АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР

ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ДЕСЯТАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

ИЗДАНИЕ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ АН УССР

Киев – 1974

Сборник содержит два цикла лекций, прочитанных в X летней математической школе. Тематика первого цикла лекций /г.Нальчик, 2-16 июля 1972 г./ - некоторые вопросы функционального анализа и математической физики. Лекции посвящены кусочно-полиномиальной аппроксимации суммируемых функций; их применениям к функциям классов Соболева и ряду задач анализа и спектральной теории; некоторым общим приближенным методам решения линейных и нелинейных операторных уравнений.

Лекции второго цикла /пос.Кацивели, 25 июня - 15 июля 1972 г./- это два больших курса: формальные группы и функции многих комплексных переменных.

В лекциях нашли свое отражение некоторые новые результаты по применению формальных групп. Излагается новый подход к топологии гладких многообразий, основанной на теории формальных групп.

Лекции рассчитаны на студентов-математиков старших курсов, а также на специалистов, интересующихся современными математическими теориями.

Ответственные редакторы
академик АН УССР Ю.А. МИТРОПОЛЬСКИЙ и
доктор физико-математических наук А.Ф. ШЕСТОПАЛ

П Р Е Д И С Л О В И Е

Настоящий сборник состоит из двух частей. Первая часть - это труды X летней математической школы по краевым задачам математической физики, организованной Институтом математики АН УССР и кафедрой дифференциальных уравнений Кабардино-Балкарского государственного университета /2-16 июля 1972 г., г.Нальчик/.

Для подготовки и проведения школы был создан Оргкомитет в следующем составе: Ю.А.Митропольский /председатель/; И.М.Карасев и А.Ф.Шестопал /заместители председателя/; И.К.Лапин, Х.К.Жемухов, И.П.Лесковский, А.Я.Бурыкин.

Десятая летняя математическая школа была посвящена 50-летию образования СССР. Она способствовала развитию научных связей и укреплению дружбы между учеными братских республик.

В работе школы принимали участие математики Украины, Кабардино-Балкарии, Ленинграда, Новосибирска и других городов СССР.

В качестве лекторов выступали О.А.Ладыженская, М.С.Бирман, Л.П.Нижник, Н.С.Курпель, А.Н.Шарковский.

Содержание лекций профессора О.А.Ладыженской частично отображено в ее монографиях, поэтому они не включены в сборник. Профессор М.С.Бирман прочитал цикл лекций, посвященный количественному анализу в теоремах вложения С.Л.Соболева.

Во второй половине рабочего дня работали семинары, на которых было заслушано более десяти докладов /Г.С.Липовой, Л.Г.Федоренко, В.Н.Буйвол, З.Б.Сеидов, Х.К.Жемухов, Н.Д.Абитова, Ш.К.Баимов и др./

Во вторую часть сборника включены материалы семинара по формальным группам и функциям многих комплексных переменных, который проходил в Кацивели /Крым/ с 25 июня по 15 июля 1972 года.

Ю.А.Митропольский

А.Ф.Шестопал

КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ В ТЕОРЕМАХ ВЛОЖЕНИЯ СОБОЛЕВА И ПРИЛОЖЕНИЯ К СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

М.Ш.Бирман, М.З.Соломяк

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие лекции посвящены количественному анализу в теоремах вложения С.Л.Соболева [I] для введенных им функциональных пространств W_p^α. Общеизвестно фундаментальное значение теорем вложения Соболева в анализе и математической физике. Обычно под теоремами вложения понимают "качественные" утверждения о непрерывности или компактности вложения одного класса W_p^α в другой такой класс. Нашей главной целью является "количественное" исследование соответствующих операторов вложения, которые, вообще говоря, представляют собой компактные операторы. Общепринятыми количественными характеристиками компактных вложений являются ε - энтропия и n - поперечники соответствующего единичного шара. Содержательная информация об этих величинах может быть получена средствами теории приближений, если найден и исследован подходящий аппроксимационный аппарат. В интересующей нас области таким аппаратом оказался предложенный авторами [2] специальный метод кусочно-полиномиальных приближений с "неправильной" сеткой. Эти кусочно-полиномиальные аппроксимации подробно обсуждаются в предлагаемых лекциях. Нелинейный вариант рассматриваемого способа приближений позволил, в частности, преодолеть трудности в оценке энтропии вложения W_p^α в L_q при $q>p$. Другая область приложений - спектральная теория интегральных и дифференциальных операторов. Речь идет об оценках и асимптотике сингулярных и собственных чисел в задачах с дискретным спектром. Из теорем о кусочно-полиномиальных приближениях вытекают весьма точные оценки спектра. В некоторых случаях эти оценки позволили полностью выяснить пределы применимости классических формул асимптстики спектра краевых задач. В частности, оправдываются асимптотические формулы для задач с "плохими" /разрывными/ старшими коэффициентами. Охватываются также задачи в бесконечных областях, задачи со "слабым" и "сильным" вырождением эллиптичности и т.п. Для интегральных операторов мы получаем оценки сингулярных чисел, которые оказываются равномерными по отношению к широкому классу весовых пространств. Вследствие двойственности между классами ядерных и ограниченных операторов такие равномерные оценки приводят к полезным результатам для псевдодифференциальных операторов и для некоторых других проблем типа проблемы множителей. Можно надеяться, что обсуждаемый метод кусочно-полиномиальных аппроксимаций окажется полезным для приближенных вычислений.

Дальнейшие сведения о содержании курса читатель найдет в лекции I, которая представляет собой обзор основного материала. Систематическому изложению курса посвящены лекции 2-5. Содержание лекций примерно совпадает с тем, что фактически было прочитано М.Ш.Бирманом в 10-ой летней математической школе /Нальчик, июль 1972 г./. Схема зависимости лекций такова:

$$\begin{tikzcd} & & 3 & \\ 1 \arrow[r] & 2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & & 4 \arrow[r] & 5 \end{tikzcd}$$

Помимо собственно лекций /каждая из которых составляет основу главы с тем же номером/ имеются добавления, где изложен дополнительный материал. Ссылки на добавления в основном тексте отсутствуют; исключение составляет добавление I, где собраны нужные для дальнейшего сведения из теории операторов. "Комментарии и литературные указания" к каждой главе разгружают основной текст от многочисленных ссылок. Кроме того, они позволяют дать представление о результатах, подробное изложение которых оказалось здесь невозможным.

Мы глубоко благодарны В.В.Борзову, И.Л.Вулис, Л.С.Копиенко и Г.В.Розенблюму за большую помощь в оформлении рукописи. Мы благодарны также слушателям 10-ой летней математической школы за внимание.

ГЛАВА I

Лекция I

Введение. Обзор основных результатов

I. <u>Сводка основных определений и обозначений</u>. Ниже $\mathbb{R}^m$ – m-мерное эвклидово пространство, $Q^m=[0,1)^m$ – m-мерный полуоткрытый единичный куб; $x=(x_1,\dots,x_m)$ – точка в $\mathbb{R}^m$, $|x|=(x_1^2+\dots+x_m^2)^{1/2}$. Если $j=(j_1,\dots,j_m)$ – мультииндекс, то $|j|=j_1+\dots+j_m$, $j!=j_1!\dots j_m!$, $x^j=x_1^{j_1}\dots x_m^{j_m}$, $D_k=-i\,\partial/\partial x_k$, $k=1,\dots,m$ – операторы дифференцирования, $D^j=D_1^{j_1}\dots D_m^{j_m}$; ∇_ℓ – оператор градиента порядка ℓ: $\nabla_\ell=\{D_{k_1}D_{k_2}\dots D_{k_\ell}\}$, $k_s=1,\dots,m$, $s=1,\dots,\ell$.
В выражении для ∇_ℓ производные, различающиеся порядком дифференцирования, не отождествляются, так что каждая из производных D^j, $|j|=\ell$, входит $\ell!/j!$ раз. Далее,

$$|\nabla_\ell u|^2 \overset{def}{=\!=} \sum_{|j|=\ell}\frac{\ell!}{j!}|D^j u|^2.$$

Если B – банахово пространство, то $N(\cdot|B)$ – норма в B; SB – единичный шар пространства B.

Пусть (X,ρ) – пространство с σ – конечной мерой. Соответствующие пространства L_p, $1\le p\le\infty$, обозначаются через $L_p(\rho)X$; в частности, $N(u|L_\infty(\rho)X)=(\rho)\text{-}\sup|u(x)|$. Через p' обозначается сопряженный к p показатель: $p^{-1}+(p')^{-1}=1$; если $p=\infty$, то считается $p^{-1}=0$.

Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ – открытое множество, $\partial\Omega$ – его граница, $\bar\Omega=\Omega\cup\partial\Omega$. Через $C_0^\infty\Omega$ обозначается класс всех бесконечно дифференцируемых функций, имеющих в Ω компактный носитель (т.е. класс бесконечно дифференцируемых ф и н и т н ы х функций). Обозначение $L_p\Omega$ относится к мере Лебега; $N(\cdot|L_p\Omega)=\|\cdot\|_{p,\Omega}=\|\cdot\|_p$. Если Ω компактно, то через $M\Omega$ обозначается пространство всех ограниченных функций с нормой

$$N(u|M\Omega)=\sup_{x\in\Omega}|u(x)|.$$

Через $C\Omega$ обозначим подпространство в $M\Omega$, состоящее из непрерывных в Ω функций.

Пространства Соболева $W_p^\alpha\Omega$ ($\alpha>0$, $1\le p<\infty$). Пусть $[\alpha]$ - целая часть α; положим

$$\overset{\circ}{N}{}^p(u\,|\,W_p^\alpha\Omega)=\int_\Omega|\nabla_\alpha u|^p\,dx \qquad (\alpha=[\alpha]), \qquad (\mathrm{I.I})_{\mathrm{I}}$$

$$\overset{\circ}{N}{}^p(u\,|\,W_p^\alpha\Omega)=\int_\Omega\int_\Omega\frac{|\nabla_{[\alpha]}u(x)-\nabla_{[\alpha]}u(y)|^p}{|x-y|^{m+p(\alpha-[\alpha])}}\,dx\,dy \qquad (\mathrm{I.I})_2$$

$$(\alpha\ne[\alpha]).$$

Пространство $W_p^\alpha\Omega$ определяется как совокупность всех функций $u\in L_p\Omega$, имеющих в Ω обобщенные производные порядка $[\alpha]$ и таких, что конечна величина /норма/

$$N(u\,|\,W_p^\alpha\Omega)=\left[\overset{\circ}{N}{}^p(u\,|\,W_p^\alpha\Omega)+\|u\|_{p,\Omega}^p\right]^{1/p}. \qquad (\mathrm{I.2})$$

Класс $W_2^\alpha\Omega$ обычно обозначается через $H_\alpha\Omega$.

Пусть Ω - ограниченная область с кусочно-гладкой /например, локально липшицевой/ границей. Если $p\alpha>m$, то класс $W_p^\alpha\Omega$ непрерывно /и компактно/ вкладывается в $C\Omega$; в этом случае элементы $W_p^\alpha\Omega$ отождествляются с соответствующими непрерывными функциями. При $p\alpha\le m$ класс $W_p^\alpha\Omega$ компактно вкладывается в $L_p\Omega$ при $q<q^*=mp(m-\alpha p)^{-1}$. Если "предельный показатель" q^* конечен, то $W_p^\alpha\Omega$ непрерывно /но не компактно/ вкладывается в $L_{q^*}\Omega$; в этом случае допускается и $\Omega=\mathbb{R}^m$.

Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ и (Y,τ) - пространство с σ-конечной мерой. Через $L_q^\alpha(\tau)Y\,W_p^\alpha\Omega$ обозначим пространство функций, определенных на $\Omega\times Y$ и измеримых*), принадлежащих классу $W_p^\alpha\Omega$ при τ - почти всех $y\in Y$, и таких, что конечна ве-

---

*) Измеримость имеется в виду по отношению к произведению меры Лебега в Ω и меры τ в Y.

личина

$$N(u\,|\,L_q(\tau)YW_p^{\alpha}\Omega)=\Big[\int_Y N^q(u(\cdot,y)\,|\,W_p^{\alpha}\,\Omega)\tau(dy)\Big]^{1/q}$$

/при $q=\infty$, как обычно, интеграл заменяется на (τ)-sup/ .

Аналогичный смысл имеют обозначения $L_q(\tau)YBX$, $N(\cdot\,|\,L_q(\tau)YBX)$, где BX – какое-либо банахово пространство измеримых функций на X .

К л а с с ы м е р $\mathfrak{M}_r X$ ($1\le r\le\infty$). Класс $\mathfrak{M}_1$ определяется для любого измеримого пространства X ; в него входят все конечные меры на X и $N(\rho\,|\,\mathfrak{M}_1 X)\overset{def}{=\!=}\rho(X)$. Классы $\mathfrak{M}_r$, $r>1$, определим для открытых множеств $\Omega\subset\mathbb{R}^m$. Именно, $\rho\in\mathfrak{M}_r\Omega$, $r>1$, означает, что мера ρ абсолютно непрерывна относительно m-мерной меры Лебега и ее плотность $d\rho/dx$ принадлежит классу $L_r\Omega$. При этом полагаем

$$N(\rho\,|\,\mathfrak{M}_r\Omega)=N(d\rho/dx\,|\,L_r\Omega)\quad(1<r\le\infty).$$

Иногда вместо $N(\rho\,|\,\mathfrak{M}_r\Omega)$ будем писать $\|\rho\|_{(r)}$.

Для произвольных комплексных мер включение $\sigma\in\mathfrak{M}_r$ означает, что вариация $|\sigma|$ "меры" σ принадлежит $\mathfrak{M}_r$. Вещественные незнакоопределенные меры называем зарядами. Если σ - заряд, то через $\sigma_\pm$ обозначаются его положительная и отрицательная части: $2\sigma_\pm=|\sigma|\pm\sigma$.

Помимо открытых множеств мы будем часто рассматривать полуоткрытые кубы в $\mathbb{R}^m$. Уточним определения функциональных пространств для этого случая. Пусть $\Delta\subset\mathbb{R}^m$ - полуоткрытый куб, Δ_0 - его внутренность. Тогда по определению $W_p^{\alpha}\Delta=W_p^{\alpha}\Delta_0$ и аналогично для $M\Delta$, $\mathfrak{M}_r\Delta$, $r>1$. Напротив, гельдеровские классы C^{α} , $\alpha\ge 0$, которые стандартно определяются для замкнутого куба $\bar\Delta$, вводим соотношением $C^{\alpha}\Delta=C^{\alpha}\bar\Delta$; при $\alpha=0$ пишем просто $C\Delta$. Подчеркнем, что при указанных определениях $C\Delta$ есть подпространство пространства $C\Delta_0$.

Ниже через $\mathcal{P}(\alpha,m)$ обозначается линейное пространство полиномов степени меньше α от m переменных, и $\nu(\alpha,m)\overset{def}{=\!=}\dim\ \mathcal{P}(\alpha,m)$. Через $P_{\alpha,\Delta}$ обозначается оператор ортогонального проектирования пространства $L_2\Delta$ на множество $\mathcal{P}(\alpha,m)$ /рассматриваемое как подпространство в

$L_2\Delta$ /. Оператор $P_{\alpha,\Delta}$ распространяется по непрерывности на $L_1\Delta$.

Если A - линейный оператор из одного линейного пространства в другое, то $rang\, A$ - размерность его области значений; в частности, $rang\, P_{\alpha,\Delta} = \nu(\alpha, m)$.

Пусть $\mathfrak{H}_i$, $i = 1,2$ - сепарабельные гильбертовы пространства, T - линейный компактный /вполне непрерывный/ оператор, отображающий $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$. Сингулярными числами / s-числами/ $s_n(T)$, $n = 1, 2, \ldots$, оператора T называются собственные числа неотрицательного компактного оператора $\sqrt{T^* T}$, расположенные в невозрастающем порядке. Если сходится ряд

$$\sum_n s_n(T) \stackrel{def}{=\!=} \|T\|_1 ,$$

то оператор T называется ядерным. Более подробные сведения о классах компактных операторов содержатся в Добавлении I.

Пусть $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ - последовательности положительных чисел. Запись $a_n \asymp b_n$ означает, что отношение a_n / b_n ограничено сверху и отделено от нуля; запись $a_n \sim b_n$ означает, что $\lim a_n / b_n = 1$.

Символом C /часто с индексами/ ниже обозначаются "индивидуальные" постоянные, участвующие в основных оценках. Напротив, символ c всегда означает постоянные, значение которых безразлично для дальнейшего.

Символ ▨ означает окончание доказательства; символ ▲ - конец формулировки утверждения.

2. Опишем используемый <u>аппарат приближений</u>; в принципе он допускает применение к любым функциям из $L_1 Q^m$. Пусть Ξ - какое-либо разбиение куба Q^m на конечное число /обозначаемое через $|\Xi|$ / полуоткрытых кубов Δ. Через $\mathcal{P}_\alpha(\Xi)$ обозначим пространство "кусочно-полиномиальных" функций, обращающихся в полином степени меньше α на каждом кубе Δ разбиения Ξ. Очевидно, $\dim \mathcal{P}_\alpha(\Xi) = |\Xi|\, \nu(\alpha, m)$.

С каждым $\alpha > 0$ и разбиением Ξ свяжем оператор "кусочно-полиномиального проектирования" $P_{\alpha,\Xi}$. В пространстве $L_2 Q^m$ оператор $P_{\alpha,\Xi}$ определяется как оператор ортогонального проектирования на подпространство $\mathcal{P}_\alpha(\Xi)$. Далее на $L_1 Q^m$ оператор $P_{\alpha,\Xi}$ распространяется по непрерывности. Функция $v = P_{\alpha,\Xi} u$ (где $u \in L_1 Q^m$) в каждом кубе $\Delta \in \Xi$ обращается в полином $P_{\alpha,\Delta} u$; функция v однозначно определяется как та функция из $\mathcal{P}_\alpha(\Xi)$, для которой

$$\int_\Delta (u-v) x^j dx = 0 \quad (\Delta \in \Xi, \ |j| < \alpha) . \qquad (1.3)$$

Мы будем использовать операторы $P_{\alpha,\Xi}$ для приближения функций классов $W_p^\alpha Q^m$ в равномерной метрике (при $p\alpha > m$), а также в метрике классов $L_q(\rho) Q^m$, $q \geq 1$. Так как показатель α фиксирован, то вместо $P_{\alpha,\Xi}$, $P_{\alpha,\Delta}$ часто будем писать P_Ξ, P_Δ.

Для характеристики отклонения $u - P_\Xi u$ введем в рассмотрение величины

$$E_n(W_p^\alpha Q^m, X) = \inf_{|\Xi| \leq n} \ \sup_{u \in SW_p^\alpha Q^m} N(u - P_\Xi u | X), \qquad (1.4)$$

$$e_n(W_p^\alpha Q^m, X) = \sup_{u \in SW_p^\alpha Q^m} \ \inf_{|\Xi| \leq n} N(u - P_\Xi u | X), \qquad (1.5)$$

где X обозначает любое из пространств $L_q(\rho) Q^m$, MQ^m.

Величины E_n, e_n характеризуют, с одной стороны, свойства операторов P_Ξ как аппарата приближений, а с другой стороны дают информацию о геометрических свойствах вложения множества $SW_p^\alpha Q^m$ в пространство $L_q(\rho) Q^m$ или[ж)] MQ^m.

Наша цель состоит в получении оценок для величин E_n, e_n. Отметим некоторые особенности в постановке задачи. Наиболее интересным для нас является случай $q > p$. Например, при $\alpha p > m$ ниже исследуются р а в н о м е р н ы е приближения для функций класса W_p^α, определяемого и н т е г р а л ь н ы м условием гладкости. При $p = q < \infty$ наиболее интересны оценки для мер, отличных от лебеговой. Для сравнения заметим, что в классической теории приближений обычно рассматриваются

ж/ Мы вынуждены измерять отклонения в норме пространства MQ^m (а не CQ^m), поскольку функции $P_\Xi u$ разрывны.

задачи, в которых обе метрики имеют одинаковую природу /равномерные приближения функций классов C^{α} ; L_p - приближения функций классов W_p^{α} и т.п./.

Некоторая нетрадиционность обсуждаемого здесь аппарата приближений заключается в том, что мы добиваемся хорошей аппроксимации за счет свободы в выборе разбиения Ξ . Размер отдельных кубов $\Delta \in \Xi$ нам безразличен, существенно лишь ограничение $|\Xi| \le n$. Естественно, что целесообразный выбор разбиений позволяет добиться лучшей скорости аппроксимации. Так, например, из приводимых ниже результатов вытекает, что

$$e_n(W_p^{\alpha}Q^m, M) = O(n^{-\alpha/m}), \quad p\alpha > m,$$

т.е. скорость равномерного приближения функций $u \in W_p^{\alpha}Q^m$ оказывается по порядку такой же, как и для функций класса $C^{\alpha}Q^m$.

Обратим внимание на существенное различие между величинами E_n и e_n . В (I.4) ищется разбиение, зависящее от пространств W_p^{α} и $L_q(\rho)$ (или M), но не зависящее от приближаемой функции u . Оптимальное разбиение Ξ определяет собой линейный оператор приближений P_{Ξ} . Напротив, в (I.5) допускается зависимость разбиения от функции u . Таким образом, здесь мы имеем дело с н е л и н е й н ы м , вообще говоря, аппаратом приближений. Очевидно, что $e_n \le E_n$. Важно, что в ряде случаев эти величины действительно имеют различный порядок убывания, т.е. $e_n = o(E_n)$.

3. Теоремы о приближениях. Прежде всего сформулируем результаты об оценках величины e_n .

Теорема I.I. Пусть $p\alpha > m$; тогда существует такая постоянная $C_1 = C_1(m, \alpha, p)$, что

$$e_n(W_p^{\alpha}Q^m, M) \le C_1 n^{-\alpha/m}. \quad \blacktriangle. \tag{I.6}$$

Теорема I.2. Пусть $p\alpha \le m$, $1 \le q < \infty$, $1 < r \le \infty$ и выполнено условие $q < q^*(1-r^{-1})$, или, что то же,

$$p^{-1} - \alpha m^{-1} < q^{-1}(1-r^{-1}). \tag{I.7}$$

Тогда существует такая постоянная $C_2 = C_2(m, \alpha, p, q, r)$, что для любой меры $\rho \in S\mathfrak{M}_2 Q^m$

$$e_n(W_p^\alpha Q^m, L_q(\rho)) \le C_2 n^{-\alpha/m} . \quad \blacktriangle . \tag{I.8}$$

В следующей теореме оцениваются величины E_n.

Теорема I.3. Пусть $1 \le q, r < \infty$ и выполнено условие (I.7). Тогда существует такая постоянная $C_3 = C_3(m, \alpha, p, q, r)$ что для любой меры $\rho \in S\mathfrak{M}_r Q^m$

$$E_n(W_p^\alpha Q^m, L_q(\rho)) \le C_3 n^{-\gamma}, \tag{I.9}$$

где $\gamma = \alpha/m$ при $q \le p$ и $\gamma = \alpha/m - p^{-1} + q^{-1}$ при $q > p$.

В частности, если $p\alpha > m$, то оценка (I.9) справедлива при любом $q \in [1, \infty)$ для всех мер $\rho \in S\mathfrak{M}_1 Q^m$. $\blacktriangle$.

Сравним результаты теорем I.I, I.2 с результатом теоремы I.3. Пусть сначала $q = p$. Тогда эти теоремы дают одинаковые по порядку оценки. Причина в том, что при „родственных" метриках W_p^α и L_p уже простейшее разбиение куба Q^m на равные кубы обеспечивает хорошее приближение. Переход к разбиениям, зависящим от приближаемой функции, оказывается при этом излишним. Ввиду монотонности нормы в $L_q(\rho) Q^m$ относительно q это же обстоятельство имеет место при всех $q < p$.

Иначе обстоит дело при $q > p$, когда вид метрики, характеризующей приближение, жестче, чем вид метрики, характеризующей гладкость. В этом случае нелинейный метод приближений /теоремы I.I, I.2/ дают существенно лучший порядок аппроксимации, чем линейный метод /теорема I.3/.

Оказывается, дело здесь не в том, что в теореме I.3 рассматриваются операторы вида P_Ξ, а именно в линейности аппарата приближений. Чтобы пояснить это, рассмотрим случай, когда $p = 2$, ρ - мера Лебега, $q = \infty$. /Хотя эта предельная ситуация формально не включается в теорему I.3, но для меры Лебега оценка (I.9) сохраняет силу и при $q = \infty$; при этом соответствующее разбиение сводится к разложению на одинаковые кубы/. Неулучшаемость оценки (I.9) в этом случае гарантируется следующим результатом.

Теорема I.4. При $2\alpha > m$ существует такая постоянная $c = c(\alpha, m)$, что для любого линейного оператора A ранга

n , действующего в пространстве $L_\infty Q^m$, справедлива оценка

$$\sup_{u\in SW_2^\alpha Q^m} N(u-Au|L_\infty Q^m)\geqslant cn^{-\gamma}, \quad \gamma=\frac{\alpha}{m}-\frac{1}{2} \ . \ \blacktriangle .$$

Основное содержание теорем I.I, I.2 заключается в том, что они доставляют нелинейный метод приближений, компенсирующий различия между метрикой, характеризующей гладкость, и метрикой, характеризующей близость. Напротив, в теореме I.3 главный момент - это равномерность оценки (I.9) в классе мер $S\mathfrak{M}_r Q^m$, выделяемом условием (I.7) /постоянная C_3 не зависит от меры ρ /. Так, при $\rho\alpha>m$ оценка (I.9) с одной и той же постоянной оказывается справедливой для всех борелевских мер ρ , таких, что $\rho(Q^m)\leq 1$.

Несмотря на различия в характере теорем I.I-I.3, доказательства их весьма сходны. Эти теоремы выводятся из одного утверждения о функциях множеств, формулировка которого приводится ниже.

Пусть J - неотрицательная функция полуоткрытых кубов $\Delta\subset Q^m$, полуаддитивная снизу в следующем смысле: если куб Δ разложен на конечное число попарно не пересекающихся кубов Δ_j , то

$$\sum_j J(\Delta_j)\leq J(\Delta).$$

Класс всех таких функций обозначим через $\mathcal{J}$, а множество всех функций $J\in\mathcal{J}$, для которых $J(Q^m)\leq 1$, - через $S\mathcal{J}$.

Пусть фиксировано некоторое $a>0$. Сопоставим каждой функции $J\in\mathcal{J}$ функцию разбиений[ж/]

$$G_a(J,\Xi)=\max_{\Delta\in\Xi}|\Delta|^a J(\Delta). \tag{I.10}$$

Теорема I.5. Для любой функции $J\in S\mathcal{J}$ и любого натурального n найдется такое разбиение Ξ куба Q^m на кубы, что $|\Xi|\leq n$ и

$$G_a(J,\Xi)\leq C_4 n^{-(a+1)} \quad (a>0), \tag{I.11}$$

ж/ Через $|\Delta|$ будет обозначаться евклидов объем куба Δ .

причем постоянная $C_4 = C_4(m, a)$ не зависит от функции J. ▲.

Доказательство теоремы I.5 /а также некоторых родственных утверждений/ будет изложено в лекции 2. Оно основано на исследовании некоторого конкретного алгоритма разбиений куба Q^m. Вследствие этого и доказательства теорем I.I – I.3 носят конструктивный характер: мы не только устанавливаем справедливость соответствующих оценок, но явно строим ту последовательность разбиений, для которой эти оценки выполняются.

4. <u>Энтропия и поперечники</u>. Обсудим результаты теорем I.I – I.3 с несколько иной точки зрения; при этом пока ограничимся случаем, когда α – целое, $p\alpha > m$. Оценка /I.6/ показывает, что для функций $u \in SW_p^\alpha Q^m$ может быть достигнута та же скорость равномерного приближения кусочно-полиномиальными функциями, что и для функций класса $SC^\alpha Q^m$. При целых α, очевидно, имеет место вложение

$$SC^\alpha Q^m \subset c \cdot SW_p^\alpha Q^m , \qquad c = c(m, \alpha, p).$$

С другой стороны, по теореме вложения С.Л.Соболева

$$SW_p^\alpha Q^m \subset c_1 \cdot SC^\beta Q^m , \quad \beta = \alpha - mp^{-1}, \ c_1 = c_1(m, \alpha, p) > 0 .$$

Возникает следующий общий вопрос о геометрических свойствах единичного шара $SW_p^\alpha Q^m$ как компакта в пространстве CQ^m: к какому из двух множеств $SC^\alpha Q^m$, $SC^\beta Q^m$ этот компакт „ближе"? Для решения этого вопроса естественно привлечь геометрические характеристики вложения пространств $W_p^\alpha Q^m$, $C^\alpha Q^m$, $C^\beta Q^m$ в CQ^m.

Геометрические свойства компакта K в банаховом пространстве B обычно описываются следующими характеристиками: ε- энтропия $\mathcal{H}_\varepsilon(K; B)$, n- поперечники в смысле А.Н.Колмогорова $d_n(K, B)$ и в смысле И.М.Гельфанда $d^n(K, B)$, а также линейные поперечники $\delta_n(K, B)$. Напомним соответствующие определения /подробно см. [3] – [5] /.

Пусть $\mathcal{N}_\varepsilon(K; B)$ – минимальное число элементов ε - сети множества K в метрике пространства B; тогда

$$\mathcal{H}_\varepsilon(K; B) = \log_2 \mathcal{N}_\varepsilon(K; B) .$$

При определении поперечников ограничимся случаем, когда точка O является центром симметрии компакта K. Тогда

$$d_n(K,B)=\inf_{\substack{L\subset B\\ \dim L\le n}} \max_{x\in K} \min_{y\in L} N(x-y|B).$$

Грубо говоря, при определении поперечника d_n ищется такое n-мерное подпространство в B, точками которого можно оптимальным образом приближать элементы $x\in K$.

Другую характеристику приближения компакта K линейными многообразиями дает величина

$$d^n(K,B)=\inf_{\substack{L\subset B\\ \operatorname{codim} L\le n}} \max_{x\in K\cap L} N(x|B).$$

Наконец,

$$\partial_n(K;B)=\inf_{A:\operatorname{rang} A\le n} \max_{x\in K} N(x-Ax|B).$$

Таким образом, линейный поперечник ∂_n характеризует свойства компакта K по отношению ко всевозможным линейным операторам приближений, имеющим ранг $\le n$. Имеют место неравенства

$$\partial_n(K,B)\ge d_n(K,B);$$

$$\partial_n(K,B)\ge d^n(K,B).$$

Первое из них очевидно, второе непосредственно вытекает из неравенства

$$\max_{x\in K} N(x-Ax|B)\ge \max_{x\in K\cap \operatorname{Ker} A} N(x|B).$$

Между поперечниками d_n и d^n существуют некоторые соотношения двойственности /см. [5], [6] /; в целом, однако, взаимоотношения между d_n и d^n изучены недостаточно. Есть основания считать[ж/], что величины d^n по своей природе ближе к линейным по-

---

ж/ Р.С.Исмагиловым недавно показано, что $d^n(K,B)=\min \partial_n(K,\hat{B})$, где $\min$ берется по отношению ко всевозможным банаховым пространствам $\hat{B}$, содержащим B в качестве подпространства.

поперечникам, нежели величины d_n.

Пусть B_1 – банахово пространство, компактно вложенное в B. Тогда вместо $\mathcal{H}_\varepsilon(SB_1; B)$ будем писать $\mathcal{H}_\varepsilon(B_p; B)$; аналогичное соглашение принимается для поперечников.

Результат теоремы I.3 непосредственно приводит к оценке линейных поперечников. В самом деле, из оценки (I.9) вытекает существование такого линейного оператора P_Ξ, что

$$\operatorname{rang} P_\Xi \leq \nu(\ell, m) n \qquad \text{и}$$

$$\sup_{u \in SW_p^\alpha Q^m} N(u - P_\Xi u | L_q(\rho)) \leq C_3 n^{-\gamma}.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема I.6. В условиях теоремы I.3

$$\delta_n(W_p^\alpha Q^m, L_q(\rho)) \leq C_3' n^{-\gamma},$$

где $C_3' = C_3'(m, \alpha, p, q, r)$ не зависит от меры $\rho \in S\mathfrak{M}_r Q^m$. В частности, если $p\alpha > m$, то оценка справедлива при $q \in [1, \infty)$ для всех мер $\rho \in S\mathfrak{M}_1 Q^m$. ▲.

В дальнейшем обсуждении свойств энтропии и поперечников ограничимся случаем, когда ρ – мера Лебега, а $q = \infty$. Мы уже отмечали, что оценка (I.9) сохраняет силу при $q = \infty$, если $p\alpha > m$ и ρ – мера Лебега. Отсюда следует, что

$$\delta_n(W_p^\alpha Q^m, L_\infty) = O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right) \quad \left(\gamma = \frac{\alpha}{m} - p^{-1} > 0\right). \tag{I.12}$$

Для функций „классической" гладкости хорошо известны соотношения[x] /см. [3], [4] /.

$$\mathcal{H}_\varepsilon(C^\alpha Q^m; L_\infty) \asymp \varepsilon^{-m/\alpha}; \tag{I.13}$$

---

[x] Обычно в соотношениях вида (I.12)-(I.14) в качестве объемлющего пространства берут CQ^m, а не $L_\infty Q^m$. В этой связи отметим, что величины $\mathcal{H}_\varepsilon$, d^n, по сути дела, не меняются при расширении объемлющего пространства. Величины d_n, δ_n могут, вообще говоря, уменьшаться; однако в рассматриваемых нами случаях замена CQ^m на $L_\infty Q^m$ не влияет на их порядок.

$$d_n(C^\alpha Q^m, L_\infty) \asymp d^n(C^\alpha Q^m, L_\infty) \asymp \delta_n(C^\alpha Q^m, L_\infty) \asymp n^{-\alpha/m}. \qquad (I.14)$$

При этом для оценки сверху всех четырех величин можно применять один и тот же линейный способ приближений /например, как и при получении оценки (I.12), использовать операторы P_Ξ , отвечающие разбиениям куба Q^m на равные кубы/. По-видимому, именно этим объясняется родственный характер оценок (I.13) и (I.14).

Иначе ведут себя аналогичные величины для вложения $W_p^\alpha Q^m$ в CQ^m . Именно, анализ доказательства теоремы I.I позволяет установить, что при $p\alpha > m$ для класса $W_p^\alpha Q^m$, как и для класса $C^\alpha Q^m$,

$$\mathcal{H}_\varepsilon(W_p^\alpha Q^m; L_\infty) \asymp \varepsilon^{-\frac{m}{\alpha}} \quad (p\alpha > m). \qquad (I.15)$$

С другой стороны,

$$d^n(W_2^\alpha Q^m; L_\infty) \asymp \delta_n(W_2^\alpha Q^m, L_\infty) \asymp n^{-\beta/m} \quad (\beta = \alpha - m/2 > 0). \qquad (I.16)$$

Оценка сверху в (I.16) вытекает из (I.12). Наиболее содержательной здесь является оценка снизу для величин d^n /она получена в [5] /. Теорема I.4 является прямым следствием этой оценки.

Поведение величин $d_n(W_p^\alpha Q^m, L_\infty)$ неизвестно, и получение для них точных двусторонних оценок является интересной задачей. В этом направлении принципиальный результат получил Р.С.Исмагилов [7] , который показал, что может осуществляться соотношение $d_n = o(d^n)$. Именно, им найдена оценка сверху

$$d_n(W_2^1 Q^1, CQ^1) = O(n^{-3/5})$$

/в то время как $d^n(W_2^1 Q^1, CQ^1) \asymp n^{-1/2}$ /.

Оценка (I.16) показывает, что при $2\alpha > m$ с точки зрения линейных методов приближения шар $SW_2^\alpha Q^m$ „устроен" в CQ^m примерно так же, как шар более ш и р о к о г о множества $C^\beta Q^m$. Напротив, с точки зрения ε-энтропии, являющейся существенно нелинейной характеристикой, шар $SW_p^\alpha Q^m$ устроен так же, как шар более у з к о г о множества $C^\alpha Q^m$. Последнее утверждение получается при сопоставлении (I.13) и следующего общего результата, который нужно использовать при $q=\infty$.

Теорема I.7. Пусть $\alpha>0$, $1\le p<\infty$, $1\le q\le\infty$ и при $p\alpha\le m$ показатель q меньше предельного, т.е.

$$p^{-1}-\alpha m^{-1}<q^{-1}.$$

Тогда

$$\mathcal{H}_\varepsilon(W_p^\alpha Q^m;L_q)\asymp\varepsilon^{-m/\alpha}. \ \blacktriangle.$$

Наиболее содержательной здесь является оценка сверху. Ее доказательство основано на теоремах I.I, I.2. При этом используются не только оценки (I.6), (I.8), но и сам алгоритм разбиений приводящий к этим оценкам. Иными словами, мы явно строим способ приближений, реализующий оценку для ε-энтропии.

5. <u>Оценки спектра интегральных операторов</u>. Основные приложения теоремы I.3 /а также других аналогичных утверждений/ относятся к оценкам интегральных операторов и эллиптических вариационных задач. При этом принципиальное значение приобретает независимость постоянной C_3 в оценке (I.9) от меры $\rho\in S\mathfrak{M}_r Q^m$.

Приведем формулировки некоторых /простейших/ результатов об интегральных операторах. Пусть (X,ρ), (Y,τ) – пространства с σ-конечной мерой, T – измеримая функция /"ядро"/, заданная на $X\times Y$. Рассмотрим интегральный оператор

$$(\mathbb{T}u)(y)=\int_X T(x,y)u(x)\rho(dx), \tag{I.I7}$$

отображающий $L_2(\rho)X$ в $L_2(\tau)Y$. Из теоремы I.3 можно вывести для оператора (I.I7) точные по порядку оценки s-чисел в зависимости от свойств гладкости ядра T.

Теорема I.8. Пусть $X=Q^m$, $\rho\in S\mathfrak{M}_r Q^m$, $1\le r\le\infty$, $T\in L_2(\tau)YH_\alpha Q^m$ при $2\alpha r>m$. Тогда s – числа оператора (I.I7) удовлетворяют оценке

$$s_n(\mathbb{T})\le C_n^{-\left(\frac{\alpha}{m}+\frac{1}{2}\right)}N(T|L_2(\tau)YH_\alpha Q^m), \tag{I.I8}$$

где $C=C(m,\alpha,r)$ не зависит от меры $\rho\in S\mathfrak{M}_r Q^m$ и пространства с мерой (Y,τ). $\blacktriangle$.

В частности, если $2\alpha>m$, то оценка (I.I8) справедлива для всех нормированных борелевских мер на Q^m. В лекции 3 условия справедливости оценок вида (I.18) будут расширены.

Оценкам спектра интегральных операторов посвящено довольно много работ /см., например, [8], § III.10, где имеются ссылки на более раннюю литературу/. В них почти исключительно рассматривается случай, когда ρ - мера Лебега. Для этого случая оценка (I.18) получается элементарно. Включение произвольных мер и получение равномерных относительно них оценок оказалось важным для приложений к обсуждаемой в лекции 3 проблеме множителей для ядер интегральных операторов. Особую роль в этих приложениях играет следующий результат, вытекающий из теоремы I.8.

Теорема I.9. Пусть $X = Q^m$, $T \in L_\infty(\tau) Y H_\alpha Q^m$ при $2\alpha > m$. Тогда каковы бы ни были мера $\rho \in S\mathfrak{M}_1 Q^m$ и пространство с мерой (Y, τ), $\tau(Y) \le 1$, оператор (I.17)-ядерный и

$$\| \mathbb{T} \|_1 \le C N(T | L_\infty(\tau) Y H_\alpha Q^m).$$

Постоянная $C = C(m, \alpha)$ не зависит от меры ρ и пространства с мерой (Y, τ). Утверждение сохраняет силу, если $X = \mathbb{R}^m$. $\blacktriangle$.

Для характеристики упоминавшейся выше проблемы множителей приведем пример задачи этого типа. Пусть $\mathbb{T}$ - оператор (I.17), причем $X = Y = \mathbb{R}^m$ и $\rho = \tau$ - лебегова мера в $\mathbb{R}^m$. Рассмотрим „преобразование множителей" M_φ, сопоставляющее интегральному оператору $\mathbb{T}$ оператор $\mathbb{Q}$ того же вида с ядром $Q(x,y) = \varphi(x,y) T(x,y)$ /функция φ фиксирована/. Требуется наложить условия на „мультипликатор" φ, при которых отображение M_φ непрерывно относительно операторной нормы $L_2 \mathbb{R}^m$.

Оказывается, эта проблема множителей в некотором смысле двойственна вопросу о ядерности интегральных операторов. Именно, пусть ρ_1, ρ_2 - абсолютно непрерывные меры класса $S\mathfrak{M}_1 \mathbb{R}^m$ и пусть $\mathfrak{H}_i = L_2(\rho_i) \mathbb{R}^m$, $i = 1,2$. Рассмотрим интегральный оператор

$$(\Phi u)(y) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x,y) u(x) \rho_1(dx),$$

переводящий $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$. Из результатов лекции 3 вытекает, в частности, следующее. Непрерывность отображения M_φ равносильна тому, чтобы для любой пары мер ρ_1, ρ_2 указанного вида оператор Φ был ядерным и $\|\Phi\|_1 \leq A$, где постоянная $A = A(\varphi)$ не зависит от мер ρ_1, ρ_2. Теорема 1.9 показывает, что достаточным является условие $\varphi \in L_\infty \mathbb{R}^m H_\alpha \mathbb{R}^m$, $2\alpha > m$.

Обсуждаемая проблема множителей тесно связана с вопросом об ограниченности в $L_2 \mathbb{R}^m$ псевдодифференциальных операторов. Таким образом, обнаруживается любопытная связь между признаками ограниченности псевдодифференциальных операторов и признаками ядерности интегральных операторов.

В более общем виде проблема множителей для интегральных ядер рассматривается в лекции 3. Там же обсуждаются ее связи с некоторыми задачами анализа.

6. Асимптотика спектра негладких эллиптических краевых задач. Теорема 1.3 находит интересные применения к оценкам спектра вариационных задач, которые естественно обобщают в „негладких" ситуациях эллиптические краевые задачи. Оценки спектра, в свою очередь, применяются к вычислению в максимально широких предположениях главного члена спектральной асимптотики. Важной особенностью получаемых на этом пути оценок спектра является то, что в них входят лишь L_r-нормы коэффициентов и, быть может, диаметр области. При этом в некоторых случаях в оценку входит только величина, конечность которой требуется видом главного члена спектральной асимптотики. Столь точные результаты полезны во многих отношениях. Подробно этот круг вопросов рассматривается в лекциях 4 и 5. Здесь мы ограничимся пояснениями в наиболее простом случае.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ – ограниченное открытое множество, $\ell \geq 1$ – целое число, ρ – конечная борелевская мера на Ω. Рассмотрим гильбертово пространство $\overset{\circ}{H}_\ell \Omega$ – пополнение класса $C_0^\infty \Omega$ относительно метрики, порожденной квадратичной формой

$$\mathcal{J}_\ell[u,u] = \int_\Omega |\nabla_\ell u|^2 dx .$$

Наряду с формой $\mathcal{J}_\ell$ рассмотрим форму

$$\mathcal{J}_\rho[u,u] = \int_\Omega |u|^2 \rho(dx) .$$

При условиях на ρ, которые будут указаны ниже, форма $\mathcal{J}_\rho$ ограничена и вполне непрерывна в $\overset{\circ}{H}_\ell \Omega$. В соответствии с этим форма $\mathcal{J}_\rho$ порождает в $\overset{\circ}{H}_\ell \Omega$ некоторый самосопряженный вполне непрерывный оператор. Его собственные числа λ_n совпадают с последовательными максимумами отношения форм

$$\mathcal{J}_\rho[u,u] / \mathcal{J}_\ell[u,u] \qquad (u \in \overset{\circ}{H}_\ell \Omega). \tag{I.19}$$

Если мера ρ абсолютно непрерывна, ее плотность $\rho(x) = d\rho/dx$ непрерывна и $\rho(x) \geq \delta^2 > 0$, то числа λ_n представляют собой собственные значения задачи Дирихле для уравнения

$$(-1)^\ell \Delta^\ell u(x) = \lambda^{-1} \rho(x) u(x)$$

/здесь Δ^ℓ – полигармонический оператор/. Мы будем поэтому и в общем случае говорить о спектре задачи Дирихле для отношения (I.19).

Из теоремы I.8 и других близких к ней утверждений вытекает следующая.

Теорема I.10. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ – ограниченное открытое множество, $d(\Omega)$ – его диаметр; пусть $\rho \in \mathfrak{M}_r \Omega$, где $r = 1$ при $2\ell > m$, $r > 1$ при $2\ell = m$, $r = m/2\ell$ при $2\ell < m$. Тогда собственные числа λ_n задачи Дирихле для отношения (I.19) удовлетворяют неравенству

$$\lambda_n \leq C n^{-2\ell/m} N(\rho | \mathfrak{M}_r \Omega) [d(\Omega)]^{2\ell - m r^{-1}}, \tag{I.20}$$

где $C = C(\ell, m, r)$ не зависит от меры ρ и множества Ω. Если $2\ell > m$ и мера ρ сингулярна, то

$$\lambda_n = o(n^{-2\ell/m}). \quad \blacktriangle. \tag{I.20a}$$

Отметим, что при $2\ell < m$ в оценку (I.20) не входит диаметр Ω. Это позволяет распространить оценку (I.20) при $2\ell < m$ на произвольные /неограниченные/ открытые множества $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$.

Применение теоремы I.10 в сочетании с некоторыми фактами теории возмущений дает возможность выяснить асимптотическое поведение чисел λ_n. При этом решающую роль играет то обстоятельство, что в (I.20) мера ρ входит лишь через интегральную норму.

Теорема I.II. В условиях теоремы I.IO числа λ_n удовлетворяют асимптотическому соотношению

$$\lambda_n \sim (\gamma n^{-1})^{2\ell/m}, \quad \gamma = \frac{(2\sqrt{\pi})^{-m}}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)} \int_\Omega \rho^{m/2\ell}\, dx. \quad \blacktriangle. \qquad (I.2I)$$

Из (I.2I) видно, что при $2\ell > m$ сингулярная часть меры ρ не дает вклада в главный член спектральной асимптотики. Источником этого обстоятельства является оценка (I.20а). При $2\ell < m$ в (I.20) и (I.2I) входит одна и та же величина $\|\rho\|_r$, $r = \varkappa/2\ell$, а формула (I.2I) переносится на неограниченные множества. Этим дается /при $2\ell < m$ / исчерпывающее описание условий справедливости асимптотики (I.2I).

Если область Ω ограничена, $\ell = 1$, $m \geqslant 2$ и $\rho(x) \equiv 1$, то (I.2I) переходит в классическую формулу Г.Вейля асимптотики спектра задачи Дирихле для оператора Лапласа. Однако и для этого случая теорема I.II усиливает известные результаты, поскольку полностью устраняет какие-либо предположения о границе области Ω. Вообще следует иметь в виду, что при вычислении спектральной асимптотики как тауберов метод, так и вариационный метод в его традиционной форме требуют определенных ограничений гладкости /часто значительных/ на данные задачи. Исключением является результат М.Г.Крейна [9], [IO] о спектре регулярной струны, который соответствует теореме I.II при $\ell = m = 1$, $\Omega = (0,1)$. При этом впервые наблюдался эффект отсутствия вклада в спектральную асимптотику от сингулярной части меры. Доказательство М.Г.Крейна является довольно трудным; оно использует тонкие „комплексные" методы, применимые лишь при $m = 1$.

Техника, основанная на утверждениях типа теоремы I.3, сильно расширяет возможности применения вариационного метода к „негладким" краевым задачам. При этом теоремы I.IO, I.II обобщаются в различных направлениях. Допускаются другие граничные условия; мера ρ может быть заменена зарядом. Изучаются дифференциальные выражения с негладкими с т а р ш и м и коэффициентами, рассматриваются различные случаи вырождения эллиптичности и т.п. Сходная методика применима к изучению асимптотики спектра интегральных уравнений с особыми ядрами. Подробнее эти вопросы обсуждаются в лекциях 4, 5.

Добавление I

Вспомогательные сведения о компактных операторах

Здесь собраны используемые в лекциях факты теории операторов в гильбертовом пространстве. Большинство опущенных доказательств можно найти в книге [8].

I. Ниже $\mathfrak{H}_i$, $i=1,2$ – сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_i$. Через $\mathcal{R}=\mathcal{R}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ обозначается множество всех линейных непрерывных операторов, а через $\mathfrak{S}_\infty=\mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ – множество всех компактных операторов, отображающих $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$. Если $\mathfrak{H}_1=\mathfrak{H}_2=\mathfrak{H}$, то используем обозначения $\mathcal{R}(\mathfrak{H})$, $\mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$.

Если $T\in\mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$ и T – самосопряженный $(T=T^*)$, то через $\lambda_n^+(T)$ /через $-\lambda_n^-(T)$ / обозначаются положительные /отрицательные/ собственные значения оператора T, перенумерованные /с учетом кратностей/ в порядке невозрастания абсолютных величин. Соответствующие функции распределения условимся обозначать через $n_\pm(\lambda;T)$:

$$n_\pm(\lambda;T)=\sum_{\lambda_n^\pm(T)>\lambda} 1, \qquad \lambda>0.$$

Если $T\geqslant 0$, то пишем $\lambda_n(T)$ вместо $\lambda_n^+(T)$. Для произвольного оператора $T\in\mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$ собственные числа $\lambda_n(T)$ /если они есть/ нумеруются в порядке невозрастания модуля.

Функцию распределения сингулярных чисел $s_n(T)$ оператора $T\in\mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H}_1,\mathfrak{H}_2)$ будем обозначать через $n(s;T)$. Ясно, что при $T=T^*\in\mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$.

В случаях, когда это не может привести к недоразумению, символ T в указанных обозначениях опускается.

Каждый оператор $T \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ допускает каноническое представление

$$T = \sum_k s_k(\cdot, \omega_k)_1 \theta_k \ , \qquad s_k = s_k(T) \ , \tag{I.22}$$

где $\{\omega_k\}$, $\{\theta_k\}$ - ортонормированные системы /о.н.с./ в пространствах $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ соответственно. Если T - оператор конечного ранга, т.е. $rang\, T \overset{def}{=} \dim T\mathfrak{H}_1 < \infty$, то сумма в (I.22) содержит $r = rang\, T$ слагаемых.

Отметим неравенства Вейля: для $T \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$

$$\prod_{k=1}^{n} |\lambda_k(T)| \le \prod_{k=1}^{n} s_k(T), \qquad n = 1, 2, \dots \ . \tag{I.23}$$

Эти неравенства позволяют переносить на собственные числа некоторые оценки, полученные для s-чисел. Например, справедлива

Лемма I.I2. а) Если $s_n(T) \le cn^{-\alpha}$, $n = 1, 2, \dots$, то

$$|\lambda_n(T)| \le ce^{\alpha} n^{-\alpha} \qquad (n = 1, 2, \dots). \tag{I.24}$$

в) Если последовательность $\{\lambda_n(T)\}$ бесконечна, то

$$\limsup_{n\to\infty} n^{\alpha} |\lambda_n(T)| \le e^{\alpha} \limsup_{n\to\infty} n^{\alpha} s_n(T) \qquad (\alpha > 0).$$

Доказательство. Из (I:23) и из неравенства $n! > n^n e^{-n}$ находим при любом $n = 1, 2, \dots$

$$|\lambda_n(T)|^n \le \prod_{k=1}^{n} |\lambda_k(T)| \le \prod_{k=1}^{n} s_k(T) \le c^n (n!)^{-\alpha} \le c^n e^{\alpha n} n^{-\alpha n},$$

что равносильно (I.24). Аналогично доказывается утверждение в).

2. <u>Минимаксимальный принцип</u>. Мы систематически пользуемся минимаксимальным /вариационным/ принципом для собственных и сингулярных чисел, допускающим различные эквивалентные формулировки. Обычная формулировка состоит в том, что для $T = T^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$

$$\lambda^{\pm}_{n+1}(T) = \min_{\operatorname{codim} \mathcal{G} \le n} \max_{u \in \mathcal{G}} \frac{\pm (Tu, u)}{(u,u)}, \tag{1.25}$$

и для $T \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_1)$

$$s_{n+1}(T) = \min_{\operatorname{codim} \mathcal{G} \le n} \max_{u \in \mathcal{G}} \frac{\|Tu\|_1}{\|u\|}.$$

Здесь $\mathcal{G}$ – подпространство в $\mathfrak{H}$.

Приведем несколько иной вариант минимаксимального принципа. Обозначим через $\mathcal{K}_\pm(\lambda) = \mathcal{K}_\pm(\lambda, T)$ множество подпространств $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{H}$, на которых выполнено неравенство

$$\pm(Tu,u) > \lambda(u,u), \qquad 0 \ne u \in \mathfrak{K}.$$

Лемма 1.13. Имеет место равенство

$$n_\pm(\lambda; T) = \max_{\mathfrak{K} \in \mathcal{K}_\pm(\lambda)} \dim \mathfrak{K}. \tag{1.26}$$

Если $\mathcal{L}$ – какое-либо плотное в $\mathfrak{H}$ линейное подмножество, то в (1.26) можно ограничиться подпространствами $\mathfrak{K} \subset \mathcal{L}$. ▲.

Еще одна полезная формулировка состоит в следующем. Пусть $\mathcal{F}_\pm(\lambda) = \mathcal{F}_\pm(\lambda, T)$ – множество подпространств $\mathcal{F} \subset \mathfrak{H}$, на которых

$$\pm(Tu,u) \le \lambda(u,u), \qquad u \in \mathcal{F}.$$

Лемма 1.14. Имеет место равенство

$$n_\pm(\lambda; T) = \min_{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_\pm(\lambda)} \operatorname{codim} \mathcal{F}. \quad ▲.$$

Вариационные соображения применимы при сравнении спектров операторов, действующих в разных гильбертовых пространствах. Например, из леммы 1.13 легко вытекает следующая

Лемма 1.15. Пусть $T_i = T_i^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H}_i)$, $i = 1,2$. Пусть $S \in \mathcal{R}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$, причем $(T_1 u, u)_1 = 0$ для $u \in \operatorname{Ker} S$. Если при некотором $t > 0$ для всех $u \in \mathfrak{H}_1$, удовлетворяющих условию $\pm(T_1 u, u)_1 > 0$, выполнено неравенство

$$\frac{\pm (T_1 u, u)_1}{(u,u)_1} \le \pm \frac{t(T_2 Su, Su)_2}{(Su, Su)_2}, \qquad (I.27)$$

то для всех $\lambda > 0$

$$n_\pm(\lambda; T_1) \le n_\pm(t^{-1}\lambda; T_2).$$

3. Значительное место в последующих лекциях занимает исследование асимптотического поведения собственных чисел. Мы рассматриваем лишь степенную асимптотику, которую удобно характеризовать значениями функционалов

$$\left.\begin{aligned} \Delta_\theta^\pm(T) &= \limsup_{\lambda \to 0} \lambda^\theta n_\pm(\lambda; T) \\ \delta_\theta^\pm(T) &= \liminf_{\lambda \to 0} \lambda^\theta n_\pm(\lambda; T) \end{aligned}\right\} \quad (T = T^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H}); \theta > 0). \qquad (I.28)$$

Аналогично для сингулярных чисел положим

$$\left.\begin{aligned} \Delta_\theta(T) &= \limsup_{s \to 0} s^\theta n(s; T) \\ \delta_\theta(T) &= \liminf_{s \to 0} s^\theta n(s; T) \end{aligned}\right\} \quad (T \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)). \qquad (I.29)$$

Отметим, что, например, первое из равенств (I.28) равносильно соотношению

$$\limsup_{n \to \infty} n^{1/\theta} \lambda_n^\pm(T) = \left[\Delta_\theta^\pm(T)\right]^{1/\theta}.$$

Функционалы (I.28) не меняются при компактных возмущениях метрики исходного гильбертова пространства $\mathfrak{H}$. Именно, пусть $Q = Q^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$ и $\lambda_1^+(Q) < 1$. Положим

$$(u, v)_1 \overset{def}{=\!=} (u, v) - (Qu, v). \qquad (I.30)$$

Скалярное произведение (I.30) превращает $\mathfrak{H}$ в новое гильбертово пространство $\mathfrak{H}_1$, метрика которого вследствие неравенства

$$(u,u)_1 \ge \left[1 - \lambda_1^+(Q)\right](u,u)$$

эквивалентна метрике пространства $\mathfrak{H}$. Обозначим через T_1 самосопряженный оператор, порождаемый в $\mathfrak{H}_1$ билинейной формой оператора $T = T^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$:

$$(T_1 u, v)_1 = (Tu, v).$$

Лемма I.16. При сделанных предположениях для любого $\theta > 0$ справедливы равенства

$$\Delta_\theta^{\pm}(T_1) = \Delta_\theta^{\pm}(T), \qquad \delta_\theta^{\pm}(T_1) = \delta_\theta^{\pm}(T). \ \blacktriangle.$$

Доказательство. Рассмотрим для определенности случай величин Δ_θ^+. По $\varepsilon > 0$ найдем подпространство $\mathfrak{G}_\varepsilon \subset \mathfrak{H}$, $\operatorname{codim} \mathfrak{G}_\varepsilon = m_\varepsilon < \infty$, такое, что

$$(Qu, u) < \varepsilon (u, u) \qquad (u \in \mathfrak{G}_\varepsilon).$$

Тогда для $u \in \mathfrak{G}_\varepsilon \cap \mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_1 \in \mathcal{K}_+(\lambda, T_1)$, имеем:

$$\lambda < \frac{(T_1 u, u)_1}{(u, u)_1} = \frac{(Tu, u)}{(u, u) - (Qu, u)} \le \frac{(Tu, u)}{(1-\varepsilon)(u, u)}.$$

Следовательно, $\mathfrak{G}_\varepsilon \cap \mathfrak{K}_1 \in \mathcal{K}_+(\lambda(1-\varepsilon), T)$. Вместе с тем

$$\dim \mathfrak{K}_1 \le \dim (\mathfrak{G}_\varepsilon \cap \mathfrak{K}_1) + \operatorname{codim} \mathfrak{G}_\varepsilon$$

и, в силу леммы I.13,

$$n_+(\lambda; T_1) \le n_+(\lambda(1-\varepsilon); T) + m_\varepsilon.$$

Умножая полученное неравенство на λ^θ и переходя при $\lambda \to 0$ к верхним пределам, находим:

$$\Delta_\theta^+(T_1) \le (1-\varepsilon)^{-\theta} \Delta_\theta^+(T).$$

Остается учесть, что $\varepsilon > 0$ произвольно, а затем поменять ролями операторы T, T_1. ▨.

Обсудим теперь поведение функционалов $\Delta_\theta^\pm(T)$, $\delta_\theta^\pm(T)$ при аддитивных возмущениях оператора T. Прежде всего отметим, что для $T_i = T_i^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$, $i = 1, 2$, при любых $\lambda, \mu > 0$ имеет место неравенство

$$n_\pm(\lambda + \mu; T_1 + T_2) \le n_\pm(\lambda; T_1) + n_\pm(\mu; T_2), \tag{I.31}$$

легко вытекающее из леммы I.14. Аналогично, для $T_i \in \mathfrak{T}_\infty(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$, $i=1,2$, при любых $s,t>0$

$$n(s+t;\, T_1+T_2) \le n(s;\, T_1)+n(t;\, T_2). \tag{I.32}$$

Неравенства (I.31) эквивалентны известным неравенствам Г.Вейля /см. [11] / для собственных чисел суммы самосопряженных операторов; неравенства (I.32) эквивалентны неравенствам Ки Фаня /см. [8] / для s -чисел суммы операторов. Следующее предложение также принадлежит Г.Вейлю [12] .

Лемма I.17. Пусть $T_i = T_i^* \in \mathfrak{T}_\infty$, $i=1,2$, и пусть $\Delta_\theta(T_2)=0$. Тогда

$$\Delta_\theta^{\pm}(T_1+T_2)=\Delta_\theta^{+}(T_1), \qquad \delta_\theta^{+}(T_1+T_2)=\delta_\theta^{+}(T_1). \quad \blacktriangle .$$

Лемма I.17 содержится в следующем более общем предложении.

Лемма I.18. Пусть $T=T^* \in \mathfrak{T}_\infty$ и пусть при любом $\varepsilon>0$ существует такой оператор $T_\varepsilon = T_\varepsilon^* \in \mathfrak{T}_\infty$, что

$$\Delta_\theta(T-T_\varepsilon)=\Delta_\theta^{+}(T-T_\varepsilon)+\Delta_\theta^{-}(T-T_\varepsilon) \le \varepsilon . \tag{I.33}$$

Тогда величины $\Delta_\theta^{\pm}(T_\varepsilon)$, $\delta_\varepsilon^{\pm}(T_\varepsilon)$ имеют при $\varepsilon \to 0$ пределы, причем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Delta_\theta^{\pm}(T_\varepsilon)=\Delta_\theta^{\pm}(T), \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \delta_\theta^{\pm}(T_\varepsilon)=\delta_\theta^{\pm}(T). \quad \blacktriangle .$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством (I.31), полагая в нем $T_1=T_\varepsilon$, $T_2=T-T_\varepsilon$, $\lambda \to \tau\lambda$, $\mu \to (1-\tau)\lambda$ $(0<\tau<1)$. Мы получим:

$$n_\pm(\lambda;T) \le n_\pm(\tau\lambda;\, T_\varepsilon)+n_\pm((1-\tau)\lambda;\, T-T_\varepsilon).$$

Умножая на λ^θ и переходя при $\lambda\to 0$ к верхним пределам, находим, с учетом (I.33):

$$\Delta_\theta^{\pm}(T) \le \tau^{-\theta}\Delta_\theta^{\pm}(T_\varepsilon)+(1-\tau)^{-\theta}\varepsilon .$$

Минимизируя правую часть по $\tau \in (0,1)$, получаем:

$$\left[\Delta_\theta^{\pm}(T)\right]^{\frac{1}{\theta+1}} \le \left[\Delta_\theta^{\pm}(T_\varepsilon)\right]^{\frac{1}{\theta+1}}+\varepsilon^{\frac{1}{\theta+1}} . \tag{I.34}$$

Меняя ролями операторы T, T_ε, приходим к неравенству

$$\left[\Delta^{\pm}_{\theta}(T_\varepsilon)\right]^{\frac{1}{\theta+1}} \leq \left[\Delta^{\pm}_{\theta}(T)\right]^{\frac{1}{\theta+1}} + \varepsilon^{\frac{1}{\theta+1}} . \qquad (I.35)$$

Из неравенств (I.34), (I.35) утверждение леммы для функционалов $\Delta^{\pm}_{\theta}$ получается непосредственно. Случай функционалов $\delta^{\pm}_{\theta}$ рассматривается аналогично. ▨ .

Подобным же образом устанавливается аналогичное предложение для s -чисел.

Лемма I.19. Пусть $T \in \mathcal{T}_\infty(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ и пусть при любом $\varepsilon > 0$ существует такой оператор $T_\varepsilon \in \mathcal{T}_\infty$, что $\Delta_\theta(T - T_\varepsilon) \leq \varepsilon$. Тогда величины $\Delta_\theta(T_\varepsilon)$, $\delta_\theta(T_\varepsilon)$ имеют при $\varepsilon \to 0$ пределы, равные соответственно $\Delta_\theta(T)$, $\delta_\theta(T)$. ▲.

4. <u>Классы компактных операторов</u>. Операторы $T \in \mathcal{T}_\infty(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ классифицируются в зависимости от скорости убывания чисел $s_n(T)$. Чаще всего используются так называемые классы $\mathcal{T}_p$; включение $T \in \mathcal{T}_p(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$, $p > 0$, означает, что последовательность $\{s_n(T)\}$ суммируема со степенью p. При $p \geq 1$ класс $\mathcal{T}_p$ представляет собой полное линейное нормированное пространство относительно нормы

$$\| T \|_p = \left\{ \sum_n \left[s_n(T)\right]^p \right\}^{1/p} . \qquad (I.36)$$

Операторы $T \in \mathcal{T}_1$ называются ядерными, операторы $T \in \mathcal{T}_2$ — операторами Гильберта-Шмидта.

Если $T_1 \in \mathcal{T}_p(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$, $T_2 \in \mathcal{T}_{p'}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$, где $p^{-1} + (p')^{-1} = 1$, либо если $T_i \in \mathcal{T}_1$, $T_j \in \mathcal{R}$, $i,j = 1,2$, $i \neq j$, то определена билинейная /точнее, полуторалинейная/ форма

$$\langle T_1, T_2 \rangle = \mathrm{Tr}\, T_1 T_2^* . \qquad (I.37)$$

Эта форма определяет общий вид линейного функционала в $\mathcal{T}_p$, $1 \leq p \leq \infty$. Более определенно, форма (I.37) индуцирует следующие реализации /с точностью до изометрического изоморфизма/ сопряженных пространств:

$$(\mathfrak{S}_p)^* = \mathfrak{S}_{p'} \quad (1 < p \le \infty); \quad (\mathfrak{S}_1)^* = \mathfrak{R} . \tag{I.38}$$

В классе $\mathfrak{S}_2(\mathfrak{H})$ форма (I.37) задает скалярное произведение, относительно которого $\mathfrak{S}_2$ является полным сепарабельным гильбертовым пространством.

Пусть $f \in \mathfrak{H}_1$, $g \in \mathfrak{H}_2$; условимся обозначать через $T_{f,g}$ одномерный оператор

$$T_{f,g} = (\cdot, f) g .$$

Для любого $A \in \mathfrak{R}$

$$\langle A, T_{f,g} \rangle = (Af, g) . \tag{I.39}$$

В частности,

$$\langle T_{\omega,\theta}, T_{f,g} \rangle = (f, \omega)(\theta, g) . \tag{I.40}$$

При оценках сингулярных чисел интегральных операторов существенную роль играет следующее утверждение /см. лемму III.6.I в [8]/.

Лемма I.20. Пусть $T \in \mathfrak{S}_p(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$, $1 \le p < \infty$. Тогда

$$\min_{\mathrm{rang}\, T' \le n} \|T - T'\|_p^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} s_k^p(T) . \ \blacktriangle . \tag{I.41}$$

Соответствующее утверждение для $p = \infty$ равносильно экстремальному соотношению для s-чисел

$$\min_{\mathrm{rang}\, T' \le n} \|T - T'\| = s_{n+1}(T) .$$

Особое значение имеет равенство (I.41) при $p = 2$; оно используется при получении основных результатов лекции 3. Поэтому мы приведем здесь простое доказательство указанного частного случая леммы I.20.

Основная часть доказательства - проверка неравенства

$$\|T - T'\|_2^2 \ge \sum_{k=n+1}^{\infty} s_k^2(T) , \quad \mathrm{rang}\, T' \le n . \tag{I.42}$$

Рассмотрим каноническое разложение оператора T'

$$T'=\sum_{k=1}^{n} s_k'(\cdot,f_k)g_k .$$

Операторы $T_k=T_{f_k,g_k}$ попарно ортогональны и нормированы в σ_2, что сразу следует из (I.40). Поэтому можно воспользоваться общим экстремальным свойством отрезков ряда Фурье, согласно которому

$$\|T-T'\|_2^2 \geqslant \|T\|_2^2-\sum_{j=1}^{n}|\langle T,T_j\rangle|^2=\|T\|_2^2-\sum_{j=1}^{n}|(T_{f_j},g_j)|^2,$$

и далее:

$$\|T-T'\|_2^2 \geqslant \|T\|_2^2-\sum_{j=1}^{n}\|Tf_j\|^2. \tag{I.43}$$

Воспользуемся каноническим представлением (I.22) оператора T. Тогда

$$\|Tf_j\|^2=\sum_{k=1}^{\infty} s_k^2\,|(f_j,\omega_k)|^2 ;$$

$$\|T\|_2^2-\sum_{j=1}^{n}\|Tf_j\|^2=\sum_{k=1}^{\infty} s_k^2-\sum_{k=1}^{\infty} a_k s_k^2 , \tag{I.44}$$

где обозначено

$$a_k=\sum_{j=1}^{n}|(f_j,\omega_k)|^2, \qquad k=1,2,\ldots .$$

Числа a_k удовлетворяют условиям

$$0\leq a_k\leq 1, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k\leq n.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k^2-\sum_{k=1}^{\infty} a_k s_k^2=\sum_{k=n+1}^{\infty} s_k^2+\sum_{k=1}^{n}(1-a_k)s_k^2-\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k s_k^2 \geqslant$$

$$\geqslant\sum_{k=n+1}^{\infty} s_k^2+\sum_{k=1}^{n}(1-a_k)s_n^2-\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k s_n^2 \geqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} s_k^2 .$$

Неравенство (I.42) получается, если сопоставить (I.43), (I.44) и (I.45). Равенство в (I.41) достигается/при любом $p\geqslant 1$ /, если положить

$$T' = \sum_{k=1}^{n} s_k(\cdot,\omega_k)\theta_k \quad . \quad ■ .$$

Как правило, мы будем пользоваться не самой леммой I.20, а следствием из нее.

Следствие I.21. Пусть $T \in \mathfrak{S}$, $1 \le p \le \infty$, $\operatorname{rang} T' \le n$. Тогда

$$s_{2n}(T) \le n^{-1/p} \| T - T' \|_p . \quad ▲ .$$

В самом деле,

$$n s_{2n}^p(T) \le \sum_{k=n+1}^{2n} s_k^p(T) \le \| T - T' \|_p^p .$$

Наряду с классами $\mathfrak{S}_p$ в лекции 3 понадобятся классы $\mathfrak{S}^{(\beta)}$, $\beta > 0$, характеризующиеся условием

$$s_n(T) = O(n^{-\beta}) \qquad (\beta > 0) .$$

При $\beta < 1$ класс $\mathfrak{S}^{(\beta)}$ представляет собой банахово пространство относительно нормы

$$\| T \|_{(\beta)} = \sup_n \frac{\sum_{k=1}^{n} s_k(T)}{\sum_{k=1}^{n} k^{-\beta}} , \qquad (\beta < 1) .$$

Имеют место неравенства

$$\| T \|_{(\beta)} \le \sup_n n^{\beta} s_n(T) \le (1-\beta)^{-1} \| T \|_{(\beta)} . \qquad (I.46)$$

Пространства $\mathfrak{S}^{(\beta)}$ несепарабельны. Сепарабельное подпространство $\mathfrak{S}^{(\beta)}_0 \subset \mathfrak{S}^{(\beta)}$, в котором плотное множество составляют операторы конечного ранга, характеризуется условием $s_n(T) = o(n^{-\beta})$.

В классах $\mathfrak{S}_p$ при $p < 1$ и в классах $\mathfrak{S}^{(\beta)}$ при $\beta \ge 1$ можно ввести метрику Фреше /см. С.Ю.Ротфельд [13], [14] /.

ГЛАВА 2

Лекция 2

Теоремы о приближениях. Энтропия

1. <u>Основные теоремы о кусочно-полиномиальных аппроксимациях</u>. Бóльшая часть настоящей лекции посвящена доказательству теорем 1.1 - 1.3, а также некоторых родственных утверждений. Начнем с того, что приведем несколько измененные формулировки этих теорем, более удобные для применений.

Теорема 2.1. Пусть $p\alpha > m$. Тогда для любой функции $u \in W_p^\alpha Q^m$ по всякому натуральному n найдется такое разбиение Ξ куба Q^m на кубы, что $|\Xi| \le n$ и

$$N(u - P_\Xi u \mid MQ^m) \le C_1 n^{-\alpha/m} \mathring{N}(u \mid W_p^\alpha Q^m) . \qquad (2.1)$$

Постоянная $C_1 = C_1(m, \alpha, p)$ не зависит от функции u. ▲.

Теорема 2.2. Пусть $p\alpha \le m$, $1 \le q < \infty$, $1 < r \le \infty$ и

$$\beta \overset{def}{=\!=} q^{-1}(1 - r^{-1}) - (p^{-1} - \alpha m^{-1}) > 0 . \qquad (2.2)$$

Предположим, что $\rho \in S\mathfrak{M}_r Q^m$. Тогда для любой функции $u \in W_p^\alpha Q^m$ по всякому натуральному n найдется такое разбиение Ξ куба Q^m на кубы, что $|\Xi| \le n$ и

$$N(u - P_\Xi u \mid L_q(\rho) Q^m) \le C_2 n^{-\alpha/m} \mathring{N}(u \mid W_p^\alpha Q^m) . \qquad (2.3)$$

Постоянная $C_2 = C_2(m, \alpha, p, q, r)$ не зависит от функции u и меры ρ. ▲.

Теорема 2.3. Пусть $1 \le q < \infty$, $1 \le r < \infty$ и выполнено условие (2.2). Тогда для любой меры $\rho \in S\mathfrak{M}_r Q^m$ по всякому натуральному n найдется такое разбиение Ξ куба Q^m на кубы, что $|\Xi| \le n$ и для любой функции

$u \in W_p^\alpha Q^m$ имеет место неравенство

$$N(u - P_\Xi u | L_q(\rho) Q^m) \le C_3 n^{-\gamma} \overset{o}{N}(u | W_p^\alpha Q^m) , \qquad (2.4)$$

где

$$\gamma = \alpha/m \quad (p \ge q); \quad \gamma = \alpha/m - p^{-1} + q^{-1} \quad (p < q). \qquad (2.5)$$

Постоянная $C_3 = C_3(m, \alpha, p, q, r)$ не зависит от функции u и меры ρ.

В частности, если $p\alpha > m$, то это утверждение справедливо при $1 \le q < \infty$ для любой меры $\rho \in S\mathfrak{M}_1 Q^m$. ▲.

Во всем классе мер $S\mathfrak{M}_r Q^m$ порядок оценки (2.4) улучшить нельзя. Он достигается, например, для меры Лебега. Однако для индивидуальных мер оценка может оказаться лучше. В частности, оценка (2.4) заведомо улучшается для сингулярных мер. Соответствующее утверждение удобно формулировать в терминах величины E_n, введенной в лекции I.

Теорема 2.4. Пусть $p\alpha > m$, $1 \le q < \infty$ и пусть мера $\rho \in \mathfrak{M}_1 Q^m$ сингулярна относительно m-мерной меры Лебега. Тогда

$$E_n(W_p^\alpha Q^m, L_q(\rho)) = o(n^{-\gamma}) ,$$

где γ -показатель (2.5). ▲.

В связи с теоремой 2.3 полезно также иметь в виду следующее.

Замечание 2.5. Результат теоремы 2.3 для случая $p < q$ приводится к случаю $p = q$. В самом деле, по теореме вложения с предельным показателем

$$W_p^\alpha Q^m \subset W_q^{\alpha_1} Q^m , \quad \alpha_1 m^{-1} = \alpha m^{-1} - p^{-1} + q^{-1} \qquad (p < q).$$

Условия (2.2) для классов W_p^α и $W_q^{\alpha_1}$ совпадают, показатели γ в (2.5) также совпадают. Теперь ясно, что требуемый результат для класса $W_p^\alpha Q^m$, $p < q$, вытекает из соответствующего результата для класса $W_q^{\alpha_1} Q^m$.

Напротив, результат теоремы 2.3 для случая $p > q$ не выводится из результата для $p = q$. Действительно, хотя при замене класса W_p^α, $p>q$, на W_q^α показатель γ не меняется, но, в соответствии с (2.2), сужается класс допустимых мер.

2. <u>Доказательство теорем о функциях разбиений</u>. В лекции I отмечалось, что ключевую роль в доказательстве теорем I.I-I.3 /или равносильных им теорем 2.I-2.3/ играет теорема I.5 о функциях разбиений. В этом пункте мы докажем теорему I.5, а также родственное ей утверждение, нужное для доказательства теоремы 2.4. Доказательство заключается в конструкции некоторого алгоритма разбиений куба Q^m и в оценке соответствующих значений величины

$$G_a(J;\Xi)=\max_{\Delta\in\Xi}|\Delta|^a J(\Delta).$$

Пусть J - функция класса $\mathcal{J}$ и Ξ - какое-либо разбиение куба Q^m на конечное число кубов. Каждый куб $\Delta\in\Xi$, для которого

$$|\Delta|^a J(\Delta)>2^{-ma}G_a(J;\Xi), \tag{2.6}$$

разобьем на 2^m равных кубов. В результате получим новое разбиение куба Q^m, которое назовем **элементарным продолжением** разбиения Ξ.

Фиксируем каким-либо образом исходное разбиение Ξ_0 куба Q^m и построим последовательность разбиений $\{\Xi_i\}^0$ индуктивно, выбирая в качестве Ξ_{i+1}, $i=0,1,\ldots$, элементарное продолжение разбиения Ξ_i. Введем обозначения

$$n_i=|\Xi_i|, \quad \delta_i=G_a(J;\Xi_i).$$

Число кубов $\Delta\in\Xi_i$, подвергаемых делению при переходе к разбиению Ξ_{i+1}, обозначим через σ_i. Таким образом,

$$n_{i+1}-n_i=(2^m-1)\sigma_i, \quad i=0,1,\ldots \tag{2.7}$$

Докажем прежде всего следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2.6. Для любой функции $J\in\mathcal{J}$ и любого начального разбиения Ξ_0 величины n_i, δ_i связаны неравенством

$$\delta_i \le \tilde{C}(n_i - n_0)^{-(a+1)}, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{2.8}$$

где
$$\tilde{C} = (2^m - 1)^{a+1}\left[1 - 2^{-ma(a+1)^{-1}}\right]^{-(a+1)} . \blacktriangle .$$

В доказательстве используются следующие две простые леммы.

Лемма 2.7. Пусть куб $\Delta \subset Q^m$ разбит на 2^m равных кубов Δ_j, $j = 1, \ldots, 2^m$. Тогда

$$\max_j \left[|\Delta_j|^a J(\Delta_j)\right] \le 2^{-ma} |\Delta|^a J(\Delta). \quad \blacktriangle .$$

Лемма 2.8. Пусть σ – натуральное число; пусть числа x_j, $y_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ удовлетворяют неравенствам

$$\sum_j x_j \le 1; \quad \sum_j y_j \le 1; \quad x_j y_j^a \ge \eta \quad (j = 1, \ldots, \sigma)$$

при некоторых $a > 0$, $\eta > 0$. Тогда $\eta \le \sigma^{-(a+1)}$. $\blacktriangle$.

Лемма 2.7 очевидна, лемма 2.8 доказывается с помощью элементарного исследования на экстремум.

Доказательство леммы 2.6 проведем, считая, что $J(Q^m) \le 1$. Выясним некоторые свойства последовательностей $\{n_i\}$, $\{\delta_i\}$. Из леммы 2.7 и из (2.6) вытекает, что

$$\delta_i \le 2^{-ma} \delta_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{2.9}$$

Из леммы 2.8 следует другое неравенство для величин δ_i. Положим $\sigma = \sigma_i$, $x_j = J(\Delta_j)$, $y_j = |\Delta_j|$. Учитывая неравенство (2.6), находим, что выполнены условия леммы 2.8 при $\eta = 2^{-ma}\delta_i$. Стало быть,

$$\delta_i \le 2^{ma} \sigma_i^{-(a+1)} . \tag{2.10}$$

Пусть $0 \le p < i$. Из (2.9) и (2.10) следует неравенство

$$\delta_i \le 2^{-(i-p-1)ma} \sigma_p^{-(a+1)},$$

или, что то же самое,

$$\sigma_p \le 2^{-(i-p-1)ma(a+1)^{-1}} \delta_i^{-(a+1)^{-1}} .$$

Суммируя по p и учитывая соотношение (2.7), находим:

$$n_i - n_0 \leq (2^m - 1)\delta_i^{-(a+1)^{-1}} \sum_{p=0}^{i-1} 2^{-(i-p-1)ma(a+1)^{-1}} <$$

$$< (2^m - 1)\left[1 - 2^{-ma(a+1)^{-1}}\right]^{-1} \delta_i^{-(a+1)^{-1}} .$$

Полученное неравенство равносильно (2.8). ▨.

Доказательство теоремы 1.5. Возьмем в качестве Ξ_0 тривиальное разбиение, содержащее единственный куб $\Delta = Q^m$. Тогда $n_0 = 1$, $\delta_0 = \mathcal{J}(Q^m)$; неравенство (2.8) принимает вид

$$\delta_i \leq \tilde{C}(n_i - 1)^{-(a+1)} \mathcal{J}(Q^m) .$$

Тем более,

$$\delta_i \leq 2^{a+1} \tilde{C} n_i^{-(a+1)} \mathcal{J}(Q^m) , \quad i = 0, 1, \dots \quad . \tag{2.11}$$

Пусть теперь n - произвольное натуральное число. Найдем такой номер i , что $n_i \leq n < n_{i+1}$. В качестве разбиения Ξ , соответствующего выбранному n , примем разбиение Ξ_i . Тогда $|\Xi| \leq n$. Принимая во внимание (2.11) и неравенство $n \leq 2^m n_i$, получаем:

$$G_a(\mathcal{J}; \Xi) = \delta_i \leq 2^{(m+1)(a+1)} \tilde{C} n^{-(a+1)} \mathcal{J}(Q^m) .$$

Таким образом, оценка (1.11) выполнена при $C_4 = 2^{(m+1)(a+1)} \tilde{C}$.
▨.

Замечание 2.9. Обозначим через Π класс разбиений куба Q^m , которые могут быть получены из тривиального разбиения Ξ_0 $(|\Xi_0|) = 1)$ в результате конечного числа элементарных продолжений. Пусть $T_a(\mathcal{J})$ - последовательность разбиений $\{\Xi_i\}$, построенных по функции $\mathcal{J} \in \mathfrak{J}$ при доказательстве теоремы 1.4. Очевидно, $T_a(\mathcal{J})$ - последовательность разбиений класса Π . Это замечание будет использовано в п.6 при оценках ε-энтропии.

Следующее утверждение относится к случаю сингулярных мер.

Теорема 2.10. Пусть γ – конечная борелевская мера на Q^m, сингулярная относительно m-мерной меры Лебега. Тогда

$$\min_{|\Xi|\le n} G_a(\gamma;\Xi)=o(n^{-(a+1)}).\ \blacktriangle.$$

Доказательство. Для сингулярной меры $\gamma\in S\mathcal{J}$ по любому $\varepsilon>0$ можно найти такое разбиение $\Xi(\varepsilon)$ куба Q^m на конечное число кубов и такое подмножество $\Xi'\subset\Xi(\varepsilon)$, что

$$\sum_{\Delta\in\Xi'}|\Delta|\le\varepsilon,\qquad \sum_{\Delta\in\Xi(\varepsilon)\setminus\Xi'}\gamma(\Delta)\le\varepsilon .$$

Положим $\Xi_0=\Xi(\varepsilon)$ и повторим доказательство леммы 2.6. Учитывая свойства разбиения $\Xi(\varepsilon)$, нетрудно проверить, что неравенство (2.10) заменится на

$$\delta_i\le 2^{ma}\sigma_i^{-(a+1)}\tilde{\varepsilon},\qquad \tilde{\varepsilon}=(\varepsilon^{-(a+1)^{-1}}+\varepsilon^{a(a+1)^{-1}})^{a+1}.$$

Но тогда и в итоге получится неравенство вида (2.8) с добавлением множителя $\tilde{\varepsilon}$ в правой части. Следовательно,

$$\limsup_{i\to\infty}\delta_i n_i^{a+1}\le\tilde{C}\tilde{\varepsilon}.$$

Отсюда, очевидно, вытекает справедливость теоремы. ▨.

Замечание 2.11. Можно по определению выделить сингулярные функции (не обязательно меры) в классе $\mathcal{J}$ условием существования для любого $\varepsilon>0$ разбиения $\Xi(\varepsilon)$ с описанными в доказательстве теоремы 2.10 свойствами. Ясно, что тогда теорема остается справедливой для любых сингулярных функций класса $\mathcal{J}$.

3. <u>Доказательство теорем 2.1 – 2.4.</u> Доказательство всех четырех теорем основано на использовании теорем 1.5 и 2.10. При этом в доказательстве теорем 2.1, 2.2 возникает функция кубов γ, зависящая от приближаемой функции u, а в доказательстве теорем 2.3, 2.4 γ зависит от меры ρ, но не от u.

Заметим, что для любой $u\in W_p^\alpha Q^m$ функция кубов

$$\gamma_u(\Delta)=\mathring{N}^p(u/W_p^\alpha\Delta) \tag{2.12}$$

принадлежит классу $\mathcal{J}$. При этом для целых α функция $\mathcal{J}_u$ аддитивна, а для нецелых – полуаддитивна.

Мы будем опираться на теорему вложения Соболева, которая используется нами в следующей форме.

Лемма 2.12. Пусть Δ – m-мерный куб и пусть показатель $\bar{p} \in [1, \infty]$ удовлетворяет неравенству

$$\bar{p}^{-1} \geqslant p^{-1} - \alpha m^{-1} \tag{2.13}$$

/если $p\alpha = m$, то знак равенства в (2.13) исключается/. Тогда для любой функции $u \in W_p^\alpha \Delta$ справедливо неравенство

$$N(u - P_\Delta u \mid L_{\bar{p}} \Delta) \leq C_5 |\Delta|^{\bar{p}^{-1} - p^{-1} + \alpha m^{-1}} \overset{\circ}{N}(u \mid W_p^\alpha \Delta) . \tag{2.14}$$

Постоянная $C_5 = C_5(m, \alpha, p, \bar{p})$ не зависит от куба Δ. ▲.

Доказательство. Пусть сначала $\Delta = Q^m$. Функционал

$$\tilde{N}(u \mid W_p^\alpha Q^m) \stackrel{def}{=} \overset{\circ}{N}(u \mid W_p^\alpha Q^m) + N(P_{\alpha, Q^m} u \mid L_p Q^m)$$

определяет в пространстве $W_p^\alpha Q^m$ эквивалентную норму. Очевидно,

$$\tilde{N}(u - P_{\alpha, Q^m} u \mid W_p^\alpha Q^m) = \overset{\circ}{N}(u \mid W_p^\alpha Q^m).$$

Неравенство (2.14) выражает собой утверждение теоремы вложения Соболева /в случае знака равенства в (2.13) – теоремы вложения с предельным показателем/ для функции $u - P_{\alpha, Q^m} u$. На общий случай неравенство (2.14) распространяется с помощью преобразования подобия куба Q^m; при этом используется свойство однородности полунормы $\overset{\circ}{N}(u \mid W_p^\alpha \Omega)$ относительно преобразований подобия.

Замечание 2.13. Если в (2.13) имеет место знак равенства, то неравенство (2.14) принимает вид

$$N(u - P_{\alpha, \Delta} u \mid L_{\bar{p}} \Delta) \leq C_5 \overset{\circ}{N}(u \mid W_p^\alpha \Delta). \tag{2.15}$$

Таким образом, в случае предельного показателя постоянная в оценке вообще не зависит от куба Δ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2.1. Пусть Ξ – какое-либо разбиение куба Q^m на кубы и $\Delta\in\Xi$. Применим лемму 2.12 при $\bar{p}=\infty$; поскольку $u\in C\Delta$, получим:

$$N(u-P_\Delta u|C\Delta)\le C_5|\Delta|^{\alpha m^{-1}-p^{-1}}\overset{\circ}{N}(u|W_p^\alpha\Delta).$$

Отсюда

$$N(u-P_\Xi u|MQ^m)\le C_5\max_{\Delta\in\Xi}\left\{|\Delta|^{\alpha m^{-1}-p^{-1}}\overset{\circ}{N}(u|W_p^\alpha\Delta)\right\}=$$

$$=C_5[G_a(J_u;\Xi)]^{1/p}, \tag{2.16}$$

где J_u – функция (2.12) и $a=p\alpha m^{-1}-1>0$. В соответствии с теоремой 1.5, по любому натуральному n найдется такое разбиение Ξ, что $|\Xi|\le n$ и

$$G_a(J_u;\Xi)\le C_4 n^{-p\alpha/m}J_u(Q^m)=C_4 n^{-p\alpha/m}\overset{\circ}{N}{}^p(u|W_p^\alpha Q^m).$$

Сопоставляя это неравенство и (2.16), приходим к оценке (2.1), с постоянной $C_1=C_5C_4^{1/p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2.2. Пусть снова Ξ – некоторое разбиение куба Q^m и $\Delta\in\Xi$. По неравенству Гельдера

$$\int_\Delta|u-P_\Delta u|^q\rho(dx)\le\left[\int_\Delta|u-P_\Delta u|^{qr'}dx\right]^{1/r'}\left[\int_\Delta\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^r dx\right]^{1/r}.$$

Для оценки первого сомножителя в правой части используем лемму 2.12 при $\bar{p}=qr'$; условие (2.13) выполнено в силу (2.2). Суммируя полученные оценки по всем кубам $\Delta\in\Xi$, приходим к неравенству

$$N^q(u-P_\Xi u|L_q(\rho)Q^m)\le$$
$$\le C_5^q\sum_{\Delta\in\Xi}|\Delta|^{q\beta}\overset{\circ}{N}{}^q(u|W_p^\alpha\Delta)\left[\int_\Delta\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^r dx\right]^{1/r}, \tag{2.17}$$

где β определено в (2.2). Применяя к сумме (2.17) неравенство Гельдера и учитывая, что $\|\rho\|_{(r)}\le 1$, получим

$$N^q(u-P_{\Xi}u|L_q(\rho)Q^m)\le C_5^q\Big\{\sum_{\Delta\in\Xi}|\Delta|^{q\beta r'}\overset{\circ}{N}{}^{qr'}(u|W_p^\alpha\Delta)\Big\}^{1/r'}\le$$

$$\le C_5^q|\Xi|^{1/r'}\left[G_{p\beta}(\mathcal{J}_u;\Xi)\right]^{q/p},$$

где $\mathcal{J}_u$ – функция (2.12). В силу теоремы 1.5 для всякого натурального n найдется такое разбиение Ξ, что $|\Xi|\le n$ и

$$N^q(u-P_{\Xi}u|L_q(\rho)Q^m)\le C_5^q C_4^{q/p}n^{(r')^{-1}-(1+p\beta)qp^{-1}}\overset{\circ}{N}{}^q(u|W_p^\alpha Q^m)=$$

$$=C_5^q C_4^{q/p}n^{-q\alpha/m}\overset{\circ}{N}{}^q(u|W_p^\alpha Q^m).$$

Таким образом, неравенство (2.3) выполнено при $C_2=C_5C_4^{1/p}$. ▨.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2.3, в соответствии с замечанием 2.5, достаточно провести для $p\geqslant q$. Фиксируем разбиение Ξ и оценим величину

$$N^q(u-P_{\Xi}u|L_q(\rho)Q^m)=\sum_{\Delta\in\Xi}N^q(u-P_\Delta u|L_q(\rho)\Delta). \qquad (2.18)$$

Рассмотрим далее два случая.

а) Пусть $p\alpha>m$, тогда можно принять $r=1$. Используя лемму 2.12 при $p=\infty$, находим:

$$N^q(u-P_\Delta u|L_q(\rho)\Delta)\le N^q(u-P_\Delta u|L_\infty\Delta)\rho(\Delta)\le$$

$$\le C_5^q\overset{\circ}{N}{}^q(u|W_p^\alpha\Delta)|\Delta|^a\rho(\Delta),$$

где принято $a=q(\alpha/m-p^{-1})$. Отсюда и из (2.18)

$$N^q(u-P_{\Xi}u|L_q(\rho)Q^m)\le C_5^q G_a(\rho;\Xi)\sum_{\Delta\in\Xi}\overset{\circ}{N}{}^q(u|W_p^\alpha\Delta).$$

Оценивая последнюю сумму по неравенству Гельдера, получаем:

$$N^q(u-P_\Xi u|L_q(\rho)Q^m)\le C_5^q|\Xi|^{1-q p^{-1}}G_a(\rho;\Xi)\mathring{N}^q(u|W_p^\alpha Q^m). \tag{2.19}$$

Остается по заданному n выбрать разбиение Ξ в соответствии с теоремой I.5. Оценка (2.19) приводит к неравенству (2.4) с постоянной $C_3=C_5C_4^{1/q}$.

б) Пусть $p\alpha\le m$; тогда $r>1$. Для оценки величины (2.18) воспользуемся неравенством (2.17). Полагая

$$\mathcal{J}_{(\rho)}(\Delta)=\int_\Delta\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^r dx \tag{2.20}$$

и определяя показатель β соотношением (2.2), находим:

$$N^q(u-P_\Xi u|L_q(\rho)Q^m)\le C_5^q\left[G_{qr\beta}(\mathcal{J}_{(\rho)};\Xi)\right]^{1/r}\sum_{\Delta\in\Xi}\mathring{N}^q(u|W_p^\alpha\Delta)\le$$

$$\le C_5^q|\Xi|^{1-qp^{-1}}\left[G_{qr\beta}(\mathcal{J}_{(\rho)};\Xi)\right]^{1/r}\mathring{N}^q(u|W_p^\alpha Q^m). \tag{2.21}$$

По заданному n выберем разбиение Ξ , $|\Xi|\le n$, в соответствии с теоремой I.5. Для этого разбиения выполняется неравенство (2.4) с постоянной $C_3=C_5C_4^{1/qr}$. ▨.

Доказательство теоремы 2.4 получается, если в (2.19) к функции $G_a(\rho;\Xi)$ / $a=q(\alpha/m-p^{-1})$, мера ρ сингулярна/ применить теорему 2.10. ▨.

Выясним, что происходит с оценкой (2.4) при изменении размеров куба. Одновременно откажемся от условия нормировки меры ρ . С помощью линейного преобразования переменных из теоремы 2.3 легко получается следующий результат.

Следствие 2.14. Пусть Q – произвольный полуоткрытый куб в $\mathbb{R}^m$, $1\le q<\infty$, $1\le r<\infty$ и выполнено условие (2.2). Тогда для любой меры $\rho\in\mathfrak{M}_r Q$ по всякому натуральному n найдется такое разбиение Ξ куба Q на полуоткрытые кубы, что $|\Xi|\le n$ и для любой функции $u\in W_p^\alpha Q$ имеет место неравенство

$$N(u-P_{\Xi}u\,|\,L_q(\rho)Q)\leq C_3 n^{-\gamma}\overset{\circ}{N}(u\,|\,W_p^{\alpha}Q)\|\rho\|^{1/q}_{(r)}|Q|^{\beta}, \qquad (2.22)$$

где β и γ - показатели (2.2) и (2.5), C_3 - постоянная из (2.4). ▲ .

4. Кусочно-полиномиальные приближения при $\beta=0$. Вследствие условия (2.2) показатель степени при $|Q|$ в неравенстве (2.22) положителен. Таким образом, в неравенство входит множитель, неограниченно растущий вместе с $|Q|$. Это создает определенные неудобства при применении теоремы 2.3 к таким вопросам, в которых играют роль размеры области.

Эти неудобства могут быть в значительной степени устранены при $p\alpha < m$. Именно, мы построим операторы кусочно-полиномиальных приближений, несколько отличные от операторов P_{Ξ}. Для этих новых операторов в оценках вида (2.22) множитель, зависящий от $|Q|$, не возникает, что позволит, в частности, распространить результаты о приближениях на классы функций, определенных во всем пространстве. Излагаемые результаты принадлежат Г.В.Розенблюму [I5], [I6].

Поясним основу дальнейших построений. Предположим, что в условиях вида (2.2) можно допустить знак равенства. Тогда растущий множитель в (2.22) не возникнет. При доказательстве теоремы 2.3*/ нужно было бы пользоваться неравенством (2.I5), т.е. теоремой вложения с предельным показателем. Но тогда, в соответствии с (2.2I), пришлось бы рассматривать функцию $G_0(J_{(p)};\Xi)$.

Таким образом, возникает вопрос о возможности распространения теоремы I.5 на случай $a=0$. При $m=1$ такое распространение возможно /см. [2] /. При $m\geq 2$, как показывают контрпримеры, теорема I.5 в полном объеме на случай $a=0$ не распространяется. Однако возможна некоторая модификация этой теоремы, справедливая при $a=0$ и при любых $m\geq 1$. Эта модификация связана с заменой разбиений покрытиями; при этом

---

*/ Все сказанное можно повторить относительно теоремы 2.2. Однако соответствующее обобщение теоремы 2.2 представляет меньший интерес /см. конец настоящего пункта/.

несколько сужается класс функций γ, а также утрачивается "алгоритмический" характер доказательства.

До сих пор мы имели дело с разбиениями, а потому нам были удобны полуоткрытые кубы. Теперь нам понадобятся покрытия; поэтому в настоящем пункте мы будем чаще оперировать с открытыми кубами.

Введем понятия и обозначения, необходимые для формулировки результата. Пусть $\bar{Q}$ – замкнутый куб в $\mathbb{R}^m$; H – какое-либо покрытие $\bar{Q}$ открытыми в $\mathbb{R}^m$ кубами Δ, либо покрытие $\bar{Q}$ открытыми в $\bar{Q}$ кубами $\Delta\subset\bar{Q}$. Через $|H|$ обозначим число кубов в покрытии.

Определим понятие "зацепленности" покрытия H, близкое к понятию кратности покрытия, но не совпадающее с ним. Предположим, что совокупность кубов H можно разбить на $\varkappa$ подмножеств $H_1,\dots,H_\varkappa$ таким образом, что для каждого из H_j $(j=1,\dots,\varkappa)$ входящие в него кубы попарно не пересекаются. Наименьшее число $\varkappa$, при котором такое разбиение возможно, назовем з а ц е п л е н н о с т ь ю покрытия и обозначим через $\varkappa(H)$. Очевидно, кратность покрытия H не превосходит $\varkappa(H)$; обратное, вообще говоря, неверно.

Ниже мы будем пользоваться одной теоремой о покрытиях, принадлежащей А.С.Безиковичу [17] и М.Гузману [18].

Покрытие Z куба $\bar{Q}\subset\mathbb{R}^m$ открытыми в $\mathbb{R}^m$ кубами Δ будем называть Б-покрытием, если оно обладает следующими свойствами.

а) Ребра каждого куба $\Delta\in Z$ параллельны ребрам куба Q.

б) Каждая точка $x\in Q$ является центром некоторого куба $\Delta\in Z$.

Теорема 2.15. Существует такое число $\tilde{\varkappa}_m$, $m\geq 1$, что из произвольного Б-покрытия куба $\bar{Q}\subset\mathbb{R}^m$ можно выделить конечное подпокрытие, зацепленность которого не превышает числа $\tilde{\varkappa}_m$. $\triangle$.

По поводу доказательства, которое мы здесь не приводим, см. [17], а также [18], где имеются обобщения. Наиболее существенным в теореме 2.15 является тот факт, что число $\tilde{\varkappa}_m$ зависит только от размерности пространства.

Пусть теперь γ – неотрицательная функция m-мерных прямоугольников $\Delta\subset\bar{Q}$, ребра которых параллельны ребрам куба Q.

Предположим, что $\mathcal{J}$ полуаддитивна снизу в следующем смысле: если $\{\Delta_k\}$ – попарно непересекающиеся прямоугольники, $\Delta_k \subset \Delta$, то $\sum_k \mathcal{J}(\Delta_k) \le \mathcal{J}(\Delta)$. Предположим еще, что функция $\mathcal{J}$ непрерывна в следующем смысле: если Δ_t – концентрические кубы с ребром t и с центром в какой-либо точке куба $\bar{Q}$, то функция $j(t)=\mathcal{J}(\Delta_t \cap \bar{Q})$ непрерывна и $j(+0)=0$. Класс всех таких функций обозначим через $\mathcal{J}_c = \mathcal{J}_c(\bar{Q})$. Очевидно, для функций $\mathcal{J} \in \mathcal{J}_c$ безразлично включение в Δ его границы /или ее части/.

Теорема 2.16. Пусть $\bar{Q}$ – замкнутый m-мерный куб и $\mathcal{J} \in \mathcal{J}_c(\bar{Q})$. Тогда по любому n найдется покрытие H куба $\bar{Q}$ открытыми в $\bar{Q}$ кубами $\Delta \subset \bar{Q}$, обладающее следующими свойствами.

1^0 Для каждого куба $\Delta \in H$ $\mathcal{J}(\Delta) \le n^{-1}\mathcal{J}(\bar{Q})$.

2^0 $\varkappa(H) \le \varkappa_m$, где число $\varkappa_m$ зависит только от размерности пространства.

3^0 $|H| \le n\varkappa_m$. ▲ (2.28)

Прямое доказательство этой теоремы получено Г.В.Розенблюмом [16]. Мы приведем другое доказательство, основанное на теореме 2.15.

Достаточно рассмотреть функции, для которых $\mathcal{J}(Q)=1$. Пусть $x \in \bar{Q}$ и $\Delta(x)$ – куб с центром в x и такой, что $\mathcal{J}(\Delta(x) \cap \bar{Q}) = n^{-1}$. Существование такого куба следует из непрерывности функции $\mathcal{J}$. Всевозможные кубы $\Delta(x)$, $x \in \bar{Q}$, очевидно, образуют Б-покрытие куба Q. В силу теоремы 2.15 из этого покрытия можно выделить подпокрытие $\tilde{H}$, для которого $\varkappa(\tilde{H}) \le \tilde{\varkappa}_m$. Тогда

$$n^{-1}|\tilde{H}| = \sum_{\Delta \in \tilde{H}} \mathcal{J}(\Delta \cap Q) \le \tilde{\varkappa}_m \mathcal{J}(Q) = \tilde{\varkappa}_m,$$

т.е. $|\tilde{H}| \le n\tilde{\varkappa}_m$. Исходя из покрытия $\tilde{H}$, строим покрытие H следующим образом. Если $\Delta \in \tilde{H}$ и $\Delta \subset Q$, то полагаем $\Delta \in H$. Пусть $\Delta \in \tilde{H}$ – куб, не содержащийся в Q. Так как центр куба Δ лежит в $\bar{Q}$, то отношение длин наибольшего и наименьшего ребер прямоугольника $\Delta \cap \bar{Q}$ не превосходит двух. Из этого следует, что прямоугольник $\Delta \cap \bar{Q}$ можно покрыть содержащимися в нем открытыми в $\bar{Q}$ кубами, число которых не превосходит 2^{m-1}. Все эти частичные куба также включаем в покрытие H. Свойства $1^0 - 3^0$ покрытия H легко выводятся из соответствующих свойств покрытия $\tilde{H}$; при этом $\varkappa_m = 2^{m-1}\tilde{\varkappa}_m$. ▨.

Пусть теперь H – какое-либо конечное покрытие куба $\bar{Q}$ содержащимися в нем кубами. Покрытию H сопоставим оператор кусочно-полиномиальных приближений $K_{H,\alpha}$ следующим образом. Занумеруем как-либо кубы $\Delta \in H$ и обозначим $G_k = \Delta_k \setminus \bigcup_{i<k} \Delta_i$, $k \le k_0 = |H|$. Пусть χ_k – характеристическая функция множества G_k; положим

$$K_H = K_{H,\alpha} = \sum_{k \le k_0} \chi_k P_{\alpha,\Delta_k} . \tag{2.24}$$

Очевидно, $\operatorname{rang} K_H \le \nu(\alpha, m)|H|$.

Теорема 2.17. Пусть Q – m-мерный куб, $p\alpha < m$, $1 \le q < \infty$, $1 < r < \infty$ и выполнено соотношение

$$q^{-1}(1-r^{-1}) - (p^{-1} - \alpha m^{-1}) = 0. \tag{2.25}$$

Пусть $\rho \in \mathfrak{M}_r Q$. Тогда по всякому n найдется покрытие H куба $\bar{Q}$ открытыми в $\bar{Q}$ кубами $\Delta (\subset \bar{Q})$, такое что $\varkappa(H) \le \varkappa_m$, $|H| \le n\varkappa_m$ и для любой функции $u \in W_p^\alpha Q$ выполняется неравенство

$$N(u - K_H u \,|\, L_q(\rho)Q) \le C_6 n^{-\gamma} \mathring{N}(u \,|\, W_p^\alpha Q) \|\rho\|_{(r)}^{1/q} , \tag{2.26}$$

где γ – показатель (2.5). Постоянная $C_6 = C_6(m, \alpha, p, q)$ не зависит от меры ρ и от куба Q. ▲.

Доказательство, как и в случае теоремы 2.3, достаточно провести при $p \ge q$. Пусть $J_{(\rho)}$ – функция (2.20); очевидно, $J_{(\rho)} \in \mathcal{J}_0$. По функции $J_{(\rho)}$ при заданном n выберем покрытие H в соответствии с теоремой 2.16. Тогда

$$N^q(u - K_H u \,|\, L_q(\rho)Q) = \sum_{k \le k_0} N^q(u - P_{\Delta_k} u \,|\, L_q(\rho)G_k) \le$$

$$\leq \sum_{k\leq k_0} N^q(u-P_{\Delta_k}u \,|\, L_q(\rho)\Delta_k).$$

Каждый член последней суммы оценим /как и при доказательстве теорем 2.2, 2.3/ на основании леммы 2.12. Теперь, однако, ввиду (2.25), мы будем пользоваться теоремой вложения о предельным показателем, т.е. неравенством (2.15). Мы получим:

$$N^q(u-K_H u \,|\, L_q(\rho)Q) \leq C_5^q \sum_{k\leq k_0} \overset{\circ}{N}{}^q(u \,|\, W_p^\alpha \Delta_k) J_{(\rho)}^{1/r}(\Delta_k) \leq$$

$$\leq C_5^q n^{-1/r} \|\rho\|_{(r)} \sum_{k\leq k_0} \overset{\circ}{N}{}^q(u \,|\, W_p^\alpha \Delta_k) \leq$$

$$\leq C_5^q n^{-1/r} \|\rho\|_{(r)} |H|^{1-qp^{-1}} \Big[\sum_{k\leq k_0} \overset{\circ}{N}{}^p(u \,|\, W_p^\alpha \Delta_k)\Big]^{q/p}.$$

Из полуаддитивности функции (2.12) и из определения числа $\varkappa(H)$ следует, что

$$\sum_{k=1}^{k_0} \overset{\circ}{N}{}^p(u \,|\, W_p^\alpha \Delta_k) \leq \varkappa(H) \overset{\circ}{N}{}^p(u \,|\, W_p^\alpha Q) \leq \varkappa_m \overset{\circ}{N}{}^p(u \,|\, W_p^\alpha Q).$$

Подставляя это неравенство в предыдущее и принимая во внимание (2.23), (2.25), приходим к неравенству (2.26) при $C_6 = C_5 \varkappa_m^{1/q}$. ▨.

Приведем еще утверждение, которое так же относится к теореме 2.2, как теорема 2.17 – к теореме 2.3. Этой "пропорции" достаточно для того, чтобы восстановить опущенное доказательство.

Теорема 2.18. Пусть выполнены условия теоремы 2.17. Тогда для любой функции $u \in W_p^\alpha Q$ по всякому n найдется такое покрытие H куба Q открытыми в $\bar{Q}$ кубами $\Delta(\subset \bar{Q})$, что $\varkappa(H) \leq \varkappa_m$, $|H| \leq n\varkappa_m$ и

$$N(u-K_H u \,|\, L_q(\rho)Q) \leq C n^{-\alpha/m} \overset{\circ}{N}(u \,|\, W_p^\alpha Q) \|\rho\|_{(r)}^{1/q}.$$

Постоянная $C = C(m,\alpha,p,q)$ не зависит от ρ и от куба Q. ◬.

Основное преимущество теорем 2.17, 2.18 - независимость постоянных в оценках от размеров куба; основной недостаток имеющихся доказательств - отсутствие простого алгоритма для построения покрытия H. В приложениях к спектральной теории, обсуждаемых в лекциях 3, 4, это последнее обстоятельство не играет роли, и теорема 2.17 будем там неоднократно использована. Напротив, при оценках ε-энтропии, которым посвящен конец настоящей лекции, решающее значение имеет анализ алгоритма разбиений, примененного при доказательстве теорем 2.1, 2.2. Теорема 2.18 оказывается здесь бесполезной.

5. <u>Кусочно-полиномиальные аппроксимации в $\mathbb{R}^m$</u>. Для распространения теоремы 2.17 на случай функций, заданных во всем пространстве $\mathbb{R}^m$, нам потребуются некоторые известные вспомогательные неравенства типа неравенства Харди. Эти неравенства используются также в лекциях 3, 4.

Лемма 2.19. Пусть $p\geq 1$, $\alpha>0$, $p\alpha<m$. Тогда для любой функции $u\in C_0^\infty \mathbb{R}^m$ имеет место неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^m} |x|^{-p\alpha}|u|^p dx \leq C\overset{\circ}{N}{}^p(u|W_p^\alpha \mathbb{R}^m), \quad C=C(m,\alpha,p). \qquad (2.27)$$

Доказательство неравенства (2.27) см. в добавлении 3. Здесь мы ограничимся тем, что получим его для целых α. Предварительно установим следующее вспомогательное неравенство.

Лемма 2.20. Пусть $\ell\geq 1$ - целое, $p\geq 1$, $\mu>p\ell$. Тогда для любой функции $u\in C^\infty \mathbb{R}_+$, финитной на бесконечности, имеет место неравенство

$$\int_0^\infty x^{\mu-1-p\ell}|u(x)|^p dx \leq \frac{p^{p\ell}}{[(\mu-p)(\mu-2p)\dots(\mu-\ell p)]^p}\int_0^\infty x^{\mu-1}|D^\ell u|^p dx \qquad (2.28)$$

Доказательство. Пусть сначала $\ell=1$. Воспользуемся равенством

$$u(x)=-x\int_1^\infty u'(sx)ds.$$

С помощью интегрального неравенства Минковского /см. [19] / получаем

$$\left\{\int_0^\infty x^{\mu-1-p}|u(x)|^p dx\right\}^{1/p} \leq \left\{\int_0^\infty x^{\mu-1}\left|\int_1^\infty u'(sx)ds\right|^p dx\right\}^{1/p} \leq$$

$$\leq \int_1^\infty \left[\int_0^\infty x^{\mu-1}|u'(sx)|^p dx\right]^{1/p} ds = \frac{p}{\mu-p}\left[\int_0^\infty x^{\mu-1}|u'(x)|^p dx\right]^{1/p}. \qquad (2.29)$$

Неравенство (2.28) получается из (2.29) посредством итераций . ▨ .

Замечание 2.21. Если $\mu < p$, то аналогичное (2.29) . неравенство

$$\int_0^\infty x^{\mu-1-p}|u(x)|^p dx \leq p^p(p-\mu)^{-p}\int_0^\infty x^{\mu-1}|u'(x)|^p dx . \qquad (2.30)$$

справедливо для функции $u \in C_0^\infty \mathbb{R}_+$. Итерируя (2.30), можно получить аналогичные неравенства для высших производных.

Доказательство леммы 2.19 /для целых α /. Пусть $r = |x|$, $\vartheta = r^{-1}x$ - сферические координаты точки x . Воспользуемся неравенством (2.28) при $\ell = \alpha$, $\mu = m$ для функции $u(x) = u(r,\vartheta)$ по переменной r , а затем проинтегрируем по ϑ . Тогда получим (2.27) с той же постоянной, что и в (2.28) /с заменой $\ell \to \alpha$, $\mu \to m$ /. ▨ .

Рассмотрим класс $C_0^\infty \mathbb{R}^m$ как /неполное/ линейное нормированное пространство с нормой $\overset{\circ}{N}(\cdot\,|\,W_p^\alpha \mathbb{R}^m)$. Из леммы 2.19 вытекает, что при $p\alpha < m$ топология, определяемая этой нормой, согласована с топологией пространства $L_{p,loc}\mathbb{R}^m$. Следовательно, пополнение класса $C_0^\infty \mathbb{R}^m$ по этой норме представляет собой пространство функций[ж/], которое мы обозначим через $\overset{\circ}{W}{}_p^\alpha \mathbb{R}^m$, а норму в нем - через $N(\cdot\,|\,\overset{\circ}{W}{}_p^\alpha \mathbb{R}^m) \overset{def}{=} \overset{\circ}{N}(\cdot\,|\,W_p^\alpha \mathbb{R}^m)$. Пространство $\overset{\circ}{W}{}_p^\alpha \mathbb{R}^m$ шире, чем $W_p^\alpha \mathbb{R}^m$, поскольку вложение $\overset{\circ}{W}{}_p^\alpha \mathbb{R}^m \subset L_p \mathbb{R}^m$ не

ж/ При $p\alpha \geq m$ сказанное уже неверно.

имеет места.

Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^m$. При $p\alpha < m$ введем в рассмотрение функционал $\hat{N}(\cdot)$, где

$$\hat{N}^p(u|W_p^\alpha \Omega) = \overset{\circ}{N}{}^p(u|W_p^\alpha \Omega) + \int_\Omega |x|^{-p\alpha} |u|^p dx. \tag{2.31}$$

Если $\Omega = \mathbb{R}^m$, то, вследствие (2.27), норма $\hat{N}$ эквивалентна норме $N(\cdot|\overset{\circ}{W}{}_p^\alpha \mathbb{R}^m)$. Если же Ω — ограниченное множество, то норма $\hat{N}$ эквивалентна стандартной норме пространства $W_p^\alpha \Omega$. В отличие от этой последней, норма $\hat{N}$ обладает свойством однородности относительно преобразований подобия: если $h>0$, $\Omega_h = h^{-1}\Omega$, $u_h(x) = u(hx)$, то

$$\hat{N}^p(u_h|W_p^\alpha \Omega_h) = h^{-(m-p\alpha)} \hat{N}^p(u|W_p^\alpha \Omega).$$

Отсюда непосредственно вытекает следующее утверждение.

Замечание 2.22. Пусть $p\alpha < m$, $\bar{p}^{-1} = p^{-1} - \alpha m^{-1}$ и $Q \subset \mathbb{R}^m$ — куб с центром в точке $x=0$. Тогда для функций $u \in W_p^\alpha Q$ имеет место неравенство

$$N(u|L_{\bar{p}}Q) \leq C\hat{N}(u|W_p^\alpha Q), \qquad C = C(\alpha, m, p), \tag{2.32}$$

где постоянная C не зависит от размера куба Q.

В самом деле, для фиксированного куба неравенство (2.32) равносильно теореме вложения с предельным показателем. Остается заметить, что обе части неравенства (2.32) имеют одну и ту же степень однородности при преобразовании подобия.

Перейдем к распространению теоремы 2.17 на функции класса $\overset{\circ\circ}{W}{}_p^\alpha \mathbb{R}^m$. Если $Q \subset \mathbb{R}^m$ — куб и H — его покрытие, то соответствующий оператор K_H вида (2.24) условимся теперь распространять на функции класса $\overset{\circ}{W}{}_p^\alpha \mathbb{R}^m$ следующим образом: если $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^\alpha \mathbb{R}^m$, $v = K_H u$, то полагаем $v(x) = 0$ вне куба Q.

Теорема 2.23. Пусть $p\alpha < m$, $1 \leq q < \infty$, $1 < r < \infty$ и выполнено (2.25). Пусть $\rho \in \mathfrak{M}_r \mathbb{R}^m$. Тогда по всякому n найдутся куб $Q \subset \mathbb{R}^m$ и покрытие H куба $\bar{Q}$

открытыми в $\bar{Q}$ кубами $\Delta(\subset \bar{Q})$, так что $\varkappa(H) \le \varkappa_m$, $|H| \le n\,\varkappa_m$ и для любой функции $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^{\alpha} \mathbb{R}^m$ выполняется неравенство

$$N(u - K_H u \,|\, L_q(\rho)\mathbb{R}^m) \le C_7 n^{-\gamma} N(u \,|\, \overset{\circ}{W}{}_p^{\alpha} \mathbb{R}^m) \|\rho\|_{(r)}^{1/q} . \tag{2.33}$$

Здесь γ - показатель (2.5), постоянная $C_7 = C_7(m, \alpha, p, q)$ не зависит от меры ρ. $\blacktriangle$.

Доказательство. Прежде всего установим неравенство

$$N(u \,|\, L_q(\rho)\mathbb{R}^m) \le C N(u \,|\, \overset{\circ}{W}{}_p^{\alpha} \mathbb{R}^m) N^{1/q}(\rho \,|\, \mathfrak{M}_r \mathbb{R}^m) . \tag{2.34}$$

Его достаточно проверить для мер с компактным носителем. Пусть Q - куб с центром в точке $x = 0$, содержащий носитель меры ρ. Применяя неравенство Гельдера и учитывая (2.25), находим:

$$N(u \,|\, L_q(\rho)\mathbb{R}^m) \le N(u \,|\, L_{\bar{p}} Q) N^{1/q}(\rho \,|\, \mathfrak{M}_r \mathbb{R}^m) \quad (\bar{p}^{-1} = p^{-1} - \alpha m^{-1}).$$

Оценим норму $N(u \,|\, L_{\bar{p}} Q)$ по неравенству (2.32), в функционале $\hat{N}$ заменим Q на $\mathbb{R}^m$ и воспользуемся оценкой (2.27); в результате получим (2.34) с некоторой постоянной $C = C(m, \alpha, p)$.

Пусть теперь ρ - произвольная мера из $\mathfrak{M}_r \mathbb{R}^m$; выберем куб Q так, чтобы было

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m / Q} \left| \frac{d\rho}{dx} \right|^r dx \le n^{-rq\gamma} N^r(\rho \,|\, \mathfrak{M}_r \mathbb{R}^m) . \tag{2.35}$$

Найдем покрытие H куба Q в соответствии с теоремой 2.17. Тогда для любой $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^{\alpha} \mathbb{R}^m$, согласно (2.26), (2.34) и (2.35), получим оценку:

$$N^q(u - K_H u \,|\, L_q(\rho)\mathbb{R}^m) =$$

$$= N^q(u - K_H u \,|\, L_q(\rho) Q) + N^q(u \,|\, L_q(\rho)(\mathbb{R}^m \setminus Q)) \le$$

$$\le\left[C_6^q n^{-q\gamma}\mathring{N}^q(u|W_p^\alpha Q)+C^q n^{-q\gamma}N^q(u|\mathring{W}_p^\alpha\mathbb{R}^m)\right]N(p|\mathfrak{M}_r\mathbb{R}^m).$$

Отсюда следует (2.33) при $C_7^q=C_8^q+C^q$. ▩.

6. Оценки ε-энтропии. Теперь мы переходим к доказательству теоремы I.7. Для упрощения выкладок ограничимся случаем $p\alpha>m$, $q=\infty$. Кроме того, мы получим лишь оценку ε-энтропии сверху. Оценка снизу, а также результат для любых q , будут получены в добавлении 2 к настоящей лекции. Таким образом, наша непосредственная задача заключается в получении следующего результата.

Теорема 2.24. При $p\alpha>m$

$$\mathcal{H}_\varepsilon(W_p^\alpha Q^m;L_\infty)=O(\varepsilon^{-m/\alpha}).\ \blacktriangle. \tag{2.36}$$

Доказательство опирается на ряд предварительных построений, связанных с анализом изложенного в п.п. 2, 3 метода приближений. Вначале вернемся к рассмотрению полуаддитивных функций кубов.

При доказательстве теоремы I.5 /см. также замечание 2.9/ каждой функции $J\in\mathcal{J}$ была сопоставлена последовательность $T_a(J)$ разбиений куба Q^m, принадлежащих классу Π . Наряду с характеризующими ее числовыми последовательностями $\{n_i\}$, $\{\delta_i\}$, введем для $J\in S\mathcal{J}$ также последовательность

$$\tilde\delta_i=2^{a+1}\tilde C\min_{0\le j\le i}\left[2^{-am(i-j)}n_j^{-(a+1)}\right]\ ,\quad i=0,1,\dots, \tag{2.37}$$

где $\tilde C$ - постоянная из (2.8). Из определения чисел $\tilde\delta_i$ вытекает оценка

$$n_j^{a+1}\le 2^{a+1}\tilde C\tilde\delta_i^{-1}2^{-am(i-j)}\ ,\qquad 0\le j\le i\ . \tag{2.38}$$

Кроме того, из (2.9), (2.II) и (2.37) следует, что

$$\delta_i \le \tilde{\delta}_i \le 2^{a+1}\tilde{C} n_i^{-(a+1)}, \quad i = 0,1,\dots \quad (2.39)$$

Таким образом, последовательность $\{\tilde{\delta}_i\}$ мажорирует последовательность $\{\delta_i\}$ и подчиняется оценке вида (2.II). Вместе с тем по сравнению с $\{\delta_i\}$ последовательность $\{\tilde{\delta}_i\}$ ведет себя более регулярно: имеют место неравенства

$$2^{-(a+1)m}\tilde{\delta}_i \le \tilde{\delta}_{i+1} \le 2^{-am}\tilde{\delta}_i, \quad i = 0,1,\dots \quad (2.40)$$

В самом деле, из (2.37) находим, что

$$\tilde{\delta}_{i+1} = \min\left[2^{-am}\tilde{\delta}_i \,.\, \tilde{C}(n_{i+1}/2)^{-a-1}\right].$$

Правое неравенство в (2.40) вытекает отсюда непосредственно. Левое неравенство требует проверки лишь в случае, если

$$\tilde{\delta}_{i+1} = \tilde{C}(n_{i+1}/2)^{-(a+1)} < 2^{-am}\tilde{\delta}_i;$$

оно легко следует из (2.39) и из оценки $n_{i+1} \le 2^m n_i$.

Отметим, что оценка снизу δ_{i+1} через δ_i, вообще говоря, невозможна; этим и объясняется целесообразность введения величин $\tilde{\delta}_i$.

Пусть теперь η - фиксированное число, $0 < \eta < 2^{a+1}\tilde{C}$. Каждой функции $\mathcal{J} \in S\mathcal{J}$ сопоставим число $k = k(\mathcal{J}, a, \eta)$, определяемое условием

$$\tilde{\delta}_k < \eta \le \tilde{\delta}_{k-1}. \quad (2.4I)$$

Обозначим через $T_a(\mathcal{J};\eta)$ отрезок $\{\Xi_i\}_{i=0}^{k}$ последовательности разбиений $T_a(\mathcal{J})$. Объединим в один класс те /и только те/ функции $\mathcal{J}$, для которых последовательности $T_a(\mathcal{J},\eta)$ совпадают. Число классов, на которые при этом разобьется множество $S\mathcal{J}$, обозначим через $N(a,\eta)$.

Лемма 2.25. При $\eta \in (0, 2^{a+1})$ имеет место оценка

$$\log_2 N(a,\eta) \le C_8\,\eta^{-(a+1)^{-1}}, \quad C_8 = C_8(a,m). \quad (2.42)$$

Доказательство. Сначала оценим число $N_1(a,\eta)$ более "обширных" классов, объединяя в один класс такие функции $\mathcal{J}\in S\mathcal{J}$, у которых совпадают не обязательно сами последовательности разбиений $T_a(\mathcal{J},\eta)$, но лишь соответствующие числовые последовательности $\{n_i\}_{i=0}^k$, $k=k(\mathcal{J},a,\eta)$.

Принимая во внимание (2.38) (при $i=j=k-1$) и (2.4I), находим, что число n_k удовлетворяет неравенству

$$n_k^{a+1}\le 2^{m(a+1)} n_{k-1}^{a+1}\le 2^{(m+1)(a+1)}\tilde{C}\tilde{\delta}_{k-1}^{-1}\le 2^{(m+1)(a+1)}\tilde{C}\eta^{-1}. \quad (2.43)$$

Обозначим через n^* целую часть числа $2^{m+1}(\tilde{C}\eta^{-1})^{(a+1)^{-1}}$. Равенство

$$n^*=1+\sum_{i+1}^{k}(n_i-n_{i-1})+(n^*-n_k)$$

сопоставляет каждой последовательности $T_a(\mathcal{J},\eta)$ представление числа n^*-1 в виде суммы целых положительных слагаемых. Число всевозможных таких представлений равно 2^{n^*-2} /см., например, [20], отд. I, задача 2I/. Таким образом, $N_1(a,\eta)\le 2^{n^*-2}$ и

$$\log_2 N_1(a,\eta)< n^*\le 2^{m+1}(\tilde{C}\eta^{-1})^{(a+1)^{-1}}.$$

Пусть теперь последовательность $\{n_i\}_0^k$ фиксирована. Оценим число различных последовательностей разбиений $\{\Xi_i\}_0^k=T_a(\mathcal{J},\eta)$, $\mathcal{J}\in S\mathcal{J}$, для которых $\{\Xi_i\}=n_i$, $i=0,\dots,k$. Для этого заметим, что при заданном разбиении Ξ_i разбиение Ξ_{i+1} однозначно определяется тем, какие именно $s_i=(n_{i+1}-n_i)(2^m-1)^{-1}$ кубов разбиения Ξ_i подвергаются разложению при переходе к Ξ_{i+1}. Число возможных вариантов здесь равно $\binom{n_i}{s_i}<2^{n_i}$. За k шагов это дает количество вариантов, меньшее чем $2^{n_0+\dots+n_{k-1}}$. Сумму в показателе легко оценить по неравенствам (2.38) и (2.4I).
Именно, при $j=0,\dots,k-1$

$$n_j\le 2(\tilde{C}\eta^{-1})^{(a+1)^{-1}}2^{-am(a+1)^{-1}(k-1-j)};$$

отсюда следует, что

$$n_0+\ldots+n_{k-1}\le 2(\tilde{C}\eta^{-1})^{(a+1)^{-1}}\left[1-2^{-am(a+1)^{-1}}\right]^{-1}\ \underset{=\!=}{\overset{def}{}}\ \hat{n}. \tag{2.44}$$

Так как, очевидно, $N(a,\eta)\le N_1(a,\eta)2^{\hat{n}}$, то

$$\log_2 N(a,\eta)\le\log_2 N_1(a,\eta)+\hat{n}\le C_8\eta^{-(a+1)^{-1}},$$

где $C_8=2\tilde{C}^{(a+1)^{-1}}\left\{2^m+\left[1-2^{-am(a+1)^{-1}}\right]^{-1}\right\}$. ■.

Следующее простое утверждение также используется при доказательстве теоремы 2.24.

Лемма 2.26. Пусть Δ - куб в $\mathbb{R}^m$ и пусть $\tilde{\mathcal{P}}=\tilde{\mathcal{P}}(\Delta,\alpha,M)$ - множество полиномов $\vartheta\in\mathcal{P}(\alpha,m)$, удовлетворяющих неравенству $N(\vartheta|L_\infty\Delta)\le M$. Тогда при $\varepsilon\le M$ имеет место оценка для числа элементов оптимальной ε-сети:

$$\mathcal{N}_\varepsilon(\tilde{\mathcal{P}};L_\infty\Delta)\le C_9(M\varepsilon^{-1})^{\nu},\ \nu=\nu(\alpha,m),\quad C_9=C_9(\alpha,m). \tag{2.45}$$

Постоянная C_9 не зависит от куба Δ. ▲.

В самом деле, оценка (2.45) вытекает из общих фактов об ε-энтропии множеств в конечномерном пространстве. Следует лишь заметить, что независимость постоянной C_9 от куба Δ получается, если произвести линейную замену переменных, переводящую Δ в куб Q^m.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2.24. Сопоставим каждой функции $u\in SW_p^\alpha Q^m$, $p\alpha>m$, функцию кубов $\mathcal{J}_u\in S\mathcal{J}$ по формуле (2.12). Положим $a=\alpha pm^{-1}-1$ и построим последовательность разбиений $T_a(\mathcal{J}_u)=\{\Xi_i\}_0^\infty$ и соответствующие числовые последовательности $\{n_i\}$, $\{\delta_i\}$, $\{\tilde{\delta}_i\}$.

Из неравенства (2.16), полученного при доказательстве теоремы 2.1, следует, что для всех $i=0,1,\ldots$ справедливо соотношение

$$N(u-P_{\Xi_i}u\,|\,L_\infty Q^m)\le C_5\delta_i^{1/p}\le C_5\tilde{\delta}_i^{1/p}. \tag{2.46}$$

Фиксируем $\varepsilon>0$; положим $\eta=(\varepsilon/2C_5)^p$ и определим число $k=k(\mathcal{J}_u,a,\eta)$ формулой (2.41). Объединим в один класс те функции u , для которых последовательности $T_a(\mathcal{J}_u,\eta)$ совпадают. Число классов оценивается в соответствии с леммой 2.25:

$$\log_2 N(a,\eta)\le C_8(2C_5/\varepsilon)^{m/\alpha}. \tag{2.47}$$

Выделим какой-либо класс /обозначим его через K / и построим для него ε-сеть. Предварительно отметим, что числа n_i и $\tilde{\delta}_i$, $i=0,\dots,k$ /но не числа δ_i / совпадают для всех функций класса K .

Будем строить ε-сеть индуктивно. Положим $\varepsilon_i=2C_5\tilde{\delta}_i^{1/p}$, $i=0,\dots,k$. Пусть на i-том шаге для множества K построена ε_i-сеть мощности $\mathcal{N}_i$, содержащаяся в $\mathcal{P}_\alpha(\Xi_i)$. Пусть $u\in K$ и $w\in\mathcal{P}_\alpha(\Xi_i)$ - тот элемент ε-сети, для которого $N(u-w|L_\infty Q^m)\le\varepsilon_i$. Тогда

$$|P_{\Xi_{i+1}}u-w|\le|P_{\Xi_{i+1}}u-u|+|u-w|\le C_5\tilde{\delta}_i^{1/p}+\varepsilon_i\le2\varepsilon_i .$$

Таким образом, в каждом кубе $\Delta\in\Xi_{i+1}$ функция $P_\Xi u-w$ принадлежит множеству $\tilde{\mathcal{P}}(\Delta,\alpha,M)$ при $M=2\varepsilon_i$. В соответствии с леммой 2.26 и левым неравенством (2.40) это множество имеет $(\varepsilon_{i+1}/2)$ -сеть, мощность которой не превышает числа

$$C_9(4\varepsilon_i/\varepsilon_{i+1})^\nu\le C_9 2^{(\alpha+2)\nu}\overset{def}{=\!=}C_{10},\quad \nu=\nu(\alpha,m).$$

Отсюда заключаем, что множество $\{P_{\Xi_{i+1}}u:u\in K\}$ имеет $(\varepsilon_{i+1}/2)$ -сеть, содержащуюся в $\mathcal{P}_\alpha(\Xi_{i+1})$ и такую, что ее мощность удовлетворяет оценке

$$\mathcal{N}_{i+1}\le C_{10}^{n_{i+1}}\mathcal{N}_i .$$

В силу (2.46) эта же сеть служит ε_{i+1} -сетью для множества K . Таким образом для множества K , исходя из ε_0-сети, строится ε_k-сеть мощности $\mathcal{N}_k$ /она же является и ε-сетью/, причем

$$\mathcal{N}_k \le \mathcal{N}_0 C_{10}^{n_1+\ldots+n_k} \le \mathcal{N}_0 C_{10}^{2^m(n_0+\ldots+n_{k-1})} \le \mathcal{N}_0 C_{10}^{2^m \hat{n}}.$$

В согласии с (2.44) $2^m \hat{n} = c\eta^{-(a+1)^{-1}} = \tilde{c}\,\varepsilon^{-m/\alpha}$, где $\tilde{c} = \tilde{c}(m,\alpha,p)$ не зависит от класса K. Далее, $\mathcal{N}_0 \le \hat{\mathcal{N}}_0$, где $\hat{\mathcal{N}}_0$ есть мощность содержащейся в $\mathcal{P}_\alpha(\Xi_0) = \mathcal{P}(\alpha,m)$ ε_0-сети для множества $SW_p^\alpha Q^m$ в пространстве $L_\infty Q^m$. Число $\hat{\mathcal{N}}_0$ также не зависит от K. Остается сопоставить полученную для каждого из классов оценку

$$\mathcal{N}_k \le \hat{\mathcal{N}}_0 C_{10}^{\tilde{c}\varepsilon^{-m/\alpha}}$$

с оценкой (2.47) для числа классов. ▨ .

Добавление 2

Доказательство теорем I.4 и I.7

I. <u>Оценка $\mathcal{H}_\varepsilon(W_p^\alpha Q^m; L_q)$ сверху при $q<\infty$</u>. Рассмотрения п. 6 лекции 2 мы перенесем на случай $q<\infty$. Так как при $p\alpha > m$ требуемый результат, т.е. оценка

$$\mathcal{H}_\varepsilon(W_p^\alpha Q^m; L_q) = O(\varepsilon^{-m/\alpha}), \qquad (2.48)$$

прямо следует из теоремы 2.24, то ниже считаем $p\alpha \le m$, $q^{-1} > p^{-1} - \alpha m^{-1}$. Идея доказательства оценки (2.48) повторяет идею доказательства теоремы 2.24. В частности, существенно используется лемма 2.25. Однако последующая часть рассуждения /оценка энтропии одного класса/ становится значительно более громоздкой.

Нам потребуются предварительные оценки в специальной метрике, связанной с фиксированным разбиением Ξ куба Q^m. Именно, для функции $u \in L_q Q^m$ наряду с обычной нормой пространства L_q рассмотрим норму

$$\|u\|_{q,\Xi} = \max_{\Delta\in\Xi} N(u \mid L_q\Delta). \qquad (2.49)$$

Порождаемое нормой (2.49) пространство функций обозначим через $L_{q,\Xi}$. Отметим очевидные неравенства

$$\|u\|_{q,\Xi} \le \|u\|_q \le |\Xi|^{1/q}\|u\|_{q,\Xi}. \tag{2.50}$$

Если разбиение Ξ' является продолжением разбиения Ξ /т.е. каждый куб $\Delta' \in \Xi'$ содержится в одном из кубов $\Delta \in \Xi$/, то $\|u\|_{q,\Xi'} \le \|u\|_{q,\Xi}$.

Установим два вспомогательных предложения. Первое из них можно рассматривать как модификацию леммы 2.26.

Лемма 2.27. Пусть Ξ - разбиение куба Q^m на кубы и $\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{\mathcal{P}}_{\alpha,q}(\Xi, M)$ - множество функций $v \in \mathcal{P}_\alpha(\Xi)$, удовлетворяющих условию

$$\|v\|_{q,\Xi} \le M. \tag{2.51}$$

Тогда для любого $\varepsilon \le M$ справедлива оценка для минимального числа элементов ε-сети

$$\mathcal{N}_\varepsilon(\tilde{\mathcal{P}}; L_{q,\Xi}) \le C_{11}^{|\Xi|}(M\varepsilon^{-1})^{\nu|\Xi|}, \quad \nu = \nu(\alpha, m). \tag{2.52}$$

Постоянная $C_{11} = C_{11}(m, \alpha, q)$ не зависит от разбиения Ξ. ▲.

Доказательство. Пусть $\Delta \in \Xi$ и пусть $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\alpha,q}(\Delta, M)$ - множество полиномов $r \in \mathcal{P}(\alpha, m)$, удовлетворяющих условию

$$N(r | L_q\Delta) \le M. \tag{2.53}$$

Тогда при $\varepsilon \le M$ выполняется оценка

$$\mathcal{N}_\varepsilon(\mathcal{R}; L_q\Delta) \le C_{11}(M\varepsilon^{-1})^\nu, \tag{2.54}$$

доказательство которой не отличается от доказательства леммы 2.26. Условие (2.51), очевидно, приводит к условию (2.53) для полиномов r, получающихся при сужении функций $v \in \tilde{\mathcal{P}}$ на какой-либо куб $\Delta \in \Xi$. Оценка (2.52) при этом легко получается из оценки (2.54). В самом деле, требуемую ε-сеть в множестве $\tilde{\mathcal{P}}$ можно образовать путем всевозможных "окленваний" элементов ε-сетей, построенных в множествах $\mathcal{A}_{\alpha,q}(\Delta, M)$ для всех кубов $\Delta \in \Xi$. ▨ .

Пусть имеется некоторая последовательность $\{\Xi_i\}_0^k$ разбиений куба Q^m , причем Ξ_0 - тривиальное разбиение $(|\Xi_0| = 1)$ и каждое разбиение Ξ_i , $i \geq 1$, является продолжением предшествующего разбиения Ξ_{i-1} . Обозначим, как обычно, $|\Xi_i| = n_i$. Пусть ζ_i - некоторые числа, удовлетворяющие условиям

$$\beta\zeta_i \leq \zeta_{i+1} \leq \zeta_i \qquad (\beta > 0;\ i = 0, 1, \ldots, k-1), \tag{2.55}$$

а $\hat{\mathcal{P}}_i \subset \mathcal{P}_\alpha(\Xi_i)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, - некоторые множества кусочно-полиномиальных функций, причем $\hat{\mathcal{P}}_i$ является $2\zeta_i$-сетью для множества $\hat{\mathcal{P}}_{i+1}$ в метрике $L_{q,\Xi_{i+1}}$.

Лемма 2.28. При сделанных предположениях справедливы неравенства

$$\mathcal{N}_{\zeta_i}(\hat{\mathcal{P}}_i; L_{q,\Xi_i}) \leq C_{12}^{n_1 + \ldots + n_i}\, \mathcal{N}_{\zeta_0}(\hat{\mathcal{P}}_0; L_q) \qquad (i = 1, \ldots, k). \tag{2.56}$$

Постоянная $C_{12} = C_{12}(m, \alpha, q, \beta)$ не зависит от рассматриваемой последовательноcти разбиений и чисел ζ_i . ▲ .

Доказательство. Для любого элемента $v \in \hat{\mathcal{P}}_{i+1}$ найдется такой элемент $v' \in \hat{\mathcal{P}}_i$, что

$$\|v - v'\|_{q,\Xi_{i+1}} \leq 2\zeta_i .$$

Пусть V_i - ζ_i-сеть минимальной мощности, построенная для $\hat{\mathcal{P}}_i$ относительно метрики L_{q,Ξ_i} . Тогда для подходящего элемента $\tilde{v} \in V_i$ получаем:

$$\|v - \tilde{v}\|_{q,\Xi_{i+1}} \leq \|v - v'\|_{q,\Xi_{i+1}} + \|v' - \tilde{v}\|_{q,\Xi_i} \leq 3\zeta_i .$$

В силу леммы 2.27, в множестве $\tilde{\mathcal{P}}_{\alpha,q}(\Xi_{i+1}, 3\zeta_i)$ можно построить ζ_{i+1}-сеть $\mathcal{I}_{i+1}$, мощность которой не превосходит величины

$$C_{11}(3\zeta_i\zeta_{i+1}^{-1})^{\nu n_{i+1}} \le C_{12}^{n_{i+1}} \qquad (C_{12}=C_{11}3^{\nu}\delta^{-\nu}).$$

Так как $v-\tilde{v}\in\tilde{\mathcal{P}}_{\alpha,q}(\Xi_{i+1},3\zeta_i)$, то для некоторого элемента $z\in\mathcal{Z}_{i+1}$ будет выполняться неравенство

$$\|v-\tilde{v}-z\|_{q,\Xi_{i+1}}\le\zeta_{i+1}.$$

Всевозможные элементы вида $\tilde{v}+z$, где $\tilde{v}\in V_i$, $z\in\mathcal{Z}_{i+1}$, образуют ζ_{i+1}-сеть для множества $\hat{\mathcal{P}}_{i+1}$ относительно метрики пространства $L_{q,\Xi_{i+1}}$. Мощность этой сети оценивается числом

$$C_{12}^{n_{i+1}}\mathcal{N}_{\zeta_i}(\hat{\mathcal{P}}_i;L_{q,\Xi_i}).$$

Таким образом, мы получили оценку

$$\mathcal{N}_{\zeta_{i+1}}(\hat{\mathcal{P}}_{i+1};L_{q,\Xi_{i+1}})\le C_{12}^{n_{i+1}}\mathcal{N}_{\zeta_i}(\hat{\mathcal{P}}_i;L_{q,\Xi_i}),$$

из которой, очевидно, следует (2.56). ▨.

Переходим непосредственно к доказательству оценки (2.48). Пусть $a=p(q^{-1}-q^{*-1})$. Фиксируем $\varepsilon>0$ и положим

$$\eta=(\varepsilon/2C_6)^{p(1+m\alpha^{-1}q^{-1})}. \tag{2.57}$$

Определим для функции кубов (2.12) число $k=k(\mathcal{J}_u,a,\eta)$ в соответствии с (2.41). Объединим в один класс те функции $u\in SW_p^{\alpha}Q^m$, для которых последовательности $T_a(\mathcal{J}_u,\eta)$ совпадают. Число таких классов оценивается на основании леммы 2.25. В силу (2.57) неравенство (2.42) вновь приводит к оценке (2.47).

Оценим энтропию одного класса, который, как и в п.6, обозначим через K. Отметим, что для всех функций $u\in K$ разбиения Ξ_i $(i=0,\dots,k)$, а, следовательно, и числа n_i, $\tilde{\delta}_i$ совпадают.

Из неравенства (2.14) /при $\tilde{p}=q$ / и из определения разбиений Ξ_i следует, что

$$\|u-P_{\Xi_i}u\|_{q,\Xi_i}\le C_5\delta_i^{1/p}\le C_6\tilde{\delta}_i^{1/p}\overset{def}{=}\zeta_i,\quad i=0,\dots,k. \qquad (2.58)$$

Положим $\hat{\mathcal{P}}_i=P_{\Xi_i}K$ и заметим, что множества $\hat{\mathcal{P}}_i$ и числа ζ_i удовлетворяют условиям леммы 2.28. Действительно, из (2.58) находим, что

$$\|P_{\Xi_i}u-P_{\Xi_{i+1}}u\|_{q,\Xi_{i+1}}\le\|u-P_{\Xi_{i+1}}u\|_{q,\Xi_{i+1}}+\|u-P_{\Xi_i}u\|_{q,\Xi_i}\le$$

$$\le\zeta_{i+1}+\zeta_i\le 2\zeta_i.$$

Неравенства (2.55) /при $\beta=2^{-(a+1)mp^{-1}}$ / выполнены в силу (2.40).

Воспользуемся результатом леммы 2.28. Из (2.56) и (2.58) находим:

$$\mathcal{N}_{2\zeta_k}(K;L_{q,\Xi_k})\le\mathcal{N}_{\zeta_k}(\hat{\mathcal{P}}_k;L_{q,\Xi_k})\le\mathcal{N}_{\zeta_0}(\hat{\mathcal{P}}_0;L_q)C_{12}^{n_1+\dots+n_k}. \qquad (2.59)$$

В соответствии с (2.44)

$$n_1+\dots+n_k\le 2^m(n_0+\dots+n_{k-1})\le c_1\eta^{-(a+1)^{-1}};$$

первый множитель в правой части (2.59) ограничен вне зависимости от K. Таким образом, из (2.59) вытекает оценка вида

$$\mathcal{H}_{2\zeta_k}(K;L_{q,\Xi_k})\le c_2\eta^{-(a+1)^{-1}}. \qquad (2.60)$$

Для получения окончательного результата надо перейти к исходной метрике L_q. Полагая $\varepsilon_k=2\zeta_k n_k^{1/q}$ и сравнивая (2.60) и (2.50), получаем:

$$\mathcal{H}_{\varepsilon_k}(K;L_q)\le c_2\eta^{-(a+1)^{-1}}.$$

Далее, из определения чисел a, ζ_k и из соотношений (2.41), (2.43), (2.57) следует, что

$$\varepsilon_k\le c_3\eta^{p^{-1}-q^{-1}(a+1)^{-1}}=c'\varepsilon.$$

Таким образом,

$$\mathcal{H}_{c'\varepsilon}(K;L_q)\le c_2\eta^{-(a+1)^{-1}}=c\varepsilon^{-m/\alpha}.$$

Наконец, объединяя это неравенство и (2.47), приходим к оценке

$$\mathcal{H}_{c'\varepsilon}(W_p^\alpha Q^m;L_q)\le c\varepsilon^{-m/\alpha},$$

которая, очевидно, равносильна требуемому соотношению (2.48). ▨.

Приведенное доказательство является конструктивным в следующем смысле: указан /нелинейный/ метод приближений, на котором достигается оценка (2.48) для ε-энтропии.

2. Оценка $\mathcal{H}_\varepsilon(W_p^\alpha Q^m;L_q)$ снизу. В настоящем пункте завершается доказательство теоремы I.7. Мы покажем, что при $1\le q\le\infty$ в случае $p\alpha>m$ и при $1\le q<q^*$ в случае $p\alpha\le m$ имеет место оценка

$$\mathcal{H}_\varepsilon(W_p^\alpha Q^m;L_q)\ge c_0\varepsilon^{-m/\alpha},\qquad \varepsilon\le\varepsilon_0. \tag{2.6I}$$

Так как норма в L_qQ^m возрастает с ростом q, то оценку (2.6I) достаточно установить при $q=1$. Таким образом, нашей непосредственной целью будет получение неравенства

$$\mathcal{H}_\varepsilon(W_p^\alpha Q^m;L_1)\ge c_0\varepsilon^{-m/\alpha};\qquad \varepsilon\le\varepsilon_0. \tag{2.62}$$

Доказательство неравенства (2.62) основано на простой конструкции, сводящей дело к оценкам ε-энтропии множеств в конечномерных пространствах. Та же конструкция будет использована далее при доказательстве теоремы I.4.

Фиксируем какую-либо неотрицательную функцию $\varphi\in C_0^\infty Q^m$, такую, что

$$\overset{\circ}{N}(\varphi|W_p^\alpha Q^m)=1.$$

Обозначим $N(\varphi|L_rQ^m)=b_r$, $1\le r\le\infty$.

Пусть Δ- m-мерный куб и f_Δ - преобразование подобия, отображающее Δ на Q^m. Положим $\varphi_\Delta=\varphi\circ f_\Delta$. Тогда, очевидно, носитель функции φ_Δ лежит в кубе Δ и

$$\mathring{N}(\varphi_\Delta | W_p^\alpha \Delta) = |\Delta|^{p^{-1} - \alpha m^{-1}}, \tag{2.63}$$

$$N(\varphi_\Delta | L_r \Delta) = b_r |\Delta|^{1/r}, \quad 1 \le r \le \infty. \tag{2.64}$$

Пусть, далее, σ – натуральное число и $s = \sigma^m$. Разобьем куб Q^m на s равных кубов $\Delta_1, \dots, \Delta_s$ и рассмотрим линейное пространство $\mathcal{E}^s$, порождаемое функциями $\varphi_k \overset{def}{=} \varphi_{\Delta_k}$, $k = 1, \dots, s$. Через E^s будем обозначать координатное s-мерное пространство. Пространство E^s, снабженное ℓ_p-метрикой, обозначим через $\ell_p^{(s)}$. Введем в рассмотрение линейный оператор $V_s : E^s \to \mathcal{E}^s$, сопоставляющий точке $t = (t_1, \dots, t_s)$ функцию $u = V_s t = \sum_{k=1}^s t_k \varphi_k$.

Лемма 2.29. Имеет место неравенство

$$\mathring{N}(V_s t | W_p^\alpha Q^m) \le C_{13} s^{\alpha m^{-1} - p^{-1}} N(t | \ell_p^{(s)}), \tag{2.65}$$

где постоянная $C_{13} = C_{13}(m, \alpha, p)$ не зависит от s. ▲.

Доказательство тривиально следует из (2.63), если α – целое. Рассмотрим поэтому случай нецелого α. Пусть $\theta = \alpha - [\alpha]$. Тогда

$$\mathring{N}^p(V_s t | W_p^\alpha Q^m) = \sum_{k=1}^s |t_k|^p \mathring{N}^p(\varphi_k | W_p^\alpha \Delta_k) +$$

$$+ \sum_{\substack{k,\ell=1 \\ k \ne \ell}}^s \int_{\Delta_k} \int_{\Delta_\ell} \frac{|t_k \nabla_{[\alpha]} \varphi_k(x) - t_\ell \nabla_{[\alpha]} \varphi_\ell(y)|^p}{|x-y|^{m+p\theta}} \, dx\, dy = S_1 + S_2.$$

В соответствии с (2.63)

$$S_1 = s^{p\alpha m^{-1} - 1} \sum_{k=1}^s |t_k|^p. \tag{2.66}$$

Для оценки S_2 сначала применим к каждому члену неравенство $|a-b|^p \le 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p)$. Учитывая, далее, симметрию относительно x, y находим:

$$S_2 \le 2^p \sum_{k=1}^{s} |t_k|^p \int_{\Delta_k} |\nabla_{[\alpha]} \varphi_k(x)|^p \int_{Q^m \setminus \Delta_k} |x-y|^{-(m+p\theta)} dy\,dx \le$$

$$\le c \sum_{k=1}^{s} |t_k|^p \int_{\Delta_k} \delta_k^{-p\theta}(x) \, |\nabla_{[\alpha]} \varphi_k(x)|^p dx ;$$

/через $\delta_k(x)$ обозначено расстояние от точки x до границы куба Δ_k /. Преобразуя интегралы по Δ_k к кубу Q^m и учитывая, что $\varphi \in C_0^\infty Q^m$, получим неравенство

$$S_2 \le c' s^{p\alpha m^{-1}-1} \sum_{k=1}^{s} |t_k|^p .$$

Отсюда и из (2.66) следует (2.65). ▨ .

Из (2.64) вытекает равенство

$$N(V_s t \,|\, L_p Q^m) = b_p s^{-1/p} N(t \,|\, \ell_p^{(s)}) . \tag{2.67}$$

Объединяя (2.65) и (2.67), приходим к оценке вида

$$N(V_s t \,|\, W_p^\alpha Q^m) \le C_{14} s^{\alpha m^{-1} - p^{-1}} N(t \,|\, \ell_p^{(s)}), \quad C_{14} = C_{14}(m, \alpha, p). \tag{2.68}$$

Доказательство оценки (2.62) достаточно провести для не слишком быстро убывающей последовательности чисел ε. Мы рассмотрим последовательность

$$\varepsilon_\sigma = \mu \sigma^{-\alpha} , \qquad \sigma = 1, 2, \ldots \tag{2.69}$$

/постоянная μ будет выбрана позднее/. Оценим снизу $\mathcal{E}_\sigma$ - энтропию более узкого, чем $SW_p^\alpha Q^m$, множества $\mathcal{F}_s \overset{def}{=} \mathcal{E}^s \cap SW_p^\alpha Q^m$, $s = \sigma^m$. Пусть $u_1, \ldots, u_N$ - ε_σ -сеть для $\mathcal{F}_s$ в метрике пространства $L_1 Q^m$. Не уменьшая общности, можно считать, что эта ε_σ -сеть содержится в $\mathcal{F}_s$. Из (2.67), (2.68) заключаем, что элементы $V_s^{-1} u_1, \ldots, V_s^{-1} u_N$ образуют ε'_σ -сеть,

$$\varepsilon'_\sigma = b_1^{-1} s\varepsilon_\sigma = b_1^{-1}\mu s^{1-\alpha m^{-1}},$$

для шара $C_{14}^{-1} s^{p^{-1}-\alpha m^{-1}} S\ell_p^{(s)}$ в метрике пространства $\ell_1^{(s)}$.
Теперь используем следующий результат геометрического характера.

Лемма 2.30. Пусть элементы $x_1,\dots,x_N$ образуют ε-сеть для множества $hS\ell_p^{(s)}$ в метрике пространства $\ell_1^{(s)}$. Тогда

$$N \geq \frac{\sqrt{p}}{2} C_{15}^s s^{(1-p^{-1})s} (h\varepsilon^{-1})^s, \qquad C_{15} = \Gamma(1+p^{-1}) p^{1/p} e^{-(1-1/p)}. \blacktriangle. \tag{2.70}$$

Откладывая доказательство леммы 2.30 до конца настоящего пункта, завершим вывод оценки (2.62). Положим в (2.69) $\mu = b_1 C_{15} (2C_{14})^{-1}$ и воспользуемся леммой 2.30 для оценки числа N элементов ε-сети множества $\mathcal{F}_s$ в метрике пространства $L_1 Q^m$. Мы получим:

$$N \geq \frac{\sqrt{p}}{2} C_{15}^s s^{(1-p^{-1})s} (C_{14}^{-1} s^{p^{-1}-\alpha m^{-1}}/\varepsilon'_\sigma)^s = \frac{\sqrt{p}}{2} 2^s = \frac{\sqrt{p}}{2} 2^{(\mu\varepsilon^{-1})^{m/\alpha}}.$$

Отсюда вытекает (2.62).

Для завершения доказательства теоремы I.7 осталось доказать лемму 2.30.

Эвклидов объем шара $\varepsilon S\ell_1^{(s)}$ равен $(2\varepsilon)^s \Gamma^{-1}(1+s)$, эвклидов объем шара $hS\ell_p^{(s)}$ равен $(2h)^s \Gamma^s(1+p^{-1})\Gamma^{-1}(1+sp^{-1})$. Так как $\ell_1^{(s)}$ – шары радиуса ε с центрами в точках $x_1,\dots,x_N$ покрывают множество $hS\ell_p^{(s)}$, то

$$N(2\varepsilon)^s \Gamma^{-1}(1+s) \geq (2h)^s \Gamma^s(1+p^{-1}) \Gamma^{-1}(1+sp^{-1}).$$

Оценивая величины $\Gamma(1+s)$, $\Gamma(1+sp^{-1})$ с помощью неравенства

$$\frac{1}{2} x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x} \leq \Gamma(1+x) \leq x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x}, \qquad x \geq 0,$$

получим (2.70). ▨ .

3. <u>Доказательство теоремы I.4</u>. Мы выведем эту теорему из

одного утверждения геометрического характера. Ниже через $N(T|B_1 \to B_2)$ обозначается норма линейного оператора T, отображающего банахово пространство B_1 в банахово пространство B_2. Если $B_1 = \ell_p^{(s)}$, $B_2 = \ell_q^{(s)}$, то будем употреблять более простое обозначение $\|T\|_{p\to q}$.

Пусть B_1 компактно вложено в B_2. Определение линейных поперечников $\partial_n(B_1, B_2)$ можно переписать в эквивалентном виде

$$\partial_n(B_1,B_2) = \inf_{\operatorname{rang} A \le n} N(I-A|B_1 \to B_2), \tag{2.71}$$

что оказывается более удобным при доказательстве теоремы 1.4.

Лемма 2.31. При любых $s \ge 1$ и $n \le s$ справедливо неравенство*/

$$\partial_n(\ell_2^{(s)}, \ell_\infty^{(s)}) \ge \sqrt{\frac{s-n}{s}}\ . \quad \blacktriangle. \tag{2.72}$$

Доказательство. В соответствии с (2.71) находим:

$$\partial_n(\ell_2^{(s)}, \ell_\infty^{(s)}) = \min_{\operatorname{rang} A \le n} \|I-A\|_{2\to\infty} = \min_{\operatorname{rang} A^* \le n} \|I-A^*\|_{1\to 2}\ .$$

Для оценки снизу величины $\|I-B\|_{1\to 2}$, $B = A^*$, удобно воспользоваться леммой 1.20 /при $p=2$ /. В самом деле, величина

$$\|I-B\|_{1\to 2} = \max_{x \in S\ell_1^{(s)}} \|x - Bx\|_2$$

реализуется в одной из крайних точек сферы $S\ell_1^{(s)}$; иначе говоря, – на одном из элементов $e_1, \dots, e_s$ стандартного базиса в E^s. Согласно лемме 1.20, при условии $\operatorname{rang} B \le n$ будет

$$\sum_{k=1}^{s} \|e_k - Be_k\|_2^2 = \|I-B\|_2^2 \ge \sum_{k=n+1}^{s} s_k^2(I) = s-n\ . \tag{2.73}$$

Средний член в (2.73) представляет собой квадрат нормы Гиль-

---

*/ На самом деле в (2.72) имеет место равенство.

берта-Шмидта оператора $I-B$ /. Из (2.73) получаем, что

$$\|I-B\|^2_{1\to 2}=\max_{k=1,\dots,s}\|e_k-Be_k\|_2^2\geqslant s^{-1}\sum_{k=1}^{s}\|e_k-Be_k\|_2^2\geqslant s^{-1}(s-n).$$

Отсюда, очевидно, следует (2.72). ▨ .

При сведении теоремы I.4 к лемме 2.3I используется изложенная в п. 2 конструкция пространств $\mathcal{E}^s$. Будем рассматривать $\mathcal{E}^s$ как подпространство в $L_\infty Q^m$. Наряду с определенным выше оператором V_s рассмотрим левый обратный к нему оператор $\tilde{V}_s : L_\infty Q^m \to E^s$, сопоставляющий всякой функции $u\in L_\infty Q^m$ точку $t=(t_1,\dots,t_s)$ по формулам

$$t_k=\frac{1}{\beta_1|\Delta_k|}\int_{\Delta_k}u(x)dx\ ,\quad k=1,\dots,s\ .$$

Очевидно,

$$N(\tilde{V}_s u\,|\,\ell_\infty^{(s)})\leqslant \beta_1^{-1}N(u\,|\,L_\infty Q^m)\ . \tag{2.74}$$

Переходим непосредственно к доказательству теоремы I.4. По заданному n найдем такое натуральное число σ , чтобы было $(\sigma-1)^m<2n\leqslant\sigma^m$; тогда число $s=\sigma^m$ удовлетворяет неравенствам

$$2n\leqslant s<2^{m+1}n.$$

Построим соответствующее выбранному s пространство $\mathcal{E}^s$ и операторы $V_s,\tilde{V}_s$. Пусть A – линейный оператор в $L_\infty Q^m$ и $\operatorname{rang}A\leqslant n$. Тогда $\tilde{A}\overset{def}{=\!=}\tilde{V}AV$ – линейный оператор в E^s , и $\operatorname{rang}\tilde{A}\leqslant\operatorname{rang}A\leqslant n$. По лемме 2.3I

$$\|I-\tilde{A}\|_{2\to\infty}\geqslant\sqrt{\frac{s-n}{s}}>2^{-(m+1)/2}\ . \tag{2.75}$$

Имеем далее:

$$N(I-\tilde{A}\,|\,\ell_2^{(s)}\to\ell_\infty^{(s)})=N(\tilde{V}V-\tilde{V}AV\,|\,\ell_2^{(s)}\to\ell_\infty^{(s)})\leqslant$$

$$\leqslant N(V\,|\,\ell_2^{(s)}\to W_2^\alpha Q^m)N(I-A\,|\,W_2^\alpha Q^m\to L_\infty Q^m)N(\tilde{V}\,|\,L_\infty Q^m\to\ell_\infty^{(s)}).$$

Используя неравенства (2.68) /при $p=2$ /, (2.74) и (2.75), находим:

$$2^{-(m+1)/2} \le C_{14} \delta_\infty^{-1} s^{\alpha m^{-1}-1/2} N(I-A \mid W_2^\alpha Q^m \to L_\infty Q^m).$$

В соответствии с (2.71) это означает, что

$$\partial_n(W_2^\alpha Q^m, L_\infty) \geqslant c_1 s^{-(\alpha m^{-1}-1/2)} \geqslant c n^{-(\alpha m^{-1}-1/2)}. \ \blacksquare.$$

Добавление 3

Доказательство неравенства (2.27)

Лемма 2.19 утверждает справедливость при $p \geqslant 1$, $\alpha > 0$, $p\alpha < m$ неравенства

$$\int_{\mathbb{R}^m} |x|^{-p\alpha} |u|^p dx \le C \mathring{N}^p(u \mid W_p^\alpha \mathbb{R}^m), \quad C = C(m, \alpha, p), \tag{2.27}$$

для функций $u \in C_0^\infty \mathbb{R}^m$. В тексте лекции это неравенство было доказано лишь для целых α. Здесь мы приведем доказательство в общем случае. На протяжении доказательства через $c_1, c_2, \dots$ обозначаются постоянные, зависящие только от m, α, p. Интегралы без указания области интегрирования считаются распространенными по всему пространству $\mathbb{R}^m$.

Предположим сначала, что $\alpha < 1$.

Заметим прежде всего, что

$$\left(\int \frac{|u(x)|^p}{|x|^{p\alpha}} dx\right)^{1/p} \le \left(\int \frac{|u(2x)|^p}{|x|^{p\alpha}} dx\right)^{1/p} + \left(\int \frac{|u(x)-u(2x)|^p}{|x|^{p\alpha}} dx\right)^{1/p},$$

$$\int \frac{|u(2x)|^p}{|x|^{p\alpha}} dx = \frac{1}{2^{m-p\alpha}} \int \frac{|u(x)|^p}{|x|^{p\alpha}} dx,$$

и потому

$$\int \frac{|u(x)|^p}{|x|^{p\alpha}} dx \le c_1 \int \frac{|u(x)-u(2x)|^p}{|x|^{p\alpha}} dx. \tag{2.76}$$

Далее,

$$|u(x)-u(2x)|=\frac{c_2}{|x|^m}\int\limits_{|y|\le|x|}|u(x)-u(2x)|\,dy\le$$

$$\le\frac{c_2}{|x|^m}\left[\int\limits_{|y|\le|x|}|u(x)-u(y)|\,dy+\int\limits_{|y|\le|x|}|u(2x)-u(y)|\,dy\right]\le$$

$$\le\frac{c_3}{|x|^{m/p}}\left[\left(\int\limits_{|y|\le|x|}|u(x)-u(y)|^p dy\right)^{1/p}+\left(\int\limits_{|y|\le|x|}|u(2x)-u(y)|^p dy\right)^{1/p}\right]\le$$

$$\le c_4|x|^{\alpha}\left[\left(\int\limits_{|y|\le|x|}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{m+p\alpha}}dy\right)^{1/p}+\left(\int\limits_{|y|\le|x|}\frac{|u(2x)-u(y)|^p dy}{|2x-y|^{m+p\alpha}}\right)^{1/p}\right],$$

откуда

$$\frac{|u(x)-u(2x)|^p}{|x|^{p\alpha}}\le c_5\left[\int\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{m+p\alpha}}dy+\int\frac{|u(2x)-u(y)|^p}{|2x-y|^{m+p\alpha}}dy\right].$$

Интегрируя по переменной x по $\mathbb{R}^m$ и заменяя в последнем члене $2x$ на x, получим неравенство

$$\int\frac{|u(x)-u(2x)|^p}{|x|^{p\alpha}}dx\le c_6\iint\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{m+p\alpha}}dx\,dy,$$

которое вместе с (2.76) приводит к (2.27).

Для $\alpha>1$ положим $\theta=\alpha-[\alpha]$. Отметим прежде всего неравенство

$$\int\frac{|u|^p}{|x|^{p\alpha}}dx\le c_7\int\sum_{|\tau|=[\alpha]}|D^\tau u|^p\frac{dx}{|x|^{p\theta}}. \qquad (2.77)$$

Оно получается из неравенства (2.28), которое следует применить по переменной $r=|x|$ при $\ell=[\alpha]$, $\mu=m-p\theta$, а затем произвести интегрирование по единичной сфере. Правая часть в (2.77) может быть оценена по неравенству (2.27), в котором α заменено на θ, а функция u – на функцию $D^\tau u$. Именно, при всяком τ, $|\tau|=[\alpha]$,

$$\int \frac{|D^\tau u|^p}{|x|^{p\theta}} dx \le c_8 \iint \frac{|(D^\tau u)(x)-(D^\tau u)(y)|^p}{|x-y|^{m+p\theta}} dx\,dy. \qquad (2.78)$$

Объединяя (2.77) с (2.78), приходим к (2.27). ▨ .

Комментарии и литературные указания

Основные теоремы о приближениях /теоремы 2.1–2.4/ получены авторами [21], [2], [22] ; там же доказана теорема 1.5 о функциях разбиений. Теорема 2.10 о сингулярных функциях разбиений получена В.В.Борзовым [23] . В этой же работе найдены более детальные оценки для некоторых специальных классов мер и указаны приложения к спектральной теории. Кроме того, В.В.Борзовым [24], [25] даны обобщения теорем 1.5, 2.10 на случай разбиений основного куба на параллелепипеды с ограниченным /сверху и снизу/ отношением логарифмов ребер. В качестве применения им получены аналоги теорем 2.1–2.4 для классов W_p^α с векторным*/ $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$.

Фигурирующие в теоремах 2.1–2.4 кусочно-полиномиальные функции можно было бы назвать многомерными сплайнами /см. [27] /. Формальное отличие здесь в том, что наши кусочно-полиномиальные функции "не склеены" /и не могут быть склеены/ на границах кубов разбиения. Существеннее, однако, что рассматриваемые нами задачи имеют мало общего с традиционной тематикой теории сплайнов. Лишь в последнее время в теории сплайнов /одномерных, с нефиксированными узлами/ появились работы /см., например, [28] /, которые имеют точки соприкосновения с тематикой настоящих лекций.

Круг вопросов, связанных с теоремой 2.15, разрабатывался А.С.Безиковичем [17] . Ему принадлежит вариант этой теоремы, где вместо зацепленности фигурировала кратность покрытия. В терминах зацепленности Безиковичем был получен более слабый результат. В полном объеме результат о зацепленности был доказан М.Гузманом [18] сравнительно недавно; ему же принадлежат обобщения на покрытия более общего вида.

---

*/ По поводу определения "векторных" классов W_p^α см. [26] .

Теоремы 2.17, 2.23 принадлежат Г.В.Розенблюму [15], [16]. Для их доказательства он получил прямым путем /без теорем о Б-покрытиях/ утверждение, близкое к теореме 2.16. Приводимые здесь доказательства теорем 2.17, 2.23 ранее не публиковались. На связь теоремы 2.17 с теоремами о Б-покрытиях внимание авторов обратил Ю.А.Брудный.

Основная часть теоремы 1.7 об оценке ε-энтропии /оценка сверху/ доказана авторами [2]. Другое доказательство этой оценки, пригодное в одномерном случае при целых α, независимо получено В.М.Тихомировым [29]. Приведенное в добавлении 2 доказательство оценки ε-энтропии снизу по просьбе авторов выполнено Г.М.Тащияном. Близкие рассуждения /для других пространств/ см. в [3].

Для "векторных" классов W_p^{α} оценку вида (2.48) установил В.В.Борзов [25]. Он показал, что в этом случае оценка (2.48) сохраняется, если заменить α величиной $\bar{\alpha}$, где

$$\bar{\alpha}^{-1}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^{-1}.$$

В работе [2] при исследовании ε-энтропии авторы указали, что оценка (2.48) сохраняется, если в ней заменить класс W_p^{α} классом B_p^{α} О.В.Бесова или классом H_p^{α} С.М.Никольского /определение классов см. в [26] /. Для классов B_p^{α} доказательство из [2] проходит без изменений. Для классов H_p^{α} утверждение авторов оставалось безосновательным, поскольку норма в этих классах не порождает полуаддитивной функции кубов. Недавно Х.Трибель [30] показал, что из (2.48) интерполяционными методами выводятся аналогичные оценки ε- энтропии для некоторого семейства пространств, включающего пространства H_p^{α}. Аналогичную интерполяцию Х.Трибель провел для "векторных" классов; при этом он исходил из упоминавшегося результата Борзова.

В связи со сравнением линейных и нелинейных методов приближений [2], стала актуальной задача о вычислении точного порядка поперечников шара $SW_p^{\alpha}Q^m$ как компакта в L_q при $p\neq q$ /см. обсуждение этих вопросов в п. 4 лекции 1/. Задача о поперечниках d^n была рассмотрена М.З.Соломяком и В.М.Тихомировым [5]; ими был найден точный порядок величин $d^n(W_p^{\alpha}Q^m, L_{\infty})$ при $p>2$. Из этого результата при $p=2$ вытекает, в частности, теорема 1.4.

Геометрические задачи о поперечниках множеств в конечномерных пространствах, близкие к лемме 2.31, рассматривались С.Б.Стечкиным [31] и С.А.Смоляком [32] . Из их результатов вытекает справедливость (2.70) со знаком равенства. Приведенное выше доказательство леммы (2.31) заимствовано из [5] .

Ряд результатов о свойствах поперечников различных видов получил Р.С.Исмагилов [33], [7]. О наиболее принципиальных из этих результатов упоминалось в п. 4 лекции 1. Другие задачи в этой области рассматривались В.М.Тихомировым [29] и Ю.И.Маковозом [34].

Приведенным в добавлении 3 доказательством неравенства (2.27) авторы обязаны В.А.Солонникову.

ГЛАВА 3

Сингулярные числа интегральных операторов. Мультипликаторы

Первая часть настоящей лекции содержит применение теорем 2.3, 2.17, 2.23 к оценкам s-чисел интегральных операторов, действующих в пространствах вида $L_2(\rho)$. В соответствии с леммой 1.12 из оценок s-чисел вытекают аналогичные оценки собственных чисел. Важная особенность получаемых оценок - их равномерность в некоторых классах мер ρ . Это обстоятельство существенно используется во второй части лекции при изучении мультипликаторов для интегральных ядер.

1. <u>Формулировка основных результатов</u>. Пусть (X,ρ) , (Y,τ) - пространства с σ-конечной мерой. Положим $Z=X\times Y$; произведение мер ρ и τ обозначим через μ . Пусть T - μ - измеримая функция на Z . Рассмотрим интегральный оператор $\mathbb{T}$ с ядром $T(x,y)$, компактно отображающий $L_2(\rho)X$ в $L_2(\tau)Y$:

$$(\mathbb{T}u)(y)=\int_X T(x,y)u(x)\rho(dx), \qquad (3.1)$$

а также "союзный" с ним оператор $\mathbb{T}'$, отображающий $L_2(\tau)Y$ в $L_2(\rho)X$:

$$(\mathbb{T}'v)(x)=\int_Y T(x,y)v(y)\tau(dy). \tag{3.2}$$

Сингулярные числа операторов (3.I), (3.2) совпадают. В самом деле, если каноническое представление оператора $\mathbb{T}$ имеет вид

$$\mathbb{T}=\sum_k s_k(\cdot,\omega_k)\theta_k$$

$(\{\omega_k\}$ - о.н.с. в $L_2(\rho)X$, $\{\theta_k\}$ - о.н.с. в $L_2(\tau)Y)$, то каноническое представление оператора $\mathbb{T}'$ имеет вид

$$\mathbb{T}'=\sum_k s_k(\cdot,\bar\theta_k)\bar\omega_k .$$

Это замечание позволяет в дальнейшем в формулировках результатов менять роли переменных x,y.

В первую очередь нас интересуют оценки s-чисел операторов $\mathbb{T}$, $\mathbb{T}'$ в случае, когда $X=Q^m$ либо $X=\mathbb{R}^m$, а мера ρ - борелевская. Условия на ядро T заведомо будут обеспечивать включение*/ $\mathbb{T},\mathbb{T}'\in\mathfrak{S}_2$. При выводе оценок мы опираемся на следствие I.2I, которое в нужном нам частном случае принимает следующий вид.

Лемма 3.I. Пусть $T, T_1\in L_2(\mu)Z$, причем T_1 - вырожденное ядро ранга не выше n. Тогда

$$s_{2n}(\mathbb{T})\leq n^{-1/2}N(T-T_1|L_2(\mu)Z). \quad \Delta. \tag{3.3}$$

Лемма 3.I указывает на ту роль, которую играют для оценок s-чисел теоремы о приближениях. Результаты лекции 2 немедленно приводят к оценкам s-чисел интегральных операторов, ядра которых удовлетворяют некоторым условиям гладкости. Прежде всего рассматриваются случаи $X=Q^m$ и $X=\mathbb{R}^m$; возможные обобщения обсуждаются в п. 3. Получаемые оценки имеют вид

$$s_n(\mathbb{T})=s_n(\mathbb{T}')\leq Cn^{-(\gamma+\frac{1}{2})}N(T|L_2(\tau)YW_p^{\alpha}X)\|\rho\|^{1/2}_{(r)}, \tag{3.4}$$

---

*/ Некоторые сведения об оценках $s_k(\mathbb{T})$ при $\mathbb{T}\bar\in\mathfrak{S}_2$ изложены в добавлении 5 к настоящей лекции.

$$\gamma=\alpha/m \quad (p\geq 2); \quad \gamma=\alpha/m-p^{-1}+1/2 \quad (p<2) . \tag{3.5}$$

Здесь γ - показатель (2.5) при $q=2$. Как и при доказательстве теоремы 2.3, оценка (3.4) при $p<2$ сводится к случаю $p=2$ /ср. замечание 2.5/. Формулируемые ниже теоремы различаются условиями на множество X , меру ρ и ядро T , при которых устанавливается оценка (3.4).

Теорема 3.2. Пусть $X=Q^m$, $p\alpha>m$. Тогда существует такая постоянная $C=C(m,\alpha,p)$, что для любой меры $\rho\in\mathfrak{M}_1 Q^m$, любого пространства с мерой (Y,τ) и любой функции $T\in L_2(\tau)Y\, W_p^\alpha Q^m$ сингулярные числа операторов (3.1), (3.2) удовлетворяют оценке (3.4) при $r=1$. ▲ .

Теорема 3.3. Пусть $X=Q^m$, $p\alpha=m$, $1<r<\infty$. Тогда существует такая постоянная $C=C(m,\alpha,r)$, что для любой меры $\rho\in\mathfrak{M}_r Q^m$, любого пространства с мерой (Y,τ) и любой функции $T\in L_2(\tau)Y\, W_p^\alpha Q^m$ сингулярные числа операторов (3.1), (3.2) удовлетворяют оценке (3.4). ▲ .

Теорема 3.4. Пусть $X=\mathbb{R}^m$, $p\alpha<m$, $1<r<\infty$ и

$$2(1-r^{-1})=2(p^{-1}-\alpha m^{-1}) . \tag{3.6}$$

Тогда существует такая постоянная $C=C(m,\alpha,p)$, что для любой меры $\rho\in\mathfrak{M}_r\mathbb{R}^m$, любого пространства с мерой (Y,τ) и любой функции $T\in L_2(\tau)Y\,\overset{\circ}{W}{}_p^\alpha\mathbb{R}^m$ сингулярные числа операторов (3.1), (3.2) удовлетворяют оценке (3.4) (с заменой класса W_p^α классом $\overset{\circ}{W}{}_p^\alpha$ /. ▲ .

2. <u>Доказательство основных теорем</u>. Теоремы 3.2 - 3.4 доказываются по общей схеме, основанной на использовании леммы 3.1. В качестве вырожденного ядра T_1 берется ядро $P_\Xi T$ либо $K_H T$ /операторы P_Ξ , K_H применяются "по переменной x "/, при целесообразном выборе разбиения Ξ либо покрытия H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3.2. Можно считать, что $\rho\in S\mathfrak{M}_1 Q^m$, т.е. $\rho(Q^m)\leq 1$. По теореме вложения при $p\alpha>m$

$$\sup_x |T(x,y)|\leq cN(T(\cdot,y)|W_p^\alpha Q^m) , \quad c=c(m,\alpha,p) .$$

Следовательно,

$$\|\mathbb{T}\|_2^2=\int_Z |T(x,y)|^2 p(dx)\tau(dy)\le$$

$$\le c^2\int_Y N^2(T(\cdot,y)|W_p^\alpha Q^m)\tau(dy)=c^2N^2(T|L_2(\tau)YW_p^\alpha Q^m).$$

Тем более,

$$s_1(\mathbb{T})\le\|\mathbb{T}\|_2\le cN(T|L_2(\tau)YW_p^\alpha Q^m). \qquad (3.7)$$

Фиксируем, далее, $n\geq 1$ и воспользуемся теоремой 2.3, полагая в ее условии $q=2$, $r=1$. Согласно этой теореме, для данной меры $p\in S\mathfrak{M}_1 Q^m$ найдется такое разбиение Ξ куба Q^m на кубы, что $|\Xi|\le n$ и для любой функции $f\in W_p^\alpha Q^m$ справедливо неравенство

$$N(f-P_\Xi f|L_2(p)Q^m)\le C_3 n^{-\gamma}\overset{\circ}{N}(f|W_p^\alpha Q^m), \qquad (3.8)$$

где C_3 – постоянная из (2.4). Положим в (3.8) $f=T(\cdot,y)$ и обозначим $T_1(\cdot,y)=P_\Xi T(\cdot,y)$. Тогда

$$N^2(T-T_1|L_2(p)Q^m)\le C_3^2 n^{-2\gamma}\overset{\circ}{N}{}^2(T(\cdot,y)|W_p^\alpha Q^m).$$

Интегрируя по мере τ, получаем неравенство

$$N^2(T-T_1|L_2(\mu)Z)\le C_3^2 n^{-2\gamma}\overset{\circ}{N}{}^2(T|L_2(\tau)YW_p^\alpha Q^m). \qquad (3.9)$$

Разбиение Ξ зависит лишь от n и от меры p; от y оно не зависит. Следовательно, T_1 – вырожденное ядро, и

$$\operatorname{rang}\mathbb{T}_1\le\operatorname{rang}P_\Xi=|\Xi|\nu\le n\nu, \quad \nu=\nu(\alpha,m). \qquad (3.10)$$

Из (3.9) и (3.10) согласно лемме 3.1 получаем оценку:

$$s_{2n\nu}(\mathbb{T})\le C_3 n^{-(\gamma+\frac{1}{2})}\overset{\circ}{N}(T|L_2(\tau)YW_p^\alpha Q^m). \qquad (3.11)$$

Так как последовательность $\{s_n(\mathbb{T})\}$ – невозрастающая, то из неравенств (3.7) (3.11) вытекает (3.4) /при $r=1$ /. При этом постоянная C в оценке (3.4), очевидно, зависит только от m, α, p . ▨.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3.3. Считаем, что $\rho \in S\mathfrak{M}_r Q^m$. По теореме вложения

$$\int_{Q^m} |T(x,y)|^2 \rho(dx) = \int_{Q^m} |T(x,y)|^2 \frac{d\rho}{dx}\, dx \le$$

$$\le \left(\int_{Q^m} |T(x,y)|^{2r'} dx \right)^{1-r^{-1}} \le c^2 N^2 (T(\cdot,y) | W_p^\alpha Q^m) .$$

Отсюда следует (3.7). Далее, как и при доказательстве теоремы 3.2, воспользуемся теоремой 2.3, в условиях которой положим $q=2$. Отметим, что при $r>1$ условие (2.2) выполнено. Согласно теореме 2.3, по любому $n \geqslant 1$ находим такое /зависящее лишь от меры $\rho \in S\mathfrak{M}_r Q^m$ / разбиение Ξ куба Q^m на кубы, что $|\Xi| \le n$ и для любой функции $f \in W_p^\alpha Q^m$ выполнено (3.8). Дальнейшие рассуждения дословно повторяют конец доказательства теоремы 3.2. ▨ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3.4 отличается от доказательства предыдущих теорем двумя обстоятельствами. Во-первых, теперь используется теорема вложения с предельным показателем, которая остается справедливой для функций класса $\overset{\circ}{W}{}_p^\alpha \mathbb{R}^m$. Во-вторых, приближающее ядро строится на основании теоремы 2.23.

Считая $\rho \in S\mathfrak{M}_r \mathbb{R}^m$, находим по неравенству Гельдера:

$$\int_{\mathbb{R}^m} |T(x,y)|^2 \rho(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} |T(x,y)|^2 \frac{d\rho}{dx}\, dx \le \left[\int_{\mathbb{R}^m} |T(x,y)|^{2r'} dx \right]^{1-r^{-1}} . \tag{3.12}$$

В силу (3.6) показатель $2r' = 2(1-r^{-1})^{-1}$ совпадает с предельным, а потому

$$\left[\int_{\mathbb{R}^m} |T(x,y)|^{2r'} dx \right]^{1-r^{-1}} \le c^2 N^2 (T(\cdot,y) | \overset{\circ}{W}{}_p^\alpha \mathbb{R}^m).$$

Отсюда и из (3.12) получаем, что

$$s_1(\mathbb{T}) \le c N(T | L_2(\tau) Y \overset{\circ}{W}{}_p^\alpha \mathbb{R}^m) . \tag{3.13}$$

Воспользуемся теоремой 2.23 /при $q=2$ /. Согласно этой теореме для данной меры $\rho \in S\mathfrak{M}_r \mathbb{R}^m$ по любому $n \geq 1$ найдутся куб Q и покрытие его H кубами, такие что $|H| \leq n\varkappa_m$ и для любой $f \in \overset{\circ}{W}{}^\alpha_p \mathbb{R}^m$

$$N(f-K_H f | L_2(\rho)\mathbb{R}^m) \leq C_7 n^{-\gamma} N(f | \overset{\circ}{W}{}^\alpha_p \mathbb{R}^m). \tag{3.14}$$

Положим в (3.14) $f = T(\cdot, y)$ и обозначим $T_1(\cdot, y) = K_H T(\cdot, y)$. Ясно, что

$$\operatorname{rang} \mathbb{T}_1 \leq \operatorname{rang} K_H \leq |H| \nu \leq \varkappa_m n \nu, \qquad \nu = \nu(\alpha, m). \tag{3.15}$$

Из (3.14), возводя в квадрат и интегрируя по мере τ, находим:

$$N(T-T_1 | L_2(\mu) Z) \leq C_7 n^{-\gamma} N(T | L_2(\tau) Y \overset{\circ}{W}{}^\alpha_p \mathbb{R}^m). \tag{3.16}$$

Из (3.15), (3.16), согласно лемме 3.1,

$$s_{2\varkappa_m n \nu}(\mathbb{T}) \leq C_7 n^{-(\gamma + 1/2)} N(T | L_2(\tau) Y \overset{\circ}{W}{}^\alpha_p \mathbb{R}^m).$$

Отсюда и из (3.13) следует неравенство (3.4). ▨ .

3. Следствия основных теорем. Признаки ядерности. Прежде всего рассмотрим случай, когда в условиях теоремы 3.2 или 3.3 $X = Q$ – произвольный куб в $\mathbb{R}^m$. Из неравенства (3.11), используя однородность полунормы $\overset{\circ}{N}(\cdot | W^\alpha_p)$, нетрудно заключить, что для чисел $s_n(\mathbb{T})$ при $n \geq 2\nu(\alpha; m)$ сохраняется оценка вида (3.4), с добавлением в правой части оценки множителя $|Q|^{\alpha m^{-1} - p^{-1}}$ в условиях теоремы 3.2 и множителя $|Q|^{(1-r^{-1})2^{-1}}$ в условиях теоремы 3.3. При оценке $s_1(\mathbb{T})$, в соответствии с (3.7), в правой части неравенства стоит норма $N(\cdot | W^\alpha_p Q)$, не обладающая свойством однородности. Она, однако, при больших значениях $|Q|$ имеет тот же порядок роста, что и полунорма $\overset{\circ}{N}(\cdot | W^\alpha_p Q)$. Поэтому справедлив следующий результат.

Следствие 3.5. Пусть $X = Q$ – произвольный куб в $\mathbb{R}^m$ и пусть выполнены условия теоремы 3.2 или 3.3 с заменой Q^m на Q. Тогда для s-чисел операторов (3.1), (3.2) справедлива оценка (3.4) /в условиях теоремы 3.2 - при $r=1$ / с постоянной C, зависящей от размера куба. При $|Q|\geq 1$ в качестве этой постоянной можно принять[ж] $c(\alpha, m, p, r)|Q|^{\sigma}$, где $\sigma=\alpha m^{-1}-p^{-1}$ при $r=1$ и $\sigma=(1-r^{-1})/2$ при $r>1$. Δ.

Несколько иначе обстоит дело при $p\alpha<m$. Если $X=Q$ - m-мерный куб с центром в точке $x=0$, то справедлива оценка (3.4) с заменой в правой части неравенства нормы N однородной нормой $\hat{N}$ вида (2.31). При этом постоянная в оценке не зависит от размера куба Q. В самом деле, доказательство теоремы 3.4 можно тогда полностью сохранить; лишь ссылку на теорему 2.23 нужно заменить ссылкой на теорему 2.17. Кроме того, при оценке $s_1(T)$ следует учесть, что при использовании нормы $\hat{N}(\cdot|W_p^{\alpha}Q)$ постоянная в теореме вложения с предельным показателем не зависит от Q. Таким образом, справедливо

Следствие 3.6. Пусть Q - m-мерный куб с центром в точке $x=0$. Пусть выполнены условия теоремы 3.4 с заменой $\overset{\circ}{W}{}_p^{\alpha}\mathbb{R}^m$ на $W_p^{\alpha}Q$. Тогда оценка (3.4) с заменой в правой части множителя $N(T|\ldots)$ на множитель $\hat{N}(T|L_2(\tau)YW_p^{\alpha}Q)$ справедлива с не зависящей от $|Q|$ постоянной. Δ.

Отметим, что для куба с центром x_0 результат следствия 3.6 сохраняет силу, если в выражении (2.31) для нормы $\hat{N}$ заменить второе слагаемое на $\int_Q|x-x_0|^{-p\alpha}|u|^p dx$.

Разумеется, в условиях следствия 3.6 можно получить оценку (3.4) без замены нормы N на $\hat{N}$. При этом постоянная в оценке может быть выбрана одной и той же при всех $|Q|\geq 1$; однако, при $|Q|\to 0$ эта постоянная неограниченно растет.

Предположим теперь, что Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^m$ и $\bar{\Omega}\subset Q$, где Q - m-мерный куб. Предположим, что существует линейный непрерывный оператор продолжения Π, переводящий $W_p^{\alpha}\Omega$ в $W_p^{\alpha}Q$. /Такой оператор заведомо существует, если $\partial\Omega\in C^1$ /. Пусть выполнены условия одной из теорем 3.2 - 3.4 с заменой X на Ω. Определим в Q меру $\tilde{\rho}$ соотношением $\tilde{\rho}(\delta)=$ $=\rho(\delta\cap\Omega)$ и введем ядро $\tilde{T}(\cdot,y)=\Pi T(\cdot,y)$; при этом, оче-

---

[ж] При $|Q|\to 0$ постоянная в (3.4) также неограниченно растет.

видно,

$$N(\tilde{T}|L_2(\tau)Y W_p^\alpha Q) \le \|\Pi\| N(T|L_2(\tau)Y W_p^\alpha \Omega).$$

Пусть $\tilde{\mathbb{T}}$ - оператор вида (3.I) с ядром $\tilde{T}$, отображающий $L_2(\tilde{\rho})Q$ в $L_2(\tau)Y$. Ясно, что между пространствами $L_2(\tilde{\rho})Q$ и $L_2(\rho)\Omega$ существует естественная изометрия, при которой операторы $\tilde{\mathbb{T}}, \mathbb{T}$ унитарно эквивалентны /и, следовательно, их s-числа совпадают/. Отсюда видно, что оценка вида (3.4) для чисел $s_n(\mathbb{T})$ сохранится при $X=\Omega$; при этом справа появится дополнительный множитель $\|\Pi\|$, зависящий от области Ω. Далее, с помощью покрытий и связанных с ними разложений единицы полученный результат обычным образом распространяется на многообразия. Таким образом, справедливо

Следствие 3.7. Пусть X - m-мерное гладкое компактное многообразие или многообразие с краем*/. Пусть выполнены /с заменой Q^m или $\mathbb{R}^m$ многообразием X / условия одной из теорем 3.2 - 3.4. Тогда для s-чисел операторов $\mathbb{T}$, $\mathbb{T}'$ справедлива оценка (3.4) с постоянной $C=C(\alpha,\rho,X)$ /при $\rho\alpha=m$, $C=C(\alpha,\rho,r,X)$). △.

Замечание 3.8. Пусть в условиях теоремы 3.2 /или в условиях следствия 3.7 при $\rho\alpha>m$ / мера ρ сингулярна относительно m-мерной лебеговой меры. Тогда

$$s_n(\mathbb{T})=s_n(\mathbb{T}')=o(n^{-(\gamma+1/2)}).$$

Чтобы убедиться в этом, следует в доказательстве теоремы 3.2 выбрать разбиение Ξ в соответствии с теоремой 2.4 /вместо теоремы 2.3/. На случай многообразий результат переносится уже описанным способом. ▨.

Перейдем к обсуждению условий ядерности операторов (3.I), (3.2). Оценка (3.4) обеспечивает включение $\mathbb{T}, \mathbb{T}' \in \mathfrak{S}_1$

---

*/ Гладкость понимается в смысле принадлежности классу C^∞. В частности, рассматриваемый класс множеств фактически включает ограниченные области в $\mathbb{R}^m$ с гладкой границей. При $\rho\alpha<m$ можно было бы рассмотреть неограниченные области. Мы не будем на этом останавливаться.

лишь при $\gamma > 1/2$. В условиях теорем 3.3, 3.4 заведомо $\gamma \leq 1/2$, так что для получения признаков ядерности они бесполезны. В то же время теорема 3.2 /и следствия из нее/ приводит к признакам ядерности и к оценкам нормы $\|\mathbb{T}\|_1$ в классе γ_1, равномерным относительно всех конечных мер ρ и пространств с мерой (Y,τ).

При $p \geq 2$ условие $\gamma > 1/2$ означает $2\alpha > m$. Отсюда видно, что условие принадлежности ядра $T(\cdot, y)$ классу W_p^α при $p > 2$ не позволяет уточнить результат по сравнению с условием $T(\cdot, y) \in W_2^\alpha = H_\alpha$. Случай $p < 2$, как уже отмечалось, самостоятельного значения не имеет. Поэтому при формулировке признаков ядерности достаточно ограничиться случаем $p = 2$.

Из теоремы 3.2 и следствий 3.5, 3.7 прямо вытекает результат, содержащий в себе теорему 1.9.

Теорема 3.9. Пусть X – куб в $\mathbb{R}^m$, либо X – m-мерное гладкое компактное многообразие или многообразие с краем. Тогда для любой меры $\rho \in \mathfrak{M}_1 X$, любого пространства с мерой (Y,τ) и любой функции $T \in L_2(\tau) Y H_\alpha X$, $2\alpha > m$, операторы (3.1), (3.2) являются ядерными и имеет место оценка

$$\|\mathbb{T}\|_1 = \|\mathbb{T}^*\|_1 \leq C N(T | L_2(\tau) Y H_\alpha X) \sqrt{\rho(X)} \quad (2\alpha > m), \tag{3.17}$$

где постоянная $C = C(\alpha, X)$ не зависит от ρ, (Y,τ) и T. ▲.

Теорема 3.9 допускает распространение на некомпактный случай. Наиболее интересным здесь является случай $X = \mathbb{R}^m$, рассмотрением которого мы ограничимся.

Теорема 3.10. Пусть в условиях теоремы 3.9 $X = \mathbb{R}^m$. Тогда заключения теоремы 3.9 остаются в силе. При этом в оценке (3.17) можно принять $C(\alpha, \mathbb{R}^m) = C(\alpha, Q^m)$. ▲.

Для доказательства разложим пространство $\mathbb{R}^m$ в "решетку" единичных кубов Q_j, $j = 1, 2, \ldots$. Пусть $\mathbb{T}_j$ – оператор вида (3.1) с интегрированием по Q_j. Тогда

$$\|\mathbb{T}_j\|_1 \leq C N(T | L_2(\tau) Y H_\alpha Q_j) \sqrt{\rho(Q_j)}, \qquad C = C(\alpha, Q^m).$$

Отсюда

$$\|\mathbb{T}\|_1 \le \sum_j \|\mathbb{T}_j\|_1 \le C\left[\sum_j N^2(T|L_2(\tau)YH_\alpha Q_j)\right]^{1/2} \sqrt{\sum_j \rho(Q_j)} =$$

$$= C\left[\sum_j \int_Y N^2(T(\cdot,y)|H_\alpha Q_j)\tau(dy)\right]^{1/2} \sqrt{\rho(\mathbb{R}^m)} .$$

Остается заметить, что, в силу аддитивности квадрата нормы в L_2 и полуаддитивности снизу функционала $\overset{o}{N}{}^2(\cdot, H_\alpha)$, при почти всех $y \in Y$ оправедливо неравенство

$$\sum_j N^2(T(\cdot,y)|H_\alpha Q_j) \le N^2(T(\cdot,y)|H_\alpha \mathbb{R}^m). \blacksquare .$$

Основное свойство оценки (3.17) – ее равномерность относительно всевозможных конечных борелевских мер на X. Это свойство будет существенно использовано в дальнейшем /см. ниже п.6, в особенности – теорему 3.15/. Отметим, что оценки "индивидуальных" сингулярных чисел $s_n(\mathbb{T})$ в условиях теоремы 3.10, вообще говоря, невозможны.

4. <u>Обобщенные ядра ограниченных операторов</u>. Пусть $\mathfrak{H}_1 = L_2(\rho)X$, $\mathfrak{H}_2 = L_2(\tau)Y$, где, как и выше, (X,ρ), (Y,τ) – пространства с σ-конечной мерой; пусть $Z = X \times Y$, $\mu = \rho \times \tau$. Хорошо известна естественная изометрия между пространством операторов Гильберта-Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ и пространством функций $L_2(\mu)Z$: оператор $\mathbb{T}: \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$ принадлежит классу $\mathfrak{S}_2$ в том и только том случае, если он является интегральным оператором вида (3.1) с ядром $T \in L_2(\mu)Z$.
При этом

$$\|\mathbb{T}\|_2 = N(T|L_2(\mu)Z) .$$

Скалярное произведение операторов $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2 \in \mathfrak{S}_2$ выражается формулой

$$\langle \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2 \rangle = Tr\, \mathbb{T}_1 \mathbb{T}_2^* = \iint_{X\,Y} T_1(x,y)\overline{T_2(x,y)}\rho(dx)\tau(dy) \overset{def}{=\!=} \{T_1, T_2\} .$$

Так как при $p \le 2$ $\mathfrak{S}_p \subset \mathfrak{S}_2$, то всякий оператор $\mathbb{T} \in \mathfrak{S}_p$, $p \le 2$, является интегральным оператором /с ядром из $L_2(\mu)Z$ /. Обозначим через $\tilde{\mathfrak{S}}_p$ класс ядер, соответствующих операторам $\mathbb{T} \in \mathfrak{S}_p$, $1 \le p \le 2$. Класс $\tilde{\mathfrak{S}}_p$ можно рассматривать как банахово пространство с индуцированной нормой

$$N(T|\tilde{\mathcal{T}}_p)=\|\mathbb{T}\|_p .$$

Очевидно, $\tilde{\mathcal{T}}_2=L_2(\mu)\tau$; при $p\neq 2$ классы $\tilde{\mathcal{T}}_p$ не допускают простого аналитического описания.

Наша цель заключается в том, чтобы сопоставить ядро каждому оператору $\mathbb{A}\in\mathcal{R}(\mathcal{Y}_1,\mathcal{Y}_2)$. Это ядро будет, вообще говоря, "обобщенной функцией" - функционалом над классом $\tilde{\mathcal{T}}_1$, принимаемым за пространство "основных" функций.

Итак, пусть $\mathbb{A}$ - ограниченный оператор, отображающий $\mathcal{Y}_1$ в $\mathcal{Y}_2$. Сопоставим ему "обобщенное ядро" A , действующее на ядра $T\in\tilde{\mathcal{T}}_1$ по правилу

$$\{A,T\}\overset{def}{=\!=}\langle\mathbb{A},\mathbb{T}\rangle=Tr(\mathbb{A}\mathbb{T}^*) . \tag{3.18}$$

Класс всех обобщенных ядер A , соответствующих операторам $\mathbb{A}\in\mathcal{R}$, обозначим через $\tilde{\mathcal{R}}$ и будем рассматривать его как банахово пространство относительно нормы $N(A|\tilde{\mathcal{R}})=\|\mathbb{A}\|$.

Если $\mathbb{A}\in\mathcal{T}_2$ и A - его ядро /которое в этом случае является функцией из $L_2(\mu)\tau$ /, то для любого ядра $T\in\tilde{\mathcal{T}}_1$

$$\{A,T\}=\int\limits_X\int\limits_Y A(x,y)\overline{T(x,y)}p(dx)\tau(dy) . \tag{3:19}$$

Запись в виде интеграла будем употреблять для обозначения действий обобщенного ядра A на "основное" ядро T и в общем случае.

Если T - вырожденное ядро ранга 1, т.е. $T(x,y)=\overline{f(x)}g(y)$ / $f\in\mathcal{Y}_1$, $g\in\mathcal{Y}_2$ /, то

$$\{A,T\}=(\mathbb{A}f,g).$$

Пусть, в частности, $f=\chi_\delta$, $g=\chi_\partial$ где $\delta\subset X$, $\partial\subset Y$ - измеримые подмножества конечной меры, и $\chi_{(\cdot)}$ - характеристическая функция соответствующего множества. Положим $\Delta=\delta\times\partial$ и $T_\Delta(x,y)=\chi_\delta(x)\chi_\partial(y)$. Сопоставим каждому ограниченному оператору $\mathbb{A}$ функцию измеримых прямоугольников

$$F_{\mathbb{A}}(\Delta)=\{A,T_\Delta\}=(\mathbb{A}\chi_\delta,\chi_\partial) .$$

Используя обозначение (3.19), находим, что

$$F_{A}(\Delta)=\iint\limits_{\delta\,\delta} A(x,y)\rho(dx)\tau(dy).$$

Функция F_A конечно-аддитивна; она, вообще говоря, не является функцией ограниченной вариации. Обобщенное ядро A можно рассматривать как "производную" функции F_A относительно меры μ.

Пусть теперь $\mathfrak{I}$ – какой-либо класс ограниченных операторов, отображающих $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$. Класс обобщенных ядер A, соответствующих всевозможным операторам $A\in\mathfrak{I}$, обозначим через $\tilde{\mathfrak{I}}$. Если $\mathfrak{I}$ есть банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_{\mathfrak{I}}$, то класс $\tilde{\mathfrak{I}}$ также будем рассматривать как банахово пространство с нормой $N(A|\tilde{\mathfrak{I}})=\|A\|_{\mathfrak{I}}$. Будем предполагать, что пространство $\tilde{\mathfrak{I}}$ инвариантно относительно комплексного сопряжения: если $A\in\tilde{\mathfrak{I}}$, то $\bar{A}\in\tilde{\mathfrak{I}}$, причем

$$N(\bar{A}|\tilde{\mathfrak{I}})=N(A|\tilde{\mathfrak{I}}). \tag{3.20}$$

Примерами таких пространств являются классы $\tilde{\mathfrak{I}}_p$, $1\le p\le\infty$, $\tilde{\mathfrak{I}}^{(\beta)}$, $\tilde{\mathring{\mathfrak{I}}}^{(\beta)}$, $0<\beta<1$, соответствующие пространствам $\mathfrak{I}_p$, $\mathfrak{I}^{(\beta)}$, $\mathring{\mathfrak{I}}^{(\beta)}$, введенным в гл. I. Заметим, что $\tilde{\mathfrak{I}}^{(\beta)}\subset L_2(\mu)Z$ при $\beta>1/2$; при $\beta\le 1/2$ ядра класса $\tilde{\mathfrak{I}}^{(\beta)}$ являются, вообще говоря, обобщенными функциями.

5. Мультипликаторы в классах ядер[ж/]. Рассматривается следующая общая задача. Пусть $\tilde{\mathfrak{I}}$ – какое-либо из введенных в п. 4 пространств ядер или обобщенных ядер. Функцию φ, определенную на множестве Z и μ-измеримую, назовем мультипликатором в $\tilde{\mathfrak{I}}$, если линейный оператор умножения на φ непрерывен в $\tilde{\mathfrak{I}}$. Множество всех мультипликаторов в $\tilde{\mathfrak{I}}$ обозначим через $\mathfrak{M}(\mathfrak{I})$ и будем рассматривать его как линейное нормированное пространство. Норма элемента $\varphi\in\mathfrak{M}(\mathfrak{I})$ /мы обозначим ее через $[\varphi]_{\mathfrak{I}}$/ есть, по определению, норма оператора умножения на φ как линей-

---

ж/ Теория мультипликаторов для ядер интегральных операторов включается в более общую теорию двойных операторных интегралов [35] – [37], в рамках которой рассматриваемые факты получают наиболее полное истолкование. В частности, подробное изложение материала настоящего пункта можно в более общем виде найти в [36].

ного оператора в $\tilde{\mathfrak{T}}$. Вместо $[\varphi]_{\mathfrak{T}_p}$, $1 \le p \le \infty$, будем писать $[\varphi]_p$, вместо $[\varphi]_{\mathfrak{T}^{(\beta)}}$, $0 < \beta < 1$, будем писать $[\varphi]_{(\beta)}$. Проблема мультипликаторов в классах ядер состоит в теоретико-функциональном описании пространств $\mathcal{M}(\mathfrak{T})$.

Мультипликатор $\varphi \in \mathcal{M}(\mathfrak{T})$ определяет особое "преобразование множителей" M_φ в классе операторов $\mathfrak{T}$: если $\mathbb{T} \in \mathfrak{T}$ и T - его /обобщенное/ ядро, т.е.

$$(\mathbb{T}u)(y) = \int_X T(x,y)u(x)\rho(dx),$$

то $\mathbb{Q} = M_\varphi \mathbb{T}$ - оператор с /обобщенным/ ядром $Q(x,y) = \varphi(x,y)T(x,y)$, т.е.

$$(\mathbb{Q}u)(y) = \int_X \varphi(x,y)T(x,y)u(x)\rho(dx).$$

Очевидно, норма преобразования M_φ как оператора в $\mathfrak{T}$ совпадает с $[\varphi]_{\mathfrak{T}}$.

Класс $\mathcal{M}(\mathfrak{T}_2)$ допускает полное описание, которое прямо следует из соотношения $\tilde{\mathfrak{T}}_2 = L_2(\mu)\mathfrak{Z}$.

Теорема 3.II. Имеет место изометрический изоморфизм

$$\mathcal{M}(\mathfrak{T}_2) = L_\infty(\mu)\mathfrak{Z}. \quad \vartriangle.$$

Для других пространств классы $\mathcal{M}(\mathfrak{T})$ не имеют столь простого описания. Более того, требуется уточнение определений, поскольку речь идет об умножении для обобщенных функций. Впрочем, этот вопрос не возникает при $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_p$, $1 \le p \le 2$ и $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}^{(\beta)}$, $1/2 < \beta < 1$, поскольку для этих классов ядра операторов суть функции из $L_2(\mu)\mathfrak{Z}$. Пусть теперь $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_p$, $2 < p \le \infty$, . На плотном в $\mathfrak{T}_p$ классе $\mathfrak{T}_2$ оператор M_φ определяется посредством поточечного умножения. Если при этом M_φ ограничен как оператор в $\mathfrak{T}_p$, то он распространяется на все пространство $\mathfrak{T}_p$ по непрерывности. Тогда для $A \in \tilde{\mathfrak{T}}_p$ под произведением φA по определению понимается /обобщенное/ ядро оператора $M_\varphi \mathbb{A} \in \mathfrak{T}_p$.

Классы $\mathcal{M}(\mathfrak{T}_p)$ инвариантны относительно комплексного сопряжения: если $\varphi \in \mathcal{M}(\mathfrak{T}_p)$, то $\bar{\varphi} \in \mathcal{M}(\mathfrak{T}_p)$ и $[\bar{\varphi}]_p = [\varphi]_p$. Действительно, в соответствии с (3.20),

$$[\bar{\varphi}]_p = \sup_{T \in \tilde{\mathfrak{T}}_p} \frac{N(\bar{\varphi} T | \tilde{\mathfrak{T}}_p)}{N(T | \tilde{\mathfrak{T}}_p)} = \sup_{T \in \tilde{\mathfrak{T}}_p} \frac{N(\varphi \bar{T} | \tilde{\mathfrak{T}}_p)}{N(\bar{T} | \tilde{\mathfrak{T}}_p)} = [\varphi]_p \, .$$

Отсюда и из ссотношения двойственности $(\mathfrak{T}_p)^* = \mathfrak{T}_{p'}$, $p>1$, /см. (I.38)/непосредственно следует, чтс

$$\mathcal{M}(\mathfrak{T}_p) = \mathcal{M}(\mathfrak{T}_{p'}) \, , \quad [\varphi]_p = [\varphi]_{p'} \, , \qquad 1 < p \le \infty \, . \tag{3.21}$$

Обсудим теперь вопрсс о классе $\mathcal{M}(\mathfrak{R})$. Псскольку класс $\mathfrak{T}_2$ не плотен в $\mathfrak{R}$, мы вынуждены полсжить здесь состношение двсйственнссти $(\mathfrak{T}_1)^* = \mathfrak{R}$ в оснсву определения. Именно, пусть $\varphi \in \mathcal{M}(\mathfrak{T}_1)$; рассмотрим непрерывное в прсстранстве $\mathfrak{T}_1$ линейное преобразсвание $M_{\bar{\varphi}}$. Сопряженное к нему линейное преобразование $(M_{\bar{\varphi}})^*$ непрерывно в $\mathfrak{R}$. Для $A \in \tilde{\mathfrak{R}}$ под прсизведением φA будем псnимать /обсбщеннсе/ ядро ограниченнсго линейного оператора $(M_{\bar{\varphi}})^* A$.

Очевидно, для ядер $A \in \tilde{\mathfrak{T}}_2$ дело сводится к поточечному умнсжению. Таким образом, это определение согласовано с предыдущим.

Лемма 3.I2. Классы мультипликаторсв в $\tilde{\mathfrak{T}}_1$, $\tilde{\mathfrak{R}}$ и $\tilde{\mathfrak{T}}_\infty$ совпадают:

$$\mathcal{M}(\mathfrak{T}_1) = \mathcal{M}(\mathfrak{R}) = \mathcal{M}(\mathfrak{T}_\infty) \, , \qquad [\varphi]_1 = [\varphi]_{\mathfrak{R}} = [\varphi]_\infty \, . \qquad \triangle . \tag{3.22}$$

В самом деле, состнсшение $\mathcal{M}(\mathfrak{T}_1) = \mathcal{M}(\mathfrak{R})$ /и ссвпадение нсрм/ прямо следует из приведенного определения класса $\mathcal{M}(\mathfrak{R})$. Остальное вытекает из (3.2I) при $p = \infty$. ▨ .

В дальнейшем условимся обозначать классы (3.22) символом $\mathcal{M}$ (без индекса), а нсрму мультипликатора $\varphi \in \mathcal{M}$ – через $[\varphi]$.

Для классов $\tilde{\mathfrak{T}}^{(\beta)}$, $\beta \le 1/2$, прсстранство мультипликаторсв определяется таким же образом, чтс и для классов $\tilde{\mathfrak{T}}_p$, $2 < p \le \infty$. Для более широких пространств $\tilde{\mathfrak{T}}^{(\beta)}$ этот путь не годится, и прихсдится испсльзовать некоторое состношение двойственности. Мы не будем входить здесь в дальнейшие пояснения, отсылая читателя к работе[ж/] [36] . Укажем лишь, что при таком определении оказывается

$$\mathcal{M}(\overset{\circ}{\gamma}^{(\beta)})=\mathcal{M}(\gamma^{(\beta)}), \quad [\varphi]_{(\beta)}=[\varphi]_{\overset{\circ}{\gamma}^{(\beta)}}, \qquad 0<\beta<1. \tag{3.23}$$

В заключение сформулируем следующее утверждение.

Лемма 3.13. а/ Имеют место соотношения (3.21), (3.23).
б/ Имеют место непрерывные вложения:

$$\mathcal{M}\subset\mathcal{M}(\gamma_p)\subset\mathcal{M}(\gamma_2),$$

$$(\mu)\text{-}\sup|\varphi|=[\varphi]_2\le[\varphi]_p\le[\varphi] \ . \qquad 1\le p\le\infty .$$

в/ Имеют место непрерывные вложения

$$\mathcal{M}\subset\mathcal{M}(\gamma^{(\beta)})\subset\mathcal{M}(\gamma_2),$$

$$[\varphi]_2\le[\varphi]_{(\beta)}\le[\varphi] \ , \qquad 0<\beta<1. \qquad \blacktriangle .$$

Утверждение а/ леммы обсуждалось выше. Два другие утверждения следуют из интерполяционных соображений, которые подробно освещены в [36] . ▨ .

Леммы 3.12, 3.13 показывают, что включение $\varphi\in\mathcal{M}=\mathcal{M}(\gamma_1)$ влечет за собой включение $\varphi\in\mathcal{M}(\gamma)$, где γ - любое из рассмотренных выше пространств $\mathcal{R}, \gamma_p, \gamma^{(\beta)}$.

6. <u>Описание класса $\mathcal{M}$</u> . Теперь будет получен критерий принадлежности функции φ классу мультипликаторов $\mathcal{M}$. Этот критерий формулируется в терминах ядерности некоторых интегральных операторов. Определим интегральные операторы, о которых будет идти речь.

Пусть заданы произвольные функции $a\in SL_2(\rho)X$, $b\in SL_2(\tau)Y$. Пусть ρ_a - мера на подмножествах $\delta\subset X$, определяемая соотношением $\rho_a(\delta)=\int_\delta|a(x)|^2\rho(dx)$, τ_b - аналогичная мера на подмножествах в Y . Очевидно, $\rho_a\in S\mathfrak{M}_1X$, $\rho_b\in S\mathfrak{M}_1Y$. Каждой функции $\varphi\in L_\infty(\mu)Z$ сопоставим

ж/ В [36] показано /в несколько более общих терминах/, как можно определить пространство мультипликаторов для любого симметрично нормированного идеала $\gamma\subset\mathcal{R}$, сопряженного к какому-либо сепарабельному идеалу.

интегральный оператор $\Phi_{ab}: L_2(\rho_a)X \to L_2(\tau_b)Y$,

$$(\Phi_{ab} f)(y) = \int_X \varphi(x,y) f(x) \rho_a(dx), \tag{3.24}$$

а также оператор $\hat{\Phi}_{ab}: L_2(\rho)X \to L_2(\tau)Y$,

$$(\hat{\Phi}_{ab} u)(y) = \int_X b(y)\varphi(x,y)\overline{a(x)}u(x)\rho(dx). \tag{3.25}$$

Операторы Φ_{ab}, $\hat{\Phi}_{ab}$ заведсмо принадлежат классу $\mathcal{S}_2$.

Между операторами Φ_{ab}, $\hat{\Phi}_{ab}$ имеется тесная связь.

Лемма 3.14. Сингулярные числа операторов Φ_{ab}, $\hat{\Phi}_{ab}$ совпадают. ▲.

Доказательство. Определим оператор $\mathcal{U}_a: f \mapsto u = af$, изометрически отображающий пространство $L_2(\rho_a)X$ на некоторое подпространство $\mathfrak{A}$ в $L_2(\rho)X$. Аналогично оператор $V_b: g \mapsto v = bg$ изометрически отображает $L_2(\tau_b)Y$ на некоторое подпространство $\mathfrak{B}$ в $L_2(\tau)Y$. Непосредственно проверяется, что $\hat{\Phi}_{ab}$ обращается в нуль на $L_2(\rho)X \ominus \mathfrak{A}$, а область значений $\hat{\Phi}_{ab}$ лежит в $\mathfrak{B}$. Кроме того,

$$(\Phi_{ab} f, g) = (\hat{\Phi}_{ab} \mathcal{U}_a f, V_b g), \qquad f \in L_2(\rho_a)X, \quad g \in L_2(\tau_b)Y.$$

Таким образом, сужение оператора $\hat{\Phi}_{ab}$ на $\mathfrak{A}$ унитарно эквивалентно оператору Φ_{ab}. ▨.

Теперь мы сформулируем основное утверждение настоящего пункта.

Теорема 3.15. Функция $\varphi \in L_\infty(\mu)\mathcal{Z}$ принадлежит классу $\mathcal{M}$ в том и тольке том случае, если для любых $a \in SL_2(\rho)X$, $b \in SL_2(\tau)Y$ интегральный оператор Φ_{ab} является ядерным и

$$K_\varphi \stackrel{def}{=} \sup_{a,b} \|\Phi_{ab}\|_1 < \infty. \tag{3.26}$$

При этом справедливо равенство

$$[\varphi] = K_\varphi. \qquad \blacktriangle.$$

/Разумеется, в формулировке операторы Φ_{ab} можно заменить на операторы $\hat{\Phi}_{ab}$ /.

Доказательство. 1/ Пусть $\varphi \in \mathcal{M}$ и $\mathbb{T}$ – произвольный оператор ранга 1, $\|\mathbb{T}\| = 1$. Ядро T оператора $\mathbb{T}$ можно представить в виде

$$T(x,y) = \overline{a(x)} b(y), \quad a \in SL_2(\rho)X, \quad b \in SL_2(\tau)Y.$$

Очевидно, оператор $M_\varphi \mathbb{T}$ совпадает с оператором (3.25), откуда

$$\|\hat{\Phi}_{ab}\|_1 = \|M_\varphi \mathbb{T}\|_1 \le [\varphi] \|\mathbb{T}\|_1 = [\varphi].$$

Следовательно,

$$K_\varphi \le [\varphi] \quad . \tag{3.27}$$

2/ Пусть выполнено условие (3.26) и пусть $\mathbb{T}$ – произвольный оператор конечного ранга. Каноническому разложению (1.22) соответствует разложение ядра

$$T(x,y) = \sum_k s_k T_k(x,y), \qquad T_k(x,y) = \overline{\omega_k(x)} \theta_k(y)$$

/сумма конечна; $\|\omega_k\| = \|\theta_k\| = 1$ /. Так как $M_\varphi \mathbb{T}_k = \hat{\Phi}_{\omega_k, \theta_k}$, то

$$\|M_\varphi \mathbb{T}\|_1 \le \sum_k s_k \|\hat{\Phi}_{\omega_k \theta_k}\|_1 \le K_\varphi \sum_k s_k = K_\varphi \|\mathbb{T}\|_1 .$$

Таким образом, $[\varphi] \le K_\varphi$. Сопоставляя это неравенство и (3.27), убеждаемся в справедливости теоремы. ▨ .

7. <u>Аналитические результаты в проблеме множителей</u>. Теорема 3.15 в сочетании с результатами п. 3 приводит к конкретным аналитическим признакам принадлежности функции φ классу $\mathcal{M}$.

Теорема 3.16. Пусть $X = Q^m$, либо $X = \mathbb{R}^m$, либо X – m-мерное гладкое компактное многообразие или многообразие с краем, и ρ – борелевская σ-конечная мера на X. Тогда при $2\alpha > m$ имеет место непрерывное вложение

$$L_\infty(\tau) Y H_\alpha X \subset \mathcal{M} \qquad (2\alpha > m).$$

Для $\varphi \in L_\infty(\tau) Y H_\alpha X$ справедлива оценка

$$[\varphi] \le C N(\varphi | L_\infty(\tau) Y H_\alpha X)$$

с постоянной $C = C(m, \alpha, X)$, не зависящей от меры ρ и от пространства (Y, τ). Результат сохраняется при замене ролей пространств X и Y. ▲.

Доказательство. Воспользуемся теоремами 3.9, 3.10 для оценки ядерной нормы операторов Φ_{ab}. Мы получим:

$$\|\Phi_{ab}\|_1^2 \le C^2 \int_Y N^2(\varphi(\cdot, y) | H_\alpha X) \tau_b(dy) \le$$

$$\le C^2 N^2(\varphi | L_\infty(\tau) Y H_\alpha X).$$

Таким образом,

$$K_\varphi \le C N(\varphi | L_\infty(\tau) Y H_\alpha X). ▨.$$

В соответствии с леммой 3.13, в условиях теоремы 3.16 функция φ принадлежит также всем остальным рассматривавшимся в п. 5 классам $\mathcal{M}(\gamma)$. Менее ограничительные признаки включения $\varphi \in \mathcal{M}(\gamma)$, в которых требования на функцию φ зависят от класса γ, можно получить с помощью более продвинутой интерполяционной техники. Приведем без доказательства один результат в этом направлении[ж].

Теорема 3.17. Пусть $X = Q^m$, либо X - m -мерное гладкое компактное многообразие или многообразие с краем; ρ - борелевская σ -конечная мера на X; $p\alpha > m \ge 2\alpha$. Тогда имеют место непрерывные вложения /с соответствующей оценкой норм/

$$L_\infty(\tau) Y W_p^\alpha X \subset \mathcal{M}(\gamma_r), \qquad |r^{-1} - 1/2| < \alpha/m;$$

$$L_\infty(\tau) Y W_p^\alpha X \subset \mathcal{M}(\gamma^{(\beta)}), \qquad |\beta - 1/2| < \alpha/m. \quad ▲.$$

8. <u>Приложение к теории псевдодифференциальных операторов</u>.

Пусть Ξ_m - эвклидово пространство, двойственное к $\mathbb{R}^m$; $F: L_2\mathbb{R}^m \to L_2\Xi_m$ - оператор преобразования Фурье. Псевдодифференциальными операторами /ПДО/ называются операторы вида

$$(Au)(x) = (2\pi)^{-m/2} \int_{\Xi_m} a(\xi, x) e^{i\xi x} (Fu)(\xi) d\xi. \qquad (3.28)$$

[ж] Доказательство, проведенное в рамках теории двойных операторных интегралов, имеется в [36].

Функция a называется символом ПДО (3.28). При некоторых условиях на символ a интегралу (3.28) удается придать смысл и установить, что оператор $\mathbb{A}$ ограничен в пространстве $L_2\mathbb{R}^m$. Мы покажем, что задача об условиях ограниченности ПДО в $L_2\mathbb{R}^m$ может быть рассмотрена в рамках изложенной выше проблемы мультипликаторов. Применение теоремы 3.16 приводит к содержательным признакам ограниченности. Естественно, что получаемые на этом пути признаки ограниченности будут иметь мультипликаторный характер.

Наряду с оператором (3.28) рассмотрим действующий из пространства $L_2\Xi_m$ в $L_2\mathbb{R}^m$ оператор

$$(\mathring{\mathbb{A}} f)(x)=\int_{\Xi_m} \mathring{A}(\xi,x) f(\xi) d\xi \tag{3.29}$$

с ядром

$$\mathring{A}(\xi,x)=(2\pi)^{-m/2} a(\xi,x) e^{i\xi x}. \tag{3.30}$$

Ясно, что $\mathbb{A}=\mathring{\mathbb{A}}F$; отсюда вытекает, что оба оператора ограничены одновременно.

Пусть $\mathbb{A}$ - произвольный ограниченный оператор в $L_2\mathbb{R}^m$. Тогда оператор $\mathring{\mathbb{A}}=\mathbb{A}F^*$ непрерывен как оператор из $L_2\Xi_m$ в $L_2\mathbb{R}^m$. Формально записывая его обобщенное ядро $\mathring{A}$ в виде (3.30), мы получаем возможность трактовать каждый оператор $\mathbb{A}\in\mathcal{R}(L_2\mathbb{R}^m)$ как ПДО с обобщенным символом. Все последующие рассмотрения относятся и к обобщенным символам.

Пусть φ - мультипликатор класса $\mathcal{M}=\mathcal{M}(\mathcal{R})$, где $\mathcal{R}=\mathcal{R}(L_2\Xi_m,\ L_2\mathbb{R}^m)$. Из сделанных выше замечаний с очевидностью следует, что если $a(\xi,x)$ - символ /возможно, обобщенный/ ПДО, ограниченного в $L_2\mathbb{R}^m$, то функция $\varphi(\xi,x)a(\xi,x)$ также является символом ограниченного ПДО. Это дает основание говорить, что функции $\varphi\in\mathcal{M}$ являются мультипликаторами в классе символов ПДО, ограниченных в $L_2\mathbb{R}^m$. В частности, так как функция $a\equiv 1$ является символом тождественного оператора, то ПДО с символом $\varphi\in\mathcal{M}$ ограничен в $L_2\mathbb{R}^m$.

Результаты, полученные в п.п. 6, 7, могут быть теперь переформулированы как утверждения о мультипликаторах для символов ПДО.

Начнем с формулировки результата общего характера, вытекающего из теоремы 3.15.

Теорема 3.18. Функция $\varphi \in L_\infty(\Xi_m \times \mathbb{R}^m)$ является мультипликатором в классе символов ПДО, ограниченных в $L_2\mathbb{R}^m$, в том и только том случае, если для любых функций $a \in SL_2\Xi_m$, $b \in SL_2\mathbb{R}^m$ оператор $\Phi_{ab}: L_2\Xi_m \to L_2\mathbb{R}^m$ вида (3.24) является ядерным и выполнено условие (3.26). ▲ .

Аналитические результаты о мультипликаторах следуют из теоремы 3.16.

Теорема 3.19. Пусть $2\alpha > m$ и $\varphi \in L_\infty\mathbb{R}^m H_\alpha \Xi_m$ либо $\varphi \in L_\infty \Xi_m H_\alpha \mathbb{R}^m$. Тогда функция φ является мультипликатором в классе символов ПДО, ограниченных в $L_2\mathbb{R}^m$. В частности, при указанных условиях ПДО с символом φ ограничен в $L_2\mathbb{R}^m$. ▲ .

В добавлении 4 к настоящей лекции будут указаны некоторые другие мультипликаторные признаки ограниченности ПДО, также вытекающие из теоремы 3.18, но основанные на более точных условиях ядерности интегральных операторов.

9. <u>Случай однородного мультипликатора</u>. Рассмотрим случай, когда φ – однородная функция нулевой степени относительно ξ:

$$\varphi(\xi, x) = \sigma(\vartheta, x), \qquad \vartheta \doteq \xi|\xi|^{-1}. \tag{3.31}$$

Мы выведем достаточные условия включения $\varphi \in \mathcal{M}$ в терминах гладкости функции $\sigma(\cdot, x)$ на единичной сфере S_{m-1} пространства Ξ_m. Отметим, что функции φ вида (3.31) заведомо не принадлежат по ξ никакому классу $H_\alpha\Xi_m$ из-за особенностей в нуле и на бесконечности; поэтому использование теоремы 3.19 здесь невозможно. Результаты, которые мы получим, приводят, в частности, к мультипликаторным условиям ограниченности так называемых сингулярных интегральных операторов /СИО/ в пространстве $L_2\mathbb{R}^m$.

В соответствии с теоремой 3.18 мы должны оценить ядерную норму оператора Φ_{ab} вида (3.24), где a, b произвольные функции из SL_2. В рассматриваемом случае оператор Φ_{ab} записывается в виде

$$(\Phi_{ab} f)(x)=\int_{\Xi_m} \sigma(\vartheta,x) f(\xi)\,|a(\xi)|^2\, d\xi . \tag{3.32}$$

Мы построим вспомогательный интегральный оператор с интегрированием по сфере S_{m-1}, имеющий те же s-числа, что и оператор Φ_{ab}. С этой целью определим на S_{m-1} меру $\tilde\rho_a$, полагая

$$\tilde\rho_a(d\vartheta)=\Big[\int_0^\infty |a(r\vartheta)|^2 r^{m-1}\,dr\Big]\,d\vartheta .$$

Отметим, что

$$\tilde\rho_a(S_{m-1})=\int_{\Xi_m} |a(\xi)|^2\, d\xi \le 1 .$$

Пространство $\mathfrak{h}_0=L_2(\tilde\rho_a)S_{m-1}$ можно рассматривать как подпространство в $\mathfrak{h}=L_2(\rho_a)\Xi_m$. В самом деле, оператор $V:\mathfrak{h}_0\to\mathfrak{h}$, сопоставляющий функции $w(\vartheta)$ функцию $f(\xi)=w(\xi/|\xi|)$, является, как легко видеть, изометрическим оператором вложения. На подпространстве $\mathfrak{h}_0$, т.е. для функций вида $f(\xi)=w(\vartheta)\in\mathfrak{h}_0$, имеет место равенство $\Phi_{ab} f= =\tilde\Phi_{ab} w$, где $\tilde\Phi_{ab}:\mathfrak{h}_0\to L_2(\tau_b)\mathbb{R}^m$ – оператор, определяемый соотношением

$$(\tilde\Phi_{ab} w)(x)=\int_{S_{m-1}} \sigma(\vartheta,x)\, w(\vartheta)\,\tilde\rho_a(d\vartheta) . \tag{3.33}$$

Непосредственно проверяется, что на подпространстве $\mathfrak{h}_1\ominus\mathfrak{h}_0$ оператор Φ_{ab} равен нулю. Отсюда следует, что s – числа Φ_{ab} и $\tilde\Phi_{ab}$ совпадают, а потому

$$\|\Phi_{ab}\|_1=\|\tilde\Phi_{ab}\|_1 .$$

Для оценки ядерной нормы оператора (3.33) воспользуемся теоремой 3.16 (при $X=S_{m-1}$). Понижение размерности носителя меры ρ_a автоматически приводит к снижению требований гладкости на мультипликатор.

Теорема 3.20. Пусть $\sigma\in L_\infty\mathbb{R}^m H_\alpha S_{m-1}$ при $2\alpha>m-1$. Тогда функция $\varphi(\xi,x)=\sigma(\xi|\xi|^{-1},x)$ является мультипликатором в классе символов ПДО, ограниченных в $L_2\mathbb{R}^m$. Δ.

Рассмотрим, в частности, случай, когда символ $a(\xi, x)$ сам является однородной функцией нулевого порядка /относительно ξ /. Тогда оператор (3.28) представляет собой СИО в пространстве $L_2 \mathbb{R}^m$. Частным случаем теоремы 3.20 является, таким образом, следующий результат.

Следствие 3.21. Пусть $\sigma \in L_\infty \mathbb{R}^m H_\alpha S_{m-1}$ при $2\alpha > m-1$. Тогда функция σ является мультипликатором в классе символов СИО, ограниченных в $L_2 \mathbb{R}^m$. В частности, СИО с символом σ ограничен в $L_2 \mathbb{R}^m$. $\triangle$.

Замена ролей переменных x, ξ в формулировке условий гладкости не приводит здесь к новому, по сравнению с теоремой 3.19, результату.

Следствие 3.21 содержит в себе почти все известные признаки ограниченности СИО в пространстве $L_2 \mathbb{R}^m$, полученные ранее с помощью специальных аналитических средств /см., например, [38], [39] /. Мультипликаторный характер этих признаков не замечался вплоть до включения задачи в общую проблему множителей [36], [37]. Довольно поздно была понята [40], [36] возможность ставить условия гладкости по переменной x /а не по ξ /. Вместе с тем подход, основанный на теории мультипликаторов, делает все эти факты очевидными.

Техника доказательства теоремы 3.20 /т.е. преобразование оператора (3.32) к виду (3.33)/ носит общий характер и позволяет снижать требования гладкости на мультипликатор и в других случаях, когда φ фактически "зависит от меньшего числа переменных". В качестве примера кратко рассмотрим случай, в определенном смысле противоположный разобранному выше, – случай сферически симметричного мультипликатора.

Пусть

$$\varphi(\xi, x) = \eta(|\xi|, x),$$

где η – функция, определенная на $\Xi_+ \times \mathbb{R}^m$ $(\Xi_+ = (0, \infty))$. Функции $a \in S L_2 \Xi_m$ сопоставляется мера $\hat{\rho}_a \in S\mathfrak{M}, \Xi_+$, определенная на подмножествах Ξ_+ соотношением

$$\hat{\rho}_a(dr) = \left[\int_{S_{m-1}} |a(r\vartheta)|^2 d\vartheta \right] r^{m-1} dr.$$

Пространство $L_2(\hat{\rho}_a)\Xi_+$ реализуется как подпространство в $L_2(\rho_a)\Xi_m$. На этом подпространстве оператор Φ_{ab} преобразуется к виду

$$(\hat{\Phi}_{ab}v)(x)=\int_{\Xi_+}\eta(r,x)v(r)\hat{\rho}_a(dr), \qquad v\in L_2(\hat{\rho}_a)\Xi_+ ,$$

а на его ортогональном дополнении $\Phi_{ab}=0$. Следовательно, $\|\Phi_{ab}\|_1=\|\hat{\Phi}_{ab}\|_1$, и мы получаем возможность применить теорему 3.16, полагая в ее условии $X=\Xi_+$. Это приводит к следующему результату.

Теорема 3.22. Пусть $\eta\in L_\infty \mathbb{R}^m H_\alpha \Xi_+$ при $2\alpha>1$. Тогда функция $\varphi(\xi,x)=\eta(|\xi|,x)$ является мультипликатором в классе символов ПДО, ограниченных в $L_2\mathbb{R}^m$. $\triangle$.

10. <u>Тригонометрическая проблема множителей в классах</u> ℓ_r. Рассмотрим следующую задачу. Пусть $\mathfrak{C}=\{c_k\}$, $k=(k_1,\dots,k_m)$, $k_j=0,\pm 1,\pm 2,\dots$ – m - кратная финитная числовая последовательность с комплексными членами. Сопоставим ей функцию $f(x)=\sum_k c_k e^{2\pi i k x}$. Умножим f на фиксированную функцию ψ /"мультипликатор"/ и рассмотрим последовательность $\mathfrak{A}=\{\alpha_k\}$ коэффициентов Фурье функции ψf. Отображение $m_\psi:\mathfrak{C}\longmapsto\mathfrak{A}$ представляет собой линейное преобразование пространства финитных последовательностей в пространство всех числовых последовательностей. Тригонометрическая проблема множителей в ℓ_r заключается в выяснении условий на функцию ψ, при которых преобразование m_ψ может быть расширено до непрерывного преобразования пространства ℓ_r в себя. Если такое расширение возможно, то говорят, что функция ψ определяет ограниченный оператор множителей в ℓ_r.

Покажем, что поставленная задача вкладывается в рассмотренную выше общую проблему мультипликаторов в классах ядер интегральных операторов. Пусть $X=Y=\mathcal{T}^m$ – m -мерный тор, $\rho=\tau$ - инвариантная мера на торе.

Лемма 3.23. Если при некотором r, $1\le r\le\infty$, функция $\varphi(x,y)=\psi(y-x)$ принадлежит классу $\mathcal{M}(\mathcal{T}_r)$, то функция ψ определяет ограниченный оператор множителей в ℓ_r. $\triangle$.

Доказательство. Рассмотрим разностное ядро $T(x,y)=f(y-x)$. Легко видеть, что разложение в ряд Фурье

$$f(y-x)=\sum_k c_k e^{-2\pi ikx} e^{2\pi iky}$$

с точностью до порядка членов совпадает с каноническим разложением ядра T в $L_2\mathcal{T}^m$. Следовательно, $N(T|\tilde{\mathfrak{F}}_r)=\|c\|_r$. Так как ядро $\varphi(x,y)T(x,y)=\psi(y-x)f(y-x)$ тоже является разностным, то, аналогично, $N(\varphi T|\tilde{\mathfrak{F}}_r)=\|d\|_r$. Из условия леммы теперь вытекает, что $\|d\|_r\le[\varphi]_r\|c\|_r$, т.е. преобразование m_ψ ограничено в ℓ_r. ▨.

Используя теорему 3.17, получаем следующие аналитические признаки ограниченности преобразования m_ψ в пространствах*/ ℓ_r, $1<r<\infty$.

Теорема 3.24. Если $\psi\in W_p^\alpha\mathcal{T}^m$, $p\alpha>m\geq 2\alpha$, то функция ψ определяет ограниченный оператор множителей в ℓ_r, где $|r^{-1}-1/2|<\alpha/m$. ▲.

Доказательство. Достаточно заметить, что для $\varphi(x,y)=$ $=\psi(y-x)$

$$N(\varphi|L_\infty\mathcal{T}^m W_p^\alpha\mathcal{T}^m)=N(\psi|W_p^\alpha\mathcal{T}^m).$$ ▨.

При $m>1$ теорема 3.24 усиливает результат Хиршмана [41], полученный гораздо более специальными средствами. Стоит отметить также, что в условиях теоремы 3.24 функция ψ порождает мультипликатор во всем классе $\tilde{\mathfrak{F}}_r$ ядер на $\mathcal{T}^m\times\mathcal{T}^m$, а не только в классе разностных ядер.

Добавление 4

О ядерности интегральных операторов

В п. 3 лекции 3 были доказаны некоторые признаки ядерности

---

*/ Тригонометрическая проблема множителей в ℓ_1 /а ввиду двойственности – и в ℓ_∞ / тривиальна: поскольку ℓ_1 – банахова алгебра относительно операции свертывания, оператор m_ψ ограничен в ℓ_1 и в ℓ_∞ тогда и только тогда, когда последовательность коэффициентов Фурье функции ψ принадлежит ℓ_1.

операторов вида (3.1), (3.2). Эти признаки были затем применены в проблеме мультипликаторов интегральных ядер /теорема 3.16/. Основная цель настоящего пункта – изложить формулировки более сильных результатов о ядерности, автоматически приводящих также к уточнению теоремы 3.16 и вытекающих из нее предложений 3.19 – 3.21 о псевдодифференциальных операторах и о сингулярных интегральных операторах. Доказательства излагаемых результатов содержатся в работе [37] .

Определим пространства функций, участвующие в формулировках. Обозначим через Γ_m класс всех неубывающих функций $\gamma(t)$, $0<t<\infty$, для которых

$$g(\gamma)\stackrel{def}{=}\int_0^\infty t^{-1-m/2}\gamma(t)\,dt<\infty .$$

Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^m$ и $\mu=[m/2]+1$. Для функции u, определенной на Ω, обозначим через $\Delta_h^\mu u$ конечную разность порядка μ с шагом h, $h\in\mathbb{R}^m$. Функцию u отнесем к классу $B_\gamma\Omega$, если $u\in L_2\Omega$ и при всех $t>0$

$$\sup_{|h|\le t} N(\Delta_h^\mu u\,|\,L_2)\le C\gamma(t). \tag{3.34}$$

В последнем выражении L_2 – норма вычисляется по той подобласти, где определена разность $\Delta_h^\mu u$. Наименьшую постоянную в (3.34) обозначим через $\mathring{N}(u\,|\,B_\gamma\Omega)$. Класс $B_\gamma\Omega$ является банаховым пространством относительно нормы

$$N(u\,|\,B_\gamma\Omega)=\mathring{N}(u\,|\,B_\gamma\Omega)+N(u\,|\,L_2\Omega).$$

Отметим, что объединение классов $B_\gamma\Omega$ по всем $\gamma\in\Gamma_m$ совпадает с пространством $B^{m/2}_{2,1}\Omega$ О.В.Бесова /см. [26] /. Ниже предполагается, что Ω имеет локально липшицеву границу.

Наряду с классами $B_\gamma\mathbb{R}^m$ будем рассматривать также классы $\mathring{B}_\gamma\mathbb{R}^m$. Функция u принадлежит классу $\mathring{B}_\gamma\mathbb{R}^m$, коль скоро она непрерывна, $u(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$ и $\mathring{N}(u\,|\,B_\gamma\mathbb{R}^m)<\infty$. Класс $\mathring{B}_\gamma\mathbb{R}^m$ представляет собой банахово пространство относительно нормы

$$N(u\,|\,\mathring{B}_\gamma\mathbb{R}^m)=\mathring{N}(u\,|\,B_\gamma\mathbb{R}^m).$$

Классы $B_\gamma \Omega$ инвариантны относительно достаточно гладких невырожденных преобразований области Ω. Операторы умножения на функции $\zeta \in C_0^\infty \Omega$, очевидно, непрерывны в $B_\gamma \Omega$. Сказанное позволяет стандартным образом ввести классы $B_\gamma X$ в случае, когда X есть m-мерное гладкое компактное многообразие или многообразие с краем.

Замечание 3.25. Справедливы следующие непрерывные вложения в классы B_γ, $\mathring{B}_\gamma$. 1/ Если $2\alpha > m$, то $H_\alpha X \subset B_\gamma X$, где $\gamma(t) = (t^{-\alpha}+1)^{-1}$. 2/ Пусть $X = \mathbb{R}^m$; обозначим через $(\mathring{H}_\alpha \cap \mathring{H}_\beta)\mathbb{R}^m$ пространство функций, получающееся пополнением $C_0^\infty \mathbb{R}^m$ относительно метрики

$$\mathring{N}^2(u|H_\alpha \mathbb{R}^m) + \mathring{N}^2(u|H_\beta \mathbb{R}^m), \qquad 2\beta < m < 2\alpha .$$

Тогда $(\mathring{H}_\alpha \cap \mathring{H}_\beta)\mathbb{R}^m \subset \mathring{B}_\gamma \mathbb{R}^m$ при $\gamma(t) = (t^{-\alpha} + t^{-\beta})^{-1}$.

Приводимое ниже утверждение устанавливает признаки ядерности интегральных операторов в терминах принадлежности ядра классам B_γ, $\mathring{B}_\gamma$.

Теорема 3.26. 1/ Пусть X – ограниченная область в $\mathbb{R}^m$, либо m-мерное гладкое компактное многообразие или многообразие с краем и (Y, τ) – произвольное пространство с σ-конечной мерой. Пусть T – измеримая функция на $X \times Y$. Предположим, что при некотором $\gamma \in \Gamma_m$ имеет место включение $T \in L_2(\tau) \mathrm{Y} B_\gamma X$.
Тогда для любой меры $\rho \in \mathfrak{M}_1 X$ операторы (3.1), (3.2) являются ядерными и имеет место оценка

$$\|\mathbb{T}\|_1 = \|\mathbb{T}'\|_1 \le C q(\gamma)\, N(T | L_2(\tau) \mathrm{Y} B_\gamma X)\sqrt{\rho(X)} , \tag{3.36}$$

где постоянная C зависит только от X.

2/ При $X = \mathbb{R}^m$ результат сохраняется при замене класса $B_\gamma X$ на $\mathring{B}_\gamma \mathbb{R}^m$. ▲.

Из замечания 3.25 вытекает, что теорема 3.26 усиливает результат теорем 3.9, 3.10. При этом автоматически усиливаются результаты теорем 3.16, 3.19, 3.20 и следствия 3.21. Приведем соответствующие формулировки.

Теорема 3.27. 1/ Пусть $X = Q^m$ либо X – m-мерное гладкое компактное многообразие или многообразие с краем, ρ – произвольная борелевская σ - конечная мера на X и (Y,τ) - произвольное пространство с σ - конечной мерой. Тогда при $\gamma\in\Gamma_{\overset{\circ}{m}}$ имеет место непрерывное вложение

$$L_\infty(\tau)YB_\gamma X\subset\mathcal{M}.$$

Для $\varphi\in L_\infty(\tau)YB_\gamma X$ справедлива оценка

$$[\varphi]\le CN(\varphi|L_\infty(\tau)YB_\gamma X)g(\gamma)$$

с постоянной C, не зависящей от меры ρ и пространства с мерой (Y,τ). Результат сохраняется при замене ролей пространств X и Y.

2/ Если $X=\mathbb{R}^m$, то результат пункта 1/ сохраняет силу при замене класса $B_\gamma X$ на $\overset{\circ}{B}_\gamma\mathbb{R}^m$. $\triangle$.

Теорема 3.28. Пусть при некотором $\gamma\in\Gamma_m$

$$\varphi\in L_\infty\mathbb{R}^m\overset{\circ}{B}_\gamma\Xi_m \qquad \text{либо} \qquad \varphi\in L_\infty\Xi_m\overset{\circ}{B}_\gamma\mathbb{R}^m.$$

Тогда функция φ является мультипликатором в классе символов ПДО, ограниченных в $L_2\mathbb{R}^m$. В частности, при указанных условиях ПДО с символом φ ограничен в $L_2\mathbb{R}^m$. $\triangle$.

Теорема 3.29. Пусть при некотором $\gamma\in\Gamma_{m-1}$, $\sigma\in L_\infty\mathbb{R}^m\overset{\circ}{B}_\gamma S_{m-1}$. Тогда функция $\varphi(\xi,x)=\sigma(\xi|\xi|^{-1},x)$ является мультипликатором в классе символов ПДО, ограниченных в $L_2\mathbb{R}^m$, в частности, - в классе ограниченных СИО. СИО с символом σ ограничен в $L_2\mathbb{R}^m$. $\triangle$.

Приведем /также без доказательства/ еще один признак ядерности. Он относится к действующим в пространстве $L_2\mathbb{R}^m$ операторам с ядрами специального вида:

$$T(x,y)=b(y)f(y-x)\overline{a(x)}. \tag{3.36}$$

Определим классы функций, фигурирующие в формулировке теоремы. Пусть пространство $\mathbb{R}^m$ разложено в решетку единичных кубов Q_j, $j=1,2,\dots$. Будем говорить, что функция $h\in L_{2,loc}\mathbb{R}^m$ принадлежит классу $L_{2,p}$ $(1\le p\le\infty)$, если числовая последовательность $\{N(h|L_2Q_j)\}_{j=1}^{\infty}$ принадлежит классу ℓ_p. Норму этой последовательности в ℓ_p обозначим через $\|h\|_{2,p}$. Очевидно, класс $L_{2,2}$ совпадает с $L_2\mathbb{R}^m$.

Теорема 3.30. Пусть T - интегральный оператор в $L_2\mathbb{R}^m$ с ядром (3.36); пусть $a \in L_{2,p_1}$, $b \in L_{2,p_2}$, $p_1^{-1}+p_2^{-1}=1$, и $f \in W_2^{\alpha}\mathbb{R}^m$ при некотором $\alpha > m/2$. Тогда $\mathbb{T} \in \mathfrak{S}_1$ и справедлива оценка

$$\|\mathbb{T}\|_1 \le C N(f \mid W_2^{\alpha}\mathbb{R}^m) \quad \|a\|_{2,p_1} \|b\|_{2,p_2}, \quad C=C(m). \blacktriangle .$$

Теорема 3.30 представляет определенный интерес для приложений /см. [42] /. Ее специфика заключается в том, что разностный характер ядра (3.36) позволяет "перераспределять" условия на функции a, b, ослабляя требования к одной из них и соответственно усиливая требования к другой. При $p_1=p_2=2$ утверждение теоремы 3.30 является частным случаем теоремы 3.26.

В заключение рассмотрим интегральные операторы в $L_2\mathbb{R}^m$ с ядрами вида

$$\hat{T}(x,y)=b(y)e^{ixy}\overline{a(x)}.$$

Полезный признак ядерности таких операторов почти непосредственно вытекает из теоремы 3.9.

Теорема 3.31. Пусть $\hat{\mathbb{T}}$ - интегральный оператор с ядром (3.37) и $a, b \in L_{2,1}$. Тогда $\hat{\mathbb{T}} \in \mathfrak{S}_1$, и

$$\|\hat{\mathbb{T}}\|_1 \le C \|a\|_{2,1} \|b\|_{2,1}, \quad C=C(m). \blacktriangle .$$

Доказательство. Пусть $\hat{T}_{jk}$, $j,k=1,2,\ldots$ - интегральный оператор в $L_2\mathbb{R}^m$ с ядром

$$\hat{T}_{jk}(x,y)=\chi_j(y)b(y)e^{ixy}\overline{a(x)}\chi_k(x)=$$

$$=e^{-ix_k x_j}\chi_j(y)b(y)e^{ix_k y}e^{i(x-x_k)(y-x_j)}\overline{a(x)}e^{ixx_j}\chi_k(x),$$

где x_s - центр и χ_s - характеристическая функция куба Q_s. Введем в рассмотрение меры

$$\rho_a(\delta)=\int_{\delta}|a(x)|^2dx, \qquad \tau_b(\delta)=\int_{\delta}|b(x)|^2dx.$$

Сингулярные числа оператора $\hat{\mathbb{T}}_{jk}$ совпадают /см. лемму 3.14/ с s-числами оператора $\mathbb{T}_{jk}\ : L_2(\rho_a)Q_k \longrightarrow L_2(\tau_b)Q_j$ с ядром

$$T_{jk} = e^{i(x-x_k)(y-x_j)} .$$

Фиксируем /целое/ $\alpha > m/2$ и заметим, что

$$\tilde{C} = N(T_{jk}| L_\infty Q_k H_\alpha Q_j)$$

не зависит от j, k. В соответствии с теоремой 3.9 $\mathbb{T}_{jk} \in \mathfrak{S}_1$ и

$$\|\mathbb{T}_{jk}\|_1 \le C\tilde{C}\sqrt{\rho_a(Q_k)}\ \sqrt{\tau_b(Q_j)} = C(m) N(a|L_2 Q_k) N(b|L_2 Q_j) .$$

Отсюда, очевидно,

$$\|\hat{\mathbb{T}}\|_1 = \|\mathbb{T}\|_1 \le \sum_{j,k} \|\mathbb{T}_{jk}\|_1 \le C(m) \sum_{j,k} N(a|L_2 Q_k) N(b|L_2 Q_j) . \ \blacksquare .$$

Доказанное утверждение близко к теореме 3.30, но не может быть получено из нее без дополнительных ограничений.

Добавление 5

Оценки сингулярных чисел интегральных операторов, не принадлежащих классу $\mathfrak{S}_2$. Операторы со слабо полярным ядром.

1. <u>Оценки s- чисел интегральных операторов</u> $\mathbb{T} \bar{\in} \mathfrak{S}_2$. При доказательстве теорем 3.2-3.4 мы опирались на лемму 3.1. Таким образом, заранее предполагалось, что ядро T квадратично суммируемо. Здесь мы покажем, что подход, основанный на использовании теорем о кусочно-полиномиальных приближениях, с успехом может быть применен к ядрам $T \bar{\in} L_2(\mu)\mathfrak{Z}$. Вместо леммы 3.1 мы используем равенство

$$s_{n+1}(\mathbb{T}) = \min_{\operatorname{rang} \mathbb{T}' \le n} \|\mathbb{T} - \mathbb{T}'\| \tag{3.38}$$

и следующий хорошо известный факт /см. [43], [44] /.

Лемма 3.32. Пусть функция A определена на $X\times Y$ и μ - измерима, и пуоть конечны величины

$$N_1(A) \overset{def}{=} (\tau)\text{-}\sup\int_X |A(x,y)|\,p(dx), \qquad N_2(A)\overset{def}{=}(p)\text{-}\sup\int_Y |A(x,y)|\,\tau(dy).$$

Тогда интегральный оператор $\mathbb{A} : L_2(p)X \to L_2(\tau)Y$ вида (3.I) с ядром $A(x,y)$ ограничен, и

$$\|\mathbb{A}\|^2 \le N_1(A)N_2(A). \quad \blacktriangle. \tag{3.39}$$

Для полноты изложения приведем доказательство. Пусть

$$v(y)=\int_X A(x,y)u(x)p(dx).$$

Тогда

$$|v(y)|^2\le \int_X |A(x,y)|p(dx)\int_X |A(x,y)||u(x)|^2p(dx)\le N_1(A)\int_X|A(x,y)||u(x)|^2p(dx)$$

Отсюда

$$N^2(v|L_2(\tau)Y)\le N_1(A)\int_Y\int_X |A(x,y)|\,|u(x)|^2p(dx)\tau(dy)\le N_1(A)N_2(A)N^2(u|L_2(p)X),$$

что равносильно (3.39). ▨.

Для построения вырожденных ядер T', аппроксимирующих заданное ядро T, мы, как и в п. 2 лекции 3, используем операторы K_H /или P_Ξ /. В отличие от случая $\mathbb{T}\in\mathcal{T}_2$, теперь, в соответствии с леммой 3.32, нужно будет оценивать отклонение $T-T'$ в L_1-метрике. Другое отличие от теорем 3.2 - 3.4 заключается в том, что пространство с мерой (Y,τ) теперь не может быть произвольным.

Теорема 3.33. Пусть $X=Y=\mathbb{R}^m$, $\alpha<m$ и функция T удовлетворяет условиям

$$N_{1,\alpha}(T)\overset{def}{=} N(T|L_\infty(\tau)Y\mathring{W}_1^{\alpha}X)<\infty,$$

$$N_{2,\alpha}(T)\overset{def}{=} N(T|L_\infty(p)X\mathring{W}_1^{\alpha}Y)<\infty.$$

Пусть $p,\tau\in\mathfrak{M}_r\mathbb{R}^m$ при $r\alpha=m$. Тогда s - числа оператора $\mathbb{T}$ удовлетворяют неравенству

$$s_n(T)\le Cn^{-\frac{\alpha}{m}} N^{1/2}_{1,\alpha}(T) N^{1/2}_{2,\alpha}(T)\ \|\rho\|^{1/2}_{(r)}\ \|\tau\|^{1/2}_{(r)} . \qquad (3.40)$$

Постоянная $C=C(m,\alpha)$ не зависит от ядра T и мер ρ, τ . $\blacktriangle$.

Доказательство. Считаем $\|\rho\|_{(r)}=\|\tau\|_{(r)}=1$. Прежде всего оценим число $s_1(\mathbb{T})=\|\mathbb{T}\|$. Ниже во всех интегралах подразумевается интегрирование по $\mathbb{R}^m$. По неравенству Гельдера

$$\int |T(x,y)|\,\rho(dx)=\int |T(x,y)|\,\frac{d\rho}{dx}\,dx \le \left[\int |T(x,y)|^{r'}dx\right]^{1/r'}.$$

Так как класс $\overset{\circ}{W}{}^{\alpha}_1\mathbb{R}^m$, $\alpha<m$, непрерывно вкладывается в $L_{r'}\mathbb{R}^m$, $r'=(1-\alpha m^{-1})^{-1}$, то

$$\left[\int |T(x,y)|^{r'}dx\right]^{1/r'}\le cN(T(\cdot,y)|\overset{\circ}{W}{}^{\alpha}_1\mathbb{R}^m)\le cN_{1,\alpha}(T).$$

Таким образом

$$\int |T(x,y)|\,\rho(dx)\le c\,N_{1,\alpha}(T) .$$

Принимая во внимание аналогичное неравенство для интеграла по $\tau(dy)$, находим по лемме 3.32:

$$s_1(\mathbb{T})=\|\mathbb{T}\|\le c\,N^{1/2}_{1,\alpha}(T)N^{1/2}_{2,\alpha}(T) . \qquad (3.41)$$

Воспользуемся теоремой 2.23 /при q = 1/; условие (2.25), очевидно, выполнено. Согласно этой теореме для меры $\rho\in\mathfrak{S}\mathfrak{M}_r\mathbb{R}^m$ по любому $n\ge 1$ найдутся куб Q_1 и покрытие его H_1 кубами, такие, что $|H_1|\le n\varkappa_m$ и для любой $f\in\overset{\circ}{W}{}^{\alpha}_1\mathbb{R}^m$

$$N(f-K_{H_1}f|L_1(\rho)\mathbb{R}^m)\le C_7 n^{-\alpha/m}N(f|\overset{\circ}{W}{}^{\alpha}_1\mathbb{R}^m) . \qquad (3.42)$$

Аналогичный оператор K_{H_2} построим, исходя из меры τ . Обозначим через $K^{(1)}_x$ оператор K_{H_1} , применяемый "по переменной x " и через $K^{(2)}_y$ – оператор K_{H_2} , применяемый "по переменной y ". Отметим, что операторы $K^{(1)}_x$, $K^{(2)}_y$ перестановочны. Определим вырожденное ядро $T'(x,y)$, полагая

$$T' = K_x^{(1)} T + K_y^{(2)} T - K_x^{(1)} K_y^{(2)} T.$$

Очевидно,

$$\operatorname{rang} T' \le \operatorname{rang} K_x^{(1)} (I - K_y^{(2)}) T + \operatorname{rang} K_y^{(2)} T \le 2n \varkappa_m . \qquad (3.43)$$

Разность $T - T'$ запишем в виде

$$T - T' = (I - K_x^{(1)})(I - K_y^{(2)}) T = (I - K_y^{(2)})(I - K_x^{(1)}) T .$$

Имеет место неравенство

$$N_{1,\alpha}(K_y^{(2)} T) \le c_\alpha N_{1,\alpha}(T) , \qquad (3.44)$$

в котором постоянная $c_\alpha = c_{\alpha, m}$ не зависит от выбора куба Q_2 и покрытия H_2, удовлетворяющего условиям теоремы 2.23. Мы опустим элементарную, но несколько утомительную проверку неравенства (3.44).

Применяя оценку (3.42) к функции $f(x) = (I - K_y^{(2)}) T(x, y)$ и учитывая (3.44), находим:

$$N_1(T - T') \le (1 + c_\alpha) C_7 n^{-\alpha/m} N_{1,\alpha}(T).$$

Аналогично оценивается величина $N_2(T - T')$. По лемме 3.32

$$\| \mathbb{T} - \mathbb{T}' \| \le (1 + c_\alpha) C_7 n^{-\alpha/m} N_{1,\alpha}^{1/2}(T) N_{2,\alpha}^{1/2}(T).$$

Отсюда, в соответствии с (3.38) и (3.43),

$$s_{2n\varkappa_m + 1}(\mathbb{T}) \le (1 + c_\alpha) C_7 n^{-\alpha/m} N_{1,\alpha}^{1/2}(T) N_{2,\alpha}^{1/2}(T). \qquad (3.45)$$

Из (3.45) и (3.41) следует (3.40). ▨.

Оценка (3.40) показывает, что при $2\alpha > m$ в условиях теоремы 3.33 имеет место включение $\mathbb{T} \in \mathfrak{S}_2$. Однако результат является формально новым и в этом случае, так как в условиях теоремы 3.4 меры ρ, τ неравноправны, /условия на одну из них жестче, на другую - свободней/. В связи с этим укажем, что при $2\alpha > m$ результат теоремы 3.33 можно было бы получить, применяя теорему 3.4 сначала "по x ", затем "по y " и после этого используя интерполяционную технику.

Метод доказательства теоремы 3.33 пригоден и в более общей ситуации /размерности многообразий X , Y и порядки гладкости ядра T по переменным x , y , а также классы, которым принадлежат меры ρ , τ , могут не совпадать/. Подробное исследование s-чисел интегральных операторов с ядрами $T \in L_2(\mu)^?$ проведено в работе [45] . Некоторые результаты из [45] могут быть уточнены на основании теорем 2.17, 2.23 /в [45] использовалась теорема 2.8/.

При доказательстве теорем 3.2 – 3.4 фактически использовалось следствие 1.21 при $p=2$, при доказательстве теоремы 3.33 – то же следствие, но при $p=\infty$. В ряде случаев для получения точных оценок s-чисел оказывается полезным это же утверждение при промежуточных p . Для его применения нужно иметь аналитические признаки принадлежности интегрального оператора классам $\mathfrak{S}_p$ при $2<p<\infty$. В заключение мы приведем формулировку одного такого признака, полученного с помощью интерполяции /см. Г.Е.Караджов [46] /.

Теорема 3.34. Пусть (X,ρ) , (Y,τ) – пространства с σ-конечной мерой. Пусть показатели $p>2$, $r_1, r_2<2$ связаны соотношением

$$(1/2-p^{-1})^2=(r_1^{-1}-1/2)(r_2^{-1}-1/2).$$

Предположим, что ядро A интегрального оператора (3.1) удовлетворяет условиям

$$\int_Y\Big[\int_X |A(x,y)|^{r_1}\rho(dx)\Big]^{pr_1^{-1}}\tau(dy) \overset{def}{=} M_1^p<\infty ,$$

$$\int_X\Big[\int_Y |A(x,y)|^{r_2}\tau(dy)\Big]^{pr_2^{-1}}\rho(dx) \overset{def}{=} M_2^p<\infty .$$

Тогда $\mathbb{A}\in\mathfrak{S}_p$ и $\|\mathbb{A}\|_p\le cM_1^{\theta_1}M_2^{\theta_2}$, где $\theta_l=(1/2-p^{-1})(r_l^{-1}-p^{-1})^{-1}$, $l=1,2$. ▲.

2. <u>Операторы со слабо полярным ядром.</u> Мы рассмотрим теперь интегральные операторы вида (3.1) в предположении, что $X=Y=Q^m$ и ядро $T(x,y)$ имеет вид

$$T(x,y)=R(x,y)\vartheta(x-y). \qquad (3.46)$$

В (3.46) ϑ – положительно однородная функция порядка $\eta>-m$: $\vartheta(tx)=t^{\eta}\vartheta(x)$, $t>0$. Ниже, не оговаривая этого особо, будем считать, что при $x\neq 0$ функция $\vartheta(x)$ бесконечно дифференцируема. Типичным примером ядер (3.46) являются ядра вида

$$Q(x,y)=R(x,y)|x-y|^{\eta}. \qquad (3.47)$$

Для операторов с ядрами (3.46) непосредственное применение теорем 3.2 – 3.4 или 3.33 не приводит к точным оценкам s-чисел. В самом деле, ниже будет показано, что для таких операторов $s_n(T)=O(n^{-1-\eta m^{-1}})$. В то же время нетрудно проверить, что включение $\vartheta\in W_p^{\alpha}Q^m$ имеет место лишь при $p\alpha<p\eta+m$, и применение любой из упомянутых теорем дает лишь оценки порядка, "худшего на ε ".

Правильные по порядку оценки удается получить, используя теоремы о ядрах общего вида в сочетании с некоторыми специальными разложениями ядер вида (3.46). Эти разложения позволяют явно учесть, что при $x\neq y$ ядро является гладкой функцией.

Теорема 3.35. Пусть ϑ – положительно однородная функция в $\mathbb{R}^m$ порядка $\eta>-m$, $X=Y=Q^m$ и меры ρ,τ принадлежат классу $\mathfrak{M}_r Q^m$, где

$$r=1 \text{ при } \eta>0\ ;\ r^{-1}<1+\eta m^{-1} \text{ при } -m<\eta\leq 0. \qquad (3.48)$$

Пусть $R\in C^{\beta}(Q^m\times Q^m)$, $2\beta>m+2\eta$, в случае $m+2\eta\geq 0$ и $R\in L_{\infty}(Q^m\times Q^m)$ в случае $m+2\eta<0$. Тогда для s-чисел интегрального оператора T вида (3.1) с ядром (3.46) имеет место оценка

$$s_n(T)\leq cn^{-(1+\eta m^{-1})}\|\rho\|_{(r)}^{1/2}\,\|\tau\|_{(r)}^{1/2}N(R), \qquad (3.49)$$

где $N(R)$ – норма функции R в соответствующем классе C^{β} или L_{∞}. Постоянная $c=c(\vartheta, m, r, \beta)$ не зависит от мер ρ, τ и функции R.

Если условия теоремы выполнены при $\eta>0$ и хотя бы одна из мер ρ, τ сингулярна, то $s_n(\mathbb{T})=o(n^{-(1+\eta m^{-1})}\partial)$. ▲.

Для случая, когда меры ρ, τ абсолютно непрерывны, можно дать эквивалентную формулировку результата, зачастую более удобную в приложениях. Она относится к действующим в $L_2 Q^m$ интегральным операторам вида

$$(\mathbb{Q}u)(y)=\int_{Q^m} b(y)R(x,y)\vartheta(x-y)\overline{a(x)}u(x)dx. \qquad (3.50)$$

На основании леммы 3.14 от оператора (3.50) можно перейти к оператору вида (3.1) с ядром (3.46). Применяя к последнему оператору теорему 3.35, получаем следующий результат.

Теорема 3.36. Пусть ϑ - положительно однородная функция в $\mathbb{R}^m$ порядка $\eta>-m$, $X=Y=Q^m$ и $a, b\in L_p Q^m$, где

$$p=2 \text{ при } \eta>0; \; 2p^{-1}<1+\eta m^{-1} \quad \text{при } -m<\eta\le 0. \qquad (3.51)$$

Пусть условия на функцию R те же, что в теореме 3.35. Тогда для s-чисел оператора (3.50) имеет место оценка

$$s_n(\mathbb{Q})\le cn^{-(1+\eta m^{-1})}\|a\|_p\|b\|_p N(R),$$

где постоянная c, а также смысл символа $N(R)$ - те же, что в теореме 3.35. ▲.

Мы приведем доказательства теорем 3.35, 3.36 в двух частных случаях. Эти случаи рассматриваются сравнительно элементарно и вместе с тем дают представление об идее полного доказательства.

Доказательство оценки (3.49) при $\eta>0$, $R\equiv 1$. Считаем, что $\rho, \tau\in S\mathfrak{M}, Q^m$. Пусть G^+ - какая-либо функция, совпадающая с $\vartheta(x)$ при $|x|\ge 1$ и имеющая непрерывные производные вплоть до порядка $[m+\eta]+1$ во всем $\mathbb{R}^m$. Положим $G^-(x)=\vartheta(x)-G^+(x)$ и $G_h^\pm(x)=h^\eta G^\pm(h^{-1}x)$.

Рассмотрим разложение

$$\vartheta(x)=G_h^+(x)+G_h^-(x), \quad h>0. \qquad (3.52)$$

Нетрудно проверить, что при достаточных малых $\varepsilon>0$ для любого шара $K\subset\mathbb{R}^m$ имеют место включения $G_h^{\pm}\in W_1^{m+\gamma\pm\varepsilon}K$ и справедливы неравенства

$$\overset{\circ}{N}(G_h^{\pm}|W_1^{m+\gamma\pm\varepsilon}K)\leq c_{\pm}h^{\mp\varepsilon}, \tag{3.53}$$

причем постоянные $c_{\pm}$ не зависят от h. Из (3.53) вытекают оценки для функций $T_h^{\pm}(x,y)=G_h^{\pm}(x-y)$:

$$\overset{\circ}{N}(T_h^{\pm}|MQ^m W_1^{m+\gamma\pm\varepsilon}Q^m)\leq c_{\pm}h^{\mp\varepsilon}. \tag{3.54}$$

К операторам $\mathbb{T}_h^{\pm}$ вида (3.I) с ядрами $T_h^{\pm}$, очевидно, применима теорема 3.2. Из (3.54) находим[ж/], что при $n\geq 2\mathcal{D}(\alpha,m)$ имеют место оценки

$$s_n(\mathbb{T}_h^{\pm})\leq c'_{\pm}h^{\mp\varepsilon}n^{-(1+\gamma m^{-1}\pm\varepsilon m^{-1})}. \tag{3.55}$$

В соответствии с разложением (3.52), исследуемый оператор $\mathbb{T}$ представим в виде суммы $\mathbb{T}=\mathbb{T}_h^{+}+\mathbb{T}_h^{-}$. Отсюда

$$s_{2n-1}(\mathbb{T})\leq s_n(\mathbb{T}_h^{+})+s_n(\mathbb{T}_h^{-})\leq cn^{-(1+\gamma m^{-1})}(h^{-\varepsilon}n^{\varepsilon m^{-1}}+h^{\varepsilon}n^{-\varepsilon m^{-1}}).$$

Полученные неравенства справедливы при любом $h>0$, постоянная c не зависит от h. Полагая $h=n^{-1/m}$, находим, что $s_{2n-1}(\mathbb{T})\leq 2cn^{-(1+\gamma m^{-1})}$. Это равносильно оценке (3.49), поскольку оценка числа $s_1(\mathbb{T})$ здесь тривиальна в силу ограниченности ядра. ▨.

Доказательство теоремы 3.36 при $-m<\gamma<-m/2$, $\vartheta(x)=|x|^{\gamma}$, $a\equiv b\equiv 1$. Требуется оценить s-числа интегрального оператора в L_2Q^m с ядром (3.47). Считаем $|R(x,y)|\leq 1$. Введем в рассмотрение оператор $\mathbb{Q}_h$, ядро которого Q_h равно ядру (3.47) при $|x-y|\leq h$ и равно нулю при $|x-y|>h$. Так как

ж/ Здесь следует воспользоваться не основной оценкой (3.4), а промежуточным неравенством (3.11).

$$\sup_{x\in Q^m}\int_{Q^m}|Q_h(x,y)|\,dy \le \int_{|x-y|\le h}|x-y|^{\gamma}dy = ch^{m+\gamma},$$

и такая же оценка справедлива при замене ролей x и y, то по лемме 3.32

$$\|Q_h\| \le ch^{m+\gamma}.$$

Оценим $\mathfrak{S}_2$-норму оператора $Q-Q_h$.

$$\|Q-Q_h\|_2^2 \le \int_{Q^m}dx\int_{|x-y|>h}|x-y|^{2\gamma}dy \le c_1^2h^{m+2\gamma}. \qquad (3.56)$$

Поскольку $ns_n^2(A) \le \sum_{k\le n} s_k^2(A) \le \|A\|_2^2$, из (3.56) следует

$$s_n(Q-Q_h) \le c_1h^{m/2+\gamma}n^{-1/2}$$

и далее,

$$s_n(Q) \le s_n(Q-Q_h)+\|Q_h\| \le h^{m+\gamma}(c+c_1h^{-m/2}n^{-1/2}).$$

Полагая $h=n^{-1/m}$, приходим к требуемой оценке. ■.

Комментарии и литературные указания

Вопрос об оценке собственных и сингулярных чисел интегральных операторов в зависимости от гладкости ядра имеет давнюю историю. Наиболее значительными здесь были исследования И.Фредгольма, Г.Вейля, Э.Хилле и Я.Д.Тамаркина, А.О.Гельфонда, М.Г.Крейна. Указания на литературу по этой тематике читатель найдет в книге И.Ц.Гохберга и М.Г.Крейна [8]. Во всех этих работах речь шла только об операторах, отображающих $L_2\Omega$ в себя, где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^m$. Лишь в работе В.Стайнспринга [47] получены оценки ядерной нормы для интегральных операторов, отображающих $L_2\Omega$ в $L_2(\tau)Y$, где (Y,τ) – произвольное пространство с σ- конечной мерой; при этом оценки "равномерны" относительно (Y,τ). Значение оценок типа (3.4) для операторов, отображающих $L_2(\rho)\Omega$, $\Omega\subset\mathbb{R}^m$, в $L_2(\tau)Y$ и "равномерных" относительно (Y,τ) и ρ, выяснено в работах авторов [48], [36]. Требуемые оценки получены в [49] - [51]; кроме того, в [37] прямым путем /без использования кусочно-полиномиальных приближений и индивидуальных оценок s -чисел/ получены "равномерные" признаки ядерности. В частности, теоремы 3.2 - 3.4, 3.9, 3.10, 3.30 получены в [49],[51], теорема 3.26 - в [37]. В работе [50] равномерные оценки s-чисел получены при условиях, когда требования гладкости ядра "распределены" между переменными x, y.

Признаки ядерности для интегральных операторов в $L_2\mathbb{R}^m$ тесно связаны с "равномерными" признаками ядерности типа теоремы 3.9. Это хорошо иллюстрируется, например, доказательствами теорем 3.10, 3.31. Достаточно точные признаки ядерности в $L_2\mathbb{R}^m$ находят полезные применения в теории рассеяния /см. [42],[52], [53] /.

Теорема 3.33 заимствована из работы [45], где имеются более общие утверждения. Теорема 3.34 доказана в [46]. Утверждение, близкое к теоремам 3.35, 3.36, содержится в работе Г.П.Костометова и М.З.Соломяка [54]. Недавно полученное Костометовым уточнение оценок для случая $2\gamma < -m$ позволило сформулировать теоремы 3.35, 3.36 в их настоящем виде.

Проблема множителей для ядер интегральных операторов /см. п.п. 5-7 лекции 3/ в более общей форме возникла в работах авторов [35], [36] по так называемым двойным операторным интегралам /ДОИ/. Пусть $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ - гильбертовы пространства, причем заданы /фиксированы/ их разложения в прямые интегралы Неймана:

$$\mathcal{G}=\int_X \oplus \mathcal{G}_x\, \rho(dx), \qquad \mathcal{H}=\int_Y \oplus \mathcal{H}_y\, \tau(dy). \tag{3.57}$$

Каждому оператору $\mathbb{T}\in \mathcal{R}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ сопоставляется операторнозначное /обобщенное/ ядро $T(x,y)\in \mathcal{R}(\mathcal{G}_x, \mathcal{H}_y)$. Именно для таких ядер в теории ДОИ рассматривается преобразование множителей M_φ вида

$$\mathbb{Q}=M_\varphi \mathbb{T}, \qquad Q(x,y)=\varphi(x,y)T(x,y),$$

где $\varphi\in L_\infty(\mu)^{1)}$ - скалярная функция. Проблема множителей состоит в выяснении условий непрерывности преобразования M_φ

в $\mathfrak{H}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ или в каком-либо из классов $\mathfrak{S}_p(\mathcal{G},\mathcal{H})$, $\mathfrak{S}^{(\beta)}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ и т.п. Преобразованию M_φ можно дать несколько иное (непосредственно унитарно инвариантное) толкование с помощью некоторого процесса интегрирования; именно на этом пути появляются двойные операторные интегралы (ДОИ). В настоящих лекциях мы ограничились случаем, когда T - скалярная функция, т.е. все пространства $\mathcal{G}_x$, $\mathcal{H}_y$ одномерны. Для некоторых (но не для всех) приложений этого достаточно. Наиболее интересным для нас фактом теории ДОИ является то обстоятельство, что теорема 3.15 остается в силе для операторнозначных ядер.

Приведем пример приложения ДОИ к теории операторов. Пусть $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ - самосопряженные операторы в $\mathcal{H}$ и пусть $\mathbb{T}=\mathbb{B}-\mathbb{A}\in\mathfrak{H}(\mathcal{H})$. Положим $\mathbb{Q}=\xi(\mathbb{B})-\xi(\mathbb{A})$, где ξ - комплексная функция на $\mathbb{R}^1$. Если разложения (3.57) при $\mathcal{G}=\mathcal{H}$, $X=Y=\mathbb{R}^1$ приводят операторы $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ к соответственным операторам умножения на независимую переменную, то

$$Q(x,y)=\frac{\xi(x)-\xi(y)}{x-y}\,T(x,y)\,. \qquad (3.58)$$

Используя утверждение теоремы 3.15, можно получить аналитические (в терминах функции ξ) условия принадлежности преобразования (3.58) классу $\mathfrak{M}$. Подробно этот вопрос изучен в [48], [55]. Здесь стоит отметить, что зависимость $\mathbb{Q}$ от $\mathbb{T}$ не является линейной. Однако ядро Q получается из ядра T с помощью линейного преобразования множителей, что дает возможность применить "линейные" результаты к нелинейной задаче. При этом, разумеется, возникает некоторое огрубление, связанное, в частности, с тем, что класс $\mathfrak{M}$ "уравнивает" пространства $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{S}_\infty$, $\mathfrak{S}_1$. В истинной нелинейной задаче такой симметрии нет. Нетрудно показать, например, что для ограниченных $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ и для непрерывной функции ξ из условия $\mathbb{T}\in\mathfrak{S}_\infty$ следует $\mathbb{Q}\in\mathfrak{S}_\infty$. В то же время в [56] показано, что даже при условии $\xi\in C^1$ из $\mathbb{T}\in\mathfrak{S}_1$ не вытекает включение $\mathbb{Q}\in\mathfrak{S}_1$.

Отметим, что до появления систематической теории ДОИ операторные интегралы возникли в работе Ю.Л.Далецкого и С.Г.Крейна [57] именно в связи с преобразованием вида (3.58). В [57] соответствующие ДОИ применялись к аналитической теории возмущений спектра. В работе [58] авторы использовали преобразование (3.58) для изучения так называемой функции спектрального сдвига, возникающей в теории возмущений на непрерывном спектре.

Другой пример проблемы множителей для операторнозначных ядер - преобразование вида

$$Q(x,y)=i\,sign(x-y)\,T(x,y)\,, \quad x,y\in Q^1, \tag{3.59}$$

которое переводит антиэрмитову часть вольтеррова оператора в его эрмитову часть. Теория этого преобразования подробно изложена в книге И.Ц.Гохберга и М.Г.Крейна [10]. Здесь мы отметим только, что преобразование (3.59) не принадлежит классу $\mathcal{M}$, но принадлежит любому из классов $\mathcal{M}(\mathfrak{S}_p)$, $1<p<\infty$, $\mathcal{M}(\mathfrak{S}^{(\beta)})$, $0<\beta<1$.

Признак ограниченности СИО в $L_2\mathbb{R}^m$, содержащийся в теореме 3.20, представляет собой теорему С.Г.Михлина [38], уточненную М.С.Аграновичем [39]. Доказательство в [38], [39] основано на разложениях по сферическим функциям. Возможность накладывать условия на символ $\varphi(\xi,x)$ ПДО (в частности, СИО) по переменной x была обнаружена Дж.Коном и Л.Ниренбергом [40]. Эти условия в [40] формулируются в терминах преобразования Фурье символа (по переменной x). Включение авторами [36] задачи об ограниченности ПДО в общую проблему множителей (в теорию ДОИ) позволило выяснить мультипликаторный характер этих признаков, а также получить более точные условия ограниченности ПДО и СИО в $L_2\mathbb{R}^m$. Наиболее сильными здесь являются признаки теорем 3.28, 3.29, содержащие в себе указанные выше результаты, а также результат теоремы 3.19. Доказательство теорем 3.28, 3.29, данное в [37], основано на общей теореме 3.18. Результаты, близкие к теоремам 3.28, 3.29, получены в работах В.Г.Мазьи и Ю.Е.Хайкина [59], [60] прямым методом, не использующим двойственность между $\mathfrak{S}_1$ и $\mathcal{R}$.

Все известные авторам признаки ограниченности СИО в $L_2\mathbb{R}^m$ имеют мультипликаторный характер. Л.Хермандер [61] указал для некоторого класса ПДО (не содержащего СИО), условия ограниченности в $L_2\mathbb{R}^m$, которые не являются мультипликаторными. Сочетая их с мультипликаторными признаками этой главы, можно получать новые признаки ограниченности ПДО.

Проблема множителей в пространствах ℓ_r восходит, по-видимому, к работе С.Б.Стечкина [62], который показал, что при $m=1$ функция ψ ограниченной вариации порождает преобразование множителей m_ψ, непрерывное в ℓ_r при всех $r\in(0,\infty)$. Теорема 3.24 принадлежит авторам [36]. Ее можно рассматривать как обобщение результатов И.Хиршмана [41]. Последние при $m>1$ соответствуют теореме 3.24 с заменой класса $W_p^\alpha \mathcal{T}^m$ классом $C^\alpha \mathcal{T}^m$; при $m=1$ результаты Хирмана точнее теоремы 3.24. Включение в схему ДОИ позволило установить [63], что мультипликаторы Стечкина и Хирмана, рассматриваемые как ядра, зависящие от разности, являются также мультипликаторами в соответствующих классах ядер $\tilde{\mathcal{J}}_r$ на $\mathcal{T}^1 \times \mathcal{T}^1$. Аналогичное замечание при $m>1$ справедливо для мультипликаторов теоремы 3.24; в этом случае оно прямо следует из теоремы 3.17.

ГЛАВА 4

Асимптотическое поведение спектра полигармонического оператора в весовых пространствах

I. <u>Постановка задач</u>. В настоящей лекции исследуется спектр вариационных задач, соответствующих классическим краевым задачам для уравнения

$$(-\Delta)^{\ell} u = \lambda^{-1} p(x) u . \tag{4.I}$$

Вспомогательную роль будет играть несколько более общее уравнение с параметром

$$(-\Delta)^{\ell} u + a u = \lambda^{-1} p(x) u , \qquad a \geqslant 0 . \tag{4.2}$$

Для этих уравнений мы рассмотрим задачи $\mathcal{D}_a$ (Дирихле) и $\mathcal{N}_a$ (Неймана), $a \geqslant 0$; при $a=0$ будем говорить о "задачах $\mathcal{D}$, $\mathcal{N}$ ".

В уравнениях вида (4.I), (4.2) спектральный параметр чаще обозначают не через λ^{-1}, а через λ, что приводит к растущей последовательности собственных чисел. Нам удобнее параметр λ^{-1}, так как это позволяет непосредственно (без перехода к обратным операторам) использовать свойства собственных чисел компактных операторов.

Наша цель состоит в получении оценок и асимптотических формул для собственных чисел $\{\lambda_n\}$ уравнений (4.I), (4.2) без излишних ограничений на область и коэффициент ("вес") p. Прежде всего мы покажем, что непосредственным следствием теорем 2.3, 2.17, 2.23 являются оценки величины $n^{2\ell m^{-1}} \lambda_n$ через некоторые интегральные характеристики веса p. Вывод асимптотических формул опирается на эти оценки и на леммы I.17, I.18.

Изложим подробнее постановку задачи. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ -произвольное ограниченное x) открытое множество. При изучении задачи $\mathcal{N}_a$ будем считать, что Ω - ограниченная область, допускающая обычные теоремы вложения и продолжения для функций класса С.Л.Соболева $H_\ell \Omega$; о таких областях будем говорить, что они принадлежат классу $\mathcal{K}$. Широкие условия принадлежности области Ω классу $\mathcal{K}$ найдены Кальдероном [64]: если каждая точка $x \in \partial\Omega$

x) Неограниченные множества будут рассмотрены в п.п.7, 8.

имеет окрестность, в которой $\partial\Omega$ в подходящей ("местной") системе координат допускает явное задание вида $x_m = \omega(x_1,\ldots,x_{m-1})$, причем функция ω удовлетворяет условию Липшица, то $\Omega \in \mathcal{K}$.

Будем пользоваться следующими обозначениями основных квадратичных форм:

$$\mathcal{J}_\ell[u,u] = \int_\Omega |\nabla_\ell u|^2 dx, \qquad \mathcal{J}_{\ell,a}[u,u] = \mathcal{J}_\ell[u,u] + a\|u\|_2^2.$$

Форма $\mathcal{J}_{\ell,1}$ определяет стандартную метрику класса $H_\ell\Omega$; форма $\mathcal{J}_{\ell,a}$ при $a>0$ определяет в $H_\ell\Omega$ эквивалентную метрику. Класс $H_\ell\Omega$, в котором за основную метрическую форму принята форма $\mathcal{J}_{\ell,a}$, условимся обозначать через $H_{\ell,a}\Omega$.

В гильбертовом пространстве $H_{\ell,a}\Omega$ рассмотрим подпространство $\overset{\circ}{H}_{\ell,a}\Omega$ – замыкание множества $\overset{\circ}{C}{}^\infty_0\Omega$. Поскольку множество Ω ограничено, форма $\mathcal{J}_\ell$ определяет в $\overset{\circ}{H}_{\ell,a}\Omega$ эквивалентную метрику. Пространство $\overset{\circ}{H}_{\ell,a}\Omega$, наделенное этой метрикой, обозначим через $\overset{\circ}{H}_\ell\Omega = \overset{\circ}{H}_{\ell,0}\Omega$.

Пусть ρ – мера, определенная на борелевских подмножествах Ω. Сопоставим ей квадратичную форму

$$\mathcal{J}_\rho[u,u] = \int_\Omega |u|^2 \rho(dx). \tag{4.3}$$

При условиях, которые сформулированы ниже, форма $\mathcal{J}_\rho$ оказывается ограниченной и вполне непрерывной в пространствах $\overset{\circ}{H}_{\ell,a}\Omega$ $(a\geqslant 0)$ и $H_{\ell,a}\Omega$ $(a>0)$. Она определяет в каждом из этих пространств компактный оператор, который мы обозначим соответственно через $T(\mathcal{D}_a) = T(\ell,\rho,\Omega,\mathcal{D}_a)$ или через $T(\mathcal{N}_a) = T(\ell,\rho,\Omega,\mathcal{N}_a)$. Спектр оператора $T(\mathcal{D}_a)$ (оператора $T(\mathcal{N}_a)$) будем по определению называть спектром задачи $\mathcal{D}_a = \mathcal{D}_a(\ell,\rho,\Omega)$ (задачи $\mathcal{N}_a$).

Задачи $\mathcal{D}_a$, $\mathcal{N}_a$ рассматриваются ниже при следующих условиях на множество Ω и меру ρ.

Условие I$\mathcal{D}$. Ω – ограниченное открытое множество; мера $\rho \in \mathfrak{M}_r\Omega$, где $r=1$ при $2\ell>m$, $r>1$ при $2\ell=m$ и

$$r = \frac{m}{2\ell} \tag{4.4}$$

при $2\ell<m$.

Условие I$\mathcal{N}$. Дополнительно к I$\mathcal{D}$ предполагается $\Omega \in \mathcal{K}$. ▲.

Если имеется в виду любая из задач $\mathcal{D}_a$, $\mathcal{N}_a$, будем говорить просто об "условии I".

При выполнении условия I форма $\mathcal{J}_\rho$ вполне непрерывна в $\overset{\circ}{H}_{\ell,a}\Omega$ $(a\geq 0)$ и в $H_{\ell,a}\Omega$ $(a>0)$. Это легко следует из основной теоремы вложения С.Л.Соболева; мы не будем здесь на этом останавливаться. Впрочем, полная непрерывность формы $\mathcal{J}_\rho$ является побочным следствием получаемых ниже оценок собственных значений.

Обозначим собственные значения компактных операторов $T(\mathcal{D}_a)$, $T(\mathcal{N}_a)$ соответственно через $\lambda_n(\ell,\rho,\Omega,\mathcal{D}_a)$, $\lambda_n(\ell,\rho,\Omega,\mathcal{N}_a)$. В случаях, когда это не может вызвать недоразумений, используем сокращенные обозначения типа $\lambda_n(\Omega,\mathcal{D}_a)$, $\lambda_n(\mathcal{N}_a)$ или даже просто λ_n. Функции распределения собственных значений обозначим через $n(\lambda;\ell,\rho,\Omega,\mathcal{D}_a)=n(\lambda;\mathcal{D}_a)$ и т.п.

Из минимаксимального принципа (из формулы (I.25)) вытекает, что собственные числа λ_n совпадают с последовательными максимумами отношения квадратичных форм

$$\mathcal{J}_\rho[u,u]/\mathcal{J}_{\ell,a}[u,u],\ u\in\overset{\circ}{H}_{\ell,a}\Omega;\ a\geq 0, \qquad (4.5\mathcal{D})$$

$$\mathcal{J}_\rho[u,u]/\mathcal{J}_{\ell,a}[u,u],\ u\in H_{\ell,a}\Omega;\ a>0, \qquad (4.5\mathcal{N})$$

соответственно для задачи $\mathcal{D}_a$ и $\mathcal{N}_a$. Иногда мы будем говорить о спектре отношения ($4.5\mathcal{D}$) или ($4.5\mathcal{N}$), о задачах $\mathcal{D}_a$ и $\mathcal{N}_a$ для отношения квадратичных форм и т.п.

Остановимся теперь на постановке задачи $\mathcal{N}=\mathcal{N}_0$; она, как обычно, требует введения некоторых условий ортогональности.

Введем на конечномерном (ν-мерном) пространстве полиномов $\mathcal{P}(\ell,m)$ метрику, индуцируемую формой $\mathcal{J}_\rho$. Эта метрика, вообще говоря, вырождается на некотором подпространстве $\mathcal{P}(\rho)\subset\mathcal{P}(\ell,m)$. Иногда заведомо $\mathcal{P}(\rho)=\{0\}$ – например, при $\ell=1$ или в случае, когда абсолютно непрерывная часть меры отлична от нуля (в силу условия I это заведомо так при $2\ell\leq m$).

Пусть полиномы $q_j(x)$ образуют базис в $\mathcal{P}(\rho)$. Рассмотрим следующий квадратичный функционал, который уже заведомо не вырождается на $\mathcal{P}(\ell,m)$:

$$\Phi_\rho[u,u]=\sum_{|\varkappa|<\ell}\left|\int_\Omega u x^\varkappa \rho(dx)\right|^2+\sum_j\left|\int_\Omega u\bar{q}_j dx\right|^2\ (u\in H_\ell\Omega).\ (4.6)$$

Форма $\mathcal{J}_\ell + \Phi_\rho$, очевидно, определяет в $H_\rho\Omega$ метрику, эквивалентную метрике $\mathcal{J}_{\ell,a}$, $a>0$.

Условие $\Phi_\rho[u,u]=0$ выделяет в $H_\rho\Omega$ подпространство $\mathcal{Z}_\ell = \mathcal{Z}_\ell(\rho)\Omega$, причем $codim\ \mathcal{Z}_\ell = \nu(\ell,m)$. Задачу $\mathcal{N}$ мы определим как задачу о последовательных максимумах отношения квадратичных форм

$$\mathcal{J}_\rho[u,u]/\mathcal{J}_\ell[u,u], \qquad u\in \mathcal{Z}_\ell(\rho)\Omega .$$

Переход к подпространству $\mathcal{Z}_\ell$, во-первых, заменяет факторизацию относительно подпространства $\mathcal{P}(\rho)$, на котором числитель и знаменатель отношения (4.6) одновременно вырождаются, и, во-вторых, устраняет конечномерное "собственное подпространство", отвечающее значению $\lambda^{-1}=0$.

Отметим, что, если мера ρ абсолютно непрерывна, ее плотность $\rho = d\rho/dx$ и граница $\partial\Omega$ достаточно гладкие и $\rho(x)\geqslant\delta^2>0$, то числа $\{\lambda_n(\mathcal{D}_a)\},\{\lambda_n(\mathcal{N}_a)\}$, $a\geqslant 0$, представляют собой спектр соответствующей краевой задачи для уравнения (4.2) в классической постановке. Собственные функции u удовлетворяют уравнению (4.2) и, в случае задачи $\mathcal{D}_a$, граничным условиям

$$D^{\varkappa}u\Big|_{\partial\Omega}=0, \qquad 0\leq|\varkappa|<\ell .$$

В случае задачи $\mathcal{N}_a$ собственные функции удовлетворяют некоторым естественным (в смысле вариационного исчисления) граничным условиям. Нам нет необходимости выписывать эти условия явно.

Остановимся еще на "зарядовом" случае. Пусть σ - заряд и $\mathcal{J}_\sigma$ - квадратичная форма, аналогичная форме (4.3):

$$\mathcal{J}_\sigma[u,u]=\int_\Omega |u|^2\sigma(dx) .$$

Постановка спектральных задач $\mathcal{D}_a$, $a\geqslant 0$ и $\mathcal{N}_a$, $a>0$ для отношения квадратичных форм

$$\mathcal{J}_\sigma[u,u]/\mathcal{J}_{\ell,a}[u,u] \tag{4.7}$$

при этом не претерпевает изменений, если множество Ω и мера $|\sigma|$ удовлетворяют условию I. Постановка задачи $\mathcal{N}$ также сохраняется. Нужно лишь принять во внимание, что теперь роль "подпространства вырождения" $\mathcal{P}(\rho)$ играет подпространство $\mathcal{P}(\sigma)$ тех полиномов $q \in \mathcal{P}(\ell, m)$, которые удовлетворяют условию $\mathcal{J}_\sigma[q, \rho] = 0$ при всяком $\rho \in \mathcal{P}(\ell, m)$. Кроме того, в определении функционала (4.6) следует заменить меру ρ зарядом σ.

В зарядовом случае операторы $T(\mathcal{D}_a)$, $T(\mathcal{N}_a)$ имеют как положительные, так и отрицательные собственные числа. В связи с этим будем употреблять обозначения типа $\lambda_n^\pm(\mathcal{D}_a)$, $n_\pm(\lambda; \mathcal{N}_a)$ и т.п. (ср. п.I. Добавления I).

2. <u>Оценки собственных значений.</u> Оценки достаточно получить для "настоящих" мер. Случай зарядов немедленно сводится к случаю мер (см. ниже замечание 4.4).

Теорема 4.I. I) Пусть множество Ω и мера ρ удовлетворяют условию I$\mathcal{D}$. Тогда собственные числа задачи $\mathcal{D}_a(\ell, \rho, \Omega)$ удовлетворяют неравенству

$$\lambda_n(\mathcal{D}_a) \leq C_0 n^{-2\ell/m} \|\rho\|_{(r)} (\operatorname{diam} \Omega)^{2\ell - \frac{m}{r}} \quad (a \geq 0); \tag{4.8}$$

Постоянная $C_0 = C_0(m, \ell, r)$ не зависит от множества Ω, меры ρ и числа $a \geq 0$.

2) Пусть область Ω и мера ρ удовлетворяют условию I$\mathcal{N}$. Тогда собственные числа задачи $\mathcal{N}_a(\ell, \rho, \Omega)$, $a > 0$, удовлетворяют неравенству

$$\lambda_n(\mathcal{N}_a) \leq C_0' n^{-2\ell/m} \|\rho\|_{(r)} \quad (a > 0); \tag{4.9}$$

постоянная $C_0' = C_0'(m, \ell, r, \Omega, a)$ не зависит от меры ρ.

3) Пусть условия п.I) или п.2) выполнены при $2\ell > m$ и мера ρ сингулярна. Тогда (наряду с оценкой (4.8) или (4.9)) справедливо соотношение

$$\lambda_n = o(n^{-2\ell/m}). \quad \blacktriangle. \tag{4.10}$$

Доказательство. I) Рассмотрим прежде всего случай $2\ell \geq m$. Пусть сначала $a = 0$, $\Omega = Q^m$ и $\|\rho\|_{(r)} \leq 1$. Фиксируем натуральное n и воспользуемся теоремой 2.3, полагая в ее условии $p = q = 2$, $\alpha = \ell$. Согласно этой теореме существует такое разбиение Ξ куба Q^m на меньшие кубы, что $|\Xi| \leq n$ и для любой функции $u \in H_\ell Q^m$ справедливо неравенство

$$N(u - P_{\Xi,\ell} u \,|\, L_2(\rho) Q^m) \leq C n^{-\ell/m} N(u \,|\, \mathring{H}_\ell Q^m), \tag{4.11}$$

где $C=C'(\ell,m,r)$ – постоянная из (2.4). Рассмотрим $P_{\Xi,\ell}$ как оператор из $\overset{\circ}{H}_\ell Q^m$ в $L_\infty Q^m$ и положим $\mathcal{F}=\operatorname{Ker} P_{\Xi,\ell}$. Справедливо неравенство

$$\operatorname{codim} \mathcal{F} \le n\nu . \tag{4.12}$$

В самом деле, условие $u\in\mathcal{F}$, в соответствии с (I.3), означает, что функция u удовлетворяет условиям ортогональности, общее число которых равно $|\Xi|\nu \le \nu n$.

Для $u\in\mathcal{F}$, очевидно, в силу (4.II)

$$\mathcal{I}_\rho[u,u]=N^2(u|L_2(\rho)Q^m)=$$

$$=N^2(u-P_{\Xi,\ell}u|L_2(\rho)Q^m)\le C^2\mathcal{J}_\ell[u,u]\,n^{-2\ell/m} .$$

Иначе говоря,

$$\max_{u\in\mathcal{F}} \mathcal{I}_\rho[u,u]/\mathcal{J}_\ell[u,u]\le C^2 n^{-2\ell/m} . \tag{4.13}$$

Согласно (I.25) и (4.I2) отсюда следует, что

$$\lambda_{n\nu+1}(\mathcal{D})\le C^2 n^{-2\ell/m} \qquad (n=1,2,\dots) . \tag{4.14}$$

Из теоремы вложения Соболева вытекает неравенство

$$\mathcal{I}_\rho[u,u]\le c\mathcal{J}_\ell[u,u] \qquad (u\in \overset{\circ}{H}_\ell Q^m) ,$$

причем постоянная $c=c(\ell,m,r)$ не зависит от меры $\rho\in S\mathfrak{M}_r Q^m$. Это дает нужную оценку для λ_1. Отсюда и из (4.I4) следует существование такой постоянной $C_0(\ell,m,r)$, что

$$\lambda_n\le C_0 n^{-2\ell/m} , \qquad n=1,2,\dots . \tag{4.15}$$

Пусть теперь Ω – открытое множество, содержащееся в Q^m. Определим на борелевских подмножествах $\delta\subset Q^m$ меру ρ_1 посредством равенства

$$\rho_1(\delta)=\rho(\delta\cap\Omega) .$$

Сравним задачи $\mathcal{D}(\ell,\rho,\Omega)$ и $\mathcal{D}(\ell,\rho_1,Q^m)$. Из обычных вариационных соображений находим, что

$$\lambda_n(\ell,\rho,\Omega,\mathcal{D})\le\lambda_n(\ell,\rho_1,Q^m,\mathcal{D})\le C_0 n^{-2\ell/m}.$$

Далее, множитель $\|\rho\|_{(r)}$ в (4.8), как легко проверить, возникает при освобождении от условия нормировки $\|\rho\|_{(r)}\le 1$. На произвольные ограниченные открытые множества оценка распространяется с помощью преобразования подобия; при этом появляется множитель $[diam\ \Omega]^{2\ell-mr^{-1}}$. Наконец, так как $\mathcal{J}_\ell[u,u]\le\mathcal{J}_{\ell,a}[u,u]$, то

$$\lambda_n(\mathcal{D}_a)\le\lambda_n(\mathcal{D}),\qquad a\ge 0.$$

Для случая $2\ell\ge m$ утверждение I) доказано.

Перейдем к случаю $2\ell<m$. Пусть сначала $a=0$, $\Omega=Q^m$ и $\|\rho\|_{(r)}\le 1$. Воспользуемся теоремой 2.17, полагая в ее условии $p=q=2$, $\alpha=\ell$. Согласно этой теореме существует такой оператор кусочно-полиномиальных приближений $K_{H,\ell}$, что $rang\,K_{H,\ell}\le\varkappa_m n\nu$ и для любой функции $u\in\overset{\circ}{H}_\ell Q^m$ справедливо неравенство

$$N(u-K_{H,\ell}|L_2(\rho)Q^m)\le Cn^{-\ell/m}N(u|\overset{\circ}{H}_\ell Q^m),$$

где $C=C(\ell,m)$ - постоянная из (2.26). Дальнейшая часть рассуждения проводится так же, как при $2\ell\ge m$. В $\overset{\circ}{H}_\ell Q^m$ вводится подпространство $\tilde{\mathcal{F}}=Ker\,K_{H,\ell}$. Справедливо неравенство

$$codim\,\tilde{\mathcal{F}}=rang\,K_{H,\ell}\le\varkappa_m n\nu. \tag{4.16}$$

На подпространстве $\tilde{\mathcal{F}}$ выполняется оценка вида (4.13). Из нее и из (4.16) находим, что

$$\lambda_{\varkappa_m n\nu+1}(\mathcal{D})\le C^2 n^{-2\ell/m}.$$

Переход от этой оценки к оценке (4.15) осуществляется при помощи теоремы вложения с предельным показателем. Распространение результата на произвольные ограниченные открытые множества Ω, произвольные меры $\rho \in \mathfrak{M}_r \Omega$ и любые $a \geq 0$ не требует новых соображений. Утверждение I) теоремы 4.I доказано.

2) Если Ω - куб, то по сравнению со случаем задачи $\mathcal{D}$ не возникает никаких отличий. Поэтому остановимся лишь на перенесении результата на области $\Omega \in \mathcal{K}$, причем можно считать, что $\Omega \subset Q^m$.

Обозначим через Π какой-либо линейный непрерывный оператор продолжения функций класса H_ℓ из области Ω на куб Q^m. Пусть $\|\Pi\|_a$ - норма Π как оператора из $H_{\ell,a}\Omega$ в $H_{\ell,a}Q^m$. Введем меру $\rho_1(\cdot)=\rho(\cdot \cap \Omega)$ и воспользуемся леммой I.I5, полагая в ее условии $\mathcal{G}_1 = H_{\ell,a}\Omega$, $\mathcal{G}_2 = H_{\ell,a}Q^m$,

$$T_1 = T(\ell, \rho, \Omega, \mathcal{N}_a), \qquad T_2 = T(\ell, \rho_1, Q^m, \mathcal{N}_a),$$

$S = \mathring{\Pi}$. Очевидно, подпространство $\operatorname{Ker} S$ здесь тривиально. Неравенство (I.27) переходит в соотношение

$$\frac{\mathcal{J}_\rho[u,u]}{\mathcal{J}_{\ell,a}[u,u]} \leq \|\Pi\|_a^2 \frac{\mathcal{J}_{\rho_1}[\Pi u, \Pi u]}{\mathcal{J}_{\ell,a}[\Pi u, \Pi u]}.$$

Отсюда и из уже известного результата для Q^m следует нужная оценка в области Ω.

3) Утверждение относительно сингулярной меры очевидным образом получается на основании теоремы 2.4. ▨.

Замечание 4.2. Пусть выполнено условие I$\mathcal{N}$. Лемма I.I6 позволяет вывести из (4.9) оценку для спектра задачи $\mathcal{N}$

$$\lambda_n(\mathcal{N}) = O(n^{-2\ell/m}).$$

Однако равномерность относительно меры $\rho \in S\mathfrak{M}_r\Omega$ здесь установить не удается. Это связано с зависимостью от ρ пространства $\mathcal{X}_\ell(\rho)$, участвующего в постановке задачи $\mathcal{N}$.

Замечание 4.3. Оценки (4.8)-(4.I0) можно переформулировать в терминах функций распределения $n(\lambda)$. Именно, в условиях п.п.I)-3) теоремы 4.I соответственно справедливы неравенства (при $\theta = m/2\ell$)

$$n(\lambda; \mathcal{D}_a) \leq C_1 \lambda^{-\theta} \|\rho\|_{(r)}^{\theta} (\operatorname{diam}\Omega)^{m(1-\theta r^{-1})}, \qquad a \geq 0, \quad C_1 = C_1(m,\ell,r); \tag{4.17}$$

$$n(\lambda;\mathcal{N}_a)\le C_1'\lambda^{-\theta}\|\rho\|_{(r)}^{\theta},\quad C_1'=C_1'(m,\ell,r,\Omega,a),\ a>0; \qquad (4.18)$$

$$n(\lambda)=O(\lambda^{-\theta}),\quad \lambda\to 0. \qquad (4.19)$$

Замечание 4.4 Пусть σ - заряд. Из неравенства

$$-\int_\Omega |u|^2\sigma_-(dx)\le\int_\Omega |u|^2\sigma(dx)\le\int_\Omega |u|^2\sigma_+(dx)$$

с помощью стандартных вариационных соображений находим, что для задач $\mathcal{D}_a$ $(a\ge 0)$ и $\mathcal{N}_a$ $(a>0)$ справедливы неравенства

$$n_\pm(\lambda;\sigma)\le n(\lambda;\sigma_\pm).$$

Это позволяет распространить на задачи $\mathcal{D}_a(\ell,\sigma,\Omega)$, $\mathcal{N}_a(\ell,\sigma,\Omega)$ результат теоремы 4.I и замечания 4.3. Оценки, аналогичные оценкам (4.17), (4.18), имеют вид

$$n_\pm(\lambda;\sigma,\mathcal{D}_a)\le C_1\lambda^{-\theta}\|\sigma_\pm\|_{(r)}^{\theta}(\operatorname{diam}\Omega)^{m(1-\theta r^{-1})}\quad (a\ge 0); \qquad (4.20)$$

$$n_\pm(\lambda;\sigma,\mathcal{N}_a)\le C_1'\lambda^{-\theta}\|\sigma_\pm\|_{(r)}^{\theta}\qquad (a>0). \qquad (4.21)$$

При этом, если нас интересует поведение лишь функции $n_+(\lambda)$ (функции $n_-(\lambda)$), то ограничения на отрицательную (положительную) часть заряда излишни.

Замечание 4.5. Для задачи $\mathcal{D}_a$ при $2\ell<m$ оценки (4.8), (4.17) в силу (4.4) принимают вид

$$\lambda_n(\mathcal{D}_a)\le Cn^{-2\ell/m}\|\rho\|_{(r)},\quad n(\lambda;\mathcal{D}_a)\le C_1\lambda^{-\theta}\|\rho\|_{(r)}^{\theta}.$$

Таким образом, при $2\ell<m$ оценки не зависят ни от формы, ни от диаметра множества Ω .

3. Формулировка основного результата. Ближайшие пункты посвящены оправданию формулы спектральной асимптотики для задач $\mathcal{D}_a$, $\mathcal{N}_a$ при условии I. Мы будем сразу рассматривать случай зарядов, т.е. спектр отношения (4.7).

Пусть $\rho=d\sigma/dx$ - плотность заряда σ , $\rho_\pm=\frac{1}{2}(|\rho|\pm\rho)=d\sigma_\pm/dx$. Положим

$$\omega_\pm=\omega_\pm(m,\ell,\rho,\Omega)=\frac{(2\sqrt{\pi})^{-m}}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}\int_\Omega \rho_\pm^\theta\,dx\quad \left(\theta=\frac{m}{2\ell}\right). \qquad (4.22)_\pm$$

Теорема 4.6. Пусть множество Ω и мера $|\sigma|$ удовлетворяют условию I $\mathcal{D}$ (условию I $\mathcal{N}$). Тогда для функций распределения $n_\pm(\lambda)$ спектра задачи $\mathcal{D}_a(\sigma,\Omega)$ (задачи $\mathcal{N}_a(\sigma,\Omega)$) при $\alpha \geqslant 0$ имеют место формулы

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda^\theta n_\pm(\lambda) = \omega_\pm\ , \quad \theta = m/2\ell, \qquad \blacktriangle . \tag{4.23$_\pm$}$$

Асимптотика (4.22)-(4.23) может считаться известной в "гладком" случае при условии $\rho(x) \geqslant \rho_0 > 0$.

Наиболее простой способ доказательства теоремы 4.6 заключается в использовании готовых результатов для "гладких" задач и в их распространении на "негладкий" случай с помощью изложенных в Добавлении I фактов асимптотической теории возмущений. Такое доказательство проведено в [22], и оно существенно опирается на оценки, установленные в теореме 4.I.

Здесь мы предпочтем дать независимое изложение с тем, чтобы продемонстрировать в наиболее полном объеме решающую роль этих оценок. Приводимое доказательство является последовательно вариационным. Оно (как обычно при использовании вариационного метода) распадается на три этапа. I) Вычисление спектральной асимптотики задач $\mathcal{D}_a$, $\mathcal{N}_a$ в кубе при постоянной функции $\rho > 0$. 2) Распространение результата на области, допускающие разбиение на конечное число кубов, и на кусочно-постоянные функции ρ . 3) Распространение на более широкий класс множеств Ω и функций ρ .

Первый этап несколько осложняется тем, что при $\ell > 1$ переменные не разделяются. Второй этап требует лишь элементарных вариационных соображений. Проведение третьего этапа требует как правило громоздкой техники, связанной, в основном, с необходимостью включения "кривых" границ.

Мы покажем, что подход, основанный на применении теоремы 4.I и леммы I.I8, существенно облегчает технические затруднения при проведении вариационного метода (это сказывается уже на первом этапе). Гибкость предлагаемого подхода определяется двумя важными свойствами оценок (4.8), (4.9) (и вытекающих из них оценок (4.20), (4.21)): их равномерностью по отношению к мерам (зарядам) класса $S\mathfrak{M}_r\Omega$ и, для задачи $\mathcal{D}_a$, независимостью от свойств границы множества Ω .

4. Условные результаты. Здесь приведены результаты условного характера, полезные при доказательстве теоремы 4.6. Все они получаются сопоставлением теоремы 4.I и некоторых лемм из Добавле-

ния I. Величины вида (I.28), (I.29), например, для оператора $T(\ell,\sigma,\Omega,\mathcal{D}_a)$ условимся обозначать через $\Delta^{\pm}_{\theta}(\ell,\sigma,\Omega,\mathcal{D}_a)$, $\Delta_{\theta}(\ell,\sigma,\Omega,\mathcal{D}_a)$ и т.п. Иногда часть символов в обозначениях опускается. Ниже всюду $\theta = m/2\ell$; условие I относится к мере $|\sigma|$.

Лемма 4.7. Пусть выполнено условие I. Тогда величины $\Delta^{\pm}_{\theta}$, $\delta^{\pm}_{\theta}$ для задач $\mathcal{D}_a$, $\mathcal{N}_a$ не зависят от $a \geq 0$. ▲.

Доказательство. Для задачи $\mathcal{D}_a$, $a \geq 0$, а также для задачи $\mathcal{N}_a$, $a>0$, требуемый результат непосредственно вытекает из леммы I.16 и из компактности вложения $\overset{o}{H}_{\ell}\Omega$ (или, при $\Omega \in \mathcal{K}$, вложения $H_{\ell}\Omega$) в пространство $L_2\Omega$. Остановимся на задаче $\mathcal{N}$. Из леммы I.16 следует, что величины $\Delta^{\pm}_{\theta}$, $\delta^{\pm}_{\theta}$ для отношения

$$\mathcal{J}_{\sigma}[u,u] / (\mathcal{J}_{\ell}[u,u] + \Phi_{\sigma}[u,u]), \qquad u \in H_{\ell}\Omega, \tag{4.24}$$

совпадают с $\Delta^{\pm}_{\theta}(\mathcal{N}_1)$, $\delta^{\pm}_{\theta}(\mathcal{N}_1)$. При переходе в (4.24) к условию $u \in \mathfrak{Z}_{\ell}(\sigma)$ мы вводим $\nu = \nu(\ell,m)$ условий ортогональности (при этом член Φ_{σ} в (4.24) исчезает). В результате функция $n(\lambda;\mathcal{N})$ может измениться не более чем на число ν, что не сказывается на величине пределов $\Delta^{\pm}$, $\delta^{\pm}$. ▨.

Установим теперь, что при $2\ell > m$ сингулярная составляющая заряда σ не влияет на главный член асимптотики.

Лемма 4.8. Пусть условие I выполнено при $2\ell>m$ и пусть σ_0 -абсолютно непрерывная составляющая заряда σ. Тогда для задач $\mathcal{D}_a$, $\mathcal{N}_a$ $(a \geq 0)$

$$\Delta^{\pm}_{\theta}(\sigma) = \Delta^{\pm}_{\theta}(\sigma_0), \qquad \delta^{\pm}_{\theta}(\sigma) = \delta^{\pm}_{\theta}(\sigma_0). \quad ▲.$$

Доказательство. Пусть для определенности речь идет о задаче $\mathcal{D}$ и пусть $\sigma_s = \sigma - \sigma_0$. Разложению $\mathcal{J}_{\sigma} = \mathcal{J}_{\sigma_0} + \mathcal{J}_{\sigma_s}$ соответствует разложение оператора $T(\sigma,\mathcal{D})$:

$$T(\sigma,\mathcal{D}) = T(\sigma_0,\mathcal{D}) + T(\sigma_s,\mathcal{D}).$$

Заметим, что $n(\lambda;\sigma_s) = n_+(\lambda;\sigma_s) + n_-(\lambda;\sigma_s) \leq n(\lambda;\sigma_{s+}) + n(\lambda;\sigma_{s-}) \leq 2n(\lambda;|\sigma_s|)$. Так как мера $|\sigma_s|$ сингулярна и $|\sigma_s| \in \mathfrak{M}_{\ell}\Omega$, то, в силу (4.19), $n(\lambda;\sigma_s) = o(\lambda^{-\theta})$. Остается сослаться на лемму I.17. Точно так же рассматривается задача $\mathcal{N}_a$, $a>0$. Лемма 4.7 позволяет затем включить случай $a=0$. ▨.

Лемма 4.8 показывает, что в дальнейшем можно ограничиться рассмотрением абсолютно непрерывных зарядов. В этом случае будем пользоваться обозначениями типа $\Delta^{\pm}_{\theta}(\ell,\rho,\Omega,\mathcal{D})$, где $\rho=d\sigma/dx$.

Лемма 4.9. Пусть выполнено условие I, причем в случае $2\ell=m$ показатель $r>1$ фиксирован. Тогда функционалы $\Delta^{\pm}_{\theta}(\ell,\rho,\Omega)$, $\delta^{\pm}_{\theta}(\ell,\rho,\Omega)$ непрерывны в $L_r\Omega$ относительно функции ρ.

В частности, при указанных условиях множество функций ρ, для которых справедлива формула (4.22)-(4.23) для спектра задачи $\mathcal{D}_a$ или $\mathcal{N}_a$, $a\geq 0$, замкнуто в $L_r\Omega$. ▲.

Доказательство. Пусть речь идет о задаче $\mathcal{D}$ и пусть $\rho\in L_r\Omega$, $\rho_\varepsilon\in L_r\Omega$. Тогда

$$T(\rho)=T(\rho_\varepsilon)+T(\rho-\rho_\varepsilon).$$

В соответствии с (4.20)

$$\Delta_\theta(\rho-\rho_\varepsilon,\mathcal{D})\leq c\|\rho-\rho_\varepsilon\|^{\theta}_{r},$$

причем постоянная c не зависит от ρ, ρ_ε. Пусть теперь $\|\rho-\rho_\varepsilon\|_r\to 0$; ссылка на лемму I.18 завершает доказательство. Точно так же рассматривается задача $\mathcal{N}_1$. ■.

Лемма 4.9 полезна во многих отношениях. Во-первых, она позволяет в дальнейшем ограничиться рассмотрением гладких (или, когда это удобнее, кусочно-постоянных) функций ρ. Во-вторых, она дает возможность сводить дело к случаю финитных ρ. Это позволяет в ряде технических моментов ограничиться рассмотрением внутренних подобластей множества Ω.

Следующее утверждение может служить иллюстрацией сказанного. Мы покажем, что для $\Omega\in\mathfrak{K}$ асимптотическое поведение собственных значений задач $\mathcal{D}_a$ и $\mathcal{N}_a$ заведомо одинаково.

Лемма 4.10. Пусть выполнено условие I $\mathcal{N}$. Тогда

$$\Delta^{\pm}_{\theta}(\mathcal{N})=\Delta^{\pm}_{\theta}(\mathcal{D}),\qquad \delta^{\pm}_{\theta}(\mathcal{N})=\delta^{\pm}_{\theta}(\mathcal{D}).\qquad ▲. \tag{4.25}$$

Доказательство, в соответствии с леммой 4.7, можно вести для задач $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{N}_1$. По лемме 4.9 достаточно рассмотреть случай, когда $\rho=0$ в некоторой окрестности $\partial\Omega$.

Пусть вещественная функция $\zeta\in C^\infty_0\Omega$ такова, что $0\leq\zeta\leq 1$ и $\rho\zeta\equiv\rho$ в Ω. Фиксируем $\varepsilon\in(0,1)$ и рассмотрим следующее неравенство, справедливое для всех $u\in H_\ell\Omega$:

$$\mathcal{J}_{\ell,1}[u,u] \geq \varepsilon \mathcal{J}_\ell[u,u] + \|u\|_\ell^2 + (1-\varepsilon)\int_\Omega \zeta^2 |\nabla_\ell u|^2 dx =$$

$$= \varepsilon \mathcal{J}_\ell[u,u] + (1-\varepsilon)\mathcal{J}_\ell[\zeta u, \zeta u] + \|u\|_\ell^2 + (1-\varepsilon)\int_\Omega \left[\zeta^2 |\nabla_\ell u|^2 - |\nabla_\ell (\zeta u)|^2\right] dx.$$

В полученном выражении последнее слагаемое представляет собой квадратичную форму низшего порядка, а потому вполне непрерывную в пространстве $H_\ell \Omega$. Согласно лемме I.16 величины $\Delta_\theta^\pm(\mathcal{N}_1)$, $\delta_\theta^\pm(\mathcal{N}_1)$ совпадают с соответствующими величинами для отношения

$$\mathcal{J}_p[u,u] / (\varepsilon \mathcal{J}_\ell[u,u] + (1-\varepsilon)\mathcal{J}_\ell[\zeta u, \zeta u] + \|u\|_\ell^2) \quad (u \in H_\ell \Omega). \qquad (4.26)$$

Уменьшая знаменатель, находим, что функция $n_\pm(\lambda)$ для отношения (4.26) не превосходит функции $n_\pm(\lambda)$ для отношения

$$\frac{\mathcal{J}_p[u,u]}{(1-\varepsilon)\mathcal{J}_{\ell,1}[\zeta u, \zeta u]} = \frac{\mathcal{J}_p[\zeta u, \zeta u]}{(1-\varepsilon)\mathcal{J}_{\ell,1}[\zeta u, \zeta u]} \quad (u \in H_\ell \Omega). \qquad (4.27)$$

Воспользуемся леммой I.15, принимая за пространство $\mathfrak{H}_1$ класс $H_\ell \Omega$, в котором метрика определена квадратичной формой, стоящей в знаменателе отношения (4.26), и за оператор T_1 – оператор, определяемый в $\mathfrak{H}_1$ формой $\mathcal{J}_p$. Положим, далее, $\mathfrak{H}_2 = \overset{\circ}{H}_\ell \Omega$, $T_2 = T(\ell, p, \Omega, \mathcal{D}_1)$. Оператор $S: u \longmapsto \zeta u$ непрерывно отображает $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$, при этом из $Su = 0$ следует $pu = 0$, а, значит, и $\mathcal{J}_p[u,u] = 0$. Сравнение отношений (4.26) и (4.27) показывает, что все условия леммы I.15 выполнены при $t = (1-\varepsilon)^{-1}$, и из нее вытекает, что

$$n_\pm(\lambda; T_1) \leq n_\pm((1-\varepsilon)\lambda; \ell, p, \Omega, \mathcal{D}_1).$$

Переходя к функционалам $\Delta_\theta^\pm$, $\delta_\theta^\pm$, получаем

$$\Delta_\theta^\pm(\mathcal{N}_1) = \Delta_\theta^\pm(T_1) \leq (1-\varepsilon)^{-\theta} \Delta_\theta^\pm(\mathcal{D}_1); \quad \delta_\theta^\pm(\mathcal{N}_1) \leq (1-\varepsilon)^{-\theta} \delta_\theta^\pm(\mathcal{D}_1).$$

Неравенства $\Delta_\theta^\pm(\mathcal{D}_1) \leq \Delta_\theta^\pm(\mathcal{N}_1)$, $\delta_\theta^\pm(\mathcal{D}_1) \leq \delta_\theta^\pm(\mathcal{N}_1)$ прямо следуют из стандартных минимаксимальных соображений. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, равенства (4.25) установлены. ▨.

5. <u>Асимптотика спектра модельной задачи</u>. Исходной для нас является периодическая краевая задача в кубе Q^m при $p(x) \equiv 1$. Для

этой задачи можно явно вычислить собственные значения и найти величины Δ_θ, δ_θ, причем оказывается, что $\Delta_\theta = \delta_\theta = \omega$, где $\omega = \omega_+$ определяется формулой (4.22). С помощью леммы 4.10 это равенство переносится на случай задач $\mathcal{D}$, $\mathcal{N}$. Тем самым получается результат, который служит затем отправным для доказательства теоремы 4.6 в полном объеме.

Перейдем к точной постановке задач. Пусть $\mathcal{T}^m$ – m-мерный тор (реализованный как куб Q^m с отождествленными противоположными гранями). Рассмотрим пространство $H_\ell \mathcal{T}^m$. Форма $\mathcal{J}_\ell$ вырождается в $H_\ell \mathcal{T}^m$ лишь при $u \equiv const$. Под спектральной задачей $\mathcal{P}_0$ будем понимать задачу о нахождении последовательных максимумов отношения квадратичных форм

$$\|u\|_2^2 / \mathcal{J}_\ell[u,u] \ , \quad u \in H_\ell \mathcal{T}^m \ , \quad \int_{\mathcal{T}^m} u\,dx = 0 \ . \tag{4.28}$$

Ниже встретятся также задачи $\mathcal{P}_a$, $a>0$, и задача $\mathcal{P}$ о спектре отношений

$$\|u\|_2^2 / \mathcal{J}_{\ell,a}[u,u] \ , \qquad u \in H_\ell \mathcal{T}^m ,$$

$$\|u\|_2^2 / \left(\mathcal{J}_\ell[u,u] + \left|\int_{\mathcal{T}^m} u\,dx\right|^2\right), \qquad u \in H_\ell \mathcal{T}^m ,$$

соответственно. Для собственных значений введенных задач и их функций распределения будем употреблять обозначения типа $\lambda_n(\ell, m, \mathcal{P}_0)$, $n(\lambda; \ell, m, \mathcal{P}_0)$ и т.п.

Собственными функциями задачи (4.28) служат функции

$$u_k(x) = exp(2\pi i k x)$$

$$(k = (k_1, \ldots, k_m); \ k_j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \ \ j = 1, \ldots, m; \ \ |k| \neq 0).$$

Соответствующие собственные числа равны $\lambda_k = (2\pi |k|)^{-2\ell}$. Отсюда следует, что при любом $\lambda > 0$ величина $n(\lambda; \ell, m, \mathcal{P}_0)$ равна числу целых точек $k \neq 0$, заключенных в m-мерном шаре радиуса $(2\pi)^{-1} \lambda^{-1/2\ell}$. Асимптотически это число равно объему шара, т.е.

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda^\theta n(\lambda; \ell, m, \mathcal{P}_0) = \frac{(2\sqrt{\pi})^{-m}}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)} \ , \qquad \theta = m/2\ell \ . \tag{4.29}$$

Покажем, что то же асимптотическое поведение имеет спектр задачи $\mathcal{P}_a$, $a>0$. В самом деле, задача $\mathcal{P}_a$ получается из задачи $\mathcal{P}$ введением в знаменатель вполне непрерывной в $H_\ell \mathcal{T}^m$ квадратичной формы $a\|u\|_2^2 - |\int_{\mathcal{T}^m} u\,dx|^2$; задача $\mathcal{P}_0$ получается из задачи

$\mathcal{P}$ введением одного условия ортогональности. Обе операции не влияют на асимптотическое поведение спектра и, следовательно, формула (4.29) сохраняется при замене задачи $\mathcal{P}_0$ на задачу $\mathcal{P}_a$.

Перейдем к рассмотрению других краевых условий.

Лемма 4.11. Пусть Q – произвольный m-мерный куб и $\rho>0$ – постоянная. Тогда для задач $\mathcal{D}_a(\ell,\rho,Q)$, $\mathcal{N}_a(\ell,\rho,Q)$, $a\geq 0$, имеет место формула спектральной асимптотики

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda^{\theta} n(\lambda;\rho,Q)=(2\sqrt{\pi})^{-m}\left[\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)\right]^{-1}\rho^{\theta}|Q| . \qquad (4.30)$$ ▲.

Доказательство. Пусть $a>0$. Для задачи $\mathcal{P}_a(\ell,\rho,Q)$ формула (4.30) получается из (4.29) после преобразования подобия и учета однородности по ρ. Далее, поскольку переход от задачи $\mathcal{D}_a$ к $\mathcal{P}_a$ и от $\mathcal{P}_a$ к $\mathcal{N}_a$ сводится к ослаблению граничных условий, то

$$n(\lambda;Q,\mathcal{D}_a)\leq n(\lambda;Q,\mathcal{P}_a)\leq n(\lambda;Q,\mathcal{N}_a),\quad a>0 .$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\Delta_\theta(Q,\mathcal{D}_a)\leq \lim_{\lambda\to 0} \lambda^{\theta} n(\lambda;Q,\mathcal{P}_a)\leq \Delta_\theta(Q,\mathcal{N}_a) .$$

Так как в силу леммы 4.10 крайние члены этого неравенства совпадают, то они равны среднему члену и тем самым равны правой части формулы (4.30). То же верно для величин δ_θ^{ℓ}. Таким образом, формула (4.30) справедлива при $a>0$. Случай $a=0$ включается на основании леммы 4.7. ▨.

6. <u>Доказательство теоремы 4.6</u>. Это доказательство получается на основании результатов п.п.4, 5 почти автоматически.

1) Пусть множество Ω представляет собой внутренность объединения конечного числа попарно не пересекающихся полуоткрытых кубов (о таких множествах ниже будем говорить, что они "допускают разложение на кубы"). Пусть функция ρ кусочно постоянна в Ω; точнее говоря, существует такое разложение $\Omega=\bigcup_j Q_j$ на конечное число попарно непересекающихся кубов, что

$$\rho(x)=\sum_j \rho_j \chi_j(x), \qquad \rho_j=const$$

(χ_j – характеристическая функция куба Q_j). Вследствие минимаксимального принципа

$$\sum_{p_j>0} n(\lambda;p_j,Q_j,\mathcal{D}_1)\le n_+(\lambda;p,\Omega,\mathcal{D}_1)\le n(\lambda;p_+,\Omega,\mathcal{D}_1)\le$$

$$\le n(\lambda;p_+,\Omega,\mathcal{N}_1)\le\sum_{p_j>0} n(\lambda;p_j,Q_j,\mathcal{N}_1).$$

Умножая на λ^θ и переходя к пределу при $\lambda\to 0$, находим, в соответствии с леммой 4.11, что для задач $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{N}_1$

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda^\theta n_+(\lambda;p,\Omega)=\frac{(2\sqrt{\pi})^{-m}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}\sum_{p_j>0} p_j^\theta|Q_j|=\omega_+(m,\ell,p,\Omega);$$

точно так же в рассматриваемых условиях устанавливается справедливость формулы (4.22)-(4.23) для функции $n_-(\lambda;p,\Omega)$.

2) Пусть по-прежнему Ω допускает разложение на кубы. Так как множество кусочно-постоянных функций p рассмотренного выше вида плотно в $L_r\Omega$, то согласно лемме 4.9 формула (4.22)-(4.23) переносится на все функции $p\in L_r\Omega$.

3) Пусть Ω - ограниченное открытое множество и Q - содержащий его куб. Пусть функция $p\in L_r\Omega$ такова, что ее носитель содержится в каком-либо множестве Ω_0, $\Omega_0\subset\Omega$, допускающем разложение на кубы. Такие функции, очевидно, плотны в $L_r\Omega$. Положим $p(x)=0$ для $x\in Q\setminus\Omega$. Из минимаксимального принципа следует, что

$$n_\pm(\lambda;p,\Omega_0,\mathcal{D}_1)\le n_\pm(\lambda;p,\Omega,\mathcal{D}_1)\le n_\pm(\lambda;p,Q,\mathcal{D}_1).$$

Асимптотическое поведение крайних членов неравенства уже известно и, в силу (4.22), одинаково. Тем самым асимптотика (4.22)-(4.23) доказана для $n_\pm(\lambda;p,\Omega,\mathcal{D}_1)$. Лемма 4.9 позволяет распространить этот результат на все $p\in L_r\Omega$. С помощью леммы 4.7 результат переносится на все $a\ge 0$, а лемма 4.8 дает возможность учесть сингулярную часть меры. Теорема 4.6 доказана для задачи $\mathcal{D}_a$, $a\ge 0$.

4) Если $\Omega\in\mathcal{K}$, то доказательство асимптотической формулы (4.22)-(4.23) для задачи $\mathcal{N}_a$, $a\ge 0$, прямо следует из лемм 4.10, 4.7. Теорема 4.6 доказана.

Замечание 4.12. При $2\ell\le m$ сингулярная часть меры может давать вклад в основной член асимптотики и даже полностью определять его. Действительно, рассмотрим, например, задачу $\mathcal{N}$ для единичного шара $B=S\mathbb{R}^m$ при $\ell=1$. В формуле (4.3) для $\mathcal{J}_p$ примем в качестве p $(m-1)$-мерную меру Лебега, сосредоточенную на поверхнос-

-ти шара. Таким образом, речь идет об отыскании спектра отношения

$$\int_{\partial B}|u|^2dS\Big/\int_B|\nabla u|^2dx \qquad (u\in \overset{\circ}{H}_1 B, \int_{\partial B} u\,dS=0).$$

Легко видеть, что эта задача равносильна краевой задаче

$$\Delta u=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial n}-\lambda^{-1}u\Big|_{\partial B}=0,$$

с параметром в граничном условии. Асимптотика спектра таких задач известна: $n(\lambda)\sim c\lambda^{-(m-1)}$. В случае шара ее легко получить путем прямых вычислений со сферическими функциями. При $m=2$ для $n(\lambda)$ получаем тот же, а при $m\geq 3$ – больший порядок роста, нежели в формуле (4.23).

Замечание 4.13. Если нас интересует асимптотическое поведение лишь функции $n_+(\lambda)$ (функции $n_-(\lambda)$), то ограничения на отрицательную (положительную) часть заряда σ могут быть ослаблены.

Пусть, например, речь идет о задаче $\mathcal{D}_a$, $a\geq 0$. Пусть мера $|\sigma|$ локально конечна (т.е. $|\sigma|(B)<\infty$ для любого шара B, такого что $\bar B\subset\Omega$) и при $2l\leq m$ абсолютно непрерывна. Пусть мера σ_+ – удовлетворяет условию I. Наконец, предположим существование такого открытого множества Ω_+, что $\sigma_+(\Omega_+)=\sigma_+(\Omega)$, $\sigma_-(\Omega_+)=0$. Тогда для функции распределения $n_+(\lambda;\sigma_+,\Omega,\mathcal{D}_a)$ справедлива асимптотическая формула $(4.22)_+$– $(4.23)_+$. Действительно, из вариационного принципа следуют неравенства

$$n(\lambda;\sigma_+,\Omega_+,\mathcal{D}_a)\leq n_+(\lambda;\sigma,\Omega,\mathcal{D}_a)\leq n(\lambda;\sigma_+,\Omega,\mathcal{D}_a).$$

Отсюда и из теоремы 4.6 получаем требуемое. Если $\Omega\in\mathcal{K}$, то при $a>0$ тот же результат получается для функции $n_+(\lambda;\sigma,\Omega,\mathcal{N}_a)$ в силу неравенств

$$n(\lambda;\sigma_+,\Omega_+,\mathcal{D}_a)\leq n_+(\lambda;\sigma,\Omega,\mathcal{N}_a)\leq n(\lambda;\sigma_+,\Omega,\mathcal{N}_a).$$

Для задачи $\mathcal{N}$ дело обстоит сложнее, так как определение соответствующего пространства $\mathcal{L}_p(\sigma)$ связано с поведением не только σ_+, но и σ_-. Мы не будем приводить здесь условий, при которых результат переносится на задачу $\mathcal{N}$.

7. <u>Задача $\mathcal{D}$ в неограниченных областях (случай $2l<m$)</u>. Рассмотрим теперь вопрос о спектре задачи $\mathcal{D}$ для произвольного (неограниченного) открытого множества Ω. Различие между случаями $2l<m$ и $2l\geq m$ здесь сильно увеличивается. Если при $2l<m$, по-существу,

дело обстоит так же, как и для ограниченных множеств, то при $2\ell>m$ возникают значительные технические осложнения. Мы остановимся поэтому на случае $2\ell<m$. Кроме того мы рассмотрим в п.8 задачу $\mathcal{D}$ для полуоси $\mathbb{R}_+=(0,+\infty)$, что даст нам возможность познакомиться с некоторыми особенностями случая $2\ell>m$ на простом примере.

Как и прежде, через $\overset{\circ}{H}_\ell\Omega$ обозначается пространство функций, получающееся пополнением класса $C_0^\infty\Omega$ по метрике формы $\mathcal{J}_\ell$. В отличие от случая ограниченных множеств, класс $\overset{\circ}{H}_\ell\Omega$ может оказаться более широким по сравнению с подобным же образом определенным классом $\overset{\circ}{H}_{\ell,a}\Omega$, $a>0$. Постановка задачи $\mathcal{D}$ та же, что и прежде. Именно, для $p\in L_\theta\Omega$, $\theta=m/2\ell$, задачей $\mathcal{D}=\mathcal{D}(\ell,p,\Omega)$ называем задачу о спектре отношения

$$\mathcal{J}_p[u,u]\,/\,\mathcal{J}_\ell[u,u]\,,\quad u\in\overset{\circ}{H}_\ell\Omega\,,\quad 2\ell<m\,. \tag{4.31}$$

При изучении задачи $\mathcal{D}$ полезно следующее неравенство, вытекающее из неравенства Харди.

$$\int_{\mathbb{R}^m}\frac{|u|^2}{|x|^{2\ell}}\,dx\le\frac{2^{2\ell}\,\mathcal{J}_\ell[u,u]}{(m-2)^2(m-4)^2\dots(m-2\ell)^2}\quad(u\in\overset{\circ}{H}_\ell\mathbb{R}^m,\ 2\ell<m). \tag{4.32}$$

Теорема 4.14. Пусть $p\in L_\theta\Omega$, $\theta=m/2\ell>1$. Тогда справедливо неравенство

$$n_\pm(\lambda;\ell,p,\Omega,\mathcal{D})\le C\lambda^{-\theta}\int_\Omega p_\pm^\theta\,dx\,, \tag{4.33}$$

где постоянная $C=C(\ell,m)$ не зависит от области Ω. ▲.

Доказательство. Пусть сначала $p\ge 0$. Оценка вида (4.15) для $\lambda_n(p,\Omega,\mathcal{D})$ получается в точности так же, как и при доказательстве утверждения 1) теоремы 4.1. Нужно лишь использовать теорему 2.23 вместо теоремы 2.17. Переход к оценке функции распределения при знакопеременном p повторяет вывод неравенств (4.20). ▨.

Теорема 4.15. В условиях теоремы 4.14 для функции $n_\pm(\lambda;\mathcal{D})$ справедливы асимптотические формулы (4.22)-(4.23). ▲.

Доказательство. Пусть сначала $\Omega=\mathbb{R}^m$. В силу леммы 1.18 (точнее, в силу леммы 4.9, доказательство которой для рассматриваемого случая проходит без изменений) мы можем ограничиться финитными p. Пусть носитель p лежит в шаре B. Добавим к знаменателю отношения (4.31) форму $N^2(u\,|\,L_2B)$; соответствующую задачу будем обозначать через $\hat{\mathcal{D}}$. Вследствие неравенства (4.32) форма $\mathcal{N}^\ell(u|L_2 B)$ ограничена и, следовательно, вполне непрерывна в $\overset{\circ}{H}_\ell \mathbb{R}^m$. Поэтому функции $n_\pm(\lambda;\mathbb{R}^m,\mathcal{D})$, $n_\pm(\lambda;\mathbb{R}^m,\hat{\mathcal{D}})$ имеют одну и ту же асимптотику. Но в силу вариационного принципа

$$n_\pm(\lambda;B,\mathcal{D}_1)\le n_\pm(\lambda;\mathbb{R}^m,\hat{\mathcal{D}})\le n_\pm(\lambda;B,\mathcal{N}_1),$$

и для $n_\pm(\lambda;\hat{\mathcal{D}})$ нужная асимптотика следует из теоремы 4.6.

В случае произвольного открытого Ω снова можно считать p финитным. Пусть ограниченное открытое множество $\Omega_0\subset\Omega$ содержит носитель p. Тогда, очевидно,

$$n_\pm(\lambda;p,\Omega_0,\mathcal{D})\le n_\pm(\lambda;p,\Omega,\mathcal{D})\le n_\pm(\lambda;p,\mathbb{R}^m,\mathcal{D}),$$

откуда сразу получается нужный результат. ▨.

Замечание 4.16. К теореме 4.14 можно сделать добавление, вполне аналогичное замечанию 4.4. Например, для справедливости оценки $(4.33)_+$ достаточно, чтобы $p_+\in L_\theta\Omega$; $p_-\in L_{1,loc}\Omega$. Точно так же к теореме 4.15 можно добавить аналог замечания 4.13.

Теоремы 4.14, 4.15 допускают еще одно любопытное уточнение, которое показывает, что, по крайней мере, при $p\ge 0$, условие $p\in L_\theta\Omega$ необходимо для справедливости соотношения

$$n(\lambda;\ell,p,\Omega,\mathcal{D})=O(\lambda^{-\theta}),\quad \theta=m/2\ell. \tag{4.34}$$

Теорема 4.17. Пусть $\Omega\subseteq\mathbb{R}^m$, $2\ell<m$, $p\in L_{1,loc}\Omega$, $p\ge 0$. Если задача $\mathcal{D}(\ell,p,\Omega)$ имеет дискретный спектр и выполнено (4.34), то $p\in L_\theta\Omega$ и, следовательно, для $n(\lambda)$ справедлива асимптотика (4.22)-(4.23). △

Доказательство. Прежде всего поясним, что отношение (4.31) теперь рассматривается на (всех) тех $u\in\overset{\circ}{H}_\ell\Omega$, для которых $\mathcal{J}_p[u,u]<\infty$. Рассмотрим последовательность функций $\{p_k\}$, полагая $p_k(x)=0$, если $|x|>k$ либо $p(x)>k$; в остальных точках $x\in\Omega$ пусть $p_k(x)=p(x)$. Для функций p_k результат теоремы 4.15 заведомо справедлив. С другой стороны, $p_k\le p$; поэтому, если обозначить $\limsup \lambda^\theta n(\lambda;p)=\omega$, то

$$\omega(m,\ell,p_k,\Omega)\le\omega,$$

или, что то же самое,

$$\int_\Omega p_k^\theta dx\le(2\sqrt{\pi})^m\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)\omega.$$

Отсюда по теореме Фату получается $\rho\in L_\theta\mathcal{S}$ и, в силу теоремы 4.15, для $n(\lambda;\rho)$ справедлива асимптотика (4.22)-(4.23). ▨.

8. <u>Задача $\mathcal{D}$ на полуоси</u>. Пусть ρ - конечная мера, определенная на борелевских подмножествах полуоси $\mathbb{R}_+=(0,\infty)$. Введем в рассмотрение промежутки $d_0=(0,1)$, $d_k=[2^{k-1},2^k)$, $k=1,2,\ldots$, и определим для меры ρ функционал

$$M_\theta(\rho)=\sum_{k=0}^{\infty}2^{k(1-\theta)}\left[\rho(d_k)\right]^\theta \qquad (\theta<1). \tag{4.35}$$

Для заряда σ в предположении конечности $M_\theta(|\sigma|)$, $\theta=1/2l$, рассмотрим задачу $\mathcal{D}(l,\sigma,\mathbb{R}_+)$ о спектре отношения

$$\int_{\mathbb{R}_+}|u(t)|^2\sigma(dt)\Big/\int_{\mathbb{R}_+}|D^l u|^2dt\,, \qquad u\in\overset{\circ}{H}_l\mathbb{R}_+. \tag{4.36}$$

При $\sigma\geqslant 0$, $l=1$ эта задача переходит в задачу о спектре полубесконечной струны с неподвижным левым концом. Исследование задачи $\mathcal{D}(l,\sigma,\mathbb{R}_+)$ опирается на неравенство

$$\int_{\mathbb{R}_+}\frac{|u|^2}{t^{2l}}dt\leqslant b_l\int_{\mathbb{R}_+}|D^l u|^2dt,\quad b_l=\frac{2^{2l}}{[(2l-1)!!]^2},\ u\in\overset{\circ}{H}_l\mathbb{R}_+. \tag{4.37}$$

Теорема 4.18. Пусть $M_\theta(|\sigma|)<\infty$ при $\theta=1/2l$. Тогда
1) для функций распределения спектра задачи $\mathcal{D}(l,\sigma,\mathbb{R}_+)$ справедливы оценки

$$n_\pm(\lambda;l,\sigma,\mathbb{R}_+)\leqslant C(l)\lambda^{-\theta}M_\theta(\sigma_\pm). \tag{4.38}$$

2) Если, кроме того, мера $|\sigma|$ сингулярна, то

$$n(\lambda;\sigma)=o(\lambda^{-\theta}).\ \blacktriangle. \tag{4.39}$$

Доказательство. 1) Пусть сначала $\sigma\geqslant 0$. Рассмотрим форму

$$F_l[u,u]=\int_0^1|u|^2dt+\int_1^\infty|t|^{-2l}|u|^2dt.$$

Из (4.37) следует $F_l[u,u]\leqslant b_l J_l[u,u]$, $u\in\overset{\circ}{H}_l\mathbb{R}_+$.
Таким образом, форма J_l+F_l определяет в $\overset{\circ}{H}_l\mathbb{R}_+$ эквивалентную метрику. Добавим в знаменатель отношения (4.36) слагаемое F_l; соответствующую задачу на спектр обозначим через $\hat{\mathcal{D}}$. Из минимаксимального принципа вытекают неравенства

$$n((b_\ell+1)\lambda;\sigma,\mathbb{R}_+,\mathcal{D})\le n(\lambda;\sigma,\mathbb{R}_+,\hat{\mathcal{D}})\le$$
$$\le n(\lambda;\sigma,d_0,\mathcal{N}_1)+\sum_{k=1}^{\infty} n(\lambda;\sigma,d_k,\mathcal{N}_{a_k}),\quad a_k=2^{-2k\ell}. \tag{4.40}$$

Преобразование подобия $t\mapsto 2^{-k}t$ отображает d_k на отрезок $d^*=[1/2,1)$. При этом мера σ (точнее, ее сужение на d_k) переходит в некоторую меру σ_k на d^*. Класс $H_\ell d_k$ преобразуется в класс $H_\ell d^*$. Легко видеть, что тогда

$$\lambda_n(\ell,\sigma,d_k,\mathcal{N}_{a_k})=2^{k(2\ell-1)}\lambda_n(\ell,\sigma_k,d^*,\mathcal{N}_1)$$

и, следовательно,

$$n(\lambda;\sigma,d_k,\mathcal{N}_{a_k})=n(2^{-k(2\ell-1)}\lambda;\sigma_k,d^*,\mathcal{N}_1).$$

Последняя величина оценивается согласно (4.18). Тогда

$$n(\lambda;\sigma,d_k,\mathcal{N}_{a_k})\le c'_\ell\lambda^{-\theta}2^{k(2\ell-1)\theta}\sigma_k^\theta(d^*)=$$
$$=c'_\ell\lambda^{-\theta}2^{k(1-\theta)}\sigma^\theta(d_k),\qquad k\ge 1; \tag{4.41}$$

здесь c'_ℓ – постоянная из (4.18) при $m=r=a=1$, $\Omega=d^*$. Оценивая в соответствии с (4.18) также величину $n(\lambda;\sigma,d_0,\mathcal{N}_1)$ и подставляя полученные оценки в (4.40), придем к (4.38) при $\sigma\ge 0$. Остается воспользоваться неравенствами $n_\pm(\lambda;\sigma)\le\le n(\lambda;\sigma_\pm)$.

2) Пусть мера $|\sigma|$ сингулярна. Для заданного $\varepsilon>0$ найдем такой номер k_0, что отрезок ряда (4.35) при суммировании по $k\ge k_0$ не превосходит ε. Умножим все члены неравенства (4.40) на λ^θ и перейдем к верхним пределам при $\lambda\to 0$. При $k<k_0$ воспользуемся утверждением 3) теоремы 4.1, а при $k\ge k_0$ используем оценки (4.41). Мы получим, что

$$\limsup_{\lambda\to 0}\lambda^\theta n(\lambda;|\sigma|)\le C(\ell)\varepsilon,$$

откуда непосредственно следует (4.39). ▨.

Теорема 4.19. В условиях теоремы 4.18 справедливы асимптотические соотношения (4.22)-(4.23). ▲.

Доказательство. Сингулярная часть заряда исключается, как обычно, на основании оценки (4.39) и леммы 1.17. После этого следует повторить рассуждения, использованные при доказательстве теоремы

4.15, опираясь при этом на оценки (4.38) (вместо оценок (4.33)).▨.

К теоремам 4.18, 4.19 можно добавить аналог замечания 4.16. Это предоставляется читателю.

В заключение сделаем несколько замечаний относительно тех осложнений, которые возникают при исследовании задачи $\mathcal{D}$ в неограниченных областях при $2\ell \geq m$. Если m нечетно и Ω имеет непустое дополнение в $\mathbb{R}^m$, то метод доказательства теоремы 4.18 позволяет получить вполне аналогичные результаты (после чего вопрос об асимптотике не вызывает затруднений). Если же $\Omega = \mathbb{R}^m$, то класс $\overset{o}{H}_\ell \mathbb{R}^m$ при $2\ell \geq m$ уже не является пространством функций в строгом смысле слова: элементы $\overset{o}{H}_\ell \mathbb{R}^m$ определяются с точностью до произвольного полинома степени не выше чем $\ell - m/2$. Это обстоятельство сближает задачу $\mathcal{D}(\ell, \mathbb{R}^m)$ с задачей $\mathcal{N}$ в ограниченных областях. Постановка задачи $\mathcal{D}$ при $\Omega = \mathbb{R}^m$ меняется, что несколько осложняет исследование. В случае четного m возникают затруднения и при $\Omega \neq \mathbb{R}^m$. Они связаны с отсутствием достаточно простого аналога неравенства (4.37). Преодоление всех этих затруднений не сложно по существу, но несколько громоздко и утомительно. Мы не станем здесь на этом останавливаться.

Добавление 6

Задачи с малым параметром. Веса с сильными особенностями

Полученные в лекции 4 оценки и асимптотические формулы для спектра задачи $\mathcal{D}(\ell,\sigma,\Omega)$ могут быть использованы при исследовании спектра других уравнений. Это достигается с помощью одного элементарного вариационного приема; последний позволяет установить зависимость между спектрами двух различных спектральных задач, связанных с фиксированной парой операторов (форм). Мы ограничимся здесь двумя примерами, желая продемонстрировать возможности обсуждаемого подхода в оравнительно простой обстановке. Первый пример относится к теории операторов с малым параметром при главном члене; в частности, полученные результаты применимы к оператору Шредингера. Второй пример относится к задаче $\mathcal{D}(\ell,\sigma,\Omega)$ при наличии сильных особенностей у функции ρ.

I. <u>Асимптотика спектра в задачах с малым параметром.</u> Рассмотрим уравнение

$$(-\Delta)^{\ell}u+q(x)u=\mu u\,,\qquad x\in\mathbb{R}^m\,,\qquad m>2\ell\,,\tag{4.42}$$

которое при $\ell=1$ превращается в уравнение Шредингера. Относительно вещественной измеримой функции q предположим, что $q\in L_{1,loc}\mathbb{R}^m$ и при некотором вещественном значении γ имеет место включение

$$(q-\gamma)_-\in L_\theta\mathbb{R}^m\;;\qquad \theta=m/2\ell\,.\tag{4.43}$$

Точная постановка "задачи на спектр" (4.42) здесь заключается в следующем. При условии (4.43) квадратичная форма

$$A[u,u]=\int_{\mathbb{R}^m}(|\nabla_\ell u|^2+q|u|^2)\,dx\,,\qquad u\in C_0^\infty\mathbb{R}^m,\tag{4.44}$$

полуограничена снизу и допускает замыкание в гильбертовом пространстве $L_2\mathbb{R}^m$. Соответствующий замкнутой форме A самосопряженный в $L_2\mathbb{R}^m$ оператор обозначим через $\mathbb{A}$. Задача о спектре оператора $\mathbb{A}$ является "правильной" интерпретацией задачи (4.42).

Пусть $n(\mu;\mathbb{A})$ – число собственных значений оператора $\mathbb{A}$ на промежутке $(-\infty,\mu)$. Заранее мы не исключаем возможности $n(\mu;\mathbb{A})=\infty$ (например, если промежуток $(-\infty,\mu)$ содержит точки непрерывного спектра оператора $\mathbb{A}$). Из минимаксимального принципа, толкуемого в духе леммы I.13 x), следует, что

$$n(\mu;\mathbb{A})=\sup\dim\mathfrak{R}\ ,$$

где $\sup$ берется по ссвокупности тех линейных множеств $\mathfrak{R}\subset C_0^\infty\mathbb{R}^m$, на элементах которых выполнено неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^m}(|\nabla_\ell u|^2+q|u|^2)dx<\mu\int_{\mathbb{R}^m}|u|^2dx\qquad(u\in\mathfrak{R})\,.$$

Последнее неравенство в обозначениях лекции 4 можно переписать в виде

$$\mathcal{J}_{\mu-q}[u,u]/\mathcal{J}_\ell[u,u]>1\qquad\qquad(u\in\mathfrak{R})\,.$$

Теперь можнс использовать минимаксимальный принцип для задачи $\mathfrak{D}(\ell,\mu-q,\mathbb{R}^m)$, что приводит к соотношению

$$n(\mu;\mathbb{A})=n_+(1;\ell,\mu-q,\mathbb{R}^m,\mathfrak{D})\,.\tag{4.45}$$

Полученнсе равенство является для нас исходным. Оно дает возможность применить теорему 4.14 и замечание 4.16 к оценке функции $n(\mu;\mathbb{A})$. Это приводит к следующему результату.

Теорема 4.20. Пусть $q\in L_{1,\ell oc}\mathbb{R}^m$, $m>2\ell$ и $\mathcal{J}m\,q=0$. Пусть $\mathbb{A}$ - самосопряженный оператор, порождаемый в $L_2\mathbb{R}^m$ формой (4.44). Тогда оценка

$$n(\mu;\mathbb{A})\le C\int_{\mathbb{R}^m}(\mu-q)_+^\theta dx\,,\qquad \theta=m/2\ell,\tag{4.46}$$

справедлива для всех μ, для которых конечен интеграл в (4.46); $C=C(m,\ell)$ - постоянная из неравенства (4.33). ▲ .

Результат теоремы 4.22 означает, что справедлива "абсолютная" (т.е. без каких-либо дополнительных ограничений на потенциал) оценка функции распределения через тот интеграл, который при ряде дополнительных ограничений входит в асимптотическую формулу xx) для $n(\mu;\mathbb{A})$ при $\mu\to\infty$.

---

x) Формально мы не можем осылаться на лемму I.13, так как в ней идет речь о спектре компактногс оператора.

xx) При $\ell=1$ по поводу этой асимптотической формулы см., например, [65].

Мы будем расоматривать здесь асимптотику функции $n(\mu;\mathbb{A})$ по другому параметру, который введем в определение оператора $\mathbb{A}$. При прежних условиях на функцию q рассмотрим форму A_h, $h>0$,

$$A_h[u,u]=\int_{\mathbb{R}^m}(h|\nabla_\ell u|^2+q(x)|u|^2)dx\,,\quad u\in C_0^\infty\mathbb{R}^m. \tag{4.47}$$

Соответствующий оператор обозначим через $\mathbb{A}_h$. Введение параметра h при $\ell=1$ равносильно явному учету в операторе Шредингера постоянной Планка, которая в квазиклассических рассмотрениях играет роль малого параметра. Соотношение (4.45) принимает для оператора $\mathbb{A}_h$ при $\mu=0$ вид

$$n(0;\mathbb{A}_h)=n_-(h;\ell,q,\mathbb{R}^m,\mathcal{D}). \tag{4.48}$$

Это дает возможность получить оценку и асимптотику при $h\to 0$ для функции $n(0;\mathbb{A}_h)$, т.е. для числа отрицательных собственных значений оператора $\mathbb{A}_h$. Оценка получается из теоремы 4.20 и имеет вид

$$n(0;\mathbb{A}_h)\le Ch^{-\theta}\int_{\mathbb{R}^m}q_-^\theta\,dx\,,\qquad C=C(\ell,m),$$

причем требования на q сводятся к условиям $q\in L_{1,loc}\mathbb{R}^m$; $q_-\in L_\theta\mathbb{R}^m$. Теорема 4.15 и замечание 4.16 позволяют получить из (4.48) также асимптотику для $n(0;\mathbb{A}_h)$ при $h\to 0$. При этом на q нужно наложить не слишком обременительные дополнительные условия в духе замечания 4.13. В результате получается следующее утверждение.

Теорема 4.21. Пусть $q\in L_{1,loc}\mathbb{R}^m$, $q_-\in L_\theta\mathbb{R}^m$, $\theta=m/2\ell>1$, и $\operatorname{Im} q=0$. Пусть существует открытое множество $\Omega_-\subseteq\mathbb{R}^m$, такое, что $q(x)\le 0$ для $x\in\Omega_-$ и $q(x)\ge 0$ для $x\bar{\in}\Omega_-$. Тогда для числа $n(0;\mathbb{A}_h)$ отрицательных собственных значений оператора

$$\mathbb{A}_h=h(-\Delta)^\ell+q\,,$$

порожденного формой (4.47), справедливо асимптотическое соотношение

$$\lim_{h\to 0}h^\theta n(0;\mathbb{A}_h)=\frac{(2\sqrt{\pi})^{-m}}{\Gamma(1+m/2)}\int_{\mathbb{R}^m}q_-^\theta\,dx.\quad\blacktriangle.$$

Разумеется, во всем предыдущем можно было заменить $\mathbb{R}^m$ любым открытым множеством $\Omega\subset\mathbb{R}^m$.

Точно так же получается соотношение вида (4.48) во многих других случаях. Мы сформулируем результат об асимптотике, получающийся этим способом из теоремы 4.19.

Пусть $q(x)$, $x\in\mathbb{R}_+$, – вещественная измеримая функция, $q\in L_{1,loc}\mathbb{R}_+$ и

$$M_\ell(q_-)\overset{def}{=}\sum_{k=0}^{\infty}2^{k(1-\theta)}\Big[\int_{d_k}q_-\,dx\Big]^\theta<\infty\,,\quad \theta=1/2\ell\,, \tag{4.49}$$

$$d_0=(0,1)\,,\quad d_k=[2^{k-1},2^k)\,,\quad k=1,2,\dots\ .$$

В $L_2\mathbb{R}_+$ рассмотрим квадратичную форму

$$A_h[u,u]=\int_{\mathbb{R}_+}(h|D^\ell u|^2+q(x)|u|^2)\,dx\,,\qquad u\in C_0^\infty\mathbb{R}_+\ . \tag{4.50}$$

При условии (4.49) форма (4.50) полуограничена снизу в $L_2\mathbb{R}_+$ и допускает замыкание. Соответствующий форме (4.50) самосопряженный в $L_2\mathbb{R}_+$ оператор $\mathbb{A}_h$ естественно связать с дифференциальным выражением $(-1)^\ell hD^{2\ell}+q(x)$ при нулевых граничных условиях в точке $x=0$. Предположим дополнительно, что существует открытое множество $\Omega_-\subseteq\mathbb{R}_+$ такое, что $q(x)\le 0$ при $x\in\Omega_-$ и $q(x)>0$ при $x\bar{\in}\Omega_-$.

Теорема 4.22. При сделанных предположениях число $n(0;\mathbb{A}_h)$ отрицательных собственных значений оператора $\mathbb{A}_h$, порожденного формой (4.50), удовлетворяет асимптотическому соотношению

$$\lim_{h\to 0}h^\theta n(0;\mathbb{A}_h)=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}_+}q_-^\theta\,dx\,;\qquad \theta=\frac{1}{2\ell}\ .\ \triangle.$$

При $\ell=1$ теорема 4.22 содержит результат о радиальном уравнении Шредингера.

2. <u>Оценки спектра при наличии сильных особенностей у весовой функции.</u> Мы рассмотрим здесь одну задачу специального вида, которая может играть роль модельной для аналогичных более общих задач.

Пусть Ω – цилиндр; $\Omega=\Omega'\times\mathbb{R}_+$, где $\Omega'\subseteq\mathbb{R}^{m-1}$ – открытое множество. Для точек $x\in\Omega$ пишем $x=(x',x_m)$, $x'\in\Omega'$, $x_m\in\mathbb{R}_+$. Пусть $P\ge 0$ – функция на Ω', β – некоторый показатель, $0<\beta<2\ell$, $P_\beta(x)=x_m^{-\beta}P(x')$. Рассмотрим задачу $\mathfrak{D}(\ell,P_\beta,\Omega)$ о спектре отношения

$$\int_\Omega p_\beta(x)|u|^2dx \Big/ \int_\Omega |\nabla_\ell u|^2 dx\,,\quad u\in \overset{\circ}{H}_\ell\Omega\,, \tag{4.51}$$

что соответствует первой краевой задаче для "вырожденного" дифференциального уравнения

$$x_m^\beta(-\Delta)^\ell u = \lambda^{-1}p(x')u\,.$$

Предположим, что $\theta = m/2\ell > 1$ и Ω замененс на $\Omega_L = \Omega' \times (0,L)$, $0<L<\infty$. Если $p\in L_\theta\Omega'$ и $\beta\theta<1$, то для задачи (4.51) выполнены условия тесрем 4.14, 4.15, и ее собственные числа имеют стандартное асимптотическое поведение.

Нас будет интересовать случай [x)] $\theta^{-1}<\beta<2\ell$, когда асимптотическая формула (4.22)-(4.23) теряет смысл (интеграл в (4.22) бесконечен). Мы покажем, что и в этом случае с помощью теоремы 4.14 можно получить точные по порядку оценки функции распределения $n(\lambda;\ell,p_\beta,\Omega,\mathcal{D})$ спектра отношения (4.51). В силу (4.37) для $u\in\overset{\circ}{H}_\ell\Omega$ справедливо неравенство

$$\int_\Omega x_m^{-2\ell}|u|^2dx \le b_\ell \int_\Omega |\nabla_\ell u|^2dx\,. \tag{4.52}$$

Поэтому при выводе оценок вместо (4.51) можно рассматривать отношение

$$\int_\Omega p_\beta|u|^2dx \Big/ \int_\Omega (|\nabla_\ell u|^2 + x_m^{-2\ell}|u|^2)dx\,,\quad u\in\overset{\circ}{H}_\ell\Omega\,. \tag{4.53}$$

Функцию распределения спектра для отношения (4.53) обозначим через $\hat{n}(\lambda)$. В соответствии с леммой 1.13,

$$\hat{n}(\lambda) = \max\dim\mathfrak{K}\,,$$

где $\max$ берется по множеству тех подпространств $\mathfrak{K}\subset C_0^\infty\Omega$, на котсрых

$$\int_\Omega p_\beta|u|^2dx > \lambda\int_\Omega(|\nabla_\ell u|^2 + x_m^{-2\ell}|u|^2)dx \quad (u\in\mathfrak{K}).$$

Последнее неравенствс можно записать в виде

[x)] При $\beta\theta = 1$ в оценке спектра возникает логарифмический множитель, что требует отдельных рассмотрений. Мы не будем здесь этим заниматься.

$$\frac{\int_\Omega q_\lambda |u|^2 dx}{\int_\Omega |\nabla_\rho u|^2 dx} > 1, \quad q_\lambda(x) = \lambda^{-1} x_m^{-\beta} p(x') - x_m^{-2\ell}.$$

Отсюда следует, что

$$\hat{n}(\lambda) = n_+(1; \ell, q_\lambda, \Omega, \mathcal{D}).$$

Теорема 4.14 вместе с замечанием 4.16 позволяет теперь написать оценку

$$\hat{n}(\lambda) \le C \int_{\Omega'} \int_{\mathbb{R}_+} (\lambda^{-1} x_m^{-\beta} p(x') - x_m^{-2\ell})_+^\theta \, dx_m \, dx',$$

где $C = C(\ell, m)$ – постоянная из (4.33). Внутренний интеграл вычисляется явно, после чего неравенство (4.52) позволяет перенести полученную оценку на функцию $n(\lambda; \ell, p_\beta, \Omega, \mathcal{D})$. В результате приходим к неравенству

$$n(\lambda; \ell, p_\beta, \Omega, \mathcal{D}) \le C \lambda^{-\frac{m-1}{2\ell-\beta}} \int_{\Omega'} p^{\frac{m-1}{2\ell-\beta}} dx', \quad C = C(\ell, m, \beta). \tag{4.54}$$

Нетрудно видеть, что для оправдания проделанных выкладок достаточно потребовать, чтобы интеграл в (4.54) был бы конечен. Заметим еще, что в силу принятых выше ограничений на параметры, заведомо будет $(m-1)(2\ell-\beta)^{-1} > \theta > 1$.

Мы доказали следующее утверждение.

Теорема 4.23. Пусть $\theta = m/2\ell > 1$, и $\theta^{-1} < \beta < 2\ell$ и пусть $p \ge 0$, $p \in L_{\theta'}\Omega'$, где $\theta' = (m-1)(2\ell-\beta)^{-1}$. Тогда для спектра отношения (4.51) справедливо неравенство (4.54) с постоянной $C = C(\ell, m, \beta)$, которая не зависит от $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$ и от функции p. ▲.

В приведенном выше доказательстве условие $\theta > 1$ играло существенную роль: мы использовали точность показателя θ в оценке (4.33), а также независимость постоянной в этой оценке от множества Ω.

Асимптотика спектра при "сильных вырождениях" будет обсуждаться в добавлении 8 для несколько иного круга задач.

Добавление 7

Асимптотика спектра слабо полярных интегральных операторов

I. Постановка задачи. Основной результат. Мы обсудим (в обзорном порядке) возможности применения развитой в лекции 4 техники к вычислению асимптотики спектра интегральных операторов с полярными ядрами. Результаты лекции 4 о спектре краевых задач можно трактовать и как результаты о спектре соответствующих ("нагруженных") интегральных уравнений, где ядро есть функция Грина краевой задачи. Такие ядра имеют особенность на диагонали. Здесь мы рассмотрим ядра с особенностью на диагонали, которые не обязательно связаны с какой-либо краевой задачей. Для широкого класса подобных ядер при вычислении главного члена спектральной асимптотики можно пользоваться техникой, сходной с той, которая выше применялась при исследовании спектра краевых задач. Вне диагонали рассматриваемые ядра предполагаются достаточно гладкими; поэтому следует ожидать, что асимптотика спектра определяется поведением ядра в окрестности диагонали. Приводимые ниже формулы подтверждают это предположение.

Пусть $\vartheta(x)$ - ермитсва положительнс однородная функция в R^m порядка η , $-m<\eta<\infty$, т.е. $\vartheta(x)=\overline{\vartheta(-x)}$, $\vartheta(t,x)=t^{\eta}\vartheta(x)$, $t>0$. Предполагается, что функция ϑ бесконечно дифференцируема вне начала координат. Введем в рассмотрение $\tilde{\vartheta}$ - преобразование Фурье функции ϑ , понимаемое, например, в смысле суммирования по Риосу:

$$\tilde{\vartheta}(\xi)=\lim_{r\to\infty}\int_{|x|\le r}\left(1-\frac{|x|^2}{r^2}\right)^s\vartheta(x)e^{-ix\xi}\,dx\,. \qquad (4.55)$$

При достаточно больших показателях s (нижняя грань допустимых показателей зависит от порядка однородности η) этот предел для $\xi\neq 0$ существует. Функция $\tilde{\vartheta}$ является положительно однородной порядка $-(m+\eta)$ и, вследствие эрмитовости ϑ , вещественной. В отличие от определения преобразования Фурье, принятого в теории обобщенных функций, формула (4.55) "устраняет" сингулярные члены типа дельта-функции и ее производных. Так, если $\vartheta(x)=|x|^{\eta}$, то $\tilde{\vartheta}(\xi)\equiv 0$ при $\eta=0,2,4,\dots$.

Введем обозначения

$$\gamma_{\pm}(\vartheta)=(2\pi)^{-m}\operatorname{mes}\{\xi:\pm\tilde{\vartheta}(\xi)>1\} \qquad (4.56)$$

для величин, которые в дальнейшем войдут в асимптотику.

Мы рассмотрим класс интегральных операторов, связанный с функцией ϑ. Пусть E – ограниченное измеримое (по Лебегу) множество в $\mathbb{R}^m$. Определяемые ниже операторы действуют в пространстве $L_2 E$ вектор-функций порядка k, $1 \le k < \infty$. Пусть $a(x)$ – матрица-функция в E, имеющая k столбцов и $\hat{k}$ $(1 \le \hat{k} < \infty)$ строк, $\overline{a(x)}$ – сопряженная для $a(x)$ матрица, имеющая $\hat{k}$ столбцов и k строк. Далее, пусть $R(x,y) = \overline{R(y,x)}$ – эрмитова $(\hat{k} \times \hat{k})$ -матрица, заданная на $E \times E$. Рассматриваемые операторы имеют вид

$$(\mathbb{Q} u)(x) = \int_E \vartheta(x-y) \overline{a(x)} R(x,y) a(y) u(y) dy . \tag{4.57}$$

Если весовая матрица a скалярна ($k = \hat{k}$ и $a(x)$ кратна единичной матрице), то изучение оператора (4.57) равносильно исследованию оператора

$$\int_E \vartheta(x-y) R(x,y) u(y) \rho(dy) .$$

в пространстве $L_2(\rho) E$ при $\rho(dy) = |a(y)|^2 dy$.

Оператор $\mathbb{Q}$ при налагаемых ниже условиях на R и a оказывается симметричным компактным оператором в $L_2 E$. Мы укажем асимптотическое соотношение, которому удовлетворяют функции распределения собственных значений $n_\pm(\lambda; \mathbb{Q})$. Условие на R будет наложено в терминах гельдеровского класса $C^\beta(E \times E)$. Последний определяется следующим образом. Пусть $Q \supset E$ – замкнутый куб; тогда $R \in C^\beta(E \times E)$ означает, что R есть сужение на $E \times E$ какой-либо функции класса $C^\beta(Q \times Q)$.

Обозначим через d_+ (через d_-) положительную (отрицательную) часть эрмитовой ($\bar{d} = d$) матрицы d.

Теорема 4.24. Пусть ϑ – эрмитова положительно однородная функция на $\mathbb{R}^m$ порядка $\eta > -m$. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ – измеримое ограниченное множество, $a \in L_p E$, $R \in C^{(\beta)}(E \times E)$, причем

$$p = 2 \text{ при } \eta > 0 \; ; \; 2p^{-1} < 1 + \eta m^{-1} \text{ при } -m < \eta \le 0 \; ; \tag{4.58}$$

$$2\beta > m + 2\eta \text{ при } m + 2\eta \ge 0 \; ; \; \beta = 0 \text{ при } m + 2\eta < 0. \tag{4.59}$$

Тогда для функций распределения $n_\pm(\lambda; \mathbb{Q})$ оператора (4.57) справедлива асимптотическая формула

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda^q n_\pm(\lambda; \mathbb{Q}) = \gamma_\pm(\vartheta) \int_E Tr \left\{ \left[\overline{a(x)} R(x,x) a(x) \right]_+^q \right\} dx +$$

$$+\gamma_{\mp}(\vartheta)\int_E Tr\left\{\left[\overline{a(x)}R(x,x)a(x)\right]_{-}^{q}\right\}dx\,, \quad q=m(m+\eta)^{-1}. \blacktriangle \quad (4.60)$$

Пусть теперь множество E – борелевское, ρ – неотрицательная конечная матричная мера порядка $\hat{k}\times\hat{k}$, определенная на борелевских подмножествах E, и $a(x)=(d\rho/dx)^{1/2}$. С помощью меры ρ вводится пространство вектор-функций $L_2(\rho)E$ со скалярным произведением

$$\int_E \rho(dx)u(x)\overline{v(x)}\,.$$

Рассмотрим интегральный оператор

$$(\mathbb{K}u)(x)=\int_E \vartheta(x-y)R(x,y)\rho(dy)u(y)\,, \quad (4.61)$$

действующий в $L_2(\rho)E$. Если мера ρ абсолютно непрерывна, то оператор $\mathbb{K}$ унитарно эквивалентен оператору (4.57), где $k=\hat{k}$,

$$a(x)=(d\rho/dx)^{1/2}. \quad (4.82)$$

Следующая теорема показывает, что при $\eta>0$ выражение для главного члена асимптотики сохраняется и при наличии у меры ρ сингулярной составляющей.

Теорема 4.25. Пусть ϑ – эрмитова положительно однородная функция порядка $\eta>0$ и $R\in C^{\beta}(E\times E)$, причем $2\beta>m+2\eta$. Тогда для функций распределения $n_{\pm}(\lambda;\mathbb{K})$ интегрального оператора (4.61) справедлива асимптотическая формула (4.60) (с заменой $\mathbb{Q}$ на $\mathbb{K}$), в которой $a(x)$ дается равенством (4.62). $\blacktriangle$.

Мы ограничимся лишь краткими указаниями по поводу доказательства теорем 4.24, 4.25. Доказательство теоремы 4.24 опирается на подходящие оценки спектра и на формулу типа (4.60) для явно решаемой модельной задачи. Нужные оценки спектра обеспечиваются теоремой 3.36. Роль модельного оператора здесь играет оператор вида (4.57), где $E=Q=[-\pi,\pi]^m$, $k=\hat{k}=1$, $R(x,y)\equiv 1$, $a(x)\equiv 1$, а функция $\vartheta(x)$ заменена функцией $\theta(x)$, которая строится следующим образом. В кубе Q полагаем $\theta(x)=(1-|x|^2)^s\vartheta(x)$ при $|x|\le 1$ и $\theta(x)=0$ в остальных точках куба Q; затем θ распространяется за пределы куба Q периодическим образом. Далее доказательство в существенном следует схеме доказательства теоремы 4.6, причем наиболее важную техническую роль играют леммы 1.17–1.19.

Для вывода теоремы 4.25 из теоремы 4.24 достаточно сослаться на вторую часть теоремы 3.35 и лемму 1.17.

Доказательство теоремы 4.24 читатель найдет в статье авторов [66]. В этой работе второе из условий (4.59) заменено несколько более жестким условием. Впрочем, это не отражается на доказательстве. Следует лишь вместо леммы 4 из [66] воспользоваться более сильной теоремой 3.36 об оценках спектра.

2. Частные случаи формулы (4.60). Пусть $\vartheta(x)=|x|^{\eta}$, $\eta>-m$, $\eta\neq 0,2,4,\ldots$. Тогда

$$\tilde{\vartheta}(\xi)=2^{m+\eta}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m+\eta}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\eta}{2}\right)}\,|\xi|^{-(m+\eta)}.$$

Положим

$$\gamma_{m,\eta}=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{m+\eta}{2}\right)}{\pi^{\eta/2}\left|\Gamma\left(-\frac{\eta}{2}\right)\right|}\right]^{q}$$

и обозначим через $\varepsilon=\varepsilon(\eta)$ символ $+$ или $-$, совпадающий со знаком числа $\Gamma\left(-\frac{\eta}{2}\right)$. Тогда из (4.56) находим, что

$$\gamma_{\varepsilon}(|x|^{\eta})=\gamma_{m,\eta}, \qquad \gamma_{-\varepsilon}(|x|^{\eta})=0.$$

Таким образом, для интегральных операторов

$$(\mathbb{Q}u)(x)=\int_E |x-y|^{\eta}\,\overline{a(x)}\,R(x,y)\,a(y)\,u(y)\,dy,$$

$$\eta>-m, \qquad \eta\neq 0,2,4,\ldots,$$

формула (4.60) принимает вид

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda^{q}n_{\pm\varepsilon(\eta)}(\lambda;\mathbb{Q})=\gamma_{m,\eta}\int_E \operatorname{Tr}\left\{\left[\overline{a(x)}R(x,x)a(x)\right]^{q}_{\pm}\right\}dx. \qquad (4.63)$$

При $\eta=0,2,4,\ldots$ предел (4.63) равен нулю, что соответствует отсутствию у функции $|x|^{\eta}$ для этих значений η особенности при $x=0$.

Рассмотрим теперь функции $\vartheta_j(x)=ix_j|x|^{\eta-1}$, $j=1,\ldots,m$, $\eta>-m$, $\eta\neq 1,3,5,\ldots$ (при исключенных значениях η функции $\vartheta_j(x)$ не имеют особенности в нуле и $\gamma_{\pm}(\vartheta_j)=0$). Вычисления по формуле (4.56) для функции

$$\tilde{\vartheta}_j(\xi)=2^{m+\eta}\pi^{\frac{m}{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m+\eta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-\eta+1}{2}\right)}\,|\xi|^{-(m+\eta+1)}\xi_j$$

дают значения $\gamma_+(\vartheta_j)=\gamma_-(\vartheta_j)=\hat{\gamma}_{m,\eta}$, где

$$\hat{\gamma}_{m,\eta}=\frac{m+\eta+1}{2(m+\eta)\sqrt{\pi}}\;\frac{\Gamma\left(\frac{2(m+\eta)}{2(m+\eta)}\right)}{\Gamma\left(\frac{2m+\eta}{2(m+\eta)}+\frac{m+1}{2}\right)}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{m+\eta+1}{2}\right)}{\pi^{\eta/2}\left|\Gamma\left(\frac{-\eta+1}{2}\right)\right|}\right]^{q}.$$

Таким образом, для интегральных операторов

$$(\mathbb{Q}u)(x)=\int_E i(x_j-y_j)|x-y|^{\eta-1}\overline{a(x)}R(x,y)a(y)u(y)dy, \tag{4.64}$$

$$\eta>-m,\quad \eta\neq 1,3,\dots,$$

формула (4.60) принимает вид

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda^{q}n_+(\lambda;\mathbb{Q})=\lim_{\lambda\to 0}\lambda^{q}n_-(\lambda;\mathbb{Q})=$$

$$=\hat{\gamma}_{m,\eta}\int_E Tr\left[\left|\overline{a(x)}R(x,x)a(x)\right|^{q}\right]dx. \tag{4.65}$$

В случае $m=1$, $E=Q^1$, оператор (4.64) можно записать в виде

$$(\mathbb{Q}u)(x)=i\int_0^1|x-y|^{\eta}\,\mathrm{sign}(x-y)\overline{a(x)}R(x,y)a(y)u(y)dy, \tag{4.66}$$

а постоянная $\hat{\gamma}_{1,\eta}$ имеет значения

$$\hat{\gamma}_{1,\eta}=\frac{1}{2}\left[\pi^{\eta}\left|\Gamma(-\eta)\sin\frac{\pi\eta}{2}\right|\right]^{(1+\eta)^{-1}},\qquad \eta\neq 0,2,4,\dots,$$

$$\hat{\gamma}_{1,\eta}=\pi^{-1}(2^{-\eta}\eta!)^{(1+\eta)^{-1}},\qquad \eta=0,2,4,\dots.$$

3. Связь с проблемой мультипликаторов. Ядро (матричное ядро) оператора (4.57)

$$Q(x,y)=\vartheta(x-y)\overline{a(x)}R(x,y)a(y)$$

получается умножением на функцию $\vartheta(x-y)$ ядра

$$T(x,y)=\overline{a(x)}R(x,y)a(y) \tag{4.67}$$

оператора $\mathbb{T}$:

$$(\mathbb{T}u)(x)=\int_E T(x,y)u(y)dy. \tag{4.68}$$

При $\eta = 0$ в условиях теоремы 4.24 аналитические требования на R и a гарантируют ядерность действующего в $L_2 E$ оператора $\mathbb{T}$ с ядром (4.67). Если располагать оценками спектра оператора $\mathbb{Q}$ с ядром

$$Q(x,y) = \vartheta(x-y) T(x,y) \tag{4.69}$$

непосредственно через ядерную норму оператора (4.68), то можно распространить асимптотическую формулу вида (4.60) на любые операторы $\mathbb{Q}$ с ядром (4.69), где T - ядро эрмитова оператора $\mathbb{T} \in \gamma_1$. Однако такие оценки (через операторные, а не через аналитические характеристики ядра T) существенно более трудны. Для ядерного случая они известны (см. [10]) лишь для оператора

$$(\mathbb{Q}u)(x) = i \int_0^1 sign(x-y) T(x,y) u(y) dy, \tag{4.70}$$

что отвечает оператору (4.66) при $\eta = 0$. В этом случае известна и соответствующая асимптотическая формула. Она является следствием более общей теоремы И.Ц.Гохберга - М.Г.Крейна [10] об асимптотике спектра эрмитовой компоненты вольтеррова оператора с ядерной антиэрмитовой компонентой. В полном объеме асимптотическая теорема Гохберга - Крейна обслуживает преобразование (3.59) для операторнозначных ядер.

В рассматриваемой нами ситуации теорема Гохберга - Крейна приводит к следующему результату.

Теорема 4.26. Пусть T - ядро действующего в $L_2 Q^1$ эрмитова оператора $\mathbb{T} \in \gamma_1$ вида (4.68) (при $E = Q^1$). Тогда функции распределения спектра оператора $\mathbb{Q}$ (4.70) удовлетворяют асимптотическому соотношению

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda n_{\pm}(\lambda; \mathbb{Q}) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\pi} \int_0^1 Tr \, | T_\delta(x,x) | \, dx \; , \tag{4.71}$$

где

$$T_\delta(x,y) = \frac{1}{(2\delta)^2} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \int_{y-\delta}^{y+\delta} T(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y}. \quad \blacktriangle.$$

Необходимость замены ядра T регуляризованным ядром T_δ связана с тем, что ядро оператора $\mathbb{T} \in \gamma_1$ может не быть непрерывным в окрестности диагонали.

Заметим, что в условиях теоремы 4.26 может быть $k=\infty$, т.е. речь идет о спектре конечной или бесконечной системы интегральных уравнений.

Ясно, что формула (4.71) содержит в себе формулу (4.65) при $\eta=0$.

В случае $\eta>0$ теорема 4.24 допускает подобное обобщение для произвольных однородных функций при $m\geq 1$. Теперь, однако, вместо класса γ_1 следует рассматривать класс γ_q, $q=m(m+\eta)^{-1}<1$, не являющийся нормированным пространством.

Определим для ядра T регуляризованное ядро. Пусть $Q_\delta(x)$ – куб с ребрами длины δ, параллельными осям координат, и с центром в точке x. Продолжая ядро T нулем вне $E\times E$, положим

$$T_\delta(x,y)=\delta^{-2m}\int\limits_{Q_\delta(x)}\int\limits_{Q_\delta(y)} T(\tilde{x},\tilde{y})\,d\tilde{x}\,d\tilde{y}.$$

Справедлив следующий результат (см. С.Ю.Ротфельд [67]).

Теорема 4.27. Пусть ϑ – эрмитова положительно однородная функция на $\mathbb{R}^m$ порядка $\eta>0$. Пусть $\mathbb{T}$ – оператор (4.68), $\mathbb{T}=\mathbb{T}^*\in\gamma_q$, $q=m(m+\eta)^{-1}$. Тогда для функций распределения спектра оператора $\mathbb{Q}$ с ядром (4.69) справедлива асимптотическая формула

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda^q n_\pm(\lambda;\mathbb{Q})=\gamma_\pm(\vartheta)\lim_{\delta\to 0}\int_E Tr\left\{\left[T_\delta(x,x)\right]_+^q\right\}dx+$$

$$+\gamma_\mp(\vartheta)\lim_{\delta\to 0}\int_E Tr\left\{\left[T_\delta(x,x)\right]_-^q\right\}dx\ .\ \blacktriangle. \qquad (4.72)$$

В связи с теоремой 4.27 заметим следующее. Для $T\in\gamma_q$ при $q<1$ величина $\|T\|_q$ (см. (1.36)) не обладает свойствами нормы. Однако, класс γ_q представляет собой полное метрическое пространство относительно расстояния $\|\mathbb{T}_1-\mathbb{T}_2\|_q^q$. Из (4.72) видно, что $\mathbb{Q}\in\gamma^{(1/q)}$. Класс $\gamma^{(1/q)}$ также не является нормированным пространством; в нем, однако, можно ввести метрику, относительно которой он оказывается полным метрическим пространством. Используя метрику в γ_q, $\gamma^{(1/q)}$ и опираясь на теорему 3.36, можно получить оценку

$$\sup_n n^{1/q}s_n(\mathbb{Q})\leq C\|\mathbb{T}\|_q\ ,\qquad C=C(\vartheta), \qquad (4.73)$$

где C не зависит от T. После этого вывод асимптотической формулы (4.72) состоит в уже известном нам "замыкании асимптотики" с помощью леммы I.18; операторы из теоремы 4.24 играют при этом роль модельных.

В условиях теоремы 4.27 допускается $k=\infty$. Более того, теорема 4.27 обобщается на случай операторнозначных ядер, что позволяет придать ей унитарно инвариантную формулировку (в терминах теории двойных операторных интегралов).

Комментарии и литературные указания

Начало исследованию асимптотики спектра самосопряженных краевых задач положено работами Г.Вейля [12], [68], где были созданы основы вариационного метода. Этот метод разрабатывался Р.Курантом. Отметим еще работу А.Плейеля [69], где делалась попытка x) применить технику Вейля - Куранта к задачам со знакопеременным весом. Начиная с работ Т.Карлемана, для исследования спектра применяются различные варианты тауберовой техники. Тауберовы методы позволяют рассматривать несамосопряженные задачи и изучать асимптотику спектральной функции, но они более "требовательны" к свойствам гладкости области и коэффициентов. В настоящее время тауберов подход является преобладающим. Обширная библиография по спектральной асимптотике приведена в обзоре К.Кларка [70].

Число работ об асимптотике спектра, где уделяется внимание снижению условий гладкости, очень невелико. Можно отметить работы С.Агмона [71], [72] и Р.Билса [73], но их условия весьма далеки от предельных. Единственным результатом окончательного характера была уже упоминавшаяся теорема М.Г.Крейна [9] о спектре регулярной струны.

Излагаемый в лекции 4 подход к исследованию спектра негладких эллиптических краевых задач в своей основе является вариационным; он предложен в статье авторов [22]. Теоремы 4.1, 4.6 доказаны в [22], причем при $2\ell<m$ считалось $r>m/2\ell$. Г.В.Розенблюм [15], [16] показал, что можно принять $r=m/2\ell$; за счет этого при $2\ell<m$ ему удалось перенести результаты на неограниченные области (теоремы

x) Рассуждения Плейеля были не полны по той поучительной для нас причине, что линия уровня даже бесконечно гладкого веса может оказаться "плохой" границей для подобластей.

4.14, 4.15). Несколько ранее асимптотика в неограниченных областях рассматривалась М.Ш.Бирманом и В.В.Борзовым [74]. Одно из утверждений этой статьи уточняется теоремой 4.18. При $\ell=1$ эта теорема дает новый результат для бесконечной струны.

В.В.Борзов [23] получил при $2\ell>m$ квалифицированные оценки спектра в случае сингулярных мер специальных классов. В [75] им рассмотрена (тоже при $2\ell>m$) задача $\mathcal{D}(\rho, Q^m)$ для локально-конечных мер. Кроме того Борзов [24] перенес результаты статьи [22] на случай полуэллиптических операторов; при этом он исходил из своих результатов по кусочно-полиномиальным приближениям для "векторных" классов W_p^α.

Остановимся на задаче $\mathcal{D}(\Omega)$ для уравнения

$$(-1)^\ell \Delta^\ell u = \lambda^{-1} u. \tag{4.74}$$

При $\ell=1$ для ограниченных Ω З.Цисельский в статье [76] (вышедшей одновременно с [22]) установил справедливость асимптотической формулы Вейля без каких-либо условий на $\partial\Omega$. Цисельский пользовался методами теории потенциала в сочетании с тауберовой техникой. Этот результат, разумеется, содержится в теореме 4.6. Позднее Розенблюм [77], [78] показал, что обычная асимптотическая формула в задаче $\mathcal{D}(\Omega)$ для уравнения (4.74) справедлива при единственном условии $mes\,\Omega<\infty$. Для $2\ell\geq m$ этот результат не зависит от теоремы 4.15. Там же рассмотрены случаи нарушения классической спектральной асимптотики.

Используемый в добавлении 6 прием, который связывает функции распределения спектра двух краевых задач, предложен (в общем виде) в [79], [80]. В [80], в частности, указано его значение для задачи об уравнении Шредингера с малым параметром. Теоремы 4.21, 4.22 дают наиболее сильные утверждения на этот счет. Несколько менее точные результаты тем же методом получены в [74], где можно найти указания на предшествующие работы.

Доказательство теоремы 4.23 на основе обсуждаемого приема предложено Розенблюмом.

Число работ, посвященных вычислению асимптотики спектра интегральных операторов, сравнительно невелико. В одномерном случае различными методами получен ряд результатов [81] - [85]; некоторые из них полностью или частично покрываются результатами теорем 4.24, 4.25. К многомерному случаю относятся работы М.А.Евграфова [86] и Х.Видома [87], в которых рассматриваются операторы с чисто разностным ядром. В [86] тауберовым методом изучены однородные ядра порядка $-m/\ell < \alpha < 0$. В работе [87] ядра подчинены тяжелым ограничениям, заведомо исключающим однородные ядра.

По поводу теорем 4.24, 4.25 см. статью авторов [66]. Теорема 4.26 является частным случаем более общей теоремы И.Ц.Гохберга - М.Г.Крейна [10]. Оценки вида (4.73) (при $q=1$) для оператора (4.70) получены М.Г.Крейном [10]. Возможность простого вывода из них асимптотической теоремы Гохберга - Крейна указана авторами [88].

Теорема 4.27 получена С.Ю.Ротфельдом [67]. О метризации ненормируемых идеалов в $\mathfrak{R}(\mathcal{H})$ см. Ротфельд [89], [13], [14].

ГЛАВА 5

Асимптотика спектра эллиптических вариационных задач с негладкими коэффициентами

В этой лекции рассматривается спектральная асимптотика для широкого класса эллиптических вариационных задач с негладкими с т а р ш и м и коэффициентами. Лекция распадается на две части. Первая часть (п.п.1–3) содержит полное изложение для эллиптической формы первого порядка в области с гладкой границей при отсутствии вырождения эллиптичности. Вторая часть (п.п.4–6) посвящена описанию результатов для вариационных задач гораздо более общего вида. В п.5 приведено доказательство оценок спектра, аналогичных оценке (4.8). Доказательство справедливости формулы спектральной асимптотики в общем случае технически весьма сложно. Поэтому оно здесь не приводится; подробное изложение можно найти в статье авторов [90]. Предварительное знакомство с материалом п.п.1–3 может существенно облегчить чтение статьи [90].

1. Задача $\mathcal{D}$ для невырожденной вариационной задачи первого порядка. Мы покажем, каким образом соображения гл.4 могут быть перенесены на вариационные задачи с негладкими старшими членами. Основная трудность здесь в том, что прямое использование леммы 1.18 теперь невозможно: переход от гладких задач к негладким связан не с аддитивным возмущением компактного оператора, а с возмущением метрики основного гильбертова пространства. Приходится использовать обходный путь, связанный с переходом к другим операторам, имеющим тот же спектр. Подробно мы разберем лишь простейшую задачу этого типа. Здесь многие этапы общего рассуждения значительно облегчаются (или выпадают совсем), что позволяет лучше понять замысел доказательства. Чтобы избежать "взаимодействия" трудностей различного происхождения и выделить влияние негладкости старших коэффициентов, мы будем предполагать границу области гладкой, форму старших коэффициентов – невырожденной, младший коэффициент примем постоянным.

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^m$, $\partial\Omega \in C^\infty$. Пусть $a(x) = \{a_{ij}(x)\}$, $i,j = 1,\ldots,n$, $x \in \Omega$, – измеримая, ограниченная и равномерно положительно определенная матрица-функция. Не уменьшая общности, можно считать нижнюю грань $a(x)$ в Ω равной единице:

$$|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\xi_i\bar{\xi}_j, \quad x\in\Omega, \quad \xi\in\Xi_m. \tag{5.1}$$

На классе $\overset{\circ}{H}_1\Omega$ определим квадратичную форму

$$A[u,u]=\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\overline{\frac{\partial u}{\partial x_j}}\,dx, \quad u\in\overset{\circ}{H}_1\Omega. \tag{5.2}$$

Из (5.1) и ограниченности a следует, что форма (5.2) определяет в $\overset{\circ}{H}_1\Omega$ эквивалентную норму. Соответствующее гильбертово пространство обозначим через $\overset{\circ}{H}(a)$.

Форма

$$B[u,u]=\int_\Omega |u|^2 dx \tag{5.3}$$

вполне непрерывна в $\overset{\circ}{H}(a)$ и определяет в $\overset{\circ}{H}(a)$ положительный компактный оператор. Его собственные значения будем называть спектром задачи $\mathcal{D}$ (Дирихле) для отношения квадратичных форм

$$B[u,u]\,/\,A[u,u], \quad u\in\overset{\circ}{H}_1\Omega, \tag{5.4}$$

и обозначать через $\lambda_n=\lambda_n(\mathcal{D},a)$.

Если $a\in C^1\Omega$, то вариационная задача (5.4) эквивалентна краевой задаче на спектр для эллиптического дифференциального уравнения второго порядка:

$$-\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=\lambda^{-1}u, \quad u/_{\partial\Omega}=0. \tag{5.5}$$

В этом случае хорошо известна следующая асимптотическая формула для функции распределения $n(\lambda;a)$ спектра задачи $\mathcal{D}$:

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda^\theta n(\lambda;a)=\frac{v_m}{(2\pi)^m}\int_\Omega\frac{dx}{\sqrt{\det a(x)}}, \quad \theta=\frac{m}{2}, \tag{5.6}$$

где v_m – объем единичного шара в $\mathbb{R}^m$. Однако при наших предположениях о матрице a вариационная задача не может быть сведена к краевой задаче (5.5). Тем не менее, мы покажем, что асимптотика (5.6) для спектра задачи $\mathcal{D}$ остается в силе.

Теорема 5.1. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^m$, $\partial\Omega\in C^\infty$, и пусть измеримая матрица-функция a ограничена и удовлетворяет (5.1). Тогда для собственных значений $\lambda_n(\mathfrak{D})$ отношения (5.4) квадратичных форм (5.3), (5.2) справедлива асимптотическая формула (5.6). ▲.

Сформулированная теорема допускает далеко идущие обобщения в различных направлениях. Об этом будет сказано в п.4. Наша ближайшая цель – доказательство теоремы 5.1. Это будет сделано в п.п.2, 3. Предварительно мы укажем еще одну теоретико-операторную трактовку задачи о спектре отношения (5.4). В этой связи напомним некоторые элементарные сведения о квадратичных формах в гильбертовом пространстве (подробнее см. [91], [92]).

В гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}=L_2\Omega$ форма (5.2) с областью определения $\mathfrak{d}[A]=\overset{\circ}{H}_1\Omega$ в силу (5.1) положительно определена и замкнута (последнее означает, что $\mathfrak{d}[A]$ есть полное гильбертово пространство относительно метрики, порожденной формой A). Тогда A порождает в $\mathfrak{H}$ самосопряженный положительно определенный оператор $\mathbb{A}$, такой, что его область определения $\mathfrak{D}(\mathbb{A})$ плотна в $\mathfrak{d}[A]$, $\mathfrak{D}(\mathbb{A}^{1/2})=\mathfrak{d}[A]$ и

$$(\mathbb{A}^{1/2}u,\mathbb{A}^{1/2}v)=A[u,v]\ ,\quad u,v\in\mathfrak{d}[A]. \tag{5.7}$$

Отметим еще, что для $h\in\mathfrak{H}$ решение уравнения $\mathbb{A}u=h$ определяется из соотношения

$$A[u,v]=(h,v),\qquad v\in\mathfrak{d}[A]\ , \tag{5.8}$$

которое должно выполняться для любого $v\in\mathfrak{d}[A]$. Таким образом, соотношение (5.8) определяет оператор $\mathbb{A}^{-1}$. Из полной непрерывности формы (5.2) в пространстве $\mathfrak{d}[A]=\overset{\circ}{H}(a)$ вытекает, что оператор $\mathbb{A}^{-1}$ компактен в $\mathfrak{H}$. Стандартный минимаксимальный принцип показывает, что собственные значения $\lambda_n(\mathbb{A}^{-1})$ оператора $\mathbb{A}^{-1}$ совпадают со спектром отношения (5.4):

$$\lambda_n(\mathbb{A}^{-1})=\lambda_n(\mathfrak{D})\ . \tag{5.9}$$

2. <u>Доказательство теоремы 5.1</u>. Соотношение (5.9) позволяет свести дело к изучению асимптотики спектра оператора $\mathbb{A}^{-1}$. Мы аппроксимируем матрицу a гладкой матрицей того же вида и воспользуемся тем, что в "гладком" случае асимптотика (5.6) известна. Пусть $\tilde{a}\in C^\infty\bar{\Omega}$ и для $\tilde{a}$ выполнено условие (5.1); пусть $\tilde{A}$ – соответствующая форма вида (5.2), $\tilde{\mathbb{A}}$ – самосопряженный оператор в $L_2\Omega$, порожденный формой $\tilde{A}$. Мы намерены воспользоваться леммой

1.18 для суммы

$$\mathbb{A}^{-1}=\tilde{\mathbb{A}}^{-1}+(\mathbb{A}^{-1}-\tilde{\mathbb{A}}^{-1}). \tag{5.10}$$

Поэтому прежде всего мы должны получить удобное представление для разности $\mathbb{A}^{-1}-\tilde{\mathbb{A}}^{-1}$.

Ниже $\|\cdot\|$ и $(\cdot,\cdot)$ означают норму и скалярное произведение для пространства $\mathfrak{H}=L_2\,\Omega$.

Лемма 5.2. Оператор $\mathbb{A}^{-1}-\tilde{\mathbb{A}}^{-1}$ представим в виде

$$\mathbb{A}^{-1}-\tilde{\mathbb{A}}^{-1}=\sum_{i,j=1}^{m}\mathbb{A}^{-1/2}(D_j\mathbb{A}^{-1/2})^{*}G_{ij}, \tag{5.11}$$

где

$$G_{ij}=(\tilde{a}_{ij}-a_{ij})D_i\tilde{\mathbb{A}}^{-1}\quad . \qquad \blacktriangle . \tag{5.12}$$

Доказательство. Для любых $u,v\in \overset{\circ}{H}(a)$ имеем

$$(\tilde{\mathbb{A}}^{1/2}u,\tilde{\mathbb{A}}^{1/2}v)-(\mathbb{A}^{1/2}u,\mathbb{A}^{1/2}v)=\tilde{\mathrm{A}}[u,v]-\mathrm{A}[u,v]=$$
$$=\sum_{i,j=1}^{m}\int_{\Omega}(\tilde{a}_{ij}-a_{ij})\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\overline{\frac{\partial v}{\partial x_j}}\,dx.$$

Положим здесь $u=\tilde{\mathbb{A}}^{-1}f$, $v=\mathbb{A}^{-1}g$, где f , $g\in L_2\,\Omega$. Тогда для любых f , $g\in L_2\,\Omega$ придем к соотношению

$$(\mathbb{A}^{-1}f,g)-(\tilde{\mathbb{A}}^{-1}f,g)=\sum_{i,j=1}^{m}\int_{\Omega}(\tilde{a}_{ij}-a_{ij})\frac{\partial\tilde{\mathbb{A}}^{-1}f}{\partial x_i}\,\overline{\frac{\partial\mathbb{A}^{-1}g}{\partial x_j}}\,dx=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{m}(G_{ij}f,D_j\mathbb{A}^{-1}g)\ ,$$

которое равносильно (5.11). ▨.

Нам нужно оценить функционал $\Delta_\theta(\mathbb{A}^{-1}-\tilde{\mathbb{A}}^{-1})$, $\theta=m/2$, через какую-либо $L_{\bar{p}}$ -норму разности $\tilde{a}-a$. При этом мы будем пользоваться хорошо известными [8] неравенствами для s -чисел суммы и произведения операторов:

$$s_{n_1+n_2-1}(T_1+T_2)\le s_{n_1}(T_1)+s_{n_2}(T_2),\qquad T_1,\ T_2\in\mathfrak{S}_\infty\ ; \tag{5.13}$$

$$s_{n_1+n_2-1}(T_1T_2)\le s_{n_1}(T_1)s_{n_2}(T_2),\quad T_1,T_2\in\mathfrak{S}_\infty, \tag{5.14}$$

$$s_n(T_1TT_2)\le\|T_1\|\|T_2\|\, s_n(T),\quad T_1,T_2\in\mathcal{R},\quad T\in\mathfrak{S}_\infty. \tag{5.15}$$

Неравенства (5.13) позволяют ограничиться в оценках спектра отдельными слагаемыми в (5.11); неравенства (5.14), (5.15) дают возможность порознь оценивать спектр сомножителей в каждом слагаемом суммы (5.11).

Лемма 5.3. Имеют место оценки

$$\lambda_n(\mathbb{A}^{-1/2})\le c_1 n^{-1/m},\quad c_1=c_1(\Omega), \tag{5.16}$$

$$\|\mathcal{D}_j\mathbb{A}^{-1/2}\|\le 1,\quad j=1,\dots,m. \tag{5.17}$$

Доказательство. В силу (5.9) $\lambda_n^2(\mathbb{A}^{-1/2})=\lambda_n(\mathcal{D})$. Из (5.1) следует, что числа $\lambda_n(\mathcal{D})$ не превосходят собственных чисел отношения

$$B[u,u]\,/\,\mathcal{J}_1[u,u],\qquad u\in\overset{\circ}{H}_1\Omega.$$

Спектр последнего отношения оценивается согласно (4.8), что приводит к (5.16). Из (5.1) следует также, что

$$\|D_j u\|^2\le A[u,u]=\|\mathbb{A}^{1/2}u\|^2,\qquad u\in\overset{\circ}{H}_1\Omega,$$

откуда получается (5.17). ▨.

Наиболее содержательная часть доказательства состоит в получении асимптотической оценки спектра для операторов (5.12). Именно здесь будет явно учтена близость $\tilde a$ к a в некоторой L_p -норме.

Лемма 5.4. Пусть $p=2$ при $m=1$, $p>2$ при $m=2$ и $p=m$ при $m\ge 3$. Тогда

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/m}s_n(G_{ij})\le c_2 N(\tilde a-a\,|\,L_p\Omega), \tag{5.18}$$

где постоянная $c_2=c_2(\Omega)$ ($c_2(\Omega,p)$ при $m=2$) не зависит от матрицы $\tilde a$. ▲.

Коль скоро лемма 5.4 доказана, доказательство теоремы 5.1 легко завершается. В самом деле, при помощи неравенств (5.13)-(5.15) из (5.16)-(5.18) легко получается оценка

$$\Delta_\theta(\mathbb{A}^{-1}-\tilde{\mathbb{A}}^{-1}) \le c_0 N^\theta(\tilde{a}-a|L_p\Omega),$$

где постоянная $c_0=c_0(\Omega,p)$ не зависит от $\tilde{a}$. Поскольку матрицу $\tilde{a}$ можно выбрать сколь угодно близкой в L_p-норме к матрице a, то и функционал $\Delta_\theta(\mathbb{A}^{-1}-\tilde{\mathbb{A}}^{-1})$ может быть сделан сколь угодно малым. Это дает возможность применить лемму I.18 к представлению (5.10): из справедливости асимптотики вида (5.6) для спектра оператора $\tilde{\mathbb{A}}^{-1}$ вытекает справедливость формулы (5.6) для спектра оператора $\mathbb{A}^{-1}$. ■.

3. Доказательство леммы 5.4. Для сокращения письма положим $\tilde{a}-a=\alpha$. Минимаксимальный принцип для s-чисел (см. п.2 добавления I) позволяет утверждать, что числа $\mu_n=s_n^2(G_{ij})$ суть последовательные максимумы отношения

$$\|G_{ij}h\|^2/\|h\|^2, \qquad h\in L_2\Omega. \tag{5.19}$$

После подстановки $u=\tilde{\mathbb{A}}^{-1}h$ (5.19) перейдет в отношение

$$\|\alpha_{ij}D_i u\|^2/\|\tilde{\mathbb{A}}u\|^2, \qquad u\in\mathcal{D}(\tilde{\mathbb{A}}). \tag{5.20}$$

Оценка (5.18) будет получена, если мы сумеем оценить величину

$$\limsup_{n\to\infty} n^{2/m}\mu_n \tag{5.21}$$

для собственных значений μ_n задачи (5.20). Поскольку матрица $\tilde{a}$ и граница $\partial\Omega$ - гладкие, можно утверждать, что

$$\mathcal{D}(\tilde{\mathbb{A}})=\left\{u\in H_2\Omega: u\big|_{\partial\Omega}=0\right\}.$$

Более того, как показано О.А.Ладыженской (см. [93]), для $u\in\mathcal{D}(\tilde{\mathbb{A}})$ справедливо соотношение

$$\|\tilde{\mathbb{A}}u\|^2=J_{(\tilde{a})}(u)+\Gamma(u), \qquad u\in\mathcal{D}(\tilde{\mathbb{A}}),$$

где

$$J_{(\tilde{a})}(u)=\sum_{i,j,k,\ell=1}^{m}\int_\Omega \tilde{a}_{ij}(x)\overline{\tilde{a}_{k\ell}(x)}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k}\,\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_\ell}}\,dx, \tag{5.22}$$

а $\Gamma(u)$ — квадратичная форма, вполне непрерывная относительно формы (5.22). Если в (5.20) заменить знаменатель формой (5.22), то, согласно лемме I.16, величина (5.21) для нового отношения сохранится. Далее, из (5.I) следует, что

$$\mathcal{J}_{(\tilde{a})}(u) \geqslant \mathcal{J}_2[u,u] = \overset{\circ}{N}{}^2(u \mid H_2\Omega).$$

Поэтому, если форму $\mathcal{J}_{(\tilde{a})}$ заменить формой $\mathcal{J}_2$, то для спектра соответствующего отношения величина (5.2I) разве лишь возрастет. Наконец, к форме $\mathcal{J}_2[u,u]$ можно добавить вполне непрерывное относительно нее слагаемое $\|D_i u\|^2$; величина (5.2I) при этом не изменится. Таким образом, дело свелось к оценке функционала (5.2I) для отношения

$$\int_\Omega |\alpha_{ij}|^2 |D_i u|^2 dx \Big/ [\mathcal{J}_2[u,u] + \|D_i u\|^2], \quad u \in H_2\Omega,\ u\,|_{\partial\Omega} = 0.$$

Заметим теперь, что функционал (5.2I) разве лишь возрастет, если мы проделаем следующее. Во-первых, в знаменателе последнего отношения заменим форму $\mathcal{J}_2[u,u]$ меньшей формой

$$\sum_{j=1}^{m} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\, \partial x_i} \right\|^2.$$

Во-вторых, положим $D_i u = v$, после чего расширим класс допустимых функций v, считая v произвольной функцией класса $H_1\Omega$. Таким образом, достаточно оценить собственные значения отношения

$$\int_\Omega |\alpha_{ij}|^2\, |v|^2 dx \Big/ [\mathcal{J}_1[v,v] + \|v\|^2], \qquad v \in H_1\Omega,$$

т.е. спектр задачи $\mathcal{N}_1(\Omega)$ при $\ell = 1$. В соответствии с оценкой (4.9) получаем, что

$$\limsup_{n\to\infty} n^{2/m} \lambda_n(\mathcal{N}_1) \leqslant c N^2(\alpha_{ij} \mid L_p\Omega),$$

где $c = c(\Omega)$ ($c(\Omega, p)$ при $m = 2$). Полученная оценка тем более справедлива для функционала (5.2I) для спектра отношения (5.I9). Этим доказано неравенство (5.I8). ▨.

Вместе с леммой 5.4 доказана и теорема 5.I. Заметим, что в оценке (5.I8) при $m \geqslant 3$ участвует наименьший возможный показатель $p = m$. Разумеется, было бы достаточно подобной оценки с любым конечным $p > m$. (Такую оценку можно получить, опираясь, в ко-

конечном очете, на теорему I.5 о разбиениях, а не на теорему 2.16 о покрытиях). Вместе о тем следует иметь в виду, что значительно более простая оценка вида (5.18) при $p=\infty$ совершенно бесполезна для нашей цели, так как в метрике пространства $L_\infty \Omega$ матрицами $\tilde{a} \in C^\infty \bar{\Omega}$ можно сколь угодно хорошо аппроксимировать лишь матрицы $a \in C\bar{\Omega}$.

4. <u>Спектральная асимптотика для общих эллиптических вариационных задач.</u> Как уже отмечалось, теорема 5.I допуокает значительные обобщения. Именно, роль формы A может играть форма любого целого дифференциального порядка $\ell \geq 1$. Матрица коэффициентов $a(x)$ может быть вблизи некоторых точек $x \in \bar{\Omega}$ неограниченной или, напротив, вырождающейоя. При этом $a(x)$ подчиняетоя лишь условиям интегрального характера, которые обеспечивают сохранение "нормального" аоимптотического поведения спектра. (Тем самым, вырождение не может быть слишком сильным). Далее, роль формы B может играть форма целого или полуцелого порядка $r<\ell$. Таким образом, вариационная задача о спектре отношения форм B/A соответотвует в "гладком" случае краевой задаче для дифференциального уравнения вида

$$\mathcal{A}u = \lambda^{-1}\mathcal{B}u , \tag{5.23}$$

где операция $\mathcal{A}$ имеет порядок 2ℓ , а операция $\mathcal{B}$ - порядок $2r \leq 2\ell-1$. При этом рассматривается векторная ситуация, что в терминах уравнения (5.23) означает рассмотрение систем. Наконец, роль основной области играет произвольное ограниченное открытое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

Перейдем к точной постановке задачи. Через $\mathbb{C}^k$ обозначается k-мерное комплексное эвклидово пространство, через $f\bar{g}$ - скалярное произведение элементов $f, g \in \mathbb{C}^k$. Если w - матрица порядка $k \times k$, то $\bar{w}$ - эрмитово сопряженная матрица и $|w|$ - норма соответствующего линейного преобразования. Если $w=\bar{w}$, то w_+ - положительная, w_- - отрицательная части матрицы w . Через $L_p\Omega$, $H_\ell\Omega$, $C_0^\infty\Omega$ и т.п. теперь будут обозначатьоя соответствующие пространства вектор-функций $u:\Omega \to \mathbb{C}^k$; индекс k в обозначениях явно не отражается. Оператор ∇_ℓ применяетоя к вектор-функциям "покомпонентно".

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ - ограниченное открытое множество и пусть в Ω определена измеримая "клеточная" матрица-функция $a(x)$, элементы которой - матрицы порядка $k \times k$:

$$a(x)=\{a_{\sigma_1\sigma_2}(x)\}\ ,\quad |\sigma_1|=|\sigma_2|=\ell,\ \overline{a_{\sigma_1\sigma_2}(x)}=a_{\sigma_2\sigma_1}(x).$$

Норма матрицы a (как линейного оператора в эвклидовом пространстве соответствующей размерности) по-прежнему обозначается через $|a|$. Будем говорить, что $a\in L_p\Omega$, если $|a|\in L_p\Omega$, и положим $\|a\|_p=\|\,|a|\,\|_p$.

Ниже всюду предполагается, что для почти всех (по m-мерной мере Лебега) точек $x\in\Omega$ матрица $a(x)$ положительно определена: для любого набора $f=\{f_\sigma\}$, $|\sigma|=\ell$, векторов из $\mathbb{C}^K$ выполнено неравенство

$$\langle a(x)f,f\rangle \overset{def}{=} \sum_{|\sigma_1|=|\sigma_2|=\ell} a_{\sigma_1\sigma_2}(x) f_{\sigma_2}\bar f_{\sigma_1} \geq \gamma(x)\sum_{|\sigma|=\ell}\frac{\ell!}{\sigma!}|f_\sigma|^2,\ \gamma(x)>0. \quad (5.24)$$

Наибольшее возможное значение γ в (5.24) определяется соотношением $\gamma^{-1}(x)=|a^{-1}(x)|$, которое будем считать выполненным.

На множество Ω и матрицу a накладывается следующее условие.

Условие 5.5. Открытое множество $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ ограничено; $a\in L_{1,loc}\Omega$; при почти всех $x\in\Omega$ выполнено (5.24) и $a^{-1}\in L_\alpha\Omega$ при $1\leq\alpha\leq\infty$, $\alpha^{-1}<2\ell m^{-1}$. ▲.

Матрице a сопоставим дифференциальную квадратичную форму

$$A[u,u]=\int_\Omega\langle a(x)\nabla_\ell u,\nabla_\ell u\rangle dx=\sum_{|\sigma_1|=|\sigma_2|=\ell}\int_\Omega a_{\sigma_1\sigma_2}(x)D^{\sigma_2}u\,\overline{D^{\sigma_1}u}\,dx \quad (5.25)$$

и соответствующую дифференциальную операцию

$$\mathcal{A}u=\sum_{|\sigma_1|=|\sigma_2|=\ell} D^{\sigma_1}[a_{\sigma_1\sigma_2}(x)D^{\sigma_2}u]. \quad (5.26)$$

Из условия $a\in L_{1,loc}\Omega$ вытекает, что форма A определена на функциях $u\in C_0^\infty\Omega$. Что касается выражения (5.26), то непосредственный смысл оно имеет лишь в случае достаточной гладкости функций $a_{\sigma_1\sigma_2}$.

На классе $C_0^\infty\Omega$ форма $A[u,v]$ определяет невырожденное скалярное произведение. Пополнение класса $C_0^\infty\Omega$ по метрике формы A обозначим через $\overset{\circ}{H}_\ell(a)$. Покажем, что $\overset{\circ}{H}_\ell(a)$ есть гильбертово пространство функций, непрерывно вложенное в $\overset{\circ}{W}{}_1^\ell\Omega$. Для

$u \in C_0^\infty \Omega$ имеет место оценка

$$\int_\Omega |\nabla_\ell u| dx \le \int_\Omega [\gamma^{-1}(x)]^{1/2} [\langle a(x)\nabla_\ell u, \nabla_\ell u\rangle]^{1/2} dx \le$$
$$\le \sqrt{\|a^{-1}\|_1}\, \sqrt{A[u,u]}.$$

Остается установить согласованность топологий в $\overset{o}{H}_\ell(a)$ и в $\overset{o}{W}{}_1^\ell \Omega$. Пусть последовательность $\{u_n\} \subset C_0^\infty \Omega$, фундаментальная в $\overset{o}{H}_\ell(a)$, сходится к нулю в $\overset{o}{W}{}_1^\ell \Omega$. Переходя к подпоследовательности, можем считать, что $\nabla_\ell u_n(x) \to 0$ при почти всех $x \in \Omega$. Из неравенства

$$\int_\Omega \langle a(x)\nabla_\ell (u_m - u_n), \nabla_\ell (u_m - u_n)\rangle dx \le \varepsilon,$$

верного при достаточно больших m, n, по лемме Фату находим, что $A[u_n, u_n] \le \varepsilon$. Таким образом, $u_n \to 0$ в $\overset{o}{H}_\ell(a)$, что и требовалось.

Очевидно, если $a \in L_\infty \Omega$, $a^{-1} \in L_\infty \Omega$, то $\overset{o}{H}_\ell(a)$ совпадает, с точностью до эквивалентности норм, с $\overset{o}{H}_\ell \Omega$.

В гильбертовом пространстве $\overset{o}{H}_\ell(a)$ мы будем рассматривать операторы, порожденные формами низшего порядка. Пусть r – целое или полуцелое число, $0 \le r < \ell$; τ_1, τ_2 – мультииндексы, $|\tau_1|$, $|\tau_2| \le \ell$, $|\tau_1| + |\tau_2| = 2r$. Пусть каждой такой паре мультииндексов сопоставлена комплексная матричная (порядка $K \times K$) мера $\rho_{\tau_1\tau_2}$, причем $\overline{\rho}_{\tau_1\tau_2} = \rho_{\tau_2\tau_1}$. Набор мер $\rho = \{\rho_{\tau_1\tau_2}\}$ также будем называть мерой (зарядом); набор матриц $b = \{b_{\tau_1\tau_2}\} = \{d\rho_{\tau_1\tau_2}/dx\}$ будем называть матрицей.

Заряд ρ указанного вида порождает квадратичную форму

$$B[u,u] = \sum_{\tau_1,\tau_2} \int_\Omega \rho_{\tau_1\tau_2}(dx) D^{\tau_2} u\, \overline{D^{\tau_1} u} \tag{5.27}$$

$$(|\tau_1|, |\tau_2| \le \ell, \quad |\tau_1| + |\tau_2| = 2r, \quad r < \ell),$$

которая для абсолютно непрерывных мер принимает вид

$$B[u,u] = \sum_{\tau_1,\tau_2} \int_\Omega b_{\tau_1\tau_2}(x) D^{\tau_2} u\, \overline{D^{\tau_1} u}\, dx. \tag{5.28}$$

Частным случаем формы (5.28) является форма более простого вида

$$B[u,u] = \sum_{|\tau_1| = |\tau_2| = r} \int_\Omega b_{\tau_1\tau_2}(x) D^{\tau_2} u\, \overline{D^{\tau_1} u}\, dx \quad (r \text{ – целое}). \tag{5.29}$$

В случае достаточно гладкой матрицы $b(x)$ форме (5.28) соответствует дифференциальное выражение порядка $2r$

$$\mathcal{B}u = \sum_{\tau_1, \tau_2} D^{\tau_1}[b_{\tau_1\tau_2}(x) D^{\tau_2} u]. \tag{5.30}$$

Следующее условие связывает поведение матрицы a и заряда ρ.

Условие 5.6. Каждая мера $\rho_{\tau_1\tau_2}$ в (5.27) принадлежит классу x) $\mathfrak{M}_{\beta_{\tau_1\tau_2}}$, где

$$\alpha^{-1} + (\beta_{\tau_1\tau_2})^{-1} < 2(\ell - r)m^{-1}; \tag{5.31}$$

$$\alpha^{-1} + 2(\beta_{\tau_1\tau_2})^{-1} < 2(\ell - |\tau_i|)m^{-1} + 1, \quad i = 1,2. \quad \blacktriangle. \tag{5.32}$$

В ряде случаев неравенства (5.32) поглощаются неравенствами (5.31) или выполняются автоматически. Так будет, например, для форм вида (5.29), а также при $\beta_{\tau_1\tau_2} = \infty$.

При совместном выполнении условий 5.5, 5.6 форма (5.28) вполне непрерывна в $\overset{\circ}{H}_\ell(a)$ и, следовательно, порождает некоторый самосопряженный компактный оператор – "оператор задачи $\mathfrak{D}$". Его положительные (отрицательные) собственные значения $\lambda_n^+(\mathfrak{D})$ ($-\lambda_n^-(\mathfrak{D})$) совпадают с последовательными максимумами (минимумами) отношения квадратичных форм

$$B[u,u] \,/\, A[u,u], \qquad u \in \overset{\circ}{H}_\ell(a). \tag{5.33}$$

Следующая теорема является обобщением оценок (4.8), (4.10).

Теорема 5.7. Пусть выполнены условия 5.5, 5.6. Тогда для спектра отношения (5.33) форм (5.28), (5.25) справедлива оценка

$$\lambda_n^{\pm}(\mathfrak{D}) \le C n^{-q} \|a^{-1}\|_\alpha \sum_{\tau_1, \tau_2} \|\rho\|_{(\beta_{\tau_1\tau_2})} \quad \left(q = \frac{2(\ell - r)}{m}\right). \tag{5.34}$$

Постоянная C зависит от m, κ, ℓ, r, α, $\beta_{\tau_1\tau_2}$ и от $diam\,\Omega$, но не зависит от a и ρ.

Если при этом все числа $\beta_{\tau_1\tau_2}$ равны единице и мера ρ сингулярна, то

---

x) Включение $\rho \in \mathfrak{M}_\beta$ означает, что все элементы матрицы ρ принадлежат классу $\mathfrak{M}_\beta$.

$$\lambda_n^{\pm}(\mathcal{D}) = o(n^{-q}). \quad \blacktriangle. \tag{5.35}$$

Переходим к изложению результатов об асимптотике. Обозначим через $\mathfrak{A}(x,\xi)$, $\mathfrak{B}(x,\xi)$ символы форм A, B (или, что то же, главные символы дифференциальных выражений (5.26), (5.30)):

$$\mathfrak{A}(x,\xi) = \sum_{\sigma_1,\sigma_2} a_{\sigma_1\sigma_2}(x)\,\xi^{\sigma_1+\sigma_2},$$

$$\mathfrak{B}(x,\xi) = \sum_{\tau_1,\tau_2} b_{\tau_1\tau_2}(x)\,\xi^{\tau_1+\tau_2}.$$

Символы представляют собой квадратные матрицы порядка k. Сингулярная составляющая меры ρ не отражается на символе формы B. Символ $\mathfrak{A}$ при почти всех $x\in\Omega$ удовлетворяет условию сильной эллиптичности

$$\mathfrak{A}(x,\xi)f\bar{f} \geqslant \gamma(x)|\xi|^{2l}|f|^2, \quad \xi\in\Xi_m;\ f\in\mathbb{C}^k,$$

которое следует из (5.24) при $f_\sigma = \xi^\sigma f$.

Теорема 5.8. В условиях теоремы 5.7 для функций распределения $n_\pm(\lambda;\mathcal{D})$ спектра отношения (5.33) справедлива асимптотическая формула

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda^\theta n_\pm(\lambda;\mathcal{D}) = \omega_\pm(a,b;\Omega), \tag{5.36}$$

где $2\theta = 2q^{-1} = m(l-r)^{-1}$,

$$m(2\pi)^m\omega_\pm(a,b;\Omega) =$$

$$= \int_\Omega \int_{|\xi|=1} \operatorname{Tr}\left\{\left[\mathfrak{A}^{-1/2}(x,\xi)\,\mathfrak{B}(x,\xi)\,\mathfrak{A}^{-1/2}(x,\xi)\right]_\pm^\theta\right\} dS(\xi)\,dx. \tag{5.37}$$

$\blacktriangle$.

Внутренний интеграл в (5.37) берется по $(m-1)$-мерной мере Лебега на сфере. Как и прежде, оказывается, что в рассматриваемых условиях сингулярная составляющая меры ρ не дает вклада в главный член асимптотики.

Некоторые дальнейшие результаты типа оценок (5.34) и формул (5.36)-(5.37) обсуждаются в п.6. Там же рассмотрен один пример, имеющий отношение к теории уравнения Шредингера. Кроме того, в добавлении рассматриваются задачи с сильным вырождением, меняющим порядок асимптотики спектра.

5. <u>Доказательство теоремы 5.7</u>. Достаточно рассмотреть случай, когда форма B сводится к какому-нибудь одному слагаемому суммы (5.28). Индексы τ_1, τ_2 для сокращения письма будем иногда опускать.

Из неравенства

$$|(\nabla_\ell u)(x)|^2 \leq |a^{-1}(x)| \langle a(x)\nabla_\ell u, \nabla_\ell u\rangle$$

вытекает оценка

$$\overset{o}{N}(u\,|\,W_p^\ell\,\Omega)^{\omega} \leq \sqrt{\|a^{-1}\|_\alpha}\;\sqrt{A[u,u]},\quad 2p^{-1}=1+\alpha^{-1}. \qquad (5.38)$$

Верна также оценка

$$|B[u,u]| \leq \|\rho\|_{(\beta)}\,\|D^{\tau_1}u\|_{p_1}\,\|D^{\tau_2}u\|_{p_2},\quad p_1^{-1}+p_2^{-1}=1-\beta^{-1}. \qquad (5.39)$$

Неравенства (5.31), (5.32) позволяют выбрать показатели p_1, p_2 таким образом, чтобы пространство $\overset{o}{W}{}_p^\ell\,\Omega$ компактно вкладывалось в каждое из пространств $\overset{o}{W}{}_{p_1}^{|\tau_1|}\Omega$, $\overset{o}{W}{}_{p_2}^{|\tau_2|}\Omega$. Отсюда следует полная непрерывность формы B в $\overset{o}{H}_\ell(a)$. Одновременно получается оценка

$$|B[u,u]| \leq C^{(1)}\,\|a^{-1}\|_\alpha\,\|\rho\|_{(\beta)}\,A[u,u]. \qquad (5.40)$$

Важно отметить, что постоянная $C^{(1)}$ зависит только от α, β, m, k, ℓ, r и от $diam\,\Omega$. В самом деле, оценку достаточно получить на плотном в $\overset{o}{H}_\ell(a)$ множестве $C_0^\infty\Omega$, а тогда можно пользоваться теоремой вложения для куба, содержащего множество Ω.

Дальнейшие рассуждения во многом следуют схеме доказательства теоремы 4.1. Прежде всего отметим одно утверждение о функциях разбиений, которое прямо следует из теоремы 1.5 и теоремы 2.10 (точнее, из замечания 2.11).

Лемма 5.9. Пусть $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 \in \mathcal{J}$ и $s_0>0$, s_1, $s_2 \geq 0$ – некоторые числа. Тогда для любого натурального n найдется такое разбиение Ξ куба Q^m, что $|\Xi| \leq n$ и

$$\max_{\Delta\in\Xi}\{|\Delta|^{s_0}\mathcal{J}_1^{s_1}(\Delta)\mathcal{J}_2^{s_2}(\Delta)\} \leq C^{(2)}n^{-(s_0+s_1+s_2)}\mathcal{J}_1^{s_1}(Q^m)\mathcal{J}_2^{s_2}(Q^m). \qquad (5.41)$$

Постоянная $C^{(2)}=C^{(2)}(m,s_0,s_1,s_2)$ не зависит от функций $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$. Если хотя бы одна из функций $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ сингулярна, то

$$\min_{|\Xi|\le n}\ \max_{\Delta\in\Xi}\left\{|\Delta|^{s_0}\mathcal{J}_1^{s_1}(\Delta)\mathcal{J}_2^{s_2}(\Delta)\right\}=o\left(n^{-(s_0+s_1+s_2)}\right). \tag{5.42}$$

Доказательство. Пусть $\vartheta_1,\vartheta_2\ge 0$, $\vartheta_1+\vartheta_2=1$. Тогда функция кубов

$$\mathcal{J}(\Delta)=\mathcal{J}_1^{\vartheta_1}(\Delta)\mathcal{J}_2^{\vartheta_2}(\Delta) \tag{5.43}$$

принадлежит классу $\mathcal{J}$ вместе с $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$. Это следует из неравенства Гёльдера

$$\sum_i \mathcal{J}_1^{\vartheta_1}(\Delta_i)\mathcal{J}_2^{\vartheta_2}(\Delta_i)\le\left[\sum_i \mathcal{J}_1(\Delta_i)\right]^{\vartheta_1}\left[\sum_i \mathcal{J}_2(\Delta_i)\right]^{\vartheta_2}.$$

Отсюда же следует, что функция $\mathcal{J}$ сингулярна, если сингулярна хотя бы одна из функций $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$. Оценка (5.41) получается применением теоремы 1.5 к функции (5.43) при $\vartheta_i=s_i(s_1+s_2)^{-1}$, $i=1,2$, и при значении параметра $a=s_0(s_1+s_2)^{-1}$. Аналогично получается оценка (5.42), если к функции (5.43) применить результат замечания 2.11. ▨.

Нам потребуется также следующий аналог леммы 2.12.

Лемма 5.10. Пусть Δ – m-мерный куб и показатели p, $\bar p$, ℓ, $\bar\ell$ удовлетворяют соотношениям $0\le\bar\ell<\ell$, $1\le\bar p\le\infty$,

$$t \overset{\mathrm{def}}{=} \bar p^{-1}-\bar\ell m^{-1}-(p^{-1}-\ell m^{-1})>0. \tag{5.44}$$

Тогда для любой функции $u\in W_p^\ell\Delta$ справедливо неравенство

$$\overset{0}{N}(u-P_{\Delta,\ell}u\,|\,W_{\bar p}^{\bar\ell}\Delta)\le C^{(3)}|\Delta|^{t}\,\overset{0}{N}(u\,|\,W_p^{\ell}\Delta). \tag{5.45}$$

Постоянная $C^{(3)}=C^{(3)}(m,k,p,\bar p,\ell,\bar\ell)$ не зависит от куба Δ. ▲.

Доказательство повторяет доказательство леммы 2.12. ▨.

Отметим, что условие $t=0$ (вместо неравенства (5.44)) соответствовало бы теореме вложения с предельным показателем. Этот случай нам здесь не понадобится, коль скоро мы не имеем в виду выделять случаи, когда постоянная C в (5.34) может быть выбрана не зависящей от $\operatorname{diam}\Omega$ (ср. доказательство теоремы 4.1).

Следующая лемма играет в настоящем доказательстве такую же роль, какую теоремы 2.3, 2.4 играют в доказательстве теоремы 4.1.

Лемма 5.11. Пусть выполнены условия 5.5, 5.6 при $\mathcal{R}=Q^m$. Тогда по любому натуральному n найдется такое разбиение Ξ куба Q^m, что $|\Xi|\le n$ и для любой функции $u\in \overset{\circ}{H}_\ell(a)$ справедливо неравенство x)

$$\sum_{\Delta\in\Xi}|B_\Delta[u-P_\Delta u,\, u-P_\Delta u]|\le C^{(4)} n^{-q}\|a^{-1}\|_\alpha \|\rho\|_{(\beta)} A[u,u]. \quad (5.46)$$

Постоянная $C^{(4)}=C^{(4)}(m,k,\ell,r,\alpha,\beta)$ не зависит от квадратичных форм A, B.

Если $\beta=1$ и мера ρ сингулярна, то

$$\inf_{|\Xi|\le n}\ \sup_{u\in \overset{\circ}{H}_\ell(a)} \frac{\sum_{\Delta\in\Xi}|B_\Delta[u-P_\Delta u,\, u-P_\Delta u]|}{A[u,u]}=o(n^{-q}). \quad (5.47)$$

Пусть показатели p, p_1, p_2 выбраны так же, как в неравенствах (5.38), (5.39). Пусть $\Delta\subset Q^m$ – какой-либо куб. Неравенства (5.38), (5.39), написанные для функций u и $v_\Delta=u-P_\Delta u$ в кубе Δ, дают:

$$\overset{\circ}{N}{}^2(u\,|\,W_p^\ell\,\Delta)\le N(a^{-1}\,|\,L_\alpha\,\Delta)\,A_\Delta[u,u], \quad (5.48)$$

$$|B_\Delta[v_\Delta, v_\Delta]|\le N(\rho\,|\,\mathfrak{M}_\beta\,\Delta)\,\overset{\circ}{N}(v_\Delta\,|\,W_{p_1}^{|\tau_1|}\Delta)\,\overset{\circ}{N}(v_\Delta\,|\,W_{p_2}^{|\tau_2|}\Delta). \quad (5.49)$$

Для оценки каждого из двух последних множителей в (5.49) применима лемма 5.10. Вместе с (5.48) это приводит к неравенству

$$|B_\Delta[v_\Delta, v_\Delta]|\le C^{(5)}|\Delta|^{q-\alpha^{-1}-\beta^{-1}}N(a^{-1}|L_\alpha\,\Delta)N(\rho\,|\,\mathfrak{M}_\beta\,\Delta)A_\Delta[u,u], \quad (5.50)$$

где постоянная $C^{(5)}$ выражается через постоянные $C^{(3)}$ (при двух различных наборах параметров).

Пусть теперь Ξ – какое-либо разбиение куба Q^m на кубы. Суммируя неравенства (5.50) по всем кубам $\Delta\in\Xi$, получим:

---

x) Через B_Δ, A_Δ обозначены формы (5.25), (5.28), отвечающие (полуоткрытому) кубу $\Delta\subset Q^m$.

$$\sum_{\Delta\in\Xi} |B_\Delta[v_\Delta, v_\Delta]| \le$$

$$\le C^{(5)} A[u,u] \max_{\Delta\in\Xi} \left\{ |\Delta|^{q-\alpha^{-1}-\beta^{-1}} N(a^{-1}|L_\alpha\Delta) N(\rho|\mathfrak{M}_\beta\Delta) \right\}.$$

Остается воспользоваться леммой 5.9, применив ее к функциям

$$\mathcal{J}_1(\Delta) = N^\alpha(a^{-1}|L_\alpha\Delta), \qquad \mathcal{J}_2(\Delta) = N^\beta(\rho|\mathfrak{M}_\beta\Delta)$$

при показателях $s_0 = q - \alpha^{-1} - \beta^{-1}$, $s_1 = \alpha^{-1}$, $s_2 = \beta^{-1}$.
Это приводит к неравенству (5.46) при $C^{(4)} = C^{(2)} C^{(5)}$.
Если мера ρ сингулярна, то соотношение (5.47) также вытекает из леммы 5.9. ▨.

○ Возвращаемся к доказательству теоремы 5.7. Пусть сначала $\mathcal{Q} = Q^m$. Для заданного n построим разбиение Ξ $(|\Xi|\le n)$, существование которого установлено в лемме 5.11. Пусть $P_\Xi = P_{\Xi,\ell}$ – соответствующий оператор "кусочно-полиномиального проектирования". Мы будем рассматривать его как оператор из $\overset{\circ}{H}_\ell(a)$ в $L_2 Q^m$. Рассмотрим в $\overset{\circ}{H}_\ell(a)$ подпространство $\mathcal{F} = \mathrm{Ker}\, P_\Xi$. Легко видеть x) (ср. (4.12)), что

$$\operatorname{codim} \mathcal{F} \le n\nu\kappa, \qquad \nu = \nu(\ell, m). \tag{5.51}$$

Отсюда и из (1.25) находим:

$$\lambda^{\pm}_{n\nu\kappa+1}(\mathcal{D}) \le \max_{u\in\mathcal{F}} \frac{|B[u,u]|}{A[u,u]} \le \max_{u\in\mathcal{F}} \sum_{\Delta\in\Xi} \frac{|B_\Delta[u,u]|}{A[u,u]} =$$

$$= \max_{u\in\mathcal{F}} \frac{\sum_{\Delta\in\Xi} |B_\Delta[u-P_\Delta u, u-P_\Delta u]|}{A[u,u]}.$$

Для оценки последнего отношения используем (5.46). Тогда получим

$$\lambda^{\pm}_{n\nu\kappa+1}(\mathcal{D}) \le C^{(4)} n^{-q} \|a^{-1}\|_\alpha \|\rho\|_{(\beta)}. \tag{5.52}$$

---

x) Следует иметь в виду, что условие 5.5 обеспечивает непрерывное (и компактное) вложение $\overset{\circ}{H}_\ell(a)$ в $L_2\mathcal{Q}$. Поэтому функционалы $\int_\Delta u x^j dx$ непрерывны в $\overset{\circ}{H}_\ell(a)$. Вместе с (1.3) это приводит к (5.51).

Из (5.40) непосредственно следует оценка для $\lambda_1^{\pm}(\mathcal{D})$:

$$\lambda_1^{\pm}(\mathcal{D}) \le C^{(1)} \|a^{-1}\|_{\alpha} \|\rho\|_{(\beta)}.$$

Вместе с (5.52) это приводит к (5.34) для $\Omega = Q^m$. В случае сингулярной меры ρ соотношение (5.35) таким же образом выводится из (5.47). Для $\Omega = Q^m$ доказательство теоремы 5.7 закончено.

Рассмотрим теперь задачу $\mathcal{D}$ в произвольном ограниченном открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Пусть сначала $a \in L_1 \Omega$, и пусть Q - куб, содержащий Ω; можно считать, что $Q = Q^{m}$. Фиксируем $\delta > 0$ и рассмотрим в Q^m матрицу $\tilde{a}_{\delta}(x)$, равную $a(x)$ при $x \in \Omega$ и равную δe (e - "единичная" матрица) при $x \in Q^m \setminus \Omega$. Меру ρ продолжим на $Q^m \setminus \Omega$ нулем. Соответствующие квадратичные формы обозначим через $\tilde{A}_{\delta}$, $\tilde{B}$. Используя подробные обозначения для собственных чисел, получаем с помощью обычных вариационных соображений неравенство

$$\lambda_n^{\pm}(A, B, \Omega; \mathcal{D}) \le \lambda_n^{\pm}(\tilde{A}_{\delta}, \tilde{B}, Q^m; \mathcal{D}). \qquad (5.53)$$

Поскольку для Q^m оценка (5.34) уже доказана, имеем:

$$\lambda_n^{\pm}(A, B, \Omega; \mathcal{D}) \le C n^{-q} N(\tilde{a}_{\delta}^{-1} | L_{\alpha} Q^m) \|\rho\|_{(\beta)}.$$

Чтобы получить отсюда (5.34), достаточно заметить, что

$$N(\tilde{a}_{\delta}^{-1} | L_{\alpha} Q^m) \to \|a^{-1}\|_{\alpha} \qquad \text{при } \delta \to \infty.$$

Пусть теперь $a \in L_{1,loc}\Omega$. Введем матрицу $a_j(x)$, $j > 0$, равенством $a_j = \psi_j(a)$, где $\psi_j(\lambda) = \min(\lambda, j)$. Соответствующую квадратичную форму обозначим через A_j. Поскольку заведомо $a_j \in L_1 \Omega$, то, согласно вариационному принципу,

$$\lambda_n^{\pm}(A, B, \Omega; \mathcal{D}) \le \lambda_n^{\pm}(A_j, B, \Omega; \mathcal{D}) \le C n^{-q} \|a_j^{-1}\|_{\alpha} \|\rho\|_{(\beta)}. \qquad (5.54)$$

Предельный переход при $j \to \infty$ приводит к оценке (5.34) в общем случае.

Если $\beta = 1$ и мера ρ сингулярна, правая часть в (5.53) имеет порядок $o(n^{-q})$. Тогда то же верно и для среднего члена в (5.54). Тем самым установлено соотношение (5.35). ▨ .

6. <u>Некоторые дальнейшие результаты.</u> <u>Пример</u>. При некоторых соотношениях параметров теоремы 5.7, 5.8 могут быть уточнены за

счет допущения знака равенства в условии (5.31). Мы сформулируем соответствующие результаты, ограничиваясь случаем форм (5.29).

Теорема 5.12. Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ – открытое множество, $a \in L_{1,loc}\,\Omega$, выполнено (5.24), $a^{-1} \in L_\alpha\,\Omega$, $1 \le \alpha \le \infty$, и

$$2(l-r) < m(1+\alpha^{-1}). \tag{5.55}$$

Пусть B – форма (5.29), $b_{\tau_1\tau_2} \in L_\beta\,\Omega$ для всех $|\tau_1|=|\tau_2|=r$, и

$$\alpha^{-1}+\beta^{-1}=2(l-r)m^{-1}.$$

Тогда для спектра отношения форм (5.29), (5.25) справедливо неравенство

$$\lambda_n^{\pm}(\mathcal{D}) \le Cn^{-q}\,\|a^{-1}\|_\alpha\,\|b\|_\beta \quad \left(q=\frac{2(l-r)}{m}\right), \tag{5.56}$$

причем постоянная $C=C(m,k,l,r,\alpha)$ не зависит от матриц a, b и от множества Ω. ▲.

Возможность распространения оценки на неограниченные множества связана с независимостью постоянной в (5.56) от Ω. Как и при доказательстве теоремы 4.1 (при $2l<m$) и теоремы 4.14, доказательство здесь основано на теореме 2.16 о покрытиях. Результат леммы 5.10 при этом используется в предельной форме, т.е. при $t=0$. Условие (5.55) является естественным обобщением условия $2l<m$ и переходит в него при $\alpha=\infty$, $r=0$.

Асимптотическая формула (5.36)-(5.37) переносится на неограниченные множества лишь при некоторых дополнительных ограничениях (см. [15], [16]; возможно, что эти ограничения связаны со способом доказательства и могут быть устранены). Поэтому здесь мы сформулируем только результат для ограниченных множеств, вытекающий из теоремы 5.12.

Теорема 5.13. Пусть в условиях теоремы 5.12 множество Ω ограничено и $\beta\ne\infty$. Тогда для спектра отношения форм (5.29), (5.25) сохраняется асимптотическая формула (5.36)-(5.37). ▲.

Мы рассмотрим более подробно один пример вычисления асимптотики в неограниченной области. Этот пример, с одной стороны, позволяет продемонстрировать некоторые элементарные приемы, а с другой,- представляет определенный интерес для теории уравнения Шредингера. При этом мы не будем опираться на теорему 5.12.

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ — открытое множество. В скалярном случае $(k=1)$ рассмотрим квадратичные формы

$$B_0[u,u] = \int_\Omega b_0(x)\,|u|^2\,dx,$$

$$B_1[u,u] = \int_\Omega \Big[u \sum_{j=1}^m b_j(x)\,\overline{\frac{\partial u}{\partial x_j}} + \bar u \sum_{j=1}^m \overline{b_j(x)}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big]dx =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\int_\Omega u\, b\,\overline{\nabla u}\,dx,$$

где $b = (b_1, \dots, b_m)$ — вектор-функция со значениями в $\mathbb{C}^m$. Будем предполагать, что

$$\operatorname{Im} b_0 = 0,\quad b_0 \in L_{m/2}\,\Omega,\quad b \in L_m\,\Omega,\quad m \geqslant 3, \tag{5.57}$$

и рассмотрим задачу о спектре отношения квадратичных форм

$$B[u,u] \Big/ \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx,\qquad u \in \overset{\circ}{H}_1\,\Omega, \tag{5.58}$$

где $B = B_1 + B_0$. Мы получим асимптотическую формулу для функций распределения $n_\pm(\lambda; B, \Omega, \mathcal{D})$ задачи (5.58).

Лемма 5.14. При условии $b \in L_m\,\Omega$ для спектра отношения

$$B_1[u,u] \Big/ \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx,\qquad u \in \overset{\circ}{H}_1\,\Omega, \tag{5.59}$$

справедлива оценка

$$\lambda_n^\pm(B_1, \Omega) \leqslant c\,n^{-1/m}\,\|b\|_m;\qquad c = c(m).\ \blacktriangle \tag{5.60}$$

Доказательство. С помощью неравенства

$$|B_1[u,u]| \leqslant 2\sqrt{\int_\Omega |b|^2\,|u|^2\,dx}\cdot\sqrt{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}$$

оценим отношение (5.59). Тогда

$$\frac{|B_1[u,u]|}{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx} \leqslant 2\left(\frac{\int_\Omega |b|^2\,|u|^2\,dx}{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}\right)^{1/2}. \tag{5.61}$$

Собственные числа $\lambda_n(|b|^2, \Omega)$ отношения

$$\int\limits_{\Omega} |b|^2 |u|^2 dx \Big/ \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \qquad u \in \overset{\circ}{H}_1 \Omega,$$

оцениваются на основании теоремы 4.14:

$$\lambda_n(|b|^2, \Omega) \leq \tilde{C} n^{-2/m} \| |b|^2 \|_{m/2}, \qquad \tilde{C} = \tilde{C}(m).$$

Отсюда и из (5.61) с помощью вариационного принципа получаем оценку (5.60) при $C = 2\tilde{C}^{1/2}$. ∎.

Теорема 5.15. При условиях (5.57) для спектра отношения (5.58) справедлива асимптотическая формула

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda^m n_\pm(\lambda; B, \Omega) = \frac{(2\sqrt{\pi})^{-m}}{\Gamma(1+m/2)} \int\limits_{\Omega} |\operatorname{Re} b|^m dx. \ \Delta. \tag{5.62}$$

Доказательство. Из теоремы 4.14 следует, что $\lambda_n^{\pm}(B_0, \Omega) = O(n^{-2/m})$. Отсюда и из леммы 1.17 вытекает, что достаточно доказать формулу (5.62) с заменой B на B_1. Далее, наличие оценки (5.60) позволяет, в силу леммы 1.18, ограничиться случаем $b \in C_0^\infty \Omega$.

Рассмотрим сначала случай $\Omega = \mathbb{R}^m$. Пусть $\zeta \in C_0^\infty \mathbb{R}^m$ и $\zeta b = b$. Заметим, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} |\nabla u|^2 dx \geq \varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}^m} |\nabla u|^2 dx + (1-\varepsilon) \int\limits_{\mathbb{R}^m} |\nabla(\zeta u)|^2 dx +$$

$$+ (1-\varepsilon) \int\limits_{\mathbb{R}^m} [\zeta^2 |\nabla u|^2 - |\nabla(\zeta u)|^2] dx, \qquad 0 < \varepsilon < 1. \tag{5.63}$$

Если в отношении (5.59) заменить знаменатель правой частью неравенства (5.63), то функции $n_\pm$ разве лишь возрастут. Далее, последнее слагаемое в (5.63) представляет собой вполне непрерывную форму в $\overset{\circ}{H}_1 \mathbb{R}^m$. В силу леммы 1.16 ею можно пренебречь при вычислении асимптотики. Наконец, функции $n_\pm$ разве лишь возрастут, если в правой части (5.63) устранить первое слагаемое. В результате дело сводится к асимптотической оценке для спектра отношения

$$B_1[u,u] \Big/ (1-\varepsilon) \int\limits_{\mathbb{R}^m} |\nabla(\zeta u)|^2 dx, \qquad u \in \overset{\circ}{H}_1 \mathbb{R}^m.$$

Поскольку форма B_1 не меняется при замене u на ζu, мы можем выполнить подстановку $\zeta u = v \in \overset{\circ}{H}_1 K$, где K – шар достаточно большого радиуса, и воспользоваться леммой 1.15. Вместе с приведенными выше доводами это приводит к неравенству

$$\lim_{\lambda\to 0}\sup \lambda^m n_\pm(\lambda; B_1, \mathbb{R}^m) \le$$

$$\le (1-\delta)^{-m} \lim_{\lambda\to 0} \lambda^m n_\pm(\lambda; B_1, K, \mathcal{D}), \tag{5.64}$$

где предел справа существует в силу теоремы 5.8. В то же время, очевидно,

$$n_\pm(\lambda; B_1, K, \mathcal{D}) \le n_\pm(\lambda; B_1, \mathbb{R}^m). \tag{5.65}$$

Сопоставляя (5.64), (5.65), а затем переходя к пределу при $\delta\to 0$, убеждаемся, что асимптотика спектра отношения (5.59) (а следовательно, и отношения (5.58)) определяется формулами (5.36)-(5.37); последние в рассматриваемом случае сводятся к (5.62).

Пусть теперь $\mathcal{R}\subset\mathbb{R}^m$; снова достаточно ограничиться случаем $b\in C_0^\infty\mathcal{R}$, $b_0=0$. Пусть $\mathcal{R}_0\subset\mathcal{R}$ – ограниченное открытое множество, вне которого $b=0$. Тогда, очевидно,

$$n_\pm(\lambda;\mathcal{R}_0, \mathcal{D}) \le n_\pm(\lambda;\mathcal{R},\mathcal{D}) \le n_\pm(\lambda; \mathbb{R}^m).$$

Асимптотическое поведение крайних членов последнего неравенства уже известно и одинаково. Это приводит к формуле (5.62) для произвольного открытого множества $\mathcal{R}$. ▨.

Основываясь на теореме 5.15, мы получим один результат для уравнения Шредингера с параметром. Будем пользоваться теми же обозначениями, что и в теореме 5.15 при $\mathcal{R}=\mathbb{R}^m$. В $L_2\mathbb{R}^m$, $m\geqslant 3$, рассмотрим задачу о спектре квадратичной формы

$$h\int_{\mathbb{R}^m}|\nabla u|^2dx - 2\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}^m} ub\,\overline{\nabla u}\,dx - \int_{\mathbb{R}^m} b_0|u|^2dx,\quad u\in \overset{\circ}{H}_1\mathbb{R}^m. \tag{5.66}$$

При условиях (5.57) эта квадратичная форма полуограничена снизу и замкнута в $L_2\mathbb{R}^m$. В случае $b\in C^1\mathbb{R}^m$ форма (5.66) соответствует оператору Шредингера

$$-h\Delta u + i\sum_{j=1}^m \left[\frac{\partial}{\partial x_j}(b_j u) + \bar{b}_j\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] - b_0 u. \tag{5.67}$$

В общем случае оператор Шредингера следует определить как самосопряженный оператор, порожденный в $L_2\mathbb{R}^m$ замкнутой формой (5.66).

Обозначим через $\tilde{n}(h)$ число отрицательных собственных значений формы (5.66). Рассуждая так же, как и при доказательстве теорем 4.20, 4.21 (см. добавление 6), легко показать, что $\tilde{n}(h) = n_+(\lambda; B, \mathbb{R}^m, \mathcal{D})$, где n_+ – функция распределения для отношения (5.58). Учитывая результат теоремы 5.15, приходим к следующему утверждению.

Теорема 5.16. Пусть выполнены условия (5.57) при $\Omega = \mathbb{R}^m$, $m \geq 3$. Число $\tilde{n}(h)$ отрицательных собственных значений формы (5.66) (оператора (5.67)) в $L_2 \mathbb{R}^m$ конечно, и при $h \to 0$ удовлетворяет асимптотическому соотношению

$$\lim_{h \to 0} h^m \tilde{n}(h) = \frac{(2\sqrt{\pi})^{-m}}{\Gamma(1+m/2)} \int_{\mathbb{R}^m} |\operatorname{Re} B|^m dx,$$

$$|\operatorname{Re} B|^2 = \sum_{j=1}^{m} |\operatorname{Re} b_j|^2. \quad \blacktriangle.$$

Аналогичный результат справедлив для формы вида (5.66) при условии Дирихле (задача $\mathcal{D}$) в $L_2 \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 3$.

Добавление 8

Спектральная асимптотика эллиптических операторов о сильным вырождением

Здесь мы рассмотрим вариационные задачи для эллиптических форм первого порядка, вырождающихся на границе области. Степень вырождения такова, что еще сохраняется дискретность спектра, но порядок асимптотики отличается от стандартного. При этом, в отличие от невырожденного случая, асимптотические коэффициенты содержат интегралы не по области, а по границе, и зависят от вида граничного условия.

Вырождение эллиптичности у формы A допускалось и условиями теорем 5.7, 5.8. Однако ограничения на формы B, A в этих теоремах таковы, что спектр их отношения имел стандартное асимптотическое поведение, определяемое формулами (5.36)-(5.37). Такие задачи естественно назвать задачами со "слабым" вырождением.

Ниже обсуждаются задачи с "сильным" вырождением. Подробное изложение соответствующих результатов можно найти в [94]-[96]. В этих исследованиях существенную роль играют результаты и техника, приведённые в лекциях 4, 5.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ - ограниченная область, $\partial\Omega \in C^1$. Через $\rho = \rho(x)$ условимся обозначать расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^m$ до $\partial\Omega$. Для $\alpha \geq 0$ введем гильбертово пространство $H_{(\alpha)}\Omega$ - пополнение класса $C^1\overline{\Omega}$ относительно метрики, порождаемой квадратичной формой

$$\int_{\Omega} \rho^{\alpha} (|\nabla u|^2 + |u|^2)\,dx.$$

Через $\overset{\circ}{H}_{(\alpha)}\Omega$ обозначим замыкание в $H_{(\alpha)}\Omega$ множества $C_0^\infty\Omega$. Классы $H_{(\alpha)}\Omega$, $\overset{\circ}{H}_{(\alpha)}\Omega$ различны лишь при $\alpha < 1$; если $\alpha \geq 1$, то $C_0^\infty\Omega$ плотно в $H_{(\alpha)}\Omega$.

Пусть в $\overline{\Omega}$ заданы матрица-функция $a(x) = \{a_{ij}(x)\}$, $i,j = 1,\dots,m$, и функция $b(x)$. Предположим, что a, b удовлетворяют следующим требованиям.

Условие 5.17. Матрица a и функция b вещественны, $a, b \in C\overline{\Omega}$; для любого $x \in \overline{\Omega}$ матрица a положительно определена. ▲.

Пусть теперь $\alpha \geq 0$, $\beta > -2$, $h \geq 0$ - числовые параметры. Рассмотрим квадратичные формы

$$A_{\alpha,h}[u,u]=\int_{\Omega}\rho^{\alpha}\left(\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\overline{\frac{\partial u}{\partial x_j}}+h|u|^2\right)dx, \tag{5.68}$$

$$B_{\beta}[u,u]=\int_{\Omega}\rho^{\beta}b(x)\,|u|^2dx. \tag{5.69}$$

Предположим, что

$$r\overset{def}{=}2-\alpha+\beta>0.$$

Рассмотрим две задачи (задачу $\mathcal{D}_h$ и задачу $\mathcal{N}_h$) о спектре отношения форм (5.68), (5.69):

$$B_{\beta}[u,u]\,/\,A_{\alpha,h}[u,u],\quad u\in\overset{o}{H}_{(\alpha)}\Omega\qquad(0\le\alpha<1); \tag{5.70$\mathcal{D}$}$$

$$B_{\beta}[u,u]\,/\,A_{\alpha,h}[u,u],\quad u\in H_{(\alpha)}\Omega\qquad(\alpha\ge0;\ \beta>-1). \tag{5.70$\mathcal{N}$}$$

Если выполнено условие 5.17 и $r>0$, то задачи $\mathcal{D}_h$, $h\ge0$, $\mathcal{N}_h$, $h>0$, имеют дискретный спектр. Если при этом $a\in C^1\Omega$, то собственные числа отношения (5.70) представляют собой спектр краевой задачи для уравнения

$$-\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho^{\alpha}(x)a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+h\rho^{\alpha}(x)u=\lambda^{-1}\rho^{\beta}(x)u \tag{5.71}$$

(при нулевом граничном условии для задачи $\mathcal{D}_h$ и при некотором естественном граничном условии в случае задачи $\mathcal{N}_h$).

Постановка задачи $\mathcal{N}_h$ при $h=0$ требует введения условий ортогональности (ср. п.1 лекции 4). Именно, если $\int_{\Omega}\rho^{\beta}b\,dx\ne0$, то под задачей $\mathcal{N}_0$ будем понимать задачу о спектре отношения (5.70$\mathcal{N}$) при условиях: $h=0$ и

$$\int_{\Omega}\rho^{\beta}bu\,dx=0. \tag{5.72}$$

В противном случае вместо (5.72) ставится условие

$$\int_{\Omega}\rho^{\beta}u\,dx=0.$$

При условии 5.17 и при $r>0$ задача $\mathcal{N}_0$ имеет дискретный спектр. Если $a\in C^1\Omega$, то собственные функции задачи $\mathcal{N}_0$ удовлетворяют уравнению (5.71) при $h=0$.

Асимптотическое поведение функций распределения $n_{\pm}(\lambda;\mathcal{D}_h)$, $n_{\pm}(\lambda;\mathcal{N}_h)$ спектра задач $\mathcal{D}_h$, $\mathcal{N}_h$ оказывается существенно различным в зависимости от того, какое из нижеследующих соотношений между α и β имеет место:

$$\alpha-\beta < 2m^{-1} \qquad \text{(слабое вырождение);} \qquad (5.73)$$

$$\alpha-\beta = 2m^{-1} \qquad \text{("пограничный" случай);} \qquad (5.74)$$

$$\alpha-\beta > 2m^{-1} \qquad \text{(сильное вырождение).} \qquad (5.75)$$

В случае слабого вырождения спектральная асимптотика вычисляется по общим формулам (5.36)-(5.37), которые в рассматриваемой ситуации переходят в соотношение

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda^{m/2} n_\pm(\lambda) = \frac{v_m}{(2\pi)^m} \int_\Omega \rho^{-\frac{(\alpha-\beta)m}{2}} \cdot \frac{b_\pm^{m/2}(x)}{\sqrt{\det a(x)}}\,dx, \qquad (5.76)$$

где v_m - объем единичного шара в $\mathbb{R}^m$. Если

$$\alpha + \max(-\beta, 0) < 2m^{-1}, \qquad (5.77)$$

то этот результат прямо следует из теоремы 5.8; он, однако, верен и без дополнительного (при $\beta>0$) ограничения (5.77).

В пограничном случае асимптотическое поведение функций $n_\pm(\lambda;\mathcal{D}_h)$, $n_\pm(\lambda;\mathcal{N}_h)$ еще остается одинаковым. Порядок асимптотики отличается от стандартного логарифмическим множителем. Появляется интеграл, распространенный по границе.

Теорема 5.18. Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^m$, $m\geq 2$,- ограниченная область, $\partial\Omega\in C^1$, и выполнено условие 5.17, а также равенство (5.74). Тогда функции распределения собственных значений задач $\mathcal{D}_h$, $\mathcal{N}_h$ для отношения квадратичных форм (5.70) при любом $h\geq 0$ удовлетворяют асимптотическому равенству

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{\lambda^{m/2}}{\log\lambda^{-1}} n_\pm(\lambda) = \frac{m v_m}{(2m-2)(2\pi)^m} \int_{\partial\Omega} \frac{b_\pm^{m/2}}{\sqrt{\det a}}\,dS. \quad \blacktriangle. \qquad (5.78)$$

Результат для случая сильного вырождения формулируется в терминах собственных значений некоторого дифференциального оператора на полуоси.

Пусть показатели $\alpha\geq 0$, $\beta>-2$ таковы, что $\gamma>0$ и выполнено (5.75). Рассмотрим уравнение

$$-(t^\alpha y')' + t^\alpha y = \mu^{-1} t^\beta y, \qquad 0<t<\infty, \qquad (5.79)$$

при краевом условии $y(0)=0$ (задача $\mathcal{D}$) или $\lim_{t\to 0}[t^\alpha y'(t)]=0$ (задача $\mathcal{N}$). Пусть $\alpha<1$ в случае задачи $\mathcal{D}$ и $\beta>-1$ в случае задачи $\mathcal{N}$. Тогда уравнение (5.79) при указанных краевых условиях имеет дискретный спектр; соответствующие собственные значения обозначим через $\mathcal{M}_k(\alpha,\beta;\mathcal{D})$, $\mathcal{M}_k(\alpha,\beta;\mathcal{N})$, $k=1,2,\ldots$. Пусть $\theta>0$ – некоторый показатель. Положим

$$\zeta(\alpha,\beta,\theta;\mathcal{D})=\sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{M}_k^{\theta}(\alpha,\beta;\mathcal{D}),\quad \zeta(\alpha,\beta,\theta;\mathcal{N})=\sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{M}_k^{\theta}(\alpha,\beta;\mathcal{N}). \tag{5.80}$$

Эти суммы конечны, коль скоро $\theta(\alpha-\beta)>1$. Отметим, что при $\alpha-\beta=1$ уравнение (5.79) есть уравнение Лагерра, и значения $\mathcal{M}_k$ явно вычисляются:

$$\mathcal{M}_k(\alpha,\alpha-1;\mathcal{D})=(2k-\alpha)^{-1};\quad \mathcal{M}_k(\alpha,\alpha-1;\mathcal{N})=(2k-2+\alpha)^{-1}.$$

Теорема 5.19. Пусть Ω – ограниченная область в R^m, $\partial\Omega\in C^1$, и выполнено условие 5.17, а также неравенства $r>0$ и (5.75). Тогда для функций распределения $n_\pm(\lambda;\mathcal{D}_h)$, $n_\pm(\lambda;\mathcal{N}_h)$ при любом $h\geq 0$ имеют место асимптотические формулы

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda^{\theta}n_\pm(\lambda)=\frac{v_{m-1}}{(2\pi)^{m-1}}\,\zeta\int_{\partial\Omega}\frac{(a\nu,\nu)^{\frac{m}{2}-\theta}\,b_\pm^{\theta}}{\sqrt{\det a}}\,dS, \tag{5.81}$$

$$\theta=\theta(m,\alpha,\beta)=(m-1)/r,$$

где $\zeta=\zeta(\alpha,\beta,\theta;\mathcal{D})$ в случае задачи $\mathcal{D}_h$ и $\zeta=\zeta(\alpha,\beta,\theta;\mathcal{N})$ в случае задачи $\mathcal{N}_h$; в (5.81) $\nu=\nu(x)$ – единичный вектор нормали к $\partial\Omega$ в точке $x\in\partial\Omega$. ▲.

Отметим, что $\theta(\alpha-\beta)>1$ в силу (5.75), так что коэффициент ζ в (5.81) конечен.

Результаты, аналогичные теоремам 5.18, 5.19, сохраняются и тогда, когда вырождение эллиптичности происходит лишь на части границы. При этом в формулы вида (5.78), (5.81) войдут интегралы по поверхности вырождения.

Рассмотрим еще один класс вариационных задач для формы (5.68). Пусть $p(x)$ – вещественная непрерывная функция на $\partial\Omega$. Рассмотрим квадратичную форму

$$P[u,u]=\int_{\partial\Omega}p|u|^2\,dS, \tag{5.82}$$

которая вполне непрерывна в $H_{(\alpha)}\Omega$ при $\alpha<1$. Поставим задачу о спектре отношения квадратичных форм

$$P[u,u]/A_{\alpha,h}[u,u],\quad u\in H_{(\alpha)}\Omega; \tag{5.83}$$

при $h=0$ ставится дополнительное условие ортогональности: $\int_{\partial\Omega} pu\,dS=0$ в случае, если $\int_{\partial\Omega} p\,dS\neq 0$, и $\int_{\partial\Omega} u\,dS=0$ в случае, если $\int_{\partial\Omega} p\,dS=0$.

Если $a\in C^1\bar\Omega$, то собственные числа отношения (5.83) являются собственными числами краевой задачи со спектральным параметром в граничном условии (задача Стеклова):

$$-\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho^{\alpha}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+h\rho^{\alpha}u=0,$$

$$\lim_{\rho\to 0}\left(\rho^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial\nu_a}\right)=\lambda^{-1}pu\Big|_{\partial\Omega},$$

где $\partial/\partial\nu_a$ – конормальная производная.

Описанная задача близка к задаче (5.70N).

Приводимая ниже асимптотическая формула по своему виду лишь численным множителем отличается от формулы (5.81) при $\beta=-1$.

Теорема 5.20. Пусть Ω – ограниченная область в R^m, $\partial\Omega\in C^1$, матрица a вещественна, непрерывна и положительно определена в $\bar\Omega$, функция p вещественна и непрерывна на $\partial\Omega$; пусть $0\leqslant\alpha<1$. Тогда для функций распределения $n_\pm(\lambda)$ собственных значений задачи (5.83) при любом $h\geqslant 0$ справедлива асимптотическая формула

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda^{\theta}n_\pm(\lambda)=\frac{v_{m-1}}{(2\pi)^{m-1}}\,\gamma_\alpha^{\theta}\int_{\partial\Omega}\frac{(a\nu,\nu)^{\frac{m}{2}-\theta}\,p_\pm^{\theta}}{\sqrt{\det a}}\,dS,$$

$$\theta=(m-1)(1-\alpha)^{-1};\qquad \gamma_\alpha=\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\left[2^{\alpha}\,\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right]^{-1}.\ \blacktriangle$$

В заключение отметим, что ограничения, наложенные в настоящем добавлении на область Ω, матрицу a и функции b, p, можно ослабить. Здесь, однако, (в отличие от основного содержания лекций 4, 5) мы не стремились к максимальному снижению условий гладкости и суммируемости.

Комментарии и литературные указания

Теоремы 5.7, 5.8 доказаны в работе авторов [90] (см. также краткие сообщения [97], [98]). Там же изложены результаты об уравнениях с малым параметром, в том числе теорема 5.16. Помимо задачи $\mathcal{D}$ в [90] рассматривается (при некоторых дополнительных ограничениях на a и $\partial\mathcal{R}$) задача $\mathcal{N}$.

Хотя главное содержание теоремы 5.8 состоит в выяснении пределов применимости асимптотической формулы (5.36)-(5.37) в "негладких" задачах, сама эта формула не была известна в должной общности и для гладких задач. В пионерской работе А.Плейеля [99] тауберовым методом исследовалась спектральная асимптотика для уравнения (5.23) при $m=2$, $k=1$, $\mathcal{A}=\Delta^2$, $\mathcal{B}=D_1^2-D_2^2$. В статье В.Н.Туловского [100] вариационный метод применялся (независимо от работы авторов) к выводу асимптотики спектра гладких эллиптических задач вида (5.23) при $k=1$.

Первые результаты об асимптотике спектра для достаточно широкого класса вырождающихся операторов (в наших терминах - для отношения (5.70) при $\beta=0$, $b\equiv 1$) получил И.А.Соломещ [101], [102]. Он обнаружил, что с точки зрения асимптотического поведения спектра вырождающиеся задачи разбиваются на три типа, и вычислил спектральную асимптотику для слабого вырождения и в пограничном случае. Справедливость формулы (5.76) без дополнительного ограничения (5.77) отмечена при условии (5.73) Г.М.Ташияном.

Для сильного вырождения Соломещ получил точные по порядку двусторонние оценки спектра. В последующих работах [103] - [107] были получены аналогичные по характеру (в ряде случаев - более слабые) результаты.

Первый пример вычисления спектральной асимптотики для сильного вырождения [108] относился к случаю специальной задачи в шаре, допускающей разделение переменных. В этой задаче было $\alpha=1$, $\beta=0$, $b\equiv 1$, a - единичная матрица.

Результат, соответствующий теореме 5.19 для частного случая $\alpha=1$, $\beta=0$, $b(x)>0$, был получен К.Нординым [109]. В полном объеме теоремы 5.18, 5.19 доказаны И.Л.Вулис и М.З.Соломяком [94], [95]. Метод работ [94], [95] отличается от метода Нордина.

Асимптотика спектра для задачи Стеклова при наличии вырождения (теорема 5.20) получена в [96].

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С.Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, ЛГУ, 1950.
2. Бирман М.Ш., Соломяк М.З., Кусочно-полиномиальные приближения функций классов W_p^α, Матем. сб., 73, № 3, 1967, 331–355.
3. Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М., ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах, Успехи матем.наук, XIV, № 2, 1959, 3–86.
4. Тихомиров В.М., Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений, Успехи матем.наук, XV, № 3, 1960, 81–120.
5. Соломяк М.З., Тихомиров В.М., О геометрических характеристиках вложения классов W_p^α в C, Изв. высш. учеб. заведений, Математика, № 10, 1967, 76–82.
6. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М., Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи, Успехи матем. наук, XXIII, № 6, 1968, 51–116.
7. Исмагилов Р.С., Оценки поперечников множеств в линейных нормированных пространствах, УМН, XXIX, № 3, 1974.
8. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., Наука, 1965.
9. Крейн М.Г., Определение плотности струны по спектру ее частот, ДАН СССР, 76, № 2, 1951, 345–348.
10. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г., Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, М., Наука, 1967.
11. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, М., ИЛ, 1954.
12. Weyl H., Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen, Math. Ann., 71, 441–479.
13. Ротфельд С.Ю., О сингулярных числах суммы вполне непрерывных операторов, в сб. "Проблемы математической физики", вып.3, ЛГУ, 1968, 81–87.
14. Ротфельд С.Ю., Метрические идеалы вполне непрерывных операторов, Автореферат диссертации, МИАН СССР (Ленинградское отд.), 1972.

15. Розенблюм Г.В., Распределение дискретного спектра сингулярных дифференциальных операторов, ДАН СССР, 202, № 5, 1972, 1012-1015.

16. Розенблюм Г.В., Распределение дискретного спектра сингулярных дифференциальных операторов, Изв. высш.учеб.заведений, Математика (в печати).

17. Besicovitch A.S., A general form of covering principal and relative differentiation of additive functions, Proc. Cambr.Phil.Soc., 41, N 1, 1945, 103-110.

18. Guzman M., A covering lemma with applications to differentiability of measures and singular integral operaters, Studia Math.(PRL) 34, N 3, 1970, 299-317.

19. Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г., Неравенства, М., ИЛ, 1948.

20. Полиа Г., Сеге Г., Задачи и теоремы из анализа, I, М., ГТТИ, 1956.

21. Бирман М.Ш., Соломяк М.З., О приближении функций классов W_p^α кусочно-полиномиальными функциями, ДАН СССР, 171, № 5, 1966, 1015-1018.

22. Бирман М.Ш., Соломяк М.З., О главном члене спектральной асимптотики для "негладких" эллиптических задач, Функц. анализ, 4, № 4, 1970, 1-13.

23. Борзов В.В., О количественных характеристиках сингулярных мер, в сб. "Проблемы математической физики", вып.4, ЛГУ, 1970, 42-47.

24. Борзов В.В., О некоторых применениях кусочно-полиномиальных приближений функций анизотропных классов W_p^r, ДАН СССР, 198, № 3, 499-501.

25. Борзов В.В., Некоторые приложения теорем о кусочно-полиномиальных аппроксимациях функций анизотропных классов W_p^r, в сб. "Проблемы математической физики", вып.6, ЛГУ, 1973, 53-67.

26. Никольский С.М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., Наука, 1969.

27. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж., Теория сплайнов и их приложения, М., "Мир", 1972.

28. Субботин Ю.Н., Черных Н.И., Порядок наилучших сплайн-приближений некоторых классов функций, Мат.заметки, 7, № 1, 1970, 31-42.

29. Тихомиров В.М., Некоторые вопросы теории приближений, Автореферат диссертации, МГУ, 1970.

30. Трибель Х., Интерполяционные свойства ε-энтропии и поперечниксв. Геометрические характериотики вложения пространотв функций типа Соболева-Бесова, Матем. сб. (в печати).
31. Стечкин С.Б., О наилучших приближениях заданных классов функций любыми полиномами, Успехи матем. наук, IX, № I, 1954, 133-134.
32. Смоляк С.А., Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них, Автореферат диосертации, МГУ, 1965.
33. Исмагилов Р.С., Об n-мерных поперечниках компактов в гильбертовом пространстве, Функц. анализ, 2, № 2, 1968, 32-39.
34. Маковоз Ю.И., Об одном приеме оценки снизу поперечников мнсжеств в банаховых пространотвах, Матем. сб., 87, № I, 1972, 136-142.
35. Бирман М.Ш., Соломяк М.З., Двойные операторные интегралы Стилтьеса и задачи о множителях, ДАН СССР, 171, № 6, 1966, 1251-1254.
36. Бирман М.Ш., Соломяк М.З., Двойные операторные интегралы Стилтьеса, П, в сб. "Проблемы математической физики", вып.2, ЛГУ, 1967, 26-60.
37. Бирман М.Ш., Соломяк М.З., Замечания о ядерности интегральных операторов и об ограниченности псевдодифференциальных операторов, Изв. высш.учебн.заведений. Математика, № 9, 1969, II-I7.
38. Михлин С.Г., Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М., Физматгиз, 1962.
39. Агранович М.С., Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы, Успехи матем. наук, XX, № 5, 1965, 3-120.
40. Кон Дж.Дж., Ниренберг Л., Алгебра псевдодифференциальных операторов, в сб."Псевдодифференциальные операторы", М., Мир, 1967, 9-62.
41. Hirshman I.I., On multiplier transformations, Duke Math. J. 26, N 2, 1959, 221-242.
42. Бирман М.Ш., Задачи рассеяния для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, Функц.анализ, 3, № 3, 1969, I-I6.
43. Канторович Л.В., Акилов Г.П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., Физматгиз, 1959.

44. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е., Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., Наука, 1966.
45. Соломяк М.З., Об оценках сингулярных чисел интегральных операторов, IУ. Вестник ЛГУ, № 1, 1970, 76-87.
46. Караджов Г.Е., О принадлежности интегральных операторов классам S_p при $p \geq 2$, в сб."Проблемы математического анализа", вып.3, ЛГУ, 1972, 28-33.
47. Stinespring W.F., A sufficient condition for an integral operator to have a trace, J. reine und angew. Math., 200, N 3-4, 1958, 200-207.
48. Бирман М.Ш., Соломяк М.З., Двойные операторные интегралы Стилтьеса, в сб. "Проблемы математической физики", вып.I, ЛГУ, 1966, 33-67.
49. Бирман М.Ш., Соломяк М.З., Об оценках сингулярных чисел интегральных операторов, I, Вестник ЛГУ, № 7, 1967, 43-53.
50. Бирман М.Ш., Соломяк М.З., Об оценках сингулярных чисел интегральных операторов, П, Вестник ЛГУ, № 13, 1967, 21-28.
51. Бирман М.Ш., Соломяк М.З., Об оценках сингулярных чисел интегральных операторов, Ш, Вестник ЛГУ, № I, 1969, 35-48.
52. Буслаев В.С., Меркурьев С.П., О третьем групповом интеграле в квантовомеханической статистике, Труды МИАН, 110, 1970, 29-44.
53. Коплиенко Л.С., О локальном варианте теории функции спектрального сдвига, ДАН СССР, 205, № I, 1972, 26-29.
54. Костометов Г.П., Соломяк М.З., Об оценках сингулярных чисел интегральных операторов со слабой особенностью, Вестник ЛГУ, № I, 1971, 28-39.
55. Бирман М.Ш., Соломяк М.З., Двойные операторные интегралы Стилтьеса, Ш, Предельный переход под знаком интеграла, в сб. "Проблемы математической физики", вып.6, ЛГУ, 1973, 27-53.
56. Фарфоровская Ю.Б., Пример липшицевой функции от самосопряженных операторов, дающей неядерное приращение при ядерном возмущении, Записки научных семинаров Ленингр. отд. Матем.института АН СССР, 30, 1972, 146-153.

57. Далецкий Ю.Л., Крейн С.Г., Интегрирование и дифференцирование функций эрмитовых операторов и приложение к теории возмущений, Воронеж. Тр. семинара по функциональному анализу, 1, 1956, 81-105.
58. Бирман М.Ш., Соломяк М.З., Замечания о функции спектрального сдвига, Записки научных семинаров Ленинградского отделения Математического института АН СССР, 27, 1972, 33-46.
59. Мазья В.Г., Хайкин Ю.Е., Замечания о непрерывности в L_2 сингулярного интегрального оператора, Вестник ЛГУ, № 19, 1969, 156-159.
60. Хайкин Ю.Е., Об ограниченности псевдодифференциальных операторов в весовых пространствах, ДАН СССР, 190, № 2, 1970, 289-292.
61. Хермандер Л., Псевдодифференциальные операторы и гипоэллиптические уравнения, в сб."Псевдодифференциальные операторы", М., Мир, 1967, 297-367.
62. Стечкин С.Б., О билинейных формах, ДАН СССР, 71, № 3, 1950, 237-240.
63. Соломяк М.З., О трансформаторах, порождаемых двойными операторными интегралами Стилтьеса, Записки научных семинаров Ленингр. отд. Матем. института АН СССР, 5, 1967, 201-231.
64. **Calderon A.P., Lebesgue spaces of differentiable functions. Conf. on partial diff. equations, Univ. of California, 1960.**
65. Титчмарш Е., Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, I, М., ИЛ, 1960.
66. Бирман М.Ш., Соломяк М.З., Асимптотика спектра слабо полярных интегральных операторов, Изв. АН СССР, сер. матем., 34, № 6, 1970, 1143-1158.
67. Ротфельд С.Ю., Асимптотика спектра операторов, задаваемых двойными операторными интегралами Стилтьеса, ДАН СССР, 202, № 6, 1972, 1280-1283.
68. **Weyl H., Über die Abhängigkeit der Eigenschwingungen einer Membran von der Begrenzung, J.Reine Angew. Math., 141, 1912, 1-11.**
69. **Plejel A., Sur la distribution des valeurs propres de problèmes**

régis par l'équation $\Delta u+\lambda k(x,y)u=0$, Ark. Mat.Astr.Fys.,29 B, N 7, 1943, 1-8.

70. Clark C., The asymptotic distribution of eigenvalues and eigenfunctions for elliptic boundary value problems, SIAM Review, 9, N 4, 1967, 627-646.

71. Agmon S., On kernels, eigenvalues and eigenfunctions of operators related to elliptic problems, Comm. Pure Appl. Math., 18, N 4, 1965, 627-663.

72. Agmon S., Asymptotic formulas with remainder estimates for eigenvalues of elliptic operators, Arch.Rat.Mech. Anal., 28, N 3, 1968, 165-183.

73. Beals R., Classes of compact operators and eigenvalue distribution for elliptic operators, Amer. J. Math., 89, N 4, 1967, 1056-1072.

74. Бирман М.Ш., Борзов В.В., Об асимптотике дискретного спектра некоторых сингулярных дифференциальных операторов, в сб. "Проблемы математической физики", вып.5, ЛГУ, 1971, 24-38.

75. Борзов В.В., Кусочно-полиномиальные приближения функций $\overset{o}{W}{}^{r}_{p}$ в L_q по бесконечной мере, Изв. высш. учеб. заведений, Математика, № 8, 1973, 19-28.

76. Cielsielski Z., On the spectrum of the Laplace operator, Rocz. Pol.Tow.Mat.,Ser. I, 14, 1970, 41-50.

77. Розенблюм Г.В., О распределении собственных чисел первой краевой задачи в неограниченных областях, ДАН СССР, 200, № 5, 1971, 1034-1036.

78. Розенблюм Г.В., О собственных числах первой краевой задачи в неограниченных областях, Матем. сб., 89, № 2, 1972, 234-247.

79. Бирман М.Ш., О спектре операторов Шредингера и Дирака, ДАН СССР, 129, № 2, 1959, 239-241.

80. Бирман М.Ш., О спектре сингулярных граничных задач, Матем. сб., 55, № 2, 1961, 125-174.

81. Мордасова Г.М., Асимптотика собственных значений линейного интегрального оператора с разрывным ядром, ДАН СССР, 142, № 5, 1962, 1022-1025.

82. Захар-Иткин М.Х., О росте собственных чисел линейного интегрального уравнения, Вестник МГУ, № 4, 1966, 3-19.

83. Kac M., Distribution of eigenvalues of certain integral operators, Michigan Math.J., 3, 1955, 141-148.

84. Rosenblatt M., Some results on the asymptotic behavior of eigenvalues of integral equations with translation kernels, J. Math. Mech., 12, N 4, 1963, 619-628.

85. Widom H., Asymptotic behavior of the eigenvalues of certain integral equations, II, Arch.Rat.Mech.Anal., 17, N 3, 1964, 215-229.

86. Евграфов М.А., Об одном интегральном преобразовании и его применении к оценке числа собственных значений некоторых интегральных операторов, Труды Моск. Матем. общ., 17, 1967, 273-292.

87. Widom H., Asymptotic behavior of eigenvalues of certain integral equations, Trans.Amer.Math.Soc., 109, N 2, 1963, 278-295.

88. Бирман М.Ш., Соломяк М.З., К доказательству теоремы об асимптотике спектра вещественной компоненты вольтеррова оператора с ядерной мнимой компонентой, Матем. исслед., У, № 4, 1970, 16-27.

89. Ротфельд С.Ю., Замечания о сингулярных числах суммы вполне непрерывных операторов, Функц. анализ, I, № 3, 1967, 95-96.

90. Бирман М.Ш., Соломяк М.З., Спектральная асимптотика негладких эллиптических операторов, I, П, Труды Моск.матем. общ., 27, 1972, 3-52; 28, 1973, 3 - 34.

91. Михлин С.Г., Проблема минимума квадратичного функционала, М., ГТТИ, 1952.

92. Смирнов В.И., Курс высшей математики, У, М., Физматгиз, 1959.

93. Ладыженская О.А., Смешанная задача для гиперболического уравнения, М., ГТТИ, 1953.

94. Вулис И.Л., Соломяк М.З., Спектральная асимптотика вырождающихся эллиптических операторов, ДАН СССР, 207, № 2 (1972), 262-265.

95. Вулис И.Л., Соломяк М.З., Спектральная асимптотика вырождающихся эллиптических операторов второго порядка, Изв. АН СССР (в печати).

96. Вулис И.Л., Соломяк М.З., Спектральная асимптотика вырождающейся задачи Стеклова, Вестник ЛГУ, № 19, 1973, 148-150.

97. Бирман М.Ш., Соломяк М.З., Об асимптотике спектра "негладких" эллиптических уравнений, Функц. анализ, 5, № I, 1971, 69-70.

98. Бирман М.Ш., Соломяк М.З., Спектральная асимптотика негладких эллиптических операторов, ДАН СССР, 205, № 2, 1972, 267-270.

99. Pleiel A., Certain indefinite differential eigenvalue problems - The asymptotic distribution of their eigenfunctions, Conf.Part.Diff.Equations and Continuum Mech.Univ. of Wisconsin Press, Madison, Wisc., 1961, 19-37.

100. Туловский В.Н., Асимптотическое распределение собственных значений дифференциальных уравнений, Матем. сб., 189, № 2, 1972, 191-206.

101. Соломещ И.А., О собственных числах некоторых вырождающихся эллиптических уравнений, Матем. сб., 54, № 3 (1961), 295-310.

102. Соломещ И.А., Об асимптотике собственных значений билинейных форм, связанных с некоторыми вырождающимися на границе эллиптическими уравнениями, ДАН СССР, 144, № 4 (1962), 727-729.

103. Baouendi M.S., Goulaouic C., Regularite et theorie spectrale pour une classe d'operateurs elliptiques dégénérés, Arch. Rat. Mech, Anal., 34, N 5 (1969), 361-379.

104. Goulaouic C., Sur la theorie spectrale des opérateurs elliptiques (eventuallement dégénérés), Lect.Notes Math., 179 (1971), 231-244.

105. Boutet de Monvel L., Grisvard P., Le comportement asymptotique des valeurs propres d'un opérateur, C.R.Acad.Sci. Paris, 272, N 1 (1971), A 23 - A 26.

106. El Kolli A., $n^{\text{ième}}$ épaisseur dans les espaces de Sobolev avec poids, C.R.Acad.Sci.Paris, 273, N 11 (1971), A450-A453.

107. Туловский В.Н., Об асимптотическом распределении собственных чисел вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка, Матем. сб., 86(128), № 1(1971), 76-89.

108. Shimakura N., Quelques exemples des ζ-fonctions d'Epstein pour les opérateurs elliptiques dégénérés du second ordre, II, Proc. Japan Acad. Sci., 46, N 10, Suppl. (1970), 1065-1069.

109. Nordin C., The asymptotic distribution of the eigenvalues of a degenerate elliptic operator, Arkiv för matematik, 10, № 1, 9-21.

ЛЕКЦИИ ПО ВНУТРЕННИМ ГОМОЛОГИЯМ И ФОРМАЛЬНЫМ ГРУППАМ

В.М.Бухштабер, А.С.Мищенко
/Москва/

ЛЕКЦИЯ I
БОРДИЗМЫ, ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И ОСНОВНЫЕ ПРИМЕРЫ

Основным понятием, от которого мы будем отправляться, является понятие гладкого многообразия. Гладкое многообразие - это топологическое /со счетной базой/ пространство X и система гомеоморфизмов $\varphi_\alpha : R^N \to X$,

причем а) $U_\alpha = \varphi_\alpha(R^N)$ - открытые множества, в совокупности покрывающие X;

б) функции $(\varphi_\beta | V_{\beta\alpha})^{-1} (\varphi_\alpha | V_{\alpha\beta}) : V_{\alpha\beta} \to V_{\beta\alpha}$ являются гладкими гомеоморфизмами, где

$$V_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha^{-1}(U_{\alpha\beta}) \quad , \quad U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta .$$

Координаты точки $\varphi_\alpha^{-1}(x)$ называются локальными координатами.

Основное свойство, которое нас будет интересовать, это то, что всякая функция, гладкая в одной локальной системе координат, является гладкой и во всякой другой локальной системе координат.

Обобщение понятия гладкого многообразия. Многообразие с границей

В определении гомеоморфизмов φ_α вместо R^N может стоять верхнее полупространство R^N_+. Точки многообразия с границей делятся на внутренние $\mathring{X}$ и граничные ∂X. $\mathring{X}$ является гладким многообразием размерности N, ∂X - гладким многообразием размерности $N-1$.

Понятие гладкой функции можно корректно распространить и для многообразия с границей, поскольку это понятие корректно определено для функций, заданных на $R^N_+ = \{(x): x_n \geqslant 0\}$. Отображение $f: X \to Y$ одного многообразия в другое называется гладким, если в локальной системе координат мы получаем гладкую вектор-функцию, т.е. если $(X, U_\alpha, \varphi_\alpha)$ и $(Y, U'_\beta, \varphi'_\beta)$ - гладкие структуры, то функции

$$f^{\alpha\beta} = \varphi_\beta^{-1} \cdot f \cdot \varphi_\alpha ,$$

$$f^{\alpha\beta}: \varphi_\alpha^{-1} f^{-1}(U'_\beta) \to \mathbb{R}^{N'}, \quad \varphi_\alpha^{-1} f^{-1}(U'_\beta) \subset \mathbb{R}^N$$

являются гладкими вектор-функциями.

У каждой гладкой вектор-функции

$$h: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N'}$$

имеется матрица Якоби ее частных координат

$$Dh = \left\| \frac{\partial h^{i'}}{\partial x_i} \right\|_{\substack{1 \le i \le N \\ 1 \le i' \le N'}},$$

которую можно понимать как линейное отображение векторных пространств в каждой точке $x \in \mathbb{R}^N$ или как послойное отображение тривиальных расслоений

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N & \xrightarrow{Dh} & \mathbb{R}^{N'} \times \mathbb{R}^{N'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^N & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}^{N'} \end{array}$$

где вертикальные стрелки обозначают проекцию на первую координату. Пусть

$$\varphi: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N, \quad x = \varphi(y),$$
$$\varphi': \mathbb{R}^{N'} \to \mathbb{R}^{N'}, \quad x' = \varphi'(y')$$

– два диффеоморфизма,

$$h' = \varphi'^{-1} \circ h \circ \varphi .$$

Легко вычислить, как связаны матрицы Якоби функций h и h' соответственно в точках x и $y = \varphi^{-1}(x)$:

$$Dh'(y) = \frac{\partial y'}{\partial x'} Dh(x) \cdot \frac{\partial x}{\partial y} =$$

$$= \left(\frac{\partial x'}{\partial y'}\right)^{-1} \cdot Dh \cdot \frac{\partial x}{\partial y} =$$

$$= (D\varphi')^{-1} \cdot Dh \cdot D\varphi .$$

Следовательно, если мы на многообразиях* X и Y зададим векторные расслоения TX, TY, функции склейки которых равны $D\varphi_{\alpha\beta}$, где $\varphi_{\alpha\beta} = (\varphi \mid V_{\beta\alpha})^{-1} (\varphi_\alpha \mid V_{\alpha\beta})$,

то гладкое отображение $f: X \to Y$ порождает корректно определенный гомоморфизм

$$Df: TX \to TY .$$

Расслоение TX называется касательным расслоением многообразия X, а Df называется дифференциалом отображения f.

<u>Упражнение I.I.</u> Показать, что

$$T(S^1 \times S^1) \approx S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}^2 .$$

<u>Упражнение I.2.</u> Показать, что

$$T(S^1) \approx S^1 \times \mathbb{R}^1 .$$

Пусть в $\mathbb{R}^N$ задана гладкая функция f и вектор $\vec{\ell} = (e_1, \dots, e_N)$, который будем считать касательным вектором в начале координат. Положим

$$\vec{\ell}(f) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) e_i .$$

Нетрудно убедиться, что число $\vec{\ell}(f)$ не зависит от выбора локальной системы координат.

<u>Упражнение I.3.</u> Показать, что каждому вектору $\xi \in TX$ над точкой x однозначно соответствует оператор $\xi: f \to \mathbb{R}^1$, причем

$$\xi(f \cdot g) = \xi(f) g + f \xi(g) . \qquad (*)$$

Обратно, если задан оператор, удовлетворяющий условию $(*)$, то он задается некоторым вектором $\xi \in TX$.

<u>Упражнение I.4.</u> Можно дать другое, "геометрическое", определение вектора $\xi \in TX$: это класс кривых (гладких) в X, проходящих через точку x, т.е. $\varphi: [-1, 1] \to X$, $\varphi(0) = x$, причем $\rho(\varphi(t), \varphi'(t)) = o(t)$ при $t \to 0$. Ясно, что всякая кривая определит оператор дифференцирования из I.3. Показать обратное.

Отображение $f: X \to Y$ называется погружением, если

$df: TX \to Tf(x)$ является мономорфизмом. Если погружение взаимно-однозначно, то f называется вложением.

Расслоение

$$f^*TY \,\big|\, Df(TX) = \nu(X)$$

называется нормальным расслоением погружения X в Y.

Упражнение I.5. Пусть $f: X \to Y$, где X, Y – компактные замкнутые многообразия, Df – изоморфизм. Доказать, что f – накрытие.

Предложение I.6. Пусть $f: X \to Y$ – вложение, тогда существует достаточно малая окрестность $U \supset f(X)$, диффеоморфная нормальному расслоению к вложению X:

$$\nu(X) = f^*(TY) \,\big|\, df(TX).$$

Доказательство. Введем на многообразии Y риманову метрику. Тогда расслоение $\nu(X)$ можно считать вложенным в f^*TY в качестве ортогонального дополнения к подрасслоению TX. Пусть $\xi \in \nu(X)$, вектор над точкой $x \in X$. Пусть $\gamma(t)$ – геодезическая линия в Y, $\gamma(0) = 0$, $\frac{d\gamma}{dt} = \xi$.

Положим

$$exp(\xi) = \gamma(1).$$

Получим гладкое отображение

$$exp: \nu(X) \to Y.$$

Нетрудно убедиться в том, что $D(exp)$ является изоморфизмом в нулевых векторах.

Следовательно, отображение exp является диффеоморфизмом некоторой окрестности нулевого сечения в окрестность $X \subset Y$.

Нетрудно видеть, что при изменении метрики мы получим другой диффеоморфизм, что в композиции даст диффеоморфизм нормального расслоения на себя

$$h: \nu \to \nu.$$

При этом $Dh|_0$ является изоморфизмом, гомотопным тождественному изоморфизму.

Приведем основную теорему об аппроксимации отображений.

Теорема I.7. Всякое непрерывное отображение $f: X \to Y$ многообразия X в многообразие Y может быть сколь угодно близко аппроксимировано гладким отображением. Если f уже гладко в области

$U \supset V = \overline{V}$, то аппроксимация может быть неподвижной на V. Если f гладко на подмногообразии Z, то аппроксимацию можно считать тождественной на Z.

Здесь под расстоянием между двумя отображениями понимается

$$\max_{x \in X} \rho(f(x), g(x)) \quad \text{, где } \rho(x,y) \quad -$$

метрика на многообразии Y, согласованная с топологией Y.

Отображение $f: X \to Y$ называется трансверсально регулярным относительно подмногообразия $Z \subset Y$, если в каждой точке $x \in f^{-1}(Z)$ дифференциал отображения

$$Df: TX \to T_{f(X)}(Y) / T_{f(x)}(Z)$$

является эпиморфизмом.

Предложение I.8. Если $f: X \to Y$ трансверсально регулярно вдоль $Z \subset Y$, то $f^{-1}(Z)$ является подмногообразием. При этом $\nu(f^{-1}(Z)) \overset{\varphi}{\cong} f^*(\nu(Z))$, где φ согласовано с отображением f трубчатых окрестностей $Z \subset Y$ и $f^{-1}(Z) \subset X$ и предложением I.6.

Основное место в аппарате гладких многообразий занимает теорема Сарда, две эквивалентные формулировки которой мы приведем.

Предложение I.9. Пусть $f: X \to Y$ – гладкое отображение. Тогда множество регулярных точек всюду плотно в Y.

Предложение I.10. Пусть $f: X \to Y \subset Z$ – гладкое отображение. Тогда множество отображений f, трансверсально регулярных вдоль Z, всюду плотно в пространстве всех гладких отображений.

Мы приведем более общую теорему, известную под названием теоремы Абрагама, позволяющую обобщать на различные ситуации теорему Сарда.

Теорема I.11. Пусть $\mathcal{F}$ – банахово многообразие (бесконечномерное), X, Y – гладкие многообразия, $Z \subset Y$ – подмногообразие. Пусть

$$a: \mathcal{F} \times X \to Y$$

– гладкое отображение, трансверсальное вдоль $Z \subset Y$.
Тогда множество тех точек $f \in \mathcal{F}$, для которых отображение $f(x) = a(f, x)$ трансверсально регулярно вдоль $Z \subset Y$, всюду плотно в многообразии $\mathcal{F}$.

Смысл теоремы I.11 заключается в том, что аппроксимацию отображения $f: X \to Y$ некоторым трансверсально-регулярным отображением g можно производить в более узком классе отображений, чем все гладкие отображения. Нужно, чтобы класс отображений, в котором производится аппроксимация, был в некотором смысле достаточно широк.

Приведем вывод теоремы I.II из I.9 в случае, когда $\mathcal{F}$ - конечномерное многообразие. Итак мы имеем гладкое отображение

$$a: \mathcal{F}\times X \to Y$$

трансверсально регулярное вдоль Z.

Тогда $$W = a^{-1}(Z)$$

является подмногообразием.

Пусть $f: X \to Y$, $f \in \mathcal{F}$, тогда

$$f^{-1}(Z) = W \cap (f\times X).$$

Если пересечение $W \cap (f\times X)$ трансверсально, то f трансверсально регулярно вдоль Z. В самом деле нужно показать, что отображение

$$df: T_x(X) \to T_{f(x)}(Y) \big/ T_{f(x)}(Z)$$

- эпиморфизм при $x \in f^{-1}(Z)$.

Касательное пространство к $(f\times X)$ в точке (f, x) разлагается в прямую сумму двух подпространств $A \oplus B \subset T(\mathcal{F}\times X)$, причем при факторизации по $T(W)$ слагаемое B изоморфно отображается на фактор-пространство. Таким образом, f трансверсально регулярно вдоль Z. Далее, пересечение W и $(f\times X)$ трансверсально тогда и только тогда, когда проекция

$$\pi: W \to \mathcal{F}$$

регулярна в точке f. Таким образом, множество регулярных точек проекции f определит то множество отображений, которые трансверсально регулярны вдоль подмногообразия Z.

<u>Упражнение I.12.</u> Пусть $X \supset Z, Y$. Доказать, что существует такая регулярная изотопия вложения $\varphi: Z \subset X$, что в результате Z, Y будут находиться в общем положении.

<u>Упражнение I.13.</u> Доказать, что на любом многообразии существует функция Морса, т.е. функция, имеющая только невырожденные критические точки.

Приведем, наконец, еще одну подготовительную теорему.

<u>Теорема I.14.</u> Пусть X - компактное многообразие. Тогда существует достаточно большое число N и гладкое вложение $\varphi: X \hookrightarrow \mathbb{R}^N$, причем $\varphi(\partial X) \hookrightarrow \mathbb{R}^{N-1}$, $\varphi(X) \hookrightarrow \mathbb{R}^N_+$.

Если φ_1 и φ_2 – два таких вложения, то найдется диффеоморфизм $\varphi: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, такой, что $\varphi_1 = \varphi \circ \varphi_2$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $(U_\alpha \varphi_\alpha)$ – атлас карт на X, то $\varphi_\alpha: \mathbb{R}^N \to U_\alpha \subseteq X$ – гомеоморфизм, $D_\alpha^n \subset \mathbb{R}^n$ – такие диски, что $\varphi_\alpha D_\alpha^n$ покрывает X.

Пусть
$$\psi_\alpha = \begin{cases} 1 \text{ на } \varphi_\alpha D_\alpha^n, \\ 0 \text{ вне компакта, лежащего в } U_\alpha, \\ 0 \le \psi_\alpha < 1 \text{ вне } \varphi_\alpha D_\alpha^n, \end{cases}$$

– гладкая функция

и $\psi_\alpha \circ \varphi_\alpha$ – функция на $\mathbb{R}^n$, зависящая только от радиуса.

Пусть $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\theta} \mathbb{R}^{n+1}$

– вложение в сферу $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (x_{n+1}+1)^2 = 1$,

так чтобы ∞ переходила в 0.

Положим тогда

$$f_\alpha : X \to \mathbb{R}^{n+1} \qquad \text{равным}$$

$$f_\alpha(x) = \theta(\varphi_\alpha^{-1}(x)) \circ \psi_\alpha(x)$$

$$f = \Pi f_\alpha : X \to \prod_\alpha \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^N.$$

Покажем, что f является вложением.

Пусть $x, y \in X$

1) $x, y \in \varphi_\alpha D_\alpha^n$. Тогда $\psi_\alpha(x) = \psi_\alpha(y)$

и значит $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$;

2) $x \in \varphi_\alpha(D_\alpha^n)$, $y \notin \varphi_\alpha(D_\alpha^n)$.

Тогда $f_\alpha(x) = \theta(\varphi_\alpha^{-1}(x))$

$$f_\alpha(y) = \theta(\varphi_\alpha^{-1}(y)) \cdot q, \quad 0 \le q < 1.$$

Следовательно $\|\theta(\varphi_\alpha^{-1}(y))\| < \|\theta(\varphi_\alpha^{-1}(x))\| \le \|f_\alpha(x)\| \le$

$\le \|f_\alpha(y)\|$.

Проверим, что df является мономорфизмом. В самом деле, если $x \in \varphi_\alpha D_\alpha^n$, то $\psi_\alpha(x) = 1$, и значит $df_\alpha = d(\theta(\varphi_\alpha^{-1}(x)))$ является мономорфизмом.

Согласно теореме I.14 для каждого гладкого многообразия X можно определить расслоение

$$\nu(X \subset \mathbb{R}^{N+n}) = \nu_N(X),$$

которое, правда, зависит от способа вложения многообразия X в эвклидово пространство $\mathbb{R}^{n+N}$. Однако имеет место следующая теорема.

Теорема I.15. При достаточно большом N $\nu_N(X)$ не зависит от способа вложения, $\nu_{N+1}(X) = \nu_N(X) \oplus 1$. Если φ_1, φ_2 - два вложения X в $\mathbb{R}^{N_1+n}$ и $\mathbb{R}^{N_2+n}$, то существует вложение $X \times I$ в $\mathbb{R}^{N_1+N_2+2n}$ такое, что $\nu_{N_1}(X) \oplus N_2+n$ и $\nu_{N_2}(X) \oplus N_1+n$ являются подрасслоениями:

$$\nu_{N_1+N_2+n}\left((X \times I) \subset \mathbb{R}^{N_1+N_2+2n} \times I\right).$$

Перейдем теперь к основной цели наших лекций - понятию бордизма.

Пусть дано два замкнутых (компактных) многообразия X_1 и X_2. Скажем, что многообразия X_1 и X_2 бордантны, если найдется многообразие W такое, что $\partial W = X_1 \cup X_2$.

Предложение I.16. Отношение бордизма является отношением эквивалентности. Классы бордизма образуют группу относительно операции несвязной суммы многообразий.

Доказательство. а) Если $X \sim X$, то

$$W = X \times I.$$

б) Если $X \sim Y$, то $Y \sim X$.

в) Если $X \sim Y$, $Y \sim Z$, то $X \sim Z$.

Пусть W_1, W_2 такие, что $\partial W_1 = X \cup Y$, $\partial W_2 = Y \cup Z$.

Рассмотрим многообразие $W_3 = W_1 \cup W_2$ склеенное по одинаковой части границы $\partial W_1 \supset Y$, $\partial W_2 \supset Y$. Тогда $\partial W_3 = X \cup Z$.

г) Если $X_1 \sim X_2$, $Y_1 \sim Y_2$, то $X_1 \cup Y_1 \sim X_2 \cup Y_2$.

В самом деле, $\partial W_1 = X_1 \cup X_2$, $\partial W_2 = Y_1 \cup Y_2$,

то $\partial(W_1 \cup W_2) = (X_1 \cup Y_1) \cup (X_2 \cup Y_2)$.

д) Нейтральным элементом служит $\varnothing$.

е) Аксиома ассоциативности выполняется автоматически.

ж) Если X - многообразие, то $X \cup X$ бордантно $\varnothing$.

Следовательно, $[X] = -[X]$.

Получаемая группа называется группой неориентируемых бордизмов.

Теорема Тома позволяет дать гомотопическую интерпретацию групп неориентируемых бордизмов $\mathfrak{N}_n$. Пусть $BO(n)$ - классифицирующее пространство для n-мерных векторных (вещественных) расслоений, ξ_n - классифицирующее расслоение. Напомним, что $BO(n)$ можно представлять как прямой топологический предел многообразий Грассмана $G_{N,n}$:

$$BO(n) = \lim_{N \to \infty} G_{N,n} .$$

Пусть $EO(n)$ - пространство расслоения ξ_n , $MO(n)$ - его одноточечная компактификация.

Таким образом, $BO(n) \subset MO(n)$, а некоторая окрестность $BO(n)$ гомеоморфна пространству расслоения $EO(n)$. Построим гомоморфизм

$$\mathfrak{N}_n \xrightarrow{\alpha_N} \pi_{N+n}(MO(N))$$

для некоторого достаточно большого числа N . Пусть X - n-мерное гладкое многообразие; $\varphi : X \hookrightarrow \mathbb{R}^{N+n}$ - вложение, $U \supset X$ - окрестность, диффеоморфная $\nu_N(X)$. Согласно определению $BO(N)$, существует непрерывное отображение

$$f : X \longrightarrow BO(N)$$

такое, что

$$f_*(\xi_N) = \nu_N(X) .$$

Или, другими словами, существует отображение g , дающее коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{g} & EO(N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & BO(N) \end{array}$$

Отображение g однозначно продолжается до отображения $\bar{g}$ одноточечных компактификаций

$$\bar{g} : S^{N+n} = (\mathbb{R}^{N+n} \cup \infty) \to MO(N) = (EO(N) \cup \infty) ,$$

причем $S^{N+n} \setminus U$ отправляется в нарост.

Таким образом, $\bar{g}$ определяет элемент

$$[\bar{g}] \in \pi_{N+n}(MO(N)).$$

Отметим, что отображение $\bar{g}$ трансверсально вдоль $BO(N) \subset MO(N)$. Если многообразие X бордантно нулю, т.е. $X = \partial Y$, то покажем, что $[\bar{g}] = 0$. В самом деле, пусть $\psi : Y \hookrightarrow \mathbb{R}^{N+n+1}$, $\psi|_X = \varphi : X \hookrightarrow \mathbb{R}^{N+n}$ -вложения, V - окрестность многообразия Y, диффеоморфная расслоению $\nu_N(Y)$.
Ясно, что $\nu_N(Y)|X = \nu_N(X)$.
Таким образом, отображение f, а значит и отображение g продолжаются до отображений f', g', дающих коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{g'} & EO(N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{f'} & BO(N) \end{array}.$$

Пусть $\bar{g}'$ - продолжение g' до одноточечных компактификаций

$$(\mathbb{R}_+^{N+n+1} \cup \infty) \xrightarrow{\bar{g}'} MO(N).$$

Пространство $\mathbb{R}_+^{n+N+1} \cup \infty$ гомеоморфно диску D^{N+n+1}, граница которого есть компактификация границы $\mathbb{R}_+^{N+n+1}$, т.е.

$$\bar{g}^1 \big|_{S^{N+n}} = \bar{g} .$$

Таким образом, мы корректно построили гомоморфизм α.

Теорема I.7. Гомоморфизм

$$\alpha_N : \mathfrak{N} \to \pi_{N+n}(MO(N))$$

является изоморфизмом при достаточно большом N. Пусть

$$\Sigma : \pi_{N+n}(MO(N)) \to \pi_{N+n+1}(MO(N+1))$$

- гомоморфизм надстройки, тогда

$$\alpha_{N+1} = \Sigma \circ \alpha_N .$$

Доказательство. Построим обратное отображение: пусть

$$\bar{g} : S^{N+n} \to MO(N),$$

заменим его на гомотопное и трансверсальное отображение $\bar{g}'$ вдоль

$$BO(N) \subset MO(N).$$

Тогда $\bar{g}^{-1}(BO(N)) = X \subset S^{N+n}$ является n-мерным подмногообразием, причем $\alpha(X) = [\bar{g}']$.

Если g'' - другое, гомотопное $\bar{g}$, отображение, трансверсальное вдоль $BO(N) \subset MO(N)$, то существует гомотопия

$$G: S^{N+n} \times I \longrightarrow MO(N),$$

трансверсальная вдоль $BO(N) \subset MO(N)$.
Тогда $G^{-1}(BO(N))$ есть многообразие W, $\partial W = X \cup X'$, $X' = (g'')^{-1}(BO(N))$.
Последнее утверждение тривиально.

Теорема I.17 может быть сформулирована следующим, более коротким, способом.

<u>Определение I.18.</u> Спектром CW - комплексов X_n называется последовательность $X = \{X_n, f_n\}$, где $f_n : SX_n \to X_{n+1}$ - такие отображения, что $(f_n)_* : \pi_i(SX_n) \to \pi_i(X_{n+1})$ - изоморфизмы для $0 \le i \le n + p_n$, $p_n \to \infty$ при $n \to \infty$, $p_n \geq 0$.

<u>Предложение I.19.</u> $\pi_i(X_n) = 0$ при $i \le q_n$, $q_n \to \infty$ при $n \to \infty$. В самом деле, пусть

$$q_n = Min\{\{i : \pi_{i+1}(X_n) \neq 0\}, n\}.$$

Тогда $\pi_{i+1}(SX_n) \approx \pi_i(X_n) = 0$ для $i \le q_n$.

Следовательно, $q_{n+1} \geq q_n + 1$, $q_n \to \infty$.
Допустим, что $q_n < n$.
Тогда $\pi_{i+1}(SX_n) \approx \pi_i(X_n) = 0$, $\pi_{q_n+1}(X_n) \neq 0$,

$$\begin{array}{c} \pi_{q_n+2}(SX_n) \approx \pi_{q_n+1}(X_n), \\ \wr\wr \\ \pi_{q_n+2}(X_{n+1}). \end{array}$$

Значит $q_{n+1} = q_n + 1$
и, вообще, $q_{n+2} = q_n + 2 = (q_n - n) + (n+2)$.
Таким образом, $q_N = N - a$, $a \geq 0$.

Предложение I.19 показывает, что члены спектра $X = \{X_n, f_n\}$ имеют растущую связность.

Определение I.20. Пусть X, Y – два спектра. Отображением $f: X \to Y$ называется последовательность отображений $f_n : X_n \to Y_n$, таких что

$$\begin{array}{ccc} SX_n & \xrightarrow{Sf_n} & SY_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{n+1} & \longrightarrow & Y_{n+1} \end{array}$$

образуют гомотопически коммутативную диаграмму.

Естественно вводится понятие надстройки спектра:

$$SX = \{Y_n, g_n\},$$
$$Y_n = X_{n+1} .$$

Примеры спектров:

а) $S^0 = \{S^n, id\}$,

б) $K(Z) = \{K(Z,n)\}$,

в) $MO = \{MO(n)\}$,

г) $X = \{S^n X\}$ для комплексов X.

Упражнение I.21.

$$H^n(X,Z) \approx [S^n X, K(Z)] .$$

Упражнение I.22. Стабильные гомотопические группы:

$$\pi_n^S(X) = \lim \pi_{N+n}(S^N X) =$$
$$= [S^n(S^0), X] .$$

Тогда теорема I.17 звучит следующим образом:

$$\mathfrak{N} \approx \pi_N(MO) .$$

Предложение I.23. Для спектров

$$[SX, SY] \approx [X, Y]$$

или

$$[SX, Y] \approx [X, \bar{S}'Y] .$$

Существуют другие отношения эквивалентности, связанные с введением дополнительных структур на многообразиях.

Ориентация. Если X - гладкое многообразие, то касательное расслоение является векторным расслоением со структурной группой $GL(n)$, $n=\dim X$.

Предложение I.24. Структурная группа $GL(n)$ редуцируется к группе $O(n)$, т.е. на всяком векторном расслоении можно ввести структуру $O(n)$-расслоения. Две различных структуры $O(n)$-расслоения эквивалентны.

Определение I.25. Скажем, что многообразие X ориентировано, если на касательном расслоении TX задана структура $SO(n)$-расслоения (называемая ориентацией X).

Теорема I.26. Пусть задана ориентация многообразия $X \hookrightarrow \mathbb{R}^{N+n}$. Тогда однозначно определена структура $SO(N)$ нормального расслоения $\nu_N(X)$, причем структура $SO(N+1)$ расслоения в $\nu_{N+1}(X) = \nu_N(X) \oplus 1$ задается прямой суммой $SO(N) \times SO(1) \subset SO(N+1)$. И обратно, $SO(N)$ - структура $\nu_N(X)$ однозначно определяет ориентацию X.

Предложение I.27. Пусть X - ориентированное многообразие, на $\nu_N(X)$ по теореме I.26 задана структура $SO(N)$-расслоения. Пусть $\nu_N(\partial X) = \nu_N(X)/\partial X$. Тогда ориентация ∂X, индуцированная структурой $SO(N)$-расслоения на $\nu_N(\partial X)$, определяет такую структуру $SO(n-1)$-расслоения $T(\partial X)$, что $T(X)|\partial X = T(\partial X) \oplus 1$, где равенство понимается в плане $SO(n)$-расслоений, причем указанное расслоение соответствует взятию нормального вектора смотрящего внутрь многообразия.

Определение I.28. Ориентированное многообразие X называется бордантным нулю, если существует ориентированное многообразие W, $X=\partial W$ и ориентации согласованы.

Предложение I.29. Для каждого ориентированного многообразия X найдется другое ориентированное многообразие Y такое, что $X \cup Y$ бордантно нулю.

Доказательство. Рассмотрим $W = X \times I$ и продолжим $SO(n)$-структуру нормального расслоения от $X \times 0$ до нормального расслоения к W. Тогда на $X \times 1$ возникает структура ориентированного многообразия. Обозначив его через Y, получаем, что $\partial W = X \cup Y$.

Обозначим Y через $(-X)$.

Теорема I.30. Если $X \sim Y$ означает, что $X \cup (-Y)$ бордантно нулю, то отношение $\sim$ является отношением эквивалентности. Классы эквивалентных ориентированных многообразий образуют группу относительно несвязной суммы.

Определение I.31. Пусть на $\nu(X)$ фиксирована комплексная структура, т.е. на $\nu_N(X)$ фиксирована комплексная структура I так, что $\nu_{N+2}(X) = \nu_N(X) \oplus 1_{\mathbb{C}}$.
Пара (X, I) называется квазикомплексным многообразием. Ограничение комплексной структуры $\nu(X)$ на $\nu(\partial X)$ определяет нам квазикомплексное многообразие $(\partial X, I)$. Будем говорить, что квазикомплексное многообразие $(\partial X, I)$ бордантно нулю.

Как и в случае ориентированных многообразий, имеют место аналогичные утверждения.

Предложение I.32. Если (X, I) – квазикомплексное многообразие, то существует такое многообразие (X, J), что $(X,J) \cup (X,I)$ бордантно нулю.

(X, J) обозначим через $-(X,I)$,

а $(X,I) \sim (Y,J) \Leftrightarrow (X,I) \cup (-(Y,J)) \sim 0$.

Предложение I.33. Отношение $\sim$ является отношением эквивалентности.

Классы эквивалентных квазикомплексных многообразий образуют группу относительно несвязной суммы.

Другие структуры на многообразиях: $SU(n)$, $Sp(n)$.

С этого момента мы будем под бордизмами и многообразиями понимать соответственно квазикомплексные бордизмы и многообразия. Отметим, что почти во всех теоремах это будет несущественно.

Приведем теорему Тома о гомотопической классификации группы бордизмов.

Обозначим через Ω_U^n группу n-мерных квазикомплексных бордизмов.

Пусть $BU(n)$ – классифицирующее пространство n-мерных комплексных расслоений, $EU(n)$ – пространство канонического расслоения над $BU(n)$. $MU(n)$ – комплекс Тома этого расслоения, т.е. одноточечная компактификация пространства $EU(n)$.

Предложение I.34. Комплекс Тома $X^{\xi+1} = S^2(X^{\xi})$.

Из предложения I.34 следует, что отображение $BU(n) \to BU(n+1)$ индуцирует отображение $S^2 MU(n) \to MU(n+1)$.

Обозначим $\pi_K(MU) = \varinjlim \pi_{K+2N}(MU(N))$.

где отображение $\pi_{K+2N}(MU(N)) \longrightarrow \pi_{K+2N+2}(MU(N+1))$

есть композиция $\pi_{k+2N}(MU(N)) \to \pi_{k+2N+2}(S^2 MU(N)) \to$
$\to \pi_{k+2N+2}(MU(N+1))$.

Теорема 1.35. Имеется естественный изоморфизм

$$\Omega_U^n \approx \pi_n(MU).$$

Доказательство. Построим отображения:

$$\alpha: \Omega_U^n \to \pi_n(MU),$$
$$\beta: \pi_n(MU) \to \Omega_U^n.$$

Пусть X - квазикомплексное многообразие $\dim X = n$,

$$i: X \hookrightarrow \mathbb{R}^{2N+n}$$

- вложение, $V \supset X$ - регулярная окрестность, диффеоморфная некоторому комплексному векторному расслоению над X. Пусть

$$f: V \to EU(n)$$

- классифицирующее отображение, т.е. послойное отображение, комплексно линейное на каждом слое. Тогда f однозначно продолжается до отображения

$$\bar{f}: S^{2N+n} \to MU(n),$$

трансверсально регулярного вдоль $BU(n) \subset MU(n)$. Положим

$$\alpha(X) = [\bar{f}] \in \pi_n(MU).$$

Определение гомоморфизма α корректно: если $\partial W = X_1 \cup X_2$, то, взяв вложение $j: W \hookrightarrow \mathbb{R}^{2N+n} \times I$ и его регулярную окрестность V, мы получим отображение $f: V \to EU(n)$ и, следовательно, однозначное продолжение его до одноточечных компактификаций:

$$(\mathbb{R}^{2N+n} \times I) \xrightarrow{\bar{f}} MU(n).$$

Пусть

$$\pi: (S^{2N+n} \times I) \to (\mathbb{R}^{2N+n} \times I)$$

- естественная проекция $\bar{\bar{f}} = \bar{f} \circ \pi$.

Тогда мы получаем гомотопию

$$\bar{\bar{f}}: S^{2N+n} \times I \longrightarrow MU(n) ,$$

постоянную в отмеченной точке, трансверсально регулярную вдоль

$$BU(n) \subset MU(n) .$$

Пусть $x \in \pi_n(MU)$. Тогда найдется такое N, что x предотавляется непрерывным отображением

$$f: S^{2N+n} \longrightarrow MU(n) .$$

Аппроксимируя f гладким и трансверсально регулярным g, положим

$$X = g^{-1}(BU(n)) .$$

Регулярная окрестность $V \supset X$ диффеоморфна векторному расслоению $g^*(EU(n))$.

Корректность определения доказывается аналогично.

Обобщенная теория гомологий

Пусть дано два отображения (непрерывных)

$$f: X \to K ,$$
$$g: Y \to K ,$$

где X, Y - квазикомплексные многообразия, K - клеточный комплекс.

Определение I.36. Отображения f и g называются бордантными, если найдется квазикомплексное многообразие W, $\partial W = X \cup (-Y)$, и отображение $h: W \to K$, продолжающее $f \cup g$. Классы бордантных отображений обозначаются через $U_n(K)$, $\dim X = n$, и называются бордизмами комплекса K.

Упражнение I.37.

$$U_n(K) \approx \pi_n(MU \wedge K) .$$

Упражнение I.38. $U_n(K)$ - гомотопичеокий функтор, продолжающийся до теории гомологий.

Мы, на самом деле, дадим другое доказательство упражнения I.38. Положим: $U_n(K,L)$ - группа бордизмов пары (K,L), которая определяется как группа классов бордантных отображений

$$f: (X, \partial X) \longrightarrow (K, L) .$$

При этом отображение f называется бордантным нулю, если найдется такое квазикомплексное многообразие W, что $\partial W = X \cup Y,\ X \cap Y = \partial X = \partial Y,\ f(Y) \subset L$.

Тогда определим

$$\partial : U_n(K, L) \to U_{n-1}(L),$$

полагая

$$\partial(X, f) = (\partial X, f|_{\partial X}).$$

Система $\{U_n(X), U_n(K,L), \partial_*\}$ удовлетворяет известному набору аксиом теории гомологий:

а) если $f: K_1 \to K_2$ – непрерывное отображение, то $f_* : U_n(K_1) \to U_n(K_2)$;
если $f: (K_1 L_1) \to (K_2 L_2)$ – непрерывное отображение пар, то

$$f_* : U_n(K_1, L_1) \to U_n(K_2, L_2);$$

б) если $f \sim g$, то $f_* = g_*$;

в) $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$;

г) $f_* \partial = \partial f_*$;

д) последовательность для пары

$$\to U_n(L) \xrightarrow{i_*} U_n(K) \xrightarrow{j_*} U_n(K, L) \xrightarrow{\partial} U_{n-1}(L) \to ,$$

где $i: L \to K$, $j: (K, \emptyset) \to (K, L)$, точна;

е) если $V \subset L \subset K$ – открытое множество, то вложение индуцирует изоморфизм: $\varphi_* : U_n(K \setminus V, L \setminus V) \to U_n(K, L)$

$$\varphi : (K \setminus V, L \setminus V) \to (K, L).$$

Проверим некоторые из этих аксиом.

а) Пусть $f: K_1 \to K_2$ – непрерывное отображение, $(X, h) \in U_n(K_1)$. Положим $f_*(X, h) = (X, fh)$.

б) Пусть $F: K_1 \times I \to K_2$ – гомотопия,

$$F(x, 0) = f(x),\ F(x, 1) = g(x),\ (X, h) \subset U_n(K_2).$$

Положим $W = X \times I$, $\varphi = F(h \times id)$.

Тогда $\partial W = X \cup (-X)$, $\varphi|_{\partial W} = fh \cup gh$,

таким образом, (X, fh) бордантно $(X, g \circ h)$, т.е.

$$f_*(X,h)=g_*(X,h).$$

е) Пусть $f:(X,\partial X)\to(K,L)$ – непрерывное отображение, $Y=f^{-1}(V_1)$.

Используя свойство (б) и леммы об окрестностных ретрактах, можно считать, что $\bar{V}\subset V_1\subset L$, $\bar{V}'\setminus V=\partial V\times I$.
Пусть $Z=X\setminus Y$, $Z'\supset Z$; Z' – подмногообразие,

$$Z'\subset X\setminus f^{-1}(V).$$

Тогда Z' отображается в $K\setminus V$, а при проекции – в $K\setminus V_1$. При этом Z^1 отображается в $L\setminus V_1$.

Мы, таким образом, построили обратное отображение:
$e: U_n(K,L)\to U_n(K\setminus V, L\setminus V)$, причем $e\varphi_*=id$, $\varphi_* e=id$. Докажем теорему, известную под названием изоморфизма Тома.

<u>Теорема I.39.</u> Пусть K – клеточный комплекс, $\xi\to K$ – комплексное векторное расслоение, K^ξ – комплекс Тома, т.е. одноточечная компактификация расслоения ξ.

Тогда $U_i(K)\approx U_{i+2n}(K^{\xi *})$,
где $dim\ \xi_c=n$, $*$ – нарост компактификации.

<u>Доказательство.</u> Если X – квазикомплексное многообразие, $\xi\to X$ – комплексное расслоение, то пространство ξ имеет естественную структуру квазикомплексного многообразия.

Пусть $E\to K$ – расслоение дисков, ассоциированное с ξ, $V\subset E$ – расслоение сфер. Тогда $(K^\xi,*)=(E,V)$.
Пусть теперь $(X,f)\in U_i(K)$.
Тогда $(f^*(E),f^*(V))$ есть квазикомплексное многообразие, которое отображается в (E,V).

Таким образом, мы построили гомоморфизм

$$\varphi: U_i(K)\to U_{i+2n}(K^\xi,*).$$

Обратно, если

$$(X,f)\in U_{i+2n}(K^\xi,*),$$

то, выберем f гладким и трансверсально регулярным вдоль $K\subset K^\xi$.
Тогда $f^{-1}(K)=Y$ определяет элемент $\psi(X,f)\in U_i(K)$.
Легко проверяется, что $\varphi\psi=id$, $\psi\varphi=id$.

При объяснении аксиомы (е) мы воспользовались одним геометрическим приемом, который мы еще раз применим в определении двойственной теории.

Напомним, что теорией когомологий называется контравариантный функтор, удовлетворяющий аксиомам (а) - (е).

Определение I.40. Пусть K - клеточный комплекс, $K \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ - его вложение в эвклидово пространство, V - регулярная окрестность, граница которой ∂V является гладким многообразием.

Положим

$$U^k(K) = U_{N-k}(V_N, \partial V_N) .$$

Если (K,L) - пара, $(K,L) \hookrightarrow (\mathbb{R}^N_+, \mathbb{R}^{N-1})$ - вложение, V - регулярная окрестность $\partial V = V_0 \cup V_1$, $V_0 \subset \mathbb{R}^{N-1}$, $\partial V_0 = \partial V_1 = V_0 \cap V_1$,
то

$$U^k(K,L) = U_{N-k}(V, V_1) .$$

Теорема I.41. $U^k(*)$ является гомотопическим контравариантным функтором, дополняющимся до теории когомологий. Определение I.40 корректно, если при умножении $\mathbb{R}^N$ на $\mathbb{R}^N$ положить

$$U^k(K) = U_{N+n-k}(V_{N+n}, \partial V_{N+n}) ,$$

используя теорему I.39.

Доказательство. Мы покажем только, как по отображению

$$f: K \to L$$

построить гомоморфизм

$$f^*: U^k(L) \to U^k(K) .$$

Пусть $\varphi: L \to \mathbb{R}^N$ - вложение, V - регулярная окрестность вложения.

Если $\psi: K \to \mathbb{R}^{N'}$ - вложение, тогда $(\psi, \varphi f): K \to \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N'}$ - диагональное вложение, V_1 - его регулярная окрестность $V_1 \subset V \times \mathbb{R}^{N'} = V_2$.

Если

$$(X, h) \in U_{N+N'-k}(V_2, \partial V_2) ,$$

то

$$(h'(V_1), h) \in U_{N+N'-k}(V_1, \partial V_1) .$$

Положим

$$f^*(X,h) = (h^{-1}(V_1), h) .$$

Теорема I.42. Существует гомоморфизм

$$\cap : U^k(K) \otimes U_n(K) \to U_{n-k}(K),$$

причем если $f: K \to L$, то $f_* = id\, f^*(x) \cap y =$
$= x \cap f_*(y)$. $\qquad (*)$

Доказательство. Пусть $(X, f) \in U_n(K)$, $x \in U^k(K)$, $f^*(x) = U^k(X)$. Тогда

$$f^*(x) = (Y, h) \in U_{N-k}(V_N(X)), \ Z = h^{-1}(X).$$

Положим $x \cap (X, f) = (Z, fh) \in U_{n-k}(K)$.

Проверка $(*)$ тривиальна.

Из теоремы I.42 можно получить следующую аналогию в бордизмах понятия значения коцикла на цикле.

Пусть $f: K \to pt$. Положим $\langle \xi, x \rangle = f_*(\xi \cap x) \in$
$\in \Omega_U^{n-k}$,

где $\xi \in U^k(K)$, $x \in U_n(K)$.

Таким образом, группа кобордизмов $U^*(K)$ отображается в группу

$$Hom_{\Omega_U}(U_*(K), \Omega_U).$$

Теорема I.43. (Двойственность Пуанкаре)

Если K - замкнутое квазикомплексное многообразие,

$$x = (K, id) \in U_n(K),$$

то

$$\cap x : U^i(K) \to U_{n-i}(K)$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Оставляем в качестве упражнения.

Теорема I.44. Если K - квазикомплексное многообразие,

$$\partial K = L_0 \cup L_1, \ L_0 \cap L_1 = \partial L_0 = \partial L_1,$$

то для $x = (K, \partial K, id) \in U_n(K, \partial K)$

$$\cap x : U^i(K, L_0) \to U_{n-i}(K, L_1)$$

является изоморфизмом.

Замечание I.45. Все приведенные здесь понятия и теоремы справедливы и для других теорий бордизмов.

Теорема I.46.

$$U^k(X) \approx \pi[S^{2N-k}X, MU(N)]$$

при достаточно большом N.

Доказательство. Пусть $X \subset R^{2N}$ - вложение, V - регулярная окрестность, тогда

$$U^k(X) \approx U_{2N-k}(V, \partial V).$$

Пусть $f: X, \partial X \longrightarrow V, \partial V$ - элемент $U_{2N-k}(V, \partial V)$,
$\varphi: X \longrightarrow R^{2N-k}$ - вложение,
$\psi = f \times \varphi: X \longrightarrow V \times R^{2N-k}$ - диагональное вложение.
При этом $\psi(\partial X) \subset \partial V \times R^{2N-k}$.

Пусть W - регулярная окрестность X в $V \times R^{2N-k}$. Поскольку X - квазикомплексное многообразие, то W допускает структуру комплексного расслоения размерности N.

Следовательно, существует отображение

$$W \longrightarrow EU(N),$$

продолжающееся до отображения

$$S^{2N-k} \longrightarrow MU(N).$$

Обратно, пусть задано отображение

$$S^{2N-k}V \xrightarrow{f} MU(N).$$

Аппроксимируя его трансверсально-регулярным отображением вдоль $BU(N)$, получим квазикомплексное многообразие

$$X = f^{-1}(BU(N)),$$

вложенное в $V \times R^{2N-k}$. При этом $\partial X \subset \partial V \times R^{2N-k}$.

Теорема I.47. Группа $U^*(K) = \oplus U^n(K)$ является градуированной алгеброй над кольцом

$$\Omega_U = \oplus \Omega_U^n = U^*(pt).$$

Доказательство. Прежде всего определим операцию умножения. Пусть $K \subset R^n$, V - регулярная окрестность, (X, f), (Y, g)

два элемента групп $U_{N-k}(V,\partial V)$ и $U_{N-m}(V,\partial V)$ соответственно.

Рассмотрим пространство

$$X\times V\times Y$$

и два вложения многообразия $X\times Y$:

$$h_1=(1\times f, id),$$
$$h_2=(id, f\times 1).$$

Приведем h_1 и h_2 в общее положение, т.е. считаем h_1 трансверсально регулярным вдоль h_2. Получим многообразие $Z\subset X\times Y$, допускающее естественную структуру квазикомплексного многообразия. Тогда отображение

$$Z\subset X\times Y\times V\longrightarrow V$$

определяет нам элемент

$$U_{N-k-m}(V,\partial V)=U^{k+m}(K).$$

Если K - точка, $K=pt$,
то $V=D^N, \partial V=S^{N-1}$.
Тогда

$$U_{N-k}(D^N,S^{N-1})=0$$

при $k>0$. Имеет место изоморфизм

$$U_{N+k}(D^N,S^{N-1})\approx U_k(pt).$$

Следовательно, всякий элемент $\alpha\in U_{N+k}(D^N,S^{N-1})$ можно представить в виде

$$X\times D\xrightarrow{pr}D^N\to D^N,\ x\in U_k(pt).$$

Тогда пересечение элементов

$$(X\times D^N,pr),\ (Y\times D^N,pr)$$

равно $(X\times Y\times D^N, pr)$.

<u>Теорема I.48.</u> Умножение в $U^*(K)$ можно построить как композицию

$$S^{2N_1+2N_2}(K)\to S^{2N_1}K\wedge S^{2N_2}K\to$$
$$\to MU(2N_1+k)\wedge MU(2N_2+m)\to MU(2N_1+2N_2+k+m),$$

где последнее отображение индуцировано отображением

$$U(n)\times U(m)\to U(n+m).$$

ЛЕКЦИЯ 2

СПЕКТРАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ АТЬЯ-ХИРЦЕБРУХА

В этой лекции приводится краткая схема построения спектральной последовательности Атья-Хирцебруха. Детали можно прочесть в книге Коннера П., Флойда Э. "Гладкие периодические отображения" (гл.I, § 5, 6, 7).

Пусть h - обобщенная теория когомологий. Будем предполагать, что h - мультипликативная теория, т.е. существует спаривание

$$h^n(X,Y_1)\otimes h^m(X,Y_2)\longrightarrow h^{n+m}(X,Y_1\cup Y_2).$$

В этом случае группа $h^*(X)$ является модулем над кольцом $h^*(pt)$.

<u>Предложение 2.1.</u> Квазикомплексные кобордизмы являются мультипликативной теорией.

Пусть задан комплекс K и некоторая возрастающая его фильтрация (конечная) $K_0\subset K_1\subset K_2\subset\ldots\subset K_s=K$.

<u>Определение 2.2.</u> Спектральной последовательностью называется система групп $E_s^{p,q}$, дифференциалов

$$d_s: E_s^{p,q}\longrightarrow E_s^{p+s,\,q-s+1}$$

и изоморфизмов

$$H(E_s^{p,q})\approx E_{s+1}^{p,q}.$$

Если $E_s^{p,q}=0$ при $p<0$, то имеет смысл понятие

$$E_\infty^{p,q}=\bigcap_{s>p+1}\operatorname{Ker} d_s.$$

Говорят, что спектральная последовательность $\{E_s^{p,q},d_s\}$ сходится к группам h^n, если группы h^n допускают фильтрации

$$h^n=F_{0,n}\supset F_{1,n-1}\supset\ldots\supset F_{n,0}.$$

Причем

$$F_{i,n-i}/F_{i+1,n-i-1}\approx E_\infty^{i,n-i}.$$

Пишем

$$E_s^{p,q}\Rightarrow h^n.$$

<u>Теорема 2.3.</u> Для каждой фильтрации $K_0\subset K_1\subset\ldots\subset K_s=K$ существует спектральная последовательность A-X

$$E_s^{p,q}(K)\Rightarrow U^n(K).$$

При этом все члены $E_s^{**}(K)$ являются биградуированными модулями на $U^*(pt)=\Omega_U$, d_s – гомоморфизмами Ω_U модулей,

$$E_1^{p,q}(K)=U^q(K_p,K_{p-1})$$

и фильтрация в $U^n(K)$ индуцирована фильтрацией K.
Если K фильтрована конечномерными остовами его клеточного разбиения, то

$$E_2^{p,q}(K)=H^p(K,\Omega_U^q)\ .$$

В этом случае $E_s^{**}(K)$ являются Ω_U^* – биградуированными алгебрами, а d_s удовлетворяют формуле Лейбница для дифференцирования. Изоморфизмы $H(E_s)\approx E_{s+1}$ мультипликативны. Доказательство можно найти в указанной выше книге.

Применяя спектральную последовательность $A-X$ и геометрические конструкции, введенные раньше, мы вычислим ряд необходимых нам в дальнейшем формул.

Пусть $\mathbb{C}P^n$ – комплексное проективное пространство, которое, разумеется, является квазикомплексным многообразием.

Существует естественное вложение $\mathbb{C}P^{n-1}\subset\mathbb{C}P^n\subset\mathbb{C}P^{n+1}$ такое, что

$$\mathbb{C}P^\infty=\varinjlim_{n\to\infty}\mathbb{C}P^n$$

является бесконечным клеточным комплексом. Комплекс $\mathbb{C}P^\infty$ обладает рядом замечательных свойств:

1) $\mathbb{C}P^\infty$ является классифицирующим пространством для одномерных комплексных векторных расслоений.

2) $\mathbb{C}P^\infty$ есть $K(\mathbb{Z},2)$ – классифицирующее проотранство для двумерных когомологий.

3) $H^*(\mathbb{C}P^\infty,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}[x]\ ,\ x\in H^2(\mathbb{C}P^\infty,\mathbb{Z})$

4) $H^*(\mathbb{C}P^n,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}[x]/x^{n+1}=0\ .$

<u>Теорема 2.4.</u>

$$U^*(\mathbb{C}P^n)=\Omega^*[u]/u^{n+1}=0\ ,\ u\in U^2(\mathbb{C}P^n)\ .$$

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим спектральную последовательность Атья-Хирцебруха для $\mathbb{C}P^n$.
Тогда

$$E_2^{p,q}=H^p(\mathbb{C}P^n,\Omega_U^q)\ [illegible] =\Omega_U^*[x]/x^{n+1}=0\ .$$

Пусть s наименьшее такое, что $d_k(x)=0$, $\forall k<s$, $d_s(x)\neq 0$.
Ясно, что s четно, $s=2m$, поэтому и для $\mathbb{C}P^m$ $d_{2t}(x)\neq 0$.
Следовательно, $d_{2m}(x)=z\otimes x^m$, $z\in\Omega_U$.
Это значит, что всякий элемент $U^2(\mathbb{C}P^m)$ имеет фильтрацию >2.
С другой стороны, если $v=(\mathbb{C}P^{n-1},i)\in U_{2n-2}(\mathbb{C}P^n)$,
$Dv=u\in U^2(\mathbb{C}P^n)$, то ограничение u на $\mathbb{C}P^1=S^2$ не равно нулю, поскольку, если $j:\mathbb{C}P^1\subset\mathbb{C}P^n$, $j^*(u)=j^*(Dv)$,

$$j_*(\mathbb{C}P^1\cap j^*u)=j_*(\mathbb{C}P^1\cap j^*(Dv))=$$
$$=j_*(\mathbb{C}P^1)\cap Dv=(pt).$$

Следовательно, $\mathbb{C}P^1\cap j^*(u)=(pt)\neq 0$, таким образом, $j^*(u)\neq 0$.
Итак $d_s(x)=0$ для любого x.
Тогда $d_s(x^k)=kx^{k-1}d_s(x)=0$, $d_s(zx^k)=z\,d_s(x^k)=0$,
т.е. $d_s=0$, $E_2^{p,q}=E_\infty^{p,q}=\Omega_U[x]/x^{n+1}=0$.

Отсюда следует, что если $u\in U^2(\mathbb{C}P^n)$ представляет элемент x, то $u^{n+1}=0$ и

$$U^*(\mathbb{C}P^n)=\Omega_U[u]/u^{n+1}=0 .$$

Следствие 2.5. Положим $U^*(K)=\varprojlim U^*(K_n)$, где K_n - n-мерные остовы K.
Тогда

$$U^*(\mathbb{C}P^\infty)=\Omega_U^*[[u]] .$$

Теорема 2.6.

$$U^*(\underbrace{\mathbb{C}P^\infty\times\ldots\times\mathbb{C}P^\infty}_{k})=U^*[[u_1,\ldots,u_k]] .$$

Доказательство. Рассмотрев снова спектральную последовательность $A-X$, имеем

$$E_2^{**}=H^*(X,\Omega_U^*)=\Omega_U^*[x_1,\ldots,x_s] .$$

Пусть $X=\mathbb{C}P^\infty\times\ldots\times\mathbb{C}P^\infty$. Пусть $\pi_i: X\to\mathbb{C}P^\infty$ - проекция на i-е слагаемое, тогда

$$X_i=\pi_i^*(X) .$$

Следовательно, все элементы X_i - циклы всех дифференциалов.
Значит, $ds=0$ для любого s.
Таким образом, $E_2^{**}=E_\infty^{**}$.
Положим $u_i=\pi_i^*(u)$.
Тогда u_i - представляет X_i в E_∞^{**}

и, следовательно,

$$U^*(X) = \Omega_U^*[[u_1,\dots,u_s]].$$

Замечание 2.7. Теоремы 2.4 и 2.6 обобщаются на случай S_p-кобордизмов и HP^∞- проективного кватернионного пространства, т.е.

$$S_p^*(HP^\infty) = \Omega_{Sp}^*[[u]],\ u \in S_p^n(HP^\infty),$$
$$S_p^*(HP^\infty \times \dots \times HP^\infty) = \Omega_{Sp}^*[[u_1,\dots,u_s]].$$

Теорема 2.8. Пусть $BU(n)$- классифицирующее пространство n-мерных комплексных расслоений, $f: \mathbb{C}P^\infty \times\dots\times \mathbb{C}P^\infty \to BU(n)$ - такое отображение, что $f^*(\xi_n) = \eta_1 + \dots + \eta_n$, η_i - расслоение Хопфа на i-ом слагаемом.

Тогда $U^*(BU(n)) = \Omega_U^*[[\sigma_1,\dots,\sigma_n]]$,

при этом $f^*(\sigma_k) = \sigma_k(u_1,\dots,u_n)$ -k-й элементарный симметричный полином.

Доказательство. Пусть $X = \mathbb{C}P^\infty \times \dots \times \mathbb{C}P^\infty$. Рассмотрим спектральные последовательности $A-X$

$$E_s^{**}(BU(n)) \xrightarrow{f^*} E_s^{**}(X).$$

В члене E_2 имеем

$$E_2^{**}(BU(n)) = \Omega_U[c_1,\dots,c_n],$$
$$E_2^{**}(X) = \Omega_U[x_1,\dots,x_n].$$

Причем

$$f^*(c_i) = \sigma_i(x_1,\dots,x_n).$$

Таким образом, в члене E_2 f^* является мономорфизмом. Поскольку $d_2(x)=0$, то и $d_2(BU(n)) \equiv 0$. Следовательно,

$$f^*: E_3(BU(n)) \to E_3(X)$$

является мономорфизмом и т.д.

$$f^*: E_\infty(BU(n)) \to E_\infty(X) = \Omega_U[x_1,\dots,x_n]$$

является мономорфизмом на симметрические многочлены от $x_1,\dots,x_n$. Таким образом,

$$E_\infty(BU(n)) = \Omega_U[c_1,\dots,c_n],$$

$$f^*(c_i)=\sigma_i(x_1,\dots,x_n).$$

Тогда $f^*: U^*(BU(n))\longrightarrow U^*(X)$ является мономорфизмом.
В самом деле, пусть $x\in U^*(BU(n))$, $x\neq 0$.
Поскольку $x\neq 0$, то $x\neq 0$ на некотором остове, т.е. x будет представлен в члене $E_\infty^{p,q}(BU(n))$ ненулевым элементом y, но тогда и образ его $f^*(x)$ будет представлен в члене $E_\infty^{p,q}(X)$ элементом $f^*(y)\neq 0$, значит, $f^*(x)\neq 0$.

Образ $f^*: U^*(BU(n))\longrightarrow U^*(X)=\Omega_U[[u_1,\dots,u_n]]$ совпадает с симметрическими формальными рядами. В самом деле, пусть $z=p(u_1,\dots,u_n)$ – симметрический формальный ряд $z=p(u_1,\dots,u_n)=\sum_{\alpha\geq\alpha_0}p_\alpha(u_1,\dots,u_n)$, p_α – многочлены степени α с коэффициентами из Ω_U.
Тогда в $E_\infty^{**}(X)$ элемент z представлен элементом

$$p_{\alpha_0}(x_1,\dots,x_n)=f^*(d_\alpha),\ d_\alpha\in E_\infty^{**}(BU(n)).$$

<u>Лемма 2.9.</u> Всякий элемент $w\in E_\infty^{**}(BU(n))$ представляется некоторым элементом $v\in U^*(BU(n))$.

<u>Доказательство.</u> Пусть Y_i – i-мерные остовы $BU(n)$. Нетрудно выбрать Y_i так, чтобы вложение $Y_i\subset Y_{i+1}\subset BU(n)$ индуцировало изоморфизм спектральных последовательностей для $p\leq i$ и было нулевым для $p>i$.
Пусть $w\in E_\infty^{p,q}(BU(n))=E_\infty^{p,q}(Y_p)$.
Поскольку Y_p – конечный комплекс, то найдется $v_p\in U^*(Y_p)$, представляющий w. Найдем последовательность v_q, $q\geq p$, $v_q\in U^*(Y_q)$, таким образом, v_q представляет w и $v_q\big|_{Y_{q-1}}=v_{q-1}$.
Пусть такие v_q построены для $q\leq q_0$.
Возьмем Y_{q_0+1}; в силу конечности Y_{q_0+1}, выберем v_{q_0+1}, представляющий w. Тогда $v_{q_0}-v_{q_0+1}$ будут иметь большую фильтрацию и представлять некоторый элемент

$$[v_{q_0}-v_{q_0+1}]\in E_{p+1}^{**}(Y_{q_0}).$$

Пусть $z\in U^*(Y_{q_0+1})$ – представляющий элемент $[v_{q_0}-v'_{q_0+1}]$.
Тогда $v_q-v'_{q_0+1}$ будет иметь еще большую фильтрацию. Проводя индукцию, за конечное число шагов найдем такой элемент v_{q_0+1}, что

$$v_{q_0+1}\big|_{Y_{q_0}}=v_{q_0}.$$

Последовательность $\{V_q\}$, $q \geqslant P$ определит нам элемент из $U^*(BU(n))$, представляющий $w \in E_\infty^{**}(BU(n))$.

Лемма 2.9 доказана.

Используя лемму 2.9, найдем такой элемент $h_{\alpha_0} \in U^*(BU(n))$ который представляет $d_{\alpha_0} \in E^{**}(BU(n))$.

Тогда $f^*(h_{\alpha_0}) - z$ имеет большую фильтрацию, чем z. По индукции найдем последовательность $h_\alpha \in U^*(BU(n))$, фильтрация которых возрастает и $f^*(h) = \sum f^*(h_\alpha) = z$.

Теорема 2.8 доказана.

Определение 2.10. Функция, сопоставляющая каждому векторному комплексному расслоению ξ класс $c(\xi) \in U^*(X)$ такой, что для $f: X \to Y$ и расслоения ξ над Y имеет место равенство $c(f^*(\xi)) = f^* c(\xi)$, называется характеристическим классом расслоений. Аналогичное определение вводится и для произвольной теории когомологий.

Теорема 2.11. Множество характеристических классов n-мерных расслоений находится во взаимно однозначном соответствии с кобордизмами $U^*(BU(n))$.

Определение 2.12. Характеристический класс, соответствующий $\sigma_i \in U^{2i}(BU(n))$, называется i-м классом Черна.

Таким образом, если ξ - n-мерное расслоение над K, $f: K \to BU(n)$, то $\sigma_i(\xi) = f^*(\sigma_i)$.

Теорема 2.13. $\sigma_i(1) = 0$ при $i > 0$,

$$\sigma_i(\xi \oplus \eta) = \sum_{\alpha+\beta=i} \sigma_\alpha(\xi)\sigma_\beta(\eta).$$

Теорема 2.14. I-й класс Черна одномерного расслоения на многообразии X двойственен к подмногообразию коразмерности 2. И нормальный пучек - ограничение исходного.

Характеристические числа. Пусть задан характеристический класс c и квазикомплексное многообразие X, ξ - комплексное расслоение на X.

Положим

$$\bar{c}(X) = \langle c(\xi), [X] \rangle \in \Omega_U^* ;$$

если $\xi = \nu(X)$, то $\bar{c}(\nu(X)) = \bar{c}(X)$ и называется характеристическим числом многообразия.

Теорема 2.15. Характеристические числа многообразия X являются инвариантами бордизмов.

Доказательство. Пусть X - квазикомплексное многообразие,

$\dim X = n, \quad f: \nu(X) \to EU(N),$
$$\bar{f}: S^{N+n} \to MU(N)$$
– характеристическое отображение, $c \in U^*(BU(N))$.
Тогда нам нужно вычислить $f^*(c) \cap [X]$.

Элемент $[X] \in U_n(X)$ можно представить в двойственном виде как $D\varphi = [X]$, $\varphi \in U^{2N}(\nu(X), \partial\nu(X))$. Тогда
$$f^*(c) \cap [X] = (f^*(c) : \varphi) \cap [\nu(X), \partial\nu(X)].$$

Лемма 2.16. Существует элемент $\varphi_N \in U^{2N}(MU(N))$ такой, что $\varphi = f^*(\varphi_N)$.

Доказательство. Положим $\varphi_N = D[BU(N))$, что надо понимать как последовательность элементов на остовах, аппроксимирующих $BU(N)$. Тогда
$$f^*(\varphi_N) = D(f^{-1}(BU(N)) = D[X].$$
Таким образом,
$$f^*(c) \cap [X] = f^*(c\varphi_N) \cap [\nu(X), \partial\nu(X)].$$
Поскольку элемент $f^*(c) \cap [X]$ мы понимаем как бордизм точки, то
$$\pi_*(f^*(c) \cap [X]) = \pi_*(f_*(f^*(c\varphi_N) \cap [X])) =$$
$$= \pi_*(c\varphi_N \cap f_*[\nu(X), \partial\nu(X)],$$
где π – проекция в точку.
С другой стороны, легко заметить, что бордизм $f_*[\nu(X), \partial\nu(X)] = \bar{f}_*(S^{N+n})$, т.е. не зависит от гомотопии $\bar{f}$.

Теорема 2.15 доказана.

Более того, мы установили, что для многообразия X характеристическое число $\bar{c} = \langle c\varphi_N, \bar{f}^*(S^{N+n}) \rangle$.

Существует естественный аддитивный базис в группе всех характеристических классов.
Если $\omega = \{n_1, n_2, \dots, n_s\}$,
то пусть
$$\sum t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots t_s^{n_s} = P_\omega(t_1, \dots, t_s)$$
– симметричный многочлен, тогда положим, что $c_\omega \in U^*(BU(s))$ – такой класс, который переходит в $P_\omega(u_1, \dots, u_s)$ в

$$U^*(\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty)\ .$$

Предложение 2.17.

$$c_\omega(\xi \oplus \eta) = \sum_{(\omega_1,\omega_2)=\omega} c_{\omega_1}(\xi) c_{\omega_2}(\eta)\ .$$

Определение 2.18. Пусть задано отображение $\alpha : U^*(K) \to U^*(K)$ – естественное преобразование функторов. Тогда α называется когомологической операцией.

Пусть $\sigma : U^k(X) \to U^{k+2}(S^2X)$ – изоморфизм Тома. Операция α называется стабильной, если $\alpha(\sigma(x)) = \sigma(\alpha(x))$.

Предложение 2.19. Множество стабильных когомологических операций находится во взаимно однозначном соответствии с $U^*(MU)$.

Доказательство. Под $U^*(MU)$ понимается группа

$$U^*(MU) = \oplus U^k(MU)\ ,$$

$$U^k(MU) = \varprojlim U^{2N+k}(MU(N))\ ,$$

где

$$U^{2N+k}(MU(N)) \longleftarrow U^{2n+2+k}(MU(N+1))$$

определяется как композиция изоморфизма Тома

$$U^{2N+k}(MU(N)) \approx U^{2N+2+k}(S^2MU(N))$$

и отображения, индуцированного отображением

$$S^2MU(N) \longrightarrow MU(N+1)\ .$$

Пусть A_U – группа всех стабильных когомологических операций. Тогда всякий элемент $x \in U^k(MU)$ определяет элемент $\alpha(x) \in A_U$, задаваемый следующим правилом:
если

$$y \in U^j(X)\ ,$$

то

$$y : S^{2N-j}X \longrightarrow MU(N)\ .$$

Тогда

$$x_N \in U^{2N+k}(MU(N))$$

и

$$y^*(x_N) \in U^{2N+k}(S^{2N-j}X) \approx U^{k+j}(X)\ .$$

Положим $\alpha(x)y = y^*(x_N)$.

Ясно, что $\alpha(x)$ - стабильная операция.

Обратно, пусть $\alpha \in A_U^k$, тогда

$$\alpha(\varphi_N) \in U^{2N+k}(MU(N))$$

и $\{\alpha(\varphi_N)\}$ образует обратную последовательность.

Примеры операций, дающих, между прочим, базис в $U^*(\mathring{M}U)$: пусть $S^N K \xrightarrow{f} MU(N, \ )$ - отображение, определяющее кобордизм α, $\alpha \in U^{2N_1 - N}(K)$, тогда

$$f^*(C_\omega \varphi_{N_1}) \in U^{2N_1+2|\omega|}(S^N K) = U^{2N_1 - N + 2|\omega|}(K).$$

Положим

$$S_\omega(\alpha) = f^*(C_\omega \varphi_{N_1}).$$

Предложение 2.20. $S_\omega(ab) = \sum\limits_{\omega = (\omega_1, \omega_2)} S_{\omega_1}(a) S_{\omega_2}(b)$.

Предложение 2.21. Пусть X – квазикомплексное многообразие, $\mathbb{R}^{2N+n} \supset V \supset X$ - регулярная окреотность, $\varphi = D[X]$.

Тогда

$$c_\omega(X) = \varphi^{-1} S_\omega(\varphi),$$

где $\varphi: U^*(X) \to U^*(V, \partial V)$ - умножение на φ.

Предложение 2.22. Пусть $X \in U^*(pt)$, тогда

$$S_\omega(X) = \langle c_\omega(X), [X] \rangle.$$

Доказательство. Как и в предыдущем предложении, фиксируем $X \subset V \subset \mathbb{R}^{2N+n}$

Пусть $f: S^{2N+n} \to MU(N)$. Тогда $[f] \in U^*(pt) = \Omega_U^*$, или, более точно, $[f] \in U^n(pt) = U^{2N}(S^{2N+n})$. Легко понять, что

$$[f] = f^*(\varphi_N), \ \varphi_N \in U^{2N}(MU(N)).$$

Тогда

$$S_\omega[f] = f^*(S_\omega(\varphi_N)) = f^*(c_\omega(\varphi_N)) =$$

$$= c_\omega(X) \cdot f^*\varphi_N = \langle c_\omega(X) \cdot f^*\varphi_N, S^{2N+n} \rangle = \langle c_\omega(X), X \rangle.$$

Важным примером стабильных когомологических операций являются мультипликативные операции α, такие что

$$\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$$

для $x, y \in U^*(X)$. Ясно, что $\dim \alpha = 0$.

Теорема 2.23. Множество всех мультипликативных операций Φ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством формальных рядов

$$z(t)=t+\sum_{i>1}\alpha_i t^i,\quad z(t)\in\Omega_U[[t]],$$

т.е. $\alpha_i\in\Omega_U^{-2i}$, причем это соответствие $\varphi\to z^{\varphi}(t)$ таково, что для геометрического элемента $u\in U^2(\mathbb{C}P^{\infty})$

$$\varphi(u)=z^{\varphi}(u).$$

<u>Доказательство.</u> Пусть $\varphi\in\Phi$ – мультипликативная операция, $u\in U^2(\mathbb{C}P^{\infty})=\Omega_U[[u]]$.

Тогда $\varphi(u)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i u^i$, причем поскольку $u/_{\mathbb{C}P^1}$ есть изоморфизм Тома, то $\lambda_1=1$. Таким образом, сопоставим операции φ род

$$z^{\varphi}(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i t^i .$$

Обратно, если задана операция φ на элементе $u\in U^2(\mathbb{C}P^{\infty})$, то она однозначно продолжается до мультипликативной операции. В самом деле, пусть

$$f:\prod_{i=1}^{N}\mathbb{C}P_i^{\infty}\longrightarrow MU(N)\quad -$$

каноническое отображение,

тогда

$$f^*(\varphi_N)=u_1\dots u_N ,$$

где $u_i\in U^2(\mathbb{C}P_i^{\infty})$.

Следовательно, $f^*\varphi(\varphi_N)=\varphi(u_1)\dots\varphi(u_N)$ и $\varphi(\varphi_N)$ – определено однозначно.

Ясно, что последовательность $\{\varphi(\varphi_N)\}$ обратна, поскольку $\varphi(\sigma)=\sigma$, $\sigma\in U^2(\mathbb{C}P^1)$, т.е. определяет некоторую стабильную когомологическую операцию.

Проверка, что она мультипликативна, тривиальна.

Следующей важной конструкцией является построение характера Черна

$$ch: U^*(X)\longrightarrow H^*(X,\Omega_U\otimes Q),$$

которое обобщает характер Черна в K-теории.

<u>Теорема 2.24.</u> Существует и единственно естественное преобразование функторов

$$hc: U^*(X)\longrightarrow H^*(X,\Omega_U\otimes Q),$$

которое для точки $x=pt$ является индуцированным для вложения $Z\to Q$:

$$U(pt)=\Omega_U=\Omega_U\otimes Z\longrightarrow\Omega_U\otimes Q=H^*(pt,\Omega_U\otimes Q).$$

Более того, $ch \otimes Q$ – изоморфизм.

Доказательство. Пусть S – спектр сфер, $S=\{S^{2N}\}$, $f: S \to MU$ – вложение на первую клетку. Спектр S определяет некоторую теорию когомологий. Пусть $\pi_s^*(X)$ – стабильные когомологические группы.

Имеем отображение:

$$f: \pi_s^*(X) \longrightarrow U^*(X).$$

Поскольку $U^*(X)$ является Ω_U модулем, то f продолжается до отображения Ω_U -модулей:

$$f: \pi_s^*(X) \underset{Z}{\otimes} \Omega_U \longrightarrow U^*(X).$$

Можно также рассмотреть приведение по рациональным числам:

$$f: \pi_s^*(X) \otimes \Omega_U \otimes Q \longrightarrow U^*(X) \otimes Q .$$

Получаем две теории когомологий и естественное их преобразование.
Покажем, что при $X=pt$ f является изоморфизмом.
В самом деле,

$$\pi_s^{-n}(pt) = [S^{N+n}, S^N] = \pi_{N+n}(S^N)$$

– конечная группа при $n \neq 0$ и равна Z при $n=0$.
Таким образом,

$$\pi_s^*(pt) \otimes \Omega_U \otimes Q \approx \Omega_U \otimes Q.$$

Следовательно,

$$f: \pi_s^*(X) \otimes \Omega_U \otimes Q \longrightarrow U^*(X) \otimes Q$$

является изоморфизмом Ω_U -модулей для любого X.
С другой стороны, существует изоморфизм

$$g: \pi_s^*(X) \otimes Q \longrightarrow H^*(X;Q) ,$$

который продолжается до изоморфизма

$$g: \pi_s^*(X) \otimes \Omega_U \otimes Q \longrightarrow H^*(X, \Omega_U \otimes Q)$$

Ω_U – модулей. Положим

$$ch = g \circ f^{-1}.$$

Теорема 2.24 доказана.

ЛЕКЦИЯ 3

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ

Методы кобордизмов дают возможность находить инварианты, связанные с периодическими преобразованиями и неподвижными точками этих преобразований.

Пусть G - конечная группа, $f: M \times G \to M$ - действие (гладкое) группы G на многообразии M, т.е.

$$(mg)h = m(gh), \quad (m1) = m .$$

<u>Теорема 3.1.</u> Пусть $M^g = \{m : mg = m\}$.
Тогда M^g - гладкое подмногообразие, регулярная окрестность которого диффеоморфна векторному расслоению, на котором группа $G_g \subset G$, порожденная элементом g, действует линейно на каждом слое.

Пусть действие группы G согласовано с квазикомплексной структурой.

<u>Теорема 3.2.</u> В этом случае M^g - квазикомплексное многообразие, $\nu(M^g \subset M)$ - комплексное расслоение с комплексным действием группы G_g.

<u>Теорема 3.3.</u> Теоремы 3.1 и 3.2 справедливы и для M^H, $H \subset G$, $M^H = \{m : mh = m, h \in H\}$.

Метод кобордизмов в изучении неподвижных точек основан на идее Коннера и Флойда и заключается в следующем.

<u>Условие 3.4.</u> Пусть на квазикомплексном многообразии M действует группа G так, что $mg = m, g \neq e \Rightarrow mh = m \ \forall h$, т.е. орбиты либо свободны, либо состоят из одной точки.

<u>Предложение 3.5.</u> Если $G = \mathbb{Z}_p$, p - простое, тогда все точки удовлетворяют условию 3.4.

<u>Определение 3.6.</u> Скажем, что G - многообразие M, удовлетворяющее условию 3.4, бордантно нулю, если существует G-многообразие W такое, что $\partial W = M$.

Множество классов бордизмов обозначим через Ω_U^G.

<u>Предложение 3.7.</u> Пусть ξ - G- расслоение на X - с ослабленным действием на базе.
Тогда $\xi \approx \sum \xi_i \otimes N_i$, где ξ_i - обычное расслоение, N_i - модуль, соответствующий неприводимому представлению.

<u>Определение 3.8.</u> Пусть M - G-многообразие, M_α - связные компоненты M^G, $\nu(M_\alpha) = \sum \xi_{\alpha,i} \otimes N_i$.

$$\sum \dim \xi_{\alpha,i} \cdot \dim N_i + \dim M_\alpha = 2n = \dim M .$$

Предложение 3.9. Все представления N_i , участвующие в 3.7, таковы, что действие G на сфере $S \subset N_i$ свободно.

Предложение 3.10. Если M_1 бордантно M_2, то наборы

$$\bigcup_{\alpha,i} (M^1_\alpha, \xi^1_{\alpha,i}) \quad \text{и} \quad \bigcup_{\beta,i} (M^1_\beta, \xi_{\beta,i})$$

бордантны.

Определение 3.11. Пусть I – множество свободных неприводимых представлений группы G .

Обозначим через W^G группу бордизмов, построенных по многообразиям M , и расслоения $\xi_i, i \in I$ на нем.

Теорема 3.12. Определение 3.8 определяет гомоморфизм

$$\beta : \Omega^G_U \longrightarrow W^G .$$

Теорема 3.13. Существует естественное отображение

$$\alpha : W^G \longrightarrow U_*(BG) ,$$

такое, что последовательность

$$\Omega^G_U \xrightarrow{\beta} W^G \xrightarrow{\alpha} U_*(BG)$$

точна.

Пример 3.14. Существует ли $\mathbb{Z}_p$ -многообразие, имеющее ровно 1 неподвижную точку? Пусть M – такое многообразие.

Что такое $\beta(M)$? Это бордизм расслоений над базой $= pt$, ξ_j – векторные пространства $(j = 1, \dots, p-1)$, на которых группа $\mathbb{Z}_p$ действует умножением на число $x_j = e^{\frac{2\pi i}{p} j}$. Обозначим этот бордизм через ξ , тогда $\alpha(\xi)$ – линзовое пространство, $\alpha(\beta) \in U_*(B\mathbb{Z}_p)$.

Следовательно, чтобы ответить на этот вопрос, нужно уметь вычислять бордизмы линзовых пространств.

Пусть Δ , $\tilde{\Delta}$ – два n-мерных представления группы G , действующие на единичных сферах свободно.

Теорема 3.15. Существует такой класс кобордизма $\gamma(\Delta, \tilde{\Delta}) \in U^0(BG)$, что $\alpha(\Delta) = \gamma(\Delta, \tilde{\Delta}) \cap \alpha(\tilde{\Delta})$.

Если $\sigma_n(\Delta)$ – n-й класс Черна расслоения ξ_Δ , построенного на BG с помощью Δ , то $\sigma_n(\tilde{\Delta}) = \gamma(\Delta, \tilde{\Delta}) \alpha(\Delta)$.

Доказательство. Мы можем различным способом представить себе классифицирующее пространство BG .

Один из способов заключается в том, что рассматривается последовательность представлений Δ_n группы G в эвклидовых пространствах, причем таких, что на сферах единичного радиуса они определяют свободное действие (если такие имеются, разумеется).
Пусть V_n – соответствующие Δ_n пространства представления. Тогда представление $\bigoplus_{i=1}^{m} \Delta_i$ действует на $\bigoplus_{i=1}^{m} V_i$ и на сфере единичного радиуса:

$$S\left(\bigoplus_{i=1}^{m} V_i\right) = S_m .$$

Вложение $\bigoplus_{i=1}^{m} V_i \subset \bigoplus_{i=1}^{m+1} V_i$ индуцирует эквивариантное вложение и поэтому $S_m \subset S_{m+1}$,

$$BG = \varinjlim S_m/G = \varinjlim L_m .$$

Поскольку конструкция приводит к одному и тому же пространству BG независимо от последовательности представлений Δ_n, то мы можем для нашей задачи выбрать две специальные последовательности:

1) $\Delta_n^1 = \Delta$,

2) $\Delta_n^2 = \{\tilde{\Delta}^0, n=1; \Delta, n>1\}$.

Соответствующие пространства сфер будем обозначать через S_m^2, S_m^1 соответственно. Существует естественное эквивариантное отображение

$$\begin{array}{ccc} S_m^1 & \subset & S_m^2 \\ \cap & & \cap \\ S_{m+1}^1 & \subset & S_{m+1}^2 , \end{array}$$

при этом

$$\begin{array}{ccc} L_m^1 & \overset{\varphi}{\subset} & L_m^2 \\ \cap & & \cap \\ L_{m+1}^1 & \overset{\varphi}{\subset} & L_{m+1}^2 \end{array}$$

индуцируют гомотопическую эквивалентность

$$L_\infty^1 \longrightarrow L_\infty^2 .$$

Фиксируем некоторое число m. Тогда вложение $L_1^1 \subset L_1^2$ определяет бордизм $\alpha(\tilde{\Delta})$, двойственный некоторому классу кобордизма $\gamma_1 \in U^0(L_1^2)$.
Рассмотрим теперь вложения

$$L_2^1 \overset{\varphi}{\subset} L_2^2 .$$

Ясно, что L_1^1 равно пересечению

$$L_1^2 \cap \varphi(L_2^1),$$

т.е. по двойственности Пуанкаре

$$L_1^1 = L_1^2 \cap D\varphi(L_2^1) = L_1^2 \cap \gamma_2,$$

$$\gamma_2 \in U^0(L_2^2)$$

и т.д. Если $\gamma_m = D(\varphi L_m^1) \in U^0(L_m^2)$,

то $L_1^1 = L_1^2 \cap \gamma_m$.

Покажем, что $\gamma_m / L_n^2 = \gamma_n$.

В самом деле, ограничение кобордизма ξ на подмногообразие Z – это тоже самое, что пересечение Z и $D\xi$.

Но $D\gamma_m = \varphi L_m^1$, $L_n^2 \cap \varphi L_m^1 = \varphi L_n^1$.

Вторая часть теоремы:

Пусть $\tilde{\Delta}$ – произвольное n-мерное представление. Тогда $\sigma_n(\tilde{\Delta})$ можно представить следующим образом. Пусть

$$S_m^1 \overset{\psi}{\supset} S_{m-1}^2$$

– вложение по последним слагаемым.

Тогда нормальное расслоение

$$L_{m-1}^2 \overset{\psi}{\subset} L_m^1$$

изоморфно $\tilde{\Delta}$ и

$$L_m^1 \xrightarrow{\pi} (L_{m-1}^2)^{\tilde{\Delta}}$$

– отображение на комплекс Тома.

Пусть $\mathcal{U}(\tilde{\Delta})$ – класс Тома.

Известно, что $\mathcal{U}(\tilde{\Delta}) / L_{m-1}^2 = \sigma_n(\tilde{\Delta})$,

следовательно, $\pi^*(\mathcal{U}(\tilde{\Delta})) / L_{m-1}^2 = \sigma_n(\tilde{\Delta})$.

Таким образом,

$$\sigma_n(\tilde{\Delta}) = D(L_{m-1}^2), \quad L_{m-1}^2 \overset{\psi}{\subset} L_m^1 .$$

Это значит, что

$$L_{m-1}^2 = \sigma_n(\tilde{\Delta}) \cap L_m^1 = \sigma_n(\Delta) \cap L_m^2 =$$

$$=\sigma_n(\tilde{\Delta})\cdot\gamma_m\cap L^2_m .$$

Значит, $\sigma_n(\Delta)=\sigma_n(\tilde{\Delta})\gamma_m$.

Поэтому и на BG

$$\sigma_n(\Delta)=\sigma_n(\tilde{\Delta})\gamma .$$

Следствие: $\alpha(\tilde{\Delta}+k\Delta)=\alpha((k+1)\Delta)\cap\gamma$.

Пример. Группа $\mathbb{Z}_p$, ρ_j - одномерные представления, $1\le j\le p-1$, соответствующие умножению на $e^{\frac{2\pi i}{p}j}$, тогда $\gamma(\rho_j,\rho_1)$ можно найти следующим образом.

Пусть ξ - расслоение Хопфа на L^∞_p, тогда $\rho_j=\xi^j$.

Поэтому

$$\sigma_1(\rho_j)=\sigma_1(\xi^j)=\langle u\rangle=\sigma_1(\rho_1)\gamma(\rho_j,\rho_1)$$

$$\gamma(\rho_j,\rho_1)=\frac{\langle u\rangle_j}{u} .$$

В $U_*(L^\infty_p)$ имеется аддитивный базис $\alpha(k\rho_1)$. Поэтому $\alpha(\rho_1)$ можно выразить через него.

ЛЕКЦИЯ 4

ФОРМАЛЬНЫЕ ГРУППЫ, ФОРМАЛЬНАЯ ГРУППА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ КОБОРДИЗМОВ

С этой лекции мы приступаем к вычислению кольца бордизмов квазикомплексных многообразий Ω_U . Впервые это кольцо было вычислено С.П.Новиковым и Дж.Милнором в 1960 г. Они провели вычисление методами гомотопической топологии, используя теорему Тома о том, что $\Omega_U\simeq\pi^s(MU)$. В конце 1970 г. появилась работа Д.Квиллена, в которой было дано вычисление кольца Ω_U методами, собственно, теории кобордизмов. Вычисление Д.Квиллена основано на том, что геометрия кобордизмов тесно связана с алгеброй формальных групп Ли. Объяснению последней фразы, фактически, будет посвящена настоящая лекция.

Начнем с необходимых понятий теории формальных групп.

Пусть K - коммутативное кольцо с единицей и $K[[x,y,z,\dots]]$ - кольцо формальных степенных рядов над K . В наших основных примерах K будет либо кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$, либо $\mathbb{Z}_p=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, либо поле рациональных чисел Q , либо $\mathbb{Z}[a_1,a_2,\dots]$.

Рассмотрим формальный ряд $F(x,y)=\sum \alpha_{i,j} x^i y^j$.

Определение 4.1. Формальный ряд $F(x,y)$ задает закон умножения в формальной группе над K, если

1° $F(0,y)=y$,

2° $F(x,y)=F(y,x)$,

3° $F(x,F(y,z))=F(F(x,y),z)$,

4° $\exists$ ряд $\varphi(x)$, такой, что $F(x,\varphi(x))=0$.

Сразу нужно оговориться, что равенство двух формальных рядов понимается просто как равенство коэффициентов при соответствующих мономах.

Из аксиомы I° следует, что ряд $F(y,z)$ можно подставить в ряд $F(x,t)$ вместо переменной t и получить ряд от 3-х переменных $F(x,F(y,z))$.

Важное замечание. Пусть $\varphi: K \to L$ – кольцевой гомоморфизм. Из аксиом I° – 4° непосредственно следует, что если ряд $f(x,y)=\sum \alpha_{i,j} x^i y^j$ является формальной группой над K, то формальный ряд $\sum \varphi(\alpha_{i,j}) x^i y^j$ задает формальную группу над L. Эту новую группу мы будем обозначать через $\varphi_*(f(x,y))$. Отметим теперь, что аксиома 4° легко следует из аксиомы I° (упражнение), более сложно показать, что аксиома 2° следует для колец без кручения из аксиомы 3° (лемма Лазара).

Примеры: $F_1(x,y)=x+y$, $F_2(x,y)=x+y+\lambda xy,\ \lambda\in K$.

Аддитивная группа; Мультипликативная группа

Более сложный пример. Пусть $\varphi(x)=x+\sum \alpha_i x^i,\ \alpha_i\in K$, тогда $\exists$ – ряд $\varphi^{-1}(x)$, такой, что $\varphi\varphi^{-1}(x)=x$.
Положим

$$f_3(x,y)=\varphi^{-1}(\varphi(x)+\varphi(y)).$$

Рассмотрим теперь основной для нас пример формальной группы над кольцом Ω_U.

Как было показано на предыдущей лекции, $U^*(\mathbb{C}P^\infty\times\mathbb{C}P^\infty)=\Omega_U[[u,v]]$, где классы u, v имеют простой геометрический смысл, а именно: класс кобордизмов $u\in U^2(\mathbb{C}P^N)$ есть класс, двойственный классу бордизмов гиперплоскости $\mathbb{C}P^{N-1}\to\mathbb{C}P^N$, а $U^*(\mathbb{C}P^\infty)\overset{\mathrm{def}}{=}\varprojlim U^*(\mathbb{C}P^N)$.

Напоминание! Так как $\mathbb{C}P^\infty$ есть классифицирующее пространство для одномерных комплексных расслоений $\xi\to X$, то можно определить характеристический класс расслоений $\sigma_1(\xi)$ следующим образом. Пусть $f:X\to\mathbb{C}P^\infty$ такое, что $f^*\eta=\xi$, где η - каноническое расслоение над $\mathbb{C}P^\infty$. Положим $\sigma_1(\xi)\in\mathcal{U}^2(x)$ равным f^*u. В случае, если база X - квазикомплексное многообразие, то $\sigma_1(\xi)$ имеет простой геометрический смысл: $\sigma_1(\xi)$ - это класс, двойственный к следующему классу бордизмов. Нужно заменить f гомотопным ему вложением $X\subset\mathbb{C}P^N$, $N>\dim X$, и взять пересечение X с гиперплоскостью в $\mathbb{C}P^N$.

Так как двойственность Пуанкаре для многообразия X устанавливает изоморфизм между бордизмами и кобордизмами X, то для одномерных расслоений над многообразиями их первый класс можно (и полезно) представлять себе геометрически.

Итак, рассмотрим одномерное расслоение $\eta_1\otimes\eta_2\to\mathbb{C}P^\infty\times\mathbb{C}P^\infty$, где η_1 и η_2 - канонические расслоения над сомножителями, и его характеристический класс $\sigma_1(\eta_1\otimes\eta_2)$. Ввиду изоморфизма $\mathcal{U}^*(\mathbb{C}P^\infty\times\mathbb{C}P^\infty)=\Omega_U[[u,v]]$, элемент $\sigma_1(\eta_1\otimes\eta_2)\in\mathcal{U}^2(\mathbb{C}P^\infty\times\mathbb{C}P^\infty)$ можно представить в виде формального ряда:

$$\sigma_1(\eta_1\otimes\eta_2)=f(u,v)=\sum\alpha_{i,j}u^iv^j.$$

<u>Замечание.</u> Далее, в формальных рядах, возникающих в кобордизмах, мы переменные будем обозначать через u, v, w, а в абстрактных рядах переменные по-прежнему будем обозначать через x, y, z.

Проверим, что ряд $f(u,v)$ задает закон умножения над кольцом Ω_U.

1° $f(u,0)=u$.

Рассмотрим вложение $\lambda:\mathbb{C}P^\infty\subset\mathbb{C}P^\infty\times\mathbb{C}P^\infty$ на первый сомножитель.

Тогда $\lambda^*(\eta_1\otimes\eta_2)=\eta_1$ и

$$\sigma_1(\lambda^*(\eta_1\otimes\eta_2))=\sigma_1(\eta_1)=u$$

$$\lambda^*\sigma_1(\eta_1\otimes\eta_2)=\sum\alpha_{i,j}(\lambda^*u)^i(\lambda^*v)^j=f(u,0),\quad\text{т.к. } \lambda^*v=0.$$

Для доказательства свойств 2°, 3°, 4° заметим, что расслоения $\eta_1\to\mathbb{C}P^\infty$, $\eta_2\to\mathbb{C}P^\infty$ можно отождествить с расслоениями $\eta_1\otimes 1$ и $1\otimes\eta_2$ над $\mathbb{C}P^\infty\times\mathbb{C}P^\infty$, где 1 - одномерное тривиальное расслоение. Поэтому свойства 2°, 3°, 4° следуют из следующих известных равенств для векторных расслоений: $\eta_1\otimes\eta_2=\eta_2\otimes\eta_1$, $(\eta_1\otimes\eta_2)\otimes\eta_3=\eta_1\otimes\eta_2\otimes\eta_3$, $\eta_1\otimes\bar\eta_1=1$, где $\bar\eta_1$ - расслоение, комплексно сопряженное с расслоением η_1.

Итак, ряд $\sigma_1(\eta_1 \otimes \eta_2) = f(u,v)$ задает формальную группу над Ω_U, эта формальная группа называется формальной группой геометрических кобордизмов ("г.г.к.").

Вывод формулы для г.г.к.

Рассмотрим вложение

$\varphi : \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^m \to \mathbb{C}P^N$, где $N = (m+1)(n+1)-1$,

заданное следующей формулой. Пусть $(t_0, t_1, \dots, t_n)$, $(z_0, z_1, \dots, z_m)$ - однородные координаты точки $(a,b) \in \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^m$. Обозначим через $(u_{0,0}, u_{0,1}, \dots, u_{i,j}, \dots)$, $0 \le i \le n$, $0 \le j \le m$, однородные координаты в $\mathbb{C}P^N$. Тогда

$$\varphi(a,b) = (t_0 z_0, t_0 z_1, \dots, t_i z_j, \dots)$$

(Отображение φ известно в алгебраической геометрии как отображение Сегре).

Ограничение универсального (Хопфовского) расслоения $\eta \to \mathbb{C}P^\infty$ на конечномерное подпространство $\mathbb{C}P^k \subset \mathbb{C}P^\infty$ мы для всех k будем также обозначать символом η.

Рассмотрим вложение $\lambda_1 : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^m$, $\lambda_1 a = (a, b_0)$, где $b_0 = (1, 0 \dots 0)$.

Композиция отображений $\varphi\lambda_1$ совпадает со стандартным вложением $\mathbb{C}P^n \subset \mathbb{C}P^N$, следовательно $\varphi^* \lambda_1^* \eta = \eta$.

Аналогично и для отображения $\lambda_2 : \mathbb{C}P^m \to \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^m$, $\lambda_2(b) = (a_0, b)$, где $a_0 = (1, 0, \dots)$. Из свойств тензорного произведения расслоений теперь легко следует, что

$$\varphi^* \eta = \eta_1 \otimes \eta_2 .$$

Имеем

$$(*) \qquad \varphi^* \sigma_1(\eta) = \sigma_1(\eta_1 \otimes \eta_2) = \sum_{\substack{i=\overline{0,n} \\ j=\overline{0,m}}} \alpha_{i,j} u^i v^j .$$

Из геометрической интерпретации характеристического класса σ_1, следует, что $D\sigma_1(\eta_1 \otimes \eta_2) = [H_{n,m}]$, где $[H_{n,m}]$ - класс бордизмов алгебраического многообразия $H_{n,m}$, задаваемого в $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^m$ уравнением $\sum_{i=0}^{z} t_i z_i = 0$, $z = \min(n,m)$.

Многообразие $H_{n,m}$ получается пересечением многообразия $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^m \subset \mathbb{C}P^N$ гиперплоскостью $\sum u_{i,j} = 0$.

Применим оператор двойственности Пуанкаре многообразия $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^m$ к ряду $\sum \alpha_{i,j} u^i v^j$, учитывая, что D определяет гомоморфизм Ω_U -модулей

$$D: U^q(\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^m) \to U_{2(n+m)-q}(\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^m)$$

и что $Du = [\mathbb{C}P^{n-1} \times \mathbb{C}P^{m-1}]$, $Dv = [\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^{m-1}]$ и

$D(A \cdot B) = DA \cap DB$, а A и $B \in U^q(\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^m)$.

Из (*) получаем соотношение в группе $U_{2(n+m-1)}(\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^m)$

$$[H_{n,m}] = [\mathbb{C}P^{n-1} \times \mathbb{C}P^m] + [\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^{m-1}] + \sum \alpha_{i,j} [\mathbb{C}P^{n-i} \times \mathbb{C}P^{m-j}].$$

Рассмотрев проекцию $\varepsilon: \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^m \longrightarrow$ (точка), мы получаем соотношение в кольце $\Omega_U = U_*$(точка):

$$(**) \qquad [H_{n,m}] = [\mathbb{C}P^{n-1}][\mathbb{C}P^m] + [\mathbb{C}P^n][\mathbb{C}P^{m-1}] + \sum \alpha_{i,j} [\mathbb{C}P^{n-i}][\mathbb{C}P^{m-j}].$$

Умножая обе части соотношения (*,*) на $u^n v^m$ и суммируя по всем $n \geq 0$, $m \geq 0$, получаем формулу

$$\sum_{\substack{n \geq 0 \\ m \geq 0}} [H_{n,m}] u^n v^m = \left(\sum \alpha_{i,j} u^i v^j\right) \mathbb{C}P(u) \mathbb{C}P(v),$$

где $\mathbb{C}P(u) = 1 + \sum_{n \geq 1} [\mathbb{C}P^n] u^n$.

Итак, мы вывели формулу для ряда $f(u,v) = \sigma_1(\eta_1 \otimes \eta_2)$:

$$f(u,v) = \frac{\sum_{n \geq 0, m \geq 0} [H_{n,m}] u^n v^m}{\mathbb{C}P(u) \cdot \mathbb{C}P(v)}.$$

Замечание. Многообразия $H_{n,m}$ в топологической литературе называются многообразиями Милнора, который впервые указал их роль в описании кольца Ω_U.

Рассмотрим формальный ряд $f(x,y) = x + y + \sum_{i \geq 1, j \geq 1} a_{i,j} x^i y^j$ над градуированным кольцом $A = Z[a_{i,j}]$, $i \geq 1, j \geq 1$, $\deg a_{i,j} = i+j-1$.

Положим $\Gamma f(x,y) = f(f(x,y),z) - f(x, f(y,z)) = \sum a_{i,j,k} x^i y^j z^k \in A[[x,y,z]]$.

Обозначим через Λ факторкольцо кольца A по идеалу, порожденному элементами $\{a_{i,j,k}\}$ и $\{a_{i,j} - a_{j,i}\}$. Так как $a_{i,j,k}$ – однородный многочлен от $a_{n,m}$, то кольцо Λ является градуированным.

Рассмотрим проекцию $\pi: A \to \Lambda$ и положим $\pi(a_{i,j}) = A_{i,j}$.

Л е м м а 4.2. а) Формальный ряд $F(x,y) = x + y + \sum A_{i,j} x^i y^j$ над кольцом Λ является формальной группой над кольцом Λ.

б) Формальная группа $F(x,y)$ над Λ является <u>универсальной</u> формальной группой на категории коммутативных колец с единицей в том смысле, что для любой формальной группы $f(x,y)$ над любым коммутативным кольцом K с 1 существует единственный кольцевой гомоморфизм $\varphi:\Lambda\to K$ такой, что $\varphi_* F(x,y)=f(x,y)$.

Доказательство леммы 4.2 непосредственно следует из построения формальной группы $F(x,y)$ и определений.

<u>Определение 4.3.</u> Две формальные группы $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ над кольцом K называются сильно изоморфными, если существует формальный ряд $\varphi(x)=x+\sum\varphi_i x^{i+1}$, $\varphi_i\in K$ такой, что $\varphi f_1(x,y)=f_2(\varphi(x),\varphi(y))$, т.е. если существует замена переменных, переводящая группу f_1 в f_2.

<u>Определение 4.4.</u> Логарифмом формальной группы $f_1(x,y)$ (если он существует) называется ряд $g(x)=x+\sum d_i x^{i+1}$, задающий сильный изоморфизм группы $f_1(x,y)$ и аддитивной группы $x+y$.

Л е м м а 4.5. (Лазар) Для любой формальной группы $f(x,y)$ над $K\otimes Q$, где Q – поле рациональных чисел и K – произвольное кольцо, существует логарифм.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим в кольце $K\otimes Q[[x,y,z]]$ дифференциал $\omega(x)=\varphi(x)dx$. Дифференциал $\omega(x)$ называется инвариантным относительно сдвигов на группе $f(x,y)$, если $\omega(x)=\omega(f(x,z))=$

$=\varphi(f(y,z))df(x,z)$, где $df(x,z)=\dfrac{\partial f(x,z)}{\partial x}dx$.

Положим $\psi(x)=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Big|_{y=0}$ и вычислим $\psi(f(x,z))$.

Имеем
$$\psi(f(x,z))=\frac{\partial f(f(x,z),y)}{\partial y}\Big|_{y=0}=\frac{\partial f(f(x,y),z)}{\partial y}\Big|_{y=0}=$$
$$=\frac{\partial f(f(x,y),z)}{\partial f(x,y)}\,\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Big|_{y=0}=\frac{\partial f(x,z)}{\partial x}\psi(x).$$

Положим $\varphi(x)=\dfrac{1}{\psi(x)}$ (ряд $\psi(x)$ начинается с 1), имеем:
$$\varphi(f(x,z))df(x,z)=\frac{1}{\frac{\partial f(x,z)}{\partial x}\cdot\psi(x)}\cdot\frac{\partial f(x,z)}{\partial x}=\varphi(x)dx.$$

Положим $g(x)=\int_0^x\varphi(x)dx$, получаем
$$g(f(x,z))=g(x)+C,$$
при $x=0$
$$g(z)=g(0)+C\Rightarrow C=g(z),$$ т.е.
$$g(f(x,z))=g(x)+g(z).$$

Лемма доказана.

Мы ввели универсальную формальную группу

$$F(x,y)=x+y+\sum A_{i,j}x^i y^j$$

над кольцом Λ.

Пусть $G(x)=x+\sum A_i x^{i+1}$ – логарифм группы $F(x,y)$, как показано в лекции 4, $\dfrac{dG(x)}{dx}=\dfrac{1}{\left.\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0}}$.

Л е м м а 5.1. Кольцо $\Lambda\otimes Q$ изоморфно кольцу полиномов $Q[y_1,\dots,y_n,\dots]$, причем изоморфизм можно установить при помощи гомоморфизма $\varphi: Q[y_1,\dots,y_n,\dots]\to\Lambda\otimes Q$, $\varphi(y_i)=A_i$.

Доказательство. Непосредственно из определения дифференцирования в кольце формальных рядов $K[[x,y]]$ следует, что если $\varphi:\Lambda[[x,y]]\to K[[x,y]]$ – кольцевой гомоморфизм, задаваемый кольцевым гомоморфизмом $\varphi:\Lambda\to K$, $\varphi(x)=x$, $\varphi(y)=y$, то для любого ряда $p(x,y)\in\Lambda[[x,y]]$ имеет место формула $\frac{\partial}{\partial y}(\varphi_*(p(x,y)))=\varphi_*(\frac{\partial}{\partial y}p(x,y))$. Напомним, что если $p(x,y)=\sum p_{i,j}x^i y^j$, то $\varphi_*(p(x,y))=\sum\varphi(p_{i,j})x^i y^j$. Рассмотрим теперь над кольцом $Q[y_1,\dots,y_n,\dots]$ формальный ряд $q(x)=x+\sum_{i=1}^{\infty}y_i x^{i+1}$ и формальную группу $f(x,y)=q^{-1}(q(x)+q(y))$. В виду универсальности формальной группы $F(x,y)$ существует единственный кольцевой гомоморфизм $\varphi:\Lambda\to Q[y_1,\dots,y_n,\dots]$, такой, что $\varphi_*(F(x,y))=f(x,y)$. Так как логарифмом группы $f(x,y)$ является ряд $q(x)$, то из формулы $\frac{dq(x)}{\partial x}=\left.\frac{1}{\frac{\partial x(x,y)}{\partial y}}\right|_{y=0}$ получим, что $\varphi_* G(x)=q(x)$, т.е. $\varphi(A_i)=y_i$.

С другой стороны, из формулы $F(x,y)=G^{-1}(G(x)+G(y))$ следует, что кольцо $\Lambda\otimes Q$ мультипликативно порождается элементами A, т.е. $\Lambda\otimes Q=Q[A_1,\dots,A_n,\dots]$.

Лемма доказана.

Теорема (Лазар). Кольцо Λ изоморфно градуированному кольцу полиномов $Z[\alpha_1,\dots,\alpha_n,\dots]$, $\deg\alpha_i=i$, от бесконечного числа образующих α_i.

Доказательство. Пусть $\tilde\Lambda$ – идеал в Λ, состоящий из элементов, разложимых в произведение не менее двух элементов положительной размерности. Положим $\Lambda_1=\Lambda/\tilde\Lambda$. Рассмотрим над Λ_1 формальную группу $f_1(u,v)=u+v+\sum\pi_1(A_{i,j})u^i v^j$, где $\pi_1:\Lambda\to\Lambda_1$ –

проекция. Имеем $f_1(u,v)=u+v+\sum_{n=2}^{\infty} h_n(u,v)$, где $h_n(u,v)$ – однородный полином степени n. Из условия ассоциативности группы $f_1(u,v)$ получаем, что для любого $n\geq 2$ должно выполняться тождество

$$(*) \qquad h_n(v,w)-h_n(u+v,w)+h_n(u,v+w)-h_n(u,v)=0 .$$

Из коммутативности группы $f_1(u,v)$ следует также, что

$$(**) \qquad h_n(u,v)=h_n(v,u) .$$

Положим, что $\partial h_n(u,v)=h_n(v,w)-h_n(u+v,w)+h_n(u,v+w)+h_n(u,v)$

и

$$m_n=\begin{cases} 1, & \text{если } n\neq p^q, \\ p, & \text{если } n=p^q \end{cases} \quad \text{для некоторого } q .$$

Так как Н.О.Д. $\{C_n^k\}_{k=1}^{n-1}=m_n$, то над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ определены однородные полиномы степени n:

$$C_n(u,v)=\frac{1}{m_n}((u+v)^n-u^n-v^n) .$$

Пусть K – коммутативное кольцо с единицей и $h_n(u,v)$ – однородный полином степени n, такой, что

$1^\circ \quad \partial h_n(u,v)=0$,

$2^\circ \quad h_n(u,v)=h_n(v,u)$.

Положим

$$h_n(u,v)=\sum_{i=0}^{n} a_{i,n-i}\, u^i v^{n-i} .$$

Из условия $\partial h_n(u,v)=0$ следует, что

$$a_{0,n}=a_{n,0}=0 ,$$

$$C_{i+j}^j a_{i+j,k}=C_{i+k}^j a_{i,i+k} \quad \text{для } i+j+k=n,\ 1\leq i,k\leq n-1 .$$

Положим: 1) $i=1,\ j=\ell-1,\ k=n-\ell$,

$$(\star) \qquad \ell a_{\ell,n-\ell}=C_{n-1}^{\ell-1}a_{1,n-1} ,\quad 1\leq \ell\leq n .$$

2) $i=\ell,\ j=1,\ k=n-\ell-1$,

$$(\star\star) \qquad (\ell+1)a_{\ell+1,n-\ell-1}=(n-\ell)a_{\ell,n-2} ,\quad \ell\leq n-2 .$$

Лемма 5.2. В кольце $K\otimes Q$ существует элемент a_0, такой, что

$$h_n(u,v)=a_0 C_n(u,v).$$

Доказательство. По равенству $(\bigstar)$ $a_{\ell,n-\ell}=\frac{1}{\ell}C_{n-1}^{\ell-1}a_{1,n-1}=$ $=\frac{1}{n}C_n^{\ell}a_{1,n-1}$. Следовательно, $h_n(u,v)=a_0 C_n(u,v)$, где $a_0=\frac{m_n}{n}a_{1,n-1}$.

Лемма 5.3. Для любого простого $p\geq 2$ и $n\geq 2$ в кольце $K\otimes\mathbb{Z}_p$ существует элемент a_p, такой, что

$$h_n(u,v)=a_{p,n}C_n(u,v).$$

Доказательство. 1) $n=p$.

Рассмотрим однородный полином

$$p(u,v)=h_p(u,v)-a_{1,p-1}C_p(x,y)=\sum_{i=1}^{p-1}b_{i,p-i}u^i v^{p-i}.$$

Ясно, что $b_{1,p-1}=b_{p-1,1}=0$,

$$\partial p(u,v)=\partial h_p(u,v)-a_{1,p-1}\partial C_p(x,y)=0.$$

Следовательно, $\ell b_{\ell,p-\ell}=C_{p-1}^{\ell-1}b_{1,n-1}=0,\ 1\leq\ell\leq p-1$, т.е. $p(u,v)=0$.

2) $n=p^s q,\ q\neq 0 \bmod p,\ s>1$.

По $(\bigstar\bigstar)$ получаем

$$(\ell+1)a_{\ell+1,n-\ell-1}=(n-\ell)a_{\ell,n-\ell},\quad 1\leq\ell\leq q-2,$$

положим

$$\ell=p-1\Rightarrow a_{p-1,n-p+1}=0,$$
$$\ell=p-2\Rightarrow a_{p-2,n-p+2}=0,$$
$$\ell=1\Rightarrow a_{1,n-1}=0.$$

Применим $(\bigstar)$:

$\ell a_{\ell,n-\ell}=C_{n-\ell}^{\ell-1}a_{1,n-1}\Rightarrow a_{\ell,n-\ell}=0$, если $\ell\neq 0 \bmod p$.

Таким образом, $p_n(u,v)=p_n^1(u^p,v^p)$,

где $p'(x,y)=\sum a_{pk,n-pk}x^k y^{n_1-k},\ n_1=\frac{n}{p}$.

Вычислим $\partial p'(x,y)$.

Имеем

$$\partial p'(x,y,z)=p'(y,z)-p'(x+y,z)+p'(x,y+z)-p'(x,y).$$

Положим $x=u^p,\ y=v^p,\ z=w^p$, тогда

$$\partial p'(u^p, v^p, z^p) = p'(v^p, w^p) - p'(u^p+v^p, w^p) + p'(u^p, v^p+w^p) - p'(u^p, v^p).$$

Используя теперь сравнение $(u^p + v^p) \equiv (u+v)^p \bmod p$, получаем $\partial p'(u^p, v^p, z^p) = \partial p(u,v,z) = 0$.

Так как $\deg p' = n_1 = \frac{n}{p}$, то равенство $\partial p' = 0$ позволяет свести классификацию полиномов $p_n(u,v)$ только к случаю $n \not\equiv 0 \bmod p$.

3) $n \not\equiv 0 \bmod p$. В этом случае коэффициент при uv^{n-1} в полиноме $C_n(u,v)$ не равен нулю. Следовательно, существует a такое, что $p_n(u,v) - aC_n(u,v)$ имеет коэффициент при uv^{n-1}, равный 0.
Применяя (★), получаем $b_{2,n-\ell} = 0$, если $\ell \not\equiv 0 \bmod p$.
Применяя (★★), получаем, что $b_{kp, n-kp} = 0$, если $kp \leq n-2$.
Остается случай $kp = n-1$, но в этом случае $b_{n-1,1} = b_{1,n-1} = 0$.

Лемма 5.3 доказана.

Из лемм 5.2 и 5.3 получаем важное следствие.

Пусть $\Lambda_1 = \sum \Lambda_1^n$. Для любого n имеет место изоморфизм $\Lambda_1^n \cong \mathbb{Z}$.

Доказательство следует из того, что кольцо Λ_1 порождается коэффициентами закона умножения $f_1(u,v)$.

Пусть $\pi : \Lambda \to \Lambda_1$ – проекция и a_n – образующие групп $\Lambda_1^n \simeq \mathbb{Z}$. Зафиксируем элементы b_n, такие, что $\pi(b_n) = a_n$, и рассмотрим кольцевой гомоморфизм $\varphi : Z[x_1, \dots, x_n, \dots] \to \Lambda$, $\varphi(x_i) = b_i$. Ясно, что φ – эпиморфизм. Мономорфность φ следует из леммы 5.1.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые дополнительные факты об универсальной формальной группе

$$F(x,y) = x + y + \sum A_{i,j} x^i y^j$$

над Λ.

Заметим сначала, что если Λ' – такое кольцо, что $\Lambda \subset \Lambda'$, и над Λ' группа $F(x,y)$ сильно изоморфна линейной группе $x+y$, то Λ не является аддитивно прямым слагаемым в Λ'; из формулы $F(x,y) = G^{-1}(G(x) + G(y))$ следует, например, что $\exists$ элемент $b \in \Lambda'$, но $b \notin \Lambda$, такой, что $2b = A_{1,1}$.

<u>Теорема 5.4.</u> Над кольцом $B = Z[t, b_1, \dots, b_n, \dots]$, $\deg t = \deg b_1 = 1$, $\deg b_n = n$, существует формальная группа $f(x,y)$ такая, что

I) гомоморфизм $\varphi : \Lambda \to B$, соответствующий формальной группе $f(x,y)$, т.е. $f(x,y) = \varphi_* F(x,y)$, является мономорфизмом на аддитивно прямое слагаемое;

2) $f(x,y)$ сильно изоморфна мультипликативной группе $x+y+txy$.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим ряд $g(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+1}$ и положим $f(x,y)=g^{-1}(g(x)+g(y)+tg(x)g(y))$. Нужно доказать, что для группы $f(x,y)$ выполняются условия 1), т.к. 2) выполняется по построению.

Кольцо $\mathcal{J}m\,\varphi$ совпадает с подкольцом, порожденным коэффициентами ряда $f(x,y)$, в B.

Вычислим $\mathcal{J}m\,\varphi \otimes Z_p \subset B \otimes Z_p$

Пусть g - идеал, порожденный элементами $B\otimes Z_p$, разложимыми в произведение не менее двух элементов положительной степени, и $\pi: B \to B_1 = B\otimes Z_{p/g}$ - проекция. Вычислим $\pi_* f(x,y)$.

Заметим, что если $g^{-1}(x)=x+\sum \beta_n x^{n+1}$, а $g(x)=x+\sum b_n x^{n+1}$, то $\pi(\beta_n)=-b_n$.

Имеем

$$\pi_* f(x,y)=\pi_*(g(x))+\pi_* g(y)+txy-\sum b_n (x+y)^{n+1}=$$

$$=x+y+txy-\sum b_n ((x+y)^{n+1}-x^{n+1}-y^{n+1}),$$

таким образом, для любого $(n+1)\neq p^k$ в кольце $\mathcal{J}m\,\varphi\otimes Z_p$ существуют элементы λ_n такие, что

$$\pi(\lambda_n)=b_n,\ n\neq p^k-1,\ n\neq 1,\ \pi(\lambda_1)=t-2b_1.$$

Рассмотрим элемент $[x]_p^f$ в группе $f(x,y)$;

$[x]_p^f \in (\mathcal{J}m\,\varphi\otimes Z_p)[[x]]$ - формальный ряд, задающий p-тую степень элемента в группе $f(x,y)$.

Вычислим ряд $[x]_p^f$. Пусть $\mu(x,y)=x+y+txy$ - мультипликативная группа и $[x_p]^\mu$ - p-тая степень элемента x в ней. По определению формальной группы $f(x,y)$ имеет место формула $[x]_p^f=g^{-1}([g(x)]_p^\mu)$.

Нетрудно проверить, что $[x]_p^\mu \equiv t^{p-1}x^p \bmod p$.

Следовательно, $[x]_p^t \equiv g^{-1}(\underset{\parallel}{t^{p-1}}g(x)^p) \bmod p$.

Пусть $[x]_p^t=\sum \alpha_i x^{i+1}$. $t^{p-1}g(x)^p +$ (члены содержащие t в степени большей, чем $p-1$).

Положим $\lambda_{p^k-1}=\alpha_{p^k-1}\in(\mathcal{J}m\,\varphi\otimes Z_p)$.

Таким образом, для любого простого p мы указали в кольце $\mathcal{J}m\,\varphi\otimes Z_p$ элементы λ_n, $n\geqslant 1$, такие, что

1) $\lambda_1 = t - 2b_1$;

2) $n \neq p^{k-1}$, $\lambda_n = b_n +$ (члены, разложимые в произведение не менее двух членов положительной степени);

3) $n = p^k - 1$, $\lambda_{p^k-1} = t^{p-1} b_{p^{k-1}-1} +$ (члены, содержащие t в степени большей, чем $p-1$).

Проверяя теперь, что все элементы λ_n алгебраически независимы в кольце $B = Z[t, b_1, \dots, b_n]$, мы получаем $(\mathcal{J}m\varphi \otimes Z_p) = Z_p[\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots]$ (проверка проводится, например, с использованием лексикографического упорядочивания мономов от b_i).

Так как $\Lambda \otimes Q = Q[y_1, \dots, y_n, \dots]$ и $\mathcal{J}m\varphi \otimes Z_p \simeq$ $\simeq Z_p[\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots]$ для любого простого p, то получаем, что Λ мономорфно вложено в B и $\mathcal{J}m\varphi$ является аддитивно прямым слагаемым.

ЛЕКЦИЯ 6

На лекции 2 было показано, что любая мультипликативная операция $\varphi: U^*(X) \longrightarrow U^*(X)$ однозначно задается своим значением на каноническом элементе $u \in U^2(\mathbb{C}P^\infty) \approx \Omega[[u]]$, причем формальный ряд $\varphi(u) \in U^*(\mathbb{C}P^\infty)$ должен иметь вид

$$\varphi(u) = u + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u^{i+1}, \ \alpha_i \in \Omega_U .$$

Мультипликативная операция φ индуцирует кольцевой гомоморфизм $\varphi^*: \quad U^*(\text{точка}) = \Omega_U \rightarrow \Omega_U$.

Пусть $f(u,v) = \sigma_1(\eta_1 \otimes \eta_2) = u + v + \sum a_{ij} u^i v^j \in \Omega_U[[u,v]]$ - формальная группа в кобордизмах.

Пусть $\theta: \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ - такое отображение, что $\theta^* \eta = \eta_1 \otimes \eta_2$, тогда $\theta^* u = \sigma_1(\eta_1 \otimes \eta_2) = f(u,v)$,

$$\begin{array}{ccc} \varphi\theta^*(u) = \theta^*\varphi(u) = \theta^*(u + \sum \alpha_i u^{i+1}) = \theta^* u + \sum \alpha_i (\theta^* u)^{i+1} & = & f(u,v) + \sum \alpha_i (f(u,v))^{i+1} \\ \| & & \| \\ \varphi(u + v + \sum a_{i,j} u^i v^j) = \varphi(u) + \varphi(v) + \sum \varphi^*(a_{i,j}) \varphi(u)^i \varphi(v)^j & = & \varphi(f(u,v)) \end{array}$$

Таким образом, если φ - мультипликативная операция, $\varphi^*: \Omega_U \rightarrow \Omega_U$ - индуцированный ею гомоморфизм кольца U^*(точка) и $\varphi(u) = u + \sum \alpha_i u^{i+1}$ - задающий ее ряд, то имеет место

<u>Лемма 6.I.</u> Ряд $\varphi(u)$ задает сильный изоморфизм групп $f(u,v) = u + v + \sum a_{i,j} u^i v^j$ и $\varphi_* f(u,v) = u + v + \sum \varphi^*(a_{i,j}) u^i v^j$, т.е. $\varphi(f(u,v)) = \varphi_* f(\varphi(u), \varphi(v))$.

Пусть теперь $\psi: \Omega_U \to K$ – произвольный кольцевой гомоморфизм, где K – коммутативное кольцо с единицей. Гомоморфизм ψ определяет в K структуру Ω_U-модуля.

Рассмотрим новый гомотопический функтор $X \longmapsto U^*(X) \otimes_{\Omega_U} K$, когда $X = (\text{точка}) \longmapsto U^*(\text{точка}) \otimes_{\Omega_U} K = \Omega_U \otimes_{\Omega_U} K = K$. Непосредственно из конструкций мультипликативных операций $\varphi: U^*(X) \to U^*(X)$ следует, что и любая мультипликативная операция $\varphi: U^*(X) \to U^*(X) \otimes_{\Omega_U} K$ также задается своим значением на элементе $u \in U^2(\mathbb{C}P^\infty)$, т.е. задается рядом $\varphi(u) \in U^*(\mathbb{C}P^\infty) \otimes_{\Omega_U} K \simeq K[[u]]$.

Положим $B = Z[b_1, \ldots, b_n, \ldots]$ и зададим в B структуру Ω_U-модуля при помощи гомоморфизма $\varepsilon: \Omega_U \to B$, $\varepsilon(1) = 1$, $\varepsilon(a) = 0$, если $\deg a > 0$.

Рассмотрим мультипликативную операцию

$$\varphi: U^*(X) \to U^*(X) \otimes_{\Omega_U} B,$$

задаваемую рядом $\varphi(u) = u + \sum b_i u^{i+1}$.
Пусть $\varphi^*: \Omega_U \to \Omega_U \otimes_{\Omega_U} B \approx B$ – кольцевой гомоморфизм, определяемый действием операции φ на $U^*(\text{точка})$, и $\lambda: \Lambda \to \Omega_U$ – гомоморфизм универсальной группы Лазара в Ω_U, соответствующий формальной группе $f(u,v)$.

<u>Теорема 6.2.</u> Образ кольца Λ при композиции гомоморфизмов $\Lambda \xrightarrow{\lambda} \Omega_U \xrightarrow{\varphi^*} B$ совпадает с подкольцом в B, порожденным коэффициентами закона умножения

$$\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)) \in B[[u,v]].$$

<u>Доказательство.</u> $\operatorname{Im} \lambda$ совпадает в Ω_U с подкольцом, порожденным коэффициентами закона умножения $f(u,v) = u + v + \sum a_{i,j} u^i v^j$. Следовательно, нам нужно вычислить вид формальной группы

$$\varphi^* f(u,v) = u + v + \sum \varphi^*(a_{i,j}) u^i v^j \in B[[u,v]].$$

Для мультипликативных операций $\varphi: U^*(X) \to U^*(X) \otimes_{\Omega_U} B$ имеет место аналог леммы 6.I (доказательство тоже). Поэтому формальная группа $\varphi_* f(u,v)$ сильно изоморфна формальной группе $f(u,v)$, но уже рассматриваемой как группа над кольцом $\Omega_U \otimes_{\Omega_U} B$. Так как для всех i и j элементы $a_{i,j}$ имеют положительную степень, то над кольцом $\Omega_U \otimes_{\Omega_U} B$ они равны нулю, т.е. $a_{i,j} \otimes_{\Omega_U} 1 = 0$, где $1 \in B$. Т.е. группа $f(u,v) \otimes_{\Omega_U} 1 = u + v$. Так как изоморфизм групп $\varphi_* f(u,v)$ и $f(u,v) \otimes_{\Omega_U} 1$ задается рядом

$\varphi(u)=u+\sum b_i u^{i+1}$, то получаем, что

$$\varphi(u+v)=\varphi(f(u,v))\otimes_{\Omega_U}1=\varphi_*(f(\varphi(u),\varphi(v))) \quad , \text{ т.е.}$$

$$\varphi_* f(u,v)=\varphi(\varphi^{-1}(u)+\varphi^{-1}(v)).$$

Теорема доказана.

Следствие 6.3. Гомоморфизм $\lambda:\Lambda\to\Omega_U$ является мономорфизмом.

Доказательство. Согласно теореме Лазара, $\Lambda=Z[a_1,a_2,\dots]$. Согласно лемме 5.I лекции 5, кольцо коэффициентов группы $\varphi(\varphi^{-1}(u)+\varphi^{-1}(v))\in B[[u,v]]$ порождает над Q все кольцо $B\otimes Q\approx Q[b_1,\dots,b_n,\dots]$, следовательно, гомоморфизм $(\varphi^*\lambda)\otimes Q:\Lambda\otimes Q\to B\otimes Q$ по теореме 6.2 является изоморфизмом, а значит λ - мономорфизм.

В алгебраической топологии (и алгебраической геометрии) известен важный инвариант - род Тодда, построение его можно найти, например, в книге Коннера и Флойда "Гладкие периодические отображения" (дополнение, § 6).

Для дальнейшего важно только знать, что

а) род Тодда существует и определяет кольцевой гомоморфизм $Td:\Omega_U\to Z$;

в) если a - класс бордизмов комплексного проективного пространства CP^n , $n\geq 0$, то $Td(a)=1$.

Рассмотрим гомоморфизм $\widehat{Td}:\Omega_U\to Z[t]$, $\widehat{Td}x=(Td x)t^n$, где $x\in\Omega_U^{2n}$.

Положим $L=Z[t,b_1,\dots,b_n,\dots]$ и зададим в L структуру Ω_U-модуля при помощи гомоморфизма $\varepsilon_1:\Omega_U\to L$, $\varepsilon_1(x)=$ $=\widehat{Td}x\in L$.

Рассмотрим мультипликативную операцию

$$\psi:U^*(X)\to U^*(X)\otimes_{\Omega_U}L,$$

задаваемую рядом $\psi(u)=u+\sum b_i u^{i+1}\in L[[u]]$.

Пусть $\psi^*:\Omega_U\to\Omega_U\otimes_{\Omega_U}L\approx L$ - кольцевой гомоморфизм, определяемый действием операции ψ на U^*(точка).

Теорема 6.4. Образ кольца Λ при композиции гомоморфизмов $\Lambda\xrightarrow{\lambda}\Omega_U\xrightarrow{\psi^*}L$ совпадает с подкольцом, порожденным в L коэффициентами закона умножения

$$\varphi(\varphi^{-1}(u)+\varphi^{-1}(v)-t\varphi^{-1}(u)\varphi^{-1}(v)).$$

Доказательство.

Вычислим закон умножения $f(u,v)\otimes_{\Omega_U} 1\in \Omega_U\otimes_{\Omega_U} L$,

т.к. $f(u,v)=u+v+\sum \widehat{fd}(a_{i,j})u^i v^j$,

т.е. $f(u,v)\otimes_{\Omega_U} 1=\varepsilon_{1,*}f(u,v)$, то для этого достаточно вычислить $\varepsilon_{1,*}g(u)$ и воспользоваться формулой

$$\varepsilon_{1,*}f(u,v)=(\varepsilon_{1,*}g)^{-1}(\varepsilon_{1,*}g(u)+\varepsilon_{1,*}g(v)),$$

где $g(u)$ – логарифм группы $f(u,v)$.

Как показано в лекции 4,

$$f(u,v)=\frac{u+v+\sum[H_{n,m}]u^n v^m}{\mathbb{C}P(u)\cdot\mathbb{C}P(v)},\quad \mathbb{C}P(u)=1+\sum[\mathbb{C}P^n]u^n.$$

Имеем

$$\left.\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\right|_{v=0}=\frac{1+\sum([H_{n,1}]-[\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}P^{n-1}])}{\mathbb{C}P(u)}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что $[H_{n,1}]=[\mathbb{C}P^1][\mathbb{C}P^{n-1}]$, т.е.

$$\frac{dg(u)}{du}=\mathbb{C}P(u).$$

Имеем

$$\frac{d\varepsilon_{1,*}g(u)}{du}=\varepsilon_{1,*}\mathbb{C}P(u)=1+tu+\ldots+t^n u^n+\ldots=\frac{1}{1-tu}.$$

и $\varepsilon_{1,*}g(u)=\int_0^u\frac{da}{1-ta}=-\frac{1}{t}\ln(1-tu)\in L\otimes Q[[u]]$,

$$(\varepsilon_{1,*}g^{-1})u=\frac{1}{t}(1-e^{-tu}),$$

$$\varepsilon_{1,*}f(u,v)=\frac{1}{t}\left(1-e^{-t(-\frac{1}{t}\ln(1-tu)-\frac{1}{t}\ln(1-tv))}\right)=$$

$$=\frac{1}{t}(1-(1-tu)(1-tv))=u+v-tuv.$$

Повторяя теперь рассуждения доказательства теоремы 6.2, получаем доказательство теоремы 6.4.

Из теоремы 5.4 лекции 5 получаем

Следствие 6.5. Кольцо $\mathrm{Im}(\psi^*\lambda)$ является аддитивно прямым слагаемым в кольце L.

Итак, канонический гомоморфизм $\lambda: \Lambda \to \Omega_U$ является мономорфизмом. Доказательство эпиморфности λ технически сложнее, требует новых идей и будет дано в следующей лекции.

Сейчас же мы предположим, что уже доказана эпиморфность, т.е. λ – изоморфизм.

Теорема 6.6. Пусть K – некоторое кольцо. Кольцевой гомоморфизм $\varphi: \Omega_U \otimes Q \to K \otimes Q$ при ограничении на $\Omega_U = \Omega_U \otimes 1 \subset \subset \Omega_U \otimes Q$ определяет кольцевой гомоморфизм $\varphi: \Omega_U \to K$ тогда и только тогда, когда коэффициенты формальной группы

$$\varphi_*(f(u,v)) = (\varphi_* g)^{-1}(\varphi_* g(u) + \varphi_* g(v))$$

над $K \otimes Q$ принадлежат кольцу K, где $g(u) = \sum \frac{[CP^n]}{n+1} u^{n+1} \in \Omega_U \otimes Q$ – логарифм г.г.к. и $\varphi_* g(u) = \sum \frac{\varphi[CP^n]}{n+1} u^{n+1} \in K \otimes Q$.

Доказательство. Из изоморфизма $\lambda: L \to \Omega_U$ следует, что $\Omega_U \otimes Q = Q[[CP^1], \ldots, [CP^n], \ldots]$. Если $\varphi_*(f(u,v)) \in K[[u,v]] \subset \subset K \otimes Q[[u,v]]$, то $\varphi|\Omega_U \subset K \subset K \otimes Q$, т.к. коэффициент универсальной группы над L порождает все кольцо L.

Из доказательства теоремы 6.4 и утверждения теоремы 6.6 получаем важное

Следствие. Свойство в) полностью определяет род Тодда $Td: \Omega_U \to Z$.

Замечание. Определив с помощью теоремы 6.6 род Тодда как единственный гомоморфизм $\varphi: \Omega_U \to Z$, такой, что $\varphi[CP^n] = 1$, можно получить теорему 6.4 и следующие ниже результаты без ссылок на конструкции Коннера и Флойда.

Нами были рассмотрены 2 кольцевых гомоморфизма

$$\varphi^*: \Omega_U \to B = Z[b_1, \ldots, b_n, \ldots],$$

$$\psi^*: \Omega_U \to L = Z[t, b_1, \ldots, b_n, \ldots].$$

Опишем подробнее образ конкретного класса бордизмов $[M^{2n}]$ при гомоморфизмах φ^* и ψ^*.

Введем сначала обозначения: класс Тома расслоения $\xi \to X$, $\dim \xi = n$, обозначим через $U(\xi)$, класс Тома универсального расслоения $\eta_N \to BU(N)$ – через $U(N)$, а класс Тома $U(1)$ – просто через U.

Итак рассмотрим отображение

$$\lambda: \prod_{i=1}^{N} CP_i^\infty \to MU(N)$$

такое, что в новых обозначениях $\lambda^* U(N) = \prod_{i=1}^{N} U_i$.

Пусть $a : U^*(X) \to U^*(X) \otimes_{\Omega_U} K$ – мультипликативная операция, задаваемая рядом $a(u) = u + \sum \alpha_i u^{i+1}$, $\alpha_i \in K$.

Имеем $a(\lambda^* U(N)) = \prod_{k=1}^{N} a(U_k) = \prod_{k=1}^{N} (u_k + \sum \alpha_i u_k^{i+1}) = (u_1 \dots u_N)(1 + \sum \alpha_i U(\omega))$,

где $U(\omega)$ – симметричный полином от $u_1, \dots, u_N$, соответствующий разбиению $\omega = i_1, \dots, i_k$, суммирование ведется по всем разбиениям ω , $|\omega| > 0$, где $|\omega| = \sum i_k$.

Из определения когомологических операций S_ω получаем

$$\lambda^* a(U(N)) = \lambda^*(U(N) + \sum_{|\omega|>0} \alpha_\omega S_\omega(U(N)) , \alpha_\omega \in \Omega_U .$$

Т.к. λ^* – моносморфизм, то

$$a(U(N)) = U(N) + \sum \alpha_\omega S_\omega (U_N) .$$

Пусть M^{2n} – квазикомплексное многообразие и $T_\nu(M^{2n})$ – комплекс Тома его нормального расслоения $M^{2n} \subset R^{2N+2n}$. Рассмотрим классифицирующее отображение $f : S^{2N+2n} \to T_\nu(M^{2n}) \to MU(N)$, класс бордизмов $[M^{2n}]$, т.е. $f^* U(N) = [M^{2n}]$.

Пусть $\varphi : U^*(X) \to U^*(X) \otimes_{\Omega_U} B$ – мультипликативная операция. Для X – точка получаем

$$\varphi(M^{2n}) \in U^*(\text{точка}) \otimes_{\Omega_U} B ,$$
$$\varphi(f^*(U(N)) = f^*(U(N) \otimes_{\Omega_U} 1 + \sum \alpha_\omega \otimes_{\Omega_U} 1 \cdot S_\omega(U(N)) =$$
$$= [M^{2n}] \otimes_{\Omega_U} 1 + \sum (\alpha_\omega \cdot S_\omega [M^{2n}]) \otimes_{\Omega_U} 1 .$$

Так как $S_\omega [M^{2n}] \in \Omega_U^{|\omega| - 2n}$, то $S_\omega [M^{2n}] \otimes 1 = 0$, если $|\omega| \neq 2n$; получаем формулу:

$$\varphi(M^{2n}) = \sum_{|\omega|=n} \alpha_\omega S_\omega (M^{2n}) \in \Omega_U \otimes_{\Omega_U} B \approx B ,$$

где α_ω – мономы от b_i . Если $|\omega| = n$, то $S_\omega (M^{2n}) \in$ $\in \Omega_U^0 \otimes_{\Omega_U} B \approx Z$. Непосредственной проверкой легко убедиться, что $|\omega| = n$, целые числа $S_\omega (M^{2n})$ совпадают с классическими числами Черна.

Вывод. При гомоморфизме $\varphi^*: \Omega_U \to B = Z[b_1, \dots, b_n, \dots]$ элемент $[M^{2n}]$ переходит в полином $\sum\limits_{|\omega|=n} S_\omega(M^{2n}) b_\omega$, где $\omega = (i_1, \dots, i_k)$, $b_\omega = b_1^{i_1} \dots b_k^{i_k}$ и S_ω – классические числа Черна многообразия M^{2n}.

Для данного n у многообразия M^{2n} имеется ровно $\pi(n)$ чисел Черна, где $\pi(n)$ – число возможных разбиений на сумму положительных чисел. Например, $n = 1$, $\pi(1) = 1$; $n = 2$, $\pi(2) = 2$; $(1 + 1, 2)$ и т.д.

Естественно возникает вопрос, любой ли набор из $\pi(n)$ целых неотрицательных чисел реализуется как набор чисел Черна некоторого многообразия M^{2n}. Ответ сразу: нет. Например, при $n = 1$, единственным числом является число Черна c_1 – Эйлерова характеристика, но известно, что для любой замкнутой поверхности M^2 Эйлерова характеристика есть четное число, равное $(2 - 2g)$, где g – род поверхности.

На математическом конгрессе в Эдинбурге Ф.Хирцебрух и Дж.Милнор сформулировали задачу: найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы набор из $\pi(n)$ неотрицательных целых чисел реализовался как набор чисел Черна алгебраического многообразия.

Так как кольцо Ω_U мультипликативно порождается коэффициентами закона умножения $f(u,v)$, а

$$f(u,v) = \frac{u + v + \sum [H_{n,m}] u^n v^m}{\mathbb{C}P(u) \cdot \mathbb{C}P(v)}$$

и $H_{n,m}$ – алгебраические многообразия, то эту задачу достаточно решить для элементов кольца Ω_U.

Замечание. В действительности, предварительно надо показать еще, что если $[M]$ – класс кобордизмов алгебраического многообразия, то $[M]$ – также класс кобордизмов алгебраического многообразия. Но это мы оставляем в качестве полезного упражнения.

Решение задачи Милнора-Хирцебруха было получено впервые Стонгом и Хаттори.

Приведем схему решения этой задачи методами формальных групп.

Как показано, гомоморфизм $\varphi^*: \Lambda \approx \Omega_U = \sum \Omega_U^{-2n} \to B = \sum B_n$ является мономорфизмом.

Так как ранги свободных абелевых групп Ω_U^{-2n} и B_n совпадают, то группа $A(n)=B_n/\mathrm{Im}\,\varphi^*(\Omega_U^{-2n})$ конечна; обозначим порядок этой группы через $\gamma(n)$. Из геометрического смысла гомоморфизма φ^* следует, что $\gamma(n)$ – это такое наименьшее число, что любой набор из $\pi(n)$ неотрицательных чисел, будучи умноженным на число $\gamma(n)$, становится набором чисел Черна.

Рассмотрим точную последовательность

$$0\longrightarrow \Omega_U^{-2n}\xrightarrow{\varphi^*} B_n\longrightarrow A(n)\longrightarrow 0 .$$

Переходя к аддитивным гомоморфизмам, получаем точную последовательность

$$\longleftarrow Ext^1(A(n),Z)\longleftarrow Hom(\Omega_U,Z)\longleftarrow Hom(B_n,Z)\longleftarrow 0 ,$$

из которой следует, что любой гомоморфизм $\varkappa:\Omega_U\longrightarrow Z$ выражается с рациональными коэффициентами через гомоморфизмы $B_n\rightarrow Z$, т.е. через гомоморфизмы, определяемые классическими числами Черна.

Рассмотрим теперь кольцевой гомоморфизм

$$\psi^*:\Omega_U\longrightarrow L .$$

Как показано, ψ^* является мономорфизмом на аддитивно прямое слагаемое. Поэтому индуцированный гомоморфизм $Hom(\Omega_U,Z)\xleftarrow{(\psi^*)_*}Hom(L,Z)$ является эпиморфизмом.

Для любого $\varkappa:L_n\longrightarrow Z$ элемент $(\psi^*)_*:\Omega_U^{-2n}\rightarrow L_n\xrightarrow{\varkappa} Z$ является гомоморфизмом $\Omega_U^{-2n}\rightarrow Z$ и разлагается в линейную комбинацию с рациональными коэффициентами гомоморфизмов из $Hom(B_n,Z)$, т.е. $\varkappa=\sum_{|\omega|=n}S_\omega b_\omega$ и $b_\omega[M^{2n}]=S_\omega[M^{2n}]$ – числа Черна, $S_\omega\in Q$.

Из эпиморфности $(\psi^*)_*$ теперь следует вывод:

для того, чтобы набор из $\pi(n)=(a_\omega)$, $|\omega|=n$, целых чисел был набором чисел Черна алгебраического многообразия, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varkappa\in Hom(L,Z)$, $\varkappa=\sum S_\omega b_\omega$, число $\varkappa((a_\omega))=\sum_{|\omega|=n}S_\omega a_\omega$ было целым.

ЛЕКЦИЯ 7

СТЕПЕНИ СТИНРОДА В КОБОРДИЗМАХ И ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЛЬЦА Ω_U.

1. Предварительные конструкции

Пусть X и Y – клеточные комплексы с отмеченными точками $*$. Положим $X \vee Y = (X \times *) \cup (* \times Y) \subset X \times Y$, $X \wedge Y = {}^{X \times Y}/_{X \vee Y}$.
Рассмотрим в комплексном пространстве C^{n+1} единичную сферу $S^{2n+1} = \{ z \in C^{n+1}, |z| = 1 \}$. На сфере S^{2n+1} фиксируем действие группы $Z_p \subset S^1$, задаваемое умножением на $e^{\frac{2\pi i}{p}}$. Положим $S^\infty = \lim_{n \to \infty} S^{2n+1}$. Действие группы Z_p на сферах S^{2n+1} определяет свободное действие группы Z_p на S^∞. Так как пространство S^∞ является стягиваемым по себе в точку, то расслоение $S^\infty \longrightarrow S^\infty/Z_p$ является универсальным Z_p-расслоением. Пространство $S^\infty/Z_p = \lim_{n \to \infty} S^{2n+1}/Z_p$ называется бесконечномерной линзой и обозначается через L_p.

Обозначим через S_+^∞ несвязное объединение сферы S^∞ и изолированной точки $*$, которая будет считаться отмеченной точкой пространства S_+^∞. На пространстве S_+^∞ фиксируем действие группы Z_p, которое оставляет отмеченную точку $*$ неподвижной, а на $S^\infty \subset S_+^\infty$ действует так, как описано выше. Для любого клеточного комплекса X обозначим через $E(X)$ пространство $S_+^\infty \wedge (X \wedge X \wedge \ldots \wedge X)$. На $E(X)$ определено действие группы Z_p, ограничение которой на $(X \wedge X \wedge \ldots \wedge X)$ представляет собой перестановку сомножителей. Положим $E_p(X) = E(X)/Z_p$.

Пример. $E_p(pt) = L_p^\infty$. Соответствие

$E_p(pt_+) = L_{p+}^\infty$

$X \longrightarrow E_p(X)$ является функциональным относительно непрерывных отображений $f: X \longrightarrow Y$, сохраняющих отмеченные точки.

Для отображения $f: X \longrightarrow Y$ соответствующее отображение $E_p(X) \to E_p(Y)$ обозначим через $E_p(f)$. Пусть $\xi \to X$ – комплексное векторное расслоение над X. Рассмотрим комплекс $\mathcal{E}(X) = S^\infty \times X \times \ldots \times X$, проекцию $\pi: \mathcal{E} \to X \times \ldots \times X$ и расслоение $\mathcal{E}(\xi) = \pi^*(\xi \times \ldots \times \xi)$. Как и на $E(X)$, на пространстве $\mathcal{E}(X)$ определено действие группы Z_p. Легко проверить, что это действие группы Z_p на $\mathcal{E}(X)$ является свободным и индуцирует свободное действие группы Z_p на пространстве расслоения $\mathcal{E}(\xi)$. Таким образом, определено комплексное расслоение $\xi_p = \mathcal{E}(\xi)/Z_p$ с базой X/Z_p.

Обозначение. Для расслоения ξ с базой X обозначим через $M(\xi)$ его комплекс Тома. Классифицирующее отображение $f: X \to BU(n)$, $n = \dim \xi$, $f^*\eta_n = \xi$, где η_n – универсальное комплексное расслоение, определяет отображение $M(f): M(\xi) \to M(\eta_n) = MU(n)$ и тем самым универсальный класс Тома $U(\xi) \in U^{2n}(M(\xi))$ расслоения ξ.

Лемма 7.1. Имеет место гомеоморфизм

$$E_p(M(\xi)) \xrightarrow{\approx} M(\xi_p).$$

Доказательство. Пусть $\xi \to X$ и $\eta \to Y$ – векторные расслоения, расмотрим расслоение $(\xi \times \eta) \to X \times Y$, тогда $M(\xi \times \eta) = M(\xi) \wedge M(\eta)$.

Заметим теперь, что $M(\mathcal{E}(\xi)) = S_+^\infty \wedge M(\xi) \wedge \ldots \wedge M(\xi)$, так как S_+^∞ можно отождествить с комплексом Тома нульмерного расслоения над S^∞. Для доказательства леммы теперь осталось заметить, что гомеоморфизм $M(\mathcal{E}(\xi)) = E(M(\xi))$ является Z_p – эквивариантным.

II. Аксиоматика внешних степеней Стинрода

Внешней степенью Стинрода в теории унитарных кобордизмов U^* называется совокупность $P_e = \{P_e^{2n}, n \text{ – целое}\}$ естественных преобразований

$$P_e^{2n}: \tilde{U}^{2n}(X) \longrightarrow \tilde{U}^{2np}(E_p(X)),$$

удовлетворяющая следующим условиям.

1. Рассмотрим вложение: $i: X \wedge X \wedge \ldots \wedge X \to E_p(X)$,

тогда

$$i^* P_e^{2n}(a) = a^p \in \tilde{U}^{2np}(X \wedge X \wedge \ldots \wedge X)$$

для любого $a \in \tilde{U}^{2n}(X)$.

2. Рассмотрим отображение

$$T: E_p(X \wedge Y) \longrightarrow E_p(X) \wedge E_p(Y),$$

$$T(e; x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_p, y_p) = (e; x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_p),$$

тогда

$$P_e^{2(m+n)}(ab) = T^*(P_e^{2n}(a) \cdot P_e^{2m}(b)) \in \tilde{U}^{2(n+m)p}(E_p(X \wedge Y)),$$

где

$$a \in \tilde{U}^{2n}(X),\ b \in \tilde{U}^{2m}(Y),\ ab \in \tilde{U}^{2(m+n)}(X \wedge Y).$$

3. Рассмотрим комплексное расслоение ξ над X, $\dim \xi = n$, тогда

$$P_2^{2n}(U(\xi)) = U(\xi_p) \in \tilde{U}^{2np}(M(\xi_p)).$$

III. Изоморфизм Тома в кобордизмах

Для доказательства теоремы существования и единственности степеней Стинрода нам потребуются общие свойства универсального класса Тома $U(\xi)$.

Рассмотрим пару комплексов $i: Y \subset X$ и n-мерное расслоение ξ над X. Положим $\xi' = i^*(\xi)$.

Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \xi' \arrow[r] \arrow[d] & \xi \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}$$

и пару комплексов Тома $M(i): M(\xi') \subset M(\xi)$.

Рассмотрим диаграмму

$$(*)\quad \begin{tikzcd} \ldots \arrow[r] & U^*(X) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "\varphi(\xi)"] & U^*(Y) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\varphi(\xi')"] & U^*(X/Y) \arrow[r, "\pi^*"] \arrow[d, "\varphi(\xi,\xi')"] & U^*(X) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "\varphi(\xi)"] & U^*(Y) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi(\xi')"] & \ldots \\ \ldots \arrow[r] & U^*(M(\xi)) \arrow[r, "M(i)^*"] & U^*(M(\xi')) \arrow[r, "\delta"] & U^*(M(\xi)/M(\xi')) \arrow[r, "\pi^*"] & U^*(M(\xi)) \arrow[r, "M(i)^*"] & U^*(M(\xi')) \arrow[r] & \ldots \end{tikzcd}$$

составленную из точных когомологических последовательностей пар (X,Y), $(M(\xi), M(\xi'))$ и изоморфизмов Тома:

$$\varphi(\xi): U^*(X) \longrightarrow U^*(M(\xi)),\quad \varphi(\xi)(a) = a \cdot U(\xi),$$

$$\varphi(\xi'): U^*(Y) \longrightarrow U^*(M(\xi')),\quad \varphi(\xi')(b) = b \cdot U(\xi').$$

Ввиду функциональности изоморфизмов Тома диаграмма коммутативна. Определен гомоморфизм

$$\varphi(\xi,\xi'): U^*(X/Y) \longrightarrow U^*(M(\xi)/M(\xi')),$$

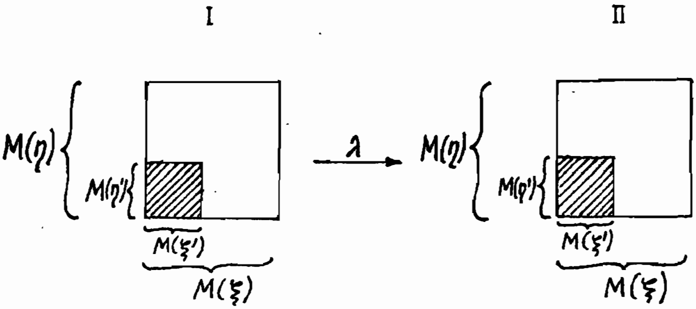
$$\varphi(\xi,\xi')(\alpha) = U(\xi)\alpha\,.$$

Из диаграммы ($*$) следует, что $\varphi(\xi,\xi')$ – изоморфизм.
Пусть ξ и η – расслоения над X, $\xi\times\eta \to X\times X$ и $(\xi+\eta)\to X$.
Рассмотрим композицию отображений

$$\Delta : M(\xi+\eta)/M(\xi'+\eta') \xrightarrow{j} M(\xi\times\eta)/M(\xi'\times\eta') \xrightarrow{\approx}$$

$$\xrightarrow{\approx} \big(M(\xi)\wedge M(\eta)\big)/\big(M(\xi')\wedge M(\eta')\big) \xrightarrow{\lambda} M(\xi)\wedge\big(M(\eta)/M(\eta')\big),$$

где отображение λ можно изсбразить графически:



В диаграммах I и II все зачерченное отождествляется с отмеченной точкой.

Определен гомоморфизм

$$\Phi(\xi) : U^*\big(M(\eta)/M(\eta')\big) \longrightarrow \tilde{U}^*\big(M(\xi+\eta)/M(\xi'+\eta')\big),$$

$$\Phi(\xi)(\alpha) = \Delta^*\big(U(\xi)\alpha\big)\,.$$

Так как $U(\xi\times\eta) = U(\xi)\cdot U(\eta) \in U^*\big(M(\xi\times\eta)\big)$,
то $\Phi(\xi)\cdot\varphi(\eta,\eta') = \varphi(\xi+\eta,\xi'+\eta')$, следовательно, $\Phi(\xi)$ – изоморфизм, т.е. имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
U^*(X/Y) \arrow[r, "="] \arrow[d, "\varphi(\eta,\eta')"] & U^*(X/Y) \arrow[d, "\varphi(\xi+\eta,\xi'+\eta')"] \\
U^*\big(M(\eta)/M(\eta')\big) \arrow[r, "\Phi(\xi)"] & U^*\big(M(\xi+\eta)/M(\xi'+\eta')\big)\,.
\end{tikzcd}$$

IУ. Существование и единственность внешних степеней Стинрода

Из аксиомы 3 следует, что для канонического элемента $U(\eta_n) = u_n \in U^{2n}(MU(n))$ имеет место формула

$$P^{2n} u_n = u(\eta_{n,(p)}).$$

Пусть некоторый элемент $a \in \tilde{U}^{2n}(X)$ представлен отображением $f: S^{2k}X \longrightarrow MU(n+k)$. Т.к. $S^{2k}X = M(K)/M(K')$, где K - тривиальное k-мерное расслоение над X и K' -ограничение его на $x \in X$, то $E_p(S^{2k}X) = M(K_{(p)})/M(K'_{(p)})$, где $K'_{(p)}$ - ограничение расслоения $K_{(p)}$ на подкомплекс $Y \subset (S^\infty \times X^{\times \dots \times} X)/Z_p$, образованный точками $(e, x_1, \dots, x_p)$, у которых хотя бы одна из координат x_i есть $* \in X$. Так как $E_p(X) = M(0)/M(0')$, то определено отображение

$$\Delta: E_p(S^{2k}X) \xrightarrow{=} M(K_{(p)})/M(K'_{(p)}) \longrightarrow E_p(X) \wedge E_p(S^{2k}X),$$

индуцирующее изоморфизм

$$\Phi(K_{(p)}): U^*(E_p(X)) \longrightarrow U^*(E_p(S^{2k}X)),$$

$$\Phi(K_{(p)})(a) = \Delta^*(U(K_{(p)})a).$$

Так как $f^* U_{k+n} = U(K)a$, то получаем

$$E_p(f)^*(\eta_{n+k,(p)}) = \Phi(K_{(p)})(P_e^{2n} a).$$

Но $\Phi(K_{(p)})$ - изоморфизм, поэтому

$$P_e^{2n} a = \Phi(K_{(p)})^{-1}(E_p(f))^*(\eta_{k+n,(p)}),$$

что доказывает единственность отепеней Стинрода.

Проверка того, что преобразование $P_e^{2n}(a)$ удовлетворяет условиям I-3, проводится непосредственно, и мы оставляем это в качестве упражнения на свойства изоморфизма Тома $\Phi(K_{(p)})$.

V. Степени Стинрода в кобордизмах

Рассмотрим отображение

$$\mathcal{J}: (S_+^\infty \wedge X)/Z_p \xrightarrow{id \times i} E_p(X) = (S_+^\infty \wedge \underbrace{X \wedge \ldots \wedge X}_{p})_{\times} Z_p ,$$

где i - диагональное отображение, и заметим, что

$$(S_+^\infty \wedge X)/Z_p = L_{p+}^\infty \wedge X .$$

<u>Определение.</u> Степенью Стинрода называется совокупность естественных преобразований

$$P = \left\{ P^{2n}: \tilde{U}^{2n}(X) \longrightarrow \tilde{U}^{2np}(L_{p+}^\infty \wedge X),\ n \in Z \right\},$$

такая, что $P^{2n} a = \mathcal{J}^* P_e^{2n} a$.

VI. Вывод формулы для степеней Стинрода

Пусть

$$j: BU(n) \longrightarrow \underbrace{BU(n) \times \ldots \times BU(n)}_{p} \ -$$

диагональ.

Рассмотрим вложение $\mathcal{J}: (L_{p+}^\infty \wedge MU(n)) \longrightarrow E_p(MU(n))$.

Имеем $L_{p+}^\infty \wedge MU(n) = M(\hat{\eta}_n)$, где $\hat{\eta}_n$ - расслоение над $L_p^\infty \times BU(n)$, индуцированное универсальным расслоением $\eta_n \to BU(n)$ при проекции $L_p^\infty \times BU(n) \to BU(n)$. Далее, $E_p(MU(n)) = M(\eta_{n,(p)})$. Отображение j продолжается до отображения расслоений

$$\begin{array}{ccc} \hat{\eta}_n & \longrightarrow & \eta_n \times \ldots \times \eta_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_+^\infty \times BU(n) & \xrightarrow{id \times j} & S_+^\infty \times (BU(n) \times \ldots \times BU(n)) . \end{array}$$

Ясно, что имеет место коммутативная диаграмма Z_p - эквивариантных отображений:

$$\begin{tikzcd}
\hat{\eta}_n \arrow[r] \arrow[d] & (id\times j)_*\mathcal{E}(\eta_n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E}(\eta_n) \arrow[d] \\
S_+^\infty\times BU(n) \arrow[r, "="] & S_+^\infty\times BU(n) \arrow[r] & S^\infty\times(BU(n)\times\ldots\times BU(n)),
\end{tikzcd}$$

которая приводит к отображению комплексов Тома

$$M(\hat{\eta}_n)\longrightarrow M((id\times j)_*\eta_{n,(p)}),$$

тождественному на общей базе $L_p^\infty\times BU(n)$.

<u>Лемма 7.2.</u> Расслоение $(id\times j)_*\eta_{n,(p)}$ изоморфно расслоению $\eta_n+\sum_{q=1}^{p-1}\eta^q\otimes\eta_n$, где η – каноническое расслоение над L_p^∞.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим диагональное отображение

$$j:\ BU(n)\longrightarrow\underbrace{BU(n)\times\ldots\times BU(n)}_{p}.$$

Ясно, что $j^*\eta_n=\eta_n+\ldots+\eta_n=\eta_n\otimes_C C^p$, где C^p – p-мерное комплексное пространство. Действие группы Z_p на расслоение $(id\times j^*)\mathcal{E}(\eta_n)\approx\eta_n\otimes C^p$, индуцированное действием группы Z_p на $\mathcal{E}(\eta_n)$, является тождественным на η_n и циклической перестановкой координат на C^p, т.е. регулярным представлением на C^p.

Известно, что в C^p можно выбрать такие координаты $z_1, z_2, z_3,\ldots,z_p$, что регулярное представление запишется в нем матрицей

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{p}} & & & 0 \\ & e^{\frac{2\pi i}{p}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\frac{2\pi i}{p}} \\ 0 & & & & e^{\frac{2\pi i}{p}}\end{pmatrix}.$$

Напомним, что каноническое одномерное расслоение $\eta \to L_p^\infty$ можно определить как расслоение $S^\infty \times C^1 \to S^\infty / Z_p = L_p^\infty$, где образующая группы Z_p на C^1 действует умножением на $e^{\frac{2\pi i}{p}}$. Суммируя вышесказанное, получаем, что расслоение $(id \times j)^* \mathcal{E}(\eta_n) = S^\infty \times_{Z_p} (\eta_n \times C^p) \to L_p^\infty \times BU(n)$ изоморфно расслоению $\eta_n \otimes (\eta + \eta^2 + \ldots + \eta^{p-1} + \eta_1^p)$. Лемма доказана.

Как показано выше, отображение

$$\mathcal{J} : L_{p+}^\infty \wedge MU(n) = M(\hat{\eta}_n) \longrightarrow E_p(MU(n)) = M(\eta_{n,(p)})$$

разлагается в композицию

$$M(\hat{\eta}_n) \xrightarrow{i_1} M((id \times j)_* \eta_{n,(p)}) \xrightarrow{i_2} M(\eta_{n,(p)}) .$$

Имеем $\quad P^{2n} U_n = \mathcal{J}^* P_e^{2n} U_n = i_1^* i_2^* P_e^{2n} U_n = i_1^* i_2^* (U(\eta_{n,(p)})) =$

$$= i_1^* (U((id \times j)_* \eta_{n,(p)})) = i_1^* (U(\eta_n \otimes (1 + \eta + \eta^2 + \ldots + \eta^{p-1}))) .$$

Рассмотрим вложение базы $\lambda : L_p^\infty \times BU(n) \longrightarrow MU((id \times j) \eta_{n,(p)})$.

Имеем $\lambda^* U(\eta_n \otimes (1 + \eta + \ldots + \eta^{p-1})) = \sigma_{np}(\eta_n \otimes (1 + \eta + \ldots + \eta^{p-1}))$.

Разлагая η_n на образующие $\text{By} : \eta_n = \sum_{i=1}^n \eta_{n,i}$, где $\eta_{n,i}$ – i-тое – одномерное расслоение, получаем

$$\sigma_{np}(\eta_n \otimes (1 + \eta + \ldots + \eta^{p-1})) = \prod_{k=1}^n \prod_{q=1}^p \sigma_1(\eta_{n,k} \otimes \eta^q) =$$

$$= \prod \prod f(\sigma_1(\eta_{n,k}), \sigma_1(\eta^q)) ,$$

где $f(u, v)$ – закон умножения в одномерной формальной группе геометрических кобордизмов. Положим $U_k = \sigma_1(\eta_{n,(k)})$, $V = \sigma_1(\eta)$. Ясно, что $\sigma_1(\eta^q) = [V]_q$ – возведение в q-тую степень в группе $f(U, V)$, т.е. $[V]_q$ – ряд по V.

Положим $V = \sum_{q=1}^{p-1} \eta^q$, $W = \sigma_{p-1}(V)$. Тогда

$$\eta_n \otimes (1 + \eta + \ldots + \eta^{p-1}) = \eta_n + \eta_n \otimes V ,$$

$$\sigma_{np}(\eta_n + \eta_n \otimes V) = \sigma_n(\eta_n) \sigma_{n(p-1)}(\eta_n \otimes V) = \sigma_n(\eta_n) \prod_{k=1}^n \sigma_{p-1}(\eta_{n,(k)} \otimes V).$$

Имеем

$$\sigma_{p-1}(\eta_{n,(k)}\otimes V)=\prod_{q=1}^{p-1}\sigma_1(\eta_{n,(k)}\otimes\eta^{q})=\prod_{q=1}^{p-1}f(U_{(k)},[V]_q)=$$

$$=\prod_{q=1}^{p-1}\left(U_{(k)}+[V_q]+O(U_{(k)}\cdot[V_q])\right)=W+\sum_{j\geq 1}\alpha_j(V)U_{(k)}^{j},$$

где $\alpha_j(V)$ – полиномы по V с коэффициентами из C , где C – подкольцо в Ω_U, порожденное коэффициентами закона умножения ф.г.г.к. $f(u,v)$.

Теперь нетрудно заметить, что

$$\sigma_{np}(\eta_n\otimes(1+V))=\sigma_n(\eta_n)\left(W^n+\sigma_n(\eta_n)^{p-1}+\sum W^{n-|\omega|}\alpha_\omega(V)\sigma_\omega(\eta_n)\right),$$

где $\sigma_\omega(\eta_n)$ – характеристический класс, соответствующий разбиению ω .

Таким образом,

$$(0)\quad P^{2n}U_n=i_1^*U_n=U_nW^n+\sum W^{n-|\omega|}\alpha_\omega(U)S_\omega(U_n),$$

где $S_\omega(U_n)=U_n\cdot\sigma_\omega(\eta_n)$.

<u>Теорема 7.3.</u> Пусть элемент $a\in\tilde U^{2n}(X)$ представлен отображением

$$f: S^{2k}X\longrightarrow MU(k+n);$$

тогда в кольце $U^*(L_p^\infty\times X)$ имеет место формула

$$W^kP^{2n}a=W^{n+k}a+\sum_{|\omega|>0}W^{k+n-|\omega|}\alpha_\omega(U)S_\omega(a),$$

где $\alpha_\omega(U)\in C[[U]]$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $U(k)\in\tilde U^{2k}(S^{2k})=Z$ – образующий, $\mathring{f}^*U_{k+n}=U(k)\cdot a$. Следовательно, $f^*P^{2(k+n)}U_{k+n}=T^*(P^{2k}U(k)P^{2n}a)$, где $T:(L_{p+}^\infty\wedge S^{2k}X)\longrightarrow(L_{p+}^\infty\wedge S^{2k})\wedge(L_{p+}^\infty\wedge X)$. Элемент $U(k)$ представлен вложением $S^{2k}\subset MU(k)$, следовательно, $P^{2k}U(k)=W^kU(k)$. Используя теперь формулу (0), получаем доказательство теоремы.

УП. Вычисление кольца $U^*(L_p^n)$ как Ω_U-модуля

Для применения степеней Стинрода необходимо вычислить $U^*(L_p^n)$ как Ω_U-модуль. Т.к. мы не можем пользоваться алгебраической информацией о кольце Ω_U, то вычисление кольца $U^*(L^n_p)$ будет проводиться геометрическими методами.

Определение. Класс кобордизмов $\alpha \in U^2(X)$ называется геометрическим, если он реализуется отображением $F: S^{2n}X \to MU(n+1)$, которое разлагается в композицию

$$S^{2n}X \xrightarrow{S^{2n}f} S^{2n}\mathbb{C}P^\infty = M(\eta+1\cdot n) \xrightarrow{i} MU(n+1),$$

где $S^{2n}f$ – надстройка над отображением $f: X \to \mathbb{C}P^\infty$, i – отображение пространств Тома, индуцированное классифицирующим отображением расслоения $(\eta + 1\cdot n)$, и η – каноническое расслоение. Обозначим через $V(X) \subset U^2(X)$ подмножество геометрических кобордизмов. Ясно, что соответствие $X \to V(X)$ функториально относительно непрерывных отображений пространств $X \to Y$ и что, если $\alpha \in V(X)$, $\alpha = \sigma_1(f^*\eta)$.

Определим отображение $\gamma: V(X) \to H^2(X;Z)$ по формуле

$$\gamma(\alpha) = [f] \in [X, \mathbb{C}P^\infty] = H^2(X;Z).$$

Лемма 7.4. Отображение γ является взаимно однозначным. В частности, если $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$, то $\alpha = \beta$.

Предупреждение. Множество $V(X)$ не замкнуто относительно сложения в группе $U^2(X)$.

Доказательство леммы является полезным упражнением на определения.

Вложение $C^1 \to C^{n+1}$, $z \to (0,\dots,0,z)$ определяет вложение $j: S^1 \subset S^{2n+1}$ и эквивариантно относительно умножения на $e^{\frac{2\pi i}{p}}$. Обозначим через $j: L^1_p \subset L^{2n+1}_p$ вложение, индуцированное вложением $j: S^1 \subset S^{2n+1}$.

Лемма 7.5. Имеет место гомоморфизм

$$L^{2n+1}_p / L^1_p \approx M(\eta),$$

где $M(\eta)$ – комплекс Тома канонического расслоения $\eta \to L^{2n-1}_p$.

Доказательство леммы также является полезным упражнением на определения.

Как и выше, обозначим через η каноническое расслоение над L^{2n+1}_p независимое от n и положим $u = \sigma_1(\eta)$.

Введем формальный ряд

$$\theta_p(u) = \frac{[u]_p}{u} = p + O(u) \in \Omega_U[[u]].$$

Теорема 7.6. Пусть $i: L_p^{2n-1} \subset L_p^{2n+1}$ – стандартное вложение, индуцированное вложением $C^n \subset C^{n+1}$, $(z_1,\dots,z_n) \to (z_1,\dots,z_n,0)$. Тогда если $a \in U^*(L_p^{2n+1})$ и $a \cdot u = 0$, то существует единственный элемент $y \in \Omega_U$, такой, что $i^* a = \theta_p(u) \cdot y \in U^*(L_p^{2n-1})$, т.е. имеет место точная последовательность

$$U^*(L_p^{2n+1}) \xleftarrow{u} U^*(L_p^{2n-1}) \xleftarrow{\theta_p(u)} \Omega_U ,$$

в которой гомоморфизмы являются умножениями на u и $\theta_p(u)$ соответственно.

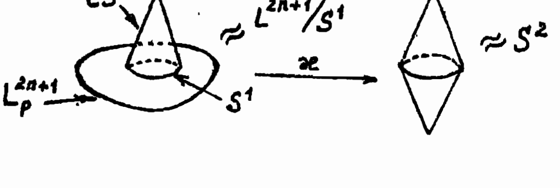
Доказательство. Заметим, что $L_p^1 = S^1$, и расмотрим точную последовательность в U-теории пары $(j: S^1 \subset L_p^{2n+1})$.
Имеем для любого целого q:

$$\begin{tikzcd}
\cdots & U^q(L_p^{2n+1}) \arrow[l] & \tilde U^q(L_p^{2n+1}/S^1) \arrow[l] & \tilde U^{q-1}(S^1) \arrow[l] \arrow[dl, "\approx"', "\text{(изоморфизм надстройки)}"] & \cdots \arrow[l] \\
& \tilde U^q(M(\eta)) \arrow[ur, leftrightarrow, "\approx", "\text{(лемма 7.4)}"'] & \tilde U^q(S^2) \arrow[l] & & \\
& U^{q-2}(L_p^{2n-1}) \arrow[u, "\wr", "\text{(изоморфизм Тома)}"'] & \Omega_U^{q-2} \arrow[l] \arrow[u, "\wr"', "\text{(изоморфизм надстройки)}"] & &
\end{tikzcd}$$

Таким образом, имеет место точная последовательность

$$\leftarrow U^q(L_p^{2n+1}) \xleftarrow{\varphi_1} U^{q-2}(L_p^{2n-1}) \xleftarrow{\varphi_2} \Omega_U^{q-2} \leftarrow .$$

Так как изоморфизм Тома $u: U^{q-2}(L_p^{2n-1}) \to \tilde U(M(\eta))$ является умножением на $\sigma_1(\eta)$, то φ_1 является также гомоморфизмом умножения на $\sigma_1(\eta) = u$. Вычислим гомоморфизм φ_2. Заметим, что $\tilde U^q(S^2) \approx \Omega_U^{q-2} \cdot \sigma$, где $\sigma \in \tilde U^2(S^2) = Z$ – образующий элемент. Очевидно, что $\sigma \in V(S^2) \approx H^2(S^2; Z)$. Гомоморфизм φ_2 индуцирован непрерывным отображением $\varkappa: L_p^{2n+1}/S^1 \to S^2$, которое, следуя Пуппе, геометрически можно изобразить так:



,

где $\varkappa$ отображает $L_p^{2n+1}\subset L_p^{2n+1}\cup CS^1$ в точку $*$. Таким образом, если $y\in\Omega_U^{q-2}$, то $\varphi(\varphi_2(y))=y\cdot\varkappa^*(\sigma)$. Так как $\sigma\in V(S^2)$, то $\varkappa^*(\sigma)\in V(L_p^{2n+1}/L_p^1)$. Из точности последовательности пары $(j:S^1\subset L_p^{2n+1})$ в когомологиях получаем, что $\gamma(\varkappa^*(\sigma))=p\hat{\sigma}$, где $\hat{\sigma}\in H^2(L_p^{2n+1}/L_p^1,Z)=H^2(M(\eta),Z)=Z$ – образующий. Так как $\hat{\sigma}=\gamma(u)$, где $u\in U^2(M(\eta))$ – класс Тома расслоения η, то $p\hat{\sigma}=\gamma([u]_p)$. Из леммы 7.4 следует теперь, что $\varkappa^*(\sigma)=[u]_p$. Так как изоморфизм Тома φ есть умножение на u, то $\varphi_2(y)=$ $=y\cdot\theta_p(u)$. Теорема доказана.

VIII. Вычисление кольца Ω_U

<u>Основная теорема.</u> Гомоморфизм

$$\lambda: Z[y_1,\dots,y_n,\dots]\longrightarrow\Omega_U,$$

соответствующий формальной группе геометрических кобордизмов, является изоморфизмом.

<u>Доказательство.</u> Нам осталось доказать только, что λ является эпиморфизмом. Положим $C=\mathcal{J}m\,\lambda\subset\Omega_U$ и покажем, что для любого $n\geqslant 0$ имеет место изоморфизм $\tilde{U}^*(S^n)\approx C\sum\limits_{q\geqslant 0}U^q(S^n)$. Заметим сначала, что ввиду изоморфизма $U^q(S^n)\approx U^{q+1}(S^{n+1})$ и конечнопорожденности группы $U^q(S^n)$ для любого q достаточно доказать, что для любого простого p имеет место изоморфизм

$$\tilde{U}(S^n)\otimes Z_p\approx C\sum_{q\geqslant 0}U^{2q}(S^n)\otimes Z_p .$$

Положим $R_p=C\sum\limits_{q\geqslant 0}U^{2q}(S^n)\otimes Z_p$ и допустим, что для всех $j<q$ уже доказан изоморфизм $R_p^{-2j}\approx\tilde{U}^{-2j}\otimes Z_p$. Для $q=0$ этот изоморфизм очевиден.

Пусть элемент $a\in\tilde{U}^{-2q}(S^n)$ представлен отображением $f:S^{2k}S^n\longrightarrow MU(k-q)$. Тогда по теореме 7.3 имеет место формула

$$(\#)\qquad w^k p^{-2q}a=w^{k-q}a+\sum_{|\omega|>0}w^{n-|\omega|}\alpha_\omega(u)S_\omega(a)$$

в кольце $U^*(L_p^{2N+1}\times S^n$, где N – достаточно большое число. Элемент $w\in U^*(L_p^{2N+1})$ представляет собой формальный ряд $(p-1)!u^{p-1}+O(u^p)$ с коэффициентами в кольце C. По предположению индукции $S_\omega(a)\in R_p$, $|\omega|>0$ и из формулы $(\#)$ получаем, что для некоторого m имеет место формула

$$(**)\quad u^m(W^q P^{-2q}a-a)=\psi(u)\in U^*(L_p^{2N+1}\times S^n)\approx U^*(L_p^{2N+1})\otimes_{\Omega_U}U^*(S^n),$$

где $\psi(u)\in R_p[[u]]$. Если $m=0$, то, полагая в $(**)$ $u=0$, получаем, что $-a=\psi(0)\in C$, так как $W^q|_{n=0}=0$, если $q>0$. Допустим, что $m\geq 1$ – наименьшее из чисел, для которых имеет место формула $(**)$. Полагаем в $(**)$ $u=0$, тогда получаем, что $\psi(0)=0$, т.е. $\psi(u)=u\cdot\psi_1(u)$, где $\psi_1(u)\in R_p[[u]]$ и, следовательно, $u(u^{m-1}(W^q P^{-2q}a-a)-\psi_1(u))=0$.
Применяя теорему 7.6, получаем, что существует элемент $y\in U^*(S^q)$ такой, что

$$(***)\quad u^{m-1}(W^q P^{-2q}a-a)=\psi_1(u)+y\theta_p(u)\in U^*(L_p^{2N-1}\times S^n).$$

Рассмотрев ограничение $(***)$ на $U^*(L_p^{2N-1})$, получаем, что $y'\cdot\theta_p(u)=0$, где $y'=\varepsilon(y)$, $\varepsilon: U^*(S^n)\to U^*(*)$.

Так как $y\in U^{-2(q-m+1)}(S^n)$, то для $m>1$, по предположению индукции, $y\cdot\theta_p(u)\in R_p[[u]]$, что противоречит минимальности m. Но если $m=1$, то, полагая в $(***)$ $u=0$, получим, что $-a=\psi_1(0)+py$, т.е. $a\in R_p$. Это завершает шаг индукции и доказывает теорему.

ЛЕКЦИЯ 8

В нашем курсе мы стремились показать, как результаты и методы теории формальных групп позволяют, с новой точки зрения, взглянуть на теорию кобордизмов.

Роль формальных групп в аппарате алгебраической топологии стала ясной совсем недавно. Но за последние два года уже появилось достаточно большое количество работ, раскрывающих метод формальных групп с разных точек зрения.

Сейчас известно три направления этого метода:

1. Описание неподвижных подмногообразий периодических преобразований квазикомплексных многообразий. (В основном это работы, выполненные в Москве; см. УМН, т.26, № 2, 1971).

2. Изучение спектральной последовательности Адамса-Новикова, сходящейся к стабильным гомотопическим группам сфер, используя описание когомологических операций в терминах формальных групп. (В основном это работы американских математиков – Цалера, Смита, Коннера).

3. Описание дополнительных структур на многообразиях в терминах формальных групп (см. обзор в УМН, т.26, № 2, 1971).

Представление о результатах пункта I можно было получить из лекции 3. Сегодня я хочу остановиться на пункте 3.

Ранее было показано, что Ω_U порождается коэффициентами закона умножения $f(u,v)$ и что $f(u,v)$ изоморфна универсальной формальной группе Лазара. Из этого результата получим два вывода:

1. Для любого квазикомплексного многообразия M^{2n} существует квазикомплексное многообразие W^{2n+1}, такое, что $\partial W^{2n+1} = M^{2n} \cup M_1^{2n}$, где M_1^{2n} - алгебраическое многообразие.

2. Алгебраическая структура кольца Ω_U совпадает с алгебраической структурой кольца Лазара Λ, вычисление которой проводится чисто алгебраическими методами.

В теории кобордизмов задачи пункта I известны как задачи о дополнительных структурах. Например, описать квазикомплексные многообразия M^{2n}, для которых существует W^{2n+1}, $\partial W^{2n+1} = M^{2n} \cup M_1^{2n}$, где M_1^{2n} - группа, например SU, или S_p - многообразия, т.е. многообразия, у которых стабильное нормальное расслоение $M_1^{2n} \subset R^{2N+2n}$ допускает в качестве структурной группы специальную унитарную группу или симплектическую группу.

Метод формальных групп в кобордизмах приводит к следующим естественным задачам:

1. Для каких дополнительных структур на многообразиях M_1^{2n} существуют операции над формальной группой, приводящие к формальным рядам над кольцом Ω_U, коэффициенты которых и есть многообразия с требуемой структурой.

2. Если такие ряды существуют, то нельзя ли среди них выбрать такие, которые образуют алгебраические объекты, классификация которых приводит в конечном итоге к описанию алгебраической структуры множества всех квазикомплексных многообразий, допускающих данную дополнительную структуру.

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О ТОЧКАХ НЕПРЕРЫВНОСТИ ПРОИЗВОДНОЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ В ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С.В.ГОРЛЕНКО

(Киев)

§ I. Обобщение теоремы о точках непрерывности производной непрерывной функции

Пусть $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ – непрерывная функция комплексного переменного $z=x+iy$, определенная в области D комплексной плоскости C. Рассмотрим следующие множества:

$$M_{mn}(f;z)=\left\{\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z},\ \frac{1}{m}\leq|\Delta z|\leq\frac{1}{n},\ m>n\right\}_{m,n=1,2,\dots}$$

$$M_{n}(f;z)=\left\{\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z},\ 0<|\Delta z|\leq\frac{1}{n}\right\}_{n=1,2,\dots}$$

$$\mathfrak{M}_z(f)=\bigcap_n\overline{M}_n(f;z)\quad,$$

где через $\overline{M}_n(f;z)$ обозначено замыкание множества $M_n(f;z)$ в комплексной плоскости. Множество $\mathfrak{M}_z(f)$, введенное Н.Н.Лузиным, было названо им множеством моногенности функции $f(z)$ в точке z. Легко показать, что множество моногенности $\mathfrak{M}_z(f)$ является множеством производных чисел $f(z)$ в точке z и, таким образом, в случае моногенной в точке z функции состоит из одной точки $f'(z)$, чем и оправдывается его название.

Рассмотрим теперь следующие многозначные отображения из D в 2^C, индуцированные функцией $f(z)$:

$$\Phi_f^{mn}(z):\ z\in D\longrightarrow M_{mn}(f;z)\ ,$$

$$\Phi_f^{n}(z):\ z\in D\longrightarrow\overline{M}_n(f;z)\ ,$$

$$\Phi_f(z):\ z\in D\longrightarrow\mathfrak{M}_z(f)\ .$$

В пространстве 2^C замкнутых подмножеств С введем так называемую ψ-топологию. Мы не будем приводить здесь определение и различные свойства этой топологии; их можно найти, например, в [1], [2].

Отметим лишь, что сходимость в ψ-топологии эквивалентна сходимости в метрике Хаусдорфа.

Лемма 1.1. Отображение $\Phi_f^{mn}(z)$ из D в ψC, заданное равенством $\Phi_f^{mn}(z) = M_{mn}(f;z)$, непрерывно.

Доказательство. Пусть $z_k \to z_0$ – произвольная последовательность точек из D, сходящаяся к точке $z_0 \in D$.

Достаточно доказать два включения:

а) $\mathop{Li}\limits_k M_{mn}(f;z_k) \supset M_{mn}(f;z_0)$,

в) $\mathop{Ls}\limits_k M_{mn}(f;z_k) \subset M_{mn}(f;z_0)$.

Пусть $w \in M_{mn}(f;z_0)$. Имеем $w = \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$, $\frac{1}{m} \le |h| \le \frac{1}{n}$. Тогда, очевидно, $w = \lim\limits_k \frac{f(z_k+h)-f(z_k)}{h} = \lim\limits_k w_k$, где $w_k \in M_{mn}(f;z_k)$. Следовательно, $w \in \mathop{Li}\limits_k M_{mn}(f;z_k)$ и а) доказано. Докажем в).

Пусть $w \in \mathop{Ls}\limits_k M_{mn}(f;z_k)$. Имеем $w = \lim\limits_k w_{j_k} = \lim\limits_k \frac{f(z_{j_k}+h_{j_k})-f(z_{j_k})}{h_{j_k}}$. При $k \to \infty$ $z_{j_k} \to z_0$, а $\frac{1}{m} \le |h_{j_k}| \le \frac{1}{n}$. Поэтому из последовательности h_{j_k} можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Для простоты будем считать, что сама последовательность $h_{j_k} \to h$. Очевидно, $\frac{1}{m} \le |h| \le \frac{1}{n}$. Тогда, в силу непрерывности f,
$w = \lim\limits_k \frac{f(z_{j_k}+h_{j_k})-f(z_{j_k})}{h_{j_k}} \stackrel{\circ}{=} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$. Следовательно, $w \in M_{mn}(f;z_0)$.

Имеем

$$\Phi_f^n(z) = \lim_{m\to\infty} \Phi_f^{mn}(z),$$

т.к. $\overline{M}_n(f;z) = \mathop{Lt}\limits_m M_{mn}$, где $\mathop{Lt}\limits_m M_{mn}$ – топологический предел последовательности множеств M_{mn} (см. [1]).
Итак, Φ_f^n – аналитически представимая функция первого класса, действующая из метрического пространства в метрическое. В этом случае (см. [1], § 31) множество ее точек разрыва есть множество первой категории в D. Следовательно, множество точек непрерывности Φ_f^n есть множество второй категории в D и поэтому, в силу полноты пространства C и известной теоремы Бэра, всюду плотно в D.

Более того, если A – произвольное подмножество области D, то множество точек разрыва сужения $\Phi_f^n|A$ есть множество первой категории относительно A.

Поэтому, если A – произвольное G_δ – подмножество области D, множество точек непрерывности сужения $\Phi_f^n|A$ есть множество второй категории относительно A.

Покажем теперь, что в каждой точке непрерывности Φ_f^n отображение Φ_f полунепрерывно сверху.

Пусть $z_0 \in D$ – точка непрерывности Φ_f^n и $z_k \to z_0$ – произвольная последовательность точек из D, сходящаяся к z_0. В силу свойств верхнего топологического предела последовательности множеств (см. [I], § 29) имеем

$$\underset{k}{Ls}\,\mathfrak{M}_{z_k}(f) = \underset{k}{Ls}\bigcap_n \overline{M}_n(f; z_k) \subset \bigcap_n \underset{k}{Ls}\,\overline{M}_n(f; z_k) =$$

$$= \bigcap_n \overline{M}_n(f; z_0) = \mathfrak{M}_{z_0}(f)$$, что и требовалось доказать.

Итак, имеет место следующая теорема.

<u>Теорема I.2.</u> Отображение $\Phi_f(z): z \in D \longrightarrow \mathfrak{M}_z(f)$ обладает множеством второй категории точек полунепрерывности сверху.

<u>Следствие I.3.</u> Пусть A – произвольное G_δ -подмножество D. Тогда множество точек полунепрерывности сверху отображения $\Phi_f|A$ есть множество второй категории относительно A.

Теорема I.2 и следствие I.3 есть естественное обобщение свойств производной непрерывной функции на случай непрерывных функций, не имеющих производной.

<u>Лемма I.4.</u> Отображение $\Phi_f^n: z \longrightarrow \overline{M}_n(f; z)$ полунепрерывно снизу (т.е. непрерывно в λ-топологии пространства 2^C, см.[3]) в каждой точке области D.

<u>Доказательство.</u> Пусть $z_0 \in D$ и $z_k \to z_0$ – произвольная последовательность точек из D, сходящаяся к z_0.

Покажем, что $\underset{k}{Li}\, M_n(f; z_k) \supset \overline{M}_n(f; z_0)$.

Действительно,

$$M_n(f; z_0) = \bigcup_m M_{mn}(f; z_0) = \bigcup_m \underset{k}{Lt}\, M_{mn}(f; z_k) = \bigcup_m \underset{k}{Li}\, M_{mn}(f; z_k) \subset$$

$$\subset \underset{k}{Li} \bigcup_m M_{mn}(f; z_k) = \underset{k}{Li}\, M_n(f; z_k) = \underset{k}{Li}\, \overline{M}_n(f; z_k).$$

Отсюда, в силу замкнутости множества $\underset{k}{Li}\, M_n(f; z_k)$, и следует включение $\overline{M}_n(f; z_0) \subset \underset{k}{Li}\, M_n(f; z_k)$.

Замечание. Из результатов работы [3] следует, что Φ_f^n обладает связным графиком над любым связным подмножеством области D.

§ 2. Некоторые достаточные условия аналитической непрерывной функции

Докажем вначале несколько простых утверждений, которые будут использованы нами в дальнейшем.

Лемма 2.1. Пусть $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ – непрерывная функция комплексного переменного $z=x+iy$, определенная в области $D\subset C$. Если в каждой точке z множества E не первой категории в D множество моногенности $\mathfrak{M}_z(f)$ не содержит точку $\zeta=0$, то найдется подобласть $d\subset D$, в которой $f(z)$ однолистна.

Доказательство. Рассмотрим множество

$$E_n=\left\{z\in E: \left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right|\geqslant\frac{1}{n},\ 0<|h|<\frac{1}{n}\right\}_{n=1,2,\dots}$$

Т.к. $0\notin\mathfrak{M}_z(f)\ \forall z\in E$, то, очевидно,

$$E=\bigcup_n E_n .$$

Из непрерывности $f(z)$ следует замкнутость $E_n\ \forall n$. Т.к. E – множество не первой категории, то найдется $n=n_0$ такое, что E_{n_0} будет всюду плотно в некоторой области D_0, $\overline{D}_0\subset D$. В силу замкнутости E_{n_0} будем иметь $E_{n_0}\supset\overline{D}_0$. Таким образом, $\forall z\in D_0$ и $0<|h|<\frac{1}{n_0}$ имеет место неравенство

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right|\geqslant\frac{1}{n_0} .$$

Поэтому в каждом круге $K\subset D_0$ диаметра меньшего, чем $\frac{1}{n_0}$, $f(z)$ однолистна.

Лемма доказана.

Лемма 2.2. Пусть $w=f(z)$ – непрерывное отображение области D и $P\subset D$ – совершенное множество. Если $\forall z\in P$ $\mathfrak{M}_z(f)$ не содержит точку $\zeta=0$, то найдется порция $P_0\subset P$, на которой $f(z)$ однолистна.

Доказательство совершенно аналогично доказательству леммы 2.1.

Лемма 2.3. Пусть $w=f(z)$ – функция, непрерывная в области D. Если на множестве E не первой категории в D, $E\subset D$, множества $\mathfrak{M}_z(f)$ ограничены (т.е. лежат в некотором фиксированном круге плоскости ζ), то найдется подобласть $d\subset D$, в которой $f(z)$ удовлетворяет условию Липшица.

Доказательство. Рассмотрим множества

$$E_n=\left\{z\in E:\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right|\le n\ ,\ 0<|h|<\frac{1}{n}\right\}_{n=1,2,\dots}$$

Из ограниченности множеств $\mathfrak{M}_z$ при $z\in E$ следует, что $E=\bigcup_n E_n$; при этом каждое из множеств E_n замкнуто в D . Т.к. E – множество не первой категории, то найдется множество $E_n=E_{n_0}$ всюду плотное в некоторой подобласти d , $\bar d\subset D$. В силу замкнутости E_{n_0} будем иметь $E_{n_0}\supset\bar d$. Очевидно, можно считать, что d – круг диаметра меньшего, чем $\frac{1}{n_0}$.
Тогда для каждого $z\in d$ и $0<|h|<\frac{1}{n_0}$ будем иметь

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right|\le n_0$$

или, полагая $z'=z+h$,

$$|f(z')-f(z)|\le n_0|z'-z|$$

для любых $z',z\in d$, что и требовалось доказать.

Лемма 2.4. Если для непрерывной в области D функции $w=f(z)$ множества моногенности $\mathfrak{M}_z(f)$ ограничены в точках совершенного множества $P\subset D$, то найдется порция $P_0\subset P$, на которой функция $f(z)$ удовлетворяет условию Липшица.

Доказательство леммы 2.4 совершенно аналогично доказательству леммы 2.3, при этом используется тот факт, что совершенное множество P второй категории в себе.

Теорема 2.5. Пусть $w=f(z)$ – произвольное непрерывное отображение области $D\subset C$, причем в каждой точке области D , исключая не более чем счетное их множество, $\mathfrak{M}_z(f)$ есть подмножество прямой. Тогда $f(z)$ – аналитическая в D функция.

Доказательство. В силу основной теоремы о множествах моногенности непрерывной функции (см. [4]), в условиях теоремы $f(z)$ моногенна р.р. в D .

Пусть D_0 – произвольная подобласть области D .

Возможны два существенно различных случая:

I) $\mathfrak{M}_z(f)$ являются собственными подмножествами прямых на множестве не первой категории в D_0 ;

II) $\mathfrak{M}_z(f)$ являются собственными подмножествами прямых на множестве первой категории в D_0 .

Рассмотрим случай I). По теореме I.2 найдется точка z_0 не-

прерывности $\mathfrak{M}_z(f)$ такая, что $\mathfrak{M}_{z_0}(f)$ будет собственным подмножеством некоторой прямой.
Пусть $O(\mathfrak{M}_{z_0}(f))$ – произвольная окрестность множества $\mathfrak{M}_{z_0}(f)$ в плоскости ζ производных чисел.
В силу непрерывности $\mathfrak{M}_z(f)$ в точке z_0, найдется $\delta>0$ такое, что $\forall z\in U(z_0;\delta)$ $\mathfrak{M}_z(f)$ есть собственное подмножество прямой.
По теореме 17 из [4] $f(z)$ в этом случае аналитична в $U(z_0;\delta)$.
Используя произвольность $D_0\subset D$, выделим в области D открытое всюду плотное множество точек аналитичности $f(z)$.

Рассмотрим случай II). По теореме I.2 найдется точка $z_0\in D_0$ непрерывности $\mathfrak{M}_z(f)$ такая, что $\mathfrak{M}_{z_0}(f)$ – полная прямая.

Не нарушая общности дальнейших рассуждений, можно считать, что прямая $\mathfrak{M}_{z_0}(f)$ перпендикулярна к оси ξ и расположена в правой полуплоскости плоскости $\zeta=\xi+i\eta$ производных чисел. В противном случае функция $f(z)e^{i\alpha}+Az$ при некоторых α и A удовлетворяла бы этому условию. Пусть $O(\mathfrak{M}_{z_0}(f))$ – окрестность прямой $\mathfrak{M}_{z_0}(f)$, изображенная на рис.I.

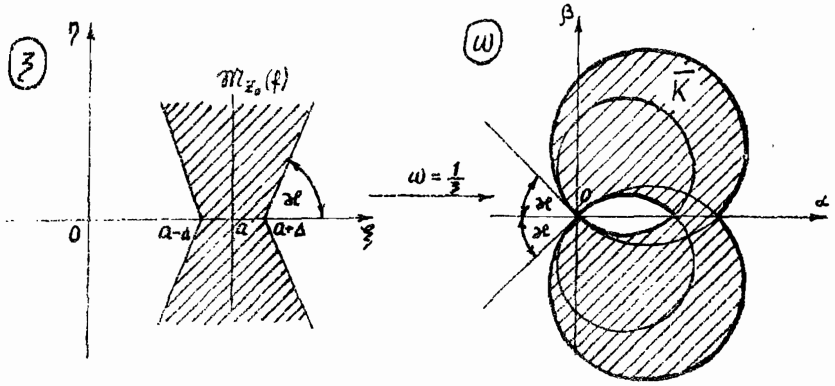


Рис.I

В силу непрерывности $\mathfrak{M}_z(f)$ в точке z_0, найдется такое $\delta>0$, что $\forall z\in U(z_0;\delta)\subset D_0$ $\mathfrak{M}_z(f)\subset O(\mathfrak{M}_{z_0}(f))$, где $U(z_0;\delta)$ - δ-окрестность точки z_0.
Т.к. $0\notin\mathfrak{M}_z(f)$ $\forall z\in U(z_0,\delta)$, то найдется область $d\subset U(z_0;\delta)$ однолистности $f(z)$. По теореме I.2 в d найдется точка непрерывности $\mathfrak{M}_z(f)$, в которой $\mathfrak{M}_z(f)$ является полной прямой

Поэтому, не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что $f(z)$ однолистна в $U(z_0;\delta)$.
В области $V=fU(z_0;\delta)$ рассмотрим обратную функцию $z=g(w)$.
Т.к. для однолистной функции $w=f(z)$ множества моногенности $\mathfrak{M}_w$ получаются из $\mathfrak{M}_z$ преобразованием $\omega=\frac{1}{z}$, то $\mathfrak{M}_w(g)$ на множестве A (второй категории в V) являются окружностями, проходящими через начало координат плоскости $\omega=\alpha+i\beta$ производных чисел функции $z=g(w)$. Отметим, что прямая $\eta=\pm k(\xi-(a\pm\Delta))$ при преобразовании $\omega=\frac{1}{z}$ переходит в окружность

$$\left(\alpha-\frac{1}{2(a\pm\Delta)}\right)^2+\left(\beta\mp\frac{1}{2k(a\pm\Delta)}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{1+k^2}}{2k(a\pm\Delta)}\right)^2,$$

где $k=\operatorname{tg}\varkappa$, $0<\varkappa<\frac{\pi}{2}$.
Поэтому радиусы z окружностей $\mathfrak{M}_w(g), w\in A$, удовлетворяют неравенству

$$z\geqslant\frac{\sqrt{1+k^2}}{2k(a+\Delta)}.$$

Априори возможны два случая:

1) $Mes\,A=0$;

2) $Mes\,A>0$ в некоторой порции области V.

В случае 1) обратная функция $z=g(w)$ моногенна р.р. в V.

В силу леммы 2.3, не ограничивая общности дальнейших рассуждений, можно считать, что $z=g(w)$ в области V удовлетворяет условию Липшица (т.к. $\forall\, w\in V$ $\mathfrak{M}_w(g)\subset\overline{K}$, см. рис.1). Это влечет (см. [4]) аналитичность функции $z=g(w)$ в V, а следовательно, и аналитичность $w=f(z)$ в $U(z_0;\delta)$.

Используя произвольность $D_0\subset D$, находим в области D открытое всюду плотное множество точек аналитичности $w=f(z)$.
Рассмотрим случай 2). Пусть $O_\varepsilon(\mathfrak{M}_{w_0})$, $w_0=f(z_0)$ — ε-окрестность окружности $\mathfrak{M}_{w_0}$, где $\varepsilon<\frac{\sqrt{1+k^2}}{2k(a+\Delta)}$. В силу непрерывности $\mathfrak{M}_w$ в точке w_0, найдется такое $\sigma>0$, что $\forall\; w\in V(w_0;\sigma)$

$$\mathfrak{M}_w\subset O_\varepsilon(\mathfrak{M}_{w_0}).$$

В силу определения множества A и 2), найдется точка $w' \in V(w_0;\sigma)$ такая, что $g(w)$ дифференцируема в точке w' и $\mathfrak{M}_{w'}$ есть окружность, проходящая через начало координат.

Рассматривая функцию $z_1 = g(w) - \gamma w$, где γ – центр окружности $\mathfrak{M}_{w'}$, находим, что $z_1(w)$ обращает ориентацию в точке w', т.к. $z_1(w)$ дифференцируема в точке w' и $\mathfrak{M}_{w'}(z_1)$ зацепляет начало координат.
Очевидно, что тогда и $z = g(w)$ обращает ориентацию в точке w'.
Но $z = g(w)$ моногенна на плотном в $V(w_0;\sigma)$ множестве и поэтому, в силу своей однолистности, должна сохранять ориентацию в каждой точке $V(w_0;\sigma)$.

Полученное противоречие показывает, что на самом деле случай 2) места не имеет.

Итак, во всех случаях в области D выделяется открытое всюду плотное множество точек аналитичности $f(z)$.

Допустим теперь, что $w = f(z)$ не является аналитической в области D, и пусть P – совершенное нигде не плотное множество нерегулярных точек. Пользуясь следствием 1.3, находим точку $b \in P$ непрерывности $\mathfrak{M}_z|P$. Рассуждениями, подобными вышеприведенным для абсолютного случая, находим относительную окрестность $U(b;\delta) \cap P = U_P(b;\delta)$ точки b, в которой $f(z)$ однолистна. Пользуясь теоремой 9 из [4], находим, что в некоторой окрестности $U(a;\delta_1)$, где $a \in U_P(b;\delta), \delta_1 < \delta$, функция $f(z)$ аналитична, что противоречит определению множества P.

Теорема доказана.

<u>Теорема 2.6.</u> Пусть $w = f(z)$ – произвольное непрерывное отображение области $D \subset C$, причем в каждой точке области D, исключая не более чем счетное их множество, $\mathfrak{M}_z(f)$ не является ни полной плоскостью, ни окружностью. Тогда $f(z)$ – аналитическая в D функция.

<u>Доказательство.</u> В силу основной теоремы о множествах моногенности непрерывной функции, в условиях теоремы 2.6 $f(z)$ моногенна р.р. в D. Пусть D_0 – произвольная подобласть области D. Возможны два случая:

I) $\mathfrak{M}_z(f)$ являются полными прямыми на множестве второй категории в D_0;

II) $\mathfrak{M}_z(f)$ не являются полными прямыми на множестве не первой категории в D_0.

В случае I), как это следует из доказательства теоремы 2.5, $f(z)$ аналитична в области D.

Рассмотрим случай II). По теореме I.2 найдется точка $z_0 \in D_0$ непрерывности $\mathfrak{M}_z(f)$ такая, что $\mathfrak{M}_{z_0}(f)$ не является ни полной плоскостью, ни окружностью, ни прямой. Пусть точка $c \notin \mathfrak{M}_{z_0}(f)$. Не ограничивая общности дальнейших рассуждений, можно считать $c=0$.

Пусть $O(\mathfrak{M}_{z_0}(f))$ – столь малая окрестность $\mathfrak{M}_{z_0}(f)$, что $0 \notin O(\mathfrak{M}_{z_0}(f))$.

В силу непрерывности $\mathfrak{M}_z(f)$ в точке z_0, найдется такое $\delta>0$, что $\forall z \in U(z_0;\delta)$ $\mathfrak{M}_z(f) \subset O(\mathfrak{M}_{z_0}(f))$ и, следовательно, не содержит точку 0.

Поэтому в $U(z_0;\delta)$ найдется подобласть d однолистности $f(z)$.

По теореме I.2 в d найдется точка непрерывности $\mathfrak{M}_z(f)$, в которой $\mathfrak{M}_z(f)$ не является ни полной плоскостью, ни окружностью, ни прямой. Поэтому, не нарушая общности рассуждения, можно считать, что $f(z)$ однолистна в $U(z_0;\delta)$.

В области $V=f\,U(z_0;\delta)$ рассмотрим обратную функцию $z=g(w)$. Она моногенна на плотном в V множестве и удовлетворяет условию Липшица, т.к. $\mathfrak{M}_w(g)$ ограничены.

Пусть A – образ при f множества точек из $U(z_0;\delta)$, в которых $\mathfrak{M}_z(f)$ есть полная прямая. Будем различать два случая:

1) $Mes\,A=0$;

2) $Mes\,A>0$ в некоторой порции области V.

В первом случае, в силу основной теоремы о множествах моногенности непрерывной функции, $z=g(w)$ моногенна р.р. в V и, т.к. она удовлетворяет условию Липшица в V (не ограничивая общности рассуждений, можно это предполагать), это влечет ее аналитичность, а следовательно, и аналитичность $w=f(z)$ в $U(z_0;\delta)$. Используя произвольность $D_0 \subset D$, находим открытое всюду плотное множество точек аналитичности $f(z)$. Противоречивость второго случая устанавливается как и в теореме 2.5.

Оставшееся совершенное нигде не плотное множество возможных нерегулярных точек стирается при помощи рассуждений, подобных приведенным в доказательстве теоремы 2.5.

Теорема доказана.

Теорему 2.6 настоящей работы интересно сравнить с основной теоремой о множествах моногенности (см.[4], теорема 2).

Характеристика аналитических функций в терминах множеств моногенности, полученная в теореме 2.6, является, с точки зрения основной теоремы о множествах моногенности, минимальной. Относительно ранее полученных в этом направлении результатов см.[4], [5], [6].

Литература

1. К.Куратовский, Топология, т.I, "Мир", М., 1966.
2. Р.Линичук, Некоторые свойства пространств замкнутых подмножеств, Труды УШ летней математической школы, Изд. Института математики АН УССР, К., 1971, 212-223.
3. Р.Линичук, Многозначные отображения и непрерывные разбиения топологических пространств, Труды Х летней математической школы, Изд. Института математики АН УССР, К., 1973.
4. Ю.Ю.Трохимчук, Непрерывные отображения и условия моногенности, Физматгиз, М., 1963.
5. М.М.Тар, Про деякі достатні умови аналітичності функцій комплексної змінної, Доп.АН УССР, сер.А, 1971, № 3, 212-215.
6. М.М.Тар, Про один критерій аналітичності функції комплексної змінної, УМЖ, т.21, № 3, 1969, 403-412.

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Ф.М.ДИАБ

(АРЕ)

Для непрерывной на прямой функции $f(x)$ рассмотрим множество $M_\varepsilon(x)$ -множество значений отношения

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

при всевозможных h, $0<|h|<\varepsilon$, для данного $\varepsilon>0$. Введем обозначения

$$M'_\varepsilon(x)=\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\ 0<h<\varepsilon\right\}$$

и

$$M''_\varepsilon(x)=\left\{\frac{f(x)-f(x-k)}{k},\ 0<k<\varepsilon\right\}$$

Основная задача в теории этих множеств заключается в выяснении их структуры в общем случае, когда $f(x)$ непрерывна на прямой. Обозначим через $d(A,B)$ расстояние между множествами A и B.

<u>Лемма I.</u> Множество A точек x, для которых $M_\varepsilon(x)$ несвязно и $d(M'_\varepsilon(x), M''_\varepsilon(x))>0$ не более чем счетно.

<u>Доказательство.</u> Для произвольной точки $x\in A$

$$M_\varepsilon(x)=M'_\varepsilon(x)\cup M''_\varepsilon(x) \quad \text{и} \quad d(M'_\varepsilon(x), M''_\varepsilon(x))>0$$

Имеют место две возможности:
либо

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}<\frac{f(x)-f(x-k)}{k}, \tag{1}$$

либо

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}>\frac{f(x)-f(x-k)}{k}. \tag{2}$$

Если в точке $x\in A$ имеет место (1), то

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}<\underline{\lim_{k\to 0}}\frac{f(x)-f(x-k)}{k} \tag{3}$$

Аналогично, если в точке $x\in A$ имеет место (2), то

$$\underline{\lim_{h\to 0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} > \overline{\lim_{k\to 0}} \frac{f(x)-f(x-k)}{k}. \tag{4}$$

Итак, во всех точках $x \in A$ выполнено неравенство (3) или (4). На основании теоремы I главы 9 [1] множество A не более чем счетно.

<u>Определение.</u> Скажем, что функция $f(x)$ выпукла в точке x, если в некоторой ее окрестности она выпукла или вогнута в смысле [2]. Назовем функцию $f(x)$ выпуклой на множестве A, если она выпукла в каждой точке $x \in A$.

<u>Теорема 2.</u> Если $M_\varepsilon(x)$ несвязно для всех точек $x \in R^1$, то график $f(x)$ выпуклый.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим множество $A = \{x : M_\varepsilon(x)$ несвязно и график функции $f(x)$ не является выпуклым в точке $x\}$. Предположим, что $A \neq \phi$. Выберем некоторую точку $x_0 \in A$, тогда $M_\varepsilon(x_0)$ несвязно и график функции $f(x)$ не является выпуклым в точке x_0. Это значит, что существуют положительные числа h', h'', k', k'', каждое из которых меньше ε, и такие, что

$$\frac{f(x_0+h')-f(x_0)}{h'} < \frac{f(x_0)-f(x_0-k')}{k'}$$

и

$$\frac{f(x_0+h'')-f(x_0)}{h''} > \frac{f(x_0)-f(x_0-k'')}{k''} \tag{5}$$

Зафиксируем один из наборов h', h'', k' и k'', для которого выполнены указанные неравенства. Выберем последовательность $\{h'_n\}$, такую, что

$$h'_1 = h' \qquad \text{и} \qquad h'_n \to h''.$$

Тогда, в силу несвязности $M_\varepsilon(x_0)$,

$$\frac{f(x_0+h'_n)-f(x_0)}{h'_n} < \frac{f(x_0)-f(x_0-k')}{k'}$$

а из непрерывности $f(x)$ и несвязности $M_\varepsilon(x_0)$

$$\frac{f(x_0+h'')-f(x_0)}{h''} < \frac{f(x_0)-f(x_0-k')}{k'}$$

Выберем последовательность $\{k'_n\}$ такую, что

$$k'_1 = k' \qquad \text{и} \qquad k'_n = k''.$$

Аналогично предыдущему получим, что

$$\frac{f(x_0+h'')-f(x_0)}{h''} < \frac{f(x_0)-f(x_0-k'_n)}{k'_n}$$

и

$$\frac{f(x_0+h'')-f(x_0)}{h''} < \frac{f(x_0)-f(x_0-k'')}{k''}. \tag{6}$$

В силу противоречивости неравенств (5) и (6), $A=\varnothing$.

<u>Теорема 3.</u> Если на всюду плотном множестве $Q\subset R^1$ $M_\varepsilon(x)$ несвязно, то графки функции выпуклый на R^1.

<u>Доказательство.</u> В силу предположения теоремы, для произвольной точки $x\in Q$

$$M_\varepsilon(x)=M'_\varepsilon(x)\cup M''_\varepsilon(x) \quad \text{, где } M'_\varepsilon(x)\cap M''_\varepsilon(x)=\varnothing$$

Имеют место две возможности:
либо

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} < \frac{f(x)-f(x-k)}{k}, \tag{7}$$

либо

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > \frac{f(x)-f(x-k)}{k}. \tag{8}$$

Множество точек X, для которых выполнено неравенство (7), (8), обозначим соответственно через $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$.
Покажем, что если одно из множеств $\mathcal{E}_i$ $(i=1,2)$ всюду плотно на интервале $(\alpha,\beta)\subseteq R^1$, то оно содержит все точки этого интервала. Выберем последовательность $\{x_n\}$ такую, что $x_n\in\mathcal{E}_1$ и $x_n\to x_0$, x_0 – произвольная точка (α,β).
Так как $x_n\in\mathcal{E}_1$, то

$$f(x_n) > \frac{k f(x_n+h)+h f(x_n-k)}{k+h}$$

Из непрерывности $f(x)$ следует, что

$$f(x_0) \geq \frac{k f(x_0+h)+h f(x_0-k)}{k+h}$$

Но из равенства

$$f(x_0)=\frac{k f(x_0+h)+h f(x_0-k)}{k+h}$$

для произвольных k и h следует, что $M_\varepsilon(x)$ – точка для всех точек из интервала $(x_0-k,\ x_0+h)$, что невозможно в силу предположения о несвязности $M_\varepsilon(x)$ на Q.
Итак,

$$f(x_0) > \frac{k f(x_0+h) + h f(x_0-k)}{k+h} \quad \text{и} \quad x_0 \in \mathcal{E}_1 .$$

Аналогично можно показать, что если множество $\mathcal{E}_2$ всюду плотно на интервале, то оно содержит все точки этого интервала.

Рассмотрим множество $R^1 \setminus Q$. Пусть $x_0 \in R^1 \setminus Q$, тогда в окрестности точки x_0 существуют точки либо из $\mathcal{E}_1$, либо из $\mathcal{E}_2$, либо из обоих множеств.

Если все точки из некоторой окрестности $(x_0-k,\ x_0+h)$ точки x_0 принадлежат только $\mathcal{E}_i$ $(i=1,2)$, то выберем последовательность $\{x_n\} \in \mathcal{E}_i$ $(i=1,2)$ такую, что $x_n \to x_0$. Тогда, как мы уже показали раньше, $x_0 \in \mathcal{E}_i$ $(i=1,2)$.

Если же в окрестности точки x_0 существуют точки из $\mathcal{E}_1$ и точки из $\mathcal{E}_2$, рассмотрим последовательности $\{x_n\}$, $\{x_m\}$ такие, что

$$x_n \to x_0,\ x_n \in \mathcal{E}_1,\ f(x_n) > \frac{k f(x_n+h) + h f(x_n-k)}{k+h},$$

$$x_m \to x_0,\ x_m \in \mathcal{E}_2,\ f(x_m) < \frac{k f(x_m+h) + h f(x_m-k)}{k+h}$$

В силу непрерывности $f(x)$ имеем

$$f(x_0) = \frac{k f(x_0+h) + h f(x_0-k)}{k+h}$$

Аналогично предыдущему для произвольных k, h получим, что $M_\varepsilon(x)$ – точка для всех точек из некоторого интервала $(x_0-k,\ x_0+h)$, что невозможно. Отсюда следует, что $R^1 \setminus Q = \varnothing$.
Суммируя все предыдущие рассуждения, получим, что каждая точка $x \in R^1$ должна быть внутренней точкой $\mathcal{E}_i$ $(i=1,2)$. Каждое $\mathcal{E}_i$ $(i=1,2)$ является объединением открытых интервалов и, следовательно, открыто.
Отсюда следует, что R^1 можно представить как объединение открытых непересекающихся множеств, но, в силу связности R^1, это невозможно. Тогда имеют место две возможности:

1) если $\mathcal{E}_1=\emptyset$, то для всех $x\in R^1$

$$f(x)<\frac{kf(x+h)+hf(x-k)}{k+h};$$

2) если $\mathcal{E}_2=\emptyset$, то для всех $x\in R^1$

$$f(x)>\frac{kf(x+h)+hf(x-k)}{k+h}.$$

Из 1), 2) следует, что $M_\varepsilon(x)$ всюду неовязно. Отсюда и из теоремы 2 вытекает утверждение теоремы 3.

Теорема 4. Для того, чтобы график функции $f(x)$ был выпуклым, необходимо и достаточно, чтобы на всюду плотном подмножестве R^1, $M_\varepsilon(x)$ было либо несвязным, либо одной точкой.

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим интервал $(a,b)\subset R^1$. Легко показать, что если множество $\mathcal{E}=\{x: M_\varepsilon(x)$ – точка$\}$ всюду плотно на (a,b), то оно содержит все точки интервала (a,b). Предположим, что $R^1\setminus\mathcal{E}\neq\emptyset$. Выберем последовательность $\{x_\alpha\}$ такую, что

$$x_\alpha\in R^1\setminus\mathcal{E},\quad x_\alpha\longrightarrow x_0,\ x_0\in\mathcal{E}.$$

Как мы уже видели в доказательстве теоремы 3, множество точек $R^1\setminus\mathcal{E}$ состоит из точек множества $\mathcal{E}_1$ или $\mathcal{E}_2$. Значит, последовательность $\{x_\alpha\}$ принадлежит либо $\mathcal{E}_1$, либо $\mathcal{E}_2$.

Пусть $\{x_\alpha\}\in\mathcal{E}_1$, тогда

$$\frac{f(x_\alpha+h)-f(x_\alpha)}{h}<\frac{f(x_\alpha)-f(x_\alpha-k)}{k}.$$

Из непрерывности $f(x)$ получим

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\leq\frac{f(x_0)-f(x_0-k)}{k},$$

но из равенства

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{f(x_0)-f(x_0-k)}{k}$$

следует, что для произвольных k, h в некоторой окрестности $(x_0-k,\ x_0+h)$ точки x_0, $M_\varepsilon(x)$ – точка, что невозможно, так как в окрестности $(x_0-k,\ x_0+h)$ найдутся точки $\mathcal{E}_1$.
Из неравенства

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} < \frac{f(x_0)-f(x_0-k)}{k}$$

для произвольных k, h следует, что $x_0 \in \mathcal{E}_1$, но это противоречит предположению $x_0 \in \mathcal{E}$. Это значит, что $R^1 \setminus \mathcal{E} = \emptyset$. Из доказанного и теоремы 3 следует необходимость утверждения теоремы 4.

Достаточность. Пусть график функции $y=f(x)$ выпуклый. Из доказанного выше и теоремы 3 следует, что

а) если $\mathcal{E}$ плотно на интервале $(a,b) \subset R^1$, то $\mathcal{E} = R^1$ и для всех $x \in R^1$ $M_\varepsilon(x)$ – точка;

в) если же $\mathcal{E}_i$ $(i=1,2)$ всюду плотно на (a,b), то $\mathcal{E}_i = R^1$, т.е. $M_\varepsilon(x)$ всюду несвязно. Этим доказательство утверждения завершено.

На основании этой же идеи можно доказать следующий результат.

Пусть $f(x)$ – выпуклая функция на R^1. Тогда в точках R^1 имеются две взаимно исключающие возможности:

1) $M_\varepsilon(x)$ – точка;

2) $M_\varepsilon(x)$ несвязно.

Утверждение. Если для непрерывной функции на интервале (a,b) $M_\varepsilon(x)$ несвязно на всюду плотном множестве $Q \subset (a,b)$, то график функции выпуклый на (a,b).

Доказательство. Как видно из доказательства теоремы 3, если одно из множеств $\mathcal{E}_i$ $(i=1,2)$ всюду плотно на некотором интервале, содержащемся в (a,b), то оно содержит все точки этого интервала. Выберем последовательность $\{x_n\}$ такую, что $x_n \in \mathcal{E}_1$ и $x_n \to x_0$, где x_0 – произвольная точка (a,b). Так как $x_n \in \mathcal{E}_1$, то

$$f(x_n) > \frac{k f(x_n+h) + h f(x_n-k)}{k+h}$$

(i) Если $x_0+\varepsilon \leq b$, то из доказательства теоремы 3 следует, что $x_0 \in \mathcal{E}_1$.

(ii) Если $x_0+\varepsilon > b$, пусть $\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon''$, $\varepsilon' = b - x_0$; $\varepsilon'' = \varepsilon - \varepsilon' > 0$, тогда

$$f(x_n) > \frac{k f(x_n+h') + h f(x_n-k)}{k+h'}, \quad 0<h'<\varepsilon', \quad 0<k<\varepsilon$$

Из непрерывности $f(x)$ вытекает, что

$$f(x_0) \geqslant \frac{k f(x_0+h') + h' f(x_0-k)}{k+h'},$$

т.е., как и раньше, равенство для произвольных k, h' невозможно, следовательно, $x_0 \in \mathcal{E}_1$. Значит, $\mathcal{E}_1$ содержит все точки интервала (a,b) и график функции выпуклый на (a,b).

Теорема 5. Пусть $f(x)$ – непрерывная функция на R^1. Тогда в точках R^1 имеются две возможности: либо график $f(x)$ выпуклый, либо $M_\varepsilon(x)$ связно (но не точка).

Доказательство. Обозначим

$$A_1 = \{x: \text{график } f(x) \text{ выпуклый}\},$$
$$A_2 = \{x: M_\varepsilon(x) \text{ связно, но не точка}\}.$$

Предположим, что теорема неверна. Это значит, что множество $C = R^1 \setminus A_1 \cup A_2 \neq \varnothing$. Возьмем точку $x_0 \in C$, тогда $M_\varepsilon(x_0)$ несвязно и график функции не является выпуклым в точке x_0. Но, как следует из доказательства теоремы 2, такая точка x_0 не существует и, следовательно, $C = \varnothing$.

Теорема доказана.

Литература

1. С.Сакс, Теория интеграла, ИЛ, М., 1949.
2. Г.М.Фихтенгольц, Основы математического анализа, "Наука", М., 1968.

О КРИТЕРИЯХ МОНОТОННОСТИ

Ю.Б.ЗЕЛИНСКИЙ

(Киев)

Пусть M^n и N^n - n-gm (обобщенные когомологические n -многообразия в смысле Уайлдера [1]). Под областью $D \subset M^n$ будем понимать открытое связное подмножество n-gm M^n.

В работе исследуются условия, при которых собственное отображение области D будет монотонным (т.е. для произвольной точки $y \in fD$, $f^{-1}y$ связно).

Исследования основаны на понятии локальной степени собственного отображения обобщенных многообразий [2].

Если X - локально компактное пространство, то пусть $H_c^i(X)$ - его i-я группа когомологий с компактными ноосителями с коэффициентами в группе $\mathbb{Z}$ целых чисел.

Если M^n - связное n-gm, тогда $H_c^n(M^n)$ изоморфно $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}_2$ в зависимости от того, ориентируемо M^n или нет [3]. Ориентируемое n-gm с выбранной образующей g_M из $H_c^n(M^n)$ называется ориентированным многообразием. Пусть M^n и N^n ориентированные n-gm и D - область в M^n, тогда стандартный гомоморфизм $j: H_c^n(D) \to H_c^n(M^n)$ будет изоморфизмом. Положив $g_D = j^{-1}(g_M)$, мы получим ориентацию произвольной области в M^n. Если $f: M^n \to N^n$ - непрерывное отображение и $\varphi = f/_D : D \to N^n$, тогда для произвольной точки $y \in N^n \setminus \varphi\partial D$ можно определить степень отображения.

Выберем некоторую связную открытую окрестность $U(y)$ точки y, такую, что $\varphi\partial D \cap U(y) = \emptyset$.

Существует целое k, такое, что $j\varphi^*(g_U) = kg_M$, где $j: H_c^n(\varphi^{-1}U) \to H_c^n(D)$ - канонический гомоморфизм, а $\varphi^*: H_c^n(U) \to H_c^n(\varphi^{-1}(U))$ индуцировано отображением φ. Известно, что это число не зависит от выбора U. В дальнейшем мы будем обозначать это число через $\gamma(D, f, y)$. Известно, что если $\{D_i\}$ - совокупность открытых подобластей D, $D_i \cap D_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то $\gamma(\bigcup_i D_i, f, y) = \sum_i \gamma(D_i, f, y)$ ("принцип аргумента").

Пусть D и G - области M^n и N^n соответственно.

<u>Определение 1.</u> Непрерывное отображение $f: D \to G$ называется собственным, если прообраз произвольного компакта из G есть компакт.

Для каждой точки $y \in G$ прообраз $f^{-1}y$ при собственном отображении $f: D \to G$ распадается на компактные компоненты. Каждую из компонент $f^{-1}y$ будем называть континуумом отображения. Для каждого континуума отображения $c \subset f^{-1}y$ можно выбрать скреотность $V(c)$, $\partial V \cap f^{-1}y = \emptyset$, и, согласно предыдущему, определить степень $\gamma(V, f, y)$.

Определение 2. Скажем, что собственное отображение имеет на континууме отображения c локальную степень $\gamma(c)$, если существует открытое множество $V \supset c$ такое, что для произвольного открытого множества $V' \subset V$, $V' \supset c$,

$$\gamma(V', f, y) = const \ (= \gamma(c)).$$

Свойства и условия существования этой степени изучены в работе [2].

Лемма 3. Пусть D - область в n-gm M^n и пусть U_1 и U_2 непересекающиеся облаоти в D, такие, что $\partial U_1 = \partial U_2$ и $\overline{U_1} \cup \overline{U_2} \neq D$.

Не существует собственного отображения $f: D \to D_1$ $(D_1 \subset N^n)$ такого, что выполнены условия:

1) $fU_1 = fU_2$;

2) $f\partial U_1 \cap fU_i = \emptyset$, $i = 1, 2$;

3) $f^*: H_c^{n-1}(f\partial U_1) \to H_c^{n-1}(\partial U_1)$ - эпиморфизм.

Доказательство. Пусть такое отображение существует. Рассмотрим коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{array}{ccccc}
H_c^{n-1}(f\partial U_1) & \longrightarrow & H_c^{n}(fU_1) & & \\
\downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow{\scriptstyle f_i^*} & & \\
H_c^{n-1}(\partial U_1) & \xrightarrow{\delta} & H_c^{n}(U_i) & \longrightarrow & H_c^{n}(\overline{U_i})
\end{array}$$

Группа $H_c^n(\overline{U_i}) = 0$, так как $\overline{U_i} \neq D$.
Из точности нижней строки диаграммы следует, что δ -эпиморфизм, тогда δf^* -эпиморфизм и из коммутативности диаграммы f_i^* - эпиморфизм. Группа $H_c^n(U_i) = \mathbb{Z}$ как группа открытой области, но тогда $H_c^n(fU_1) = \mathbb{Z}$ (она может быть нулевой или $\mathbb{Z}$, как

n -мерная группа связного подмножества n-gm ; нетривиальность ее следует из нетривиальности f_i^*) и f_i^* - изоморфизм. Отсюда следует, что отображение

$$f_1^* \oplus f_2^* : H_c^n(fU_1) \to H_c^n(U_1 \cup U_2) \approx H_c^n(U_1) \oplus H_c^n(U_2)$$

– мономорфизм.

В коммутативной диаграмме с точными строками

$$\begin{array}{ccccc} H_c^{n-1}(f\partial U_1) & \to & H_c^n(fU_1) & & \\ \downarrow f^* & & \downarrow f_1^* \oplus f_2^* & & \\ H_c^{n-1}(\partial U_1) & \xrightarrow{i^*} & H_c^n(U_1) \oplus H_c^n(U_2) & \to & H_c^n(\overline{U}_1 \cup \overline{U}_2) = 0 \end{array}$$

$H_c^n(\overline{U}_1 \cup \overline{U}_2) = 0$,так как $\overline{U}_1 \cup \overline{U}_2 \neq D$.

Тогда i^* и $i^* f^*$ - эпиморфизмы из точности нижней строки, а из коммутативности диаграммы $f_1^* \oplus f_2^*$ - эпиморфизм. Отсюда следует, что $f_1^* \oplus f_2^*$ - изоморфизм.

Но группа $H_c^n(fU_1) = \mathbb{Z}$ не может быть изоморфной группе $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = H_c^n(U_1) \oplus H_c^n(U_2)$

Лемма доказана.

<u>Лемма 4.</u> Пусть D - область в n-gm M^n и пусть U_1 и U_2 - непересекающиеся области в D , такие, что $\partial U_1 = \partial U_2$ и $\overline{U}_1 \cup \overline{U}_2 = D$.

Не существует собственного отображения такого, что выполнены одновременно:

1) условия 1–3 леммы 3;
2) степень $\gamma(U_i, f, y) > 0$, при $i = 1, 2$.

<u>Доказательство.</u> Если такое отображение существует, то согласно лемме 3 отображения $f_i^* : H_c^n(fU_i) \to H_c^n(U_i)$ - изоморфизмы. Запишем коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} H_c^{n-1}(f\partial U_1) & \to & H_c^n(fU_1) & \to & H_c^n(fD) \\ \downarrow i^* & & \downarrow f_1^* \oplus f_2^* & & \searrow \\ H_c^{n-1}(\partial U_1) & \xrightarrow{d} & H_c^n(U_1) \oplus H_c^n(U_2) & \xrightarrow{i^*} & H_c^n(D) \to 0 \end{array}$$

Гомоморфизм i^* имеет нетривиальное ядро $Ker\, i^* = \{a, -a\}$, $a \neq 0$. В силу точности нижней строки $Im\,\delta = Ker\, i^*$. Тогда $Im\,\delta h^* = Ker\, i^*$.

Из коммутативности диаграммы следует, что $Im(f_1^* \oplus f_2^*) \supset Im\,\delta h^* \supset \{a, -a\}$. В силу условия 2 леммы это возможно лишь при $a = 0$.

Полученное противоречие доказывает лемму.

Определение 5. Для замкнутого подмножества $L \subset \overline{K}$ множества $K \subset M^n$ назовем предельным множеством $C_K(f, L)$ (или просто $C(f)$) множество всех точек α из $f\overline{K}$, таких, что существует последовательность $\{z_n\} \subset K \setminus L$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \in L$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \alpha$.

Теорема 6. Пусть $f: D \to N^n$ (D - открытое множество в M^n) и выполнены условия:

1) $C(f) \cap f(D) = \phi$

2) для каждой компоненты $D_i \subset D$ найдется открытая порция $\Gamma_i = U_i \cap \partial D$ границы ∂D, такая, что если последовательность $\{x_n\} \to x_0 \in \Gamma_i$ $(x_n \in D)$, то последовательность $\{x_n'\} \to x_0$, где x_n' - произвольная точка из $f^{-1}f(x_n)$, и Γ_i разбивает свою открытую окрестность U_i в M^n;

3) на каждом континууме отображения $c \subset D$ существует локальная степень отображения $\gamma(c) > 0$.

Тогда 1) $f/_D$ - монотонное отображение; 2) гомоморфизм $f^*: H_c^n(fD) \xrightarrow{} H_c^n(D)$, индуцированный отображением f - изоморфизм.

Доказательство. а) Если D - открытая область и в произвольной окрестности Γ найдутся точки, не принадлежащие D, то доказательство совпадает с доказательством теоремы 3.1 [4].

б) Если $D = \bigcup D_i$, где D_i - открытые области, и $\Gamma_i \neq \Gamma_j$ при $i \neq j$, то доказательство аналогично теореме 3.4 [4].

в) Пусть $D = \bigcup D_i$ и найдется пара индексов $i \neq j$ такая, что $\Gamma_i = \Gamma_j$. Рассмотрим область $D' = D_i \cup D_j \cup \Gamma_i$. Собственное отображение f индуцирует на $D_i \cup D_j$ полунепрерывное сверху разбиение [5]. Дополним это разбиение до разбиения области D' одноточечным на Γ_i. Легко убедиться, используя условие 2 теоремы, что мы получим полунепрерывное сверху разбиение области D'. Для области D' имеем: $D_i \cap D_j = \phi$, $\partial D_i = \partial D_j$ (рассматривается относительная граница в D') $\overline{D}_i \cup \overline{D}_j = D'$.

Из пункта а) доказательства следует, что $f/_{D_i}$ и $f/_{D_j}$ монотонны.

Чтобы доказать, что $f|_{D_i \cup D_j}$ монотонно, достаточно показать, что $fD_i \cap fD_j = \emptyset$. Предположим, что это пересечение не пусто. В силу собственности отображения и положительности степени на каждой компоненте, если $fD_i \cap fD_j \neq \emptyset$, то $fD_i = fD_j$ (иначе степень на одной из компонент равнялась бы нулю). Рассмотрим проекцию P разбиения области D'.

На D_i, D_j проекция P совпадает с f. Это значит, что мы построили отображение P со свойствами:

1) $PD_i = PD_j$

2) $P\Gamma_i \cap PD_k = \emptyset$, $k = i, j$; (в силу одноточечности разбиения на Γ_i);

3) $P^*: H_c^{n-1}(P\Gamma_i) \to H_c^{n-1}(\Gamma_i)$ – изоморфизм, так как $P|_{\Gamma_i}$ – гомеоморфизм;

4) степень $\gamma(D_k, P, y) = \gamma(D_k, f, y) > 0$ при $k = i, j$.

Но в силу леммы 4 такое отображение не существует. Пункт в) доказан.

г) Пусть D – открытая область, но в окрестности Γ нет точек, не принадлежащих D (Γ – часть внутренней границы). Выберем V – открытую окрестность Γ такую, что $V \cap \partial D = \Gamma$, $f^{-1}f(V \setminus \Gamma) = V \setminus \Gamma$. Для этого достаточно положить $V = \Gamma \cup (D \setminus f^{-1}f(D \setminus U))$. Тогда $V \setminus \partial D$ распадается на открытые области V_i и для $V \setminus \partial D$ выполнены пункты б) и в) доказываемой теоремы. Значит $f|_{\cup V_i}$ монотонно и $f_0^*: H_c^n(f(\cup V_i)) \to H_c^n(\cup V_i)$ – изоморфизм.

Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} H_c^n(f(\cup V_i)) & \longrightarrow & H_c^n(f(D)) & & \\ \downarrow{\scriptstyle f_0^*} & & \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \\ H_c^n(\cup V_i) & \longrightarrow & H_c^n(D) & \longrightarrow & H_c^n(D \setminus \cup V_i) \end{array}$$

Группа $H_c^n(D \setminus \cup V_i) = 0$, т.к. $D \setminus \cup V_i = \overline{D \setminus \cup V_i} \neq D$.

Аналогично лемме 3 устанавливаем, что f^* – изоморфизм, тогда степень $\gamma(D, f, y) = 1$.

Так как $\gamma(i) > 0$, то согласно [2] $f^{-1}f(c)$ состоит из изолированного множества континуумов отображения и имеет место "приции аргумента":

$$1=\gamma(D,f,y)=\sum_{c'\subset f^{-1}f(c)}\gamma(c'),$$

значит, $\gamma(c')=1$. Из этого равенства видим, что $f^{-1}f(c)=c$, т.е. отображение f монотонно.

Теорема доказана.

Замечание. Из хода доказательства теоремы легко видеть, что она останется верной при замене условия 2), если f определено на Γ, условием 2') для некоторой открытой порции Γ границы ∂D, такой, что $H_c^{n-1}(\Gamma)\neq 0$, f индуцирует эпиморфизм

$$f^*: H_c^{n-1}(f\Gamma)\longrightarrow H_c^{n-1}(\Gamma)$$

и

$$f(\Gamma)\cap C_D(f,\partial D\setminus\Gamma)=\varnothing$$

Теорема 7. Пусть $f: D\to N^n$ и выполнены условия:

1) $C_D(f,\partial D)\cap fD)=\varnothing$;

2) найдется замкнутое множество F, принадлежащее границе, и открытое подмножество $U\subset\partial D$ (где $U-(n-1)$-gm) такое, что $U\setminus F$ несвязно, причем в любой окрестности U лежат внешние точки к D и f непрерывно продолжается на U;

3) $H_c^{n-2}(F\cap U)\neq 0$ и $h^*: H_c^{n-2}(F_1)\longrightarrow H_c^{n-2}(F\cap U)$ - эпиморфизм, где $F_1=f(F\cap U)$, а гомоморфизм h^* групп когомологии индуцирован отображением f;

4) $f(F\cap U)\cap(f(U\setminus F)\cup C_D(f,\partial D\setminus U))=\varnothing$;

5) на каждом континууме отображения $c\subset D$ существует локальная степень $\gamma(c)>0$

Тогда 1) $f|_D$ - монотонное отображение;

2) гомоморфизм $f^*: H_c^n(fD)\longrightarrow H_c^n(D)$, индуцированный отображением f, будет изоморфизмом.

Доказательство. В силу условия 4 найдется открытое подмножество $U_1\subset U$ такое, что $U_1=f^{-1}fU_1$ и F разбивает U_1. Пусть U_0 - связная компонента $U_1\setminus F$, $\overline{U_0}\neq U_1$.

а) Пусть $f^{-1}fU_0=U_0$. В этом случае доказательство теоремы аналогично доказательству, проведенному в теореме 3.3 [4].

в) Пусть $f^{-1}fU_0\neq U_0$. Тогда $A=f^{-1}fU_0$ несвязно. Выберем открытую область $W_0\subset D$, такую, что $U_0\subset\partial W_0$, но $\partial W_0\cap(A\setminus U_0)=\varnothing$ и W_0 - компонента $f^{-1}fW_0$. Последнее возможно в силу того, что U_0 - компонента $f^{-1}fU_0$.

При таком выборе ограничение $f/_{W_0}$ собственное. Аналогично случаю а) можно показать, что $f/_{W_0}$ - монотонное отображение и гомоморфизм $f^*: H_c^n(fW_0) \to H_c^n(W_0)$ - изоморфизм. Заметим, что, в силу не обращения в нуль локальной степени, каждая компонента $W_i \subset f^{-1}fW_0$ отображается на fW_0. Если обозначить $U_i = \partial W_i \cap \partial D$, то, в силу условия I и нашего замечания, $f(U_i) = f(U_0)$. Заметим, что A - область в $(n-1)$-$gm\, U$, $F \supset \partial U_i$ (если рассматривать границу относительно A). Предположим, что компонент W_i больше чем 2. Тогда имеем:

1) $f(U_i) = f(U_0)$;

2) $f(F) \cap f(U_i) = \emptyset$;

3) коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
H_c^{n-2}(F_1) & \longrightarrow & H_c^{n-1}(fU_0) & & \\
\downarrow h^* & & \downarrow f_i^* & & \\
H_c^{n-2}(F \cap U) & \xrightarrow{\delta} & H_c^{n-1}(U_i) & \longrightarrow & H_c^{n-1}(U_i \cup F)
\end{array}$$

Группа $H_c^{n-1}(U_i \cup F) = 0$, т.к. $U_i \cup F = \overline{U_i \cup F} \neq A$.

Тогда из точности нижней строки диаграммы гомоморфизмы δ и δh^* эпиморфны, а из коммутативности диаграммы следует, что f_i^* - эпиморфизм.

Но, как мы установили в лемме 3, отображения с перечисленными свойствами не существуют. Значит, частей W_i не больше двух, а если две, то $U_0 \cup U_1 \cup F = A$.

Пусть выполнено $f(U_0) = f(U_1)$ и $U_0 \cup U_1 \cup F = A$.

Для областей U_0 и U_1 выполнены перечисленные раньше три условия.

Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc}
H_c^{n-1}(fU_0) & \longrightarrow & H_c^{n}(fW_0) & & \\
\downarrow f_i^* & & \downarrow \widetilde{f}_i^* & & \\
H_c^{n-1}(U_i) & \longrightarrow & H_c^{n}(W_i) & \longrightarrow & H_c^{n}(W_i \cup U_i) = 0
\end{array}$$

Благодаря предыдущим расоуждениям из нее легко следует, что $\widetilde{f}_i^*$ – эпиморфизм. Из положительноости отепени следует, что гомоморфизмы $\widetilde{f}_i^*$ сохраняют ориентацию, но тогда должны сохранять ориентацию и гомоморфизмы f_i^*.

Это в свою очередь значит, что $\gamma(U_i, f, y) > 0 \quad i = 1, 0$. Но, как установлено в лемме 4, такое отображение невозможно. Мы уотановили, что $f^{-1} f W_0 = W_0$, f/W_0 – монотонное отображение и $f^*: H_c^n(f W_0) \to H_c^n(W_0)$ – эпиморфизм.

Тогда, иопользовав коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} H_c^n(f W_0) & \longrightarrow & H_c^n(f D) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ H_c^n(W_0) & \longrightarrow & H_c^n(D) & \longrightarrow & H_c^n(D \setminus W_0) = 0 \end{array}$$

в рассуждениях, знакомых нам по теореме 6, установим утверждение теоремы.

Заметим, что доказательство аналогичной теоремы 3.3 в [4] для нульмерного случая неполно, не проанализирован случай в). Здесь этот пробел уотранен.

Пуоть $f: \overline{D} \to N^n$, где $D = D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_k$, D_i – облаоти в n_i-gm $M_i^{n_i}$, $\overline{D}_i \neq M_i^{n_i}$, $\Sigma\, n_i = n$. Ясно, что тогда $H_c^{n_i}(\overline{D_i}) = 0$, $H_c^{\ell}(D_i) = H_c^{\ell}(\overline{D_i}) = 0$ при $\ell > n_i$

Введем обозначения

$$D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_{i-1} \times \overline{D_i} \times \partial D_{i+1} \times \ldots \times \partial D_k = A_i \quad (i = 1, \ldots, k),$$

$$D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_{i-1} \times \partial D_i \times \ldots \times \partial D_k = B_i .$$

Очевидно, что $A_i \setminus B_i = B_{i+1}$ и $\dim A_i = n - k + i$, $\dim B_i = n - k + i - 1$.

Имеет меото

<u>Теорема 8.</u> Пусть $f: \overline{D} \to N^n$ (где D имеет вышеуказанный вид) такое, что:

1) $f(\partial D) \cap f(D) = \emptyset$;

2) $f(B_i) \cap f(B_{i+1}) = \emptyset$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$;

3) $f(B_k) \cap f(\overline{D} \setminus B_k) = \emptyset$;

4) отображение $h_1^*: H_c^{n-k}(fB_1) \to H_c^{n-k}(B_1)$, индуцированное ограничением $f/_{B_1}$, – эпиморфизм;

5) на каждом континууме отображения $c \subset D$ существует локальная степень $\gamma(c) > 0$.

Тогда 1) $f/_D$ – монотонное отображение;

2) гомоморфизм $f^*: H_c^n(fD) \to H_c^n(D)$, индуцированный отображением f, – изоморфизм.

<u>Доказательство.</u> Обозначим

$$h_m^*: H_c^{n-k+m-1}(fB_m) \to H_c^{n-k+m-1}(B_m)$$

гомоморфизм, индуцированный ограничением $f/_{B_m}$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} H_c^{n-k+m-1}(fB_m) & \longrightarrow & H_c^{n-k+m}(fB_{m+1}) & & \\ \downarrow h_m^* & & \downarrow h_{m+1}^* & & \\ H_c^{n-k+m-1}(B_m) & \xrightarrow{\delta_m} & H_c^{n-k+m}(B_{m+1}) & \longrightarrow & H_c^{n-k+m}(A_m) \end{array}$$

По формуле Кюннета

$$H_c^{n-k+m}(A_m) = H_c^{n-k+m}(D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_{i-1} \times \overline{D}_i \times \partial D_{i+1} \times \ldots \times \partial D_k) =$$

$$= \sum_{l+j=n-k+m} H_c^l(D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_{i-1} \times \partial D_{i+1} \times \ldots \times \partial D_k) \otimes H_c^j(\overline{D}_i) \oplus$$

$$\oplus \sum_{l+j=n-k+m+1} H_c^l(D_1 \times D_2 \times \ldots D_{i-1} \times \partial D_{i+1} \times \ldots \times \partial D_k) * H_c^j(\overline{D}_i)$$

$$\dim (D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_{i-1} \times \partial D_{i+1} \times \ldots \times \partial D_k) = n-k+m-\dim D_i .$$

Тогда $H_c^l(D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_{i-1} \times \partial D_{i+1} \times \ldots \times \partial D_k) = 0$

при $l > n-k+m-\dim D_i$.

Но для равенства $l+j = n-k+m-1$ необходимо выполнение одного из неравенств

$l > n-k+m-\dim D_i$ и $j > \dim D_i$.

Отсюда следует, что вторая сумма равна нулю. Аналогично из первой суммы останется только слагаемое

$$H_c^{n-k+m-\dim D_i}(D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_{i-1} \times \partial D_{i+1} \times \ldots \times \partial D_k) \otimes H_c^{\dim D_i}(\bar{D}_i),$$

но $H_c^{\dim D_i}(\bar{D}_i) = 0$, значит, $H_c^{n-k+m}(A_m) = 0$ и, в силу точности нижней строки диаграммы, δ_m – эпиморфизм. Условие 2) обеспечивает собственность отображений [4]. Тогда эпиморфность отображения h_m^* влечет за собой эпиморфность h_{m+1}^*. Отображение h_1^* эпиморфно по условию теоремы. Последовательным применением предыдущих рассуждений получим, что h_k^* – эпиморфизм.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} H_c^{n-1}(fB_k) & \longrightarrow & H_c^n(fD) & & \\ \downarrow h_k^* & & \downarrow f^* & & \\ H_c^{n-1}(B_k) & \xrightarrow{\delta} & H_c^n(D) & \longrightarrow & H_c^n(\bar{D}) = 0; \end{array}$$

ее коммутативность обеспечена условиями 1 и 3. Группа $H_c^n(\bar{D})$ обращается в нуль, так как $\bar{D}$ – замкнутое собственное подмножество M^n. Группы $H_c^n(D)$ и $H_c^n(fD)$ изоморфны $\mathbb{Z}$. Утверждение теоремы теперь легко следует из рассуждений, приведенных в конце доказательства теоремы 6.

<u>Определение 9.</u> Множеством ветвления B_f отображения $f: M^n \longrightarrow N^n$ называется множество точек, в которых f не будет локальным гомеоморфизмом.

Пусть M^{2n} и N^{2n} – комплексные многообразия и $f: D \longrightarrow N^{2n}$ – голоморфное отображение области $D \subset M^{2n}$. Пусть B_f – множество ветвления f. Известно, что для голоморфного отображения $\dim B_f \leq 2n-2$, т.е. $D \setminus B_f$ связно. В силу теоремы Сарда [6], $f(D) \setminus f(B_f)$ всюду плотно в fD. Отображение $f|_{D \setminus B_f}$ локально гомеоморфно, тогда для каждой точки $x \in D \setminus B_f$ существует локальная степень отображения $\gamma(x) = \pm 1$ и, в силу связности $D \setminus B_f$, одного знака. Пусть $\gamma(x) \equiv 1$, если $x \in D \setminus B_f$. В силу теоремы о продолжении [2], на каждом континууме отображения существует локальная степень $\gamma(c) > 0$. Тогда для голоморфных отображений критерии монотонности можно записывать в виде теорем 6-8, опуская требование существования степени $\gamma(c)>0$, которое всегда выполняется. Условия, накладываемые на отображение в теоремах 6-8, обеспечивают его собственность (см. [4]). Если D и D_1 – области эвклидового комплексного пространства C^n, то из [7] (гл.III, B17) известно, что всякое собственное голоморфное отображение $f: D\to D_1$ открыто и изолировано. Для таких отображений монотонность будет совпадать с гомеоморфностью. Значит, установленные нами критерии монотонности содержат в себе принципы граничного соответствия нульмерных открытых отображений как частный случай.

Пример 10. Известно, что классическая формулировка принципа граничного соответствия требует лишь, чтобы $f:\overline{D}\to R^2$ было внутренним (т.е. изолированным и нульмерным) отображением жордановой области D и гомеоморфизмом на ∂D. В формулировки наших теорем входит казалось бы излишнее требование

$$f(D)\cap f(\partial D)=\emptyset \qquad (*)$$

(или его видоизменения). Оказывается, как мы увидим ниже, если не требовать никаких ограничений на границу (типа ∂D -связное многообразие), условие (*) необходимо даже в плоском случае.

Рассмотрим отображение области

$$\overline{D}=\{(x,y)|[x^2+y^2\leq 4]\wedge[(x-1)^2+y^2\geq 1]\}$$

на круг

$$\overline{D}_1=\{(x,y)|[x^2+y^2\leq 4]\}.$$

Для ясности описания ограничимся сначала отображением подобласти $\overline{D'}\subset\overline{D}$ на подобласть $\overline{D_1'}\subset\overline{D_1}$:

$$\overline{D'}=\{(x,y)|[(x,y)\in\overline{D}]\wedge[x\geq 0]\},$$

$$\overline{D_1'}=\{(x,y)|[(x,y)\in\overline{D}_1]\wedge[(x\geq 0)\vee[(x-1)^2+y^2\leq 1]]\}.$$

Легко видеть, что области $\overline{D'}$ и $\overline{D_1'}$ гомеоморфны между собой, более того, их можно отобразить друг на друга некоторым гомеоморфизмом φ, оставляющим на месте совпадающую часть границы и переводящим $\lambda=\{(x,y)|[(x-1)^2+y^2=1]\wedge[x>0]\}$

в

$$\lambda_1=\{(x,y)|[(x-1)^2+y^2=1]\wedge[x<0]\},$$

$\lambda \subset \partial D'$, $\lambda_1 \subset \partial D'_1$

Доопределим φ до отображения f области $\bar{D}$ по принципу симметрии:

$$f(z)=\begin{cases}\varphi(z), & z\in\overline{D'},\\ \overline{\varphi(\bar z)}, & z\notin\overline{D'}\end{cases}$$

($\bar z$ и $\bar\varphi$ комплекcно сопряженные к z и φ , соответственно).

Нетрудно убедиться, что так построенное отображение f локально гомеоморфно во всех точках $z\in D$ и $f|_{\partial D}$ - гомеоморфизм. Глобально f - не гомеоморфизм, подобласть $V=\{(x,y)|(x-1)^2+y^2\leq 1\}$ области D, при отображении f покрывается дважды. Естественно, условие ($*$) не выполнено.

<u>Утверждение II.</u> Если f - открытое отображение, то условие ($*$) автоматически выполняется при требовании, что ∂D - связное многообразие и $f|_{\partial D}$ - гомеоморфизм.

<u>Доказательство.</u> В силу открытости f , $\partial fD\subset f\partial D$ [8]. Пусть условие ($*$) не выполнено, тогда $\partial fD\neq f\partial D$. Рассмотрим $G=f\partial D\setminus\partial fD$ - открытое подмножество $f\partial D$. В силу непрерывности f , $f^{-1}G$ - открытое подмножество ∂D. Тогда $\partial D\setminus f^{-1}G$ гомеоморфно ∂fD , в силу гомеоморфизма на границе. Отсюда следует, что $H^{n-1}(\partial D\setminus f^{-1}G)\simeq H^{n-1}(\partial fD)\neq 0$. Неравенство нулю последней группы следует из точной когомологической последовательности пары $(f\bar D, \partial fD)$. Но $\partial D\setminus f^{-1}G\neq\partial D$ - замкнутое подмножество многообразия ∂D , поэтому $H^{n-1}(\partial D\setminus f^{-1}G)=0$. Из полученного противоречия следует доказательство.

Литература

1. R. L. Wilder, Topology of Manifolds, Amer. Math. Soc. Coll. Publications, XXXII, 1949.
2. Ю.Б.Зелинский, О непрерывных отображениях областей обобщенных многообразий, в сб. "Метрические вопросы теории функций и отображений", вып.IУ, "Наукова думка", К., 1973, 79-91.
3. A. Borel, Seminar on transformation groups, Princeton University Press, 1960.

4. Ю.Б.Зелинский, Некоторые критерии гомеоморфизма при отображении областей эвклидова пространства, Труды УШ летней математичеокой школы, Издание Ин-та математики АН УССР, К., 1971, 194-211.
5. К.Куратовский, Топология, т.I, "Мир", М., 1966.
6. С.Стернберг, Лекции по дифференциальной геометрии, "Мир", М., 1970.
7. Р.Ганнинг, Х.Росси, Аналитические функции многих комплексных переменных, "Мир", М., 1969.
8. Ю.Ю.Трохимчук, О непрерывных отображениях облаотей эвклидова пространства, УМЖ, ХУI, № 2, 1964, 196-211.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ПУЧКОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Ю.Б.ЗЕЛИНСКИЙ

(Киев)

Целью этой работы является, во-первых, установление критерия монотонности при собственном отображении многообразий, если известно описание отображения пучков, индуцированного этим собственным отображением над дополнением к замкнутому множеству A, $\dim A \leq n-1$. В частности, устанавливается факт, что собственное отображение с открытым всюду плотным множеством континуумов взаимной однозначности монотонно. Во-вторых, дан положительный ответ на один из вопросов А.Косинского [3].
Рассмотрение этих вопросов требует привлечения теории когомологий с коэффициентами в пучках, изложение которой имеется в книге Р.Годемана [2]. Так как всякая попытка хотя бы поверхностно изложить определения этой теории повлекла бы за собой значительное увеличение объема работы, мы условимся, что все понятия и определения, используемые нами, будут в точности совпадать с соответственными понятиями и определениями, принятыми в указанной выше книге Р.Годемана.

§ 1. О континуумах взаимной однозначности

Определение I.0. Пусть X и Y – топологические пространства. Отображение $f: X \to Y$ называется собственным, если прообраз при отображении f каждого компактного множества пространства Y компактен.

Пусть B – подмножество в топологическом пространстве X. Следуя П.С.Александрову [I], относительной размерностью $rd_X B$ множества B в X будем называть наибольшую из размерностей $\dim F$ замкнутых в X множеств F, содержащихся в B. Если множество B пусто, то будем считать, что $rd_X B = -\infty$.

Пусть $\mathcal{L}$ – пучок абелевых групп над пространством Y. Через $H_c^q(Y; \mathcal{L})$ обозначим q-мерную группу когомологий с компактными носителями с коэффициентами в пучке, $\mathcal{L}_y$ – слой пучка $\mathcal{L}$ над точкой $y \in Y$. Если f – непрерывное отображение пространства X в Y, то через $\mathcal{L}^*$ будем обозначать обратный образ пучка $\mathcal{L}$ над пространством X, индуцированный отображением f. Известно,

что если $\mathcal{B} = Y \times G$ – постоянный пучок, то $\mathcal{B}^* = X \times G$.
Через $f\mathcal{B}^*$ обозначим прямой образ пучка $\mathcal{B}^*$, индуцированный отображением f. Производный пучок $R^q f\mathcal{B}^*$ порожден предпучком

$$U \to H^q(f\mathcal{B}^*(U)).$$

В дальнейшем предполагаем, что $\mathcal{B} = Y \times \mathbb{Z}$ есть постоянный пучок со слоем $\mathbb{Z}$, тогда $\mathcal{B}^* = X \times \mathbb{Z}$. Пучки с постоянным слоем $\mathbb{Z}$ будем обозначать символом $\mathbb{Z}$.
Приведем без доказательства ряд вспомогательных лемм, доказанных Е.Г.Скляренко, которые потребуются нам в последующих рассуждениях.

Лемма 1.1. [5]. Пусть $\mathcal{A}$ – пучок абелевых групп над паракомпактным пространством Y, сосредоточенный на множестве $B \subset Y$; пусть d – относительная размерность множества B в Y. Тогда $H^p(Y;\mathcal{A}) = 0$ для всех $p > d$.

Лемма 1.2.[6]. Пусть $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ – пучки абелевых групп над паракомпактным пространством Y и $\alpha: \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ – гомоморфизм этих пучков, ядро и коядро которого сосредоточены на множествах относительной размерности $< n$. Тогда отображение
$H^n(Y;\mathcal{B}_1) \to H^n(Y;\mathcal{B}_2)$ эпиморфно, а отображения
$H^p(Y;\mathcal{B}_1) \to H^p(Y;\mathcal{B}_2)$ при $p > n$ изоморфны. Если, кроме того, α – эпиморфизм, то отображение $H^n(Y;\mathcal{B}_1) \to H^n(Y;\mathcal{B}_2)$ также изоморфно.

Перейдем к основному утверждению этого параграфа.

Теорема 1.3. Пусть M^n и N^n – n-gm, $D \subset M^n$, $D_1 \subset N^n$ – их открытые области, $f: D \xrightarrow{f} D_1$ – собственное отображение и выполнены условия:

1) найдется замкнутое множество $A \subset fD$, такое, что прообразы всех точек из $fD \setminus A$ ацикличны ($H_c^q(f^{-1}y) = 0$ при $q > 0$, $H_c^0(f^{-1}y) = \mathbb{Z}$);
2) $\dim f^{-1}A \leq n-1$;
3) $\dim A \leq n-1$.

Тогда $fD = D_1$ и f – монотонное отображение.

Доказательство. Рассмотрим спектральную последовательность Лерэ отображения f. Начальный член этой последовательности имеет вид

$$E_2^{p,q} = H_c^p(fD; R^q f\mathbb{Z}),$$

так как $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}$ и $R^q f\mathbb{Z}^* = R^q f\mathbb{Z}$. По условию отображение f собственно, поэтому для всякой точки $y \in fD$ полные прообразы ее окрестностей образуют фундаментальную систему окрестностей в D

множества $f^{-1}y$. Так как $f^{-1}y$ – замкнутое подмножество M^n, то отсюда следует, что

$$(R^q f \mathbb{Z})_y = \varinjlim_{y \in U(y)} \operatorname{ind} H^q(f^{-1}(U(y)); \mathbb{Z}) = H^q(f^{-1}y; \mathbb{Z}).$$

(см. [2], гл.2, теорема 4.II.I).

Поэтому при каждом $q>0$ пучок $R^q f \mathbb{Z}$ сосредоточен на множестве A. В силу того, что $\dim A = n-1$, имеем

$$E_2^{p,q} = 0 \qquad \text{при } q>0 \quad \text{и } p=n .$$

Из точной последовательности

$$\ldots \longrightarrow H^p_{\Phi|X\setminus A}(X\setminus A; \mathcal{B}) \longrightarrow H^p_{\Phi}(X; \mathcal{B}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^p_{\Phi|A}(A; \mathcal{B}) \longrightarrow H^{p+1}_{\Phi|X\setminus A}(X\setminus A; \mathcal{B}) \longrightarrow \ldots$$

(см. [2], гл.2, теорема 4.10.I)

получим:

$$\ldots \longrightarrow H^p_{\Phi|fD\setminus A}(fD\setminus A; R^q f\mathbb{Z}) \longrightarrow H^p_{\Phi}(fD; R^q f\mathbb{Z}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^p_{\Phi|A}(A; R^q f\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{p+1}_{\Phi|fD\setminus A}(fD\setminus A; R^q f\mathbb{Z}) \longrightarrow \ldots$$

Согласно лемме I.I,

$$H^p_{\Phi|fD\setminus A}(fD\setminus A; R^q f\mathbb{Z}) = 0$$

для всех p, при $q>0$.

Тогда

$$H^p_{\Phi}(fD; R^q f\mathbb{Z}) \approx H^p_{\Phi|A}(A; R^q f\mathbb{Z})$$

для всех p, при $q>0$.

Рассмотрим спектральную последовательность Лере отображения $f|A$. Начальный член этой спектральной последовательности имеет вид

$$F_2^{p,q} = H^p_c(A; R^q f\mathbb{Z}) .$$

Но, согласно предыдущим рассуждениям,

$$H_c^p(\{D; R^q\}\mathbb{Z}) \approx H_c^p(A; R^q\}\mathbb{Z}) \qquad \text{при } q>0 \ .$$

Тогда $F_2^{p,q} = E_2^{p,q}$ для всех p, при $q>0$.
Так как предельные группы $F_\infty^{p,q}$ известным образом [2] связаны с группами $H^{p+q}(A;\mathbb{Z})$, то $F_\infty^{p,q}=0$ при $p+q > n-1$, так как $\dim A \leqslant n-1$.

Для дальнейших рассуждений нам потребуется ряд утверждений.

Лемма 1.4. (Скляренко [6]).

Пусть $K=\sum_i K_i$ и $L=\sum_i L_i$ - два цепных комплекса с дифференциалами степени +1 и $\alpha: K \to L$ - гомоморфизм этих цепных комплексов, являющийся эпиморфизмом в размерности s, изоморфизмом в размерностях $s<i<S$ и мономорфизмом в размерности S; тогда индуцированное гомоморфизмом α отображение когомологий этих комплексов является эпиморфизмом в размерности s, изоморфизмом в размерностях $s<i<S$ и мономорфизмом в размерности S.

Утверждение этой леммы будет использовано нами для установления изоморфизмов между группами из таблиц E_k и F_k.

Рассмотрим комплексы $K^{p,q}$ и $L^{p,q}$ $(n-k \leqslant p \leqslant n-1, n-p \leqslant q)$, определенные следующим образом:

$$K_i^{p,q} = E_k^{p+(i-n)k,\ q-(i-n)(k-1)} \ ,$$

$$L_i^{p,q} = F_k^{p+(i-n)k,\ q-(i-n)(k-1)} \ ; \qquad (*)$$

дифференциалами в этих комплексах служат дифференциалы в E_k и F_k.

Лемма 1.5. Пусть в таблицах E_k и F_k имеют место соотношения:

1) $K_i^{p,q} = E_k^{p+(i-n)k,\ q-(i-n)(k-1)} = F_k^{p+(i-n)k,\ q-(i-n)(k-1)} = L_i^{p,q}$,

2) $E_k^{p,q} = F_k^{p,q} = 0$ для $q \neq 0$, если $p=n$, и для всех q, если $p>n$.

Тогда в таблицах E_{k+2} и F_{k+2} аналогичные равенства имеют место при замене k на $k+1$.

Доказательство. Нам нужно показать, что

$$''K_i^{p,q} = E_{k+2}^{p+(i-n)(k+1),\, q-(i-n)k} = F_{k+2}^{p+(i-n)(k+1),\, q-(i-n)k} = ''L_i^{p,q}$$

при $n-k-1 \le p \le n-1, \quad n-p \le q$.
Второе равенство выполняется тривиально.
В таблицах E_{k+1} и F_{k+1} будут выполняться равенства, записанные в условии леммы, потому что к комплексам $K^{p,q}$ и $L^{p,q}$ применима лемма I.4, если положить $s=-\infty$, $S=+\infty$, а известно, что элементами таблиц E_{k+1} и F_{k+1} будут группы когомологий таблиц E_k и F_k. Дифференциалы таблиц E_{k+1} и F_{k+1} действуют теперь на комплексах $'K^{p,q}$, $'L^{p,q}$ соответственно:

$$'K_i^{p,q} = E_{k+1}^{p+(i-n)(k+1),\, q-(i-n)k},$$
$$(**)$$
$$'L_i^{p,q} = F_{k+1}^{p+(i-n)(k+1),\, q-(i-n)k};$$

при $n-k-1 \le p \le n-1, \quad n-p \le q$.
Для того, чтобы выполнялось равенство $'K_i^{p,q} = 'L_i^{p,q}$, а значит, в силу предыдущих рассуждений, и равенство $''K_i^{p,q} = ''L_i^{p,q}$ (комплексы $''K^{p,q}$, $''L^{p,q}$ образованы группами когомологий комплексов $'K^{p,q}$, $'L^{p,q}$ соответственно), достаточно показать, что каждая клетка $E_m^{i,j}$ $(F_m^{i,j})$, выделенная равенствами $(**)$, принадлежит множеству клеток, выделенному равенствами $(*)$.
Уточним, что в данном случае понимается под принадлежностью клетки выделенному множеству. Для множеств клеток, выделенных равенствами $(*)$, $(**)$, введем обозначения $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ соответственно. Будем говорить, что клетка $E_m^{i,j}$ $(F_m^{i,j})$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}$, если множеству $\mathfrak{M}$ принадлежит клетка $E_k^{i,j}$ $(F_k^{i,j})$ (т.е. принадлежность определяется независимо от нижнего индекса). Легко видеть, что если $E_m^{p,q}$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}$, то и клетка E_m^{p,q_1}, где $q_1 \ge q$, также принадлежит $\mathfrak{M}$. Поэтому достаточно показать, что если у клеток $E_{k+1}^{i,j}$ и E_{k+1}^{i,j_1}, выделенных равенствами $(*)$ и $(**)$ соответственно, первые индексы равны, то для вторых индексов имеет место неравенство $j \le j_1$. Заметим также, что достаточно считать

I) $n-k \le p_1 \le n-1, \quad n = p_1 + q_1, \quad i_1 \le n$ для семейства клеток из $\mathfrak{M}$, так как при $i_1 > n$

$$K_{i_1}^{p,q} = L_{i_1}^{p,q} = 0;$$

2) $n-k-1 \leq p_2 \leq n-1$, $n=p_2+q_2$, $i_2 \leq n$ для семейства клеток из $\mathfrak{N}$ по аналогичной причине.
Пусть первые индексы совпадают:

$$p_1+(i_1-n)k = p_2+(i_2-n)(k+1) \qquad (*)$$

Нужно показать, что выполнено неравенство

$$q_1-(i_1-n)(k-1) \leq q_2-(i_2-n)k \qquad (**)$$

Из того, что $p_1+q_1=n$, $p_2+q_2=n$ и (I.6), получим

$$p_1=n-q_1, \quad p_2=n-q_2,$$

$$n-q_1+(i_1-n)k = n-q_2+(i_2-n)(k+1)$$

или $\quad q_1-(i_1-n)k = q_2-(i_2-n)k-i_2+n$

Добавим к обеим частям равенства число (i_1-n).
Получим

$$q_1-(i_1-n)(k-1)=q_2-(i_2-n)k-i_2+i_1 .$$

Для выполнения неравенства (**) необходимо и достаточно чтобы

$$i_2 \geq i_1$$

Из равенства (*) имеем

$$p_1+i_1k = p_2+i_2k+i_2-n .$$

Используя неравенства

$$p_1 \geq n-k, \quad n-1 \geq p_2, \quad i_2-n \leq 0,$$

получим

$$n-k+i_1k \leq n-1+i_2k ,$$

$$(i_2-i_1)k \geq (1-k),$$

$$i_2-i_1 \geq \frac{1-k}{k} > -1 .$$

Так как разность i_2-i_1 должна быть целым числом, то

$$i_2-i_1 \geq 0 \qquad \text{и} \qquad i_2 \geq i_1$$

Отсюда следует, что неравенство (**) выполнено.
Лемма доказана.

Лемма 1.6. Если при некотором K для таблиц E_k и F_k выполнены условия леммы 1.5, то для предельных таблиц E_∞ и F_∞ имеют место равенства

$$E_\infty^{p,q} = F_\infty^{p,q} \qquad \text{при } p+q \geqslant n, \quad q \neq 0.$$

Доказательство легко следует из того, что

$$E_n \cong E_{n+1} \cong \ldots \cong E_\infty,$$
$$F_n \cong F_{n+1} \cong \ldots \cong F_\infty$$

и из леммы 1.5, которую применяем шаг за шагом, пока не придем к $K=n$.

Возвращаемся к доказательству теоремы.
В нашем случае для таблиц E_2 и F_2 выполнены условия леммы 1.5. и поэтому, согласно лемме 1.6, $E_\infty^{p,q} = F_\infty^{p,q}$ при $p+q \geqslant n$, $q>0$. Но $F_\infty^{p,q}=0$ при $p+q>n-1$, отсюда следует, что $E_\infty^{p,q}=0$ при $p+q>n-1, q>0$.
Предельная группа E_∞ известным образом связана с фильтрованной группой

$$H_c^n(D;\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}.$$

Вследствие доказанного, на n-той диагонали таблицы E_∞ находится только одна не нулевая группа $E_\infty^{n,0}$. Тогда известно, что $H_c^n(D;\mathbb{Z}) \approx E_\infty^{n,0}$. Известно также, что отображение

$$E_2^{p,0} \longrightarrow E_\infty^{p,0}$$

эпиморфно для всех p.

Установим связь между группой $E_2^{n,0}$ и когомологиями пространства fD. Заметим, что для группы $H_c^n(fD;\mathbb{Z})$ имеем только две возможности:

$$H_c^n(fD;\mathbb{Z}) = \begin{cases} 0, & \text{если } fD \neq D_1, \\ \mathbb{Z}, & \text{если } fD = D_1 \end{cases}$$

так как, в силу собственности отображения f, fD - замкнутое подмножество D_1.

Рассмотрим естественное вложение пучка $\mathbb{Z}$ в пучок $R^0 f\mathbb{Z}$.
Это вложение порождает гомоморфизм когомологий

$$H_c^n(fD;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_c^n(fD; R^0 f\mathbb{Z}) = E_2^{n,0}$$

Так как рассматриваемое вложение пучков является изоморфизмом вне множества A и по условию $\dim A \le n-1$, то в силу леммы I.2 отображение

$$H_c^n(fD;\mathbb{Z}) \longrightarrow E_2^{n,0} \qquad \text{эпиморфно.}$$

Тогда эпиморфизмом будет и суперпозиция

$$H_c^n(fD;\mathbb{Z}) \to H_c^n(fD;R^0 f\mathbb{Z}) = E_2^{n,0} \to E_\infty^{n,0} = H_c^n(D,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

Отсюда получим, что, во-первых, $H_c^n(fD;\mathbb{Z}) \ne 0$ и, в силу сделанного выше замечания, $H_c^n(fD,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ и $fD = D_1$, во-вторых, эпиморфное отображение

$$\mathbb{Z} = H_c^n(fD;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_c^n(D;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

может быть только изоморфизмом.

Докажем теперь монотонность отображения f. Пусть монотонность f не имеет места. Тогда найдется точка $y_0 \in D_1$, такая, что $f^{-1}y_0$ не связно. Выберем два континуума отображения C_1 и $C_2 \subset f^{-1}y$ и их открытые окрестности $U(c_1)$ и $U(c_2)$ соответственно, такие, что $U(c_1) \cap U(c_2) = \emptyset$. Согласно уже доказанному, заменяя D на $U(c_i)$, $i=1,2$, легко получить, что $H_c^n(fU(c_i)) = \mathbb{Z}$, а значит, $f(U(c_i))$, $i=1,2$, - открытые окрестности точки y_0 и

$$f(U(c_1)) \cap f(U(c_2)) = V \ne \emptyset .$$

Тогда V - открытая окрестность точки y_0 и поэтому, согласно условию теоремы, найдется точка $y_1 \in V$, такая, что $f^{-1}y_1$ связно. Но это противоречит тому, что y_1 имеет прообразы в непересекающихся областях

$$W_i = U(c_i) \cap f^{-1}(V), \quad i=1,2.$$

Значит $f^{-1}y_0$ связно и f монотонно.

Теорема доказана.

<u>Следствие I.7.</u> Собственное отображение областей топологических многообразий с открытым всюду плотным множеством точек взаимной однозначности, (т.е. точек $x = f^{-1}f(x)$), монотонно.

<u>Доказательство.</u> Пусть $E \subset D$ - открытое всюду плотное в D множество точек взаимной однозначности. Тогда $E_1 = fE$ всюду плотно в fD. Обозначим $A = f(D \setminus E) = f(D) - f(E)$, тогда $\dim f^{-1}A = \dim(D\setminus E) \le n-1$, $\dim A \le n-1$ в силу того, что n-мерное подмножество топологического многообразия должно содержать внутренние точки, а это невозможно в силу плотности E

в D и E_1 в D_1. Отсюда следует, что мы находимся в условиях применения теоремы I.3.

Заметим, что, используя известный пример Лелека [49], легко построить не монотонное отображение области топологического многообразия в многообразие той же размерности, обладающее плотным (но неоткрытым!) множеством точек взаимной однозначности.

<u>Замечание I.8.</u> Требование того, что A - замкнутое не более чем $(n-1)$ -мерное подмножество, потребовалось нам только при доказательстве равенства групп $E_2^{p,q} = F_2^{p,q}$ при $q>0$. Если отображение f нульмерно, то это равенство заведомо выполнено, так как $E_2^{p,q} = F_2^{p,q} = 0$ при $q>0$. Но тогда $E_2^{p,q} \approx E_\infty^{p,q}$ и из коротких рассуждений, проведенных при доказательстве предыдущей теоремы после леммы I.6, получим теорему Трохимчука-Бондаря о точках взаимной однозначности:

Пусть $f: D \to R^n$ - нульмерное отображение. Если множество точек взаимной однозначности E плотно в D, то f - гомеоморфизм (точнее - топологическое вложение).

Введем обозначения:

$$B_0 = \{y \in fD \mid H^0(f^{-1}y; Z) \neq Z\},$$

$$B_k = \{y \in fD \mid H^k(f^{-1}y; Z) \neq 0\},\ k>1.$$

Обозначим через d_k относительную размерность множества B_k в fD.

Пусть $\ell = 1 + \max\limits_{0 \le k < n} (d_k + k)$,

где ℓ - некоторое натуральное число.

<u>Теорема I.9.</u> Пусть D и D_1 - области n-gm M^n и N^n соответственно и $f: D \to D_1$ - собственное отображение такое, что $\ell \le n$. Тогда

1) отображение когомологий $H_c^n(D_1, Z) \to H_c^n(D, Z)$, индуцированное отображением f, изоморфно.

2) f - монотонное отображение.

Первое утверждение теоремы следует из теоремы Скляренко ([6], теорема I). Второе - получается рассуждениями теоремы I.3, проведенными после леммы I.6.

§ 2. К проблеме Штейнгауза

Пусть на плоскости лежит окружность S. Каждая пара антиподальных точек из S соединена между особой дугой, лежащей в области, ограниченной S. Эти дуги зависят непрерывно от их концов. Ясно, что две различные дуги пересекаются. Существуют ли три различные дуги, которые имеют общую точку?

Эта проблема поставлена Г.Штейнгаузом в 1953 году. В 1958 году А.Косинский [3] дал положительный ответ на эту проблему даже при более широких предположениях. Окружность S он заменил $(n-1)$ -мерной сферой в эвклидовом пространстве R^n, дуги - ациклическими континуумами, непрерывную зависимость от концов - полунепрерывностью сверху. При этом предположении он доказал, что существуют три континуума, имеющие общую точку. Более того, он доказал, что замыкание множества точек, в которых пересекается не менее трех континуумов, при предположении, что каждая точка шара, ограниченного S^{n-1}, принадлежит не более чем конечному количеству континуумов, имеет размерность не меньше чем $n-1$. Однако во всех известных примерах размерность этих точек в точности равнялась n. Поэтому А.Косинским был поставлен вопрос, будет ли всегда размерность точек, в которых пересекается не меньше трех континуумов, равна n, если предполагать, что в каждой точке пересекается только конечное число соединяющих континуумов.

Цель этого параграфа дать положительный ответ на вопрос А.Косинского даже при более общих предположениях.

Пусть X и Y - компактные пространства и пусть $\Phi: X \to Y$ - многозначное отображение из X в Y, т.е. для каждого $x \in X$ $\Phi(x)$ - подмножество Y. Множество

$$M = \underset{(x,y)}{E} [y \in \Phi(x)] \subset X \times Y$$

называется графиком Φ. Многозначное отображение называют непрерывным, если график Φ замкнут в $X \times Y$. Непрерывное многозначное отображение $\Phi: X \to Y$ может быть рассматриваемо как полунепрерывное сверху отображение X в пространство 2^Y непустых замкнутых подмножеств Y. Тройку $\mathcal{F} = \{X, Y, \Phi\}$ назовем семейством, $\Phi(x)$ - элементом из $\mathcal{F}$. Семейство называется ацикличным, если ацикличен каждый его элемент. (Мы используем теорию когомологий с компактными носителями с коэффициентами $mod\, 2$; множество X называется ацикличным, если оно связно и если $H_c^k(X) = 0$ при $k \geq 1$).

Пусть $\mathcal{F}_i = \{X, Y, \Phi_i\}$, $i = 1,2$ - два семейства. Назовем семейство $\mathcal{F}_1$ продолжением семейства $\mathcal{F}_2$, если $\Phi_1(x) \supset \Phi_2(x)$ для всех $x \in X$. Q^n будет обозначать единичный n-мерный шар в эвклидовом пространстве, S^{n-1} - его границу, P^{n-1} - проективное пространство, полученное из S^{n-1} отождествлением антиподальных точек.

Отображение $K: S^{n-1} \to P^{n-1}$ индуцирует семейство $\{P^{n-1}, Q^n, K^{-1}\}$, которое назовем антиподальным семейством.

Пусть $\mathcal{F} = \{X, Y, \Phi\}$ - семейство. Скажем, что точка $a \in Y$ имеет порядок N, если a принадлежит в точности N различным элементам из $\mathcal{F}$.

Скажем, что точка $a \in Y$ нульмерного порядка, если множество $K = \{x \mid \Phi(x) \supset a\}$ имеет размерность 0 $(\dim K = 0)$

Будем обозначать через $g: M \to Q^n$ и $p: M \to P^{n-1}$ соответствующие проекции графика.

Лемма 2.1. Пусть φ - инволюция без неподвижных точек на S^{n-1} и пусть $\mathcal{F}_1 = \{P, Q^n, K^{-1}\}$ - семейство, индуцированное инволюцией φ. Пусть $\mathcal{F} = \{P, Q^n, \Phi\}$ - продолжение семейства $\mathcal{F}_1$ и пусть $M \subset R = P \times Q^n$, $M_1 \subset R$ - графики для $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$ соответственно.

Предположим, что отображение $i^*: H_c^{n-1}(M) \to H_c^{n-1}(M_1)$ тривиально, где $i: M_1 \to M$ - отображение вложения. Наконец, пусть каждая точка из Q^n нульмерного порядка по отношению к $\mathcal{F}$.

Тогда множество точек, которые имеют порядок ≥ 3, имеет размерность n.

Покажем сначала, как из приведенной леммы следует ответ на вопрос Косинского. Легко видеть, что соединение антиподальных точек сферы S^{n-1} ацикличными континуумами индуцирует ацикличное семейство $\mathcal{F} = \{P^{n-1}, Q^n, \Phi\}$ и задача сводится к следующему утверждению.

Теорема 2.2. Пусть $\mathcal{F} = \{P^{n-1}, Q^n, \Phi\}$ - ациклическое продолжение антиподального семейства $\mathcal{F}_1$ и предположим, что каждая точка из Q^n нульмерного порядка по отношению к $\mathcal{F}$. Тогда множество точек, которые имеют порядок ≥ 3, имеет размерность n.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H_c^{n-1}(P^{n-1}) & \xrightarrow{K^*} & H_c^{n-1}(S^{n-1}) \\ \downarrow p^* & & \downarrow g_1^* \\ H_c^{n-1}(M) & \xrightarrow{i^*} & H_c^{n-1}(M_1) \end{array},$$

где M и M_1 – графики $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_1$.
Легко видеть (см. [3]), что диаграмма коммутативна. Мы используем теорию когомологий $mod 2$, поэтому отображение κ^* тривиально, а значит тривиальна и суперпозиция гомоморфизмов $g_1^* \kappa^*$.
В силу коммутативности диаграммы, гомоморфизм $i^* p^*$ тривиален. Согласно условию теоремы, проекция p – ациклическое отображение; из теоремы Вьеториса-Бегла следует, что p^* – изоморфизм, а значит, i^* – тривиальный гомоморфизм.

Мы показали тем самым, что утверждение теоремы 2.2 следует их леммы 2.1.

Перед тем, как доказать эту лемму, перечислим без доказательства ряд фактов, установленных А.Косинским [3] или устанавливаемых легко методами вышеуказанной статьи (пункты 2.5, 2.6).

Предположим, что семейства $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}$ удовлетворяют условиям леммы. Если $a \in Q^n$, то множество A из R такое, что

$$A = \underset{(x,y)\in R}{E} [y = a]$$

называется осью через точку a.

<u>Замечание 2.3.</u> Без нарушения общности можно считать, что существует открытая окрестность U для S^{n-1} в Q^n такая, что каждая точка из U принадлежит только одному элементу из $\mathcal{F}$.

<u>Утверждение 2.4.</u> Отображение $g_1 : M_1 \to S^{n-1}$ – гомеоморфизм.

<u>Утверждение 2.5.</u> Пусть M' – компактное подмножество R, содержащее M_1. Если гомоморфизм

$$i^* : H_c^{n-1}(M') \to H_c^{n-1}(M)$$

тривиален, то $\bar{g}(M') = Q^n$ ($\bar{g} : R \to Q^n$ – проекция).

Пусть $g' : M' \setminus M_1 \to \bar{g}(M' \setminus M_1)$ – отображение, индуцированное отображением $\bar{g}$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
H_c^{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{\delta_1^*} & H_c^n(\bar{g}(M' \setminus M_1)) \\
\downarrow g_1^* & & \downarrow g'^* \\
H_c^{n-1}(M') + H_c^{n-1}(M_1) & \xrightarrow{\delta^*} & H_c^n(M' \setminus M_1)
\end{array}$$

Мы имеем право записать такую диаграмму, так как вследствие замечания 2.3 можно считать, что $g(M_1) \cap g(M' \setminus M_1) = \emptyset$. (*)

Из точности нижней строки и тривиальности i^* получим, что δ^* - мономорфизм. Отображение g_1^* - изоморфизм в силу 2.4. Из коммутативности диаграммы следует, что $g'^*\delta_1^* = \delta^* g_1^*$ - мономорфизм, а значит, δ_1^* - мономорфизм. Это, в свою очередь, возможно только тогда, когда

$$H_c^n(\bar{g}(M'\setminus M_1)) \neq 0 \quad \text{, т.е. } \bar{g}(M'\setminus M_1) = Q^n \setminus S^{n-1},$$

так как $\bar{g}(M'\setminus M_1)$ - замкнутое подмножество $Q^n \setminus S^{n-1}$ (в силу (*)). Очевидно теперь, что $\bar{g}(M') = Q^n$, так как $\bar{g}(M_1) = S^{n-1}$.

Кроме этого получим, что δ_1^* - изоморфизм, так как

$$H_c^{n-1}(S^{n-1}) \approx H_c^n(Q^n \setminus S^{n-1}) \approx \mathbb{Z}_2 \quad \text{и } g'^* \text{ - мономорфизм.}$$

Заметим, что из условия леммы 2.I и точности последовательности

$$H_c^{n-1}(M) \xrightarrow{i^*} H_c^{n-1}(M_1) \xrightarrow{\delta^*} H_c^n(M\setminus M_1)$$

получаем, что отображение δ^* - мономорфизм.
Пусть α - фундаментальный класс M_1, т.е. образующая $H_c^{n-1}(M_1)$. Пусть M_0 - компактное подмножество M, содержащее M_1, такое, что $M_0 \setminus M_1$ - минимальный носитель коцикла $\delta^*\alpha$. Согласно 2.5 имеем утверждение:

<u>Лемма 2.6.</u> Каждая ось пересекает M_0 по меньшей мере в одной точке.

А.Косинский показал, что g не может гомеоморфно отображать M_0 на Q^n.

Согласно условию леммы и предыдущим утверждениям, мы имеем нульмерное отображение g множества M_0 на Q^n, такое, что $g|_{M_1}$ - гомеоморфизм, а $f|_{M_0\setminus M_1}$ - собственное отображение. Принципы граничного соответствия, рассматриваемые в предыдущей работе, здесь не применимы, так как M_0 в общем случае не многообразие.

<u>Утверждение 2.7.</u> Пусть $a \in \operatorname{Int} Q^n$, тогда найдется точка $x \in g^{-1}(a)$ такая, что для произвольной окрестности $W(x)$, $a \in \operatorname{Int} g(W(x))$.

Если это не так, тогда для каждой точки $x_i \in g^{-1}(a)$ найдется окрестность $W_i(x_i)$ такая, что $a \in \partial g(W_i(x_i))$. Выберем конечную совокупность W_i $i = 1, 2, \ldots, i_0$ открытых окрестностей, покрывающую $g^{-1}(a)$ (это возможно в силу того, что $g^{-1}(a)$ - компакт). Окрестности W_i можно считать попарно не пересекающимися, так как мы всегда легко можем свести конечную совокупность их к непересекающейся системе окрестностей, выбрасывая из последующих элементов части, которые входят в предыдущие и их границу. Выберем достаточно малую окрестность $U(a)$ точки a, такую, что $g^{-1}U(a) \subset \bigcup_{i=1}^{i_0} W_i$. Очевидно, что

$$a \in \partial g(W_i \cap g^{-1}U(a)) \quad i = 1, 2, \dots, i_0 .$$

Гомоморфизм

$$g_i^*: H_c^n(U(a)) \to H_c^n(W_i \cap g^{-1}(U(a)))$$

тривиален, так как его можно представить как суперпозицию $g_i^* = f_i^* i^*$ тривиального гомоморфизма

$$i^*: H_c^n(U(a)) \to H_c^n(g(W_i \cap g^{-1}(U(a))) = 0$$

($H_c^n(g(W_i \cap g^{-1}(U(a)))) = 0$ потому, что $g(W_i \cap g^{-1}(U(a)) \neq U(a)$ - замкнутое подмножество $U(a)$) и гомоморфизма

$$f_i^*: H_c^n(g(W_i \cap g^{-1}(U(a)))) \to H_c^n(W_i \cap g^{-1}(U(a))).$$

Имеет место соотношение

$$H_c^n(\bigcup_i (W_i \cap g^{-1}(U(a)))) = \oplus H_c^n(W_i \cap g^{-1}(U(a))).$$

Тогда в коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd}
H_c^n(U(a)) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "\oplus g_i^*"'] & H_c^n(Q^n \setminus S^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "g'^*"] & H_c^n(\mathrm{Int}\, Q^n \setminus U(a)) = 0 \\
H_c^n(\bigcup_i (W_i \cap g^{-1}(U(a)))) \arrow[r, "j_1^*"] & H_c^n(M_0 \setminus M_1) &
\end{tikzcd}$$

j^* - изоморфизм и g'^* - мономорфизм в силу 2.4. Из коммутативности диаграммы отображение $j_1^*(\oplus_i g_i^*) = g'^* j^*$ - ненулевой мономорфизм, так как $H_c^n(U(a)) \approx \mathbb{Z}_2$. Но в силу предыдущих рассуждений каждый гомоморфизм g_i^* тривиален, значит тривиально

отображение $\oplus_i g_i^*$ и $j_1^*(\oplus_i g_i^*) = 0$.
Полученное противоречие доказывает утверждение.

Рассмотрим спектральную последовательность Лерэ отображения $g: X \to Y$. Начальный член этой последовательности имеет вид

$$E_2^{p,q} = H_c^p(g(X);\ R^q g\mathbb{Z}).$$

Если отображение g нульмерно, то $E_2^{p,q} = 0$ при $q \neq 0$, или $p > \dim Y = n$,

$$E_2^{p,0} \approx E_\infty^{p,0} \approx H_c^p(X, \mathbb{Z}).$$

Вложение постоянного пучка $\mathbb{Z}$ в пучок R порождает гомоморфизм групп когомологий

$$\overset{\circ}{H}{}_c^p(Y;\mathbb{Z}) \to H_c^p(Y;\ R^\circ g\mathbb{Z}) = E_2^{p,0}.$$

Если Y - подмножество n -многообразия и отображение $g: X \xrightarrow{\text{"на"}} Y$ имеет плотное в X множество D_g точек взаимной однозначности, то gD_g всюду плотно в gX и, значит, $\dim(Y \setminus gD_g) \leq n-1$.
В силу леммы I.2 отображение $H_c^n(Y;\mathbb{Z}) \to E_2^{n,0}$ - эпиморфизм. Отсюда, если $H_c^n(X;\mathbb{Z}) \neq 0$, то $H_c^n(Y;\mathbb{Z}) \neq 0$.

Замечание 2.8. В силу того, что Y - подмножество n -многообразия, $H_c^n(Y;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ и отображение g открыто во всех точках $x \in X$.

Отсюда легко получить, что при наложенных условиях отображений $g: X \to Y$ взаимнооднозначнс, а в силу собственности и гомеоморфизм. Если найдутся две точки x_1 и x_2, такие, что $g(x_1) = g(x_2)$, тс в силу открытости g пересекаться будут и образы их открытых скрестностей $U(x_1)$ и $U(x_2)$, таких, что $U(x_1) \cap U(x_2) = \emptyset$, а это противоречит плотности точек взаимной однозначности.

В рассматриваемом нами случае все условия, накладываемые сейчас на отображение g и пространства X и Y, выполнены, необходимо только проверить, что $H_c^n(X,\mathbb{Z}) \neq 0$.
Установим сначала, что это выполнено для групп $\mathrm{mod}\,2$.

Лемма 2.9. Если X - открытое подмножество из $M_0 \setminus M_1$, то $H_c^n(X) \neq 0$.

Доказательство. В точной последовательности

$$H_c^n(X) \xrightarrow{j^*} H_c^n(M_0 \setminus M_1) \xrightarrow{i^*} H_c^n((M_0 \setminus M_1) \setminus X)$$

$M_0 \setminus M_1$ - минимальный носитель цикла $\delta^*\alpha$ (см. 2.5), тогда образ $i^*\delta^*\alpha = 0$, так как $(M_0 \setminus M_1) \setminus X$ - замкнутое подмножество $M_0 \setminus M_1$. Из точности последовательности $(*)$ $\operatorname{Im} j^* \supset \delta^*\alpha$, значит, $H_c^n(X) \neq 0$.

Лемма 2.10. Если X - открытое подмножество из $M_0 \setminus M_1$, то $H_c^n(X;\mathbb{Z}) \neq 0$.

Доказательство. Точной последовательности

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \to 0$$

сопоставлена точная последовательность групп когомологий

$$\cdots \to H_c^n(X;\mathbb{Z}) \to H_c^n(X;\mathbb{Z}) \to H_c^n(X;\mathbb{Z}_2) \to H_c^{n+1}(X;\mathbb{Z}) \to \cdots$$

Но $H_c^{n+1}(X;\mathbb{Z}) = 0$, так как нульмерное отображение не понижает размерности, т.е. $\dim X \leq n$. Тогда отображение

$$H_c^n(X;\mathbb{Z}) \to H_c^n(X;\mathbb{Z}_2)$$

- эпиморфизм и в силу 2.8 $H_c^n(X;\mathbb{Z}) \neq 0$.

Лемма 2.11. Множество точек взаимной однозначности не может быть всюду плотным в M_0.

Если бы существовало плотное множество точек взаимной однозначности, то согласно приведенным выше рассуждениям и 2.10 $g|_{M_0 \setminus M_1}$ было бы гомеоморфизмом. Тогда гомеоморфизмом было бы и отображение $g|_{M_0}$, но это невозможно в силу 2.6.

Отсюда следует, что найдется открытое подмножество $W \subset Q^n$, такое, что каждая точка $a \in W$ имеет порядок ≥ 2.

Введем обозначение $A_i = \{a \mid a \in Q^n$ и $(g^{-1}a) \cap M_0$ состоит из i точек$\}$.

Лемма 2.12. $\dim A_2 \leq n-1$

Так как Q^n - многообразие, то достаточно показать, что в A_2 не входит никакое открытое множество.

Пусть в A_2 входит некоторое открытое множество U и пусть $a \in U$. Тогда $g^{-1}(a) \cap M_0$ состоит из двух точек x_1 и x_2. Выберем для этих точек не пересекающиеся окрестности V_1 и V_2. Образ хотя бы одной из них, пусть V_1, согласно утверждению 2.7, будет окрестностью точки a. Тогда, если V_2 достаточно малая, имеем $gV_2 \subset gV_1$, а значит, $g|_{V_2}$ - гомеоморфизм в силу того, что точки из $gV_2 \cap gV_1$ имеют в точности порядок 2. Но тогда по той же причине будет гомеоморфизмом ограничение

$g|(g^{-1}gV_2)\cap V_1$. Согласно 2.8 g – открыто в точке x_2. Пусть с самого начала $g_1 = g|_{V_1}$ и $g_2 = g|_{V_2}$ – гомеоморфизмы, такие, что $g(V_1) = g(V_2)$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
H_c^n(g(V_1)) & \xrightarrow{j_1^*} & H_c^n(Q^n\setminus S^{r-1}) & \to & H_c^n(\operatorname{Int} Q^n\setminus g(V_1)) \\
\downarrow{\scriptstyle g_1^*\oplus g_2^*} & & & \searrow{\scriptstyle g^*} & \\
H_c^n(V_1\cup V_2) \approx H_c^n(V_1)\oplus H_c^n(V_2) & & \xrightarrow{j^*} & & H_c^n(M_1\setminus M_0).
\end{array}$$

Суперпозиция гомоморфизмов $j^*(g_1^*\oplus g_2^*)$ тривиальна, так как g_1^* и g_2^* индуцированы гомеоморфизмами и, если α – образующая из $H_c^n(g(V_1))$, то $(g_1^*\oplus g_2^*)\alpha = (\alpha,\alpha)$, а $j^*(g_1^*\oplus g_2^*)\alpha = 2\alpha = 0 \mod 2$. Значит $\operatorname{Im} j^*(g_1^*\oplus g_2^*) = 0$. С другой стороны, верхняя строка образует точную последовательность, в которой $H_c^n(\operatorname{Int} Q^n\setminus g(V_1)) = 0$, как группа замкнутого собственного подмножества многообразия. Тогда j_1^* – изоморфизм. Отображение g^* – мономорфизм согласно 2.7 и тогда

$$\operatorname{Im}(g^* j_1^*) = \operatorname{Im} j^*(g_1^*\oplus g_2^*) \neq 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что $\dim A_2 \leq n-1$.

Пусть W – открытое множество, выбранное в 2.11. Предположим, что лемма 2.1 неверна, то есть $\dim[(Q^n\setminus A_1)\setminus A_2] \leq n-1$. Тогда $\dim(W\setminus A_2) \leq n-1$ так как $W\cap A_1 = \emptyset$, по выбору W. Имеем $\bar{A}_2\cap W = W$, т.е. A_2 всюду плотно в W.

Выберем ту точку a из W, которая имеет два прообраза x_1 и x_2. Пусть V_1 и V_2 непересекающиеся окрестности x_1 и x_2 соответственно, такие, что $a\in \operatorname{Int} g V_1$ и $gV_2 \subset gV_1$. В силу нульмерности отображения g, $\dim gV_2 = n$. В силу плотности точек A_2 в W, ограничение $g|_{V_2}$ будет иметь плотное множество точек взаимной однозначности и согласно 2.8 ограничение $g|_{V_2}$ – гомеоморфизм, так как в силу 2.10 $H_c^n(V_2;\mathbb{Z})\neq 0$. Аналогично, ограничение $g|_{V_1\cap(g^{-1}gV_2)}$ имеет плотное множество точек взаимной однозначности и по тем же рассуждениям $g|_{V_1\cap(g^{-1}gV_2)}$ – гомеоморфизм. Можно считать, что $g(V_1) = g(V_2)$, $g|_{V_i}$ $i=1,2$ – гомеоморфизм, а также, что существует окрестность W_1 точки a, которая покрывается образами только V_1 и V_2 и $g((M_0\setminus V_1)\setminus V_2)\cap W_1 = \emptyset$. Пусть $W_1 = g(V_1) = g(V_2)$. Но тогда открытое множество W_1 состоит из двух кратных точек, что, в силу леммы 2.12, приводит к противоречию. Отсюда следует, что

$$\dim[(Q^n \setminus A_1) \setminus A_2] = n$$

Лемма 2.1, а вместе с ней и теорема 2.2, доказана.

Литература

1. P. Alexandroff, On the dimension of normal spaces, Proc. Royal Soc. A, <u>189</u>, (1947), 11-39.
2. Р.Годеман, Алгебраическая топология и теория пучков, М., ИЛ, 1961.
3. A. Kosiński, On a problem of Steinhaus, Fund. Math. XLVI, №1, (1958), 47-59.
4. A. Lelek, On mappings that change dimensions of spheres, Coll. Math., <u>10</u>, (1963), 45-48.
5. Е.Г.Скляренко, Теорема об отображениях, понижающих размерность, Бюллетень Польской АН, <u>10</u>, № 8, 1962, 429-432.
6. Е.Г.Скляренко, О некоторых приложениях теории пучков в общей топологии, УМН, 19, № 6, 1964, 47-70.

МНОГОЗНАЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ РАЗБИЕНИЙ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Р.С.Линичук

(Киев)

Краткое содержание работы. В этой статье вводится определение непрерывности многозначного отображения $f: X \to Y$, а также непрерывности разбиения и сходимости последовательности подмножеств топологического пространства Y как функции от топологии на множестве всех непустых подмножеств пространства Y . При этом оказывается, что полунепрерывность снизу (соотв., сверху) многозначного отображения оказывается функцией λ-топологии (соотв., $\varkappa$-топологии), и поэтому непрерывность (сильная непрерывность в смысле В.И.Пономарева) такого отображения является функцией ψ-топологии. Аналогично непрерывность в смысле П.С.Александрова (соотв., вполне непрерывность) замкнутых разбиений оказывается функцией $\varkappa$-топологии (соотв., ψ-топологии). В § 2 изучаются некоторые свойства λ-топологии на множестве всех непустых подмножеств топологического пространства. В § 3 работы, в частности, даются характеристики непрерывностей, которые являются функциями уже известных топологий. Там же доказано, например, что если $f: X \to Y$ - многозначное отображение бикомпактов с замкнутыми образами точек, то из замкнутости однозначного отображения $\hat{f}: X \to \lambda Y$, соответствующего данному многозначному, следует, что f - совершенное отображение. § 4 изучает сходимости последовательностей произвольных (и, в частности, замкнутых) подмножеств по направленному множеству. В частности, показано, что сильная сходимость и минимальная сходимость (терминология В.И.Пономарева) суть разные понятия. Приводятся характеристики сильной сходимости ($\overset{\circ}{\psi}$-сходимости) последовательностей подмножеств. В § 5 изучаются некоторые вопросы связности графика многозначного отображения. § 7 исследует непрерывности разбиений топологических пространств. Даются необходимые и достаточные условия этих непрерывностей; получены результаты, часть из которых обобщает ряд результатов В.И.Пономарева из [13] и [4]. В § 8 исследуются соотношения между различными классами многозначных отображений; рассматриваются некоторые вопросы, связанные с локальной связностью; изучаются канонические представления многозначных отображений.

§ 1. Предварительные замечания. В данной работе топологические пространства X и Y считаются T_1-пространствами. Подмножество $A \subseteq X$ как элемент семейства подмножеств пространства X будем обозначать (A). Полагаем

$$\mathcal{P}(X)=\{A \subseteq X \mid A \neq \emptyset\},$$

$$\mathbb{F}(X)=\{A \mid (A) \in \mathcal{P}(X), A \text{ замкнуто}\},$$

$$\mathbb{C}(X)=\{A \mid (A) \in \mathcal{P}(X), A \text{ бикомпактно}\},$$

$$\mathbb{S}(X)=\{A \mid (A) \in \mathcal{P}(X), A \text{ связно}\}.$$

Если $(A) \in \mathcal{P}(X)$ и $|A|>1$, то (A) называется большой точкой множества $\mathcal{P}(X)$, в противном случае - малой точкой. На множестве $\mathcal{P}(X)$ можно ввести $\varkappa$-, ψ-, α-, ... топологии, подобно тому, как это делалось (см. [1] - [3], [5] - [7]) по отношению ко множеству $\mathbb{F}(X)$, и говорить о пространствах подмножеств $\varkappa X$, ψX, αX, ... Единственное отличие при введении этих топологий на $\mathcal{P}(X)$ от вышеупомянутой ситуации с $\mathbb{F}(X)$ заключается в том, что мы термин "замкнутое подмножество" заменяем на "произвольное подмножество". Вновь полученные пространства (произвольных) подмножеств во многих случаях сохраняют свойства соответствующих пространств замкнутых подмножеств. Тождественное на точках множества $\mathcal{P}(X)$ отображение пространства ηX на пространство ξX, где η, ξ - топологии на $\mathcal{P}(X)$, будем обозначать $i: \eta X \longrightarrow \xi X$. Пусть далее U открыто в X. Полагаем

$$\Delta_1(U)=\{(A) \in \mathcal{P}(X) \mid A \subseteq U\}, \tag{1}$$

$$\Delta_2(U)=\{(A) \in \mathcal{P}(X) \mid A \cap U \neq \emptyset\}. \tag{2}$$

ψ-топологию на множестве $\mathcal{P}(X)$ можно задать, взяв в качестве открытого предбазиса топологии всевозможные множества вида (1) и (2), когда U пробегает все открытые подмножества пространства X. Если в качестве открытой базы топологии взять все множества вида (1), мы получим пространство $\varkappa X$. Если же объявить множество форм вида (2) открытым предбазисом, то мы получим λ-топологию на множестве $\mathcal{P}(X)$. Таким образом, произвольный элемент открытой базы пространства λX есть множество

$\{(A)\in \mathcal{B}(X) \mid A\cap U_i \neq \varnothing,\ U_i\in\gamma\ ;\ i=1,\dots,s\}$ где $\gamma=\{U_1,\dots,U_s\}$ – произвольная конечная система открытых в X множеств.

λ-топология на множестве $\mathbb{F}(X)$ рассматривалась Е.Майклом ([7], стр.179). Более детальное ее рассмотрение содержится в [8]. В следующем параграфе мы установим ряд свойств этой топологии.

<u>§ 2. О λ-топологии.</u> Известно, что множество $\mathbb{F}(X)$ с индуцированной λ-топологией является T_0-пространством, но никогда не T_1, за исключением того тривиального случая, когда X состоит из одной точки. Легко показать, что λX не обязано быть T_0-пространством.

1. Всякое непустое открытое в λX множество содержит (X). Любое нетривиальное замкнутое в λX множество не содержит (X). Причем справедливо равенство

$$(X)=\bigcap\ \{\Gamma\cap\mathbb{F}(X)\ ,\ \Gamma \text{ открыто в } \lambda X\}.$$

2. Пусть $(A_0)\in\lambda X$. Тогда $[(A_0)]_{\lambda X}=\{(A)\in\mathcal{B}(X)\mid A\subseteq[A_0]_X\}$.

<u>Замечание.</u> Предложение 5 ([8], стр.19) является следствием установленного свойства.

3. Пусть $(A_1),(A_2)\in\lambda X$, причем $A_1\subseteq[A_2]_X$. Если $\varphi:\lambda X\to\lambda Y$ – непрерывное отображение и $\varphi(A_i)=(B_i)\in\lambda Y$ $(i=1,2)$, тогда $B_1\subseteq[B_2]_Y$.

4. Если под Δ-множеством понимать замкнутое подмножество пространства, содержащее некоторое непустое открытое ядро (см. [6]), то легко заключить, что в пространстве λX нет нетривиальных Δ-множеств. Заметим, что так как точка (X) всюду плотна в пространстве λX, то любое подмножество, содержащее (X), всюду плотно в λX (в том числе и любое открытое).

5. Множество $\{(A)\in\mathcal{B}(X),\ A$ конечно$\}$ всюду плотно в λX.

6. λX всегда связно, так как в нем нет нетривиальных открыто-замкнутых подмножеств.

7. Отображение $i:\psi X\to\lambda X$ непрерывно. В общую диаграмму уплотнений (см. [5], утв.16) пространство λX вписывается следующим образом:

$$\begin{tikzcd}
 & gX \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[drrr] & & \tau X \arrow[dr] & \\
\lambda X & & GX \arrow[ll] \arrow[rr] \arrow[ddl] & & RX \arrow[dd] \\
 & & & \alpha X \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[dll] & \\
 & \psi X \arrow[uul] \arrow[rrr] & & & \varkappa X
\end{tikzcd}$$

8. При всяком однозначном непрерывном отображении $f:\lambda X \to \lambda Y$ имеем $f(X)=(Y)$, то есть образом главной точки $(X)\in\lambda X$ является главная точка $(Y)\in\lambda Y$. В частности, любое однозначное непрерывное отображение пространства λX на себя имеет (X) неподвижной точкой.

9. Пусть Ω - замкнутое подмножество в λX. Тогда множество $\bigcup\limits_{(A)\in\Omega} A$ замкнуто в X.

Доказательство. Пусть $F_1,\dots,F_n$ - произвольный конечный набор множеств, где $(F_i)\in \mathbb{F}(X)$, $(i=1,\dots n)$. По определению λ-топологии, замкнутыми в λX множествами являются множества вида $\Phi=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\{(A)\in\mathcal{B}(X)\,|\,A\subseteq F_i\}$, а также всевозможные пересечения таких множеств. Очевидно, множество $\bigcup\limits_{(A)\in\Phi} A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}F_i$ замкнуто в X. Далее, если

$$\Omega=\bigcap_{\nu}\Phi_\nu=\bigcap_{\nu}\Big(\bigcup_{i_\nu=1}^{n_\nu}\{(A)\in\mathcal{B}(X)\,|\,A\subseteq F_{i_\nu}\}\Big),$$

то нетрудно проверить, что $\bigcup\limits_{(A)\in\Omega}A=\bigcap\limits_{\nu}\bigcup\limits_{i_\nu=1}^{n_\nu}F_{i_\nu}$, чем и завершается доказательство.

Как уже упоминалось, ψ-топология является пересечением $\mathcal{H}$- и λ-топологий (в том смысле, что множества $\Delta_1(U)$ и $\Delta_2(U)$, где U пробегает все открытые в X множества, представляют предбазис ψ-топологии).

10. g-топология (соотв., G-топология) есть пересечение λ- и τ- (соотв., λ- и R-) топологий.

Действительно, если задать открытый предбазис множествами вида Σ и $\Delta_2(U)$, где Σ - произвольный базисный элемент τ-топологии (соотв., R-топологии) и U такое же, как и выше, то мы получим g-топологию (соотв., G-топологию).

§ 3. Многозначные отображения. Пусть $f:X\to Y$ - многозначное отображение. Будем говорить, что f принадлежит соответственно классам $\mathcal{B}$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{S}$, если (fx) принадлежит соответственно множествам $\mathcal{B}(Y)$, $\mathbb{F}(Y)$, $\mathbb{C}(Y)$, $\mathbb{S}(Y)$, как только $x\in X$. Пусть $f\in\mathcal{B}$. Отображение f естественным образом порождает однозначное отображение $\hat f: X\to\mathcal{B}(Y)$, а также отображение $\hat f':\mathcal{B}(X)\to\mathcal{B}(Y)$, являющееся продолжением отображения $\hat f$. Как и в [3], обратное отображение f^{-1} определяется следующим образом: если $y\in Y$, то $f^{-1}y=\{x\in X\,|\,fx\ni y\}$. Заметим, что здесь f^{-1} всегда имеет смысл (то есть $f^{-1}\in\mathcal{B}$), тогда как в классе $\mathbb{F}$ это бывает далеко не всегда, а именно: из того, что $h\in\mathbb{F}$, вообще говоря, не следует, что $h^{-1}\in\mathbb{F}$ (однако, если $f\in\mathbb{F}$ и f

полунепрерывно сверху, то $f^{-1} \in \mathbb{F}$, см. [4]). Точно так же, как это имело место в случае, когда $f, g \in \mathbb{F}$ и $f^{-1}, g^{-1} \in \mathbb{F}$ (см. [3]), имеем: $(f^{-1})^{-1} = f$ и $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$. Пусть на множестве $\mathfrak{B}(Y)$ задана некоторая ξ-топология (в частности, ξ может совпадать с $\varkappa$-, λ-, ψ-, g-, $\mathfrak{A}$- и т.д.), то есть определено некоторое пространство подмножеств ξY.

Определение 3.1. Многозначное отображение $f: X \to Y$ называется ξ-непрерывным, если соответствующее однозначное отображение $\hat{f}: X \to \xi Y$ непрерывно.

Таким образом, ψ-непрерывность отображения f эквивалентна одновременной ($\varkappa$ и λ)-непрерывности (будем писать $(\varkappa+\lambda)$ - непрерывности). Это ясно, поскольку λ-непрерывность (соотв., $\varkappa$-непрерывность) совпадает с полунепрерывностью снизу (соотв., сверху) отображения f , и ψ-непрерывность - с его непрерывностью.

Предложение 3.2. g-непрерывность (соотв., G-непрерывность) отображения f эквивалентна его $(\tau+\lambda)$-непрерывности (соотв., $(R+\lambda)$-непрерывности).

Предложение 3.3. Если отображение $i: \eta Y \to \xi Y$ непрерывно, то из η-непрерывности отображения f следует его ξ-непрерывность.

Легко привести пример $\varkappa$- и даже ψ-непрерывного отображения, не являющегося τ- (а также R-, $\mathfrak{A}$-, g-, G-) непрерывным отображением. Таковым может служить пример из § 2 [3]. Пусть, далее, (OA, A) - произвольная пара множеств из Y , где $(A) \in \mathfrak{B}(Y)$, и OA - открытая окрестность множества A в Y .

Предложение 3.4. Каждое из двух следующих эквивалентных условий является критерием τ-непрерывности:

(1) множество $\{x \in X \mid fx \subseteq OA \setminus A\} \cup \{x \in X \mid fx = A\}$ открыто в X,

(2) множество $\{x \in X \mid fx \cap (X \setminus OA) \neq \emptyset\} \cup \{x \in X \mid fx \cap A \neq \emptyset\} \setminus \{x \in X \mid fx = A\}$ замкнуто в X .

Предложение 3.5. Отображение $f: X \to Y$ является $\mathfrak{A}$-непрерывным (соотв., R-непрерывным) тогда и только тогда, если множество $\{x \in X \mid fx \subseteq OA, fx \supseteq A\}$ (соотв. множество $\{x \in X \mid fx \subseteq OA, fx \supseteq A\} \cup \{x \in X \mid fx \subseteq OA \setminus A\}$) открыто в X .

Предложение 3.6. Если $f: X \to Y$ однозначно и ξ такая топология на $\mathfrak{B}(Y)$, что Y является подпространством ξY , тогда ξ-непрерывность отображения f совпадает с обыкновенной его непрерывностью.

Предложение 3.7. Отображение $f: X \to Y$ $\varkappa$-непрерывно тогда и только тогда, если однозначное отображение $\hat{f}': \varkappa X \to \varkappa Y$ непрерывно.

Заметим, что теорему 10 из [8] можно обобщить на случай, когда $f \in \mathfrak{B}$ (там $f \in \mathbb{F}$, и в связи с этим на отображение $\hat{f}'$ накладывается дополнительное условие замкнутости). На самом деле имеет место

Предложение 3.8. Отображение $f: X \to Y$ λ-непрерывно в том и только том случае, если отображение $\hat{f}': \lambda X \to \lambda Y$ непрерывно.

Учитывая это обстоятельство, из двух преднидущих утверждений получаем

Предложение 3.9. Отображение $f: X \to Y$ ψ-непрерывно тогда и только тогда, если отображение $\hat{f}': \psi X \to \psi Y$ непрерывно.

Предложение 3.10. Пусть $f: X \to Y$ – многозначное отображение. Если отображение $\hat{f}: X \to \lambda Y$ замкнуто, тогда и f замкнуто.

Доказательство этого факта существенно использует утверждение п.9 из § 2.

Следствие. Если в условиях предложения 3.10 X и Y бикомпактны и $f \in \mathbb{F}$, тогда f – совершенное многозначное отображение.

Предложение 3.11. Однозначное отображение $f: X \to Y$ $\mathfrak{A}$- непрерывно тогда и только тогда, если $f^{-1}E$ открыто-замкнуто, как только $(E) \in \mathfrak{B}(Y)$.

Доказательство. 1) Так как f $\mathfrak{A}$-непрерывно, то в силу предложения 2.3. оно $\varkappa$-непрерывно, и значит, $f^{-1}y$ замкнуто, если $y \in Y$. С другой стороны, в данном случае $f^{-1}y = \{x \in X \mid fx \ni y, fx \subseteq Oy\}$ для любой пары (Oy, y), и поэтому, согласно предложению 3.5 множество $f^{-1}y$ открыто в X. Легко видеть, таким образом, что $f^{-1}E$ открыто-замкнуто в X.

2) Обратно, пусть (OA, A) – пара множеств такая, как указывалось выше. Если (A) – большая точка пространства $\mathfrak{A}Y$, то множество $\{x \in X \mid fx \subseteq OA, fx \supseteq A\}$ пусто. Если же (A) – малая точка, то есть $A = y \in Y$, тогда множество $\{x \in X \mid fx \ni y, fx \subseteq Oy\} = f^{-1}y$ открыто в X. В силу предложения 3.5 отображение f $\mathfrak{A}$-непрерывно.

Автору известен пример $\mathfrak{A}$-непрерывного однозначного отображения недискретного пространства на метрическое пространство.

Заметим, что критерии $\varkappa$- и λ-непрерывностей, выведенные в [4] (теоремы 1, 2, 3, а также следствия из них) и в [3] (теоремы $\mathcal{D}$, F) для многозначных отображений из класса $\mathbb{F}$, остаются в силе и для отображений из класса $\mathcal{B}$.

До конца этого параграфа отображение $i: \zeta Y \to \varkappa Y$ будем считать непрерывным.

Предложение 3.12. Если $f: X \to Y$ — многозначное ζ-непрерывное отображение бикомпакта X на T_1-пространство Y и $f \in \mathbb{C}$, тогда Y бикомпактно.

Предложение 3.13. Пусть $f \in \mathbb{F}$. Тогда всякое ζ-непрерывное отображение $f: X \to Y$ бикомпакта X в бикомпакт Y замкнуто.

Пусть $\hat{f}: X \to \mathcal{B}(Y)$ — однозначное отображение, $f: X \to Y$ — соответствующее многозначное отображение. Справедливо следующее

Предложение 3.14. Если $\hat{f}$ открыто (замкнуто) по отношению к $\varkappa$-топологии (соотв., λ-топологии) на множестве $\mathcal{B}(Y)$, то отображение f^{-1} является λ-непрерывным (соотв., $\varkappa$-непрерывным) отображением.

§ 4. О сходимости последовательностей подмножеств. Пусть $\theta = \{\alpha\}$ — направленное множество; $(A_0), (A_\alpha) \in \mathcal{B}(X)$. На множестве $\mathcal{B}(X)$ задана ξ-топология.

Определение 4.1. Последовательность подмножеств $\{A_\alpha \subseteq X, \alpha \in \theta\}$ ξ-сходится к подмножеству $A_0 \subseteq X$ (пишем $A_\alpha \xrightarrow{\xi} A_0$), если последовательность точек $\{(A_\alpha), \alpha \in \theta\}$ пространства ξX сходится к точке $(A_0) \in \xi X$. Очевидно, сходимость множеств, определенная в [3], § 3, совпадает с $\varkappa$-сходимостью и сильная сходимость, определенная там же, — с ψ-сходимостью, если ограничиться замкнутыми подмножествами.

Предложение 4.2. Многозначное отображение $f: X \to Y$ является ξ-непрерывным в точке $x_0 \in X$ тогда и только тогда, если для любой последовательности точек $\{x_\alpha \in X, \alpha \in \theta\}$, сходящейся к точке $x_0 \in X$, последовательность множеств $\{f x_\alpha \subseteq Y, \alpha \in \theta\}$ ξ-сходится к множеству $f x_0 \subseteq Y$. Это следует из теоремы 2, § 3, [3].

Предложение 4.3. Пусть η и ζ — две топологии на множестве $\mathcal{B}(X)$. Отображение $i: \eta X \to \zeta X$ непрерывно тогда и только тогда, если для любой последовательности подмножеств $\{A_\alpha, \alpha \in \theta\}$ из $A_\alpha \xrightarrow{\eta} A_0$ следует $A_\alpha \xrightarrow{\zeta} A_0$.

Предложение 4.4. $A_\alpha \xrightarrow{\psi} A_0$ тогда и только тогда, если одновременно $A_\alpha \xrightarrow{\varkappa} A_0$ и $A_\alpha \xrightarrow{\lambda} A_0$.

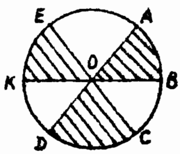
Доказательство. Достаточность. Пусть $\gamma = \{U_1, \dots, U_s\}$ — произвольное конечное открытое покрытие множества A_0 в пространстве

X, такое, что $A_0 \cap U_i \neq \varnothing$, если $U_i \in \gamma$. Пусть далее $\gamma(A_0)$ есть ψ-окрестность точки $(A_0) \in \psi X$, порожденная этим покрытием. Так как $A_\alpha \xrightarrow{\varkappa} A_0$, то существует $\alpha_1 \in \Theta$ – такой индекс, что для любого $\alpha' > \alpha_1$ имеет место $A_{\alpha'} \subseteq \tilde{\gamma} = \bigcup_{i=1}^{s} U_i$.
С другой стороны, так как $A_\alpha \xrightarrow{\lambda} A_0$, то найдется $\alpha_2 \in \Theta$, такое, что $A_{\alpha''} \cap U_i \neq \varnothing$, как только $\alpha'' > \alpha_2$ и $U_i \in \gamma$. В силу направленности множества Θ, найдется $\alpha_3 \in \Theta$ – такой индекс, что $\alpha_3 > \alpha_1$ и $\alpha_3 > \alpha_2$. При этом $A_{\alpha'''} \subseteq \tilde{\gamma}$ и $A_{\alpha'''} \cap U_i \neq \varnothing$ $(i = 1, \ldots, s)$, если $\alpha''' > \alpha_3$. Таким образом, $(A_{\alpha'''}) \in \gamma(A_0)$. Так как $\gamma(A_0)$ – произвольная окрестность, то $A_\alpha \xrightarrow{\psi} A_0$.
Необходимость сразу следует из предложения 4.3.

Предложение 4.5. $A_\alpha \xrightarrow{\beta} A_0$ (соотв., $A_\alpha \xrightarrow{G} A_0$) тогда и только тогда, если одновременно $A_\alpha \xrightarrow{\lambda} A_0$ и $A_\alpha \xrightarrow{\tau} A_0$ (соотв., $A_\alpha \xrightarrow{R} A_0$).

В [3] было введено понятие минимального предела последовательности непустых замкнутых подмножеств (будем называть его min-пределом и писать $F_\alpha \xrightarrow{min} F_0$; $(F_\alpha), (F_0) \in \mathbb{F}(X)$). Напомним это определение: $F_\alpha \xrightarrow{min} F_0$, если $F_\alpha \xrightarrow{\varkappa} F_0$, но никогда не имеет места $F_\alpha \xrightarrow{\varkappa} F'$, где $(F') \in \mathbb{F}(X)$, $F' \subset F_0$, $F_0 \setminus F' \neq \varnothing$. Построим пример последовательности подмножеств, которая имеет множество F_0 своим min-пределом и которая не является ψ-сходящейся к этому множеству.

Пример. X – обычная плоскость, F_0 – замкнутый круг. Рассмотрим замкнутое покрытие F_0 секторами:
$F^1 = OKEAB$, $F^2 = OABCD$, $F^3 = OCDKE$.



Наша последовательность состоит из множеств F^1, F^2, F^3, занумерованных с помощью натурального ряда циклическим образом, то есть
$\delta = \{F_1^1, F_2^2, F_3^3, F_4^1, F_5^2, F_6^3, F_7^1, \ldots\}$. Очевидно, δ имеет F_0 своим min-пределом. Действительно, $\delta \xrightarrow{\varkappa} F_0$. Предположим, существует $F' \subset F_0$, такое, что $F_0 \setminus F' \neq \varnothing$, и $\delta \xrightarrow{\varkappa} F'$. Тогда существует $x' \in F_0$ – такая точка, что $x' \notin F'$. Но $x' \in \bigcup_{i=1}^{3} F^i$. Следовательно, $x' \in F^{i_0}$ для некоторого $i_0 \in \{1,2,3\}$. Пусть, например, $i_0 = 1$. Тогда множество $\mathcal{O}' = X \setminus x'$ есть окрестность множества F' в пространстве X. Соответствующая $\varkappa$-окрестность $\mathcal{O}'(F')$ точки $(F') \in \varkappa X$ не содержит точек $(F^1_{3i+1}) \in \varkappa X$, $(i = 1, 2, \ldots)$. Рассмотрим далее открытое покрытие множества F_0: $\gamma = \{X \setminus F^2, X\}$. Ясно, что ψ-окрестность $\gamma(F_0)$ точки $(F_0) \in \mathbb{F}(X)$, порожденная этим покрытием, не содержит точек вида (F^2_{3k+2}) для всех на-

туральных k . До конца параграфа всюду $(F_\alpha), (F_0) \in \mathbb{F}(X)$.

Предложение 4.6. Из $F_\alpha \xrightarrow{\mathfrak{A}} F_0$ следует $F_\alpha \xrightarrow{min} F_0$.

Как показывает рассмотренный выше пример, обратное утверждение, вообще говоря, неверно, поскольку там сходимость $\delta \xrightarrow{\mathfrak{A}} F_0$ не имеет места. Действительно, все элементы последовательности δ как точки пространства $\mathfrak{A}X$ сильно недосягаемы для точки $(F_0) \in \mathfrak{A}X$ (по поводу недосягаемости см. [5], [6]).

Определение 4.7. Множество $\bar{F}_0$ называется max-пределом последовательности подмножеств $\{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$, если $F_\alpha \xrightarrow{\lambda} F_0$, но исключено $F_\alpha \xrightarrow{\lambda} F'$, где $(F') \in \mathbb{F}(X)$, $F' \supset F_0$, $F' \setminus F_0 \neq \emptyset$.

Заметим, что понятия max-сходимости и ψ-сходимости различны. Нетрудно построить пример последовательности, которая имеет множество F_0 своим max-пределом, но не является даже $\varkappa$-сходящейся к F_0 .

Предложение 4.8. Пусть X регулярно. Тогда из $F_\alpha \xrightarrow{\mathfrak{A}} F_0$ следует $F_\alpha \xrightarrow{max} F_0$.

Простые примеры свидетельствуют о том, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Предложение 4.9. Пусть X регулярно. Сходимость $F_\alpha \xrightarrow{\psi} F_0$ имеет место тогда и только тогда, если одновременно $F_\alpha \xrightarrow{min} F_0$ и $F_\alpha \xrightarrow{max} F_0$.

Доказательство. а) Пусть $F_\alpha \xrightarrow{\psi} F_0$. Ясно, что $F_\alpha \xrightarrow{\varkappa} F_0$. Предположим, что $(F') \in \mathbb{F}(X)$, $F' \subset F_0$ и $F_0 \setminus F' \neq \emptyset$, причем $F_\alpha \xrightarrow{\varkappa} F'$. Тогда найдется $x' \in F_0 \setminus F'$, а также окрестности OF' и Ox' соответственно множества F' и точки x' в пространстве X такие, что $OF' \cap Ox' = \emptyset$. Так как $F_\alpha \xrightarrow{\varkappa} F'$, то найдется $\alpha_0 \in \Theta$, такое, что для всех $\alpha > \alpha_0$ $(F_\alpha) \in \Delta_1(OF')$, а так как $F_\alpha \xrightarrow{\psi} F_0$, то существует $\alpha'_0 \in \Theta$, такое, что для всех $\alpha' > \alpha'_0$ должно быть $(F_{\alpha'}) \in \Delta_2(Ox')$. Поскольку $\Delta_1(OF') \cap \Delta_2(Ox') = \emptyset$, то мы имеем противоречие, ибо на некотором шаге элементы последовательности $\{(F_\alpha)\}$ оказываются лежащими как в $\Delta_1(OF')$, так и в $\Delta_2(Ox')$. То есть $F_\alpha \xrightarrow{\varkappa} F'$ невозможно, и значит, $F_\alpha \xrightarrow{min} F_0$. Покажем дальше, что $F_\alpha \xrightarrow{max} F_0$. Очевидно, $F_\alpha \xrightarrow{\lambda} F_0$. Пусть $(F_0) \in \mathbb{F}(X)$, $F_1 \supset F_0$, $F_1 \setminus F_0 \neq \emptyset$ и $F_\alpha \xrightarrow{\lambda} F_1$. Найдутся $x_1 \in F_1 \setminus F_0$, а также окрестности Ox_1 и OF_0 такие, что $Ox_1 \cap OF_0 = \emptyset$. Вновь получаем противоречие, замечая, что элементы последовательности $\{(F_\alpha)\}$ с некоторого момента обязаны попадать одновременно в $\Delta_2(Ox_1)$ и $\Delta_1(OF_0)$, тогда как $\Delta_2(Ox_1) \cap \Delta_1(OF_0) = \emptyset$. Таким образом, $F_\alpha \xrightarrow{\lambda} F_1$ исключено.

б) Обратное следует из утверждения 4.4.

§ 5. О связности графика многозначного отображения

Напомним, что график многозначного отображения $f: X \to Y$ есть множество $\Gamma_f = \bigcup_{x \in X} x \times fx$ с индуцированной из $X \times Y$ топологией. Множество $K \subseteq X \times Y$ назовем открытым прямоугольником в $X \times Y$, если существуют V_1 и V_2 – такие открытые соответственно в X и Y множества, что $K = V_1 \times V_2$.

Предложение 5.1. Пусть U открыто в $X \times Y$. Тогда множество $\mathcal{O} = \{(x,(A)) \mid (A) \in \mathbb{C}(Y),\ x \times A \subseteq U\}$ открыто в $X \times \varkappa Y$.

Доказательство. Пусть $\Xi = \{K\}$ – множество всех открытых прямоугольников пространства $X \times Y$, таких, что $K \subseteq U$. Очевидно, $U = \bigcup_{K \in \Xi} K$. Легко увидеть, что $\{(x,(A)) \mid x \times A \subseteq V_1 \times V_2\}$ – есть произвольное открытое базисное множество в пространстве $X \times \varkappa Y$, когда V_1 и V_2 – произвольные открытые соответственно в X и Y множества. Докажем равенство

$$\{(x,(A)) \mid x \times A \subseteq U\} = \bigcup_{K \in \Xi} \{(x,(A)) \mid x \times A \subseteq K\}.$$

Отсюда будет следовать, что множество $\mathcal{O}$ открыто в $X \times \varkappa Y$. Включение $\supseteq$ очевидно. Пусть далее $(x_0,(A_0))$ – такая точка пространства $X \times \varkappa Y$, что $x_0 \times A_0 \subseteq U$. Покажем, что найдется $K_0 \in \Xi$, такое, что $x_0 \times A_0 \subseteq K_0$. Так как $x_0 \times A_0$ бикомпактно в $X \times Y$, то для покрытия $\alpha = \{K_z \mid z \in x_0 \times A_0\}$ множества $x_0 \times A_0$ ($K_z \in \Xi$ есть окрестность точки z) существует конечное подпокрытие $\alpha' = \{K_{z_i} \mid z_i \in x_0 \times A_0,\ K_{z_i} = V_1^i \times V_2^i; i = 1,\dots,n\}$. Положим $V_1 = \bigcap_{i=1}^{n} V_1^i$, $V_2 = \bigcup_{i=1}^{n} V_2^i$. Очевидно, V_1 и V_2 открыты соответственно в X и Y, а также $V_1 \ni x_0$, $V_1 \supseteq F_0$. Ясно, что открытый прямоугольник $K_0 = V_1 \times V_2 \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} K_{z_i}$ включен в U, и $x_0 \times A_0 \subseteq K_0$.

Предложение 5.2. Пусть Φ – замкнутое в $X \times Y$ множество. Тогда $H = \{(x,(A)) \mid (A) \in \mathcal{B}(Y),\ x \times A \subseteq \Phi\}$ – замкнутое в $X \times \lambda Y$ множество.

Доказательство. Пусть $K = V_1 \times V_2$ – открытый прямоугольник в $X \times Y$. Очевидно, множество $\{(x,(A)) \mid (A) \in \lambda Y,\ (x \times A) \cap K \neq \varnothing\}$ открыто в $X \times \lambda Y$. Пусть U – произвольное открытое в $X \times Y$ множество. Тогда $W = \{(x,(A)) \mid (A) \in \lambda Y,\ (x \times A) \cap U \neq \varnothing\}$ открыто в $X \times \lambda Y$. Это следует из того, что

$$\{(x,(A)) \mid (A) \in \lambda Y,\ (x \times A) \cap U \neq \varnothing\} =$$
$$= \bigcup_{K \in \Xi} \{(x,(A)) \mid (A) \in \lambda Y,\ (x \times A) \cap K \neq \varnothing\},$$

где $\Xi = \{K\}$ есть множество всех открытых прямоугольников из

$X\times Y$, таких, что $K\subseteq U$. Докажем, что H замкнуто в $X\times\lambda Y$. Покажем, что если $(x_0,(A_0))\in[H]_{X\times\lambda Y}$, то $x_0\times A_0\subseteq\Phi$. Пусть не так, то есть $(x_0\times A_0)\setminus\Phi\neq\emptyset$. Множество $\{(x,(A))\mid(A)\in\lambda Y,\ (x\times A)\cap U'\neq\emptyset\}$, где $U'=X\times Y\setminus\Phi$, есть открытая окрестность точки $(x_0,(A_0))$ в пространстве $X\times\lambda Y$, не содержащая точек множества H. Таким образом, $(x_0,(A_0))\in H$ и, значит, H замкнуто в $X\times\lambda Y$.

<u>Предложение 5.3.</u> Пусть Ω связное в $X\times\lambda Y$ (соотв., в $X\times\varkappa Y$) множество, причем для любой точки $(x,(A))\in\Omega$ имеем $(A)\in\mathcal{S}(Y)$ (соотв., $(A)\in\mathcal{S}\ \&\ (A)\in\mathbb{C}(Y)$). Тогда множество $M=\bigcup\limits_{(x,(A))\in\Omega}x\times A$ связно в $X\times Y$.

<u>Доказательство.</u> Пусть M несвязно. Тогда подпространство $M\subseteq X\times Y$ есть дизъюнктное объединение двух своих непустых открыто-замкнутых подмножеств M_1 и M_2 (обозначаем это $M=M_1\oplus M_2$). Имеем $(x\times A)\in\mathcal{S}(X\times Y)$, как только $(x,(A))\in\Omega$. В силу предложения 5.2 (соотв., предложения 5.1), множества $\alpha_1=\{(x,(A))\in\Omega\mid x\times A\subseteq M_1\}$ и $\alpha_2=\{(x,(A))\in\Omega\mid x\times A\subseteq M_2\}$ замкнуты (соотв., открыты) в Ω. Ясно, что эти множества непусты (если бы было, например, $\alpha_1=\emptyset$, то тогда, в силу связности множеств $x\times A$, где $(x,(A))\in\Omega$, имели бы $M=M_2$, что противоречиво). Легко видеть, что $\Omega=\alpha_1\oplus\alpha_2$, следовательно, α_i $(i=1,2)$ открыто (соотв., замкнуто) в Ω. Таким образом, Ω несвязно, вопреки условию.

<u>Замечание 5.4.</u> Последнее утверждение обобщает теорему 7 из [8].

<u>Предложение 5.5.</u> Пусть $f:X\to Y$ λ- непрерывное (соотв., $\varkappa$-непрерывное) многозначное отображение; причем $f\in\mathcal{S}$ (соотв., $f\in\mathcal{S}\ \&\ f\in\mathbb{C}$). Пространство X связно тогда и только тогда, если Γ_f связно в $X\times Y$.

<u>Доказательство.</u> Поскольку однозначное отображение $\hat{f}:X\to\lambda Y$ (соотв., $\hat{f}:X\to\varkappa Y$) непрерывно, то множество $\Gamma_{\hat{f}}=\bigcup\limits_{x\in X}(x,\hat{f}x)$ связно в $X\times\lambda Y$ (соотв., $X\times\varkappa Y$). Для дальнейшего доказательства существенным является предложение 5.3.

<u>Предложение 5.6.</u> Если $f:X\to Y$ - многозначное ξ-непрерывное (соотв., η - непрерывное) отображение, $f\in\mathcal{S}$ (соотв., $f\in\mathbb{C}\ \&\ f\in\mathcal{S}$), причем отображение $i:\xi Y\to\lambda Y$ (соотв., $i:\eta Y\to\varkappa Y$) непрерывно, то X связно тогда и только тогда, если Γ_f связно.

<u>Предложение 5.7.</u> Пусть $\overset{\circ}{f}:X\to Y$ - многозначное ξ-непре-

рывное отображение, $f \in \mathbb{C}$ и существует $x_0 \in X$ – такая точка, что $(fx_0) \in \mathfrak{S}(Y)$. Тогда связность пространства Γ_f эквивалентна связности пространства X при условии, что отображение $i: \xi Y \longrightarrow \psi Y$ непрерывно.

Доказательство этого факта несложно провести, если иметь в виду следующее

Предложение 5.8. Пусть Ω связно в $X \times \xi Y$; существует $(x_0,(A_0)) \in \Omega$ – такая точка, что $(A_0) \in \mathfrak{S}(Y)$; отображение $i: \xi Y \to \psi Y$ непрерывно, и из $(x,(A)) \in \Omega$ следует $(A) \in \mathbb{C}(Y)$. Тогда множество $M = \bigcup_{(x,(A)) \in \Omega} x \times A$ связно в $X \times Y$.

Доказательство. В силу непрерывности $i: \xi Y \to \psi Y$ множество Ω связно в $X \times \psi Y$. Пусть M несвязно в $X \times Y$. Тогда $M = M_1 \oplus M_2$, где M_i $(i=1,2)$ открыто-замкнуты в M. В силу предложений 5.I и 5.2, множество $\alpha_1 = \{(x,(A)) \in \Omega \mid x \times A \subseteq M_1\}$ открыто-замкнуто в $\Omega \subseteq X \times \psi Y$. Но множество $\Omega \setminus \alpha_1$ заведомо непусто (в противном случае было бы $\Omega = \alpha_1$, то есть $M_2 = \varnothing$, что противоречиво). Так как Ω связно в $X \times \psi Y$, то $\alpha_1 = \varnothing$. Очевидно, множество $\alpha_2 = \{(x,(A)) \in \Omega \mid x \times A \subseteq M_2\}$ непусто, так как содержит точку $(x_0,(A_0)) \in \Omega$ (связное множество $x_0 \times A_0 \subseteq X \times Y$ обязано целиком лежать в M_2). Но α_2 открыто-замкнуто в Ω. В силу связности последнего, $\alpha_2 = \varnothing$. То есть $\bigcup_{(x,(A)) \in \Omega} x \times A = M_2 = M$. Отсюда $M_1 = \varnothing$. Противоречие доказывает утверждение.

Замечание 5.9. Теорема II [8] является простым следствием предложения 5.5. В классе $\mathbb{C}$ предложение 5.7 обобщает одну теорему В.И.Пономарева (см. [3], § 4, теорема I).

Заметим еще, что легко построить пример ψ-непрерывного многозначного отображения со связным графиком, образ каждой точки при котором несвязен.

С помощью применявшейся выше техники получаем следующие результаты.

Предложение 5.10. Пусть множество B замкнуто в $X \times Y$ (соотв., открыто в $X \times Y$), и $(A_1) \in \mathbb{C}(X), (A_2) \in \mathbb{C}(Y)$. Тогда множество $\{((A_1),(A_2)) \mid A_1 \times A_2 \subseteq B\}$ замкнуто в $\lambda X \times \lambda Y$ (соотв., открыто в $\varkappa X \times \varkappa Y$).

Предложение 5.11. Пусть Ω связно в $\lambda X \times \lambda Y$ (соотв., в $\varkappa X \times \varkappa Y$) и $(A_1) \in \mathbb{C}(X)$, $(A_2) \in \mathbb{C}(Y)$, причем если $((A_1),(A_2)) \in \Omega$, то $(A_1) \in \mathfrak{S}(X)$ и $(A_2) \in \mathfrak{S}(Y)$. Тогда множество $\bigcup_{((A_1),(A_2)) \in \Omega} A_1 \times A_2$ связно в $X \times Y$.

Предложение 5.12. Пусть Ω связно в $\psi X \times \psi Y$ и существует $((A'),(A'')) \in \Omega$ – такая точка, что $(A') \in \mathfrak{S}(X)$, $(A'') \in \mathfrak{S}(Y)$.

Кроме того, если $((A_1),(A_2))\in\Omega$, то $(A_1)\in\mathfrak{C}(X)$ и $(A_2)\in\mathfrak{C}(Y)$. Тогда множество $\bigcup\limits_{((A_1),(A_2))\in\Omega} A_1\times A_2$ связно в $X\times Y$.

§ 6. Некоторые понятия и обозначения

Пусть $f:X\to Y$ - многозначное отображение из класса $\mathcal{B}$. Рассмотрим топологическое пространство Z и p_X, p_Y - однозначные совершенные отображения пространства Z соответственно на пространства X и Y , такие, что $f=p_Y p_X^{-1}$, то есть диаграмма

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "p_X"'] \arrow[dr, "p_Y"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \end{tikzcd}$$

коммутативна.
Тройка (Z,p_X,p_Y) называется каноническим представлением отображения f . Рассмотрим множество всех канонических представлений отображения f :

$$\Xi_f=\{(Z,p_X,p_Y)\mid f=p_Y p_X^{-1}\} .$$

Определение 6.I. Многозначное отображение $f:X\to Y$ называется совершенным, если множество Ξ_f непусто.

Данное определение совпадает с известным определением совершенных многозначных отображений, в силу теоремы I, § 2 [4]. Рассмотрим следующее подмножество множества Ξ_f :

$$\Xi_f^{iz}=\{(Z,p_X,p_Y)\in\Xi_f \mid p_X,p_Y - \text{неприводимы}\} .$$

Определение 6.2. Многозначное отображение f называется канонически неприводимым, если множество Ξ_f^{iz} непусто.

Замечание. В.И.Пономарев именно такие отображения называет неприводимыми. Нам же представляется естественным термин "неприводимые" оставить для отображений из более широкого класса.

Определение 6.3. Многозначное отображение $f:X\to Y$ называется неприводимым, если из $F\subset X$, $X\setminus F\neq\emptyset$, $(F)\in\mathbb{F}(X)$ следует $fF\neq Y$.

Определение 6.4. Многозначное отображение $f:X\to Y$ называется почти однозначным, если множество $\{x\in X\mid fx\subseteq U\}$ непусто, как только множество U открыто в Y .

Будем говорить, что многозначное отображение f принадлежит соответственно классам $\mathbb{P}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{\Pi O}$, $\mathbb{KH}$, если f соответственно совершенно, неприводимо, почти однозначно, канонически неприводимо. Скажем, что однозначное отображение $\varphi: X \to Y$ собственно (соотв., хаусдорфово), если полный прообраз бикомпактного в Y множества бикомпактен в X (соотв., $\varphi^{-1}y$ хаусдорфово в X, если $y \in Y$). Пусть далее $f: X \to Y$ многозначно. Естественные проекции графика Γ_f на пространства X и Y будем обозначать соответственно как π_X и π_Y. Под символом $\equiv$ будем понимать топологическую эквивалентность. Абсолют (регулярного) пространства X, следуя В.И.Пономареву, будем обозначать как $\mathring{X}$ (см. [15]).

§ 7. О непрерывных разбиениях топологических пространств

Пусть X – произвольное топологическое пространство. Под разбиением $\mathscr{L} = \{A\}$ пространства X мы понимаем дизъюнктное семейство подмножеств $A \subseteq X$, таких, что $\bigcup\{A \in \mathscr{L}\} = X$ и $(A) \in \mathfrak{P}(X)$. Пусть $x_0 \in X$ и $A_0 \in \mathscr{L}$ – такой элемент разбиения $\mathscr{L}$, что $x_0 \in A_0$. Многозначное отображение $h: X \to X$, заданное соотношением $hx_0 = A_0$, называется отображением разбиения $\mathscr{L}$. Заметим, что всегда $h^{-1} = h$. Пусть на множестве $\mathfrak{P}(X)$ задана некоторая ξ-топология, то есть определено пространство подмножеств ξX.

Определение 7.1. Разбиение $\mathscr{L}$ называется ξ-непрерывным, если каковы бы ни были элемент $A_0 \in \mathscr{L}$ и ξ-окрестность $O(A_0)$ точки $(A_0) \in \mathfrak{P}(X)$ найдется окрестность UA_0 множества A_0 в пространстве X, такая, что из $A' \cap UA_0 \neq \emptyset$, $A' \in \mathscr{L}$ следует $(A') \in O(A_0)$.

Под пространством ξ-непрерывного разбиения $\mathscr{L}$ в дальнейшем мы понимаем множество $\mathscr{L}$ как подпространство пространства подмножеств ξX и обозначаем его символом $(\mathscr{L}, \xi)$. Разбиение $\mathscr{L}$ называется замкнутым, если из $A \in \mathscr{L}$ следует, что A замкнуто в X.

Замечание. Непрерывные в смысле П.С.Александрова (соотв., вполне непрерывные) разбиения есть в точности $\mathscr{H}$-непрерывные (соотв., ψ-непрерывные) замкнутые разбиения бикомпактов.

Предложение 7.2. Разбиение $\mathscr{L}$ пространства X ξ-непрерывно тогда и только тогда, если его отображение разбиения h является ξ-непрерывным.

Доказательство. а) Покажем, что отображение $\hat{h}: X \to \xi X$ непрерывно. Пусть $x_0 \in X$ – любая точка пространства X, $A_0 = hx_0$ и $O(A_0)$ – произвольная ξ-окрестность точки $(A_0) \in \mathfrak{P}(X)$. Найдется окрестность UA_0 множества A_0 в X, такая, что для всякого

$A' \in \mathcal{L}$ из $UA_0 \cap A' \neq \emptyset$ следует $(A') \in O(A_0)$. Яоно, что $Vx_0 = UA_0$ есть такая окрестность точки $x_0 \in X$, что $hVx_0 \subseteq O(A_0)$.

б) Пусть $x_0 \in X$, $A_0 = hx_0$ и $O(A_0)$ – произвольная ξ-окрестность точки $(A_0) \in \xi X$. Тогда существует такая окрестность Ux_0 точки x_0, что $\hat{h} Ux_0 \subseteq O(A_0)$. Окрестность $UA_0 = \bigcup \{Ux_0 \mid x_0 \in A_0\}$ множеотва A_0 в пространотве X такова, что из $A' \cap UA_0 \neq \emptyset$, $A' \in \mathcal{L}$ следует $(A') \in O(A_0)$. Мы говорим, что разбиение $\mathcal{L}$ пространства X порождается однозначным отображением $g: X \to Y$, еоли для любого $A \in \mathcal{L}$ существует $y \in Y$ – такая точка, что $A = g^{-1}y$.

<u>Предложение 7.3.</u> Разбиение $\mathcal{L}$ пространства X ξ-непрерывно тогда и только тогда, если оно порождается непрерывным однозначным отображением, обратное стображение к которому ξ-непрерывно.

<u>Доказательство.</u> а) Так как $\mathcal{L}$ ξ-непрерывно, то отображение разбиения $h: X \to X$ ξ-непрерывно и, следовательно, однозначное отображение $\hat{h}: X \to (\mathcal{L}, \xi)$ пространства X на пространство разбиения непрерывно. Покажем, что $\hat{h}$ искомое. Действительно, $\hat{h}$ порождает $\mathcal{L}$ и отображение $\hat{h}^{-1}: (\mathcal{L}, \xi) \to X$ ξ-непрерывно, в силу того, что отображение $\widehat{h^{-1}}: (\mathcal{L}, \xi) \to \xi X$ еоть топологическое вложение.

б) Пусть $f: X \to Y$ – однозначное отображение пространства X на проотранство Y, причем отображение $f^{-1}: Y \to X$ ξ-непрерывно и открыто. Пусть $\mathcal{L}$ еоть разбиение, порожденное отображением f. Покажем, что $\mathcal{L}$ ξ-непрерывно. Ясно, что однозначное отображение $\widehat{f^{-1}}: Y \to (\mathcal{L}, \xi)$ непрерывно, то есть для всякой ξ-окрестности $O(A_0)$ точки $(A_0) \in \xi X$, где $A_0 \in \mathcal{L}$, существует окрестноость Uy_0 точки $y_0 = fA_0$ такая, что $\widehat{f^{-1}}\, Uy_0 \subseteq O(A_0)$. Ясно, что $UA_0 = f^{-1}Uy_0$ есть такая открытая окрестность множеотва A_0 в пространстве X, что из $A' \in \mathcal{L}$ & $A' \cap UA_0 \neq \emptyset$ следует $A' \subseteq UA_0$. Отсюда заключаем, что $(A') \in O(A_0)$ и, таким образом, $\mathcal{L}$ ξ-непрерывно.

Как простое следствие отоюда легко получаем теорему В.И.Пономарева о вполне непрерывных замкнутых разбиениях бикомпактов (см. [13], теорема 3):

<u>Предложение 7.4.</u> Замкнутое разбиение $\mathcal{L}$ бикомпакта X ψ-непрерывно тогда и только тогда, если оно порождается однозначным непрерывным открытым отображением бикомпакта X на бикомпакт Y.

<u>Доказательство.</u> а) необходимость очевидна, еоли иметь в виду предложение 7.3 и то, что $(\mathcal{L}, \psi)$ бикомпакт.

б) Пусть $\mathcal{L}$ порождается открытым однозначным непрерывным отображением $f: X \to Y$ бикомпакта X на бикомпакт Y. Очевидно f – замкнутое отображение, а следовательно, f^{-1} ψ-непрерывно. В силу предложения 7.3, $\mathcal{L}$ ψ-непрерывно.

Из предложения 7.3 также сразу же следует еще одна теорема В.И.Пономарева (см. теорему 4, § I, [4]) о том, что естественное отображение топологического пространства X на пространство его $\mathcal{H}$-непрерывного замкнутого разбиения не только непрерывно, но и замкнуто.

Поскольку непрерывное однозначное отображение $f: X \to Y$ бикомпакта X на хаусдорфово пространство Y порождает $\mathcal{H}$-непрерывное замкнутое разбиение $\mathcal{L}$ бикомпакта X, то справедливо

Предложение 7.5. Пусть $\mathcal{L}$ ξ- непрерывное разбиение бикомпакта X, причем $(\mathcal{L}, \xi)$ хаусдорфово. Тогда $\mathcal{L}$ $\mathcal{H}$-непрерывно и замкнуто.

Заметим, что для замкнутости ξ-непрерывного разбиения $\mathcal{L}$ какого угодно пространства X достаточно, чтобы $(\mathcal{L}, \xi)$ было T_1. Пусть далее ξ, η – две топологии на множестве $\mathcal{B}(X)$; $i: \xi X \to \eta X$ – тождественное на точках множества $\mathcal{B}(X)$ отображение соответствующих пространств подмножеств; $\mathcal{L}$ – разбиение пространства X. Имеет место

Предложение 7.6. Если отображение $i: \xi X \to \eta X$ непрерывно, тогда из ξ-непрерывности разбиения $\mathcal{L}$ следует его η-непрерывность.

Это следует из предложения 3.3, § 3, а также из предложения 7.2 этого параграфа.

Предложение 7.7. Пусть $\mathcal{L}$ – ξ-непрерывное разбиение бикомпактного пространства X, причем ξX хаусдорфово. Тогда множество $\mathcal{L}$ замкнуто в ξX.

Необходимость утверждения теоремы 4, [13] является следствием указанного свойства.

Докажем еще один критерий ξ-непрерывности разбиения произвольного пространства X.

Предложение 7.8. Разбиение $\mathcal{L}$ пространства X ξ-непрерывно тогда и только тогда, если каковы бы ни были элемент $A_0 \in \mathcal{L}$ и ξ-окрестность $O(A_0)$ точки $(A_0) \in \mathcal{B}(X)$, множество $\Gamma = \bigcup \{A \mid (A) \in O(A_0), A \in \mathcal{L}\}$ открыто в пространстве X.

Доказательство. а) Пусть x_0 - произвольная точка множества Γ, $h: X \to X$ – отображение разбиения $\mathcal{L}$, $A_0 = hx_0$. Найдется окрестность UA_0 множества A_0 в пространстве X такая, что из $A' \cap UA_0 \neq \varnothing$, $A' \in \mathcal{L}$ следует $(A') \in O(A_0)$. То есть

$\hat{h}\, UA_0 \subseteq O(A_0)$ и $UA_0 \subseteq \Gamma$. Так как $UA_0 \ni x_0$, то x_0 – внутренняя точка множества Γ.

б) Обратное очевидно.

Замечание. Утверждение еще одного критерия вполне непрерывности замкнутых разбиений, принадлежащего В.И.Пономареву (см. лемму из п.3, [13]) является следствием последнего результата.

Из этого же предложения 7.8 легко получаем известный критерий $\mathscr{H}$-непрерывности (рассматривавшийся ранее лишь для замкнутых разбиений), а именно: разбиение $\mathscr{L}$ пространства X $\mathscr{H}$-непрерывно тогда и только тогда, если любая окрестность OA_0 любого элемента $A_0 \in \mathscr{L}$ (как подмножества X) содержит отмеченную окрестность $O'A_0$, то есть окрестность, являющуюся объединением некоторых $A \in \mathscr{L}$.

Приведем следующую характеристику λ-непрерывности разбиений топологических пространств.

Предложение 7.9. Разбиение $\mathscr{L}$ произвольного пространства X λ-непрерывно тогда и только тогда, если для любого открытого в X множества U множество $\Omega = \bigcup\{A \in \mathscr{L} \mid A \cap U \neq \varnothing\}$ открыто в X.

Доказательство. а) Так как $\mathscr{L}$ λ-непрерывно, то в силу предложения 7.8, множество Ω открыто в X.

б) Пусть $\Omega \subseteq X$ открытое множество, $A_0 \in \mathscr{L}$, и $\gamma(A_0)$ – произвольная λ-окрестность точки $(A_0) \in \lambda X$, то есть существует конечная система $\gamma = \{U_1, \dots, U_s\}$ открытых в X множеств, такая, что $U_i \cap A_0 \neq \varnothing$, как только $i \in \{1, \dots, s\}$. Но $\gamma(A_0) = \bigcap_{i=1}^{s} \Delta_2(U_i)$. Поскольку множество $\bigcup\{A \in \mathscr{L} \mid (A) \in \Delta_2(U_i)\}$ по условию открыто в X для всех i, то множество

$$\bigcup\{A \in \mathscr{L} \mid (A) \in \gamma(A_0)\} = \bigcup\{A \in \mathscr{L} \mid (A) \in \bigcap_{i=1}^{s} \Delta_2(U_i)\} =$$

$$= \bigcap_{i=1}^{s} \Big(\bigcup\{A \in \mathscr{L} \mid (A) \in \Delta_2(U_i)\} \Big) \quad \text{открыто в } X.$$

Ввиду предложения 7.8 и того, что A_0 – произвольный элемент разбиения, заключаем, что $\mathscr{L}$ λ-непрерывно.

Предложение 7.10. Пусть $\mathscr{L}$ – замкнутое ξ-непрерывное разбиение ненормального пространства X. Тогда $(\mathscr{L}, \xi)$ нехаусдорфово.

§ 8. О канонических представлениях

Прежде всего отметим легко проверяющееся

Предложение 8.1. Пусть отображение $f: X \longrightarrow Y$ многозначно.

$f \in \mathbb{H}$ тогда и только тогда, если $f^{-1} \in \Pi O$.
Отсюда имеем

Предложение 8.2. Если $f \in \mathbb{K}\mathbb{H}$, тогда f есть суперпозиция $\alpha \circ \gamma$ двух отображений, где α -однозначное совершенное отображение и $\gamma \in \Pi O$.

Рассмотрим следующие множества:

$$\mathbb{Z}_f = \{ Z \mid (Z, p_X, p_Y) \in \Xi_f \} ,$$

$$\mathbb{Z}_f^{iz} = \{ Z \mid (Z, p_X, p_Y) \in \Xi_f^{iz} \} .$$

Известно, что если $f \in \mathbb{P}$, то $\Gamma_f \in \mathbb{Z}_f$ (см. [4], § 2). Там же получен следующий результат: пусть $Z \in \mathbb{Z}_f$, пространство Z гомеоморфно пространству Γ_f тогда и только тогда, если для всякой точки $z \in Z$ имеет место $z = p_X^{-1} p_X z \cap p_Y^{-1} p_Y z$. Каноническое представление (Γ_f, π_X, π_Y) называется в [4] (eK)-представлением. Если далее $Z \in \mathbb{Z}_f$, то, как показано там же, разбиение $\mathcal{L}$ пространства Z на дизъюнктные бикомпакты вида $\Phi_z = p_X^{-1} p_X z \cap p_Y^{-1} p_Y z$, где $z \in Z$, является $\mathcal{H}$-непрерывным и пространство разбиения $(\mathcal{L}, \mathcal{H})$ есть Γ_f , причем, однозначные отображения p_X , p_Y индуцируют соответственно отображения π_X и π_Y . Пусть $f \in \mathbb{P}$.

Предложение 8.3. $f \in \mathbb{K}\mathbb{H}$ тогда и только тогда, если отображения π_X , π_Y неприводимы.

Доказательство. а) Так как $f \in \mathbb{P}$, то мы имеем однозначное непрерывное отображение $\varphi : Z \to \Gamma_f$ пространства Z на пространство его $\mathcal{H}$-непрерывного разбиения $\mathcal{L}$, о котором говорилось выше; при этом, $p_X = \varphi \circ \pi_X$. Легко видеть, что если $F \subset \Gamma_f$ замкнуто и $\Gamma_f \setminus F \neq \emptyset$, то множество $\Phi = \varphi^{-1} F = \bigcup_{z \in F} \varphi^{-1} z$ замкнуто в Z , и $Z \setminus \Phi \neq \emptyset$.
Предположим, что π_X не является неприводимым, тогда, в силу только что сказанного, p_X тоже не является неприводимым, что противоречиво.
б) Обратное очевидно.

Предложение 8.4. $\mathbb{K}\mathbb{H} \subset \Pi O$, причем $(\Pi O \cap \mathbb{P}) \setminus \mathbb{K}\mathbb{H} \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathbb{K}\mathbb{H}$. В силу предложения 8.3, $(\Gamma_f, \pi_X, \pi_Y) \in \Xi_f^{iz}$. Покажем, что $f \in \mathbb{H}$. Пусть $(F) \in \mathbb{F}(X)$ и $X \setminus F \neq \emptyset$. Тогда $\Phi = \pi_X^{-1} F$ замкнуто в Γ_f , причем $\Gamma_f \setminus \Phi \neq \emptyset$. Таким образом, $\pi_Y \pi_X^{-1} F = f F \neq Y$. Но тогда, как утверждает предложение 8.1, $f^{-1} \in \Pi O$. А так как $f^{-1} \in \mathbb{K}\mathbb{H}$, то $f \in \Pi O$. Легко привести пример совершенного многозначного отображения $f: X \to Y$, такого, что $f \in \Pi O$, но $f \notin \mathbb{K}\mathbb{H}$.

Предложение 8.5. $\mathbb{K}\mathbb{H} \subset \mathbb{H}$, причем $(\mathbb{P} \cap \mathbb{H}) \setminus \mathbb{K}\mathbb{H} \neq \varnothing$. Это следует из доказательства предыдущего предложения и того, что существует совершенное неприводимое многозначное отображение, которое не является канонически неприводимым.

Предложение 8.6. Пусть $f: X \to Y$ – канонически неприводимое отображение бикомпакта X на бикомпакт Y, причем отображения f, f^{-1} ψ-непрерывны. Тогда из локальной связности одного из трех пространств X, Y, Γ_f следует локальная связность двух других.

Доказательство. Докажем, что из локальной связности X следует локальная связность Y. Так как отображение f ψ-непрерывно, то это сразу следует из предложения 8.3 и теоремы 2, § 5, [4]. Покажем, что из локальной связности Y следует локальная связность Γ_f. Так как отображение f^{-1} ψ-непрерывно, то Γ_f бикомпакт. Действительно, f^{-1} $\mathcal{H}$-непрерывно, и значит, в силу теоремы 3, § 3, [3], множество Γ_f замкнуто в бикомпакте $X \times Y$. Имея в виду лемму к теореме 3, § 3, [3] и предложение 2, § I, [9], заключаем, что отображение $\pi_Y^{-1}: Y \to \Gamma_f$ ψ-непрерывно. Так как π_Y неприводимо (согласно предложению 8.3), то, в силу предложения 8.I, $\pi_Y^{-1} \in \Pi O$. По теореме 2, § 5, [4] Γ_f локально связно. Так как π_X – однозначное и непрерывное отображение бикомпакта Γ_f на бикомпакт X, то из локальной связности Γ_f следует локальная связность X.

Покажем, что $\mathbb{Z}_f$ (соотв., $\mathbb{Z}_f^{ir}$) есть в точности множество всех совершенных (соотв., совершенных и неприводимых) прообразов бикомпакта Γ_f, если $f \in \mathbb{P}$ (соотв., $f \in \mathbb{K}\mathbb{H}$).

Итак, пусть $f \in \mathbb{P}$ и пространства X, Y суть бикомпакты.

Предложение 8.7. $Z \in \mathbb{Z}_f$ тогда и только тогда, если имеет место однозначное совершенное отображение $\varphi: Z \to \Gamma_f$.

Доказательство. а) Пусть $Z \in \mathbb{Z}_f$. Как следует из вышесказанного, существует однозначное непрерывное отображение $\varphi: Z \to \Gamma_f$. Покажем, что φ искомое. Так как Γ_f есть пространство $\mathcal{H}$-непрерывного разбиения $\mathcal{L}$ пространства Z, то, в силу предложения 7.3, § 7 этой работы, отображение φ^{-1} $\mathcal{H}$-непрерывно, и значит, φ замкнуто. А так как φ бикомпактно, то оно совершенно. Ясно,

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[d, "\varphi"] \arrow[ddl, "p_X"'] \arrow[ddr, "p_Y"] & \\
& \Gamma_f \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\
X \arrow[rr, "f"] & & Y
\end{tikzcd}$$

что $p_X = \pi_X \cdot \varphi$ и $p_Y = \pi_Y \cdot \varphi$.

б) Пусть $\varphi: Z \longrightarrow \Gamma_f$ – однозначное совершенное отображение какого-то пространства Z на пространство Γ_f . Ясно, что однозначные отображения $\pi_X \cdot \varphi$ и $\pi_Y \cdot \varphi$ совершенны. Действительно, замкнутость и непрерывность их очевидна. Бикомпактность этих отображений следует из того, что здесь отображение φ собственное как совершенное однозначное отображение пространства Z на бикомпакт Γ_f .

Замечание. Из предыдущих рассуждений ясно, что все элементы множества $\mathbb{Z}_f$ суть бикомпактные пространства.

Нам понадобится в дальнейшем следующее легко проверяющееся

Предложение 8.8. Пусть $f: X \longrightarrow Y$ – однозначное непрерывное хаусдорфово отображение пространства X на T_2-пространство Y . Тогда X хаусдорфово пространство.

Следствие. Непрерывный, замкнутый, собственный, хаусдорфов прообраз бикомпакта всегда есть бикомпакт.

Как уже упоминалось, Γ_f есть пространство $\mathscr{H}$-непрерывного разбиения пространства $Z \in \mathbb{Z}_f$ на дизъюнктные бикомпакты Φ_z (см.[4]). Поэтому отображение φ хаусдорфово и пространство Z – бикомпакт. Пусть далее $f \in \mathbb{K}\mathbb{H}$.

Предложение 8.9. $Z \in \mathbb{Z}_f^{iz}$ тогда и только тогда, если существует однозначное совершенное неприводимое отображение $\varphi: Z \longrightarrow \Gamma_f$.

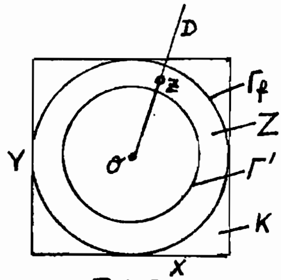
Доказательство. а) Пусть $Z \in \mathbb{Z}_f^{iz}$. Покажем, что однозначное отображение $\varphi: Z \longrightarrow \Gamma_f$, рассмотренное выше, неприводимо. Действительно, имеем $p_X = \pi_X \cdot \varphi$, $p_Y = \pi_Y \cdot \varphi$. Если φ не является неприводимым, тогда p_X , p_Y также не являются неприводимыми, что противоречиво.

б) Очевидно, поскольку замкнутость и неприводимость отображения φ обеспечивают неприводимость однозначных отображений $p_X = \pi_X \cdot \varphi$, $p_Y = \pi_Y \cdot \varphi$.

Следствие. Если $f \in \mathbb{K}\mathbb{H}$, тогда все пространства из множества $\mathbb{Z}_f^{iz}$ имеют один и тот же абсолют Γ_f , который также принадлежит $\mathbb{Z}_f^{iz}$.

Приведем пример пространства, которое является элементом множества $\mathbb{Z}_f \setminus \mathbb{Z}_f^{iz}$, где f – совершенное многозначное отображение бикомпакта X на бикомпакт Y .

Пусть X и Y – стороны квадрата K . Отображение $f: X \to Y$ задано так, что его графиком является вписанная в квадрат K окружность Γ_f . Пространство Z есть замкнутое кольцо, ограниченное окружностью Γ_f и концентрической окружностью Γ' меньшего радиуса. Все пространства наделены индуцированной топологией плоскости. Отображение φ есть "выметание" точек кольца Z на окружность Γ_f вдоль лучей, выходящих из центра σ квадрата K. Очевидно, что это отображение совершенно, но не является неприводимым. Пусть далее $z \in Z$. Бикомпакт Φ_z есть замкнутый отрезок $D \cap Z$, где D – луч, выходящий из точки σ и содержащий точку z.



Предложение 8.10. Пусть $f: X \to Y$ – канонически неприводимое отображение регулярных пространств, причем X (соотв., Y) экстремально несвязно. Тогда f однозначно, π_X (соотв., π_Y) – гомеоморфизм, и $X \cong \mathring{Y} \cong \Gamma_f$ (соотв., $Y \cong \mathring{X} \cong \Gamma_f$).

Доказательство. Это следует из трех утверждений об абсолютах регулярных пространств, которые хорошо известны:

а) если пространства X и Y связаны канонически неприводимым отображением, то они соабсолютны;

б) абсолют экстремально несвязного пространства есть само это пространство;

в) если $f: X \to Y$ – непрерывное, замкнутое и неприводимое однозначное отображение, Y экстремально несвязно, тогда X также экстремально несвязно и f – гомеоморфизм.

Следствие. Канонически неприводимое отображение экстремально несвязных пространств есть гомеоморфизм.

Предложение 8.11. Пусть $f: X \to Y$ – канонически неприводимое отображение бикомпактов, один из которых экстремально несвязен. Тогда $\mathbb{Z}_f^{iz} = \{\Gamma_f\}$.

Доказательство. Действительно, любое пространство $Z \in \mathbb{Z}_f^{iz}$ есть неприводимый совершенный прообраз Γ_f. А так как Γ_f в данном случае есть экстремально несвязный бикомпакт, то $Z \cong \Gamma_f$.

Литература

1. П.С.Александров, О некоторых результатах в теории топологических пространств, полученных за последние двадцать пять лет, УМН, XV, вып.2(92), 1960, 1-95.
2. К.Куратовский, Топология, "Мир", М., т.1, 1966.

3. В.И.Пономарев, Новое пространство замкнутых множеств и многозначные непрерывные отображения бикомпактов, Матем. сб., 48(90), № 2, 1959, 191-212.
4. В.И.Пономарев, О свойствах топологических пространств, сохраняющихся при многозначных непрерывных отображениях, Матем.сб., т.51, вып.4, 1960, 515-536.
5. Р.С.Линичук, О пространствах замкнутых множеств, Вестник МГУ, серия I, № 4, 1970, 54-59.
6. Р.С.Линичук, Некоторые свойства пространств замкнутых подмножеств, Труды УШ летней математической школы, Издание Института математики АН УССР, Киев, 1971, 212-223.
7. E.Michael, Topologies on Spaces of Subsets, Trans. Amer. Math. Soc., 71, № 1 (1951), 152-182.
8. Feichtinger Oskar, Properties of the λ-topology, Lect., Notes Math., 1970, № 171, 17-23.
9. М.М.Чобан, Многозначные отображения и борелевские множества, ДАН СССР, 182, № 3, 1968, 514-517.
10. П.С.Александров, Комбинаторная топология, М., 1947.
11. P. Alexandroff, Über stetige Abbildungen kompakter Räume, Proceed. Acad. Amsterdam, 28 (1925), 97.
12. P. Alexandroff, Über stetige Abbildungen kompakter Räume, Math. Ann., 96 (1926), 555-571.
13. В.И.Пономарев, О непрерывных разбиениях бикомпактов, УМН, XII, вып.4(76), 1957, 335-340.
14. В.И.Пономарев, Об абсолюте топологических пространств, ДАН СССР, 149(1963), 26-28.
15. В.И.Пономарев, О пространствах, соабсолютных с метрическими, УМН, 21, № 4 (1966), 101-132.
16. Н.Лашнев, О непрерывных разбиениях и замкнутых отображениях метрических пространств, ДАН СССР, 165, № 4, 1965, 756-758.

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ И КОМПЛЕКСНЫХ ФУНКЦИЙ

Ю.Ю.Трохимчук

(Киев)

I. Контингенции замкнутых множеств

Пусть E – произвольное множество в n-мерном эвклидовом пространстве R^n ; луч ℓ , выходящий из точки $x \in E$, называется промежуточной полукасательной множества E в точке x, если существует последовательность $\{x_k\}$ точек множества E, отличных от x, сходящихся к x, и такая, что последовательность лучей $\{\overrightarrow{xx_k}\}$ сходится к ℓ . Совокупность всех промежуточных полукасательных множества E в точке x называется контингенцией этого множества в точке x и обозначается символом $\operatorname{contg}_E x$; контингенция в изолированной точке E считается пустым множеством.

Легко установить, что это определение $\operatorname{contg}_E x$ равносильно следующему: пусть $S(x)$ – единичная сфера S^{n-1} с центром x и пусть $\varepsilon > 0$ – произвольно; спроектируем лучами из точки x на сферу $S(x)$ все точки множества $E \cap V_\varepsilon(x)$,где $V_\varepsilon(x)$ – открытый шар с центром x. Полученное множество обозначим $C_\varepsilon(x)$; тогда

$$\operatorname{contg}_E x \cap S(x) = \bigcap_\varepsilon \overline{C_\varepsilon(x)}.$$

Это пересечение мы будем называть сферической контингенцией.

Прямая линия, проходящая через точку x и образующая две полукасательные множества E в точке x, называется промежуточной касательной множества E в этой точке. Если $\operatorname{contg}_E x$ совпадает с совокупностью всех лучей, выходящих из x и лежащих в некоторой гиперплоскости h (т.е. $(n-1)$ - плоскостей), то h называется касательной гиперплоскостью множества E в точке x.

Легко видеть, что $\operatorname{contg}_E x$ является замкнутым множеством лучей, выходящих из точки x; обратно, любое замкнутое множество лучей является контингенцией некоторого множества (хотя бы <u>того</u> же множества лучей). Но оказывается, что если учитывать не все точки множества Е, а лишь - в каком-то смысле - "подавляющее" их большинство, то произвол в структуре $contg_E x$ существенно ограничивается.

Один из основных результатов здесь гласит: в каждой точке множества $E \subset R^n$, исключая, быть может, подмножество точек (n-1)-меры нуль, множество Е или имеет касательную гиперплоскость, или его контингенция является полным пространством либо некоторым полупространством (см., например, /I/).

Как видим, в этой теореме в основу описания "подавляющего" большинства точек множества Е взята мера (вернее (n-1)-мера, т.е. аналог "площади поверхности" в R^3); применение этой теоремы к графику произвольной конечной вещественной функции $u=f(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ сразу дает описание дифференциальных свойств такой функции на множестве полной меры.

Нашей основной целью является изучение дифференциальных свойств непрерывных комплексных функций $w=f(z)$ на подмножестве второй категории в области ее определения. Это будет связано с определением контингенции некоторых множеств с точностью до подмножества первой категории, но связь здесь намного сложнее и, во всяком случае, не так непосредственна, как в вещественном случае. Поэтому необходимо комплексный случай рассмотреть особо.

Итак, в основу описания "подавляющего" большинства точек множества мы вместо меры возьмем категорию. Но, конечно, все ожидаемые результаты будут иметь содержательный смысл лишь на множествах второй категории в себе, например, на множествах типа $\mathcal{G}_\delta$; в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением совершенных и открытых множеств.

Хотя аналога вышеприведенной теоремы в терминах категории для общего случая пока нет, все же одно общее утверждение привести здесь можно, а именно:

Т е о р е м а I. Если $E \subset R^n$ - совершенно, то на его подмножестве E' второй категории $contg_E x$, $x \in E'$ есть центрально-симметрическое (с центром x) множество в R^n .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{\theta_p\}$ $(p=1,2,...)$ - всюду плотная последовательность направлений в пространстве R^n. Обозначим через $E_{pqr} \subset E$ $(q,r=1,2,...)$ множество точек x є Е таких, что круговой конус с вершиной x, осью θ_p, углом $\frac{1}{q}$ при вершине и с высотой $\frac{1}{r}$ не содержит внутри точек множества Е. Из определения легко следует, что $E_{pqr} \subset E$ - замкнутое множество.

Предположим теперь, что теорема неверна. Тогда найдется множество $\tilde{\mathcal{E}} \subset \mathcal{E}$ не первой категории, такое, что в каждой точке $x \in E$ существует прямая, L_x, один луч которой (с началом x) принадлежит $contg_{\mathcal{E}}\, x$, а другой – не принадлежит. Обозначим через $\mathcal{E}'_{pqr}$ подмножество из $\mathcal{E}_{pqr}$ со следующим дополнительным свойством: центрально-симметричный прежнему круговой конус с вершиной $x \in E'_{pqr}$ (и осью $(-\theta_p)$) содержит промежуточную полукасательную ℓ множества E, такую, что угол $(\ell, \widehat{-\theta_p}) \le \frac{1}{4q}$
Очевидно, что

$$\tilde{\mathcal{E}} = \bigcup_{p,q,r} \mathcal{E}'_{pqr}.$$

Выбирая, в случае необходимости, порцию, можем считать, что $\tilde{\mathcal{E}}$ – всюду плотно в E. Так как $\tilde{\mathcal{E}}$ – не первой категории на $\mathcal{E}$, тем более, в себе, что найдутся такие p, q, r, что $\mathcal{E}'_{pqr}$ будет плотно на некоторой порции множества $\tilde{\mathcal{E}}$, а, значит, и на соответствующей порции из E. Так как $\mathcal{E}_{pqr} \supset \mathcal{E}'_{pqr}$ – замкнутое множество, то найденная порция – обозначим ее через P – содержится в нем. Очевидно, можем предположить диаметр $P \le \frac{1}{r}$, а направление луча Q_p совпадающим с направлением оси Ox_n пространства $R^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$

Пусть Q – проекция P на плоскость $Ox_1, \ldots, x_{n-1}$ легко видеть, что каждая точка из Q является проекцией единственной точки из P, поэтому P можно рассматривать как график некоторой однозначной функции $f(\bar{x}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1})$ на Q. По построению $|f(\bar{x}'') - f(\bar{x}')| \le ctg\, \frac{1}{q} \cdot (\bar{x}'' - \bar{x}')$ и, следовательно, в каждой точке $x \in P \supset \mathcal{E}'_{pqr} \cap P$ двуполостный вертикальный конус с углом $\frac{1}{q}$ при вершине $\underline{x}$ не <u>содержит</u> точек из E; в то же время на P должно быть плотно множество $\mathcal{E}'_{pqr} \cap P$, следовательно, для <u>каждой</u> точки x' этого множества нижний полуконус указанного конуса обязательно должен содержать точки E <u>внутри</u> (и сколь угодно близко к x').

Полученное очевидное противоречие и доказывает теорему.

Очевидно, ее можно было бы перефразировать следующим образом: в каждой точке совершенного множества, исключая подмножество первой категории, контингенция его состоит из промежуточных касательных.

Приведем сразу же одно утверждение о простых дугах на плоскости, доказательство которого естественно примыкает к только что приведенному. Ясно также, как в данном случае определяются "односторонние" контингенции.

Т е о р е м а 2. На каждой простой дуге $\Lambda \subset R^2$ существует множество Е всюду второй категории на Λ, в каждой точке которого правая и левая контингенция этой дуги центрально симметричны (относительно этой точки), точнее: если некоторый луч принадлежит одной из них, то луч противоположного направления принадлежит другой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дуга Λ задана гомеоморфизмом $x = x(t)$ отрезка $[a, b] \subset R^1$ и пусть, как и выше, $\{\theta_p\}$ - всюду плотная последовательность направлений на плоскости R^2. Обозначим через $\varepsilon^+_{pqr} \subset [a, b]$ $(q, r = 1, 2, \dots)$ множество значений t, для которых имеем: $[x(t) \hat{,} \theta_p] \geq \frac{1}{q}$ для всех t', $t < t' < t + \frac{1}{r}$. Аналогично определим ε^-_{pqr}. Из определения легко следует, что каждое из этих множеств - замкнуто.

Предположим, что теорема неверна. Тогда найдется множество $\tilde{\varepsilon} \subset [a, b]$ не первой категории, такое, что в каждой точке $x(t) \in \Lambda$, $t \in \tilde{\varepsilon}$ существует прямая L_t, один луч которой (с началом $x(t)$) принадлежит левой (правой) контингенции, а другой - не принадлежит правой (левой). Достаточно убедиться в противоречивости первого случая (и считать, что он реализуется на $\tilde{\varepsilon}$).

Обозначим через $\varepsilon'_{pqr} \subset \varepsilon^+_{pqr}$ множество тех t, для которых дуга $\Lambda_t \leftrightarrow [a, t]$ обладает в точке $x(t)$ промежуточной полукасательной ℓ, такой, что $[\ell \hat{,} -\theta_p] \leq \frac{1}{4q}$.

Очевидно, что $\tilde{\varepsilon} = \bigcup_{p,q,r} \varepsilon'_{pqr}$

Выбирая, в случае необходимости, порцию, можем считать, что $\tilde{\varepsilon}$ - всюду плотно на $[a, b]$. Так как $\tilde{\varepsilon}$ - не первой категории, то найдутся такие p, q, r, что ε'_{pqr} будет плотно на некоторой порции $\tilde{\varepsilon}$, а значит, и на некотором отрезке $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$

Но $\varepsilon^+_{pqr} \supset \varepsilon'_{pqr}$ - замкнуто, поэтому $[\alpha, \beta] \subset \varepsilon^+_{pqr}$.

можем, очевидно, предположить, что $\beta - \alpha < \frac{1}{r}$

Обозначим $\delta(r) = \inf\limits_{a \leq t \leq b} \sup\limits_{t < t', t'' < t + \frac{1}{r}} |x(t'') - x(t')|$; взяв теперь диаметр дуги $\Lambda' = \Lambda[\alpha, \beta]$ меньшим $\delta(r)$ получим следующее основное свойство этой дуги: в каждой точке $x(t)$ сектор $Q_{pqr}(t)$ с вершиной $x(t)$, радиусом $\frac{1}{4}\delta(r)$, углом $\frac{1}{q}$ и биссектрисой θ_p, не содержит точек дуги $\Lambda[t, \beta]$ но вертикальный к нему сектор $(-Q_{pqr}(t))$ для плотного на Λ'.

множества точек $x(t)$ обязательно содержит полукасательную дуги $\Lambda[\alpha,t)$. Но для каждой такой точки $x(t)$ точки кривой $\Lambda[\alpha,t)$ являются "предыдущими" и поэтому секторы Q_{pqr} с вершинами в них не должны содержать $x(t)$ как "последующую" для них; но для тех точек дуги $\Lambda[\alpha,t)$, которые попадают внутрь $(-Q_{pqn})$ это невозможно.

Теорема 2 доказана.

Отметим, что эта теорема особенно интересна в случае, когда односторонние контингенции дуги содержат полуплоскости, не совпадая с ними.

Еще несколько замечаний. Первое - относительно более общего случая <u>замкнутых</u> подмножеств R^n. С одной стороны, подмножество его изолированных точек всегда - не первой категории, но при желании контингенцию в этих случаях (пустое множество) можно считать "центрально-симметричным" и теорему справедливой и в этом случае, с другой стороны, во многих случаях (и в наших в том числе) существенная часть рассмотрений относится именно к совершенному "ядру" возникающих так или иначе замкнутых множеств.

Второе замечание касается, так сказать, общей структуры совершенного множества. Ведь из метода доказательства теоремы I легко следует, что для любого совершенного множества $\varepsilon\subset R^n$ имеет место представление:

$$\varepsilon=\varepsilon_0 \cup (\bigcup_k \varepsilon_k) \qquad (k=1,2,\ldots),$$

где ε_0 есть замыкание множества точек ε, в которых $contg_\varepsilon x$ есть полное пространство (совокупность которых есть $\mathcal{G}_\delta$), а каждое ε_k есть (открытая) порция из ε, являющаяся графиком некоторой функции - при подходящем выборе осей координат в R^n, - удовлетворяющей условию Липшица. Можно было бы назвать ε_0 "существенно пространственной" частью данного множества ε. В большинстве приложений теоремы I наиболее интересными случаями являются те, в которых совершенное множество не исчерпывается этой "существенной" частью.

В заключение этого параграфа приведем еще одно утверждение о "симметрии".

Пусть в области $D\subset R^2\equiv C'$ задана непрерывная комплексная функция $f(z)$. Число a называется производным числом этой функции в точке $z_0\in D$, если существует последовательность комплексных чисел $\{h_n\}$, $h_n\to 0$, для которой

$$\frac{f(z_0+h_n)-f(z_0)}{h_n}\to a.$$

Очевидно, можно предполагать здесь, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Arg} h_n$, так как этого можно достичь, выделяя подпоследовательности; это же означает, что множество $\{z_0+h_n\}$ обладает определенной полукасательной в точке z_0.

Теорема 3. Существует множество $E\subset D$ всюду второй категории со следующим свойством: если $\underline{a}$ - производное число функции $f(z)$ в точке $z\in\mathcal{E}$, соответствующее последовательности $\{z+h_n\}$, $h_n\to 0$, с полукасательной ℓ в точке z, то найдется другая последовательность $\{z+h'_n\}$, $h'_n\to 0$, с полукасательной $(-\ell)$, "дающая" то же производное число $\underline{a}$.

Доказательство. Пусть, как и раньше, $\{\theta_p\}$ - всюду плотная последовательность направлений на плоскости C, а $\{r_n\}$ - последовательность всех рациональных точек C. Обозначим через $\mathcal{E}_{pqmnk}\subset D$ множество точек $z\in D$, таких, что сектор $Q_{pqmnk}(z)$ с вершиной z, биссектрисой θ_p, углом $\frac{1}{q}$ и радиусом $\frac{1}{m}$ обладает следующим свойством:

$$\left|\frac{f(z')-f(z)}{z'-z}-r_n\right|\geq\frac{1}{k}$$

для всех $z'\in Q_{pqmnk}(z)$.

Обычным образом убеждаемся, что $\mathcal{E}_{pqmnk}$ - замкнуто (в D).

Предположим теперь, что теорема неверна. Тогда найдется множество $\tilde{\mathcal{E}}\subset D$ не первой категории, такое, что через каждую точку $z\in\tilde{\mathcal{E}}$ проходит прямая ℓ_z - пусть составляющие ее лучи будут ℓ_z^+, ℓ_z^- - со следующими свойствами: существует такое комплексное $a(z)$, что

I) оно есть производное число функции $f(z)$ в точке z для последовательности $\{z+h_s\}$, $h_s\to 0$, с полукасательной ℓ_z^+ (или ℓ_z^-);

2) для некоторого угла $\gamma(z)$ с вершиной z и биссектрисой ℓ_z^- (соответственно ℓ_z^+) имеем:

$$\varliminf_{\substack{z'\to z\\ z'\in\gamma(z)}}\left|\frac{f(z')-f(z)}{z'-z}-a(z)\right|\geq\delta(z)>0.$$

Обозначим через $\mathcal{E}'_{pqmnk}$ подмножество из $\mathcal{E}_{pqmnk}$ со следующим свойством: центрально-симметричный сектор $\{-Q_{pqmnk}(z)\}$

содержит полукасательную ℓ такой последовательности $\{z+h'_s\}$, $h'_s \to 0$ что $\ell, \hat{-} \theta_p \le \frac{1}{4q}$ и (*) $\left|\frac{f(z+h'_s)-f(z)}{h'_s} - r_n\right| \le \frac{1}{2k}$ для всех $s=1,2,\dots$.

Тогда $\tilde{\mathcal{E}} = \bigcup_{p,q,m,n,k} \mathcal{E}'_{pqmnk}$ Снова предполагая, без ограничения общности, что $\mathcal{E}$ плотно в $\mathcal{D}$, из того, что $\tilde{\mathcal{E}}$ – не первой категории, заключаем, что найдутся такие p,q,m,n,k, что $\mathcal{E}'_{pqmnk}$ будет плотно на некоторой порции $\tilde{\mathcal{E}}' = d \cap \tilde{\mathcal{E}}$ (где $\bar{d} \subset \mathcal{D}$ – круг), а значит и в круге d. Так как $\mathcal{E}_{pqmnk} \supset \mathcal{E}'_{pqmnk}$ – замкнутое множество, то $\bar{d} \subset \mathcal{E}_{pqmnk}$. Возьмем произвольную внутреннюю точку $z_0 \in d$ и ее сектор $Q(z_0) = Q_{pqmnk}(z_0)$; максимальную секториальную часть его, лежащую в $\bar{d}$, обозначим через Q_0. По построению, диаметр Q_0 – не больше $\frac{1}{m}$.

Возьмем теперь внутри Q_0 точку $z \in \tilde{\mathcal{E}}$ и части ее секторов $Q(z)$ и $\{-Q(z)\}$ в Q_0. Начиная с некоторого s, все точки последовательности $\{z+h'_s\}$ попадут внутрь $Q_0 \cap \{-Q(z)\}$ но тогда секторы $Q(z+h'_s)$ этих точек содержат точку z и, следовательно,

$$\left|\frac{f(z+h'_s)-f(z)}{h'_s} - r_n\right| \ge \frac{1}{n}.$$

Но это противоречит неравенству (*).

Полученное противоречие и доказывает теорему.

Из нее легко вывести, что точки множества $\mathcal{E}$ обладают тем свойством, что все производные числа в точках $z \in \mathcal{E}$ возникают, если вместо полной круговой окрестности их брать любые их полуокружности с диаметрами фиксированного направления.

2. Случай вещественных функций одного переменного

Пусть на интервале $(a,b) \subset R^1$ задана вещественная непрерывная функция $y=f(x)$. Для каждой точки $x \in (a,b)$ рассмотрим множество $m_\varepsilon(x)$ всех значений отношения

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

при условии $0<|h|<\varepsilon$ для данного $\varepsilon>0$; $m_\varepsilon(x)$ будем рассматривать как подмножество некоторой числовой оси 0ξ, дополненной двумя бесконечно удаленными точками $\pm\infty$. Введем следующее обозначение:

$$m_x = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{m_\varepsilon(x)} \cdot$$

Легко показать, что множество m_x совпадает с совокупностью всех производных чисел функции $f(x)$ в данной точке x ; при этом число d (случаи $d=\pm\infty$ не исключены) называется производным числом в этой точке, если существует последовательность чисел $\{h_n\}$, $h_n \to 0$ $(n=1,2,\dots)$, что

$$\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} \to d \,.$$

Нетрудно, далее, установить связь между m_x и контингенциями, именно: m_{x_0} есть пересечение $contg$ графика функции $f(x)$ в точке x_0 с осью $O\xi$, снесенной в точку x_0+1 и началом отсчета на горизонтали $y=f(x_0)$. Так как $m_\varepsilon(x)$ есть непрерывный образ двух интервалов $(x-\varepsilon, x)$ и $(x, x+\varepsilon)$, то это множество состоит, вообще говоря, из двух компонент; то же верно и для $\overline{m_\varepsilon(x)}$, а потому и для m_x. Легко для любых замкнутых (конечных или бесконечных) отрезков на "расширенной" оси $O\xi$ построить функцию, для которой множество производных чисел m в некоторой точке совпадает с объединением этих отрезков.

Но с точностью до множества первой категории мы на основании теоремы I получаем без труда следующее предложение.

Т е о р е м а 2". На множестве всюду второй категории в интервале (a,b) множество m_x есть либо вся прямая $O\xi$, либо замкнутый ее отрезок (конечный или бесконечный), либо единственная точка – в том числе и $\pm\infty$; при этом множество правых производных чисел совпадает с множеством левых.

Ниже на примерах мы убедимся, что все указанные возможности реализуются.

Определим обычным образом для каждой точки $x\in(a,b)$ производные числа Дини $\bar f^+(x)$, $\underline{f}^+(x)$, $\bar f^-(x)$, $\underline{f}^-(x)$ например,

$$\bar f^+(x) = \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{и т.д.}$$

Т е о р е м а 3. Для каждой точки $x_0\in(a,b)$ имеем:

$$\bar f^+(x_0) \le \lim_{x\to x_0+0} \bar f^+(x), \quad \underline{f}^+(x_0) \ge \lim_{x\to x_0+0} \underline{f}^+(x)$$

(аналогичные неравенства для левых чисел).

Доказательство. Достаточно доказать лишь первое неравенство.

Предположим, что $\bar{f}^+(x_0) > \overline{\lim\limits_{x\to x_0+0}} \bar{f}^+(x) = L$; для некоторого положительного δ: $\bar{f}^+(x_0) > L + 2\delta$. Найдется такое $\eta > 0$, что на отрезке $[x_0, x_0+\eta]$ имеем $\bar{f}^+(x) \le L + \delta$. Но тогда (см. [1], стр.423) $f(x)$ абсолютно непрерывна на этом отрезке и

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\int\limits_{x_0}^{x} \bar{f}^+(t)\,dt \le L+\delta,$$

а поэтому и $\overline{\lim\limits_{x\to x_0+0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le L+\delta$, что противоречиво. Ясно также, как изменить здесь рассуждения для случая, когда $L = -\infty$.

Теорема доказана.

Пусть теперь $f(x)$ является на интервале (a,b) ACY функцией. Так как в доказательстве теоремы 3 существенным явилось представление функции $f(x)$ в виде неопределенного интеграла, а для ACY -функций это имеет место, то подобным образом получим следующее утверждение:

Теорема 4. Пусть $f(x)$ - ACY-функция на (a,b) и A - множество точек существования асимптотической производной $f'(x)$. Тогда $\bar{f}^+(x_0) \le \underset{x\in A}{\lim\limits_{x\to x_0+0}} f'(x)$ и т.д.

В дальнейшем эту теорему будем применять лишь для случая функций, удовлетворяющих условию Липшица. Легко показать, что в этом последнем случае неравенства теоремы 4 верны уже, если (например, первого неравенства) x будет стремиться к x_0 лишь по множеству $Q(x_0)$, для которого x_0 есть точка правой плотности.

Выясним теперь вопрос о достижении равенства в этих неравенствах.

Соответствие $x \to m_x$ определяет некоторое многозначное отображение интервала (a,b) в прямую $O\xi$. Скажем, что в некоторой точке x_0 это отображение непрерывно (точнее, полунепрерывно сверху), если для любой последовательности $x_k \to x_0$ имеем: $\underset{k}{Lt}\, m_{x_k} \subset m_{x_0}$.

Для многозначных отображений нашего типа имеется следующее обобщение известной теоремы Бэра [I].

[I] См.Труды X летней математической школы,Киев, 1974.

Обобщенная т е о р е м а Б э р а. Многозначное отображение $x \to m_x$ на каждом совершенном множестве $P \subset (a,b)$ обладает множеством второй категории на P точек непрерывности. Эта теорема справедлива во многих случаях, когда значение многозначной функции возникает по той же схеме, что и m_x. В частности, это имеет место и для контингенций замкнутых множеств в R^n (ср.п.I), а также для "односторонних" контингенций простых дуг (см.ниже). Наконец, в силу одного результата Куратовского /2/, ограничение этих многозначных отображений на множестве $\mathcal{E}$ второй категории оказываются непрерывными и в топологическом смысле, т.е. если например, $x_k \to x_0$ и x_k, $x_0 \in \mathcal{E}$, то $\underset{k}{lt}\, m_{x_k} = m_{x_0}$.

Из этой теоремы легко уже следует, что равенства в теоремах 3 и 4 достигаются на множестве второй категории в (a,b). Другими словами, на множестве второй категории концы отрезков m_x оказываются "достижимыми" уже по точкам дифференцируемости (в условиях теоремы 4), что же касается внутренних точек, то можно привести следующий результат:

Т е о р е м а 5. На некотором множестве $\mathcal{E}$ второй категории в (a,b) имеет место следующее свойство: для каждого $x \in \mathcal{E}$ и каждой внутренней точки $\xi \in m_x$ найдется последовательность $\{x_k\}$, $x_k \to x$ такая, что $\xi \in m_{x_k}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Производные числа Дини $\bar{f}^+$, $\underline{f}^+$, $\bar{f}^-$, $\underline{f}^-$. являются B-измеримыми, а потому можно определить некоторое множество $\mathcal{E}$ второй категории, для которого все ограничения этих функций на $\mathcal{E}$ непрерывны. По обобщенной теореме Бэра можно считать дополнительно, что $\mathcal{E}$ является и множеством точек непрерывности отображения: $x \to m_x$ и что структура m_x, $x \in \mathcal{E}$ такова, как указано в теореме 2". Вспомним, что в каждой точке $x \in \mathcal{E}$ множество $m_x = [\underline{f}^+(x), \bar{f}^+(x)]$ · мы, в силу непрерывности чисел Дини, и получим утверждение теоремы.

Прежде чем переходить к построению примеров, докажем еще одно предложение.

Т е о р е м а 6. Если для некоторого множества $\mathcal{E}$ не первой категории в (a,b) множества производных чисел m_x, $x \in \mathcal{E}$ не являются полными прямыми, то найдется отрезок $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$ на котором функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию (и, следовательно, дифференцируема почти всюду на этом отрезке).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Занумеруем все рациональные числа: $r_1, r_2, \ldots, r_n$ и обозначим через $\mathcal{E}_{mn}$ множество точек $x \in (a,b)$, для которых имеем:

$$\left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - r_n \right| \geq \frac{1}{m}$$

для всех h, $0 < |h| < \frac{1}{m}$.

Каждое из $\mathcal{E}_{mn}$ – замкнуто, а так как

$$\mathcal{E} = \bigcup_{m,n} (\mathcal{E}_{mn} \cap \mathcal{E}),$$

то, во-первых, можем считать, что $\mathcal{E}$ всюду плотно на некотором отрезке в (a,b) (ведь оно – не первой категории) и, во-вторых, найдется пара чисел m, n, для которых $\mathcal{E}_{mn} \cap \mathcal{E}$ будет плотной на некоторой порции $(\alpha,\beta) \cap \mathcal{E}$ множества $\mathcal{E}$, а потому $\mathcal{E}_{mn}$ плотно на $[\alpha,\beta]$; в силу замкнутости этого множества, $[\alpha,\beta] \subset \mathcal{E}_{mn}$. Взяв отрезок $[\alpha,\beta]$ длины, меньшей $\frac{1}{m}$, получим, что функция $\varphi(x) = f(x) - r_n \cdot x$ осуществляет взаимно однозначное отображение отрезка $[\alpha,\beta]$ в ось y-ов; в самом деле, по определению $\mathcal{E}_{mn}$ для любых $x', x'' \in [\alpha,\beta]$ имеем:

$$\left| \frac{\varphi(x'')-\varphi(x')}{x''-x'} \right| = \left| \frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'} - r_n \right| > \frac{1}{m} > 0.$$

Но это означает, что $\varphi(x)$ – строго монотонна, а $f(x) = \varphi(x) + r_n x$ – ограниченной вариации, ч.т.д.

Приведем теперь несколько примеров.

<u>Пример I</u>. Возьмем на отрезке $[0,1]$ множество $\mathcal{E}_0$ такое, что оно само и его дополнение имеют положительную меру в каждом интервале из $[0,1]$. Полагаем $g(x)=1$ на $\mathcal{E}_0$ и $g(x)=0$ на $C\mathcal{E}_0$ и рассмотрим функцию $f(x) = \int^x g(t)\,dt$

Нетрудно показать /3/, что на некотором множестве $\mathcal{E}$ второй категории на $[0,1]$ имеем:

$$\overline{f}^+(x) = 1, \quad \underline{f}^+(x) = 0.$$

Другими словами, для $x \in \mathcal{E}$ множество $m_x \equiv [0,1]$

Так как, очевидно, функция $f(x)$ строго возрастает, то для обратной функции на множестве $f(\mathcal{E})$ второй категории на $[0, f(1)]$ получим в качестве множеств m бесконечные отрезки $[1, \infty]$

<u>Пример 2</u>. Известно /4/, что какое бы ни было множество $\mathcal{E} \subset [0,1]$ меры 0, существует строго возрастающая функция $f(x)$, $x \in [0,1]$, для которой $f'(x) = +\infty$, $x \in \mathcal{E}$.

Взяв множество $\mathcal{E}$ – второй категории на $[0,1]$, мы осуществим еще одну возможность теоремы 2.

Пример 3. Наконец, любая нигде не дифференцируемая функция $f(x)$, $x \in (a,b)$ в силу теоремы 6, обладает в качестве множеств на множестве второй категории - полными прямыми.

Приведенные примеры и показывают, что все возможности, указанные в теореме 2, действительно, реализуются.

3. Случай комплексных функций

Пусть в области D комплексной плоскости $R^2 \equiv C$ задана непрерывная функция $w=f(z)$. Для каждой точки $z \in D$ рассмотрим множество $M_\varepsilon(z)$ всех значений отношения

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

при условии $0<|h|<\varepsilon$ для данного $\varepsilon>0$; $M_\varepsilon(z)$ будем рассматривать как подмножество некоторой расширенной комплексной плоскости ζ. Множество

$$\mathfrak{M}_z = \bigcap_\varepsilon \overline{M_\varepsilon(z)}$$

по Н.Н.Лузину /5/, называется множеством моногенности функции $f(z)$ в данной точке z. Как и в вещественном случае, легко показать, что $\mathfrak{M}_z$, совпадает с совокупностью производных чисел этой функции в той же точке (определение этих чисел - то же, что и в вещественном случае, см.выше).

Так как $M_\varepsilon(z)$ есть непрерывный образ выколотой ε-окрестности точки z, то это множество связно, а потому $\overline{M_\varepsilon(z)}$ и $\mathfrak{M}_z$ являются континуумами на расширенной плоскости ζ. Можно показать /6/, что любой континуум на плоскости ζ может служить множеством моногенности для некоторой функции в какой-либо точке. Но опять-таки, если ограничиваться описанием множеств $\mathfrak{M}_z$ для - в каком-то смысле - "подавляющего" большинства точек в области D, то и число возможностей оказывается ограниченным. Например, имеет место следующий результат /5/: почти всюду в области D множества $\mathfrak{M}_z$ есть либо полная плоскость ζ, либо окружность, либо единственная точка; в тех точках, где $\mathfrak{M}_z$ не есть полная плоскость, исключая лишь их подмножество меры нуль, функция $f(z)$ имеет полный дифференциал.

При этом, если дифференциал ее имеет вид $f_z\,dz + f_{\bar z}\,d\bar z$, то производное число ее, соответствующее направлению $\arg dz = \alpha$, будет равно $f_z + f_{\bar z}\, e^{-2i\alpha}$. Следовательно, центр окружности $\mathfrak{M}_z$ в этом случае есть f_z, а радиус $|f_{\bar z}|$. Отметим еще, что якобиан отображения $w=f(z)$ в этой точке равен

$$\vartheta(z)=|f_z|^2-|f_{\bar z}|^2.$$

При этом для многозначного отображения $z\to\mathfrak{M}_z$ имеет место обобщенная теорема Бэра о точках непрерывности (см.п.2).

Рассмотрим множество $\mathcal{E}\subset\mathcal{D}$ всех точек, в которых множества $\mathfrak{M}$ не совпадают со всей плоскостью ζ. Выпишем все рациональные точки этой плоскости в некоторую последовательность: $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ и введем множества

$$\mathcal{E}_{mn}=\left\{z:\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-r_n\right|\geqslant\frac{1}{m},\qquad 0<|h|<\frac{1}{m}\right\}.$$

Легко показать /5/, что все эти множества замкнуты (в $\mathcal{D}$), причем $\bigcup\limits_m \mathcal{E}_{mn}$ есть множество тех точек z области $\mathcal{D}$, для которых $\mathfrak{M}_z$ не содержат точки r_n. Отсюда следует, что

(3) $$\mathcal{E}=\bigcup_{m,n}\mathcal{E}_{mn}.$$

Предположим теперь, что Е - не первой категории. Отбрасывая не существенные для нас нигде не плотные в Д открытые порции Е, можем считать, что любая открытая порция из Е плотна в некотором круге из Д. Тогда из представления (3) следует, что найдется некоторый круг $d\subset\mathcal{D}$, в котором порция $\mathcal{E}\cap d$ плотна, а на ней плотно $\mathcal{E}_{mn}$ при определенных значениях m,n. В силу замкнутости последнего, $\mathcal{E}_{mn}\supset d$; взяв диаметр d меньшим $\frac{1}{m}$, мы получим для вспомогательной функции $\varphi(z)=f(z)-r_n\cdot z$ что для любых точек $z',z''\in d$:

$$|\varphi(z'')-\varphi(z')|\geqslant\frac{1}{m}|z''-z'|.$$

Отсюда следует, во-первых, что отображение $w=\varphi(z)$, $z\in d$ есть гомеоморфизм круга d на некоторую область d_1 плоскости и, во-вторых, что обратная функция $z=\varphi^{-1}(w)=\psi(w)$ удовлетворяет условию Липшица в области d_1:

$$|\psi(w'')-\psi(w')|\leqslant m\,|w''-w'|.$$

А это означает, что все множества моногенности $\mathfrak{M}_w$ функции $\psi(w)$ - как подмножества некоторой плоскости ω - лежат в ограниченном круге $|\omega|\leqslant m$ этой плоскости. Вводя новую вспомогательную функцию

$$\psi(w) = \psi(w) + 2m\cdot w,$$

получим для нее:

(4) $$m\,|w''-w'| \le |\psi(w'')-\psi(w')| \le 3m\,|w''-w'|\ .$$

Тем самым мы построим новую однолистную функцию, которая вместе со своей обратной удовлетворяет условию Липшица.

Так как она получена с помощью серии операций прибавления целой линейной функции (для $\mathfrak{M}$ это означает преобразование $\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}+a,\ a\in C$), то ясно, что вопрос о структуре множеств моногенности будет решен в общем случае, если мы это сделаем для функций типа (4).

Введем сначала одно понятие.

Пусть Δ – односвязная область плоскости ζ, содержащая бесконечно удаленную точку, граница $\partial\Delta$ которой есть непустой континуум K, и пусть $\zeta_0\in\Delta$ – произвольная точка. Возьмем некоторую дугу $\lambda\subset\Delta$, соединяющую ζ_0 с бесконечно удаленной точкой и в плоскости ζ с разрезом λ определим какую-либо однозначную ветвь функции $Arg\,(\zeta-\zeta_0)$. Разность между наибольшим и наименьшим значениями этой непрерывной функции на $K\equiv\partial\Delta$ назовем обходом вокруг точки ζ_0 континуума K и обозначим через $\delta(\zeta_0,K)$.

Нетрудно убедиться, что величина $\delta(\zeta_0,K)$ не зависит от выбора дуги λ и ветви функции $Arg\,(\zeta-\zeta_0)$. Грубо говоря, число $\frac{1}{2\pi}\,\delta(\zeta_0,K)$ показывает, какое максимальное число (целое или нет) "полных" оборотов могут совершать подконтинуумы границы $\partial\Delta$ области Δ "вокруг" точки ζ_0.

Л е м м а I. Каждое из свойств:

1) $\delta(\zeta,K) < 2\pi$ для каждой точки $\zeta\in\Delta$;

2) $\delta(\zeta,K) \le 2\pi$ для каждой точки $\zeta\in\Delta$;

эквивалентно следующему свойству континуума K (или, если угодно, области Δ): каждую точку $\zeta\in\Delta$ можно соединить с бесконечно удаленной точкой некоторой полупрямой в Δ, не пересекающей K.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение для свойства I) почти очевидно: легко показать, что в этом случае радиальная проекция K на какую-либо окружность с центром ζ не может быть полной окружностью. Поэтому достаточно доказать эквивалентность свойств I) и 2), которая вытекает из следующего утверждения: если

$\delta(\zeta_0, K) = 2\pi$, то в любой близости от ζ_0 найдутся точки $\zeta \in \Delta$, для которых $\delta(\zeta, K) > 2\pi$. Это же легко следует из принципа максимума гармонических функций, каковыми являются любые ветви для $Arg(\zeta - \zeta_0)$.

Лемма I доказана.

Обход точки ζ_0 непрерывной <u>кривой</u> λ: $\zeta = \zeta(t)$, $t \in \alpha, \beta$, $\zeta_0 \notin \lambda$ естественно определим, как обход относительно <u>отображения</u> λ; именно, фиксируем произвольно значения $Arg(\zeta(t) - \zeta_0)$ при $t = \alpha$, продолжаем эту функцию по непрерывности вдоль λ и находим ее значение при $t = \beta$. Модуль разности указанных значений мы и назовем обходом точки ζ_0 относительно λ.

Сделаем сразу же одно полезное для дальнейшего замечание. Если K – компакт в конечной плоскости ζ и $\zeta_0 \notin K$, причем ζ_0 принадлежит неограниченной компоненте дополнения к K, то найдется окрестность $\mathcal{U}(K)$ компакта K, такая, что значения обходов вокруг всех непрерывных кривых ограничены в совокупности. Это следует из ограниченности любой ветви функции $Arg(\zeta - \zeta_0)$ на K, а, следовательно, и в некоторой его окрестности.

Пусть в области D плоскости z задана функция $f(z)$ удовлетворяющая неравенствам

$$\ell |z'' - z'| \leq |f(z'') - f(z')| \leq L |z'' - z'|$$

для любых точек $z', z'' \in D$. Ясно, что в этом случае все множества моногенности $\mathfrak{M}_z$, $z \in D$, лежат в круговом кольце $K: \ell \leq |\zeta| \leq L$ плоскости ζ.

Рассмотрим отображение $\varphi(z) = \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ выколотой окрестности $\tilde{\mathcal{U}}(z_0) = \mathcal{U}(z_0) \setminus z_0$ в плоскость ζ; тогда образ $\varphi(\tilde{\mathcal{U}}) \subset K$. Возьмем произвольную точку $\tilde{z} \in \mathcal{U}(z_0)$, зафиксируем какое-либо значение функции $Arg\, \varphi(z) = Arg \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ в этой точке и будем продолжать эту функцию по непрерывности вдоль всевозможных непрерывных кривых $\lambda \subset \tilde{\mathcal{U}}$, выходящих из точки $\tilde{z}$. Если кривые λ_1, λ_2 с общим концом деформируемы одна в другую внутри $\tilde{\mathcal{U}}$, то легко видеть, что результаты продолжения нашей функции вдоль λ_1 и λ_2 приведут к одинаковым значениям в общем конце. Значения возникающей, вообще, многозначной функции $\Phi(z)$, $z \in \tilde{\mathcal{U}}(z_0)$ принадлежат части римановой поверхности для $Ln\,\zeta$, расположенной над кольцом K. Легко привести примеры (хотя бы $f(z) = \bar{z} = x - iy$), когда $\Phi(z)$ – неограниченная функция в выколотой окрестности $\tilde{U}$ и когда, следовательно, множество ее значений располагается на бесконечном числе листов логарифмической поверхности. Ясно, далее, что две функции $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$, полученные указанным выше приемом переходят одна в другую после некоторого скольжения этой поверхности (как накрывающей для выколотой в начале и в $\zeta=\infty$ плоскости ζ).

Докажем теперь следующую лемму:

Лемма 2. Если начало координат $\zeta=0$ лежит в неограниченной компоненте дополнения к $\mathfrak{M}_{z_0}$, то каждая функция типа $\Phi(z)$ ("равная" $Arg\,\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$) является ограниченной вблизи.

Доказательство: Фактически следует из замечания к лемме, I, если взять $\zeta_0=0$.

Рассмотрим более подробно условия леммы 2. Так как континуум $\mathfrak{M}_{z_0}$ топологически не "зацепляет" начала координат $\zeta=0$, то найдется окрестность $U(\mathfrak{M}_{z_0})$ – хотя бы та же, что и в замечании к лемме I, – такая, что для любой замкнутой непрерывной кривой $\Lambda\subset U$ приращение любой ветви $Arg\,\zeta$ на ней равно нулю. Поэтому и приращения функций типа $\Phi(z)$ на любых замкнутых кривых в $\tilde{U}(z_0)$ (окружающую точку z_0 или нет – безразлично) также равно нулю. Используя теперь еще и деформацию кривых в $\tilde{U}$, получим следующий результат: в условиях леммы 2 значение функции $\Phi(z)$ в любой точке $z\in\tilde{U}(z_0)$ можно получить либо продолжением ее значения $\Phi(\bar{z})$ вдоль прямолинейного отрезка $\bar{z}z$, если $z_0\notin\bar{z}z$, либо вдоль любого пути $\bar{z}z$, лежащего в любой из полуплоскостей, определяемых прямой $\bar{z}z_0z$ (в случае, если $z_0\in\bar{z}z$). Конечно, в этих условиях каждая из функций типа $\Phi(z)$ однозначна и непрерывна в $\tilde{U}$ и зависит только от выбора ее значения в $\bar{z}\in\tilde{U}$; разность между этими функциями равна константе вида $2\pi n$ $(n=0,\pm1,\dots)$. Отсюда следует, наконец, что приращение $\Phi(z_2)-\Phi(z_1)$, $z_1,z_2\in\tilde{U}$ не зависит и от выбора $\Phi(z)$; для краткости будем называть его приращением функции $Arg\,\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$.

Рассмотрим теперь все точки области D и многозначное отображение $z\to\mathfrak{M}_z$. Из обобщенной теоремы Бэра и упомянутой выше теоремы Куратовского вытекает, что существует множество $\mathcal{E}$ всюду второй категории в D, такое, что 1) для каждой последовательности $z_n\in D$, $z_n\to z_0\in\mathcal{E}$, имеем: $\underset{n}{lt}\,\mathfrak{M}_{z_n}\subset\mathfrak{M}_{z_0}$ 2) для последовательности точек $z_n\in\mathcal{E}$, $z_n\to z_0\in\mathcal{E}$, имеем: $\underset{n}{lt}\,\mathfrak{M}_{z_n}=\mathfrak{M}_{z_0}$

Одной из основных для дальнейшего явится следующая теорема:

Т е о р е м а 7. Если $z_0 \in \mathcal{E}$ и начало координат $\zeta=0$ лежит в неограниченной компоненте дополнения к $\mathfrak{M}_{z_0}$, то существует прямолинейный луч, выходящий из начала и не пересекающий $\mathfrak{M}_{z_0}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что это не так. В этом случае мы можем считать, что обход $\delta(0, \mathfrak{M}_{z_0})$ начала координат $\zeta=0$ континуумом $\mathfrak{M}_{z_0}$ – больше 2π; в самом деле, в противном случае – по лемме I – в произвольной близости от начала нашлись бы точки ζ_0, для которых обход $\mathfrak{M}_{z_0}$ был бы больше 2π. Заменив данную функцию $f(z)$ на $\varphi(z)=f(z)-\zeta_0 \cdot z$ что, очевидно, сохраняет все условия теоремы, мы и пришли бы к нужному для нас случаю.

Выберем окрестность $V(\mathfrak{M}_{z_0})$ такую, чтобы начало $\zeta=0$ лежало в неограниченной компоненте дополнения к V и пусть $\mathcal{U}(z_0)$ – столь малая круговая окрестность z_0, что выполняются следующие условия: 1) для каждой точки $z \in \mathcal{U}(z_0)$ множество $\mathfrak{M}_z \subset V$ и 2) для каждой точки $z \in \mathcal{U} \cap \mathcal{E}$ обход $\delta(0, \mathfrak{M}_z) \geq 2\pi + 3\alpha_0$, где $\delta(0, \mathfrak{M}_{z_0}) \geq 2\pi + 4\alpha_0$, $\alpha_0 > 0$; это возможно в силу упомянутых теорем Бэра и Куратовского. При этом для дальнейшего достаточно предполагать

Отметим здесь же, что в этом случае $f(z)$ осуществляет прямое отображение круга $\mathcal{U}(z_0)$, т.е. сохраняющее ориентацию простых замкнутых кривых в нем. В самом деле, если возьмем внутри $\mathcal{U}$ точку z_1 дифференцируемости f, то $\mathfrak{M}_{z_1}$ – окружность – лежит вне начала координат $\zeta=0$ и, следовательно, якобиан в этой точке $J=|f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2 > 0$ так как степень гомеоморфизма f во всех точках $\mathcal{U}$ одинакова, то отсюда и следует утверждение.

Рассмотрим теперь прямолинейные сечения круга $\overline{\mathcal{U}(z_0)}$, параллельные какому-либо заданному направлению τ (например, оси абсцисс) из доказательства теоремы 3 (см. замечание к ней) следует, что для точек множества второй категории $\mathcal{E}'$ (в $\mathcal{U}$) множество всех производных чисел в этих точках возникает, если рассматривать лишь какую-либо из (замкнутых) полуокрестностей с диаметром, параллельным τ. Очевидно, можно считать, что $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$. Наконец, найдется сечение $\overline{\mathcal{U}(z_0)}$, пересекающее множество $\mathcal{E}'$ по линейному множеству e_0 также второй категории на этом сечении [5]; не ограничивая общности рассуждений, мы можем считать, что это сечение есть диаметр λ круга $\mathcal{U}(z_0)$.

Пусть $\Lambda = f(\lambda)$ и $\varepsilon_0 = f(e_0)$; так как f – гомеоморфизм, то Λ – простая дуга на плоскости w, а $\varepsilon_0 \subset \Lambda$ – всюду второй категории на Λ. Возьмем произвольную точку $z' \in e_0$ внутри отрезка λ и

$w' = f(z')$. Так как $\delta(0, \mathfrak{M}_{z'}) \geq 2\pi + 3\alpha_0$, то в каждой полуокрестности z' найдется пара точек z_1, z_2 и соединяющая их дуга $\overline{z_1 z_2}$, $z' \notin \overline{z_1 z_2}$ продолжение вдоль которой даст приращение функции $\Phi_{z'}(z) = Arg \dfrac{f(z) - f(z')}{z - z'}$ большее чем $2\pi + 2\alpha_0$. Из непрерывности функции $\Phi_{z'}(z)$ следует, что найдутся окрестности $u_1 = u(z_1)$, $u_2 = u(z_2)$ такие, что это приращение остается большим чем $2\pi + 2\alpha_0$ при любых (независимых) сдвигах точек z_1 и z_2 внутри этих окрестностей. Поэтому в каждой (открытой) полуокрестности z' найдется пара точек $\overline{z_1, z_2}$ таких, что продолжение функции $\Phi(z)$ вдоль прямолинейного отрезка $z_1 z_2$ даст приращение, большее чем $2\pi + 2\alpha_0$.

Образ отрезка $\overline{z_1 z_2}$ есть дуга $\overline{w_1 w_2}$, которая, в силу гомеоморфизма f не пересечет Λ, а по построению, обход этой дуги вокруг точки $w' \in \Lambda$ – больше $2\pi + 2\alpha_0$. Из доказательства теоремы I следует (ср. также замечание к ней), что в точках некоторого множества второй категории на Λ контингенция этой дуги есть полная плоскость. Наконец, по теореме 2 на множества второй категории на $\varepsilon_0 \subset \Lambda$ правые и левые контингенции центрально-симметричны и непрерывны. Поэтому можем считать, что на множестве $\varepsilon_0 \subset \Lambda$ имеют место еще и эти последние три свойства.

Введем одно полезное и естественное понятие. Пусть $\overline{ab} \subset R^2$ – простая дуга, $\varepsilon > 0$ – произвольное число и $\overline{ac} \subset \overline{ab}$ – дуга диаметра ε (или вся дуга $\overline{ab}$, если ее диаметр $< \varepsilon$). Рассмотрим всевозможные дуги $a'c' \subset ac$, не содержащие точки a и введем обозначение: $\delta_\varepsilon(a) = \sup \delta(a, a'c')$; предел невозрастающей (по ε) функции $\delta_\varepsilon(a)$ при $\varepsilon \to 0$ обозначим через $\delta(a)$ и назовем обходом дуги $\overline{ab}$ в точке a. Теперь ясно, как определить правый и левый обходы δ^+, δ^- – дуги по внутренней ее точке. В терминах этих понятий можно привести такое простое следствие из теоремы 2: для множества точек второй категории плоской дуги либо $\delta^+, \delta^- \geq 2\pi$, либо $\delta^+ = \delta^-$.

Вернемся теперь к построенной нами дуге Λ; мы уже видели, что в каждой окрестности любой точки $w \in \varepsilon_0$ можно провести дугу, не пересекающую Λ, с обходом вокруг w, большим, чем $2\pi + 2\alpha_0$. Покажем, что на ε_0 имеем:

$$\delta^+, \delta^- \geq \pi + 2\alpha_0 \quad (0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}).$$

Пусть $w_0 \in \mathcal{E}_0$. Если $\delta^+(w_0), \delta^-(w_0) \geq 2\pi$, то доказывать нечего. Пусть $\delta^+(w_0) = \delta^-(w_0) = \pi + 2\beta < 2\pi$; ясно сразу, что $\beta \geq 0$ (из теоремы 2 и свойств Λ). Пересечение правой и левой контингенций Λ в точке w_0 есть пара вертикальных углов $V(w_0)$ раствора 2β, общую биссектрису которых выберем осью ординат v с началом w_0 системы координат (u, v).

При этом точки Λ, лежащие вне $\overline{V(w_0)}$ и в правой полуплоскости, однозначно определяют полудугу ее Λ^+ с начальной точкой w; дополнительную полудугу обозначим Λ^-. Для произвольного ε, $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2} - \beta$ найдется столь малый отрезок $\Lambda^+_\varepsilon \subset \Lambda^+$ с началом w_0, что он не пересекает лучей

$$t_1^{(\varepsilon)}: \ v = -ctg(\beta+\varepsilon)\cdot u, \quad v \geq 0,$$

$$t_2^{(\varepsilon)}: \ v = ctg(\beta+\varepsilon)\cdot u, \quad v \leq 0,$$

(кроме начальной их точки w_0) и, следовательно, лежит вправо от них; аналогично определяем Λ^-_ε. Максимальный из их диаметров обозначим через $\eta = \eta(\varepsilon)$. Пусть $\overline{w_1 w_2}$ – дуга диаметра $< \eta$, не пересекающая Λ, обход которой вокруг w_0 – не меньше $2\pi + 2\alpha_0$. Легко теперь видеть, что ни один из концов w_1, w_2, дуги $\overline{w_1 w_2}$ не может лежать вне вертикальных углов, ограниченных лучами $t_1^{(\varepsilon)}$, $t_2^{(\varepsilon)}$, $(-t_1^{(\varepsilon)})$, $(-t_2^{(\varepsilon)})$ и, следовательно, $2\beta + 2\varepsilon \geq 2\alpha_0$; так как это верно при любом $\varepsilon > 0$, то $\beta \geq \alpha_0$, что и нужно.

Пользуясь непрерывностью односторонних контингенций дуги Λ в точках $\mathcal{E}_0$ и уменьшая, если нужно, окрестность $U(z_0)$, мы можем считать – в предположении, что теорема неверна – установленным следующее: существует замкнутый круг $d = d(z_0)$ с горизонтальным диаметром λ (при этом правый и левый его отрезки с концом $z \in \lambda$ обозначим λ^+_z и λ^-_z), такой, что:

1) некоторая функция $w = f(z)$ отображает его гомеоморфно и с сохранением ориентации на жорданову область Δ, содержащую дугу $\Lambda = f(\lambda)$;

2) система координат (u, v) на плоскости w такова, что $w_0 = f(z_0)$ – ее начало и, если обозначить $\Lambda^+_{w_0} = f(\lambda^+_{z_0})$, $\Lambda^-_{w_0} = f(\lambda^-_{z_0})$, то контингенция дуги $\Lambda^+_{w_0}$ в концевой точке w_0 содержит "сверх-тупой" угол, ограниченный лучами

$$t_1: \ v = -ctg\tfrac{3}{2}\alpha_0\cdot u, \quad v \geq 0$$
$$t_2: \ v = ctg\tfrac{3}{2}\alpha_0\cdot u, \quad v \leq 0 \qquad (\alpha_0 > 0)$$

(и расположенный вправо от этих лучей); аналогично, контингенция дуги $\Lambda^-_{w_0}$ в той же точке w_0 содержит такой же величины угол со сторонами $(-t_1)$ и $(-t_2)$ и расположенный влево от них;

3) существует всюду плотное множество $\varepsilon_0 \subset \Lambda$, в каждой точке которого имеет место то же свойство 2) лишь с точностью до параллельного переноса начала координат.

Наконец, для удобства предположим, что

4) прямые, параллельные оси ординат v, пересекают Λ по разрывным замкнутым множествам.

Последнего всегда можно достичь сколь угодно малым поворотом этой оси, так как для простой дуги лишь не более чем счетное множество направлений не обладает свойством 4).

Идея дальнейшего доказательства заключается в том, чтобы, используя все эти свойства дуги Λ, для произвольного наперед заданного числа найти на ней спиралевидную дугу, обход которой вокруг некоторой точки на Λ был бы больше этого числа; это же приводит к неограниченности функции $Arg\,\dfrac{f(z)-f(z')}{z-z'}$, $z', z \in \Lambda$ в противоре с леммой 2.

Возьмем теперь точку $w_0 \in \varepsilon_0$ и проделаем некоторое построение; из него видно будет, что очевидным сдвигом оно переносится в любую другую точку ε_0.

Пересечение указанных в пункте 2) сверх-тупых углов есть пара вертикальных углов с общей биссектрисой – осью ординат v и раствора $2\alpha_0$ каждый; мы обозначим через $V = V(w_0)$ пару вертикальных углов с той же биссектрисой и раствора α_0 каждый (вдвое меньше предыдущих). При этом через V_1, V_2 обозначим соответственно верхний и нижний его углы.

Верхний и нижний полукруги круга α обозначим через g, h, а их образы – $\mathcal{G}, H$: общая их граница, очевидно, есть дуга Λ. Так как пересечение жордановых областей состоит также из жордановых компонент, то это верно и для пересечений $V \cap \mathcal{G}$ и $V \cap H$; соответствующие компоненты обозначим через $\{\mathcal{G}_i\}$ и $\{H_h\}$ $(i, h = 1, 2, \ldots)$. Из свойства 2) и построения углов V следует, что существует бесконечное множество как $\mathcal{G}_i$, так и H_h, которые разбивают каждый из углов V_1, V_2.

Рассмотрим в верхнем угле V_1 все точки замкнутого разрывного множества F – пересечения оси v с Λ. Пусть $w' \neq w$ – некоторая его предельная точка; покажем, что в некоторой окрестности w' (на оси v) все интервалы смежности к F принадлежат либо только <u>одной</u> из областей $\mathcal{Y}_i$, H_k, либо <u>одной</u> из $\mathcal{Y}_i$ и <u>одной</u> из H_k. В самом деле, в противном случае существовали бы две последовательности интервалов смежности $\{\mathcal{Y}'_s\}$, $\{\mathcal{J}''_s\}$, сходящихся к w', таких, что $\{\mathcal{J}'_s\}$ принадлежит одним из $\mathcal{Y}_i$, H_k, а $\{\mathcal{J}''_t\}$ – отличным от них.

Выберем по точке O_1, O_2 в областях $\mathcal{Y}$, H вне углоа $\overline{V}$ и соединим их простыми дугами ℓ'_s, ℓ''_t с некоторыми внутренними точками v'_s, v''_s интервалов $\mathcal{J}'_s$, $\mathcal{J}''_s$, расположенными в этих областях. Обозначим через $\tilde{\ell}'_s$, $\tilde{\ell}''_t$ максимальные дуги на ℓ'_s, ℓ''_t с концами v'_s, v''_t, принадлежащими углу $\overline{V}_1$. По построению эти дуги попарно не пересекаются и диаметры их больше фиксированного положительного числа. По известной теореме о сходимости [2] некоторая подпоследовательность из дуг $\tilde{\ell}'_s$, $\tilde{\ell}''_t$ сходится к невырожденному континууму $\ell_0 \subset V$. Так как вблизи каждой точки $\ell_0 \cap V$ находятся точки несовпадающих областей $\mathcal{Y}_i$, H_k, а следовательно, и их граничные точки (принадлежащие Λ: V – открыто!), то $\ell_0 \cap V$, а потому все ℓ_0 принадлежит Λ; итак, $\ell_0 \subset \Lambda$ – простая дуга, но она не может быть континуумом конденсации на простой же дуге Λ.

Итак, если $v' \neq w_0$ – произвольная предельная точка множества F в V_1, то в некотором интервале (v'_1, v'_2), содержащем v', все интервалы смежности к $F \cap$ (v'_1, v'_2) принадлежат либо какой-либо одной из областей $\mathcal{Y}_i$, H_k, либо одной из $\mathcal{Y}_i$ и одной из H_k.

Рассмотрим различные случаи. Пусть все интервалы смежности к F внутри (v'_1, v'_2) принадлежат $\mathcal{Y}_{i_0}$ и пусть (v_1, v_2) – максимальный, содержащий его интервал с этим свойством; ясно, что v_1, v_2 – граничные точки $\mathcal{Y}_{i_0}$. Заменим теперь интервал (v_1, v_2) дугой $\overline{v_1 v_2}$, лежащей внутри $\mathcal{Y}_{i_0}$ за исключением концов. Аналогичная конструкция для H_k. Очевидно также, что это построение проходит и для изолированной точки F, если она не является общим концом интервалов смежности, расположенных: один – в области $\mathcal{Y}_i$, а другой – в области H_k.

Пусть теперь внутри (v'_1, v'_2) интервалы смежности к F принадлежат $\mathcal{Y}_{i_0}$ и H_{k_0} (и всякая окрестность v' содержит точки этих областей!). Рассмотрим множество всех точек из F, в каждой окрестности которых находятся точки обеих областей $\mathcal{Y}_{i_0}$, H_{k_0} (v' является даже предельной для таких точек по построению); это – замкнутое множество. Пусть $[\bar{v}_1, v_2]$ – наименьший отрезок, его содержащий. Так как точки $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ являются общими граничными точками жордановых областей $\mathcal{Y}_{i_0}$ и H_{k_0}, то их можно соединить двумя дугами σ', σ'', лежащими внутри этих областей (исключая концы). Из построения следует, что внутри простой замкнутой кривой $\sigma' \cup \sigma''$ находится простая дуга $\bar{v}_1\bar{v}_2 \subset \Lambda$ с , являющаяся, очевидно, общей граничной для областей $\mathcal{Y}_{i_0}, H_{k_0}$.

Далее, точки $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$ являются концами некоторых интервалов смежности $(v_1, \bar{v}_1)$, $(\bar{v}_2, v_2)$ к F, принадлежащих либо $\mathcal{Y}_{i_0}$ либо H_{k_0}; действительно, иначе интервалы этого типа снова содержали бы точки, предельные для обеих областей, но тогда отрезок $[\bar{v}_1, \bar{v}_2]$ не содержал бы всех таких точек, вопреки построению.

Если, например, $(v_1, \bar{v}_1) \subset \mathcal{Y}_i$, а $\underline{(\bar{v}_2, v_2)} \subset H_{k_0}$, то вместо отрезка $[v_1, \bar{v}_2]$ мы возьмем дугу $v_1\bar{v}_2$, принадлежащую $\mathcal{Y}_{i_0}$ (без концов); и тогда отрезок $[v_1, v_2]$ заменится на объединение дуги $v_1\bar{v}_2$ и интервала $(\bar{v}_2, v_2)$. Можно было бы заменить его на объединение интервала $(v_1, \bar{v}_1) \subset \mathcal{Y}_{i_0}$ и дуги $\bar{v}_1, v_2 \subset$ $\subset H_{k_0}$ (без концов). В этом случае оставляем свободу в выборе вариантов.

Наконец, если оба интервала $(v_1, \bar{v}_2)$, $(\bar{v}_2, v_2)$ принадлежат одной из областей, например, $\mathcal{Y}_{i_0}$, будем (уже однозначно) заменять отрезок $[v_1, v_2]$ оси ординат дугой $\overline{v_1 v_2}$, лежащей внутри $\mathcal{Y}_{i_0}$ (без концов).

Обозначим наименьший отрезок положительной полуоси ординат, содержащей точки F, через $[w_0, \tilde{v}]$; применяя указанную выше конструкцию к каждой точке F, мы в результате вместо отрезка $w_0, \tilde{v}$ получим некоторую простую дугу $\sigma_1 \subset V_1$ с концами $w_0, \tilde{v} \in \Lambda$, обладающую следующими свойствами:

1) пересечение $\sigma_1 \cap \Lambda$ есть изолированное множество, лежащее на оси ординат и с единственной предельной точкой w_0;

2) каждая точка $\sigma_1 \cap \Lambda$ является общим концом дуг смежности, одна из которых принадлежит $\mathcal{Y}$, а другая – H.

Через Σ_1 обозначим объединение σ_1 с прямолинейным отрезком $[\tilde{v}, v_1]$ положительной полуоси ординат, где v – первая точка пересечения этой полуоси с границей $\partial\Delta$ области Δ. Очевидно, $\Sigma_1 \subset V_1$ – простая дуга.

Аналогично построим дугу $\Sigma_2 \subset V_2$ с теми же свойствами; дугу $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ обозначим через $\Sigma : \Sigma \subset V \cup \{w_0\}$.
Дуга Σ разбивает область Δ на две жордановы области; ту из них,

которая содержит точки, расположенные вправо от углов V, обозначим Δ_0.

Рассмотрим теперь полудугу $\Lambda^+ \subset \Lambda$; так как контингенция ее в конце w_0 содержит "правый" сверх-тупой угол (см. выше), то существует бесконечная последовательность $\{\Lambda_m^+\}$ ее частичных дуг, один конец которых принадлежит Σ_1, а другой – Σ_2; будем считать, что все такие дуги вошли в эту последовательность. Очевидно, что $\Lambda_m^+ \subset \Lambda_0$ $(m=1,2,\dots)$ (исключая концы). Подобным образом строим последовательность дуги $\{\Lambda_n^-\}$ для Λ^-: все они – вне Δ_0, исключая концы.

Возьмем произвольные точки: $A \in \Lambda^-$ влево от $\overline{V}$ и $B \in \Lambda^+$ вправо от $\overline{V}$ и ориентируем $\overline{AB} \subset \Lambda$ от A к B. Точки входа $\overline{AB}$ в область Δ_0 назовем положительными, а точки выхода – отрицательными; это фактически означает, что такого же знака (и со значениями ± 1) индексы пересечения ($\overline{AB} \times \overline{\ell}$) с соответствующими отрезками $\overline{\ell}$ дуги Σ, если ориентировать последнюю снизу вверх (по оси ординат).

В силу свойства 2) дуги Σ и топологической инвариантности (для прямых отображений) индекса пересечения знаки индексов для точек последовательности из свойства 1) на каждой из дуг Σ_1, Σ_2 чередуются.

Покажем, что для последовательностей дуг Λ_m^+ и Λ_n^- в каждой из совокупностей индексов ($\Lambda_m^+ \times \Sigma_1$), ($\Lambda_m^+ + \Sigma_2$), ($\Lambda_n^- \times \Sigma_1$) и ($\Lambda_n^- \times \Sigma_2$) имеет место перемена знаков (но уже не обязательно поочередно!); достаточно это показать для дуг Λ_m^+.

Пусть обход дуги Λ^+ вокруг w_0 – меньше $2\pi N$, где N – целое. Тогда эту дугу – вместе с некоторой "тонкой" окрестностью "полусегмента" $\Lambda^+ \setminus w_0$ – можно взаимно однозначно перенести на риманову поверхность функции $w - w_0 = (z - z_0)^{4N}$ над плоскостью w; отображение $z - z_0 = \sqrt[4N]{w - w_0}$. Гомеоморфно переводит Λ^+ вместе с указанной окрестностью внутрь некоторого прямого угла P с вершиной z_0. Образ дуги Λ^+ при этом обозначим через L^+. Образы углов V_1, V_2 представляют собой – поочередно – $8N$ углов на плоскости z раствора $\frac{\alpha_0}{4N}$, угловое расстояние между биссектрисами которых равно $\frac{\pi}{4N}$, причем каждый из них гомеоморфно отображается на V_1 или V_2. Увеличив, если нужно, число N, можем считать, что дугу L^+ пересекает не более чем $2N$ из этих углов, а сами они лежат внутри прямого угла P; обозначим их через $v_1^{(i)}$,

$v_2^{(i)}$ $(i=1,2,\dots;\ i\le N)$. Дугам Σ_1, Σ_2 соответствуют внутри $v_1^{(i)}$, $v_2^{(i)}$, ориентированные дуги $\sigma_1^{(i)}$, $\sigma_2^{(i)}$. Из локального гомеоморфизма нашего отображения в каждой точке $\Lambda^+\setminus w_0$, а также глобального гомеоморфизма на самой дуге Λ^+, следует равенство индексов пересечения Λ^+ в каждой ее общей точке с Σ и L^+ в соответствующей точке на $\sigma_1^{(i)}$, $\sigma_2^{(i)}$. Наконец, дугам Λ_m^+ и Λ_n^- на L^+ соответствуют некоторые частичные дуги, соединяющие (неприводимым образом!) точки $\sigma_1^{(i)}$ с точками $\sigma_2^{(i)}$.

Так как по условию дуга Λ^+ содержит последовательность $\{\Lambda_m^+\}$ расположенную в правой полуплоскости w, то найдется пара "соседних" дуг $\sigma_1^{(i')}$, $\sigma_2^{(i'')}$, $\arg\sigma_2 > \arg\sigma_1$, точки которых соединены бесконечной последовательностью некоторых частичных дуг L^+; пусть нумерация такова, что из всех таких пар эта – первая (например, с наименьшим аргументом у σ_1) и обозначим ее через σ_1', σ_2'.

Возьмем произвольную точку $a'\in L^+\cap\sigma_1'$, ориентируем L^+ – к точке z_0 и отбросим ее часть до точки a'; получившаяся дуга $L_{a'}^+$ также пересекает дугу σ_1', σ_2' в бесконечном числе точек (легко – от противного). Первую точку пересечения $L_{a'}^+$ с σ_2' обозначим через b; взяв на дуге $L_{a'b}^+$ с концами $\overline{a'b}$ последнюю точку a пересечения с σ_1', получим дугу $\overline{ab}\subset L^+$. Берем теперь первую точку a_1 пересечения L_b^+ с σ_2' и последнюю точку b_1 пересечения L_b^+ с σ_2', получим дугу $\overline{b_1a_1}\subset L^+$. Так как обход каждой непрерывной кривой в угле P вокруг z_0 – меньше $\frac{\pi}{2}$ и концы строящихся дуг принадлежат прямолинейным лучам $\arg(z-z_0)=$ $=const$, то из построения следует, что индексы пересечений L^+ с σ_1' в точках $\overline{a}$ и a_1 – разных знаков. Ясно, что процесс построения дуг $\{\overline{a_k b_k}\}$ здесь неограничен; но отсюда и следует утверждение о перемене знаков в последовательности чисел $(\Lambda_m^+\times\Sigma_1)$. Аналогично – для остальных последовательностей.

Рассматривая теперь все ветви функции $z-z_0=\sqrt[4N]{w-w_0}$ в жордановых областях G, H, в плоскости z получим $8N$ чередующихся дуг L_i^-, L_i^+ $(i=1,2,\dots,4N)$, соответствующих $\Lambda^-, \Lambda^+\subset\Lambda$, причем каждая дуга L_i^- (L_i^+) получается из предыдущей, $L_{i-1}^-(L_{i-1}^+)$, поворотом на $\frac{\pi}{2N}$ вокруг z_0, а также $8N$ дуг $\sigma_1^{(j)}$, $\sigma_2^{(j)}$ с тем же свойством. Дуги L_i^-, L_i^+ делят некоторую жорданову область (с "центром" z_0) на $8N$ "секторов", каждый из которых взаимно однозначно отображается на G или H; дуги $\sigma_1^{(j)}$, $\sigma_2^{(j)}$ отображаются при этом на Σ_1

и Σ_2. Возьмем один из этих секторов, соответствующих, например, области $\mathcal{G}$ и ограниченных дугами $L^- = L_i^-$, $L^+ = L_i^+$; это значит, что относительно z_0 точки L^- находятся "левее" точек L^+. Пусть, как и выше, σ_1' – первая из дуг $\sigma_1^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, 4N)$, пересекающих L^+ в бесконечном числе точек, а $\sigma_1^{(j_0)}$ – последняя из них, пересекающая L^- в бесконечном числе точек; эти дуги σ_1' и $\sigma_1^{(j_0)}$ не могут совпадать, так как это означало бы, что образ L^-, т.е. Λ^-, не обладает последовательностью дуг $\{\Lambda_n^-\}$, построенной выше. Значит, угловое расстояние между σ_1', $\sigma_1^{(j_0)}$ – не меньше $\frac{\pi}{2N}$.

Из построения следует, что порядок любой точки $\tilde{z}$, принадлежащей дуге из L^- с концом на $\sigma_1^{(j)}$, относительно отрезка $\overline{z_1 z_0}$ дуги L^-, где $z_1 \in L^+ \cap \sigma_1'$, равен порядку ее относительно отрезка прямой $\overline{z_1 z_0}$: для этого нужно лишь рассмотреть жордановы области, образованные дугами L^+ и некоторыми из $\sigma_1^{(k)}$, $\sigma_2^{(k)}$ $(k, \ell = 1, 2, \ldots, 4N)$ учитывая, что порядок относительно такой области, равен нулю. То же верно и для дуг $z_1' z_0 \subset L^-$, $z_1' \in L_i^- \cap \sigma_1^{(j_0)}$ не содержащих z_0.

Переводя все эти свойства с помощью отображения $w - w_0 = (z - z_0)^{4N}$ в плоскость w и вспоминая о плотности $\mathcal{E}_0$ на Λ, мы убеждаемся в правомерности следующего построения.

Ориентируем дугу Λ от точек Λ^+ к Λ^- (для положительности приращений аргумента в дальнейшем).

Возьмем для точки $w_0 \in \mathcal{E}_0$ дугу $A_0 B_0 = \Lambda_m^+(w_0)$, порядок которой относительно w_0 равен $+\pi$. На ее части в угле $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} < \arg(w - w_0) < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ выберем произвольно точку $w_1 \in \mathcal{E}_0$ и соответствующую ей дугу $\Sigma(w_1)$; пусть дуга $A_0 B_1 \subset A_0 B_0$, где B_1 – первая точка пересечения $A_0 B_0$ с $\Sigma_2(w_1)$ (выше точки w_1). Возьмем дугу $\Lambda_n^-(w_1) = B_1' A_2$, порядок которой относительно w_1 равен $+\pi$. На ее части в угле $\pi + (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}) < \arg(w - w_1) < \pi + (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{16})$ выбираем произвольную точку $w_2 \in \mathcal{E}_0$ и соответствующую ей дугу $\Sigma(w_2)$. Пусть дуга $B_1' A_1 \subset B_1' A_2$, где A_1 – первая точка пересечения $B_1' A_2$ с $\Sigma_1(w_2)$ (ниже точки w_2) из предыдущих построений следует, что порядок всей дуги $A_0 A_1$ относительно (не содержащейся в ней!) точки w_2 – больше 2π. Итерируя этот процесс, мы и сможем построить дугу на Λ, порядок которой относительно некоторой точки из $\mathcal{E}_0$ – произвольно велик.

Это и завершает доказательство теоремы 7.

Пользуясь функциями вида $f(z)-\zeta_0\cdot z$ и переходом к обратным функциям, мы легко приходим к следующему важному для нас следствию из теоремы 7, которое сформулируем в виде отдельной теоремы:

Т е о р е м а 8. Для произвольной непрерывной функции $f(z)$ существует множество $\mathcal{E}$ всюду второй категории в $\mathcal{D}$, такое, что для каждого $z\in\mathcal{E}$ множество $\mathfrak{M}_z$ есть либо вся плоскость ζ, либо обладает следующим свойством: любые две точки компоненты дополнения к $\mathfrak{M}_z$ можно соединить дугой окружности, не пересекающей $\mathfrak{M}_z$.

В следующем параграфе мы докажем основную теорему о структуре множеств моногенности непрерывных функций комплексного переменного; и хотя формулировку ее нельзя считать окончательной, сама она, метод ее доказательства, а также приводимые далее примеры в большой степени проясняют как различные возможности здесь, так и возникающие трудности в дальнейших исследованиях.

4. Основная теорема о множествах $\mathfrak{M}_z$

Как и выше, мы будем все время предполагать, что в области $\mathcal{D}$ функция $f(z)$ удовлетворяет неравенствам:

$$\ell\,|z''-z'|\le|f(z'')-f(z')|\le L\,|z''-z'|,\quad z',z''\in\mathcal{D},$$

а множество $\mathcal{E}$ второй категории в $\mathcal{D}$ таково, что на нем соответствие $z\to\mathfrak{M}_z$ полунепрерывно сверху относительно $\mathcal{D}$ и непрерывно относительно самого себя.

Т е о р е м а 9. Граница каждой компоненты дополнения к $\mathfrak{M}_z$, $z\in\mathcal{E}$, есть непрерывная кривая.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как каждая такая компонента односвязна, то из теории простых концов следует, что достаточно доказать наличие лишь концов I-го рода. Но, в противном случае, граница содержала бы некоторый континуум конденсации, а вместе с ним существовала бы последовательность $\{\zeta_p\}$ точек компоненты, сходящаяся к точке этого континуума и таких, что любые две из них можно соединить внутри компоненты дугой, длина которой не может быть меньше некоторого фиксированного $\delta>0$. Но теперь уже легко видеть, что достаточно близкие из этих точек нельзя соединить дугой окружности, не пересекающей $\mathfrak{M}_z$.

Т е о р е м а 10. Каждая граничная точка множества $\mathfrak{M}_z$, $z\in\mathcal{E}$, является предельной для окружностей $\mathfrak{M}_{z'}$, где $z'\in A$ – множеству точек дифференцируемости $f(z)$.

Доказательство. Назовем граничну точку $\tilde{\zeta}$ области Δ хорошо достижимой, если существует (открытый) круг $d\subset\Delta$, для которого $\bar{\zeta}$ является граничной; при этом можно выбрать круг d так, чтобы $\bar{\zeta}$ была <u>единственной</u> общей граничной точкой для d и Δ. Так как хорошо достижимые точки образуют, очевидно, плотное подмножество на границе $\mathfrak{M}_z$, то используя функции вида $f(z)-\zeta_0\cdot z$ и им обратные, мы легко сведем теорему 10 к доказательству следующего утверждения:

Пусть в круге $|\zeta|\le R$ расположено множество $\mathfrak{M}_{z_0}$, $z_0\in E$, пересекающее окружность $|\zeta|=R$ в одной точке ζ_0; тогда найдется последовательность $z_m\in A$, $z_m\to z_0$ $(m=1,2,\dots)$, такая, что $\zeta_0\in \underline{\mathfrak{Lt}}\ \mathfrak{M}_{z_m}$.

В противном случае нашлась бы круговая окрестность $\mathcal{U}(z_0)$ такая, что все окружности $-\mathfrak{M}_z$, $z\in A\cap\mathcal{U}$, расположены в круге $\zeta\le R-\varepsilon$, $\varepsilon>0$; мы покажем, что в этом случае для каждой пары точек $z', z''\in\mathcal{U}(z_0)$ будет: $|f(z'')-f(z')|\le$ $\le(R-\varepsilon)|z''-z'|$, в частности, и при $z''=z_0$. Но тогда и $\mathfrak{M}_{z_0}$ будет принадлежать кругу $|\zeta|\le R-\varepsilon$, что невозможно. Рассматривая всевозможные отрезки прямых в $\mathcal{U}$, пересекающие A по множеству полной меры, мы фактически сведем доказательство к следующему предположению:

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана комплексная функция $f(t)=$ $=x(t)+iy(t)$ удовлетворяющая условию Липшица, причем почти всюду на $[a,b]$ имеем:

$$|x'(t)+iy'(t)|\le R-\varepsilon;$$

тогда

$$|f(b)-f(a)|\le(R-\varepsilon)|b-a|.$$

В самом деле, легко получаем:

$$|f(b)-f(a)|=|x(b)-x(a)+i[y(b)-y(a)]|=$$
$$=\left|\int_a^b[x'(t)+iy'(t)]\,dt\right|\le\int_a^b|x'+iy'|\,dt\le$$
$$\le(R-\varepsilon)\,|b-a|$$

и т.д.

Теорема II. Если $\mathfrak{M}_{z_0}$, $z_0\in E$ разбивает плоскость ζ, начало координат $\zeta=0$ лежит в ограниченной компоненте Δ_1 дополнения к $\mathfrak{M}_{z_0}$ и $w=f(z)$ является отрицательным гомеоморфизмом (т.е. обращающим ориентацию замкнутых кривых), то $\mathfrak{M}_{z_0}$ есть замкнутый круг с вырезанным другим кругом.

Заметим сразу, что в условиях теоремы отрицательность отображения $w=f(z)$,по-видимому, <u>всегда</u> имеет место.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как f отрицательно, то якобиан $J = f_z^2 - f_{\bar z}^2 < 0$, $z \in A$ и, следовательно, все окружности $-\mathfrak{M}_z$, $z \in A$ содержат начало $\zeta = 0$ внутри. Далее, так как, по теореме 10, каждая граничная точка Δ_1 является предельной для тех окружностей, то отсюда легко следует, что граница $\partial\Delta_1$ есть выпуклая кривая.

Покажем теперь, что дополнение к $\mathfrak{M}_{z_0}$ состоит лишь из двух компонент. Пусть Δ' - отличная от Δ_1 ограниченная компонента дополнения к $\mathfrak{M}_{z_0}$; обозначим через $\zeta_1, \zeta_2 \in \partial\Delta'$, соответственно, минимально и максимально удаленные от начала $\zeta=0$ граничные точки Δ' и пусть $\zeta_0 \in \Delta'$.Найдется окрестность $U(z_0)$, для которой все окружности $-\mathfrak{M}_z$, $z \in U \cap A$,не пересекают окрестности ζ_0 . Но тогда в этой окрестности функция $f(z) - \zeta_0 \cdot z$ будет однолистна, а по построению начало координат $\zeta=0$ лежит вне окружностей $-\mathfrak{M}_z$, сходящихся к ζ_1 , и внутри таких окружностей, сходящихся к ζ_2 . Это же означает, что ориентация гомеоморфизма $f(z) - \zeta_0 \cdot z$ в различных точках различна, что невозможно.

Покажем, что граница $\partial\Delta_2$ неограниченной компоненты Δ_2 также выпукла. Действительно, так как $\partial\Delta_1$ звездна относительно любой своей внутренней точки, то берем такую точку ζ_0 ,функцию $f(z) - \zeta_0 \cdot z$ и ей обратную и учитывая, что при этом соответствие между плоскостями ζ и w переводит лучи $\operatorname{Arg}(\zeta - \zeta_0) = const$ в лучи $\operatorname{Arg} w = const$, убеждаемся, что кривая $\partial\Delta_2$ также звездна относительно точек внутри $\partial\Delta_1$. Если теперь кривая $\partial\Delta_2$ не выпукла, то выпуклая оболочка ее содержит прямолинейный отрезок $\overline{\zeta'\zeta''}$ с концами на $\partial\Delta_2$, лежащий внутри Δ_2 . Проводя окружность S через ζ', ζ'' и некоторую точку ζ_0 внутри $\partial\Delta_1$ и снова рассматривая обратную к $f(z) - \zeta_0 z$ функцию, придем к нарушению звездности границы внутренней компоненты дополнения к $\mathfrak{M}_{w_0}$, $w_0 = f(z_0) - \zeta_0 \cdot z_0$.

Так как переход к обратным функциям меняет ролями внешнюю и внутреннюю кривые $\partial\Delta_2$, $\partial\Delta_1$; то теорема будет доказана, если мы покажем, что именно внешняя кривая $C = \partial\Delta_2$ является окружностью.

Предположим, что это не так: впишем в C максимальный (по диаметру) круг S ; если их несколько, возьмем произвольный. Тогда $C \neq \partial S$, причем существует по меньшей мере две общие точки у C и ∂S . Переводя с помощью преобразования $\omega = \frac{1}{\zeta - \zeta_0}$ одну из этих точек ζ_0 в бесконечность, мы получим в плоскости ω неограниченную жорданову область Δ , содержащую некоторую полуплоскость Σ (образ S) как собственное подмножество, причем некоторая (конечная) точка ω_0 является общей граничной точкой Δ и Σ . Поэтому (не пустое - по условию) открытое на прямой $\partial\Sigma$ множество $\partial\Sigma \cap \Delta$ содержит интервал (α, β), $\alpha < \beta$ один из концов которых - пусть α - есть конечная точка из $\partial\Sigma \cap \partial\Delta$ (без ограничения общности рассуждений мы предположим здесь, что Σ - верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$). Но тогда очевидно, что точки из $\partial\Delta$, лежащие вблизи α и ниже прямой $\partial\Sigma$, нельзя соединить прямолинейными отрезками с достаточно далекими точками отрицательной полуоси $\partial\Sigma$. Из соображений непрерывности следует, что то же свойство будет иметь место для образа кривой $C = \partial\Delta_2$ при отображени вида $\frac{1}{\zeta - \zeta'}$, где $\zeta' \in \Delta_2$ и достаточно близка к ζ_0 . Это же означает, что для функции, обратной к $f(z) - \zeta' \cdot z$ внешняя кривая из $\mathfrak{M}_{w_0}$, $w_0 = f(z_0) - \zeta' \cdot z_0$ уже не будет выпуклой.

Полученное противоречие и доказывает теорему II.

Отметим, еще, что если отображение $w = f(z)$ есть отрицательный гомеоморфизм, что для множества второй категории $e \subset D$ множества $\mathfrak{M}_z$, $z \in e$ обязательно разбивают плоскость ζ (а именно, разделяют $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$), так как в этом случае $\mathfrak{M}_z$ содержат пределы окружностей - $\mathfrak{M}_{z'}$, $z' \in A$, содержащих $\zeta = 0$ внутри. Можно также показать, что если $\mathfrak{M}_z$, $z \in e$ отделяют $\zeta = 0$ от $\zeta = \infty$, что функции вида $\operatorname{Arg} \frac{f(z) - f(z')}{z - z'}$ вблизи этих точек неограничены (ср. с леммой 2).

Рассмотрим теперь произвольную функцию $f(z)$, удовлетворяющую условию

$$|f(z'') - f(z')| \leq L\,|z'' - z'|\,, \quad z', z'' \in D;$$

в точках дифференцируемости имеем поэтому:

$$|f_z| + |f_{\bar z}| \leq L.$$

Для каждой функции $\varphi_\lambda(z) = f(z) + (L + \lambda)\bar z$, $\lambda > 0$, получаем:

$$\lambda|z''-z'| \le |\varphi_\lambda(z'')-\varphi_\lambda(z')| \le (2L+\lambda)|z''-z'|,$$

другими словами, $\{\varphi_\lambda(z)\}$ есть – очевидно, непрерывное – семейство гомеоморфизмов D. Так как в точках дифференцируемости $(\varphi_\lambda)_z = f_z$, $(\varphi_\lambda)_{\bar z} = f_{\bar z} + (L+\lambda)$, то при $\lambda > L$

$$|(\varphi_\lambda)_{\bar z}| > |(\varphi_\lambda)_z| \cdot$$

т.е. при $\lambda > L$, а потому и при всех $\lambda > 0$, гомеоморфизмы $\varphi_\lambda(z)$ являются отрицательными. Но тогда, по теореме II, множество $\mathfrak{M}_z$, $z \in \varepsilon$ для φ_λ есть круг с вырезанным другим кругом, содержащим начало $\zeta = 0$. Очевидно также, что для функций $\varphi_\lambda(z) = \overline{f(z) + (L+\lambda)z}$ множества $\mathfrak{M}$ уже не разделяют точек 0, ∞.

Итак, доказана.

Т е о р е м а 12. Если для функции $f(z)$ имеет место свойство:

$$|f(z'')-f(z')| \le L|z''-z'|, \quad z', z'' \in D,$$

то для каждой из функций вида

$$\varphi_\lambda(z) = f(z) + (L+\lambda)\bar z, \quad \lambda > 0,$$

множества $\mathfrak{M}_z$, $z \in \varepsilon$, суть круги с круговыми дырами (в частности, окружности!), разделяющие точки 0 и ∞.

Приведем еще одно утверждения.

Т е о р е м а 13. Если множество $\mathfrak{M}_z$, $z \in \varepsilon$, не разбивает плоскости, то оно локально связно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\mathfrak{M}_z$ – нигде не плотно, то это следует из теоремы 9.

Пусть теперь $\mathfrak{M}_z$ содержит внутренние точки; обозначим его дополнение через Δ. Тогда непрерывная кривая $\partial\Delta$ разбивают плоскость. Если Δ' – одна из ограниченных компонент этого разбиения, то так как любые две ее граничные точки (принадлежащие $\partial\Delta$) можно соединить простой дугой, отсюда следует, что Δ – жорданова область. Другими словами, $\mathfrak{M}_z$ есть объединение кривой $\partial\Delta$ и (не более чем счетного) множества жордановых областей из ее дополнения. Теперь уже непосредственно доказывается, что каждая точка из $\mathfrak{M}_z$ обладает базой связных окрестностей.

Если положить $f(z) = f(x)$, где $f(x)$ – пример I параграфа 2, то на множестве второй категории в единичном квадрате множества $\mathfrak{M}_x$ суть полные круги диаметра I, касающиеся начала $\zeta=0$. Для $f(x)=f(x)-\frac{x}{2}$ это – два круга с общей точкой касания $\zeta=0$.

Цитированная литература:

1. С.Сакс. Теория интеграла. М.,1949.
2. К.Куратовский. Топология, т.I. М.,1966.
3. Н.Н.Лузин. Интеграл и тригонометрический ряд. М. – ИЛ., 1951 (комментарии – пункт 18).
4. И.П.Натансон. Теория функций вещественной переменной, М.– ИЛ., 1950.
5. Ю.Ю.Трохимчук. Непрерывные отображения и условия моногенности, М.,1963.
6. А.Д.Мышкис, Г.В.Гиль. Об одной задаче Н.Н.Лузина. УМН, X., I(63), (1955); 143-145.

МНОЖЕСТВА МОНОГЕННОСТИ И КРИТЕРИИ
ГОЛОМОРФНОСТИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ
КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

А.В.Бондарь
(Киев)

ВВЕДЕНИЕ

В 20-30-х годах нашего столетия Д.Е.Меньшовым [1] , [2] были введены и исследованы различные свойства, представляющие собой ослабление требования сохранения углов, постоянства растяжения и т.д., выполнение которых для комплексной функции f , заданной в области D комплексной плоскости C , обеспечивает аналитичность этой функции всюду в D . В исследованиях Д.Е.Меньшова существенно было предположение об однолистности рассматриваемых функций. Позже Ю.Ю.Трохимчуку удалось освободиться от излишнего предположения об однолистности и перенести все основные результаты Д.Е.Меньшова на случай произвольных непрерывных функций [3]. Этого удалось достигнуть в результате применения метода исследования во многом опирающегося на теорию множеств моногенности, введенных в науку Н.Н.Лузиным [4].

В то время как множества моногенности функции одной комплексной переменной достаточно хорошо изучены [3],[5], то для функций многих комплексных переменных эти множества до настоящего времени не были даже определены.

В настоящей работе мы определяем множества моногенности $\mathfrak{M}_z$ для произвольного отображения $f: D \to C^p$, $D \subset C^n$, и полностью изучаем структуру етих множеств в точках дифференцируемости отображения f . В одномерном случае множество моногенности функции f в точке $z \in D \subset C$ есть множество всех производных чисел (комплексных) этой функции в точке z (см. напр. [3]). По аналогии в многомерном случае множеством моногенности отображения f в точке $z \in D \subset C^n$ мы называем множество всех производных операторов отображения f в точке z (подробнее см. § 3). При этом производные операторы возникают вполне естественно как обобщение понятия производной (напомним, что производная отображения - это линейный оператор). Сформулируем здесь следующий результат о структуре $\mathfrak{M}_z$ (теорема 6): Если отображение $f=(f_1,\dots,f_p): D\to C^p$, $D\subset C^n$, дифференцируемо (в вещественном смысле) в точке $z\in D$ и если матрица $f_{\bar z}=\left(\frac{\partial f_k}{\partial \bar z_j}\right)_{k=1}^{p}{}_{j=1}^{n}$ имеет ранг n в точке z, то множество моногенности $\mathfrak{M}_z$ отображения f в точке z гомеоморфно пространству правых смежных классов унитарной группы $U(n)$ по ортогональной подгруппе $O(n)$. Полагая $n=p=1$ получаем хорошо известный факт, что в одномерном случае, при $f_{\bar z}\neq 0$, $\mathfrak{M}_z$ есть окружность.

Полученные результаты о множествах моногенности мы применяем затем к доказательству критериев голоморфности, обобщающих соответствующие результаты Д.Е.Меньшова на многомерный случай. В связи с этим отметим следующий результат Б.А.Фукса [6]: если $f: C^2\to C^2$ принадлежит классу C^1 в окрестности точки $(z_0,w_0)\in C^2$ сохраняет аналитический характер трех плоскостей, причем для трех направлений, принадлежащих к одной из плоскостей, сохраняющих свой аналитический характер, либо (I) углы между этими направлениями сохраняются, либо (2) коэффициенты линейного искажения вдоль этих направлений одинаковы, то f будет моногенным в точке (z_0, w_0) (см. также [7]).

В данной работе минимальные условия, обеспечивающие голоморфность отображения f, формулируются в терминах производных операторов. Отметим здесь следующую теорему: Пусть D - область в C^n и $f: D\to C^p$ - отображение, дифференцируемое (в вещественном смысле) в каждой точке $a\in D$. Пусть для каждой точки $a\in D$ заданы n-мерные вещественные подпространства $E_1(a), E_2(a)\subset C^n$, обладающие тем свойством, что $E_1+iE_1=C^n$, $E_2+iE_2=C^n$, $E_1+E_2=C^n$. Пусть производные операторы отображения f в каждой точке $a\in D$ вдоль пространств $E_1(a)$ и $E_2(a)$ совпадают (см. замечание 4). Тогда f - голоморфное отображение.

Для сравнения приводим теорему Д.Е.Меньшова, многомерным аналогом которой является теорема, сформулированная выше: Пусть D - область комплексной плоскости C и пусть $f: D\to C$ - однолистное непрерывное отображение. Пусть из каждой точки $a\in D$, исключая не более чем счетное их множество, исходят два луча $E_1(a)$

и $E_2(a)$, не лежащие на одной прямой. Пусть вдоль этих лучей существует один и тот же конечный предел

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

(производные числа вдоль $E_1(a)$ и $E_2(a)$ совпадают). Тогда f – аналитическая функция.

Заметим, что в теореме Д.Е.Меньшова отсутствуют какие-либо требования дифференцируемости. В настоящей работе мы доказываем критерии голоморфности только для дифференцируемых (не обязательно класса C^1) отображений. Однако развитый здесь метод множеств моногенности позволяет перенести на многомерный случай некоторые классические теоремы без каких бы то ни было требований дифференцируемости. Это мы сделаем в последующих публикациях (см. напр. следующую статью в этом сборнике).

§ I. Обозначения и терминология

I. Через R обозначаем вещественную прямую; C есть комплексная плоскость; R^n – n-мерное евклидово пространство; C^n – n-мерное комплексное пространство. Стандартный базис в C^n состоит из векторов $e_k=(0,\dots 0,1,0\dots 0)$, $k=1,\dots,n$, где единица стоит на к-ом месте. Если $z=(z_1,\dots,z_n)\in C^n$ то будем писать $z_k=x_k+ix_{n+k}$, $x_k, x_{n+k}\in R$, $k=1,2,\dots,n$. Вектор $\bar z=(\bar z_1,\dots,\bar z_n)$ где $\bar z_k=x_k-ix_{n+k}$ называется комплексно сопряженным к вектору z. Скалярное произведение векторов $z=(z_1,\dots,z_n)$ и $\zeta=(\zeta_1,\dots,\zeta_n)$ определяется соотношением $\langle z,\zeta\rangle=\sum_{k=1}^{n} z_k\bar\zeta_k$, а норма – равенством $\|z\|=\sqrt{\langle z,z\rangle}$.

2. Пространство C^n есть комплексное линейное пространство; поэтому оно также есть и вещественное линейное пространство. Подмножество $E\subset C^n$, замкнутое относительно сложения и умножения на вещественные числа будем называть вещественным подпространством пространства C^n; если при этом $\lambda z\in E$ для $z\in E$ и для любого комплексного λ, то E называется подпространством пространства C^n.

3. Оператор $L: C^n\to C^p$ называется R-линейным (C-линейным), если для любых $z,\zeta\in C^n$ и $\lambda,\mu\in R$ ($\lambda,\mu\in C$) выполняется равенство $L(\lambda z+\mu\zeta)=\lambda Lz+\mu L\zeta$. Множест-

во всех R-линейных (C-линейных) операторов $L: C^n \to C^p$ обозначаем через $\mathcal{L}^R(C^n, C^p)$ $(\mathcal{L}(C^n, C^p))$. В пространствах $\mathcal{L}^R(C^n, C^p)$ и $\mathcal{L}(C^n, C^p)$ естественным образом определяются сложение и умножение на вещественные (комплексные) числа. Норма оператора L, принадлежащего пространству $\mathcal{L}^R(C^n, C^p)$ или пространству $\mathcal{L}(C^n, C^p)$, определяется равенством

$$\|L\| = \sup_{\|x\|=1} \|Lx\|, \quad x \in C^n.$$

Имеет место очевидное вложение $\mathcal{L}(C^n, C^p) \subset \mathcal{L}^R(C^n, C^p)$.

4. Пусть D - область в C^n. Отображение $f: D \to C^p$ называется дифференцируемым в точке $a \in D$, если существует оператор $L \in \mathcal{L}^R(C^n, C^p)$ такой, что

$$\lim \frac{\|f(a+h) - f(a) - Lh\|}{\|h\|} = 0, \quad h \in C^n.$$

Оператор L, удовлетворяющий этому условию, называется производной отображения f в точке a и обозначается через $f'(a)$. Если f дифференцируемо в точке $a \in D$ и если $f'(a) \in \mathcal{L}(C^n, C^p)$, то f называется моногенным в точке a.

Дифференциальные операторы $\frac{\partial}{\partial z_k}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar z_k}$ определяются равенствами $(z_k = x_k + i x_{n+k})$

$$\frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\frac{\partial}{\partial x_{n+k}}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\frac{\partial}{\partial x_{n+k}}\right).$$

Если отображение f дифференцируемо в точке $a \in D$, то через $f_z(a)$ и $f_{\bar z}(a)$ обозначаем C-линейные операторы из C^n в C^p матрицы которых относительно стандартных базисов в C^n и C^p имеют вид

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial z_k}(a)\right)_{j=1}^{p}{}_{k=1}^{n} \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial f_j}{\partial \bar z_k}(a)\right)_{j=1}^{p}{}_{k=1}^{n}$$

соответственно, где $f = (f_1, \dots, f_p)$. Для любого $h \in C^n$ имеет место равенство

$$(*) \qquad f'(a)h = f_z(a)h + f_{\bar z}(a)\bar h.$$

Через $\tilde f_{\bar z}(a)$ будем обозначать R-линейный оператор из C^n в C^p определяемый соотношением $\tilde f_{\bar z}(a)h = f_{\bar z}(a)\bar h$, $h \in C^n$.

Отображение f моногенно в точке $a \in D$ тогда и только тогда, когда оно дифференцируемо в точке a и выполняются условия

Коши-Римана $f_{\bar z}(a)=0$. Действительно, если $f_{\bar z}(a)=0$ то из равенства (*) следует, что $f'(a)=f_z(a)\in\mathcal{L}(C^n,C^p)$. Обратно, если $f'(a)\in\mathcal{L}(C^n,C^p)$, то для любого $h\in C^n$ имеем $i[f_z h+f_{\bar z}\bar h]=if'(a)h=f'(a)(ih)=if_z h-if_{\bar z}\bar h$. Отсюда $f_{\bar z}(a)=0$.

Отображение f называется голоморфным в точке $a\in D$, если оно моногенно в каждой точке некоторой окрестности точки a; f голоморфно на множестве $M\subset D$, если оно голоморфно в каждой точке $a\in M$.

§ 2. Пространство $\bar{\mathcal{L}}(C^n,C^p)$.

Производные числа функции f могут быть равны бесконечности. В следующем параграфе мы определим производные операторы для произвольного отображения $f:D\to C^p$, где D - область в C^n. Чтобы при этом иметь возможность рассматривать также и "бесконечные производные операторы" нужно естественным образом расширить пространство $\mathcal{L}(C^n,C^p)$. Сейчас мы опишем одно из возможных расширений, наиболее подходящее для наших целей.

Пусть $\dot C^p$ - компактификация пространства C^p посредством одной бесконечно удаленной точки ∞. Обозначим через $Map(C^n,\dot C^p)$ множество всех отображений из C^n в $\dot C^p$, наделенное топологией поточечной сходимости. Так как пространство $Map(C^n,\dot C^p)$ гомеоморфно произведению $\prod_{x\in C^n}\dot C^p_x$, где $\dot C^p_x=\dot C^p$ $\forall x\in C^n$, то оно компактно (см. [8], стр. 287). Пусть $j: C^p\to\dot C^p$ естественное вложение. Тогда $j\circ L\in Map(C^n,\dot C^p)$ $\forall L\in\mathcal{L}(C^n,C^p)$ и, следовательно, определено отображение

$$\bar j:\mathcal{L}(C^n,C^p)\to Map(C^n,\dot C^p),\ \bar jL=j\circ L,$$

которое, как нетрудно видеть, гомеоморфно отображает $\mathcal{L}(C^n,C^p)$ на подмножество $\bar j\mathcal{L}(C^n,C^p)\subset Map(C^n,\dot C^p)$. Обозначим через $\bar{\mathcal{L}}(C^n,C^p)$ замыкание множества $\bar j\mathcal{L}(C^n,C^p)$ в пространстве $Map(C^n,\dot C^p)$. Так как последнее пространство компактно, то $\bar{\mathcal{L}}(C^n,C^p)$ также есть компактное пространство. В дальнейшем мы отождествляем $\mathcal{L}(C^n,C^p)$ с подмножеством

$$\bar j\mathcal{L}(C^n,C^p)\subset\bar{\mathcal{L}}(C^n,C^p).$$

§ 3. Определение множеств моногенности

Обобщим сначала понятие производного числа на многомерный случай. Заметим, что если D - область в C и $f:D\to C$ -

функция, моногенная в точке $z \in D$, то множество моногенности $\mathfrak{M}_z$ состоит из одной точки $f'(z)$. Естественно требовать, чтобы это свойство сохранялось при переходе к многомерному случаю. Но, производная отображения f есть оператор $f'(z)$. Таким образом мы приходим к выводу, что в многомерном случае мы должны рассматривать вместо производных чисел производные операторы. Сформулируем точные определения.

Определение I. Пусть $z \in C^n$, $z^k \in C^n$, $k = 1, 2, \ldots$ и $\lim\limits_{k \to \infty} z^k = z$. Скажем, что последовательность $\{z^k\}$ обладает касательным ортом $e \in C^n$, если предел $\lim \frac{z^k - z}{\| z^k - z \|}$ существует и равен e.

Определение 2. Скажем, что в точке $z \in C^n$ задан m-репер последовательностей $\widetilde{\mathcal{E}} = \{ \{z_1^k\}_{k=1}^{\infty}, \ldots, \{z_m^k\}_{k=1}^{\infty} \}$ с касательным репером $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_m\}$, если (I) $\lim\limits_{k \to \infty} z_j^k = z$ для любого $1 \le j \le m$; (2) последовательность $\{z_j^k\}_{k=1}^{\infty}$ обладает касательным ортом e_j; (3) $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_m\}$ есть линейно независимая система точек в C^n.

Определение 3. Пусть D - область в C^n и $f: D \to C^p$ - отображение. Пусть в точке $z \in D$ задан n - репер последовательностей $\widetilde{\mathcal{E}} = \{ \{z_1^k\}_{k=1}^{\infty}, \ldots, \{z_n^k\}_{k=1}^{\infty} \}$ с касательным репером $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Оператор $L \in \overline{\mathcal{L}}(C^n, C^p)$ называется производным оператором отображения f в точке z вдоль репера последовательностей $\widetilde{\mathcal{E}}$, если выполняется следующее условие

$$(*) \qquad Le_j = \lim_{k \to \infty} \frac{f(z_j^k) - f(z)}{\| z_j^k - z \|}, \quad 1 \le j \le n .$$

Замечание I. Если $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{f(z_j^k) - f(z)}{\| z_j^k - z \|} \ne \infty$, $1 \le j \le n$, то оператор L определяется условием ($*$) однозначно и в этом случае $L \in \mathcal{L}(C^n, C^p)$.

Покажем, что производные операторы отображения (в отличие от производной) существуют в каждой точке $z \in D$.

Теорема I. Пусть D - область в C^n и $f: D \to C^p$ - отображение. Пусть $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ - n - репер в C^n. Тогда в произвольной точке $z \in D$ существует репер последовательностей $\widetilde{\mathcal{E}} = \{ \{z_1^k\}_{k=1}^{\infty}, \ldots, \{z_n^k\}_{k=1}^{\infty} \}$ с касательным репером $\mathcal{E}$ и существует оператор $L \in \overline{\mathcal{L}}(C^n, C^p)$ такие, что L является производным оператором отображения f в точке z вдоль репера последовательностей $\widetilde{\mathcal{E}}$.

Доказательство. Положим $z_j^m = z + \frac{1}{m} e_j$, $j = 1, 2, \dots, n$; $m = 1, 2, \dots$ и $\zeta_j^m = \frac{f(z_j^m) - f(z)}{\| z_j^m - z \|} \in C^p \subset \dot{C}^p$.

Определим линейные операторы $L_m : C^n \to C^p$ на базисе $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ равенствами $L_m e_j = \zeta_j^m$, $1 \le j \le n$, $m = 1, 2, \dots$.
Тогда $\{L_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(C^n, C^p) \subset \overline{\mathcal{L}}(C^n, C^p)$ и т.к. пространство $\overline{\mathcal{L}}(C^n, C^p)$ компактно, что найдется подсеть $\{L_{m(\lambda)}\}_{\lambda \in \Lambda}$, где Λ – направленное множество, сходящаяся к некоторому оператору $L \in \overline{\mathcal{L}}(C^n, C^p)$. Тогда $\lim_{\lambda \in \Lambda} L_{m(\lambda)} e_j = L e_j$, $1 \le j \le n$, и так как $\dot{C}^p$ удовлетворяет первой аксиоме счетности, то найдется подпоследовательность $\{L_{m(\lambda_k)}\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $L e_j = \lim_{k \to \infty} L_{m(\lambda_k)} e_j$, $1 \le j \le n$. Положим

$$\tilde{\mathcal{E}} = \left\{ \{z_1^{m(\lambda_k)}\}_{k=1}^{\infty}, \dots, \{z_n^{m(\lambda_k)}\}_{k=1}^{\infty} \right\}.$$

Тогда $\tilde{\mathcal{E}}$ – репер последовательностей в точке z с касательным репером $\mathcal{E}$ и

$$L e_j = \lim_{k \to \infty} L_{m(\lambda_k)} e_j = \lim_{k \to \infty} \frac{f(z_j^{m(\lambda_k)}) - f(z)}{\| z_j^{m(\lambda_k)} - z \|}, \quad 1 \le j \le n.$$

Следовательно, L есть производный оператор отображения f в точке z вдоль репера последовательностей $\tilde{\mathcal{E}}$.

Теорема I доказана.

Незначительно усложняя рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы I, можно доказать более сильное утверждение. А именно, имеет место

Теорема 2. Пусть D – область в C^n и пусть $f : D \to C^p$ – отображение. Пусть $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ – репер в C^n, пусть $z \in D$, $a_j^m \in D$, $\lim_{m \to \infty} a_j^m = z$, $\lim \frac{a_j^m - z}{\| a_j^m - z \|} = e_j$, $1 \le j \le s$, где $s \le n$. Пусть существуют пределы

$$\lim_{m \to \infty} \frac{f(a_j^m) - f(z)}{\| a_j^m - z \|} = \zeta_j \in \dot{C}^p, \quad 1 \le j \le s.$$

Тогда существуют репер последовательностей $\tilde{\mathcal{E}} = \{ \{z_1^k\}_{k=1}^{\infty}, \dots, \{z_n^k\}_{k=1}^{\infty} \}$ и оператор $L \in \overline{\mathcal{L}}(C^n, C^p)$ такие, что:

(а) $\mathcal{E}$ является касательным репером репера последовательностей $\tilde{\mathcal{E}}$;

(в) $z_j^k = a_j^{m_k}$, $1 \le j \le s$;

(c) L является производным оператором отображения f в точке z вдоль репера последовательностей $\tilde{\mathcal{E}}$;

(d) $Le_j = \zeta_j$, $1 \le j \le s$.

Доказательство. Положим $a_j^m = z + \frac{1}{m} e_j$ для $s+1 \le j \le n$ и определим линейные операторы $L_m : C^n \to C^p$ $(m = 1, 2, \dots)$ на базисе $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ равенствами

$$L_m e_j = \frac{f(a_j^m) - f(z)}{\| a_j^m - z \|} , \quad 1 \le j \le m .$$

Тогда существует подсеть $\{L_{m(\lambda)}\}_{\lambda \in \Lambda}$ последовательности $\{L_m\}_{m=1}^{\infty}$, сходящаяся в пространстве $\mathcal{L}(C^n, C^p)$ к некоторому оператору $L \in \mathcal{L}(C^n, C^p)$. Так как $Le_j = \lim_{\lambda \in \Lambda} L_{m(\lambda)} e_j$, $1 \le j \le n$, то существует подпоследовательность $\{L_{m(\lambda_k)}\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $Le_j = \lim_{k\to\infty} L_{m(\lambda_k)} e_j$, $1 \le j \le n$. Положим $z_j^k = a_j^{m(\lambda_k)}$, $1 \le j \le n$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда $\tilde{\mathcal{E}} = \{\{z_1^k\}_{k=1}^{\infty}, \dots, \{z_n^k\}_{k=1}^{\infty}\}$ – репер последовательностей с касательным репером $\mathcal{E}$. Причем, L является производным оператором отображения f в точке z вдоль репера последовательностей $\tilde{\mathcal{E}}$.
Более того

$$Le_j = \lim_{k\to\infty} L_{m(\lambda_k)} e_j = \lim_{k\to\infty} \frac{f(a_j^{m(\lambda_k)}) - f(z)}{\| a_j^{m(\lambda_k)} - z \|} = \zeta_j ,$$

если $1 \le j \le s$.

Теорема 2 доказана.

Определение 4. Репер последовательностей $\tilde{\mathcal{E}} = \{\{z_1^k\}_{k=1}^{\infty}, \dots$ $\dots, \{z_n^k\}_{k=1}^{\infty}\}$ в точке $z \in C^n$ с касательным репером $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ называется ортогональным, если ортогонален репер $\mathcal{E}$, т.е. если $\langle e_k, e_j \rangle = 0$ для всех $k \ne j$.

Ниже мы установим, что в случае, когда f дифференцируемое в точке $z \in D$, то множество всех производных операторов вдоль ортогональных реперов сходно по своей структуре с множеством моногенности $\mathfrak{M}_z$ функции g , дифференцируемой в точке $z \in C$. Этим подсказано следующее определение.

Определение 5. Пусть D – область в C^n и $f : D \to C^p$ – отображение. Множеством моногенности $\mathfrak{M}_z$ отображения f в точке $z \in D$ называется множество производных операторов отображения f в точке z вдоль всевозможных ортогональных реперов последовательностей в точке z. Множество всех производных операторов отображения f в точке z (вдоль всевозможных реперов последовательностей) будем называть полным множеством моногенности и обозначать через $\widetilde{\mathfrak{M}}_z$.

§ 4. Структура множества моногенности в точке дифференцируемости отображения f.

Определение 6. ([9], стр.277). Вещественное подпространство $E \subset C^n$ называется комплексифицирующим, если $E \cap (iE) = 0$. В этом случае комплексная линейная оболочка множества E в C^n совпадает с прямой суммой $E + iE$.

Замечание 2. Пусть E - n-мерное комплексифицирующее подпространство пространства C^n и $L: E \to C^p$ - R - линейный оператор. Так как $E + iE = C^n$ то любой вектор $z \in C^n$ единственным образом представляется в виде $z = z_1 + i z_2$; $z_1, z_2 \in E$. Тогда соотношение $L^c z = Lz_1 + iLz_2$ определяет C - линейный оператор $L^c: C^n \to C^p$, обладающий тем свойством, что $L^c z = Lz$ для $z \in E$; L^c называется комплексным продолжением оператора L. Комплексное продолжение L^c оператора L единственно.

Замечание 3. Для того чтобы вещественное подпространство $E \subset C^n$ было комплексифицирующим необходимо, чтобы любой базис в E состоял из C-линейно независимых векторов, и достаточно, чтобы какой-нибудь базис в E состоял из C-линейно независимых векторов.

Доказательство. Пусть E - комплексифицирующее подпространством пространства C^n и $\{e_1, \ldots, e_m\}$ - базис в E. Пусть $\lambda_k = \lambda'_k + i\lambda''_k \in C$; $\lambda'_k, \lambda''_k \in R$, $1 \le k \le m$, и пусть $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k e_k = 0$. Тогда

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{m} \lambda'_k e_k + i \sum_{k=1}^{m} \lambda''_k e_k = 0,$$

причем, $\sum_{k=1}^{m} \lambda'_k e_k \in E$ и $\sum_{k=1}^{m} \lambda''_k e_k \in E$. Так как $E \cap iE = 0$, то из (1) следует, что $\sum_{k=1}^{m} \lambda'_k e_k = 0$ и $\sum_{k=1}^{m} \lambda''_k e_k = 0$, а т.к. $\{e_k\}_{k=1}^{m}$ есть базис в E, то из этих равенств следует, что $\lambda'_k = \lambda''_k = 0$, $1 \le k \le m$, т.е. векторы e_k C-линейно независимы. Обратно, пусть

$\{e_1,\dots,e_m\}$ - базис в E (как вещественного пространства), состоящий из C-линейно независимых векторов. Тогда $ie_1,\dots,ie_m$ есть базис в iE. Пусть $z\in E\cap iE$. Тогда $z=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k' e_k = \sum_{k=1}^{m}\lambda_k'' ie_k$; $\lambda_k',\lambda_k''\in R$. Следовательно, $\sum_{k=1}^{m}(\lambda_k'-i\lambda_k'')e_k=0$. Так как система векторов $\{e_k\}_{k=1}^{m}$ C-линейно независима, то отсюда следует, что $\lambda_k'-i\lambda_k''=0$, $1\le k\le m$, т.е. $z=0$.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 3. Пусть D - область в C^n и $f: D\to C^p$ - отображение, дифференцируемое в точке $a\in D$. Пусть $f_z(a)$ и $\tilde f_{\bar z}(a)$ - операторы из C^n в C^p, определенные в § 1. Пусть $\tilde{\mathcal{E}}=\{z_1^k,\dots,z_n^k\}$ — n-репер последовательностей в точке a с касательным репером $\mathcal{E}=\{e_1,\dots,e_n\}$. Пусть $\bar{\mathcal{E}}$ вещественная линейная оболочка системы векторов $\mathcal{E}$. Тогда существует производный оператор L отображения f в точке a вдоль репера последовательностей $\tilde{\mathcal{E}}$ и этот оператор определяется равенством

$$(2)\qquad L=f_z(a)+\left(\tilde f_{\bar z}(a)\big|_{\bar{\mathcal{E}}}\right)^c.$$

Разъясним формулу (2). $\tilde f_{\bar z}(a)|_{\bar{\mathcal{E}}}$ означает ограничение R-линейного оператора $\tilde f_{\bar z}(a)$ на n-мерное вещественное подпространство $\bar{\mathcal{E}}\subset C^n$. Так как $\bar{\mathcal{E}}$ обладает базисом $\mathcal{E}$, состоящим из C-линейно независимых векторов, то согласно замечанию 3, $\bar{\mathcal{E}}$ есть комплексифицирующее подпространство пространства C^n. Согласно замечанию 2 R - линейный оператор $\tilde f_{\bar z}(a)|_{\bar{\mathcal{E}}}:\bar{\mathcal{E}}\to C^p$ имеет единственное комплексное продолжение $(\tilde f_{\bar z}(a)|_{\bar{\mathcal{E}}})^c$. Оператор L является суммой двух C-линейных операторов $f_z(a)$ и $(\tilde f_{\bar z}(a)|_{\bar{\mathcal{E}}})^c$.

Доказательство теоремы 3. По условию в точке a существует производная $f'(a)$. Так как

$$\lim_{k\to\infty}\frac{z_j^k-z}{\|z_j^k-z\|}=e_j,$$

то существует предел

$$(3)\qquad \lim_{k\to\infty}\frac{f(z_j^k)-f(z)}{\|z_j^k-z\|}=\lim_{k\to\infty}f'(a)\frac{z_j^k-z}{\|z_j^k-z\|}=f'(a)e_j.$$

Из (2) имеем

$$(4)\qquad Le_j=f_z(a)e_j+(\tilde f_{\bar z}(a)|_{\bar{\mathcal{E}}})^c e_j=f_z(a)e_j+f_{\bar z}(a)\bar e_j=f'(a)e_j.$$

Из (3) и (4) следует, что

$$Le_j = \lim_{k\to\infty} \frac{f(z_j^k)-f(z)}{\| z_j^k - z \|}, \quad 1 \le j \le n,$$

т.е. L является производным оператором отображения f в точке a вдоль репера последовательностей $\widetilde{\mathcal{E}}$ (определение 3).

Теорема 3 доказана.

Замечание 4. Из формулы (2) следует, что если реперы последовательностей $\widetilde{\mathcal{E}}_1$ и $\widetilde{\mathcal{E}}_2$ в точке a имеют касательные реперы $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ соответственно, порождающие одно и то же вещественное пространство $\overline{\mathcal{E}}_1 = \overline{\mathcal{E}}_2 = E$, то производные операторы L_1 и L_2 отображения f в точке a вдоль этих реперов последовательностей совпадают: $L_1 = L_2 = L$. Оператор L естественно назвать производным оператором отображения f в точке a вдоль пространства E. Таким образом, если f дифференцируемо в точке $a \in D$, то любой производный оператор отображения f в точке a является производным оператором вдоль некоторого n-мерного комплексифицирующего подпространства E пространства C^n.

Замечание 5. Так как комплексирующее подпространство $E \subset C^n$ не является комплексным линейным подпространством пространства C^n, то оно не обязано обладать ортогональным базисом (относительно скалярного произведения $<x, y>$):

Лемма I. Пусть E – n-мерное комплексифицирующее подпространство пространства C^n, обладающее ортонормированным базисом. Пусть $A : C^n \to C^p$ – C-линейный оператор и $\widetilde{A} : C^n \to C^p$ – R-линейный оператор, определяемый равенством $\widetilde{A} z = A \bar{z}$, $z \in C^n$. Тогда

$$(5) \quad \| (\widetilde{A}|_E)^c \| = \| \widetilde{A} \| ;$$

$$(6) \quad \| \widetilde{A} \| = \| A \| .$$

Доказательство. Пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ – ортонормированный базис в E. Тогда любой вектор $z \in C^n$ можно записать в виде $\sum \lambda_k e_k$, $\lambda_k \in C$. Так как $<e_k, e_j> = \delta_{kj}$, то $\| z \| = \sqrt{\sum |\lambda_k|^2}$. Положим $\psi(z) = \sum_{k=1}^{n} \bar{\lambda}_k e_k$. Тогда ψ отображает единичную сферу пространства C^n на себя.

Кроме того

$$(\tilde{A}|_E)^c z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (\tilde{A}|E)^c e_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \tilde{A} e_k = \tilde{A}\left(\sum_{k=1}^{n} \bar{\lambda}_k e_k\right) = \tilde{A}\psi(z).$$

Поэтому

$$\|(\tilde{A}|_E)^c\| = \sup_{\|z\|=1} \|(\tilde{A}|E)^c z\| = \sup_{\|\psi(z)\|=1} \|\tilde{A}\psi(z)\| = \|\tilde{A}\|.$$

Докажем теперь (6). Положим $\varphi(z) = \bar{z}$. Тогда φ отображает единичную сферу в C^n на себя. Поэтому

$$\|\tilde{A}\| = \sup_{\|z\|=1} \|\tilde{A} z\| = \sup_{\|\varphi(z)\|=1} \|A\varphi(z)\| = \|A\|.$$

Лемма I доказана.

Теорема 4. Пусть D – область в C^n и $f: D \to C^p$ – отображение, дифференцируемое в точке $a \in D$. Тогда множество моногенности $\mathfrak{M}_a$ отображения f в точке a содержится в сфере пространства $\mathcal{L}(C^n, C^p)$ с центром в точке $f_z(a) \in \mathcal{L}(C^n, C^p)$ и радиуса $\|f_{\bar{z}}(a)\|$.

Доказательство. Пусть $L \in \mathfrak{M}_a$ Тогда L есть производный оператор отображения f в точке a вдоль некотогого репера последовательностей $\tilde{\mathcal{E}}$, имеющего ортогональный касательный репер $\mathcal{E}$. По теореме 3

$$L = f_z(a) + (f_{\bar{z}}(a)|_{\bar{\mathcal{E}}})^c.$$

Так как n-мерное комплексирующее подпространство $\bar{\mathcal{E}} \subset C^n$ обладает ортонормированным базисом $\mathcal{E}$, то по лемме I

$$\|L - f_z(a)\| = \|(\tilde{f}_{\bar{z}}(a)|\mathcal{E})^c\| = \|\tilde{f}_{\bar{z}}(a)\| = \|f_{\bar{z}}(a)\|.$$

Теорема 4 доказана.

Лемма 2. Пусть D – область в C^n и $f: D \to C^p$ – отображение, дифференцируемое в точке $a \in D$. Пусть H – ядро оператора $\tilde{f}_{\bar{z}}(a)$ т.е.

$$H = \{z \in C^n : \tilde{f}_{\bar{z}}(a) z = f_{\bar{z}}(a)\bar{z} = 0\}.$$

Пусть E_1 и E_2 – такие n-мерные комплексифицирующие подпространства пространства C^n, что

$$(7) \quad E_1 + i(E_1 \cap H) = E_2 + i(E_2 \cap H).$$

Тогда производные операторы L_1 и L_2 отображения f в точке a вдоль пространств E_1 и E_2 совпадают.

Доказательство. Так как операторы L_1 и L_2 C-линейные и т.к. любой вектор $\zeta \in C^n$ единственным образом представляется в виде $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$; $\zeta_1, \zeta_2 \in E_1$, то достаточно доказать, что $L_1\zeta = L_2\zeta$ для всех $\zeta \in E_1$.
Согласно теореме 3 имеем

$$(8) \quad L_1 = f_z(a) + (\tilde{f}_{\bar z}(a)|_{E_1})^c$$

$$(9) \quad L_2 = f_z(a) + (\tilde{f}_{\bar z}(a)|_{E_2})^c .$$

Пусть $\zeta \in E_1$. Тогда из равенства (7) следует, что найдутся $\zeta_1 \in E_2$ и $\zeta_2 \in E_2 \cap H$ такие, что $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$. Учитывая равенства (8) и (9) имеем

$$L_1\zeta = f_z(a)\zeta + \tilde{f}_{\bar z}(a)\zeta_1 - i\tilde{f}_{\bar z}(a)\zeta_2 = f_z(a)\zeta + \tilde{f}_{\bar z}(a)\zeta_1 ,$$

$$L_2\zeta = f_z(a)\zeta + \tilde{f}_{\bar z}(a)\zeta_1 + i\tilde{f}_{\bar z}(a)\zeta_2 = f_z(a)\zeta + \tilde{f}_{\bar z}(a)\zeta_1 = L_1\zeta .$$

Лемма 2 доказана.

Пространство C^n является $2n$-мерным вещественным евклидовым пространством со скалярным произведением

$$(10) \quad \langle z^1, z^2 \rangle_R = \sum_{k=1}^{2n} x_k^1 x_k^2 , \; z^1 = (z_1^1, \dots, z_n^1),\; z^2 = (z_1^2, \dots, z_n^2),$$

$$z_k^1 = x_k^1 + i x_{n+k}^1 , \quad z_k^2 = x_k^2 + i x_{n+k}^2 , \quad k = 1, 2, \dots, n ,$$

и нормой

$$(11) \quad \|z\|_R = \sqrt{\langle z, z \rangle_R} = \sqrt{\langle z, z \rangle} = \|z\| .$$

В этой роли будем обозначать его через C_R^n .

Пусть E – подпространство в C_R^n . Обозначим через S_E единичную сферу:

$$(12) \quad S_E = \{ z \in E : \|z\| = \|z\|_R = 1 \} .$$

При $E = 0$ положим $S_E = 0$.
Раствором подпространств $E_1, E_2 \subset C_R^n$ называется величина

(13) $$\theta(E_1,E_2)=\max\{\sup_{x\in S_{E_1}} d(x,E_2),\ \sup_{x\in S_{E_2}} d(x,E_1)\},$$

где $$d(x,E)=\inf_{y\in E}\|x-y\|.$$

Раствор является метрикой на множестве $\mathcal{G}(C^n_R)$ всех подпространств пространства C^n_R /7/, стр.222). Множество $\mathcal{G}(C^n_R)$, снабженное метрикой $\theta(E_1,E_2)$ является компактным метрическим пространством (/9/, стр.226).

Для любого подпространства $E\subset C^n_R$ через $P(E)$ обозначим ортогональный проектор, проектирующий C^n_R на подпространство E. Тогда для любых подпространств $E_1,E_2\subset C^n_R$ имеет место равенство (/9/, стр.222).

(14) $$d(x,E_1)=\|[P(E_1)-P(E_2)]x\|,\ x\in E_2.$$

После сделанных приготовлений докажем основную теорему о структуре множества моногенности в точке дифференцируемости отображения f.

Теорема 5. Пусть D - область в C^n и $f:D\to C^p$ - отображение, дифференцируемое в точке $a\in D$. Пусть H есть ядро оператора $f_{\bar z}(a)$. Пусть $\mathcal{F}$ есть подмножество пространства $\mathcal{G}(C^n_R)$, состоящее из подпространств F пространства C^n_R вида $F=E+i(E\cap H)$, где E-n-мерное комплексирующее подпространство пространства C^n.
Пусть $\mathcal{F}^{(0)}$ - подмножество множества $\mathcal{F}$, состоящее из таких подпространств $F=E+i(E\cap H)\in\mathcal{F}$, что E обладает ортонормированным базисом. Тогда равенство

(15) $$\psi(F)=f_z(a)+(\bar f_{\bar z}(a)|_E)^c,\ F=E+i(E\cap H),$$

определяет непрерывное биективное отображение

(16) $$\psi:\mathcal{F}\longrightarrow\tilde{\mathfrak{M}}_a,$$

отображающее подмножество $\mathcal{F}^{(0)}\subset\mathcal{F}$ на подмножество $\mathfrak{M}_a\subset\tilde{\mathfrak{M}}_a$.

Доказательство. Согласно лемме 2 правая часть равенства (15) не зависит от представления F в виде $F=E+i(E\cap H)$.
По теореме 3 $\psi(F)\in\tilde{\mathfrak{M}}_a$, если $F\in\mathcal{F}$. Более того, в силу этой же теоремы, любой оператор $L\in\tilde{\mathfrak{M}}_a$ представляется в ви-

де $L=\psi(F)$ при некотором $F\in\mathcal{F}$. Тем самым определено сюрьективное отображение $\psi:\mathcal{F}\longrightarrow\widetilde{\mathfrak{M}}_a$. Из определения $\mathfrak{M}_a$ следует, что при этом подмножество $\mathcal{F}^{(0)}\subset\mathcal{F}$ отображается на $\mathfrak{M}_a$.

(А). Покажем, что отображение ψ инъективно.
Пусть $F_1=E_1+i(E_1\cap H)$, $F_2=E_2+i(E_2\cap H)\in\mathcal{F}$ и пусть $\psi(F_1)=\psi(F_2)$. Нужно доказать, что $F_1=F_2$. Докажем сначала, что $E_1\subset E_2+i(E_2\cap H)$.

Пусть $x\in E_1$. Тогда существуют $x_1,x_2\in E_2$ такие, что $x=x_1+ix_2$. Следовательно,

$$(17)\quad \psi(F_1)x\overset{(\cdot)}{=}f_z(a)x+\tilde{f}_{\bar z}(a)x_1-i\tilde{f}_{\bar z}(a)x_2,$$

$$(18)\quad \psi(F_2)x=f_z(a)x+\tilde{f}_{\bar z}(a)x_1+i\tilde{f}_{\bar z}(a)x_2.$$

Так как, по условию, $\psi(F_1)x=\psi(F_2)x$, то из (17) и (18) следует, что $\tilde{f}_{\bar z}(a)x_2=0$, т.е. $x_2\in E_2\cap H$. Поэтому $x=x_1+ix_2\in E_2+i(E_2\cap H)$.

Пусть теперь $z\in F_1=E_1+i(E_1\cap H)$. Тогда существуют $x\in E_1$ и $y\in E_1\cap H$ такие, что $z=x_1+ix_2$. По уже доказанному, существуют $x_1\in E_2$, $x_2\in E_2\cap H$ и $y_1\in E_2$, $y_2\in E_2\cap H$ такие, что $x=x_1+ix_2$ и $y=y_1+iy_2$. Тогда $z=x_1-y_2+i(x_2+y_1)$. Так как $0=\tilde{f}_{\bar z}(a)y=\tilde{f}_{\bar z}(a)y_1-i\tilde{f}_{\bar z}(a)y_2=\tilde{f}_{\bar z}(a)y_1$, то $x_2+y_1\in E_2\cap H$. Поэтому $z\in E_2+i(E_2\cap H)$.
Тем самым доказано включение $F_1\subset F_2$. Обратное включение доказывается аналогично.

(Б). Покажем, что отображение ψ непрерывно.
Пусть $F_k=E_k+i(E_k\cap H)\in\mathcal{F}$, $F=E+i(E\cap H)\in\mathcal{F}$ и $F=\lim\limits_{k\to\infty}F_k$. Требуется доказать, что $\psi(F)=\lim\limits_{k\to\infty}\psi(F_k)$.

Покажем сначала, что

$$(19)\quad \sup_{\substack{\|x\|=1\\ x\in E}}\|[\psi(F_k)-\psi(F)]x\|\longrightarrow 0\quad \text{при } k\to\infty.$$

Так как $F=\lim\limits_{k\to\infty}F_k$, то

$$(20)\quad \theta(F_k,F)=\max\{\sup_{x\in S_F}d(x,F_k),\ \sup_{x\in S_{F_k}}d(x,F)\}\to 0 \text{ при } k\to\infty.$$

Из равенства (14), учитывая (20), имеем

$$(21)\ \sup_{x\in S_E}\|P(F_k)x-P(F)x\|\leq \sup d(x,F_k)\to 0 \text{ при } k\to\infty .$$

Положим $P(F_k)x-P(F)x=Q_k(x)$. Так как для $x\in E\subset F$ $P(F)x=x$, то

$$(22)\quad x=P(F_k)x-Q_k(x),\ x\in E .$$

Поэтому

$$\psi(F_k)x-\psi(F)x=(\tilde{f}_{\bar z}|_{E_k})^c x-(\tilde{f}_{\bar z}|_E)^c x=$$

$$(23)\quad =(\tilde{f}_{\bar z}|_{E_k})^c P(F_k)x-\tilde{f}_{\bar z}x-(\tilde{f}_{\bar z}|_{E_k})^c Q_k(x),\ x\in E .$$

Вектор $P(F_k)x$ принадлежит F_k. Следовательно, существуют $y_k'\in E_k$ и $y_k''\in E_k\cap H$ такие, что $P(F_k)x=y_k'+iy_k''$.

Отсюда

$$(\tilde{f}_{\bar z}|_{E_k})^c P(F_k)x=\tilde{f}_{\bar z}y_k'+i\tilde{f}_{\bar z}y_k''=$$

$$(24)\quad =\tilde{f}_{\bar z}y_k'-i\tilde{f}_{\bar z}y_k''=\tilde{f}_{\bar z}(y_k'+iy_k'')=\tilde{f}_{\bar z}P(F_k)x .$$

Из (23) тогда имеем

$$(25)\quad \psi(F_k)x-\psi(F)x=\tilde{f}_{\bar z}[P(F_k)x-x]-(\tilde{f}_{\bar z}|_{E_k})^c Q_k(x)=$$

$$=\tilde{f}_{\bar z}Q_k(x)-(\tilde{f}_{\bar z}|_{E_k})^c Q_k(x),\ x\in E .$$

Согласно лемме I норма

$$(26)\quad \|(\tilde{f}_{\bar z}|_{E_k})^c\|=\|f_{\bar z}\|=N$$

не зависит от k. Поэтому из (25) имеем

$$(27)\quad \sup_{x\in S_E}\|\psi(F_k)x-\psi(F)x\|\leq 2N\sup_{x\in S_E}\|Q_k(x)\| .$$

Согласно (21) $\sup_{x\in S_E}\|Q_k(x)\|\to 0$ при $k\to\infty$.

Поэтому (19) следует из (27).

Любой вектор $x\in C^n$ единственным образом представляется в виде суммы $x=x_1+ix_2$; $x_1,x_2\in E$. Положим $P_1x=x_1$ и $P_2x=x_2$. Тогда P_1 и iP_2 есть R-линейные операторы, проектирующие C^n на E и iE соответственно. Так как эти операторы непрерывны, то существуют константы K_1 и K_2 такие, что

$$\|P_1 x\| \le K_1 \|x\| \quad \text{и} \quad \|P_2 x\| \le K_2 \|x\|, \; x \in C^n.$$

Отсюда и из (19) имеем

$$\sup_{\|x\|=1} \|\psi(F_k)x - \psi(F)x\| \le$$

$$\le (K_1 + K_2) \sup_{x \in S_E} \|\psi(F_k)x - \psi(F)x\| \to 0 \quad \text{при} \; k \to \infty.$$

Тем самым непрерывность отображения ψ доказана.

Теорема 5 доказана.

Теорема 6. Пусть D – область в C^n и $f: D \to C^p$ – отображение, дифференцируемое в точке $a \in D$. Допустим, что ядро оператора $f_{\bar{z}}(a)$ равно нулю. Тогда множество моногенности $\mathfrak{M}_a$ гомеоморфно пространству правых смежных классов унитарной группы $U(n)$ по ортогональной подгруппе $O(n)$.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{L}$ множество всех n-мерных комплексифицирующих подпространств пространства C^n, обладающих ортогональным базисом. Тогда согласно теореме 5

$$(31) \qquad \psi : \mathcal{L} \longrightarrow \mathfrak{M}_a$$

гомеоморфизм. Пусть $V_n(C^n)$ – многообразие Штифеля ранга n, т.е. множество всех ортонормированных систем $\{e_1, \dots, e_n\}$, естественным образом наделенное метрикой ([7]., стр.25). Тогда имеет место непрерывное отображение

$$(32) \qquad \psi_1 : V_n(C^n) \longrightarrow \mathcal{L}$$

сопоставляющее каждому базису $\{e_1, \dots, e_n\}$ вещественную линейную оболочку E системы векторов $\{e_1, \dots, e_n\} \in V_n(C^n)$. Это отображение сюрьективно, т.к. по условию, любое пространство $E \in \mathcal{L}$ обладает ортонормированным базисом.

Считаем, что $U(n)$ есть подмножество пространства $\underbrace{C^n \times C^n \times \dots \times C^n}_{n \text{ раз}}$ состоящее из комплексных унитарных матриц размера $n \times n$. Тогда $O(n)$ есть подмножество пространства $U(n)$, состоящее из)вещественных) ортогональных матриц. Зафиксируем стандартный базис $\mathcal{E}^0 = (e_1^0, \dots, e_n^0)$ в C^n. Тогда для каждого ортонормированного базиса $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ существует единственная матрица $\mathcal{U} \in U(n)$ такая, что $\mathcal{U} e_k^0 = e_k$, $1 \le k \le n$. Тем самым определено отображение

(33) $\psi_2 : U(n) \longrightarrow V_n(C^n)$,

которое является гомеоморфизмом ([10] стр.117).
Из (31), (32), (33) получаем непрерывное сюрьективное отображение

(34) $\Phi = \psi \cdot \psi_1 \cdot \psi_2 : U(n) \longrightarrow \mathfrak{M}_a$.

Пусть $u_1, u_2 \in U(n)$ и пусть $\Phi(u_1) = \Phi(u_2)$. Так как ψ инъективно, то отсюда следует, что

(35) $\psi_1 \psi_2 (u_1) = \psi_1 \psi_2 (u_2)$,

т.е. вещественные линейные оболочки систем векторов

$\mathcal{E}_1 = \{u_1 e_1^\circ, \dots, u_1 e_n^\circ\}$ и $\mathcal{E}_2 = \{u_2 e_1^\circ, \dots, u_2 e_n^\circ\}$

соответственно, совпадают: $\bar{\mathcal{E}}_1 = \bar{\mathcal{E}}_2 = E$. Пространство E – n-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle x,y \rangle_R$. Причем, системы векторов $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ ортогональны относительно этого скалярного произведения. Это следует из того, что $\langle x,y \rangle_R$ есть действительная часть $\langle x,y \rangle$ и системы $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ ортогональны относительно $\langle x,y \rangle$. Отсюда следует, что существует ортогональная матрица A такая, что $A\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$. Тогда $u_2 = A u_1$ и, следовательно, $u_2 u_1^{-1} = A \in O(n)$ Те же рассуждения, но проведенные в обратном порядке, показывают, что если $u_2 u_1^{-1} \in O(n)$, то $\Phi(u_1) = \Phi(u_2)$. Тем самым доказано, что Φ индуцирует непрерывное биективное отображение

$$\tilde{\Phi} : U(n)/O(n) \longrightarrow \mathfrak{M}_a .$$

Так как пространства компактны, то $\tilde{\Phi}$ – гомеоморфизм.

Теорема 6 доказана

§ 5. Критерии голоморфности

Определение 7. Пусть E_1 и E_2 – n-мерные вещественные подпространства пространства C^n. Скажем, что E_1 и E_2 находятся в общем положении в C^n , если $E_1 + E_2 = C^n$.

Лемма 3. Пусть E_1 и E_2 n-мерные комплексифицирующие подпространства пространства C^n, находящиеся в общем положении в C^n . Пусть H –подпространство пространства C^n. Если $H \neq C^n$, то $E_1 + i(E_1 \cap H) \neq E_2 + i(E_2 \cap H)$.

Доказательство. Допустим, что

$E_1 + i(E_1 \cap H) = E_2 + i(E_2 \cap H) = E$.

Так как $E_1 \subset E$ и $E_2 \subset E$, то отсюда следует, что $C^n = E_1 + E_2 \subset E$ т.е. $E = C^n$. Но тогда из равенства $E_1 + i(E_1 \cap H) = C^n$ следует, что $E_1 \cap H = E_1$ и так как H - подпространство пространства C^n, то $C^n = E_1 + iE_1 \subset H$, т.е. $H = C^n$.

Получили противоречие.

Лемма 3 доказана.

Теорема 7. Пусть D - область в C^n и $f: D \to C^p$ - отображение, дифференцируемое в точке $a \in D$. Пусть E_1 и E_2 - n-мерные комплексифицирующие подпространства пространства C^n, находящиеся в общем положении в C^n. Допустим, что производные операторы L_1 и L_2 отображения f в точке a вдоль пространств E_1 и E_2 совпадают. Тогда отображение f моногенно в точке a.

Доказательство. Допустим, что $f_{\bar{z}}(a) \neq 0$. Тогда ядро H оператора $f_{\bar{z}}(a)$ есть подпространство пространства C^n, не совпадающее с C^n. По лемме 3

$$F_1 = E_1 + i(E_1 \cap H) \neq E_2 + i(E_2 \cap H) = F_2$$

и тогда в силу теоремы 5

$$L_1 = \psi(F_1) \neq \psi(F_2) = L_2 ,$$

что противоречит условию.

Теорема 7 доказана.

Непосредственным следствием теоремы 7 является следующий результат.

Теорема 8. Пусть D - область в C^n и $f: D \to C^p$ - отображение, дифференцируемое в каждой точке $a \in D$. Пусть для каждой точки $a \in D$ заданы n-мерные комплексирующие подпространства $E_1(a)$ и $E_2(a)$ пространства C^n, находящиеся в общем положении в C^n. Пусть производные операторы $L_1(a)$ и $L_2(a)$ в каждой точке $a \in D$ вдоль пространств $E_1(a)$ и $E_2(a)$ совпадают. Тогда f - голоморфное отображение.

В одномерном случае имеет место следующее утверждение ([3], стр.41): Если функция f дифференцируема в точке a области $D \subset C$ и если вдоль трех лучей, исходящих из точки a и лежащих на трех различных прямых, существует один и тот же предел

$$\lim_{h \to c} \operatorname{Arg} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

то функция f моногенна в точке a.
Обобщим это утверждение на многомерный случай.

Пусть $L\in\mathcal{L}(C^n,C^p)$. Определим оператор $L_S: C^n\to C^p$ следующим образом: $L_S=0$, если $L=0$ и $L_S=\frac{L}{\|L\|}$, если $L\neq 0$. Тогда $\|L_S\|=1$ и L полностью определяется заданием числа $\|L\|$ и оператора L_S. Сейчас мы охарактеризуем моногенность отображения f в точке $a\in D$ только в терминах операторов L_S, $L\in\mathfrak{M}_a$.

Теорема 9. Пусть D – область в C^n и $f: D\to C^p$ – отображение, дифференцируемое в точке $a\in D$. Пусть E_1, E_2, E_3 – n-мерные комплексифицирующие подпространства пространства C^n, обладающие ортонормированными базисами и такие, что каждая пара их находится в общем положении в C^n. Пусть L^1, L^2, L^3 – производные операторы отображения f в точке a вдоль E_1, E_2, E_3 соответственно.
Если $L^1_S=L^2_S=L^3_S$, то отображение f моногенно в точке a.

Доказательство. Если $L^1=0$, то $L^1_S=0$. Поэтому из условий теоремы следует, что в этом случае имеет место равенство $L^1=L^2=L^3$. По теореме 7 отображение f моногенно в точке a.
Пусть теперь $L^1\neq 0$. Тогда

$$\frac{L^1}{\|L^1\|}=L^1_S=L^2_S=L^3_S.$$

Отсюда

$$L^2=\frac{\|L^2\|}{\|L^1\|}L^1 \quad \text{и} \quad L^3=\frac{\|L^3\|}{\|L^1\|}L^1,$$

т.е. все три оператора L^1, L^2 и L^3 лежат на прямой

$$\Pi=\{L: L=\lambda L^1, \lambda\in R\}$$

пространства $\mathcal{L}(C^n,C^p)$. По теореме 4 множество моногенности $\mathfrak{M}_a$ содержится в сфере пространства $\mathcal{L}(C^n,C^p)$ с центром в точке $f_z(a)$ и радиуса $\|f_{\bar z}(a)\|$. Так как прямая Π пересекает эту сферу не более чем в двух точках и т.к. $L^1, L^2, L^3\in\mathfrak{M}_a$, то по крайней мере два из операторов L^1, L^2, L^3 совпадают, и тогда отображение f моногенно в точке a по теореме 7.

Теорема 9 доказана.

Сформулируем очевидное следствие из теоремы 9.

Теорема 10: Пусть D – область в C^n и $f: D\to C^p$ – отображение, дифференцируемое в каждой точке $a\in D$. Пусть для каждой точки $a \in D$ заданы n-мерные комплексифицирующие подпространства $E_1(a), E_2(a), E_3(a)$ пространства C^n, обладающие ортонормированными базисами и такие, что каждая пара их находится в общем положении в C^n. Пусть производные операторы $L^1(a), L^2(a), L^3(a)$ отображения f в каждой точке $a \in D$ вдоль пространств $E_1(a)$, $E_2(a)$ и $E_3(a)$ соответственно, обладают тем свойством, что $L^1_s(a) = L^2_s(a) = L^3_s(a)$. Тогда f – голоморфное отображение.

Литература

1. D. Menchoff, Sur les fonctions monogènes, Bull. Soc. math. de France, 59 (1931).
2. D. Menchoff, Sur une généralisation d'un théorème de M.H.Bohr, Матем. сб., 2 (1937); 339-356.
3. Ю.Ю.Трохимчук, Непрерывные отображения и условия моногенности. "Физматгиз", 1963.
4. В.С.Федоров, Труды Н.Н.Лузина по теории функций комплексного переменного, УМН, 2 (1952); 7-16.
5. Ю.Ю.Трохимчук, О дифференциальных свойствах вещественных и комплексных функций (в этом сб.).
6. Б.А.Фукс, Об условиях псевдоконформности отображения четырехмерного пространства, УМН, 9, № 3 (1954); 201-204.
7. Б.А.Фукс, Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1963.
8. Дж.Л.Кели, Общая топология, "Наука", М., 1968.
9. И.М.Глазман, Ю.И.Любич, Конечномерный линейный анализ, "Наука", 1969.
10. Д.Хьюзмоллер, Расслоенные пространства, "Мир", 1970.

МНОГОМЕРНЫЙ ВАРИАНТ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ БОРА

А.В.Бондарь

(Киев)

Введение и постановка задачи

Пусть D - область комплексной плоскости C и $f: D \to C$ - непрерывное отображение. Говорят, что f обладает в точке $z \in D$ постоянным растяжением, если существует конечный или бесконечный предел

$$(1) \qquad \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right| = R .$$

Этот предел R называется растяжением отображения f в точке z.

Имеет место следующая теорема (Теорема Бора).

Теорема B. Если непрерывное и однолистное отображение $f: D \to C$ обладает постоянным растяжением в каждой точке $z \in D$, исключая не более чем счетное их множество, то либо функция f, либо ей сопряженная $\bar{f}$, является голоморфной в области D.

Теорема B впервые была доказана Бором [1] при том дополнительном предположении, что растяжение конечно и отлично от нуля.

Позднее Г.Радемахер [2] устранил лишнее предположение о том, что растяжение не равно нулю, а Ю.Ю.Трохимчук показал [3], что в формулировке этой теоремы можно допускать и бесконечные растяжения. Более того, он распространил теорему Бора также и на случай функций не обязательно однолистных, требуя однако, чтобы f сохраняло ориентацию в большинстве точек (подробнее см. [3], стр.107).

Цель настоящей работы - сформулировать и доказать многомерный вариант теоремы Бора. При этом мы будем использовать все определения и результаты работы [4].

Любой линейный оператор $L \in \mathcal{L}(C^n, C^n)$ можно представить в виде $L = RU$, где R - неотрицательный (самосопряженный с неотрицательным спектром), а U - унитарный оператор [5]. Оператор R называется (левым) операторным модулем оператора L и определяется по оператору L однозначно: $R = (LL^*)^{1/2}$ где L^* оператор, сопряженный к оператору L. Оператор U определяется по L однозначно только в том случае, когда оператор L регулярен.

Очевидно, что функция $f: D \to C$ обладает постоянным растяжением R в точке $z \in D$ тогда и только тогда, когда все производные числа этой функции в точке z по модулю равны R. Поэтому вполне естественно сделаит следующее определение

Определение I. Пусть D - область в C^n и $f: D \to C^n$ - отображение. Скажем, что отображение f обладает конечным постоянным растяжением в точке $z \in D$, если все производные операторы отображения f в точке z вдоль ортогональных реперов последовательностей конечны, т.е. $\mathfrak{M}_z \subset \mathcal{L}(C^n, C^n)$ и если (левые) операторные модули всех операторов $L \in \mathfrak{M}_z$ равны между собой, т.е. $(LL^*)^{1/2} = R$ для всех $L \in \mathfrak{M}_z$. Оператор R называется растяжением отображения f в точке z.

В этой работе будет доказана следующая теорема.

Теорема I. Пусть D - область в C^n и $f: D \to C^n$ - непрерывное отображение. Если f обладает конечным постоянным растяжением в каждой точке $z \in D$, исключая не более чем счетное их множество и если матрица $f_z(a) = \left(\frac{\partial f_k}{\partial z_j}(a)\right)$, $f = (f_1, \dots, f_n)$, отлична от нулевой матрицы для почти всех (в смысле $2n$-мерной меры Лебега) точек a из множества $D(f)$ точек дифференцируемости отображения f, то f является голоморфным отображением.

Замечание I. Если в теореме I не требовать никаких условий, кроме постоянства растяжения, то в таком виде эта теорема оказывается не верной даже в одномерном случае. Если f гомеоморфизм и n - нечетно, то вместо условия $f_z(a) \neq 0$ можно требовать, чтобы гомеоморфизм f сохранял ориентацию. В этом случае заключение теоремы I остается верным.

§ I. Дифференцируемые отображения с постоянным растяжением.

Прежде всего найдем наиболее подходящее для нашего случая представление производных операторов в точке дифференцируемости отображения f. Наша формула будет достаточно точно воспроизводить известную в одномерном случае формулу

$$a(\alpha)=f_z+f_{\bar z}e^{-2i\alpha}, \quad 0<\alpha\le 2\pi, \tag{2}$$

определяющую производное число $a(\alpha)$ функции f вдоль луча $x=\lambda e^{i\alpha}$, $\lambda>0$.

Непосредственным вычислением убеждаемся в том, что имеет место следующее утверждение.

Лемма I. Если $\mathcal{E}=\{e_1,\dots,e_n\}$ -ортонормированный базис в C^n, то $\bar{\mathcal{E}}=\{\bar e_1,\dots,\bar e_n\}$ - также ортонормированный базис в C^n.

В лемме 3 будет использовано следующее утверждение [5].

Лемма 2. Для того чтобы C-линейный оператор $T: C^n\longrightarrow C^n$ был унитарным, необходимо и достаточно, чтобы он отображал какой-нибудь ортонормированный базис в ортонормированный базис.

Лемма 3. Пусть E - n-мерное комплексифицирующее подпространство пространства C^n. Пусть $x\in C^n$ и $x=x_1+ix_2$, $x_1,x_2\in E$. Тогда соотношение

$$T_E x=\bar x_1+i\bar x_2 \tag{3}$$

определяет C- линейный оператор $T_E: C^n\longrightarrow C^n$. Этот оператор унитарен, если E обладает ортонормированным базисом.

Доказательство. Проверим, что оператор T_E линеен. Пусть

$x=x_1+ix_2$, $y=y_1+iy_2\in C^n$; $x_1,x_2,y_1,y_2\in E$.

Пусть $\lambda=\lambda_1+i\lambda_2$, $\mu=\mu_1+i\mu_2\in C$; $\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2\in R$.

Тогда
$$T_E(\lambda x+\mu y)=T_E[\lambda_1x_1-\lambda_2x_2+\mu_1y_1-\mu_2y_2+$$
$$+i(\lambda_2x_1+\lambda_1x_2+\mu_2y_1+\mu_1y_2)]=$$
$$=\lambda_1\bar x_1-\lambda_2\bar x_2+\mu_1\bar y_1-\mu_2\bar y_2+i(\lambda_2\bar x_1+\lambda_1\bar x_2+\mu_2\bar y_1+\mu_1\bar y_2)=$$
$$=(\lambda_1+i\lambda_2)\bar x_1+i(\lambda_1+i\lambda_2)\bar x_2+(\mu_1+i\mu_2)\bar y_1+i(\mu_1+i\mu_2)\bar y_2=$$
$$=\lambda(\bar x_1+i\bar x_2)+\mu(\bar y_1+i\bar y_2)=\lambda T_E x+\mu T_E y.$$

Пусть теперь E обладает отонормированным базисом $\mathcal{E}=\{e_1,\dots,e_n\}$ Так как E - комплексифицирующее подпространство пространства C^n, то $\mathcal{E}$ есть также ортонормированный базис в C^n ([4], замечание 3). Так как $e_k \in E$, $1 \le k \le n$, то $T_E e_k = \bar{e}_k$. Следовательно, T_E отображает ортонормированный базис $\mathcal{E}$ в ортонормированный базис $\bar{\mathcal{E}} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$. По лемме 2 оператор T_E унитарен.

Лемма 3 доказана.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 2. Пусть D - область в C^n и $f: D \to C^p$ отображение, дифференцируемое в точке $a \in D$. Тогда любой производный оператор $L \in \widetilde{\mathfrak{M}}_a$ имеет представление

$$(4) \qquad L = f_z(a) + f_{\bar z}(a) T_E ,$$

где E - n-мерное комплексифицирующее подпространство пространства C^n. Если при этом $L \in \mathfrak{M}_a$, то E обладает ортонормированным базисом и оператор T_E унитарен.

Замечание 2. Для $L \in \mathfrak{M}_a$ оператор T_E в (4) унитарен, и следовательно, может быть записан в виде $T_E = e^{iS_E}$, где S_E - Самосопряженный оператор. Отсюда

$$(5) \qquad L = f_z(a) + f_{\bar z}(a) e^{iS_E} .$$

Формула (5) является обобщением формулы (2) на многомерный случай.

Доказательство теоремы 2. Пусть $L \in \widetilde{\mathfrak{M}}_a$. Тогда по теореме 3 из работы [4] существует n-мерное комплексифицирующее подпространство $E \subset C^n$ такое, что

$$(6) \qquad L = f_z(a) + (\tilde{f}_{\bar z}|_E)^c .$$

Пусть $x \in C^n$ и $x = x_1 + i x_2$, $x_1, x_2 \in E$. Тогда

$$Lx = f_z(a)x + \tilde{f}_{\bar z}(a)x_1 + i\tilde{f}_{\bar z}(a)x_2 = f_z(a)x + f_{\bar z}(a)\bar{x}_1 + i f_{\bar z}(a)\bar{x}_2 =$$

$$= f_z(a)x + f_{\bar z}(a)(\bar{x}_1 + i\bar{x}_2) = f_z(a)x + f_{\bar z}(a) T_E x .$$

Отсюда $L = f_z(a) + f_{\bar z}(a) T_E$.

Если $L \in \mathfrak{M}_a$ то пространство E в (6) обладает ортонормированным базисом (это следует из определения $\mathfrak{M}_a$) и, следовательно, по лемме 3 оператор T_E в этом случае унитарен.

Теорема 2 доказана.

Установим теперь нужные для дальнейшего свойства операторов T_E. Обозначим через $\mathcal{L}(C^n)$ множество всех n-мерных комплексифицирующих подпространств пространства C^n, обладающих ортонормированным базисом.

Лемма 4. Пусть $x, y \in C^n$, $\|x\| = \|y\| = 1$ и пусть $\mathrm{Im}\langle x, \bar{y}\rangle = 0$. Тогда существует $E \in \mathcal{L}(C^n)$ такое, что $T_E x = y$.

Доказательство. Положим

(7) $e_1 = \frac{1}{2}[\bar{y} + x]$ и $e_2 = \frac{1}{2} i [\bar{y} - x]$.

Тогда

(8) $\langle e_1, e_2 \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Im} \langle x, \bar{y} \rangle + \frac{1}{4} i [\langle x, x \rangle - \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle] = 0.$

Рассмотрим два возможных случая.

(А). Пусть $e_1 \neq 0$ и $e_2 \neq 0$. Тогда из (8) следует, что множество $\{e_1, e_2\}$ можно дополнить векторами $e_3, \dots, e_n \in C^n$ до ортогонального базиса $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ в C^n. Обозначим через E вещественную линейную оболочку системы векторов $\mathcal{E}$. Тогда $E \in \mathcal{L}(C^n)$. Кроме того

(9) $e_1 + i e_2 = \frac{1}{2}[\bar{y} + x] - \frac{1}{2}[\bar{y} - x] = x$.

Так как $e_1, e_2 \in E$ то из (9) имеем

$$T_E x = \bar{e}_1 + i \bar{e}_2 = \frac{1}{2}[y + \bar{x}] + \frac{1}{2}[y - \bar{x}] = y .$$

(Б). Пусть один из векторов e_1 или e_2 равен нулю. Для определенности пусть $e_2 = 0$. Тогда $x = \bar{y}$ и, следовательно, $e_1 = \bar{y} \neq 0$. Дополним множество $\{e_1\}$ векторами $e_2', \dots, e_n'$ до ортогонального базиса $\mathcal{E}' = \{e_1, e_2', \dots, e_n'\}$ в C^n и обозначим через E' вещественную линейную оболочку системы векторов $\mathcal{E}'$. Тогда $E' \in \mathcal{L}(C^n)$ и $x = e_1 \in E'$. Поэтому $T_E x = \bar{x} = y$. Случай, когда $e_1 = 0$, рассматривается аналогично.

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Пусть $x \in C^n$, $\|x\| = 1$. Положим $y = i\bar{x}$. Тогда существует $E \in \mathcal{L}(C^n)$ такое, что $T_E x = y$.

Доказательство. Положим $e_1 = \frac{1}{2}(1 - i)x$. Тогда $e_1 \neq 0$. Дополним систему $\{e_1\}$ векторами $e_2, \dots, e_n$ до ортогонального базиса в C^n. Обозначим через E вещественную линейную оболочку системы векторов $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Тогда $E \in \mathcal{L}(C^n)$ и $e_1 + i e_1 = \frac{1}{2}[1 - i + i(1 - i)]x = x$, $e_1 \in E$.

Следовательно $T_E x = \bar{e}_1 + i\bar{e}_1 = \frac{1}{2}[1+i+i(1+i)]\bar{x} = i\bar{x} = y$.

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. Пусть $x \in C^n$ фиксировано. Тогда множество векторов $\{T_E x\}_{E \in \mathcal{L}(C^n)}$ совпадает с множеством векторов $\{T_E^* x\}_{E \in \mathcal{L}(C^n)}$ где T_E^* – сопряженный оператор.

Доказательство. Так как оператор T_E унитарен, то $T_E^* = T_E^{-1}$.

Обозначим через $\bar{E}$ образ пространства E при отображении сопряжения $z \to \bar{z}$. Тогда $\bar{E} \in \mathcal{L}(C^n)$ и $T_E^{-1} = T_{\bar{E}}$. Действительно, если $x \in E$, то $T_E x = \bar{x} \in \bar{E}$ и, следовательно, $T_{\bar{E}} \bar{x} = \bar{\bar{x}} = x$. Отсюда $T_{\bar{E}} T_E x = x$ для всех $x \in E$. Но так как $C^n = E + iE$, то это равенство верно для всех $x \in C^n$. Следовательно,

$$\{T_E^* x\}_{E \in \mathcal{L}(C^n)} = \{T_{\bar{E}} x\}_{\bar{E} \in \mathcal{L}(C^n)} = \{T_E x\}_{E \in \mathcal{L}(C^n)} .$$

Лемма 6 доказана.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 3. Пусть D – область в C^n и $f: D \to C^n$ – отображение, дифференцируемое в точке $a \in D$. Если f обладает постоянным растяжением в точке a и если $f_z(a) \neq 0$, то отображение f моногенно в точке a .

Доказательство. Согласно теореме 2 любой оператор $L \in \mathfrak{M}_a$ представляется в виде

$$(10) \quad L = L_E = f_z(a) + f_{\bar{z}}(a) T_E , \quad E \in \mathcal{L}(C^n).$$

По условию, f обладает постоянным растяжением в точке a. Это означает, что существует неотрицательный оператор $R: C^n \to C^n$ такой, что для каждого $E \in \mathcal{L}(C^n)$ найдется унитарный оператор $U_E: C^n \to C^n$ такой, что

$$(11) \quad L_E = R U_E = f_z(a) + f_{\bar{z}}(a) T_E .$$

Переходя в равенстве (11) к сопряженным операторам и учитывая, что $R^* = R$, имеем

$$(12) \quad U_E^* R = f_z^*(a) + T_E^* f_{\bar{z}}^*(a) .$$

(A). В условиях теоремы 3 имеет место следующее утверждение: если $x \in C^n$ и $f_{\bar{z}}^*(a) x \neq 0$, то $f_{\bar{z}}^*(a) x = 0$.

Докажем это. Пусть $f_{\bar{z}}^*(a) x \neq 0$. Допустим, что и

$f_{\bar z}^*(a)x \neq 0$ и приведем это предположение к противоречию. Положим $A = \|Rx\|$ и $B = \|f_{\bar z}^*(a)x\|$. Обозначим через S_A и S_B сферы пространства C^n с центром в нуле и радиуса A и B соответственно. По условию $B \neq 0$. Если $A = 0$, то S_A есть просто одноточечное множество. Так как операторы U_E^* и T_E^* унитарны, то множество векторов $\{U_E^* Rx\}_{E \in \mathcal{L}(C^n)}$ содержится в сфере S_A, а множество векторов $\{T_{\bar E}^* f_{\bar z}^*(a)x\}_{E \in \mathcal{L}(C^n)}$ содержится в сфере S_B. Множество $f_{\bar z}^*(a)x + S_B$ есть сфера с центром в точке $f_{\bar z}(a)x$. Из равенства (12) следует, что множество $\{U_E^* Rx\}_{E \in \mathcal{L}(C^n)}$ содержится в пересечении сфер S_A и $f_{\bar z}^*(a)x + S_B$. Так как мы предположили, что $f_{\bar z}^*(a)x \neq 0$, то центры сфер S_A и $f_{\bar z}^*(a)x + S_B$ не совпадают. В этом случае для пересечения $S = S_A \cap (f_{\bar z}(a)x + S_B)$ возможны только три случая:

(а) $S = \varnothing$;

(в) S состоит из одной точки;

(с) S есть ($2n-2$)-"мерная сфера.

Покажем, что в условиях теоремы 3 случаи (а) и (в) не могут осуществляться. Действительно, т.к. S содержит вектор $U_E^* Rx$, $E \in \mathcal{L}(C^n)$, то $S \neq \varnothing$. Далее, применяя леммы 4 и 6 находим, что множество $\{T_E^* f_{\bar z}^*(a)x\}$ содержит множество тех $y \in C^n$ для которых $\|y\| = \|f_{\bar z}^*(a)x\| = B$ и $\mathcal{J}m \langle f_{\bar z}^*(a)x, \bar y\rangle = 0$ т.е. множество $\{T_{\bar E}^* f_{\bar z}^*(a)x\}$ содержит ($2n-2$)-мерную сферу S_0 $(2n-1)$-мерного вещественного подпространства

$$H = \{y \in C^n ; \mathcal{J}m \langle f_{\bar z}^*(a)x, \bar y\rangle = 0\}$$

пространства C^n. Центр сферы S_0 есть точка нуль, а радиус равен B. Очевидно, что $S_0 = S_B \cap H$.
Отсюда следует, что S должно совпадать со сферой $f_{\bar z}(a)x + S_0$, т.е. в нашем случае должно иметь место (с).

Покажем теперь, что (с) также противоречит условиям теоремы. Действительно, согласно лемме 5 существует $E \in \mathcal{L}(C^n)$ такое, что $T_E f_{\bar z}^*(a)x = i\,\overline{f_{\bar z}^*(a)x}$. Пусть $\bar E$ - образ пространства E при отображении сопряжения $z \to \bar z$ Тогда (см. доказательство леммы 6).

$$T_{\bar E}^* f_{\bar z}^*(a)x = T_{\bar E}^{-1} f_{\bar z}^*(a)x = T_E f_{\bar z}^*(a)x = i\,\overline{f_{\bar z}^*(a)x}\ .$$

Положим $y = T_{\bar E}^* f_{\bar z}^*(a)x$. Тогда $\bar y = -i f_{\bar z}^*(a)x$ и, следовательно

(13) $\langle f_{\bar z}^*(a)x, \bar y\rangle = i\langle f_{\bar z}^*(a)x, f_{\bar z}^*(a)x\rangle$.

Из (13) следует, что вектор $y = T_{\bar E}^{*} f_{\bar z}^*(a)x$ не принадлежит плоскости H . Следовательно, этот вектор не принадлежит и сфере $S_0 \subset H$. Поэтому $f_z^*(a)x + T_{\bar E}^* f_{\bar z}^*(a)x$ не принадлежит сфере S . С другой стороны, в силу равенства (12)

$$U_{\bar E}^* Rx = f_z^*(a)x + T_{\bar E}^* f_{\bar z}^*(a)x$$

И, следовательно, вектор $f_z^*(a)x + T_{\bar E}^* f_{\bar z}^*(a)x$ должен принадлежать пересечению $S = S_A \cap (f_z^*(a)x + S_B)$. Получили противоречие. Это противоречие показывает, что наше допущение о том, что $f_z^*(a)x \neq 0$ не верно. Тем самым утверждение (А) доказано.

(В). Пусть H - ядро оператора $f_{\bar z}^*(a)$.Если $H \neq C^n$, то H - собственное подпространство пространства C^n , и следовательно, дополнение $C^n \setminus H$ всюду плотно в C^n . Для любого $x \in C^n \setminus H$ имеем $f_{\bar z}^*(a)x \neq 0$. Поэтому, согласно доказанному в (А), для всех $x \in C^n \setminus H$ должно быть $f_z^*(a)x = 0$. Но так как оператор $f_z^*(a)$ непрерывен и $C^n \setminus H$ всюду плотно в C^n, то $f_z^*(a)x = 0$ для всех $x \in C^n$ т.е. $f_z^*(a) = 0$. В силу равенства рангов операторов $f_z(a)$ и $f_z^*(a)$ ([5], стр.170) оператор $f_z(a)$ также должен быть равен нулю, вопреки предположениям теоремы. Это противоречие показывает, что должно иметь место равенство $H = C^n$ т.е. $f_{\bar z}(a) = 0$.

Теорема 3 доказана.

§ 2. Непрерывные отображения с постоянным растяжением

В этом параграфе мы продолжим исследование отображений, обладающих конечным постоянным растяжением, конечная цель которых - доказательство теоремы 1, сформулированной во введении.

Лема 7. Пусть D - область в C^n и $f: D \to C^n$ - отображение, обладающее конечным постоянным растяжением R в точке $a \in D$. Тогда

(14) $$\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{\| f(a+h) - f(a)\|}{\|h\|} \leq \|R\| .$$

Доказательство. Допустим, что неравенство (14) не выполняется. Тогда найдутся $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{h_k\}_{k=1}^{\infty} \subset C^n$, такие, что $\lim_{k\to\infty} h_k = 0$ и

$$(15) \quad \frac{\|f(a+h_k)-f(a)\|}{\|h_k\|} \geqslant \|R\|+\varepsilon\ , \ k=1,2,\dots \ .$$

Переходя, если потребуется к подпоследовательности, можно считать, что существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{h_k}{\|h_k\|} = e_1 \in C^n$ и существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(a+h_k)-f(a)}{\|h_k\|} = z_1 \in \mathring{C}^n .$$

Дополним множество $\{e_1\}$ векторами $e_2,\dots,e_n \in C^n$ до ортонормированного базиса $\mathcal{E} = \{e_1,\dots,e_n\}$ в C^n. Тогда по теоремн 2 из [4] найдутся репер последовательностей $\tilde{\mathcal{E}}$ в точке a и оператор $L \in \tilde{\mathcal{L}}(C^n, C^n)$ такие, что (1) $\mathcal{E}$ является касательным репером репера последовательностей $\tilde{\mathcal{E}}$ (2), L является производным оператором отображения f в точке a вдоль репера последовательностей $\tilde{\mathcal{E}}$, (3) $Le_1 = z_1$. Тогда $L \in \mathfrak{M}_a$ и, следовательно, $L = RU$, где U - унитарный оператор. Поэтому $\|z_1\| = \|RUe_1\| \leq \|R\|$, что противоречит (15).

Лемма 7 доказана.

Лемма 8. Пусть D - область в C^n и $f: D \to C^n$ - отображение, обладающее конечным постоянным растяжением в каждой точке x некоторого множества $M \subset D$. Тогда существуют замкнутые в D множества M_k, $k=1,2,\dots$, такие, что

(a) $M \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} M_k$;

(в) $\|f(x')-f(x)\| \leq k\|x'-x\|$ для всех $x \in M_k$ и всех $x' \in D$, таких, что $\|x'-x\| < \frac{1}{k}$.

(с) Отображение f дифференцируемо почти всюду на объединении $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} M_k$.

В доказательстве леммы 8 будет использовано следующее утверждение ([6], стр.295).

Лемма 9. Пусть f - функция, заданная в открытой окрестности множества $E \subset R^q$. Функция f дифференцируема почти для всех точек $x \in E$ тогда и только тогда, когда для почти всех $x \in E$ имеет место неравенство

$$(16) \quad \overline{\lim} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{\|h\|} < \infty .$$

Замечание 3. Утверждение леммы 9 сохраняет силу, если в ней заменить функцию f на отображение $f: O \to R^p$, где O - окрестность множества E. Действительно, если (16) выполняется для отображения f, то это соотношение выполняется также и для любой координатной функции f_ν, $1\le\nu\le p$. Тогда по лемме 9 все координатные функции f_ν дифференцируемы почти всюду на E. Пусть x - точка из E, в которой дифференцируемы все координатные функции f_ν, $1\le\nu\le p$ Тогда отображение f также дифференцируемо в этой точке (см., например, [7], стр.336) и, следовательно, f дифференцируемо почти всюду на E.

Доказательство леммы 8. Обозначим через M_k, $k=1,2,\dots$ множество тех точек $x\in D$, для которых

$$(17)\quad \|f(x')-f(x)\|\le k\|x'-x\|,\ x'\in D,\ \|x'-x\|<\frac{1}{k}.$$

Покажем, что все множества M_k замкнуты, $k=1,2,\dots$.

Пусть $x_\nu\in M_k$ и $x=\lim\limits_{\nu\to\infty}x_\nu$, $x\in D$. Пусть $x'\in D$ и пусть $\|x'-x\|<\frac{1}{k}$. Тогда найдется ν_0 такое, что $\|x'-x_\nu\|<\frac{1}{k}$ для всех $\nu>\nu_0$. Поэтому

$$(18)\quad \|f(x')-f(x_\nu)\|\le k\|x'-x_\nu\|,\ \nu>\nu_0.$$

Так как отображение f непрерывно, то переходя в (18) к пределу при $\nu\to\infty$, получаем (17). Это означает, что $x\in M_k$.

Покажем теперь, что $M\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}M_k$. Пусть $x\in M$ и допустим, что $x\notin\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}M_k$. Тогда для каждого $k=1,2,\dots$ найдется точка $x_k\in D$ такая, что $\|x_k-x\|<\frac{1}{k}$ и $\|f(x_k)-f(x)\|>k\|x_k-x\|$. В этом случае

$$(19)\quad \overline{\lim}\ \frac{\|f(x_k)-f(x)\|}{\|x_k-x\|}=\infty.$$

Так как, по условию, f обладает конечным постоянным растяжением в точке x, то (19) противоречит лемме 7. Тем самым свойства (а) и (в) доказаны. Свойство (с) непосредственно следует из (а) и (в), леммы 9 и замечания 3.

Лемма 8 доказана.

Докажем теперь нужное нам для дальнейшего утверждение, легко вытекающее из лемм, доказанных в [3], но в явном виде там не сформулированное.

Лемма 10. Пусть D - область в C и $f: D\to C$ - непрерывная функция. Допустим, что существует замкнутое подмножество $F\subset D$ такое, что

(а) Функция f моногенна почти всюду в D;

(в) Функция f голоморфна в $D\setminus F$;

(c) f удовлетворяет условию Липшица на F:
$$|f(x')-f(x)|\leq K|x'-x|, \quad x',x\in F.$$
Тогда функция f голоморфна во всей области D.

Доказательство. Обозначим через O (открытое) множество всех точек $z\in D$, в которых функция f голоморфна. Тогда $F_0=D\setminus O\subset F$. Так как функция f непрерывна, то множество F_0 совершенно.

Покажем, что множество F_0 нигде не плотно в D. Действительно, если это не так, то найдется круг $D_0\subset F_0$. Из условий леммы 10 тогда следует, что для функции $f|_{D_0}$ выполняются все условия леммы 11 из /3/. Согласно этой лемме функция $f|_{D_0}$ голоморфна всюду в круге D_0, что противоречит определению F_0.

Допустим теперь, что $F_0\neq\emptyset$. Тогда, согласно доказанному, F_0 – нигде не плотное подмножество области D. Введем вспомогательную функцию $g(z)=f(z)+Kz$. Тогда из условия (c) имеем

$$(20)\quad K|z_1-z_2|\leq|g(z_1)-g(z_2)|\leq 3K|z_1-z_2|, \quad z_1,z_2\in F_0.$$

Из (20) следует, что функция g однолистна на нигде не плотном подмножестве $F_0\subset D$. Так как эта функция голоморфна в $D\setminus F_0$ то согласно теореме 9 из /3/ найдется точка $z_0\in F_0$ и ее окрестность U такие, что функция g однолистна всюду в окрестности U. В этом случае производная $g'(z)$ (существующая в силу (a) почти всюду в U) суммируема в U (/3/, лемма 21, стр.73). Поэтому по лемме 11 (/3/, стр.45) функция g голоморфна всюду в окрестности U, в частности, в точке $z_0\in F_0$, что противоречит определению F_0.

Лемма 10 доказана.

Пусть $z^0=(z_1^0,\dots,z_n^0)\in C^n$. Через $U(z^0,\varepsilon)$ обозначаем поликруг полирадиуса ε с центром в точке z^0, т.е.
$$U(z^0,\varepsilon)=\{z=(z_1,\dots,z_n)\in C^n: |z_k-z_k^0|<\varepsilon\}.$$
Положим $\tilde{z}^0=(z_1^0,\dots,z_{n-1}^0)\in C^{n-1}$. Тогда
$$U(z^0,\varepsilon)=U(\tilde{z}^0,\varepsilon)\times U(z_n^0,\varepsilon).$$

Обобщим теперь лемму 10 на многомерный случай.

Лемма 11. Пусть $z^0\in C^n$ и пусть в поликруге $U(z^0,\varepsilon)=U(\tilde{z}^0,\varepsilon)\times U(z_n^0,\varepsilon)$ задана непрерывная функция f, обладающая следующими свойствами:

(a) f моногенна почти всюду в $U(z^0,\varepsilon)$;

(в) f голоморфна в $\mathcal{U}(z^0,\varepsilon)\setminus F$, где F - замкнутое множество;

(о) f удовлетворяет условию Липшица на F.

Тогда функция $f_{\tilde z}$ одного комплексного переменного z_n, определенная в круге $\mathcal{U}(z_n^0,\varepsilon)$ равенством $f_{\tilde z}(z_n)=f(\tilde z,z_n)$, голоморфна в этом круге при любом фиксированном $\tilde z\in\mathcal{U}(\tilde z^0,\varepsilon)$.

Доказательство. Для любого $\tilde z\in\mathcal{U}(\tilde z^0,\varepsilon)$ обозначим через $F(\tilde z)$ множество тех точек $z_n\in\mathcal{U}(z_n^0,\varepsilon)$, для которых $(\tilde z,z_n)\in F$. Тогда $F(\tilde z)$ - замкнутое подмножество круга $\mathcal{U}(z_n^0,\varepsilon)$. Пусть F' - подмножество множества F, состоящее из тех точек $z\in F$ в которых функция f моногенна и пусть

$$F'(\tilde z)=\{z_n\in\mathcal{U}(z_n^0,\varepsilon):(\tilde z,z_n)\in F'\},\quad \tilde z\in\mathcal{U}(\tilde z^0,\varepsilon).$$

Нетрудно видеть, что множество F' измеримо, а по условию $\operatorname{mes}F'=\operatorname{mes}F$. Поэтому множества $F'(\tilde z)$ измеримы для почти всех $\tilde z\in\mathcal{U}(\tilde z^0,\varepsilon)$ и по теореме Фубини

$$(21)\quad \int\limits_{\mathcal{U}(\tilde z^0,\varepsilon)}\operatorname{mes}F'(\tilde z)\,d\tilde z=\operatorname{mes}F'=\operatorname{mes}F=\int\limits_{\mathcal{U}(\tilde z^0,\varepsilon)}\operatorname{mes}F(\tilde z)\,d\tilde z.$$

Так как $F'(\tilde z)\subset F(\tilde z)$, то для почти всех $\tilde z\in\mathcal{U}(\tilde z^0,\varepsilon)$ имеем $\operatorname{mes}F'(\tilde z)\le\operatorname{mes}F(\tilde z)$. Отсюда и из (21) следует, что $\operatorname{mes}F'(\tilde z)=\operatorname{mes}F(\tilde z)$ для почти всех $\tilde z\in\mathcal{U}(\tilde z^0,\varepsilon)$.

Пусть $\tilde z\in\mathcal{U}(\tilde z^0,\varepsilon)$ - точка для которой $\operatorname{mes}F'(\tilde z)=\operatorname{mes}F(\tilde z)$. Тогда функция $f_{\tilde z}$ моногенна почти всюду в круге $\mathcal{U}(z_n^0,\varepsilon)$, голоморфна в $\mathcal{U}(z_n^0,\varepsilon)\setminus F(\tilde z)$ и удовлетворяет условию Липшица на $F(\tilde z)$. По леме 10 функция $f_{\tilde z}$ голоморфна всюду в круге $\mathcal{U}(z_n^0,\varepsilon)$ и, следовательно, в любом меньшем круге $\mathcal{U}(z_n^0,\delta)$ может быть представлена интегралом Коши:

$$(22)\quad f_{\tilde z}(z_n)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\delta}\frac{f_{\tilde z}(\zeta_n)}{\zeta_n-z_n}\,d\zeta_n,\quad z_n\in\mathcal{U}(z_n^0,\delta),$$

где $\Gamma_\delta=\{z_n:|z_n-z_n^0|=\delta\}$, $0<\delta<\varepsilon$.

Пусть δ в (22) фиксировано и пусть $\tilde z$ - произвольная точка поликруга $\mathcal{U}(\tilde z^0,\varepsilon)$. Так как равенство $\operatorname{mes}F'(\tilde z')=\operatorname{mes}F(\tilde z')$ имеет место для почти всех $\tilde z'\in\mathcal{U}(\tilde z^0,\varepsilon)$, то найдется последовательность $\{\tilde z_k\}_{k=1}^\infty\subset\mathcal{U}(\tilde z^0,\varepsilon)$ такая, что $\lim\tilde z_k=\tilde z$ и $\operatorname{mes}F'(\tilde z_k)=\operatorname{mes}F(\tilde z_k)$ для всех $k=1,2,\ldots$.

В силу (22), при любом $k=1,2,\ldots$, имеем

$$(23)\quad f_{\tilde z_k}(z_n)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\delta}\frac{f_{\tilde z_k}(\zeta_n)}{\zeta_n-z_n}\,d\zeta_n,\quad z_n\in\mathcal{U}(z_n^0,\delta).$$

Пусть δ_1 удовлетворяет неравенству $\|\tilde{z}-\tilde{z}^0\|<\delta_1<\varepsilon$. Тогда найдется $k(\delta_1)$ такое, что $\tilde{z}_k \in \mathcal{U}(\tilde{z}^0,\delta_1)$ для всех $k>k(\delta_1)$. Следовательно, в силу непрерывности функции f, найдется константа M такая, что

$$|f_{\tilde{z}_k}(\zeta_n)|\le M \qquad \text{для всех } k>k(\delta_1) \text{ и } \zeta_n\in\Gamma_\delta .$$

Тогда по теореме Лебега /8/ в (23) можно перейти к пределу под знаком интеграла. В результате имеем

$$(24)\qquad f_{\tilde{z}}(z_n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta}\frac{f_{\tilde{z}}(\zeta_n)}{\zeta_n-z_n}d\zeta_n\,,\quad z_n\in\mathcal{U}(z_n^0,\delta).$$

Тем самым доказано, что при любом $\tilde{z}\in\mathcal{U}(\tilde{z}^0,\varepsilon)$ функция $f_{\tilde{z}}$ голоморфна в круге $\mathcal{U}(z_n^0,\varepsilon)$. Так как δ, $0<\delta<\varepsilon$, произвольно, то при любом фиксированном $\tilde{z}\in\mathcal{U}(\tilde{z}^0,\varepsilon)$ функция $f_{\tilde{z}}$ голоморфна в круге $\mathcal{U}(z_n^0,\varepsilon)$.

Лемма II доказана.

Теперь уже все подготовлено для доказательства теоремы I. Напомним ее формулировку.

Теорема I. Пусть D - область в C^n и $f: D\longrightarrow C^n$ - непрерывное отображение. Если f обладает конечным постоянным растяжением в каждой точке $z\in D$, исключая не более чем счетное их множество и если $f_z(a)\neq 0$ для почти всех точек $a\in D$, в которых отображение f дифференцируемо, то f является голоморфным отображением.

Доказательство. Покажем сначала, что в условиях теоремы I отображение f моногенно почти всюду в области D. Пусть M - множество тех точек $x\in D$, в которых отображение f обладает постоянным растяжением. Тогда $D\setminus M$ не более чем счетно и по лемме 8 существуют замкнутые множества M_k, $k=1,2,\dots$ такие, что $M\subset\bigcup M_k$ и f дифференцируемо почти всюду на $\bigcup M_k$. Следовательно, f дифференцируемо почти всюду в области D. Из условий теоремы тогда следует, что почти в каждой точке a области D имеет место неравенство $f_z(a)\neq 0$. По теореме 3 отображение f моногенно почти в каждой точке $a\in D$.

Допустим теперь, что теорема I не верна. Тогда найдется ν, $1\le\nu\le n$ такое, что координатная функция f_ν не является голоморфной в области D, т.е. f_ν не является голоморфной в некоторых точках из D. Обозначим через O множество всех точек $z\in D$, в которых функция f голоморфна. Тогда $F=D\setminus O$ - непустое совершенное множество. В силу леммы 8 множество F можно представить в виде

$$F = (\cup F_k) \cup F_0 ,$$

где F_0 – не более чем счетно, все F_k замкнуты и f, а следовательно и f_ν, удовлетворяет условию Липшица на F_k, $k=1,2,\ldots$. Так как F – совершенно, то F_0 – первой категории на F. Поэтому $\cup F_k$ – всюду второй категории на F и, следовательно, найдутся точка $z^0 \in F$, поликруг $U(z^0,\varepsilon)$ и натуральное k такие, что F_k всюду плотно в $U(z^0;\varepsilon)\cap F$. Так как F_k замкнуто, то $U(z^0;\varepsilon)\cap F \subset F_k$. Тогда функция f_ν моногенна почти всюду в поликруге $U(z^0;\varepsilon)$, голоморфна в $U(z^0;\varepsilon)\setminus F$ и удовлетворяет условию Липшица на замкнутом в $U(z^0;\varepsilon)$ множестве $U(z^0;\varepsilon)\cap F$. По лемме II тогда заключаем, что функция f_ν голоморфна в поликруге $U(z^0;\varepsilon)$ по каждой переменной в отдельности. Но тогда по теореме Гартогса [9] функция f_ν голоморфна всюду в поликруге $U(z^0;\varepsilon)$, и в частности, в точке $z^0 \in F$, что противоречит определению множества F.

Теорема I доказана.

Литература

1. H. Bohr, Über streckentreue und konforme Abbildung, Math. Ztschr. 1 (1918).
2. H. Rademacher, Über streckentreue und winkeltreue Abbildung, Math. Ztschr. 4 (1919); 131–138.
3. Ю.Ю.Трохимчук, Непрерывные отображения и условия моногенности, "Физматгиз", 1963.
4. А.В.Бондарь, Множества моногенности и критерии голоморфности для функций многих комплексных переменных (в этом сборнике).
5. И.М.Глазман, Ю.И.Любич, Конечномерный линейный анализ, "Наука", 1969.
6. И.Стейн, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, "Мир", 1973.
7. T. Rado, P.V. Reichelderfer, Continuous transfomations in analysis, Springer-Verlag, 1955.
8. Б.З.Вулих, Краткий курс теории функций вещественной переменной, "Наука", 1965.
9. Б.В.Шабат, Введение в комплексный анализ, "Наука", 1969.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ДЕСЯТАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

(Сборник лекций)

Печатается по постановлению Ученого Совета
Института математики АН УССР

Ответственные редакторы:
академик АН УССР Ю.А.МИТРОПОЛЬСКИЙ
доктор физико-математических наук
А.Ф.ШЕСТОПАЛ

Редактор А.А.Букач
Корректоры Н.В.Влодко, В.М.Васильева

БФ 02617   Зак.146   Тираж 950   Формат бумаги 60x84 I/16
Учетно-изд.листов 19,7 Подписано к печати 25.12.74 г.
Цена I р.65 коп

Отпечатано в Институте математики АН УССР
Киев, ул.Репина, 3

НОВЫЕ КНИГИ

Л.П. НИЖНИК, ОБРАТНАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ.
"Наукова думка" . 1973, 182 с., цена 58 коп.

Монография содержит оригинальные исследования автора по обратным нестационарным задачам рассеяния. В работе дано полное описание операторов рассеяния и построен алгоритм восстановления нестационарного потенциала по известному оператору рассеяния . Разработанный математический аппарат может найти применение в смежных вопросах .

Книга рассчитана на научных работников в области математики и теоретической физики , интересующихся теорией рассеяния , она доступна также аспирантам и студентам старших курсов.

Заказы просим направлять по адресу:

252004, г.Киев-4, ул. Репина,3
Научная библиотека Института
математики АН УССР.