразие в $Z_1^{(l)}$

$$y = p^{(1)}, \quad p_1^{(1)} = p^{(2)}, \dots, p_1^{(l-1)} = p^{(l)} \quad (6.1)$$

инвариантно относительно соответствующего продолженного преобразования.

Очевидно, что l -е продолжение любого касательного преобразования первого порядка может рассматриваться как касательное преобразование порядка $l+1$. Оказывается, что в общем случае этим и исчерпываются введенные преобразования. Именно, справедливо утверждение.

Любое касательное преобразование высшего порядка является продолженным касательным преобразованием первого порядка.

Этот результат устанавливается особенно просто для групп Ли $G^1(\tau)$ касательных преобразований порядка l . В случае $\dim Y_1 > 1$ достаточно повторить, с надлежащими видоизменениями, рассуждение, использованное в доказательстве леммы 18.5. Роль «ограничителя» при этом играет переменная $p_1^{(l)}$, которая появляется в координатах продолженного оператора $\tau \cdot \partial_1$, в то время как сам оператор

$\tau \cdot \partial$ от нее не зависит. Это влечет расщепление условия инвариантности многообразия (6.1) по этой переменной, что и приводит к упомянутому результату. Немного сложнее случай $\dim Y_1 = 1$, когда все пространства X , Y и Y_* одномерны. Здесь существенно используется инвариантность всего многообразия (6.1).

7. Группы Ли—Бэклунда. Устранение ограничения, препятствующего расширению класса групп путем перехода к касательным преобразованиям, возможно, если у пространства $Z^{(l)}$ «нет конца», т. е. с использованием бесконечного продолжения $Z^{(\infty)}$. В этом случае $Z^{(\infty)} = X \times Y^{(\infty)}$ и $Z_1^{(\infty)} = X \times Y^{(\infty)} \times Y_1^{(\infty)}$, где $Y_1^{(\infty)}$ получено продолжением $Y^{(\infty)}$ с помощью X . С сохранением предыдущих

обозначений векторы этих пространств записываются в виде бесконечных наборов

$$(y, p^{(1)}, p^{(2)}, \dots) \in Y^{(\infty)}, \quad (y, p_1^{(1)}, p_1^{(2)}, \dots) \in Y_1^{(\infty)},$$

$$(x, y, p^{(1)}, p^{(2)}, \dots) \in Z^{(\infty)},$$

и соответствующее многообразие $T_\infty \subset Z_1^{(\infty)}$ задается бесконечной последовательностью уравнений

$$y = p_1^{(1)}, \quad p_1^{(1)} = p^{(2)}, \quad p_1^{(2)} = p^{(3)}, \dots \quad (7.1)$$

Рассматриваются преобразования пространства $Z^{(\infty)}$ вида

$$\omega' = F(\omega), \quad (7.2)$$

где $\omega = (x, y, p^{(1)}, p^{(2)}, \dots)$, подчиненные следующему определению:

Преобразование (7.2) называется преобразованием Ли—Бэклунда, если многообразие T_∞ , заданное уравнениями (7.1), инвариантно относительно соответствующего продолженного преобразования.

Так же как и в случае касательных преобразований, «дублирование» пространств Y_k устраняется путем перехода на инвариантное многообразие T_∞ , в результате чего получаются просто преобразования бесконечно продолженного пространства Z_∞ точек

$$z_\infty = (x, y, y_1, y_2, \dots), \quad (7.3)$$

действующие по формулам гйда

$$x' = f(z_\infty), \quad y' = g(z_\infty), \quad y_1' = v_1(z_\infty), \quad y_2' = v_2(z_\infty), \dots \quad (7.4)$$

при условии, что функции v_k выражаются через f, g по формулам продолжения 4(5.3), 4(5.4), которые следует писать с «бесконечным» оператором полного дифференцирования D .

Пусть $G^1(\tau)$ есть группа преобразований гйда (7.4). Тогда ее инфинитезимальный оператор есть

$$\tau \cdot \partial = \xi \cdot \partial_x + \eta \cdot \partial_y + \eta_1 \cdot \partial_{y_1} + \eta_2 \cdot \partial_{y_2} + \dots, \quad (7.5)$$

где η_k определены формулами 4(8.5), а именно:

$$\eta_k = D^k(\eta - y \cdot \xi) + y_{k+1} \cdot \xi \quad (k=1, 2, \dots). \quad (7.6)$$

Опираясь на эти формулы, можно дать следующее определение группы Ли—Бэклунда:

Группа $G^1(\tau)$ преобразований пространства Z_∞ с оператором (7.5) называется группой Ли—Бэклунда, если компоненты этого оператора удовлетворяют соотношениям (7.6).

В связи с этим формальным определением возникает ряд вопросов как относительно топологических свойств рассматриваемых преобразований (пока в Z_∞ никакой топологии не введено), так и относительно возможного использования (хотя бы формального) этих групп для решения задач группового анализа дифференциальных уравнений. В настоящее время эти вопросы еще изучаются и можно отметить только, что уже имеющиеся (правда, немногочисленные) результаты указывают на перспективность приложений групп Ли—Бэклунда.

§ 29. Краевые задачи

1. Общие соображения. В широком смысле краевая задача для данного дифференциального уравнения E (системы уравнений) заключается в отыскании решения U , удовлетворяющего некоторому дополнительному условию Γ (системе условий), которое необходимо для определения одного конкретного решения. Обычно такое условие задается на границе области определения решения (граничное условие). Возникает вопрос: могут ли средства группового анализа помочь при решении краевой задачи и в чем именно может выразиться такая помощь?

Уже накопленный в этой области опыт исследования свидетельствует о том, что техника группового анализа оказывается полезной при изучении краевых задач в нескольких отношениях. Она находит применение для преобразования данной задачи (уравнения E и граничного условия Γ) к более простой и удобной форме, для обнаружения и исследования особенностей в решении, для приближенного анализа задачи путем построения упрощенных уравнений и граничных условий (моделирования краевой задачи), для выяснения возможной принадлежности искомого решения какому-либо более просто описываемому классу частных решений и т. д. На эти возможности применения группового анализа можно привести содержательные примеры. Однако ввиду недостатка места ниже будет рассмотрена лишь проблема инвариантности (или частичной инвариантности) решения некоторых краевых задач.

Если краевая задача имеет единственное решение, то из инвариантности E и Γ относительно некоторой (одной и той же) группы преобразований следует также инвариантность решения U краевой задачи. Это утверждение очевидно в тех случаях, когда E и Γ можно рассматривать как многообразия в одном и том же пространстве (при этом Γ интерпретируется как граничное многообразие), причем тот факт, что U есть решение краевой задачи, может быть записан формулой включения

$$\{\Gamma \subset U_k \subset E \quad (1.1)$$

с надлежащим продолжением U_k многообразия—решения U .

Для правильной оценки возможностей применения методов группового анализа к краевым задачам необходимо учитывать, что в теории групп Ли преобразований рассматриваются локальные преобразования, в то время как ряд краевых задач связан с рассмотрением граничного условия «в целом» (например, для эллиптических уравнений). Поэтому развитая выше техника группового анализа применима без дополнительных ограничений к краевым задачам, допускающим локальное рассмотрение, таким, как задача Коши, задача Гурса (в случае гиперболических уравнений) и некоторые другие.

2. Системы первого порядка. Проблема инвариантности будет рассматриваться для определенной (см. 23.1) системы первого порядка, заданной на пространстве $Z = X \times Y$, где $X = R(t) \times X'$, $X' = R^n(x)$, $Y = R^m(y)$. Для вектора $y \in Y_1$ справедливо представление $y = (y_i, p)$, компоненты которого принадлежат пространствам Y и $Y'_1 = \mathcal{L}(X'; Y)$ и определены на отображениях $u: X \rightarrow Y$ формулами $y_i = \partial_i u$, $p = \partial_x u$. Пусть, кроме того, $Z'_1 = Z \times Y'_1$. В этих обозначениях рассматриваемая система записывается в виде уравнения

$$y_i = F(t, x, y, p) \quad (2.1)$$

с заданным отображением $F: Z'_1 \rightarrow Y$ класса $C_\infty(Z'_1)$.

Типичной краевой задачей для уравнения (2.1) является задача Коши, в которой граничное (или начальное) многообразие имеет вид

$$t = 0, \quad y = \varphi(x), \quad (2.2)$$

где $\varphi: X' \rightarrow Y$ — заданное отображение.

Уравнение (2.1) называется *квазилинейным* (см. также 23.1), если с некоторыми отображениями $A: Z \rightarrow \mathcal{L}(Y'_1; Y)$ и $B: Z \rightarrow Y$ правая часть F дается формулой

$$F = A \langle p \rangle + B. \quad (2.3)$$

Пусть $u: X \rightarrow Y$ есть решение уравнения (2.1), рассматриваемое как многообразие $U \subset Z$ с уравнением $y = u(t, x)$. Следующее построение приводит к новому уравнению, выводимому из (2.1) с помощью U . Делается замена переменного $y \rightarrow y'$ по формуле $y = u + ay'$ с вещественным параметром a , берется тейлоровское разложение правой части по параметру a и сравниваются слагаемые с его первой степенью. Это приводит к линейному уравнению с искомым $y' \in Y$ (U_1 — первое продолжение многообразия U)

$$y'_i = (\partial_p F|U_1) \langle p' \rangle + (\partial_y F|U_1) \langle y' \rangle. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) называется *уравнением, получаемым линеаризацией уравнения* (2.1) на его решении U или, коротко, *линеаризованным (на U) уравнением* (2.1).

В дальнейшем будет предполагаться, что задача Коши вида (2.2) имеет единственное решение как для уравнения (2.1), так и для (2.4).

Оператор $\zeta \cdot \partial$ некоторой группы Ли $G^1(\zeta)$ преобразований пространства Z записывается в виде

$$\zeta \cdot \partial = \tau \partial_t + \xi \cdot \partial_x + \eta \cdot \partial_y \quad (2.5)$$

с отображениями $\tau: Z \rightarrow R$, $\xi: Z \rightarrow X'$ и $\eta: Z \rightarrow Y$.

Лемма. Если уравнение (2.1) допускает оператор (2.5), то, каково бы ни было решение $U \{y = u(t, x)\}$ уравнения (2.1), отображение $u': X \rightarrow Y$, действующее по формуле

$$u'(t, x) = (\zeta \cdot \partial)(y - u(t, x))|_U, \quad (2.6)$$

является решением линейного уравнения (2.4)

Доказательство. Пусть производящее отображение группы $G^1(\zeta)$ есть

$$t = f(z, a), \quad x = g(z, a), \quad \bar{y} = h(z, a). \quad (2.7)$$

Так как группа $G^1(\zeta)$ допускается уравнением (2.1), то при преобразованиях (2.7) решение U переходит в решение $\bar{U}$, которое можно задать уравнением $\bar{y} = \bar{u}(t, x, a)$, где $\bar{u}$ определяется из уравнения $h(t, x, u(t, x), a) = \bar{u}(f(t, x, u(t, x), a), g(t, x, u(t, x), a), a)$. (2.8)

Ясно, что отображение $\bar{u}$ может быть представлено в виде

$$\bar{u}(t, x, a) = u(t, x) + au'(t, x) + a^2\psi(t, x, a)$$

с гладким отображением $\psi: X \times R \rightarrow Y$. В силу построения линейаризованного уравнения отсюда следует, что u' должно быть решением уравнения (2.4). С другой стороны, справедлива формула

$$u'(t, x) = \partial_a \bar{u}(t, x, 0),$$

с помощью которой u' можно вычислить путем дифференцирования тождества (2.8) по параметру a в точке $a=0$. С учетом выражения оператора (2.5) через производящее отображение (2.7) это дает

$$\eta|_U = u' + (\tau \partial_t)|_U + (\xi \cdot \partial_x)|_U,$$

откуда и получается формула (2.6). ■

З а м е ч а н и е. В данном доказательстве нигде не использовалась дифференциальная структура уравнения (2.1). Поэтому аналогичная лемма верна для любого дифференциального уравнения E .

3. Инвариантные решения задачи Коши. С помощью предыдущей леммы легко получается критерий инвариантности решения задачи Коши. Пусть H есть группа Ли, допускаемая уравнением (2.1) и L — ее алгебра Ли операторов вида (2.5).

Теорема. *Решение задачи Коши (2.1), (2.2) является инвариантным H -решением, если и только если для любого оператора $\zeta \cdot \partial \in L$ отображение φ удовлетворяет соотношению*

$$\eta(0, x, \varphi) - \partial_x \varphi \langle \xi(0, x, \varphi) \rangle - \tau(0, x, \varphi) F(0, x, \varphi, \partial_x \varphi) = 0. \quad (3.1)$$

Доказательство. Применение критерия инвариантности 18.2 к многообразию U показывает, что U инвариантно, если и только если определенное формулой (2.6) отображение $u' = 0$. В силу леммы 29.2 отображение u' есть решение линейного однородного уравнения (2.4) и равно нулю тогда и только тогда, когда $u'(0, x) = 0$. Остается заметить, что вычисление значения $u'(0, x)$ с использованием (2.1), (2.2) и (2.5) дает для него выражение, совпадающее с левой частью равенства (3.1). ■

Интересно отметить, что соотношение (3.1) не означает инвариантности начального многообразия Γ , заданного уравнениями (2.2). Согласно критерию 18.2 такая инвариантность равносильна выполнению соотношений

$$\tau(0, x, \varphi) = 0, \quad \eta(0, x, \varphi) - \partial_x \varphi \langle \xi(0, x, \varphi) \rangle = 0, \quad (3.2)$$

которые являются достаточными для справедливости (3.1), но в общем случае не необходимы. Однако ситуация, когда $\tau(0, x, \varphi) \neq 0$ (хотя бы для одного оператора из L) является в некотором смысле особой, как показывает следующий факт.

Следствие. *Если выполнено условие (3.1) и $\tau(0, x, \varphi) \neq 0$, то решение U задачи Коши (2.1), (2.2) совпадает с орбитой (Γ, H) многообразия (2.2).*

Доказательство. Точка $z = (0, x, \varphi(x))$ под действием преобразований (2.7) переходит в $\bar{z} = (\bar{t}, \bar{x}, \bar{y})$ и в силу предыдущей теоремы при любом a находится на U . Остается показать, что точки $(\bar{t}, \bar{x})$ покрывают некоторую окрестность точки $(0, x_0)$ в пространстве X . Для этого достаточно рассмотреть такую подгруппу $G^1(\zeta) \subset H$, что $\tau(0, x_0, \varphi(x_0)) \neq 0$, и показать, что отображение $(a, x) \rightarrow (\bar{t}, \bar{x})$, заданное формулами

$$\bar{t} = f(0, x, \varphi(x), a), \quad \bar{x} = g(0, x, \varphi(x), a),$$

обратно в окрестности точки $(0, x_0)$. Это следует из теоремы об обратной функции в силу того, что для якобиана отображения $(a, x) \rightarrow (\bar{t}, \bar{x})$ справедливо выражение

$$\det(\partial_{(a, x)}(\bar{t}, \bar{x})(0, x_0)) = \tau(0, x_0, \varphi(x_0)). \quad \blacksquare$$

Итак, если верно (3.1) и $\tau(0, x, \varphi(x)) \neq 0$, то решение задачи Коши (2.1), (2.2) может быть построено просто применением преобразования (2.7) к начальному многообразию (2.2). Можно заметить, что в этом случае Γ является частично инвариантным многообразием группы H с дефектом $\delta(\Gamma, H) = 1$.

4. Инвариантность характеристик. Рассматривается квазилинейная система (2.3). Гиперповерхность $V \subset X$ с уравнением $v(t, x) = \text{const}$ является характеристической поверхностью на решении U (см. 23.1), если

$$\det(v_i I_Y - q \cdot A) | U = 0, \quad (4.1)$$

где $v_i = \partial_i v$ и $q = \partial_x v$. Хорошо известно, что при любых преобразованиях пространства Z характеристики переходят в характеристики. При этом, вообще говоря, изменяются уравнение (2.3), решение U и поверхность V . Если предположить, что уравнение (2.3) допускает некоторое преобразование, то возникает вопрос о том, как ведет себя при таком преобразовании многообразие, заданное уравнением (4.1). Для точной постановки этого вопроса следует расширить пространство Y до пространства $\bar{Y} = Y \times R(v)$ и рассматривать преобразования пространства $\bar{Z} = X \times \bar{Y}$ вида (2.7), дополненные равенством $\bar{v} = v$. При этом следует различать свойство инвариантности уравнений характеристик «на любом решении», т. е. уравнений

$$v = \text{const}, \quad \det(v_i I_Y - q \cdot A) = 0 \quad (4.2)$$

относительно группы $G_1(\zeta)$ преобразований пространства $\bar{Z}$, допускаемой уравнением (2.3) и свойство инвариантности уравнения характеристик на данном инвариантном решении U , т. е. уравнения (4.1).

Получение соответствующих результатов основано на использовании определяющих уравнений для операторов вида (2.5), допускаемых уравнением (2.3). Для вывода этих уравнений берется первое продолжение оператора (2.5) на пространство $\bar{Z}_1$

$$\zeta \cdot \partial = \zeta \cdot \partial + \sigma \cdot \partial_{y_i} + \theta \cdot \partial_p + \omega \cdot \partial_{\tau_i} + \lambda \cdot \partial_q,$$

где

$$\begin{aligned} \sigma &= \eta_i + \eta_y \langle y_i \rangle - y_i \tau_i - y_i (y_i \cdot \tau_y) - p \langle \xi_i \rangle - p \langle \xi_y \langle y_i \rangle \rangle, \\ \theta &= \eta_x + \eta_y \circ p - y_i \otimes \tau_x - y_i \otimes (p \cdot \tau_y) - p \circ \xi_x - p \circ \xi_y \circ p, \\ \omega &= -v_i (\tau_i + y_i \cdot \tau_y) - q \cdot (\xi_i + \xi_y \langle y_i \rangle), \\ \lambda &= -v_i (\tau_x + p \cdot \tau_y) - q \cdot (\xi_x + \xi_y \circ p) \end{aligned}$$

(индексами обозначены производные $\eta_x = \partial_x \eta$, $\xi_y = \partial_y \xi$ и т. д.; символ $a \otimes q$ обозначает тензорное произведение векторов $a \in Y$ и $q \in X^*$). В этих обозначениях условие инвариантности уравнения (2.3) таково:

$$\sigma = A \langle \theta \rangle + A' \langle p \rangle + B',$$

где для краткости положено $A' = (\zeta \cdot \partial) A$, $B' = (\zeta \cdot \partial) B$. После перехода на многообразие (2.3) это условие расщепляется относительно

вектора $p \in Y_1'$ и приводит к уравнениям (вектор p сохранен, здесь он играет роль «пробного» вектора; для краткости положено $Ap = A\langle p \rangle$):

$$Ap((Ap) \cdot \tau_y) + p \langle \xi_y \langle Ap \rangle \rangle = A((Ap) \otimes (p \cdot \tau_y)) + A(p \circ \xi_y \circ p); \quad (4.3)$$

$$\eta_y \langle Ap \rangle - Ap \tau_i - Ap(B \cdot \tau_y) - B((Ap) \cdot \tau_y) - p \langle \xi_i \rangle - p \langle \xi_y \langle B \rangle \rangle = \\ = A(\eta_y \circ p) - A((Ap) \otimes \tau_x) - A(B \otimes (p \cdot \tau_y)) - A(p \circ \xi_x) + A'p; \quad (4.4)$$

$$\eta_i - \eta_y \langle B \rangle - B \tau_i - B(B \cdot \tau_y) = A \eta_x - A(B \otimes \tau_x) + B'. \quad (4.5)$$

В доказательстве нижеследующей теоремы используется следующий простой факт из линейной алгебры. Пусть d есть линейный дифференциальный оператор (скалярный) на некотором пространстве T и пусть дано отображение $M: T \rightarrow \mathcal{L}(Y)$. Тогда, если существуют такие отображения $P, Q \in \mathcal{L}(Y)$, что

$$dM = P \circ M + M \circ Q, \quad (4.6)$$

то для определителя $\det(M) = |M|$ справедливо соотношение

$$d|M| = \text{tr}(P + Q)|M|. \quad (4.7)$$

Теорема. Если уравнение (2.3) допускает оператор (2.5), то этот оператор допускается и системой уравнений (4.2).

Доказательство. Очевидно, что достаточно доказать для $M = v_i I_X - q \cdot A$ и $d = \zeta_i \cdot \partial$ равенство вида (4.6), так как тогда результат будет следовать из критерия инвариантности 18.2. В силу предыдущих формул продолжения справедливо выражение

$$dM = -v_i(\tau_i + y_i \cdot \tau_y) I_X - q \cdot (\xi_i + \xi_y \langle y_i \rangle) I_X + \\ + v_i(\tau_x + p \cdot \tau_y) \cdot A + (q \cdot (\xi_x + \xi_y \circ p)) \cdot A - qA'.$$

После исключения v_i и y_i путем замены $v_i I_X = M + q \cdot A$ и $y_i = Ap + B$ это выражение приводится к виду

$$dM = [-(\tau_i + B \cdot \tau_y + A \langle p, \tau_y \rangle) I_X + (\tau_x + p \cdot \tau_y) \cdot A] \circ M + \\ + q \cdot [-(\tau_i + B \cdot \tau_y) A - (\xi_i + \xi_y \langle B \rangle) I_X + (\tau_x \cdot A) \circ A + \xi_x \cdot A - A'] + \\ + q \cdot [((p \cdot \tau_y) \cdot A) \circ A - A \langle p, \tau_y \rangle A - \xi_y \langle Ap \rangle I_X + (\xi_y \circ p) \cdot A].$$

Здесь последнее слагаемое $q \cdot [\dots]$ равно нулю в силу (4.3), а второе слагаемое $q \cdot [\dots]$ преобразуется с использованием определяющего уравнения (4.4). Для этого надо в (4.4) положить $p = a \otimes q$, где $a \in Y$, $q \in X^*$ и преобразовать каждое слагаемое к результату действия некоторого линейного отображения на вектор a . После «сокращения» вектора a уравнение (4.4) приведет к следующему:

$$q \cdot [-(\tau_i + B \cdot \tau_y) A - (\xi_i + \xi_y \langle B \rangle) I_X + (\tau_x \cdot A) \circ A + \xi_x \cdot A - A'] = \\ = -\eta_y \circ (q \cdot A) + (q \cdot A) \circ \eta_y + (B \otimes \tau_y) \circ (q \cdot A) - (q \cdot A) \circ (B \otimes \tau_y).$$

Здесь левая часть совпадает со вторым слагаемым $q \cdot [\dots]$ в выражении dM , а правая часть в силу равенства $q \cdot A = v_i I_X - M$

равна

$$\begin{aligned} \eta_y \circ (M - v_i I_Y) + (v_i I_Y - M) \circ \eta_y + (B \otimes \tau_y) \circ (v_i I_Y - M) + \\ + (M - v_i I_Y) \circ (B \otimes \tau_y) = \eta_y \circ M - M \circ \eta_y - (B \otimes \tau_y) \circ M + \\ + M \circ (B \otimes \tau_y) = (\eta_y - B \otimes \tau_y) \circ M - M \circ (\eta_y - B \otimes \tau_y). \end{aligned}$$

Окончательно получается требуемое представление:

$$\begin{aligned} dM = [\eta_y - B \otimes \tau_y - (\tau_t + B \cdot \tau_y + A \langle p, \tau_y \rangle) I_Y + \\ + (\tau_x + p \cdot \tau_y) \cdot A] \circ M + M \circ (B \otimes \tau_y - \eta_y). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Аналогичный результат, относящийся к уравнению (4.1), фактически является следствием этой теоремы. Необходимо заметить, что если U есть инвариантное $G^1(\zeta)$ -решение, то выражение (2.6) равно нулю и оператор, индуцированный на U оператором (2.5), имеет вид

$$\zeta' \cdot \partial = (\tau | U) \partial_t + (\xi | U) \cdot \partial_x. \quad (4.8)$$

С л е д с т в и е. Если U является инвариантным $G^1(\zeta)$ -решением, то уравнение характеристик (4.1) на этом решении допускает оператор (4.8).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пересечение инвариантного многообразия (4.2) с инвариантным многообразием U_1 допускает индуцированную группу $G^1(\zeta) | U$, т. е. инвариантно относительно первого продолжения оператора (4.8). $\blacksquare$

5. Инвариантность сильного разрыва. Оператор полного дифференцирования D' на пространстве $X' \times Y$ является вектором пространства X^* (см. 4.3) и потому для любого отображения $\Phi: Z \rightarrow \mathcal{L}(X^*; Y)$ определено значение $\Phi \langle D' \rangle = D' \cdot \Phi$. Специальный случай квазилинейной системы (2.3), когда она может быть записана в виде

$$y_t = D' \cdot \Phi + \Psi \quad (5.1)$$

с отображениями $\Phi: Z \rightarrow \mathcal{L}(X^*; Y)$ и $\Psi: Z \rightarrow Y$, носит название дифференциальных законов сохранения. Так как $D' = \partial_x + p \cdot \partial_y$, то уравнение (5.1) приводится к (2.3), где

$$A = \partial_y \cdot \Phi, \quad B = \partial_x \cdot \Phi + \Psi. \quad (5.2)$$

Для уравнения вида (5.1) хорошо определено понятие обобщенного решения, частным случаем которого является решение с сильным разрывом.

Гиперповерхность V с уравнением $v(t, x) = 0$ называется **поверхностью сильного разрыва** на решении $U \{y = u(t, x)\}$, если с каждой ее стороны существуют непрерывные предельные значения $u | V$, претерпевающие при переходе со стороны «1» на сторону «2» разрыв первого рода («скачок» $u_1 - u_2$). При этом выполнено уравнение сильного разрыва

$$(v_i y - q \cdot \Phi)_1 = (v_i y - q \cdot \Phi)_2. \quad (5.3)$$

Здесь v_i и q те же, что и в 29.4, причем разрывна только величина $y = u(x)$, имеющая скачок $y_1 - y_2 = u_1(t, x) - u_2(t, x)$. Вопрос об инвариантности уравнения (5.3) осложняется тем, что исходное уравнение записывается в виде дифференциального закона сохранения (5.1), вообще говоря, *неоднозначно*, ввиду чего одна и та же поверхность V может быть поверхностью сильного разрыва при одной записи и не быть таковой при другой записи. Точный результат здесь удастся получить лишь для таких групп преобразований пространства Z , операторы которых имеют вид

$$\zeta \cdot \partial = \tau \partial_t + \xi \cdot \partial_x + (\alpha \langle y \rangle + \beta) \cdot \partial_y, \quad (5.4)$$

где $\tau: R(t) \rightarrow R$, $\xi: X \rightarrow X$, $\alpha: X \rightarrow \mathcal{L}(Y)$ и $\beta: X \rightarrow Y$.

Как и в случае характеристик, следует различать свойства инвариантности уравнения сильного разрыва (5.3), рассматриваемого как уравнение многообразия в некотором расширенном пространстве или же на данном решении U .

Расширение пространства Z до $\tilde{Z}$ получается здесь «удвоением» пространства Y (см. 17.6) и добавлением компоненты $R(v)$, причем $\tilde{v} = v$, так что $\tilde{Z} = X \times R(v) \times Y \times Y$. При этом векторы $z \in \tilde{Z}$ имеют представление $\tilde{z} = (t, x, v, y_1, y_2)$, в соответствии с которым «удвоенный» и расширенный оператор, соответствующий оператору (5.4), есть

$$\tilde{\zeta} \cdot \partial = \tau \partial_t + \xi \cdot \partial_x + (\alpha \langle y_1 \rangle + \beta) \cdot \partial_{y_1} + (\alpha \langle y_2 \rangle + \beta) \cdot \partial_{y_2}. \quad (5.5)$$

Пусть $\mathcal{D}$ есть многообразие в $\tilde{Z}_1$, заданное уравнениями $v = 0$ и (5.3).

Т е о р е м а. Если уравнение (5.1) допускает оператор (5.4), то многообразие $\mathcal{D}$ допускает соответствующий оператор (5.5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу специального вида оператора (5.4) продолженный оператор значительно упрощается, а с ним упрощаются и определяющие уравнения. В частности, уравнение (4.3) выполнено тождественно, а (4.4) принимает вид

$$\alpha \langle A p \rangle - \tau_i A p - p \langle \xi_i \rangle = A(\alpha \circ p) - A(p \circ \xi_x) + A' p. \quad (5.6)$$

Пусть $w = v_i y - q \cdot \Phi$ и $w' = (\zeta \cdot \partial) w$. Справедливо выражение

$$w' = -(v_i \tau_i + q \cdot \xi_i) y + v_i (\alpha \langle y \rangle + \beta) + (q \cdot \xi_x) \cdot \Phi + q \cdot \Phi',$$

где $\Phi' = (\zeta \cdot \partial) \Phi$. Дифференцирование по y с учетом (5.2) дает

$$\partial_y w' = -(v_i \tau_i + q \cdot \xi_i) I_Y + v_i \alpha + (q \cdot \xi_x) \cdot A - q \cdot \partial_y \Phi'.$$

Это выражение можно сильно упростить. Прежде всего, так как

$$\partial_y \Phi' = \partial_y (\zeta \cdot \partial) \Phi = (\zeta \cdot \partial) \partial_y \Phi + (\partial_y \Phi) \circ \alpha = A' + A \circ \alpha,$$

то получается

$$\partial_y w' = (\alpha - \tau_i I_Y) v_i - (q \cdot \xi_i) I_Y + (q \cdot \xi_x) \cdot A - q \cdot A' - (q \cdot A) \circ \alpha.$$

С другой стороны, если в (5.6) положить $p = a \otimes q$ и затем «сократить» на a , то это уравнение примет вид

$$\alpha \circ (q \cdot A) - \tau_i q \cdot A = (q \cdot \xi_i) I_Y + (q \cdot A) \circ \alpha - (q \cdot \xi_x) \cdot A + q \cdot A'.$$

Сложение двух последних равенств приводит к выражению, которое легко преобразуется в следующее:

$$\partial_y w' = (\alpha - \tau_i I_Y) \circ (v_i I_Y - q \cdot A).$$

Но $v_i I_Y - q \cdot A = \partial_y (v_i y - q \cdot \Phi) = \partial_y w$, так что

$$\partial_y w' = (\alpha - \tau_i I_Y) \circ \partial_y w.$$

Это соотношение показывает, что вектор $w' = (\alpha - \tau_i I_Y) \langle w \rangle$ не зависит от y , в силу чего его изменение при переходе $y_1 \rightarrow y_2$ (и неизменных t, x) равно нулю, т. е.

$$w'_1 - w'_2 = (\alpha - \tau_i I_Y) \langle w_1 - w_2 \rangle,$$

или, окончательно,

$$(\xi_1 \cdot \partial)(w_1 - w_2) = (\alpha - \tau_i I_Y) \langle w_1 - w_2 \rangle. \quad (5.7)$$

Из (5.7) следует, что утверждение теоремы верно в силу критерия 18.2 инвариантности многообразия. ■

Установленные теоремы об инвариантности уравнений характеристик или сильного разрыва находят применение в задаче об инвариантном продолжении инвариантного решения через инвариантную характеристику или поверхность сильного разрыва.

6. Уравнения Навье—Стокса. В обозначениях, принятых в гидродинамике, уравнения Навье—Стокса задаются на пространстве $Z = X \times Y$, где $X = R(t) \times R^3(x)$, $Y = R^3(u) \times R(p)$ и в приведенной форме таковы:

$$(\partial_t + u \cdot \partial_x)u + \partial_x p = \Delta u, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad (6.1)$$

где Δ — оператор Лапласа. Здесь u — вектор скорости и p — давление (постоянные плотность ρ и вязкость ν в подходящих единицах измерения (см. 19.11) имеют числовые значения, равные единице).

Основная группа системы (6.1) оказывается бесконечной. Ее алгебра Ли может быть представлена в виде прямой суммы $L^\infty \oplus L^{11}$, где бесконечномерный идеал L^∞ образован операторами

$$\zeta_\varphi \cdot \partial = \varphi \cdot \partial_x + \varphi' \cdot \partial_u - (\varphi'' \cdot x) \partial_p, \quad \zeta_\psi \cdot \partial = \psi \partial_p \quad (6.2)$$

с произвольными функциями $\varphi: R(t) \rightarrow R^3$ и $\psi: R(t) \rightarrow R$ (здесь $\varphi' = \partial_t \varphi$, $\varphi'' = \partial_t^2 \varphi$). В координатах $x = (x^1, x^2, x^3)$, $u = (u^1, u^2, u^3)$

подалгебра L^{11} имеет следующий базис:

$$\begin{aligned}\xi_0 \cdot \partial &= \partial_t, \quad \xi_i \cdot \partial = \partial_{x^i}, \quad \eta_i \cdot \partial = t \partial_{x^i} + \partial_{u^i} \quad (i=1, 2, 3), \\ \zeta_{i,k} \cdot \partial &= x^i \partial_{x^k} - x^k \partial_{x^i} + u^i \partial_{u^k} - u^k \partial_{u^i} \quad (i < k), \\ \tau \cdot \partial &= 2t \partial_t + x^i \partial_{x^i} - u^i \partial_{u^i} - 2p \partial_p.\end{aligned}\quad (6.3)$$

Если отбросить оператор растяжения $\tau \cdot \partial$, то оставшиеся операторы (6.3) образуют базис алгебры L^{10} , являющейся алгеброй Ли группы Галилея G^{10} , преобразования которой действуют в семимерном пространстве $Z' = R(t) \times R^3(x) \times R^3(u)$.

Уместно заметить, что свойство инвариантности уравнений механики относительно группы Галилея на самом деле является одной из основных аксиом механики Ньютона. Поэтому любые математические модели (дифференциальные уравнения), описывающие общие закономерности движения физических тел в рамках ньютоновской механики, должны допускать группу Галилея. Здесь это подтверждено для уравнений Навье—Стокса. Другой пример дают рассмотренные в § 11 уравнения газовой динамики, для которых ядро основных алгебр Ли 11 (3.4) является расширением алгебры Ли группы Галилея G^{10} за счет добавления к ней одного оператора растяжения.

7. Задачи со свободной границей. Среди множества краевых задач, которые обычно рассматриваются для уравнений (6.1), выделяется задача со свободной границей в следующей постановке. На гиперповерхности $V \subset X$ с уравнением $v(t, x) = 0$ задаются два условия: *кинематическое* (V состоит все время из одних и тех же частиц жидкости)

$$\partial_t v + (u \cdot \partial_x) v = 0$$

и *динамическое* (нормальная к V компонента вектора напряжения, действующего на V , равна нулю)

$$(-pI_x + \partial_x u + (\partial_x u)^*) \langle \partial_x v \rangle = 0.$$

Эти условия удобно переписать, положив $v_i = \partial_i v$, $q = \partial_x v$, $r = \partial_x u$ и введя обозначения $r \langle q \rangle = r \cdot q$, $r^* \langle q \rangle = q \cdot r$. Тогда они примут следующий вид уравнений многообразия Γ :

$$v = 0, \quad v_i + u \cdot q = 0, \quad pq = r \cdot q + q \cdot r. \quad (7.1)$$

Т е о р е м а. Многообразие Γ , заданное уравнениями (7.1), допускает группу G^{11} с базисом алгебры Ли операторов (6.3).

Доказательство. Любой оператор из L^{11} имеет вид

$$\zeta \cdot \partial = \alpha(t) \partial_t + \beta(t, x) \cdot \partial_x + \eta(u) \cdot \partial_u + \pi(p) \partial_p. \quad (7.2)$$

Продолжение такого оператора на пространство $\tilde{Z}_1 = (Z \times R(v))_1$ с учетом того, что преобразованное $\tilde{v} = v$, таково:

$$\zeta \cdot \partial = \zeta \cdot \partial + (\eta_u \circ r - r \circ \beta_x) \cdot \partial_r - (v_i \alpha_i + q \cdot \beta_i) \partial_{v_i} - (q \cdot \beta_x) \cdot \partial_q + \dots,$$

где многоточие обозначает координаты, которые в результат действия оператора (7.2) на уравнения (7.1) не входят. Применение этого оператора к уравнениям (7.1) и переход на Γ дают следующие условия инвариантности многообразия Γ :

$$\begin{aligned} v_i x_i + q \cdot \beta_i - \eta \cdot q - u \cdot (q \cdot \beta_x) &= 0, \\ \pi q &= (\eta_u \circ r - r \circ \beta_x) \cdot q + q \cdot (\eta_u \circ r - \beta_x \circ r). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Путем прямой подстановки в уравнения (7.3) координат любого из операторов (6.3) легко убедиться в том, что на Γ оба уравнения превращаются в тождества.

Эта теорема находит применение для отыскания инвариантных и частично инвариантных решений задач о движении вязкой жидкости со свободной границей.

§ 30. Законы сохранения

1. О законах сохранения. В ряде вопросов математической физики существенную роль играют законы сохранения, которые могут выполняться на решениях данного дифференциального уравнения E . Они используются как для теоретического анализа свойств решений уравнения E (априорные оценки, теоремы существования и единственности и т. п.), так и для получения физических величин, сохраняющихся с течением времени. Законы сохранения могут быть представлены в дифференциальной или интегральной форме. В дальнейшем принимается следующее определение, в котором используются обозначения, введенные в §§ 4, 5.

Пусть уравнение E задано на пространстве $Z = X \times Y$; **законом сохранения** для E называется соотношение вида

$$D \cdot A = 0 \quad (1.1)$$

(с некоторым отображением $A: Z_p \rightarrow X$), которое выполнено тождественно на любом решении уравнения E .

С геометрической точки зрения закон сохранения (1.1) может рассматриваться как уравнение многообразия в продолженном пространстве Z_{p+1} , вложенного в надлежаще продолженное многообразие E .

Один из общих приемов построения законов сохранения заключается в добавлении соотношения вида (1.1) с неопределенным вектором A к уравнению E и последующем исследовании вопроса о совместности полученной переопределенной системы. Однако этот прием приводит к громоздким вычислениям, которые лишь в редких случаях могут быть доведены до конца. Поэтому его вряд ли можно считать конструктивным методом.

Вместе с тем, для уравнений, возникающих при решении вариационных задач, законы сохранения удается получать на основе

допускаемой ими группы. В общем виде этот вопрос был изучен Э. Нётер, исходящей из понятия инвариантности функционала, заданного в виде вариационного интеграла. Именно этот метод, оказавшийся плодотворным и получивший последнее время дальнейшее развитие, и будет изложен ниже.

Очевидно, что для данного уравнения E множество векторов A , дающих законы сохранения (1.1), образует векторное пространство (над полем R). Тем самым определено понятие *линейно зависимых или независимых законов сохранения*.

2. Инвариантность функционала. Рассматриваются пространство $Z = X \times Y$, функция $\Phi: Z_k \rightarrow R$ класса $C_\infty(Z_k)$ и некоторая область $V \subset X$. На классе отображений $u: X \rightarrow Y$, $u \in C_\infty(X)$, определяется функционал

$$I(u, V) = \int_V (\Phi \circ u) dx, \quad (2.1)$$

где k -е продолжение u отображения u определено в 4.4.

Задача об определении экстремальных значений функционала (2.1) при фиксированной области V в подклассе отображений u , удовлетворяющих некоторым граничным условиям на ∂V , называется *вариационной задачей*. *Необходимое условие экстремума сводится к краевой задаче с граничными условиями на ∂V для дифференциального уравнения Эйлера*, которое равносильно обращению в нуль первой вариации этого функционала и имеет вид

$$E(\Phi) \equiv \sum_{i=0}^k (-1)^i D^i \cdot \partial_{y_i}^* \Phi = 0. \quad (2.2)$$

В этой записи производная $\partial_{y_i}^* \Phi$ рассматривается как элемент пространства $\mathcal{L}_s(X^{*i}; Y^*)$ и точкой обозначается ее значение на i раз повторенном векторе $D \in X^*$, т. е. $D^i \cdot \partial_{y_i}^* \Phi = \partial_{y_i}^* \Phi \langle \underbrace{D, \dots, D}_i \rangle$. Наи-

более часто встречается случай $k=1$, в котором уравнение Эйлера (в координатной записи) таково:

$$\partial_{y_s} \Phi - D_s(\partial_{y_i} \Phi) = 0 \quad (s=1, \dots, m),$$

где D_s — координаты оператора полного дифференцирования (см. 4.3).

Пусть дано преобразование h пространства Z , зависящее от параметра a и действующее по формуле $z' = h(z, a)$ или в компонентах

$$x' = f(x, y, a), \quad y' = g(x, y, a). \quad (2.3)$$

Предполагается, что это преобразование удовлетворяет условию 4 (5.2).

Преобразованным значением функционала (2.1), получаемым с помощью преобразования h , называется значение $l(u', V')$, где $V' = (f \circ u)_0(V)$ и отображение u' вычисляется по правилам 4.5 (см. также 5.6). Это значение дается формулой

$$l(u', V') = \int_{V'} (\Phi \circ u')_k dx'_k.$$

Функционал (2.1) называется **инвариантным** относительно преобразования (2.3), если для любого отображения $u: X \rightarrow Y$ и любой области $V \in X$ справедливо равенство

$$l(u, V) = l(u', V'). \quad (2.4)$$

Определение инвариантности функционала (2.4) можно представить в другом виде, более удобном для группового анализа. Для этого надо сделать в интеграле $l(u', V')$ замену переменных интегрирования $x' \rightarrow x$ по формуле $x' = (f \circ u)_0(x)$. Тогда в силу леммы 4.5 и формулы 4(5.3) будет $u'_k(x') = h_{kk} u_k(x)$ и преобразованный функционал примет вид

$$l(u', V') = \int_V (\Phi \circ h \circ u)_k |\partial_x (f \circ u)_0| dx,$$

где $|\partial_x (f \circ u)_0|$ есть якобиан отображения $x \rightarrow x'$. Поэтому определение (2.4) инвариантности функционала в силу произвольности области V равносильно равенству

$$\Phi \circ u_k = (\Phi \circ h \circ u)_k |\partial_x (f \circ u)_0|.$$

Последнее в свою очередь выполнено для любого отображения u , если и только если для любого $z \in Z_k$ справедливо равенство

$$\Phi = (\Phi \circ h)_k |Df|, \quad (2.5)$$

получаемое из предыдущего с учетом того, что $\partial_x (f \circ u)_0 = (Df) \circ u_1$.

Следовательно, тождество (2.5) равносильно инвариантности функционала (2.1) относительно преобразования h , действующего по формулам (2.3).

Тождество (2.5) не имеет вида формулы инвариантности какой-либо функции. Этого можно добиться путем расширения пространства Z_k до пространства $\tilde{Z}_k = Z_k \times R(v)$ введением вспомогательного переменного v , преобразование которого определено формулой

$$v' = |Df| v. \quad (2.6)$$

В силу предыдущего из соотношений (2.5) и (2.6) следует вывод: *условие инвариантности функционала равносильно инвариантности функции Φv относительно расширенного преобразования $\tilde{h}_k$ пространства $\tilde{Z}_k$.*

Правило умножения якобианов показывает, что при композиции преобразований вида (2.3) композиция расширенных преобразований равна расширению композиции исходных преобразований. Поэтому формулой (2.6) определено расширение любой группы Ли $G(h)$ до группы Ли $G(\tilde{h})$.

Пусть a — скалярный параметр и $G^1(\zeta)$ есть однопараметрическая группа Ли преобразований вида (2.3) пространства Z с оператором

$$\zeta \cdot \partial = \xi \cdot \partial_x + \eta \cdot \partial_y. \quad (2.7)$$

Дифференцирование выражения (2.6) по a в точке $a=0$ дает

$$\partial_a v'(0) = (D \cdot \xi)v.$$

Следовательно, оператор расширения продолженной группы $G_k^1(\zeta)$ таков:

$$\tilde{\zeta} \cdot \partial = \zeta \cdot \partial + (D \cdot \xi)v \partial_a. \quad (2.8)$$

Применение критерия инвариантности 2.4 к функции Φv дает равносильное (2.4) *инфинитезимальное условие инвариантности функционала (2.1) относительно группы $G^1(\zeta)$ с оператором (2.7)*

$$(\zeta \cdot \partial) \Phi + (D \cdot \xi) \Phi = 0. \quad (2.9)$$

Именно в этой форме свойство инвариантности функционала используется при групповом анализе законов сохранения.

Необходимо заметить, что *инвариантность относительно некоторого преобразования (2.3) функционала (2.1) влечет инвариантность соответствующего уравнения Эйлера (2.2)*. Действительно, если функционал $l(u, V)$ на некотором отображении u имеет экстремальное значение, то в силу равенства (2.4) преобразованный функционал $l(u', V')$ имеет то же самое экстремальное значение на преобразованном отображении u' . Однако обратное неверно, т. е. из инвариантности уравнений Эйлера, вообще говоря, не следует инвариантность функционала ввиду того, что по уравнению Эйлера (2.2) функционал (2.1) восстанавливается неоднозначно.

3. Основная лемма. Решающее значение имеет определенная связь, существующая между левыми частями равенств (2.2) и (2.9).

Л е м м а. *Справедливо тождество*

$$(\zeta \cdot \partial) \Phi + (D \cdot \xi) \Phi = D \cdot A + (\eta - y_1 \cdot \xi) \cdot E(\Phi), \quad (3.1)$$

где

$$A = \xi \Phi + \sum_{s=1}^k \sum_{i=1}^s (-1)^{i-1} (D^{s-i} (\eta - y_1 \cdot \xi)) \cdot D^{i-1} \cdot \partial_y \Phi. \quad (3.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $w = \eta - y_1 \cdot \xi$. В силу формул 4 (8.5) справедливы равенства

$$\begin{aligned} (\zeta \cdot \partial) \Phi &= (\zeta \cdot \partial) \Phi + \sum_{s=1}^k \eta \cdot \partial_y \Phi = \\ &= (\zeta \cdot \partial) \Phi + \sum_{s=1}^k (D^s w) \cdot \partial_y \Phi + \sum_{s=1}^k y_1 \cdot \xi \cdot \partial_y \Phi = \\ &= (\zeta \cdot \partial) \Phi + (\xi \cdot D) \Phi - \xi \cdot \partial_x \Phi - \xi \cdot y_1 \cdot \partial_y \Phi + \sum_{s=1}^k (D^s w) \cdot \partial_y \Phi. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Выражение, стоящее вне знака $\sum$, приводится к следующему:

$$D \cdot (\xi \Phi) - (D \cdot \xi) \Phi + w \cdot \partial_y \Phi. \quad (3.4)$$

Входящая в (3.3) сумма $\sum$ преобразуется по правилу дифференцирования по частям, применение которого дает последовательность тождеств

$$\begin{aligned} \sum_{s=i}^k (D^{s-i+1} w) \cdot D^{i-1} \cdot \partial_y \Phi &= D \cdot \sum_{s=i}^k (D^{s-i} w) \cdot D^{i-1} \cdot \partial_y \Phi - \\ &- \sum_{s=i+1}^k (D^{s-i} w) \cdot D^i \cdot \partial_y \Phi - w \cdot D^i \cdot \partial_y \Phi \quad (i = 1, \dots, k-1), \\ \sum_{s=k}^k (D^{s-k+1} w) \cdot D^{k-1} \cdot \partial_y \Phi &= D \cdot \sum_{s=k}^k (D^{s-k} w) \cdot D^{k-1} \cdot \partial_y \Phi - w \cdot D^k \cdot \partial_y \Phi. \end{aligned}$$

Линейная комбинация этих тождеств, в которой i -я строка умножается на $(-1)^{i-1}$, с использованием обозначений (2.2) и (3.2) приводится к виду

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^k (D^s w) \cdot \partial_y \Phi &= \\ &= D \cdot \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \sum_{s=i}^k (D^{s-i} w) \cdot D^{i-1} \cdot \partial_y \Phi + w \cdot \sum_{i=1}^k (-1)^i D^i \cdot \partial_y \Phi = \\ &= D \cdot A - D \cdot (\xi \Phi) + w \cdot E(\Phi) - w \cdot \partial_y \Phi. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Очевидно, что подстановка (3.4) и (3.5) в (3.3) дает тождество (3.1). ■

В силу этой леммы условию инвариантности функционала (2.9) может быть придана новая форма.

С л е д с т в и е. *Необходимое и достаточное условие инвариантности функционала (2.1) относительно группы $G^1(\zeta)$ с оператором (2.7) имеет вид*

$$D \cdot A + (\eta - y \cdot \xi)_1 \cdot E(\Phi) = 0, \quad (3.6)$$

где вектор A определен формулой (3.2), а $E(\Phi)$ определено в (2.2).

4. Теорема Нётер. Тождество (3.1) и критерий (2.9) инвариантности функционала (2.1) является источником ряда утверждений о законах сохранения для дифференциального уравнения Эйлера (2.2). Прежде всего, они приводят к следующему классическому результату, в котором предполагается независимость уравнений Эйлера (скалярных) в том смысле, что их левые части линейно независимы над полем функций $Z_1 \rightarrow R$.

Т е о р е м а. *Если функционал (2.1) инвариантен относительно группы Ли $G^r(\zeta)$, то для уравнений Эйлера (2.2) существуют r линейно независимых законов сохранения вида (1.1) с векторами A_α , определенными формулой (3.2) по базисным операторам $\zeta_\alpha \cdot \partial$ ($\alpha = 1, \dots, r$) алгебры Ли $L^r(\zeta)$.*

Доказательство. В силу (3.6) для любого решения уравнения $E(\Phi) = 0$ выполнены законы сохранения $D \cdot A_\alpha = 0$. Их линейная независимость следует из того, что если $A = 0$, то тождество (3.6) принимает вид

$$(\eta - y \cdot \xi)_1 \cdot E(\Phi) = 0.$$

Отсюда в силу независимости уравнений Эйлера следует тождество $\eta - y \cdot \xi = 0$, а из него наконец $\xi = \eta = 0$. ■

Ясно, что эта теорема Нётер дает лишь достаточное условие существования законов сохранения для уравнения (2.2), которое состоит в требовании абсолютной инвариантности функционала (2.1), выражаемой тождеством (2.9). Примеры показывают, что это условие в общем случае не является необходимым: законы сохранения с векторами (3.2) могут существовать и тогда, когда лагранжиан Φ тождеству (2.9) не удовлетворяет. Очевидно, однако, что в силу (3.1) соотношение (2.9) при наличии закона сохранения с вектором (3.2) необходимо должно быть выполнено на решениях уравнения $E(\Phi) = 0$. Тем самым получается следующее усиление теоремы Нётер, впервые отмеченное Н. Х. Ибрагимовым.

Необходимое и достаточное условие существования закона сохранения вида (1.1) с вектором (3.2) для уравнения Эйлера (2.2), допускающего группу $G^1(\zeta)$, состоит в инвариантности функционала (2.1) относительно группы $G^1(\zeta)$ на многообразии, заданном

уравнением (2.2), т. е. в выполнении соотношения

$$((\zeta \cdot \partial)\Phi + (D \cdot \xi)\Phi)|_{E(\Phi)=0} = 0. \quad (4.1)$$

Следует заметить, что получаемые при этом законы сохранения, в отличие от тех, которые даются теоремой Нётер, не обязаны быть линейно независимыми. Во всяком случае, так как группа, допускаемая уравнением (2.2), обязательно содержит группу, допускаемую функционалом (2.1) (см. замечание в конце § 30.2), то все законы сохранения, получаемые по теореме Нётер, наверное получатся и с помощью приведенного ее усиления.

5. Другие законы сохранения. Основное тождество (3.1) показывает, что для уравнения Эйлера (2.2) можно найти закон сохранения и тогда, когда функционал (2.1) не инвариантен относительно группы $G^1(\zeta)$, т. е. когда лагранжиан Φ не удовлетворяет тождеству (2.9). Так будет в том случае, если вместо (2.9) выполнено более общее тождество

$$(\zeta \cdot \partial)\Phi + (D \cdot \xi)\Phi = D \cdot B \quad (5.1)$$

с некоторым вектором-отображением $B: Z_p \rightarrow X$. Из тождества (3.1) следует, что тогда для уравнения (2.2) справедлив закон сохранения

$$D \cdot (A - B) = 0, \quad (5.2)$$

где вектор A по-прежнему дается формулой (3.2).

Для правильного понимания этой ситуации необходимо учесть, что добавление к лагранжиану Φ выражения «типа дивергенции» $D \cdot \Psi$ с отображением $\Psi: Z_p \rightarrow X$ не изменяет уравнения Эйлера (2.2). Этот известный факт следует из легко проверяемого тождества

$$E(\Phi + D \cdot \Psi) = E(\Phi).$$

Вместе с тем условие инвариантности функционала при переходе от лагранжиана Φ к $\Phi_1 = \Phi + D \cdot \Psi$ изменяется, так как справедливо тождество

$$(\zeta \cdot \partial)\Phi_1 + (D \cdot \xi)\Phi_1 = (\zeta \cdot \partial)\Phi + (D \cdot \xi)\Phi + D \cdot ((\zeta \cdot \partial)\Psi). \quad (5.3)$$

Итак, если функционал (2.1) не инвариантен относительно группы $G^1(\zeta)$, но становится инвариантным после перехода от Φ к Φ_1 , то для уравнения Эйлера существует закон сохранения (5.2) с вектором A из (3.2) и вектором $B = -(\zeta \cdot \partial)\Psi$. Но уравнение

$$(\zeta \cdot \partial)\Psi = -B \quad (5.4)$$

с данным B и искомым Ψ наверное имеет решение и поэтому равенство (5.1) на самом деле существенного обобщения предыдущего результата не дает.

Уместно отметить еще очевидную возможность получения новых законов сохранения высших порядков, которые дает дифференцирование закона сохранения (2.1) путем применения оператора D . Действительно, так как операторы D_j перестановочны, то

$$D_j(D \cdot A) = D \cdot (D_j A) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (5.5)$$

Тем самым один закон сохранения (2.1), имеющий некоторый порядок p , дает n законов сохранения порядка $p+1$.

6. Обращение теоремы Нётер. Представляет интерес вопрос о том, когда все законы сохранения для некоторых уравнений Эйлера (2.2) могут быть получены по теореме Нётер, т. е. когда инвариантность функционала (2.1) необходима для выполнения законов сохранения с векторами (3.2). Если это свойство выполняется, то говорят, что справедлива обратная теорема Нётер.

Для ответа на этот вопрос нужно наложить на уравнение Эйлера (2.2) некоторое условие, которое гарантировало бы независимость условия инвариантности функционала (2.9) от уравнения (2.2). Точнее, надо, чтобы (2.9) не было алгебраическим следствием уравнений (2.2), а выполнялось бы тождественно на пространстве Z_k . По-видимому, соответствующий критерий пока не найден и здесь могут быть даны некоторые достаточные признаки выполнения этого условия. Одним из них является следующий, в котором используется тот факт, что $k \geq 1$, и в общем случае уравнение Эйлера имеет порядок $2k$.

(α) *Никакое алгебраическое следствие уравнения Эйлера (2.2) не имеет порядок, меньший или равный k .*

Т е о р е м а. *Если выполнено свойство (α) и уравнение Эйлера (2.2) функционала (2.1) допускает группу $G^1(\zeta)$, то из выполнения для этого уравнения закона сохранения с вектором (3.2) следует инвариантность функционала (2.1) относительно группы $G^1(\zeta)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу тождества (3.1) на любом решении уравнения (2.2) выполнено равенство (2.9). Условие (α) означает, что на решениях и уравнения (2.2) произвольные и

порядка $l \leq k$ не связаны никаким соотношением, т. е. остаются вполне произвольными. Поэтому равенство (2.9), имеющее порядок k , должно быть выполнено тождественно. ■

Иногда функционал (2.1), для которого справедливо свойство (α), называют невырожденным (в противном случае — вырожденным). Большинство возникающих в механике и физике функционалов являются невырожденными. Пример вырожденного функционала дают уравнения Дирака.

7. Пример. Рассматривается уравнение неустановившегося потенциального околосвукового движения газа (*уравнение Линя—Рейсснера—Цянля*), заданное в плоском случае на пространстве $Z = R^3(t, x, y) \times R(\varphi)$

$$2\varphi_{tx} + \varphi_x \varphi_{xx} - \varphi_{yy} = 0, \quad (7.1)$$

где $\varphi_t = \partial_t \varphi$, $\varphi_x = \partial_x \varphi$ и т. д. Легко проверить, что (7.1) является уравнением Эйлера для функционала вида (2.1) с лагранжианом

$$\Phi = -\varphi_t \varphi_x - \frac{1}{6} \varphi_x^3 + \frac{1}{2} \varphi_y^2. \quad (7.2)$$

Основная группа уравнения (7.1) известна. Она является бесконечной группой Ли, причем базисные операторы ее алгебры Ли содержат пять произвольных функций $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon: R(t) \rightarrow R$ и имеют вид (штрихами обозначены производные ∂_t):

$$\begin{aligned} \zeta_\alpha \cdot \partial &= 3\alpha \partial_t + (\alpha' x + \alpha'' y^2) \partial_x + \\ &\quad + 2\alpha' y \partial_y + \left(-\alpha' \varphi + \alpha'' x^2 + 2\alpha''' xy^2 + \frac{1}{3} \alpha^{(4)} y^4 \right) \partial_\varphi; \\ \zeta_\beta \cdot \partial &= \beta' y \partial_x + \beta \partial_y + \left(2\beta'' xy + \frac{2}{3} \beta''' y^3 \right) \partial_\varphi; \\ \zeta_\gamma \cdot \partial &= \gamma \partial_x + (2\gamma' x + 2\gamma'' y^2) \partial_\varphi; \\ \zeta_\delta \cdot \partial &= \delta y \partial_\varphi; \\ \zeta_\varepsilon \cdot \partial &= \varepsilon \partial_\varphi; \\ \zeta_0 \cdot \partial &= 2t \partial_t + y \partial_y - 2\varphi \partial_\varphi. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Применение изложенных выше правил построения законов сохранения показывает, что все эти операторы, за исключением оператора растяжения $\zeta_0 \cdot \partial$, дают независимые законы сохранения. Следовательно, пространство законов сохранения первого порядка для уравнения (7.1) бесконечномерно. При этом функционал (2.1) с лагранжианом (7.2) оказывается не инвариантным и его приходится «подправлять» за счет указанного в § 30.5 слагаемого $D \cdot \Psi$, приводящего к закону сохранения вида (5.2).

Например, если взять оператор $\zeta_\delta \cdot \partial$, то его первое продолжение есть

$$\zeta_\delta \cdot \partial = \delta y \partial_\varphi + \delta' y \partial_{\varphi_y} + \delta \partial_{\varphi_y},$$

причем $D \cdot \xi_\delta = 0$.

Поэтому здесь

$$(\zeta_\delta \cdot \partial) \Phi + (D \cdot \xi_\delta) \Phi = -\delta' y \varphi_x + \delta \varphi_{yy}.$$

Очевидно, что это есть соотношение вида (5.1) с вектором

$$B = (0, -\delta' y \varphi, \delta \varphi).$$

Здесь формула (3.2) может быть записана в виде

$$A = \xi \Phi + (\eta - (\varphi_t, \varphi_x, \varphi_y) \cdot \xi) (\partial_{\varphi_t} \Phi, \partial_{\varphi_x} \Phi, \partial_{\varphi_y} \Phi),$$

и для оператора $\zeta_\delta \cdot \partial$ дает вектор

$$A = \delta y \left(-\varphi_x, -\varphi_t - \frac{1}{2} \varphi_x^2, \varphi_y \right).$$

Согласно 30.5 для уравнения (7.1) справедлив закон сохранения вида (5.2) с вектором $A = B$, а именно:

$$D_t(-\delta y \varphi_x) + D_x(\delta' y \varphi - \delta y \varphi_t - \frac{1}{2} \delta y \varphi_x^2) + \\ + D_y(-\delta \varphi + \delta y \varphi_y) = 0. \quad (7.4)$$

Этот закон сохранения для каждой фиксированной функции δ может быть получен по теореме Нётер, если вместо лагранжиана (7.2) взять $\Phi_1 = \Phi + D \cdot \Psi$, где вектор Ψ следует определить из уравнения вида (5.4). Вычисление дает

$$\Psi = \left(0, -\frac{\delta'}{2\delta} \varphi^2, -\frac{1}{2y} \varphi^2 \right).$$

Итак, уравнение (7.1) является уравнением Эйлера функционала вида (2.1), инвариантного относительно оператора $\zeta_\delta \cdot \partial$ с лагранжианом

$$\Phi_1 = -\varphi_t \varphi_x - \frac{1}{6} \varphi_x^3 + \frac{1}{2} \varphi_y^2 - \frac{\delta'}{6} \varphi \varphi_x + \frac{1}{2y} \varphi^2 - \frac{1}{4} \varphi \varphi_y$$

и закон сохранения (7.4) получается по теореме Нётер. Вместе с тем видно, что каждой конкретной функции $\delta: R(t) \rightarrow R$ соответствует свой лагранжиан. Поэтому для всей бесконечной группы Ли с алгеброй Ли операторов вида $\zeta_\delta \cdot \partial$ единого инвариантного функционала не существует.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ VIII

Исследования линейных дифференциальных уравнений второго порядка с групповой точки зрения были начаты еще С. Ли II [3] и его ближайшими последователями [1]. Ковариантная запись определяющих уравнений впервые дана в [2]. Групповая классификация по слабой нелинейности выполнена в работе [3]. Важное для физики понятие волнового уравнения в римановом пространстве введено в [4]. Вопросы классификации линейных уравнений второго порядка тесно связаны с вопросами классификации римановых пространств по группам движений, которым посвящена монография [5]. Сравнительно недавно была обнаружена замечательная связь между конформной инвариантностью риманова пространства и принципом Гюйгенса для гиперболических уравнений [6]—[8]. Сюда же примыкает работа [9]. Недавно было начато систематическое исследование стандартных уравнений, допуска-

ющих максимально широкую группу движений [10]. Вопросам разделения переменных посвящена работа [11].

Понятие касательных преобразований детально разработано С. Ли I [4]. Формальное рассмотрение преобразований бесконечно продолженного пространства было начато Бэклундом [12]. Этот раздел теории «ожил» лишь недавно в работах [13], [14].

По проблеме инвариантности краевых задач работ пока немного. Вопросы инвариантности характеристик и сильных разрывов изучались в [15], [16]. Групповой анализ уравнений Навье—Стокса был выполнен в [17] и [18]. Инвариантность условий на свободной границе исследована в работе [19].

Основополагающую работу Э. Нётер [20] существенно дополняют результаты, полученные в [21], а также в I [7], где приведено много примеров. Данное в § 30 изложение этих результатов отличается тем, что здесь они выведены для любого порядка функционала. В приложении к уравнениям гидродинамики новые законы сохранения получены в [22].

- [1] Medolaghi P. Classificazione delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine, che ammettono un gruppo infinito di trasformazioni puntuali. — *Ann. mat. pura ed appl.* 1 (1898), 229—263.
- [2] Овсянников Л. В. Об отыскании группы линейного дифференциального уравнения второго порядка. — *ДАН СССР* 132, № 1 (1960), 44—47.
- [3] Ибрагимов Н. Х. К групповой классификации дифференциальных уравнений второго порядка. — *ДАН СССР*, 183, № 2 (1968), 274—277.
- [4] Ибрагимов Н. Х. Волновое уравнение в римановом пространстве. — В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 1 (1969), Новосибирск, 36—47.
- [5] Петров А. З. Новые методы в общей теории относительности. М., «Наука», 1966.
- [6] Ибрагимов Н. Х. Конформная инвариантность и принцип Гюйгенса. — *ДАН СССР*, 194, № 1 (1970), 24—27.
- [7] Ибрагимов Н. Х. Принцип Гюйгенса. — В сб. «Некоторые проблемы математики и механики». Л., «Наука», 1970, 159—170.
- [8] Ибрагимов Н. Х., Мамонтов Е. В. Sur le problème de J. Hadamard relatif à la diffusion des ondes. — *C. r. Acad. sci.* (1970), 456—458.
- [9] Чупахин А. П. Нелинейные конформно-инвариантные уравнения в пространстве V_n с нетривиальной конформной группой. — В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 25 (1976), Новосибирск, 122—123.
- [10] Чиркунов Ю. А. О линейных дифференциальных уравнениях второго порядка, допускающих группу максимальной размерности. — В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 24 (1976), Новосибирск, 124—137.
- [11] Шаповалов В. Н. К групповым свойствам линейных уравнений. — *Известия вузов, Физика*, № 6 (1968), 75—80.
- [12] Bäcklund A. V. Ueber flächentransformationen. — *Math. Annalen*. В. 9 (1876), 297—320.
- [13] Ибрагимов Н. Х., Андерсон Р. Д. Группы касательных преобразований Ли—Бэклунда. — *ДАН СССР* 227, № 3 (1976), 539—542.
- [14] Ибрагимов Н. Х. Группы Ли—Бэклунда и законы сохранения. — *ДАН СССР*, 270, № 1 (1976).
- [15] Меньшиков В. М. О продолжении инвариантных решений уравнений газовой динамики через ударную волну. — В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 4 (1969), Новосибирск, 163—169.
- [16] Меньшиков В. М. О непрерывном сопряжении инвариантных решений. — В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 10 (1972), Новосибирск, 70—84.

- [17] Пухначев В. В. Групповые свойства уравнений Навье—Стокса в плоском случае. — Ж. прикл. мех. и техн. физ. № 1 (1960), 83—90.
- [18] Битев В. О. Групповые свойства уравнений Навье—Стокса. — В сб. «Численные методы механики сплошной среды», 3, № 5 (1972), Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 13—17.
- [19] Пухначев В. В. Инвариантные решения уравнений Навье—Стокса, описывающие движения со свободной границей. — ДАН СССР, 202, № 2 (1972), 302—305.
- [20] Нётер Э. Инвариантные вариационные задачи. — В сб. «Вариационные принципы механики». М., Физматгиз, 1959, 611—630.
- [21] Ибрагимов Н. Х. Инвариантные вариационные задачи и законы сохранения. — Теор. и матем. физ. 1 № 3 (1969), 350—359.
- [22] Ибрагимов Н. Х. Законы сохранения в гидродинамике. — ДАН СССР 210, № 6 (1973), 1307—1309.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ТАБЛИЦЫ ВЫЧИСЛЕННЫХ ОСНОВНЫХ ГРУПП

В дополнение к тем примерам, которые даны в основном тексте, здесь приводятся результаты вычисления основной группы или групповой классификации, полученные разными авторами для конкретных систем. Подобных результатов в настоящее время имеется много; данный список составлен с целью показать разнообразие возможных приложений. Следует подчеркнуть, что каждый из таких результатов является теоремой о том, что данная система дифференциальных уравнений допускает указанную алгебру Ли и не допускает никаких других операторов.

В каждом примере дается принятое название системы уравнений и ссылка на список литературы к соответствующей главе. Затем указываются пространства $X = R^n(t, x, \dots)$ независимых переменных и $Y = R^m(u, p, \dots)$ искомых функций и приводится система уравнений, причем производные обозначаются индексами ($\partial_i u = u_i$, $\partial_x u = u_x$ и т. п.). Координаты оператора обозначаются теми же буквами, что и переменные, но со звездочкой сверху, так что оператор имеет вид

$$\zeta \cdot \partial = \dot{t} \partial_t + \dot{x} \partial_x + \dots + \dot{u} \partial_u + \dot{p} \partial_p + \dots$$

В таблицах даются координаты операторов, линейно порождающих допускаемую алгебру Ли. В случае линейных уравнений тривиальный идеал (см. 7.14) не приводится. Произвольный элемент описывается отдельно, а его специализации, приводящие к расширению допускаемой алгебры Ли, даются в первом столбце.

1. Уравнения Эйлера идеальной несжимаемой жидкости (Бучнев III [16]). $X = R^4(t, x^1, x^2, x^3)$, $Y = R^4(v^1, v^2, v^3, p)$. Система E

$$v_i^* = 0, \quad v_i^* + v^i v_i^* = -p_k \quad (k = 1, 2, 3)$$

допускает бесконечную группу. Основная алгебра Ли LE задается с помощью произвольных функций $\alpha: R(t) \rightarrow R$ и $\beta: R(t) \rightarrow R^3$.

Здесь A — произвольное антисимметричное линейное отображение $R^3 \rightarrow R^3$ и $\beta' = \partial_t \beta$.

2. Уравнения Эйнштейна в пустоте (Ибрагимов III [13]). $X = R^n(x)$, $Y = \mathcal{L}_*(X; X^*) = R^{n(n+1)/2}(y)$, где $y = \{y_{ij}\}$, причем $y_{ij} = y_{ji}$. Фундаментальная метрическая форма задается с помощью отображения $g: X \rightarrow Y$, действующего по формуле $y = g(x)$ или

	$\bar{t}$	$\bar{x}$	$\bar{\partial}$	$\bar{\beta}$
ζ_1	1	0	0	0
ζ_2	t	x	0	0
ζ_3	0	x	v	$2p$
ζ_A	0	$A \langle x \rangle$	$A \langle v \rangle$	0
ζ_α	0	0	0	α
ζ_β	0	β	β'	$-\beta'' \cdot x$

в координатах $y_{ij} = g_{ij}(x)$, в виде $ds^2 = g_{ij}(x) dx^i dx^j$. С тензором Риччи R_{ik} система E такова:

$$R_{ik} = 0 \quad (i, k = 1, \dots, n).$$

Основная алгебра Ли LE бесконечномерна и задается с помощью произвольного векторного поля $\xi: X \rightarrow X$

	$\bar{x}$	$\bar{\partial}$
ζ_1	0	y
ζ_ξ	ξ	$-y \circ \partial \xi - \partial \xi \circ y$

3. Уравнения Максвелла в пустоте (Ибрагимов III [13]). $X = R^4(x)$, $Y = \mathcal{L}_*(X; X^*)$. Искомым является тензор электромагнитного поля $u: X \rightarrow Y$, действующий по формуле $y = u(x)$ или в координатах $y_{ki} = u_{ki}(x)$. С обозначением $u_{ki, m} = \partial_m u_{ki}$ система E такова (все индексы пробегают значения 1, 2, 3, 4)

$$u_{ki, m} + u_{im, k} + u_{mk, i} = 0, \quad \sum_{i=1}^4 u_{ki, i} = 0.$$

Основную группу удобно представить через группу G^{15} конформных преобразований четырехмерного пространства Минковского с метрикой $-(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2$ и алгеброй Ли операторов вида $\xi \cdot \partial = \bar{x}^i \partial_i$, порожденной базисом, данным в таблице.

Здесь $r_i^2 = \sum_{k=1}^4 e_{ik}(x^k)^2$, где e_{ik} — элементы матрицы

$$(e_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

	$\tilde{x}^1$	$\tilde{x}^2$	$\tilde{x}^3$	$\tilde{x}^4$
ξ_0	x^1	x^2	x^3	x^4
ξ_1	1	0	0	0
ξ_2	0	1	0	0
ξ_3	0	0	1	0
ξ_4	0	0	0	1
ξ_5	x^2	x^1	0	0
ξ_6	x^3	0	x^1	0
ξ_7	x^4	0	0	x^1
ξ_8	0	x^3	$-x^2$	0
ξ_9	0	$-x^4$	0	x^2
ξ_{10}	0	0	x^4	$-x^3$
ξ_{11}	r_1^2	$2x^1x^2$	$2x^1x^3$	$2x^1x^4$
ξ_{12}	$2x^1x^2$	r_2^2	$2x^2x^3$	$2x^2x^4$
ξ_{13}	$2x^1x^3$	$2x^2x^3$	r_3^2	$2x^3x^4$
ξ_{14}	$2x^1x^4$	$2x^2x^4$	$2x^3x^4$	r_4^2

Алгебра Ли L^{15} является основной алгеброй Ли волнового уравнения в R^4 . Основная группа системы уравнений Максвелла есть G^{17} с алгеброй Ли операторов $\xi \cdot \partial = \xi \cdot \partial_x + \tilde{u} \cdot \partial_u$

	$\tilde{x}$	$\tilde{u}_{kl}$
ξ	ξ	$-u_{kr}\xi_l^r - u_{rl}\xi_k^r$
ξ_{16}	0	u_{kl}
ξ_{17}	0	$\sum_{r,s=1}^4 e_{klrs} u_{rs}$

где $\xi \cdot \partial_x$ — любой оператор из предыдущей таблицы с координатами $\xi^r = \tilde{x}^r$ и $\xi_i^r = \partial_i \tilde{x}^r$.

4. Уравнения Дирака (с нулевой массой) (Ибрагимов III [15]). $X = R^4(x)$, $Y = R^4(\psi)$. Система E записывается в виде

$$\gamma^k \partial_k \psi = 0,$$

где постоянные матрицы $\gamma^k \in \mathcal{L}(R^4)$ выражаются через элементарные матрицы e_{ik} (в которых на пересечении i -й строки и k -го столбца стоит единица, а остальные элементы — нули) по

формулам

$$\begin{aligned}\gamma^1 &= \sqrt{-1}(-e_{14} - e_{23} + e_{32} + e_{41}), & \gamma^2 &= -e_{14} + e_{23} + e_{32} - e_{41}, \\ \gamma^3 &= \sqrt{-1}(-e_{13} + e_{24} + e_{31} - e_{42}), & \gamma^4 &= e_{11} + e_{22} - e_{33} - e_{44}.\end{aligned}$$

Основная алгебра Ли операторов $\zeta \cdot \partial = \tilde{\xi} \cdot \partial_x + \tilde{\psi} \cdot \partial_\psi$ есть

	$\tilde{\xi}$	$\tilde{\psi}$
ζ	ξ	$S\langle\psi\rangle$
ζ_{16}	0	$(e_{13} + e_{31} + e_{24} + e_{42})\langle\psi\rangle$
ζ_{17}	0	ψ

Здесь $\xi \cdot \partial_x$ — любой оператор из L^{15} примера 3, а матрица S такова:

$$S = \frac{1}{8} \sum_{k,l=1}^4 \partial_l \xi^k (\gamma^k \gamma^l - \gamma^l \gamma^k - 3\delta^{kl}).$$

5. Уравнения стационарной тепловой конвекции (К а т к о в V [9]). $X = R^2(x, y)$, $Y = R^4(u, v, p, \theta)$. Система E

$$\begin{aligned}u_x + v_y &= 0, \\ w_x + v u_y &= -p_x + u_{xx} + u_{yy}, \\ w u_x + v v_y &= -p_y + v_{xx} + v_{yy} + \theta, \\ u \theta_x + v \theta_y &= \sigma(\theta_{xx} + \theta_{yy}) \quad (\sigma = \text{const}).\end{aligned}$$

Основная алгебра Ли есть

	$\tilde{x}$	$\tilde{y}$	$\tilde{u}$	$\tilde{v}$	$\tilde{p}$	$\tilde{\theta}$
ζ_1	1	0	0	0	0	0
ζ_2	0	1	0	0	0	0
ζ_3	0	0	0	0	1	0
ζ_4	0	0	0	0	y	1
ζ_5	x	y	$-u$	$-v$	$-2p$	-3θ

6. Уравнение Хопфа (К а т к о в V [8]). $X = R^2(t, x)$, $Y = R(u)$. Уравнение E

$$u_t + w_x = (\varphi(u)u_x)_x.$$

Произвольный элемент $\varphi: R(u) \rightarrow R$, $\varphi \neq 0$. Результат групповой классификации

φ		$\bar{t}$	$\bar{x}$	$\bar{u}$
$\sim$	ζ_1	1	0	0
	ζ_2	0	1	0
$\exp u$	ζ_3	t	$x+t$	1
u^{2m}	ζ_3	$2(m-1)t$	$(2m-1)x$	u
1	ζ_4	0	t	1
	ζ_5	t^2	tx	$x-tu$

7. Уравнения стационарного трехмерного пограничного слоя на произвольной поверхности (Ланкеревич III [8]). $X = R^3(x, y, z)$, $Y = R^4(u, v, w, p)$. Система $E(A)$

$$\begin{aligned} u_x + w_x + Av_y + A^{-1}A_x u - A^{-1}A_x w &= 0, \\ uu_x + wu_x + Avu_y + A^{-1}A_x uw - A^{-1}A_x w^2 + p_x &= Au_{yy}, \\ uw_x + wu_x + Avw_y + A^{-1}A_x uw - A^{-1}A_x u^2 + p_x &= Aw_{yy}, \\ p_y &= 0. \end{aligned}$$

Произвольный элемент $A: R^2(x, z) \rightarrow R$ задает внутреннюю метрику обтекаемой поверхности через ее фундаментальную форму $ds^2 = A(dx^2 + dz^2)$. Результат групповой классификации см. на стр. 394. Здесь $f: R^2(x, z) \rightarrow R$ и $g: R(z) \rightarrow R$ — произвольные функции, а α, β — произвольные постоянные.

8. Уравнение движения нелинейной вязко-пластической среды (Ленский III [17]). $X = R^2(t, x)$, $Y = R(u)$. Уравнение $E(f)$

$$u_t = f(u_x)u_{xx}.$$

Произвольный элемент $f: R(q) \rightarrow R$. Результат групповой классификации

f		$\bar{t}$	$\bar{x}$	$\bar{u}$
$\sim$	ζ_1	1	0	0
	ζ_2	0	1	0
	ζ_3	0	0	1
	ζ_4	$2t$	x	u
q^k	ζ_5	kt	0	$-u$
e^q	ζ_5	t	0	$-x$

A		$\tilde{x}$	$\tilde{y}$	$\tilde{z}$	$\tilde{u}$	$\tilde{v}$	$\tilde{w}$	$\tilde{p}$
$\sim$	ζ_1	0	y	0	$-2u$	$-v$	$-2w$	$-4p$
	ζ_2	0	0	0	0	0	0	1
	ζ_3	0	f	0	0	$A^{-1}(f_x u + f_y w)$	0	0
$g(z) e^x$	ζ_4	1	0	0	u	0	w	$2p$
$g(z)$	ζ_4	1	0	0	0	0	0	0
z^α	ζ_5	x	0	z	$(\alpha+1)u$	0	$(\alpha+1)w$	$2(\alpha+1)p$
$\beta_{z^{-1}}$	ζ_6	$\frac{1}{2}(z^2 - x^2)$	0	$-xz$	zw	0	$-zu$	0
$\beta(\operatorname{ch} z)^{-1}$	ζ_5	$-\cos x \cdot \operatorname{sh} z$	0	$\sin x \cdot \operatorname{ch} z$	$-(\cos x \cdot \operatorname{ch} z)w$	0	$(\cos x \cdot \operatorname{ch} z)u$	0
	ζ_6	$\sin x \cdot \operatorname{sh} z$	0	$\cos x \cdot \operatorname{ch} z$	$(\sin x \cdot \operatorname{ch} z)w$	0	$-(\sin x \cdot \operatorname{ch} z)u$	0
1	ζ_6	0	0	1	0	0	0	0
	ζ_7	z	0	$-x$	w	0	$-u$	0

9. Уравнения стационарного пограничного слоя с моментными напряжениями (Нгуен Ван Дьеп III [20]). $X = R^2(x, y)$; $Y = R^4(u, v, \omega, p)$. Система E

$$u_x + v_y = 0, \quad p_y = 0, \\ u u_x + v u_y + p_x = u_{yy} + \omega_y, \quad u \omega_x + v \omega_y = \omega_{yy}.$$

Допускаемая алгебра Ли L^∞ ($\varphi: R(x) \rightarrow R$ — произвольная функция)

	$\tilde{x}$	$\tilde{y}$	$\tilde{u}$	$\tilde{v}$	$\tilde{\omega}$	$\tilde{p}$
ζ_1	1	0	0	0	0	0
ζ_2	0	0	0	0	0	1
ζ_3	0	0	0	0	1	0
ζ_4	x	0	u	0	ω	$2p$
ζ_5	0	$-y$	$2v$	v	3ω	$4p$
ζ_φ	0	φ	0	$\varphi' u$	0	0

В цитированной работе рассмотрен также ряд вариантов систем приведенного здесь типа.

10. Уравнения движения жидкости в длинных трубопроводах (Сухарев V [11]). $X = R^2(t, x)$, $Y = R^2(u, v)$. Система $E(n, m)$ $u_t + v_x = 0$, $u_x + v^m u^{-m} = 0$. Произвольный элемент есть пара чисел (n, m) , причем $n \neq 0$. Результат групповой классификации

(n, m)		$\tilde{t}$	$\tilde{x}$	$\tilde{u}$	$\tilde{v}$
$\sim$	ζ_1	1	0	0	0
	ζ_2	0	1	0	0
	ζ_3	$(n+1)t$	nx	0	$-v$
	ζ_4	0	$(m-n+1)x$	$(n+1)u$	$(m+2)v$
$(1, -3/4)$	ζ_5	0	$-x^2$	$3xu$	$xv - 3u^{-1/3}$
$(-1, \sim)$	ζ_4	$(m+2)t$	0	u	$-(m+1)v$
	ζ_B	0	B	0	$u^{-m} \partial_u B$
$(-1, -2)$	ζ_A	0	xA	0	$vA + xu^2 \partial_u A$
	ζ_6	$2t$	0	$(t + \ln u)u$	$(t - 1 + \ln u)v$

Здесь $A, B: R^2(t, u) \rightarrow R$ — произвольные функции, удовлетворяющие уравнению $\partial_t F - \partial_u(u^{-m} \partial_u F) = 0$.

	$\tilde{t}$	$\tilde{x}^1$	$\tilde{x}^2$	$\tilde{x}^3$	$\tilde{v}^1$	$\tilde{v}^2$	$\tilde{v}^3$	$\tilde{E}_1$	$\tilde{E}_2$	$\tilde{E}_3$	$\tilde{H}_1$	$\tilde{H}_2$	$\tilde{H}_3$	ρ
ζ_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ζ_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ζ_3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ζ_4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ζ_5	t	x^1	x^2	x^3	0	0	0	$-E_1$	$-E_2$	$-E_3$	$-H_1$	$-H_2$	$-H_3$	-2ρ
ζ_6	0	$-x^2$	x^1	0	$-\nu^2$	ν^1	0	$-E_2$	E_1	0	$-H_2$	H_1	0	0
ζ_7	0	$-x^3$	0	x^1	$-\nu^3$	0	ν^1	$-E_3$	0	E_1	$-H_3$	0	H_1	0
ζ_8	0	0	$-x^3$	x^2	0	$-\nu^3$	ν^2	0	$-E_3$	E_2	0	$-H_3$	H_2	0
ζ_9	x^1	t	0	0	$1 - (\nu^1)^2$	$-\nu^1 \nu^2$	$-\nu^1 \nu^3$	0	H_3	$-H_2$	0	$-E_3$	E_2	$\rho \nu^1$
ζ_{10}	x^2	0	t	0	$-\nu^1 \nu^2$	$1 - (\nu^2)^2$	$-\nu^2 \nu^3$	$-H_3$	0	H_1	E_3	0	$-E_1$	$\rho \nu^2$
ζ_{11}	x^3	0	0	t	$-\nu^1 \nu^3$	$-\nu^2 \nu^3$	$1 - (\nu^3)^2$	H_2	$-H_1$	0	$-E_2$	E_1	0	$\rho \nu^3$

11. Уравнения релятивистского пучка заряженных частиц (Сыровой V [9]—[10]). $X = R^4(t, x)$, где $x \in V_3$ с метрикой $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$; $Y = R^{10}(v, E, H, \rho)$, где $v, E, H \in R^3$, $\rho \in R$. Система E записывается в ковариантной форме относительно V_3 (все индексы пробегает значения 1, 2, 3)

$$\begin{aligned} v_i^i + v^k v_{,k}^i &= g^{ii} \sqrt{1 - g_{jq} v^j v^q} (E_i + \sqrt{g} e_{mnl} v^m H^n - g_{rs} v^r E^s v^i), \\ \frac{1}{\sqrt{g}} e^{ikl} \partial_i E_k + H_i^i &= 0, \quad \frac{1}{\sqrt{g}} e^{ikl} \partial_i H_k - E_i^i = \rho v^i, \\ \partial_i (\sqrt{g} g^{ik} E_k) &= \sqrt{g} \rho, \quad \partial_i (\sqrt{g} g^{ik} H_k) = 0. \end{aligned}$$

Эта система допускает группу G^{11} . Базис L^{11} см. на стр. 396. В цитированных работах рассмотрены также варианты системы E , получаемые ее упрощениями.

12. Уравнения одномерной двухкомпонентной гидродинамической модели плазмы (Жмудский, Таранов V [18]). $X = R^2(t, x)$, $Y = R^5(n_e, n_i, v_e, v_i, E)$. В общепринятых обозначениях система содержит четыре параметра e, m, M, Z и две произвольные функции, $f, g: R(s) \rightarrow R$, характеризующие зависимость давления от концентрации:

$$\begin{aligned} \partial_t n_e + \partial_x (n_e v_e) &= 0, \quad \partial_x E = 4\pi e (Z n_i - n_e), \quad \partial_t E = 4\pi e (n_e v_e - Z n_i v_i), \\ \partial_t v_e + v_e \partial_x v_e + \frac{e}{m} E + f(n_e) \partial_x n_e &= 0, \\ \partial_t v_i + v_i \partial_x v_i - \frac{Ze}{m} E + g(n_i) \partial_x n_i &= 0. \end{aligned}$$

Произвольный элемент есть пара функций (f, g) . Результат групповой классификации (a, b, γ) — произвольные постоянные

(f, g)		$\tilde{t}$	$\tilde{x}$	$\tilde{n}_e$	$\tilde{n}_i$	$\tilde{v}_e$	$\tilde{v}_i$	$\tilde{E}$
$\sim$	ζ_1	1	0	0	0	0	0	0
	ζ_2	0	1	0	0	0	0	0
	ζ_3	0	t	0	0	1	1	0
$(as\gamma^{-2}, bs\gamma^{-2})$	ζ_4	t	$(2 - \gamma)x$	$-2n_e$	$-2n_i$	$(1 - \gamma)v_e$	$(1 - \gamma)v_i$	$-\gamma E$
$(0, 0)$	ζ_5	0	x	0	0	v_e	v_i	E

13. Уравнения продольных одномерных высокочастотных движений бесстолкновительной плазмы (Таранов В [19]). $X = R^3(t, x, v)$, $Y = R^2(f, E)$. Рассматривается интегро-дифференциальная система

$$f_t + v f_x - E f_v = 0, \\ E_t = \int v f dv, \quad E_x = 1 - \int f dv, \quad E_v = 0,$$

где интегрирование выполняется по всему $R(v)$. Допускаемая группа вычислялась путем формального перехода к бесконечной системе дифференциальных уравнений для моментов $M_k = \int v^k f dv$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) $\partial_t M_k + \partial_x M_{k+1} + k E M_{k-1} = 0$, $\partial_t E = M_1$, $\partial_x E = 1 - M_0$. Этим способом получена группа G^5 .

	$\bar{t}$	$\bar{x}$	$\bar{v}$	$\bar{E}$	$\bar{f}$
ζ_1	1	0	0	0	0
ζ_2	0	1	0	0	0
ζ_3	0	x	v	E	$-f$
ζ_4	0	$\cos t$	$-\sin t$	$\cos t$	0
ζ_5	0	$\sin t$	$\cos t$	$\sin t$	0

14. Уравнения течения в бароклинном слое океана (Филиппов В [13]). $X = R^3(x, y, z)$, $Y = R^5(u, v, w, p, \rho)$. Система E такова:

$$u_x + v_y + w_z = 0, \quad u p_x + v p_y + w p_z = p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}, \\ p_x = (1 - x)v, \quad p_y = -(1 - x)v, \quad p_z = \rho.$$

Основная группа есть G^5 .

	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$\bar{u}$	$\bar{v}$	$\bar{w}$	$\bar{p}$	$\bar{\rho}$
ζ_1	0	1	0	0	0	0	0	0
ζ_2	0	0	1	0	0	0	0	0
ζ_3	0	0	0	0	0	0	1	0
ζ_4	0	0	0	0	0	0	z	1
ζ_5	$x - 1$	y	z	$-u$	$-v$	$-w$	p	0

15. Уравнения Ламе (Чиркунов III [22]). $X = R^4(t, x)$, $Y = R^3(w)$. Система E в координатах $x = (x^1, x^2, x^3)$, $w = (w^1, w^2, w^3)$ есть

$$\partial_i^2 w^k = \sum_{i=1}^3 (\partial_i \partial_k w^i + \alpha \partial_i^2 w^k) \quad (k = 1, 2, 3; \alpha = \text{const}).$$

Основная (нетривиальная) группа есть G^8 (здесь I_X — тождественное преобразование и A — произвольное антисимметричное отображение пространства $R^3(x)$)

	$\tilde{t}$	$\tilde{x}$	$\tilde{w}$
ζ_1	1	0	0
ζ_I	0	I_X	0
ζ_A	0	$A \langle x \rangle$	$A \langle w \rangle$
ζ_8	t	x	0