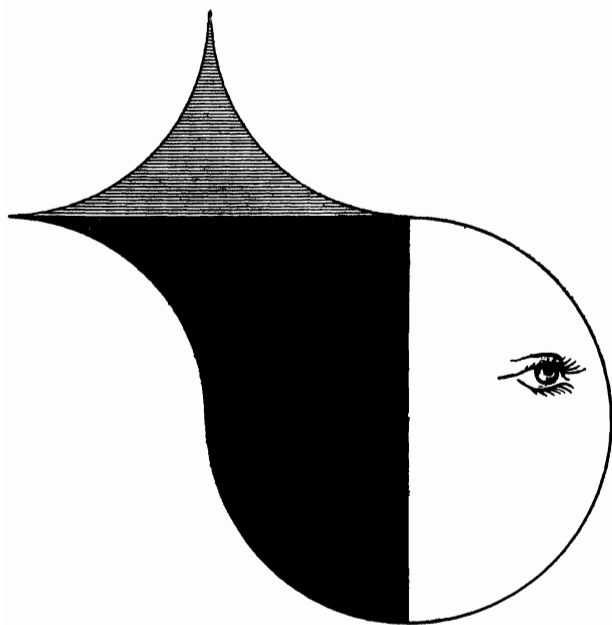
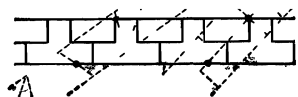




HARRY LINDGREN

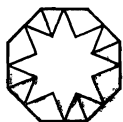
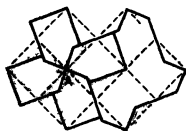
RECREATIONAL PROBLEMS IN
GEOMETRIC DISSECTIONS
AND
HOW TO SOLVE THEM

DOVER PUBLICATIONS, INC.
NEW YORK, 1972

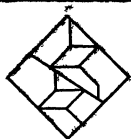


Г. Линдгрен

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ



ЗАДАЧИ



НА РАЗРЕЗАНИЕ

Перевод с английского
Ю. Н. СУДАРЕВА

Под редакцией и с послесловием
И. М. ЯГЛОМА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

МОСКВА

1977

Линдгрэн Г.

Л59 Занимательные задачи на разрезание. Пер. с англ. Ю. Н. Сударева. Под ред. и с послесл. И. М. Яглома, М., «Мир», 1977.

256 с. с илл.

Книга Гарри Линдгрена продолжает серию книг по занимательной математике, начатую издательством в 1971 г. книгами М. Гарднера, и посвящена одному из увлекательнейших ее разделов — задачам на разрезание. Автор знакомит читателя с общими принципами того, как из одной заданной фигуры составить другую, разрезав первую на минимальное число частей, и при этом оставляет широкие возможности для самостоятельных поисков решений.

Книга рассчитана на самые широкие круги читателей.

Л $\frac{20202-170}{041(01)-77}$ 170—77

513

Редакция научно-популярной и научно-фантастической литературы

© Перевод на русский язык, «Мир», 1977.

ИБ № 1147

Г. Линдгрэн

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НА РАЗРЕЗАНИЕ

Редактор А. Белевцева

Художник С. Мухин Художественный редактор Т. Тихомирова
Технический редактор И. Кренделева Корректор В. Постнова

Сдано в набор 20/VIII 1976 г. Подписано к печати 26/I 1977 г.
Бумага тип. № 2 84×108 $\frac{1}{32}$ =4.00 бум. л. Усл. печ. л. 13,44. Уч-изд. л. 10,29.
Изд. № 12/8764. Цена 78 коп. Зак. 340.

Издательство «Мир», Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете
Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предмет Геометрии сам по себе настолько серьезен, что следует считать удачей всякую возможность изложить его хотя бы чуть занимательнее.

Паскаль

Профессор Клотцкопф — лицо мифическое, но не в этом дело. Он добился признания благодаря своим глубоким исследованиям интегральных уравнений Вольтерра первого рода. Это сложный раздел математики, однако у профессора было хобби, которое позволяло ему отдохнуть и со свежими силами вернуться к делу всей своей жизни. А хобби его составляли... интегральные уравнения Вольтерра второго рода.

Я уверен, что вы, читающий эти строки, привыкли отдыхать менее напряженно, но не настолько, чтобы посвящать свой досуг игре в бинго. Испытайте же себя в области разрезаний. Я надеюсь, что эта книга убедит вас, что такое времяпрепровождение не слишком утомительно и отнюдь не тривиально. Быть может, вы не только прочтете о разрезаниях, но и сами захотите осуществить кое-какие из них. В последнем случае приложение II поможет вам избавиться от малоинтересной подготовительной работы и введет непосредственно *in medias res*¹.

В книге рассмотрены не все разрезания. Ее предмет составляет, по существу, одна проблема: требуется разрезать заданную плоскую фигуру на *наименьшее возможное* число частей, из которых можно сложить другую указанную плоскую фигуру. Требование минимальности числа частей здесь существенно — во всех случаях мы ищем самое лучшее, или оптимальное, разбиение исходной фигуры на меньшие части. Поэтому, скажем,

¹ В существо дела (лат.).

известная задача о разрезании квадрата на попарно различные меньшие квадраты¹ или на остроугольные треугольники здесь не обсуждается.

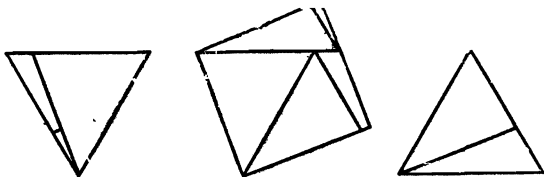
Отмеченное выше не исчерпывает всего, что мне хотелось бы сказать вообще по поводу разрезаний. Но остальное читатель найдет в заключении.

Тому, что моя книга может принести вам какую-то радость, я обязан Джозефу С. Мейдэчи, издателю журнала *Recreational Mathematics Magazine*, который побудил меня написать ее. Свою признательность приношу также Мартину Гарднеру, чья статья в ноябрьском номере журнала *Scientific American* за 1961 год проложила мне дорогу и чьи книги, посвященные головоломкам Сэма Лойда, оказались совершенно необходимыми при подготовке данной книги². Среди тех, кому я обязан, не могу не упомянуть д-ра Ч. Дьюдли Лэнгфорда и Томаса Х. О'Бейрна, которые предоставили мне материалы о разрезаниях Фриза и о пространственных разрезаниях.

Гарри Линдгрен

¹ См., например, [16] в списке рекомендуемой литературы — *Прим. ред.*

² Ср. также [5]—[7]. — *Прим. ред.*



Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

По-видимому, Гильберт (а может быть, Бойяи или Гервин?) впервые доказал, что каждую плоскую фигуру с прямолинейными границами можно преобразовать в любую другую равновеликую первой фигуру того же типа, разрезав предварительно исходную фигуру на конечное число частей. (Однако так ли уж необходим здесь Гильберт?) В доказательстве данного утверждения ничего не говорится о количестве требуемых частей — устанавливается лишь, что их число конечно. В отдельных (увы, очень редких) случаях можно строго доказать, что используемое число разрезов минимально. В некоторых случаях (тоже немногочисленных) у нас есть уверенность в этом, хотя строгое доказательство и отсутствует. Во всех же остальных случаях вполне возможно, что вам удастся найти лучшее или даже *качественно новое* решение. Так или иначе, но данный предмет еще далеко не исчерпан. В этом смысле он выгодно отличается от некоторых алгебраических головоломок, например от магических квадратов¹, про которые, надо думать, уже все известно.

¹ См., например, М. М. Постников, Магические квадраты, М., изд-во «Наука», 1964. — *Прим. ред.*

Задачи на разрезание, которые время от времени появляются в различных книгах и журналах, могут показаться на первый взгляд бесконечно многообразными; однако в большинстве из них используется всего лишь несколько основных типов разрезов (как правило, это те, с помощью которых из одного параллелограмма можно получить другой). Весьма обнадеживает и тот факт, что существуют более или менее стандартные приемы, позволяющие найти нужное решение. Вот этим-то приемам и посвящена настоящая книга.

Коль скоро речь у нас пойдет о фигурах общего вида, мы всегда будем называть разрезаемые фигуры *многоугольниками*. (Обычно мы не привыкли рассматривать как многоугольник, скажем, греческий крест, хотя это не что иное, как двенадцатиугольник) Поскольку главный интерес для нас будут представлять правильные многоугольники, упоминание любого конкретного многоугольника (с известным числом сторон) будет означать, что речь идет о правильном многоугольнике, за исключением тех случаев, где из контекста ясно, что рассматриваемый многоугольник неправильный. Так, например, термин *пятиугольник* будет обозначать правильный *пятиугольник*. Кроме того, отметим, что все многоугольники, за исключением тех, которые встретятся в главе 23, будут иметь строго прямолинейные границы, то есть границы, состоящие из отрезков прямых.

1.1. На рис. 1 показано, что я называю *разрезанием типа S*, или *S-разрезанием* (разъяснение этого термина

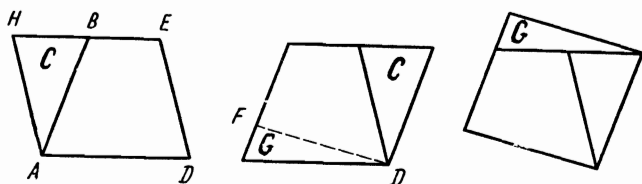


Рис. 1.

вы найдете в главе 2). *S-разрезание* — это преобразование какого-то одного параллелограмма в другой параллелограмм. Вначале мы проводим разрез AB , равный по длине стороне второго параллелограмма, а затем прикладываем часть C к противоположной стороне DE .

У преобразованного таким образом параллелограмма сторона AB и высота, опущенная на AB , имеют уже нужную нам длину, однако углы могут еще не совпадать с углами требуемого параллелограмма. Поэтому мы проводим второй разрез DF (равный другой стороне искомого параллелограмма) и прикладываем часть G к противоположной, верхней, стороне. Может оказаться, что у полученного параллелограмма ни одна из сторон и ни один из углов не совпадают со сторонами и углами исходного параллелограмма.

В дальнейшем мы будем обозначать дополнительные (еще не проведенные) разрезы пунктиром (на рис. 1 разрез DF), дабы отличать их от уже проведенных.

Разрезы параллелограммов могут оказаться такими, что для преобразования одного параллелограмма в другой двух разрезов будет недостаточно. Так, если мы хотим преобразовать прямоугольник размера 5×1 в квадрат, нам придется разрезать его на 4 части, то есть провести 3 разреза. Сначала мы проводим через вершину J (рис. 2) разрез, расстояние которого от вершины K равно $\sqrt{5}$. Перенеся часть L вправо, мы получим параллелограмм с нужными стороной и высотой.

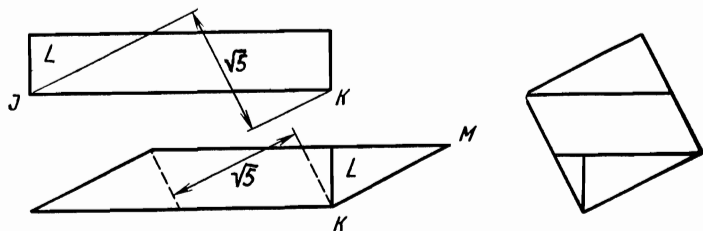


Рис. 2.

Теперь нам остается провести два разреза, перпендикулярных KM (один — через вершину K , а другой — на расстоянии $\sqrt{5}$ от него), и сложить из полученных частей квадрат. Не стоит дальше разбирать все возможные ситуации, которые здесь могут возникнуть, поскольку единый метод, описанный в главе 2, содержит их как частные случаи.

1.2. Рис. 3 иллюстрирует другой тип разрезания, который я назвал *сдвигом типа P* , или *P -сдвигом*. Сначала

мы проводим разрез NO и сдвигаем часть P вверх вправо вдоль линии разреза до тех пор, пока точка O не попадет на продолжение правой стороны параллелограмма. Затем мы проводим разрез вдоль пунктирной линии и вставляем полученный маленький треугольник

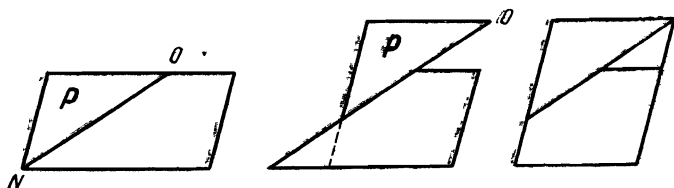


Рис. 3.

в выемку, расположенную ниже O . В результате получается новый параллелограмм. Его стороны отличны от сторон исходного параллелограмма, в то время как углы этих двух параллелограммов равны.

Это существенный недостаток P -сдвига по сравнению с S -разрезанием, применяя которое мы можем менять и углы параллелограмма. Однако у P -сдвига имеется и преимущество, которое обнаруживается при попытке с помощью обоих методов преобразовать квадрат в возможно более длинный и узкий прямоугольник. Если мы применим S -разрезание, то длина разреза AB (рис. 1) не сможет превзойти диагонали квадрата и, следовательно, как видно из рис. 4, мы не сможем таким мето-

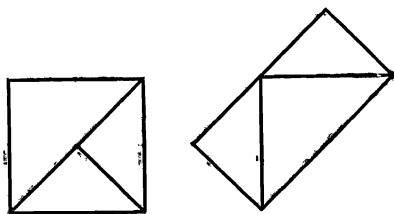


Рис. 4.

дом получить прямоугольник, у которого отношение длины к ширине превосходило бы $2:1$. Но, как следует из рис. 5, применяя P -сдвиг, мы сумеем получить любой прямоугольник с отношением сторон вплоть до $4:1$.

(Если это отношение превосходит 4:1, то первый шаг следует сделать так, как показано ниже на рис. 15.)

Благодаря этой особенности при преобразовании друг в друга двух многоугольников с одинаковыми углами

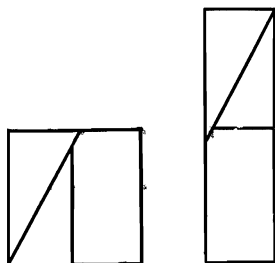


Рис. 5.

P-сдвиг может оказаться предпочтительней *S*-разрезания. Пусть, например, нам нужно сложить из трех одинаковых квадратов один больший квадрат. Сдвинув вместе исходные квадраты (рис. 6), мы получим прямоугольник, размеры которого равны соответственно 3 и 1 единицам. Отрезки *QR* и *ST* станут сторонами боль-

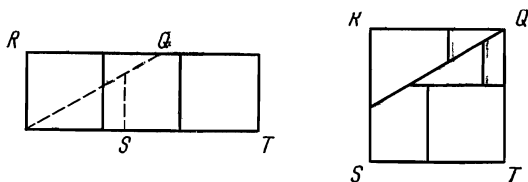


Рис. 6.

шого квадрата, поэтому их длина должна равняться $\sqrt{3}$ единицам. Тем самым определяется положение разрезов, а количество частей становится равным 6. Использование *S*-разрезания в этом случае даст худший результат.

Задача, которую иллюстрирует рис. 6, — это одна из многих задач нашей книги, восходящих к знаменитому английскому мастеру головоломок Генри Э. Дьюдени (1857—1931). Данная головоломка решается простым применением *P*-сдвига; в других задачах, предложенных

Дьюдени, оригинальность автора проявляется в большей мере.

Обычно применение *S*-разрезания оказывается столь же успешным, как и применение *P*-сдвига, или даже превосходит последнее. Примером тому служит задача

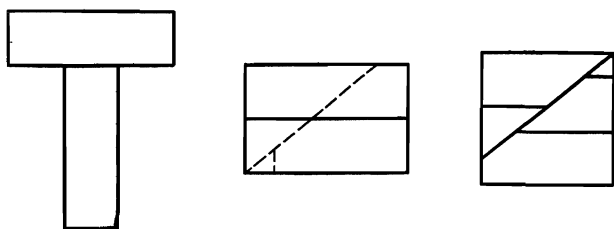


Рис. 7.

Дьюдени, в которой требуется перекроить букву Т в квадрат (рис. 7). Букву Т (так называемый тау-крест) можно получить, разрезав полый куб вдоль нужных ребер и развернув его затем на плоскость¹. Если теперь мы разрежем Т и сложим из получившихся двух частей прямоугольник 3×2 , а затем применим к нему *P*-сдвиг,

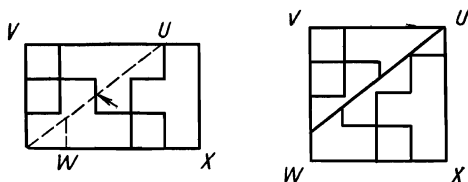


Рис. 8.

то в итоге получим квадрат, составленный из пяти частей. Однако и *S*-разрезание даст нам не большее число частей (мы увидим это, когда доберемся до рис. 27).

Более сложная задача состоит в том, чтобы из трех равных греческих крестов сделать один квадрат. Разрезав кресты на 6 частей, мы сможем сложить из них прямоугольник, как это показано на рис. 8. Если площадь

¹ Не могли бы вы доказать, что любая развертка куба, полученная с помощью наименьшего возможного числа разрезов его поверхности, имеет одно и то же число сторон?

одного креста равна пяти квадратным единицам, то размеры полученного прямоугольника будут равны 5×3 и $UV = WX = \sqrt{15}$; это позволяет определить положение дополнительных разрезов. В результате мы получим 9 частей, как и при использовании S -разрезания (рис. 21).

Более тонкое применение P -сдвига встречается в задаче, где требуется из двух подобных треугольников сложить новый треугольник, подобный исходным. Г. Брэдли решил эту задачу, преобразовав больший из двух исходных треугольников в трапецию, меньшее основание

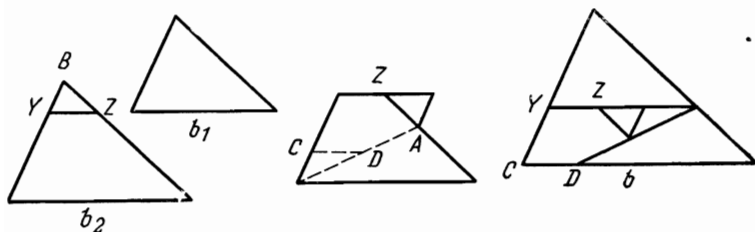


Рис. 9.

которой равнялось основанию второго исходного треугольника, и приложив затем этот последний треугольник к трапеции сверху. Если мы обозначим основания наших треугольников соответственно b_1 , b_2 , b , причем $b_1 \leq b_2 < b$, то, как легко понять из рис. 9, $YZ = \frac{1}{2}(b_1 + b_2 - b)$ и наклонный разрез определен, поскольку $ZA = BZ$ и $CD = b - b_2$. Здесь первый (далеко не очевидный) шаг состоит в подготовке к P -сдвигу, для чего $\triangle BYZ$ перемещается в новое положение.

1.3. Немного напоминает P -сдвиг и та разновидность разрезания, которую я назову *сдвигом типа Q*, или *Q-сдвигом*. Q -сдвиг используется при разрезании четырехугольников и, подобно P -сдвигу, не меняет углов. Если части первого четырехугольника, изображенного на рис. 10, закрепить шарнирно в точках E , F , G , H , то часть J , скрепленную с частью K с помощью двух треугольников, можно повернуть по часовой стрелке относительно K . В результате мы получим новый четырехугольник, а изучив рис. 10, можем заметить, что разрезы

следует проводить так, чтобы при этом

$$\begin{aligned} LM &= RS, \quad MH = HN, \quad OP = TU, \\ PF &= FQ, \quad ME \parallel NO, \quad PG \parallel GL. \end{aligned} \quad (1)$$

Точки E и G не могут принадлежать границе первого многоугольника, ибо в противном случае у нас ничего не получится, однако взаимное расположение E и G роли

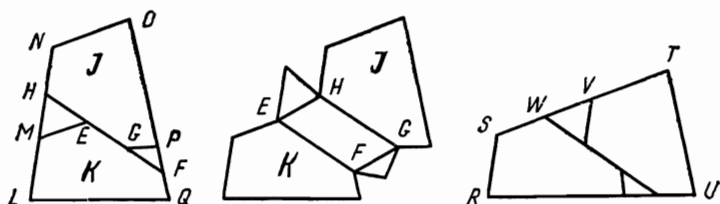


Рис. 10.

не играет. В последнем можно убедиться, взглянув на рис. 11, на котором показано, как преобразовать треугольник («четыреугольник», одна из сторон которого имеет нулевую длину) в трапецию. Здесь порядок следования точек будет $HGEF$, в то время как на рис. 10 порядок следования тех же точек $HEGF$.



Рис. 11.

Рис. 11 показывает также, каким образом Q -сдвиг можно применить к задаче о преобразовании двух подобных треугольников в один (ср. с рис. 9). С помощью Q -сдвига мы преобразуем больший треугольник в трапецию, а нетронутый меньший треугольник прикладываем сверху. Однако данный метод обладает большей общностью по сравнению с методом, показанным на рис. 9, поскольку он в равной мере применим и к треугольникам, и к трапециям.

С изменением пропорций исходного четырехугольника точка E на рис. 10 может оказаться расположенной ниже G , как на рис. 11, и даже (в пределе) совпасть с F .

Тогда и G совпадает с H . В этом предельном случае, как ясно из рис. 12, нет нужды проводить через HF . Беглого взгляда на рис. 5 достаточно, чтобы увидеть, что эта черта роднит данный сдвиг с P -сдвигом. Еще одна их общая черта состоит в том, что при обоих сдвигах не меняются углы. Тем не менее различие между этими

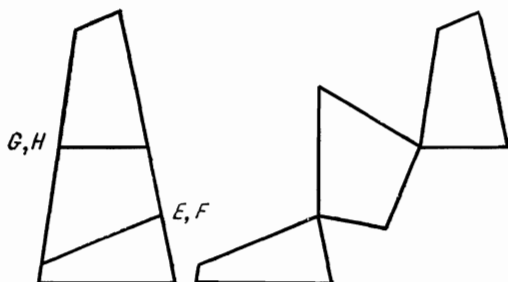


Рис. 12.

двумя типами сдвигов достаточно существенно, чтобы рассматривать их как две самостоятельные разновидности разрезов.

1.4. Еще один весьма популярный тип разрезов носит образное название *ступенчатого разреза*.

С помощью простейшего ступенчатого разрезания прямоугольник 9×4 можно преобразовать в квадрат, при этом число частей окажется равным не 3, а всего лишь 2. Если часть X (рис. 13) мы передвинем на одну

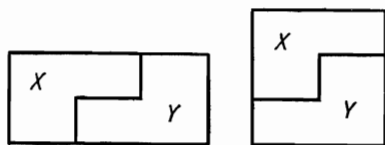


Рис. 13.

ступеньку вверх, поместив ее над частью Y , то сразу получим квадрат. Разрезание, использующее большее число ступенек, показано на рис. 14. Можно заметить, что и в том, и в другом случае высота всех ступенек, так же как и их ширина, должна быть одинаковой.

Несколько сложнее преобразовать в квадрат прямоугольник размера $6,25 \times 1$. Поскольку $6,25$ больше 4 , невозможно решить эту задачу при помощи S -разреза-

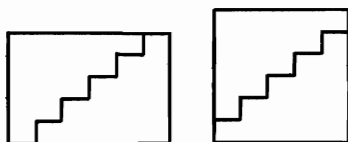


Рис. 14.

ния или Q -сдвига, да еще сделать это так, чтобы получилось ровно 3 части. Однако ступенчатое разрезание позволяет с ней справиться. Сначала (рис. 15) мы отрезаем прямоугольник Z , длина которого равна стороне

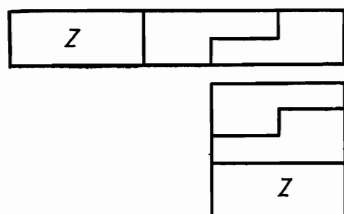


Рис. 15.

искомого квадрата, а именно $2,5$, а оставшийся прямоугольник размера $3,75 \times 1$ преобразуем в прямоугольник размера $2,5 \times 1,5$. Исходный прямоугольник, несомненно, стоит на втором месте среди самых длинных и узких

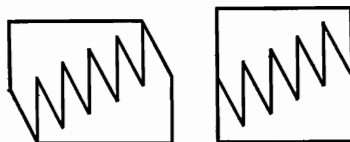


Рис. 16.

прямоугольников, которые удастся перекроить в квадрат, разрезав их предварительно всего на 3 части¹.

При ступенчатом разрезании, как видно из рис. 16,

¹ А какой среди этих прямоугольников является самым длинным, а следовательно, и самым узким?

ступеньки не обязательно должны иметь прямоугольную форму. Кроме того, перемещение одной части относительно другой не должно быть непременно поступательным, не сопровождаемым никаким вращением (то есть переносом); в некоторых случаях (рис. 17) приходится прибегать и к поворотам. (Кстати, преобразование, изображенное на рис. 17, *а*, безусловно, сложнее того, которое изображено на рис. 17, *б*, однако Дьюдени, которому

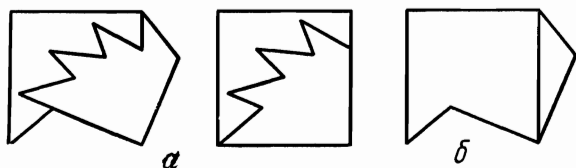


Рис. 17.

принадлежит эта головоломка, добавил к ней еще некое условие, исключающее простое решение.) В некоторых задачах приходится поворачивать части на четверть полного оборота. Пример такого рода, также принадлежащий Дьюдени, показан на рис. 18.

Следует иметь в виду, что ступенчатое разрезание накладывает жесткие ограничения на размеры многоугольника, к которому оно применяется. Например, чтобы

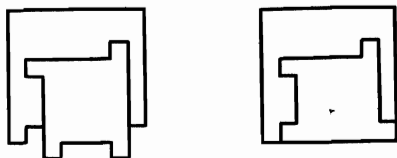


Рис. 18.

можно было применить преобразования, изображенные на рис. 13 и 14, нужно взять прямоугольник размера $n^2 \times (n+1)^2$, где n — целое число; при этом сторона равновеликого прямоугольника квадрата окажется равной $n(n+1)$. А преобразование, показанное на рис. 15, не применимо к прямоугольнику ширины 1, если его длина равна 6,24 или 6,26. Напротив, размеры многоугольников можно непрерывно изменять без всяких препятствий, если мы используем S -разрезания или сдвиги. Вообще

для того чтобы можно было применить **ступенчатое раз-**резание, нужно потребовать, чтобы отношение длин **сто-**рон или величин углов одного многоугольника к **стор-**онам или углам другого многоугольника было **раци-**ональным. Если мы назовем разрезания такого **типа**

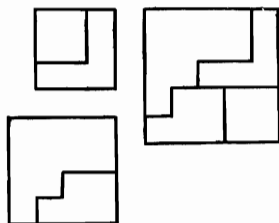


Рис. 19.

рациональными (или *R*-разрезаниями), то оставим в на-шей классификации место для дальнейших разрезаний, которые в противном случае оказались бы «за бортом». Два из них изображены на рис. 19 и 20, причем в обоих случаях из двух квадратов требуется сложить новый квадрат. Обычно подобные разрезания сопровождаются

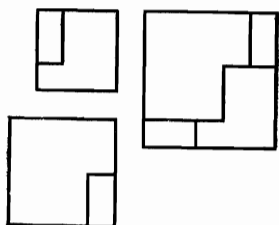


Рис. 20.

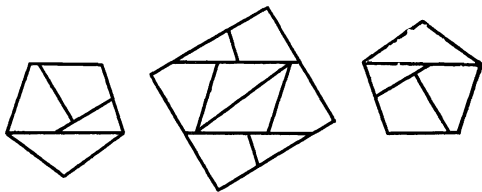
дополнительным ограничением; так, например, на много-угольниках могут быть нарисованы шахматные клетки, правильный порядок которых требуется сохранить, и т. п.

1.5. Все разрезания, разобранные выше, обладали свойством *обратимости* в том смысле, что для нас было совершенно неущественно, преобразуем ли мы много-угольник *A* в многоугольник *B* или наоборот. Например, если мы хотим из второго четырехугольника на рис. 10 сложить первый, то нам нужно провести разрезы в соот-

ветствии с соотношениями $TV = ON$, $VW = WS$ и т. д., полностью соответствующими (1). (В значительной мере из-за такого рода обратимости я буду часто говорить о преобразовании многоугольников A и B , а не о преобразовании многоугольника A в B .)

S -разрезания и сдвиги представляют собой, по-видимому, единственные типы разрезаний, которые можно применять независимо от того, равны ли какие-то элементы соответствующих многоугольников и даже рациональны ли отношения рассматриваемых элементов. Однако возможны и всякие неожиданности. Между прочим, насколько мне известно, Q -сдвиги были открыты где-то около 1950 г., а решения, использующие такие сдвиги, не публиковались вплоть до 1957 г.

Еще слабо изучены и S -разрезания, хотя на сегодняшний день их можно считать самыми полезными. В главе 2 мы постараемся восполнить этот пробел и показать, сколь многообразными могут быть разрезания этого типа.



Глава 2

***P*-ПОЛОСКИ И *PP*-РАЗРЕЗАНИЯ**

На рис. 1 часть C перемещается с левой стороны параллелограмма на правую, причем $АН$ совмещается с DE . Но следует заметить, что требование, чтобы $АН$ и DE были прямолинейными отрезками, вовсе не обязательно: мы можем соединить A с H и D с E произвольными линиями, лишь бы их можно было совместить, наложив одну на другую. Здесь также удастся применить S -разрезание.

Это легко показать на примере задачи о преобразовании в квадрат трех равных греческих крестов. На рис. 21 показано решение такой задачи, отличное от изображенного на рис. 8. Разрезав кресты только на 5 частей вместо 6, мы можем затем сложить их, как показано на рис. 21 слева. Левая и правая части полученной фигуры подходят друг к другу, как ключ к замку, поэтому можно применить S -разрезание. При этом первый разрез AB нужно начинать в нижней правой, а не в нижней левой вершине просто потому, что тогда, как показывает пробное испытание, получается минимальное число частей. (Подобное соображение мы здесь уже приняли к сведению.)

Исключая небольшое различие, состоящее в том, что точка A расположена справа, разрезание, представлен-

ное на рис. 21, по существу, совпадает с тем, которое изображено на рис. 1, причем получается 9 частей, как и на рис. 8. Это легко подсчитать. В самом деле, на первом шаге (рис. 21) мы получаем 5 частей, что на одну часть меньше, чем на рис. 8. Однако на рис. 21 дополнительные разрезы пересекают сделанные ранее разрезы в двух (отмеченных стрелками) местах, в то время как на рис. 8 есть только одно подобное пересечение. А так как каждая такая точка пересечения увеличивает число частей, то две точки пересечения на рис. 21 (по сравнению с одной на рис. 8) сводят на нет первоначальное преимущество нового способа разрезания.

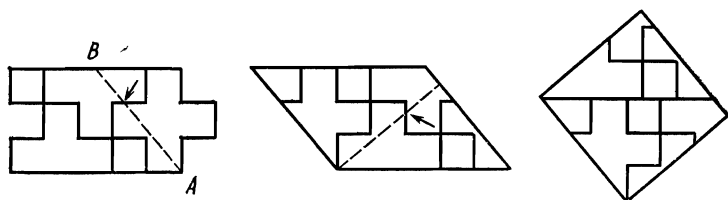


Рис. 21.

Подобное затруднение, связанное с появлением новых точек пересечения, возникает во всех задачах на разрезание. Как и в случае, приведенном на рис. 21, в других головоломках разрезы будут пересекаться, и наша цель состоит в том, чтобы свести число точек пересечения до минимума. Количество возникающих здесь возможных вариантов (из которых мы хотим выбрать наилучший) бесконечно, даже если требовать, чтобы разрез, подобный разрезу AB на рис. 21, проходил под определенным углом: ведь точка A не обязательно должна совпадать с вершиной, а может быть расположена где-то на основании; разрез AB можно наклонить в другую сторону; второй разрез, как и первый, не обязательно должен начинаться в вершине и может быть наклонен в другую сторону. Если задача достаточно сложна, то о том, чтобы усмотреть все возможности из чертежа, не может быть и речи — их можно бесконечно перебирать всю жизнь. К счастью, метод проб и ошибок быстро приводит к цели, доставляя большое удовольствие. Только при этом следует воспользоваться полосками, о которых будет рассказано ниже.

Перейдем для разнообразия от греческих крестов к латинскому, изображенному на рис. 22. Разрезав его на две части, мы можем сложить из них фигуру, к которой применимо S-разрезание, поскольку ее контуры

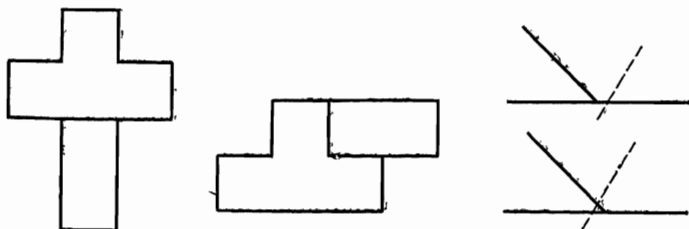


Рис. 22.

слева и справа точно подходят друг к другу. Давайте теперь возьмем 3 или 4 таких фигуры и сложим их вместе,

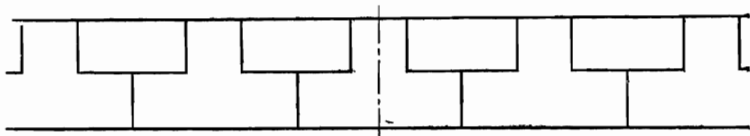


Рис. 23.

как показано на рис. 23. Продеваем то же самое на отдельном листе кальки с многоугольником, в который мы хотим преобразовать наш латинский крест. Если это

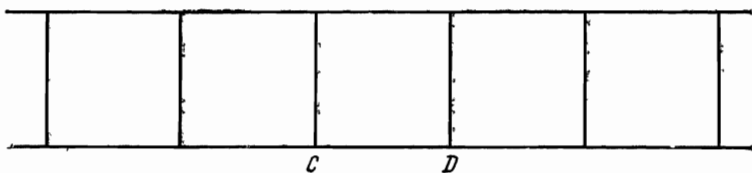


Рис. 24.

квадрат, то мы получим рис. 24. Теперь наложим полосу, составленную из квадратов, на полосу, составленную из крестов, под таким углом, чтобы точки *C* и *D* попали соответственно на нижнюю и верхнюю стороны изображенной на рис. 23 полосы. При этом мы придем к рис. 25, на котором пунктирные линии пересекаются

со сплошными в некоторых точках. Теперь будем сдвигать полосу квадратов относительно первой полосы, сохраняя угол между ними постоянным и добиваясь уменьшения числа точек пересечения. Мы обнаружим, что ми-

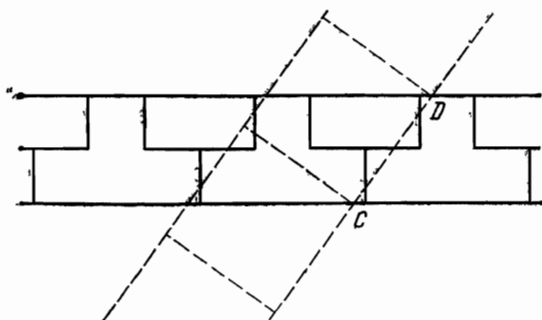


Рис. 25.

нимальное число точек пересечения равно 1, как это показано (в трех вариантах) на рис. 26. Теперь посмотрим на параллелограмм $EFGH$ на средней части рис. 26.

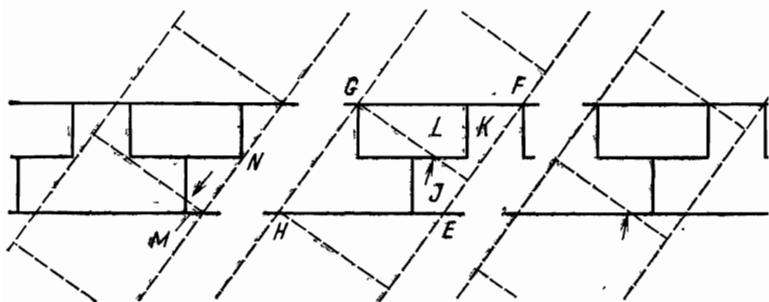


Рис. 26.

Если мы передвинем части J и K влево так, чтобы отрезок EF совпал с отрезком HG , то получим при этом фигуру, из которой можно тут же сложить латинский крест, как это показано на рис. 27 слева. Если же мы переместим части K и L вниз так, чтобы отрезок GF совпал с HE , то получим квадрат, как показано на том же рисунке. Таким образом, отрезки прямых, принадлежащие обеим полосам и расположенные внутри парал-

лелограмма $EFGH$ (по этим отрезкам полосы пересекаются), и образуют семейство разрезов, с помощью которых можно преобразовать друг в друга латинский крест и квадрат. Если мы наклоним нашу подвижную полосу в другую сторону, то придем к решению, которое является лишь «зеркальной копией» уже найденного решения: поскольку полоска, полученная из крестов, симметрична относительно некоторой прямой (рис. 23), тем же свойством обладает и полоска, составленная из квадратов

Из фигуры, изображенной на рис. 22, можно образовать тау-крест (рис. 7). Поэтому рис. 27 дает новое (по

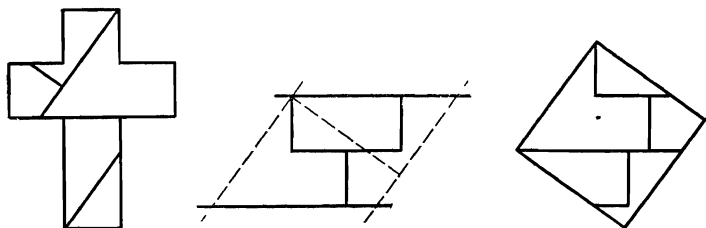


Рис. 27.

сравнению с представленным на рис. 7) решение задачи о преобразовании тау-креста в квадрат.

Такой *метод наложения* позволяет решить задачу о преобразовании любых двух многоугольников. Кратко он сводится к следующему. Разрежьте (если в том есть необходимость) каждый многоугольник на части, из которых можно сложить полоску. Наложите полоски друг на друга под подходящим углом. При этом все линии, расположенные в общей части двух полосок, покажут места нужных разрезов. Конечно, если относительное расположение полосок выбрано случайным образом, то вряд ли этот путь приведет нас к минимальному числу частей. Например, при таком расположении полосок, которое изображено на рис. 25, получится 8 частей. Однако с помощью «метода полосок» оптимальное разрезание удастся найти после небольшого числа проб. Независимо от того, оптимален ли способ, который получается при данном наложении полосок, края одной из них всегда расположены одинаково по отношению к эле-

ментам другой полосы. В статьях, посвященных данному вопросу, такие точки, как C и D на рис. 24, названы *конгруэнтными*. Можно сказать поэтому, что полосы расположены так, что края каждой из них проходят через конгруэнтные точки другой полосы. Буква S , использованная в термине « S -разрезание», происходит от английского strip — полоска.



Рис. 28.

У всех рассмотренных до сих пор полосок основным элементом, из которых эти полосы были составлены («элементом полосы»), служил параллелограмм¹. Поэтому мы называем такие полосы *полосками типа P* , или *P -полосками* (от английского parallelogram), дабы отличать их от полосок другого типа, которые могут встретиться в дальнейшем. Если мы накладываем друг на друга две P -полоски, то в результате получаем *разрезание типа PP* , или *PP -разрезание*.

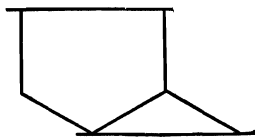


Рис. 29.

Большинство простых многоугольников можно легко превратить в полосные элементы, причем зачастую даже не одним способом. При этом следует испробовать различные простые способы, с помощью которых удастся получить соответствующие элементы полосы, ибо часто бывает так, что либо оптимальное решение получается не с помощью самого простого элемента, либо оно достижимо с помощью только одного из двух одинаково простых элементов. Так, например, нам нетрудно испробовать оба элемента, изображенные на рис. 28 и 29, кото-

¹ В этом случае при сдвиге полосы вправо или влево «на один элемент» картина не изменится — *Прим. перев.*

рые отвечают разрезанию правильного шестиугольника. Однако **коль** скоро мы захотим с их помощью преобразовать друг в друга шестиугольник и восьмиугольник, то

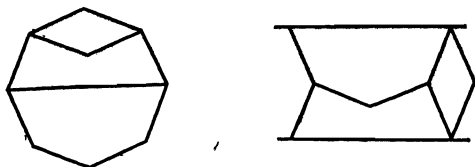


Рис. 30.

решение, содержащее 9 частей, получится только при использовании элемента, который вы видите на рис. 29: полоску, образованную из этого элемента, надо наложить на полоску, составленную из элемента, показан-

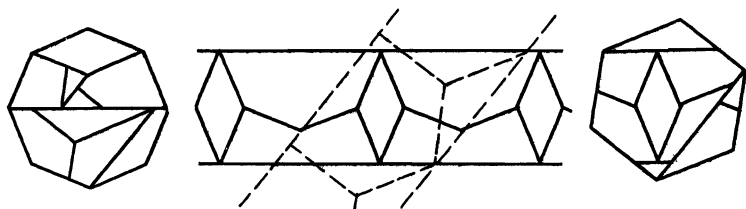


Рис. 31.

ного на рис. 30. Результат такого наложения и многоугольники, разрезанные нужным образом, изображены на рис. 31.

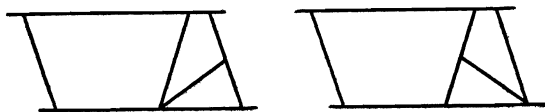


Рис. 32.

Некоторые простые способы, с помощью которых из различных многоугольников можно получить отвечающие этим многоугольникам элементы полосы, представлены на рис. 32—41. Изображенный на рис. 32 элемент получится из пятиугольника, если мы предварительно преобразуем пятиугольник в трапецию, как это показано

на рис. 42, а затем проведем разрез через отмеченную точкой середину правой стороны трапеции параллельно левой стороне. Рис. 42 поясняет также и рис. 36 и 37.

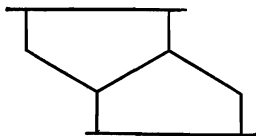


Рис. 33.

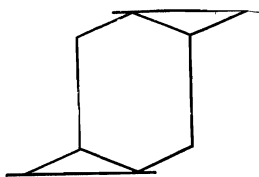


Рис. 34.

Остальные рисунки вряд ли нуждаются в пояснении. Я обнаружил только одно применение рис. 36, а именно

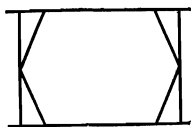


Рис. 35.

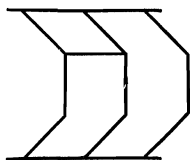


Рис. 36.

к задаче о преобразовании восьмиугольника и «золотого» прямоугольника¹. Соответствующее решение показано на рис. 43. Теперь мы в состоянии оценить значение следующей процедуры:

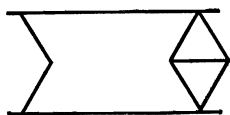


Рис. 37.

1) выберем фиксированное значение площади для всех многоугольников (я обнаружил, что удобно взять это значение равным 20 см^2);

2) аккуратно нанесем рисунки на кальку предпочтительно тушью (не слишком-то приятно, когда плохо вы-

¹ Так называется прямоугольник с отношением длины к ширине, равным $(1 + \sqrt{5})/2$. См [5], стр 218 — *Прим ред*

полненный рисунок оставляет вас в неуверенности, пересекаются ли две линии или нет; набросок в правой части

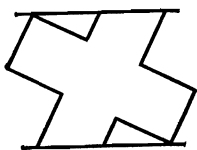


Рис. 38

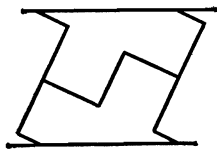


Рис. 39.

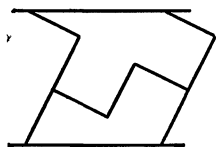


Рис. 40.



Рис. 41.

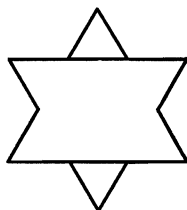
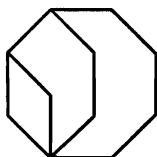
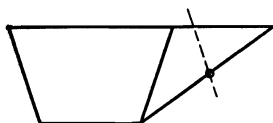


Рис. 42.

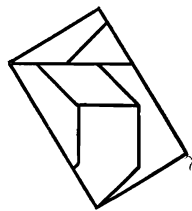
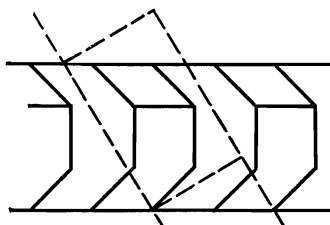
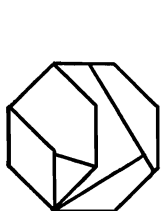
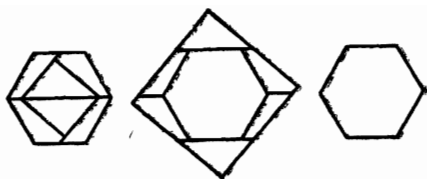


Рис. 43.

рис. 22 поясняет ситуацию, которая может здесь возникнуть);

3) наконец, можно манипулировать с нашими рисунками. Так вы получите лучшие результаты, а экономия времени окажется поистине огромной.

Преимущество использования кальки, как оказывается, состоит еще и в том, что если вам потребуются две полосы, которые получаются друг из друга зеркальным отражением, то будет достаточно заготовить только одну из них, ибо вторую полосу вы получите, перевернув первую другой стороной кверху. Это замечание в равной мере относится к элементам полосы, порожденным пятиугольником (рис. 32), восьмиугольником (рис. 36) и греческим крестом (рис. 38—41).



Глава 3

ЕЩЕ НЕСКОЛЬКО *PP*-РАЗРЕЗАНИЙ

Несколько минимальных *PP*-разрезов были описаны в главах 1 и 2. В настоящей главе я приведу еще ряд задач, в которых используются элементы полосы, уже разобранные ранее.

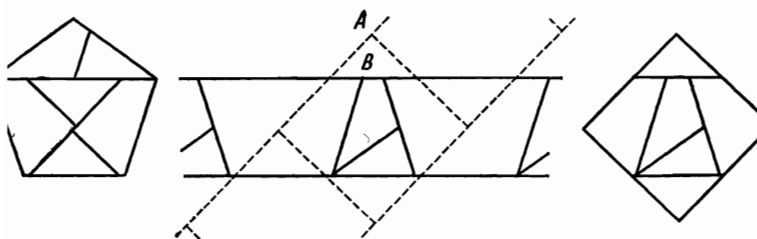


Рис. 44.

Преобразование пятиугольника и квадрата, представленное на рис. 44, подобно преобразованию, которое открыл Дюдени. Только в его решении точка *A* на полоске, порожденной квадратом, совпадала с точкой *B* на полоске, полученной из пятиугольника. Однако на представленном здесь решении части получаются больших размеров, чем у Дюдени.

Стоит напомнить, что когда мы в главе 1 в связи с преобразованием квадрата и прямоугольника сравнивали S -разрезание и P -сдвиг, то длина первого разреза на рис. 4 не могла превзойти длину диагонали квадрата. Однако все это относилось к решениям, содержащим

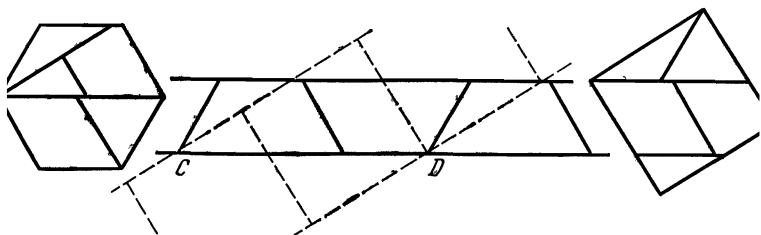


Рис. 45.

3 части. В действительности же разрез можно сделать сколь угодно длинным, и на рис. 45 показано решение (снова принадлежащее Дьюдени), где длина CD превосходит длину диагонали. По всей видимости, чем длиннее разрез, тем больше должно получаться частей.

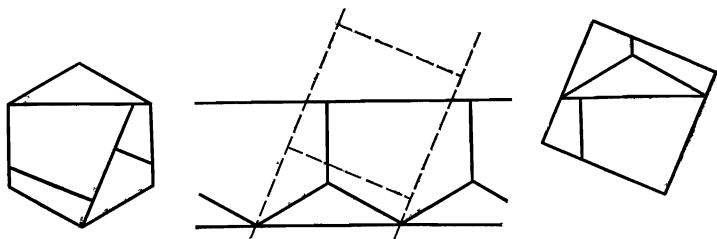


Рис. 46.

Однако решение всегда можно найти с помощью нашего «метода полосок».

С другой стороны, длина отрезка CD , соединяющего противоположные края второй полоски, не должна быть меньше некоторой минимальной величины, поскольку в противном случае мы не сможем как полагается наложить полоски друг на друга. Но если обе полоски достаточно широки, длина CD может оказаться меньше минимальной! Из всех разобранных выше примеров единственная пара полосок, для которых подобная ситуация

действительно имеет место, изображена на рис. 34 и 36. Если вы попытаете наложить соответствующие полосы друг на друга, как описано выше, то вас постигнет неудача. Таким образом, мы, увы, приходим к выводу



Рис. 47.

о том, что с помощью двух данных полосок преобразовать восьмиугольник в восьмиугольник невозможно!

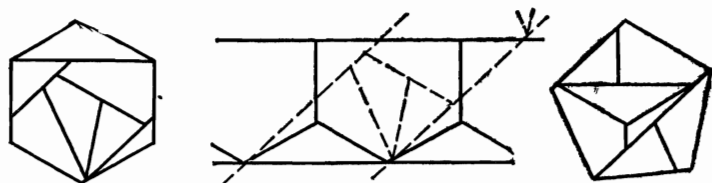


Рис. 48.

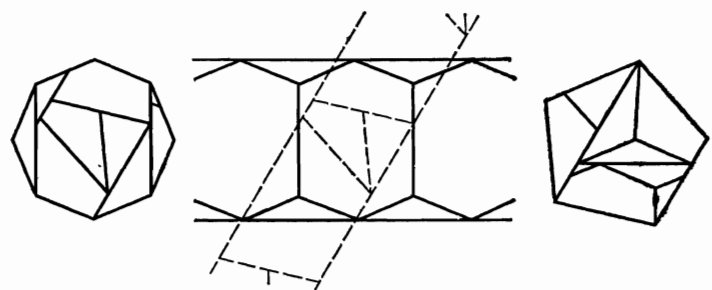


Рис. 49.

На рис. 45—47 представлены три решения задачи о преобразовании шестиугольника и квадрата, каждое из которых содержит 5 частей. В подобных случаях, естественно, возникает вопрос: как же решить, какое из этих решений «лучше»? Внимательное изучение рис. 26

приводит к двум критериям, которые, я надеюсь, читатель одобрит. Первый из них состоит в том, что очень маленькие части, вроде M , портят решение. В равной мере нежелательны и части, имеющие «слабое место», вроде перешейка N на рис. 26, — это и есть наш второй критерий. Кроме того, стоит добавить, что нежелательны также и узкие части — например, треугольник, высота которого в 100 раз больше основания. Пользуясь этими критериями, мы приходим к выводу, что второе решение,

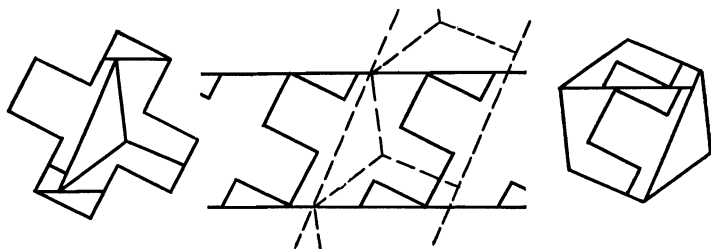


Рис. 50.

представленное на рис. 26, лучше двух других, данных там же, и что решение на рис. 45 несколько лучше решений на рис. 46 и 47.

На рис. 48 и 49 показаны примеры, которые наводят нас на мысль, что с помощью полосок, содержащих одну большую часть, по-видимому, легче удастся получать экономные решения. Когда мы накладываем полоски друг на друга, то маленькие части одной из полосок следует помещать, скорее всего, целиком внутри большой части на другой полоске; при этом уменьшится число пересекающихся разрезов. Пример, изображенный на рис. 52, иллюстрирует ту же идею.

На рис. 50 представлено решение задачи о преобразовании греческого креста и шестиугольника. Иное решение той же задачи мы получим, наклонив верхнюю полоску в другую сторону. Это решение очень некрасиво, но оно окажется полезным нам в главе 22.

На рис. 51 показано преобразование латинского креста и шестиугольника. Это решение содержит 6 частей, причем такое число частей нам едва удалось получить, ибо, окажись отрезок EF чуть длиннее (а не короче, как на рис. 25) отрезка EG , к решению добавилась бы лиш-

няя часть. Аккуратно выполненный чертеж правильно покажет относительное расположение точек F и G , однако ради большей уверенности мы должны подкрепить свой вывод и вычислениями. Действительно, поскольку площадь каждого из наших многоугольников равна

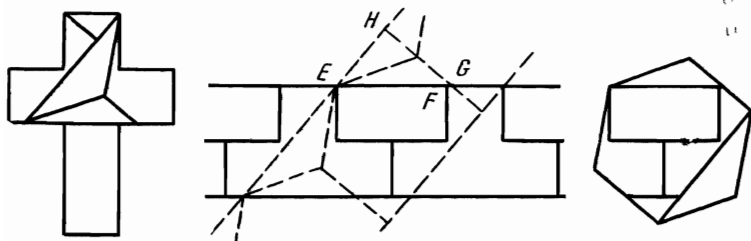


Рис. 51.

20 квадратным единицам, мы можем найти из таблицы, приведенной в приложении III, что угол между нашими полосками равен

$$\arcsin 3,6514/4,8056 = 49^\circ 27',$$

откуда следует, что

$$EG = EH \sec \angle HEG = 2,4028 \sec 49^\circ 27' = 3,6959.$$

С другой стороны, $EF = 3,6514$, что, к счастью, меньше EG .

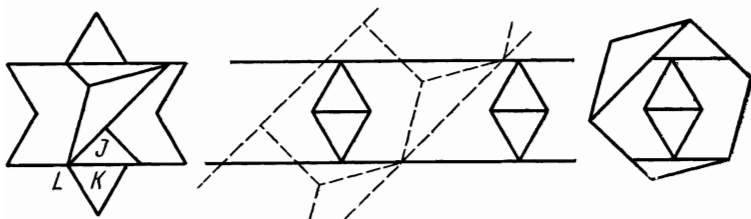


Рис. 52.

Часто взаимное расположение полосок при PP -разрезаниях можно менять в некоторых пределах, причем изменяться будут лишь пропорции частей, а не качественная картина решения. Так, на рис. 52 мы можем в довольно широком интервале горизонтально двигать между ромбами, не задевая их, полученную из шестиугольника полоску. На рисунке эта полоска распо-

жена таким образом, чтобы части J и K имели общую вершину L .

Решение, представленное на рис. 53, содержит некоторые весьма неуклюжие части. Однако мне не удалось найти какое-либо иное решение задачи о преобразовании греческого креста и шестиконечной звезды, содержащее лишь 8 частей. А это последнее обстоятельство, как вы, наверное согласитесь, стоит элегантности!

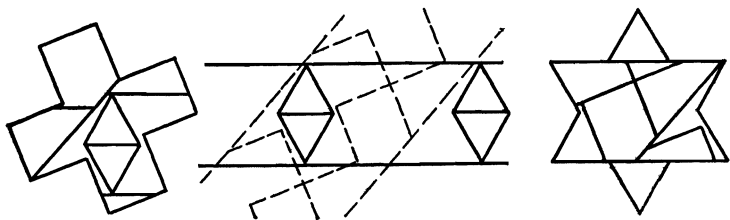


Рис. 53.

В тех случаях, когда на одном рисунке показаны обе полосы, удобнее, чтобы они отличались между собой. Поэтому на протяжении всей книги при наложении полосок друг на друга подвижная полоска и все ее элементы изображены пунктиром. Это хорошо согласуется и с уже установившейся с рис. 1 практикой, состоящей в обозначении пунктиром дополнительных разрезов. Кроме того, на каждом рисунке преобразуемые многоугольники изображены слева и справа в таком положении, чтобы было как можно легче отождествлять их части с соответствующими частями полосок.



Глава 4

Т-ПОЛОСКИ И ТТ-РАЗРЕЗАНИЯ

Когда мы конструировали из пятиугольника элемент полосы (рис 42), то начинали с превращения пятиугольника в трапецию. Однако, как легко усмотреть из рис. 54, этот первый шаг уже и сам по себе приводит

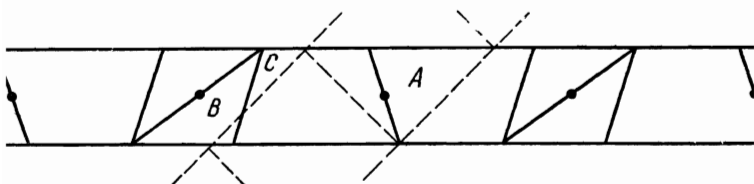


Рис 54

к некоторому элементу полосы. Соответствующая полоска отличается от всех полосок, встречающихся до сих пор, тем, что ее повторяющийся элемент на каждом шаге еще и поворачивается на 180° . Поскольку эта полоска составлена из трапеций, мы назовем ее *полоской типа Т*, или *Т-полоской*, от английского trapezoid.

С помощью полосок такого типа также можно решать различные задачи; однако в этом случае подвижную полоску уже нельзя двигать столь же свободно,

как и P -полоску. Если полоску, составленную из квадратов, мы расположим так, как изображено на рис. 54, то мы вовсе не получим никакого решения, поскольку часть A нельзя наложить на объединение частей B и C , что необходимо для того, чтобы из полученных частей можно было сложить пятиугольник. Однако допустим теперь, что края подвижной полоски проходят через соседние середины отрезков (отмеченные на рис. 54 точками) так, как это показано на рис. 55. Общая часть (пересечение) двух данных полосок, очевидно, легко

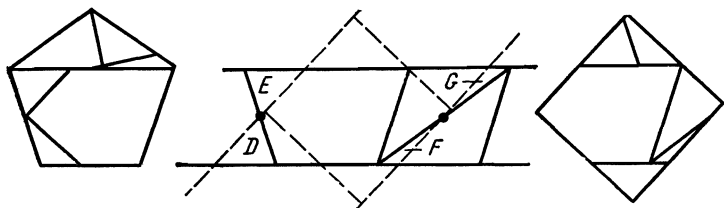


Рис. 55

преобразуется в квадрат; но ее можно также преобразовать и в пятиугольник, если мы переместим (с помощью поворота вокруг вершины) часть D в положение E , а часть F — в положение G . Следовательно, с помощью T -полоски мы сможем столь же легко решать задачи, как и с помощью P -полоски, если только потребовать, чтобы края второй полоски проходили через середины внутренних сторон элемента T -полоски. Дело тут заключается в том, что эти средние точки являются центрами симметрии полоски, в силу чего такие части, как D и E , оказываются равными друг другу, и мы получаем решение стоящей перед нами задачи. Ввиду той особой роли, которую эти средние точки играют для T -полосок, мы всегда будем отмечать их на рисунках.

Точно так же как параллелограмм служил только прототипом любого элемента P -полоски, трапеция служит только прототипом элемента T -полоски. Мы можем заменить непараллельные стороны трапеции любыми ломаными, целиком лежащими между параллельными краями полоски и симметричными относительно середины линии. Это приводит к новым полоскам (теперь

уже типа T), образованным из шестиугольника, а также из греческого и латинского крестов (рис. 56 и 57).

Некоторые PT -разрезания¹, где используются уже известные нам полосы, показаны на рис. 57—59.

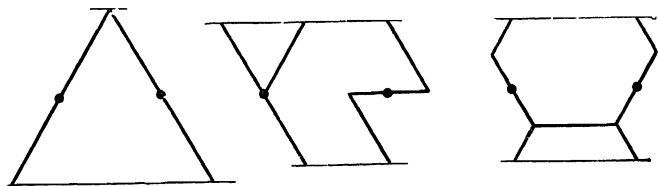


Рис. 56.

Еще у одного типа полосок, слишком экзотического, чтобы посвятить ему отдельную главу, чередующиеся элементы каждый раз переворачиваются обратной

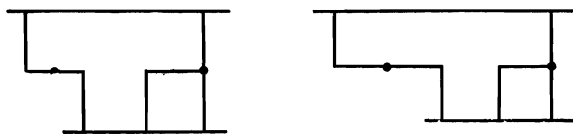


Рис. 57.

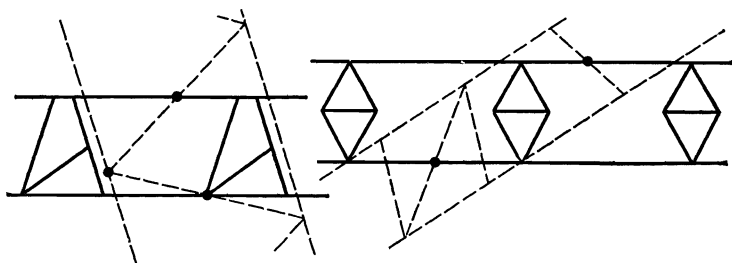


Рис. 58.

стороной кверху. Объединение квадрата и треугольника, показанное на рис. 60 слева, можно превратить в элемент такой полосы с помощью всего лишь одного раз-

¹ То есть разрезания, полученные наложением P -полоски на T -полоску. — *Прим перев.*

реза; затем из него можно сложить квадрат, если подвижную полосу, составленную из квадратов, наложить на нашу полосу так, чтобы обе полосы совпали или оказались взаимно перпендикулярными. Поскольку че-

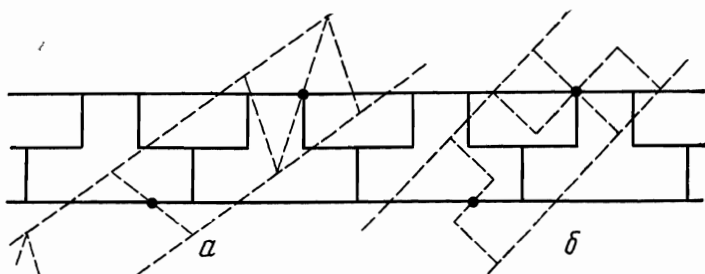


Рис. 59.

редующиеся элементы переворачиваются, одну из частей, получившихся при разрезании, мы также должны перевернуть. В общем случае, если мы хотим совместить обе полосы, они должны иметь одинаковую ширину,

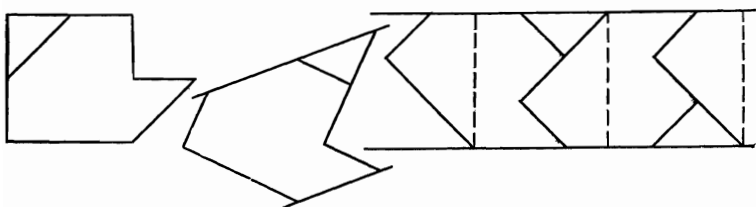


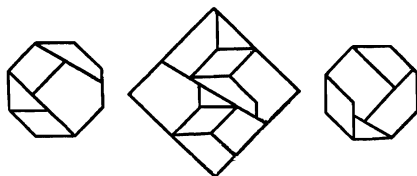
Рис. 60.

а чередующиеся элементы у них должны быть перевернуты. Если же мы хотим воспользоваться перпендикулярным расположением полосок, то характерная длина¹ каждой из них должна равняться ширине другой полоски, причем в этом случае уже не нужно требовать, чтобы у обеих полосок чередующиеся элементы переворачивались.

¹ То есть расстояние между конгруэнтными точками — *Прим перев.*

Рис. 60 был опубликован Сэмом Лойдом (1841—1911), американским «близнецом» Дьюдени, который обладал непревзойденным даром придумывать, казалось бы, неразрешимые задачи. Его неистощимая изобретательность проявлялась во всех видах задач, в том числе и в шахматных задачах, которые, как мне кажется, служат самым незабываемым памятником этому автору.

Впредь мы не будем показывать на рисунке, как из полученных частей следует складывать два заданных многоугольника, ибо подобное «разжевывание» вам, вероятно, теперь уже не понадобится.



Глава 5

ТТ-РАЗРЕЗАНИЯ

Если на T -полоску наложить другую полоску того же типа, то края этой второй полоски должны проходить через средние точки первой. Требование сохранит силу и в случае, если полоски поменять местами. Поэтому

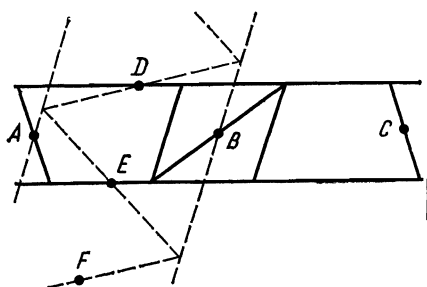


Рис. 61.

при наложении T -полосок края каждой из них должны проходить через средние точки другой полоски. Это правило поясняет пример, изображенный на рис. 61.

Это ограничение не позволяет непрерывно перемещать одну полоску относительно другой: для данных

двух полосок существует только конечное число TT -разрезов. Например, возвращаясь к рис. 61, мы можем, во-первых, сделать так, чтобы края второй полоски проходили через точки B и C (а не через точки A и B , как на рис. 61), во-вторых, мы можем переместить первую полоску так, чтобы она проходила через точки E и F (а не через точки D и E). Кроме того, мы можем проделывать то же самое, наклонив предварительно подвижную полоску в другую сторону или перевернув ее обратной

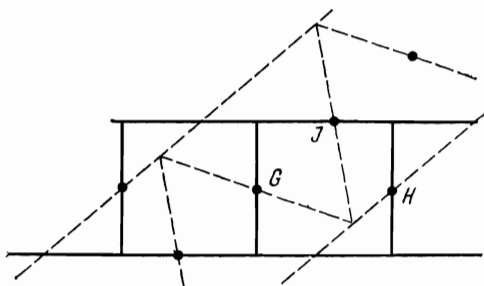


Рис. 62.

стороной кверху. Таким образом, число различных решений зависит от асимметрии соответствующих элементов полоски. Обычно оказывается, что одно и только одно из этих решений заметно лучше остальных.

Вы, быть может, думаете, что из-за таких жестких ограничений на взаимное расположение полосок TT -разрезания малополезны? Напротив, некоторые оптимальные решения, включая знаменитое решение Дьюдени, изображенное на рис. 62, принадлежат именно к этому типу.

Большинство TT -разрезов отличается от ситуации, изображенной на рис. 61, тем, что площадь общей части двух полосок равна не площади каждого многоугольника, а удвоенной такой площади. Типичные разрезы такого рода изображены на рис. 62 и 63. Можно заметить, что края каждой из полосок не проходят через соседние отмеченные точки другой полоски; зато (рис. 63) между теми отмеченными точками, через которые края подвижной полоски проходят, есть еще одна общая отмеченная точка K , в которой пересекаются линии обеих

полосок и которая расположена в центре области, общей для наших полосок. Таким образом, линии, расположенные в области пересечения двух данных полосок, фактически дают решение задачи о преобразовании двух крестов в два треугольника. Но, поскольку точка K является средней точкой для обеих полосок, она служит также центром симметрии для каждой из них, а значит, и центром симметрии области пересечения полосок. Следовательно, части, которые получаются из половины общей области, дают решение задачи о преобразовании

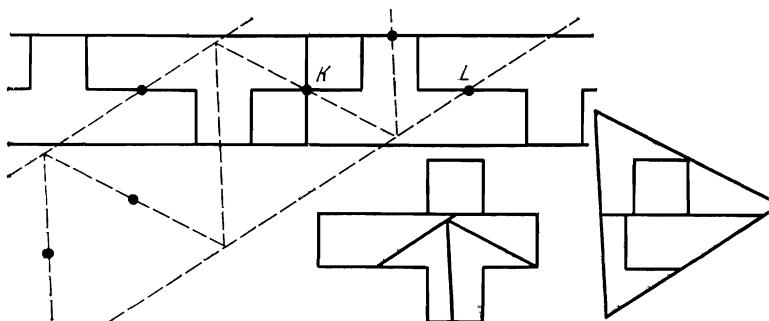


Рис. 63.

одного креста в один треугольник. Причем можно взять ту половину, которая отсекается любой линией, соединяющей края какой-либо из полосок, то есть линией, симметричной относительно K . Разрезания, представленные на рис. 61 и 63, мы назовем соответственно *разрезаниями типа $TT1$* и *разрезаниями типа $TT2$* (*$TT1$ -разрезания* и *$TT2$ -разрезания*).

Из рис. 63 становится ясным одно преимущество *$TT2$ -разрезаний*. Ширина одной из полосок может превышать среднюю длину элемента другой полоски; например, на рис. 63 ширина полоски с треугольниками больше, чем KL . В таких случаях обычно нельзя применять метод наложения полосок. Однако если обе полоски принадлежат к типу T , то *$TT2$ -разрезание* позволяет обойти эту трудность.

Фигурирующую на рис. 62 полоску, состоящую из квадратов, мы называли *P -полоской*, но очевидно, что она является одновременно и *T -полоской*. При *$TT2$ -разрезании* ее можно расположить так, как показано на

рис. 62, причем пунктирная прямая, проходящая через точку G , разделит общую область на две равные части.

С помощью TT_2 -разрезания можно преобразовать в квадрат не только латинский крест и квадрат, но и некоторые другие многоугольники (см. рис. 131 и приложение IV). Причем для шести-, семи- и восьмиугольника,

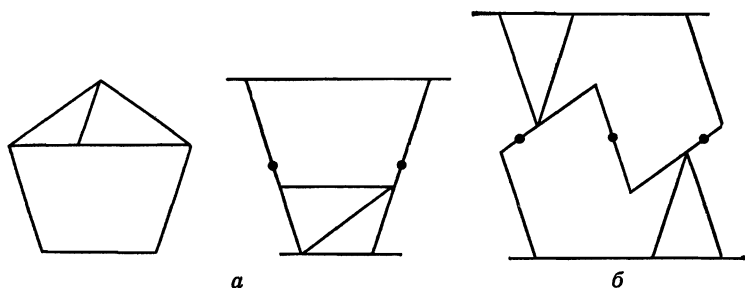


Рис. 64.

а также для греческого креста такие преобразования настолько похожи друг на друга, что выглядят буквально, как изделия массовой продукции!

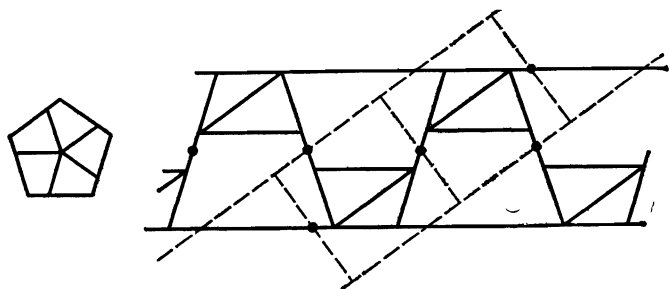


Рис. 65

Существуют по крайней мере еще два способа, отличных от способа, показанного на рис. 54, с помощью которых из пятиугольника удастся получить T -полоску. Они изображены на рис. 64. В случае $б$ элемент полоски не простирается от одного ее края до другого, так что здесь показаны два элемента. Первый элемент используется в решении задачи о преобразовании пятиугольника и квадрата, принадлежащем Ирвингу Л. Фризу (рис. 65).

Из рис. 64, а мы попутно получаем и способ, с помощью которого из пяти одинаковых пятиугольников удастся сложить один большой пятиугольник. Соответствующий набросок представлен на рис. 65 слева (большой

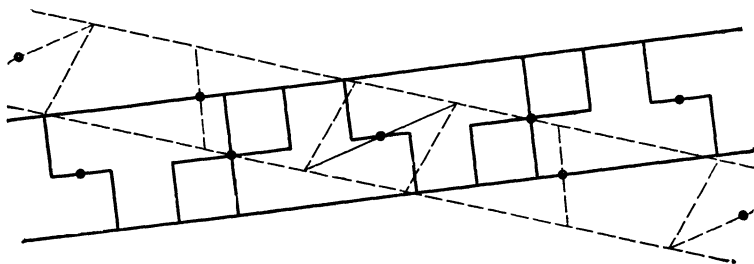


Рис. 66.

шой пятиугольник составляется из пяти элементов полосы на рис. 64, а). Это решение весьма симметрично, но не минимально

Если угол между полосками мал, то соответствующее решение становится малоэкономным, поскольку на вытянутой общей части полосок, похоже, пересекается слишком много разрезов. Исключение составляет TT_2 -разрезание греческого креста и пятиугольника, изображенное

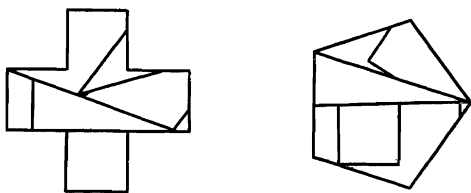


Рис 67.

на рис. 66. При таком решении получается 7 частей, в то время как при других решениях, по-видимому, получается большее число частей. В действительности число частей, расположенных в общей части двух полосок, достаточно велико, а именно равно 14, экономия здесь достигается за счет использования в решении только половины всех частей. Рис. 66 может озадачить читателя, поэтому я пошел на уступку, изобразив на рис. 67 оба многоугольника.

На рис. 64, б элемент полосы не простирался от одного ее края до другого. Еще один подобный случай показан на рис. 68, где элемент полосы похож на митру священника (или, если вам угодно, на табуретку). Задача преобразования митры в квадрат, да еще такого,

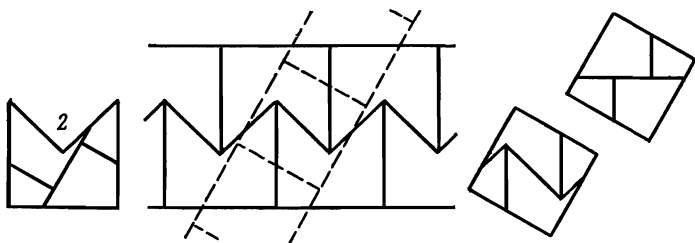


Рис. 68.

чтобы при этом получилось всего четыре части, кажется на первый взгляд неразрешимой. Однако из рис. 68 ясно, что две митры можно с помощью одинаковых разрезов превратить в два квадрата, причем на каждую митру придется всего лишь по четыре части. (При преобразовании двух одинаковых многоугольников в два других

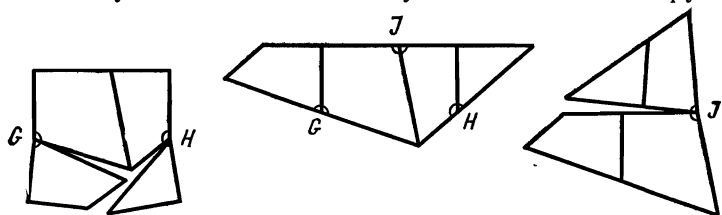
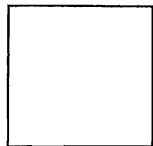
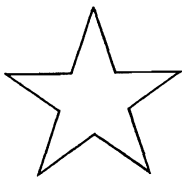
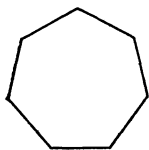


Рис. 69.

многоугольника решение часто получается более экономным, чем если бы мы преобразовали только по одному многоугольнику из каждой пары.) Решение, представленное на рис. 68 и являющееся на самом деле не *TT2*-, а *PT*-разрезанием, еще раз иллюстрирует ту мысль, что в *TT2*-разрезаниях линии, пересекающие каждую полосу, должны проходить через центр общей части этих полосок. В данном случае это не выполнено для полосы, составленной из квадратов. (Сравните данный рисунок с рис. 62.)

Дьюдени заметил, что TT -разрезания в случае трапеции или треугольников удастся реализовать в виде шарнирной модели. Половина общей части двух полосок рис. 62 представлена в средней части рис. 69, из которого видно, что если мы шарнирно закрепим соответствующие четыре части в точках G , H , I , то получим, так сказать, «открытую цепь». Повернув первую и последнюю части вниз вокруг точек G и H , мы получим квадрат, изображенный на рис. 69 слева. Если же мы повернем обе правые части как одно целое вверх вокруг точки I , то получим треугольник, представленный на том же рисунке справа.

То же самое будет происходить и при любом $TT2$ -разрезании. Если вы прибегнете к $TT1$ -разрезанию, изображенному на рис. 61, шарнирно закрепив соответствующие части в точках A , D и E , то легко обнаружите, что каждый из двух элементов полоски преобразуется после такого закрепления в другой элемент. Мы уже видели ранее на рис. 10, что Q -сдвиг тоже удастся реализовать в виде шарнирной модели, причем соответствующие части образуют «замкнутую цепь». Позднее мы увидим, что решения, полученные другими методами, также можно реализовать в виде шарнирных моделей.



Глава 6

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ РАЗРЕЗАНИЯ

Иногда преобразовать некоторый многоугольник в два элемента полосы оказывается легче, чем в один. Например, семиугольник легко резрзать на треугольник и две трапеции, а из трапеций сложить параллелограмм, как показано на рис. 28. В то же время сделать из этого семиугольника только один элемент полосы — задача достаточно трудная (она разбирается в главе 7).

Предположим теперь, что мы хотим преобразовать наш семиугольник в квадрат со стороной s . Мы можем решить эту задачу, получив как из треугольника, так и из параллелограмма два прямоугольника, у каждого из которых длина одной стороны равна s . Сумма длин двух других сторон этих прямоугольников с необходимостью окажется равной s , так что, сложив прямоугольники, мы получим нужный квадрат.

Из параллелограмма получить прямоугольник удастся с помощью PP -разрезания, во многом аналогичного тому, которое использовалось в задаче Дюдени о преобразовании шестиугольника в квадрат (ср. рис. 45 с рис. 70). При этом решение, содержащее 5 частей, держится буквально «на волоске». На рис. 70 вершины A и B прямоугольника расположены на краях другой полосы, и необходимо сделать необычайно большой и ак-

курятный чертеж, дабы убедиться, что точка C , на наше счастье, лежит выше, а не ниже горизонтальной прямой. Поэтому здесь следует прибегнуть к вычислениям. Мы

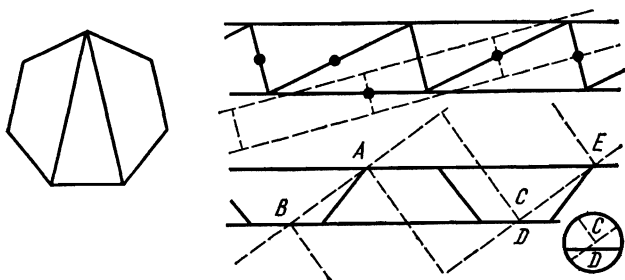


Рис. 70.

не приводим все выкладки, однако с помощью приложения III можно найти, что

$$\angle ABC = 35^\circ 36', \quad \angle ABD = 35^\circ 51' > \angle ABC.$$

Отсюда следует, что точка C (а значит, и E) расположена над горизонтальной прямой.

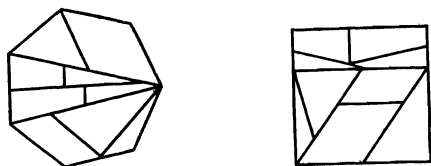


Рис. 71.

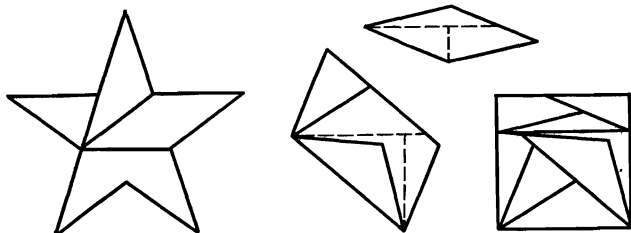


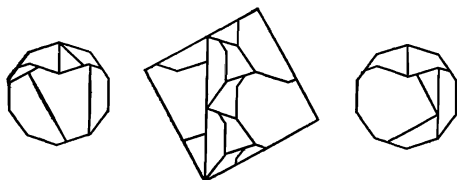
Рис. 72.

К треугольнику мы применим TT_2 -разрезание, изображенное на рис. 70 вверху справа и полученное с помощью методов, о которых говорилось в главе 5. Рис. 70

в совокупности дает решение задачи о преобразовании семиугольника и квадрата, представленное на рис. 71.

Подобный же метод применяется и в задаче о преобразовании пятиконечной звезды и квадрата. Сначала мы делаем из звезды два параллелограмма, как показано на рис. 72. Поскольку из параллелограмма с помощью *РР*-разрезаний очень легко получить прямоугольник, мы опускаем здесь изображение двух полосок и ограничиваемся итоговым чертежом.

Термин *последовательные* для разрезов такого типа хотя и достаточно выразителен, но не в полной мере отражает их природу, однако лучшего названия я придумать не смог.



Глава 7

МОЗАИЧНЫЕ ПОЛОСКИ ТИПА I

Из тех многоугольников, которые мы рассматривали до сих пор, получить соответствующие элементы полосы было нетрудно; гораздо сложнее сделать это, скажем, с семи-, девяти- и десятиугольником. Тем не менее существует некий общий подход, позволяющий справиться и с этими случаями; этот подход использует различные мозаики.

Обратимся к рис. 73. Все точки, отмеченные на этом рисунке, конгруэнтны. Они расположены на параллельных прямых, которые мы назовем *конгруэнтными прямыми*. Так, например, прямые AB и CD конгруэнтны; конгруэнтными будут также прямые AD и CE , равно как и прямые CF и AG . Часть данной мозаики, ограниченная двумя (подходящим образом выбранными) конгруэнтными прямыми, образует полосу, которую мы можем использовать для решения наших задач. Так, полосы, изображенные на рис. 28 и 29, получатся, если мы возьмем соответственно пару CF и AG или AB и CD конгруэнтных прямых; а полоске, помещенной на рис. 56 справа, соответствуют конгруэнтные прямые AD и CE . Первая и вторая из этих трех полосок относятся к типу P , а третья — к типу T ; таким образом, одна и та же мозаика может привести к полоскам обоих типов.

Если мы будем параллельно сдвигать имеющиеся на рис. 73 конгруэнтные прямые, ограничивающие P -полоску, причем делать это так, чтобы расстояние между прямыми не менялось, то при таком перемещении эти прямые все время будут ограничивать некоторую P -полоску.

Сплошные линии на рис. II. 15¹ образуют мозаику, составленную из греческих крестов. Вы можете с удовлетворением отметить, что все разобранные до сих пор полоски из греческих крестов (см. рис. 21, 38—41, 57)

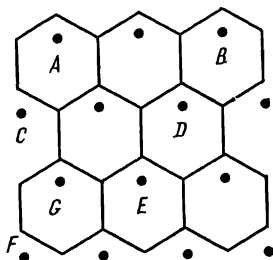


Рис. 73.

образованы с помощью конгруэнтных прямых из данной мозаики или из ее зеркального отражения. Здесь, непрерывно смещая соответствующую пару конгруэнтных прямых, мы вновь можем получить из любой P -полоски бесконечно много иных P -полосок.

Шестиугольник и греческий крест, разумеется, уже сами по себе образуют элемент мозаики. Из других многоугольников, которые этим свойством не обладают, получить такой элемент иногда довольно легко. Так, если мы разрежем восьмиугольник на две части (рис. 74), то из них можно затем составить элемент мозаики, представленной на рис. II. 8. Если бы элемент полоски, изображенный на рис. 30, случайно ускользнул от вашего внимания, то вертикальные конгруэнтные прямые на рис. II. 8 помогли бы вам его обнаружить.

Рассмотренные до сих пор полоски можно было бы легко получить и не углубляясь в область мозаик; мы

¹ Здесь и далее при двойной нумерации рисунков римская цифра означает номер приложения, в котором помещен рисунок. — *Прим ред.*

просто воспользовались ими, чтобы на простейших примерах объяснить суть данного метода. Но для того, чтобы узреть элемент полосы непосредственно в очертаниях семи- или десятиугольника, требуется гораздо большая сила воображения, чем отпущенная многим из

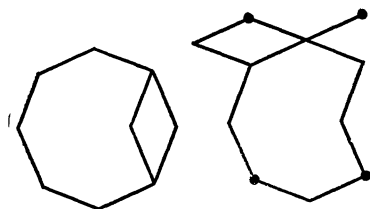


Рис. 74.

нас, и здесь-то мозаики оказывают существенную помощь. Первый шаг состоит в том, чтобы исходный многоугольник преобразовать в элемент мозаики; на рис. 75 показано, как без особого труда это удастся сделать в случае семиугольника. Пару таких элементов можно

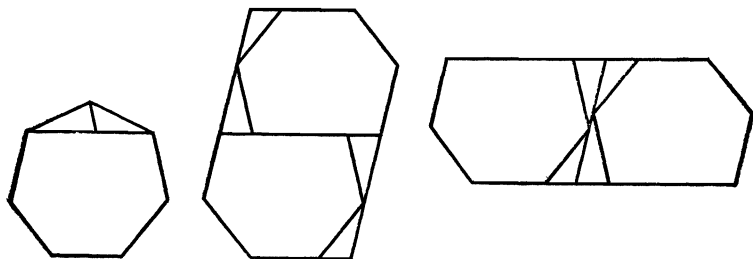


Рис. 75.

объединить двумя разными способами (рис. 75) в шестиугольник, у которого противоположные стороны параллельны. Из каждого, полученного таким способом шестиугольника можно сложить мозаику; мозаика из первого шестиугольника показана на рис. II. 7. Из этой мозаики можно получить как *P*-, так и *T*-полоски (несмотря на то что половина элементов перевернута), проводя параллельные прямые через отмеченные центры симметрии. Легко заметить, что если мы рассечем любую полосу на две равные части, то каждая из этих

частей будет представлять собой *P*-полоску. Требование, состоящее в том, чтобы прямые проходили через центры симметрии, когда половина элементов мозаики повернута на 180° , аналогично ограничению, с которым мы уже встречались при использовании *T*-полосок.

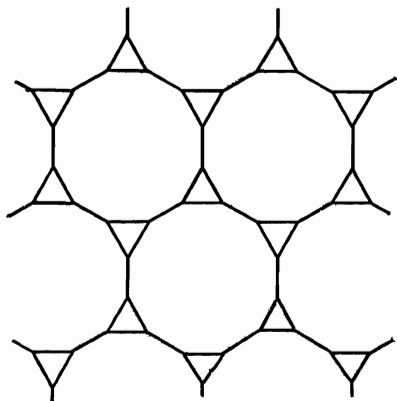


Рис. 76.

Элемент хорошо известной мозаики образует десятиугольник вместе с двумя маленькими треугольниками (рис. 76). О том, какие приложения находит эта мозаика, говорится в главе 12. Однако, с другой стороны, если

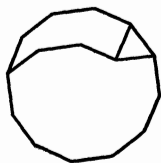


Рис. 77.

мы захотим разрезать только десятиугольник, два лишних треугольника нам явно будут мешать. Поэтому мы должны построить элемент мозаики из одного десятиугольника, разрезав последний на несколько частей и затем объединив их нужным образом. Но при решении такой задачи нам придется примирить между собой избыток углов в 150° и нехватку углов в 210° , а это не так-то просто сделать. Однако, внимательно рассмотрев рис. 76, мы замечаем, что если одна из частей представ-

ляет собой маленький треугольник, то вокруг него можно «разместить» 6 углов по 150° . Используя это, мы после ряда проб приходим к рис. 77. Из полученных таким образом частей мы можем, по крайней мере двумя способами, сложить элемент мозаики, показанный на

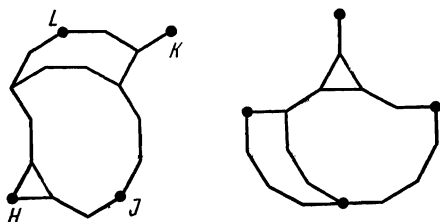


Рис. 78.

рис. 78. Соответствующие мозаики представлены на рис. II. 12 и II. 13.

Для параллелограммов, подобных параллелограмму $HJKL$ на рис. 78 и 80, было бы удобным ввести специальный термин. Причем такой термин даже нет надобности

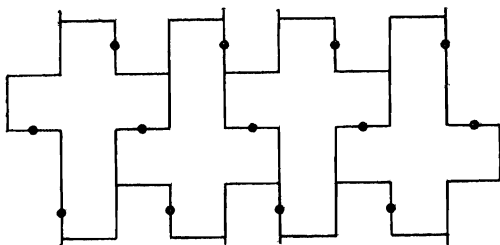


Рис. 79.

изобретать — его можно позаимствовать из теории эллиптических функций¹, как мы уже сделали это с термином *конгруэнтный*. Итак, назовем параллелограмм $HJKL$ *параллелограммом периодов*.

У только что полученных из десятиугольника мозаик параллелограммы периодов различны. В силу этого об-

¹ Речь идет о важной теории «дважды периодических» функций комплексного переменного, которым на плоскости комплексного переменного отвечает естественная мозаика «параллелограммов периодов». — *Прим. ред.*

стоятельства из одного и того же многоугольника удастся построить большее число элементов полосок. Еще одна причина, побуждающая к поискам нескольких мозаик, указана в главе 9. Причем заслуживают внимания даже и не самые экономные мозаики, то есть такие мозаики, элементы которых получаются при разрезании

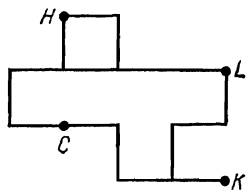
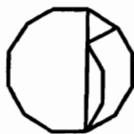
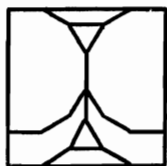
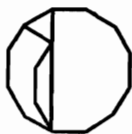


Рис. 80.

многоугольника не на минимальное число частей. Например, латинский крест сам по себе уже образует элемент некоторой мозаики (рис. 79); однако и менее экономный элемент, который вы видите на рис. 80 (две части вместо одной), находит себе, как мы увидим позднее, блестящее приложение. Во всяком случае, естественно, что вторая мозаика, полученная из латинского креста, у которой все элементы «смотрят» в одну сторону, окажется более полезной, поскольку из мозаики на рис. 79 полоски получатся только в том случае, если соответствующие параллельные прямые пройдут через центры симметрии; в то же время параллельные прямые на рис. 80 не обязаны совпадать с HJ и LK или HL и JK , но могут располагаться и в других местах.



Глава 8

ТРЕУГОЛЬНИКИ И ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

В этой главе мы изучим задачу о преобразовании любого треугольника или четырехугольника в любой другой¹ треугольник или четырехугольник. Мы выберем не слишком отличающиеся друг от друга формы этих двух многоугольников, дабы удалось получить подходящее и в то же время достаточно общее решение. Распространить полученное решение на менее благоприятные случаи не составит труда.

Любые два треугольника можно преобразовать друг в друга с помощью TT_2 -разрезания. Если некоторый треугольник не равносторонний, то из него можно получить три различные T -полоски. (Это замечание остается справедливым и для равнобедренных треугольников, поскольку у них одна из полосок получается путем переворачивания одной из двух других полосок обратной стороной.) Среди девяти комбинаций полосок, полученных из двух заданных треугольников, наилучшей, по-видимому, окажется та, у которой отрезок AB (рис. 81) станет равным или немного превзойдет ширину второй полоски. В общем решении будут участвовать четыре или более части; то же самое, очевидно, остается верным и

¹ Разумеется, равновеликий исходному. — *Прим. перев.*

в случае преобразования трапеции и треугольника или двух трапеций.

Из любого четырехугольника можно получить другой четырехугольник или треугольник также с помощью

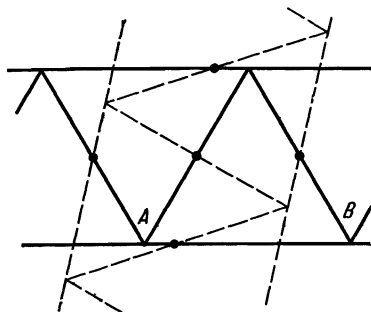


Рис. 81.

*ТТ*2-разрезания. Каждый четырехугольник (даже невыпуклый) представляет собой элемент мозаики, поскольку из двух таких четырехугольников всегда можно сложить шестиугольник, у которого противоположные сто-

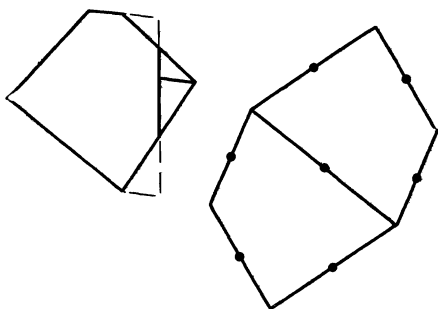


Рис. 82.

роны параллельны, как на рис. 82. А такой шестиугольник — это элемент мозаики (рис. 75). Несколько *Т*-полосок можно получить, проводя параллельные прямые через центры симметрии, которые совпадают здесь с серединами сторон.

В преобразовании четырехугольника и треугольника, изображенном на рис. 83, участвует 6 частей — на две

части больше, чем в случае с двумя треугольниками. Одна из этих дополнительных частей обязана своим появлением тому обстоятельству, что отрезки CD и EF

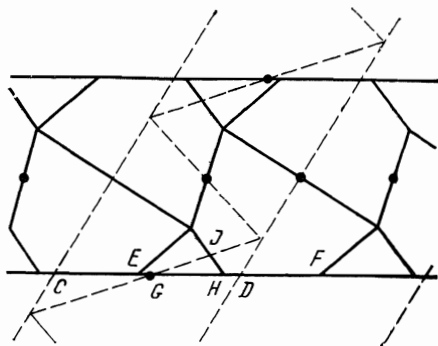


Рис. 83.

(а значит, и их середины G и H), вообще говоря, не совпадают друг с другом. Если точка H расположена правее G , как на рис. 83, то два разреза пересекаются в J ;

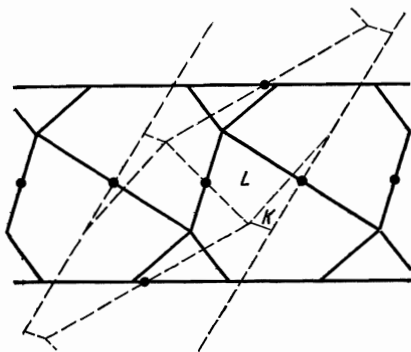


Рис. 84.

если H находится слева от G , так что и E расположена слева от C , то появляется пересечение, в котором участвует край наклонной полоски.

По той же причине два дополнительных разреза возникают и в случае преобразования двух четырехугольников, в результате чего общее число частей возрастает

до 8. Обращаясь к рис. 84, мы видим, что прямая L отсекает дополнительную часть K .

Та же разновидность разрезов получится и в том случае, если мы заменим четырехугольник пятиугольником с двумя параллельными сторонами, который тоже представляет собой элемент мозаики, в чем можно убедиться, взглянув на рис. 75. Если же мы возьмем «плохой» пятиугольник, то всегда сможем превратить его в

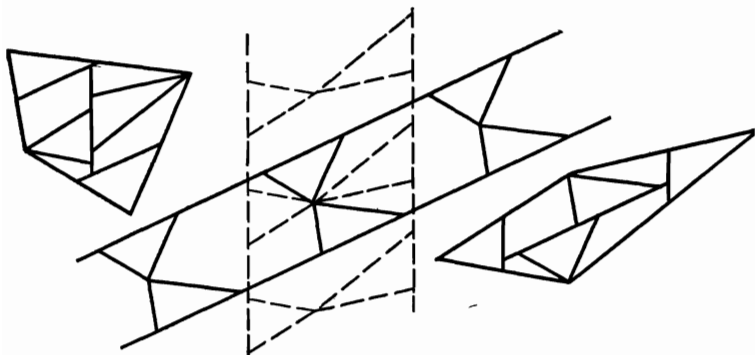


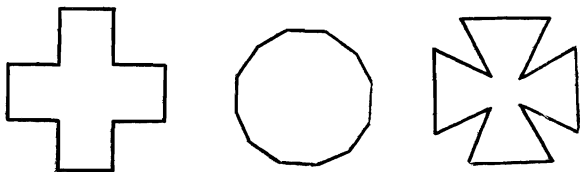
Рис. 85.

пятиугольник с двумя параллельными сторонами, проведя разрезы, как показано на рис. 82. В этом и будет состоять в данном случае первый шаг.

Решения задач, в которых участвуют треугольники, по-видимому, будут минимальными только в том случае, если мы воспользуемся TT_2 -разрезаниями. Но это не всегда справедливо для двух четырехугольников. Каждый из них можно разрезать на три части, сложив затем из них элемент P -полоски. При этом у нас будет шанс получить минимальное решение с помощью PP -разрезания. На рис. 85, принадлежащем У. Х. Мэйкоу-лэу, приведен один такой пример. Четырехугольники на этом рисунке наглядно показывают, что части располагаются в них (как и в общей области двух полосок) достаточно симметрично — во всяком случае, в той мере, в какой можно на это надеяться, когда четырехугольники неправильные.

Мы можем быть почти уверенными в том, что число частей (соответственно равное 4, 6 и 8), которое получается в случае общего преобразования соответственно

двух треугольников, четырехугольника и треугольника или двух четырехугольников, на самом деле минимально. Сегодня какой-нибудь квалифицированный и достаточно упорный математик, вероятно, сумел бы это даже со всей строгостью доказать. Однако для большинства подобных задач мы можем надеяться на строгое доказательство лишь в отдаленном будущем. Можно ли, например, преобразовать правильный пятиугольник в квадрат так, чтобы при этом получилось меньше шести частей? В настоящее время можно лишь весьма усомниться в том, что число частей удастся снизить до 5, — и такое состояние дел сохранится, по-видимому, еще достаточно долго.



Глава 9

РАЗРЕЗАНИЯ, ПОЛУЧАЕМЫЕ ИЗ МОЗАИЧНЫХ ПОЛОСОК ТИПА I

Мы уже занимались преобразованием греческого креста в самые различные многоугольники, но не преобразовывали его в квадрат. Минимальные решения здесь можно получить, наложив полосу, составленную из квадратов, на полосу, построенную из элементов, изображенных на рис. 38—40. Еще одно, на этот раз заведомо неминимальное, решение получится, если мы воспользуемся полоской, элемент которой изображен на рис. 41. В первых трех случаях полосы пересекаются под прямыми углами, так что поперечные прямые на полоске из квадратов можно сделать совпадающими с краями полосы из крестов. Однако использование полосок — не самый естественный и эффективный метод, с помощью которого удастся найти данное решение. Мы можем обойтись и без каких-либо полосок, а вместо этого рассмотреть непосредственно ту мозаику, из которой эти полосы получились.

В случае мозаики, составленной из греческих крестов, параллелограмм периодов представляет собой квадрат. Мы можем решить нашу задачу, накладывая мозаику, составленную из квадратов, на мозаику, образованную с помощью крестов, так, чтобы при этом конгруэнтные точки одной мозаики совпали с конгруэнтными точками

другой. На рис. 86 конгруэнтные точки мозаики из крестов, а именно центры крестов, совпадают с конгруэнтными точками «квадратной» мозаики — вершинами квадратов. Параллельно сдвинув «квадратную» мозаику, мы

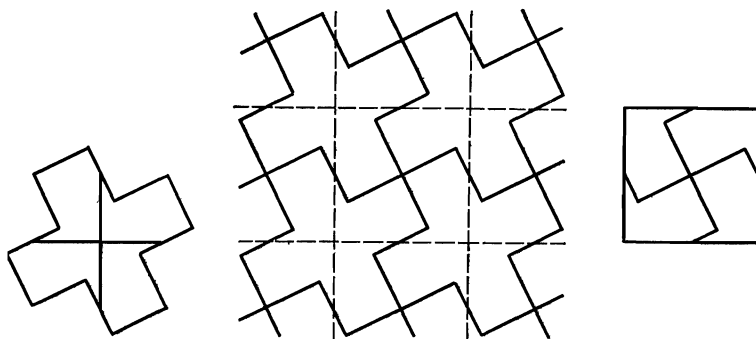


Рис. 86.

всегда получим решение нашей задачи. Некоторые многоугольники, у которых параллелограмм периодов совпадает с квадратом, показаны на рис. 87 и 88, причем в каждом случае отмечено по четыре конгруэнтные точки. (Читателю рекомендуется изобразить соответствующие мозаики на миллиметровой бумаге.) В первых трех

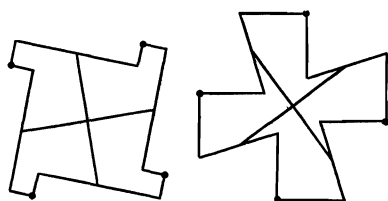


Рис. 87.

случаях разрезы показывают решение задачи о преобразовании соответствующего многоугольника в квадрат; в четвертом случае дается решение задачи о преобразовании данного многоугольника в четыре квадрата. Все эти решения можно легко получить, накладывая друг на друга соответствующие мозаики. Новые решения тех же задач получаются при параллельном сдвиге одной из

двух мозаик. Если мы наложим на данные мозаики другую мозаику, порожденную греческим крестом, то снова получим симметричные решения, содержащие по четыре части¹.

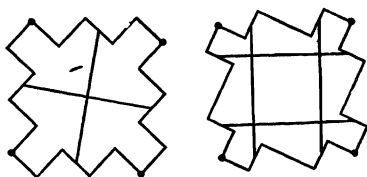


Рис. 88.

То же самое можно проделать с любыми двумя мозаиками, у которых параллелограммы периодов совпадают, а все элементы направлены в одну сторону. Примером тому может служить задача о преобразовании латинского креста и двенадцатиугольника, причем в этом случае общий параллелограмм периодов уже не будет

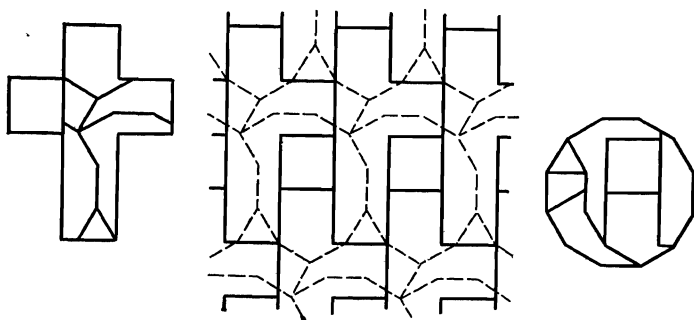


Рис. 89.

квадратом. Не сложно проверить, что параллелограммы $HJKL$ на рис. 78 и 80 равны. Наложение двух таких мозаик приводит к решению данной задачи (рис. 89).

Параллелограммом периодов у мозаики, порожденной элементом, приведенным на рис. 78, служит квадрат.

¹ Многоугольник, изображенный на рис. 88 справа, можно, разрезав предварительно на 4 части, преобразовать в 4 греческих креста; однако, если вы и сумеете это сделать, не рассчитывайте на Нобелевскую премию

Поэтому, наложив на эту мозаику другую мозаику, составленную из квадрата, мы получим решение задачи

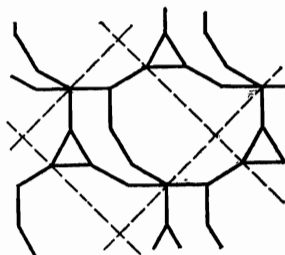


Рис. 90.

о преобразовании двенадцатиугольника и квадрата, содержащее 6 частей. На рис. 90 изображено одно такое решение. Однако, на наше счастье, мозаика устроена

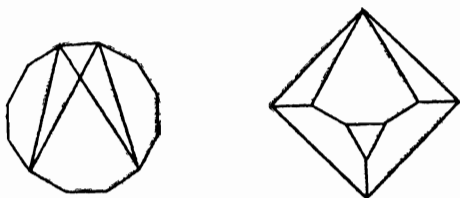


Рис. 91.

так, что длина каждой из хорд, стягивающей 4 стороны двенадцатиугольника, равна стороне равновеликого квадрата. Зная это и просто манипулируя двенадцатиугольником, мы можем получить некоторые решения,

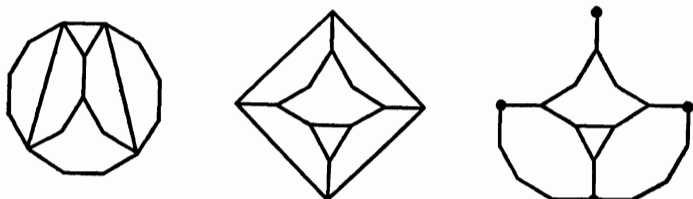


Рис. 92.

причем таких решений оказывается удивительно много. На рис. 91—93 приведены три из них. Решение, показанное на рис. 92, самое изящное, а решение, изображенное на рис. 91, привлекает чрезвычайной простотой

разрезов, которые проведены как раз по четырем хордам.

В свою очередь эти решения помогают нам сложить из двенадцатиугольника такой элемент мозаики, кото-

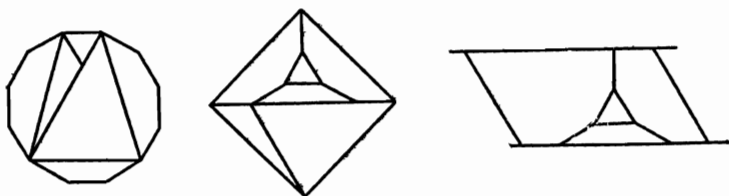


Рис. 93.

рый иначе мог бы ускользнуть от нашего внимания. А далее мы можем посмотреть, нельзя ли что-нибудь

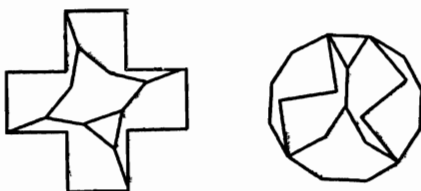


Рис 94

сделать с найденными таким образом мозаиками. Например, мозаика, элемент которой изображен на рис. 92 справа, позволяет решить задачу о преобразовании двенадцатиугольника и греческого креста (рис. 94). Мы не

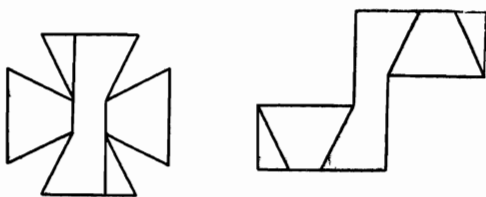


Рис. 95

должны также упускать из виду возможность появления новых полезных полосок; так, на рис. 93 изображен элемент полоски, который пригодится нам позднее.

Мальтийский крест сам по себе не является элементом мозаики, но из него можно легко сделать такой

элемент (рис. 95). С его помощью удастся построить две различные мозаики, и, к нашему удивлению, оказывается, что параллелограмм периодов у одной из них представляет собой квадрат. Эта мозаика изображена на рис. II. 16. Она позволяет нам найти минимальное решение задачи о преобразовании мальтийского креста в греческий.

Содержащее 8 частей решение задачи о преобразовании мальтийского креста и квадрата, которое можно получить из мозаики с элементом, изображенным на

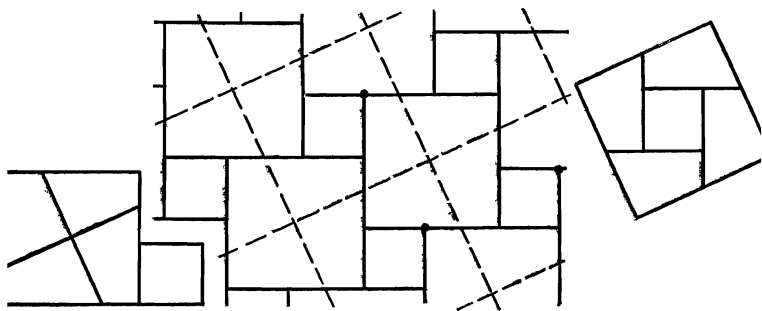


Рис. 96.

рис. 95, здесь не показано, поскольку оно не минимально.

Из двух квадратов (как равных, так и неравных) легко составить простую мозаику, которая будет нам весьма полезна в дальнейшем. Как видно из рис. 96, параллелограмм периодов такой мозаики представляет собой квадрат, так что, кроме всего прочего, мы имеем преобразование двух квадратов в один. С помощью получившихся при этом частей можно дать хорошо известное наглядное доказательство теоремы Пифагора, принадлежащее Генри Перигэлу¹. Если объединить два исходных квадрата в один многоугольник, то его удастся преобразовать в квадрат путем разбиения всего лишь на три части. (Соедините отмеченные точки.)

Мозаику на рис. 96 можно получить из обычной «квадратной» мозаики, соответствующим образом перемещая элементы каждого множества, состоящего из

¹ См., например, [13], стр. 23 — Прим. ред.

четырех смежных квадратов. Если применить аналогичное перемещение к мозаике, составленной из треугольников или шестиугольников, то это приведет к мозаикам,

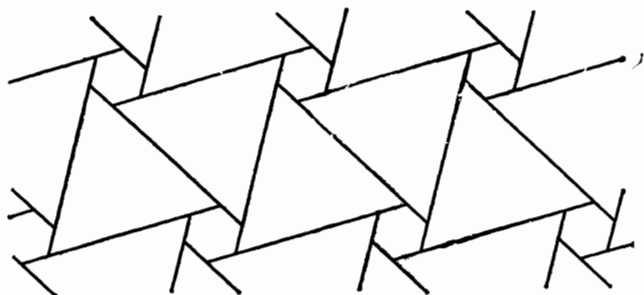


Рис. 97.

элементы которых представляют собой объединение двух треугольников с шестиугольником. Мозаики, представленные на рис. 97 и 99, кажутся различными, однако

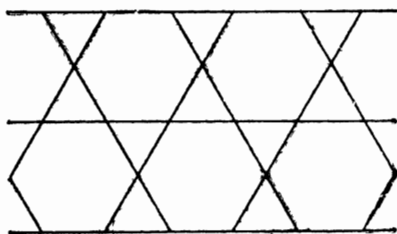


Рис. 98.

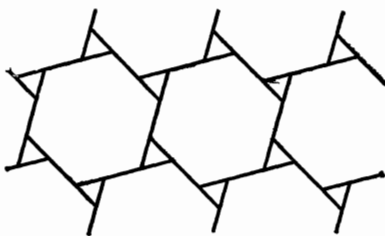


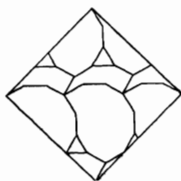
Рис. 99.

каждую из них можно превратить в другую с помощью полуправильной мозаики $(3 \cdot 6)^2$, изображенной на рис. 98. Параллелограммы периодов полученных мозаик

совпадают с параллелограммами периодов исходных мозаик. Именно в силу этого последнего обстоятельства, рис. 97 и 99 окажутся полезными для нас ниже (см. главы 12, 20 и 21).

У некоторых мозаик, обладающих параллелограммом периодов, половина элементов может быть повернута, как, например, у мозаики на рис. 79. Если у двух таких мозаик параллелограммы периодов совпадают, то, наложив эти мозаики друг на друга, мы сможем получить решение соответствующей задачи на разрезание. При этом возникает ограничение, аналогичное тому, с которым мы встречались при использовании T -полосок, и состоящее в том, что центры симметрии обеих мозаик (отмеченные на рис. 79) должны совпадать. В противном случае мы решим задачу о преобразовании двух многоугольников в два многоугольника, но не одного в один. Единственное в данной книге решение такого рода возникает в связи с рис. 162, в.

Иногда оказывается, что ширина двух полосок совпадает, так что решение удастся получить, совмещая обе полоски. В этом случае следует отдавать себе отчет в том, что на самом деле здесь происходит наложение мозаик. Подобные примеры представлены на рис. 60 и 301.



Глава 10

КЛАССИФИКАЦИЯ

Разрезания, которые получаются с помощью наложения мозаик, мы назовем разрезаниями типа T , или T -разрезаниями¹. Теперь мы можем дать следующую пробную классификацию разрезаний многоугольников прямолинейными разрезами:

- 1) P -сдвиг параллелограмма (сдвиг типа P);
- 2) Q -сдвиг четырехугольника (сдвиг типа Q);
- 3) R -разрезания, или рациональные разрезания (включая и ступенчатые разрезания);
- 4) S -разрезания, получаемые из полосок; они подразделяются на типы PP , PT , $TT1$ и $TT2$;
- 5) T -разрезания, получаемые из мозаик;
- 6) U -разрезания, или разрезания, не входящие в классификацию².

Вы, конечно, понимаете, что я был вынужден назвать третий класс разрезаний рациональными, поскольку это слово в английском языке начинается с буквы R . Разрезания типа T можно было бы разбить на подклассы подобно тому, как мы делали это для S -разрезаний. Однако пока, в силу явного недостатка соответствующих примеров, мы воздержимся от такого шага.

¹ От англ. tessellation — мозаика.

² От англ. unclassified — неклассифицированные.

К U -разрезаниям мы отнесли такие разрезания, к которым не удастся применить ни один из методов, получивших отражение в нашей книге, так что, если вы

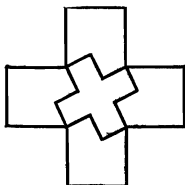


Рис. 100.

возьметесь за решение соответствующих задач, вам придется полностью полагаться на собственную изобретательность. Примером подобной задачи служит головоломка с греческим крестом, принадлежащая Дьюдени

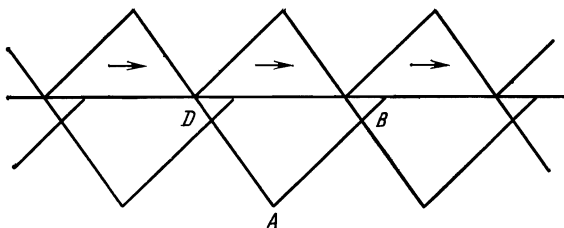


Рис. 101.

(рис. 100 и 102). Большинство задач, разобранных в главе 20, также основаны на U -разрезаниях. Быть может, кому-нибудь удастся открыть новый метод и тем самым



Рис. 102.

сократить число задач типа U , дополнив таким образом ряд задач, к этому типу не относящихся.

Возможно, вам покажется не слишком удачным термин « Q -сдвиг», ибо где же здесь сдвиг? Рисунки 101, 103, 104 и 105 позволяют ответить на этот вопрос. На первых двух из них, относящихся к Q -сдвигу, показано, как

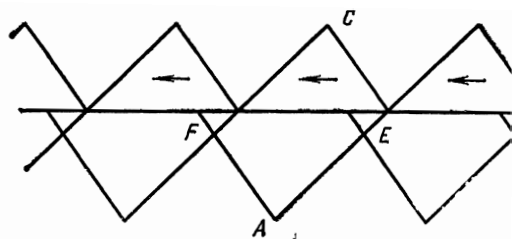


Рис. 103.

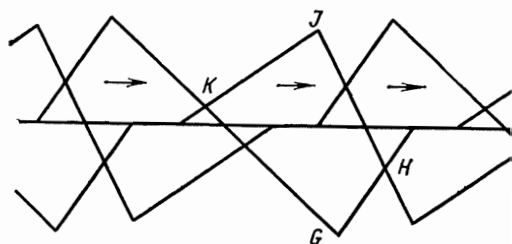


Рис. 104.

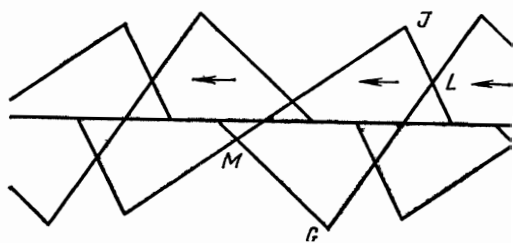


Рис. 105.

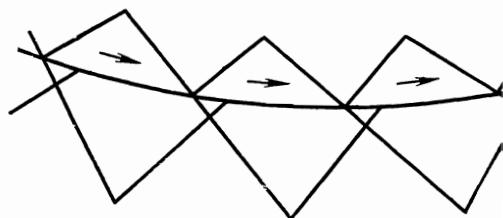


Рис. 106.

следует преобразовать цепочку параллелограммов $ABCD$ в цепочку параллелограммов $AECF$, сдвинув ту часть первой цепочки, которая расположена над горизонтальной прямой.

На рис. 104 и 105 показано, как можно аналогичным образом преобразовать цепочку четырехугольников $GHIK$ (каждый следующий четырехугольник этой цепочки получается из предыдущего поворотом на 180°) в цепочку четырехугольников $GLIM$. Это и есть сдвиг типа Q .

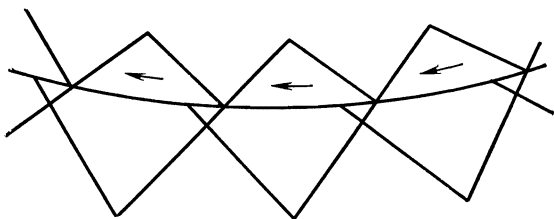
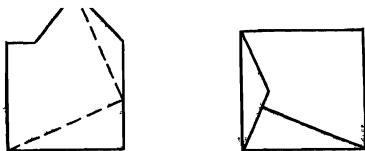


Рис. 107.

Такая интерпретация сдвигов наводит нас на мысль о том, нельзя ли вместо горизонтальной прямой взять дугу окружности? Подобные сдвиги¹, как видно из рис. 106 и 107, тоже существуют. При таких «круговых» сдвигах изменяются не только стороны, но и два угла, а именно углы, ближайшие к дуге окружности. Один из них возрастает, а другой уменьшается на величину, равную угловому перемещению частей, расположенных над дугой окружности. Соотношения между размерами двух данных четырехугольников довольно запутанные, чем объясняется то обстоятельство, что этот, с позволения сказать, плод наших раздумий появился на свет мертворожденным. (Впрочем, таков же и рис. 17.)

¹ Точнее, повороты. — Прим ред.



Глава 11

РАЗРЕЗАНИЯ, ПОЛУЧАЕМЫЕ ИЗ МОЗАИЧНЫХ ПОЛОСОК ТИПА II

Элементы некоторых мозаик естественно распадаются на пары, как это можно наглядно увидеть, например, на рис. 79. В ряде других случаев подмножества, на которые распадается мозаика, содержат более двух элементов. Так, на рис. 108 элемент мозаики представляет собой как бы фронтон здания, заканчивающегося неполной двускатной крышей (впрочем, эту крышу можно было бы сделать и полной). Четыре таких элемента образуют фигуру, в которой каждый в соответствии с собственными вкусами может узнать либо искаженный крест, либо квадрат с треугольными выступами вблизи вершин. Если центры симметрии двух мозаик подобного типа образуют одинаковый рисунок, то мы можем решить задачу о преобразовании двух соответствующих многоугольников, просто наложив эти центры симметрии друг на друга. На рис. 108 показано, как подобным способом преобразовать наш «фронтон» в квадрат. Можно заметить, что если мы будем поворачивать прямые, пересекающиеся в точке A , вокруг этой точки, перемещая при этом наш многоугольник как целое, то он все время будет оставаться элементом мозаики с теми же центрами симметрии, что и в исходный момент.

Мы можем считать, что мозаика, составленная из шестиугольников, образована на самом деле из мно-

жеств, содержащих по три таких шестиугольника, имеющих общую точку. Назовем каждое такое множество *составным* элементом. На рис. 109, *а* маленькие шести-

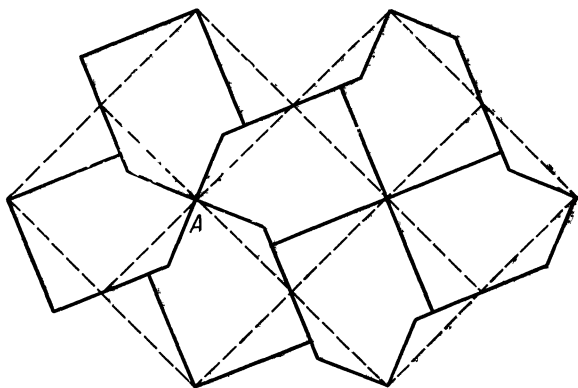


Рис. 108.

угольники объединены по три в составные элементы с центрами в точках *B*, *C*, *D*, *E*. Легко видеть, что эти

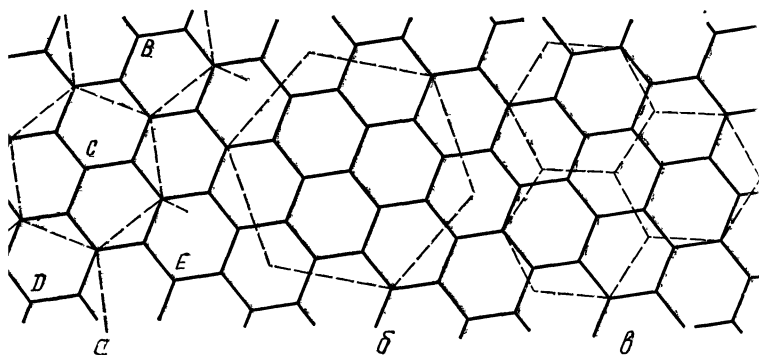


Рис. 109.

центры располагаются так же, как и центры шестиугольников, втрое превышающих исходные маленькие шестиугольники. Поэтому мы можем наложить мозаику, составленную из больших шестиугольников, на исходную мозаику, как это показано на рис. 109, решив тем самым

задачу о преобразовании трех маленьких шестиугольников в один большой. При таком наложении центры составных элементов исходной мозаики совпадают с центрами шестиугольников второй мозаики. Это условие вовсе не является обязательным, поскольку мы можем свободно перемещать одну мозаику относительно другой. Однако расположение, представленное на рис. 109, приводит к минимальному решению.

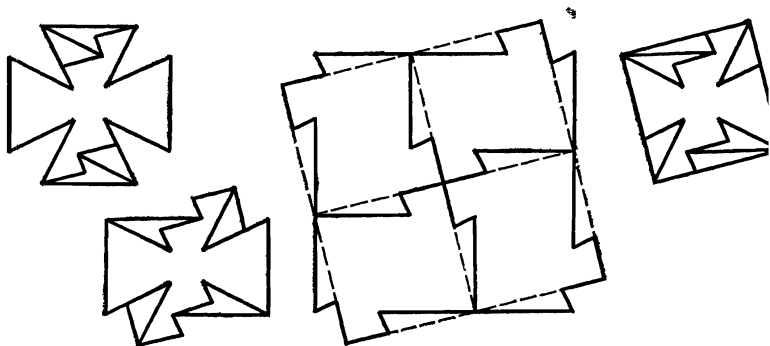


Рис. 110.

Мы можем образовать составной элемент из семи шестиугольников, сгруппированных вокруг одного центрального. В результате, наложив мозаики, как это показано в средней части рис. 109, мы решим задачу о преобразовании семи шестиугольников в один; если мы наложим мозаики подобно тому, как это показано на рис. 109, в, то решим задачу о преобразовании семи малых шестиугольников в три больших шестиугольника. Аналогично при желании вы можете решить задачи о преобразовании 13, 19, 21, 31... шестиугольников. С более подробным обсуждением этого вопроса мы встретимся в главе 21 (рис. 258).

На рис. 110 представлено решение еще одной задачи. Оно принадлежит к типу, разобранным в настоящей главе, поскольку на промежуточном шаге (см. среднюю часть рис. 110) появляется составной элемент, образованный четырьмя исходными элементами. Конечно, тому, кто окажется столь сообразительным, что додумается до этого промежуточного шага, нет нужды затем прибегать

к мозаикам, дабы получить из составного элемента квадрат. Однако методы, в которых используются полосы и мозаики, являются, во-первых, хорошими эвристическими методами, а во-вторых, помогают нам при класси-

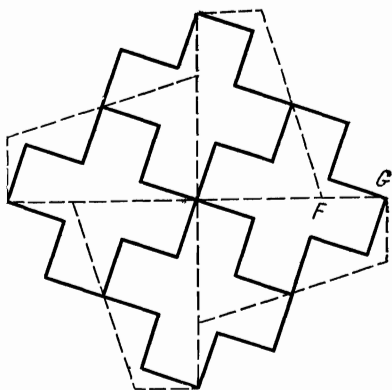


Рис. 111.

фикации задач. Воистину замечательное решение, представленное на рис. 110, принадлежит А. Е. Хиллу! Я бы и сам не отказался найти такое решение.

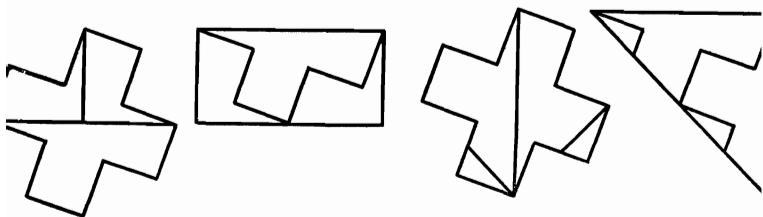
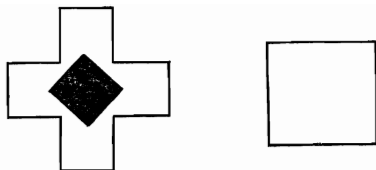


Рис. 112.

Если какой-нибудь квадрат разрезать попалам вдоль любой линии, проходящей через его центр, то из четырех таких половинок можно сложить составной элемент мозаики, изображенный на рис. 111. (Линия, по которой мы проводим разрез, может быть не прямой, а ломаной, лишь бы она была симметрична относительно центра квадрата.) Четыре греческих креста, у которых есть одна

общая точка, также образуют составной элемент, показанный на рис. 88. Центры симметрии двух соответствующих мозаик образуют одинаковый «квадратный» рисунок. Совместив центры этих двух мозаик, мы решим задачу о преобразовании греческого креста и полуквадрата; причем, если линия, делящая квадрат пополам, прямая, то решение содержит 3 или 4 части в зависимости от того, насколько точка F близка к точке G . Если наш полуквадрат представляет собой прямоугольник, то решение содержит 3 части; если же он является равнобедренным треугольником, то число частей равно 4. Оба соответствующих решения, представленные на рис. 112, принадлежат Дьюдени.



Глава 12

ПОПОЛНЕНИЕ МОЗАИКИ

Восьмиугольник сам по себе не может служить элементом какой-либо мозаики, однако если мы добавим к нему маленький квадрат, то получим нужный элемент. Параллелограммом периодов соответствующей мозаики (рис. 113) служит квадрат. Вернувшись к рис. 96, мы замечаем, что у мозаики, элементом которой служит объединение большого и малого квадратов, параллелограммом периодов тоже является квадрат. Пусть площадь большого квадрата равна площади восьмиугольника, а сторона малого квадрата — стороне восьмиугольника. Тогда, наложив друг на друга соответствующие мозаики, мы получим следующее преобразование:

восьмиугольник + малый квадрат $\rightarrow$ квадрат, равновеликий восьмиугольнику + тот же малый квадрат.

Уберите теперь малый квадрат из обеих частей данного соотношения и вы получите решение задачи о преобразовании восьмиугольника в квадрат, принадлежащее Джеймсу Трейверсу.

В предисловии к книге Дьюдени «Занимательные задачи и головоломки» говорится: «Замечательно, что из правильного восьмиугольника можно сложить соответствующий квадрат, разрезав предварительно этот вось-

миугольник всего на четыре части». Мне, однако, подобное утверждение кажется ошибочным. Решение, содержащее 5 частей (рис. 113), принадлежит как раз к тем

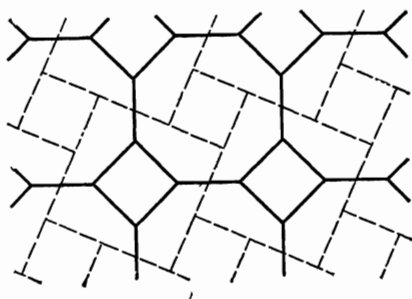


Рис. 113.

решениям, относительно которых испытываешь внутреннее убеждение, что они — самые лучшие.

Аналогичным образом обстоит дело и с преобразованием двенадцатиугольника и шестиугольника. Объединив двенадцатиугольник с двумя небольшими треугольниками, мы получим элемент мозаики (рис. 76), и, как

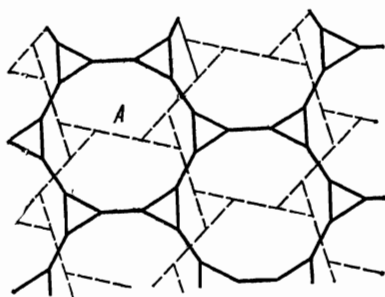


Рис. 114.

мы видели на рис. 100, то же самое произойдет, если мы объединим шестиугольник с двумя такими же маленькими треугольниками. Вновь параллелограммы периодов двух наших мозаик оказываются одинаковыми, и, наложив эти мозаики друг на друга, мы получим рис. 114.

Причем кажется, что прямая *A* совпадает с диаметром двенадцатиугольника¹, хотя на самом деле она составляет с ним угол около $0^{\circ}32'6''$.

Это решение впервые нашел Ирвинг Л. Фриз, архитектор из Лос-Анджелеса. С более скромным плодом его усилий мы познакомились на рис. 65. Данное решение — это уже произведение мастера, как и два других решения, представленные на рис. 283 и 284.

Бывает, что у исходного многоугольника вырезана внутри какая-то его часть. В таком случае, если внутренние и внешние границы многоугольника позволяют

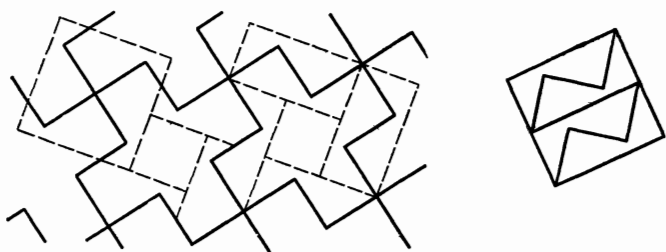


Рис. 115.

это сделать, мы можем пополнить соответствующую мозаику, вставив вырезанную часть на место. Подобный прием можно применить и к решению задачи о преобразовании квадрата и греческого креста, из которого вырезан маленький квадрат. Мы пополняем мозаику, образованную из греческих крестов, вставляя туда недостающие маленькие квадраты, и затем комбинируем ее с рис. 96. В принадлежащем Дьюдени решению (рис. 115, слева), содержащем 4 части, требуется, чтобы вырезанный внутри креста маленький квадрат был наклонен под неким определенным углом. Однако положение и размеры квадрата можно менять в довольно широких пределах, причем число частей все еще будет оставаться равным 4. Второе решение, представленное на

¹ То есть с отрезком, проходящим через центр двенадцатиугольника и соединяющим две его противоположные вершины. (Диаметром плоской фигуры называется как расстояние между двумя самыми дальними ее точками, так и отрезок, соединяющий эти самые далекие точки.). — *Прим. ред.*

рис. 115, также принадлежит Дьюдени; оно возможно в том случае, если центр удаленного квадрата совпадает с центром креста, а площадь этого квадрата составляет $\frac{1}{5}$ площади креста.

Еще одним примером, в котором используется пополнение мозаик, служит задача о преобразовании квадрата с отрезанным углом в полный квадрат. Если из 4 таких

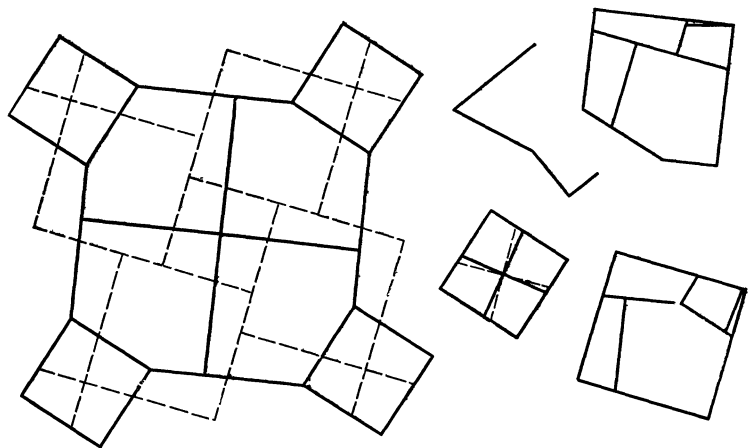
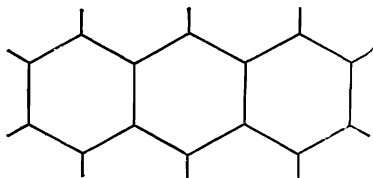


Рис. 116.

неполных квадратов мы сложим неправильный восьмиугольник, как показано на рис. 116, и добавим еще маленький квадрат, то получим составной элемент мозаики, немного напоминающий одну из мозаик рис. 113. В свою очередь 4 полных квадрата вместе с тем же маленьким квадратом, помещенным между ними, также образуют элемент некоторой мозаики, похожей на вторую мозаику рис. 113. Параллелограммы периодов у обеих полученных мозаик совпадают; следовательно, мы можем наложить эти мозаики друг на друга. При таком наложении должны совмещаться соответствующие центры симметрии, ибо мы хотим преобразовать один многоугольник в другой, а не четыре многоугольника в четыре. Отличие данного примера от предыдущих состоит в том, что теперь приходится разрезать и добавленные маленькие квадраты, а получающиеся при этом четверти квадра-

тов у двух наших мозаик различаются по форме. Следовательно, нам нужно еще преобразовать друг в друга соответствующие четверти квадратов. Найти такое преобразование нетрудно: для этого достаточно наложить друг на друга два маленьких квадрата вместе с разрезами. В результате мы получим решение нашей задачи, содержащее 5 частей.

Примерно так же решается задача о преобразовании квадрата с треугольным выступом в квадрат.



Глава 13

МОЗАИЧНЫЕ ПОЛОСКИ ТИПА II

Число P -полосок, которые удастся получить из какой-либо мозаики, удивительно велико. Так, если на рис. 73 мы должным образом проведем любую пару горизонтальных прямых, то получим полосу, порожденную шестиугольником. Иногда возникает чувство, что решение, которое мы получили, можно было бы улучшить, если бы только удалось выбрать нужную для этого полосу из бесконечно большого числа имеющихся в нашем распоряжении полосок. Сейчас мы на примере PT -разрезания греческого креста и шестиугольника объясним, как можно справиться с подобной трудностью.

Если мы получили полосу, порожденную шестиугольником, проведя горизонтальные прямые на рис. 73, то нам, во всяком случае известна ее ширина. Значит, при наложении данной полоски на T -полоску, образованную из греческих крестов с элементом, представленным на рис. 57, мы получим вполне определенный угол между этими полосками. Поэтому полоска, порожденная шестиугольником, может находиться лишь в одном из двух положений, показанных на рис. 117. Второе положение лучше, поскольку здесь получается меньше точек пересечения, так что сосредоточим свое внимание именно на нем.

Нам известно, какая именно часть полосы, образованной из греческих крестов, будет принадлежать общей области наших полосок — это параллелограмм, изображенный на рис. 117 справа. А продолжения сторон A и B

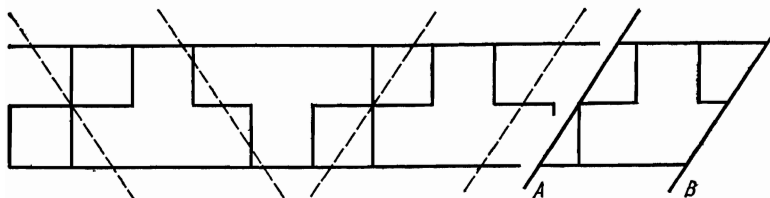


Рис. 117.

служат краями полосы, порожденной шестиугольником, и, значит, представляют собой конгруэнтные прямые на мозаике, тоже порожденной шестиугольником. Наложим поэтому данный параллелограмм на эту мозаику так, чтобы прямые A и B были горизонтальны. (Полезно нарисовать достаточно длинные отрезки прямых A и B ,

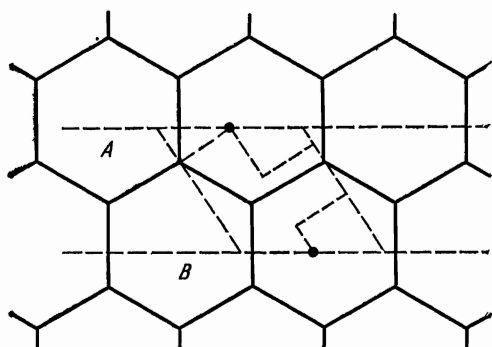


Рис. 118.

иначе их можно нечаянно повернуть, не заметив этого.) Теперь выясняется, что число разрезов в общей части двух полосок будет наименьшим в том случае, если мы расположим полоски так, как это показано на рис. 118. Таким образом, мы нашли лучшую из полосок, порожденных шестиугольником.

• Подобный метод хорошо применим к PT -разрезаниям, подобным изображенному на рис. 118, у которых

легко удастся определить часть T -полоски, принадлежащую общей области двух полосок. Иногда такую часть можно обнаружить и у P -полоски, о чем свидетельствует следующий пример.

Сложить из трех греческих крестов квадрат столь несложно, что мы смогли решить эту задачу еще в главе 1. Однако составить из тех же трех крестов один большой греческий крест не так-то просто. Возникающие здесь трудности связаны с количеством полосок, порожденных большим крестом. Даже если мы ограничимся полосками, параллельными CD (рис. 119), то и тогда их

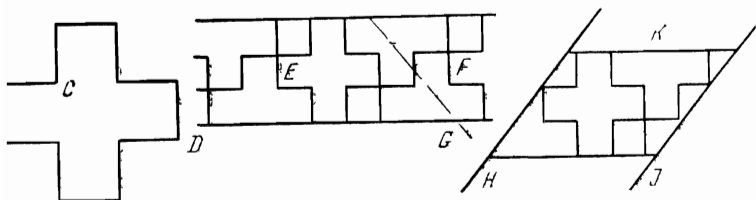


Рис. 119.

окажется бесконечно много; поэтому здесь хотелось бы поступить так же, как в случаях рис. 117 и 118.

С другой стороны, только одна из полосок, порожденных тремя крестами, кажется достойной внимания, а именно полоска, изображенная на рис. 21. Экспериментируя с мозаикой, мы обнаружим, что из других полосок заслуживают внимания только полоски ширины EF ; однако они для нас бесполезны, поскольку их ширина превосходит CD .

Как и прежде, мы знаем наклон полоски, порожденной одним крестом, относительно полоски, порожденной тремя крестами: он совпадает с наклоном прямой G или H . Следующий вопрос состоит в том, можно ли расположить края первой полоски на второй полоске наилучшим образом? Оказывается, это возможно в том и только в том случае, если края первой полоски наклонить так же, как H и J , и провести их через E и F ; тогда каждый край в единственной точке пересечет разрезы полоски, порожденной тремя крестами, а именно в точке E или соответственно в точке F . Таким образом, мы выбрали на полоске, порожденной тремя крестами, параллело-

грамм K , который совпадает с общей областью двух наших полосок.

Наилучшую полоску, порожденную одним крестом, можно получить теперь, наложив K на мозаику, порожденную этим же крестом, как показано на рис. 120; при

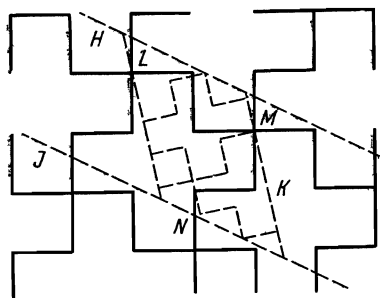


Рис. 120.

этом прямые H и J оказываются конгруэнтными. В общей области двух полосок должны быть по крайней мере две пунктирные линии, пересекающие ломаные LM и MN , а почти вертикальные стороны этой области

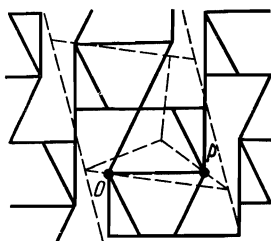


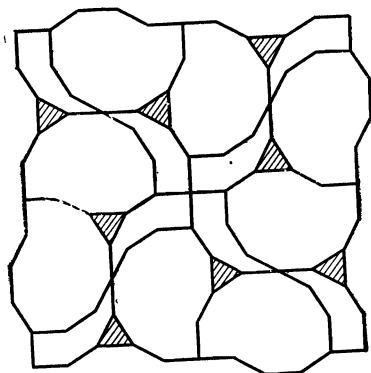
Рис. 121.

должны пересечь сплошные линии по крайней мере в двух точках, как, например, в точках L и M . Отсюда мы заключаем, что решение, представленное на рис. 120, улучшить нельзя.

Тем же приемом можно решить задачу о преобразовании мальтийского креста в шестиугольник, используя элемент, изображенный на рис. 29, и мозаику рис. II. 16. Решение, содержащее 14 частей, приведено на рис. 121.

Элемент, составленный из шестиугольника, расположен таким образом, чтобы его прямые проходили через точки O и P мозаики, порожденной крестом.

В последнем примере у нас был выбор: мы могли фиксировать предварительно общую часть двух полосок на полоске, порожденной шестиугольником, или на полоске, которая получается из мозаики, порожденной крестом. Но кто, скажите на милость, сумеет выбрать подходящую полоску на мозаике, порожденной мальтийским крестом? Ведь линии этой мозаики так причудливы! Поэтому мы, не мудрствуя лукаво, фиксируем общую область на полоске, порожденной шестиугольником.



Глава 14

РАЦИОНАЛЬНЫЕ РАЗРЕЗАНИЯ

Изучая перечень опубликованных задач на разрезание, мы обнаружим, что большую их часть составляют задачи на рациональные разрезания. Это, безусловно, связано с тем, что подобные разрезания легко придумать, да и головоломки, на них основанные, удастся сделать одновременно не слишком простыми и не слишком сложными. Обратившись к перечню задач, мы заметим также, что почти во всех подобных случаях требуется преобразовать некоторый многоугольник в квадрат. Это обстоятельство подсказывает нам, что, по-видимому, вряд ли целесообразно обращаться к фигурам, отличным от квадрата. Поэтому данную главу мы и посвятим рациональным разрезаниям многоугольников и квадрата.

Еще рассматривая рис. 15, мы могли заметить, что при ступенчатом разрезании прямоугольника и квадрата не требуется, чтобы отношение длины этого многоугольника к его ширине непременно было полным квадратом

вида $(n+1)^2/n^2$, где n — целое число. Однако необходимо, чтобы отношение длины прямоугольника к его ширине равнялось отношению квадратов двух целых чисел; и только в случае, если это будут два последовательных числа, мы получим решение, содержащее две части. Разбирая ступенчатые разрезы, содержащие

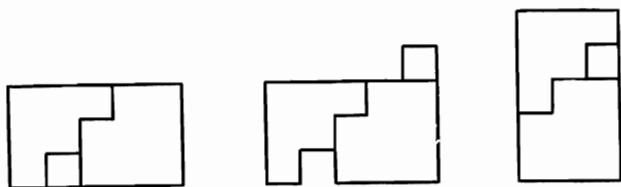


Рис. 122.

большее число частей, мы не преобразуем прямоугольник размера $m^2 \times n^2$ в квадрат со стороной mn . Вместо этого мы преобразуем прямоугольник размера $m \times n$ в прямоугольник размера $n \times t$, причем соответствующие части не должны поворачиваться. Поэтому ширину и высоту ступенек мы можем взять равной 1, что удобно



Рис. 123.

для экспериментов на бумаге в клеточку. Отсюда преобразование в квадрат получится при увеличении каждой длины в t , а каждой ширины в n раз.

Всякий не слишком длинный и узкий прямоугольник размера $m \times n$ можно преобразовать в прямоугольник $n \times t$, разрезав его предварительно на три части. На рис. 122 и 123 эта процедура показана соответственно для случаев $m = 5$, $n = 3$ и $m = 8$, $n = 5$. Как ясно из промежуточного шага, мы имеем здесь дело с «зубчатой» разновидностью P -сдвига.

Большинство подобных разрезов не лучше обычного P -сдвига, если только в головоломке специально не

оговорено, что следует применить ступенчатое разрезание; однако есть одно исключение. Оно возникает в том случае, когда вертикальный разрез A (рис. 123) передвинут в крайнее правое положение, как показано на рис. 124. Поскольку n может быть любым целым числом, а не только 5, как на рис. 124, мы получаем ступенчатое

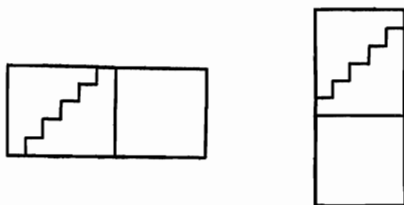


Рис. 124.

разрезание прямоугольника $(2n + 1) \times n$ в прямоугольник $n \times (2n + 1)$. Это соответствует преобразованию прямоугольника $(2n + 1)^2 \times n^2$ в квадрат. Далее, при обычном P -сдвиге, содержащем 3 части, отношение длины прямоугольника, преобразуемого в квадрат, к его ширине не может превосходить 4, в то время как данное ступенчатое разрезание позволяет нам превзойти эту

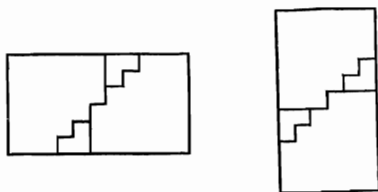


Рис. 125.

границу. При нашем способе максимальное отношение длины к ширине равно 9 (это значение получается при $n = 1$), а соответствующее решение довольно тривиально. Следующее по величине отношение, равное $25/4$ (при $n = 2$), приводит к рис. 15.

Если существуют ступенчатые разрезания, соответствующие P -сдвигу, то почему бы не быть и другим подобным разрезаниям, которые соответствовали бы Q -сдвигу? Они и в самом деле существуют, как видно из рис. 126, но возникающая здесь трудность связана

с тем, что стороны многоугольника должны быть параллельны либо горизонтальной, либо вертикальной части ступеньки, что привязывает нас к параллелограммам или их комбинациям. Таким образом, Q -сдвиги не имеют никаких преимуществ, за исключением симметрии, компен-

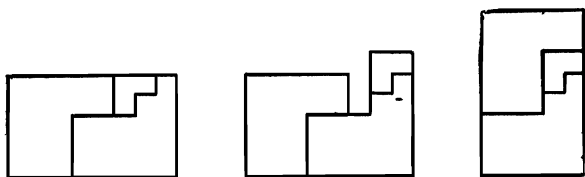


Рис. 126.

сирующей появление лишней части. По поводу же симметрии на основании рис. 122—125 можно сказать, что разрезы у исходного и конечного прямоугольников получаются друг из друга зеркальным отражением.

Вы, быть может, решили, что у всех ступенек ширина должна непременно совпадать с высотой. Однако рис. 126

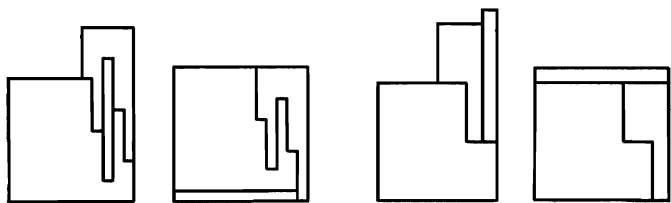


Рис. 127.

убедит вас в обратном. Промежуточный шаг в подготовке сдвига состоит здесь в том, что прямоугольник 3×2 в правом верхнем углу преобразуется в прямоугольник 2×3 . Числа 3 и 2 можно заменить другими целыми числами; предварительное ступенчатое разрезание не обязательно производить на верхней ступеньке; возможны комбинации таких разрезаний и т. д.

Персонажи головоломок Дьюдени и Лойда потратили много времени, сшивая лоскутные одеяла или, наоборот, распарывая их по швам. На рис. 127 изображены два

наиболее внушительных плода их усилий, которые служат наглядной иллюстрацией числовых тождеств

$$12^2 + 5^2 = 13^2, \quad 8^2 + 4^2 + 1^2 = 9^2.$$

Очевидно, что в обоих случаях решения минимальны.

Подобные задачи бесконечно разнообразны. Рассмотрим только преобразования двух квадратов в один.

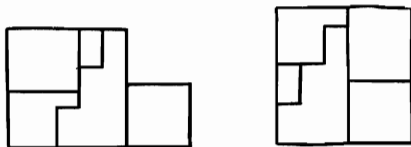


Рис. 128.

Обозначим длины сторон квадратов соответственно через a , b , c и предположим, что у этих чисел нет общего делителя, что $a < b$ и $a^2 + b^2 = c^2$. Если мы хотим получить решение, содержащее 4 части, нужно, чтобы выполнялось соотношение $b = c - 1$, как на рис. 19 и 20. Когда же это условие не выполняется, то часто

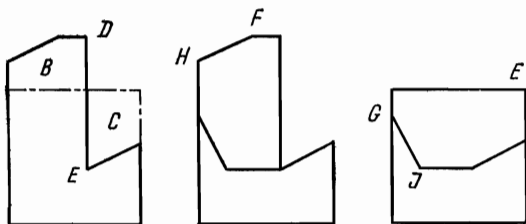


Рис. 129.

удается найти решение, содержащее 5 частей, преобразовав один из маленьких квадратов в Г-образный многоугольник, охватывающий две стороны другого маленького квадрата. Так, на рис. 128 показано, каким образом совершается это преобразование в случае, если $a = 8$, $b = 15$ и $c = 17$. Данное ступенчатое разрезание содержит 5 частей, как и T -разрезание на рис. 96, и так же, как и оно, наше разрезание минимально. Можно проверить, что условие, которому должно удовлетворять минимальное ступенчатое разрезание, состоит в следующем:

если $(c + a)/b$ или $(c + b)/a = p/q$ (несократимая дробь), то $p \leq 2q + 1$.

Мы коснемся здесь еще только рациональных разрезов, содержащих 2 части, причем одна из этих частей поворачивается на четверть оборота. Пример такого разрезания приведен на рис. 18. Подобные задачи можно решать шаг за шагом, как это видно из головоломки Лойда, изображенной на рис. 129. В данном случае не следует проводить разрез просто вдоль пунктирной линии, поскольку часть B нельзя будет затем поместить на

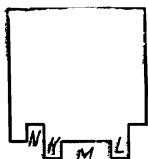
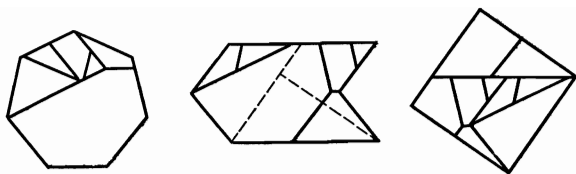


Рис. 130.

участке C . Однако, поскольку DE равно стороне равновеликого квадрата, мы можем поискать часть, ограниченную справа DE и такую, что при повороте ее на четверть оборота против часовой стрелки мы совместим DE с верхней стороной этого квадрата. Сравнивая исходную фигуру с квадратом, мы замечаем, что точка F определяет положение G , точка H определяет положение J и т. д. вплоть до вершины E искомого квадрата.

Изучая таким же образом фигуру, изображенную на рис. 130 (она совпадает с фигурой рис. 18 без разреза), мы замечаем, что K и L следует передвинуть, так что они должны располагаться на подвижной части. Поворот против часовой стрелки, очевидно, оказался бы здесь неудачным из-за расположения M . Напротив, поворот по часовой стрелке, при котором L займет положение M , обязательно приведет к разрезу, показанному на рис. 18.



Глава 15

СЕМИУГОЛЬНИК

Только в одном преобразовании многоугольников (мы его сейчас опишем) используется полоска, которую нельзя получить из соответствующей мозаики, представленной на рис. II. 7. Но даже и в этом исключительном

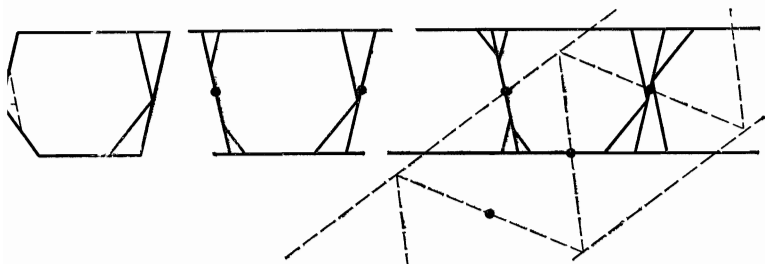


Рис. 131.

случае элемент полоски получается из элемента данной мозаики. Если мы преобразуем элемент мозаики так, как показано на рис. 131 слева, то получим при этом элемент T -полоски. С помощью TT_2 -разрезания мы можем теперь преобразовать исходный семиугольник в треугольник примерно так же, как мы прodelывали это в других задачах, где участвовал треугольник. Очень

маленькая часть портит в данном случае решение; однако никакие другие полосы не приведут к решению содержащему 9 частей.

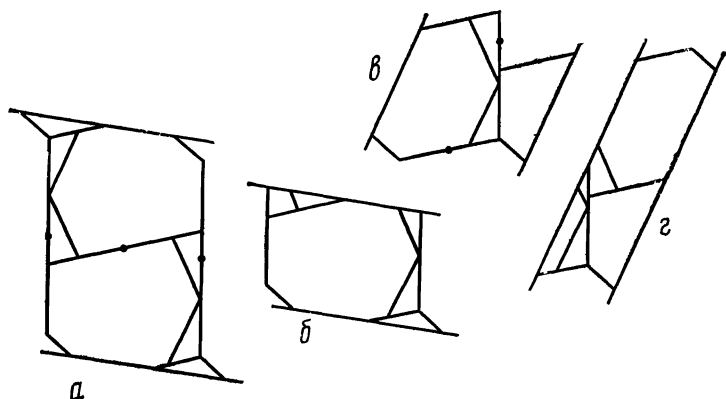


Рис. 132.

Минимальные преобразования семиугольника в другие многоугольники совершаются с использованием полос, полученных из данной мозаики, причем иногда столь малых частей, как мы видим на рис. 131, удастся избежать. (Однако полностью избежать малых частей

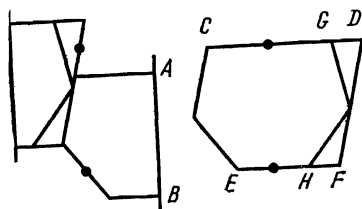


Рис. 133.

нельзя: семиугольник, несмотря на свою красоту, — многоугольник весьма «упрямый».) Дабы пояснить, каким образом полосы получают из нашей мозаики, соответствующие элементы полосы, представленные на рис. 132 и 133, изображены под теми же углами, как и на рис. II. 7.

На рис. 132, а представлены два элемента T -полоски, поскольку один такой элемент не соединяет оба края со-

ответствующей полоски. Если мы разрезаем вдоль нашу T -полоску на две равные части, то получаем при этом P -полоску, элемент которой изображен на рис. 132, б. На рис. 132, в показан еще один элемент T -полоски, разрезав которую пополам, мы опять получим P -полоску.

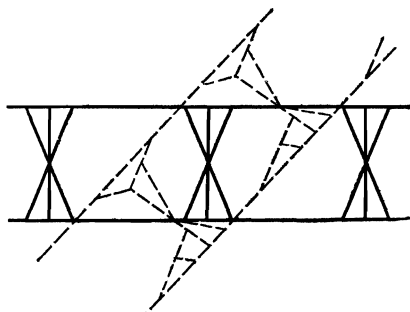


Рис. 134.

Края элемента T -полоски, изображенного на рис. 133 слева, на нашей мозаике вертикальны. Это легко показать, поскольку A и B — середины отрезков CD и EF ,

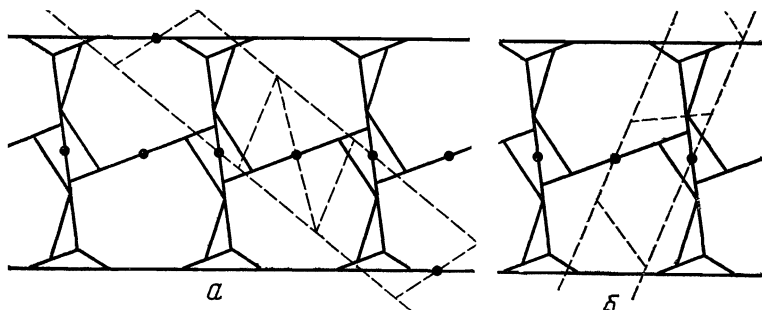


Рис. 135.

а значит, $GD = HF$ и поэтому отрезок AB параллелен (вертикальной!) прямой, проходящей через середины отрезков CG и EH .

Используя три из указанных полосок, мы можем преобразовать наш семиугольник в восьми-, пяти- и шестиугольник, в шестиконечную звезду и латинский крест. Соответствующие преобразования в том же порядке изображены на рис. 134—136.

Следует отметить, что все описанные преобразования семиугольника основаны только на одной из двух мозаик, упомянутых в связи с рис. 75. Несколько довольно случайных попыток создают впечатление, что вторая мозаика хуже первой, поскольку в основанных на ней пре-

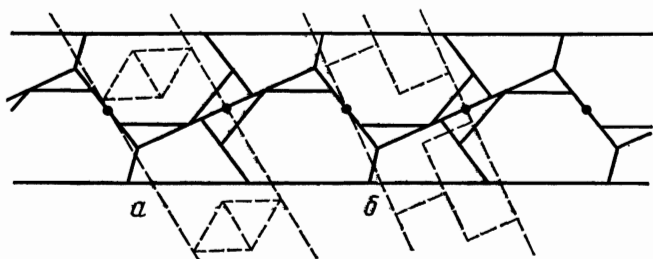
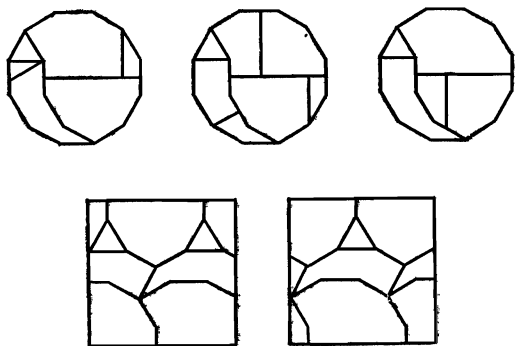


Рис. 136.

образованиях используется столько же или даже большее число частей и, кроме того, некоторые из этих частей оказываются очень маленькими. Однако никакого систематического исследования здесь не проводилось, и вполне возможно, что в одном-двух случаях вторая мозаика даст лучшие результаты, чем первая.



Глава 16

ДЕВЯТИУГОЛЬНИК

Быть может, кто-либо питает надежду, что девятиугольник окажется более «покладистым», чем семиугольник, поскольку углы между его сторонами и (или) хордами имеют «хорошие» значения — вроде 60° . Однако на самом деле разгрызть этот орешек гораздо трудней.

Задача о преобразовании девятиугольника в треугольник оказывается самой простой, и именно потому, что у девятиугольника есть хорда, образующая с некоторой стороной угол в 60° . Воспользовавшись этим обстоятельством, мы можем разрезать девятиугольник на 6 частей и сложить затем из них изображенный на рис. 137 новый многоугольник, который представляет собой трапецию B с треугольным выступом A наверху. Применив далее Q -сдвиг, уже упоминавшийся нами в связи с рис. 10, мы преобразуем нашу трапецию в другую трапецию с теми же углами, верхняя сторона которой равна стороне треугольника A . Таким образом,

Q-сдвиг преобразует объединение A и B в равносторонний треугольник — тот треугольник, который мы и хотим

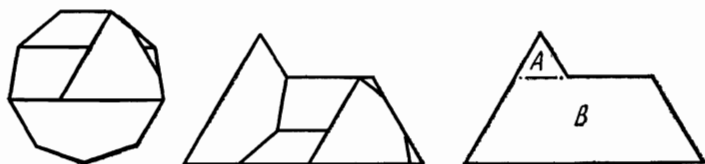


Рис. 137.

отыскать. На рис. 138 CD равно стороне искомого треугольника, E совпадает с серединой DF , G — середина HJ , HJ — продолжение KH и DM параллельно FK . Полное решение задачи о преобразовании девятиугольника

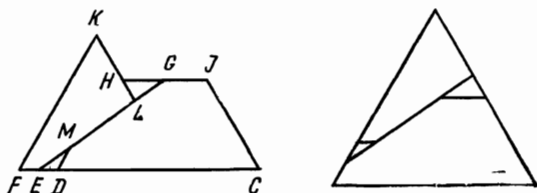


Рис. 138.

и треугольника мы получим, объединив разрезы на рис. 137 и 138, как показано на рис. 139.

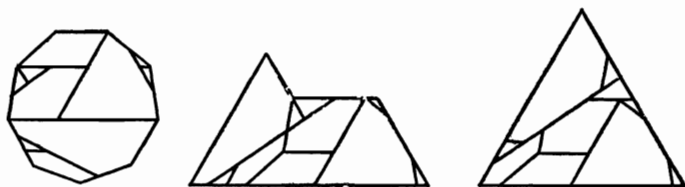


Рис. 139.

Можно и по-другому преобразовать девятиугольник в изображенную на рис. 137 справа трапецию с выступом. Правда, при этом мы будем иметь 7 частей вместо шести, но зато здесь появится одна лишняя степень свободы, которая позволяет найти второе решение нашей задачи с тем же числом частей, как и на рис. 139. Прямая N на рис. 140 может заканчиваться в любой точке

отрезка OP , так что положение прямой Q можно менять в достаточно широких пределах. Мы потребуем, чтобы отрезок RS равнялся стороне маленького треугольника; оказывается, это произойдет в случае, если T будет равно U . Сдвинув теперь маленький треугольник так,

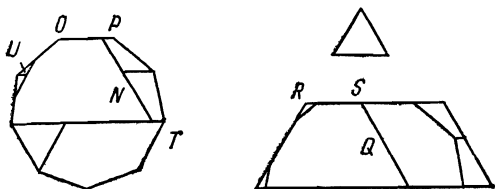


Рис. 140.

чтобы отрезок RS явился его нижним основанием, и добавив те же разрезы, что и выше, мы обнаружим (рис. 141), что отрезок HL (рис. 138) автоматически займет причитающееся ему место. Эта удача компенсирует появление дополнительной части на предыдущем шаге.

Треугольник и трапеция, скомбинированные в соответствии с рис. 137, образуют элемент мозаики. (Отсюда

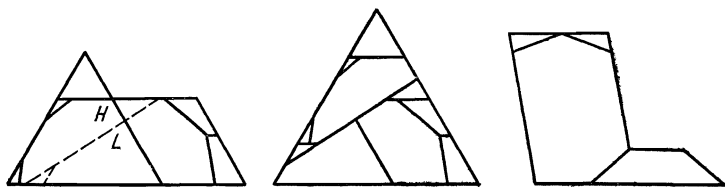


Рис. 141.

мораль: встретившись с каким-либо многоугольником, выясните, а не образует ли он элемент мозаики, ибо этого никогда нельзя знать заранее.) Однако в данном случае мозаика не приводит нас к экономным решениям, равно как и мозаика с элементом, изображенным на рис. 141 справа, даже, несмотря на то что этот элемент составлен всего из четырех частей.

Лучшие результаты получатся, если мы разрежем девятиугольник на 5 частей и сложим из них изображенную на рис. 142 фигуру, представляющую собой комби-

нацию из двух трапеций. Здесь величину V можно выбрать по нашему усмотрению, благодаря чему удастся превратить данную фигуру в элемент мозаики. Взглянув на рис. II.9, мы заметим, что у нас действительно получается мозаика, поскольку средние линии WX и YZ двух

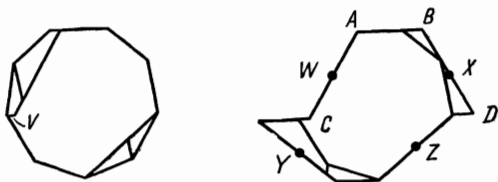


Рис. 142.

составляющих трапеций (рис. 142) равны между собой. Если площадь нашей фигуры, равную 20 квадратным единицам, разделить на суммарную высоту двух трапеций на рис. 142 (которая, как можно показать, равна

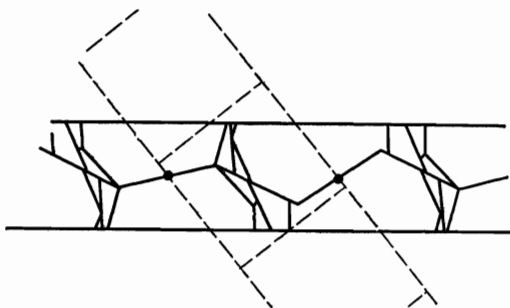


Рис. 143.

стороне девятиугольника, умноженной на $\frac{1}{2}\text{tg } 20^\circ$), то получится средняя ширина нашей фигуры, равная 3,9212. Воспользовавшись средним значением величин AB и CD , которое можно найти с помощью приложения III, мы приходим к соотношению

$$-V + s + s \cos 20^\circ + \frac{s \sin 20^\circ}{\sin 60^\circ} = -V + 4,1993,$$

откуда

$$V = 4,1993 - 3,9212 = 0,2781.$$

Если мы выберем именно такое V , то придем к мозаике, изображенной на рис. II. 9.

Нужную T -полоску мы получим из этой мозаики, проведя прямую YX и вторую параллельную ей прямую. На рис. 143 показано, как с помощью такой полоски решается задача о преобразовании девятиугольника в квадрат.

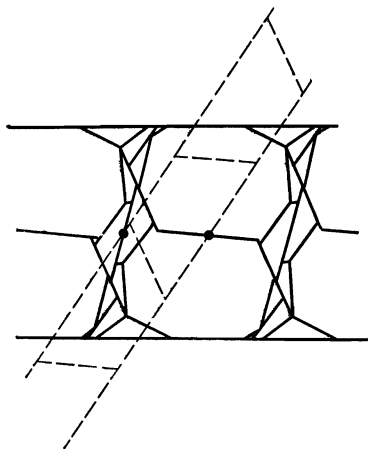


Рис. 144.

Из данной мозаики удастся получить достаточно много полосок, однако если мы попытаемся решить с их помощью соответствующие задачи, то обнаружим, что число частей при этом оказывается удручающе большим. Если мы захотим преобразовать наш девятиугольник в шестиугольник, то лучше всего нам подойдет полоска, которая ограничена на рис. 142 ломаной ZX и параллельной ей прямой, расположенной так, чтобы получилась T -полоска. Соответствующее решение представлено на рис. 144.

Решение Ирвинга Фриза. Когда эта книга была уже написана, мне на глаза попалось решение задачи о преобразовании девятиугольника и треугольника, содержащее всего 9 частей. Это решение настолько просто, что я, конечно, достоин осуждения за то, что упустил его из виду.

Суть решения состоит в том, что три трапеции, имеющиеся на рис. 145, *а*, преобразуются с помощью *PT*-разрезания в одну трапецию, показанную на рис. 145, *б*. Объединив эту последнюю с треугольником *Е*, можно получить искомый треугольник. Если эти три трапеции

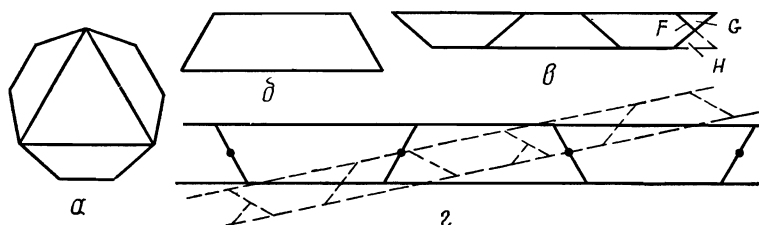


Рис. 145.

сложить друг с другом, то в результате получится элемент типа *T* (рис. 145, *в*); однако для получения минимального решения нам нужна *P*-полоска, элемент которой можно образовать, переместив часть *G* в положение *Н*. Разрезав этот элемент (параллелограмм) предварительно на 8 частей, можно преобразовать его в трапецию

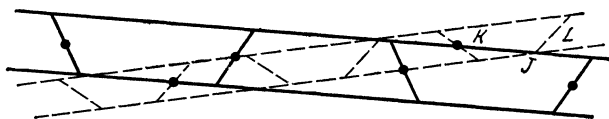


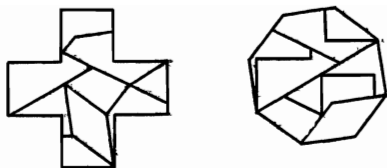
Рис. 146.

(рис. 145, *б*); это преобразование изображено на рис. 145, *г*.

Я испробовал всевозможные варианты *S*- и *Q*-разрезов, пытаясь преобразовать трапеции, которые вы видите на рис. 145, *а* и *б*, с помощью 7 частей, но, увы, тщетно. Иными словами, чтобы превзойти Фриза, надо попросту поискать иголку в стоге сена.

Одна из моих попыток оказалась почти успешной. Не будем трогать элемент на рис. 145, *в* и составим из него *T*-полоску. Наложим теперь соответствующие полосы друг на друга, как показано на рис. 146. Если бы при этом вершина *J* оказалась выше верхнего края второй

полоски, то мы получили бы решение задачи о преобразовании девятиугольника и треугольника, содержащее всего 7 частей. Однако вычисления показывают, что угол между нашими полосками равен $11^{\circ}46'$, а $\angle JKL$ вместо того, чтобы быть меньше этой величины, пренеприятным для нас образом равен $13^{\circ}5'$. В других задачах (см., например, рис. 51 и 70) нам в подобных случаях неизменно везло, но здесь расчеты восстали против нас. Правда, можно утешиться тем, что восьмая часть почти не видна невооруженным глазом, и, значит, мы получили все-таки решение нашей задачи, содержащее «почти» 7 частей.



Глава 17

ДЕСЯТИУГОЛЬНИК

Задачи на разрезание десятиугольника решаются гораздо легче, чем соответствующие задачи для девятиугольника. С последним все происходило не так, как следовало; обратившись же к десятиугольнику, мы с самого начала обнаружим несколько полезных для нас способов построения мозаики. Три такие мозаики изображены на рис. II. 10, II. 11 и 153¹.

Из первой мозаики полосы можно получить, если провести конгруэнтные прямые либо вертикально, либо под углом 18° к горизонтали в любом из двух направлений. (Полоски, идущие снизу вверх направо, отличаются от полосок, идущих сверху вниз направо, лишь тем, что каждая из них представляет собой зеркальное отражение другой.) Полоску, которая получается с помощью вертикальных конгруэнтных прямых, можно, как показано на рис. 147, а, использовать для преобразования нашего десятиугольника в «золотой» прямоугольник. На рис. 147, б изображено решение задачи о преобразовании десятиугольника в квадрат, в котором участвует одна из наклонных полосок. Другая полоска показана на рис. 147, в.

¹ См. также приложение VI.

Из второй мозаики полосы можно получить, проведя горизонтальные прямые, — только такие полосы нам здесь и понадобятся. Прямые следует провести через маленькие шестиугольники, оставляя большие части нетронутыми; о причине этого уже говорилось в связи

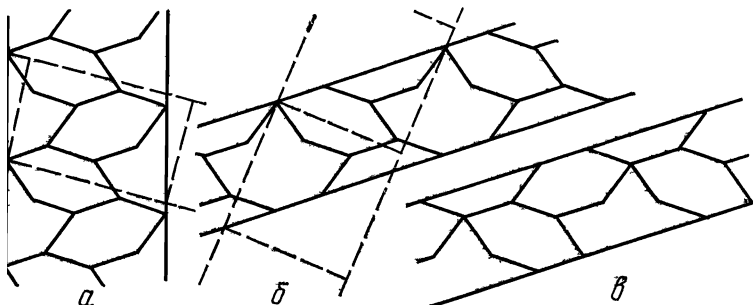


Рис. 147.

с рис. 48 и 49. Прямые, изображенные на рис. 148, *а*, проходят, кроме того, через центры маленьких шестиугольников. Однако есть подозрение, что решение можно улучшить, сдвинув немного эти прямые вверх или вниз.

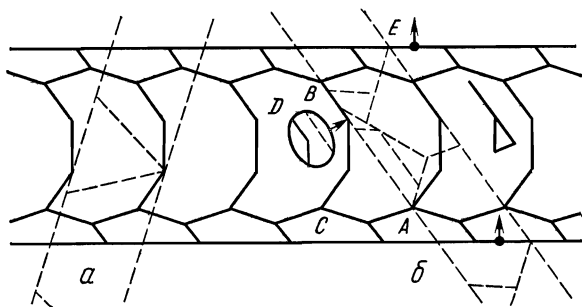


Рис. 148.

На первый взгляд кажется, что мы получим другое решение, если обратим выемки больших частей не налево, а направо. Но на самом деле мы придем в точности к тому же решению, лишь повернутому на 180° .

Поскольку наша полоска достаточно широка, то полоска, которую мы на нее наложим, должна быть достаточно узкой. Так, *Т*-полоска, порожденная треугольником, оказывается слишком широкой; однако *Р*-по-

лоска, которая получится, если мы проведем вдоль предыдущей полосы разрез, разделив ее на две равные части, уже достаточно узка, и с ее помощью мы находим практически минимальное решение задачи о преобразовании десятиугольника и треугольника (рис. 148, а).

Та же самая полоска позволит нам потешить собственное честолюбие, решив задачу о преобразовании десятиугольника в семиугольник. Стремиться сделать это с небольшим числом частей — значит желать слишком многого. На рис. 148, б показано наиболее экономное решение, которое мне удалось найти: оно содержит 14 частей. (Но, откровенно говоря, мне не нравится часть, иллюстрирующая феномен Гиббса¹ и изображенная отдельно справа.) Полоска, порожденная семиугольником, взята из рис. 132, г и наложена так, чтобы вершины двух наших полосок совпали с точкой *A*. Угол между полосками оказывается равным $54^{\circ} 13'$, а $\angle BAC$ равен 54° , так что край полосы, порожденной семиугольником, проходит вблизи стороны *D* десятиугольника, но не касается ее, как показано в овале. Вершины почти совпадают в точке *E*. Чтобы не оставалось сомнений в том, что разрезы здесь не пересекаются, полосу, порожденную десятиугольником, можно слегка приподнять, как показано вертикальными стрелками

Польза мозаики, изображенной на рис. II. 10, проявляется не только в задачах на разрезание, но и в сфере «чистого искусства». Эта мозаика очаровательна, и она станет еще красивее, если ее раскрасить в три цвета. У нее есть «семейное» сходство с мозаикой, порожденной элементом рис. 92.

Мозаика, представленная на рис. II. 11, также принадлежит некоторому (впрочем, довольно немногочисленному) семейству. К этому же семейству относится и мозаика на рис. II. 8, а простейшим членом данного семейства служит мозаика, порожденная шестиугольником.

Решение Ирвинга Фриза. Когда подготовка рукописи и рисунков для этой книги была уже почти закончена,

¹ Имеется в виду известный факт из теории рядов Фурье, обычно иллюстрируемый чертежом, изображающим заданную на отрезке функцию, «почти горизонтальную» на всем протяжении отрезка, кроме «утолщения» на его конце, с этим чертежом автор и сравнивает соответствующую часть рис 148 — *Прим ред.*

я получил изображенное на рис. 149 и ранее никогда не публиковавшееся решение задачи о преобразовании десятиугольника и квадрата, принадлежащее Ирвингу Фризу. Интересно проследить, как это решение соотносится с нашими методами, использующими полосы и мозаики.

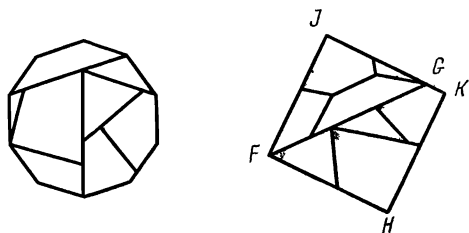


Рис. 149.

Для квадрата (как и для других простых многоугольников) характерно, что при разрезании его на полосы непременно находится прямая, вроде прямой FG , пересекающая весь квадрат. Эта прямая, разумеется,

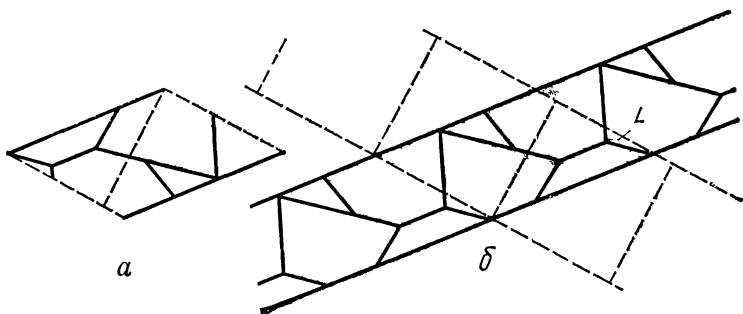


Рис. 150.

совпадает с краем полосы, порожденной десятиугольником; другой край этой полосы проходит через точку H , в то время как FH совпадает с краем полосы, порожденной квадратом. Значит, мы можем восстановить общий участок двух полосок, переместив треугольник FGJ так, чтобы отрезок FJ совпал с отрезком HK . Этот общий участок показан на рис. 150, a , причем линии, относящиеся к наложенной сверху полоске, порожденной квадратом, нанесены, как и обычно, пунктиром. Теперь

нам остается только продолжить рисунок этого общего участка в обе стороны, дабы восстановить полоску, порожденную десятиугольником, как и все PP -разрезание (рис. 150, б). Далее ясно, что часть L можно увеличить, сделав ее тем самым более близкой по размеру к остальным частям, переместив полоску квадратов, как это показано на рис. 151. По размерам частей это решение явно лучше решения, представленного на рис. 147, б.

Теперь возникает вопрос: можно ли получить данную полоску, порожденную десятиугольником, из некоторой

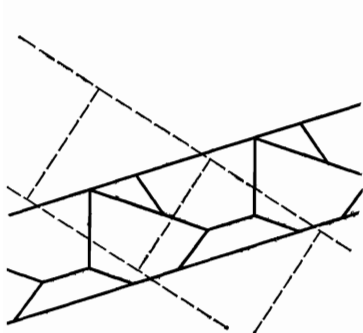


Рис. 151.

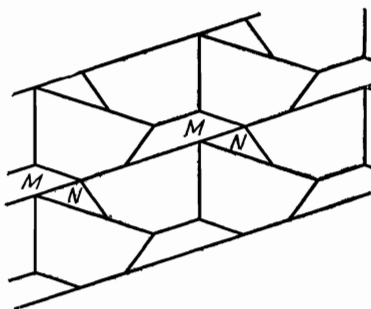


Рис. 152.

мозаики? Если это действительно так, то подобную мозаику мы сможем получить, прикладывая друг к другу экземпляры нашей полоски и следя за взаимным расположением линий на соседних полосках. Дабы найти правильное взаимное расположение, мы будем сдвигать одну полоску вдоль соседней полоски до тех пор, пока некоторая часть у верхнего края нижней полоски не расположится относительно некоторой части у нижнего края верхней полоски так же, как и на рис. 149. Такими частями будут части M и N на рис. 152. Следовательно, отрезок, разделяющий M и N , не принадлежит к линиям мозаики, а представляет собой часть одной из конгруэнтных прямых, ограничивающих данную полоску. Убрав этот отрезок, мы и найдем нужные разрезы десятиугольника (рис. 153, а), которые позволят сложить из него элемент искомой мозаики. Сам элемент представлен на рис. 153, б, а соответствующая мозаика — на рис. 153, в.

Используя полосу, восстановленную с помощью решения Фриза, мне удалось найти три решения, которые оказались более экономными, чем соответствующие решения, полученные с помощью мозаик на рис. II 10

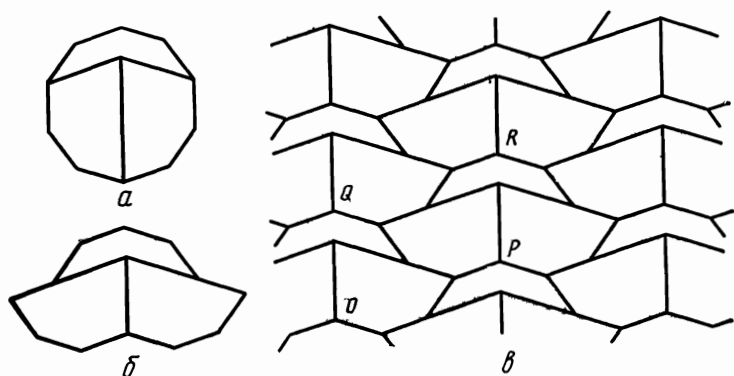


Рис. 153.

и II. 11. Два из них относятся к преобразованию десятиугольника в шестиконечную звезду и греческий крест и представлены соответственно на рис. 154. Третье решение относится к задаче о преобразовании десятиугольника и латинского креста и показано на рис. IV. 36.

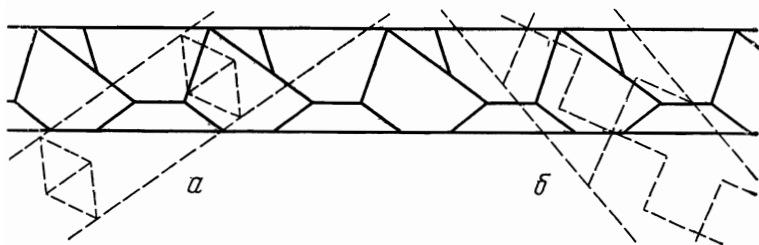
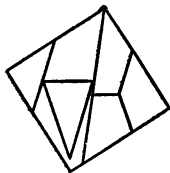
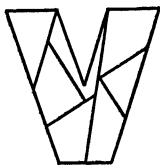


Рис. 154.

Другие полосы можно получить из рис. 153, в, проведя прямые OP , QR и OQ , PR . Некоторые решения, полученные с помощью этих полосок, оказываются столь же хорошими (однако, по-видимому, не лучшими), как и решения, в которых используются другие полосы

Случай с решением Фриза лишний раз показывает, что ум хорошо, а два — все же лучше.



Глава 18

МНОГОУГОЛЬНЫЕ БУКВЫ

В поисках новых областей для наших занятий мы обратимся к буквам латинского алфавита, составленным из прямолинейных отрезков. Буквы с криволинейными границами исключаются, поскольку их удастся преобразовать лишь в случае, если они весьма искривлены, да еще при этом так, чтобы края, содержащие выпуклые и вогнутые части границы, подходили друг к другу. Поэтому сосредоточим наше внимание на преобразовании в квадрат более «удобных» букв.

Существует молчаливое соглашение, по которому высота букв выбирается таким образом, чтобы она была в 5 раз больше толщины образующих буквы полосок. В соответствии с этим буквы, с которыми мы собираемся иметь дело, будут иметь вид, воспроизведенный на рис. 155. Хотя все они кажутся взятыми из наборной кассы, на самом деле большинство букв несколько изменено, дабы упростить разрезание. Так, толщина наклонных элементов равна толщине остальных элементов только при измерении по горизонтали. Эту единую для всех элементов толщину мы и примем впредь за единицу длины.

Преобразуя буквы, удобно пользоваться бумагой в клеточку, однако при этом не следует ограничивать их

площадь 20 квадратными единицами или каким-либо иным значением. Вместо этого нарисуйте буквы в любом масштабе, подходящем к данным клеткам, и если вы собираетесь накладывать полосы, то нарисуйте еще и

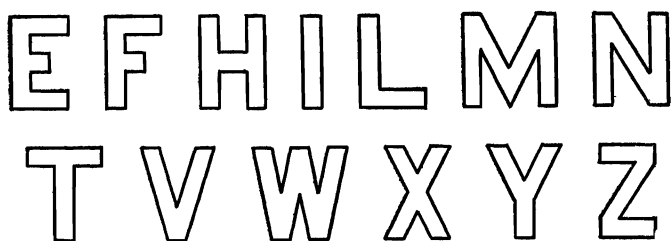


Рис. 155.

отдельную полосу, порожденную квадратом (соображаясь, разумеется, все с теми же клетками на бумаге).

Некоторые простейшие буквы очень легко преобразовать в квадрат, если воспользоваться *P*-сдвигом Са-

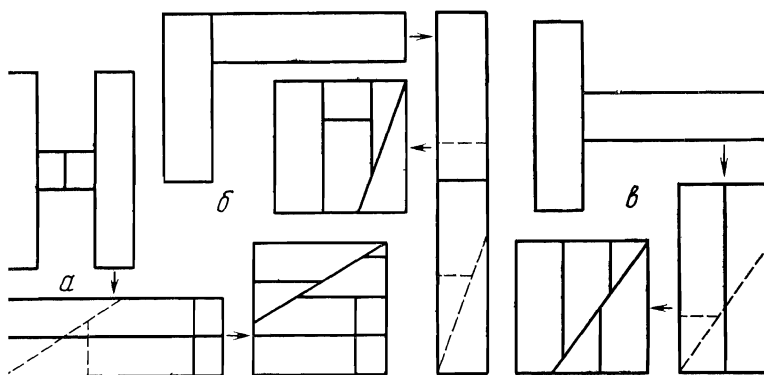


Рис. 156.

мый простой случай представлен на рис. 2. Другие примеры приведены на рис 156.

Букву *N* также можно преобразовать в квадрат с помощью *P*-сдвига, хотя в этом случае промежуточный шаг не столь непосредственно ясен. Площадь буквы *N* равна $13\frac{1}{3} = 5 \times 2\frac{2}{3}$ квадратных единиц. Поскольку высота ее вертикальных «палочек» равна 5 единицам,

у нас есть все шансы получить экономный полосный элемент длиной в 5 и шириной в $2\frac{2}{3}$ единицы. И в самом деле, после небольшого числа проб мы приходим к элементу, изображенному на рис. 157, из которого уже ничего не стоит получить прямоугольник. Если мы приме-

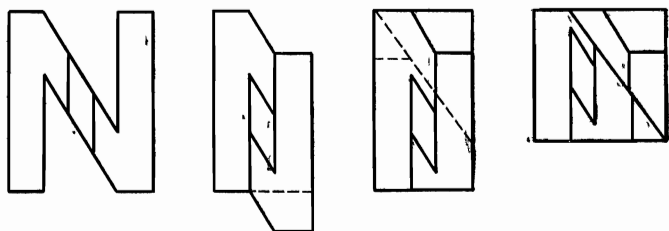


Рис. 157.

ним теперь к этому прямоугольнику *P*-сдвиг, то дополнительные разрезы пересекут уже сделанные разрезы всего лишь в одной точке, так что мы в итоге действительно получим весьма экономное преобразование буквы *N* в квадрат.

Способ решения, как мы только что видели, до некоторой степени зависит от площади соответствующей

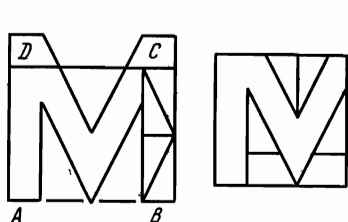


Рис. 158.

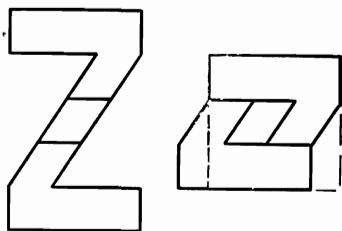


Рис. 159.

буквы. Площадь некоторых букв представляет собой полный квадрат натурального числа; так, например, площади букв *M*, *X* и *Z* равны соответственно 16, 9 и 9 квадратным единицам. В подобных случаях букву довольно легко преобразовать в квадрат методом проб и ошибок. Так, можно наложить квадрат *ABCD* размера 4×4 на букву *M* (рис. 158), а затем попытаться заполнить образовавшиеся внутри его пустоты теми частями *M*, которые оказались вне квадрата. Аналогичным образом

можно поступить и с буквой *Z* (рис. 159), хотя в данном случае найти решение еще легче, ибо подсказкой здесь может служить рис. 157.

Поскольку все элементы буквы *X* наклонны, мы не будем сразу преобразовывать ее в квадрат, а начнем с того, что сложим из нее параллелограмм, у которого длина основания и высота равны 3 единицам. Это можно сделать, перевернув части *E* и *F* (рис. 160) обратной стороной кверху так, чтобы они подошли к части *G*. В результате получается длинный и узкий параллелограмм, как бы собранный из трех одинаковых кусков.

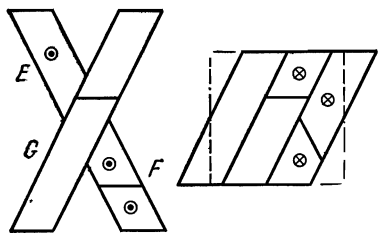


Рис. 160.

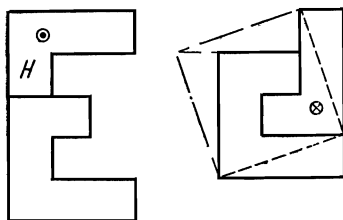


Рис. 161.

Проведя затем два вертикальных разреза, мы можем преобразовать этот параллелограмм в квадрат. Те части, которые мы переворачиваем обратной стороной кверху, помечены кружком соответственно с точкой или крестиком внутри его — обозначения, привычные для студентов электротехнических специальностей. Если вам не по душе уловка с переворачиванием частей, можно обойтись и без нее, правда ценой лишнего разреза (а значит, и лишней части), необходимого для того, чтобы подогнать объединение частей *E* и *F* к *G*.

Может оказаться, что площадь какой-то буквы равна не одному, а сумме двух точных квадратов. Так, площадь буквы *E* равна $10 = 9 + 1$ — арифметический факт, которому соответствует геометрическое преобразование Дьюдени, представленное на рис. 161. Дополнительные разрезы, позволяющие преобразовать данную фигуру в квадрат, позаимствованы из рис. 96. И здесь мы снова можем избежать переворачивания частей опять-таки ценой лишней части. Для этого нужно отделить маленький квадрат от части *H*.

Аналогично площадь F равна 8, числу, которое можно представить как произведение 4×2 . Так что попытайтесь решить задачу, накладывая мозаику, порожденную квадратом со стороной $2\sqrt{2}$, только будьте все время начеку. Таким образом удастся найти несколько решений, содержащих 5 частей. Одно из них, представленное на рис. 162, *а*, выбрано потому, что форма составляющих его частей менее всего подсказана исходной буквой.

Оказывается, что сама буква F представляет собой элемент некоторой мозаики, у которой половина элементов повернута на 180° (рис. 162, *б*). Наложив мозаику,

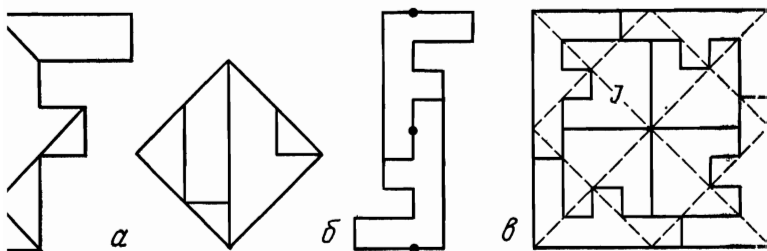


Рис. 162.

порожденную квадратом, на данную мозаику так, чтобы вершины квадратов совпали с центрами симметрии (отмеченными на рис. 162, *б* точками), мы получим еще одно отличное от рис. 162, *б* решение, содержащее 5 частей. Предыдущее решение тоже можно получить с помощью некоторой мозаики, хотя здесь построить мозаику, исходя из уже известного решения, легче, чем найти нужную мозаику, а по ней — решение. Опираясь на решение, приведенное на рис. 162, *а*, мы можем построить мозаику с двумя элементами, а именно с F и J (рис. 162, *в*). О мозаиках такого типа мы уже говорили в главах 11 и 12. Наложив на такую мозаику мозаику, порожденную квадратом, мы получим решение задачи о преобразовании буквы F в квадрат, содержащее 5 частей, и решение соответствующей задачи для элемента J , содержащее 4 части.

До сих пор мы имели дело лишь с простыми буквами. Но есть еще буквы V , W и Y , к которым, очевидно, применить P -сдвиг не так-то легко и площади которых,

равные соответственно $55/6$, $65/4$ и $15/2$, не выражаются квадратами рациональных чисел. Конечно, $65/4$ можно представить в виде суммы таких квадратов, да к тому же двумя различными способами; однако здесь нам пришлось бы действовать вслепую. Попытаемся поэтому применить к этим задачам наши общие методы, основанные на мозаиках и полосках.

Из двух букв V , одна из которых перевернута, можно сложить нечто вроде буквы N или буквы Z . Снова воспользовавшись намеком, содержащимся в рис. 157, превратим объединение двух букв V в элементы T -полоски,

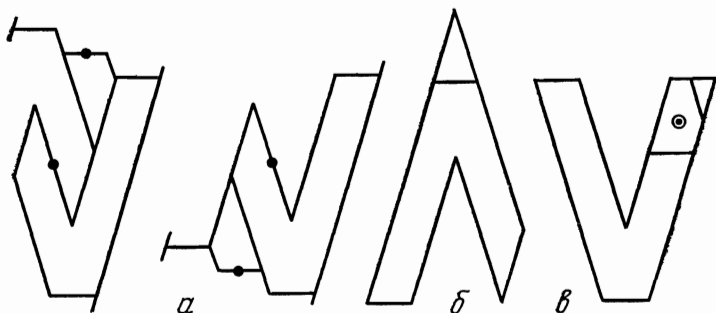


Рис. 163.

показанные на рис. 163, *а*. Поиск других вариантов приводит к элементу мозаики, представленному на том же рисунке в случае *б*. Воспользовавшись любым из этих трех элементов, мы придем к решению, содержащему 8 частей; однако лучше, если мы воспользуемся еще одним вариантом и проведем разрезы так, как показано в случае *в*. Расположив части так же, как это сделано на рис. 164, *а*, мы получим T -полоску, с помощью которой, применив TT_2 -разрезание, найдем решение, содержащее только 7 частей. Для того чтобы избежать перевертывания частей, мы можем ту часть, которую ранее переворачивали обратной стороной кверху, разрезать вместо этого на шестиугольник и треугольник.

После успеха с буквой V мы уже можем довольно легко сделать из W элемент T -полоски, изображенный на рис. 164, *б*. Но на этот раз можно получить лучшее решение, разрезав нашу T -полоску пополам и превратив ее тем самым в P -полоску (рис. 164, *в*).

Букву *У* также удастся преобразовать в элемент мозаики. Как это сделать, показано на рис. 165, *а*. В свою очередь из этого элемента можно легко получить эле-

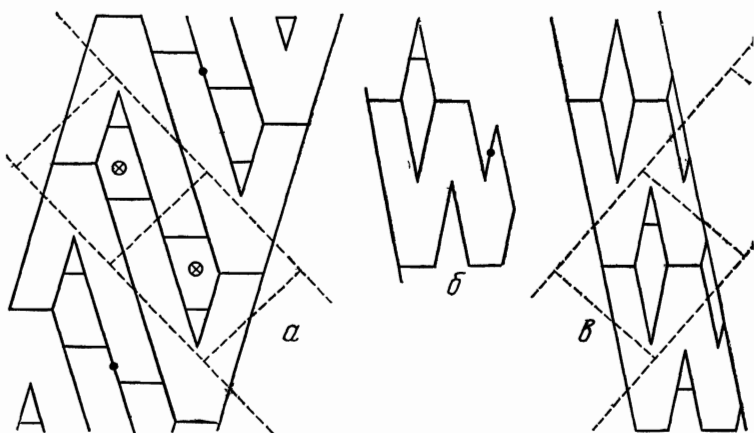


Рис. 164.

мент *Т*-полоски, с помощью которого нетрудно найти решение, содержащее 8 частей. Однако, если мы непосредственно воспользуемся найденной мозаикой и выделим

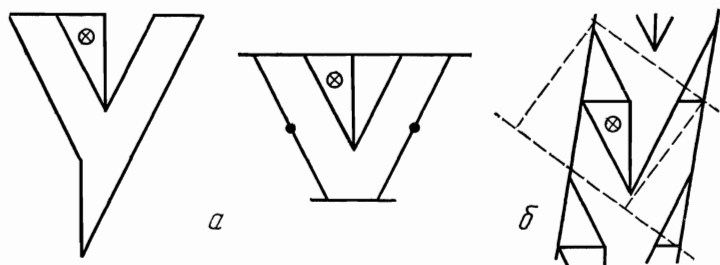


Рис. 165.

из нее изображенную на рис. 165, *б* *Р*-полоску, то придем к решению, содержащему 7 частей.

До сих пор мы игнорировали буквы *А* и *К*. По-видимому, к буквам, близким по написанию к типографским (рис. 166, *а* и *б*), лучше всего применить последовательные разрезы. Правда, при этом получается слишком

много частей, а многообещающая на первый взгляд процедура превращения K в прямоугольник с выемкой (рис. 166, θ) ни к чему не приводит. С другой стороны, то K , которое представлено на рис. 166 в случае $г$ и с которым справиться совсем легко, по сравнению с набор-

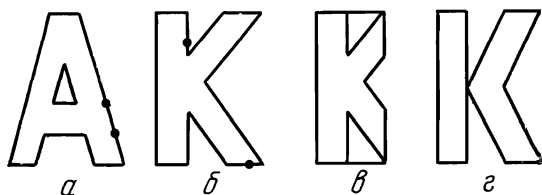


Рис. 166.

ными буквами слишком искажено. Поэтому я представляю решение задачи о буквах A и K тем, кто пожелает за них серьезно взяться.

Стоит упомянуть о двух решениях для буквы H , хотя используемые в этих решениях варианты написания этой буквы достаточно искажены по сравнению с привычными. Первое H , как показано на рис. 167, $а$, состоит из

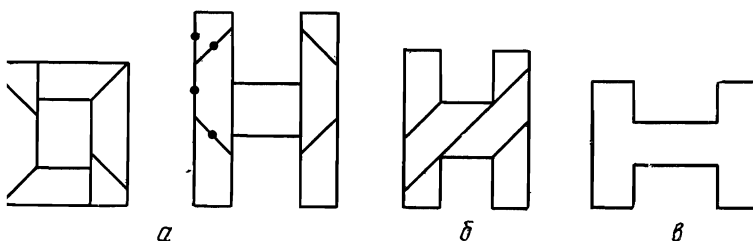


Рис. 167.

7 частей. Длина каждого из отрезков с отмеченными серединами в $\sqrt{2}$ раз превышает толщину вертикальных элементов. Размеры «перекладины» не существенны, поскольку задача состоит в том, чтобы убрать ее и сложить новое H из оставшихся 6 частей (рис. 167, $б$).

С другим, «коренастым» H (рис. 167, $в$) дело обстоит проще, поскольку оно уже само по себе служит элементом некоторой мозаики. Решение, принадлежащее Дж. Мейдечи, представлено на рис. 168, $а$, другое реше-

ние — на рис. 168, б. Можно преобразовать это *H* в греческий крест (рис. 168, в) или в два таких креста (рис. 168, г), наложив мозаики, порожденные соответствующими крестами, на данную мозаику.

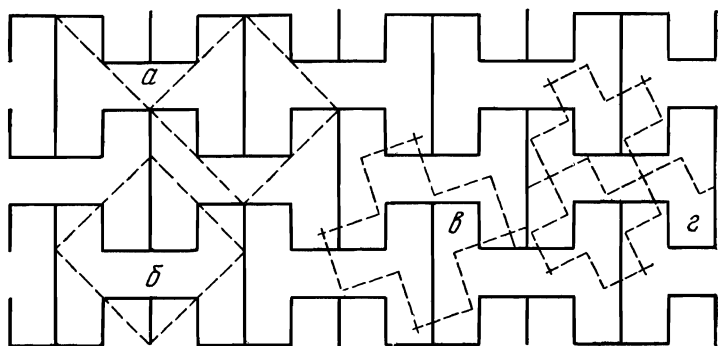


Рис. 168.

Можно расширить область наших исследований, обратившись от латинского к другим алфавитам. Решения для русских букв Г, Л и И (рис. 169) немедленно получаются из соответствующих решений для латинских букв *L*, *V* и *N*, а преобразование греческой буквы «кси» (см.



Рис. 169.

тот же рисунок) похоже на соответствующее преобразование латинской буквы *H*, только содержит 7 частей вместо 8.

Однако справиться с греческой буквой «дельта» уже гораздо труднее. Пусть форма этой буквы такова, как изображено на рис. 169, и пусть ее площадь равна $\frac{25}{2}$, а длина основания 5. Подобные размеры позволяют образовать элемент *T*-полоски, края которого составлены из оснований наших «дельт», как показано на рис. 170, а.

Верхнюю же часть буквы «дельта»отрежем и пока отложим в сторону (рис. 170, б). Мы хотим, чтобы левая часть элемента была симметричной относительно отмеченной точки; этого легче всего достичь, поместив край

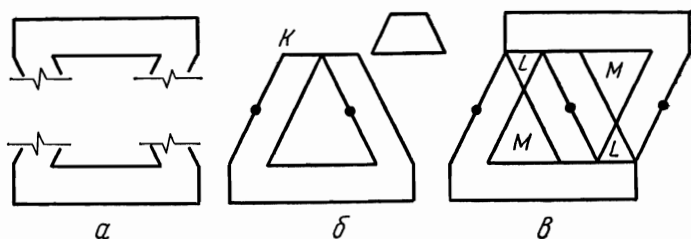


Рис. 170.

основания перевернутого элемента в точку *K*. Расположив таким образом перевернутый элемент, мы обнаружим, что элементы перекрываются в местах, обозначенных буквой *L* (рис. 170, в), и что, кроме того, имеются пустые участки *M*. Исправив очевидным образом этот

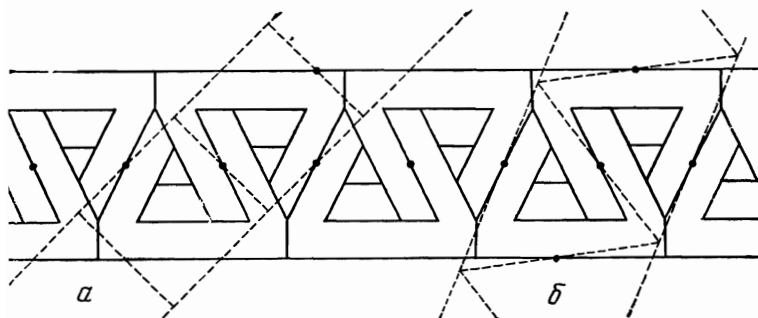
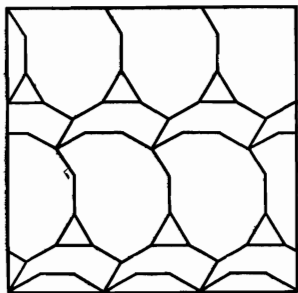


Рис. 171.

дефект, мы приходим к полоске, изображенной на рис. 171, а, с помощью которой удастся получить решение нашей задачи, содержащее 8 частей.

Столь небольшое число частей оказалось для нас приятным сюрпризом. Еще один такой сюрприз мы получим, если наложим на нашу полоску полоску, порожденную треугольником. Соответствующее *TT2*-разрезание приведет всего лишь к 7 частям (рис. 171, б).



Глава 19

ЗВЕЗДЫ

Последовательное разрезание пятиконечной звезды (пентаграммы) и квадрата представлено на рис. 72. Однако область применения последовательных разрезов весьма ограничена, так что мы подойдем к делу с другой стороны, используя мозаики и полосы.

На рис. 172 показаны простые способы, с помощью которых из пентаграммы можно получить элемент мозаики. Из первого элемента можно составить как P -, так и T -полоску, а поскольку он довольно широк, мы образуем с его помощью T -полоску, которую затем можно будет использовать в $TT2$ -разрезаниях (см. разрезание на рис. 63). При помощи этой полоски решается задача о преобразовании пентаграммы в шестиугольник (рис. 173, a).

Пентаграмму удастся преобразовать также и в треугольник. На рис. 173, b наложение соответствующих полосок показано так, как если бы угол между ними равнялся 72° , а не $73^\circ 48'$, что имеется на самом деле. Поскольку точное значение угла больше 72° , стороны

полоски, порожденной треугольником, следует слегка повернуть против часовой стрелки вокруг точек A и B , сузив тем самым полоски, и вставить крошечный кусочек в образовавшийся зазор (показан отдельно в кружочке). Однако если мы оставим, скажем, стороны не-

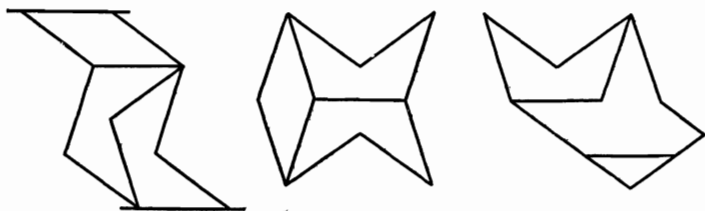


Рис. 172.

изменными, то между ними сможем нарисовать пунктиром треугольники, у которых $\angle \alpha = 60^\circ 54'$, а $\angle \beta = \angle \gamma = 59^\circ 33'$. Таким образом, мы получили бы приближенное решение задачи о преобразовании пентаграммы и равностороннего треугольника, содержащее

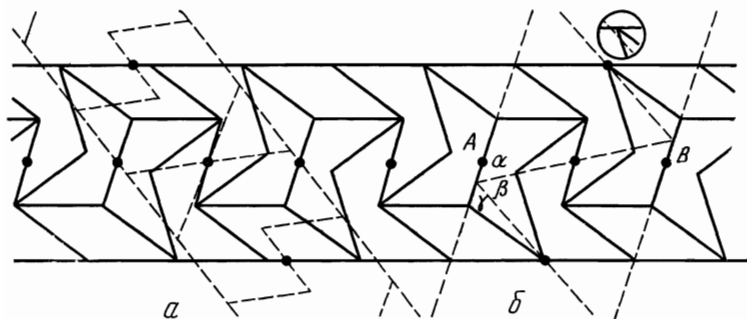


Рис. 173.

7 частей. Точное решение содержит на две части больше. Одной из этих дополнительных частей служит крошечный кусочек, показанный отдельно в кружочке, а вторая часть представляет собой узкий шип, образовавшийся в результате вращения между левым краем пунктирной полоски и одним из разрезов сплошной полоски. Величина первого дополнительного кусочка и форма второго никак не служат украшением данного решения; хотелось бы получить лучшее решение, содержащее 9 частей.

Гексаграмма «покладиста» в той же степени, в какой «неуступчива» пентаграмма, и она встречалась нам уже в нескольких задачах. Решения еще двух задач представлены на рис. 174. Их, конечно, можно отнести к S - или T -разрезаниям, но метрические соотношения между

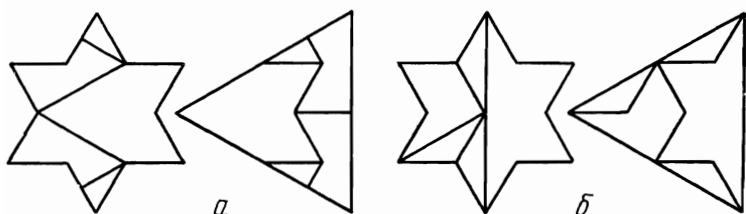


Рис. 174.

гексаграммой и треугольником столь просты, что нет необходимости призывать на помощь мозаики и полоски.

Из других полиграмм¹ (правильных звезд) мы отметим в этой главе только октаграмму $\{8/2\}$, то есть звезду, которая получится, если мы соединим между собой отрезками все вершины правильного восьмиугольника

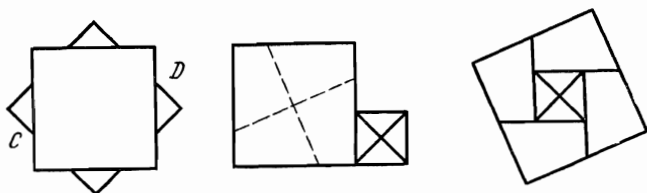


Рис. 175.

через одну. Ее легко превратить (рис. 175) в два квадрата, из которых затем можно сложить один квадрат (рис. -96). Другие решения той же задачи можно найти методом проб, основываясь на том, что, как видно из рис. 175, сторона равновеликого квадрата равна CD ; однако ни одно из этих решений не симметрично в той же степени, как и описанное выше решение.

¹ Если мы говорим «многоугольник», «треугольник», «четыреугольник» или « n угольник», то ради чего мы должны отказаться от терминов «полиграмма» и « n -грамма»?

S - и T -методы всегда можно применить к звездам, но я, признаться, не испытываю особого интереса к большинству таких задач. Гораздо поучительней преобразование звезды и многоугольника, размеры которого просто связаны с размерами этой звезды, в силу чего число частей оказывается довольно небольшим. Такие задачи мы еще обсудим в главе 20.

Естественно, возникает и задача о преобразовании n -граммы в n -угольник, поскольку их углы просто связаны между собой. Но вообще говоря, между их линейными размерами нет простого соотношения, что затрудняет решение. Потерпев неудачу здесь, мы можем попытаться найти простое решение для звезд с n вершинами, которые не являются n -граммами¹. Конечно, легче начинать с n -угольника и смотреть, в какую звезду его можно преобразовать.

Оказывается, что сделать это довольно просто, и мы разберем соответствующий способ на примере рис. 176, а. Поскольку, как мы сейчас увидим, сторона треугольной части, расположенной в центре, равна половине стороны исходного треугольника, разрезы удобней всего проводить, нарисовав сначала эту центральную часть. Проведем окружность, центр которой совпадает с центром маленького треугольника и радиус которой в два раза больше радиуса окружности, описанной вокруг этого треугольника. Продолжим теперь его стороны до пересечения с данной окружностью в точках E , F , G и соединим эти точки между собой. То же самое можно сделать и с любым n -угольником.

Обоснование подобной конструкции мы проиллюстрируем для случая $n = 4$, хотя оно годится и в общем случае. Пусть сторона исходного n -угольника равна 2, а сторона маленького n -угольника равна 1. Тогда (рис. 176, б) нам достаточно доказать, что $HJ = HK$. В этом случае лучи звезды будут представлять собой равнобедренные треугольники, построенные как на осно-

¹ Полиграмма $\{m/k\}$ получится, если соединить каждую вершину правильного m -угольника с «отстоящими от нее на k » вершинами (например, полиграмма $\{7/3\}$ получается при соединении каждой вершины семиугольника «через две с третьей»), но наряду с этим из правильных многоугольников можно получить много других (даже достаточно симметричных) звезд, не являющихся полиграммами. — *Прим. ред.*

ваниях на сторонах правильного n -угольника, образованного точками $JKLM$, так что звезда окажется, как нам этого и хотелось, достаточно симметричной.

Пусть $MO = x$. Тогда

$$HP = NQ = x + 1,$$

$$HJ = HP + PR - JR = x + 1 + 1 - x = 2 = NS = HK,$$

что и требовалось доказать. Если бы вы захотели пойти более трудным путем, начав с исходного (а не с маленького) n -угольника, то вам удалось бы показать, что

$$x = \frac{1}{2} \left[\sqrt{3 \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{n} + 1} - 1 \right],$$

применив теорему косинусов к треугольнику NQS .

Эти звезды с n лучами можно сделать в виде шарнирных моделей. Так, каждый $\triangle NQS$ на рис. 176, б

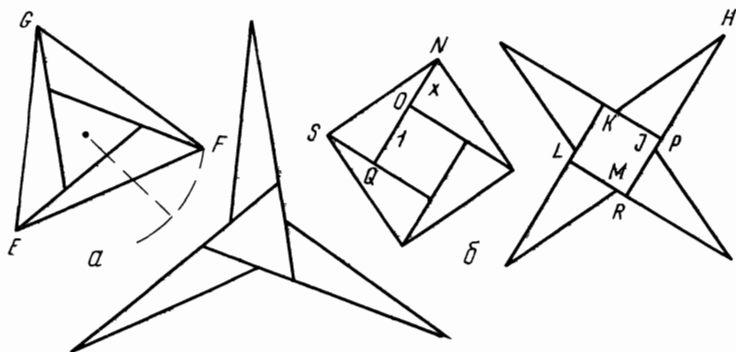


Рис. 176.

можно шарнирно прикрепить к центральному квадрату в точке Q , а затем, повернув его против часовой стрелки, перевести в положение T .

Данное решение можно модифицировать. Разрезав пятиугольник на маленький пятиугольник и 5 треугольников, как это показано на рис. 177, а, поверните $\triangle UVW$ не вокруг точки U , как раньше, а вокруг оси UX так, чтобы он занял положение UYZ . Заметим далее, что треугольники WXY и ZXV «зеркально равны» друг другу; поэтому мы можем получить ту же конфигурацию, повернув вокруг UX лишь $\triangle WXY$. Итак, ототрежем только маленькие треугольники вроде WXY , повернем их, как

указано выше, и вновь получим при этом пятиконечную звезду. Такое решение показано на рис. 177, б, причем вместо того, чтобы перевертывать 5 маленьких частей,

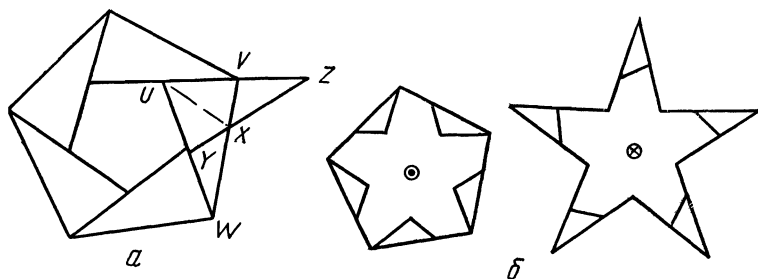


Рис. 177.

мы перевернули обратной стороной кверху одну большую часть. Если вы попытаетесь получить подобное решение без перевертывания, то это вам не удастся, ибо этому препятствуют законы геометрии.

Той же идеей можно воспользоваться и для того, чтобы преобразовать n -угольник в $2n$ -угольную звезду.

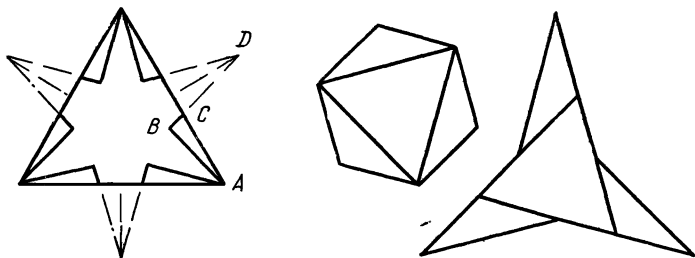
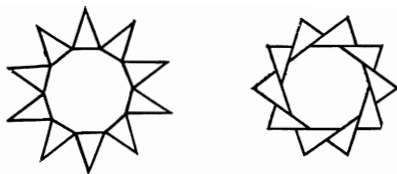


Рис. 178.

Однако (рис. 178) не все лучи будут при этом одинаковы, ибо

$$AB < AC = CD < BD.$$

Обратную задачу о преобразовании $2n$ -угольника в n -угольную звезду с помощью развитого выше метода удастся решить только в случае шестиугольника. В следующей главе мы укажем более удачный прием, распространяющийся и на процедуру преобразования любого n -угольника в $2n$ -грамму.



Глава 20

СНОВА О ЗВЕЗДАХ

Взглянув на рис. 90—93, 174 и 175, мы заметим одну общую для них особенность. А именно концевые точки каждого разреза в более сложном из двух многоугольников определяются пересечениями хорд. В n -угольнике или n -грамме угол между двумя хордами равен π/n или кратен π/n , если n четно, а если n нечетно, то он может быть дополнительным к такому углу. Следовательно, при данном разрезании любая сторона любой части равна стороне исходного многоугольника, умноженной на рациональную функцию от синусов и косинусов углов, кратных π/n . (Такую рациональную тригонометрическую функцию впредь мы будем обозначать RTF.) Ограничимся парой многоугольников, у которых углы π/n равны или один из углов равен целому кратному другого с небольшим множителем. В подобных случаях, если решение обладает вышеуказанной характерной чертой, сторона s_2 второго многоугольника равна умноженной на RTF стороне s_1 исходного многоугольника. Преобразование двух таких многоугольников, как мы видели, оказывается необычайно экономным. Это побуждает нас заняться систематическим исследованием таких пар многоугольников.

Площадь A правильного n -угольника равна n -кратной площади треугольника, который получится, если соеди-

нить центр C исходного многоугольника с его соседними вершинами D и E (рис. 179, a). Нетрудно заметить, что

$$A = \frac{1}{4} n s^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}, \quad A = \frac{1}{2} n R^2 \sin \frac{2\pi}{n},$$

откуда

$$s^2 = \frac{4A}{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}, \quad R^2 = \frac{2A}{n} \operatorname{cosec} \frac{2\pi}{n}, \quad (1)$$

Площадь полиграммы $\{n/m\}$ равна $(2n)$ -кратной площади треугольника, который получится, если соединить ее центр F с соседними вершинами G и H (рис. 179, b),

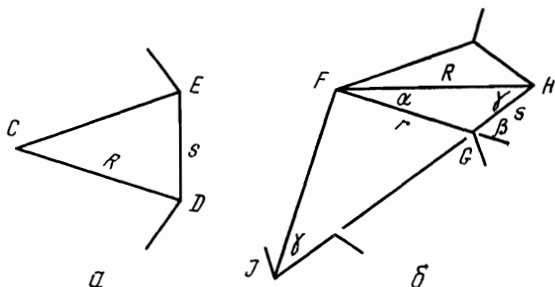


Рис. 179.

Эту меньшую площадь можно выразить тремя способами:

$$Rr \sin \alpha = rs \sin \beta = Rs \sin \gamma = \frac{A}{n}. \quad (2)$$

Мы должны найти α , β , γ . Из рис. 179, b следует, что

$$\alpha = \frac{\pi}{n},$$

а поскольку $\angle HFJ = 2\pi m/n$, то

$$\gamma = \frac{1}{2} \pi - \frac{\pi m}{n}, \quad \beta = \gamma + \alpha = \frac{1}{2} \pi - \frac{\pi(m-1)}{n}.$$

Подставляя эти выражения в (2), получаем

$$Rr \sin \frac{\pi}{n} = rs \cos \frac{\pi(m-1)}{n} = Rs \cos \frac{\pi m}{n} = \frac{A}{n},$$

а разделив последовательно произведение всех трех выражений на квадрат каждого из них, придем к формулам

$$s^2 = \frac{A \sin \frac{\pi}{n}}{n \cos \frac{\pi(m-1)}{n} \cos \frac{\pi m}{n}}, \quad (3)$$

$$R^2 = \frac{A \cos \frac{\pi(m-1)}{n}}{n \cos \frac{\pi m}{n} \sin \frac{\pi}{n}}, \quad r^2 = \frac{A \cos \frac{\pi m}{n}}{n \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi(m-1)}{n}}.$$

Найти все три величины оказалось столь же просто, как и одно s !

Вернемся теперь к нашим задачам. Если отношение сторон многоугольников, задаваемых формулами (1) и (2), есть RTF, то мы можем надеяться на экономное решение. Так, в случае двенадцатиугольника {12} и квадрата {4} имеем

$$\frac{s_{\{12\}}}{s_{\{4\}}} = \sqrt{\frac{1}{3} \operatorname{tg} 15^\circ} = \sqrt{\frac{1}{3} (2 - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{6}}.$$

Это RTF от 15° , так что мы могли бы предвидеть рис. 90—93. Здесь равенство отношения RTF еще легче усмотреть из формулы

$$\frac{s_{\{4\}}}{R_{\{12\}}} = \sqrt{6 \sin 30^\circ} = \sqrt{3} = 2 \cos 30^\circ. \quad (4)$$

Вернемся к звездам. Мы искали подходящие пары многоугольников, выражая в виде некоторых радикалов отношения их сторон s , где до сих пор было $n = 3$ или 6, 8, 10, 12; далее мы выяснили, какие из этих отношений представляют собой RTF. В одних случаях тригонометрическая запись дроби подсказывает общее соотношение, частным случаем которого является данное; в других — найденное частное решение приводит к общему соотношению; в третьих случаях не удастся найти ни того, ни другого. Не важно, найдем ли мы отношение соответствующих друг другу в двух многоугольниках величин s , R , r или «смешанное» отношение вроде s/R [см. (4)], поскольку отношение каждой из этих трех величин к двум другим есть RTF.

Возьмем, например, отношение

$$\frac{s\{3\}}{s\{6/2\}} = 2\sqrt{3},$$

которое, как мы и могли предполагать, взглянув на рис. 174, представляет собой RTF. В тригонометрической форме оно выглядит так:

$$\begin{aligned} \frac{s^2\{3\}}{s^2\{6/2\}} &= \frac{4A \sin 60^\circ}{3 \cos 60^\circ} \cdot \frac{6 \cos 60^\circ \cos 30^\circ}{A \sin 30^\circ} = \frac{8 \sin 60^\circ \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \\ &= \frac{16 \sin 30^\circ \cos^2 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 16 \cos^2 30^\circ; \end{aligned}$$

здесь полный квадрат получается в результате сокращения на $\cos 60^\circ$ числителя и знаменателя второй дроби и

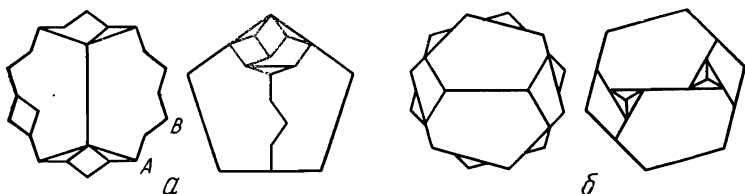


Рис. 180.

на $\sin 30^\circ$ числителя и знаменателя четвертой. Нетрудно вывести и общее соотношение

$$\begin{aligned} \frac{s^2\{n\}}{s^2\{2n/2\}} &= \frac{4A \sin \frac{\pi}{n}}{n \cos \frac{\pi}{n}} \cdot \frac{2n \cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{2n}}{A \sin \frac{\pi}{2n}} = \\ &= \frac{8 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} = \frac{16 \sin \frac{\pi}{2n} \cos^2 \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} = 16 \cos^2 \frac{\pi}{2n}, \end{aligned}$$

где множитель $\cos \pi/n$ сокращается во второй, а $\sin \pi/2n$ — в четвертой дроби. Здесь

$$\frac{s\{n\}}{s\{2n/2\}} = 4 \cos \frac{\pi}{2n}, \quad (5)$$

то есть сторона n -угольника равна удвоенному расстоянию (рис. 180, а) между смежными вершинами равновеликой звезды $\{2n/2\}$. Решения, основанные на формуле

(5), представлены на рис. 174, б, 175, 180, а и б. В последнем случае мы используем мозаику рис. 99 точно так же, как в решении рис. 175 использовалась мозаика рис. 96.

Из того что существует соотношение вроде (4) или (5), следует, что существует решение, каждый разрез

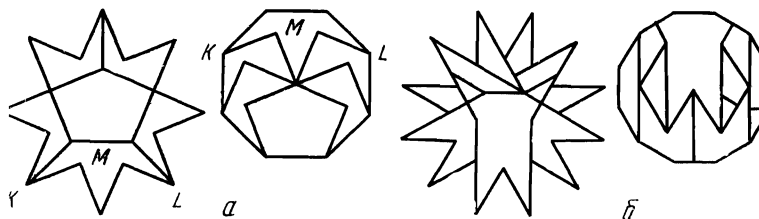


Рис. 181.

которого выражается с помощью RTF. Эти разрезы не обязательно определяются пересечениями хорд, хотя именно так обстоит дело в большинстве случаев. Два разреза на рис. 174, а не определяются хордами, но их длины, очевидно, выражаются как RTF. С другой стороны, может случиться, что наиболее экономное решение содержат разрезы, не выражающиеся через RTF.

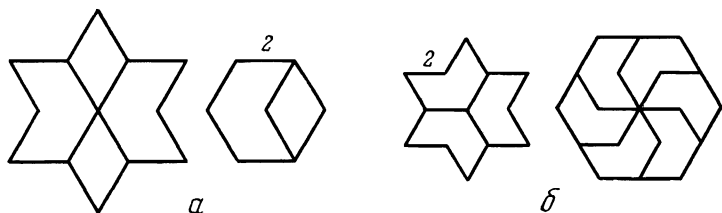


Рис. 182.

Общее соотношение, которое, как мы увидим, подсказано разрезанием, имеет вид

$$\frac{R \{2n\}}{s \{2n/(n-1)\}} = \sqrt{2}. \quad (6)$$

Если n четно, то $\sqrt{2}$ представляет собой RTF от $\pi/2n$. Поэтому мы ищем и находим преобразование звезды $\{8/3\}$ в восьмиугольник (рис. 181, а) и преобразование

звезды $\{12/5\}$ в двенадцатиугольник (рис. 181, б). Если же n нечетно, то $\sqrt{2}$ уже не всегда будет RTF, как нам требуется. Но мы можем надеяться, что удастся преобразовать один многоугольник в два, поскольку в этом случае правая часть (6) обращается в 2 или в 1. Рис. 182 иллюстрирует простые примеры подобной ситуации.

Преобразование двух $2n$ -угольников в звезду $\{2n/(n-1)\}$, предсказанное формулой (6) и изображенное на рис. 183, а, кажется тривиальным. Конечно, то, что получается звезда, тривиально, но менее тривиально то, что эта звезда — полиграмма. Кроме того, именно

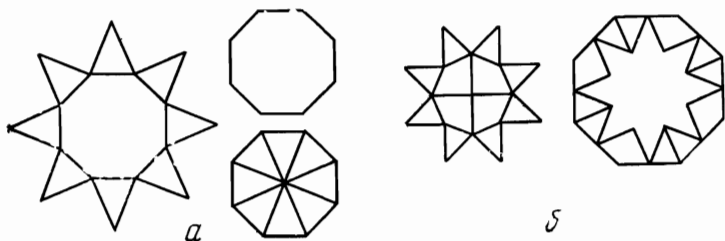


Рис. 183.

рис. 183, а приводит к общему соотношению (6), а (6) в свою очередь приводит к рис. 181. Решения, подобные тому, которое представлено на рис. 183, а, существуют при любых значениях n в (6). По-видимому, все они минимальны, за исключением случая $n = 3$.

Заменив в (5) n на $2n$, мы получим

$$\frac{s \{2n\}}{s \{4n/2\}} = 4 \cos \frac{\pi}{4n}. \quad (7)$$

Разделив это равенство на (6), мы получим RTF, которую можно выразить в виде

$$\frac{s \{2n/(n-1)\}}{s \{4n/2\}} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4n}}.$$

Приняв $n = 3$, мы находим, что можно преобразовать звезду $\{12/2\}$ в звезду $\{6/2\}$. На рис. 184, а представлено решение этой задачи, содержащее 10 частей; причем его

можно улучшить, сведя число частей к 9, если разрешается перевертывать некоторые части обратной стороной кверху¹ (рис. 184, б).

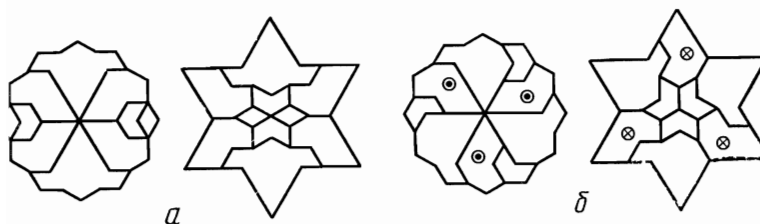


Рис. 184.

Наши исследования приводят к соотношению

$$\frac{s\{10\}}{s\{10/3\}} = \sqrt{2}, \quad (3)$$

которое показывает, что звезду $\{10/3\}$ можно преобразовать в два десятиугольника, две звезды $\{10/3\}$ — в один

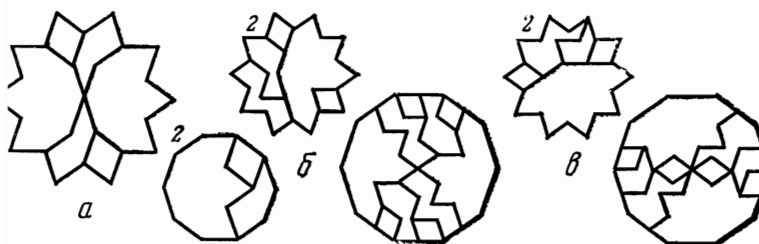


Рис. 185.

десятиугольник и, в силу (6), звезду $\{10/4\}$ — в звезду $\{10/3\}$. Сопоставляя левую часть рис. 182 с рис. 185, а, мы нападаем на след общего соотношения

$$\frac{s\{2n\}}{s\left\{2n/\frac{1}{2}(n+1)\right\}} = \sqrt{2}, \quad (9)$$

¹ См. приложение VI.

где n нечетно. А декаграмма на рис. 186 весьма недвусмысленно намекает на соотношение

$$\frac{s \left\{ 2n / \frac{1}{2} (n+1) \right\}}{r \{ 2n / (n-1) \}} = 2 \sin \frac{\pi}{2n}, \quad (10)$$

где n снова нечетно. Соотношения (6) и (9) представляют собой два различных обобщения рис. 182. Анало-

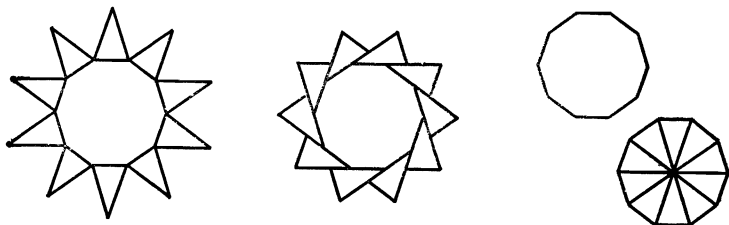


Рис. 186.

гично тому как выше мы нашли одну RTF, деля (7) на (6), мы обнаружим еще одну RTF, разделив (7) на (9), а именно

$$\frac{s \left\{ 2n / \frac{1}{2} (n+1) \right\}}{s \{ 4n / 2 \}} = 4 \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4n}.$$

Следующая RTF, которую мы находим, имеет вид

$$\frac{s \{ 5/2 \}}{s \{ 10 \}} = 2 \cos 18^\circ; \quad (11)$$

она приводит нас к рис. 187, а. Умножив (8) на (11), мы получим соотношение, означающее, что звезду $\{10/3\}$ можно преобразовать в две звезды $\{5/2\}$. Простой способ, с помощью которого можно осуществить данное преобразование, показан на рис. 188, а; из него можно усмотреть новое соотношение

$$\frac{r \{ 2n / (n-2) \}}{s \left\{ n / \frac{1}{2} (n-1) \right\}} = \sqrt{2}, \quad (12)$$

где n нечетно. На рис. 187, б и в показаны элементарные преобразования шестиугольника в два треугольника и треугольника в два шестиугольника, причем итоговое

расположение частей опущено; соотношение (12) обобщает эти решения.

Следует подчеркнуть, что величины s в (1) и (3) не совсем аналогичны друг другу; настоящим аналогом стороны s многоугольника служит в случае полиграммы не

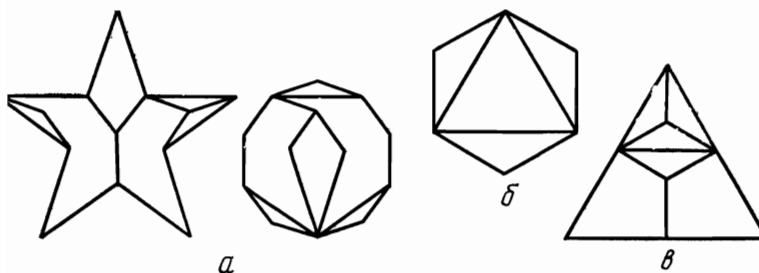


Рис. 187.

NO (рис. 188, а), а NP . Я предпочел обозначить буквой s отрезок NO , поскольку в этом случае формулы (3) для s , R и r становятся более симметричными, а также поскольку этот отрезок играет большую роль, чем NP , при

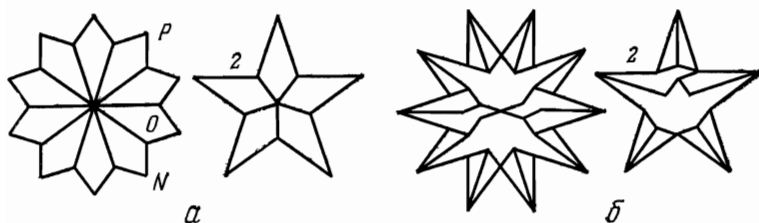


Рис. 188.

решении задач. При $n = 3$ правая часть равенства (12) оказывается неверной; однако вполне допустимо считать, что $r\{6\}/r\{3\}$ равно $\sqrt{2}$, умноженному на RTF , поскольку NO на рис. 188, а представляет собой RTF от NP ; это положение сохраняет силу и в общем случае.

Подставляя $n = 5$ в (10) и (12), мы видим, что звезду $\{10/4\}$ можно также преобразовать в две звезды $\{5/2\}$. И в самом деле, здесь удастся найти решение, представленное на рис. 188, б.

Подставляя $n = 7$ в (5), (9), (10), (12), мы обнаружим, что существуют следующие преобразования звезд и многоугольников:

$$\begin{aligned} \{14/2\} & \quad \text{и} \quad \{7\}, \\ \{14/4\} & \quad \text{и двух} \quad \{14\}, \\ \{14/4\} & \quad \text{и} \quad \{14/6\}, \\ \{14/5\} & \quad \text{и двух} \quad \{7/3\}. \end{aligned}$$

Здесь пропущены члены $\{14/3\}$ и $\{7/2\}$. Мы догадываемся, что это происходит потому, что две такие звезды преобразуются друг в друга; и в самом деле, мы приходим к соотношению

$$\frac{R\{14/3\}}{R\{7/2\}} = \sqrt{2} \cdot \cos \frac{2\pi}{7},$$

из которого следует, что звезду $\{14/3\}$ можно преобразовать в две звезды $\{7/2\}$ и две звезды $\{14/3\}$ — в одну звезду $\{7/2\}$. (Я не искал соответствующих решений) Обобщением данного соотношения служит следующее:

$$\frac{R\left\{2n/\frac{1}{2}(n-1)\right\}}{R\left\{n/\frac{1}{4}(n+1)\right\}} = \sqrt{2} \cdot \cos \frac{\pi(n+1)}{4n}, \quad (13)$$

где n имеет вид $4k - 1$. Наименьшее такое значение n , равное 3, приводит снова к рис. 187, б и в. Таким образом, (13) представляет собой второе обобщение этих двух решений.

Умножив (4) на (6), мы получим

$$\begin{aligned} \frac{s\{4\}}{s\{12/5\}} &= \sqrt{6} = 2 \left\{ \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \right\} = \\ &= 2(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ). \end{aligned} \quad (14)$$

Это подготавливает нас к отысканию экономного преобразования звезды $\{12/5\}$ в квадрат, а RTF подсказывает, как можно прийти к рис. 189 и 190.

Хотя двенадцатиугольник можно столь же легко преобразовать в греческий крест, как и в квадрат, но, по-видимому, для звезды $\{12/5\}$ дело обстоит иначе. Однако здесь мы имеем достаточную компенсацию. А именно, $\sqrt{6}$ в (14) говорит о том, что (скорее всего) должно

существовать преобразование звезды $\{12/5\}$ в шесть квадратов, а следовательно, и в латинский крест. Рис. 191, *a* показывает, как воплощаются эти наши ожидания в жизнь.

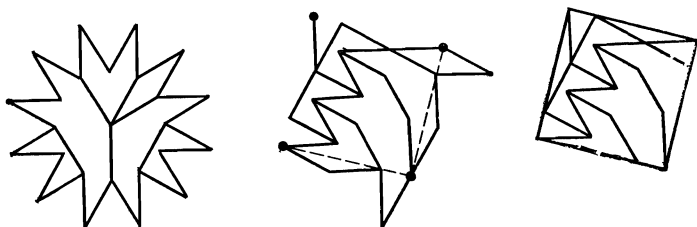


Рис. 189.

Рис. 189 и 190 мы получили, исходя из связывающего элементы двенадцатиугольника и квадрата соотношения (4), которое, насколько мне известно, не является частным случаем какого-то более общего соотношения. Дру-

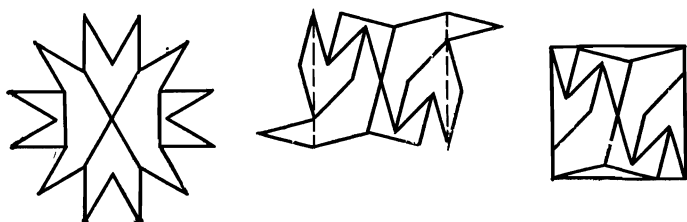


Рис. 190.

гое соотношение, стоящее, по всей видимости, особняком, — это

$$\frac{s\{3\}}{s\{12/2\}} = 6 + 4 \cos 30^\circ; \quad (15)$$

оно приводит к рис. 191, *b*¹.

Последний пример позволяет также пояснить один момент, который мог бы привести к недоразумению. Разделив (15) на (5) при $n = 6$, мы получим, очевидно, RTF. Тем не менее не существует преобразования шестиугольника и треугольника, подобного тем, которые разобраны в данной главе. Это происходит потому, что такая RTF — что легче найти из (1) при $n = 3$ и 6 — равна

¹ См. приложение VI.

$\sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$, где коэффициент при $\operatorname{tg} 60^\circ$ равен $2\sin 45^\circ$. Но 45° не кратно 30° (то есть π/n). Следовательно, в решении должны участвовать разрезы, длины которых не выражаются в виде RTF и которые, таким образом, не определяются пересечениями хорд. Аналогичным образом не существует основанного на RTF преобразования гексаграммы в шестиугольник, поскольку угол между полосками в L на рис. 52 равен 45° , что не кратно 30° .

Следует иметь в виду, что развитая в этой главе теория предсказывает существование довольно экономных решений, но дает весьма скудные указания на то, как

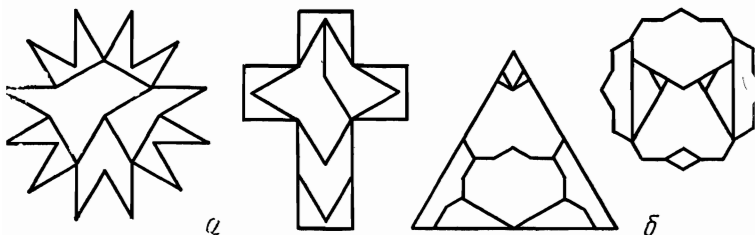


Рис. 191.

именно нужно их искать. Такие решения могут оказаться как очевидными, так и весьма замаскированными. Например, преобразовать звезду $\{10/3\}$, как это сделано на рис. 188, а, легко, а вот найти решение, изображенное на рис. 188, б, очень трудно. И все же в этих головоломках, где требуется найти и форму частей и их расположение, есть какое-то очарование!

Большинство решений настоящей главы можно найти, отыскивая пары одинаковых размеров в соответствующих многоугольниках. RTF помогает подобрать ключ к одной из таких пар, а другие пары легко обнаружить методом проб и ошибок, накладывая друг на друга многоугольники, нарисованные на двух листах кальки. Таким путем вы скоро установите, что расстояния KL на рис. 181, а равны между собой, и найдете часть M . Через некоторое время вы хорошо освоитесь с геометрией многоугольников и будете только удивляться тому, почему вас озадачивали подобные головоломки ранее. Дабы проверить, насколько вам удалось «набить руку», попробуйте решить задачу о преобразовании двух звезд $\{8/2\}$ или $\{8/3\}$ в одну. Довольно легко удастся найти решения,

содержащие соответственно 12 и 14 частей, а проявив упорство и настойчивость, вы, возможно, сумеете отыскать и решения, содержащие соответственно 11 и 12 частей.

Для удобства мы приводим список найденных общих соотношений, а также соотношений, которые нам не удалось обобщить.

$$\frac{s \{n\}}{s \{2n/2\}} = 4 \cos \frac{\pi}{2n},$$

$$\frac{R \{2n\}}{s \{2n/(n-1)\}} = \sqrt{2},$$

$$\frac{s \{2n/(n-1)\}}{s \{4n/2\}} = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{4n}},$$

$$\frac{s \{2n\}}{s \left\{2n/\frac{1}{2}(n+1)\right\}} = \sqrt{2} \text{ (где } 2 \mid n+1)^1,$$

$$\frac{s \left\{2n/\frac{1}{2}(n+1)\right\}}{r \{2n/(n-1)\}} = 2 \sin \frac{\pi}{2n} \text{ (где } 2 \mid n+1),$$

$$\frac{s \left\{2n/\frac{1}{2}(n+1)\right\}}{s \{4n/2\}} = 4 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{2n} \text{ (где } 2 \mid n+1),$$

$$\frac{s \{2n/(n-2)\}}{s \left\{n/\frac{1}{2}(n-1)\right\}} = \sqrt{2} \text{ (где } 2 \mid n+1),$$

$$\frac{R \left\{2n/\frac{1}{2}(n-1)\right\}}{R \left\{n/\frac{1}{4}(n+1)\right\}} = \sqrt{2} \cos \frac{\pi(n+1)}{4n} \text{ (где } 4 \mid n+1);$$

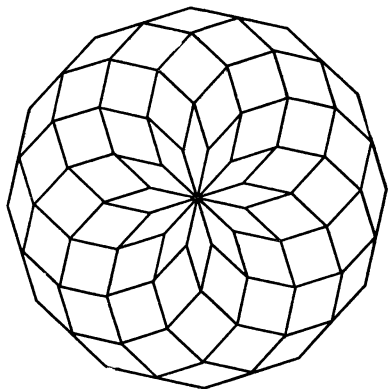
$$\frac{s \{5/2\}}{s \{10\}} = 2 \cos 18^\circ,$$

$$\frac{s \{3\}}{s \{12/2\}} = 6 + 4 \cos 30^\circ,$$

$$\frac{s \{4\}}{R \{12\}} = 2 \cos 30^\circ,$$

$$\frac{s \{4\}}{s \{12/5\}} = 2 (\cos 15^\circ + \sin 15^\circ).$$

¹ То есть где 2 делит $n+1$, или, что то же самое, где n нечетно. — Прим. перев.



Глава 21

*E PLURIBUS UNUM*¹

Название этой главы показывает, что в ней речь пойдет о преобразовании нескольких многоугольников в один. Это более избитая фраза, чем противоположная ей: *ex uno plura* (из единого — многие). Кроме того, мы ради единообразия будем говорить о преобразовании k многоугольников в один, а не об обратном преобразовании.

Рис. 192. Простейшая задача такого рода состоит в том, чтобы из четырех конгруэнтных многоугольников получить один многоугольник, им подобный. Конкретный вид многоугольников существенной роли не играет. Для решения задачи достаточно начертить один, два или три маленьких многоугольника внутри большого многоугольника и, если потребуется, провести отрезки прямых, па-

¹ Единственный из многих (лат.).

раллельные сторонам последнего (они обычно оказываются равными сторонам маленького многоугольника). Так, внутри неправильного шестиугольника, изображенного на рис. 193, поместились три маленьких шестиугольника; причем в данном случае не приходится даже

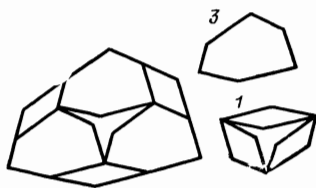


Рис. 192.

проводить дополнительные прямые, поскольку из трех параллелограммов и центральной части удастся сложить четвертый маленький шестиугольник.

На рис. 193 показан случай, когда внутри большого шестиугольника помещаются только два маленьких. Но мы нарисуем наибольшую возможную часть третьего

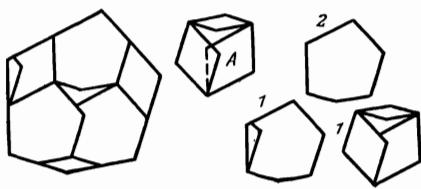


Рис. 193.

шестиугольника и попытаемся сложить из параллелограммов и центральной части четвертый шестиугольник. При этом мы обнаружим, что параллелограммы перекрываются на участке А. Однако мы справимся с этим затруднением, а заодно и дополним третий шестиугольник, если вырежем часть А у одного из двух перекрывающихся параллелограммов. Так или иначе, но, используя весьма скромные ресурсы, мы всегда сможем добраться до цели.

Маленькие многоугольники внутри большого не всегда должны быть «направлены» в одну сторону. Так,

на рис. 194 изображен тот же самый шестиугольник, что и прежде, но два маленьких шестиугольника внутри его повернуты относительно друг друга на 180° . Тем не менее здесь можно найти необходимые разрезы и решить задачу.

Не иначе как жадность заставляла нас помещать внутри большого многоугольника побольше маленьких.



Рис. 194.



Рис. 195.

Оказывается, достаточно начертить лишь один маленький многоугольник. На рис. 195 представлено принадлежащее Ч. Д. Лэнгфорду решение задачи о преобразовании четырех правильных девятиугольников в один.

Из приведенных выше примеров, а также из рис. 196 можно было бы заключить, что в случае n -угольников

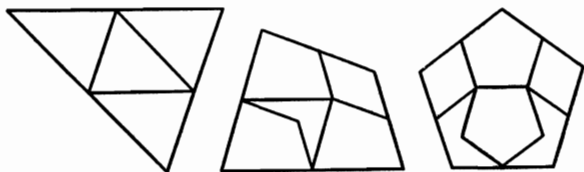


Рис. 196.

минимальное число частей равно $n + 1$. Однако если n -угольник правильный, а n четно, то потребуется только n частей. Рассмотрим, например, три симметричных преобразования четырех двенадцатиугольников в один (рис. 197). В каждом из них участвует по 12 частей. На эти решения ссылаются (но не приводят их) Г. М. Канди и Ч. Д. Лэнгфорд в *Math. Gaz.*, 44, 46 (1960). Вероятно, их находили независимо несколько раз.

Столь же легко можно преобразовать 9 маленьких многоугольников или целое их число, являющееся точным квадратом (см., например, рис. 198).

Если многоугольник представляет собой элемент некоторой мозаики, то можно найти экономное решение, накладывая мозаики друг на друга. На рис. 199 приведено решение задачи, в которой многоугольник заимствован из рис. 96. Если же многоугольник приходится



Рис. 197.

разрезать для того, чтобы превратить его в элемент мозаики, такого рода наложение, скорее всего, не может привести к удачному решению, если только число сторон у многоугольника невелико. Например, можно преобразовать четыре правильных пятиугольника в один, используя всего 6 частей, в то время как число частей,

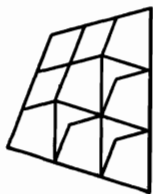


Рис. 198.

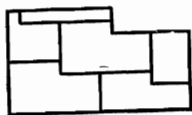


Рис. 199.

нужное для того, чтобы сложить из них элементы мозаики, уже равно 8.

Рис. 193. Перейдем теперь к преобразованию в один многоугольник нескольких многоугольников, число которых не совпадает с квадратом, ограничившись сначала случаем равных многоугольников. Если многоугольник является элементом мозаики, у которой стороны параллелограмма периодов относятся как $\sqrt{k}:1$, то k таких многоугольников удастся преобразовать в один. Из отвечающего случаю $k=2$ рис. 200 очевидно, что если мы составим из k параллелограммов периодов новый параллелограмм и при $\alpha \neq 90^\circ$ перевернем его, то полу-

дим параллелограмм, подобный исходному параллелограмму периодов. Поэтому нам остается лишь наложить друг на друга соответствующие мозаики. Аналогичным образом обстоит дело с мозаиками, порожденными восьмиугольником (см. рис. II, 8) и гексаграммой (см. рис. II, 14; здесь $k = 3$), но ни в одном из этих случаев решение не получается столь же хорошим, как если бы мы воспользовались методом проб и ошибок.

Если параллелограмм периодов у мозаики, порожденной данным многоугольником, представляет собой квадрат, то можно найти решение, содержащее $x^2 + y^2$

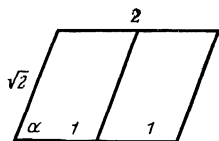


Рис. 200.

маленьких частей¹, где x и y — целые числа. Действительно, если мы расположим две соответствующие мозаики под углом, тангенс которого равен y/x или x/y , то конгруэнтные точки одной из мозаик совпадут с конгруэнтными точками другой. Простым примером может служить принадлежащее Дьюдени решение задачи о преобразовании двух греческих крестов в один. На рис. 201, а конгруэнтные прямые двух мозаик расположены, как и требуется, под углом 45° , хотя сами кресты не образуют между собой такого угла, поскольку одна из этих мозаик перевернута. Для больших значений k характерно преобразование пяти крестов в один, представленное на рис. 201, б. Здесь $x = 2$, $y = 1$, так что угол между конгруэнтными прямыми должен равняться $\operatorname{arctg} 1/2$, и мы снова получим лучшее решение, если перевернем одну из мозаик обратной стороной кверху.

Подобным образом решается задача о преобразовании k многоугольников, порожденных мозаиками, параллелограммом периодов которых служит квадрат, в h

¹ То есть частей, которые меньше маленького многоугольника (сам маленький многоугольник в число таких частей не входит). — Прим перев.

многоугольников, где $h = p^2 + q^2$. Если мы преобразуем k многоугольников в один, то угол между соответствующими конгруэнтными прямыми равен $\arctg y/x$. Когда мы h многоугольников преобразуем в один, то

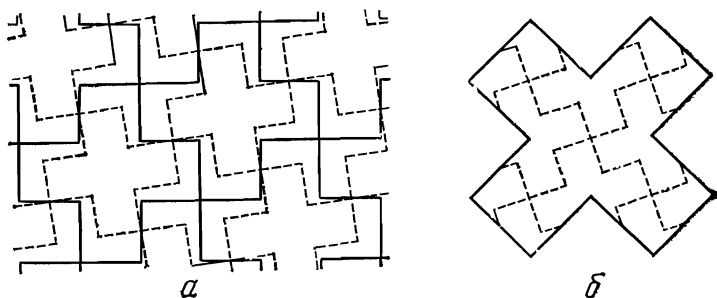


Рис. 201.

угол между такими прямыми равен $\arctg q/p$ или $\arctg p/q$. Следовательно, когда мы k многоугольников преобразуем в h многоугольников, соответствующий угол равен $\arctg y/x - \arctg q/p$ или $\arctg y/x - \arctg p/q$. На

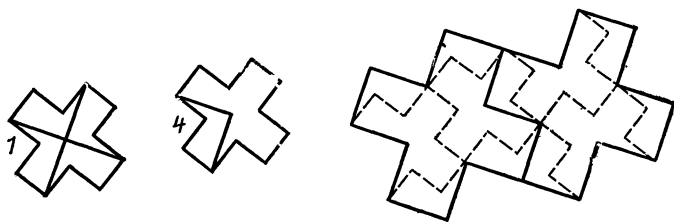


Рис. 202.

рис. 202 пять греческих крестов преобразуются в 2 креста; угол между конгруэнтными прямыми (и элементами мозаик) равен

$$\arctg 2 - \arctg 1 = \arctg \frac{1}{3}.$$

Аналогичная процедура применима и к мозаикам, у которых конгруэнтные точки служат вершинами равносторонних треугольников. Пусть узлы решетки на рис. 203 образуют конгруэнтные точки некоторой мозаики. Применив теорему косинусов, скажем, к $\triangle BCD$,

мы обнаружим, что квадрат расстояния BD между двумя узлами решетки имеет вид $p^2 + pq + q^2$ (длина CD считается равной 1), а все такие целые числа можно представить в виде $x^2 + 3y^2$. Следовательно, если $k = x^2 + 3y^2$, то мозаики, порожденные соответственно большим и малыми многоугольниками, можно так наложить друг на друга, чтобы конгруэнтные точки одной из них совпали с конгруэнтными точками другой мозаики. Преобразования трех и семи треугольников в один показаны на рис. 203. Преобразования трех шестиугольников

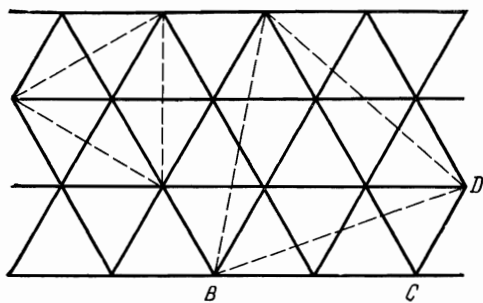


Рис. 203.

в один, семи шестиугольников в три и т. д., обсуждавшиеся в главе 11, также относятся к преобразованиям этого типа.

Не следует забывать, что y в выражениях $x^2 + y^2$ и $x^2 + 3y^2$ может равняться нулю, так что метод, развитый в настоящем разделе, применим и к преобразованиям многоугольников, число которых является точным квадратом, в один многоугольник или в другое число многоугольников, также являющееся полным квадратом.

Рис. 194. Методы, основанные на мозаиках, не всегда дают хорошие результаты (хотя порой они помогают отыскать лучшее решение). Они также неприменимы ко всем без исключения простым преобразованиям k многоугольников в один. Формулы (1) и (3) в главе 20 помогают установить, для каких именно правильных многоугольников и полиграмм должны существовать простые решения такого типа. Принцип здесь тот же, каким мы пользовались, выясняя существование простых пре-

образований звезд. Так, два n -угольника можно преобразовать в один, если $\sqrt{2}$ представляет собой RTF от π/n и, значит, если n кратно 4. Это обстоятельство обнаружил Фриз. Рис. 204 иллюстрирует случай, когда

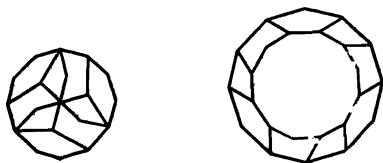


Рис. 204.

$n = 12$, а рис. 205 — случай, когда $n = 8$. Представляется также перспективной задача о многоугольниках,

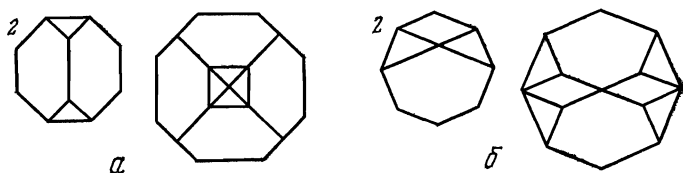


Рис. 205.

родственная изображенной на рис. 206 ситуации, где видно, что один восьмиугольник можно преобразовать в восьмую часть большого восьмиугольника.

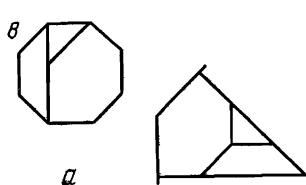


Рис. 206.

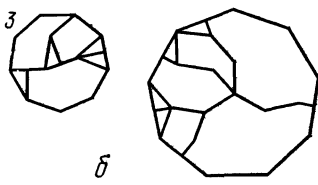


Рис. 207.

Аналогичным образом, несомненно, существует преобразование трех многоугольников в один, если $\sqrt{3}$ есть RTF от π/n и, значит, если n кратно 3. Это обнаружил Лэнгфорд, который решил задачу о преобразовании трех девятиугольников в один (рис. 207). Случай, когда $n=3$, проиллюстрирован рис. 203, а когда $n=6$ — рис. 109, а.

Два решения, отвечающие $n = 12$, представлены на рис. 208 и 209, причем первое из них гораздо элегантнее

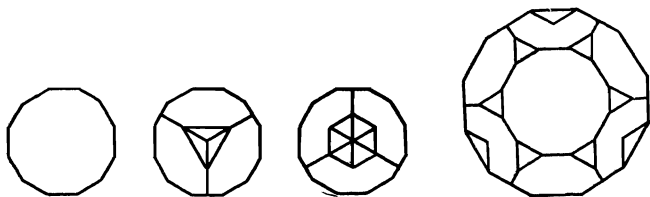


Рис. 208.

второго, но зато не минимально — оно содержит 16 частей, в то время как на рис. 209 их 15.

Все сказанное выше в равной мере применимо и к полиграммам, а поскольку число их гораздо больше числа

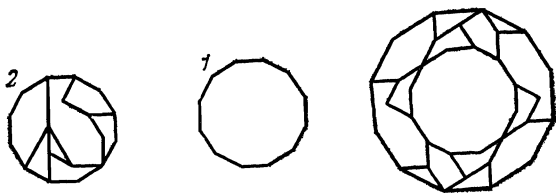


Рис. 209.

многоугольников, то здесь заведомо остается еще много пробелов, которые честолюбивый исследователь сможет попытаться заполнить самостоятельно. Проявляющуюся

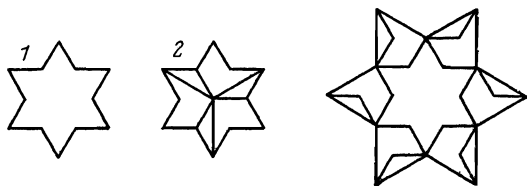


Рис. 210.

и в этом случае «покладистость» гексаграммы иллюстрирует рис. 210, на котором показано преобразование двух гексаграмм в одну. Не многим более сложным — как бы вы первоначально ни отнеслись к рис. 211 — является и случай звезды $\{12/3\}$. Немного поразмыслив,

вы поймете, что преобразование двух звезд $\{12/3\}$ в одну представляет собой всего лишь дальнейшую разработку простейшей темы о преобразовании двух квадратов в один. Новый момент состоит здесь в том, что из четырех частей G следует образовать две части H . Эти части

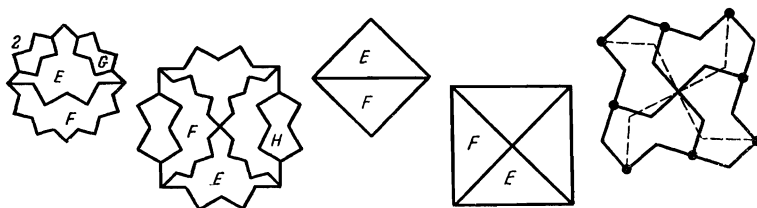


Рис. 211.

представляют собой элементы мозаик, у которых параллелограммами периодов служат квадраты, так что нужное преобразование удастся получить, накладывая друг на друга соответствующие мозаики, как показано на рис. 211 справа. Всего получается 16 частей.

Решая задачи описанного типа, мы сможем с удовлетворением вздохнуть, если окажется, что как большой,

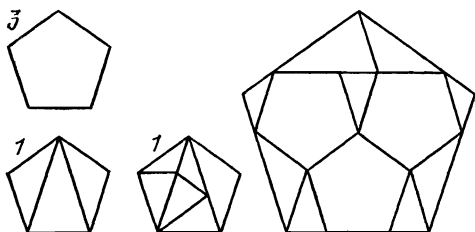


Рис. 212.

так и маленькие многоугольники можно разбить на ромбы и треугольники, стороны которых равны стороне маленького многоугольника. Эти ромбы и треугольники (в ряде случаев с несколькими очевидными дополнительными разрезами) уже дают одно из решений задачи, которое удастся улучшить, объединяя несколько таких ромбов и треугольников в одну новую часть. Именно так было найдено решение, которое вы видите на рис. 207.

Число $\sqrt{5}$ равно $4\cos \pi/5 - 1$, а также $4\sin \pi/10 + 1$. Следовательно, должны существовать преобразования

пяти пятиугольников и пяти десятиугольников в один. Мы уже знаем, что они действительно существуют, поскольку Лэнгфорд нашел решения, представленные на рис. 212 и 213 (На последнем рисунке показана только пятая часть большого десятиугольника) Другими квадратными корнями из простых чисел, про которые известно, что они выражаются как RTF, будут $\sqrt{17}$, $\sqrt{257}$, $\sqrt{65537}$ ¹. Мы предлагаем читателю в качестве упражнения найти преобразование 17 семнадцатиугольников в один и т. д.

Еще один корень квадратный, выражающийся как RTF, — это $\sqrt{6}$ [см. формулу (14) главы 20] Значит,

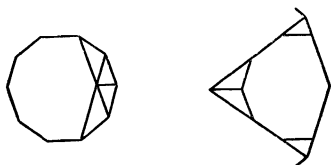


Рис. 213

должно существовать преобразование шести двенадцатиугольников в один, хотя я и не пытался его найти Поскольку $\sqrt{6} = 2\sqrt{3/2}$, то должно существовать преобразование трех двенадцатиугольников в два. Вот здесь я не пожалел усилий и нашел решение, изображенное на рис. 214. В этом случае разрезы проведены так, чтобы соответствующие части можно было переместить в нужное положение простым параллельным переносом, не поворачивая их. Этой же особенностью обладают некоторые другие решения глав 20 и 21.

Если n нечетно или n четно, но не кратно 4, то не существует преобразования двух n -угольников в один, основанного на RTF, ибо в этом случае $\sqrt{2}$ не выражается как RTF. Тем не менее основанное на других

¹ Это связано с известными результатами Гаусса о возможности построения циркулем и линейкой правильных n -угольников, в которых особую роль играли простые числа n вида $2^{2^k} + 1$, при $k = 2, 3$ и 4 формула $n = 2^{2^k} + 1$ дает $n = 17, 257, 65537$ (см., например, С. Г. Гиндикин, Дебют Гаусса, *Квант*, 1972, № 1, стр. 2—11) — *Прим ред*

идеях простое и красивое преобразование двух равных правильных n -угольников в один существует для любого n , большего 3. Это «кольцевое расширение», которое для случая пятиугольника показано на рис. 215, представляет собой одно из наиболее завидных достижений Фри-

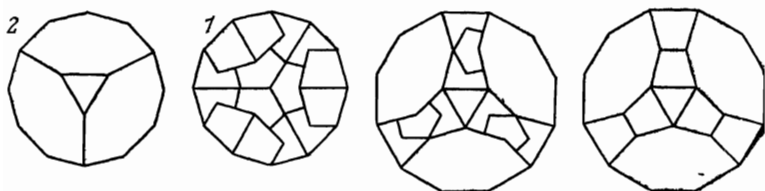


Рис. 214.

за. Соответствующая конструкция очень проста: достаточно сделать треугольники J равносторонними и прямоугольными. Легко видеть, что в случае n -угольника мы будем иметь $2n + 1$ частей.

Рис. 196. Преобразование двух подобных, но не равных многоугольников в один многоугольник, подобный исходным, — задача более трудная. Простейшие случаи для треугольника и квадрата уже разбирались выше



Рис. 215.

(рис. 9, 11 и 96). Что касается других многоугольников, то здесь мы имеем мастерское решение Фриза, изображенное на рис. 216 для случая многоугольников. Если стороны многоугольников равны s_1, s_2, s , где $s_1 \leq s_2 < s$, то разрезы у многоугольника со стороной s_2 определены; их надо вести из центра, учитывая соотношения

$$LM = \frac{1}{2} s_2, MN = \frac{1}{2} s_1, \text{ откуда } LN = \frac{1}{2} s.$$

Так мы можем провести разрезы и в меньшем многоугольнике, если только он не настолько мал, чтобы N ,

оказалось выше K . Как и в случае рис. 215, для n -угольника потребуется $2n + 1$ часть.

По-видимому, в случае неправильных многоугольников мы не получим ничего столь же изящного. Но здесь, во всяком случае, является разрешимой задача для

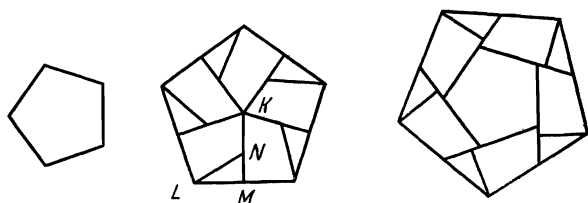


Рис. 216.

каждого многоугольника, требующая лишь нескольких Q -сдвигов. Так, дважды применив Q -сдвиг к четырехугольникам, мы получим решение, представленное на рис. 217. В то время как в случае треугольников удастся ограничиться пятью частями, здесь мы получим 8 частей: каждая новая сторона в многоугольнике приводит к трем дополнительным частям.

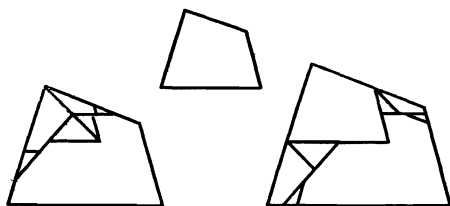


Рис. 217.

Метод, который представлен на рис. 96, можно обобщить на случай прямоугольников. Если мы скомбинируем два подобных треугольника, как показано на рис. 218, то получим элемент мозаики, у которой параллелограмм периодов служит $OPQR$. Если размеры прямоугольников равны $a \times b$ и $c \times d$, где $a/b = c/d$, то треугольники OPS и ORT подобны, откуда легко вывести, что $\angle POR$ прямой. Кроме того,

$$\frac{OR^2}{OP^2} = \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2} = \frac{a^2}{b^2}.$$

то есть параллелограмм периодов подобен двум данным прямоугольникам. Следовательно, мы получим преобразование двух подобных прямоугольников в третий прямоугольник, подобный исходным, накладывая под нужным углом на данную мозаику мозаику, порожденную большим прямоугольником.

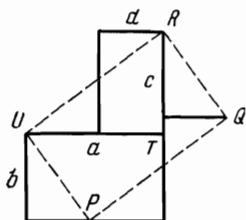


Рис. 218.

На рис 218 показано преобразование двух «золотых» прямоугольников в третий.

Что касается многоугольников, отличных от прямоугольников, то их можно предварительно преобразовать в подобные прямоугольники, а затем построить мозаику

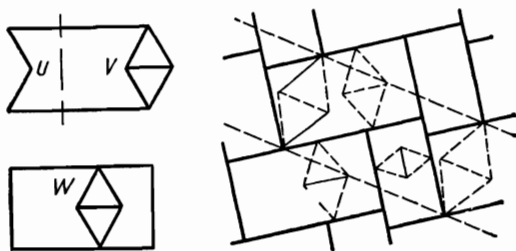


Рис. 219.

вроде той, что изображена сплошными линиями на рис 219. На нее мы накладываем мозаику или полосу, порожденную большим многоугольником. (Здесь, как и везде, достаточно воспользоваться одним элементом) Эту процедуру мы проиллюстрируем на примере гексаграмм

На рис. 219 вертикальный разрез, проведенный в любом месте между U и V , превращает гексаграмму в прямоугольник. Построим мозаику, элемент которой со-

ставлен из двух прямоугольников, опуская пока ромбические части W . Нарисуем элемент полосы, порожденной большой гексаграммой, наложим его на мозаику

01

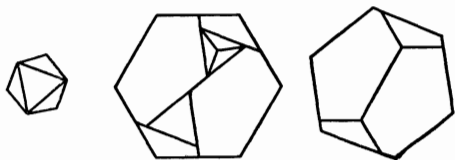


Рис. 220.

и будем, как обычно, искать наиболее удобное расположение, не забывая о том, что следует найти место и для

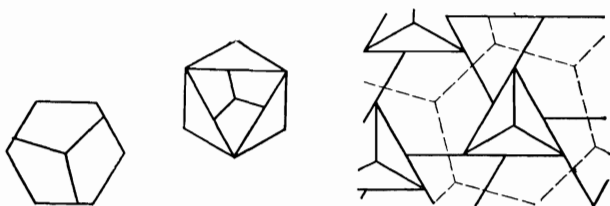


Рис. 221.

опущенных ромбических частей. Расположение, указанное на рис. 219, будет, по-видимому, наилучшим, причем найдется место и для ромбических частей. Правда, одну

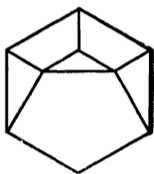


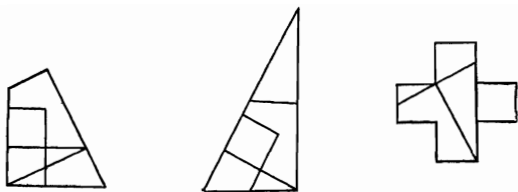
Рис. 222.

из них придется разрезать; но избежать этого нельзя, не введя где-нибудь еще дополнительные разрезы.

Число частей в разрезаниях такого типа довольно велико. Иного и не приходится ожидать, поскольку преобразование двух многоугольников, между элементами которых не существует специальных метрических соотношений, в один многоугольник — это, так сказать, задача

более высокого порядка. Исключение из данного правила составляют, например, правильные шестиугольники, но это в силу того, что существуют мозаики, изображенные на рис. 97—99. С их помощью мы сможем получить решения более экономные, чем с помощью общего метода, который иллюстрирует рис. 216. Так, преобразовав меньший шестиугольник в два треугольника, мы получим решения, содержащие 8 и 9 частей; они показаны на рис. 220 и 221.

Если между исходными многоугольниками обнаруживается какое-нибудь удачное соотношение, то удастся сэкономить одну-две части. Если решение на рис. 220 применить к шестиугольникам, стороны которых относятся как $\sqrt{3} : 1$, то окажется, что число частей равно 7; соответствующая мозаика изображена на рис. 98. Исходя из этого решения, уже нетрудно получить другое, симметричное решение, представленное на рис. 222. (Это еще один пример решения, которое можно реализовать в виде шарнирной модели.) Аналогично если в том же самом отношении находятся стороны двух треугольников, то решение будет содержать только 4 части вместо 5 частей, как мы видели на рис. 9 и 11. Этот специальный случай нашел отражение в рис. 230 (G преобразуется в H плюс K).



Глава 22

РАЗРЕЗАНИЯ ТРЕХ ФИГУР

Воистину, имя числу всевозможных комбинаций из трех многоугольников — легион; но большинство преобразований трех многоугольников содержит так много частей, что они теряют для нас всякий интерес. Все же существуют два весьма экономных преобразования такого типа, но они слишком очевидны (особенно теперь, когда вы познакомились со всеми используемыми здесь трюками). Речь идет о преобразовании греческого креста, восьмиугольника и квадрата, а также греческого креста, двенадцатиугольника и квадрата. Решение первой задачи, содержащее 9 частей, можно получить, комбинируя рис. 113 и 223; решение второй задачи, содержащее 10 частей, получается комбинацией рис. 92 и 223. Несмотря на то что первое из этих решений случайно дает минимальное разрезание греческого креста и восьмиугольника, иллюстрировать их было бы напрасной тратой труда и времени.

Иначе обстоит дело в случае шестиугольника, квадрата и треугольника. Оказывается, что полученное ранее преобразование шестиугольника и треугольника, заменяемое рис. IV. 15, как раз подходит для нашего решения. Здесь мы используем то преимущество, что существует простое соотношение между углами двух данных

многоугольников, и вырезаем из шестиугольника две большие части A и B (рис. 224), которыми максимально заполняем треугольник. Оставшийся от шестиугольника параллелограмм C мы затем с помощью PT -разрезания (рис. 225) преобразуем в недостающую трапецию D ,

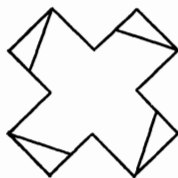


Рис. 223.

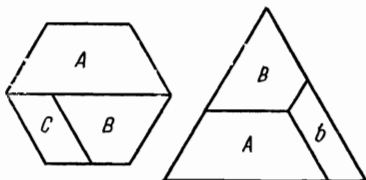


Рис. 224.

расположенную внутри треугольника. Хотя это преобразование и приводит к 6 частям вместо минимального их числа 5, оно дает тем не менее наиболее экономное разрезание трех фигур, поскольку при наложении полосок, изображенном на рис. 226, a , отсутствуют пересекающиеся разрезы. На этом же рисунке в общей части полосок видны все 9 частей, участвующих в решении задачи.

Другой пример повторного наложения дают латинский крест, квадрат и треугольник. На рис. 226, b вы ви-

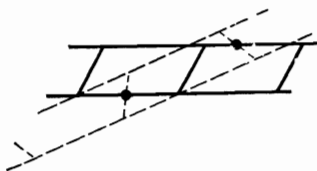


Рис. 225.

дите TT_2 -разрезание креста и треугольника, скопированное с рис. 63, а на полученную при этом полоску мы накладываем PT -способом полоску из квадратов.

Полоска, порожденная греческим крестом с элементом из рис. 38, воспроизведена на рис. 227; иногда она оказывается весьма полезной. Если существует минимальное или близкое к минимальному решение какой-либо задачи, в котором используется эта полоска, то, добавив вертикальную прямую $\bar{E}F$, мы получим дальнейшее преобразование в квадрат. И чем меньше линий

пересечет прямая EF , тем лучше. Попробовав применить это при преобразовании креста и шестиугольника, изображенном на рис. 50, мы обнаружим, что дополнительный разрез EF неизменно пересекает два уже существующих разреза. Но здесь-то и обнаруживает свое

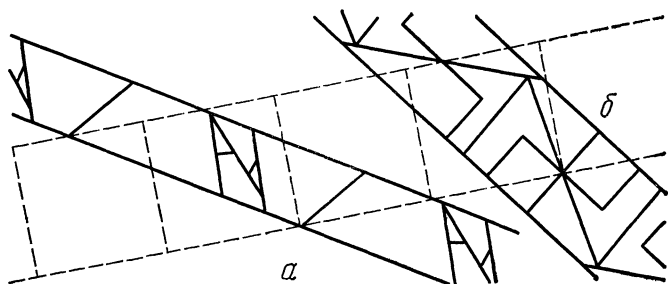


Рис. 226.

преимущество второе, «некрасивое» решение той же задачи, о котором мы тогда упоминали, ибо оказывается, что в этом случае дополнительный разрез, показанный

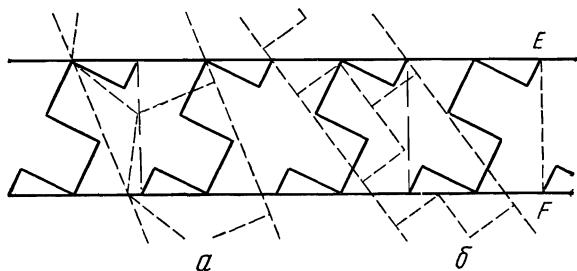


Рис. 227.

на рис. 227, *а* штрих-пунктирной линией, пересечет только один уже существующий разрез.

Пример, в котором используется неминимальное разрезание, дают греческий и латинский кресты и квадрат. Преобразование крестов, которое вы видите на рис. 227, *б*, хуже преобразования, изображенного на рис. 64, ибо на рис. 227, *б* получается 8 частей вместо 7. Однако дополнительный разрез, необходимый для преобразования в квадрат, пересечет в данном случае только один уже существующий на рис. 227, *б* разрез.

Если два многоугольника из трех представляют собой греческий крест и квадрат, то иногда экономное решение

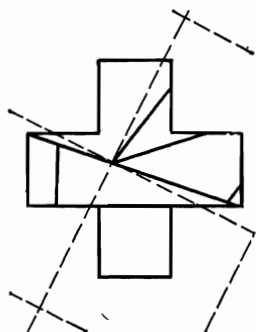


Рис. 228.

удается найти, наложив мозаику, порожденную квадратом, на греческий крест, в котором проведены разрезы,

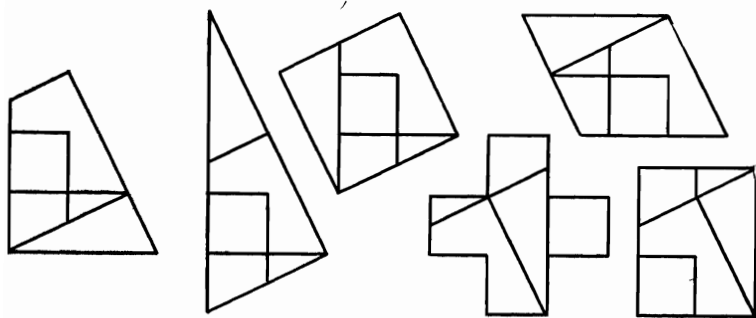


Рис. 229.

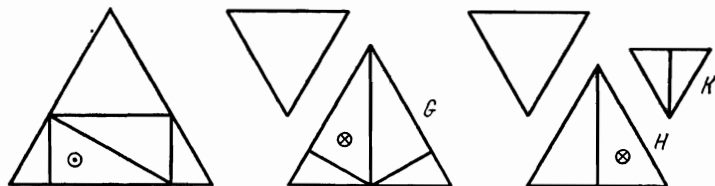


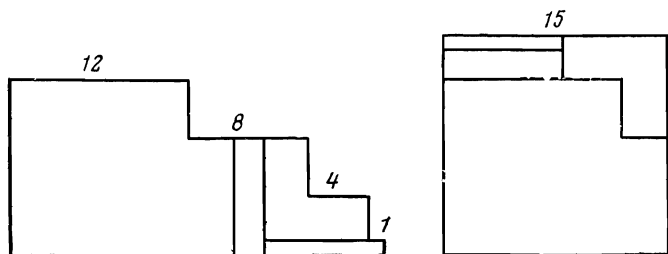
Рис. 230.

позволяющие преобразовать его в третий исходный многоугольник. Один такого рода пример мы получим, если

возьмем преобразование креста и пятиугольника, изображенное на рис. 67 и вновь воспроизведенное на рис. 228. Метод проб и ошибок скоро покажет нам, что на рис. 228 изображено наилучшее решение.

Разрезания трех фигур, описанные выше, — это, конечно, простейшие из таких преобразований. Здесь нужно, безусловно, ожидать и других удивительных открытий, в которых используется не слишком много частей. Поиск подобных решений не прост из-за того, что минимальное разрезание трех фигур не обязательно основано на минимальных разрезаниях двух таких фигур.

Существуют еще по меньшей мере два преобразования, которые лежат в стороне от основного русла рассуждений настоящей главы. В решении, представленном на рис. 229 и принадлежащем Лойду, преобразуются друг в друга не 3, а 6 многоугольников. А на рис. 230 показано принадлежащее Дьюдени решение задачи о преобразовании одного треугольника в 2 и 3 треугольника.



Глава 23

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ РАЗРЕЗАНИЯ

Все предыдущие разделы этой книги, посвященные прямолинейным разрезаниям, по праву можно считать серьезным математическим чтением. Однако это вряд ли относится к настоящей главе о разрезаниях, природа которых такова, что они годятся лишь для головоломок и более или менее забавных рисунков.

Основная трудность здесь состоит в том, что каждый выпуклый край некоторой фигуры почти всегда должен соответствовать каким-то другим вогнутым краям той же длины и искривленности, чтобы они подошли друг к другу. Например, при разрезании полумесяца и греческого креста (рис. 231) граница полумесяца должна содержать два равных криволинейных участка ABC и DEF , а остальная часть границы должна состоять из двух прямолинейных отрезков AD и CF (если мы хотим, чтобы данная фигура походила на полумесяц).

Точно так же выпуклые и вогнутые линии на рис. 232 должны иметь одинаковую длину. Из этого затруднения Лойд извлек изображенную на рис. 233 забавную безделушку.

Такого рода затруднения препятствуют попыткам преобразовать друг в друга две произвольные криволинейные фигуры. Скорее, задача здесь состоит в том, чтобы выяснить, во что можно преобразовать данную исходную фигуру. Именно так обстоит дело с кругом.

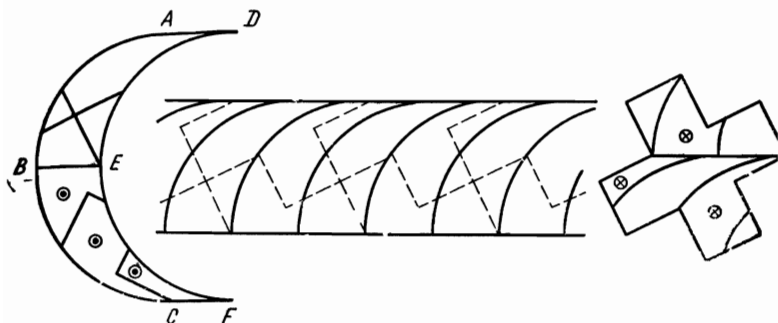


Рис. 231.

Быть может, у кого-либо и мелькнет мысль о превращении круга в нечто вроде криволинейной звезды, но вряд ли вам удастся сформулировать ваш замысел более точно. И вы можете считать, что вам немало повезло,

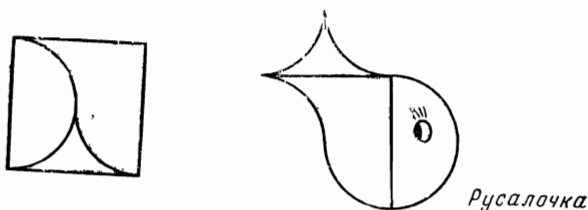


Рис. 232.

если найдете что-либо столь же симпатичное, как преобразования на рис. 234—235.

Радиус¹ разрезов на рис. 234 произволен. В случае рис. 235 и 236 у нас меньше свободы, поскольку радиус у всех разрезов должен совпадать с радиусом исходного круга.

¹ Автор рассматривает здесь разрезы, представляющие собой дуги некоторых окружностей; под *радиусом* разреза понимается радиус соответствующей окружности. — Прим. перев.

В случае рис. 234 провести разрезы очень легко. Проведите дуги подходящего радиуса через вершины G, H, J, K некоторого n -угольника. Выберите L так, чтобы отрезки GK и KL были равны и коллинеарны, и соедините

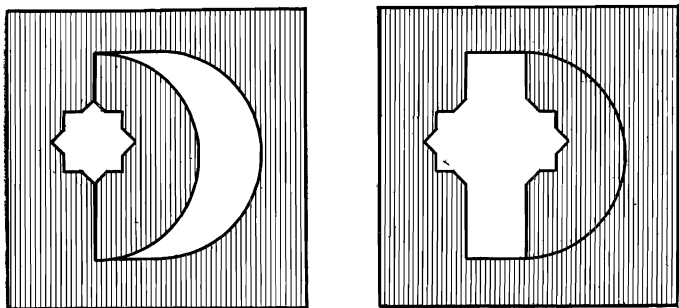


Рис. 233.

точки K и L кривой того же радиуса. А теперь проведите окружность через n точек, таких, как точка L . Данная конструкция отличается от аналогичной конструкции на рис. 176, *a* только тем, что теперь мы проводим кривые вместо прямых.

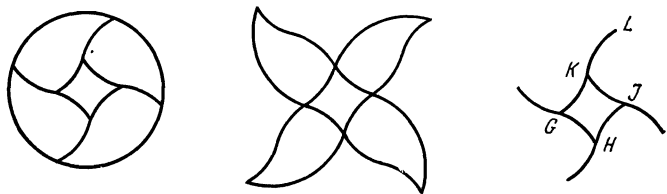


Рис. 234.

Однако в случаях, которые вы видите на рис. 235 и 236, приходится повозиться больше, чтобы обеспечить гладкие стыки в точках M . Точки N не доставляют нам хлопот, поскольку для криволинейных углов справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \angle ONM + \angle MNP &= \angle NQP + \angle MNP = \\ &= \angle QNP + \angle MNP = \pi. \end{aligned}$$

Для того чтобы детальнее понять, что происходит в стыке M , заменим некоторые из кривых линий прямыми,

как показано на рис. 236 справа. Тогда стык в точке M будет гладким, если точки O, M, R окажутся коллинеарными, откуда следует, что три отмеченных угла должны



Рис. 235.

быть равны между собой. Для звезды с n лучами, поскольку дуга MNQ составляет $1/n$ всей окружности, следует, что

$$\angle MNP = \frac{2}{3} \angle MNQ = \frac{2}{3} \left(\pi - \frac{\pi}{n} \right).$$

Поскольку также

$$QP = PN = NM = MO = MR,$$

а длины этих отрезков можно придать любое удобное значение, удастся определить все отмеченные на

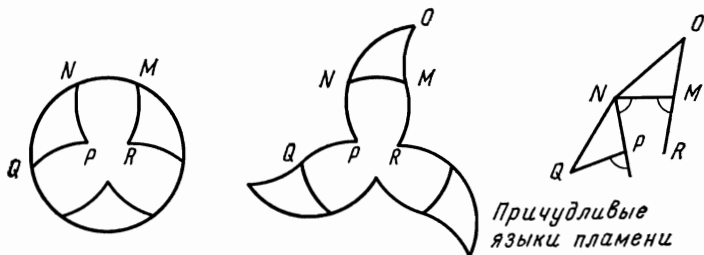


Рис. 236.

рис. 236 точки и, следовательно, все точки при разрезании звезды, причем радиус соответствующих дуг равен радиусу круга, проведенного через M, N, Q . Двигаясь таким путем, мы приходим к кругу, радиус которого не известен заранее, а получается, так сказать, по ходу

дела. Если же, напротив, мы начинаем с круга заданного радиуса R , то используем, что

$$MN = 2R \sin \theta,$$

где

$$\cos \theta = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} + 2 \frac{\sin \left(\frac{\pi}{3n} + \frac{\pi}{6} \right)}{\sin \frac{\pi}{n}}.$$

Быть может, кому-нибудь придет в голову идея преобразовать круг в нечто вроде кольца. На рис. 237 и 238

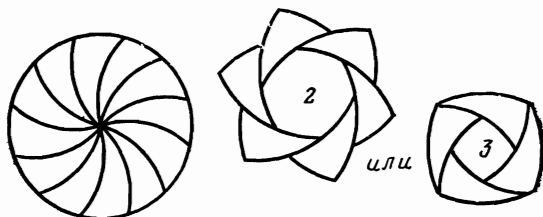


Рис. 237.

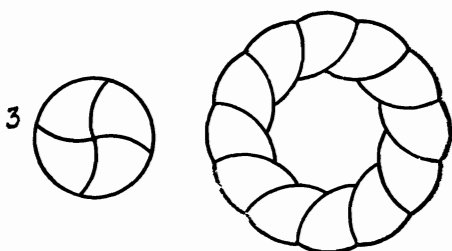


Рис. 238.



Рис. 239.

показаны типичные примеры того, что при этом может получиться. Здесь возможны многочисленные варианты,

зависящие от числа секторов, которые приходится на один круг, а также от числа колец, приходящихся на один круг, или кругов, приходящихся на одно кольцо.

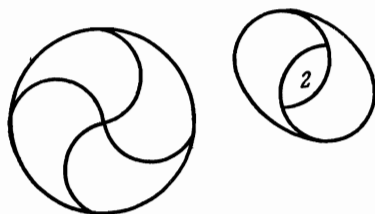


Рис. 240.



Рис. 241.

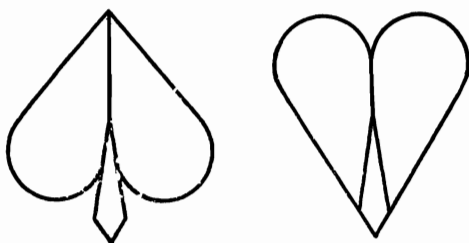


Рис. 242.

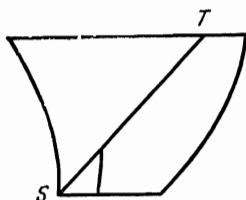


Рис. 243.

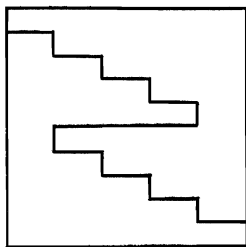
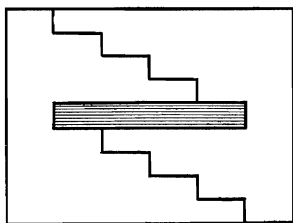
Нечто похожее происходит при втором преобразовании круга в две овальные крышки для табуреток с дыр-

ками для руки. (Оба преобразования принадлежат Сэму Лойду — *ex ungue leonem*¹.) Следует заметить, что на рис. 239 и 240 все центры соответствующих дуг расположены в углах квадратной решетки со стороны, равной $\frac{1}{2}R$, где R — радиус данного круга, а радиусы этих дуг совпадают либо с R , либо с $\frac{1}{2}R$.

Разрезание подковы на рис. 241 тесно связано с разрезанием круга на рис. 239. А вот забавное «пико-червовое» преобразование, изображенное на рис. 242, стоит совсем особняком.

На рис. 231 показано, что S -разрезание можно применять и к криволинейным фигурам. То же самое, как можно заметить из рис. 243, справедливо и относительно P -сдвига; разрез ST , пересекающий весь элемент, также можно сделать кривым. Быть может, прибегнув к этой идее, вам удастся решить какую-нибудь «симпатичную» задачу.

¹ По когтям узнают льва (лат.).



Глава 24

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ РАЗРЕЗАНИЯ

Для того чтобы доказать, что всякий многоугольник можно, разрезав его предварительно на несколько частей, преобразовать в другой многоугольник, равновеликий исходному, сначала показывают, что любой многоугольник можно разрезать на конечное число треугольников, каждый из которых удастся затем преобразовать в прямоугольник, длина которого совпадает со стороной квадрата, равновеликого исходному многоугольнику. Соединив между собой эти прямоугольники, мы тем самым решим задачу о преобразовании многоугольника в квадрат. В результате мы приходим к следующей цепочке преобразований: первый многоугольник $\rightarrow$ квадрат $\rightarrow$ второй многоугольник.

В трехмерном пространстве следует заменить треугольники пирамидами (или тетраэдрами), а квадрат — кубом. Далее заметим, что хотя любое пространственное тело, ограниченное плоскостями, и можно разрезать на пирамиды, но, вообще говоря, пирамиду нельзя, разрезав ее на конечное число частей, преобразовать в куб или «слой» такого куба. Самое лучшее, что мы можем сделать, — это заменить треугольники треугольными

призмами с параллельными основаниями. Если каждое из двух тел удастся разрезать на такие призмы, то любое из них преобразуется в другое тело. Но, к сожалению, полным полно тел, которые не удастся разрезать на призмы, так что аналогия с «двумерным доказательством» уведет нас не слишком далеко.

В результате выбор пространственных тел, пригодных для разрезания, оказывается достаточно ограниченным. Более того, пространственные разрезания имеют тенденцию к появлению большого числа частей, и вдобавок они

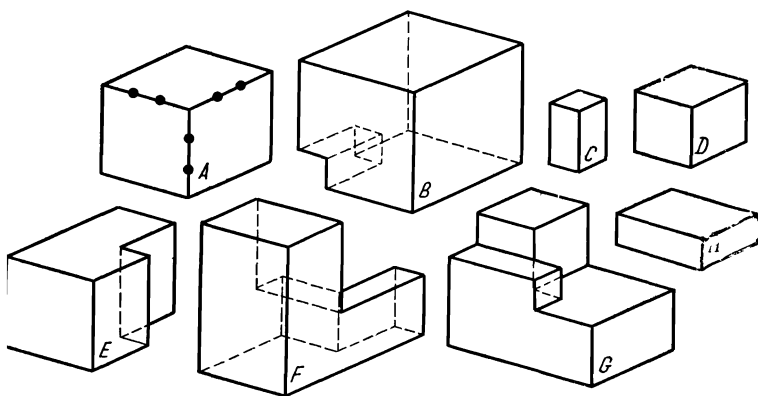


Рис. 244.

труднообозримы. Не удивительно, что в этой области сделано очень мало; при этом обычно все внимание уделяется доказательству возможности данного разрезания в то время, как вопрос о его экономности остается, как правило, в стороне. Первые два разрезания, о которых пойдет сейчас речь, представляют собой в этом смысле исключение.

Рис. 244. Некоторые пространственные разрезания основаны на методах, скопированных с планиметрических задач. Например, существует принадлежащее Р. Ф. Уилеру *R*-разрезание куба со стороной в 6 единиц в три куба со сторонами в 3, 4 и 5 единиц, которое содержит 8 частей. Оно служит наглядным доказательством равенства

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3.$$

Все части, участвующие в данном разрезании, составлены из 216 единичных кубиков, на которые можно разрезать исходный куб. На рис. 244 отрезки единичной длины отмечены точками (часть А). Здесь все части изображены отдельно, в то время как рис. 245 дает ключ

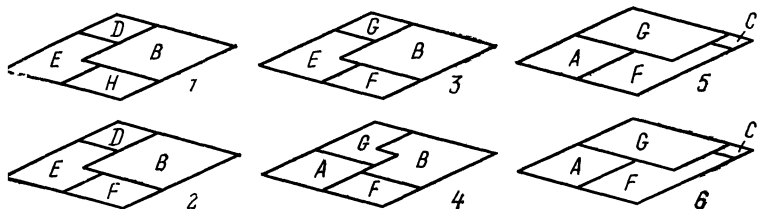


Рис. 245.

к пониманию расположения этих же частей внутри куба со стороной, равной 6. Шесть чертежей на рис. 245 показывают, какие части расположены в шести последовательных слоях единичной толщины, начиная сверху.

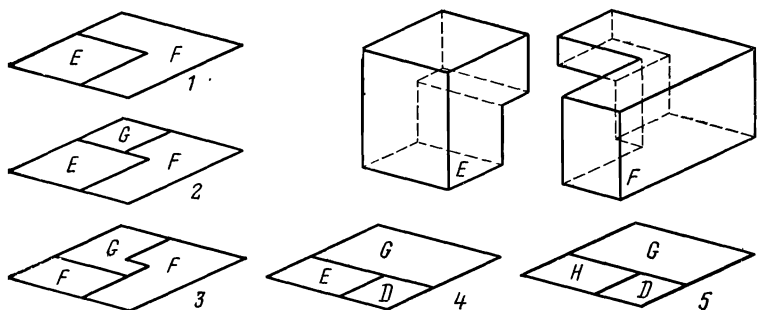


Рис. 246.

Преобразование исходного куба в 3 новых куба осуществляется с помощью части А, частей В и С, и наконец, частей D—H, причем ориентация частей E и F отличается от изображенной на рис. 244; их новая ориентация показана на рис. 246.

Я могу себе представить, скольких часов терпеливых поисков стоило это решение, и поздравляю его автора.

Рис. 245. Некоторые простейшие пространственные разрезания практически представляют собой комбинации плоских разрезаний, каждое на одной из граней,

продолженных в глубину до второй параллельной грани. К такому типу принадлежит предложенное А. Г. Уилером преобразование в куб прямоугольного параллелепипеда размера $2 \times 1 \times 1$. На рис. 247 показан P -сдвиг на верхней грани, определяющий вертикальные разрезы, в результате которых размеры параллелепипеда меняются на $r^2 \times r \times 1$, где $r = \sqrt[3]{2}$. Вторым P -сдвиг, показанный пунктиром, изменяет размеры грани $r^2 \times 1$ на $r \times r$ и определяет положение разрезов вдоль плоскостей, перпендикулярных этим граням, с помощью которых параллелепипед преобразуется в куб. После первого

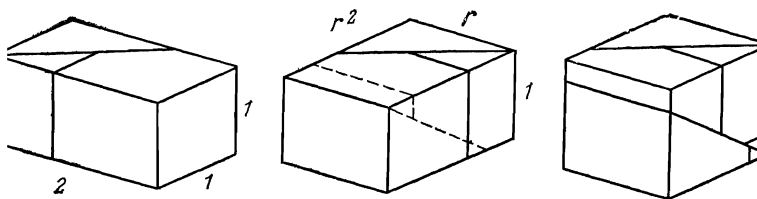


Рис. 247.

P -сдвига появляются 3 части; длинный разрез во втором P -сдвиге пересекает каждую из них, так что число частей становится равным 6. Наконец, короткий разрез добавляет еще одну часть; в результате всего получается 7 частей.

Рис. 246. Общее преобразование одного параллелепипеда в другой можно осуществить, используя пространственные полосы, которые «накладываются друг на друга» (в действительности взаимопроникают друг в друга). Разрезы, расположенные в общей части таких полосок, и дают решение задачи. Однако данные полоски, которые мы представляем себе лежащими горизонтально, должны иметь одинаковую высоту. Следовательно, один из параллелепипедов следует модифицировать, например, так, как показано на рис. 248, где изображена боковая проекция одной из полосок, на которой показаны только видимые линии. На этом рисунке вдоль JK сделан разрез, а часть L помещена на грани MN . На рис. 249 изображен общий вид той же полоски, пересеченной второй полоской, которая отмечена штрихпунктирной линией, поскольку пунктирные линии упо-

требляются здесь в том же смысле, что и на обычных инженерных чертежах. Вторая полоска составлена из прямоугольных параллелепипедов, дабы облегчить чертёж, но этот специальный случай хорошо иллюстрирует и общий случай. Предварительный разрез в первом параллелепипеде приводит к двум частям; каждая из них

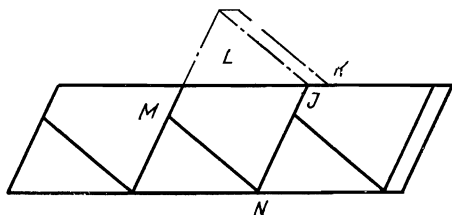


Рис. 248.

разрезается вертикальной гранью второй полоски, в результате чего образуются 4 части. Общая же плоскость примыкающих элементов второй полоски пересекает 3 из этих 4 частей, так что всего получается 7 частей

Данный метод не приводит к минимальному разрезанию параллелепипеда $2 \times 1 \times 1$ и куба, начнем ли мы

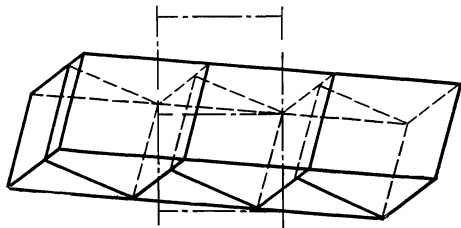


Рис. 249.

с того, что сделаем высоту параллелепипеда равной высоте куба, или, наоборот, при «наложении» плоскость, общая для двух примыкающих элементов во второй полоске, пересечет все 4 части первой полоски вместо трех.

В только что описанном общем методе использовались пространственные *P*-полоски. Пространственные *T*-полоски тоже существуют, но их применение ограничено. Дело в том, что, как показывают пробы, условия существования таких полосок, а также существования основных на них разрезов весьма жесткие; например,

приходится требовать, чтобы некоторые грани были перпендикулярны или чтобы совпадали некоторые длины либо углы. Подобные ограничения мешают решать достаточно общие задачи, так что примеры, в которых использовались бы *T*-полоски, мы не будем приводить.

Поскольку в планиметрическом случае мы прибегали к переворачиванию некоторых частей обратной стороной кверху (при этом приходилось «выходить» в третье измерение), то вы, вероятно, не станете возражать, если в стереометрическом случае мы будем выворачивать некоторые части наизнанку (при этом придется «выйти»

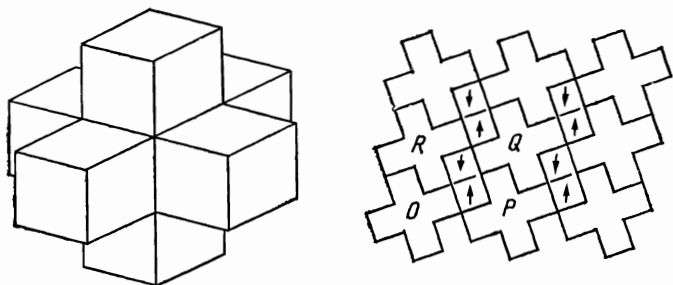


Рис. 250.

уже в четвертое измерение). В этом случае ограничения удается несколько облегчить.

Не исключено также использование «сот» (пространственного аналога мозаики). Так, например, пространственный эквивалент греческого креста, составленный из 7 кубов, служит элементом сот, обладающих параллелепипедом периодов. Две подходяще выбранные пары конгруэнтных плоскостей выделяют из этих сот пространственную полоску. Можно и непосредственно преобразовать данный пространственный крест в другое тело с тем же параллелепипедом периодов.

В сотах, порожденных крестом, каждый слой устроен так, как показано на рис. 250. Изображенные кресты порождают кубы в слоях, расположенных непосредственно над данным слоем и под ним, а параллелограмм периодов совпадает с *OPQR*. Участки, которые отмечены стрелочками, направленными вверх, можно заполнить кубами, торчащими вверх из нижнего слоя, а те участки,

которые отмечены стрелочками, направленными вниз, заполняются кубами, торчащими вниз из верхнего слоя.

Рис. 247. Наиболее общий класс тел, про которые известно, что с помощью разрезов их можно преобразовать в куб, а значит, и друг в друга, составляют так называемые *зоноэдры*. Зоноэдр — это выпуклый многогранник, все грани которого — центрально-симметричные многогранники, то есть противоположные стороны каждой грани равны и параллельны; каждую грань зоноэдра можно разрезать на параллелограммы (см., например, рис. 251, *а*, где на параллелограммы разрезана вось-

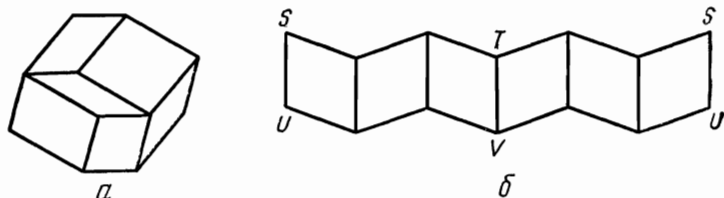


Рис. 251.

миугольная грань)¹. Если мы разобьем на параллелограммы подобным образом каждую грань, не являющуюся параллелограммом, то мы сможем принять каждый из параллелограммов разбиения за отдельную грань зоноэдра и считать, что *все* грани зоноэдра представляют собой параллелограммы. Параллелепипед — это простейший зоноэдр. Другой пример дает «косой» срез правильной шестиугольной призмы, представляющий собой тело, у которого верхней и нижней гранями служат шестиугольники со взаимно параллельными сторонами, а соответствующие вершины соединены шестью равными и параллельными «боковыми ребрами», не обязанными быть перпендикулярными верхней и нижней граням. Легко понять, что любая система граней зоноэдра, ограниченных параллельными ребрами, такая, как изображено на рис. 251, *б*, не может «спирально закручиваться» по отношению к его первой грани и, следовательно, первая грань данной системы граней, смыкаясь с ее последней гранью, образует замкнутую зону (что по-гречески

¹ Ср с посвященным зоноэдрам разделом Г цикла задач 4 из книги [12]. — *Прим ред.*

означает «пояс»), опоясывающую зоноэдр. Отсюда происходит название, с этим же, как мы увидим позже, связано и разрезание зоноэдров

Нам надо показать, что зоноэдр можно разрезать на параллелепипеды. На рис. 252 изображен только силуэт некоторого зоноэдра, поэтому все, что можно здесь увидеть из горизонтальной (или близкой к горизонтальной) зоны, — это ее ребра SU и TV . (Нижний передний край зоны может выглядеть, как UYV ; ее верхний и нижний края вовсе не обязаны совпадать с ломаными SWT или

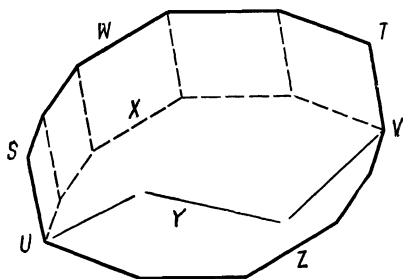


Рис. 252.

UZV .) Удалим из зоноэдра слой, ограниченный сверху поверхностью SWT , а снизу — внутренней поверхностью UXV , которая отстоит от SWT всюду на одно и то же расстояние, равное SU или TV на рис. 251, б и 252. Этот удаленный слой можно разбить на параллелепипеды, верхними гранями которых будут служить грани зоноэдра, каждая нижняя грань которых будет идентична расположенной над ней верхней грани, причем соответствующие вершины этих двух граней будут попарно соединены равными и параллельными отрезками прямых. Таким образом, мы разрезали часть зоноэдра на параллелепипеды и получили зоноэдр с меньшим числом граней, ибо грани, образовавшие соответствующую зону, уже удалены. Мы можем теперь точно так же удалять слой за слоем до тех пор, пока оставшийся зоноэдр (если он вообще останется) сам не окажется параллелепипедом. Заключительные шаги состоят в том, чтобы преобразовать полученные параллелепипеды в слои куба и сложить затем из них сам куб. Хотя зоноэдр и определен как выпуклое тело, в данном процессе могут уча-

ствовать и невыпуклые тела, как, например, удаленный слой $SWTVXU$ на рис. 252.

Это разрезание впервые точно описал Лео Мозер. Оно не охватывает все возможные преобразования в куб, но зато имеет то преимущество, что является наиболее общим на сегодняшний день пространственным разрезанием, да, вероятно, и вообще наиболее общим возможным разрезанием.

Рис. 248. Мне известно еще только одно пространственное разрезание, которое может претендовать на какую-то общность. Его можно применять к любому многограннику, но объяснить его лучше на примере тетраэдра. На рис. 253, *а* изображена боковая проекция

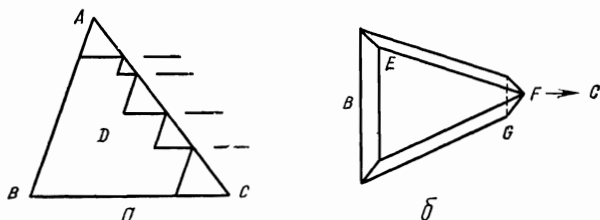


Рис. 253

некоторого тетраэдра, ориентированного так, чтобы AB и BC представляли его грани, а AC — ребро. Маленькие треугольники, расположенные вдоль AC , представляют тетраэдры той же формы, что и тетраэдр ABC . Если их удалить, то, как показал Ж. П. Сидлер, оставшееся тело можно преобразовать в куб. Доказательство состоит в том, что мы разбиваем тетраэдр на слои горизонтальными разрезами, как показано прямыми справа от AC . Нижний слой, вид которого сверху показан на рис. 253, *б*, можно разбить на две треугольные призмы с параллельными концевыми гранями, проведя разрез через плоскость EFG . Аналогично следует поступить и с остальными слоями. Призмы, полученные из всех слоев, можно затем преобразовать в куб.

Полагая $AC = a$ и разбивая a любым способом на любое число k равных или неравных частей $a_1, a_2, \dots, a_k$, мы можем сказать, что тетраэдр размера a можно разбить на k тетраэдров размеров $a_1, a_2, \dots, a_k$ и куб. Поскольку любой многогранник удастся разбить

на тетраэдры, отсюда немедленно следует обобщение данного процесса на случай произвольного многогранника.

На рис. 254, б изображена пирамида, которая получится, если соединить верхнюю вершину H куба, показанного на рис. 254, а, с его нижними вершинами J , K , L , M , причем и куб, и пирамида изображены с точки зрения наблюдателя, который расположен выше их и смотрит, так сказать, с «юго-западной» стороны. В силу сказанного выше, эту пирамиду можно разрезать на 3 меньшие равные пирамиды и куб. Но из трех пирамид, подобных пирамиде, изображенной на рис. 254, б, можно

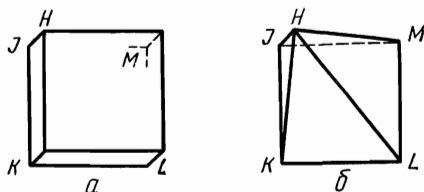
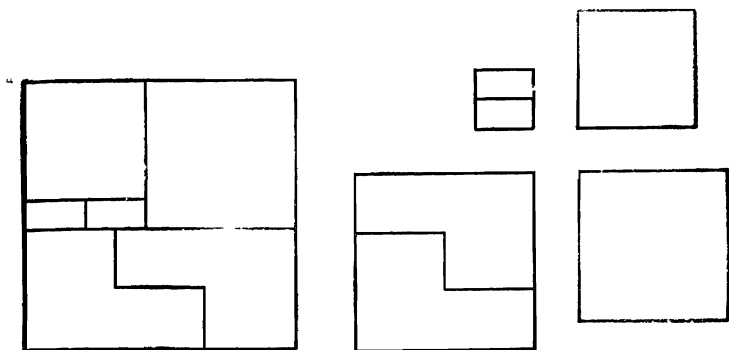


Рис. 254.

составить куб, если поместить три их вершины в точку H , а квадратные основания других двух пирамид составить на KL и LM . Отсюда следует, что такую пирамиду можно преобразовать в два куба, а значит, и в один куб.

Если 4 пирамиды, изображенные на рис. 254, б, соединить так, чтобы их ребра HJ совпали, то получится тело, известное как пирамида Джуела. Ее вершина расположена над центром квадратного основания, а ее высота равна половине стороны основания. Очевидно, что пирамиду Джуела также можно преобразовать в куб.

Существуют также и « n -мерные разрезания», где размерность n может быть любой. Если n четно (как в главах 1—22), то любой политоп (n -мерный многогранник) можно с помощью разрезов и перекладывания частей преобразовать в любой другой равновеликий исходному политоп. Этот политоп может являться и *симплексом* — многомерным аналогом треугольника и тетраэдра. Отсюда следует, что существуют PT - и TT -разрезания, которые являются прямыми обобщениями соответствующей процедуры на случай $2m$ измерений, свободными от жестких ограничений трехмерного случая. Кто их найдет?



Заключение

Если представить какую-нибудь статью, посвященную разрезаниям, в первоклассный математический журнал, то его редактор, скорее всего, с презрением отвергнет ее — ведь в отличие от головоломных мостов через реку Прегель или задачи о причесывании волосатой сферы задачи на разрезание к серьезной математике обычно не относят. Они кажутся бесполезными, поскольку на первый взгляд неприменимы к какой-либо иной проблеме.

Однако такое приложение есть. Если n точек расположены внутри единичного квадрата и соединены непрерывной сетью, то всегда можно добиться, чтобы общая длина сети не превосходила некоторого зависящего только от n значения l_n вне зависимости от того, как расположены эти точки [Math. Gaz., 44, 182 (1960)]. Известно, что

$$l_n = k \sqrt{n} + O(1) \text{ (где коэффициент } k \leq 1).$$

А что произойдет, если наши n точек расположены внутри равностороннего треугольника со стороной 1? С помощью разрезов удастся показать, что та же формула

справедлива и в этом случае, как, впрочем, и в случае любого правильного многоугольника со стороной 1.

Скептик может возразить, что это приложение общей теории тоже довольно бесполезно. В ответ мы можем сказать, что не так уж важно, может ли быть использовано в дальнейшем данное приложение или нет, — важно только, существует ли вообще какое-нибудь приложение. Постепенно накапливается цепочка последовательных приложений, каждое из которых кажется совершенно бесполезным. Но в один прекрасный день выяснится, что какое-то из этих приложений действительно полезно, и в результате вся цепочка обретает новую жизнь.

Вот тогда-то нашему предмету и потребуется достойное его название — нечто вроде «?-ологии», означающее изучение «?-морфных» преобразований. Аспиранты набросятся на эту тему, и каждый из них получит желаемую ученую степень. Тогда и сам предмет станет еще более полезным и приобретет дополнительный блеск, ибо *man kann damit grübeln*¹, как охарактеризовал Ландау² прикладное значение теории чисел.

А пока решение задач на разрезание зависит от стимулов, связанных с присущей этим задачам «интересностью», а не с надеждами на докторскую степень. Самая скромная и наиболее очевидная задача состоит в том, чтобы уменьшить число частей в каком-либо конкретном решении. Успех в значительной мере зависит от вашего терпения; так, содержащее 7 частей и представленное на рис. 164, *a* решение задачи о преобразовании буквы V в квадрат явилось плодом гораздо более длительных экспериментов, чем это можно предположить, знакомясь с этим решением по книге. Но иногда успех связан и с вдохновением; примером здесь может служить открытие того, что из частей двенадцатиугольника, участвующих в мозаике на рис. II.12, удастся сложить мозаику рис. II.13.

¹ На этом можно сделать карьеру (*нем*)

² Эдмунд Ландау — выдающийся немецкий математик (изгнанный в конце жизни фашистами из Германии), специалист по теории чисел, типичный представитель «чистой» математики, принципиально игнорировавший все прикладные аспекты — *Прим ред.*

На следующей ступеньке стоят задачи о преобразовании многоугольников в элементы мозаики. Отыскивая S -преобразования, мы обращались к полоскам, при нахождении которых (в более сложных случаях) опирались на мозаики. А на что можно опереться при построении мозаик?

Еще одно занимательное (таковым оно по крайней мере кажется мне) направление исследований состоит в том, чтобы построить нечто вроде теории, охватывающей задачи, в которых части переворачиваются обратной стороной кверху, а также задачи, допускающие решение в виде шарнирной модели. Первоначально я планировал главы, посвященные обеим этим темам, но мои результаты в этом направлении оказались слишком бесвязными для того, чтобы их можно было выделить в отдельную главу.

Быть может, наиболее интересные проблемы связаны с вопросами, затронутыми в главах 20 и 21. Одна из них состоит в том, чтобы развить метод нахождения таких решений, который опирался бы на определенные правила и регулярные приемы, а не только на изобретательность. Пока некоторую помощь нам оказывают здесь лишь RTF и метод разбиения на ромбы и треугольники, описанный в связи с рис. 206. Ни один из этих приемов в отличие от методов, основанных на полосках и мозаиках, не позволяет нам продвинуться особенно далеко. Природа такого метода, еще ждущего своего открытия, в настоящее время окутана тайной, но когда он будет открыт, он может показаться нам столь же очевидным, какими кажутся теперь полоски и мозаики.

Еще одна задача, связанная с главами 20 и 21, состоит в том, чтобы обнаружить новые общие соотношения, подобные соотношениям (5) и (6) главы 20. Если вы попытаетесь решить эту задачу, скажем стараясь обобщить частные соотношения, представленные в конце главы 20, то, вероятно, будете удивлены своей беспомощностью перед теми самыми синусами и косинусами, к которым вы, казалось, уже так привыкли.

Если столько незаконченного есть еще на плоскости, то в пространстве — буквально непочатый край работы. Здесь задача может состоять не только в том, чтобы найти какое-то решение, но и в том, чтобы указать слу-

чай, когда такое решение вообще стоит искать. Уже такая простая вещь, как минимальное разрезание ромбо-додекаэдра и куба, вероятно, стоит того, чтобы с ней повозиться. Наконец, если вас манят пространства большего числа измерений, попытайтесь решить в четырехмерном пространстве следующую задачу: опишите общее PT -преобразование параллелотопа и симплекса, а также общие TT -преобразования двух симплексов.

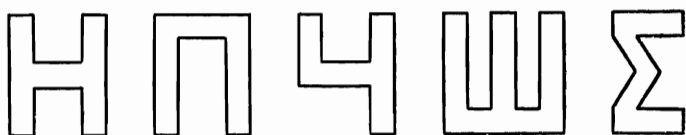
ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧ

Попробуйте свои силы в решении приведенных ниже задач. В случае неудачи вы можете обратиться к соответствующим решениям, помещенным в приложении IV. В задаче 3, например, требуется преобразовать шестиугольник, используя полоску на рис. 29, в «золотой» прямоугольник, прибегнув к полоске на рис. 43; это *PP*-преобразование; в нем участвуют 5 частей. Остальные задачи ставятся аналогично.

1. Прямоугольник на рис. 2, квадрат; *P*; 4.
2. Митра на рис. 68, квадрат; *P*; 5.
3. Шестиугольник на рис. 29, золотой прямоугольник на рис. 43, *PP*; 5.
4. Гексаграмма на рис. 37, квадрат; *PP*; 5.
5. Гексаграмма на рис. 37, золотой прямоугольник на рис. 43; *PP*; 5.
6. Гексаграмма на рис. 37, восьмиугольник на рис. 34; *PP*; 9.
7. Греческий крест на рис. 40, золотой прямоугольник на рис. 43; *PP*; 5.
8. Латинский крест на рис. 23, золотой прямоугольник на рис. 43; *PP*; 5.
9. Латинский крест на рис. 23, восьмиугольник на рис. 34; *PP*; 8.

10. Латинский крест на рис. 23, гексаграмма на рис. 37; *PP*; 9.
11. Найдите развертку куба (см. текст к рис. 7) так, чтобы получить фигуру, которую можно преобразовать в квадрат, разрезав ее предварительно на 4 части.
12. Пятиугольник на рис. 54, золотой прямоугольник на рис. 43; *PT*, 6.
13. Гексаграмма на рис. 37, шестиугольник на рис. 57; *PT*; 7.
- 13а. Золотой прямоугольник (широкая полоса), треугольник на рис. 56; *TT2*; 4.
14. Шестиугольник и треугольник на рис. 56, *TT2*, 5.
15. Шестиугольник на рис. 56 в центре, пятиугольник на рис. 54; *PT*; 7.
16. Шестиугольник на рис. 56 справа, пятиугольник на рис. 64, б; *TT2*; 7.
17. Восьмиугольник на рис. 35, треугольник на рис. 56; *TT2*, 8.
18. Восьмиугольник на рис. 35, пятиугольник на рис. 64, б; *TT2*; 9.
19. Греческий крест на рис. 57 слева, треугольник на рис. 56; *TT2*; 5.
20. Двенадцатиугольник на рис. 93, треугольник на рис. 56; *PT*; 8.
21. Двенадцатиугольник на рис. 93, золотой прямоугольник на рис. 43; *PP*; 7.
22. Мальтийский крест на рис. II. 16, греческий крест на рис. II. 15; *T*; 9.
23. Восьмиугольник на рис. 30, шестиугольник, расположенный параллельно *AB* на рис. 73; *PP*; 9.
24. Гексаграмма на рис. 37, двенадцатиугольник, расположенный параллельно *AB* на рис. II. 12; *PP*; 10.
25. Семиугольник на рис. 132, а, квадрат; *TT2*; 9.
26. Семиугольник на рис. 133, золотой прямоугольник на рис. 43; *PT*, 9.
27. Семиугольник на рис. 132, а, шестиугольник на рис. 56 справа; *TT2*; 11.
28. Греческий крест на рис. 57, семиугольник на рис. 132, а; *TT2*; 12.
29. Девятиугольник на рис. 144, квадрат; *TT2*; 12.
30. Девятиугольник на рис. 143, золотой прямоугольник на рис. 43; *PT*; 12.

31. Десятиугольник на рис. 147, *а*, пятиугольник на рис. 54; *PT*; 11.
32. Десятиугольник на рис. 148, *а*, шестиугольник на рис. 28; *PP*; 9.
33. Латинский крест на рис. 23, десятиугольник на рис. 150, *б*; *PP*; 10.
34. Десятиугольник на рис. 147, *б*, восьмиугольник на рис. 34; *PP*; 13.
35. Греческий крест на рис. 38, десятиугольник на рис. 150, *б*; *PP*; 11.
36. Русское Н или П (рис. I. 1), квадрат; *P*; 7.
37. Русское Ч (рис. I. 1), квадрат; *T*; 5.
38. Русское Ш (рис. I. 1), квадрат; *T*; 6.



I. 1.

39. Сигма (рис. I. 1), квадрат; *P*; 5 (с перевертыванием частей).
40. $\{8/3\}$, квадрат; *P*; 8.
41. $\{8/3\}$, квадрат; пополнение мозаики; 9 (неминимальное).
42. $\{8/2\}$, греческий крест; *T*; 8.
43. Преобразование двух $\{8/2\}$ в одну; *U*; 11.
44. Преобразование двух $\{8/3\}$ в одну; *U*; 12.
45. Преобразование $\{8/2\}$ и $\{8/3\}$ с одинаковой s^1 в $\{8/3\}$; *U*; 9.
46. Преобразование $\{12/3\}$ и $\{12/4\}$ с одинаковой s в $\{12/5\}$; *U*; 13.
47. Преобразование четырех шестиугольников в один; *U*; 8.
48. Преобразование четырех пентаграмм в одну; *U*; 14.
49. Преобразование пяти пентаграмм в одну; *U*; 20.
50. Найдите содержащее 9 частей разрезание греческого креста, квадрата и треугольника.

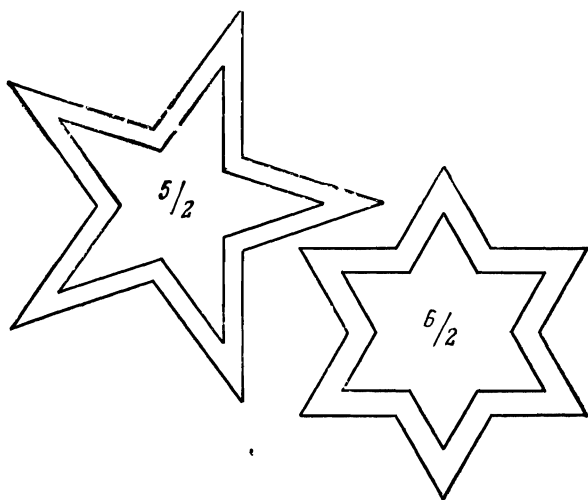
¹ От англ. side — сторона

51. С помощью трех прямолинейных разрезов разбейте прямоугольный параллелепипед $24 \times 9 \times 8$ на 4 части, из которых можно сложить куб.
52. Разбейте куб со стороной 6 с помощью разрезов, параллельных граням, на 6 частей, из которых можно сложить 6 различных прямоугольных параллелепипедов.
53. Разбейте пирамиду на рис. 254, б на 6 частей, из которых можно было бы сложить прямоугольный параллелепипед $3 \times 3 \times 1$.

Приложение II

РИСУНКИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ И Т. Д.

Это приложение предназначено для тех, кто хотел бы поэкспериментировать с полосками и мозаиками, но затрудняется самостоятельно изготовить нужные рисунки, пользуясь данными, приведенными в приложении III. Такие читатели могут просто перевести представленные



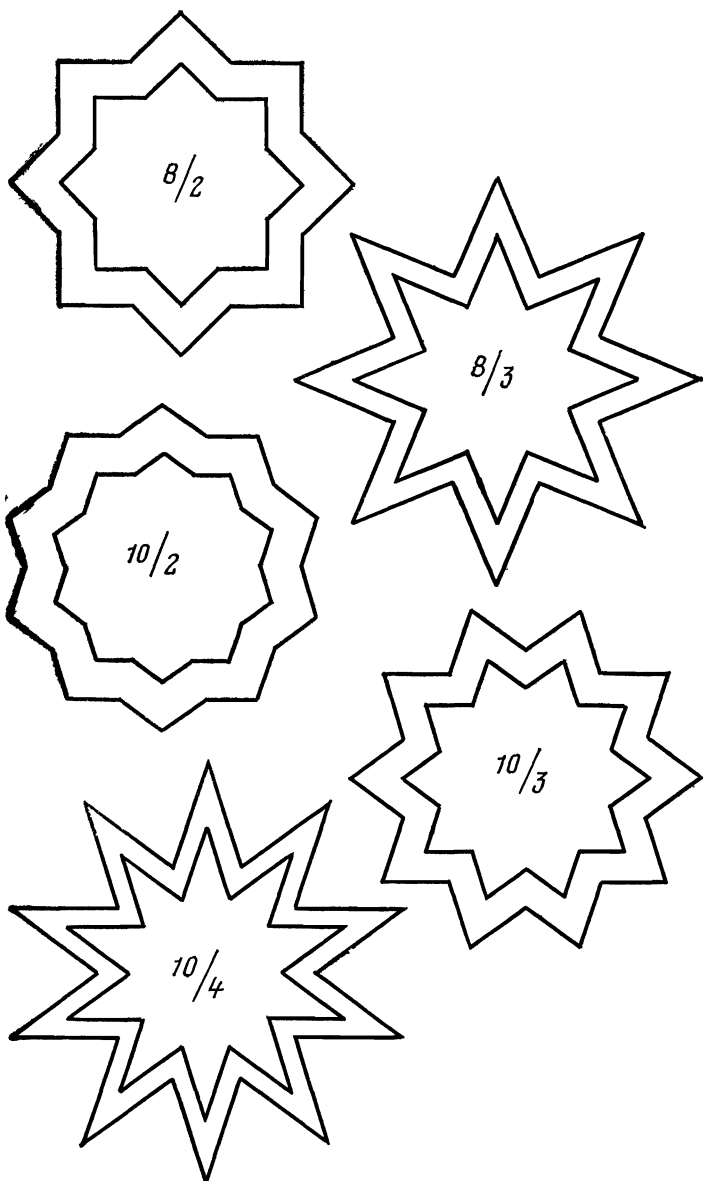


Рис. II. I.

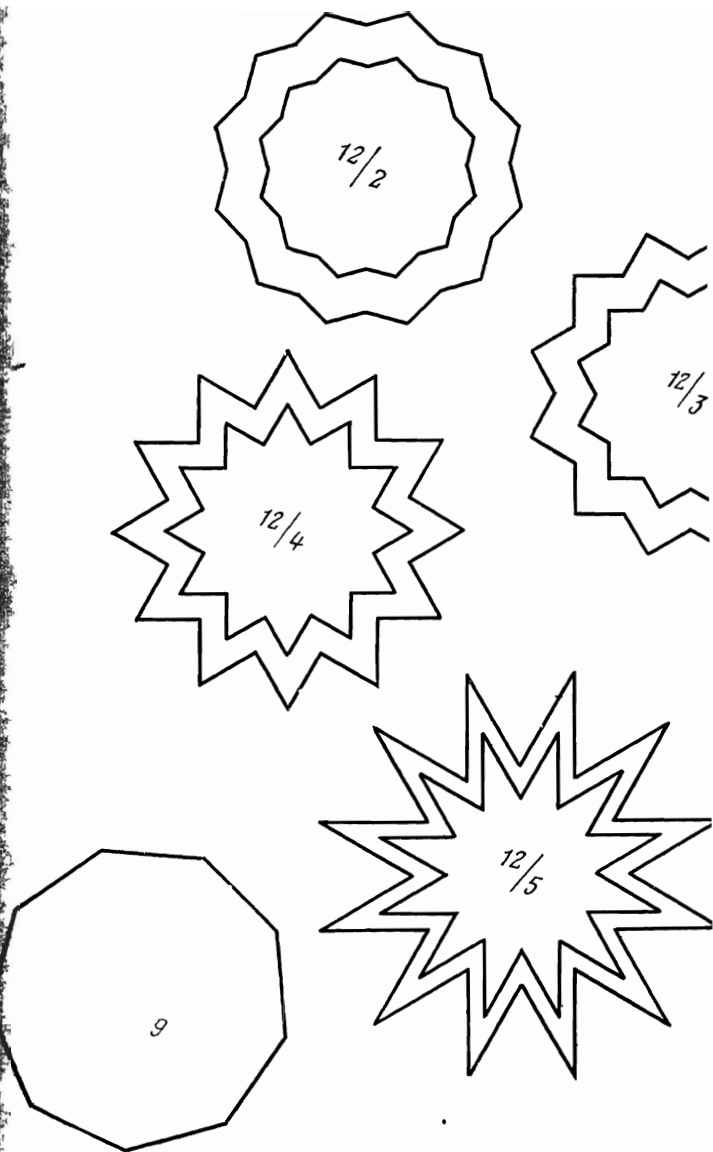


Рис. II. 2.

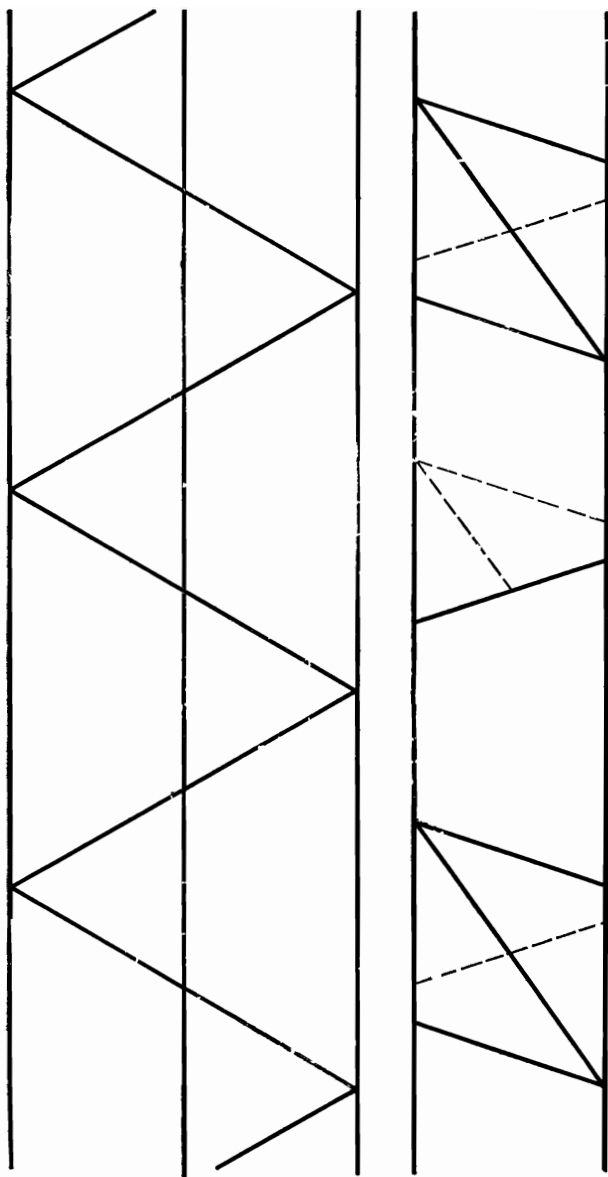


Рис II 3.

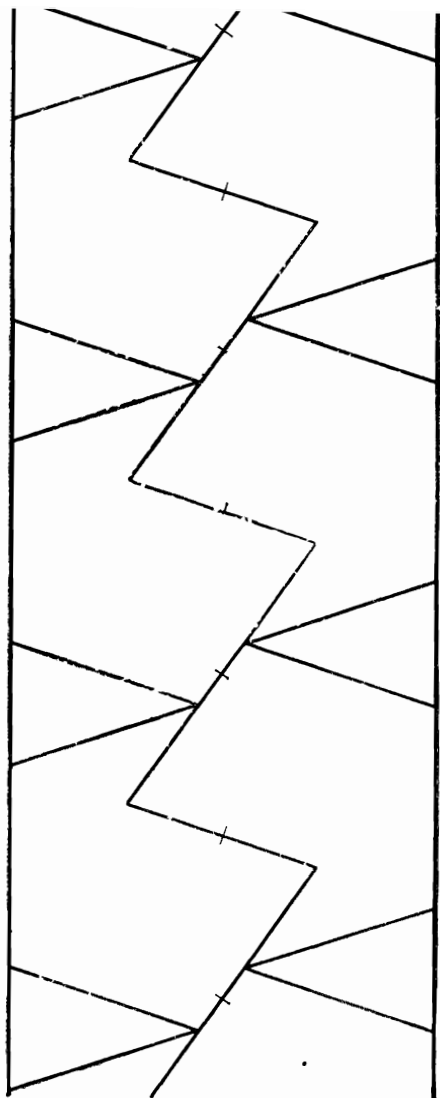


Рис II 4.

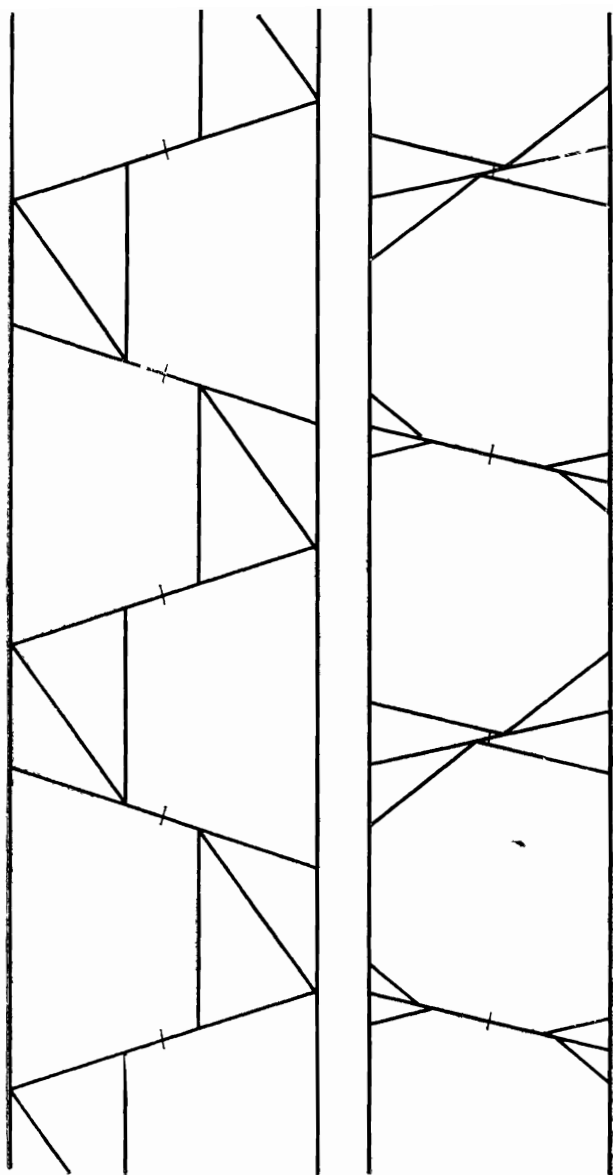


Рис. II. 5.

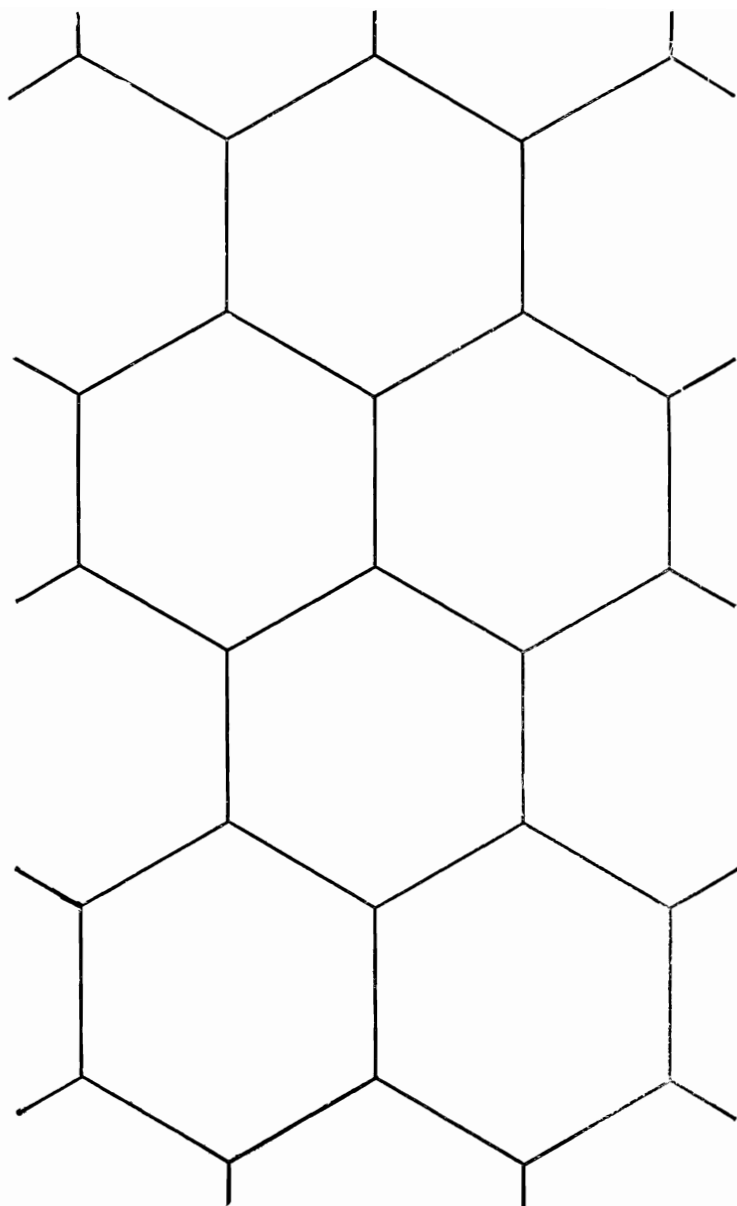


Рис. II. 6.

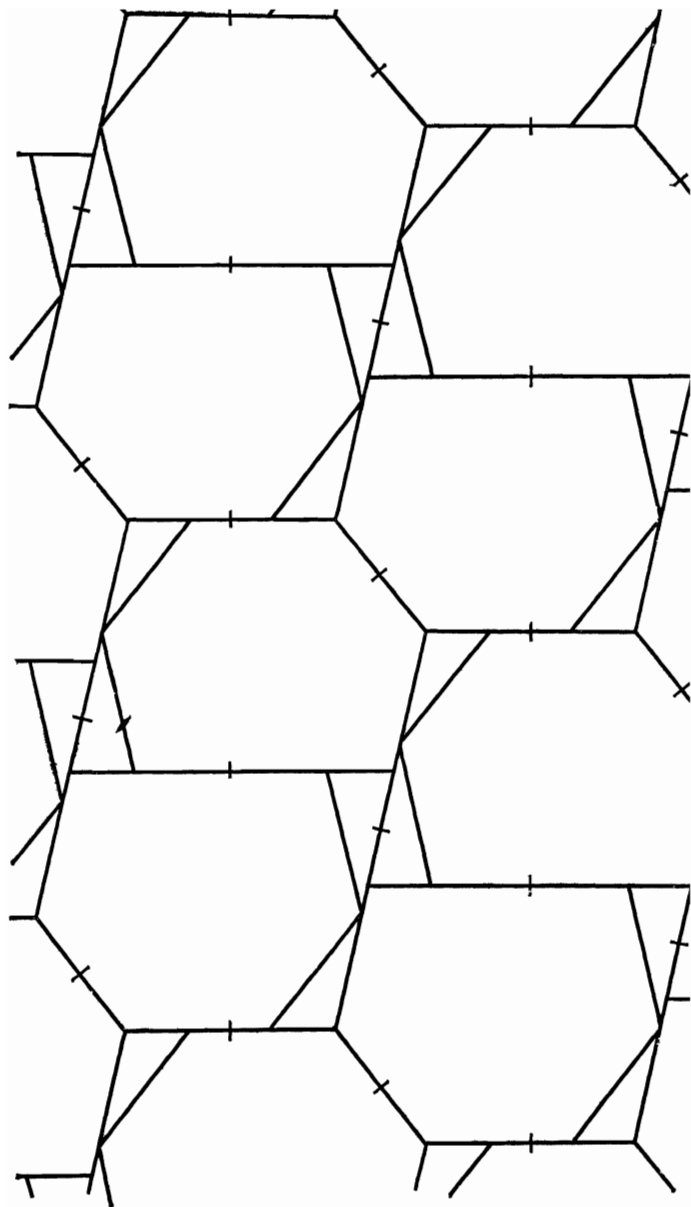


Рис. II. 7.

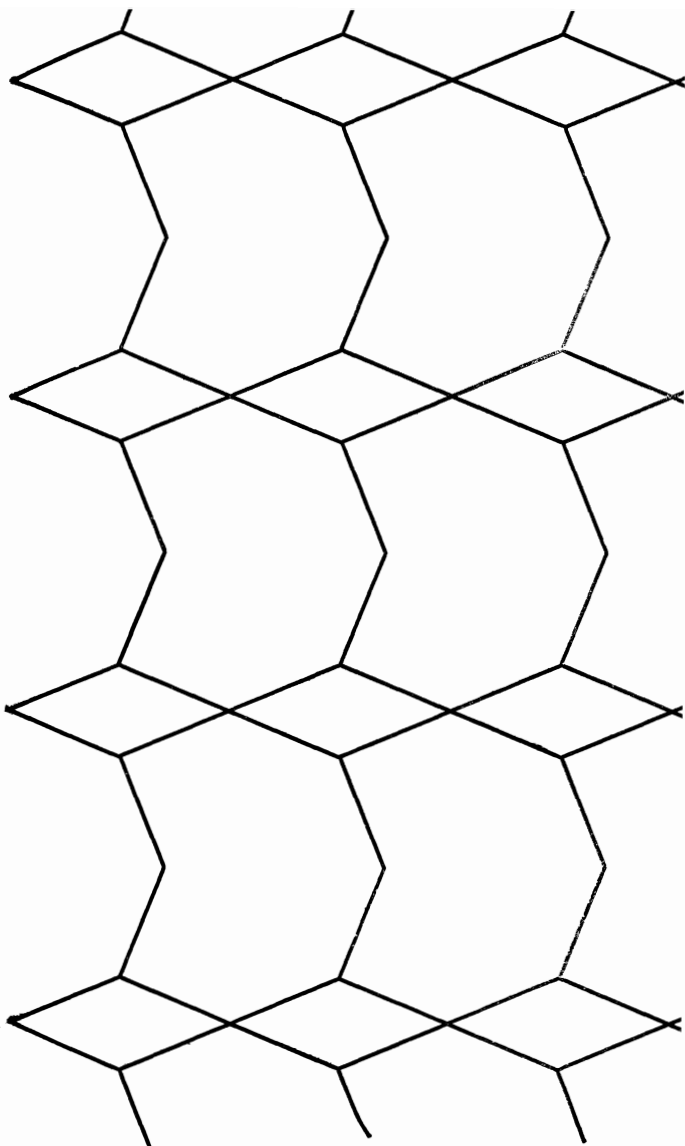


Рис. II. 8.

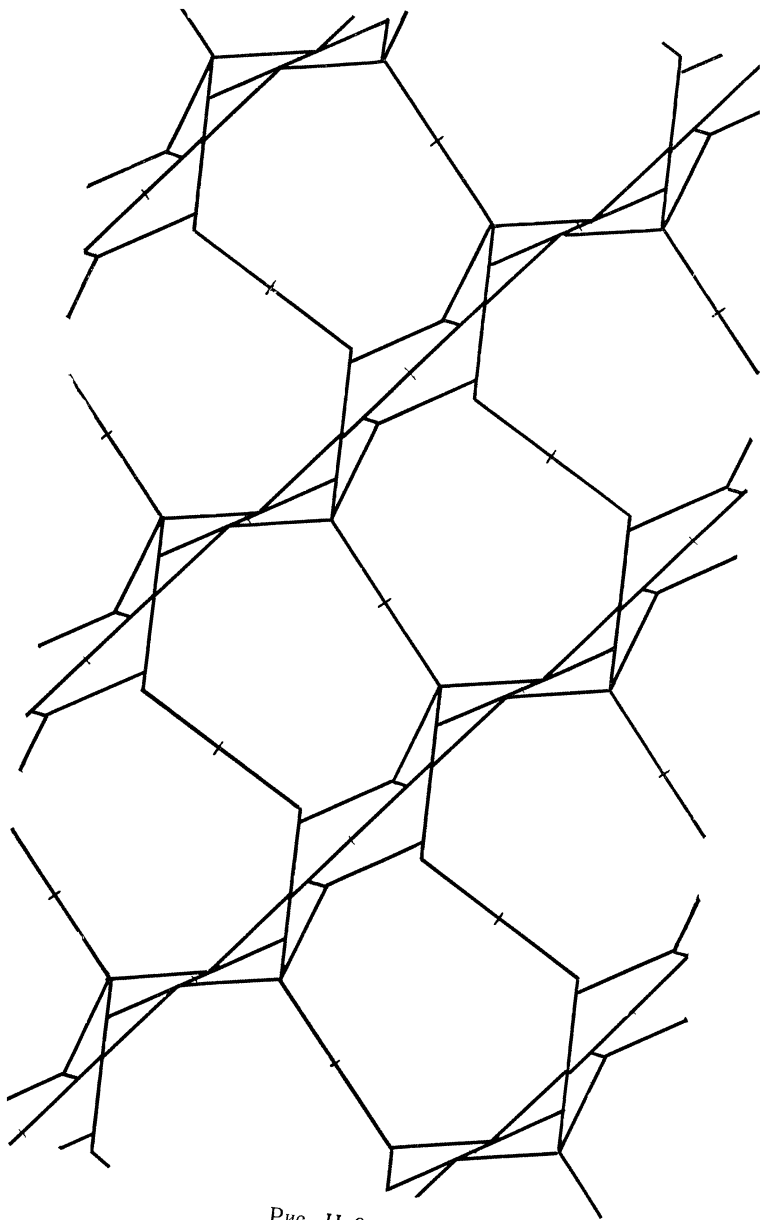


Рис. II. 9.

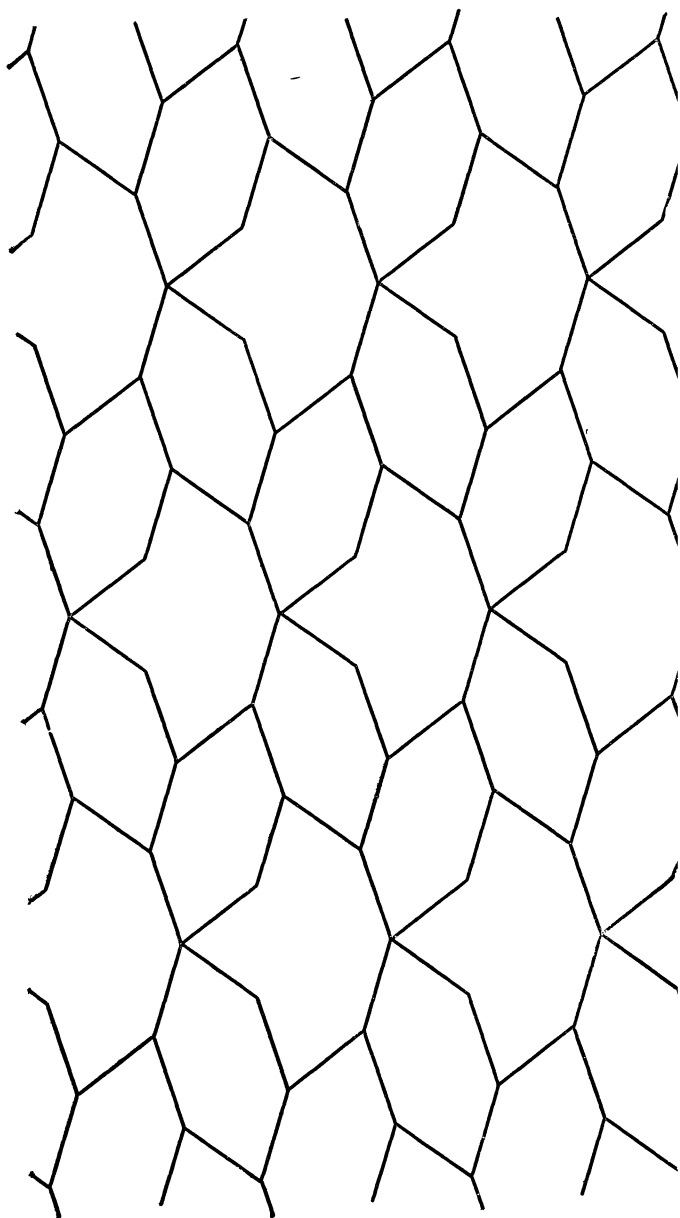


Рис. II. 10.

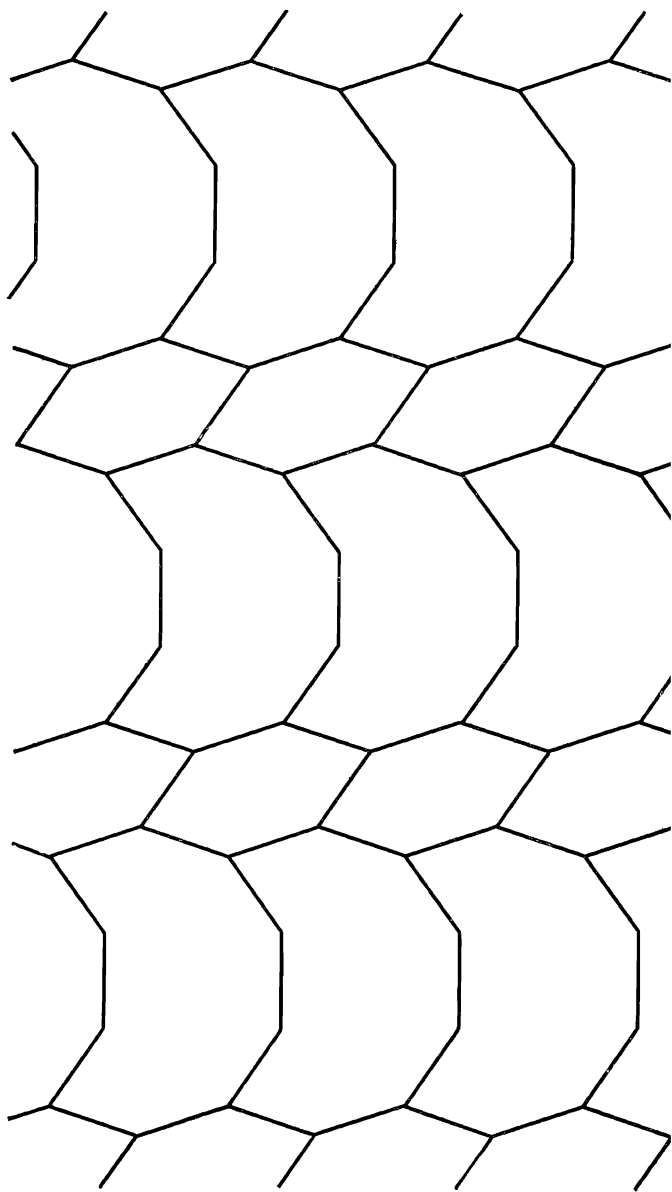


Рис. II. 11.

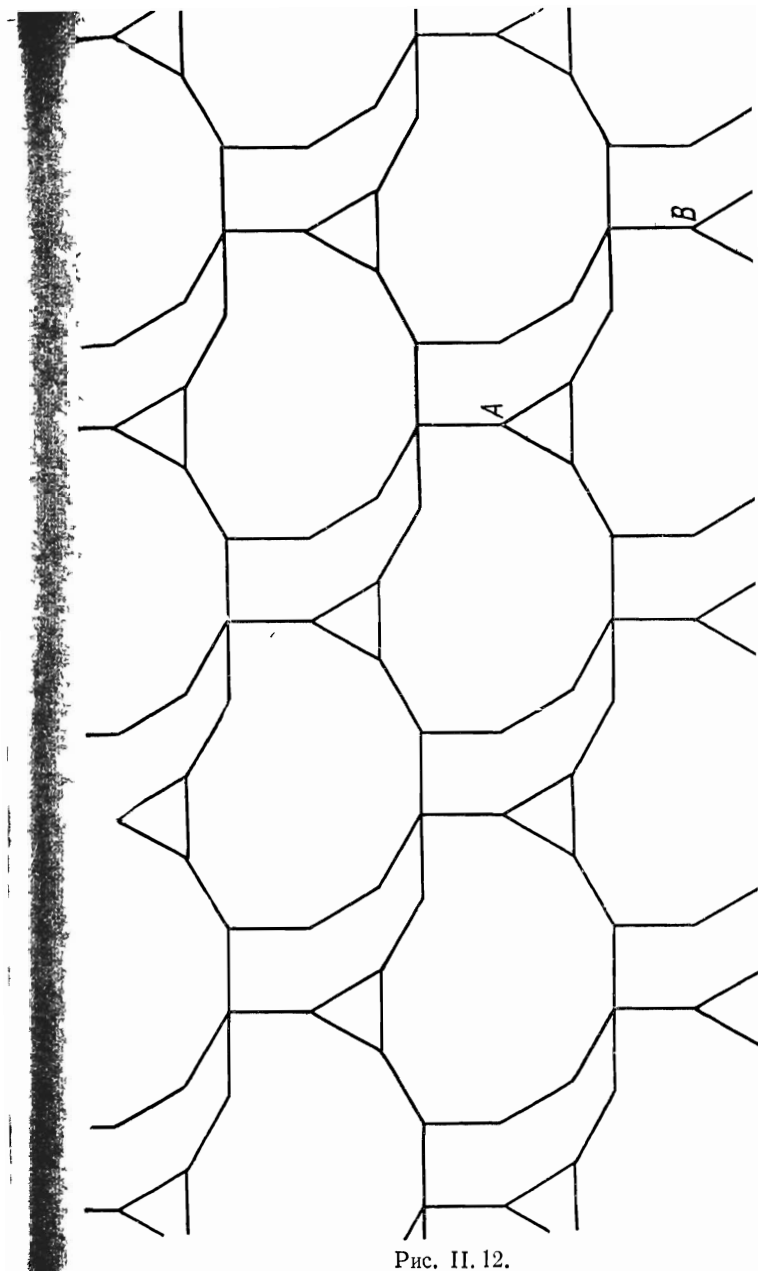


Рис. II. 12.

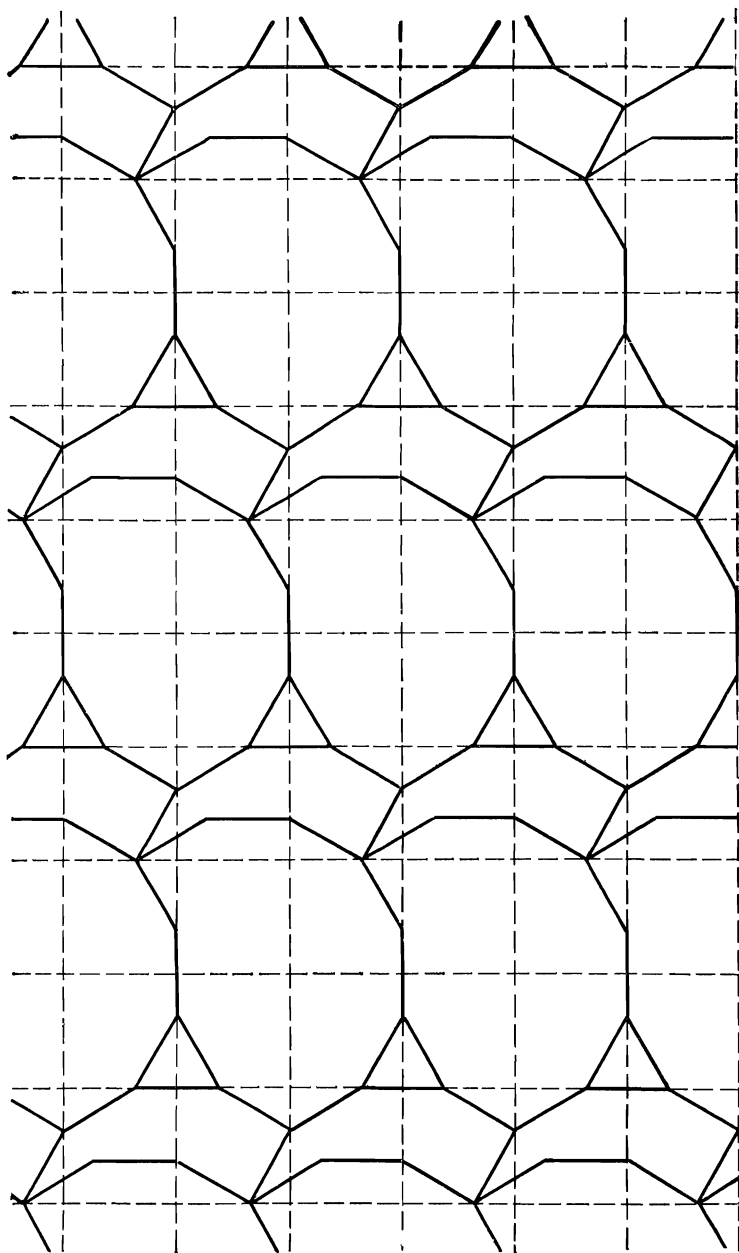


Рис. II. 13.

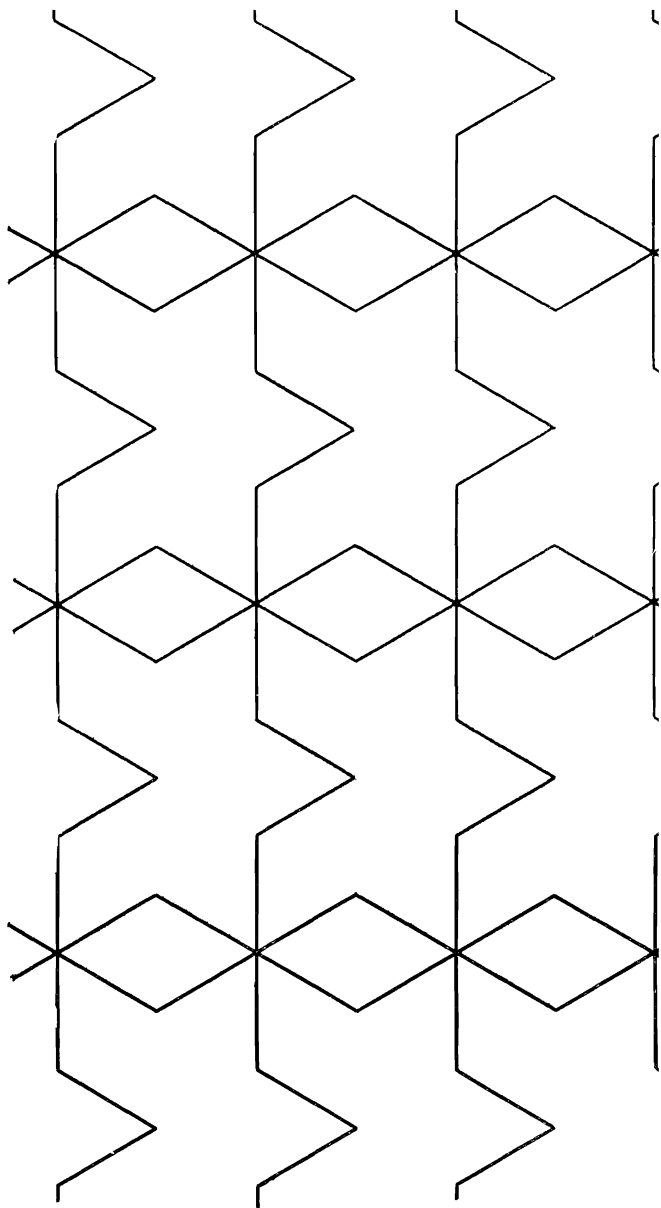


Рис. II. 14.

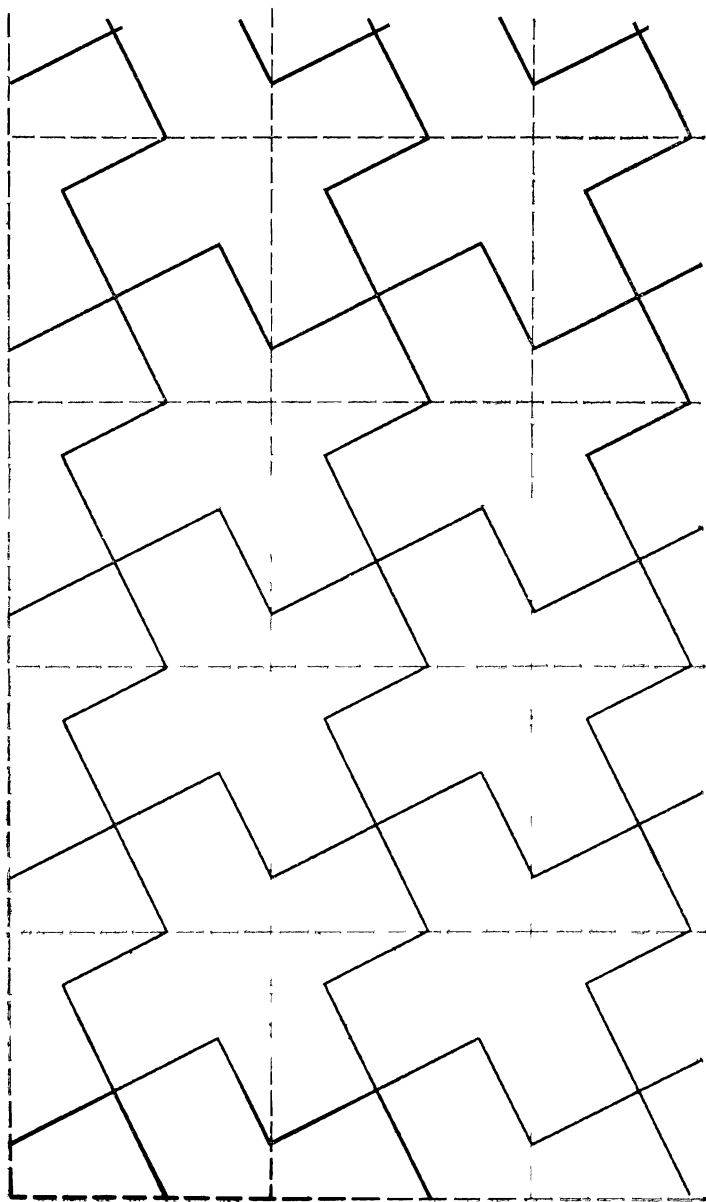


Рис. II. 15.

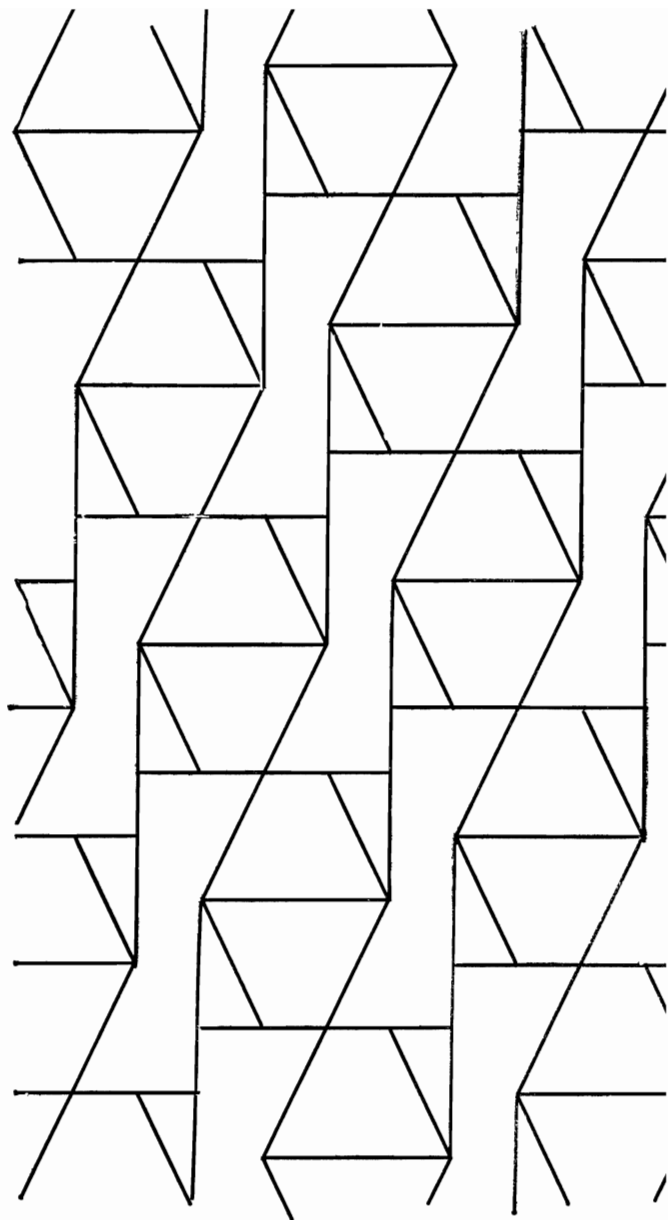


Рис. II. 16.

рисунки на кальку и получить большинство полосок, использованных в данной книге.

Площадь полиграмм составляет 8 и 16 см². Все другие площади равны 16 см². Ради экономии места мы не изображали отдельно те многоугольники и полоски, размеры которых можно получить из какой-либо мозаики. Так, из рис. II. 15 можно получить полоску квадратов. С целью еще большей экономии места мы иногда на одном рисунке изображали линии, относящиеся к двум полоскам или мозаикам, причем, дабы отличать их друг от друга, некоторые из этих линий изображались пунктиром. Так, размеры любой из полосок, порожденных латинским крестом, можно получить из рис. II. 13.

РАЗМЕРЫ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

В этом приложении приведены данные, которые окажутся полезными тем, кто захочет сделать точные чертежи. Все они относятся к площади в 20 квадратных единиц. Для повышения точности данных, приведенных ниже с пятью знаками, использовались семизначные таблицы¹.

n	s	$\log s$	R	$\log R$
3	6,7962	83 226	3,9238	59 370
4	4,4721	65 052	3,1623	50 000
5	3,4095	53 269	2,9003	46 244
6	2,7745	44 319	2,7745	44 319
7	2,3460	37 003	2,7035	43 192
8	2,0352	30 861	2,6591	42 474
9	1,7987	25 496	2,6295	41 988
10	1,6123	20 743	2,6087	41 642
12	1,3365	12 598	2,5820	41 195
∞	—	—	2,5231	40 194

¹ Здесь n — число сторон, s — сторона, R — радиус описанного круга соответствующего многоугольника, а r — радиус его вписанного круга (касающегося всех сторон многоугольника). В колонках логарифмов приводятся мантиссы, угол θ указан иногда в градусах (30, $22\frac{1}{2}$), а иногда в радианах ($\pi/7$), символ ∞ в графе n указывает на круг. — *Прим. перев.*

n	θ	$s \cdot \sin \theta$	$\log s$	$s \cdot \cos \theta$	$\log R$
3	30	3,3981	53 123	5,8857	76 980
5	18	1,0536	02 267	3,2426	51 690
	36	2,0041	30 191	2,7583	44 065
6	30	1,3783	14 216	2,4028	38 072
7	$\pi/7$	1,0179	00 770	2,1137	32 504
	$2\pi/7$	1,8342	26 344	1,4627	16 516
	$3\pi/7$	2,2872	35 930	0,5220	71 770
8	$22\frac{1}{2}$	0,7788	89 145	1,8803	27 423
	45	1,4391	15 810	1,4391	15 810
9	10	0,3123	49 463	1,7714	24 831
	20	0,6152	78 901	1,6902	22 794
	30	0,8993	95 393	1,5577	19 249
	40	1,1562	06 302	1,3779	13 921
10	18	0,4982	69 742	1,5333	18 564
	36	0,9477	97 665	1,3043	11 539
12	15	0,3459	53 898	1,2910	11 092
	30	0,6683	82 495	1,1575	06 351
	45	0,9451	97 547	0,9451	97 547

n/m	s	$\log s$	R	$\log R$	r	$\log r$
5/2	3,0667	48 667	4,2209	62 541	1,6123	20 743
6/2	1,9619	29 267	3,3981	53 123	1,9619	29 267
7/2	1,4855	17 188	3,0847	48 922	2,1347	32 934
7/3	2,9892	47 555	4,2954	63 301	1,5330	18 555
8/2	1,2102	08 284	2,9216	46 562	2,2361	34 949
8/3	1,8803	27 423	3,4743	54 087	1,8803	27 423
9/2	1,0275	01 180	2,8231	45 073	2,3015	36 200
9/3	1,4087	14 881	3,1551	49 901	2,0593	31 373
9/4	2,9587	47 110	4,3253	63 602	1,5022	17 672
10/2	0,8962	95 242	2,7583	44 065	2,3464	37 040
10/3	1,1400	05 692	2,9846	47 489	2,1685	33 615
10/4	1,8446	26 591	3,5087	54 514	1,8446	26 591
12/2	0,7181	85 619	2,6800	42 813	2,4028	38 072
12/3	0,8393	92 391	2,8083	44 845	2,2930	36 040
12/4	1,1046	04 320	3,0178	47 968	2,1339	32 917
12/5	1,8257	26 144	3,5271	54 741	1,8257	26 144

Стороны единичного квадрата для различных крестов таковы:

	s	$\log s$
Греческий крест	2	30 103
Латинский крест	1,8257	26 144
Мальтийский крест	1,0847	03 529

Размеры золотого прямоугольника $5,6886 \times 3,5158$
 $(\log = 75\,501 \pm 54\,602)$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ИЗ ПРИЛОЖЕНИЯ I

В представленных здесь решениях указана только общая область полосок для S -разрезаний и опущены новые расположения частей в случае P -сдвигов. Причины этого см. в конце главы 4.

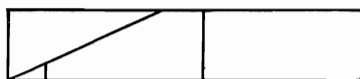


Рис. IV. 1.

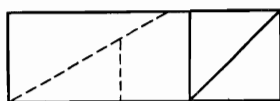


Рис. IV 2.

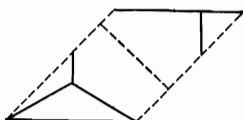


Рис. IV. 3.

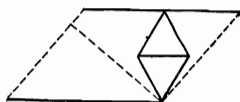


Рис. IV 4



Рис. IV. 5.

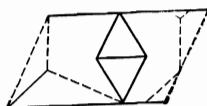


Рис. IV. 6.



Рис. IV. 7.



Рис. IV. 8.

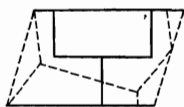


Рис. IV. 9.



Рис. IV. 10.

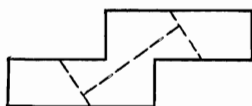


Рис. IV. 11.

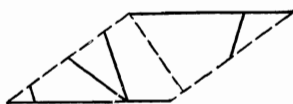


Рис. IV. 12.



Рис. IV. 13.



Рис. IV. 14.



Рис. IV. 15.

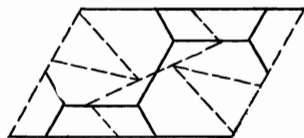


Рис. IV. 16.



Рис. IV. 17.

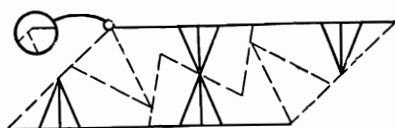


Рис. IV. 18.

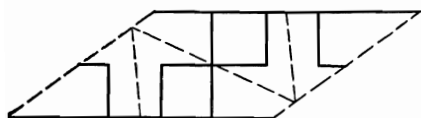


Рис. IV. 19.



Рис. IV. 20.

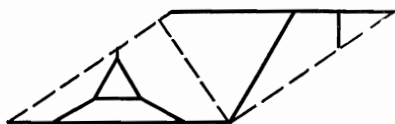


Рис. IV. 21.

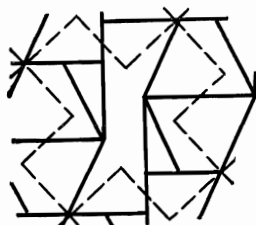
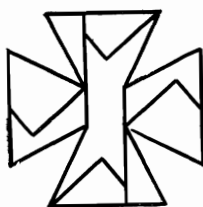


Рис. IV. 22.

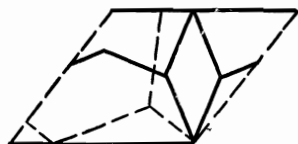


Рис. IV. 23.

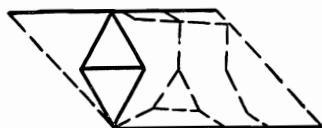


Рис. IV. 24.



Рис. IV. 25.

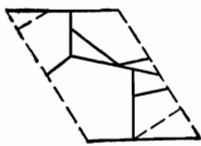


Рис. IV. 26.



Рис. IV. 27.

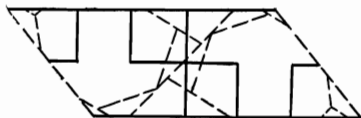


Рис. IV. 28.



Рис. IV. 29.



Рис. IV. 30.



Рис. IV. 31.



Рис. IV. 32.



Рис. IV. 33.



Рис. IV. 34.

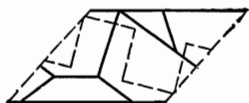


Рис. IV. 35.

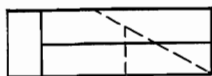


Рис. IV. 36.

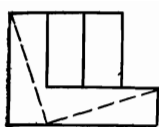


Рис. IV.37.

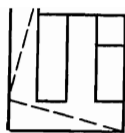


Рис. IV.38.

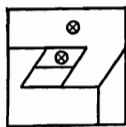


Рис. IV.39.

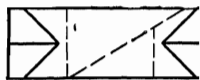


Рис. IV.40.

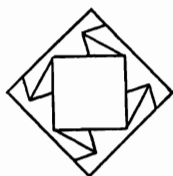
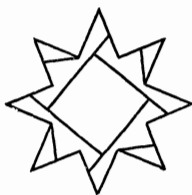


Рис. IV.41.

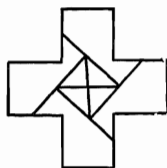
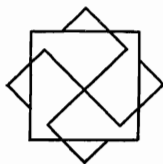


Рис. IV.42.

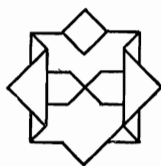
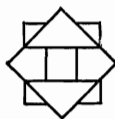


Рис. IV.43.

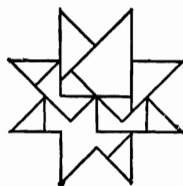
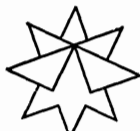
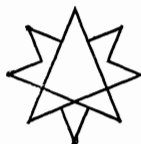


Рис. IV.44.

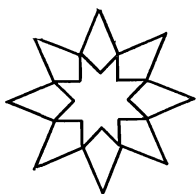


Рис. IV. 45.

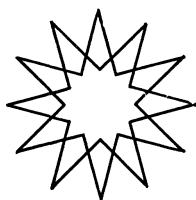


Рис. IV. 46.

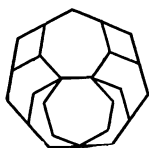


Рис. IV. 47.

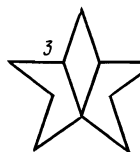
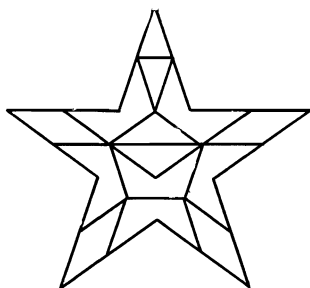
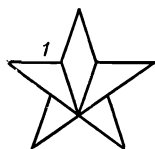


Рис. IV. 48.

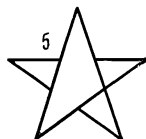
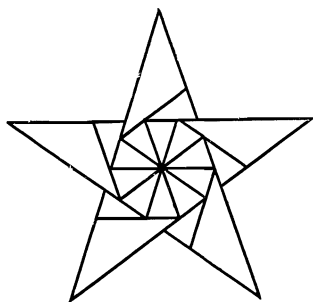


Рис. IV. 49.

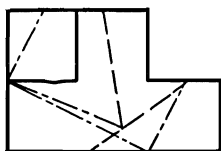


Рис. IV. 50.

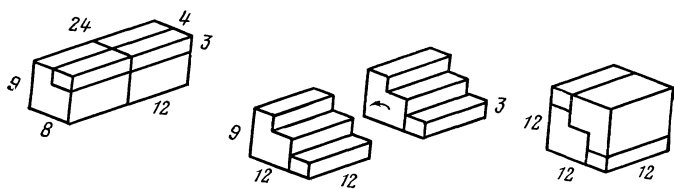


Рис. IV. 51.

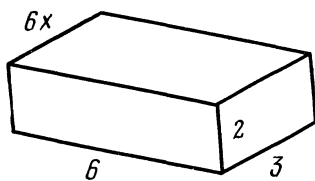


Рис. IV. 52.

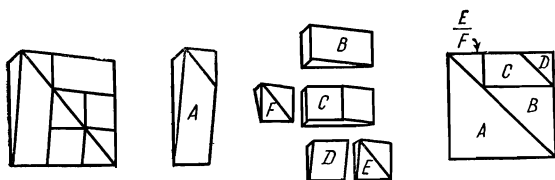


Рис. IV. 53.

ПЕРЕЧЕНЬ РАЗРЕЗАНИЙ

Это приложение содержит все разрезания, в которых участвуют правильные многоугольники, полиграммы и кресты, и, следовательно, может служить именным указателем для огромного большинства описанных разрезаний. Все разрезания букв, за одним исключением, содержатся в главе 18 и представлены на рис. IV. 36—IV. 40. Перечислять разрезания, в которых участвуют неправильные многоугольники, мы сочли нецелесообразным.

Числа и буквы в столбцах *A* и *B* обозначают разрезаемые многоугольники. В целях большей наглядности мы обозначаем правильный *n*-угольник через *n* вместо $\{n\}$, а полиграмму $\{n/m\}$ через *n/m*. *R* обозначает золотой прямоугольник; буквы *G*, *L*, *M* соответственно обозначают греческий, латинский и мальтийский кресты. Два равных *n*-угольника обозначены через n^2 , два неравных — через $n \cdot n$ и т. д.

Во всех случаях указано минимальное число частей. Таким образом, третий столбец отражает положение дел на сегодняшний день и бросает вызов читателю. Ни в одном из указанных в списке разрезаний не требуется переворачивать части обратной стороной кверху.

Если первый из упомянутых многоугольников при *PT*-разрезании порождает *T*-полоску, то в столбце «Тип разрезания» мы пишем *TP*.

<i>A</i>	<i>B</i>	Количество частей	Тип разрезания	Рисунок
3^3	3	6	<i>T</i>	203, слева
3^4	3	4	<i>T</i>	196
3^7	3	13	<i>T</i>	203, справа
$3 \cdot 3$	3	5	<i>P</i>	9
			<i>Q</i>	11
4	3	4	<i>TT2</i>	62
4^2	4	4	<i>T</i>	211
4^3	4	6	<i>P</i>	5
$4 \cdot 4$	4	5	<i>T</i>	96
R	3	4	<i>TT2</i>	IV. 14
R · R	R	5	<i>T</i>	218
5	3	6	<i>PT</i>	58
			<i>TT1</i>	61
5	4	6	<i>PP</i>	44
			<i>TP</i>	55
			<i>TT2</i>	65
	R	6	<i>TP</i>	IV. 12
5^2	5	11	<i>U</i>	215
5^4	5	6	<i>U</i>	196
5^5	5	12	<i>U</i>	212
$5 \cdot 5$	5	11	<i>U</i>	216
6	3	5	<i>TT2</i>	IV. 15
	3^2	4	<i>T</i>	187, б
	4	5	<i>PP</i>	45, 46, 47
	R	5	<i>PP</i>	IV. 3
	5	7	<i>PP</i>	48
			<i>TT2</i>	IV. 16, IV. 17
6^2	3	6	<i>T</i>	187, в
6^2	6	9	<i>T</i>	221
6^3	6	6	<i>T</i>	109, а
6^7	6	12	<i>T</i>	109, б
6^7	6^3	18	<i>T</i>	109, в
$6 \cdot 6$	6	8,9	<i>T</i>	220, 221
	6	5	<i>R</i>	VII. 32
7	3	9	<i>TT2</i>	131
	4	9	<i>PP + TT2</i>	71
			<i>TT2</i>	IV. 26
	R	9	<i>TP</i>	IV. 27
	5	11	<i>TT2</i>	135, а
	6	11	<i>TP</i>	135, б
			<i>TT2</i>	IV. 28
7^4	7	8	<i>U</i>	IV. 49
8	3	8	<i>TT2</i>	IV. 18
	4	5	<i>T</i>	113
	R	6	<i>PP</i>	43
	5	9	<i>PP</i>	49
			<i>TT2</i>	IV. 19
	6	9	<i>PP</i>	31, IV. 24
	7	13	<i>PP</i>	134
8^2	8	8	<i>U</i>	205

<i>A</i>	<i>B</i>	Количество частей	Тип разрезания	Рисунок
8 ⁸	8	24	<i>U</i>	206
9	3	9	<i>PT</i>	145
	4	12	<i>TP</i>	143
			<i>TT2</i>	IV. 30
9	R	12	<i>TP</i>	IV. 31
	6	14	<i>TT2</i>	144
9 ³	9	15	<i>U</i>	VII. 18
9 ⁴	9	10	<i>U</i>	195
10	3	8	<i>PP</i>	VI. 5
	4	8	<i>PP</i>	147, 6, 149, 151
	R	7	<i>PP</i>	VI. 5
	5	10	<i>PT</i>	VI. 4
	6	9	<i>PP</i>	IV. 34
	7	13	<i>PT</i>	VII. 1
	8	12	<i>PP</i>	VI. 7, VI. 8
10 ⁵	10	18	<i>U</i>	VII. 20
12	3	8	<i>PT</i>	IV. 21
	4	6	<i>T</i>	90—93
	R	7	<i>PP</i>	IV. 22
	6	6	<i>T</i>	114
12 ²	12	10	<i>U</i>	204
12 ³	12	15	<i>U</i>	209
12 ³	12 ²	23	<i>U</i>	214
12 ⁴	12	12	<i>U</i>	197
12 ⁶	12	24	<i>U</i>	VII. 21
15 ³	15	24	<i>U</i>	VII. 19
16 ²	16	16	<i>U</i>	VII. 17
5/2	3	9	<i>TT2</i>	133, 6, см. текст
	4	8	<i>PP</i>	72
	6	10	<i>TT2</i>	173, <i>a</i>
	10	6	<i>U</i>	187, <i>a</i>
5/2 ⁴	5/2	14	<i>U</i>	IV. 50
5/2 ⁵	5/2	20	<i>U</i>	IV. 51
6/2	3	5	<i>T</i>	174
	4	5	<i>PP</i>	IV. 4
	R	5	<i>PP</i>	IV. 5
	5	8	<i>PT</i>	58
	6	7	<i>PP</i>	52
			<i>PT</i>	IV. 13
	6 ²	4	<i>T</i>	182, <i>a</i>
	7	11	<i>PT</i>	136, <i>a</i>
	8	9	<i>PP</i>	IV. 6
	10	9	<i>PP</i>	VI. 9
	12	10	<i>PP</i>	IV. 25
6/6 ²	6	6	<i>T</i>	182, 6
6/2 ³	6/2	12	<i>U</i>	VII. 22, VII. 23
6/2 · 6/2	6/2	15	<i>T</i>	219
7/3	7 ²	9	<i>U</i>	VII. 12
7/3 ²	7	14	<i>U</i>	VII. 13

<i>A</i>	<i>B</i>	Количество частей	Тип разрезания	Рисунок
8/2	4	7	<i>T</i>	VII. 2
8/2 ²	8/2	11	<i>U</i>	IV. 45
8/3	4	8	<i>P</i>	IV. 42
	8	6	<i>U</i>	181, <i>a</i>
	8 ²	9	<i>U</i>	183, <i>a</i>
8/3 ²	8	13	<i>U</i>	183, <i>б</i>
	8/3	12	<i>U</i>	IV. 46
8/3 · 8/2	8/3	9	<i>U</i>	IV. 47
9/3	6	9	<i>T</i>	VII. 14
9/4	9/2	14	<i>U</i>	VII. 15
10/2	5	8	<i>U</i>	180, <i>a</i>
10/3	10 ²	6	<i>U</i>	185, <i>a</i>
	5/2 ²	10	<i>U</i>	188, <i>a</i>
10/3 ²	10	10	<i>U</i>	185, <i>б, в</i>
10/4	10 ²	11	<i>U</i>	186
	5/2 ²	18	<i>U</i>	188, <i>б</i>
	10/3	11	<i>U</i>	186
12/2	3	6	<i>U</i>	VI. 14
	6	8	<i>T</i>	VII. 3
	6/2	9	<i>T</i>	VI. 11
			<i>U</i>	VI. 12 VI. 13
12/2 ²	12/2	13	<i>U</i>	VII. 25
12/2 ³	12/2	18	<i>U</i>	VII. 27
12/3	4	10	<i>T</i>	VIII. 7
12/3 ²	12/3	12	<i>U</i>	VII. 24
12/3 ³	12/3	21	<i>U</i>	VII. 28
12/4 ²	12/4	18	<i>U</i>	VII. 26
12/4 ³	12/4	24	<i>U</i>	VII. 29
12/4 · 12/3	12/5	13	<i>U</i>	IV. 48
12/5	4	9	<i>T</i>	VII. 5
	12	10	<i>U</i>	VII. 4
14/2	7	14	<i>U</i>	VII. 9
14/2	7/3 ²	18	<i>U</i>	VII. 11
14/3	7/2 ²	18	<i>U</i>	VII. 8
14/5	14/2	14	<i>U</i>	VII. 10
18/7	9/2 ²	18	<i>U</i>	VII. 16
G	3	5	<i>TT2</i>	IV. 20
G	4	4	<i>T</i>	86
	4 · 4	5	<i>T</i>	115
	R	5	<i>PP</i>	IV. 7
	5	7	<i>TT2</i>	67
	6	7	<i>PP</i>	50, 227, <i>a</i>
			<i>TP</i>	118
	7	12	<i>TT2</i>	IV. 29
	8	9	<i>T</i>	См. гл. 22
	10	10	<i>PP</i>	VI. 10
	12	6	<i>T</i>	94
	6/2	8	<i>PP</i>	53
	8/2	7	<i>T</i>	VII. 6

<i>A</i>	<i>B</i>	Количество частей	Тип разрезания	Рисунок
$G \cdot 4$	G	5	<i>U</i>	100, 102
G^2	G	5	<i>T</i>	201, <i>a</i>
G	4	9	<i>P</i>	8
			<i>PP</i>	21
	G	12	<i>PP</i>	120
G^5	G	12	<i>T</i>	201, <i>б</i>
	G^2	12	<i>T</i>	202
L	3	5	<i>TT2</i>	63
	4	5	<i>PP</i>	27
	R	5	<i>PP</i>	IV. 8
	5	8	<i>PT</i>	59, <i>a</i>
	6	6	<i>PP</i>	51
	7	12	<i>PT</i>	136, <i>б</i>
	8	8	<i>PP</i>	IV. 9
	10	10	<i>PP</i>	IV. 35
	12	7	<i>T</i>	89
	6/2	9	<i>PP</i>	IV. 10
	12/5	7	<i>U</i>	191, <i>a</i>
	G	7	<i>PT</i>	59, <i>б</i>
M	4	7	<i>T</i>	110
	6	14	<i>PP</i>	121
	G	9	<i>I</i>	IV. 23

НЕДАВНИЕ УСПЕХИ

Пока эта книга находилась в наборе, шесть разрезов из главы 17 и два из главы 20 были улучшены. Включить их в основной текст уже не оказалось возможным, так что они помещены здесь. В соответствие с этими улучшениями приведено и приложение V.

Все новые разрезания десятиугольника основаны на единственной мозаике, элемент которой имеет те же очертания, что и элемент мозаики на рис. II.10. На рис. VI.1 мы еще раз изобразили этот элемент для сравнения его с новым элементом, который получится при наложении на рис. VI.1 неразрезанного десятиугольника (см. рис. VI.2). Новый элемент, изображенный на рис. VI.3, имеет большую основную часть, чем элемент на рис. VI.1; из рис. VI.2 очевидно, что эта часть бо́льшая из возможных. Аналогичным образом у полосок, полученных из данной мозаики, основная часть больше, чем соответствующие части на рис. 147. Таким образом, я с запозданием воспользовался своим собственным указанием, изложенным в главе 3 (рис. 48 и 49).

Преобразование десятиугольника в пятиугольник (рис. VI.4) получается с помощью метода, описанного в главе 13, согласно которому мы находим на мозаике наиболее проходящую пару вертикальных конгруэнтных

прямых. Преобразования нашего десятиугольника соответственно в треугольник, золотой прямоугольник, восьмиугольник, гексаграмму и греческий крест представлены на рис. VI.5—VI.10. Во всех этих преобразованиях используется одна и та же полоска, порожденная десятиугольником, которая получится при проведении на соответствующей мозаике двух конгруэнтных прямых, наклоненных к горизонтали под углом 18° .

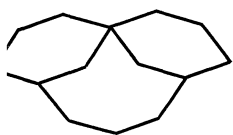


Рис. VI. 1.

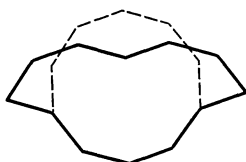


Рис. VI. 2.

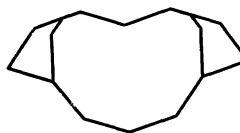


Рис. VI. 3.

На рис. VI.5, VI.7, VI.9 и VI.10 есть участки, где разрезы почти пересекаются. Если бы они пересекались на самом деле, то общее число частей возросло бы. Разумеется, в такого рода сомнительных случаях мы путем

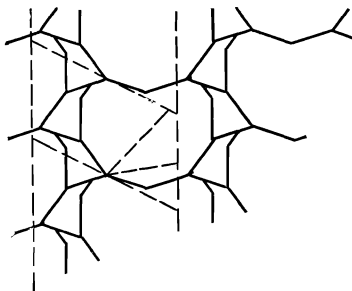


Рис. VI. 4.

вычислений должны убедиться в том, что разрезы проходят именно там, где они нарисованы.

На рис. VI.11—VI.13 изображены три способа, с помощью которых можно преобразовать друг в друга полиграммы $\{12/2\}$ и $\{6/2\}$, причем в каждом случае участвует 9 частей, ни одну из которых в отличие от ситуации на рис. 184, б не приходится переворачивать обратной стороной кверху. В случае на рис. VI.11 первый шаг состоит в том, чтобы преобразовать $\{12/2\}$ так, как показано

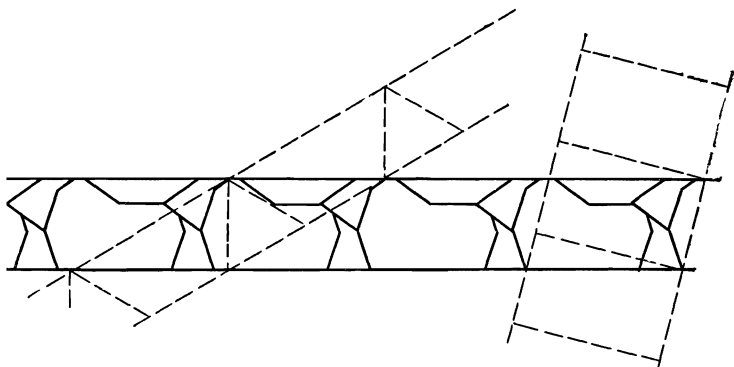


Рис. VI. 5.

Рис. VI. 6.

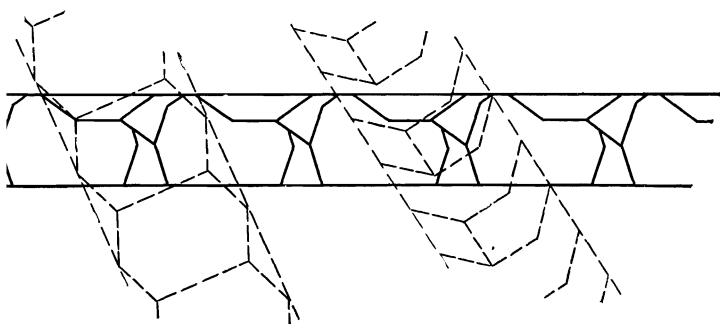


Рис. VI. 7.

Рис. VI. 8.

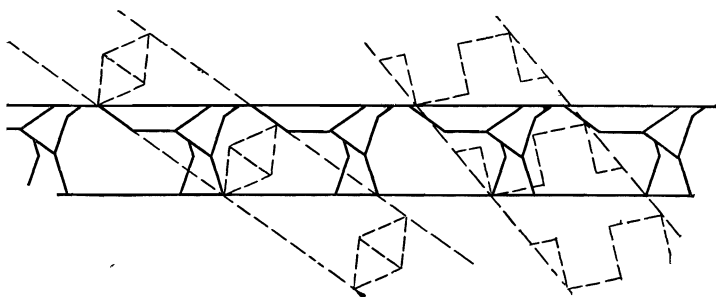


Рис. VI. 9.

Рис. VI. 10.

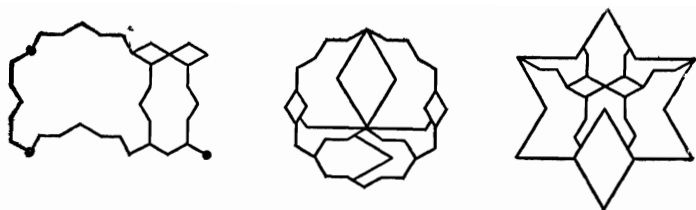


Рис. VI. 11.

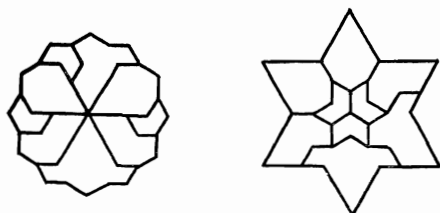


Рис. VI. 12.

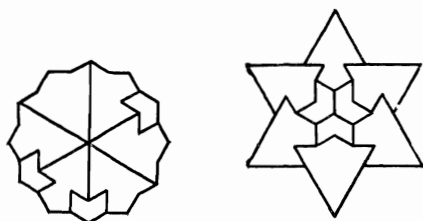


Рис. VI. 13.

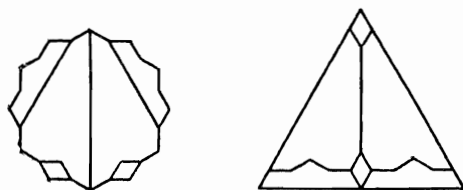


Рис. VI. 14.

слева. При этом получится элемент мозаики с тем же параллелограммом периодов, что и на рис. II. 14, и разрезание следует искать путем наложения мозаик.

Разрезание $\{12/2\}$ и треугольника, представленное на рис. VI. 14, лучше того, что мы видели на рис. 191, б, поскольку имеет всего 6 частей вместо 9 (сильное уменьшение). Это лишнее доказательство неисчерпаемости предмета, о котором говорилось в начале книги!

По-видимому, дальнейшие улучшения в разрезании десятиугольника теперь будут незначительными. Другое дело — девятиугольник. Его следует преобразовать в элемент мозаики столь же полезный, как и элемент на рис. VI. 3, с помощью которого мы смогли бы, наконец, преодолеть наши трудности. Пока же девятиугольник не дает нам оснований для самоуспокоенности.

Г. Фредериксон

ВОСЕМЬ ЛЕТ СПУСТЯ

Как подчеркивал Гарри Линдгрэн в приложении VI, геометрические задачи на разрезание еще далеко не исчерпаны. С момента написания этих слов было найдено еще 31 разрезание; некоторые из них совсем новые, а некоторые улучшают уже известные решения. Настоящее приложение познакомит читателя с тем, что было сделано за восемь лет, протекавших со времени первого издания этой книги. Большинство приведенных здесь решений найдены мною; они отражают мой собственный интерес к разрезаниям звезд и ко всем видам преобразований нескольких многоугольников. Признав разработанные мною «жилы» истощенными, читатель может найти утешение в весьма примечательных рис. VII. 30—VII. 32. Рис. VII. 32 подтверждает тот факт, что для того, кто достаточно сообразителен и не пожалеет времени, всегда найдется достойное открытия разрезание. Что касается структуры данного приложения, то порядок расположения разрезов здесь тот же, что и в основном тексте.

Разрезание полосы. Предыдущее приложение было написано Г. Линдгреном, когда книга уже находилась в наборе, но несколько улучшенных решений, в которых участвовал десятиугольник, успело в нее войти. Однако есть еще одно разрезание, которое заслуживает внима-

ния. Это — преобразование десятиугольника и восьмиугольника, содержащее 13 частей и показанное на рис. VII.1. Используя ту же порожденную десятиугольником полосу, что и на рис. VI.5—VI.10, мы на единицу уменьшаем число частей (ср. с рис. 148, б).

Разрезания звезд. При отыскании разрезаний наша первая забота всегда состоит в том, чтобы найти минимальное решение. Помня об этом, мы приведем четыре

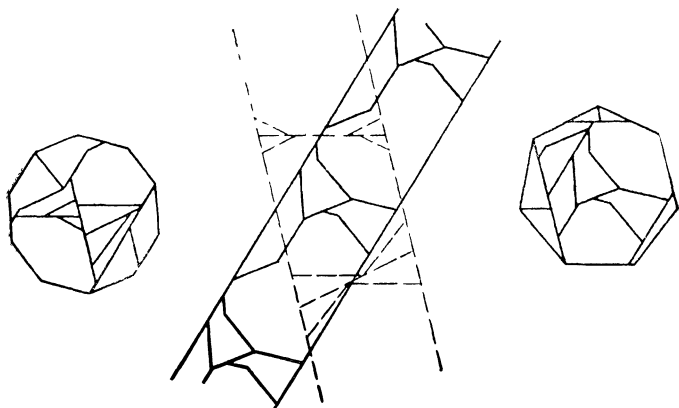


Рис. VII.1.

разрезания, которые улучшают решения, найденные в главах 19 и 20. В трех из них число частей уменьшается всего лишь на единицу, так что я не могу претендовать на какое-то особое достижение. Тем не менее эти улучшения подтверждают известную поговорку, гласящую, что ум — хорошо, а два — лучше. В дополнение к этим улучшениям мы приведем несколько новых решений и некоторые из их обобщений.

Первое улучшение относится к преобразованию $\{8/2\}$ в $\{4\}$, изображенному на рис. 175. Здесь, чтобы получить элемент мозаики, у звезды пришлось отрезать 4 луча. В нашем решении мы не трогаем углы, зато проводим разрезы, отмеченные на рис. 175 пунктиром. Затем из полученных частей мы складываем квадрат, но в нем есть перекрытия и дыры. Методом проб и ошибок мы определяем, как следует избавиться от перекрытий и заполнить дыры. Ключом к разрезанию служит зазубрен-

ная часть; с ее помощью мы находим решение, содержащее 7 частей и показанное на рис. VII. 2.

Следующее улучшение относится к преобразованию $\{12/2\}$ в $\{6\}$, изображенному на рис. 180, б и содержащему 10 частей. И в решении на рис. 180, б и в решении

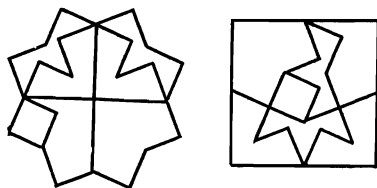


Рис. VII. 2.

на рис. 175 элемент мозаики мы получили, отрезав некоторые лучи. А поскольку решение на рис. 175 нам удалось получить, то есть основание предполагать, что то же самое мы сможем сделать и с решением на рис. 180, б. И в самом деле, это оказалось возможным, а соответствующее решение представлено на рис. VII. 3. Обратите внимание, что здесь снова появляются зазубренные части, хотя и в менее резко выраженной форме.

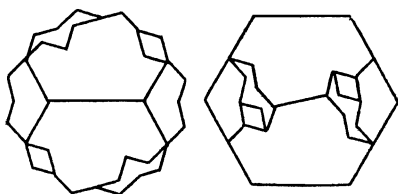


Рис. VII. 3.

Следующие два улучшения относятся к преобразованию $\{12/5\}$ в $\{12\}$, изображенному на рис. 181, б, и к преобразованию $\{12/5\}$ в $\{4\}$, представленному на рис. 189. Сами по себе эти решения выглядят достаточно серьезно, и все-таки они не минимальны. Их можно улучшить, отрезав участки некоторых частей и добавив их к другим участкам: в первом случае это можно сделать тремя, а во втором — четырьмя способами. Подобные манипуляции с частями позволяют экономить по одной части в каждом разрезании. Два новых решения представлены на рис. VII. 4 и VII. 5.

Пятое разрезание звезд, решение задачи 43 из приложения I, также удалось улучшить. Речь идет о преобразовании $\{8/2\}$ в греческий крест, изображенном на рис. IV. 44 и содержащем 8 частей. Поскольку полиграмму $\{8/2\}$ с помощью мозаики можно преобразовать в квадрат, то тем же путем ее удастся преобразовать и в греческий крест. Линдгрэн взял элемент мозаики, полученный с помощью рис. VII. 2, наложил соответствующую

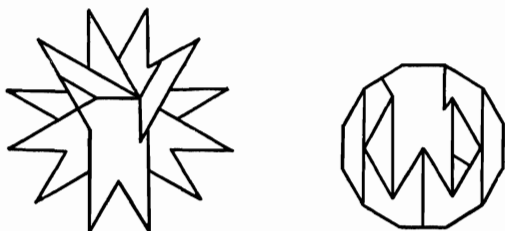


Рис. VII. 4.

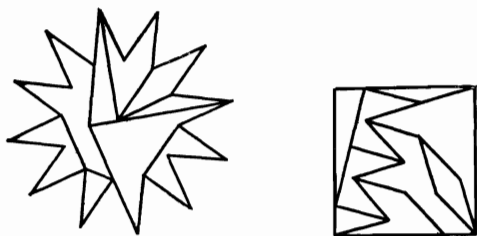


Рис. VII. 5.

мозаику на мозаику, порожденную греческим крестом, и нашел решение, изображенное на рис. VII 6 и содержащее 7 частей. Обратите внимание, что здесь есть очень острые участки с углами, чуть превышающими 4° .

Для $\{12/3\}$ или $\{12/4\}$ еще не найдено RTF-разрезаний, и похоже, что для фигур с числом вершин, меньшим 24, их вообще не существует. Тем не менее имеется преобразование $\{12/4\}$ в $\{4\}$, не основанное на RTF (рис. VII. 7). Здесь мозаика используется во многом аналогично тому, как это делалось в случае, изображенном на рис. 175. От звезды отрезаются лучи (при этом остается квадрат), из которых строится мозаика, позволяющая преобразовать их в меньший квадрат. Комбинируя оба

квадрата, мы получили бы решение, содержащее 12 частей. Но отрезанные лучи можно и не преобразовывать в меньший квадрат, если сделать подходящих размеров дыры и в них поместить эти лучи. В результате получится решение, содержащее 10 частей и представленное на рис. VII. 7.

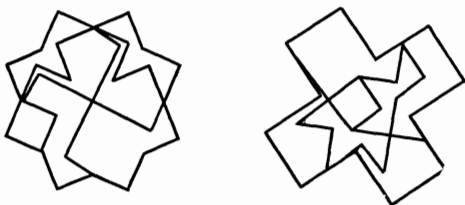


Рис. VII. 6.

В главе 20 Линдгрэн перечисляет возможные разрезания семиконечных и четырнадцатиконечных звезд, но не приводит ни одного из таких преобразований. Возможно, так произошло потому, что некоторые из этих

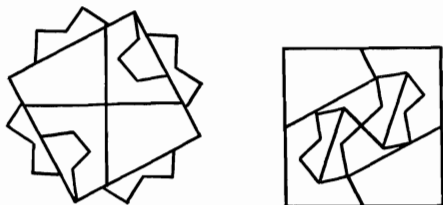


Рис. VII. 7.

разрезаний очень похожи на приведенные ранее преобразования пяти- и десятиконечных звезд. Например, преобразование $\{14/5\}$ в две $\{7/3\}$ аналогично преобразованию $\{10/4\}$ в две $\{5/2\}$, приведенному на рис. 188, а. Три разрезания, относящиеся к $\{14/4\}$, $\{14/6\}$ и двум $\{14\}$, выполняются по схеме, представленной на рис. 185, а и 186, которая относится к преобразованию $\{10/3\}$, $\{10/4\}$ и двух $\{10\}$.

Однако остальные разрезания из этой группы не удастся выполнить столь же просто — они требуют особого подхода. На рис. VII. 8 изображено преобразование

$\{14/3\}$ в две $\{7/2\}$, содержащее 18 частей, а на рис. VII.9 — преобразование $\{14/2\}$ в $\{7\}$, содержащее 14 частей. Я не убежден, что последнее решение минимально, хотя попытки решить задачу, следуя по пути, указываемому рис. 180, *a*, привели к решению, содержащему 15

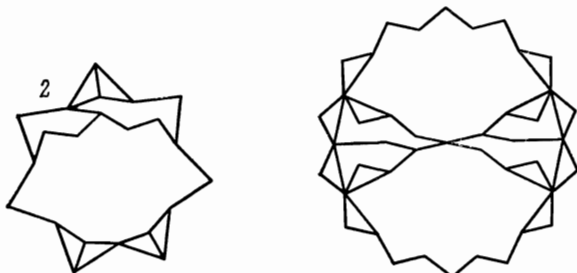


Рис. VII.8.

частей. Во всяком случае, представленное на рис. VII.9 решение достаточно привлекательно, симметрично и допускает обобщения. Аналогичное решение возможно во всех случаях преобразований $\{2n/2\}$ в $\{n\}$, где n нечетно; здесь общее число частей оказывается равным $2n$.

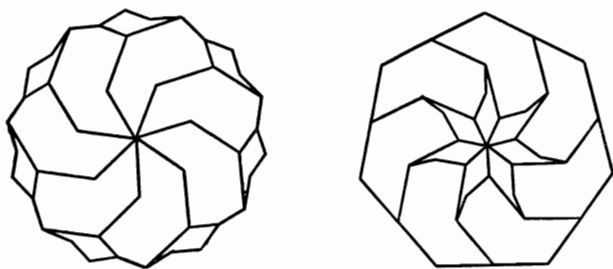


Рис. VII.9.

Читатель, возможно, заметил, что все семи- и четырнадцатиконечные звезды пересчитаны, то есть каждая включена в схему RTF-разрезаний так, как это описано в главе 20. Но самое удивительное то, что между этими звездами существуют дополнительные соотношения, не обнаруженные Линдгреном. Ключевое соотношение имеет вид

$$\frac{s\{14/5\}}{s\{14/2\}} = 2 \cos \frac{\pi}{7}.$$

С его помощью находится разрезание, представленное на рис. VII. 10 и содержащее 14 частей. В свою очередь приведенное выше равенство допускает следующее обобщение:

$$\frac{s \left\{ 2n / \frac{1}{3} (2n + 1) \right\}}{s \left\{ 2n / \frac{1}{3} (n - 1) \right\}} = 2 \cos \frac{\pi (n - 1)}{6n};$$

здесь n должно иметь вид $3k + 1$. Подставляя наименьшее возможное значение $n = 4$, мы найдем преобразование $\{8/3\}$ в $\{8\}$, а подставив $n = 10$, придем к преобразованию $\{20/7\}$ в $\{20/3\}$.

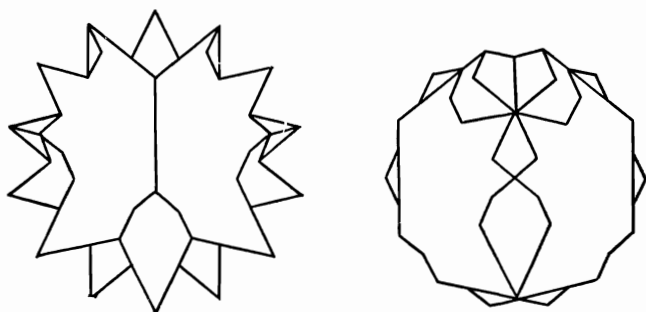


Рис. VII. 10.

Соотношение между $\{14/5\}$ и $\{14/2\}$ послужило тем связующим звеном, с помощью которого можно получить ряд других соотношений между семи- и четырнадцатиконечными звездами. А именно,

$$\frac{s \{7/3\}}{s \{14/2\}} = \sqrt{2} \cdot \frac{\cos \frac{3\pi}{14}}{\sin \frac{\pi}{14}},$$

$$\frac{s \{7/3\}}{s \{7\}} = \sqrt{2} \cdot 2 \cos \frac{\pi}{7},$$

$$\frac{s \{7\}}{s \{14/5\}} = \frac{\cos \frac{\pi}{14}}{\cos \frac{\pi}{7}}.$$

До сих пор эти соотношения обобщить не удалось.

Первое соотношение означает, что должно существовать преобразование одной $\{14/2\}$ в две $\{7/3\}$; и действительно, на рис. VII. 11 вы видите соответствующее решение, содержащее 18 частей. Второе соотношение указывает на то, что должно существовать преобразование

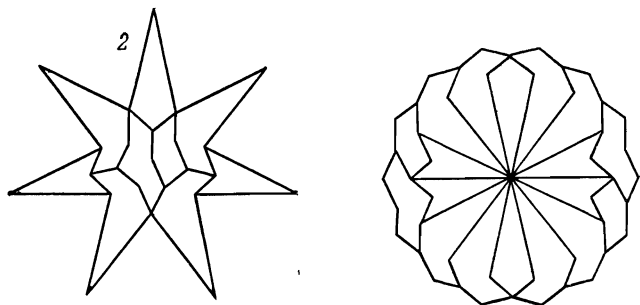


Рис. VII. 11.

одной полиграммы $\{7/3\}$ в две полиграммы $\{7\}$, а также двух полиграмм в одну. Первое из них, одной $\{7/3\}$ в две $\{7\}$, на сегодняшний день наиболее примечательно и содержит, как видно из рис. VII. 12, всего 9 частей. После

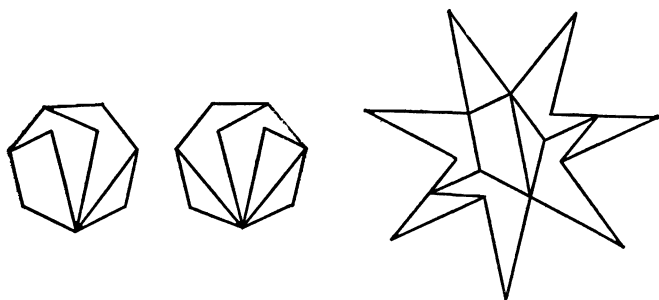


Рис. VII. 12.

того как было найдено это решение, заметили и поразительное соответствие между рис. VII. 11 и VII. 12. Каждой части и каждому разрезу одной из полиграмм $\{7/3\}$ соответствуют аналогичная часть и разрез другой полиграммы $\{7/3\}$. Разумеется, существует также преобразование двух полиграмм $\{7/3\}$ в одну полиграмму $\{7\}$. Соответствующее решение, представленное на рис. VII. 13,

содержит 14 частей; любопытно отметить, что у одной из полиграмм $\{7/3\}$ те же самые разрезы, что и на рис. VII. 12. Наконец, третье соотношение указывает на то, что должно существовать преобразование $\{14/5\}$ в $\{7\}$, но простого решения такой задачи найти пока не удалось.

Читатель, вероятно, уже заметил, что теоретически разрезов звезд, основанных на RTF, существует бесконечно много. Однако, по мере того как исчерпываются

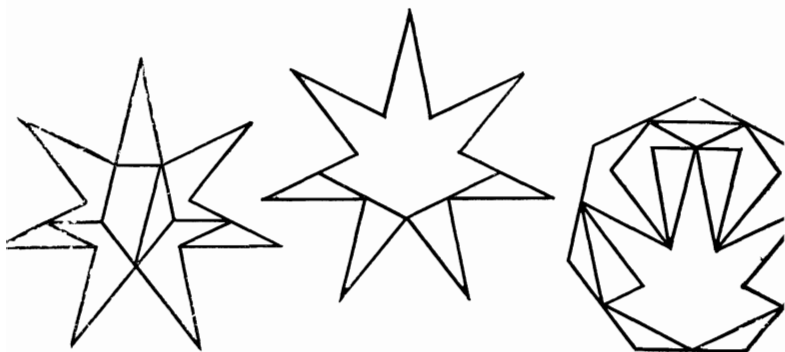


Рис. VII. 13.

все возможности в более простых случаях, исследователь вынужден обращаться к звездам с большим числом лучей, а значит, ему приходится иметь дело с большим числом частей. Относительно решений в последней группе некоторым читателям уже могло показаться, что здесь число частей слишком велико. И все же в поисках новых решений следует продвигаться дальше, при этом преследуются две цели. Первая из них заключается в желании найти (быть может, случайно) решения, содержащие очень мало частей, как, например, преобразование одной звезды $\{7/3\}$ в две полиграммы $\{7\}$. Вторая — в том, чтобы открыть какое-нибудь общее соотношение, охватывающее все эти разрезы, использующие RTF. Пока что есть только некоторые частные результаты, направленные в эту сторону, но какой-либо общей схемы, которая включала бы в себя эти обобщения, не существует, так что исчерпывающим объяснением всего,

что нам известно, на сегодняшний день мы не располагаем.

Девятиконечные звезды были исследованы с точки зрения первой из названных целей, причем были открыты некоторые интересные соотношения. Прежде всего оказалось, что полиграмму $\{9/3\}$ можно разрезать на части, из которых затем удастся сложить элемент некой мозаики. В этой мозаике элементы естественно объединяются в группы, по три элемента в каждой. На

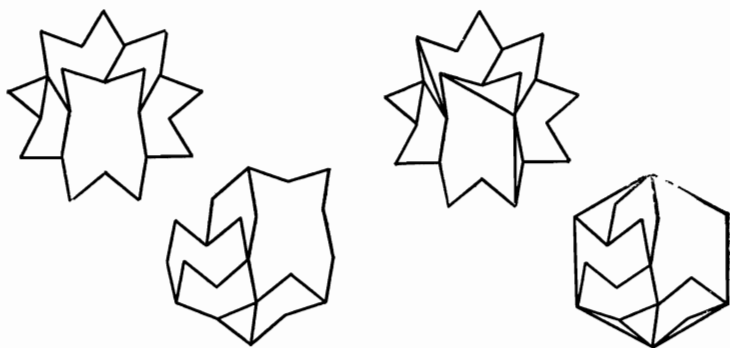


Рис. VII. 14.

рис. VII. 14 показано, как из данной звезды можно получить элемент мозаики, а кроме того, там изображено преобразование $\{9/3\}$ в $\{6\}$. Тригонометрическое соотношение, описывающее данное преобразование, имеет вид

$$\frac{s\{6\}}{s\{9/3\}} = 2 \cos \frac{\pi}{18}.$$

Никакого обобщения для этого соотношения пока не найдено.

Другое неожиданное соотношение было обнаружено между $\{9/2\}$ и $\{9/4\}$. Обе звезды удастся получить, добавляя некоторые части к $\{9\}$. Здесь возможно симметричное решение, содержащее 19 частей, которое несколько походит на преобразование $\{10/3\}$ и $\{10/4\}$, только еще более запутано. Немного потрудившись, нам удастся получить решение, содержащее 14 частей; подобное решение изображено на рис. VII. 15, но вполне может оказаться, что и оно не минимально. Это преобразование

связано со специальным случаем общего соотношения

$$\frac{s \left\{ \frac{n}{6}(n+3) \right\}}{s \left\{ \frac{n}{2}(n-1) \right\}} = 2 \cos \frac{\pi(n-1)}{2n},$$

где n должно быть нечетным и делиться на 3. Если $n = 15$, то наше соотношение предсказывает преобразование $\{15/3\}$ в $\{15/7\}$.

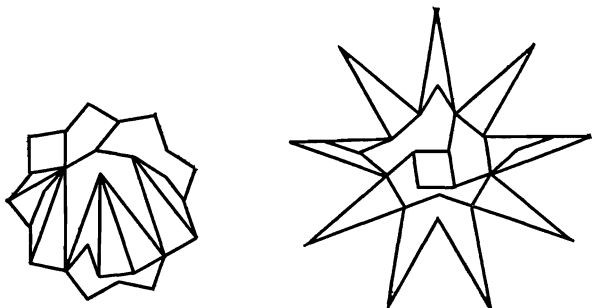


Рис. VII. 15.

Используя приведенное выше общее соотношение, а также соотношение (12) из главы 20, мы получим обобщение

$$\frac{s \left\{ \frac{n}{6}(n+3) \right\}}{r \{2n/(n-2)\}} = \sqrt{2} \cdot \cos \frac{\pi(n-1)}{2n},$$

где вновь n должно быть нечетным и делиться на 3. При $n = 9$ данное соотношение предсказывает существование экономного преобразования одной звезды $\{18/7\}$ в две звезды $\{9/2\}$. Соответствующее решение, содержащее 18 частей, представлено на рис VII. 16. Обратите внимание, что каждый луч звезды $\{18/7\}$ составляет $1/9$ полиграммы $\{9\}$, вот почему решение удастся сделать столь экономным.

Разрезание нескольких многоугольников. Два решения главы 21 удалось улучшить, а кроме того, были найдены три новых решения. Первое решение, изображенное на рис. VII. 17, относится к случаю преобразования двух равных многоугольников ($n = 16$) в один многоугольник,

подобный исходным. Здесь используется та же техника, что и для случая $n = 8$ на рис. 205, б, а также для случая $n = 4$ на рис. 211. Следует мысленно разбить многоугольники на ромбы, часть из которых окажется квадратами. Каждый из квадратов разрезается пополам

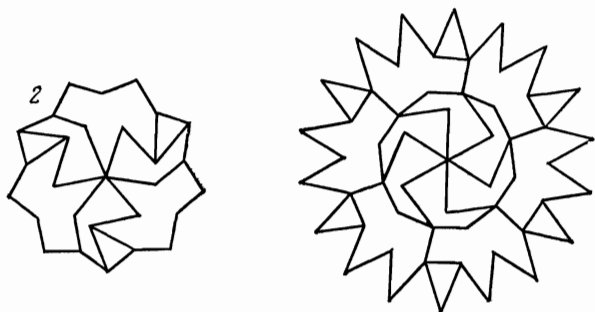


Рис. VII. 16.

вдоль одной из его диагоналей, а затем проводятся дополнительные разрезы, необходимые для того, чтобы преобразовать некоторые ромбы. Эта техника позволяет

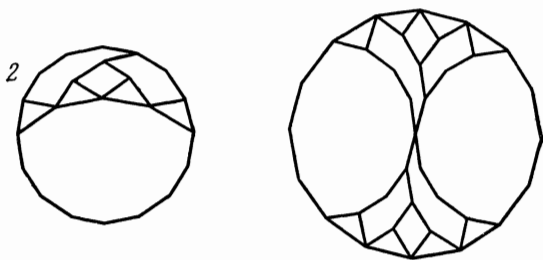


Рис. VII. 17.

преобразовать два исходных многоугольника в один новый многоугольник с помощью разбиения их на n частей, причем такое число частей, по-видимому, минимально во всех случаях, за исключением $n = 12$.

Ряд интересных открытий был сделан и применительно к задаче о преобразовании трех многоугольников в один. На рис. 207, б изображено решение соответствующей задачи для $n = 9$, содержащее 21 часть. Его можно

еще существенно улучшить: после сравнительно небольшого изменения разрезов удастся получить решение, содержащее 18 частей. Однако воистину сюрпризом явилось то обстоятельство, что число частей, оказывается,

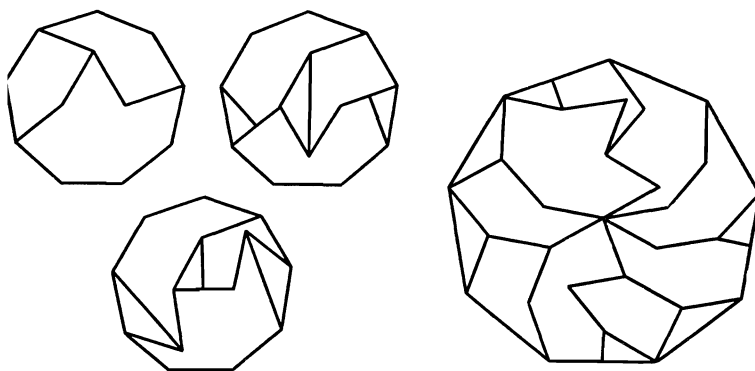


Рис. VII. 18.

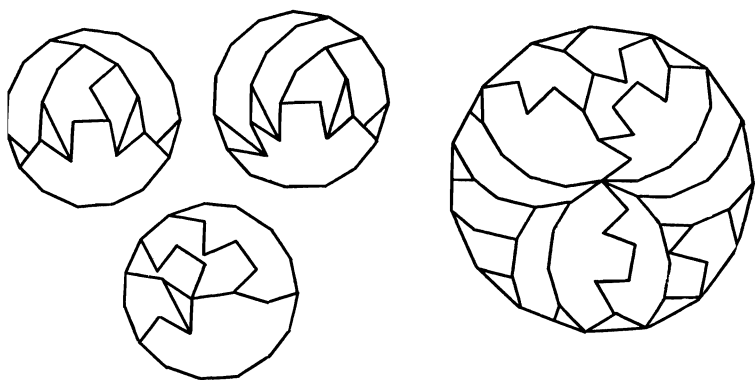


Рис. VII. 19.

можно уменьшить до 15, как показано на рис. VII. 18. Трюк состоит здесь в том, чтобы мысленно разбить малые девятиугольники на ромбы и равносторонние треугольники. Три таких равносторонних треугольника не надо ни разрезать, ни отделять от остальных частей. Вместо этого следует вырезать дыры, к которым бы подошли данные треугольники. Прodelав это, мы получим

не совсем симметричное решение; зато любопытно отметить, что каждый из трех малых девятиугольников разрезается по-своему.

А можно ли тот же трюк, который мы применили в случае $n = 9$, использовать и для случая $n = 15$? Оказывается, можно, причем вместо очевидного решения, содержащего 30 частей, удается получить решение, содержащее только 24 части, как показано на рис. VII. 19. Когда это решение уже найдено, становится ясным, как следует преобразовать три многоугольника в один. Многоугольники, подходящие для преобразования, можно

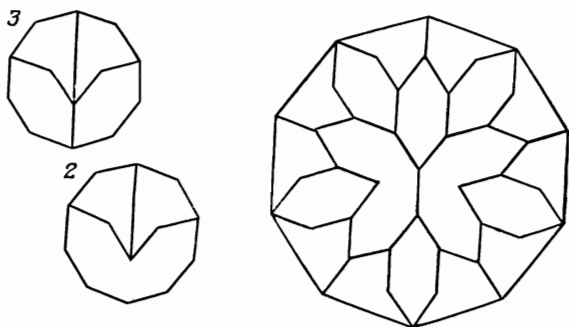


Рис. VII. 20.

разделить на две группы. К первой группе относятся многоугольники, у которых число сторон нечетно и делится на 3, как, например, $\{3\}$, $\{9\}$, $\{15\}$ и т. д. В этом случае число сторон представимо в виде $n = 6p - 3$, где p — целое число. Вторая группа состоит из многоугольников, у которых число сторон четно и делится на 3, как, например, $\{6\}$, $\{12\}$, $\{8\}$ и т. д. Здесь $n = 6p$. В обоих случаях минимальное число частей, по-видимому, равно $9p - 3$, хотя строго это еще никем не доказано.

Что касается преобразований пяти многоугольников в один, то здесь удалось улучшить решение, относящееся к случаю десятиугольников и представленное на рис. 213. Хотя при решении данной задачи и хочется воспользоваться пятью частями, имеющими ту же форму, что и части на рис. 213, однако это затруднило бы нам отыскание минимального решения. В данном случае трюк заключается в том, чтобы найти в маленьких десятиугольниках единственный разрез, который позволил бы нам

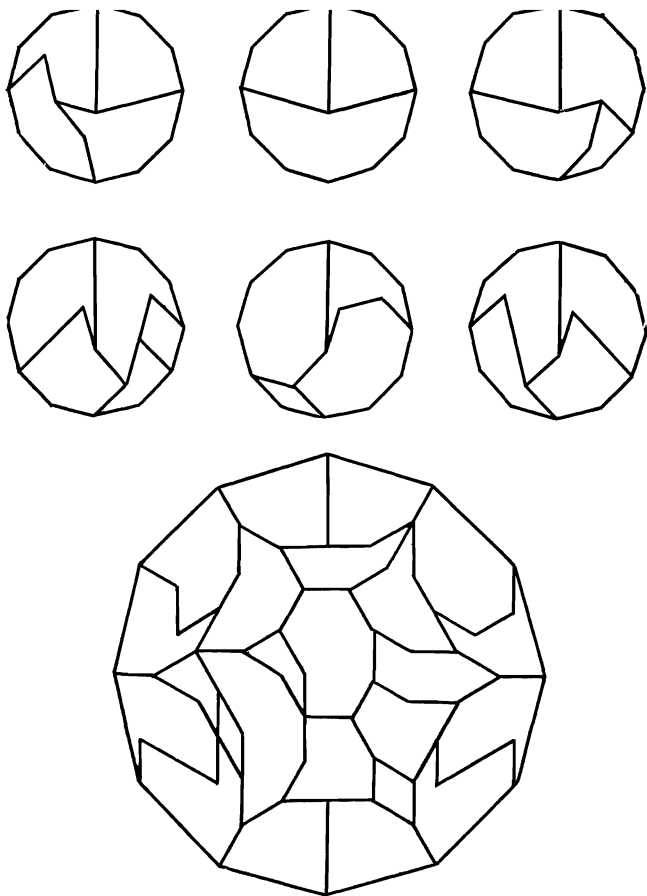


Рис. VII.21.

получить отрезок, равный стороне большого десятиугольника. У каждого из маленьких десятиугольников, изображенных на рис. VII.20, есть такой разрез, проходящий через центр. В результате мы получаем решение, содержащее 18 частей. Отметим, хотя это и не было обнаружено до тех пор, пока мы не нашли данное решение, что получившиеся части похожи на те, из которых на рис. 147, *a* составлена полоска, порожденная десятиугольником.

Последняя задача, которую мы рассмотрим в данном разделе, — это преобразование шести двенадцатиугольников в один. Хотя Линдгрэн и упомянул о том, что такую задачу можно решить, тем не менее он не попытался этого сделать. А проходить мимо этой задачи не следовало бы, поскольку, как выяснилось, она дает богатую пищу для размышлений. Ценой немалых усилий число частей удалось понизить до 24, как показано на

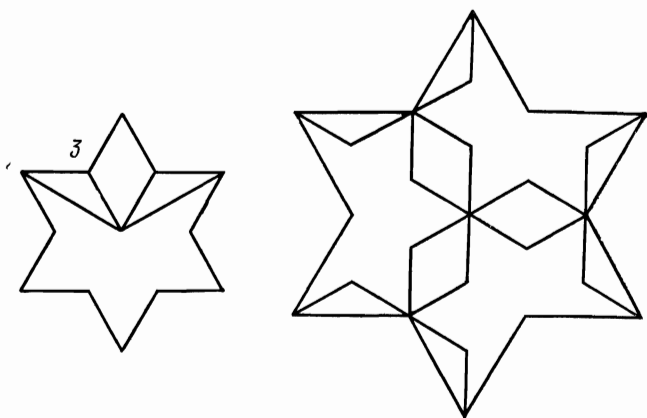


Рис. VII. 22.

рис. VII. 21. Основной трюк состоит в том, чтобы найти единый разрез, который позволил бы получить отрезок, равный стороне большого двенадцатиугольника. Однако для того, чтобы понизить число частей до 24, потребовалась, так сказать, «оркестровка» еще некоторого числа маленьких трюков. Каждый из них добавлял что-то к асимметрии, и в результате найденное решение оказалось одним из наиболее асимметричных преобразований, основанных на RTF.

Разрезание нескольких звезд. Оба преобразования звезд, приведенные в главе 21, можно улучшить. Первое преобразование трех звезд $\{6/2\}$ в одну звезду $\{6/2\}$, изображенное на рис. 210, улучшил сам Линдгрэн. В этом новом решении, представленном на рис. VII. 22, участвуют только 12 частей. Трюк, позволивший уменьшить число с 13 до 12, заключается в необходимости разрезать каждую из трех маленьких звезд.

На самом деле существует сколько угодно различных вариантов данного преобразования, в каждом из которых участвуют только 12 частей. Мне больше всего нравится решение, изображенное на рис. VII.23, поскольку здесь всего два типа частей, различающихся по форме, и все части имеют приблизительно один и тот же размер. Кроме того, в центре большой звезды расположен

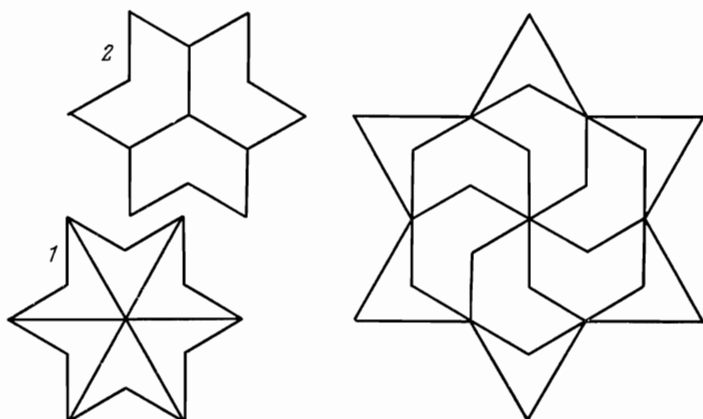


Рис. VII. 23.

шестиугольник, который разрезан так, как показано на рис. 182, б, относящемся к задаче о преобразовании двух полиграмм $\{6/2\}$ в $\{6\}$.

Другая задача, разобранный в главе 21, решение которой, содержащее 16 частей, изображено на рис. 211, состоит в преобразовании двух звезд $\{12/3\}$ в одну звезду $\{12/3\}$. Это решение не производит впечатления минимального, поскольку в нем участвуют четыре узенькие части, которые, по-видимому, портят решение. И действительно, попытка избавиться от этого недостатка привела к решению, содержащему 12 частей и представленному на рис. VII.24. Новое решение, как и решение, изображенное на рис. 211, основано на преобразовании двух квадратов; однако в данном случае части, аналогичные равнобедренным прямоугольным треугольникам, устроены сложнее. Эти извилистые части могли бы символизировать предвыборные махинации: они весьма протяженны, ибо должны охватывать возможно большую

часть очертаний большой звезды $\{12/3\}$, и в то же время каждая из них заключена внутри одной из малых звезд $\{12/3\}$. Очень похоже, что это решение минимально.

Задача, решение которой изображено на рис. 211, — единственная задача такого типа, составленная Линдгреном для случая двенадцатиконечной звезды. Однако возможны и другие аналогичные преобразования. Среди двенадцатиконечных звезд кроме $\{12/3\}$ есть еще $\{12/2\}$,

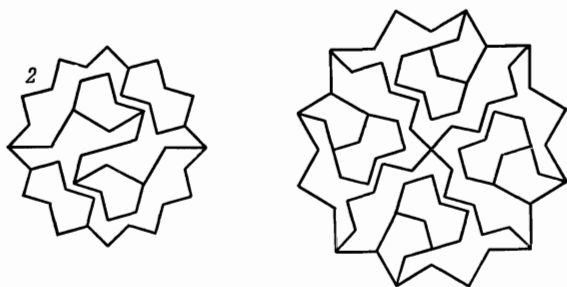


Рис. VII. 24.

$\{12/4\}$ и $\{12/5\}$. Все они подходят не только для преобразований двух звезд в одну, но также и для преобразований трех звезд в одну. Таким образом, существуют 8 возможных решений, из которых 6 решений приведены в данном разделе. В случае преобразования двух звезд в одну звезда $\{12/2\}$ представляет собой «легкую добычу». Ее можно разрезать на ромбы, как мы делали это с многоугольниками. Некоторые из полученных ромбов представляют собой квадраты, и, разумеется, диагональ такого квадрата совпадает по длине со стороной большого квадрата, в который преобразуются два данных. Таким путем без особых затруднений можно получить решение, содержащее 13 частей, которое показано на рис. VII. 25.

Преобразование двух звезд $\{12/4\}$ в одну звезду $\{12/4\}$ основано на разбиении звезды на ромбы и треугольники. Звезду $\{12/4\}$ можно рассматривать как объединение 24 равносторонних треугольников и 12 ромбов с углами в 30° и 150° . Поскольку здесь нет квадратов, то эквивалентом диагонали квадрата служит прямая, соединяющая вершину тупого угла ромба с дальней вершиной смежного треугольника. Самое лучшее на сего-

дняшний день решение, содержащее 18 частей, показано на рис. VII. 26.

Остальные задачи, разобранные в настоящем разделе, относятся к преобразованиям трех звезд в одну

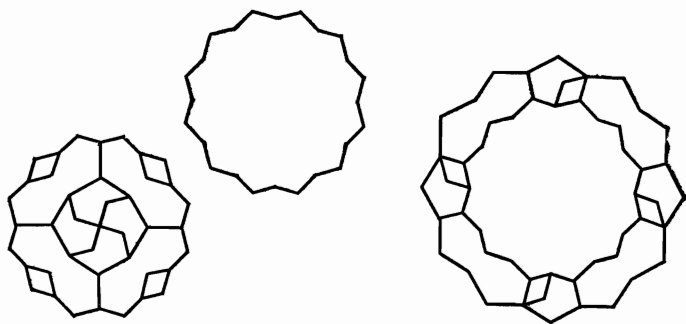


Рис. VII. 25.

для случаев $\{12/2\}$, $\{12/3\}$ и $\{12/4\}$. Здесь проще всего найти преобразование трех звезд $\{12/2\}$, поскольку оно основано на простом преобразовании трех шестиугольников в один, содержащем 7 частей. В последнем преобразовании два шестиугольника разрезаются каждый

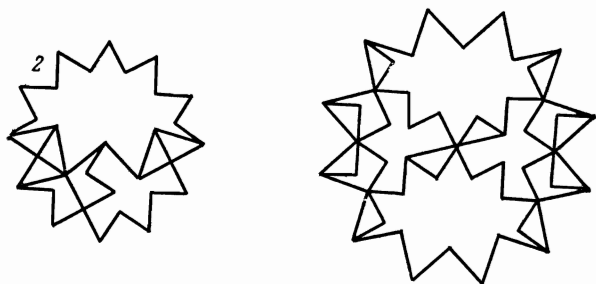


Рис VII. 26.

на три части, которые размещаются вокруг третьего шестиугольника, оставшегося нетронутым. В преобразовании звезд $\{12/2\}$ две маленькие звезды $\{12/2\}$ разрезаются также на три части каждая, а полученные части размещаются аналогичным образом. Однако остающуюся звезду $\{12/2\}$ приходится теперь разрезать на 12 частей, чтобы заполнить дыры в большей фигуре.

В результате мы получим решение, содержащее 18 частей, которое изображено на рис. VII. 27.

Гораздо труднее найти преобразование трех звезд $\{12/3\}$ в одну такую звезду. Оно частично основано на

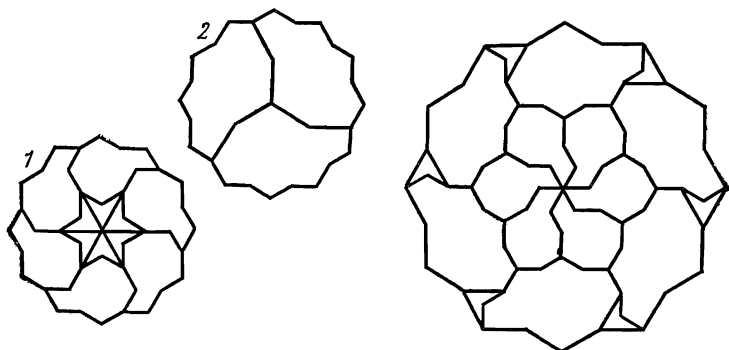


Рис. VII. 27.

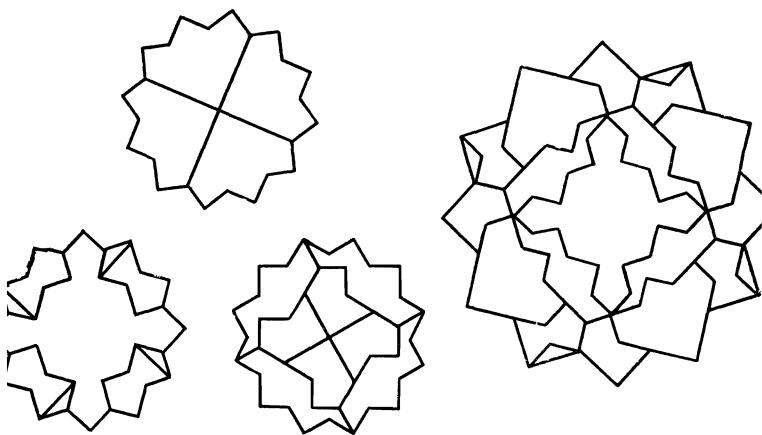


Рис. VII. 28.

разбиении фигуры на ромбы, но здесь приходится принимать в расчет и другой элемент, а именно зазубренную часть, позаимствованную из рис. VII. 3. Хотя она и не совпадает с объединением ромбов, тем не менее ее площадь равна сумме площадей некоторого квадрата и ромба с углами 30° и 150° . Решение данной задачи, содержащее 21 часть и представленное на рис. VII. 28,

найти было еще труднее, так как оно не переходит в себя при поворотах на 60° , как это имеет место в случае рис. VII.27 и VII.29. Вместо этого оно переходит в себя при поворотах на 90° .

Последнее решение данного раздела, относящееся к преобразованию трех звезд $\{12/4\}$ в одну, представлено на рис. VII.29 и содержит 24 части. Его можно найти, тоже разбивая фигуру на квадраты и равносторонние треугольники, с той только разницей, что у некоторых квадратов от одной из их сторон будут теперь

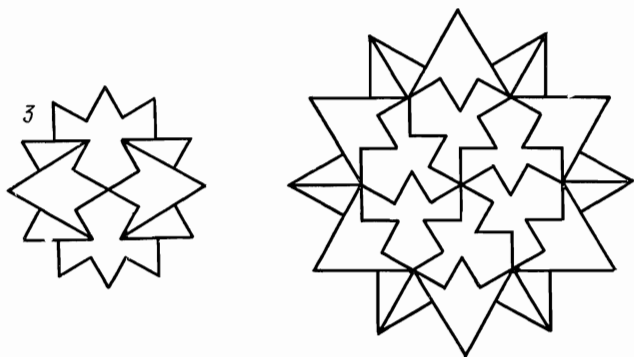


Рис. VII.29.

отрезаны равносторонние треугольники. Это решение пришло мне в голову как-то после полудня, когда я собирался отправиться на спортивное состязание, не состоявшееся из-за плохой погоды. Открытие этого решения послужило мне утешением и, должен признаться, весьма неплохим!

Если читатель посмотрит внимательно на преобразования трех двенадцатиконечных фигур в одну, изображенные на рис. 209, VII.27—VII.29, он, быть может, заметит некоторую закономерность. Начиная с преобразования трех двенадцатиугольников, каждое следующее решение содержит ровно на 3 части больше, чем предыдущее. Почему так происходит, еще не ясно, однако само по себе это наблюдение оказалось весьма полезным при открытии преобразования трех звезд $\{12/3\}$, содержащего 21 часть, когда я уже совсем было застрял на решении, содержавшем 24 части. Эта гипотеза хорошо

согласуется и с тем, что происходило в случае преобразования трех многоугольников в один; так что отсюда, быть может, удастся получить доказательство минимальности соответствующих решений.

Разрезания нескольких подобных, но не равных многоугольников. Одно из многочисленных весьма искусных решений, которыми мы обязаны Ирвингу Фризу, относится к случаю преобразования двух правильных n -угольников (их относительные размеры не существенны) в один правильный n -угольник. В нем участвуют $2n + 1$ части, и для случая пятиугольника оно показано

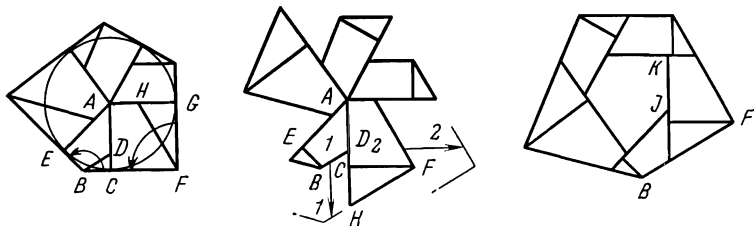


Рис. VII. 30.

на рис. 216. Весьма поразительное само по себе, оно, кроме того, оказывается частным случаем двух различных обобщений. Выясняется, что то же самое удастся проделать и в случае любого многоугольника (правильного или нет), около которого можно описать или в который можно вписать окружность. Число частей снова равно $2n + 1$. Эта более общая задача была поставлена и решена Хартом в 1877 г. Линдгрэн обратил на нее внимание почти через год после публикации данной книги. Многое в настоящем разделе взято из статьи, принадлежащей Линдгрэну и опубликованной в *Journal of Recreational Mathematics*, 2, 178 (1969).

На рис. VII. 30 показано преобразование двух пятиугольников, в которые можно вписать окружность. В большем из двух маленьких пятиугольников из центра вписанного круга на стороны опущены перпендикуляры. Каждый разрез BD проведен таким образом, чтобы тангенс угла DBC равнялся отношению любого линейного размера меньшего n -угольника к соответствующему размеру большего многоугольника. (Именно это сделано на рис. 284.) Поскольку две касательные к окружности,

проведенные из одной точки, равны между собой, мы можем на промежуточном шаге повернуть 5 частей, аналогичных треугольнику BCD , так, чтобы сторона BC заняла положение BE . Затем мы сдвигаем части парами

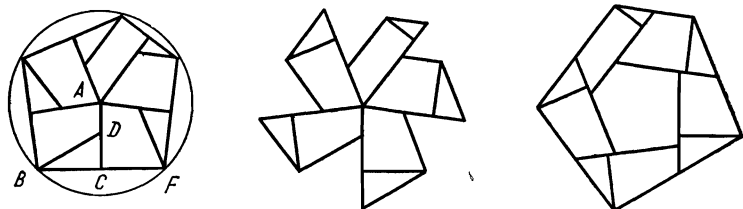


Рис. VII. 31.

в направлении от центра, а образовавшуюся дыру заполняем меньшим пятиугольником.

Многоугольник, около которого можно описать окружность, приведен на рис. VII. 31. В большем пятиугольнике мы из центра окружности опускаем на сто-

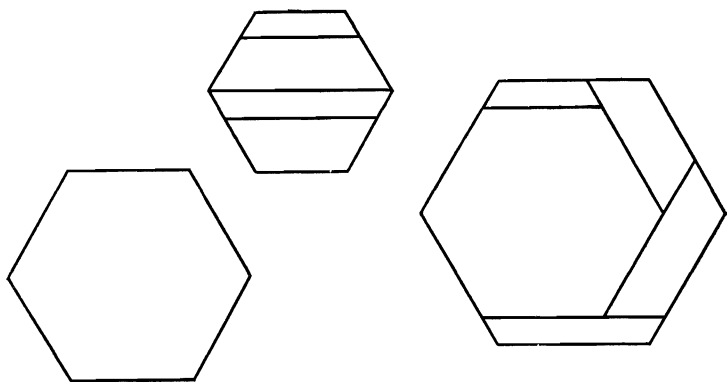


Рис. VII. 32.

роны серединные перпендикуляры. Разрезы BD расположены так же, как и на рис. VII. 30. Однако на сей раз 5 частей, аналогичных треугольнику BCD , поворачиваются в другом направлении. Так, на промежуточном шаге отрезок BC занимает положение CF . Наконец, мы вновь сдвигаем части от центра, а в образовавшуюся при этом дыру вставляем меньший пятиугольник.

Последняя задача данного раздела относится к специальному случаю преобразования двух шестиугольников в один, примечательного в том отношении, что решение содержит всего 5 частей. Стороны шестиугольников находятся в отношении $3:4:5$, демонстрируя теорему Пифагора для частного случая: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Данное разрезание рационально и родственно разрезаниям на рис. 19 и 20, относящимся к случаю квадратов. На этих рисунках каждый из квадратов можно разбить на единичные квадратики со стороной единица. В нашем случае каждый шестиугольник удастся разбить на равносторонние треугольники со стороной единица. Все разрезы сделаны вдоль границ этих треугольников, и в результате получилось решение, представленное на рис. VII. 32.

Это последнее преобразование, принадлежащее Джеймсу Шмерлю, обманчиво просто, однако в некотором смысле оно представляет собой лучшее из приведенных в настоящем приложении решений. Во-первых, оно содержит наименьшее число частей. Во-вторых, техника разрезаний привносится здесь в сравнительно не исследованную область. Наконец, и самое важное, данное решение показывает, что в задачах на разрезание никто не может претендовать на абсолютную монополию, здесь найдется место каждому, кто захочет принять вызов.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА¹

Темы о разрезании и складывании фигур затронуты в целом ряде сочинений по занимательной математике, рассчитанных на школьников и любителей математики, имеющих весьма скромное математическое образование; к числу таких книг принадлежат:

1. Б. А. Кордемский, Математическая смекалка, М., изд-во «Наука», 1965.
2. М. Гарднер, Математические чудеса и тайны, М., изд-во «Наука», 1964.
3. В. Литман, Веселое и занимательное о числах и фигурах, М., Физматгиз, 1960.
4. Щ. Еленьский, По следам Пифагора, М., Детгиз, 1961.

Несколько более серьезный характер имеют следующие книги и сборники задач с решениями, также затрагивающие этот круг вопросов:

5. М. Гарднер, Математические головоломки и развлечения, М., изд-во «Мир», 1971.
6. М. Гарднер, Математические досуги, М., изд-во «Мир», 1972.
7. М. Гарднер, Математические новеллы, М., изд-во «Мир», 1974.
8. Г. Э. Дьюдени, 520 головоломок, М., изд-во «Мир», 1975.
9. Ч. Тригг, Задачи с изюминкой, М., изд-во «Мир», 1975.
10. Г. Штейнгауз, Сто задач, М., изд-во «Мир», 1976.
11. Г. Штейнгауз, Задачи и размышления, М., изд-во «Мир», 1974.
12. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 3, Геометрия (стереометрия), М., Гостехиздат, 1954, цикл задач 4.

Более специальной тематике, но также тесно связанной с содержанием настоящей книги посвящены следующие доступные и для начинающего сочинения:

13. В. Литцман, Теорема Пифагора, М., Физматгиз, 1960.
14. С. Голлоб, Полимино, М., изд-во «Мир», 1975.
15. Б. А. Кордемский, Н. В. Руслаев, Удивительный квадрат, М., Гостехиздат, 1952.
16. И. М. Яглом, Как разрезать квадрат?, М., изд-во «Наука», 1968.

¹ Добавлено редактором перевода.

Учение о равновеликих и равноставленных фигурах освещено в следующих книгах и статьях:

17. В. Г. Болтянский, Равновеликие и равноставленные фигуры, М., Физматгиз, 1956.
18. В. Г. Болтянский, Равноставленность многоугольников и многогранников. Энциклопедия элементарной математики, кн. V (Геометрия), М., изд-во «Наука», 1966, стр. 142—180.
19. В. Г. Болтянский, Новые работы о равноставленности многоугольников и многогранников, сб. «Математическое просвещение» (новая серия), вып. 2, М., Гостехиздат, 1957, стр. 263—265.
20. Д. И. Перепелкин, Курс элементарной геометрии, ч. I, М. — Л., Гостехиздат, 1958, гл. VII, §§ 53—60.
21. И. М. Яглом, О площади многоугольника, в кн.: Я. С. Дубнов, Измерение отрезков, М., Физматгиз, 1962, стр. 79—100.
22. Д. Гильберт, Основания геометрии, М. — Л., Гостехиздат, 1948, гл. IV.
23. В. Ф. Каган, О преобразовании многогранников, в кн. «Очерки по геометрии», М., изд-во МГУ, 1963, стр. 156—194.
24. Г. Хардвигер, Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии, М., изд-во «Наука», 1966.
25. Проблемы Гильберта, М., изд-во «Наука», 1969.
26. В. Г. Болтянский, Третья проблема Гильберта, М., изд-во «Наука», 1977.

См. также [12].

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Увлечением высокоученого профессора Клотцкопфа, героя широко известного математикам анекдота, которым начинает автор настоящую книгу, были интегральные уравнения Вольтерра второго рода. У Гарри Линдгрена, скромного служащего патентного бюро в Канберре (Австралия), было, казалось бы, куда более далекое от высокой науки увлечение — его интересовали задачи о разрезаниях и складывании фигур, традиционно занимающие почетное место во всех книгах, посвященных математическим развлечениям (см., например, [1]—[11]). В свободное от работы время Линдгрэн не только упорно бился над известными ему задачами такого рода, но и придумывал новые; он даже систематизировал приемы решения таких задач, и в конце концов у него составила обстоятельная рукопись. В 1963 году она увидела свет. Это обстоятельство не могло не обрадовать автора, увлечение которого, таким образом, оказалось кому-то нужным. Удовлетворение доставила ему и возможность поведать о своем хобби *urbi et orbi*¹ и, быть может, заразить им и других.

Вряд ли Г. Линдгрэн рассчитывал на то, что его книге будет уготована особенно долгая жизнь — он сам с горечью говорит, что математики склонны считать избранную им тему несерьезной. Однако в 1972 г. в Нью-Йорке вышло второе издание его труда. Оно было дополнено новыми материалами (частично приложение IV и приложение VII), принадлежащими другому энтузиасту геометрических разрезаний — американцу Грегу Фредериксону, такому же непрофессиональному математику, как и Линдгрэн. Сейчас эта книга переведена на русский язык и лежит перед вами. Чем же вызван такой интерес к ней?

Разумеется, успех книги Линдгрена объясняется прежде всего трудолюбием и незаурядными способностями автора, составившего уникальный свод задач, ре-

¹ Городу и миру (лат.).

шений и общих приемов, относящихся к разрезаниям и складываниям фигур. Второе и, бесспорно, самое важное обстоятельство заключается в том, что тема книги оказалась не так уж далека от серьезных математических задач — так что для мотивировки ее актуальности вовсе нет нужды апеллировать к той довольно специальной задаче, о которой говорит автор на стр. 179. В основе ее лежит старинная задача о *равновеликих* и *равносоставленных* фигурах, которая исходит еще от античных геометров. *Равносоставленными* в геометрии принято называть фигуры F и G , образованные из конечного числа одинаковых (но, разумеется, по разному расположенных) непересекающихся частей $f_1, f_2, \dots, f_n$ и $g_1, g_2, \dots, g_n$ (где $f_1 \cong g_1, f_2 \cong g_2, \dots, f_n \cong g_n$; здесь знак $\cong$ обозначает геометрическое равенство или *конгруэнтность* фигур); проблема состоит в выяснении того, являются ли две данные фигуры F и G *равносоставленными* или нет. Ясно, что *если две фигуры F и G равносоставлены, то они равновелики*, то есть имеют одинаковую площадь или (в случае пространственных фигур) одинаковый объем; таким образом, *равновеликость фигур является необходимым условием их равносоставленности*. Важно, однако, выяснить, какие условия являются также и достаточными для равносоставленности, то есть в каком случае про две равновеликие фигуры F и G можно с уверенностью сказать, что они являются *равносоставленными*.

Оказывается, что *в случае плоских многоугольников равновеликость фигур является также и достаточным условием их равносоставленности* — этот основной факт установил еще в 1832 г. видный венгерский математик Фаркаш Бойяи (известный более как отец Яноша Бойяи, одного из создателей неевклидовой геометрии). Однако доказательство Бойяи было необычайно громоздким. Годом позже ту же теорему независимо от Бойяи доказал увлеченный математикой офицер из Франкфурта Гервин, доказательство которого в несколько переработанном виде и по сей день излагается в математической литературе (см., например, [12], [17], [18], [20], [23], [26]). Таким образом, уже на ранней стадии существенный вклад в разработку проблемы был внесен любителем, не имевшим специальной подготовки.

Теорема Бойяи — Гервина заинтересовала знаменитого Давида Гильберта. Как известно, Гильберт уделил этому кругу идей значительное место в своем прославленном сочинении по основаниям геометрии [22] и назвал третьей из 23 проблем, сформулированных им в 1900 г. как первоочередные [25], задачу перенесения полученного результата на пространственные многогранники. В том же 1900 г. эта третья проблема — раньше, чем какая бы то ни было другая, — была решена (в отрицательном смысле) учеником Гильберта Максом Денном: последний показал, что (как и ожидал Гильберт) равновеликость многогранников не является достаточным условием их равноставленности, и указал некоторые довольно сложные дополнительные условия, необходимые для равноставленности двух равновеликих многогранников. Однако работа Денна не исчерпывала проблемы: напротив, в последнее время мы наблюдаем новый расцвет исследований, в значительной степени связанный с деятельностью видного швейцарского геометра Гуго Хадвигера и его школы¹. Из полученных школой Хадвигера результатов (о них см. [24], [17], [19] и [26]) в первую очередь следует назвать эффектную теорему, в силу которой два равновеликих многоугольника F и G могут быть разбиты не только на равные многоугольные части, но даже на равные многоугольники *с попарно параллельными соответствующими сторонами* (на многоугольники $f_1, f_2, \dots, f_n$ и $g_1, g_2, \dots, g_n$, где g_i получается из f_i *параллельным переносом или симметрией относительно точки*; здесь $i = 1, 2, \dots, n$). В школе Хадвигера были также получены (необходимые и достаточные) условия «трансляционной равноставленности» равновеликих многоугольников F и G , то есть того, что эти многоугольники можно разбить на части $f_1, f_2, \dots, f_n$ соответственно $g_1, g_2, \dots, g_n$, где для всех $i = 1, 2, \dots, n$ g_i получается из f_i *параллельным переносом*.

К этому же кругу идей относится затрагиваемый и Линдгреном вопрос о «зеркальной» и «собственной» равноставленности фигур F и G , связанной с заменой требования конгруэнтности соответствующих их частей

¹ В 1974 г. ученику Хадвигера, Жан-Пьеру Сидлеру (упоминаемому и в настоящей книге), удалось установить, что указанные М. Денном необходимые условия равноставленности двух равновеликих многогранников являются также и достаточными.

более жестким условием «собственного» их равенства. В случае плоских фигур «собственное равенство» фигур означает, что g_i можно совместить с f_i «без переворачивания обратной стороной кверху» (такая постановка задачи о равноставленности особенно интересна применительно к пространственным фигурам, ср. с [26]).

Таким образом, связанная с рассматриваемыми Г. Линдгреном задачами проблематика вовсе не так уж бедна в чисто математическом смысле: она до сих пор привлекает к себе внимание крупных ученых, а целый ряд примыкающих к ней научных задач все еще не решен (достаточно сослаться на перечень таких задач в [26]). Однако, как нам представляется, интерес, вызываемый настоящей книгой, непосредственно мало связан с упоминаемыми выше математическими проблемами. Скорее можно считать, что и расцвет (казалось бы, несколько неожиданный) исходящих от понятия равноставленности проблем, и успех книги Линдгрена вызваны одними и теми же внешними обстоятельствами.

Взрыв интереса к проблемам равноставленности и актуальность настоящей книги связаны прежде всего с появлением электронных вычислительных машин и порожденных ими новых направлений чистой и прикладной математики. Если на протяжении минувшего и едва ли не всей первой половины нашего столетий главными в математике считались те ее части, которые были связаны с дифференциальным и интегральным исчислением, то ныне положение в корне изменилось. Еще в 30-х годах XX века знаменитый французский математик Анри Лебег, обращаясь к учителям математики средних школ, писал: «...Если все законченные точные вычисления, единственные, которые допускались древними, и сохранили все свое математическое значение, ...то их практическое значение значительно уменьшилось, а порой и совершенно исчезло»¹. Другими словами, прикладную ценность, по мнению Лебега, имеют лишь те разделы математической науки, которые связаны с бесконечными процессами и предельными переходами. Вплоть до начала 50-х годов с этой точкой зрения мало кто стал бы полемизировать. Но широкое внедрение сугубо дискретных (или «конечных») по самой своей природе элек-

¹ А. Лебег, Об измерении величин, М., Учпедгиз, 1960, стр. 42.

тронных цифровых вычислительных машин весьма резко изменило ситуацию, и сегодня уже вряд ли кто-либо согласится с высказыванием Лебега. Для современной математики характерно глубокое внимание именно к разного рода «конечным» объектам, к которым принадлежат многоугольники и многогранники, и к «конечным процедурам», подобным перекраиванию одной фигуры в другую, равновеликую ей¹.

Однако построения, развиваемые в книге Гарри Линдгреном и Греггом Фредериксоном, имеют еще одну сторону. Чисто теоретически все их конструкции (за исключением лишь тех, о которых говорится в главах 23 и 24) укладываются в рамки сформулированной выше теоремы Бойяи — Гервина, утверждающей возможность такого перекраивания любого плоского многоугольника, которое позволяет сложить из полученных частей другой наперед заданный многоугольник, равновеликий исходному. При этом с точки зрения «чистой математики» идущее от Гервина доказательство этой теоремы отнюдь не является всего лишь «доказательством существования» — нет, оно должно считаться безусловно эффективным, не только утверждающим сам факт равенства составленности равновеликих многоугольников F и G , но и описывающим («конечную») процедуру, которая позволяет преобразовать G в F .

Но известно, что и в чистой, и в прикладной математике понятия эффективности той или иной процедуры вовсе не совпадают, и иная последовательность операций, теоретически вполне конечная, практику может показаться приводящей к «актуальной бесконечности»². В прикладной математике давно уж сформировался свой взгляд на понятия «конечности» и «эффективности», довольно далекий от взгляда, принятого в теоретической математике, — и в ряде случаев указываемая доказа-

¹ Указанные обстоятельства способствовали также расцвету комбинаторики, в связи с чем обнаружилась совершенная необоснованность мнения (см. стр. 7) об исчерпанности проблем, связанных с так называемыми магическими квадратами: в теории магических квадратов (и родственных им так называемых латинских квадратов) вдруг обнаружились многие, подчас весьма важные для практики, вопросы, ответы на которые до сих пор не найдены.

² Подробнее см. И. И. Блехман, А. Д. Мышкис, Я. Г. Пановко, Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов, Киев, изд-во «Наукова думка», 1976.

тельством Гervина процедура установления равносоставленности двух многоугольников практику покажется вовсе не эффективной. Особенно важно «прикладное» значение термина «оптимальность», также существенно отличное от того, каким оперируют «чистые» математики; оно требует указания если и не самого лучшего, то во всяком случае «достаточно хорошего» (или «настолько хорошего, насколько этого удастся добиться») алгоритма интересующей нас процедуры. И именно это понятие, лежащее ныне в основе целого комплекса новых «математических наук», а точнее, новых ветвей прикладной (и не только прикладной) математики, вроде *теории кодирования* или *исследования операций*¹, пронизывает всю книгу Линдгрена. С этой точки зрения проблематику книги уместно сопоставить, пожалуй, не только (и даже не столько) с «чисто математической» теорией равносоставленности фигур, а скорее с абсолютно практической *теорией рационального раскрытия материалов*, ведущей свое начало от одного из основоположников современной «математической экономики» — лауреата Нобелевской премии Л. В. Канторовича².

Автор книги неоднократно подчеркивает, что развиваемая им теория (возможно, здесь правильное было бы говорить не о «теории», а о «практике») отнюдь не исчерпывается только что прочитанным вами сочинением: уже само сравнение составленного Фредериксоном приложения VII с идущими от Линдгрена решениями показывает широкие возможности для личного творчества каждого. Навыки, развиваемые в процессе такого творчества, одинаково полезны как теоретику, так и практику; в отдельных случаях они могут открыть перед вами путь в науку. Итак, за работу, друзья!

И. М. Яглом

¹ Соответствующий круг вопросов нашел свое отражение в доступной начинающему читателю книге А. Кофман, Р. Фор «Займемся исследованием операций» (М., изд-во «Мир», 1966); см. также С. Гасс, Путешествие в страну линейного программирования, М., изд-во «Мир», 1973.

² Л. В. Канторович, В. А. Залгеллер, Рациональный раскрой промышленных материалов, Новосибирск, изд-во «Наука», 1971.