ACADEMY OF SCIENCES OF THE USSR · SIBERIAN BRANCH
INSTITUTE OF MATHEMATICS

SELECTED QUESTIONS OF ALGEBRA AND LOGIC

Volume dedicated to the memory of A. I. Mal'cev

PUBLISHING HOUSE «NAUKA»·SIBERIAN BRANCH
NOVOSIBIRSK·1973

АКАДЕМИЯ НАУК СССР · СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ АЛГЕБРЫ И ЛОГИКИ

Сборник, посвященный памяти А. И. Мальцева

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» · СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
НОВОСИБИРСК · 1973

УДК 519.4+51.01

Сборник содержит статьи по теории групп, теории колец, теории алгебр Ли, математической логике, теории моделей и другим разделам алгебры и логики, а также воспоминания об А. И. Мальцеве. Среди авторов сборника — крупные советские и зарубежные специалисты.

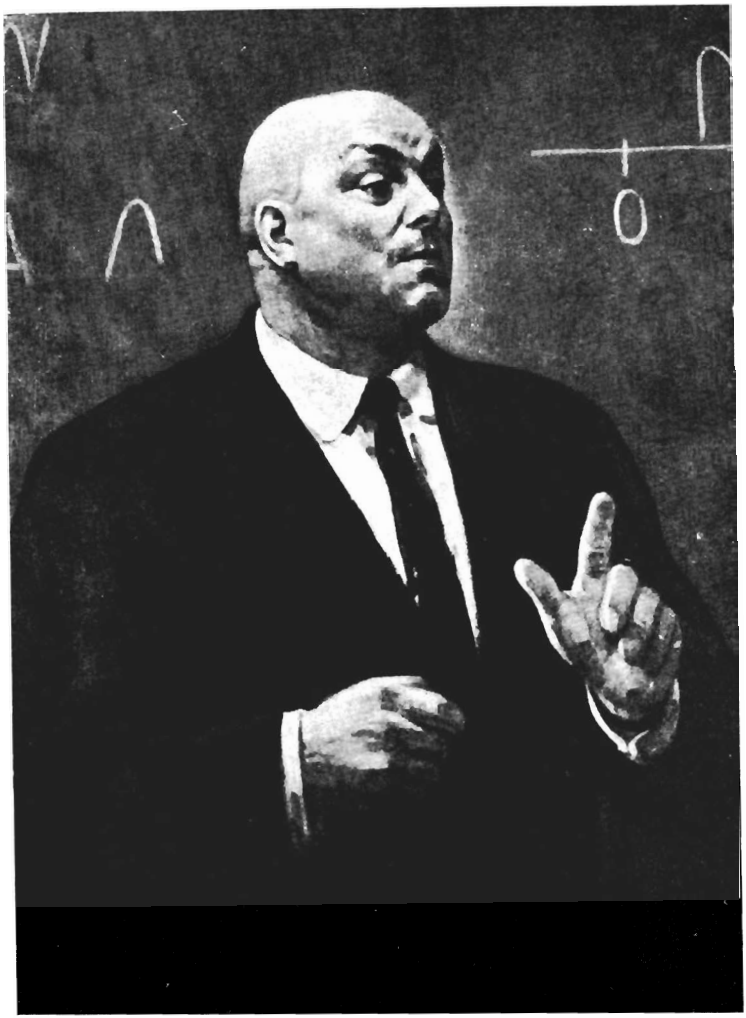
Книга предназначена для широких кругов математиков, интересующихся алгеброй и логикой,—научных работников, аспирантов и студентов старших курсов университетов и педагогических институтов.

The volume contains works in the theory of groups, the theory of rings, the theory of Lie algebras, mathematical logic, the theory of models and in other branches of algebra and logic, and some memoires about A. I. Mal'cev. The authors of the volume are well known soviet and foreign specialists.

The book is prescribed for a broad circle of mathematician which have interest in algebra and logic namely for men of science, postgraduates and students of the last courses of universities and pedagogical institutes.

И $\frac{0223\text{-}1447}{042(02\text{-})\text{-}73}$ Б3-45-38-72

© ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА», СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ, 1973.



Анатолий Иванович Мальцев

60-е годы. С портрета художника Т. Козлова

СССР.
Институт кибернетики АН УССР
В. М. ГЛУШКОВ, А. А. ЛЕТИЧЕВСКИЙ

ТЕОРИЯ ДИСКРЕТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

Памяти Анатолия Ивановича Мальцева,
выдающегося математика и замечательного человека

Понятие «дискретный преобразователь» возникло на пути к применению теории автоматов в исследовании некоторых задач теории программирования и построении формализованных методов проектирования структур вычислительных машин. Теория автоматов — достаточно эффективное средство для решения задач, в которых основную роль играет алфавитное отображение, представленное в автомате (например, задача синтеза, состоящая в отыскании композиции заданных элементарных автоматов, представляющей заданное автоматное отображение).

Однако часто рассмотрения автоматного отображения оказывается недостаточно, необходимо принимать во внимание преобразования автоматов, которые существенно меняют представленные в них отображения, используя определенную внешнюю информацию о природе входных и выходных сигналов. В этих случаях автомат рассматривается как абстрактная модель устройства, выполняющего вычисления по некоторому алгоритму. При этом выходные сигналы играют роль элементарных действий, а входные — условий, распознаваемых в процессе вычислений. Фиксируя для данного автомата указанную интерпретацию его входных и выходных сигналов, получаем объект, названный в этой работе дискретным преобразователем.

В терминах теории дискретных преобразователей удается сформулировать многие практически важные задачи и подготовить формальный аппарат для их решения.

Предлагаемая работа представляет собой обзор основных результатов теории дискретных преобразователей и основывается на работах [3—6, 9—13, 16].

Приведем основные понятия теории автоматов, используемые в работе.

Пусть A, X, Y — некоторые множества. Множество A назовем X-автоматом, если задано (вообще говоря, частичное) отображение $\delta_A: (a, x) \to ax$ множества $A \times X$ в A, называемое функцией переходов. X—Y-автоматом (Мили) называется X-автомат, для которого задана функция выходов $\lambda_A: (a, x) \to \lambda_A(a, x)$ множества $A \times X$ в Y, определенная для тех и только тех пар (a, x), для которых определена функция δ_A. $X-Y$-автомат A называется автоматом Мура, если $\lambda_A(a, x)$ не зависит от x. В этом случае функция выходов $\mu_A: a \to \mu_A(a)$ множества A в Y. Элементы множеств A, X, Y называются состояниями, входными и выходными сигналами автомата A. Если функция переходов определена для всех пар (a, x), то автомат называется вполне определенным.

Автомат A называется инициальным, если в нем выделено начальное состояние.

Через φ_a обозначим (частичное) автоматное отображение, индуцируемое состоянием a автомата. Если A — инициальный автомат, то φ_A — отображение, индуцируемое начальным состоянием. φ_A отождествляется с подмножеством множества $F_X \times F_Y$— прямого произведения двух свободных полугрупп. Элементы отображения φ_A суть пары слов одинаковой длины. Отображение $f: (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \to (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ полугруппы $F_X \times F_Y$ в полугруппу $F_{X \times Y}$ является изоморфизмом, с помощью которого можно отождествить $F_{X \times Y}$ с соответствующей подполугруппой полугруппы $F_X \times F_Y$. Тогда всякое автоматное отображение можно рассматривать как событие в парном алфавите $X \times Y$.

Автоматы называются эквивалентными, если они индуцируют одно и то же отображение.

Подмножество $A_1 \subset A$ называется подавтоматом $X-Y$-автомата A, если $A_1X = \{ax \mid a \in A_1,\ x \in X\} \subset A$. Любое подмножество $A_2 \subset A$ состояний автомата A порождает подавтомат $A_1 = A_2F_X$ автомата A. Подавтомат A_1 называется подавтоматом, порожденным множеством A_2. Если A_2 состоит из одного состояния a, то говорят, что A_1 порожден состоянием a. Если a принять в качестве начального состояния автомата A_1, то получим (связный) инициальный подавтомат A_1, порожденный состоянием a, и будем его обозначать через $A_1(a)$. Отображение $f: A_1 \to A_2$ называется гомоморфизмом $X-Y$-автомата A_1 в $X-Y$-автомат A_2, если $f(a,x) = (fa)\,x$ и $\lambda_{A_1}(a,x) = \lambda_{A_2}(fa,x)$. Если автоматы инициальны, требуется еще равенство начальных состояний. Изоморфизм—это взаимнооднозначный гомоморфизм.

Инициальный свободный автомат — это свободная полугруппа F_X с единицей, на которой функция переходов определена как умножение слова на символ входного алфавита x справа. Начальным состоянием является пустое слово e.

Всякий инициальный X-автомат есть гомоморфный образ свободного инициального X-автомата.

Состояния автомата называются эквивалентными, если они индуцируют одно и то же отображение.

Автомат называется приведенным, если все его состояния попарно не эквивалентны.

1. Дискретные преобразователи

Пусть A — автомат Мили с входным алфавитом X и выходным алфавитом Y. Будем считать, что в автомате A зафиксировано начальное состояние a_0 и заключительное a^*. В абстрактной теории автоматов элементам входного и выходного алфавита обычно не приписывается никакого смысла и они рассматриваются просто как элементы некоторых абстрактных множеств. При использовании понятия автомата для описания алгоритмических процессов необходимо интерпретировать его входные и выходные сигналы соответственно как сигналы о перерабатываемой информации и выполняемых алгоритмом элементарных действиях. Для этого зафиксируем множество B, которое назовем информационным. Элементы его — информационные объекты — представляют перерабатываемую алгоритмом информацию. Каждому выходному сигналу y автомата A поставим в соответствие некоторое, вообще говоря, частичное преобразование f_y множества B, а некоторым элементам b множества B — входной сигнал $x = \mu(b) \in X$ автомата A. Если задано такое соответствие между выходными сигналами автомата A и преобразованиями множества B, а также между элементами множества B и входными сигналами автомата A, будем говорить, что задана *интерпретация* входных и выходных сигналов автомата A.

Автомат с заключительным состоянием назовем *дискретным преобразователем информации*, если для него задана интерпретация. При этом будем говорить, что дискретный преобразователь действует на множестве B. Преобразования f_y будем называть *элементарными операторами* дискретного преобразователя.

Если множества X, Y, A конечны, дискретный преобразователь назовем конечным. Каждый дискретный преобразователь информации A определяет некоторое преобразование f_A

множества B. Это преобразование вычисляется путем применения A к элементам множества B. Чтобы получить значение $f_A(b)$, нужно установить автомат A в начальное состояние a_0. Функционирование автомата происходит в дискретном времени. При этом порождаются последовательности $x_1, x_2, \ldots$; $y_1, y_2, \ldots$; $a_0, a_1, \ldots$; $b, b_1, \ldots$, где $x_i = \mu(b_{i-1})$, $y_i = \lambda_A(a_{i-1}, x_i)$, $a_i = a_{i-1}x_i$, $b_i = b_{i-1}y_i$, $b_0 = b$, $i = 1, 2, \ldots$

Последовательности, порождаемые автоматом и описывающие его функционирование, могут быть бесконечными или обрываться после конечного числа шагов. Следует различать две причины, по которым функционирование автомата обрывается. Первая состоит в том, что одна из функций, определяющих функционирование автомата (функция переходов или выходов автомата A, преобразование f_A или функция μ), не определена, а автомат в этот момент не находится в заключительном состоянии. Вторая причина — автомат A попадает в заключительное состояние. (Поскольку после перехода автомата A в заключительное состояние его функционирование прекращается, будем считать, что функция переходов автомата A для этого состояния не определена.) Если автомат A кончает свою работу в заключительном состоянии через n шагов ($a_n = a^*$), то считаем, что значение $f_A(b)$ определено и равно последнему элементу b_n последовательности $b_0, b_1, \ldots, b_n$, а дискретный преобразователь применим к элементу b. Во всех остальных случаях (когда автомат функционирует бесконечно или прекращает свою работу не в заключительном состоянии) значение $f_A(b)$ считаем неопределенным, а дискретный преобразователь A неприменимым к b. Преобразование f_A назовем *оператором, представленным в дискретном преобразователе* A. Если элементы множества B являются конструктивными объектами и интерпретация функций переходов и выходов автомата A задана эффективно, то дискретный преобразователь A определяет работу некоторого алгоритма, а оператор f_A — функцию, вычисляемую этим алгоритмом.

Обычно множество состояний дискретного преобразователя конечно. Однако для адекватного описания некоторых алгоритмических систем приходится рассматривать дискретные преобразователи с бесконечным числом состояний. Такая ситуация имеет место, например, если рассматривать алгоритмические языки типа АЛГОЛ, использующие рекурсивные обращения к процедурам. Поэтому будем использовать условие конечности дискретного преобразователя лишь в тех случаях, когда это ограничение необходимо для формулировки результатов.

Один и тот же оператор может быть представлен в различных дискретных преобразователях. Поэтому естественно рассматривать эквивалентность дискретных преобразователей с одной и той же интерпретацией. А именно, два дискретных преобразователя A_1 и A_2 с одной и той же интерпретацией называются (слабо) эквивалентными, если в них представлен один и тот же оператор, т. е. $f_{A_1} = f_{A_2}$.

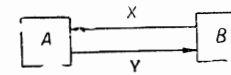


Рис. 1.

Функционирование дискретного преобразователя в процессе вычисления функции f_A удобно рассматривать как функционирование двух автоматов A и B, соединенных так, как это показано на рис. 1.

Действительно, множество B можно принять за автомат Мура с входным алфавитом Y и выходным алфавитом X, если определить его функцию переходов соотношением $by = f_y(b)$ и взять μ в качестве функции выходов. Если автомат B установить в начальное состояние b, то система из двух автоматов A и B начнет функционировать. Если в некоторый момент времени автомат A перейдет в заключительное состояние, то состояние автомата B в этот же момент времени определит значение функции $f_A(b)$.

Автомат B будем называть операционным. Иногда в качестве операционного вместо автомата Мура удобно рассматривать автомат Мили. В этом случае для правильного функционирования схемы, изображенной на рис. 1, дискретный преобразователь A должен быть автоматом Мура, а функция μ зависит не только от элементов информационного множества, но и от выходных сигналов дискретного преобразователя A.

2. Примеры дискретных преобразователей

Рассмотрим важнейшие примеры дискретных преобразователей, соответствующих различным алгоритмическим системам.

Машина Тьюринга представляет собой алгоритмическую структуру, функционирование которой наиболее естественно описывается с помощью рассмотренной схемы. В роли дискретного преобразователя A выступает головка машины Тьюринга. Роль входного алфавита X автомата A играет внутренний алфавит ленты машины Тьюринга, а в качестве сигналов алфавита Y выступают пары (a, m), где a — символ, который головка записывает в активную ячейку ленты, а $m = -1, 0, +1$ указывает направление движения головки.

Элементом множества B является лента машины Тьюринга с заполненными ячейками и выделенной активной ячейкой, именно той, которую обозревает головка. Интерпретация входных и выходных сигналов автомата A задается естественным образом, исходя из функционирования машины Тьюринга.

Аналогично можно рассматривать многоленточные машины Тьюринга, а также машины Тьюринга с несколькими головками.

Нормальные алгорифмы Маркова. Нормальный алгорифм в алфавите Z задается последовательностью подстановок $p_1 \to q_1, \ldots, p_n \to q_n$. Некоторые из этих подстановок отмечены как заключительные. Алгорифм применяется к словам в алфавите Z. Элементарным действием алгорифма является применение к перерабатываемому слову первой применимой подстановки. Точнее, результат применения алгорифма к к слову p на одном шаге есть новое слово p', в котором первое вхождение p_i заменено на q_i. При этом в качестве i выбирается наименьшее число, не превосходящее n, для которого вхождение слова p_i в p существует. Если ни одна из подстановок алгорифма неприменима, то p' совпадает с p. Если на некотором шаге была применена одна из заключительных подстановок, то алгорифм заканчивает свою работу. При таком понимании процесса выполнения нормального алгорифма любому нормальному алгорифму соответствует дискретный преобразователь с двумя состояниями — начальным и заключительным (a_0 и a^*).

Элементами входного алфавита дискретного преобразователя служат слова в алфавите Z. Выходной алфавит состоит из всевозможных подстановок вида $p \to q$, а информационное множество — из слов в алфавите Z.

Преобразование $f_{p \to q}$, сопоставленное с выходным сигналом $p \to q$, оставляет на месте все слова r, которые не содержат вхождений слова p и каждое слово вида $r_1 p r_2$, где выделенное в записи вхождение слова p является первым слева, переводит в слово $r_1 q r_2$. Функции переходов и выходов дискретного преобразователя определяются следующим образом. Пусть a_0 — начальное состояние преобразователя. Если первая подстановка, которая применима к слову r, не является заключительной или ни одна из подстановок алгорифма к слову r неприменима, то $a_0 r = a_0$. В противном случае $a_0 r = a^*$. Если первая подстановка, которая применима к r, есть $p \to q$, то $\lambda(a_0, r) = p \to q$. Если ни одна из подстановок алгорифма неприменима, то $\lambda(a_0, r) = e \to e$ (e — пустое слово в алфавите Z). Функция μ действует тождественным образом.

Рассмотренное соответствие между нормальными алгорифмами и дискретными преобразователями приводит к бесконечным входному и выходному алфавитам дискретного преобразователя. Каждый дискретный преобразователь, соответствующий некоторому нормальному алгорифму, использует только конечное число выходных сигналов, поэтому его выходной алфавит можно сузить до конечного алфавита. Аналогично можно было бы ограничить и входной алфавит, сопоставляя его элементам различные подмножества множества подстановок алгорифма. В этом случае функция μ сопоставляет каждому слову r символ входного алфавита, соответствующий множеству подстановок, применимых к слову r.

Другие способы построения дискретного преобразователя, соответствующего данному нормальному алгорифму, можно получить, расчленяя один шаг работы алгорифма на более элементарные шаги.

Граф-схемы Калужнина и логические схемы алгоритмов. Граф-схемы Калужнина представляют собой ориентированные графы специального вида. В каждом графе выделяются два узла — входной и выходной. А все остальные узлы делятся на два класса: узлы-распознаватели и узлы-преобразователи. Из входного узла, а также из узлов-преобразователей исходит в точности одна стрелка. Из каждого узла-распознавателя исходят две стрелки, отмеченные знаками «+», «—». Из выходного узла стрелки не исходят. Наконец, узлам-преобразователям поставлены в соответствие символы операторов, а узлам-распознавателям — символы предикатов.

Одна и та же граф-схема допускает различные интерпретации, каждая из которых состоит в том, что символам операторов сопоставляются преобразования некоторого множества B, а символам предикатов — предикаты, заданные на множестве B. Работу интерпретированной граф-схемы лучше всего объяснить, сопоставляя ей соответствующий дискретный преобразователь информации. Вот пример.

Входной алфавит дискретного преобразователя, соответствующего заданной граф-схеме, состоит из двух символов 0 и 1, а выходной содержит символы операторов и предикатов, встречающиеся в граф-схеме. Дискретный преобразователь A — это автомат Мура, состояниями которого являются все узлы граф-схемы, за исключением входного. Начальное состояние автомата A — это тот узел, в который ведет единственная стрелка, выходящая из входного узла. Заключительное состояние — это выходной узел. Функция переходов определяется следующим образом. Если a — такой узел-преобразователь,

что единственная исходящая из него стрелка ведет к a', тогда $ax = a'$ $(x = 0,1)$. Если же a — узел-распознаватель, причем стрелка, отмеченная знаком «+», ведет в a', а стрелка, отмеченная знаком «—», — в a'', то $a0 = a''$, $a1 = a'$. Функция выходов дискретного преобразователя каждому узлу ставит в соответствие тот символ (оператора или предиката), которым этот узел отмечен. Операционный автомат B, определяющий интерпретацию дискретного преобразователя, соответствующего граф-схеме, удобно определить как автомат Мили. Функция переходов этого автомата определяется так, что символы операторов действуют как соответствующие им преобразования, а символы распознавателей — как тождественное преобразование. Если операционный автомат находится в состоянии b и на его вход подан символ предиката y, то выходом операционного автомата является единица или нуль в зависимости от того, выполняется или нет условие, которым интерпретируется предикат y на элементе b. В некоторых случаях дискретный преобразователь, соответствующий граф-схеме, удобно строить по-другому. Пусть $p_1, \ldots, p_n$ — символы всех предикатов, которые встречаются в граф-схеме. В качестве элементов алфавита X дискретного преобразователя будем рассматривать всевозможные наборы $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ значений условий, соответствующих предикатам $p_1, \ldots, p_n$, а в качестве выходного алфавита выберем множество символов операторов, дополненное новым символом ε, играющим роль тождественного оператора. Множество состояний, начальное и заключительное состояния определяются так же, как и в предыдущем случае. Определим функции переходов и выходов. Пусть $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — некоторый входной сигнал. Если a — узел-преобразователь, который соединен стрелкой с узлом a' и отмечен символом оператора y, то $ax = a'$, а $\lambda(a,x) = y$. Пусть теперь a — узел-распознаватель, отмеченный символом предиката $p_i (1 \leqslant i \leqslant n)$, который соединен стрелкой, отмеченной знаком «+», с узлом a', а стрелкой, отмеченной знаком «—», — с узлом a''.

Тогда $ax = a'$, если $\alpha_i = 1$ и $ax = a''$, если $\alpha_i = 0$, $\lambda(a,x) = \varepsilon$. Операционный автомат B при такой интерпретации определяется как автомат Мура, функция выходов которого μ ставит в соответствие элементу b сигнал $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где α_i равняется единице или нулю в зависимости от того, выполнено или нет условие p_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ на элементе b. Функция переходов B определяется через интерпретацию символов операторов и условием того, что ε определяет тождественное преобразование множества B в себя.

Нетрудно видеть, что независимо от того, каким из двух выше приведенных способов сопоставляется дискретный преобразователь граф-схеме, функция, вычисляемая дискретным преобразователем, будет одной и той же.

Логические схемы алгоритмов, по существу, очень близки к граф-схемам и отличаются от них в основном линейной формой представления записи.

Программы в алгоритмических языках. Понятие дискретного преобразователя информации можно использовать как средство для точного описания семантики алгоритмических языков. В этом случае в качестве состояний операционного автомата обычно используются совокупности значений переменных, которые меняются в процессе работы программы в алгоритмическом языке. Функции переходов и выходов операционного автомата определяются семантикой выражений и операторов языка, а сам дискретный преобразователь строится таким образом, что его состояния соответствуют различным вхождениям операторов языка в программу. Построение функций переходов и выходов дискретного преобразователя выполняется аналогично тому, как это делается для граф-схем алгоритмов. Использование в языках типа АЛГОЛ таких средств, как блочная структура, приводит к некоторому усложнению понятия информационного множества, а возможность рекурсивного обращения к процедуре приводит к рассмотрению дискретных преобразователей с бесконечным числом состояний, у которых память организована по типу push-down.

Вычислительные машины и дискретные преобразователи. Понятие «дискретный преобразователь» очень удобно при описании различных процессов переработки информации, происходящих в вычислительной машине. Например, часть устройства управления, реализующая микропрограмму выполнения некоторой операции (скажем, умножения двух чисел), можно рассматривать как дискретный преобразователь информации, который действует на множестве состояний арифметического устройства. Заключительным состоянием является то, в которое переходит устройство управления после окончания выполнения операции.

В процессе выполнения некоторых сложных операций устройство управления может осуществлять обращение к запоминающему устройству и другим внешним устройствам машины. В этом случае состояние операционного автомата должно включать в себя состояния некоторых ячеек памяти, пробивки на перфокартах, установленных на вводных устройствах, и т. д. Если рассматривать процесс выполнения про-

грамм в целом, то в качестве дискретного преобразователя можно выделить все устройство управления и даже весь центральный процессор вычислительной машины. Состояние операционного устройства в этом случае характеризует состояния запоминающих, вводных и выводных устройств, с которыми работает центральный процессор. Заключительное состояние соответствует состоянию центрального процессора, в котором выполнена команда остановки машины.

Получается несколько иная картина, если в качестве дискретного преобразователя рассматривать программу вычислительной машины, а в качестве состояний операционного устройства — состояния той части памяти, на которую воздействует эта программа. В отличие от первого случая здесь в качестве элементарных действий выступают макрооперации вычислительной машины, а не микрооперации.

В работе [3] подробно проанализированы типы операционных автоматов, возникающие при описании в терминах дискретных преобразователей устройств вычислительной машины. При этом оказалось, что операционное устройство вычислительной машины удобно рассматривать как бесконечный автомат специального вида.

3. Системы алгоритмических алгебр

Понятие дискретного преобразователя — удобное средство для описания процесса выполнения алгоритма. Непосредственная связь дискретного преобразователя с его возможной реализацией техническими или программными средствами позволяет формулировать различные критерии и оптимизационные задачи, которые можно решать, выполняя эквивалентные преобразования дискретного преобразователя. Однако чем слабее используемая эквивалентность, тем труднее находить эквивалентные преобразования и выполнять их. Для того, чтобы развить технику проведения достаточно глубоких преобразований, в работе [4] был построен специальный алгебраический аппарат и особый язык для записи операторов, реализуемых дискретными преобразователями и алгоритмами. Основой для таких построений является понятие *о системе алгоритмических алгебр*.

Эта система состоит из двух алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, называемых алгеброй операторов и алгеброй условий соответственно (в работе [4] вместо термина «система алгоритмических алгебр» использован термин *пара микропрограммных алгебр*).

Элементами алгебры $\mathfrak{A}$ являются частичные преобразования информационного множества B, называемые операторами, элементами алгебры $\mathfrak{B}$ — частичные предикаты, определенные на множестве B.

Кроме обычной операции умножения отображений для каждого условия β из $\mathfrak{B}$ в алгебре $\mathfrak{A}$ определяются еще две операции, называемые β-дизъюнкцией и β-итерацией операторов. Результатом β-дизъюнкции $(P \underset{\beta}{\vee} Q)$ двух операторов P и Q является оператор R, такой, что для любого состояния $b \in B$, $bR = bP$, если условие β истинно на состоянии b, $bR = bQ$, если $\beta(b)$ ложно, и, наконец, оператор R считается неопределенным на состоянии b, если $\beta(b)$ не определено Результатом β-итерации $\{P\}_{\beta}$ оператора P является оператор R, такой, что для любого $\beta \in B$, bR принимается равным первому из состояний ряда b, bP, (bP) $P = bP^2$, bP^3, ..., для которого истинно условие β. Если же такого состояния в указанном ряду не окажется, то результат применения оператора R к состоянию b считается неопределенным.

Операциями в алгебре условий $\mathfrak{B}$ служат дизъюнкция, конъюнкция, отрицание и (левое) умножение на операторы из $\mathfrak{A}$. Для первых трех операций пояснения требуют только те ситуации, когда наряду с обычными значениями условий **и**, **л** встречается неопределенное значение **н**. Правила выполнения операций даются в этом случае следующими соотношениями: $\mathbf{и} \wedge \mathbf{н} = \mathbf{н} \wedge \mathbf{и} = \mathbf{н}$, $\mathbf{л} \wedge \mathbf{н} = \mathbf{н} \wedge \mathbf{л} = \mathbf{л}$, $\mathbf{н} \wedge \mathbf{н} = \mathbf{н}$, $\mathbf{и} \vee \mathbf{н} = \mathbf{н} \vee \mathbf{и} = \mathbf{и}$, $\mathbf{л} \vee \mathbf{н} = \mathbf{н} \vee \mathbf{л} = \mathbf{н}$, $\mathbf{н} \vee \mathbf{н} = \mathbf{н}$, $\neg \mathbf{н} = \mathbf{н}$.

Если P — произвольный оператор алгебры $\mathfrak{A}$, β — произвольное условие из $\mathfrak{B}$, а $b \in B$, то результат умножения $P\beta$ есть условие γ, истинное или ложное на состоянии b, в зависимости от того, истинно или ложно условие β на состоянии $c = bP$. Если же последнее состояние не определено или неопределенным на нем является условие γ, то результат применения условия к состоянию b (т. е. $\gamma(b)$) также считается неопределенным. Если в алгебре операторов и алгебре условий зафиксировать некоторые системы образующих (базисные операторы и базисные условия), то элементы каждой из этих алгебр можно задавать выражениями, составленными из образующих и операций системы алгоритмических алгебр. Такие выражения будем называть *регулярными*.

Пусть A — конечный дискретный преобразователь, действующий на множестве B. Сопоставим ему пару алгоритмических алгебр $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ следующим образом: в качестве базисных операторов возьмем элементарные операторы преобразова-

теля A, каждому элементу $x \in X$ поставим в соответствие условие $\mu(b) = x$ и будем считать эти условия базисными. Для простоты базисные операторы обозначим соответствующими символами алфавита Y, а базисные условия — символами алфавита X. Кроме того, если среди элементарных операторов дискретного преобразователя нет тождественного, присоединим его к алгебре операторов и обозначим через ε. Будем считать также, что алгебра операторов содержит пустой (нигде не определенный) оператор, обозначаемый через $\varnothing$, а алгебра условий — тождественно-истинное и тождественно-ложное условие, обозначаемое 1 или 0 соответственно.

Т е о р е м а 1. *Всякий оператор, представленный в конечном дискретном преобразователе A, может быть задан регулярным выражением в алгебре операторов, соответствующей этому преобразователю.*

Пусть A — конечный дискретный преобразователь, который имеет $n+1$ состояние $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, причем a_1 — начальное состояние, а a_{n+1} — заключительное. Введем обозначение: P_i $(i = 1, \ldots, n)$ — оператор, представленный в дискретном преобразователе A, если в качестве начального состояния взять a_i. Перенумеруем все символы выходного алфавита $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ и рассмотрим следующие операторы и условия:

$$\alpha_{ij} = \bigvee_{a_i x = a_j} x \quad (i, j = 1, \ldots, n+1),$$

$$\beta_{ijk} = \bigvee_{\substack{a_i x = a_j \\ \lambda(a_i, x) = y_k}} x \quad (i, j = 1, \ldots, n+1;\ k = 1, \ldots, m),$$

$$P_{ij} = (y_1 \underset{\beta_{ij1}}{\vee} (y_2 \underset{\beta_{ij2}}{\vee} \ldots \underset{\beta_{ijm}}{\vee} (y_m \vee \varnothing) \ldots)).$$

Дизъюнкцию пустого числа условий считаем тождественно-ложным условием. Условие α_{ij} выполняется, когда дискретный преобразователь переходит из состояния a_i в состояние a_j, а условие β_{ijk} выполняется, когда дискретный преобразователь, переходя из состояния a_i в состояние a_j, выдает при этом сигнал y_k. Нетрудно видеть, что так определенные условия и операторы выражаются через базисные, т. е. являются элементами системы алгоритмических алгебр.

Операторы $P_1, \ldots, P_n$, представленные в дискретном преобразователе, удовлетворяют соотношениям:

$$P_i = (P_{i1} P_1 \underset{\alpha_{i1}}{\vee} (P_{i2} P_2 \vee \ldots \underset{\alpha_{in}}{\vee} (P_{in} P_n \vee (P_{i,n+1} \vee \varnothing)) \ldots)) =$$

$$= F_i(P_1, \ldots, P_n) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Если в этих соотношениях заменить операторы P_i символами переменных Y_i, то можно говорить о том, что набор операторов $P_1, \ldots, P_n$ является решением системы уравнений вида:

$$Y_i = F_i(Y_1, \ldots, Y_n) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Система уравнений (1), вообще говоря, может иметь много решений. Однако мы покажем, что $P_1, \ldots, P_n$ является в некотором смысле наименьшим решением и определяется единственным образом. Затем укажем метод нахождения наименьшего решения, при котором компоненты его задаются с помощью выражений в алгебре операторов. Тем самым теорема будет доказана.

На множестве операторов введем отношение частичного порядка, полагая, что $P \leqslant Q$, если Q — продолжение оператора P. Это отношение порядка переносится на n-ки операторов так, что $(P_1, \ldots, P_n) \leqslant (Q_1, \ldots, Q_n)$ тогда и только тогда, когда $P_i \leqslant Q_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Рассмотрим последовательность наборов операторов $\left(Y_i^{(k)}\right)_{i=1,\ldots,n;\ k=1,2,\ldots}$, полагая, что $Y_i^{(1)} = F_1(\varnothing, \ldots, \varnothing) = (P_{i,n+1} \vee \varnothing)$, $Y_i^{(k+1)} = F_i(Y_1^{(k)}, \ldots, Y_n^{(k)})$. Нетрудно видеть, что $Y_i^{(k)} \underset{\alpha}{\leqslant} Y_{i,n+1}^{(k+1)}$, т. е. построенная последовательность является возрастающей. Поэтому можно построить предельный набор операторов Y_i^{∞}, считая, что $Y_i^{\infty}(b)$ определено тогда и только тогда, если существует такое k, что $Y_i^{(k)}(b)$ определено, причем в этом случае $Y_i^{\infty}(b) = Y_i^{(k)}(b)$. Покажем, что $Y_i^{\infty} = P_i$. Это доказательство проводится путем доказательства индукцией по k следующего предложения: $Y_i^{(k)}(b)$ определено тогда и только тогда, когда существует $l \leqslant k$ такое, что $P_i(b)$ определено и результат получается за l шагов работы дискретного преобразователя A из начального состояния a_i. Кроме того, если $Y_i^{(k)}(b)$ определено, то $Y_i^{(k)}(b) = P_i(b)$.

Таким образом, $\left(Y_i^{\infty}\right)_{i=1,\ldots,n}$ является решением системы уравнений (1). Больше того, $\left(Y_i^{\infty}\right)_{i=1,\ldots,n}$ — наименьшее решение системы. Этот факт легко проверяется путем проведения индукцией по k доказательства того, что для любого решения $(Z_i)_{i=1,\ldots,n}$ системы (1) $Y_i^{(k)} \leqslant Z_i$.

Покажем теперь, как находить наименьшее решение системы (1). Для этого достаточно научиться находить наименьшее решение одного уравнения с одним неизвестным вида

$$Y = (\underset{\alpha}{P}Y \vee Q).$$

Это уравнение удобнее рассматривать в виде

$$Y = \underset{\alpha}{(}Q \vee PY),$$

к которому оно легко приводится применением соотношения $\underset{\alpha}{(}P \vee Q) = \underset{\alpha}{(}Q \vee P)$. Наименьшим решением этого уравнения является оператор $Y = \underset{\alpha}{\{}P\}Q$. Действительно, подставляя Y в уравнение, получаем

$$\underset{\alpha}{\{}P\}Q = \underset{\alpha}{(}Q \vee P \underset{\alpha}{\{}P\}Q) = \underset{\alpha}{(}\varepsilon \vee P \underset{\alpha}{\{}P\}) Q = \underset{\alpha}{\{}P\}Q.$$

Пусть Z — любое другое решение этого уравнения. Покажем, что $Y \leqslant Z$. Пусть $Y(b)$ определено, тогда существует такое n, что $\alpha(P^n(b)) = 1$ и $Y(b) = Q(P^n(b))$. Применяя n раз соотношение $Z = \underset{\alpha}{(}Q \vee PZ)$, получим, что $Z = \underset{\alpha}{(}Q \vee P \underset{\alpha}{(}Q \vee \ldots \vee$

$$\vee P \underset{\alpha}{(}Q \vee PZ \ldots)) = \underset{\alpha}{(}Q \vee \underset{P_\alpha}{(}PQ \vee \ldots \vee \underset{P_\alpha^n}{(}P^n Q \vee P^{n+1}Z) \ldots)),$$

откуда $Z(b) = Q(P^n(b))$.

Применяя полученный результат к системе уравнений, наименьшее решение системы можно находить последовательно, исключая неизвестные из уравнений. Существенно, что при исключении переменных уравнения всегда могут быть приведены с помощью соотношений в алгебре операторов к исходной линейной форме, т. е. к виду $Y = \underset{\beta_1}{(}Q_1 Y_1 \vee \underset{\beta_2}{(}Q_2 Y_2 \vee \ldots \vee \underset{\beta_{n+1}}{(}Q_{n+1} \vee$ $\vee \varnothing) \ldots))$. Действительно, если уравнение $Y_i = F_i(Y_1, \ldots$ $\ldots, Y_n)$ не содержит в правой части Y_i (это может быть в случае, если коэффициент при Y_i равен $\varnothing$ или условие $\alpha_{ii} = 0$), то выражение F_i подставляется во все другие уравнения, и затем осуществляется приведение этих уравнений к линейной форме путем применения соотношений:

$$P \underset{\alpha}{(}Q \vee R) = \underset{P\alpha}{(}PQ \vee PR);$$

$$\underset{\alpha\beta}{((}P \vee Q) \vee R) = \underset{\alpha\beta}{(}P \vee \underset{\alpha\beta}{(}Q \vee R)).$$

Если же правая часть уравнения $Y_i = F_i$ содержит переменную Y_i, то это уравнение приводится к виду $Y_i = \underset{\alpha}{(}Q \vee PY_i)$ и решается относительно Y_i. Найденное решение подставляется в остальные уравнения. Нетрудно видеть, что и в этом случае все полученные уравнения приводятся к линейному виду.

Интересно отметить связь теории уравнений в алгебре операторов с теорией уравнений в алгебре событий, которая

рассматривалась в работах [1, 2]. Здесь возникает вопрос о решении системы нелинейных алгебраических уравнений вида

$$Y_i = F_i(Y_1, \ldots, Y_n), \quad i = 1, 2, \ldots$$

и построении теории, аналогичной связывающей контекстно-свободные языки с автоматами типа push-down.

С точки зрения практического применения представляет интерес исследование конкретных систем алгоритмических алгебр, возникающих, например, при проектировании устройства управления вычислительной машины. Одна из таких алгебр была рассмотрена в работе [4]. Найденные в этой алгебре соотношения позволяют проводить достаточно глубокие формальные преобразования алгоритмов, встречающихся в практике проектирования вычислительных машин.

В качестве примера в [4] была рассмотрена следующая задача.

Состояниями операционного автомата служат тройки целых неотрицательных чисел. В качестве элементарных операторов выбираются следующие:

$$O_1 : (a, b, c) \to (o, b, c); \; O_2 : (a, b, c) \to (a, o, c); \; O_3 : (a, b, c) \to (a, b, o).$$

$$s_{12} : (a, b, c) \to (a, a + b, c); \; l_1 : (a, b, c) \to (2a, b, c);$$

$$r_3 : (a, b, c) \to \left(a, b, \frac{1}{2}c\right); \; p_3^{-1} : (a, b, c) \to (a, b, c - 1).$$

Предпоследний оператор r_3 определен только тогда, когда число c четное, а оператор p_3^{-1} — когда число c отлично от нуля. Через α_3 обозначим условие, истинное на состояниях вида (a, b, o) и ложное на всех остальных состояниях, а через β_3 — условие, истинное на состояниях вида $(a, b, 2c)$ и ложное на всех прочих состояниях.

Обозначим через Q оператор $(a, b, c) \to (o, ac, o)$, вычисляющий произведение двух чисел. Непосредственно из определения умножения как последовательного сложения легко получается следующее регулярное выражение для оператора Q:

$$Q = O_2 \underset{\alpha_3}{\{ s_{12} p_3^{-1} \}} O_1 O_3.$$

С помощью системы соотношений алгебры $\mathfrak{A}$, указанной в [4] (эта система включает соотношения $s_{12}^2 l_1 = l_1 s_{12}$, $p_{13}^{-2} r_3 = r_3 p_3^{-1}$

и ряд других, несколько более сложных), выписанное выражение легко преобразуется в следующее:

$$Q = O_2 \{ \underset{\alpha_3\,\beta_3}{(} l \bigvee s_{12} p_3^{-1}) \, l_1 r_3 \} \, O_1 O_3.$$

Это выражение представляет собой, как легко понять, хорошо известный алгоритм позиционного умножения в двоичной системе счисления. Хотя он записывается сложнее, чем первоначальное выражение, однако несравненно эффективнее с точки зрения скорости работы. На вычисление произведения двух чисел a и c затрачиваемое первым алгоритмом число шагов (микротактов) имеет порядок c, а вторым алгоритмом — порядок $[\log_2 c]$.

4. Эквивалентность дискретных преобразователей

Рассмотрение слабой эквивалентности дискретных преобразователей позволяет проводить наиболее глубокие и тонкие преобразования алгоритмов. Особенно большое значение в этой связи имеют развитие техники преобразований в алгоритмических алгебрах и использование этой техники для исследования конкретных алгоритмов с целью получения в некотором смысле наилучших реализаций этих алгоритмов. Однако постановка общих задач для достаточно широких классов дискретных преобразователей, таких, как нахождение полной системы соотношений или получение точных оптимизационных алгоритмов, в рамках слабой эквивалентности встречается с серьезными трудностями. Эти трудности определяются алгоритмической неразрешимостью в общем виде проблемы слабой эквивалентности дискретных преобразователей. Поэтому иногда оказывается целесообразным рассматривать более сильные формы эквивалентности.

Каждый дискретный преобразователь информации представляет собой автомат, и поэтому можно рассматривать отображение, индуцируемое этим автоматом, т. е. отображение множества слов во входном алфавите в множество слов в выходном алфавите. Если два автомата индуцируют одно и то же отображение, то, рассматриваемые как дискретные преобразователи с одной и той же интерпретацией, они будут эквивалентны в слабом смысле. Если учесть при этом роль заключительного состояния, получим определение следующей сильной формы эквивалентности.

Обозначим через $\varphi^*_{(A)}$ сужение отображения φ_A, индуцируемого автоматом A на множество тех слов, которые переводят A из начального состояния в заключительное.

Дискретные преобразователи A_1 и A_2 называются *строго эквивалентными*, если $\varphi^*_{A_1} = \varphi^*_{A_2}$.

Отметим, что понятие строгой эквивалентности дискретных преобразователей не зависит от интерпретации, т. е. от операционного автомата. Поэтому можно говорить о строгой эквивалентности автоматов с заключительным состоянием. Строгая эквивалентность двух автоматов с заключительным состоянием влечет их слабую эквивалентность как дискретных

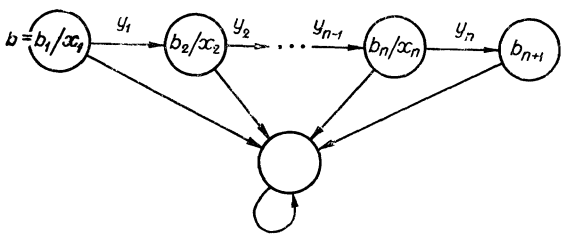


Рис. 2.

преобразователей при любой интерпретации. Нетрудно видеть, что имеет место также и обратное утверждение. А именно: если два автомата с заключительным состоянием слабо эквивалентны как дискретные преобразователи при любой интерпретации, они строго эквивалентны.

Действительно, пусть автоматы A_1 и A_2 слабо эквивалентны при любой интерпретации и $\varphi^*_{A_1}(x_1, \ldots, x_n) = y_1, \ldots, y_n$. То, что при этом и $\varphi^*_{A_2}(x_1, \ldots, x_n) = y_1, \ldots, y_n$, следует из применения автоматов A_1 и A_2 к состоянию b операционного автомата, граф переходов которого представлен на рис. 2.

Таким образом, строгая эквивалентность дискретных преобразователей оказывается самой слабой из всех форм эквивалентностей, которые не зависят от интерпретации. Строгую эквивалентность можно несколько ослабить, если учесть, что при работе дискретного преобразователя с операционным автоматом последовательности входных и выходных сигналов, которыми они обмениваются, не могут быть произвольными. Пару слов (p, q) назовем допустимой для операционного автомата B, если существует дискретный преобразователь A и состояние $b \in B$ такие, что $\varphi_A(q) = p$, $\varphi_b(p) = q$. Очевидно, что, если (p, q) — допустимая пара, то и пара (p', q'), состав-

ленная из начальных отрезков слов p и q одинаковой длины, также будет допустимой. Обозначим через P_B множество всех пар, допустимых для автомата B Для эквивалентности двух дискретных преобразователей A_1 и A_2, действующих на B, достаточно требовать, чтобы φ_{A_1} и $\varphi^*_{A_2}$ были определены и давали одинаковые значения для любого слова p, такого, что хотя бы одна из пар $(p, \varphi^*_{A_1}(p))$ и $(p, \varphi^*_{A_2}(p))$ определена и допустима. В другой форме это условие можно выразить равенством

$$\varphi^*_{A_1} \cap P_B = \varphi^*_{A_2} \cap P_B, \qquad (2)$$

которое мы и примем в качестве определения *относительной строгой эквивалентности* дискретных преобразователей. В этом равенстве подразумевается отождествление отображения φ^*_A с его графиком, т. е. множеством пар слов. Множество P допустимых пар слов можно не связывать с конкретным операционным автоматом и говорить о строгой эквивалентности автоматов (с заключительным состоянием) относительно множества P допустимых пар слов. Очевидно, что строгая эквивалентность автоматов относительно P влечет их слабую эквивалентность как дискретных преобразователей при любой интерпретации, в которой операционный автомат B таков, что $P_B \subset P$.

Эффективность проверки условия (2) зависит от того, каким образом задано множество допустимых пар слов. Поскольку P состоит из пар слов одинаковой длины, то, отождествляя пару $(x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_n)$ со словом $((x_1, y_1) \ldots (x_n, y_n))$ в парном алфавите $X \times Y$, можно рассматривать P и φ^*_A как события. Если при этом P оказывается регулярным, то условие (2) проверяется эффективно. Если P нерегулярно, то, расширяя его, можем перейти к более сильной эквивалентности. Простейший способ определения регулярного множества допустимых пар слов состоит в использовании зависимости на один шаг. Именно для каждой пары (x, y) нужно определить множество $X(x, y)$ тех символов x', которые могут быть значениями $\mu(by)$ $(b \in B)$ при условии, что $\mu(b) = x$.

Семейство $(X(x, y))_{(x,y) \in X \times Y}$ определяет множество допустимых пар вида (pxx', qyy'), где $x' \in X(x, y)$. Использованное в работе Ю. И. Янова [14] понятие распределения сдвигов представляет собой еще более специальный способ задания множества допустимых пар слов, так же как и само понятие равносильности схем алгоритмов сводится к специальному случаю относительной строгой эквивалентности.

Использование относительной строгой эквивалентности позволяет выполнять минимизацию числа состояний дискретных преобразователей информации. Для этого необходимо прежде всего преобразовать автомат A так, чтобы выполнялось условие: $\varphi_A(p)$ определено тогда и только тогда, если $(p,\varphi_A(p))$ образует допустимую пару. Затем функцию выходов $\lambda(a, x)$ можно сделать неопределенной для тех пар (a, x), для которых из состояния ax недостижимо заключительное, и, наконец, выполнить минимизацию числа состояний так, как это делается для частично определенных автоматов. При этом только нужно запретить склеивать с другими заключительное состояние.

Первый этап описанных преобразований называется внесением неопределенности. Для выполнения его можно воспользоваться следующим приемом. Пусть C — $X \times Y$-автомат, представляющий множество допустимых пар множеством $C^* \subset C$ при начальном состоянии $C_0 \subset C$. Рассмотрим $X \times Y$-автомат D, состояниями которого являются пары (a, c), где $a \in A$, $c \in C$. Заключительное состояние получим, объединяя все состояния вида (a^*, c). Функцию переходов определим так: $(a, c)\, x = (ax, c\lambda_C(a, x))$, если $c(x, \lambda_C(a, x)) \in C^*$ и $(a, c)\, x$ не определена в противном случае. Функцию выходов определим, полагая, что $\lambda_D((a, c), x) = \lambda_A(a, x)$, если $(a, c)x$ определено и из него достижимо заключительное состояние, в противном случае $\lambda_D((a, c), x)$ не определено. Очевидно, D и есть автомат, эквивалентный автомату A и обладающий тем свойством, что dp определено тогда и только тогда, когда $(p,\varphi_D(p))$ допустимо.

Другие виды эквивалентности, промежуточные между сильной и слабой формами, можно получать следующим образом. Фиксируем некоторый класс возможных интерпретаций $\mathfrak{B}$ и определяем эквивалентность автоматов относительно класса $\mathfrak{B}$ условием их слабой эквивалентности относительно любой интерпретации этого класса.

Если нас интересует некоторая конкретная интерпретация, т. е. мы рассматриваем эквивалентность дискретных преобразователей относительно данной интерпретации, то эту эквивалентность можно усилить, выделяя какие-нибудь свойства этой интерпретации и переходя к эквивалентности автоматов относительно класса всех интерпретаций, обладающих выделенными свойствами.

С формальной точки зрения для упрощения проведения рассуждений удобно понятие эквивалентности автоматов относительно класса интерпретаций формулировать в несколько иной форме.

Пусть A—X-Y-автомат Мили с заключительным состоянием и пусть B — инициальный Y—X-автомат Мура. Рассмотрим работу автоматов A и B, соединенных между собой так, как показано на рис. 1.

Если функционирование этой системы из двух автоматов прекращается в момент, когда автомат A попадает в заключительное состояние, будем говорить, что автомат A применим к автомату B. В остальных случаях будем считать, что A неприменим к B. Пусть A применим к B и в конце работы с автоматом A B устанавливается в состояние b. Тогда b есть результат применения автомата A к B, обозначим его через $u_A(B)$. Пусть $\mathfrak{B}$—некоторый класс инициальных Y-X-автоматов Мура. Два X-Y-автомата с заключительным состоянием A_1 и A_2 *эквивалентны относительно* $\mathfrak{B}$: $A_1 \sim A_2(\mathfrak{B})$, если для любого $B \in \mathfrak{B}$ $u_{A_1}(B) = u_{A_2}(B)$. Поскольку $u_A(B)$ определено не для всех автоматов B, указанное равенство следует понимать в том смысле, что $u_{A_1}(B)$ определено тогда и только тогда, когда определено $u_{A_2}(B)$ и, в случае, если оба эти выражения определены, их значения совпадают.

Нетрудно видеть, что эквивалентность относительно класса интерпретаций сводится к эквивалентности относительно класса инициальных автоматов.

Действительно, два автомата с заключительным состоянием эквивалентны относительно класса интерпретаций $\mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда они эквивалентны относительно класса $\mathfrak{B}'$ всех инициальных подавтоматов всех автоматов из $\mathfrak{B}$.

При совместной работе автомата A с инициальным автоматом B порождается пара последовательностей (p, q) в алфавитах X и Y, где $p = \varphi_B(q), q = \varphi_A(p)$. При этом, если автоматы A и B работают бесконечно долго, следует рассматривать естественное распространение автоматных отображений на бесконечные последовательности. Компоненты этой пары обозначим через $A(B)$ и $B(A)$, а саму пару — через $S_A(B)$. Таким образом, $S_A(B) = (A(B), B(A))$. Если автомат A применим к B, то $A(B) = \varphi_B(B(A)), B(A) = \varphi^*_A(A(B)), u_A(B) = b_0 A(B)$. Пусть G—Y-автомат, а $\mu : G \to X$. Тогда через G_μ будем обозначать Y-X-автомат Мура с функцией выходов μ. В дальнейшем нам часто придется рассматривать класс автоматов вида G_μ, где G — некоторый фиксированный Y-автомат, а μ пробегает некоторое множество $L \subset X^G$ функций выходов автомата G. Эквивалентность автоматов A_1 и A_2 относительно такого класса будем обозначать выражением $A_1 \sim A_2(G, L)$ и говорить, что A_1 и A_2 эквивалентны относительно G и L.

Если L совпадает с множеством всех функций выходов автомата G, то будем говорить, что A_1 и A_2 эквивалентны относительно G и писать $A_1 \sim A_2\,(G)$.

При рассмотрении различных типов эквивалентности полезно иметь в виду следующее простое предложение.

Если каждый автомат из класса $\mathfrak{B}$ гомоморфен некоторому автомату из класса $\mathfrak{B}'$, то из эквивалентности относительно $\mathfrak{B}'$ следует эквивалентность относительно $\mathfrak{B}$. Действительно, пусть $A_1 \sim A_2\,(\mathfrak{B}')$. Выберем произвольный автомат $B \in \mathfrak{B}$ с начальным состоянием b_0. Он гомоморфен некоторому автомату $B' \in \mathfrak{B}'$ с начальным состоянием b_0'. Пусть γ — соответствующий гомоморфизм. Из эквивалентности A_1 и A_2 относительно $\mathfrak{B}'$ следует, что $b_0 A_1 (B') = b_0 A_2 (B')$. В силу гомоморфизма γ автоматы B и B' индуцируют одно и то же отображение: $\varphi_{B'} = \varphi_B$, поэтому $S_{A_1}(B') = S_{A_1}(B)$, $S_{A_2}(B') = S_{A_2}(B)$, откуда $b_0' A_1(B) = b_0' A_2(B)$. Применяя к этому равенству гомоморфизм γ, получаем $b_0 A_1 (b) = b_0 A_2 (B)$, что и доказывает эквивалентность A_1 и A_2 относительно $\mathfrak{B}$.

Поскольку каждый автомат Мура гомоморфен свободному автомату F_Y с некоторой функцией выходов μ, то в силу доказанного предложения автоматы A_1 и A_2 строго эквивалентны тогда и только тогда, когда они эквивалентны относительно свободного автомата F_Y, и строго эквивалентны относительно множества P_B пар слов, допустимых для операционного автомата B, тогда и только тогда, когда $A_1 \sim A_2\,(F_Y, L)$, где L — множество всех таких функций выходов μ, что автомат $(F_Y)_\mu$ гомоморфно отображается на некоторый инициальный подавтомат $B\,(b)$ операционного автомата B.

Система элементарных операторов дискретного преобразователя порождает полугруппу G преобразований множества состояний операционного автомата B — полугруппу, которой принадлежит автомат B. Эта полугруппа должна рассматриваться вместе с выделенной системой образующих Y. Одна из важных форм эквивалентности может быть задана как эквивалентность относительно класса всех интерпретаций (операционных автоматов), принадлежащих полугруппе G (рассматриваемой как абстрактная полугруппа с выделенной системой образующих Y). Присоединяя, если нужно, к G единицу и принимая ее в качестве начального состояния, множество G можно рассматривать как Y-автомат, если функцию переходов определять как правое умножение. Рассмотренную эквивалентность можно определить тогда как эквивалентность относительно автомата G и множества L всех возможных его функций выходов. Действительно, автомат G гомоморфно отобра-

жается на любой связный подавтомат любого Y-автомата, принадлежащего полугруппе G. Эту эквивалентность можно несколько ослабить, ограничивая класс функций выходов только такими функциями μ, что существует гомоморфизм X—Y-автомата G_μ на некоторый инициальный подавтомат операционного автомата B. В таком случае необходимым и достаточным условием эквивалентности дискретных преобразователей A_1 и A_2 является равенство $A_1(B(b)) = A_2(B(b))$ как слов в полугруппе G для любого состояния b операционного автомата.

Вместо полугруппы G можно брать любое ее гомоморфное расширение. При этом будут получаться более сильные формы эквивалентности.

Другим важным типом эквивалентности является *функциональная эквивалентность*. Эта эквивалентность использует в качестве информации об операционном автомате B только то, что его память имеет структуру, представленную с помощью переменных. Иначе говоря, задано некоторое множество R переменных и множество M возможных значений этих переменных. Состояние операционного автомата B — это набор $b : R \to M$ значений всех переменных из множества R (т. е. $b(r) \in M$ — значение переменной r при заданном состоянии памяти b). Элементы множества R — это ячейки оперативной памяти, если речь идет о программах вычислительной машины, или регистры операционного устройства, если речь идет о микропрограммах, заданных дискретными преобразователями, действующими на B.

На множестве M задается система Ω операций и система Π предикатов различных арностей.

Элементарные преобразования $f_y(y \in Y)$ дискретного преобразователя задаются выражениями вида $y = (r_1 := t_1; \ldots; r_n := t_n)$ (операторы присваивания), где r_i — переменная; t_i — терм, построенный из переменных множества R и операций множества Ω. Некоторые выражения вида $y = (r_1 := t_1; \ldots; r_n := t_n)$ выбираются в качестве элементов множества Y. Функции переходов и выходов дискретных преобразователей, действующих на множестве B, определяются с помощью элементарных условий, т. е. выражений вида $\pi(t_1, \ldots, t_n)$, где π — символ предиката из Π, $t_1, \ldots, t_n$ — термы. Именно выбирается некоторый набор элементарных условий $\pi_1(t_{11}, \ldots, t_{1n_1}), \ldots, \pi_m(t_{m1}, \ldots, t_{mn_m})$, и элементами входного алфавита X объявляются наборы значений этих условий, т. е. выход x операционного автомата в состоянии b равен $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, где $\alpha_i = \pi_i(b(t_{i1}), \ldots, b(t_{in_i}))$, $i = 1, \ldots, m$ (значение $b(t)$ терма t

в состоянии b определяется через значения переменных: $b(\omega t_1, \ldots, t_n) = \omega((bt_1) \ldots (bt_n))$.

Функциональная эквивалентность получается, если в качестве интерпретаций рассмотреть класс $\mathfrak{B}$ всех операционных автоматов, которые получаются путем выбора: множества M, интерпретации символов алфавита Ω как операций на M, интерпретации предикатных символов алфавита Π как предикатов на M.

Функциональная эквивалентность играет важную роль в программировании и микропрограммировании, поскольку именно в рамках этой эквивалентности решаются задачи экономии рабочей памяти, совмещения операций (если применять групповые операторы присваивания, т. е. такие операторы, которые меняют одновременно значения нескольких переменных) и др.

Понятие функциональной эквивалентности близко к понятию эквивалентности операторных алгоритмов, сохраняющей так называемые S-представления, которая рассматривалась в работе А. П. Ершова [8]. Там же отмечалась важность изучения такой эквивалентности с точки зрения приложений к программированию.

Выражение $y = (r_1 := t_1; \ldots; r_n := t_n)$ определяет эндоморфизм g_y свободной универсальной Ω-алгебры T_R (алгебры термов), порожденной множеством R, действующий по формуле $g_y(r_i) = t_i$. Обозначим через G полугруппу всех эндоморфизмов алгебры T_R, а через G_Y — ее подполугруппу, порожденную эндоморфизмами, соответствующими символам алфавита Y. К G_Y всегда присоединяется тождественный эндоморфизм g_0. Рассматривая G_Y как Y-автомат с начальным состоянием g_0, легко показать, что X-Y-автоматы функционально эквивалентны тогда и только тогда, когда они эквивалентны относительно полугруппы G_Y и множества L допустимых функций выходов. При этом допустимыми считаются функции выходов μ, обладающие следующим свойством: пусть $\mu(g) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $\mu(g') = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_m)$, тогда, если $g(t_{i1}) = g'(t_{i1}), \ldots, g(t_{in_i}) = g'(t_{in_i})$, то $\alpha_i = \alpha'_i$.

В связи с понятием функциональной эквивалентности возникает следующая проблема: задан алфавит Y, набор элементарных условий, порождающих алфавит X, и два конечных X-Y-автомата. Требуется определить, будут ли эти автоматы функционально эквивалентны.

Этот вопрос был исследован в работе [11]. Оказалось, что общая проблема функциональной эквивалентности алгоритмически неразрешима.

В связи с этим возникает вопрос об отыскании разрешимых случаев функциональной эквивалентности. При этом классификацию можно проводить, во-первых, по алфавиту R и сигнатурам Ω и Π, во-вторых, по алфавиту Y и набору элементарных условий.

Полную классификацию по сигнатурам Ω и Π дает

Т е о р е м а 2. *При фиксированных сигнатурах* Ω и Π *и алфавите* R *проблема функциональной эквивалентности конечных* X-Y-*автоматов неразрешима тогда и только тогда, когда* R *содержит по крайней мере два символа переменных,* Ω *— по крайней мере один функциональный символ арности больше нуля,* Π *— по крайней мере один символ предиката арности больше нуля.*

Достаточность доказывается рассмотрением проблемы функциональной эквивалентности X-Y-автоматов для $R = \{r, s\}$, $Y = \{r := \omega(r),\ s := \omega(s),\ r := s\}$ и элементарных условий $\pi(r)$ и $\pi(s)$. Уже для этого случая проблема функциональной эквивалентности неразрешима. Доказательство проводится путем построения автомата, распознающего протокол машины Тьюринга. (Такое доказательство проще, чем в [11], и по идее очень близко к доказательству неразрешимости проблемы эквивалентности двухголовочных односторонних машин [15].)

Необходимость получается рассмотрением следующих случаев:

1) R содержит только один символ. Тогда полугруппа G_Y является свободной с правыми нулями (нульарные операции), L состоит из всех допустимых функций выходов (следует лишь предположить, что все элементарные условия различны). Этот случай разрешим в силу результатов работы [13].

2) Ω содержит только нульарные операции. Тогда автомат G_Y конечен. Проблема решается перебором.

3) Π содержит только нульарные предикаты, множество L конечно. Проблема решается перебором.

С получением более тонкой классификации разрешимых случаев интересно рассмотреть проблему функциональной эквивалентности для случая, когда элементарные условия таковы, что множество L допустимых функций выходов совпадает с множеством всех функций выходов. (Это возможно, например, когда каждое из условий зависит от всех переменных.)

Приходим к рассмотрению проблемы эквивалентности относительно конечно-порожденных подполугрупп полугруппы эндоморфизмов свободной универсальной Ω-алгебры. Приме-

ром теорем, устанавливающих разрешимость проблемы функциональной эквивалентности, может служить

Теорема 3. *Пусть Y состоит из выражений вида $y = (r := t,)$ где терм t зависит от переменной r, а множество допустимых функций выхода состоит из всех функций выхода. Тогда проблема эквивалентности относительно полугруппы G_Y (рассматриваемой как Y-автомат) разрешима.*

Доказательство этой теоремы так же, как и ряда других утверждений о разрешимости, связанных с функциональной эквивалентностью, содержится в [12].

5. Эквивалентность автоматов с заключительным состоянием относительно автомата без циклов

В этом разделе рассмотрим один общий тип эквивалентности, который достаточно хорошо поддается изучению. Это — эквивалентность относительно инициального Y - автомата G и множества всех его функций выходов. Автомат G предполагается всюду определенным и не имеющим циклов, т. е. G удовлетворяет условию: если $gq_1q_2=g$, то $gq_1=g$ для любых слов q_1 и q_2 в алфавите Y.

Основной вопрос — сравнение и оптимизация автоматов по быстродействию, эквивалентность относительно автомата без циклов. Для упрощения обозначений вместо автомата G_μ будем говорить о самой функции $\mu : G \to X$. Например, вместо применения A к G_μ будем говорить о применении A к μ, вместо выражений $S_A(G_\mu)$ и $A(G_\mu)$ будем употреблять обозначения $S_A(\mu)$ и $A(\mu)$.

Пусть A — произвольный X-Y-автомат с заключительным состоянием. Через M_A будем обозначать множество всех функций выходов μ, к которым применим автомат A. Для каждого $\mu \in M_A$ определим $T_A(\mu)$ как длину слова $A(\mu)$. Пусть далее $\mathfrak{A}$ — класс автоматов, эквивалентных автомату A относительно произвольного Y-автомата G и множества L функций выходов. Введем в этом классе отношение квазипорядка, считая, что $A_1 \leqslant A_2$, если $T_{A_1}(\mu) \leqslant T_{A_2}(\mu)$ для всех $\mu \in M_{A_1}=M_{A_2}$. Отношение $\leqslant$ дает возможность сравнивать автоматы по быстродействию. Если $A_1 \leqslant A_2$, то быстродействие автомата A_1 не меньше, чем быстродействие A_2. Разумеется, могут быть пары автоматов, не сравнимые по быстродействию. Будем говорить, что автоматы A_1 и A_2 эквивалентны по быстродействию, если $A_1 \leqslant A_2$ и $A_2 \leqslant A_1$, т. е. $T_{A_1}=T_{A_2}$. Классы эквивалентных по быстродействию автоматов образуют частично упорядоченное множество. Автомат A назовем наилучшим по быстродействию, если класс эквивалентных с ним по быстродействию авто-

матов является наименьшим элементом этого множества. Если класс эквивалентных A по быстродействию автоматов — минимальный элемент, то A назовем тупиковым. Вообще говоря, класс $\mathfrak{A}$ может не иметь тупиковых, а тем более наилучших по быстродействию автоматов.

Основной результат, который мы получим, формулирует

Теорема 4. *В классе автоматов, эквивалентных автомату A относительно вполне определенного автомата G без циклов и множества $L=X^G$ всех его функций выходов, существует наилучший по быстродействию автомат A_0.*

Подробное доказательство этой теоремы изложено в [10]. Здесь приведем только общий план и основные идеи рассуждений.

При исследовании эквивалентности автоматов относительно G и L очень полезным оказывается следующее наглядное представление о работе автомата A с автоматом G_μ. Представим себе граф переходов автомата G и допустим, что автомат A может перемещаться по вершинам этого графа. Выбор конкретной функции выходов μ автомата G соответствует отметке вершин графа переходов автомата G символами алфавита X. В начальный момент времени автомат A находится в начальном состоянии a_0, будучи помещен в вершину, соответствующую начальному состоянию g_0 автомата G. A воспринимает отметку этого состояния $\mu(g_0)=x$, переходит в состояние a_0x и выдает на выходе сигнал $\lambda(a_0, x)=y$. Эту ситуацию можно интерпретировать как перемещение автомата A из вершины g_0 в вершину g_0y. Далее все повторяется аналогичным образом. Автомат A передвигается по вершинам графа переходов автомата G до тех пор, пока не попадет в заключительное состояние a^*. Вершина графа G, в которой находится A в этот момент времени, и есть результат его работы $u_A(\mu)$.

В рассматриваемой нами ситуации, когда граф автомата G не имеет циклов (кроме единичных, поскольку случай $gy=g$ не исключается), важную роль играет тот факт, что A не может возвращаться в вершины, которые он оставил. Другое важное обстоятельство состоит в том, что функция μ может быть произвольной, в любой момент времени на вход автомата A может поступить любой символ x независимо от предыстории его движения.

Пусть $\sigma \in G \times X$ — конечное множество пар (g, x). Обозначим через W_σ множество всех функций $\mu \in X^G$, которые обладают тем свойством, что $\mu(g)=x$ для каждой пары $(g,x) \in G \times X$, иными словами, $W_\sigma = \{\mu \in X^G \mid \sigma \subset \mu\}$ (здесь μ отождествляется со своим графиком). Нетрудно видеть, что $W_\sigma \neq \varnothing$ тогда и только тогда,

если для каждого g существует не более одного x такого, что $(g, x) \in \sigma$, т. е. σ является частичным отображением с конечной областью определения. Если $\sigma_1, \sigma_2 \in G \times X$, то $W_{\sigma_1} \cap W_{\sigma_2} = W_{\sigma_1 \cup \sigma_2}$. Поэтому множества W_σ можно выбрать в качестве базиса открытых множеств топологии в X^G. Для любой пары слов $(p, q) = (x_1 \ldots x_n\ (y_1 \ldots y_n) \in F_X \times F_Y$. Обозначим через $\sigma(p,q)$ множество $\{(g_0 y_1, \ldots, y_i, x_{i+1})\}_{i=0,\ldots,n-1}$.

Открытые множества вида $W_{\sigma(p,q)}$ играют особую роль; примем для них более простое обозначение — $W_{p,q}$. Множество G будем рассматривать так же, как топологическое пространство, наделенное дискретной топологией. Отображение $u : M \to G$, где $M \in X^G$, будет тогда непрерывным на M, когда для любого $g \in G$, $u^{-1}(g)$ открыто в M, рассматриваемом как подпространство пространства X^G. В частности, для любого автомата A отображение u_A: $M_A \to G$ всегда непрерывно, так как имеет место равенство $u_A^{-1}(g) = M_A \cap \bigcup\limits_{\substack{(p,q) \in \Phi_A^* \\ g_0 q = g}} W_{p,q}$, а область определения M_A отображения u_A является открытым множеством, поскольку

$$M_A = \bigcup_{(p,q) \in \Phi_A^*} W_{p,q}.$$

Пусть u — отображение множества $M \subset X^G$ в G. Состояние $g \in G$ назовем существенным для отображения u, если существуют функции μ' и μ'', которые отличаются значениями только в точке g, и такие, что $u(\mu') \neq u(\mu'')$, — более точно, одно из отображений μ' или μ'' принадлежит множеству M, а другое не принадлежит или оба принадлежат множеству M, но $u(\mu') \neq u(\mu'')$. В [13] показано, что, если M открыто в X^G, u — непрерывное отображение M в G, μ' и μ'' отличаются только в несущественных для отображения u точках, то $u(\mu') = u(\mu'')$.

Из этого следует, что для любого автомата A, если μ' и μ'' отличаются только в состояниях, несущественных для отображения u_A, $u_A(\mu') = u_A(\mu'')$.

Рассмотрим движение автомата A по вершинам графа переходов автомата G без циклов. Пусть в некоторый момент времени автомат A попал в вершину g, выдав к этому моменту времени слово $q (g = g_0 q)$ и получив при этом на вход слово p (рис. 3).

Начиная с этого момента, автомат A будет двигаться только внутри подавтомата H автомата G, порожденного состоянием g. Отображение v, которое реализуется автоматом A, начиная

с этого момента, является сужением отображения u_A на множество $W_{p,q} \cap M_A$ и зависит только от значений функции μ на подавтомате H. Поэтому все существенные состояния отображения v, через которые автомат A еще не проходил, находятся в H.

Поскольку автомат G не имеет циклов, его состояния частично упорядочены отношением $g' \leqslant g''$, означающим, что существует слово q, такое, что $g'q = g''$. Покажем, что среди существенных состояний отображения v, содержащихся в H, существует наименьшее (если, конечно, это множество не пустое). Действительно, допустим (рис. 4), что отображение v имеет в H два различных минимальных существенных состо-

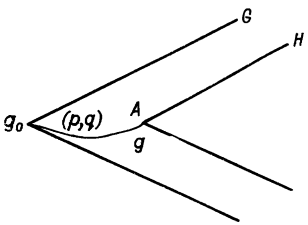


Рис. 3.

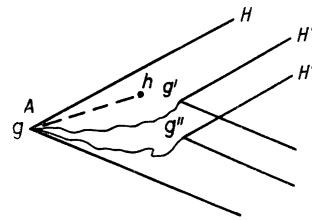


Рис. 4.

яния (в точности два, случай большего числа минимальных существенных состояний рассматривается аналогично).

В дальнейшем поведении автомата A существуют четыре возможности:

I. Автомат A никогда не попадает ни в область H' (подавтомат, порожденный состоянием g'), ни в область H'' (подавтомат, порожденный состоянием g'').

II. Автомат A попадает в область H' раньше, чем в область H''.

III. Автомат A попадает в область H'' раньше, чем в область H'.

IV. Автомат A попадает одновременно в области H' и H''.

Первый вариант сразу же можно отбросить. Действительно, предположим, что автомат A остановится в точке h, т. е. он применим к μ и $v(\mu) = h$. Поскольку g' — существенная точка, существуют отображения μ' и μ'', которые отличаются в точке g', и такие, что $v(\mu') \neq v(\mu'')$. μ' и μ'' можно выбирать, заставляя их принимать значения на несущественных состояниях произвольным образом, в частности, на траектории движения A к h их можно сделать совпадающими с μ. Тогда получится, что $v(\mu') = v(\mu'') = h$, что противоречит допущению.

Если автомат A попадает в область H' раньше, чем в область H'', то он никогда не достигнет состояния g''. Снова выберем

отображения μ' и μ'', которые отличаются только в состоянии g'', и такие, что $v(\mu') \neq v(\mu'')$. Снова μ' и μ'' можно выбрать такими, чтобы на траектории движения автомата A к области H' они принимали те же значения, что и заданное отображение μ. Поэтому как для μ'', так и для μ' автомат A войдет в область H' раньше, чем в область H''. A не достигает состояния g'' и поэтому $v(\mu') \neq v(\mu'')$, что противоречит допущению. Аналогичным образом отбрасываются третий и четвертый варианты. Приходим к выводу, что среди существенных состояний всегда имеется наименьшее. Нетрудно видеть, что автомат A обязательно должен попасть при своем движении в наименьшее существенное состояние. Если же A всегда движется к наименьшему

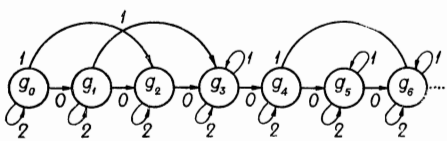


Рис. 5.

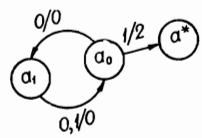


Рис. 6.

существенному состоянию кратчайшим путем, то, очевидно, он и будет наилучшим по быстродействию. Такой автомат всегда существует, но, разумеется, он не обязан быть конечным.

Простой пример показывает, что конечного наилучшего по быстродействию автомата, эквивалентного конечному автомату, может не существовать. Действительно, пусть A имеет граф переходов, изображенный на рис. 5, $X = \{0,1\}$, $Y = \{0,1,2\}$, функция переходов автомата G определена так, что $g_i 0 = g_i$, $g_i 1 = g_{i+2}$, если i есть полный квадрат, и $g_i 1 = g_i$ в противном случае, $g_i 2 = g_i$. Пусть автомат A вычисляет функцию $u_A(\mu) = g_i$, где i — наименьшее четное число такое, что $\mu(g_i) = 1$. Автомат A можно сделать конечным, например, как показано на рис. 6.

Ясно, что этот автомат не наилучший по быстродействию. В то же время наилучший по быстродействию автомат должен выдавать на выходе сигнал 1 тогда и только тогда, когда на его вход подана последовательность 0^n, где n — полный квадрат. Как известно, такой автомат не может быть конечным.

В связи с рассмотренным примером естественно возникает вопрос о том, при каких условиях наилучший по быстродействию автомат, эквивалентный конечному автомату A, может быть конечным. Частичный ответ на этот вопрос дает

Т е о р е м а 5. *Пусть G — полугруппа с неразложимой единицей ε ($\varepsilon = gh \Rightarrow g = h = \varepsilon$), в которой выполняется закон*

левого сокращения ($gh' = gh'' \Rightarrow h' = h''$), *$Y$ принадлежит G и G рассматривается как Y-автомат, в котором функция переходов определяется как правое умножение на элементы множества Y, а начальное состояние $g_0 = \varepsilon$. Тогда в классе всех $X - Y$-автоматов с заключительным состоянием, эквивалентных конечному автомату A, существует конечный, наилучший по быстродействию автомат A_0.*

Доказательство этой теоремы.

Из условий, наложенных на полугруппу G (закона левого сокращения), следует, что все инициальные подавтоматы ее изоморфны.

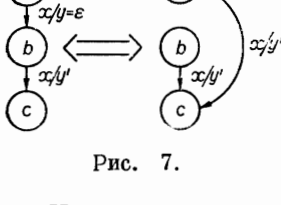


Рис. 7.

Действительно, пусть g' и $g'' \in G$. Изоморфизм между подавтоматами $g'G$ и $g''G$ (правые идеалы полугруппы G) устанавливается отображением $\gamma(g'g) = g''g$, которое назовем каноническим изоморфизмом.

Из неразложимости единицы и левого сокращения следует, что автомат G не имеет циклов ($gq_1q_2 = g \Rightarrow q_1q_2 = \varepsilon \Rightarrow q_1 = q_2 = \varepsilon \Rightarrow gq_1 = g$). Поэтому наилучший по быстродействию автомат, эквивалентный автомату A, существует и характеризуется тем, что передвижение из одного существенного состояния в другое осуществляет за кратчайшее число шагов.

Рассмотрим некоторые эквивалентные преобразования автомата A.

1. Устранение единицы. Это преобразование можно объяснить с помощью рис. 7. Оно состоит в том, что если в графе переходов автомата A имеется фрагмент, изображенный в левой части рисунка, то автомат A', граф переходов которого получается заменой левого фрагмента на правый, эквивалентен автомату A относительно G, и наоборот.

2. Преобразование линейных участков изображено на рис. 8 Отсутствие входных символов на стрелках означает, что переход из состояния a_i в состояние a_{i+1} (a_i в a'_{i+1}) выполняется при любых входных сигналах и независимо от них на выходе всегда выдается один и тот же выходной сигнал y_i. Кроме того, предполагается, что в автомате A нет непосредственных переходов в состояние a_{i+1} из состояний, отличных от a_i ($i = 1, \ldots, n-1$). Таким образом, это преобразование меняет линейные участки графа переходов автомата A. Оно

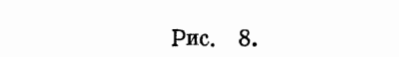


Рис. 8.

будет сохранять эквивалентность автоматов, если слова $y_1, \ldots, y_n$ и $y_1', \ldots, y_{n'}$ равны в полугруппе G.

3. Изменение переходов (рис. 9).

Обозначим через A' автомат, полученный из A путем замены левого фрагмента рисунка на правый. Пусть A'' — автомат, полученный из A заменой левого фрагмента на фрагмент, представленный на рис. 10. Условие применимости изменения переходов состоит в том, что подавтоматы $A'(a)$ и $A''(a)$ автоматов A' и A'' эквивалентны, т. е. из эквивалентности автоматов $A'(a)$ и $A''(a)$ следует эквивалентность автоматов A и A'. Покажем это.

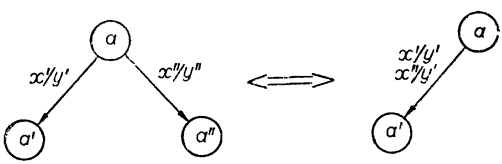


Рис. 9.

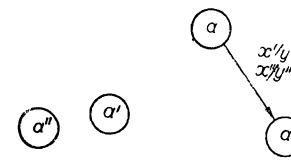


Рис. 10.

Рассмотрим сначала случай, когда в автомате A нет циклов, проходящих через состояние a, т. е. $aq = a \Rightarrow q = e$. Тогда $A'(b) \sim A''(b) \sim A(b)$, $A'(c) \sim A''(c) \sim A(c)$ (эти подавтоматы даже изоморфны). Выберем произвольную функцию выходов μ автомата G и рассмотрим движение автоматов A и A' по графу переходов автомата G при работе с отображением μ. До тех пор, пока оба автомата не попадут в состояние a, они ведут себя совершенно одинаково и, если попадания в состояние a не происходит, результаты их работы совпадают, т. е. $u_A(\mu) = u_{A'}(\mu)$. Допустим, что в некоторый момент времени оба автомата попали в состояние a и находятся в точке g. Начиная с этого момента, работают подавтоматы $A(a)$ и $A'(a)$. Если $\mu(g) \neq x''$, то, в силу предположения об отсутствии циклов, проходящих через a, автоматы $A(a)$ и $A'(a)$ работают одинаково и $u_A(\mu) = u_{A'}(\mu)$. Если же $\mu(g) = x''$, то, как нетрудно видеть, $u_A(\mu) = (gy'')\, u_{A(b)}(\nu) = (gy'')\, u_{A''(b)}(\nu) = g u_{A''(a)}(\nu') = g u_{A'(a)}(\nu') = u_{A'}(\mu)$, где ν — функция выходов автомата G, которая получается перенесением с помощью канонического изоморфизма ограничения функции μ на подавтомат $(gy'')G$ автомата G, порожденный состоянием gy'', т. е. $\nu(h) = \mu((gy')h)$, функция ν' получается таким же образом из подавтомата gG.

Отбросим теперь предположение о том, что в A нет циклов, проходящих через a. Рассмотрим автомат C, состояниями которого являются пары (α, n), где $\alpha \in A$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Начальное состояние $(a_0, 0)$. Заключительное состояние a^* по-

лучается путем отождествления всех пар вида (a^*, n) $(n=0,1,2,...)$. функцию переходов автомата C определим равенствами $(\alpha, n)\ x=(\alpha x, n)$, если $\alpha x \neq a$, $(\alpha, n)x = (\alpha x,\ n+1)$, если $\alpha x = a$. Очевидно, автомат C строго эквивалентен автомату A, но для любого $n = 1,2,\ldots$ не имеет циклов, проходящих через состояния (a, n), и к каждому фрагменту, состоящему из состояний (a, n), (b, n), (c, n), применимо изменение переходов (если $a = b$, то вместо (b, n) следует взять $(b, n+1)$, аналогично для $a = c$). Построим последовательность автоматов C_0, C_1, C_2, ... C_0 получается изменением переходов в состоянии $(a, 0)$ C_{n+1} — из C_n изменением переходов в состоянии $(a, n+1)$. Все автоматы C_i эквивалентны (относительно G) между собой и эквивалентны автомату A. Построим теперь автомат C_∞, полагая $\delta_{C_\infty}((a, n), x) = \delta_{C_n}((a, n), x)$. Легко видеть, что автомат C_∞ эквивалентен автомату C. Все состояния автомата C вида (α, n) при $n = 0, 1, 2\ldots$ строго эквивалентны, поэтому их можно отождествить. Автомат, полученный в результате отождествления, изоморфен автомату A'.

Поэтому A и A' эквивалентны относительно G.

Состояние a автомата A назовем существенным, если существуют μ' и μ'', которые совпадают во всех точках, кроме ε, и такие, что $u_{A(a)}(\mu') \neq u_{A(a)}(\mu'')$. Нетрудно видеть, что если в некоторый момент времени A находится в существенном состоянии a, а G в состоянии g, то g является существенным состоянием для отображения v, реализуемого автоматом A, начиная с этого момента.

Будем говорить, что автомат A имеет ветвление (слияние) в состоянии a, если существуют такие x_1 и x_2 (такие $a_1 \neq a_2$ и такие x_1 и x_2), что $ax_1 \neq ax_2$ или $\lambda(a, x_i) \neq \lambda(a, x_2)$ $(a_1x_1 = a_2x_2 = a)$. Пусть автомат A имеет ветвления и слияния только в существенных состояниях и, кроме того, сигнал ε выдает на выходе разве что при переходе в заключительное состояние $(\lambda(a, x) = \varepsilon \Rightarrow ax = a^*)$. Тогда этот автомат можно преобразовать в наилучший по быстродействию автомат, применяя минимизацию длин выходных слов на линейных участках графа переходов. Для этого достаточно воспользоваться преобразованием линейных участков (2). Действительно, такой автомат будет передвигаться от одного существенного состояния автомата G к другому по кратчайшему пути. Таким образом, для построения наилучшего по быстродействию автомата достаточно уметь устранять ветвления и слияния в несущественных состояниях и устранять на выходе сигнал ε. Устранение ε легко выполняется с помощью первого преобразования, устранение ветвления в несущественной точке — с помощью изменения пе-

реходов для случая, когда состояние a несущественно (см. рис. 9).

Действительно, пусть состояние a несущественно и в A имеется фрагмент левой части рис. 9. Тогда автоматы $A'(a)$, $A''(a)$ эквивалентны. Это очевидно, если в A нет циклов, проходящих через состояние a. Если же такие циклы не исключаются, то для доказательства эквивалентности автоматов $A'(a)$ и $A''(a)$ следует применить прием, аналогичный использован-

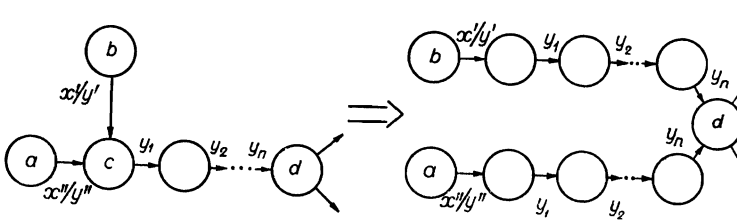


Рис. 11.

ному при доказательстве эквивалентности автоматов A и A'. Применяя изменение переходов, устраняем ветвление в состоянии a.

Устранение слияний в несущественных состояниях следует проводить после устранения ветвлений. Выполняется это с помощью преобразования, сохраняющего даже строгую эквивалентность (рис. 11. Здесь d — ближайшее существенное состояние к несущественному состоянию c).

Применяя метод построения наилучшего по быстродействию автомата, использованный для доказательства предыдущей теоремы, можно получить следующее условие разрешимости проблемы эквивалентности конечных автоматов.

Теорема 6. *Пусть G — полугруппа с левым сокращением и неразложимой единицей, порожденная конечным множеством Y. Тогда, если в полугруппе G разрешима проблема тождества слов, разрешима проблема и эквивалентности конечных X-Y - автоматов относительно Y - автомата G.*

Существование алгоритма, который решает проблему эквивалентности, вытекает из следующих соображений. Если автоматы A_1 и A_2 не имеют ветвлений в несущественных состояниях, то их эквивалентность устанавливается следующим образом. Выберем для каждого слова q в алфавите Y некоторым стандартным образом эквивалентное ему в полугруппе слово $\alpha(q)$ наименьшей длины. Если в G разрешима проблема тождества слов, функция $\alpha(q)$ может быть сделана конструктивной (если, например, в качестве $\alpha(q)$ брать первое в лексикографическом

порядке слово, эквивалентное слову q). Построим для каждого из автоматов A_1 и A_2 эквивалентный, наилучший по быстродействию. Пусть это будут автоматы A_1' и A_2'. Построение может быть сделано конструктивно, поскольку, как было показано раньше, для автоматов, не имеющих ветвлений в несущественных точках, оптимизация осуществляется путем устранения слияний (преобразование, сохраняющее строгую эквивалентность) и минимизации длин выходных слов на линейных участках. Если при этом в качестве слова минимальной длины, соответствующего слову q, выбирать каждый раз слово $\alpha(q)$, получим, что A_1 и A_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда A_1' и A_2' строго эквивалентны. Тройку (a, x_1, x_2), где $a \in A$, $x_1, x_2 \in X$, назовем ветвлением в автомате A, если $ax_1 \neq ax_2$ или $\lambda_A(a, x_1) \neq \lambda_A(a, x_2)$. Назовем весом автомата A число ветвлений в этом автомате.

Покажем, что задача распознавания эквивалентности автоматов A_1 и A_2 с весом, не превосходящим $n > 0$, сводится к задаче распознавания эквивалентности автоматов с весом, строго меньшим n, и к задаче распознавания эквивалентности автоматов, которые не имеют ветвлений в несущественных состояниях. Действительно, для того, чтобы сравнить автоматы A_1 и A_2, достаточно построить эквивалентные им наилучшие по быстродействию автоматы A_1' и A_2', выбрав в качестве кратчайшего представителя класса эквивалентности слова q слово $\alpha(q)$, и затем проверить их строгую эквивалентность. Единственным неконструктивным шагом в этом построении является распознавание применимости изменения переходов (преобразование 3). Но это распознавание состоит в проверке эквивалентности подавтоматов $A'(a)$ и $A''(a)$, которые имеют вес строго меньший чем вес автомата A. Наконец, распознавание эквивалентности автоматов с нулевым весом сводится к решению проблемы равенства слов в полугруппе G.

Отметим, что алгоритм, полученный из доказательства теоремы 6, дает очень высокую верхнюю оценку меры сложности распознавания эквивалентности двух автоматов (по числу операций, которые необходимо выполнить для проверки эквивалентности). Эта оценка дает по крайней мере экспоненциальный рост числа операций в зависимости от числа состояний сравниваемых автоматов. В то же время для некоторых конкретных полугрупп с левым сокращением и неразложимой единицей эта оценка может быть существенно улучшена. В частности, для свободных коммутативных полугрупп [16] и для полугрупп, исследованных в [12], можно получить степенную оценку числа операций.

В последнее время были получены новые результаты по исследованию алгоритмической разрешимости проблемы эквивалентности автоматов относительно полугрупп. М. А. Тайцлин, исследовал проблему эквивалентности относительно коммутативных полугрупп*, А. А. Летичевский рассмотрел проблему эквивалентности для полугрупп с сокращением и некоторых классов групп**.

Литература

1. Боднарчук В. Г. Метрическое пространство событий. I. — Кибернетика, 1965, № 1.
2. Боднарчук В. Г. Метрическое пространство событий. II — Кибернетика, 1965, № 4.
3. Глушков В. М. Теория автоматов и вопросы проектирования структур цифровых машин. — Кибернетика, 1965, № 1.
4. Глушков В. М. Теория автоматов и формальные преобразования микропрограмм. — Кибернетика, 1965, № 5.
5. Глушков В. М. К вопросу минимизации микропрограмм и схем алгоритмов. — Кибернетика, 1966, № 5.
6. Глушков В. М. Об определяющих соотношениях в двухсумматорном операционном устройстве. — Кибернетика, 1968, № 1.
7. Глушков В. М. Абстрактная теория автоматов. — Усп. матем. наук, 1961, № 5.
8. Ершов А. П. Операторные алгоритмы. II. — Проблемы кибернетики, 1962, № 8.
9. Летичевский А. А. Эквивалентность автоматов с заключительным состоянием. I. — Кибернетика, 1966, № 4.
10. Летичевский А. А. Эквивалентность автоматов с заключительным состоянием. II. — Кибернетика, 1967, № 1.
11. Летичевский А. А. Функциональная эквивалентность дискретных преобразователей I. — Кибернетика, 1969, № 2.
12. Летичевский А. А. Функциональная эквивалентность дискретных преобразователей. II. — Кибернетика, 1970, № 2.
13. Летичевский А. А. Эквивалентность автоматов с заключительным состоянием относительно свободной полугруппы с правым нулем. — Докл. АН СССР, 1968, 182, № 5.
14. Янов Ю. И. О логических схемах алгоритмов. — Проблемы кибернетики, 1958, вып. 1.
15. Rosenberg A. L. On multy-head finite automata IBM Gorn. — Res. and Dev., 1966, № 10.
16. Glushkov V. M., Letichevskii A. A. Theory of algorithms and descrete processors. Advances in Information Sistems Science, v. 1. N. Y. 1969.

Поступило 24 августа 1969 г.

---

* Алгебра и логика, 1969, т. 8, № 5.

** Теоретическая кибернетика, 1970, № 6.

СССР
Московский университет
О. Н. ГОЛОВИН, М. А. БРОНШТЕЙН

АКСИОМАТИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ТОЧНЫХ ОПЕРАЦИЙ

Посвящается памяти дорогого Анатолия Ивановича Мальцева

Введение

Всем алгебраистам хорошо знакомы операции прямого и свободного умножений групп и их роль в теории групп. Александром Геннадиевичем Курошем в 1937 г. (см. [20], стр. 15) впервые был поставлен вопрос о целесообразности розыска и исследования операций, подобных этим двум классическим. Однако первые результаты в этом направлении стали появляться лишь в послевоенные годы, уже после выхода в свет первого издания книги А. Г. Куроша «Теория групп», где (см. [21], стр. 350—351 или [22], стр. 424—425) этот вопрос был конкретизирован и особое внимание обращалось на условие ассоциативности операций.

Построение таких ассоциативных операций пошло в основном в двух направлениях. Одно из них, начавшееся с обнаружения ассоциативных нильпотентных умножений (см. [9—11]), привело к разработке общей теории вербальных операций, определенных на классе всех групп и свободных в пределах соответствующих им многообразий групп. Фундамент этой теории заложен в работах Морана [70, 72], где дано общее определение вербальных операций, доказана их ассоциативность, установлена свобода каждой такой операции в пределах соответствующего ей многообразия, обнаружен и ряд других фактов.

Дальнейшим изучением вербальных операций и разложений групп в вербальные произведения занимались многие: в нильпотентном случае — О. Н. Головин [10—12], Н. П. Гольдина [18], В. Н. Лифшиц [23], В. Н. Ляховицкий [25], Макгенри [68], О. Н. Мацедонская [26], Е. М. Мостовая [28], Стрейк [85—87], М. С. Цаленко [42], А. Л. Шмелькин [45—46]; в разрешимом и полинильпотентном случае — Баумслаг [57],

Баумслаг и Левин [58], М. А. Бронштейн [4], А. Л. Шмелькин [47]; в общем случае — О. Н. Головин [15], Моран [71], Стрейк [83, 84], А. Л. Шмелькин [44]; специально алгоритмическими вопросами — Д. С. Фаермарк [30], Г. Г. Щепин [50,51]; полными вербальными произведениями — Моран [75, 78]; вербальными произведениями с объединенными подгруппами — Б. Нейман и Уайголд [80], Уайголд [88, 89]. Подчас теория вербальных операций теснейшим образом переплетается с общей теорией многообразий групп. Так, например, работы П. Неймана [82] и А. Ю. Ольшанского [29], в которых строятся примеры многообразий нулевой экспоненты, свободные группы которых разложимы в прямое произведение, представляют несомненный интерес и с точки зрения изучения вербальных операций.

На принципиально иных соображениях построил в 1949 г. ассоциативную операцию Е. С. Ляпин [24] (см. о ней ниже, § 3, пример 12). Развив его идеи, общую теорию полукоммутативных T-операций построил М. А. Фридман [31—40]; операции ряда семейств таких операций ассоциативны. В работах М. А. Фридмана, а также И. А. Чабан [43] и Г. Г. Щепина [48,49] изучаются различные свойства этих операций. (Одна операция Фридмана рассматривается ниже, §3, пример 15).

В работах [73, 74, 76, 77] Мораном построены новые семейства ассоциативных операций. Впрочем, некоторые из них укладываются в схему М. А. Фридмана.

Однако ни конкретное описание отдельных ассоциативных операций или целых семейств таких операций, ни описание конкретных их индивидуальных свойств не являются предметом настоящей статьи. Подчеркнем лишь, что за 20 лет удалось установить много законов, определяющих ассоциативные операции на классе групп. Нас сейчас интересует систематизация накопившегося материала.

Нет уверенности даже в том, что само понятие операции на классе групп трактуется всеми авторами одинаково. С другой стороны, постепенно накопился некоторый набор подмеченных «абстрактных» свойств, которыми могут обладать или не обладать те или иные операции. Процесс этот шел сперва спонтанно. Затем одним из авторов настоящей статьи была сделана попытка (см. [13] и [16]) подвести этому процессу итог. Ниже, в § 1, приводится «список постулатов» — перечень таких абстрактных свойств (незначительно отличающийся от перечня, помещенного в [16]) с соответствующими литературными ссылками. Там же воспроизводится определение точной операции (данное впервые в [16]), которое предлагается положить в основу всего. В частности, именно на точные операции и рассчитан

указанный список дополнительных постулатов, знакомство с которым (так же, как и с приводимыми в § 1 названиями некоторых типов точных операций) в дальнейшем и предполагается.

Истинным предметом настоящей статьи является формально-логическое изучение предложенного списка постулатов. Исследование это удается довести до конца с точностью до явно формулируемых в виде «проблем» оставшихся открытыми вопросов, о характере которых будет идти речь ниже. В ходе этого исследования наряду с использованием материала, предоставляемого в наше распоряжение всеми публикациями по интересующему нас вопросу, нами строится много новых примеров операций, большинство из которых не представляет самостоятельного интереса: они нужны лишь для установления независимости тех или иных постулатов или наборов постулатов. Однако, скажем, для выяснения сути самого требования ассоциативности точной операции интересны примеры 18—21 (§ 5). В частности, пример 18 показывает, что в общем случае не равносильны между собой постулат III-5 и набор постулатов <III-3, III-4> (с этими тремя постулатами читатель хорошо знаком по теории прямых и свободных произведений). А пример 21 занятен тем, что (будучи неинтересным по своему существу) является формально самым простым примером ассоциативной точной операции, отличной от прямого и свободного умножений: ее ассоциативность очевидна.

Обратим внимание читателя на несколько теорем. Теорема 1 (§ 1) фиксирует, что всем сформулированным постулатам удовлетворяет прямое и свободное умножение; тем самым устанавливается, что предлагаемая система постулатов совместна. Теорема 3 (§ 2) констатирует, что последний постулат IV-1* равносилен совокупности всех ему предшествующих и, вместе с тем, что совпадают семейства совершенных и ассоциативных свободных функторных операций. Теорема 4 показывает, сколь сильными оказываются сочетания постулатов I-4 и I-4* (относящихся к отдельно взятым произведениям) с некоторыми другими постулатами. В теореме 5.1 (§ 3), во-первых, доказывается, что ни один из постулатов не является следствием точности операции, а, во-вторых, устанавливается, что постулаты I-1, II-1, III-1 и III-2 являются «атомами», т. е. слабейшими — такими, что из каждого из них не следует ни один из остальных постулатов нашей системы. Несколько слов об этих «атомах». Постулаты II-1 и III-1 совершенно естественны и очевидны: постулат симметричности (II-1) декларирует «абстрактность» операции, а постулат об единичных сомножителях (III-1) требует, чтобы группы порядка 1 во всех случаях играли

роль единицы относительно рассматриваемой операции. Постулат же устойчивости (III-2) сам по себе не звучит: он возник как «дополнение к III-1 в III-3».

Что же касается постулата правильности (I-1), то, возможно, стоит напомнить, что он играет весьма существенную роль во многих построениях и доказательствах. Требование правильности было впервые предложено в [9] и детальнее разработано в [10] и [70]. Коротко говоря, правильность операции означает, что она «лежит между прямым и свободным умножениями». Специально правильными произведениями занимался Бенадо (см., например, [59—64]). В частности, им доказана транзитивность этого свойства; он же ввел понятие полной правильности (постулат I-2). Бóльшую часть исследований Бенадо проводит на структурном языке. (Кстати, заметим, что наш пример C из § 7 демонстрирует, что правильность, вообще говоря, не обладает свойством блокируемости: блоки правильного произведения могут не составлять правильного произведения.)

Во всех упомянутых до сих пор работах изучались именно правильные операции и правильные произведения. И все вообще, насколько нам известно, ассоциативные точные операции, сообщения о которых появлялись в печати, были правильными. Если это так, то публикуемые в настоящей работе примеры 13 (§ 3) и 20 (§ 5) являются первыми примерами ассоциативных неправильных операций. Они, несомненно, «вычурные». И существуют ли «естественные» операции такого типа, нам неизвестно. Кстати заметим, что в ряде работ рассматривались разные обобщения понятия правильного произведения (так, например, см. работы Б. Неймана и Х. Нейман [79], Х. Нейман и Уайголда [81], а также [52] и [69]).

Если, наоборот, перейти от слабых постулатов к наиболее сильным, то главное внимание должны привлечь два (если оставить в стороне постулаты ассоциативности): постулат Маклейна (II-2*) и постулат Мальцева (II-3*). И положение дел к настоящему моменту с исследованием семейства маклейновских и семейства мальцевских операций буквально полярно.

Как уже показано авторами настоящей статьи (см. [15] и [3]), класс точных операций, аксиоматически определяемый набором постулатов $\langle$II-2*, III-1$\rangle$, представляет собой множество (не выше континуальной мощности) нейтральных поливербальных операций, играющих в теории операций роль, вполне аналогичную роли многообразий в общей теории групп: точная операция удовлетворяет постулатам II-2* и III-1 тогда и только тогда, когда допускает задание системой ней-

тральных политождеств. Мы не имеем здесь возможности формулировать понятия и теоремы теории поливербальных операций и вынуждены отослать читателя к соответствующим статьям: О. Н. Головин [14, 15, 17], М. А. Бронштейн [3], С. А. Ашманов и О. Н. Мацедонская [1], О. Н. Мацедонская [26, 27], Г. К. Генов [7]. Отметим только, что все вербальные операции поливербальны, так что каждая может быть задана системой политождеств. Этим, в частности, дается положительный ответ на вопрос Морана [71] и Стрейк [84] о том, существует ли форма задания вербальных операций, инвариантная относительно всех гомоморфизмов. Для поливербальных операций встает вопрос о существовании конечной базы политождеств для каждой операции. Нильпотентные операции такими базами обладают (см. [15]). В работах А. Л. Шмелькина [47] и М. А. Бронштейна [4] показано, что все остальные полинильпотентные (в частности, все разрешимые) операции конечными базами политождеств не обладают.

Таким образом, аксиоматически выделяемый класс $\langle$II-2*, III-1$\rangle$-операций удается полностью охарактеризовать на совсем другом языке, позволяющем сделать об этом классе ряд хороших заключений и наметить пути возможного его изучения. Допускают ли описание на каком-либо ином языке и другие аксиоматические классы? Г. К. Геновым это сделано (см. [7], теорема 2) для $\langle$II-2*, III-1, IV-1$\rangle$-операций— они составляют, естественно, часть множества нейтральных поливербальных операций. Тривиально описываются классы II-2*-операций и $\langle$II-2*, IV-1$\rangle$-операций. Например, первый из них в точности составлен из всех «кусочно-поливербальных» операций, т. е. операций, которые для каждой данной мощности множества сомножителей определяются (вообще говоря, своей) системой политождеств. Можно еще считать (см. [10], гл. II, § 1), что в некотором смысле дана характеризация всех правильных операций; но класс этих операций безумно широк. И это, насколько нам известно, все.

Встает вопрос: можно ли как-то описать класс операций типа $\langle$II-3*, III-1$\rangle$ (или типа $\langle$II-2, II-3*, III-1$\rangle$), в определенном смысле дуальных к $\langle$II-2*, III-1$\rangle$-операциям?

И вместо ответа на этот вопрос мы подведем итоги настоящей статьи, дающие формально-логическую картину положения дел и во всей теории точных операций.

Для простоты ограничим себя несколько более узкими рамками. Выше уже говорилось о теореме 5.1, устанавливающей «атомность» постулатов I-1, II-1 III-1. В § 1 $\langle$I-1, II-1, III-1$\rangle$-операции названы регулярными. Требования этих

постулатов весьма логичны и слабы. И, по всей видимости, в литературе только такие операции и рассматривались, когда шла речь о «правильных» или ассоциативных операциях.

Так вот, главным итогом настоящей статьи является установление всех аксиоматических типов регулярных операций и полной схемы логических импликаций между определяющими эти типы постулатами (см. схему № 4). Всего таких типов оказалось 50 — с точностью до 8 типов, самостоятельное существование которых осталось недоказанным. Это типы:

$$X_3=\langle \text{I-1, II-3, III-3}\rangle;\ Z_1=\langle \text{I-2, II-3*, III-1}\rangle;$$
$$U_1=\langle \text{II-2, II-3*, III-1}\rangle;$$
$$V_1=\langle \text{II-3*, III-1, IV-1}\rangle;\ D_4=\langle \text{I-2, II-3, III-4}\rangle;$$
$$W_D=\langle \text{I-2, II-3, III-5}\rangle;$$
$$W_Z=\langle \text{I-2, II-3*, III-5}\rangle;\ W_V=\langle \text{II-3*, III-5, IV-1}\rangle.$$

На схеме они отмечены пунктирными кружками, от которых идут пунктирные же ребра, показывающие возможные «обратные» импликации, по которым можно судить, какие типы регулярных операций в действительности, возможно, и совпадают. Читатель, наверное, сразу заметил, что все эти 8 наборов постулатов содержат либо постулат II-3, либо II-3*. Случайно ли это?

Более 20 лет назад, в феврале 1948 г., будучи официальным оппонентом по кандидатской диссертации одного из авторов настоящей статьи, Анатолий Иванович Мальцев поставил вопрос: хорошо, доказано существование ассоциативных операций, отличных от свободного и прямого умножений групп, но могут ли такие ассоциативные операции обладать еще одним общим свойством прямого и свободного умножений, а именно: если $G = A \circ B$ и $A' \subset A$, $B' \subset B$, то и $\{A', B'\}_G = A' \circ B'$? Известно было (см. [11], стр. 444; см. также пример 11 § 3 настоящей статьи), что нильпотентные произведения этим свойством не обладают. Позднее А. Л. Шмелькин [44] установил, что не удовлетворяют этому «постулату Мальцева» и все вообще вербальные операции (отличные, конечно, от свободного и прямого умножений). М. А. Фридман [36] то же самое доказал для всех ассоциативных T-операций, а Г. Г. Щепин [49] — вообще для всех фридмановских операций. Немальцевскими оказались и все невербальные ассоциативные операции Морана, в том числе и операция из [77], вызванная к жизни именно желанием решить вопрос А. И. Мальцева.

Возник вопрос: существуют ли вообще (отличные от двух классических) операции, удовлетворяющие постулату Мальцева? Оказалось, что такие операции строить труднее, чем

ассоциативные. Но все же мальцевские операции существуют. Первым найденным семейством мальцевских операций явились так называемые операции Грюнберга — Шмелькина, определяемые законом: $\Pi^{\circ}G_{\vee} = F/V(C)$, где $F = \Pi^{*}G_{\vee}$, а $V(C)$ — вербальная V-подгруппа декартовой подгруппы C по произвольному множеству V слов. Эти операции (по разным поводам) ввели независимо друг от друга Грюнберг [65] и А. Л. Шмелькин (см. [44] и [47]). Последний и установил их мальцевость (больше того, что они — свободные функторные). Позднее среди поливербальных операций были найдены еще новые семейства мальцевских операций С. А. Ашмановым [1] и Г. К. Геновым [7]. Генов развил трудную технику построения мальцевских операций, что позволило ему наконец (см. [7], стр. 458), сконструировать и первое семейство мальцевских неполивербальных операций типа $\langle$I-2, II-3*, III-3$\rangle$, т. е. существенно отличающихся от старых серий мальцевских операций. Однако, как доказали С. А. Ашманови, О. Н. Мацедонская [1] и Г. К. Генов [7], все построенные мальцевские операции оказались неассоциативными. (Еще раньше неассоциативность нескольких таких операций установила Стрейк [83].) Пока никому не удается совместить ассоциативность с мальцевостью вне случаев прямого и свободного умножений. Возможно, что это и принципиально неосуществимо. Во всяком случае, нам представляется, что этот вопрос, поставленный 20 лет назад А. И. Мальцевым, остается центральным во всей «абстрактной» теории точных операций.

П р о б л е м а А. Существуют ли, кроме прямого и свободного умножений, ассоциативные мальцевские операции?

Само собой напрашивается аналогия между этой проблемой и недавно решенной в теории многообразий проблемой о шрейеровских многообразиях.

Частным случаем проблемы Мальцева является

П р о б л е м а В. Существуют ли отличные от прямого и свободного умножений совершенные операции?

Некоторые конкретизации проблемы А на языке постулатов читатель найдет в § 5. Подчеркнем еще раз, что все оставшиеся открытыми вопросы в проведенной нами в настоящей статье формально-аксиоматической классификации точных операций связаны с постулатами II-3* мальцевости и II-3 ослабленной мальцевости. Любопытно, что до сих пор остается открытым, в частности, вопрос: следует ли из мальцевости правильность или нет?

В заключение напомним, что разного рода операциями, подобными описанным здесь, алгебраисты интересуются, ес-

тественно, вовсе не только в теории групп. Так, например, В. М. Глушков [8] и В. А. Кузьменчук [19′] работали в этом направлении в топологических группах, А. Т. Гайнов [6] и О. А. Иванова [19] — в линейных алгебрах, Бадида [53—56] — на классе структур, Т. М. Баранович [2] — на универсальных алгебрах, М. С. Цаленко [41] — в категориях.

Что касается самой настоящей статьи, то второму ее автору принадлежат теорема 4 (§ 2), лемма А (§ 7) и примеры 8 и 13 (§ 3).

ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\Rightarrow$ — логическая импликация;
$\Leftrightarrow$ — логическая эквивалентность;
$\ll \ldots \gg$ — замкнутая система постулатов (см. определение 3 на стр. 61);
$\cong$ — изоморфизм;
$\varnothing$ — пустое множество;
$|M|$ — мощность множества M;
$\divideontimes$ — свободное умножение групп;
$\times$ — прямое умножение групп;
$N \lhd G$ — N инвариантна в G;
A^G — нормальный делитель, порожденный A в G;
${}^nG$ — n-й член нижнего центрального ряда группы G (${}^1G = G$);
$G = \{G_\nu \mid \nu \in I\}$ — группа G порождена подгруппами G_ν, $\nu \in I$;
$\{G_\nu \mid \nu \in I\}_G$ — подгруппа, порожденная в G подгруппами G_ν, $\nu \in I$;
$\{a\}_n$ — циклическая подгруппа порядка n;
E — единичная группа (подгруппа);
$[A, B]$ — взаимный коммутант подгрупп A и B;
$V(G)$ — вербальная V-подгруппа группы G;
H_3 — группа, определенная в § 7, пример B;
$H_I^{(2)}$ — группа, определенная в § 7, пример C.

§ 1. Аксиоматика основных типов точных операций

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что на классе всех групп задана *точная операция* $\circ$, если любому множеству групп G_ν, $\nu \in I$ (среди которых могут быть и изоморфные), однозначно сопоставлена группа G, называемая их $\circ$-произведением и обозначаемая через $\prod\limits_{\nu \in I}^{\circ} G_\nu$ причем

а) $G = \{G_\nu^\circ \mid \nu \in I\}$, где $G_\nu^\circ \cong G_\nu$, $\nu \in I$;

б) зафиксированы конкретные изоморфизмы $G_\nu \to G_\nu^\circ$, $\nu \in I$, в смысле которых сомножители G_ν считаются вложенными в G;

в) для любого множества групп H_ν, $H_\nu \cong G_\nu$, $\nu \in I$, существует такой набор изоморфизмов $\varphi_\nu : G_\nu \to H_\nu$, $\nu \in I$, которые склеиваются в изоморфизм $\varphi : G \to H = \Pi^\circ H_\nu$;

г) каков бы ни был изоморфизм $\psi : G \to G^*$, группа G^* также называется $\circ$-произведением групп G_ν, $\nu \in I$, при изоморфизмах вложения, индуцируемых этим изоморфизмом ψ.

Классическими примерами точных операций являются прямое и свободное умножения групп. На протяжении последних 20—25 лет строились и изучались многие новые классы точных операций. В ходе такого изучения разными авторами подмечались те или иные общие свойства операций исследуемых классов или заранее вводились определенного типа ограничения, накладываемые на них. Основные из этих свойств и ограничений, пополненные некоторыми новыми, мы сводим в следующие группы постулатов, незначительно видоизмененные по сравнению с публикацией [16]. (В скобках приводятся литературные ссылки на все известные нам случаи первых формулировок или использований соответствующих свойств в печатных работах.)

Сразу отметим, что из самого определения точных операций следует их коммутативность: множество индексов I не предполагается упорядоченным. В этом смысле нас не должна дезориентировать запись $G_1 \circ G_2 \circ \cdots \circ G_n$ точного произведения в случае конечного числа сомножителей.

I группа — внутренние постулаты

Накладываются на отдельное произведение $G = \Pi^\circ_{\nu \in I} G_\nu$.

I-1. Постулат правильности [9,10]: $G_\nu \cap D_\nu^G = E$ для каждого $\nu \in I$, где $D_\nu = \{G_\mu \mid \mu \in I \setminus \nu\}$.

I-2. Усиленный постулат правильности [59]: для любого разбиения $I = J \cup K$, $J \cap K = \varnothing$, $G_J \cap G_K^G = E$, где $G_J = \{G_\nu \mid \nu \in J\}$, $G_K = \{G_\nu \mid \nu \in K\}$.

I-3. Постулат склеиваемости автоморфизмов [44]: каждая система автоморфизмов $\varphi_\nu : G_\nu \to G_\nu$, $\nu \in I$, склеивается в автоморфизм $\varphi : G \to G$.

I-4. Постулат склеиваемости эндоморфизмов [14]: каждая система эндоморфизмов $\varphi_\nu : G_\nu \to G_\nu$, $\nu \in I$, склеивается в эндоморфизм $\varphi : G \to G$.

I-4*. Постулат склеиваемости эндоморфизмов с ядерным условием [16]. Этот постулат является усилением предыдущего и получается из него наложением следующего дополнительного ядерного условия, формулируемого ниже для более общего случая.

Ядерное условие. Если некоторая система гомоморфизмов $\varphi_\nu : G_\nu \to H_\nu$, $\nu \in I$, склеивается в гомоморфизм $\varphi: G \to H$, то ядро этого результирующего гомоморфизма φ минимально: $\operatorname{Ker}\varphi = \{\operatorname{Ker}\varphi_\nu \mid \nu \in I\}^G$.

Это условие выражает максимальную свободность склеивания рассматриваемых гомоморфизмов. Всюду в последующем постулаты со звездочкой получаются из соответственных постулатов без звездочек дополнительным наложением ядерного условия.

II группа — внешние постулаты

Эти постулаты связывают между собой два произведения вида $G = \prod^\circ_{\nu \in I} G_\nu$ и $H = \prod^\circ_{\nu \in I} H_\nu$ и имеют такую общую структуру: утверждается, что каждая система (произвольных или того или иного специального вида) гомоморфизмов $\varphi_\nu : G_\nu \to H_\nu$, $\nu \in I$, склеивается в гомоморфизм $\varphi : G \to H$, на который могут налагаться те или иные требования.

II-1. Постулат симметричности [13]: каждая система изоморфизмов φ_ν склеивается в изоморфизм φ.

II-2. Постулат склеиваемости эпиморфизмов [72]: каждая система эпиморфизмов φ_ν склеивается в эпиморфизм φ.

II-2^{*ст}. Первоначальный вариант постулата Маклейна [25, 83]: если $N_\nu \lhd G_\nu$ и $N = \{N_\nu \mid \nu \in I\}^G$, то существует естественный изоморфизм: $G/N \cong \prod^\circ (G_\nu/N_\nu)$.

II-2*. Постулат склеиваемости эпиморфизмов с ядерным условием (постулат Маклейна) [72, 14].

II-3. Постулат склеиваемости мономорфизмов (ослабленный постулат Мальцева) [10,14, 15]: каждая система мономорфизмов φ_ν склеивается в гомоморфизм φ (не обязательно являющийся мономорфизмом)*.

II-3^{*ст}. Первоначальный вариант постулата Мальцева [11, 44]: если $A_\nu \subseteq G_\nu$, $\nu \in I$, то $\{A_\nu \mid \nu \in I\}_G = \prod^\circ A_\nu$.

II-3*. Постулат склеиваемости мономорфизмов с ядерным условием (постулат Мальцева) [16]. Здесь и φ, очевидно, будет мономорфизмом.

II-4. Постулат функторности [16]: каждая система гомоморфизмов φ_ν склеивается в гомоморфизм φ.

II-4^{*э}. Постулат функторности с ядерным условием для эпиморфизмов [16].

II-4^{*м}. Постулат функторности с ядерным условием для мономорфизмов [16].

---

* В [16] по недосмотру в формулировке этого постулата значится, что и φ — мономорфизм.

II-4*. Постулат функторности с ядерным условием (для всех гомоморфизмов) [16].

III группа — постулаты ассоциативности

III-1. Постулат об единичных сомножителях [16]: если среди G_ν, $\nu \in I$, группы G_μ, $\mu \in K \subset I$, единичные и $H_\nu \cong G_\nu$ для $\nu \in J = I \setminus K$, то существуют изоморфизмы $\varphi_\nu : G_\nu \to H_\nu$, $\nu \in J$, склеивающиеся в изоморфизм $\varphi : \prod_{\nu \in I}^{\circ} G_\nu \to \prod_{\nu \in J}^{\circ} H_\nu$. Другими словами: произведение не меняется при удалении из него единичных сомножителей.

III-2. Постулат устойчивости*: если в двух равномощных по числу сомножителей произведениях $G = \prod_{\nu \in I}^{\circ} G_\nu$ и $H = \prod_{\nu \in I}^{\circ} H_\nu$ (сомножители которых считаются одинаково проиндексированными) часть соответственных сомножителей попарно изоморфна, скажем, $G_\nu \cong H_\nu$, $\nu \in J \subset I$, то существуют такие изоморфизмы $\varphi_\nu : G_\nu \to H_\nu$, $\nu \in J$, которые склеиваются в изоморфизм $\varphi_J : G_J \to H_J$, где $G_J = \{G_\nu \mid \nu \in J\}_G$, $H_J = \{H_\nu \mid \nu \in J\}_H$.

III-3. Постулат локализуемости [13]: если $G = \prod_{\nu \in I}^{\circ} G_\nu$ и $J \subset I$, то $\{G_\nu \mid \nu \in J\}_G = \prod_{\nu \in J}^{\circ} G_\nu$.

III-4. Постулат блокируемости [21, 13]: если $G = \prod_{\nu \in I}^{\circ} G_\nu$ и $I = \bigcup_{\mu \in K} I_\mu$, $I_\mu \cap I_{\mu'} = \varnothing$ при $\mu \neq \mu'$, то $G = \prod_{\mu \in K}^{\circ} G_{I_\mu}$, где $G_{I_\mu} = \{G_\nu \mid \nu \in I_\mu\}$.

III-5. Постулат транзитивности [21, 13]: если $G = \prod_{\nu \in I}^{\circ} G_\nu$ и $G_\nu = \prod_{\mu \in J_\nu}^{\circ} G_{\nu,\mu}$, $\nu \in I$, то $G = \prod_{\mu \in J_\nu, \nu \in I}^{\circ} G_{\nu,\mu}$.

IV группа — общие постулаты

IV-1. Общий постулат [16]: если $G = \prod_{\nu \in I}^{\circ} G_\nu$ и $H = \prod_{\mu \in J}^{\circ} H_\mu$, то любая система гомоморфизмов $\varphi_\nu : G_\nu \to H^\nu = \{H_\mu \mid \mu \in J_\nu\}_H$, $\nu \in I$, где $J_\nu \subset J$ и $J_\nu \cap J_{\nu'} = \varnothing$ при $\nu \neq \nu'$, склеивается в гомоморфизм $\varphi : G \to H$.

IV-1*. Общий постулат с ядерным условием [16].

---

* В заметке [16] этот постулат вообще не формулировался, а постулат III-1 под номером II-5 входил в предыдущую группу постулатов. Соответственно иные номера имели и последующие постулаты: III-3 — номер III-1, III-4 — III-2, а III-5 — III-3.

В дальнейшем нам придется часто рассматривать не только отдельные, введенные только что, постулаты, но и некоторые их наборы. Иногда такие наборы будем называть производными постулатами; при этом постулаты, вошедшие в группы I—IV, естественно называть начальными.

Присвоим точным операциям, удовлетворяющим некоторым начальным или производным постулатам, специальные наименования (через тире указаны соответствующие постулаты):

правильные операции — I-1,
вполне правильные операции — I-2,
симметрические операции — II-1,
маклейновские операции — II-2*,
мальцевские операции — II-3*,
функторные операции — II-4,
свободные функторные операции — II-4*,
ассоциативные операции — $<$ III-3, III-4, III-5$>$,
регулярные операции — $<$I-1, II-1, III-1 $>$,
совершенные операции — IV-1*.

Будут употребляться и производные наименования, такие, как маклейновские (или мальцевские) регулярные операции, ассоциативные мальцевские операции и т. п.

Для точных операций можно ввести понятие, аналогичное понятию фактор-группы. Если две точные операции $\circ$ и $\odot$ таковы, что для любых двух систем попарно изоморфных групп G_ν, H_ν, $G_\nu \cong H_\nu$, $\nu \in I$, будет существовать такая система изоморфизмов $\varphi_\nu : G_\nu \to H_\nu$, $\nu \in I$, которая склеивается в эпиморфизм $\varphi: G = \Pi^{\circ} G_\nu \to H = \Pi^{\odot} H_\nu$, то вторая операция $\odot$ называется фактор-операцией от операции $\circ$. Конечно, можно говорить и для двух отдельных произведений, что одно из них является фактор-произведением другого. Ясно, что в случае симметрических операций склеиваться в эпиморфизм φ будут любые изоморфизмы сомножителей.

Все точные операции суть фактор-операции свободного умножения. Можно легко понять, что те и только те из них будут правильными операциями, фактор-операцией которых в свою очередь является прямое умножение. Но прямое произведение есть фактор-группа свободного произведения тех же сомножителей по его декартовой подгруппе C (т. е. по нормализованному взаимному коммутанту свободных сомножителей). Поэтому точное произведение правильно тогда и только тогда, когда является фактор-группой свободного произведения тех же групп по нормальному делителю, лежащему в C.

Непосредственно проверяется, что классические операции прямого и свободного умножений удовлетворяют всем сформулированным выше постулатам. Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 1. *Система всех постулатов* I, II, III и IV *групп совместна.*

Впрочем, эту проверку проще провести после установления простейших зависимостей между постулатами, чему посвящен следующий параграф.

§ 2. Основные эквивалентности и импликации

Между введенными в § 1 постулатами существуют многочисленные связи. Непосредственно обнаруживаются следующие эквивалентности:

$$\text{I-3} \Leftrightarrow \text{II-1}, \tag{1}$$
$$\text{II-2}^* \Leftrightarrow \langle \text{II-1},\ \text{II-2}^{*\text{ст}} \rangle, \tag{2}$$
$$\text{II-3}^* \Leftrightarrow \langle \text{II-1},\ \text{II-3}^{*\text{ст}} \rangle, \tag{3}$$
$$\text{II-4} \Leftrightarrow \langle \text{II-2},\ \text{II-3} \rangle, \tag{4}$$
$$\text{II-4}^{*\text{э}} \Leftrightarrow \langle \text{II-2}^*,\ \text{II-3} \rangle, \tag{5}$$
$$\text{II-4}^{*\text{м}} \Leftrightarrow \langle \text{II-2},\ \text{II-3}^* \rangle, \tag{6}$$
$$\text{II-4}^* \Leftrightarrow \langle \text{II-2}^*,\ \text{II-3}^* \rangle. \tag{7}$$

Ввиду эквивалентности (1) постулат I-3 в дальнейшем рассматривать не будем. Не будем, как правило, рассматривать и постулаты $\text{II-2}^{*\text{ст}}$ и $\text{II-3}^{*\text{ст}}$, поскольку нас в основном интересуют лишь симметрические операции (хотя практически часто бывает удобнее пользоваться именно формой $\text{II-2}^{*\text{ст}}$ и $\text{II-3}^{*\text{ст}}$). Наконец, ввиду того, что, как это доказано в [3, стр. 1252], тривиальная эквивалентность (5) допускает такое значительное усиление:

$$\text{II-4}^{*\text{э}} \Leftrightarrow \text{II-2}^*, \tag{8}$$

можно дальше опустить и постулат $\text{II-4}^{*\text{э}}$. Аналогичное усиление дуальной к (5) эквивалентности (6) уже невозможно, как показал Г. К. Генов (см. [7], стр. 459). А именно, он установил, что

$$\langle \text{I-2},\ \text{II-3}^*,\ \text{III-3} \rangle \Rightarrow \text{II-2}. \tag{8'}$$

Т е о р е м а 2. *Имеют место следующие импликации и эквивалентности:*

$$\text{I-2} \Rightarrow \text{I-1}, \tag{9}$$
$$\text{I-4} \Rightarrow \text{I-1},\ \text{I-2},\ \text{II-1}, \tag{10}$$

I-4* $\Rightarrow$ I-1, I-2, I-4, II-1, (11)

I-4* $\Leftrightarrow$ I $\Leftrightarrow$ $\langle$I, II-1$\rangle$, (11*)

II-2 $\Rightarrow$ I-1, II-1, (12)

II-2^{*ст} $\Rightarrow$ I-1, (12′)

II-2* $\Rightarrow$ I-1 — I-4, II-1 — II-3, II-4, II-4^{*э}, III-2, (13)

II-3 $\Rightarrow$ II-1, (14)

II-3* $\Rightarrow$ II-1, II-3, II-3^{*ст}, III-2, (15)

II-4 $\Rightarrow$ I-1, I-2, I-4, II-1, II-2, II-3, III-2, (16)

II-4^{*м} $\Rightarrow$ I-1, I-2, I-4, II-1, II-2, II-3 — II-4, III-2, (17)

II-4* $\Rightarrow$ I-1 — I-4*, II-1 — II-4^{*м}, III-2, (18)

II-4* $\Leftrightarrow$ $\langle$I, II$\rangle$ $\Leftrightarrow$ $\langle$I, II, III-2$\rangle$, (18*)

III-3 $\Rightarrow$ III-1, III-2, (19)

III-3 $\Leftrightarrow$ $\langle$III-1, III-2$\rangle$ $\Leftrightarrow$ $\langle$III-1 — III-3$\rangle$, (19*)

III-4 $\Rightarrow$ III-1, (20)

III-5 $\Rightarrow$ III-1, III-2, III-3, III-4, (21)

III-5 $\Leftrightarrow$ III, (21*)

IV-1 $\Rightarrow$ I-1, I-2, I-4, II-1, II-2, II-3, II-4, III-2. (22)

(Во избежание недоразумений разъясним смысл употребляемой записи: утверждение (13), например, означает, что если некоторая точная операция удовлетворяет постулату II-2*, то она удовлетворяет и постулатам I-1, I-2, I-3, I-4, всем постулатам, начиная с II-1 и по II-3 (т. е. II-1, II-2, II-2^{*ст}, II-2*, II-3), а также и постулатам II-4, II-4^{*э}, III-2; а утверждение (18*) означает, что постулат II-4* эквивалентен совокупности всех постулатов I и II групп, к которым можно добавить и постулат III-2).

Вместо проведения подробного доказательства всей этой теоремы мы остановимся лишь на некоторых моментах, его иллюстрирующих. Утверждение I-4$\Rightarrow$II-1 тривиально, если вспомнить (1) и не забыть, что каждый автоморфизм обладает обратным. Для доказательства импликации I-4 $\Rightarrow$ I-2 достаточно разумным образом подобрать систему эндоморфизмов сомножителей, состоящую частично из нулевых и частично из тождественных эндоморфизмов. Этим фактически установлены уже все факты (9)—(11*).

Затем разумнее перейти к доказательству утверждений (19)—(21*). Начнем с рассмотрения постулата III-1 об единичных

сомножителях. В заметке [16] он был напрасно включен под номером II-5 во II группу. Особенно наглядно видна его «ассоциативная» сущность, если переформулировать его в такой эквивалентной форме:

III-1′. Если среди G_ν, $\nu \in I$, сомножители G_λ, $\lambda \in K \subset I$, единичные и $J = I \setminus K$, то $\prod^{\circ}_{\nu \in I} G_\nu = (\prod^{\circ}_{\mu \in J} G_\mu) \circ (\prod^{\circ}_{\lambda \in K} G_\lambda)$.

Замечание ($\mathscr{E}$). Легко понять, что из самого определения точной операции следует, что единичные сомножители E, безусловно, играют роль единицы в любых точных произведениях, все сомножители которых, за возможным исключением одного, равны E. С другой стороны, для A и B, отличных от E, вообще говоря, уже $A \circ B \circ E \neq A \circ B$.

Непосредственно устанавливается, что III-3⇒III-1; импликацию же III-3⇒III-2 проще всего понять так: если бы из формулировки постулата III-2 убрать оговорки о равномощности множеств сомножителей обоих произведений и о попарной равномощности фигурирующих в ней подмножеств этих множеств, то постулат III-2 совпал бы с постулатом локализуемости III-3. Таким образом, утверждение (19) доказано. Обратную импликацию $<$III-1, III-2$>$⇒III-3 предлагается проверить самому читателю. Скажем лишь, что как здесь, так и при доказательстве (21) приходится строить некоторые вспомогательные произведения. Интересно, что позднее мы сможем убедиться, что (21) нельзя усилить до эквивалентности: из $<$III-3, III-4$>$ не следует III-5 (см. [58]). Из утверждений (19)—(21*) остается еще (20). Докажем его. Пусть среди G_ν, $\nu \in I$, группы G_ν, $\lambda \in K \subset I$, единичные и $J = I/K$. Зафиксируем произвольный индекс $\nu_0 \in J$ и обозначим: $J / \nu_0 = J'$, $K \cup \nu_0 = K'$. Тогда, в силу III-4, $G = \prod^{\circ}_{\nu \in I} G_\nu = \{G_\lambda | \lambda \in K'\}_G \circ \prod^{\circ}_{\mu \in J'} G_\mu = G_{\nu} \circ \prod^{\circ}_{\mu \in J'} G_\mu = \prod^{\circ}_{\nu \in J} G_\nu$, т. е. (20) доказано. (Заметьте, что в выражениях, стоящих между вторым и третьим, а также третьим и четвертым знаками равенства, никакой расстановки скобок нет, кроме указанных фигурных.)

Возвращаемся к рассмотрению утверждений (12)—(18*). Замечание ($\mathscr{E}$) об единичных сомножителях сразу подтверждает импликации II-2⇒I-1 и II-2*ст⇒II-1 (последняя импликация была впервые установлена Н. Р. Брумберг). Факты II-2⇒II-1 и II-3⇒II-1 доказываются так же, как и I-4⇒⇒II-1. Подробнее остановимся на доказательстве утверждения II-4⇒III-2. Пусть операция удовлетворяет постулату II-4. Рассмотрим в произведении $G = \prod^{\circ}_{\nu \in I} G_\nu$ подгруппу $G_J = \{G_\mu | \mu \in J \subset I\}_G$. Вводим группы H_ν, изоморфные G_ν при $\nu \in J$ и изо-

морфные E при $\nu \in K = I \setminus J$. Система гомоморфизмов $\varphi_\nu : G_\nu \to H_\nu$, $\nu \in I$, состоящая из изоморфизмов $\varphi_\mu : G_\mu \to H_\mu$, $\mu \in J$ и нулевых эпиморфизмов $\varphi_\lambda : G_\lambda \to H_\lambda = E$, $\lambda \in K$, склеивается по II-4 в эпиморфизм $\varphi : G \to H = \prod_{\nu \in I}^{\circ} H_\nu$. Рассмотрим его ограничение φ_J на G_J:

$$\varphi_J : G_J \to H_J = \{H_\mu | \mu \in J\}_H = H.$$

Очевидно, φ_J тоже будет эпиморфизмом. Мономорфизмы $\varphi_\mu^{-1} : H_\mu \to G_\mu$ $(\mu \in J)$ и $\varepsilon_\lambda : H_\lambda = E \to G_\lambda$ $(\lambda \in K)$ склеются в свою очередь в гомоморфизм $\psi : H \to G$, который на самом деле сводится к эпиморфизму $\psi : H \to G_J$. Произведение $\varphi_J \psi$ является эндоморфизмом подгруппы G_J. Однако на каждом G_μ, $\mu \in J$, он совпадает с тождественным автоморфизмом и потому сам является таковым же на G_J. Следовательно, φ_J — изоморфизм, чем, как легко понять, и доказано, что операция удовлетворяет постулату III-2.

Более или менее аналогично доказывается и утверждение II-3*$\Rightarrow$III-2. Если читатель самостоятельно докажет еще импликацию II-4 $\Rightarrow$ I-4, то все остальные утверждения, входящие в (12)—(18*), легко получатся с учетом сводимости многих утверждений к аналогичным предыдущим и использованием результата (8) и содержащихся в нем импликаций II-2* $\Rightarrow$ II-3 и II-2* $\Rightarrow$ I-4.

Поскольку импликация (22) непосредственно следует из (16) и очевидного утверждения IV-1 $\Rightarrow$ II-4, то теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3. *Совершенные операции удовлетворяют всем постулатам* I, II, III *и* IV *групп:*

$$\text{IV-1}^* \Rightarrow \text{I, II, III, IV-1.} \tag{23}$$

Точнее, имеют место следующие эквивалентности:

$$\text{IV-1}^* \Leftrightarrow <\text{II-4}^*, \text{III-4}> \Leftrightarrow <\text{II-4}^*, \text{III-5}> \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow <\text{II, III}> \Leftrightarrow <\text{I, II, III}> \Leftrightarrow <\text{I, II, III, IV}>. \tag{23*}$$

Таким образом, семейство совершенных операций совпадает с семейством ассоциативных свободных функторных операций.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (22) наложением ядерного условия сразу получаем

$$\text{IV-1}^* \Rightarrow \text{I, II, III-2, IV-1.} \tag{*}$$

Пусть в $G = \prod_{\nu \in I}^{\circ} G_\nu$ произведена группировка сомножителей: $I = \bigcup_{\omega \in \Omega} I_\omega$, $I_\omega \cap I_{\omega'} = \varnothing$ при $\omega \neq \omega'$. Обозначим $\{G_\nu | \nu \in I_\omega\}_G =$

$= G^{\omega}$, $\omega \in \Omega$, и возьмем группы H_{ν}, соответственно изоморфные сомножителям G_{ν}, $\nu \in I$. Каковы бы ни были изоморфизмы $\psi_{\nu} : H_{\nu} \to G_{\nu}$, $\nu \in I_{\omega}$, они по IV-1* склеиваются в изоморфизм же

$$\psi_{\omega} : H^{\omega} = \prod_{\nu \in I_{\omega}}^{\circ} H_{\nu} \to G^{\omega},$$

откуда по определению точной операции следует, что $G^{\omega} = \prod_{\nu \in I_{\omega}}^{\circ} G_{\nu}$, т. е. доказана локализуемость нашей операции. Возьмем теперь $H = \prod_{\omega \in \Omega}^{\circ} H^{\omega}$. Вновь по IV-1* изоморфизмы ψ_{ω} склеиваются в изоморфизм

$$\psi : H = \prod_{\omega \in \Omega}^{\circ} H^{\omega} \to G = \{G^{\omega} \mid \omega \in \Omega\};$$

таким образом, $G = \prod_{\omega \in \Omega}^{\circ} G^{\omega}$, т. е. установлена и блокируемость операции. Итак,

$$\text{IV-1}^* \Rightarrow \text{I, II, III-1} - \text{III-4, IV-1.} \qquad (**)$$

Пусть, наоборот, известно, что операция $\circ$ удовлетворяет постулатам II-4* и III-4. Из (18), (20) и (19*) заключаем, что для нее выполнен и постулат III-3. Если теперь заданы два произведения $G = \prod_{\nu \in I}^{\circ} G_{\nu}$ и $H = \prod_{\mu \in J}^{\circ} H_{\mu}$ и гомоморфизмы

$$\varphi_{\nu} : G_{\nu} \to H^{\nu} = \{H_{\mu} \mid \mu \in J_{\nu}\}_H, \quad \nu \in I,$$

где $J_{\nu} \cap J_{\nu'} = \varnothing$ при $\nu \neq \nu'$, то по III-3 и III-4 имеем:

$$H^* \equiv \{H_{\mu} \mid \mu \in J^* = \bigcup_{\nu \in I} J_{\nu}\}_H = \prod_{\mu \in J^*}^{\circ} H_{\mu},$$

$$H^* = \{H^{\nu} \mid \nu \in I\}_H = \prod_{\nu \in I}^{\circ} H^{\nu}.$$

Теперь остается к гомоморфизмам φ_{ν}, $\nu \in I$, применить постулат II-4*: они склеятся в G в гомоморфизм

$$\varphi : G = \prod_{\nu \in I}^{\circ} G_{\nu} \to H^* = \prod_{\nu \in I}^{\circ} H^{\nu} \subseteq H,$$

причем выполняется и ядерное условие. Учитывая (**), получаем

$$\text{IV-1}^* \Leftrightarrow \langle \text{II-4}^*, \text{III-4} \rangle \Leftrightarrow \langle \text{I, II, III-1} - \text{III-4, IV-1} \rangle,$$

и потому для окончания доказательства теоремы достаточно установить справедливость следующей леммы:

Лемма 1. *Для симметрической операции транзитивность эквивалентна одновременным локализуемости и блокируемости:*

$$\langle \text{II-1, III-5} \rangle \Leftrightarrow \langle \text{II-1, III-3, III-4} \rangle. \qquad (24)$$

Учитывая (21), нам остается лишь установить

$$<\text{II-4, III-3, III-4}>\Rightarrow\text{III-5}.$$

Пусть $G=\prod_{\nu\in I}{}^{\circ}G_\nu$, $G_\nu=\prod_{\mu\in J_\nu}{}^{\circ}G_{\nu,\mu}$ $(\nu\in I)$, так что $G=\{G_{\nu,\mu}\,|\,\mu\in J_\nu,\ \nu\in I\}$. Берем группы $H_{\nu,\mu}$, соответственно изоморфные сомножителям $G_{\nu,\mu}$, и строим их произведение: $H=\prod_{\mu\in J_\nu,\nu\in I}{}^{\circ}H_{\nu,\mu}$. По III-4 и III-3 $H=\prod_{\nu\in I}{}^{\circ}H_\nu$, где $H_\nu=\{H_{\nu,\mu}\,|\,\mu\in J_\nu\}_H=\prod_{\mu\in J_\nu}{}^{\circ}H_{\nu,\mu}$. Для каждого ν можно (по определению точной операции) подобрать такую систему изоморфизмов $\varphi_{\nu,\mu}: H_{\nu,\mu}\to G_{\nu,\mu}$, $\mu\in J_\nu$, которая склеится в изоморфизм $\varphi_\nu: H_\nu\to G_\nu$. Но наша операция симметрическая. Поэтому полученная система изоморфизмов φ_ν, $\nu\in I$, склеится в изоморфизм $\varphi: H\to G$, чем все и доказано. Заметим, что здесь существенно использовалась симметричность операции, так как в выборе системы изоморфизмов φ_ν мы не вольны. И это по сути дела: без симметричности из $<$III-3, III-4$>$ постулат III-5 не следует (см. (58)).

В дальнейшем нам будет полезна лемма, в которой содержатся простенькие эквивалентности (25) и (26), являющиеся усилениями импликаций (9) и (22) в предположении блокируемости или ассоциативности операции.

Лемма 2. *Справедливы эквивалентности и импликации:*

$$<\text{I-1, III-4}>\Leftrightarrow<\text{I-2, III-4}>, \tag{25}$$

$$<\text{II-2, III-2}>\Rightarrow\text{I-2}, \tag{25'}$$

$$<\text{II-4, III-3, III-4}>\Leftrightarrow<\text{II-4, III-5}>\Leftrightarrow<\text{III-5, IV-1}>. \tag{26}$$

Проведем доказательство утверждения (25′). Пусть $G=\prod_{\nu\in I}{}^{\circ}G_\nu$ и $I=J\cup K$, $J\cap K=\varnothing$. Построим $H=\prod_{\nu\in I}{}^{\circ}H_\nu$, где $H_\nu\cong G_\nu$ для $\nu\in J$ и $H_\mu=E$ для $\mu\in K$. По II-2 система эпиморфизмов, состоящая из изоморфизмов $\varphi_\nu: G_\nu\to H_\nu$, $\nu\in J$, и нулевых эпиморфизмов $\varphi_\mu: G_\mu\to H_\mu$, $\mu\in K$, склеивается в эпиморфизм φ: $G\to H$, причем, очевидно, $\operatorname{Ker}\varphi\supseteq G_K^G$, где $G_K=\{G_\mu\,|\,\mu\in K\}_G$. Но, с другой стороны, по III-2 ограничение φ_J эпиморфизма φ на $G_J=\{G_\nu\,|\,\nu\in J\}_G$ является на самом деле изоморфизмом, откуда следует, что $G_J\cap G_K^G\subseteq G_J\cap\operatorname{Ker}\varphi=E$, чем и установлена полная правильность операции.

Теорема 4. *Имеют место следующие импликации:*

$$<\text{I-4, II-3*}>\Rightarrow\text{II-4}, \tag{27}$$

$$< \text{I-4, III-5} > \Rightarrow \text{II-4, IV-1,} \tag{28}$$
$$< \text{I-4*, II-2*} > \Rightarrow \text{II-4*,} \tag{29}$$
$$< \text{I-4*, II-3*} > \Rightarrow \text{II-4*,} \tag{30}$$
$$< \text{I-4*, II-4} > \Rightarrow \text{II-4*,} \tag{31}$$
$$< \text{I-4*, III-3, III-4} > \Leftrightarrow < \text{I-4*, III-5} > \Leftrightarrow \text{IV-1*} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow < \text{I, II, III, IV} >. \tag{32}$$

Доказательство этой теоремы распадается на несколько этапов.

A. Пусть операция $\circ$ удовлетворяет постулату I-4 и задана произвольная система гомоморфизмов $\varphi_\nu : G_\nu \to H_\nu$, $\nu \in I$. По I-4 для каждого ν тождественный эндоморфизм $\varepsilon_\nu : G_\nu \to G_\nu$ и нулевой эндоморфизм $\omega_\nu : H_\nu \to E$ склеятся в эндоморфизм $\psi_\nu : K_\nu = G_\nu \circ H_\nu \to G_\nu$, а система эндоморфизмов $\chi_\nu = \psi_\nu \varphi_\nu$, $\nu \in I$, в свою очередь — в эндоморфизм $\chi : K = \Pi^\circ K_\nu \to K$. Очевидно, что ограничение χ_{G_ν} этого эндоморфизма на G_ν совпадает с φ_ν.

B. Предположим теперь, что операция $\circ$ удовлетворяет более сильному постулату I-4*. Убедимся, что K распадается в правильное произведение своих подгрупп $G = \{G_\nu \mid \nu \in I\}$ и $H = \{H_\nu \mid \nu \in I\}$. Действительно, по I-4* эндоморфизмы ψ_ν склеиваются в эндоморфизм $\psi : K \to K$, причем $K\psi = G$, а $\operatorname{Ker}\psi = \{\operatorname{Ker}\psi_\nu \mid \nu \in I\}^K = H^K$, так как $\operatorname{Ker}\psi_\nu = H_\nu^{K_\nu}$. Однако ограничение ψ_G эндоморфизма ψ на G является тождественным автоморфизмом группы G. Поэтому $H^K \cap G = \operatorname{Ker}\psi \cap G = E$. Аналогично устанавливается, что и $G^K \cap H = E$.

C. Покажем теперь, что если операция $\circ$ удовлетворяет хотя бы одному из постулатов II-4, II-3*, III-5, то

$$G = \Pi^\circ G_\nu, \qquad H = \Pi^\circ H_\nu \tag{*}$$

для введенных в *B* подгрупп G и H группы K. Действительно, если, например, $G' = \Pi^\circ G'_\nu$, где $G'_\nu \cong G_\nu$, $\nu \in I$, и $\alpha_\nu : G'_\nu \to G_\nu$ — изоморфизмы, то в силу II-4 они склеятся в гомоморфизм $\alpha : G' \to K$, причем $G'\alpha = G$. Однако и эпиморфизмы $\psi_\nu \alpha_\nu^{-1} : K_\nu \to G'_\nu$, $\nu \in I$, склеятся (опять в силу II-4) в эпиморфизм $\beta : K \to G'$. Но $\alpha\beta : G' \to G'$ — эндоморфизм группы G', тождественный на каждом сомножителе G'_ν, а потому и на G', откуда α — мономорфизм, т. е. $\alpha : G' \to G$ — изоморфизм.

Для случая же мальцевской или ассоциативной операции утверждение (*) тривиально.

D. Пусть операция удовлетворяет постулатам I-4 и II-3*. Тогда любые гомоморфизмы $\varphi_\nu : G_\nu \to H_\nu$, $\nu \in I$, склеятся в гомо-

морфизм $\varphi: G = \Pi^{\circ} G_{\nu} \to H = \Pi^{\circ} H_{\nu}$ — им является ограничение χ_G эндоморфизма χ на G (см. A и C). Таким образом, импликация (27) доказана. Совершенно аналогично обстоит дело с (28), если дополнительно использовать (26).

E. Наконец, если I-4*-операция удовлетворяет хотя бы одному из постулатов II-2*, II-3*, III-5, то в силу (8), (27) и (28) для нее выполняется и постулат II-4 и потому утверждения (29), (30) и (32) следуют из (31), которое только и остается нам проверить. (Для (32) нужно еще воспользоваться (11), (24) и (23*).)

Итак, пусть мы имеем $<$I-4*, II-4$>$-операцию. Убедимся, что в этом случае выполняется ядерное условие

$$\operatorname{Ker} \chi_G = \{\operatorname{Ker} \varphi_{\nu} \mid \nu \in I\}^G. \qquad (**)$$

(Обозначения см. в A.) Этим все будет доказано.

В силу I-4* $\operatorname{Ker} \chi = \{\operatorname{Ker} \chi_{\nu} | \nu \in I\}^K$. Но $\chi_{\nu} = \psi_{\nu} \varphi_{\nu}$, причем ψ_{ν} отображает K_{ν} эпиморфно на G_{ν} и $\psi_{\nu} = \varepsilon_{\nu}$ на G_{ν}. Поэтому $\operatorname{Ker} \chi_{\nu} = (\operatorname{Ker} \varphi_{\nu}) \psi_{\nu}^{-1} = \operatorname{Ker} \varphi_{\nu} \cdot \operatorname{Ker} \psi_{\nu} = \operatorname{Ker} \varphi_{\nu} \cdot H_{\nu}^{K_{\nu}}$, откуда $\operatorname{Ker} \chi = H^K \{\operatorname{Ker} \varphi_{\nu} \mid \nu \in I\}^K$. Но $H^K = H \cdot [H, G]$, а $\{\operatorname{Ker} \varphi_{\nu} \mid \nu \in I\}^G \subseteq \{\operatorname{Ker} \varphi_{\nu} \mid \nu \in I\}^K \subseteq \{\operatorname{Ker} \varphi_{\nu} \mid \nu \in I\}^G [H, G]$. Поэтому $\operatorname{Ker} \chi = H^K \{\operatorname{Ker} \varphi_{\nu} \mid \nu \in I\}^G$. Но в B мы проверили, что K является правильным произведением своих подгрупп G и H. Следовательно, $\operatorname{Ker} \chi_G = \operatorname{Ker} \chi \cap G = \{\operatorname{Ker} \varphi_{\nu} | \nu \in I\}^G$, т. е. (**) доказано.

§ 3. Первая схема импликаций

Для дальнейшего будет удобно свести все установленные до сих пор импликации в единую схему (см. Приложение 1, схему № 1), представляющую собой направленный граф, вершинами которого служат все начальные постулаты*) (см. § 1) и три производных постулата:

$$\mathrm{A} = <\text{I-1, II-1}>,$$
$$\mathrm{B} = <\text{I-2, II-1}>,$$
$$\mathrm{M} = <\text{III-3, III-4}>.$$

Сами же импликации обозначены направленными ребрами и путями из ребер. Пунктирные ребра — это импликации, вопрос о существовании (или отсутствии) которых остался открытым.

---

* В схеме № 1 (и последующих схемах) постулат II-4** для краткости обозначен через U.

В частности, одно из этих пунктирных ребер показывает, что не известно, не совпадает ли в действительности постулат II-4*м с II-4*. Таким образом, стоят открытыми следующие проблемы.

Проблема 1. Следует ли из II-3 постулат I-1?

Проблема 2. Следует ли из II-3* постулат I-1?

Проблема 3. Следует ли из II-3* постулат I-2?

Проблема 4. Следует ли из II-4*м постулат II-2*(I-4*)?

Определение 2. Мы будем схему называть *повершинно полной* (в пределах той или иной совокупности постулатов), если она содержит в качестве вершин не только все исходные постулаты этой совокупности, но и все производные от них постулаты, т. е. все их комбинации. Она будет называться *пореберно полной* (в пределах той или иной совокупности постулатов), если содержит в качестве ребер или путей из ребер все импликации между вершинами этой совокупности.

В процессе решения основной задачи настоящей работы заметное место занимает

Теорема 5. *С точностью до сформулированных выше проблем* 1, 2, 3, 4 *схема* № 1 *повершинно полна в пределах каждой из групп* I, II, III, IV *и пореберно полна в целом.*

Доказательство повершинной полноты схемы (в пределах каждой из групп I, II, III, IV) вполне элементарно и основывается на установленных нами выше импликациях и эквивалентностях (1)—(23*). Проведение его мы предоставляем читателю. Много сложнее обосновать ее общую пореберную полноту. Это будет нами осуществляться в несколько этапов.

Теорема 5.1. *Существуют точные операции, не удовлетворяющие ни одному из рассматриваемых нами постулатов*:

$$\text{точность} \not\Rightarrow \text{I, II, III, IV.} \tag{33}$$

Постулаты I-1, II-1, III-1, III-2 — *слабейшие («атомы»): ни из одного из них не следует ни один из остальных постулатов групп* I-IV:

$$\text{I-1} \not\Rightarrow \text{I-2} — \text{I-4*, II, III, IV,} \tag{34}$$

$$\text{II-1} \not\Rightarrow \text{I-1, I-2, I-4, I-4*, II-2} — \text{II-4*, III, IV,} \tag{35}$$

$$\text{III-1} \not\Rightarrow \text{I, II, III-2} — \text{III-5, IV,} \tag{36}$$

$$\text{III-2} \not\Rightarrow \text{I, II, III-1, III-3} — \text{III-5, IV.} \tag{37}$$

Эта теорема (как и последующие) доказывается построением ряда примеров.

Пример 1. Назовем *свернутым прямым* умножением операцию $\circ$, получающуюся из обычного (дискретного) прямого

умножения путем отождествления в прямом произведении любых групп всех изоморфных между собой сомножителей с одним из них. Это — точная операция, не удовлетворяющая постулатам I-1 и II-1, а потому, в силу (9)—(22), и всем постулатам I, II и IV групп. Однако, как показывает непосредственная проверка, эта операция локализуема и потому (см. (19)) для нее выполняются постулаты III-1, III-2 и III-3. Если бы она допускала блокирование, то для $A=\{a\}_2$, $B=\{b\}_2$, $C=\{c\}_3$ мы получили бы $G=A\times C=A\circ B\circ C=A\circ\{B,C\}_G=A\circ(B\circ C)=A\circ(B\times C)=A\times B\times C$. Тем самым, учитывая (21) и (19*), доказано, что

$$\text{III-3}\Leftrightarrow\langle\text{III-1, III-2}\rangle\not\Rightarrow\text{I, II, III-4, III-5, IV.}\qquad(38)$$

Определение 3. Условимся некоторый набор постулатов называть *замкнутым*, если из него не следует ни один из остальных постулатов. Условимся замкнутость набора постулатов обозначать двойными скобками: $\langle\!\langle\ldots\rangle\!\rangle$

Поясним на примерах. Доказанные выше утверждения (34)—(37) означают, что замкнут каждый из постулатов I-1, II-1, III-1, III-2, порознь взятый. А из (38) следует, что замкнут набор постулатов $\langle$III-1, III-2, III-3$\rangle$. Таким образом, сам факт (38) может быть переписан в новых обозначениях так:

$$\text{III-3}\Leftrightarrow\langle\text{III-1, III-2}\rangle\Leftrightarrow\langle\!\langle\text{III-1, III-2, III-3}\rangle\!\rangle.\qquad(38')$$

Пример 2. Операция, совпадающая со свернутым прямым умножением (см. пример 1), если среди сомножителей нет единичных, а в остальных случаях — с обычным прямым умножением, точна, однако она наследует плохие качества свернутого прямого умножения, да к тому же и перестает удовлетворять постулатам III-1, III-2, III-3. Тем самым доказано утверждение (33).

Пример 3. Операция

$$\prod_{\nu\in I}{}^{\circ}G_\nu=\begin{cases}H_3, & \text{если } |I|=3 \text{ и } G_i=\{g_i\}_\infty,\ i=1,2,3,\\ \prod{}^{\times}G_\nu & \text{в иных случаях}\end{cases}$$

(о H_3 см. § 7, пример *B*) доказывает (34). Действительно, постулаты III-1 и III-2 нарушены по самому закону, определяющему операцию. А в § 7 доказано, что в произведении $H_3=\{g_1\}_\infty\circ\{g_2\}_\infty\circ\{g_3\}_\infty$ выполнен I-1, но нарушены I-2 и I-3, а потому (в силу (1)) и II-1.

Утверждение (35) доказывает

Пример 4.

$$\prod_{\nu\in I}{}^{\circ}G_\nu = \begin{cases} Q, \text{ если } |I|=2 \text{ и } G_i=\{g_i\}_4,\ i=1,2, \\ \prod^{\times}G_\nu, \text{ если } |I|>2 \text{ и все } G_\nu=\{g_\nu\}_4, \\ \prod^{*}G_\nu \text{ в иных случаях.} \end{cases}$$

Действительно, непосредственная проверка показывает, что любые автоморфизмы подгрупп G_1 и G_2 склеиваются в автоморфизм группы кватернионов $Q=G_1\circ G_2$. Поэтому наша операция не только точная, но и симметрическая. Но структура группы Q приводит к нарушению I-1, а потому и всех вообще постулатов I, II и IV групп, за исключением II-1 (I-3) и за возможным исключением постулатов II-3 и II-3*. Однако подгруппа $\{a^2\}_4{}^*\{b\}_4$ произведения $\{a\}_8\circ\{b\}=\{a\}*\{b\}$ не может являться эпиморфным образом группы Q. Поэтому нарушены и II-3, II-3*. Не выполнены для нашей операции и III-1, III-2, а с ними и все постулаты III группы.

Для доказательства (36) и (37) рассмотрим примеры.

Пример 5. Операция, совпадающая с прямым умножением, если все сомножители конечны, и со свободным — в остальных случаях, показывает замкнутость системы

$$\ll \text{I, II-1, II-2, III-1} \gg. \tag{39}$$

Двойственный пример (с переменой ролями прямого и свободного умножений) дает двойственный результат (с заменой II-2 на II-3):

$$\ll \text{I, II-1, II-3, III-1} \gg. \tag{39'}$$

Пример 6. Операция, совпадающая с прямым умножением в случае конечного числа сомножителей и со свободным — при бесконечном их числе, показывает, что

$$\text{II-4}^* \Leftrightarrow \ll \text{I, II, III-2} \gg, \tag{40}$$

а двойственный к нему пример, — что

$$\text{L}=\langle \text{II-4}^*, \text{IV-1}\rangle \Leftrightarrow \langle \text{I-4}^*, \text{IV-1}\rangle \Leftrightarrow \ll \text{I, II, III-2, IV-1} \gg. \tag{41}$$

Сопоставление (38) с (39) дает (36), а с (40) — (37). Теорема 5.1 доказана полностью.

Теорема 5.2. *Замкнута вся группа постулатов* I, *а также любая ее подсистема, состоящая из некоторого ее постулата* (*или некоторого набора ее постулатов*) *и всех постулатов, подчиненных ему в силу схемы* № 1.

Таким образом, теорема утверждает, что, помимо уже доказанных (34) и (35), имеют место следующие факты:

$$\text{A}=\ll \text{I-1, II-1} \gg, \tag{42}$$

$$\text{I-2} \Leftrightarrow \ll \text{I-1, I-2} \gg, \tag{43}$$
$$\text{B} = \langle \text{I-2, II-1} \rangle \Leftrightarrow \ll \text{I-1, I-2, II-1} \gg, \tag{44}$$
$$\text{I-4} \Leftrightarrow \ll \text{I-1, I-2, I-4, II-1} \gg, \tag{45}$$
$$\text{I-4}^* \Leftrightarrow \ll \text{I, II-1} \gg. \tag{46}$$

Для доказательства необходимо построить ряд примеров, часть из которых базируется на использовании групп $H_3^{(2)}$ и $H_2^{(2)}$, описание которых дано в § 7 (см. там пример C).

Пример 7. Рассмотрим операцию:

$$\Pi^{\circ}_{\nu \in I} G_\nu = \begin{cases} H_3^{(2)}, \text{ если } G_\nu = \{g_\nu\}_2 \text{ для } \nu \in J \supseteq I, \text{ где } |J| = 3, \text{ и} \\ \qquad G_\nu = E \text{ для } \nu \in I \setminus J, \\ \Pi^{\times} G_\nu \text{ — в иных случаях, когда все } G_\nu \text{ абелевы,} \\ \Pi^{*} G_\nu \text{ — когда среди } G_\nu \text{ хотя бы одна неабелева.} \end{cases}$$

Из определения операции и свойств группы $H_3^{(2)}$ непосредственно следует, что выполнены I-1, II-1, III-1, но нарушаются I-2, III-2, а потому и III-3 и III-5. На самом деле не удовлетворяется и III-4: в $H_3^{(2)} = \{g_1\}_2 \circ \{g_2\}_2 \circ \{g_3\}_2$ блок $\{g_1, g_2\}$ неабелев, но заведомо не перемножается с $\{g_3\}$ свободным образом. Нарушен и II-2, так как для группы $A = \{a_1\}_4 \circ \{a_2\}_4 \circ \{a_3\}_4 = \{a_1\} \times \{a_2\} \times \{a_3\}$ отображения $a_i \to g_i$ $(i = 1, 2, 3)$ не склеиваются в эпиморфизм A на $H_3^{(2)}$, так как $H_3^{(2)}$ неабелева. Наконец, если $\{b_i\}_4 \subset B_i$, $i = 1, 2, 3$, где все B_i неабелевы, то мономорфизмы $a_i \to b_i$ сомножителей $\{a_i\}$ в B_i не могут склеиться в гомоморфизм A в $B = B_1 \circ B_2 \circ B_3 = B_1 * B_2 * B_3$, так что нарушается и II-3. Таким образом, принимая во внимание схему № 1, получаем

$$\ll \text{I-1, II-1, III-1} \gg. \tag{47}$$

Легкая вариация этого примера, заключающаяся в наложении дополнительного требования, чтобы само I в первом случае состояло лишь из трех элементов, приводит к доказательству (42).

Пример 7′. Операция

$$\Pi^{\circ}_{\nu \in I} G_\nu = \begin{cases} H_3^{(2)}, \text{ тогда же, как и в примере 7,} \\ \Pi^{\times} G_\nu, \text{ если два } G_\nu \text{ 2-го порядка, а остальные } G_\nu = E \\ \Pi^{*} G_\nu \text{ во всех иных случаях} \end{cases}$$

показывает (поскольку четверная группа Клейна является эпиморфным образом группы $H_3^{(2)}$), что

$$\langle \text{II-2, III-1} \rangle \Leftrightarrow \ll \text{I-1, II-1, II-2, III-1} \gg. \tag{48}$$

Если проварьировать этот пример так же, как пример 7, то

$$\text{II-2} \Leftrightarrow \ll \text{I-1, II-1, II-2} \gg. \tag{49}$$

Пример 7″. Операция

$$\overset{\circ}{\Pi} G_\nu = \begin{cases} H_3^{(2)}, \text{ тогда же, что и в примере 7,} \\ H_2^{(2)}, \text{ если два } G_\nu \text{ 2-го порядка, а остальные } G_\nu = E, \\ \overset{\times}{\Pi} G_\nu \text{ —во всех иных случаях} \end{cases}$$

доказывает, что

$$< \text{I-1, II-3, III-1} > \Leftrightarrow \ll \text{I-1, II-1, II-3, III-1} \gg, \tag{50}$$

а если ее проварьировать, как предыдущие, она доказывает, что

$$\mathfrak{X} = < \text{I-1, II-3} > \Leftrightarrow \ll \text{I-1, II-1, II-3} \gg. \tag{51}$$

Пример 8. Из каждой системы групп G_ν, $\nu \in I$, выделяем все группы, являющиеся четверными группами Клейна, и фиксируем для них некоторые прямые разложения $G_\mu = \{a_\mu\}_2 \times \times \{b_\mu\}_2$, $\mu \in J \subseteq I$. По определению полагаем ($K = I \setminus J$):

$$\overset{\circ}{\Pi} G_\nu = \left(\overset{\times}{\Pi}_{\mu \in J} \{a_\mu\}\right) \times \left(\overset{*}{\Pi}_{\mu \in J} \{b_\mu\} * \overset{*}{\Pi}_{\lambda \in K} G_\lambda\right). \tag{*}$$

Ввиду маклейновости свободного и прямого умножений эта операция вполне правильна. Более того, она доказывает, что

$$< \text{I-2, III-3} > \Leftrightarrow \ll \text{I-1, I-2, III-1} - \text{III-3} \gg. \tag{52}$$

Операция же, задаваемая формулой (*) при условии, что все $G_\nu \neq E$, а в иных случаях совпадающая, скажем, со свободным умножением, дает (43).

Пример 9. Операция, совпадающая с прямым умножением, если все сомножители абелевы, и со свободным умножением в иных случаях, показывает, что

$$< \text{I-4*, II-2, III-4} > \Leftrightarrow \ll \text{I, II-1, II-2, III-1, III-4} \gg. \tag{53}$$

Пример 10. Операция, совпадающая со свободным умножением, если все отличные от E сомножители свободны, и с прямым в иных случаях, ввиду теоремы Шрейера о подгруппах свободной группы, устанавливает, что

$$< \text{I-4*, II-3, III-4} > \Leftrightarrow \ll \text{I, II-1, II-3, III-1, III-4} \gg. \tag{53′}$$

Переменой ролями свободного и прямого умножений достигаем результата:

$$< \text{I-4*, III-1} > \Leftrightarrow \ll \text{I, II-1, III-1} \gg. \tag{54}$$

Пример 10′. Условием: произведение совпадает с прямым, если все сомножители свободны, а в иных случаях со свободным, определяется операция, подтверждающая (46).

Пример 11. Рассмотрим *метабелево* умножение (в нильпотентном смысле), т. е. поливербальную операцию $\circ$, определяемую тернарным словом $[[x, y], z]$ и бисловом $[[x, y], y']$ (см. [15], стр. 425). Эта операция ассоциативна (см. там же, стр. 433) и, как всякая поливербальная операция (см. там же, теорема 2), удовлетворяет постулату II-2*. Однако уже простейший случай произведения $G = \{a\}_4 \circ \{b\}_2$ демонстрирует нарушение постулатов I-4* и II-3*. Действительно, как следует из работы [11, стр. 437 и 443—444], G является метабелевой группой 16-го порядка (имеющей номер 9 в списке групп, [66], стр. 39; граф ее нормальных делителей см. там же, стр. 108, символ $\Gamma_2 c_1$), причем ее подгруппы $\{a^2\}_2$ и $\{b\}_2$ перемножаются в G прямым, а не метабелевым образом, а эндоморфизмы $\varphi_a: a \to a^2$, $\varphi_b: b \to b$ исходных сомножителей склеиваются в G в эндоморфизм φ, отображающий всю группу G 16-го порядка на подгруппу $\{a^2\}_2 \times \{b\}_2$ 4-го порядка, так что $\operatorname{Ker}\varphi \neq \{\operatorname{Ker}\varphi_a, \operatorname{Ker}\varphi_b\}^G = \{a^2\}_2$ ($\{a^2\}$ принадлежит центру группы G).

Из всего доказанного, учитывая дополнительно (26) и схему № 1, получаем

$$\mathrm{T} = \langle \text{II-2*, III-5} \rangle \Leftrightarrow \langle \text{II-2*, III-4} \rangle \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ll \text{I-1} - \text{I-4, II-1} - \text{II-3, II-4, III, IV-1} \gg. \qquad (55)$$

Интересно, что этой же аксиоматической характеристикой обладают и все вообще вербальные операции Морана (см. [70], [72] и [44], [3]), отличные от свободного и прямого умножений. Эти операции задаются формулой: $\Pi^V G_\nu = F/V(F) \cap C$, где $F = \Pi^* G_\nu$, $V(F)$ — вербальная подгруппа группы F, определяемая множеством слов V, а $C = [G_\nu | \nu \in I]^F$. Рассмотренное нами метабелево умножение является одним из простейших примеров вербальной операции. В частности, доказанные нами выше утверждения о постулатах I-4* и II-3* вытекают и непосредственно из общих теорем А. Л. Шмелькина и М. А. Бронштейна (см. [45], стр. 627] и [3], стр. 1254).

Пример 12. Е. С. Ляпин [24] ввел точную операцию, определяемую законом: $\Pi^\circ G_\nu = F/L$, где $F = \Pi^* G_\nu$, $L = \{[g_\nu, z_\mu] \mid g_\nu \in G_\nu,\ z_\mu \in Z(G_\mu),\ \nu \neq \mu\}^F$, а $Z(G_\mu)$ — центр группы G_μ. Нетрудно понять, что на абелевых группах ляпинское умножение совпадает с прямым, а на группах без центра — со свободным. Ляпин доказал, что эта операция ассоциативна (что следует и из много более общих последующих результатов М. А. Фридмана (см. [31] и [35])). Ясно, что она симметрична и правильна, а потому и вполне правильна ввиду (25). Поскольку при эпиморфизмах центр отображается в центр, то выполнен и посту-

лат II-2. Оказывается, что никаким другим постулатам, кроме уже перечисленных (т. е. I-1, I-2, II-1, II-2, III), ляпинская операция не удовлетворяет. В силу схемы № 1 для этого достаточно показать, что нарушаются постулаты I-4 и II-3. Невыполненность II-3 сразу обнаруживается на произведении двух групп без центра, если в них выделить неединичные абелевы подгруппы. Для опровержения же I-4 достаточно рассмотреть такой пример. Пусть $G = G_1 \circ G_2$, где $G_i = \{a_i\}_\infty \times (\{b_i\}_\infty * \{c_i\}_\infty)$, $i = 1, 2$. Такие эндоморфизмы сомножителей φ_i: $a_i \to b_i$, $b_i \to 1$, $c_i \to 1$ $(i = 1, 2)$ не склеиваются в эндоморфизм группы G: в $G[a_1, a_2] = 1$, но $[b_1, b_2] \neq 1$, так как наложение на G дополнительных соотношений $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ превращает ее в группу $\{b_1\}_\infty * \{c_1\}_\infty * \{b_2\}_\infty * \{c_2\}_\infty$.

Итак, ляпинская операция демонстрирует, что

$$\mathrm{R} = <\text{II-2, III-5}> \Leftrightarrow \ll \text{I-1, I-2, II-1, II-2, III} \gg. \qquad (56)$$

Теперь доказательство теоремы 5.2 завершается моментально: утверждения (42), (43) и (46) нами уже подтверждены, а что касается остальных, то (45) непосредственно следует из (46) и (55), а (44) — из (45) и (56).

Т е о р е м а 5.3. *Вся группа постулатов* III, *а также и любая ее подсистема, состоящая из некоторого ее постулата (или набора некоторых ее постулатов) и всех постулатов, подчиненных ему в силу схемы* № 1, *замкнуты.*

Частично теорема уже доказана фактами (36), (37) и (38). Остается дополнительно установить, что:

$$\text{III-4} \Leftrightarrow \ll \text{III-1, III-4} \gg, \qquad (57)$$

$$\mathrm{M} = <\text{III-3}, [\text{III-4}]> \Leftrightarrow <\text{III-2, III-4}> \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ll \text{III-1} \Leftrightarrow \text{III-4} \gg, \qquad (58)$$

$$\text{III-5} \Leftrightarrow \ll \text{III} \gg. \qquad (59)$$

Для этого придется построить несколько новых примеров точных операций.

П р и м е р 13. Построим транзитивную, но не правильную и не симметрическую точную операцию. Этим будет подтверждено (59) ввиду (21*).

Произведение $G = \prod_{\nu \in I}^{\circ} G_\nu$ в смысле этой операции определяется так. Среди G_ν выделяются все «множители G_μ 1-го типа», удовлетворяющие набору из следующих трех условий: a) G_μ — неабелев; b) его центр $Z(G_\mu) = \{g_\mu\}_3$; c) $Z(G_\mu)$ выде-

ляется в G_μ прямым сомножителем. Для каждого такого сомножителя G_μ, $\mu \in J \subseteq I$, фиксируется некоторое его прямое разложение: $G_\mu = \{g_\mu\}_3 \times G'_\mu$. Остальные множители G_λ, $\lambda \in K = I \setminus J$, называются «множителями 2-го типа». По определению,

$$G = \prod_{\nu \in I}{}^{\circ} G_\nu = \{a\}_3 \times \left(\prod_{\mu \in J}{}^{*} G'_\mu * \prod_{\lambda \in K}{}^{*} G_\lambda \right), \qquad (*)$$

если $J \neq \varnothing$, и

$$G = \prod_{\nu \in I}{}^{\circ} G_\nu = \prod_{\nu \in I}{}^{*} G_\nu$$

в противном случае, т. е. когда $K = I$. При естественным образом определяемых изоморфизмах вложения множителей G_ν в произведение G построенная операция, очевидно, будет точной: произведение G с точностью до изоморфизма определяется однозначно — оно не зависит от конкретного выбора прямых разложений сомножителей 1-го типа. Однако по самому построению наша операция не является ни правильной, ни симметрической: множители 1-го типа имеют нетривиальное пересечение по подгруппе $\{a\}_3$ и вовсе не все их автоморфизмы допускают склеивание. Поэтому не выполняются и все постулаты I, II и IV групп.

Докажем, что операция транзитивна и потому удовлетворяет в силу (21*) всем постулатам III группы. Действительно, пусть G_ν, в свою очередь, разложены в $\circ$-произведения. Для сомножителей G_μ 1-го типа это означает, что

$$G_\mu = \prod_{\rho_\mu \in I_\mu}{}^{\circ} G_{\mu,\rho_\mu} = \{a\}_3 \times \left(\prod_{\rho'_\mu \in J_\mu}{}^{*} G'_{\mu,\rho'_\mu} * \prod_{\rho''_\mu \in K_\mu}{}^{*} G_{\mu,\rho''_\mu} \right), \qquad (**)$$

причем заведомо $J_\mu \neq \varnothing$, сомножители же 2-го типа, т. е. G_{μ,ρ''_μ}, могут и отсутствовать. Что же касается сомножителей G_λ 2-го типа, то их разложения имеют вид:

$$G_\lambda = \prod_{\sigma_\lambda \in I_\lambda}{}^{\circ} G_{\lambda,\sigma_\lambda} = \prod_{\sigma_\lambda \in I_\lambda}{}^{*} G_{\lambda,\sigma_\lambda}, \qquad (***)$$

где все $G_{\lambda,\sigma_\lambda}$ — сами 2-го типа. Ясно, что при подстановке в (*) разложений (***) никаких трудностей не возникнет. При подстановке же разложений (**) множителей 1-го типа возникают трудности из-за того, что в прямом разложении $G_\mu = \{a\}_3 \times G'_\mu$ неоднозначно определен дополнительный множитель G'_μ. Однако эти трудности снимаются леммой А (см. § 7), смысл которой, собственно говоря, заключается в том, что факт разложимости некоторой группы в $\circ$-произведение

некоторых своих подгрупп не зависит от того, как эти подгруппы (имеющие тип 1) разложены в прямые произведения, одним из сомножителей которых является их центр порядка 3. Поэтому, в силу леммы A, при подстановке в (*) разложений (**) и (***) получим

$$G = \{a\}_3 \times \left(\prod^{*}_{\substack{\rho'_\mu \in J_\mu \\ \mu \in J}} G'_{\mu,\rho'_\mu} * \left(\prod^{*}_{\substack{\rho''_\mu \in K\mu \\ \mu \in J}} G_{\mu,\rho''_\mu} * \prod^{*}_{\substack{\sigma_\lambda \in I_\lambda \\ \lambda \in K}} G_{\lambda,\sigma_\lambda}\right)\right) = \prod^{\circ}_{\substack{\rho'_\mu \in J_\mu \\ \mu \in J}} G_{\mu,\rho_\mu} \circ$$

$$\circ \prod^{\circ}_{\substack{\rho''_\mu \in K_\mu \\ \mu \in J}} G_{\mu,\rho''_\mu} \circ \prod^{\circ}_{\substack{\sigma_\lambda \in I_\lambda \\ \lambda \in K}} G_{\lambda,\sigma_\lambda} = \prod^{\circ}_{\substack{\rho_\mu \in I_\mu \\ \mu \in J}} G_{\mu,\rho_\mu} \circ \prod^{\circ}_{\substack{\sigma_\lambda \in I_\lambda \\ \lambda \in K}} G_{\lambda,\sigma_\lambda}$$

(все фигурирующие здесь записи с $\circ$-произведениями нужно понимать как записи без какой-либо расстановки скобок), чем выполненность постулата III-5 и доказана.

Для доказательства утверждения (58) рассмотрим такую модификацию примера 13.

Пример 14. Из числа групп G_ν, $\nu \in I$, выделяем все те G_μ, $\mu \in J \subseteq I$, которые обладают свободными сомножителями порядка 2 (или сами порядка 2). Для каждой такой группы G_μ фиксируем одно из таких разложений: $G_\mu = \{g_\mu\}_2 * G'_\mu$ и, по определению, полагаем

$$G = \prod^{\circ}_{\nu \in I} G_\nu = \{a\}_2 * \prod^{*}_{\mu \in J} G'_\mu * \prod^{*}_{\lambda \in K} G_\lambda \quad (K = I \setminus J)$$

при изоморфизмах вложения, определяемых тождественными автоморфизмами на G'_μ и G_λ, дополненными отображениями $g_\mu \to a$, $\mu \in J$. Ввиду теоремы об изоморфизме свободных разложений группы (см., например, [22], стр. 219) введенная операция точна. Сами сомножители G_μ в дальнейшем будем считать отождествленными с соответствующими сомножителями группы G, т. е. будем полагать, что $G_\mu = \{a\}_2 * G'_\mu$, $\mu \in J$.

Непосредственно видно, что эта операция локализуема. Несколько более громоздко (если все выписывать фактически), но также непосредственно устанавливается ее блокируемость (здесь вновь приходится использовать теорему об изоморфизме свободных разложений группы: мы должны знать, что группа 2-го порядка не может выделиться свободным сомножителем из свободного произведения групп, не имеющих, каждая, свободных сомножителей 2-го порядка).

Неправильность операции очевидна. Установим ее несимметричность и нетранзитивность. Группу $G = \{a\}_2 * \{b\}_2 * \{c\}_2$ можно рассматривать как $\circ$-произведение

$$G = B \circ C, \quad \text{где } B = \{a\}_2 * \{b\}_2, \quad C = \{a\}_2 * \{c\}_2.$$

Несимметричность операции следует из несклеиваемости в G тождественного автоморфизма сомножителя B с автоморфизмом группы C, отображающим друг в друга элементы a и c. Остается установить нетранзитивность. Нетрудно понять, что можно говорить о таком разложении группы $B : B = B \circ \{b\}_2$, в котором B объединяется с $\{b\}_2$, естественно, по $\{b\}_2$ (а не по $\{a\}_2$, которая и не лежит в $\{b\}_2$). Однако $G \neq B \circ \{b\}_2 \circ C$, так как каждая из этих подгрупп обладает свободным сомножителем 2-го порядка, а пересечение этих подгрупп в G равно E. Тем самым ввиду схемы № 1 утверждение (58), а с ним и (57), в силу (53), доказаны.

Теперь, имея в своем распоряжении теоремы 5.1, 5.2 и 5.3, для полного доказательства теоремы 5 остается установить, что каждый из постулатов групп II и IV вместе с подчиненными ему по схеме № 1 постулатами образует замкнутую систему (за исключением, быть может, постулатов II-3, II-3* и II-3*$^{\text{м}}$, как это указано и в формулировке самой теоремы 5). Учитывая (35), (49), (51) и (40), нам достаточно для этого доказать утверждения:

$$\text{II-2}^* \Leftrightarrow \ll \text{I-1} - \text{I-4},\ \text{II-1} - \text{II-3},\ \text{II-4},\ \text{III-2} \gg, \tag{60}$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{II-3}^* \Leftrightarrow \langle \text{II-1},\ \text{II-3},\ \text{II-3}^*,\ \text{III-2} \rangle \neq \rangle\ \text{I-4},\ \text{I-4}^*,\ \text{II-2},\\ \text{II-2}^*,\ \text{II-4} - \text{II-4}^*,\ \text{III-1},\ \text{III-3} - \text{III-5},\ \text{IV},\end{array}\right\} \tag{61}$$

$$\text{II-4} \Leftrightarrow \ll \text{I-1} - \text{I-4},\ \text{II-1},\ \text{II-2},\ \text{II-3},\ \text{II-4},\ \text{III-2} \gg, \tag{62}$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{II-4}^{*\text{м}} \Leftrightarrow \langle \text{II-2},\ \text{II-3}^* \rangle \Leftrightarrow \langle \text{I-4},\ \text{II-3}^* \rangle \Leftrightarrow \langle \text{I-1} -\\ - \text{I-4},\ \text{II-1},\ \text{II-2},\ \text{II-3} - \text{II-4},\ \text{II-4}^{*\text{м}},\ \text{III-2} \rangle \neq \rangle\\ \neq \rangle \text{III-1},\ \text{III-3} - \text{III-5},\ \text{IV},\end{array}\right\} \tag{63}$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{II-4}^* \Leftrightarrow \langle \text{II-2}^*,\ \text{II-3}^* \rangle \Leftrightarrow \langle \text{I-4}^*,\ \text{II-2}^* \rangle \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow \langle \text{I-4}^*,\ \text{II-3}^* \rangle \Leftrightarrow \langle \text{I-4}^*,\ \text{II-4} \rangle \Leftrightarrow \ll \text{I},\ \text{II},\ \text{III-2} \gg,\end{array}\right\} \tag{64}$$

$$\text{IV-1} \Leftrightarrow \ll \text{I-1} - \text{I-4},\ \text{II-1},\ \text{II-2},\ \text{II-3},\ \text{II-4},\ \text{III-2},\ \text{IV-1} \gg, \tag{65}$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{IV-1}^* \Leftrightarrow \langle \text{II-4}^*,\ \text{III-5} \rangle \Leftrightarrow \langle \text{II-4}^*,\ \text{III-4} \rangle \Leftrightarrow \langle \text{II-2}^*,\\ \text{II-3}^*,\ \text{III-4} \rangle \Leftrightarrow \langle \text{I-4}^*,\ \text{III-5} \rangle \Leftrightarrow\\ \langle \text{I-4}^*,\ \text{III-3},\ \text{III-4} \rangle \Leftrightarrow \langle \text{I-4}^*,\ \text{II-4},\\ \text{III-4} \rangle \Leftrightarrow \langle \text{I-4}^*,\ \text{II-2}^*,\ \text{III-4} \rangle \Leftrightarrow \langle \text{I-4}^*,\ \text{II-2}^*,\\ \text{III-4} \rangle \Leftrightarrow \langle \text{II},\ \text{III} \rangle \Leftrightarrow \langle \text{I},\ \text{II},\ \text{III} \rangle \Leftrightarrow \ll \text{I},\ \text{II},\\ \text{III},\ \text{IV} \gg.\end{array}\right\} \tag{66}$$

Утверждение (60) непосредственно следует из (13), (40) и (55); (61) — из (15), (8′), (27) и (40); (63) — из (17), (40) и (27); (64) — из (7), (40), (29), (30) и (31); наконец, (66) — из (7), (23*), (24), (29), (30), (31) и (32). Для обоснования же (62) и (65) приведем следующий пример.

Пример 15. Рассмотрим одну из операций, введенных М. А. Фридманом [31—35], а именно, операцию, определяемую законом: $G=\Pi^{\circ}G_{\nu}=F/\Phi(F)$, где $F=\Pi^{*}G_{\nu}$, $\Phi(F)=\{[g_{\nu}, s_{\mu}]|g_{\nu}\in G_{\nu}, s_{\mu}\in S(G_{\mu}), \nu\neq\mu\}^{F}$, а $S(G_{\mu})$ — подгруппа, порожденная всеми элементами конечного порядка группы G_{μ}. М. А. Фридманом доказана (см. [35], стр. 168) ее ассоциативность. Ясно, что при любом гомоморфизме φ $\Phi(F)\varphi\equiv\Phi(F\varphi)$; поэтому данная операция удовлетворяет постулату II-4, а следовательно, и IV-1 в силу (26). Однако ввиду свободной функторности прямого и свободного умножений для рассматриваемой операции нарушаются ядерные условия. Действительно, пусть $G_i=\{g_i\}_{\infty}$, $H_{ij}=\{h_{ij}\}_2$, $i, j=1, 2$; тогда $G=G_1\circ G_2=G_1*G_2$, а $H_{11}\circ H_{12}=H_{11}\times H_{12}$ и потому не выполнено ядерное условие для эпиморфизмов (т. е. нарушен II-2*). С другой стороны, мономорфизмы вложения $\varphi_i: G_i\to H_i=H_{i1}*H_{i2}$, определяемые условиями $g_i\to[h_{i1}, h_{i2}]$, $i=1, 2$, склеиваются в гомоморфизм $\varphi: G\to\{H_1', H_2'\}_H=H_1'\times H_2'\subset H$, где $H=H_1\circ H_2=H_1\times H_2$, причем $\operatorname{Ker}\varphi=G'\neq E$, так что не выполняется и постулат II-3*. (Здесь всюду A' означает коммутант группы A.) Учитывая еще (28) и (32), приходим к выводу, что рассматриваемая фридмановская операция доказывает:

$$S=\langle\text{II-4}, \text{III-5}\rangle\Leftrightarrow\langle\text{II-4}, \text{III-4}\rangle\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\langle\text{I-4}, \text{III-5}\rangle\Leftrightarrow\langle\text{III-5}, \text{IV-1}\rangle\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ll\text{I-1} — \text{I-4}, \text{II-1}, \text{II-2}, \text{II-3}, \text{II-4}, \text{III}, \text{IV-1}\gg. \qquad (67)$$

Сопоставление (67) с (40) дает (62), а с (22) и (41) — (65).

Тем самым доказательство теоремы 5 закончено.

§ 4. Вторая схема импликаций

Схема № 1 повершинно полна в пределах каждой из групп I, II, III и IV, порознь взятых. Кроме введенных уже ранее производных постулатов A, B, L, X и M (см. (42), (44), (41), (51) и (58)), введем еще новые производные постулаты, являющиеся комбинациями постулатов из I, II и IV групп, а именно, постулаты

Y, C, D, Z, E, F, G, H, K, V,

определение которых смотрите ниже, в высказываниях (68)—(77). Наконец, введем более краткое обозначение для постулата II-4*м:

$$U = \text{II-4}^{*м} \Leftrightarrow \langle \text{II-2, II-3}^* \rangle.$$

На начальных и введенных нами производных постулатах строим, как на вершинах, граф, направленными ребрами которого являются уже установленные нами (или тривиально проверяемые) импликации (см. Приложение 1, схему № 2). Пунктиром отмечены возможно существующие «обратные» импликации. Им соответствуют пунктиром же обведенные вершины. Таким образом, под вопросом стоит «самостоятельное существование» постулатов X, Y, Z, Ù, V, что может быть сформулировано в виде высказанных в начале § 3 проблем 1, 2, 4 и следующих проблем.

Проблема 3′. Следует ли из $\langle$I-1, II-3*$\rangle$ постулат I-2?

Проблема 5. Следует ли из $\langle$II-3*, IV-I$\rangle$ постулат II-2* (I-4*)?

(Ясно, в какой зависимости находится то или иное решение проблемы 3 от решений проблем 2 и 3′.)

Целью настоящего параграфа является доказательство теоремы:

Т е о р е м а 6. *Схема* № 2 *повершинно полна в совокупности групп* $\langle$I, II, IV$\rangle$ *и отдельно в пределах группы* III *и пореберно полна в целом с точностью до оставшихся открытыми проблем 1, 2, 3′, 4 и 5.*

Как и при доказательстве теоремы 5, установление повершинной полноты в объединении $\langle$I, II, IV$\rangle$ вновь элементарно. Нужно за основу взять теорему 5 и сначала доказать полноту в пределах $\langle$I, II$\rangle$, комбинируя по очереди постулат II-3 со всеми постулатами I группы, постулат II-2 — с постулатами I-2, I-4, I-4* и постулат II-3* — с I-1 и I-2. Затем нужно вспомнить импликации (27), (29), (30) и (31). Наконец, тот факт, что различных производных постулатов, в которых участвует постулат IV-1 и постулаты из $\langle$I, II$\rangle$, не более трех (K, V и L), непосредственно следует из (22) и (31).

Переходим к доказательству пореберной полноты схемы. Существование всех импликаций, которым на схеме соответствуют сплошные (непунктирные) ребра, очевидно: они или повторяют то, что уже было на схеме № 1, или элементарно следуют из определений вновь введенных производных постулатов. Нужно лишь доказать саму пореберную полноту, т. е. что нет никаких иных импликаций, кроме импликаций, соответствующих направленным путям схемы № 2, с точностью

до указанных выше проблем. Для этого, учитывая переберную полноту схемы № 1, достаточно доказать следующие утверждения, относящиеся к вновь введенным производным постулатам:

$$Y = \langle \text{I-1, II-3*} \rangle \Leftrightarrow \langle \text{I-1, II-1, II-3, II-3*, III-2} \rangle \neq\rangle \neq\rangle \text{I-4, I-4*, II-2, II-2*, II-4} - \text{II-4*, III-1, III-3} - \text{III-5, IV}, \quad (68)$$

$$C = \langle \text{I-2, II-2} \rangle \Leftrightarrow \ll \text{I-1, I-2, II-1, II-2} \gg, \quad (69)$$

$$D = \langle \text{I-2, II-3} \rangle \Leftrightarrow \ll \text{I-1, I-2, II-1, II-3} \gg, \quad (70)$$

$$Z = \langle \text{I-2, II-3*} \rangle \Leftrightarrow \ll \text{I-1, I-2, II-1, II-3, II-3*, III-2} \gg, \quad (71)$$

$$E = \langle \text{I-4, II-2} \rangle \Leftrightarrow \ll \text{I-1} - \text{I-4, II-1, II-2} \gg, \quad (72)$$

$$F = \langle \text{I-4, II-3} \rangle \Leftrightarrow \ll \text{I-1} - \text{I-4, II-1, II-3} \gg, \quad (73)$$

$$G = \langle \text{I-4*, II-2} \rangle \Leftrightarrow \ll \text{I, II-1, II-2} \gg, \quad (74)$$

$$H = \langle \text{I-4*, II-3} \rangle \Leftrightarrow \ll \text{I, II-1, II-3} \gg, \quad (75)$$

$$K = \langle \text{II-2*, IV-1} \rangle \Leftrightarrow \ll \text{I-1} - \text{I-4, II-1} - \text{II-3, II-4, III-2, IV-1} \gg, \quad (76)$$

$$V = \langle \text{II-3*, IV-1} \rangle \Leftrightarrow \langle \text{II-4*}^{\text{м}}\text{, IV-1} \rangle \Leftrightarrow \langle \text{I-1} - \text{I-4, II-1, II-2, II-3} - \text{II-4*}^{\text{м}}\text{, III-2, IV-1} \rangle \neq\rangle \text{III-1, III-3} - \text{III-5, IV-1*}, \quad (77)$$

и воспользоваться ранее доказанными аналогичными утверждениями (41) и (51) для постулатов L и X.

Часть из утверждений (68)—(77) следует из уже известных нам. А именно, (68) и (71) вытекают из (15), (8′), (27), (40); (69) — из (39), (56) и (62); (70) — из (39′), (8′), (27) и (62); (76) — из (41), (55), (60) и (65); наконец, (77) следует из (41) и (63). Для доказательства остальных, т. е. (72)—(75), рассмотрим несколько новых примеров.

Пример 16. Положим, по определению, операцию совпадающей со свободным умножением, если все множители отличны от E, а в противном случае — совпадающей с прямым умножением. Непосредственно проверяется, что это — G-операция и что она не обладает свойствами II-3, III-1 и III-2, а потому (в силу схемы № 1) не удовлетворяет и всем постулатам II-2*—II-4*, III, IV, чем подтверждено (74). С помощью дуальной операции (в которой поменены ролями свободное и прямое произведения) убеждаемся в справедливости (75).

Пример 17. Пусть Ф—фридмановская операция по периодической части (см. пример 15). Мы уже знаем (см. (67)), что эта операция не удовлетворяет постулату I-4*. Покажем, что этот постулат нарушается для нее уже на абелевых множителях. Действительно, для $A = \{a\}_\infty$, $B = \{b\}_\infty$, $C = \{c\}_2$,

$H = A * B$, $K = B \times C$, учитывая ассоциативность операции Ф. получаем:

$$G = A\Phi B\Phi C = (A\Phi B)\Phi C = H \times C,$$
$$G = A\Phi(B\Phi C) = A\Phi K.$$

Эндоморфизмы $\varphi^A : A \to A$, $\varphi_K : K \to K$, определенные условиями: $a \to a$, $b \to c$, $c \to 1$, склеиваются (в силу I-4, см. (67)) в эндоморфизм $\varphi : G \to G$, причем $G\varphi = A \times C$. Но $N \equiv \equiv \{\mathrm{Ker}\varphi_A,\ \mathrm{Ker}\varphi_K\}^G = \{b^2,\ c\}^G = \{b^2\}^H \times C$, откуда $G/N \cong \cong (H/\{b^2\}^H) \times (C/C) \cong A * (B/B^2) = \{a\}_\infty * \{b'\}_2$. Сопоставляя это с равенством $G\varphi = A \times C$, получаем, что $G\varphi$ не изоморфна G/N, т. е. постулат I-4* нарушается для произведения $A\Phi K$ с абелевыми множителями A и K. Поэтому I-4* нарушается и для операции $\circ$, определяемой условиями

$$\Pi^\circ G_\nu = \begin{cases} \Pi^\Phi G_\nu, & \text{если все } G_\nu \text{ абелевы,} \\ \Pi^* G_\nu, & \text{в иных случаях.} \end{cases}$$

Из (67) следует, что эта новая операция удовлетворяет постулатам I-1, I-2, I-4, II-1, II-2 и III-1. Однако очевидным образом нарушаются постулаты II-3 (а потому и II-4, II-2*, II-3*, IV) и III-2 и III-4, как показывает пример:

$$\{a\}_\infty \circ \{b\}_\infty \circ \{c\}_2 = \{a\}\Phi\{b\}\Phi\{c\} = (\{a\} * \{b\}) \times \{c\},$$

в то время как $(\{a\} * \{b\}) \circ \{c\} = (\{a\} * \{b\}) * \{c\}$.

Итак, построенная операция демонстрирует, что

$$< \text{I-4, II-2, III-1} > \Leftrightarrow \ll \text{I-1} - \text{I-4, II-1, II-2, III-1} \gg. \quad (78)$$

Такая ее модернизация

$$\Pi^\circ G_\nu = \begin{cases} \Pi^\Phi G_\nu, & \text{если все } G_\nu \neq E \text{ и абелевы,} \\ \Pi^\times G_\nu, & \text{если все } G_\nu \text{ абелевы и хотя бы одна } G_\nu = E, \\ \Pi^* G_\nu & \text{в иных случаях} \end{cases}$$

доказывает (72). Наконец, операции, получающиеся из них заменой ролями свободного и прямого произведений, дают такой результат:

$$< \text{I-4, II-3, III-1} > \Leftrightarrow \ll \text{I-1} - \text{I-4, II-1, II-3, III-1} \gg \quad (79)$$

и соответственно (73).

Доказательство теоремы 6 закончено.

§ 5. Описание всех типов ассоциативных и всех типов функторных операций

Расширим схему № 2 до схемы, содержащей, с одной стороны, все типы ассоциативных операций (точнее — даже всех М-операций), а с другой, — все функторные операции. Для наиболее интересных производных постулатов, возникающих при комбинировании между собой постулатов из объединенной группы $<$I, II, IV$>$ и группы III, введем специальные индивидуальные обозначения: R, S, T (см. (56), (67) и (55) соответственно) и N, O, P, Q, W_3, W_D, W_{3^*}, W_Z, W_V (см. (82)—(90)). Обозначения же остальных возникающих производных постулатов расшифровываются формулой:

$$J_n = <J,\ III\text{-}n>,$$

где J — произвольный постулат из объединенной группы $<$I, II, IV$>$, а $n = 1, 2, 3$ или 4.

При построении расширенной схемы № 3 (см. Приложение 1) остались неразрешенными следующие вопросы (дополнительно к ранее сформулированным проблемам 1, 2, 3, 3′, 4 и 5):

Проблема 1_5. Следует ли из $<$II-3, III-5$>$ постулат I-1?

Проблема 2_5. Следует ли из $<$II-3*, III-5$>$ постулат I-1?

Проблема 4_3. Следует ли из $<$II-4*^{M}, III-3$>$ постулат II-2* (I-4*)?

Проблема 5_3. Следует ли из $<$II-3*, III-3, IV-1$>$ постулат II-2* (I-4*)?

Проблема 5_5. Следует ли из $<$II-3*, III-5, IV-1$>$ постулат II-2* (I-4*)?

Проблема 6_5. Следует ли из $<$I-2, II-3, III-5$>$ постулат II-2 (I-4)?

Проблема 7_5. Следует ли из $<$I-2, II-3*, III-5$>$ постулат II-2 (I-4)?

Теорема 7. *Схема импликаций* № 3 *обладает следующими свойствами:* 1) *она повершинно полна в объединенной группе* $<$I, II, IV$>$ *и отдельно в пределах группы* III; 2); *она содержит все типы ассоциативных операций (даже все типы* М-*операций);* 3) *она содержит все типы функторных (т. е.* II-4-)*операций;* 4) *она пореберно полна в целом с точностью до 12 проблем* — 1, 2, 3′, 4, 5, 1_5, 2_5, 4_3, 5_3, 5_5, 6_5, 7_5, *которым соответствуют пунктирные «обратные» ребра.*

Доказательство. Утверждение 1) следует из того простого факта, что схема № 3 является развитием схемы № 2. Перейдем теперь к пункту 3). Пусть J — любой постулат

из $<$I, II, IV$>$, лежащий над II-4, т. е. такой, что J$\Rightarrow$II-4. В силу импликации II-4$\Rightarrow$III-2 (см. (16)) имеют место равенства:

$$J_2 = J,\ J_3 = J_1,\ J_5 = J_4$$

см. (19*), (20), (24)). Поэтому каждая такая вершина J в рассматриваемой схеме № 3 может быть продублирована лишь еще двумя, для которых нам представляются предпочтительными обозначения J_1 и J_5. Но возможные вершины типа J_5, ввиду (26), исчерпываются вершинами S, T, W_V и IV-1*. Самостоятельное существование вершин S и T доказано раньше (см. (67) и (55)); аналогичный вопрос для W_V составляет проблему 5_5; носителями типа IV-1*, как мы знаем, являются прямое и свободное умножения.

Схема № 2 показывает, что ни из какого постулата объединенной группы $<$I, II, IV$>$ (кроме IV-1*) не следует постулат III-1 (а потому и III-3, III-4, III-5). Для доказательства же самостоятельного существования всех вершин J_1 решающую роль играют два следующих факта:

$$\text{II-}4_1^* = <\text{II-4*, III-1}> \Leftrightarrow <\text{I-4*, II-4, III-1}> \Leftrightarrow \Rightarrow \ll \text{I, II, III-1} - \text{III-3, IV-1} \gg, \tag{80}$$

$$L_1 = <\text{II-4*, III-1, IV-1}> \Leftrightarrow <\text{I-4*, III-1, IV-1}> \Leftrightarrow \Leftrightarrow \ll \text{I, II, III-1} - \text{III-3, IV-1} \gg, \tag{81}$$

первый из которых установлен Г. К. Геновым (см. [7], стр. 449) построением семейства неассоциативных мальцевских нейтральных поливербальных операций, не удовлетворяющих постулату IV-1. Операциями же типа L_1 являются все отличные от свободного и прямого умножений операции Грюнберга — Шмелькина (см. введение к настоящей статье), как это следует из теорем 13 и 14 [1], стр. 1225—1226. (Для простейшей операции Грюнберга —Шмелькина, определяемой коммутантом декартовой подгруппы, это установлено еще Р. Стрейк [83], стр. 434 и М. А. Бронштейном [3], стр. 1255*.

Самостоятельное же существование всех остальных вершин J_1 (с точностью до проблем 4_3 и 5_5) теперь непосредственно выводится из (80) и (81) и дополнительно на основании (55) и (67), а именно: для V_1 это следует из (81), для K_1 — из (81)

---

* Попутно заметим, что именно в интересующем нас месте на стр. 1255 из [3] допущена опечатка: на 10-й строке сверху вместо $<$II-4*, IV$>\Rightarrow$ III-3 должно стоять $<$II-4*, IV$>\neq$ III-3. Кроме того, необходимо отметить, что в этой работе использована система обозначений постулатов из [16], частично отличающаяся от употребляемой нами сейчас.

и (55), для U_1 — из (80), для $II\text{-}2_1^*$ — из (80) и (55), для $IV\text{-}1_1$ — из (81) и (67), для $II\text{-}4_1$ — из (80) и (67).

Остается провести анализ, касающийся «правой» стороны схемы № 3, точнее, ее части, расположенной над M.

В дополнение к ранее доказанным утверждениям (56), (67) и (55), относящимся к постулатам R, S и T, докажем аналогичные утверждения для остальных производных постулатов, связанных с ассоциативностью:

$$N=\langle I\text{-}1,\ M\rangle=\langle I\text{-}1,\ III\text{-}3,\ III\text{-}4\rangle\Leftrightarrow\langle I\text{-}1,\ III\text{-}2,\ III\text{-}4\rangle\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ll I\text{-}1,\ I\text{-}2,\ III\text{-}1-III\text{-}4\gg, \tag{82}$$

$$O=\langle I\text{-}1,\ III\text{-}5\rangle\Leftrightarrow\ll I\text{-}1,\ I\text{-}2,\ III\gg, \tag{83}$$

$$P=\langle II\text{-}1,\ III\text{-}5\rangle\Leftrightarrow\langle II\text{-}1,\ III\text{-}3,\ III\text{-}4\rangle\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\langle II\text{-}1,\ III\text{-}2,\ III\text{-}4\rangle\Leftrightarrow\ll II\text{-}1,\ III\gg, \tag{84}$$

$$Q=\langle A,\ III\text{-}5\rangle=\langle I\text{-}1,\ II\text{-}1,\ III\text{-}5\rangle\Leftrightarrow\langle I\text{-}1,\ II\text{-}1,\ III\text{-}2,$$
$$III\text{-}4\rangle\Leftrightarrow\ll I\text{-}1,\ I\text{-}2,\ II\text{-}1,\ III\gg, \tag{85}$$

$$W_3=\langle II\text{-}3,\ III\text{-}5\rangle\Leftrightarrow\langle II\text{-}3,\ III\text{-}2,\ III\text{-}4\rangle\Leftrightarrow\langle II\text{-}1,$$
$$II\text{-}3,\ III\rangle\neq\rangle I\text{-}4^*,\ II\text{-}2^*,\ II\text{-}3^*,\ II\text{-}4^{*м},\ II\text{-}4^*,\ IV\text{-}1^*, \tag{86}$$

$$W_D=\langle D,\ III\text{-}5\rangle=\langle I\text{-}2,\ II\text{-}3,\ III\text{-}5\rangle\Leftrightarrow\langle I\text{-}1,\ II\text{-}3,$$
$$III\text{-}2,\ III\text{-}4\rangle\Leftrightarrow\langle I\text{-}1,\ I\text{-}2,\ II\text{-}1,\ II\text{-}3,\ III\rangle\Rightarrow \tag{87}$$
$$\Rightarrow I\text{-}4^*,\ II\text{-}2^*,\ II\text{-}3^*,\ II\text{-}4^{*м},\ II\text{-}4^*,\ IV\text{-}1^*,$$

$$W_{3^*}=\langle II\text{-}3^*\ \ III\text{-}5\rangle\Leftrightarrow\langle II\text{-}3^*,\ III\text{-}2,\ III\text{-}4\rangle\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\langle II\text{-}1,\ II\text{-}3,\ II\text{-}3^*,\ III\rangle, \tag{88}$$

$$W_Z=\langle Z,\ III\text{-}5\rangle=\langle I\text{-}2,\ II\text{-}3^*,\ III\text{-}5\rangle\Leftrightarrow\langle I\text{-}1,\ II\text{-}3^*,\ III\text{-}2,$$
$$III\text{-}4\rangle\Leftrightarrow\langle I\text{-}1,\ I\text{-}2,\ II\text{-}1,\ II\text{-}3,\ II\text{-}3^*,\ III\rangle, \tag{89}$$

$$W_V=\langle V,\ III\text{-}5\rangle=\langle II\text{-}3^*,\ III\text{-}5,\ IV\text{-}1\rangle\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\langle I\text{-}4,\ II\text{-}3^*,\ III\text{-}2,\ III\text{-}4\rangle\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\langle I\text{-}1-I\text{-}4,\ II\text{-}1,\ II\text{-}2,\ II\text{-}3-II\text{-}4^{*м},\ III,\ IV\text{-}1\rangle. \tag{90}$$

Для этого потребуется построить несколько новых примеров.

Пример 18. Рассмотрим операцию $\circ$, определяемую следующим образом. Из любой непустой системы групп G_ν, $\nu\in I$, выделяем все группы «1-го типа» — те и только те группы G_μ, $\mu\in J\subseteq I$, которые, не будучи свободными, представимы в виде $G_\mu=F_\mu * H_\mu$, где F_μ — свободная группа, а из H_μ не выделяется свободным сомножителем никакая свободная подгруппа. Для каждой такой группы G_μ фиксируем некоторое такое разложение (этих разложений много, но они все

изоморфны в силу теоремы об изоморфизме свободных разложений произвольной группы). По определению, полагаем

$$\prod_{\nu\in I}{}^{\circ} G_\nu = \prod_{\mu\in J}{}^{*} F_\mu * \left(\prod_{\mu\in J}{}^{\times} H_\mu \times \prod_{\lambda\in K}{}^{\times} G_\lambda\right),$$

где $K = I \setminus J$. Эта операция, очевидно, точна, и для нее выполняются постулаты I-2, III-3 и III-4. Доказательство блокируемости базируется на теореме Бэра и Леви (см. Курош [22], стр. 221), утверждающей, что группа не может одновременно разлагаться в свободное и прямое произведения.

Покажем, однако, что эта операция несимметрическая и нетранзитивная. Действительно, если $G_1 = \{a\}_\infty * \{b\}_2$, $G_2 = \{c\}_2$, то $G_1 \circ G_2 = \{a\} * (\{b\} \times \{c\})$. Внутренний автоморфизм φ_a сомножителя G_1, порожденный элементом a, не склеивается с тождественным автоморфизмом сомножителя G_2. В самом деле, $[b, c] = 1$, однако $[a^{-1}ba, c] = a^{-1}b^{-1}ac^{-1}a^{-1}bac \neq 1$. Итак, II-1 не выполняется. Если же $G_1 = \{a\}_\infty * \{b\}_\infty * (\{c\}_2 \times \{d\}_2)$, а $G_2 = \{g\}_2$, то $G = G_1 \circ G_2 = \{a\} * \{b\} * (\{c\} \times \{d\} \times \{g\})$. Применяя к G_1 автоморфизм φ_a, получаем $G_1 = \{a\} * \{a^{-1}ba\} * (\{a^{-1}ca\} \times \times \{a^{-1}da\}) = G_{11} \circ G_{12}$, где $G_{11} = \{a\} * \{a^{-1}ca\}$, $G_{12} = \{a^{-1}ba\} * * \{a^{-1}da\}$. Если бы $\{G_{11}, G_{12}, G_2\}_G = G_{11} \circ G_{12} \circ G_2$, то, в частности было бы $[a^{-1}da, g] = 1$, что не имеет места в G. Таким образом, не выполнен и постулат III-5.

Построенный пример доказывает утверждение (82), если дополнительно учесть схему импликаций № 1.

Замечание. Такая вариация предыдущей операции: если все сомножители принадлежат многообразию метабелевых групп (в нильпотентном смысле), то под их $\circ$-произведением понимается свободное произведение этого многообразия (т. е. так называемое метабелево произведение — см. пример 11), в иных же случаях произведение берется в смысле только что рассмотренной операции, — теряет дополнительно свойства III-2 и III-3, сохраняя, однако, I-2 и III-4. Таким образом, попутно мы установили, что

$$\langle\text{I-2, III-4}\rangle \Leftrightarrow \ll\text{I-1, I-2, III-1, III-4}\gg \qquad (91)$$

Пример 19. Для обоснования утверждения (83) усовершенствуем операцию из примера 8 (см. § 3) следующим образом. В произведении $G = \prod_{\nu\in I}{}^{\circ} G_\nu$ сомножители G_ν подразделяем на три категории: 1) сомножители 1-го типа G_μ, $\mu \in J$, являющиеся четверными группами Клейна; для каждого из них фиксируем разложение $G_\mu = \{a_\mu\}_2 \times \{b_\mu\}_2$; 2) сомножители 2-го типа G_λ, $\lambda \in K$, —

неабелевы, с выделяющимися прямыми сомножителями центрами Z_λ, являющимися элементарными абелевыми 2-группами: $G_\lambda = Z_\lambda \times G^*_\lambda$, $Z^*_\lambda = \prod^*_{\omega_\lambda \in \Omega\lambda} \{c_{\lambda,\omega_\lambda}\}_2$, $G^*_\lambda \neq E$; 3) сомножители 3-го типа $G_\varkappa$, $\varkappa \in L$, — все остальные. По определению,

$$G = \prod^{\circ}_{\nu \in I} G_\nu = \prod^{\times}_{\mu \in J} \{a_\mu\}_2 \times \prod^{\times}_{\substack{\omega_\lambda \in \Omega_\lambda \\ \lambda \in K}} \{c_{\lambda,\omega_\lambda}\}_2 \times \left(\prod^*_{\mu \in J} \{b_\mu\}_2 * \prod^*_{\lambda \in K} G^*_\lambda * \prod^*_{\varkappa \in L} G_\varkappa \right).$$

Эта операция является в точности O-операцией. Действительно, из-за сомножителей 1-го типа нарушается II-1, а потому и все постулаты I-4, I-4*, II, IV. Ясно, что эта операция вновь вполне правильная (I-2). Докажем ее транзитивность. Сомножители 1-го типа $\circ$-неразложимы. С сомножителями 3-го типа все благополучно, так как они либо $\circ$-неразложимы, а если и разложимы, то их $\circ$-разложение совпадает со свободным разложением. Трудности возникают лишь при рассмотрении сомножителей 2-го типа. Однако они разрешаются замечанием к лемме A (см. § 7). Утверждение (83) доказано.

З а м е ч а н и е. Такие две вариации операции примера 8:

1) $\circ$-произведение задается формулой (*) примера 8, если среди сомножителей ровно две четверных группы Клейна, а в иных случаях совпадает со свободным произведением;

2) $\circ$-произведение задается формулой (*) при конечном числе сомножителей, а в иных случаях совпадает со свободным — доказывают соответственно утверждения:

$$\langle \text{I-2, III-1} \rangle \Leftrightarrow \ll \text{I-1, I-2, III-1} \gg, \tag{92}$$

$$\langle \text{I-2, III-2} \rangle \Leftrightarrow \ll \text{I-1, I-2, III-2} \gg. \tag{93}$$

П р и м е р 20. Для доказательства утверждения (84) рассмотрим такую вариацию примера 13 (см. § 3): в определение «множителей 1-го типа» введем единственное изменение — их центр должен быть не третьего, а второго порядка. Во всем остальном конструкцию сохраним. При этом транзитивность операции, естественно, не нарушится; по-прежнему будет она неправильной. Однако ввиду поэлементной неподвижности центра второго порядка при любых автоморфизмах группы, а также ввиду леммы A (см. § 7) и симметричности свободного и прямого умножений новая операция будет уже симметрической (в отличие от операции примера 13). Наконец, поскольку у сомножителей 2-го типа могут иметься подгруппы, удовлет-

воряющие условиям, определяющим сомножители 1-го типа, нарушается постулат II-3. Тем самым, учитывая схему № 2, приходим к обоснованию утверждения (84).

Пример 21. Справедливость утверждения (85) доказывается следующей операцией. В произведении $G = \prod\limits_{\nu \in I}^{\circ} G_\nu$ различаются два типа сомножителей: сомножители 1-го типа G_μ, $\mu \in J \subseteq I$, — абелевы группы и неабелевы с нетривиальными центрами Z_μ, выделяющимися прямыми сомножителями, $G_\mu = Z_\mu \times \widetilde{G}_\mu$; остальные сомножители G_λ, $\lambda \in K = I \setminus J$,—2-го типа. По определению,

$$G = \prod_{\nu \in I}^{\circ} G_\nu = \prod_{\mu \in J}^{\times} Z_\mu \times \left(\prod_{\mu \in J}^{*} \widetilde{G}_\mu * \prod_{\lambda \in K}^{*} G_\lambda \right).$$

Полная правильность этой операции очевидна. Ее симметричность устанавливается так же, как и в предыдущем примере. В силу (24) для доказательства ее ассоциативности достаточно убедиться в ее локализуемости и блокируемости, которые, однако, непосредственно следуют из локализуемости и блокируемости прямого и свободного умножений. Остается убедиться в нарушении постулатов II-2, II-3 и I-4. Рассмотрим естественные эпиморфизмы $\varphi_i : G_i = A_i \times F_i \to H_i = A_i \times M_i$, $i = 1, 2$, где A_i — неединичные абелевы, F_i — свободные неабелевы, $M_i = F_i / {}^3F_i$. Но у M_i центры не выделяются прямыми сомножителями и потому $H = H_1 \circ H_2 = H_1 * H_2 = (A_1 \times \times M_1) * (A_2 \times M_2)$. Следовательно, φ_i не могут склеиться в эпиморфизм $\varphi : G = G_1 \circ G_2 \to H$, так как в G подгруппы A_1 и A_2 перемножаются прямым образом, а в H — свободным. Нарушен и постулат II-3: достаточно рассмотреть произведение двух групп без центра и выделить в сомножителях абелевы подгруппы. Наконец, эндоморфизмы групп $G_i = \{a_i\}_\infty \times (\{b_i\}_\infty * * \{c_i\}_\infty)$, $i = 1, 2$, определяемые условиями: $\psi_i : a_i \to b_i$, $b_i \to 1$, $c_i \to 1$, не могут склеиться в эндоморфизм произведения $G_1 \circ \circ G_2 = \{a_1\} \times \{a_2\} \times (\{b_1\} * \{c_1\} * \{b_2\} * \{c_2\})$, так как $a_1 a_2 = a_2 a_1$, но $b_1 b_2 \neq b_2 b_1$.

Замечание. Операция, совпадающая с только что рассмотренной при условии, что каждый сомножитель G_ν без кручения (или равен E), а в остальных случаях совпадающая со свободным умножением, доказывает (с учетом (25)), что

$$\begin{aligned} &< \text{I-1, II-1, III-4} > \Leftrightarrow < \text{I-2, II-1, III-4} > \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ll \text{I-1, I-2, II-1, III-1, III-4} \gg. \end{aligned} \tag{94}$$

А если условие «без кручения» заменить условием периодичности, убеждаемся в том, что:

$$<\text{I-2, II-1, III-1}> \Leftrightarrow \ll\text{I-1, I-2, II-1, III-1}\gg. \qquad (95)$$

При этом для того чтобы убедиться, скажем, в нарушении постулата II-2, достаточно рассмотреть естественные эпиморфизмы $\varphi_i : G_i = A_i \times B_i \to H_i = A_i \times M_i (i = 1, 2)$, где A_i — конечная абелева группа, B_i — конечная группа без центра, обладающая фактор-группой M_i с нетривиальным центром, не выделяющимся прямым сомножителем (таковой является, например, сплетение $S_3 \mathrm{wr} Q$, где S_3 — симметрическая группа третьей степени, а Q — группа кватернионов; здесь можно M_i взять изоморфной Q; (см., например, [5], стр. 1222).

Учитывая последние рассуждения, легко понять, что наложение в примере 21 на сомножители 1-го типа дополнительного условия их периодичности приводит к операции, доказывающей, что

$$<\text{I-2, II-1, III-3}> \Leftrightarrow \ll\text{I-1, I-2, II-1, III-1} - \text{III-3}\gg. \qquad (96)$$

Что касается утверждений (86)—(90), то они весьма слабы, что объясняется тем простым фактом, что никаких ассоциативных мальцевских операций (отличных от прямого и свободного умножений) до сих пор неизвестно. А все известные ассоциативные операции, удовлетворяющие ослабленному постулату Мальцева II-3, являются S-операциями. Сами же утверждения (86)—(90) — прямые следствия уже известных нам. А именно, (86) следует из (67), (14), (24), (58) и (21*); (87) — из (67), (25) и (86); (88)— из (86); (89)— из (87); наконец, (90)— из (67).

Доказательство теоремы 7, т. е. обоснование схемы импликаций № 3, завершено.

§ 6. Описание всех типов регулярных операций

Целью настоящего параграфа является осуществление полной аксиоматической классификации всех регулярных операций, т. е., напоминаем, операций, удовлетворяющих постулату правильности I-1, постулату симметричности II-1 и постулату об единичных сомножителях III-1. Такую классификацию нам удалось провести полностью с точностью до восьми оставшихся открытыми вопросов: пять из них совпадают со сформулированными нами ранее проблемами 4_3, 5_3, 5_5, 6_5 и 7_5 (см. начало § 5), а остальные три таковы:

Проблема $3_3'$. Следует ли из $<\text{I-1, II-3*, III-3}>$ постулат I-2?

Проблема 6_4. Следует ли из $<$I-2, II-3, III-4$>$ постулат I-4?

Проблема 8_3. Следует ли из $<$I-1, II-3, III-3$>$ постулат I-2?

Итогом этой классификации является схема № 4 (см. Приложение 1).

Теорема 8. *Схема импликаций № 4 повершинно и пореберно полна в целом с точностью до 8 пунктирных «обратных» ребер. Другими словами, схема № 4 дает полную классификацию всех типов регулярных операций с точностью до 8 указанных выше проблем.*

Доказательство теоремы начнем с установления ее повершинной полноты в целом. В основе новой схемы лежит схема № 3, причем отрезки схемы № 3, расположенные между вершинами Q и IV-1*, а также между II-4_1 и IV-1*, полностью (и без каких-либо пополнений) входят в состав схемы № 4.

Все регулярные операции, по своему определению, удовлетворяют постулату

$$r = A_1 = <\text{I-1, II-1, III-1}>,$$

чему соответствует «атомность» самой нижней вершины схемы № 4. Все типы ассоциативных регулярных операций (как показывает схема № 3) исчерпываются вершинами схемы № 4, заполняющими отрезок между Q и IV-1*. Что же касается любого (начального или производного) постулата J из $<$I, II, IV$>$, лежащего в схеме № 3 между A и IV-1* (остальные постулаты из объединенной группы $<$I, II, IV$>$, очевидно, нужно теперь отбросить), то ему в схеме № 4 может соответствовать априори максимум четыре дубликата: J_1, J_2, J_3 и J_4. Однако в регулярном случае ввиду (19*) $J_2 = J_3$. Таким образом, остаются лишь вершины J_1, J_3 и J_4. В такую тройку вершин J_1, J_3, J_4 на схеме № 4 и превратилась каждая вершина J схемы № 3, принадлежащая к $<$I, II, IV$>$, отличная от I-1, I-2, II-1 и II-3 и не лежащая ни над II-4, ни над II-3*, за исключением следующих особых случаев: 1) вершина I-$2_{г4} = B_4$ совпала с III-$4_г = <$I-1, II-1, III-4$>$ (ввиду (25)); 2) вершина II-2_3 — с C_3 (ввиду (19) и (25′)), а вершина II-2_4 — с C_4 (ввиду (25)); 3) вершина II-$3_{г4} = X_4$ — с D_4 (ввиду (25)).

Замечание. Здесь и на схеме № 4 даем предпочтение обозначениям:

$$\text{I-}2_г,\ \text{II-}3_г,\ \text{II-}3^*_г,\ \text{III-}3_г,\ \text{III-}4_г,\ \text{III-}5_г$$

вместо соответственно стандартных

$$B_1,\ X_1,\ Y_1,\ A_3,\ A_4,\ Q.$$

Наконец, что касается вершин Y и Z схемы № 3, им соответствуют на схеме № 4 вершины $II\text{-}3^*_r$ и Z_1 и только — ввиду импликаций $II\text{-}3^* \Rightarrow II\text{-}1$, III-2 (см. (15) и (24)).

Итак, доказана повершинная полнота схемы № 4 в целом. Что же касается ребер схемы № 4, то они либо совпадают с одноименными ребрами схемы № 3, либо «вторят» им по принципу: «если $J \Rightarrow I$, то и $J_n \Rightarrow I_n$», либо имеют вид: $J_5 \Rightarrow J_4$, $J_5 \Rightarrow J_3$ $J_4 \Rightarrow J_1$, либо тривиальны (в самом низу схемы). Однако для доказательства пореберной полноты схемы нужно еще предварительно установить следующие дополнительные факты:

$$Z_1 = \langle \text{I-2, II-3*, III-1} \rangle \Leftrightarrow \ll \text{I-1, I-2, II-1, II-3, II-3*, III-1 — III-3} \gg, \tag{97}$$

$$G_3 = \langle \text{I-4*, II-2, III-3} \rangle \Leftrightarrow \ll \text{I, II-1, II-2, III-1 — III-3} \gg, \tag{98}$$

$$H_3 = \langle \text{I-4*, II-3, III-3} \rangle \Leftrightarrow \ll \text{I, II-1, II-3, III-1 — III-3} \gg, \tag{99}$$

$$III\text{-}3_r = \langle \text{I-1, II-1, III-3} \rangle \Leftrightarrow \ll \text{I-1, II-1, III-1 — III-3} \gg. \tag{100}$$

Утверждение (97) следует из (8′) и (80), если учесть (27). Таким образом, оно фактически доказано Г. К. Геновым (см. [7], стр. 458, и введение к настоящей статье, стр. 46), впервые построившим серию мальцевских операций, не удовлетворяющих постулату II-2. К сожалению, из-за громоздкости определения этих операций мы не можем здесь его воспроизвести.

Пример 22. Операция, определяемая формулой $\Pi^\circ G_\nu = (\Pi^\times G_\mu) \times (\Pi^* G_\lambda)$, где G_μ — абелевы, а G_λ — неабелевы множители из числа G_ν, доказывает (98). Дуальная к ней операция (получающаяся из нее переменой ролями свободного и прямого умножений) подтверждает (99).

Пример 23. Из всех сомножителей G_ν, $\nu \in I$, выделяем все сомножители G_μ, $\mu \in J \subseteq I$, 2-го порядка; остальные пусть будут G_λ, $\lambda \in K = I \setminus J$. По определению полагаем $\Pi^\circ G_\nu = H_J^{(2)} \times \Pi^\times G_\lambda$. (Определение группы $H_J^{(2)}$ см. в § 7, пример С.) Очевидно, эта операция удовлетворяет постулатам II-1 (ввиду (1)), I-1 и III-3, но не III-4 и I-2 (из-за структуры группы $H_J^{(2)}$). Следующие же примеры демонстрируют нарушение постулатов II-2 и II-3: а) эпиморфизмы $\varphi_i : a_i \to b_i$, $i = 1, 2$, сомножителей абелевой группы $A = \{a_1\}_4 \circ \{a_2\}_4 = \{a_1\} \times \{a_2\}$ на сомножители группы $B = \{b_1\}_2 \circ \{b_2\}_2 = H_2^{(2)}$ не могут склеиться

$r = A_1$ — (47),
C_1 — (53, 56, 81),
D_3 — (55, 97),
F_3 — (55, 99),
H_1 — (39′),
II-3_r* $= Y_1$ — (97),
V_1 — (81),
D_4 — (53′, 87),
G_4 — (53),
S — (67),
I-2_r $= B_1$ — (95),
D_1 — (53′, 55, 97),
I-4_3 — (55, 98, 99),
II-4_1 — (80, 67),
G_3 — (98),
Z_1 — (97),
L_1 — (81),
I-4_4 — (53, 53′, 67),
H_4 — (53′),
W_z — (89),
II-2_1 — (48),
X_3 — (55, 97),
E_1 — (78),
I-4_1* — (54),
H_3 — (99),
U_1 — (80),
III-$3_r = A_3$ — (100),
E_4 — (53, 67),
III-$5_r = Q$ — (85),
T — (55),
II-$3_r = X_1$ — (50)
I-4_1 — (78, 79),
F_1 — (79),
I-4^*_3 — (98, 99),
II-2^*_1 — (80, 55),
IV-1_1 — (81,67)
III-$4_r = A_4$ — (94),
F_4 — (53′, 67),
R — (56),
W_v — (90),
B_3 — (96),
C_3 — (56, 81),
E_3 — (55, 98),
G_1 — (39),
II-4^*_1 — (80),
K_1 — (81, 55),
C_4 — (53, 56),
I-4^*_4 — (53, 53′),
W_D — (87),
IV-1* — (23^*).

в эпиморфизм $\varphi : A \to B$ ввиду неабелевости B; б) мономорфизмы $\psi_i : c_i \to d_i$, $i = 1, 2,$ и $\psi_3 : c_3 \to d_3^2$ сомножителей группы $C = \{c_1\}_2 \circ \{c_2\}_2 \circ \{c_3\}_2 = H_3^{(2)}$ в сомножители группы $D = \{d_1\}_2 \circ \{d_2\}_2 \circ \{d_3\}_4 = H_2^{(2)} \times \{d_3\}$ не могут склеиться в гомоморфизм $\psi : C \to D$, так как $D' = \{d_1, d_2, d_3^2\}$ неабелева группа, а наложение на группу C дополнительного условия перестановочности хотя бы двух ее образующих превращает ее в абелеву группу. Тем самым рассматриваемый пример доказывает (100).

Теперь, фактически, пореберная полнота схемы № 4 (с точностью до восьми пунктирных «обратных» ребер) установлена. Для исчерпывающей полноты приводим таблицу, в которой для каждой вершины схемы № 4 указано соотношение (или совокупность нескольких соотношений), устанавливающее отсутствие импликаций сверх тех, которые зафиксированы самой схемой № 4.

Итак, доказательство теоремы 8 завершено.

Заключение. Уже и схема № 4 громоздка. Поэтому построение полной схемы импликаций для всех точных опера-

ций нецелесообразно: число вершин в ней равнялось бы 116 (в то время как схема № 4 содержит 50 вершин). Доказательство самостоятельного существования всех этих 116 вершин требует построения сравнительно небольшого числа новых операций (кусочно составленных из уже известных и потому не представляющих самостоятельного интереса). Все это удается сделать с точностью до 21 оставшегося открытым вопроса, 15 из которых уже сформулированы ранее в виде «проблем». К ним нужно добавить еще шесть:

Проблема 1_1. Следует ли из $\langle$II-3, III-1$\rangle$ постулат I-1?

Проблема 1_2. Следует ли из $\langle$II-3, III-2$\rangle$ постулат I-1?

Проблема 1_3. Следует ли из $\langle$II-3, III-3$\rangle$ постулат I-1?

Проблема 1_4. Следует ли из $\langle$II-3, III-4$\rangle$ постулат I-1?

Проблема $2_1 (=2_3)$. Следует ли из $\langle$II-3*, III-1$\rangle \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \langle$II-3*, III-3$\rangle$ постулат I-1?

Проблема 8_2. Следует ли из $\langle$I-1, II-3, III-2$\rangle$ постулат I-2?

§ 7. Некоторые вспомогательные предложения и построения

Для разгрузки основного текста статьи в этот заключительный параграф вынесены некоторые вспомогательные предложения и построения, представляющие, возможно, и самостоятельный интерес.

Лемма A. *Пусть*

$$G = A \times D,\ D = \prod_{\mu \in J}^{*} B_\mu * C, \qquad (*)$$

где A — абелева группа, и пусть для каждого μ, $\mu \in J$,

$$A \times B_\mu = A \times B'_\mu. \qquad (**)$$

Тогда: 1) $D' \equiv \{C,\ B'_\mu \mid \mu \in J\}_G = \prod_{\mu \in J}^{*} B'_\mu * C$ *и* 2) $G = A \times D'$.

Доказательство. В силу (**) каждый элемент b'_μ из B'_μ представим в виде $b'_\mu = a_\mu b_\mu$, где $a_\mu \in A$, $b_\mu \in B_\mu$, причем соответствие $b'_\mu \to b_\mu$, как известно, является (центральным) изоморфизмом между B'_μ и B_μ. Поэтому любое непустое слово $f(b', c)$ (в том смысле, как этот термин употребляется в теории свободных произведений) от $b'_{\mu,\nu} \in B'_\mu$, $\mu \in J$, и $c_\lambda \in C$ будет отлично от единицы, так как

$$f(b', c) = f(b'_{\mu_1,\nu_1}, \ldots, b'_{\mu_1,\nu_s}, b'_{\mu_2,\nu_1}, \ldots, b'_{\mu_2,\nu_t}, \ldots, c_{\lambda_1}, \ldots, c_{\lambda_q}) =$$

$$= af(b_{\mu_1, \nu_s}, \ldots, b_{\mu_1, \nu_1}, b_{\mu_2, \nu_1}, \ldots, b_{\mu_2, \nu_t}, \ldots, c_{\lambda_1}, \ldots, c_{\lambda_q}) =$$
$$= af(b, c) \neq 1,$$

где $a \in A$ и $f(b, c) \neq 1$. Тем самым утверждение 1) доказано. Далее, ввиду (*) и (**), D' поэлементно перестановочно с A. Допустим, что $D' \cap A \ni d'$, $d' \neq 1$. Но d', как элемент из D', был бы тогда представим (как мы только что показали) в виде $d' = f(b', c) = af(b, c)$, где $f(b, c) \neq 1$. Но, с другой стороны, $d' = a' \in A$, откуда следовало бы $f(b, c) = a^{-1}a' \in A$, что невозможно, так как $f(b, c) \in D$ и $G = A \times D$. Итак, $D' \cap A = E$, т. е. $\{A, D'\}_G = A \times D'$. Наконец, $B_\mu \subset A \times B'_\mu \subset A \times D'$ и потому $A \times D' = G$.

Замечание. Как показывает анализ доказательства леммы, она сохраняет силу и в таком усложненном варианте, когда $A = \prod_{\mu \in J}^{\times} A_\mu$ и условие (**) замещено системой условий: $A_\mu \times B_\mu = A_\mu \times B'_\mu$ $(\mu \in J)$.

Пример В. При построении операции примера 3 (§ 3) нами использовалась группа H_3, которую мы сейчас определим и исследуем. По определению, H_3 — наиболее свободная группа, удовлетворяющая условиям: H_3 — метабелева (в нильпотентном смысле); H_3 порождается тремя бесконечными циклическими группами $A_i = \{a_i\}_\infty$, $i = 1, 2, 3$; в H_3 выполняются соотношения: $[a_1, a_2] = [a_2, a_3] = [a_3, a_1]$.

Исследуем группу H_3. Ее элемент

$$u = [a_1, a_2] = [a_2, a_3] = [a_3, a_1] \qquad (u)$$

принадлежит центру Z, и каждый элемент h из H_3 допускает представление

$$h = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} u^\beta. \qquad (h)$$

Непосредственно проверяется, что

$$hh' = a_1^{\alpha_1+\alpha'_1} a_2^{\alpha_2+\alpha'_2} a_3^{\alpha_3+\alpha'_3} u^{\beta+\beta'+\alpha'_1(\alpha_3-\alpha_2)-\alpha'_2\alpha_3}, \qquad (hh')$$

если $h' = a_1^{\alpha'_1} a_2^{\alpha'_2} a_3^{\alpha'_3} u^{\beta'}$. Но если рассмотрим множество H_3^* формальных слов (h), где α_i и β принимают любые целые значения, причем два слова (h) и (h') считаются равными тогда и только тогда, когда $\alpha_i = \alpha'_i$ $(i = 1, 2, 3)$ и $\beta = \beta'$, то по операции, определяемой законом (hh'), множество H_3^* будет группой, причем $H_3^* = \{A_1^*, A_2^*, A_3^*\}$, где $A_i^* = \{a_i^*\}_\infty$, $i = 1, 2, 3$,

а $a_1^* = a_1^1 a_2^0 a_3^0 u^0$, $a_2^* = a_1^0 a_2^1 a_3^0 u^0$, $a_3^* = a_1^0 a_2^0 a_3^1 u^0$. Коммутант группы H_3^* совпадает с $U^* = \{u^*\}_\infty$, где $u^* = a_1^0 a_2^0 a_3^0 u^1 = [a_1^*, a_2^*] = [a_2^*, a_3^*] = [a_3^*, a_1^*]$ и лежит в центре Z^*, так что H_3^* — метабелева. Каждое формальное слово (h) может быть прочтено как произведение, так как $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} u^\beta = a_1^{*\alpha_1} a_2^{*\alpha_2} a_3^{*\alpha_3} u^{*\beta}$.

Но в силу определения групп H_3 и H_3^* оба соответствия: $a_i \to a_i^*$ $(i=1, 2, 3)$ и $a_i^* \to a_i$ $(i=1, 2, 3)$ — определяют эпиморфизмы этих групп друг на друга, которые поэтому оказываются между собой изоморфными, так что, в частности, запись слов (h) в H_3 единственна.

Теперь непосредственно видно, что H_3 является правильным произведением своих подгрупп A_1, A_2, A_3; например, $A_1 \cap \{A_2, A_3\}^{H_3} = A_1 \cap A_2 A_3 U = E$. Но постулат I-2 для нее нарушен: $A_1^{H_3} \cap \{A_2, A_3\} = A_1 U \cap A_2 A_3 U = U \neq E$.

В примере 3, ради которого построена группа H_3, с ее помощью строится некоторая точная операция, причем сама группа H_3 должна рассматриваться как произведение (в смысле этой операции) своих подгрупп A_1, A_2, A_3. Однако, как показывают равенства (u), эти подгруппы входят в H_3 не вполне равноправно. Поэтому возникает необходимость в доказательстве следующего утверждения (равносильного, как нетрудно понять, точности рассматриваемой операции).

(Pr) Какова бы ни была подстановка $\mu = \langle i \to k_i | i = 1, 2, 3 \rangle$, существует такой набор изоморфизмов $\varphi_i : A_i \to A_{k_i} (i = 1, 2, 3)$, который склеивается в автоморфизм $\varphi : H_3 \to H_3$.

Докажем, что требуемыми свойствами обладает естественная система изоморфизмов, определяемая условием

$$\varphi_i : a_i \to a_{k_i} \ (i = 1, 2, 3). \qquad (\varphi)$$

В самом деле, можно считать, что $H_3 = M/N$, где M — свободная метабелева группа с «теми же» образующими a_1, a_2, a_3, а $N = \{x_1, x_2, x_3\}^M$, где $x_1 = [a_3, a_1] \cdot [a_2, a_1]$, $x_2 = [a_1, a_2] \cdot [a_3, a_2]$, $x_3 = [a_2, a_3] \cdot [a_1, a_3]$. В M как приведенной свободной группе с системой свободных образующих a_1, a_2, a_3 подстановка (φ) образующих определяет некоторый ее автоморфизм φ_M. Непосредственная проверка показывает, что этот автоморфизм индуцирует некоторую подстановку на множестве образующих x_1, x_2, x_3 нормального делителя N. Поэтому $N\varphi_M = N$, откуда следует, что φ_M индуцирует на фактор-группе $H_3 = M/N$ требуемый автоморфизм φ.

Наконец, группа H_3 такова, что операция примера 3 несимметрическая. Действительно, вовсе не каждая система

автоморфизмов подгрупп $A_i (i = 1, 2, 3)$ склеивается в автоморфизм группы H_3. Такова, например, система: $\psi_1 : a_1 \to a_1^{-1}$, $\psi_2 : a_2 \to a_2$, $\psi_3 : a_3 \to a_3$. Действительно, для порождаемого ею автоморфизма ψ_M группы M будет $x_2\psi_M = [a_1^{-1}, a_2] \cdot [a_3, a_2] = [a_1, a_2]^{-2} x_2$. Если бы $N\psi_M = N$, то $[a_1, a_2]^2 \in N$, т. е. в H_3 было бы $u^2 = [a_1, a_2]^2 = 1$, что неверно.

Пример С. В нескольких случаях (см. пример 23 (§ 6) и примеры 7, 7′ и 7″ (§ 3)) нам пришлось использовать группы, близкие к группе H_3 предыдущего примера В, но построенные не на базе бесконечных циклических групп, а из циклических групп 2-го порядка. Осуществим требуемую конструкцию.

Пусть задано некоторое непустое множество групп $A_\nu = \{a_\nu\}_2$, $\nu \in I$. Считая I линейно упорядоченным, построим группу $H_I^{(2)}$, элементами которой являются «пустое слово», слово u и слова вида

$$h = a_{\nu_1} a_{\nu_2} \dots a_{\nu_k} (u), \qquad (h)$$

где k принимает натуральные значения, $\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_k$, а «дополнительная компонента» u может или присутствовать, или отсутствовать. Буквы a_{ν_i} будем называть «основными компонентами» слова h. Под произведением слова h на слово $h' = a_{\mu_1} a_{\mu_2} \dots a_{\mu_l} (u)$ понимается слово, получающееся из записи $a_{\nu_1} a_{\nu_2} \dots a_{\nu_k} (u)\, a_{\mu_1} a_{\mu_2} \dots a_{\mu_l} (u)$ путем последовательного передвижения компонент a_{μ_j} справа налево до правильного расположения всех компонент g_{ν_i} и g_{μ_j}, обусловленного упорядоченностью множества I. При перестановке местами двух рядом стоящих основных компонент возникает дополнительный множитель u, который считается перестановочным со всеми компонентами. Стоящие рядом две одинаковые основные или дополнительные компоненты выбрасываются.

Непосредственно проверяется, что относительно введенной операции множество $H_I^{(2)}$ является группой. (Ассоциативность умножения устанавливается, скажем, индукцией по длине среднего сомножителя, подобного тому, как это делается в аналогичной ситуации при построении свободной группы — (см. [22], стр. 108). При этом само слово h может быть прочитано уже как произведение однобуквенных слов.

При $|I| = n$ естественно для $H_I^{(2)}$ и другое обозначение: $H_n^{(2)}$. Очевидно, что $H_1^{(2)}$ изоморфна четверной группе Клейна

V_4, а $H_2^{(2)}$—группе диэдра D_4. В общем случае при $n \geqslant 2$ непосредственно устанавливается, что $u = [a_\nu, a_\mu]$ для любых $\nu, \mu, \nu \neq \mu$; исходные группы A_ν могут считаться вложенными в $H_I^{(2)}$. Более того, $H_I^{(2)} = \{A_\nu \mid \nu \in I\}$. Коммутант U группы совпадает со взаимным коммутантом подгрупп A_ν, $\nu \in I$ и является циклической подгруппой $\{u\}$ 2-го порядка, лежащей в центре Z группы $H_I^{(2)}$. Таким образом, учитывая дополнительно единственность записи (h) любого элемента, заключаем, что (при $|I| > 1$) $H_I^{(2)}$ — метабелева (в нильпотентном смысле) группа, разлагающаяся в правильное произведение своих подгрупп A_ν, $\nu \in I$.

Группа $H_3^{(2)}$ представляет особый интерес — она является группой наинизшего порядка ($|H_3^{(2)}| = 16$), разлагающейся в правильное произведение трех своих подгрупп (например, A_1, A_2 и A_3), не удовлетворяющее постулату I-2: ее коммутант U входит как в подгруппу, порожденную любыми двумя из подгрупп A_1, A_2, A_3, так и в нормальное замыкание любой из них. На самом деле, как можно проверить, $H_3^{(2)}$ вообще не допускает никаких разложений в правильное произведение с двумя сомножителями. (Группу $H_3^{(2)}$ можно найти под номером 8 в списке групп 16-го порядка на стр. 39 книги [66]; там же, на стр. 108, под символом $\Gamma_2 b$ помещен граф нормальных делителей этой группы.) Нарушается постулат I-2 и во всех группах $H_I^{(2)}$ с $|I| \geqslant 3$. Наконец, необходимо еще отметить, что в любой группе $H_I^{(2)}$ относительно подгрупп A_ν, $\nu \in I$, выполняется постулат I-3, так как группы A_ν обладают лишь тождественными автоморфизмами.

Добавление при корректуре

Г. К. Генов в своей работе «К теории операций на классе всех групп» («Труды Московск. матем. общества», 1971, 25, 61—84) доказал, что из набора постулатов <II-2, II-3*, III-3, IV-1> не следует постулат II-2*. Тем самым отрицательно решены сформулированные в статье проблемы 4, 5, 4_3 и 5_3, что, естественно, вносит большую завершенность и в схемы импликаций. А именно, в схемах № 3 и № 4 снимаются «обратные» импликации между вершинами V_1 и L_1 и между U_1 и II-4_1*, а на схеме № 3 (и схеме № 2), дополнительно, — между V и L и между U и II-4* (последнее обстоятельство нужно учесть и на схеме № 1).

Интересный новый результат содержится и в заметке М. Ш. Цаленко «Операции в категориях, индуцированные рефлективными и корефлективными подкатегориями» (Успехи матем. наук, 24, № 6(150), 1969, 197—198): там доказано, что различных ассоциативных операций, удовлетворяющих постулату IV-1 (т. е. операций типа S), не множество, а класс.

Приложение 1

Схемы импликаций

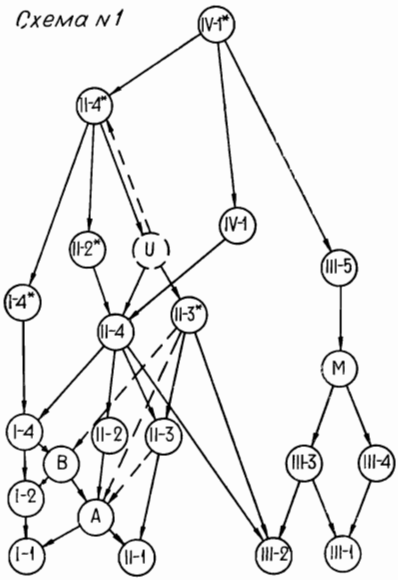


Схема №2

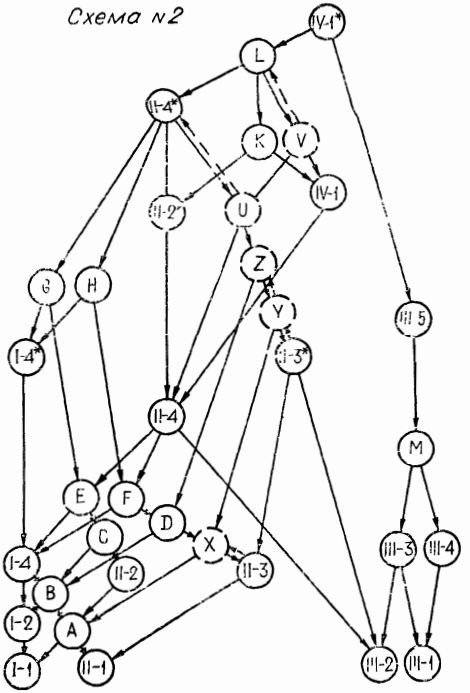
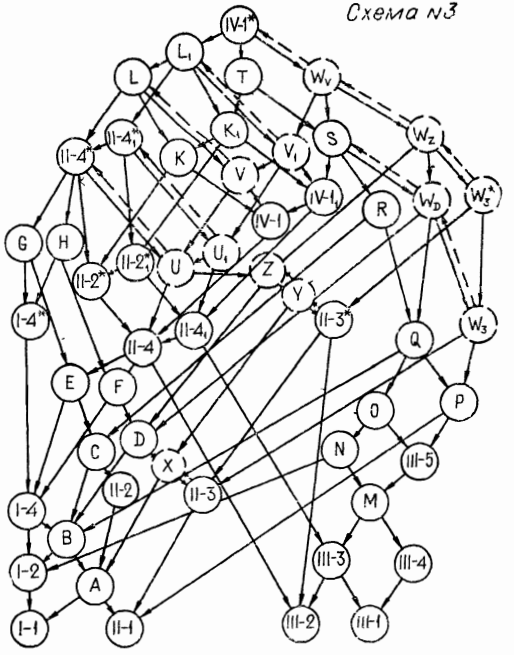


Схема №3



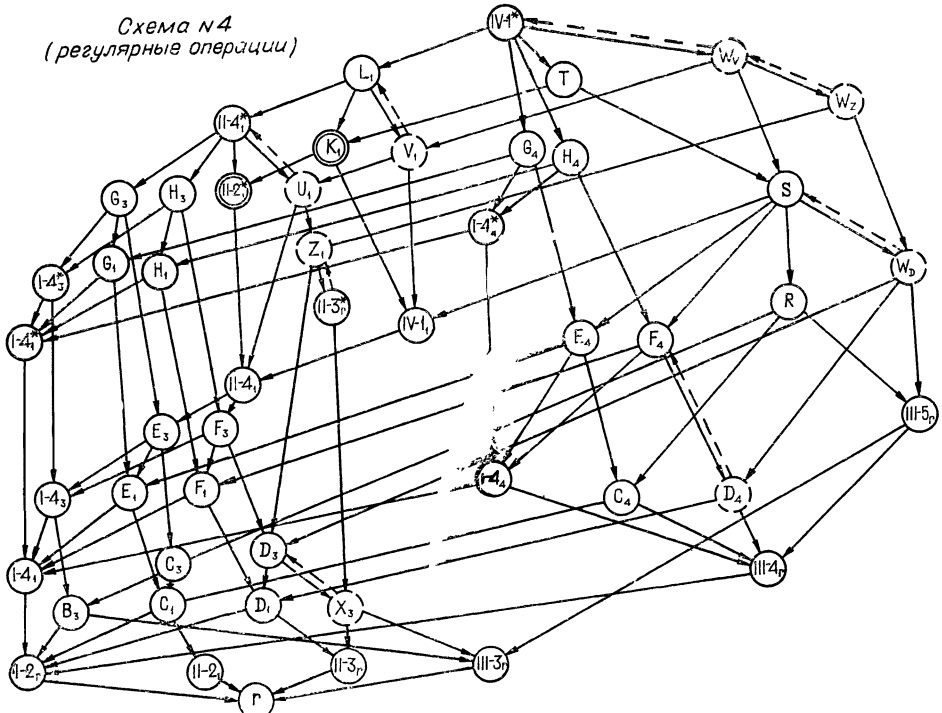


Схема N4
(регулярные операции)
IV-1*
L1
T
Wv
Wz
II-4'1
K1
V1
G4
H4
S
G3
H3
II-2*1
U1
I-4*4
Z1
G1
H1
I-4*3
Wb
II-3*p
IV-1'1
R
I-4*1
E4
F4
II-4'1
III-5p
E3
F3
I-4'3
E1
F1
I-4'4
C4
D4
D3
C3
III-4p
I-4'1
B3
C1
D1
X3
I-2*p
II-2'1
II-3'p
III-3p
r

Приложение 2

Список производных постулатов

$A = \langle$ I-1, II-1 $\rangle$

$B = \langle$ I-2, II-1 $\rangle$.

$C = \langle$ I-2, II-2 $\rangle$ $J_n = \langle$ J, III-n $\rangle$, где $J \in \langle$ I, II, IV $\rangle$; $n = 1, 2, 3, 4$

$D = \langle$ I-2, II-3 $\rangle$

$E = \langle$ I-4, II-2 $\rangle$ $\quad$ I-$2_г = B_1 = \langle$ I-2, II-1, III-1 $\rangle$

$F = \langle$ I-4, II-3 $\rangle$ $\quad$ II-$3_г = X_1 = \langle$ I-1, II-3, III-1 $\rangle$

$G = \langle$ I-4*, II-2 $\rangle$ $\quad$ II-$3^*_г = Y_1 = \langle$ I-1, II-3*, III-1 $\rangle$

$H = \langle$ I-4*, II-3 $\rangle$ $\quad$ III-$3_г = A_3 = \langle$ I-1, II-1, III-3 $\rangle$

$K = \langle$ II-2*, IV-1 $\rangle$ $\quad$ III-$4_г = A_4 = \langle$ I-1, II-1, III-4 $\rangle$

$L = \langle$ II-4*, IV-1 $\rangle$ $\quad$ III-$5_г = Q = \langle$ I-1, II-1, III-5 $\rangle$

$M = \langle$ III-3, III-4 $\rangle$

$N = \langle$ I-1, III-3, III-4 $\rangle$

$O = \langle$ I-1, III-5 $\rangle$

$P = \langle$ II-1, III-5 $\rangle$

$Q = \langle$ I-1, II-1, III-5 $\rangle$

$R = \langle$ II-2, III-5 $\rangle$ $\quad$ $r = A_1 = \langle$ I-1, II-1, III-1 $\rangle$

$S = \langle$ II-4, III-5 $\rangle$

$T = \langle$ II-2*, III-5 $\rangle$

$U =$ II-$4^{*м}$ $\quad$ $W_3 = \langle$ II-3, III-5 $\rangle$

$V = \langle$ II-3*, IV-1 $\rangle$ $\quad$ $W_D = \langle$ D, III-5 $\rangle = \langle$ I-2, II-3, III-5 $\rangle$

$W_{3^*} = \langle$ II-3*, III-5 $\rangle$

$X = \langle$ I-1, II-3 $\rangle$ $\quad$ $W_Z = \langle$ Z, III-5 $\rangle = \langle$ I-2, II-3*, III-5 $\rangle$

$Y = \langle$ I-1, II-3* $\rangle$ $\quad$ $W_V = \langle$ V, III-5 $\rangle = \langle$ II-3*, III-5, IV-1 $\rangle$

$Z = \langle$ 1-2, II-3* $\rangle$

Литература

1. Ашманов С. А., Мацедонская О. Н. О правильных операциях, удовлетворяющих постулату Мальцева. — Сиб. матем. ж., 1966, 7, № 6, 1216—1229.
2. Баранович Т. М. О политождествах в универсальных алгебрах. — Сиб. матем. ж., 1964, 5, № 5, 976—986.
3. Бронштейн М. А. О точных операциях на классе групп. — Сиб. матем. ж., 1966, 7, № 6, 1250—1258.

4. Бронштейн М. А. О полинильпотентных произведениях групп. — Изв. АН СССР, серия матем., 1967, **31**, № 3, 671— 686.
5. Брумберг Н. Р. Связь сплетений групп с другими операциями над группами. — Сиб. матем. ж., 1963, **4**, № 6, 1221—1234.
6. Гайнов А. Т. Коммутативные свободные и антикоммутативные свободные произведения алгебр. — Сиб. матем. ж., 1962, **3**, № 6, 805—833.
7. Генов Г. К. Новые семейства мальцевских операций. — Матем. сб., 1968, **77** (119), № 3, 437—460.
8. Глушков В. М. Нильпотентные произведения топологических групп. — Усп. матем. наук, 1956, **11**, № 3 (69), 119—123.
9. Головин О. Н. Об ассоциативных операциях на множестве групп. — Докл. АН СССР, 1947, **58**, № 7, 1257—1260.
10. Головин О. Н. Нильпотентные произведения групп. — Матем. сб., 1950, **27** (69), № 3, 427—454.
11. Головин О. Н. Метабелевы произведения групп. — Матем. сб., 1951, **28** (70), № 2, 431—444.
12. Головин О. Н. К вопросу об изоморфизме нильпотентных разложений группы. — Матем. сб., 1951, **28** (70), № 2, 445—452.
13. Головин О. Н. К классификации произведений групп (резюме сообщения на III Всес. коллоквиуме по общей алгебре 22. 9. 1960). — Усп. матем. наук, 1961, **16**, № 2 (98), 204—205.
14. Головин О. Н. Политождественные соотношения в группах. — Докл. АН СССР, 1962, **145**, № 5, 967—970.
15. Головин О. Н. Политождественные соотношения в группах и определяемые ими операции на классе всех групп. — Тр. Моск. матем. об-ва, 1963, вып. 12, 413—435.
16. Головин О. Н. Функторные операции на классе всех групп. — Докл. АН СССР, 1963, **149**, № 1, 12—15.
17. Головин О. Н. Структура поливербальных операций. — Докл. АН СССР, 1963, **153**, № 6, 1238—1241.
18. Гольдина Н. П. Подгруппы метабелевых произведений циклических групп порядка p. — Изв. вузов. Матем., 1960, № 3 (**16**), 118—126.
19. Иванова О. А. Нильпотентные разложения ассоциативных алгебр. — Матем. сб., 1966, **71** (113), № 3, 423—432.
19′. Кузьменчук В. А. О точных операциях на классе топологических групп. — Матем. сб., 1969, **78** (120), № 2, 260—279.
20. Курош А. Г. Пути развития и некоторые очередные проблемы теории бесконечных групп. — Усп. матем. наук, 1937, вып. 3, 5—15.
21. Курош А. Г. Теория групп. М.—Л., 1944.
22. Курош А. Г. Теория групп, 3-е изд. М., 1967.
23. Лифшиц В. Н. О существовании неизоморфных нильпотентных разложений нильпотентных групп без кручения. — Матем. сб., 1968, **75** (117), № 1, 152—162.
24. Ляпин Е. С. Полные действия в классах ассоциативных систем и групп. — Уч. зап. Ленинградского пед. ин-та им. Герцена, 1949, **86**, 93—106.
25. Ляховицкий В. Н. К вопросу о разложимости группы в разноименные нильпотентные произведения. — Матем. сб., 1956, **40** (82), № 4, 401—414.
26. Мацедонская О. Н. О нейтральных поливербальных операциях. Матем. сб., 1966, **69** (111), № 2, 286—299.

27. Мацедонская О. Н. О нейтральных поливербальных операциях. — Матем. заметки, 1968, **4**, № 1, 85—89.
28. Мостовая Е. М. Третий нильпотентный коммутант некоторых классов групп (резюме сообщения на III Всес. коллоквиуме по общей алгебре 22. 9. 1960). — Усп. матем. наук, 1961, **16**, № 2 (98), 205.
29. Ольшанский А. Ю. Об одной задаче Ханны Нейман. — Матем. сб., 1968, **76** (118), № 3, 449—453.
30. Фаермарк Д. С. Алгоритм для установления тождества слов в нильпотентном произведении групп, заданных конечным числом образующих и определяющих соотношений. — Докл. АН СССР, 1961, **137**, № 2, 291—294.
31. Фридман М. А. О полукоммутативных умножениях. — Докл. АН СССР, 1956, 109, № 4, 710—712.
32. Фридман М. А. Полукоммутативные умножения групп и некоторые его свойства. — Уч. зап. Глазовского пед. ин-та, вып. 3, 1956, 112—142.
33. Фридман М. А. Условие ассоциативности полукоммутативного умножения любого множества групп. — Уч. зап. Глазовского пед. ин-та, вып. 3, 1956, 143—148.
34. Фридман М. А. Элементы конечного порядка, центр полукоммутативного произведения. Решение проблемы тождества для полукоммутативного произведения групп. — Уч. зап. Глазовского пед. ин-та, вып. 3, 1956, 155—167.
35. Фридман М. А. Конкретные ассоциативные полукоммутативные умножения групп. — Уч. зап. Глазовского пед. ин-та, вып. 3, 1956, 168—183.
36. Фридман М. А. К одному вопросу о вполне правильных операциях на классе групп. — Усп. матем. наук, 1959, **14**, № 3 (87), 181—183.
37. Фридман М. А. О коммутанте полукоммутативного произведения групп. — Уч. зап. Глазовского пед. ин-та, вып. 6, 1959, 53—66.
38. Фридман М. А. Распространение одной теоремы Бэра и Леви на полукоммутативные умножения групп. — Уч. зап. Глазовского пед. ин-та, вып. 6, 1959, 67—71.
39. Фридман М. А. Несколько новых классов конкретных ассоциативных Т-умножений групп (резюме сообщения на III Всес. коллоквиуме по общей алгебре 22. 9. 1960). — Усп. матем. наук., 1961, 16, № 2 (98), 207.
40. Фридман М. А. Два класса конкретных ассоциативных Т-умножений. — Докл. и сообщ. науч. конф. физ.-мат. и естеств. фактов Удмуртского пед. ин-та. Ижевск, 1965, 36—41.
41. Цаленко М. С. Правильные объединения и специальные подпрямые суммы в категориях. — Матем. сб., 1962, 57 (99), № 1, 75—94.
42. Цаленко М. С. Об изоморфизмах нильпотентных произведений нильпотентных р-групп. — Изв. АН СССР, серия матем., 1964, 28, № 1, 225—236.
43. Чабан И. А. О полукоммутативных и вербальных произведениях групп. — Усп. матем. наук, 1962, **17**, № 5 (107), 153—155.
44. Шмелькин А. Л. К теории правильных произведений групп. — Матем. сб., 1960, 51 (93), № 3, 277—292.
45. Шмелькин А. Л. Нильпотентные произведения и нильпотентные группы без кручения. — Сиб. матем. ж., 1962, 3, № 4, 625—640.

46. Шмелькин А. Л. Об изоморфизме нильпотентных разложений нильпотентных групп без кручения. — Сиб. матем. ж., 1963, **4**, № 6, 1412—1425.
47. Шмелькин А. Л. О разрешимых произведениях групп. — Сиб. матем. ж., 1965, **6**, № 1, 212—220.
48. Щепин Г. Г. К вопросу о Т-умножениях групп (резюме сообщения на IV Всес. совещании по общей алгебре 17. 5. 1962). — Усп. матем. наук., 1962, **17**, № 6 (108), 207—208.
49. Щепин Г. Г. К вопросу о постулатах Маклейна и Мальцева для одного класса правильных операций на группах. — Усп. матем. наук, 1965, **20**, № 3 (123), 219—226.
50. Щепин Г. Г. К проблеме вхождения для нильпотентного произведения конечно-определенных групп. — Докл. АН СССР, 1965, 160, № 2, 294—297.
51. Щепин Г. Г. К проблеме вхождения в конечно-определенных группах. — Сиб. матем. ж., 1968, **9**, № 2, 443—448.
52. Allenby R. B. J. T. Normal forms for generalised regular products of groups. — Math. Z., 1967, **102**, № 5, 356—369.
53. Badida J. Asociativne operacie na niektorych triedach svazov, Acta fac. rerum natur. Univ. Comenianae (Bratislava), Math., 1963, **7**, № 11, 609—621.
54. Badida J. O asociativnej operácii na určitej triede sväzov. Acta fac. rerum natur Univ. — Comenianae Bratislava), Math., 1964, **9**, № 2, 71—74.
55. Badida J. O asociativnej operácii Δ na triede sväzov Ω_0. — Acta fac. rerum natur. Univ. Comenianae (Bratislava), Math., 1966, **10**, № 5, 37—41.
56. Badida J. O asociativnych operàciach na urcitých triedach sväzov. — Acta fac. rerum natur. Univ. Comenianae (Bratislava), Math, 1966, **10**, № 7, 31—41.
57. Baumslag G. On the residual nilpotence of some varietal products. — Trans. Amer. Math. Soc., 1963, **109**, 357—365.
58. Baumslag G. and Levin Frank. On free metabelian products.—Math. Z. 1965, 88, 375—379.
59. Benado M. Über die allgemeine Theorie der regulären Produkte von Herrn O. N. Golowin. I. — Math. Nachr., 1955—1956, **14**, № 4/6, 213—234.
60. Benado M. Über die allgemeine Theorie der regulären Produkte von Herrn O. N. Golowin. II. — Math. Nachr., 1957, **16**, № 3/4, 137—194.
61. Benado M. Über die allgemeine Theorie der regulären Produkte von Herrn O. N. Golowin. III. — Math. Nachr., 1960, **21**, № 1/2, 1—36.
62. Benado M. Sur la théorie generale des produits reguliers de monsieur O. N. Golovine, V. — Publ. scient. Univ. Alger, ser. Math., 1957, **4**, № 2, 111—143.
63. Benado M. Remarques sur un théoréme de monsieur Oleg Golovine. — Чехословацкий матем. ж., 1959, **9** (84), 475—484.
64. Benado M. Über den Kommutatrixbegriff. — Proc. London Math. Soc. (3), 1960, **10**, № 40, 514—530.
65. Gruenberg K. W., Residual properties of infinite soluble groups. — Proc. London Math. Soc., (3), 1957, **7**, № 25, 29—62.
66. Hall M., Jr., Senior J. K. The Groups of order 2^n ($n \leqslant 6$). New-York—London, 1964.

67. Hirsch K. A. Assoziative Operationen auf Gruppen. — Sitzungsberichte Berliner. Math. Ges., 1957—1958, 12—19.
68. MacHenry T. The tensor product and the 2nd nilpotent product of groups. — Math. Z., 1960, 73, № 2, 134—145.
69. Maurer I. Gy., Virág I. Eine Verallgemeinerung des direkten Produktes. — Bull. Acad. Polon. sci., Sèr. sci. math., astron. et phys., 1967, 15, № 2, 61—69.
70. Moran S. Associative operations on groups. I. — Proc. London Math. Soc. (3), 1956, 6, № 24, 581—596.
71. Moran S. The homomorphic image of the intersection of a verbal subgroup and the Cartesian subgroup of a free product. — J. of the London Math. Soc., 1958, 33, № 2, 237—245; 1959, 34, № 2, 250.
72. Moran S. Associative operations on groups. II. — Proc. London Math. Soc. (3), 1958, 8, № 32, 548—568.
73. Moran S. Associative operations on groups. III. — Proc. London Math. Soc. (3), 1959, 9, № 34, 287—317.
74. Moran S. Associative regular operations on groups corresponding to a property $\mathfrak{P}$.—Proc. Amer. Math. Soc., 1959, 10, № 5, 796—799.
75. Moran S. Unrestricted verbal products. — J. London Math. Soc., 1961, 36, № 1, 1—23.
76. Moran S. Properties of N-multiplications and N^*-multiplications. — J. London Math. Soc., 1961, 36, 193—210.
77. Moran S. Note on a question of Malcev. — Bull. Acad. Polonaise Sciences, Sèr. sciences math., astr. et phys., 1961, 9, № 12, 853—855.
78. Moran S. Unrestricted nilpotent products. — Acta Math., 1962, 108, 61—88.
79. Neumann B. H., Neumann H. On linked products of groups. — Acta Scient. Math., Szeged, 1960, 21, № 3—4, 197—205.
80. Neumann B. H. and Wiegold J. On certain embeddability criteria for group amalgams. — Publs. math., 1962, 9, № 1—2, 57—64.
81. Neumann Hanna and Wiegold J. Linked products and linked embeddings of groups. — Math. Z., 1960, 73, 1—19.
82. Neumann P. M. A note on the direct decomposability of relatively free groups. — Quart. J. Math., 1968, 19, № 73, 67—79.
83. Struik R. R. On associative products of groups. — Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 81, № 2, 425—452.
84. Struik R. R. On verbal products of groups. — J. London Math. Soc., 1959, 34, 397—400.
85. Struik R. R. A note on prime-power groups. — Canad. Math. Bull., 1960, 3, № 1, 27—30.
86. Struik R. R. On nilpotent products of cyclic groups. — Canad. J. Math., 1960, 12, № 3, 447—462.
87. Struik R. R. On nilpotent products of cyclic groups. II. — Canad. J. Math., 1961, 13, № 4, 557—568.
88. Wiegold J. Nilpotent products of groups with amalgamations. — Publ. Math., Debrecen, 1959, 6, № 1—2, 131—168.
89. Wiegold J. Some gemarks on generalised products of groups with amalgamations. — Math. Z., 1961, 75, 57—78.

Поступило 28 апреля 1969 г.

СССР
Вычислительный центр АН Грузинской ССР
Ю. Ш. ГУРЕВИЧ

ФОРМУЛЫ С ОДНИМ $\forall$

Памяти Анатолия Ивановича Мальцева

Формулой в настоящей работе будем называть формулу чистой логики предикатов и операций. Имеется в виду логика первой ступени. Чистота обозначает отсутствие символов постоянных предикатов и операций. В частности, отсутствует предикат равенства. При каждом $n = 0, 1, \ldots$ наши формулы могут содержать произвольное (конечное) число переменных n-местных предикатов и переменных n-местных операций (в другой терминологии «функторов»).

Различие между переменными нульместными операциями и переменными индивидами довольно призрачное. Тем не менее употребление переменных нульместных операций доставит определенные удобства в изложении.

Согласно [3] Л. Левенгейм первый обнаружил существование формул, выполнимых лишь в бесконечных областях. В связи с этим дадим

Определение 1. *Класс формул Φ назовем примитивно рекурсивным по Левенгейму, если существует такая примитивно рекурсивная функция $f(\alpha)$, что простая выполнимость формулы α влечет выполнимость ее в некоторой конечной области мощности $\leqslant f(\alpha)$.*

Определение 1 требует некоторого уточнения в отношении функции $f(\alpha)$. Будем считать списки индивидных переменных, переменных предикатов и переменных операций достаточно хорошими и подразумевать некоторую гёделеву нумерацию формул. При этом $f(\alpha)$ есть $f([\alpha])$, где $[\alpha]$—гёделев номер формулы α.

Содержание настоящей статьи составляет доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\Phi(\exists^{\infty}\forall\exists^{\infty})$ — *совокупность всех предваренных формул чистой логики предикатов и операций, содержащих не более одного вхождения квантора общности* $\forall$. *Класс* $\Phi(\exists^{\infty}\forall\exists^{\infty})$ *примитивно рекурсивен по Левенгейму.*

Из теоремы 1 вытекает следующий результат В. П. Оревкова. Существует алгоритм, распознающий выводимость в чистом исчислении предикатов и операций формул вида $\forall x_1 \cdots x_m \exists y \forall z_1 \cdots z_n \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ не содержит кванторов (см. [2]). Как сообщил автору в июле 1968 г. Оревков, подробное доказательство этого результата пока не опубликовано.

В печати находится статья автора [1] о проблеме разрешения для логики предикатов и операций. Там выясняется место теоремы 1 «в общем строю».

Автор благодарен В. П. Оревкову и В. А. Лифшицу за информацию о результатах группы ленинградских логиков по проблеме разрешения.

§ 1. Первоначальные сведения

Лемма 1. *Пусть* $\Phi(\forall)$ — *совокупность всех формул вида* $\forall x \mathfrak{A}$, *где* $\mathfrak{A}$ *не содержит кванторов и свободных индивидных переменных, отличных от* x. *Класс* $\Phi(\exists^{\infty}\forall\exists^{\infty})$ *примитивно рекурсивен по Левенгейму, если таков класс* $\Phi(\forall)$.

Лемма 1 доказывается очевидным образом с помощью введения сколемовых функций. Поясним на примере. Пусть $\alpha = \forall y \exists z \mathfrak{A}(x, y, z)$ и $\mathfrak{A}$ не содержит кванторов и индивидных переменных, отличных от x, y, z. И пусть символ F_0 нульместной операции и символ F_1 одноместной операции не встречаются в $\mathfrak{A}$. Положим $\alpha^* = \forall y \mathfrak{A}(F_0, y, F_1(y))$. Очевидно, что каково бы ни было непустое множество M, α выполнима в M тогда и только тогда, когда α^* выполнима в M.

Лемма 2. *Пусть* p — *символ одноместного предиката и* $\Phi_p(\forall)$ *есть совокупность всех таких формул* $\alpha \in \Phi(\forall)$, *что каждый символ предиката из* α *есть* p. *Класс* $\Phi(\forall)$ *примитивно рекурсивен по Левенгейму, если* $\Phi_p(\forall)$ *таков.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \Phi(\forall)$. Не нарушая общности, мы можем считать, что p не входит в α. Каждому символу предиката Q из α поставим в соответствие символ операции F_Q той же местности. При этом позаботимся о том, чтобы разным Q соответствовали разные F_Q и чтобы символы F_Q не встречались в α. Заменим теперь в α $Q(\ldots)$ на $p(F_Q(\ldots))$. Получим некоторую α^*.

Очевидно, что каково бы ни было множество M мощности $\geqslant 2$, α выполнима в M тогда и только тогда, когда α^* выполнима в M.

Лемма 2 доказана.

§ 2. Термы с одной индивидной переменной

Пусть Ω есть набор символов операций, содержащий хотя бы один символ нульместной операции.

Определение 2. *Посредством* $T = T(\Omega, x)$ *обозначим совокупность всех таких термов* t, *что каждая индивидная переменная из* t *есть* x *и каждый символ операции из* t *принадлежит множеству* Ω. *Совокупность термов из* t, *не содержащих ни одного вхождения* x, *обозначим* T_0.

В настоящем разделе рассмотрим термы лишь из T.

Определение 3. *Индуктивное определение высоты* ht *и глубины* dt *терма* t:

1) $hx = dx = 0$;
2) *если* F *есть символ нульместной операции из* Ω, *то* $hF = 0$ *и* $dF = -\infty$;
3) *при* $n \geqslant 1$ $hF(t_1, \ldots, t_n) = 1 + \max ht_i$ *и* $dF(t_1, \ldots, t_n) = 1 + \max dt_i$.

Название «глубина», данное dt, можно считать сокращением для названия «глубина залегания переменной x в терме t».

Следствия

1) $dt \geqslant 0$ *равносильно тому, что* $t \in T - T_0$;
2) $dt = 0$ *равносильно* $t = x$;
3) $dt \leqslant ht$.

Определение 4. *Определение операции умножения термов:* $t \cdot \tau$ *есть результат подстановки в* τ *вместо вхождения переменной* x *вхождения терма* t.

Лемма 3. *Имеют место следующие утверждения:*

1) *Алгебра* $\langle T, \cdot \rangle$ *есть полугруппа*;
2) $dt \geqslant 0$ & $t \cdot \tau_1 = t \cdot \tau_2 \to \tau_1 = \tau_2$;
3) $d\tau \geqslant 0$ & $t_1 \cdot \tau = t_2 \cdot \tau \to t_1 = t_2$;
4) $h\tau_1 < ht$ & $h\tau_2 < ht$ & $t \cdot \tau_1 = t \cdot \tau_2 \to \tau_1 = \tau_2$;
5) $d(t \cdot \tau) = dt + d\tau$
6) $h(t \cdot \tau) = \max\{h\tau, ht + d\tau\}$;
7) $h(t \cdot \tau) \leqslant ht + h\tau$.

Доказательство. Утверждение 1) леммы 3 очевидно, утверждение 2) легко доказывается индукцией по $d = \min\{d\tau_1, d\tau_2\}$, а 3) и 5)—индукцией по $d\tau$. Утверждение 4) леммы докажем индукцией по $d = \min\{d\tau_1, d\tau_2\}$. В случаях $d \leqslant 0$

утверждение очевидно. Пусть $d > 0$. Тогда для некоторых n, F и $\tau_{\delta i}$ имеем $\tau_\delta = F(\tau_{\delta 1}, \ldots, \tau_{\delta n})$ и $t \cdot \tau_{1i} = t \cdot \tau_{2i}$. В силу предположения индукции $\tau_{1i} = \tau_{2i}$, а потому и $\tau_1 = \tau_2$.

Утверждение 7) леммы есть непосредственное следствие 6). Утверждение 6) докажем индукцией по $d\tau$.

Оно очевидно, если $d\tau \leqslant 0$. Пусть $d\tau > 0$, $\tau = F(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ и $h(t \cdot \tau) = 1 + \max\{h(t \cdot \tau_i)\} =$ (для определенности) $1 + h(t \cdot \tau_1)$. В силу предположения индукции $h(t \cdot \tau_1) = \max\{h\tau_1,\ ht + d\tau_1\}$.

Первый случай $h(t \cdot \tau_1) = h\tau_1$. Очевидно $h\tau_1 = \max h\tau_i$, и потому $h(t \cdot \tau) = 1 + h\tau_1 = 1 + \max h\tau_i = h\tau$.

Второй случай $h(t \cdot \tau_1) = ht + d\tau_1$. Очевидно $d\tau_1 = \max d\tau_i$, и потому $h(t \cdot \tau) = 1 + ht + \max d\tau_i = ht + d\tau$.

Лемма 3 доказана.

Таким образом, подмножество $T - T_0$ образует подполугруппу с двусторонним законом сокращения; подмножество T_0 — двусторонний идеал полугруппы $\langle T, \cdot \rangle$. Каждый элемент этого идеала есть правый нуль полугруппы. Терм x — двусторонняя единица полугруппы.

Отметим также, что при $dt = -\infty$ может быть $t \cdot \tau_1 = t \cdot \tau_2$ и $\tau_1 \neq \tau_2$. Например, если $\tau_1 = x$ и $\tau_2 = t$ или $\tau_1 = F(x, t)$ и $\tau_2 = F(t, x)$.

Лемма 4. *Пусть* $t = t_1 \cdot \tau_1 = t_2 \cdot \tau_2$, $dt \geqslant 0$ *и* $d\tau_2 \leqslant d\tau_1$. *Тогда существует такое* τ, *что* $t_2 = t_1 \cdot \tau$ и $\tau_1 = \tau \cdot \tau_2$.

Лемма 4 легко доказывается индукцией по $d\tau_2$.

Определение 5. *Терм* t *назовем простым, если* $dt > 0$ *и* t *не имеет отличных от* x *и самого себя делителей.*

Лемма 5. *Каждый терм* t *из* $T - T_0$ *единственным образом разлагается в произведение простых термов. Другими словами, подполугруппа* $\langle T - T_0, \cdot \rangle$ *свободна.*

Лемма 5 легко доказывается индукцией по глубине dt терма t с помощью леммы 4.

Лемма 6. *Пусть* $t_1 \cdot \tau_1 = t_2 \cdot \tau_2$ и $0 \leqslant d\tau_2 \leqslant d\tau_1$ и $\max\{h\tau_1, h\tau_2\} < \min\{ht_1, ht_2\}$. *Тогда существует такое* τ, *что* $t_2 = t_1 \cdot \tau$ и $\tau_1 = \tau \cdot \tau_2$.

Доказательство. Отметим сначала, что в силу утверждения 6) леммы 3 $h(t_1 \cdot \tau_1) = ht_1 + d\tau_1 = ht_2 + d\tau_2$, откуда $ht_2 - ht_1 = d\tau_1 - d\tau_2 \geqslant 0$.

Далее воспользуемся индукцией по $d\tau_2$. В случае $d\tau_2 = 0$ лемма 6 очевидна.

Шаг индукции. Пусть $\tau_2 = F(\tau_{21}, \ldots, \tau_{2n})$. Тогда $\tau_1 = F(\tau_{11}, \ldots, \tau_{1n})$ и $t_1 \cdot \tau_{1i} = t_2 \cdot \tau_{2i}$. Пусть для определенности $d\tau_{21} = \max d\tau_{2i}$. Тогда и $d\tau_{11} \geqslant 0$, ибо в противном случае $h\tau_{11} = h(t_1 \cdot \tau_{11}) = h(t_2 \cdot \tau_{21}) = ht_2 + d\tau_{21} \geqslant ht_2 > h\tau_1 > h\tau_{11}$.

Кроме того, $ht_1 + d\tau_{11} = h(t_1 \cdot \tau_{11}) = h(t_2 \cdot \tau_{21}) = ht_2 + d\tau_{21}$, откуда $d\tau_{11} - d\tau_{21} = ht_2 - ht_1 \geqslant 0$. В силу предположения индукции получаем, что для некоторого τ $t_2 = t_1 \cdot \tau$ и $\tau_{11} = \tau \cdot \tau_{21}$. Таким образом,

$$t_1 \cdot \tau_1 = (t_1 \cdot \tau) \cdot \tau_2. \qquad (1)$$

При этом $h\tau_1 < ht_1$ и $h(\tau \cdot \tau_2) < ht_1$, ибо $h\tau_2 < ht_1$ и $h\tau + d\tau_2 = h\tau + 1 + d\tau_{21} \leqslant 1 + h\tau_{11} \leqslant h\tau_1 < h\tau_1$. В силу утверждения 4) леммы 3 можем сократить (1) на t_1.

Лемма 6 доказана.

Для дальнейшего фиксируем некоторое положительное целое m.

Определение 6. *Если $dt \geqslant 0$ или $ht > 2m$, то посредством Rt обозначим терм максимальной глубины среди правых делителей терма t высоты $\leqslant m$. При этом посредством Lt обозначим терм, удовлетворяющий соотношению $Lt \cdot Rt = t$. Если $dt = -\infty$ и $ht \leqslant 2m$, то положим $Rt = Lt = t$.*

Лемма 7. *Определение* 6 *корректно, т. е. термы Rt и Lt всегда определяются однозначно.*

Доказательство. При $dt \geqslant 0$ лемма 7 есть непосредственное следствие леммы 5. При $ht \leqslant 2m$ лемма 7 тривиальна. Пусть $dt = -\infty$ и $ht > 2m$ и $t = t_1 \cdot \tau_1 = t_2 \cdot \tau_2$, где каждый τ_i удовлетворяет определению Rt. В этом случае $d\tau_1 = d\tau_2$. Кроме того, в силу леммы 6 $t_2 = t_1 \cdot \tau$ и $\tau_1 = \tau \cdot \tau_2$ для подходящего τ. Отсюда $d\tau = d\tau_1 - d\tau_2 = 0$ и потому $\tau = x$, $t_1 = t_2$, $\tau_1 = \tau_2$.

Лемма 7 доказана.

Соглашение. *Начиная с этого места буквой t с индексами и без них будем обозначать лишь элементы T_0, а буквой τ с индексами и без них — лишь термы высоты $\leqslant m$. Для обозначения произвольных термов будем использовать буквы u и v.*

Лемма 8. *Следующие утверждения равносильны:*

1) $ht \leqslant 2m$;
2) $Rt = t$;
3) $dRt = -\infty$.

Кроме того, если $ht_1 \leqslant 2m$ и $Rt_1 = Rt_2$, то и $t_1 = t_2$.

Доказательство очевидно.

Лемма 9.

1) *если $ht > m$ и $d\tau \geqslant 0$, то $h(t \cdot \tau) = ht + d\tau$;*
2) *если $h(t \cdot \tau) > 2m$, то $ht > m$ и $d\tau \geqslant 0$ и $h(t \cdot \tau) = ht + d\tau$;*
3) *если $t \cdot \tau_1 = t \cdot \tau_2$ и $ht > m$, то $\tau_1 = \tau_2$;*
4) *если $t \cdot \tau_1 = t \cdot \tau_2$ и $h(t \cdot \tau_i) > 2m$, то $\tau_1 = \tau_2$;*
5) *если $t_1 \cdot \tau_1 = t_2 \cdot \tau_2$, $d\tau_2 \leqslant d\tau_1$ и $ht_i > m$, то $\exists \tau [t_2 = t_1 \cdot \tau \;\&\; \tau_1 = \tau \cdot \tau_2]$;*

6) *если* $t_1 \cdot \tau_1 = t_2 \cdot \tau_2$, $d\tau_2 \leqslant d\tau_1$ и $h(t_i \cdot \tau_i) > 2m$, *то* $\exists \tau\,[t_2 = t_1 \cdot \tau \,\&\, \tau_1 = \tau \cdot \tau_2]$.

Лемма 9 есть очевидное следствие лемм 3 и 6.

Лемма 10. *Если* τ *делит справа* u, *то* τ *делит справа* u Ru.

Доказательство. Лемма 10 очевидна, если $du \geqslant 0$ или $hu \leqslant 2m$. В оставшемся случае лемма следует из равенства $u = Lu \cdot Ru = u_0 \cdot \tau$ и утверждения 6) леммы 9.

Лемма 10 доказана.

Лемма 11. $R(t \cdot \tau) = R(Rt \cdot \tau)$.

Доказательство. Лемма очевидна в случаях, когда $Rt = t$ или $d\tau = -\infty$. Пусть $ht > 2m$ и $d\tau \geqslant 0$. В силу предыдущей леммы $R(t \cdot \tau) = \tau_0 \cdot \tau$ для некоторого τ_0. При этом τ_0 делит справа t, ибо $t \cdot \tau = L(t \cdot \tau) \cdot \tau_0 \cdot \tau$ и на τ можно сократить. Поэтому $d\tau_0 \geqslant 0$ и τ_0 делит справа Rt, $\tau_0 \cdot \tau$ делит справа $(Rt) \cdot \tau$ и $\tau_0 \cdot \tau$ делит справа $R(Rt \cdot \tau)$. Пусть $R(Rt \cdot \tau) = \tau_1 \cdot \tau_0 \cdot \tau$.

При этом терм $\tau_1 \cdot \tau_0 \cdot \tau$ делит справа $Rt \cdot \tau$ и терм $\tau_1 \cdot \tau_0$ делит справа Rt, а потому и t. Таким образом, $\tau_1 \cdot \tau_0 \cdot \tau$ есть правый делитель $t \cdot \tau$ высоты $\leqslant m$, потому терм $\tau_1 \cdot \tau_0 \cdot \tau$ делит справа $R(t \cdot \tau) = \tau_0 \cdot \tau$. Отсюда $\tau_1 = x$, и лемма 11 доказана.

Лемма 12. *Пусть* $0 \leqslant d\tau^1 \leqslant d\tau^2$ и $R(t_1 \cdot \tau^1) = R(t_2 \cdot \tau^1)$. *Тогда и* $R(t_1 \cdot \tau^2) = R(t_2 \cdot \tau^2)$.

Доказательство. Если $h(t_1 \cdot \tau^1) \leqslant 2m$ или $h(t_2 \cdot \tau^1) \leqslant 2m$, то в силу леммы 8 $t_1 \cdot \tau^1 = t_2 \cdot \tau^1$, откуда $t_1 = t_2$ и $t_1 \cdot \tau^2 = t_2 \cdot \tau^2$.

В дальнейшем считаем, что $h(t_\delta \cdot \tau^1) > 2m$. При этом и $h(t_\delta \cdot \tau^2) > 2m$.

В силу леммы 10 для подходящих τ_δ^i имеем

$$R(t_\delta \cdot \tau^i) = \tau_\delta^i \cdot \tau^i . \tag{2}$$

Полагая $L_\delta^i = L(t_\delta \cdot \tau^i)$, получаем

$$t_\delta = L_\delta^1 \cdot \tau_\delta^1 = L_\delta^2 \cdot \tau_\delta^2. \tag{3}$$

В силу (3) $\tau_\delta^2 \cdot \tau^1$ делит справа $t_\delta \cdot \tau^1$ и $h(\tau_\delta^2 \cdot \tau^1) \leqslant m$, ибо $h\tau^1 \leqslant m$ и $h\tau_\delta^2 + d\tau^1 \leqslant h\tau_\delta^2 + d\tau^2 \leqslant hR(t_2 \cdot \tau^2) \leqslant m$.

В силу леммы 10 $\tau_\delta^2 \cdot \tau^1$ делит справа и $R(t_\delta \cdot \tau^1) = \tau_\delta^1 \cdot \tau^1$, и потому для подходящего τ_δ

$$\tau_\delta^1 = \tau_\delta \cdot \tau_\delta^2. \tag{4}$$

В силу условий леммы $R(t_1 \cdot \tau^1) = \tau_1^1 \cdot \tau^1 = R(t_2 \cdot \tau^1) = \tau_2^1 \cdot \tau^1$. Отсюда

$$\tau_1^1 = \tau_2^1. \tag{5}$$

Терм τ_1^2 делит справа в силу (4) терм $\tau_1^1 = \tau_2^1$, а потому и терм $t_2 = L_2^1 \cdot \tau_2^1$, так что терм $\tau_1^2 \cdot \tau^2$ делит справа $t_2 \cdot \tau^2$ и $h(\tau_1^2 \cdot \tau^2) = \max\{h\tau^2, h\tau_1^2 + d\tau^2\} = \max\{h\tau^2, hR(t_1 \cdot \tau^2)\} \leqslant m$. Потому $\tau_1^2 \cdot \tau^2$ делит справа и $R(t_2 \cdot \tau^2) = \tau_2^2 \cdot \tau^2$, откуда следует, что τ_1^2 делит справа τ_2^2. Из соображений симметрии ясно, что и τ_2^2 делит справа τ_1^2. Так что $\tau_1^2 = \tau_2^2$, а потому и $R(t_1 \cdot \tau^2) = \tau_1^2 \cdot \tau^2 = \tau_2^2 \cdot \tau^2 = R(t_2 \cdot \tau^2)$.

Лемма 12 доказана.

Л е м м а 13. *Пусть* $0 \leqslant d\tau^1 \leqslant d\tau^2$ и $h(t_1 \cdot \tau^1) \equiv h(t_2 \cdot \tau^1) \pmod m$, *тогда и* $h(t_1 \cdot \tau^2) \equiv h(t_2 \cdot \tau^2) \pmod m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $h(t_\delta \cdot \tau^1) \leqslant 2m$, то $t_1 = t_2$ (см. начало доказательства леммы 12). Пусть $h(t_\delta \cdot \tau^1) > 2m$. Тогда и $h(t_\delta \cdot \tau^2) > 2m$ и $h(t_\delta \cdot \tau^i) = ht_\delta + d\tau^i$. Дальнейшее очевидно.

Лемма 13 доказана.

§ 3. Одноместный предикат и Ω-термы

Фиксируем некоторое определение одноместного предиката p на множестве T_0.

О п р е д е л е н и е 7. $t_1 \equiv t_2 \pmod n$ *есть сокращение для* $\forall u\,[hu \leqslant n \to [p(t_1 \cdot u) \sim p(t_2 \cdot u)]]$.

С л е д с т в и е. *Если* $t_1 \equiv t_2 \pmod n$ и $hu \leqslant n$, *то* $t_1 u \equiv t_2 \cdot u \pmod{n - hu}$.

В самом деле, пусть $hv \leqslant n - hu$. Тогда $hv \leqslant n$ и $hu + dv \leqslant hu + hv \leqslant hu + n - hu = n$, так что $h(u \cdot v) \leqslant n$. Потому $p(t_1 \cdot u \cdot v) \sim p(t_2 \cdot u \cdot v)$, что и требовалось доказать.

О п р е д е л е н и е 8. *Посредством* rt *обозначим при* $dRt > 0$ *высоту правого простого делителя* t. *В случае* $dRt \leqslant 0$ *положим* $rt = m$.

З а м е ч а н и е. *При* $dRt > 0$ *правый простой делитель* t *есть также правый простой делитель* Rt (см. лемму 10). Так что определение 8 корректно. В любом случае $rt \leqslant m$. Если $Rt_1 = Rt_2$, то $rt_1 = rt_2$.

Определение 9. *$E(t_1, t_2)$ равносильно тому, что*
1) $Rt_1 = Rt_2$;
2) $ht_1 \equiv ht_2 \pmod m$;
3) $Lt_1 \equiv Lt_2 \pmod{m(2 + m - rt_1)}$.

Следствие. *E есть отношение эквивалентности на T_0. При $ht_1 \leqslant 2m$ отношение $E(t_1, t_2)$ равносильно $t_1 = t_2$.*

В каждом классе t/E зафиксируем элемент, который обозначим St. В частности, при $ht \leqslant 2m$ необходимо $St = t$. Совокупность всех классов t/E обозначим, как обычно, T_0/E.

Лемма 12′. *В условиях леммы 12* $R(St_1 \cdot \tau^2) = R(St_2 \cdot \tau^2)$.

Доказательство. $R(St_1 \cdot \tau^2) =$ (в силу леммы 11) $R(R(St_1) \cdot \tau^2) =$ (в силу определения 9) $R(Rt_1 \cdot \tau^2) = R(t_1 \times \times \tau^2) =$ (в силу леммы 12) $R(t_2 \cdot \tau^2) = R(Rt_2 \cdot \tau^2) = R(RSt_2 \times \times \tau^2) = R(St_2 \cdot \tau^2)$.

Лемма 12′ доказана.

Лемма 13.′ *В условиях леммы* 13 $h(St_1 \cdot \tau^2) \equiv h(St_2 \times \times \tau^2) \pmod m$.

Доказательство очевидно.

Определение 10. *Определение операций O_τ над T_0/E:*
1) *если* $d\tau = -\infty$, *то* $O_\tau(t/E) = \tau/E$;
2) $O_x(t/E) = t/E$;
3) *если* τ *простой терм, то* $O_\tau(t/E) = (St \cdot \tau)/E$;
4) *если* $d\tau_1 > 0$ *и* $d\tau_2 > 0$, *то* $O_{\tau_1 \cdot \tau_2}(t/E) = O_{\tau_2}(O_{\tau_1}(t/E))$.

Следствия. *Пусть* $O_\tau(t/E) = t^*/E$.
1) $Rt^* = R(t \cdot \tau)$;
2) $ht^* \equiv h(t \cdot \tau) \pmod m$;
3) *если* $ht^* \leqslant 2m$, то $t^* = t \cdot \tau$.

Доказательство. При $d\tau \leqslant 0$ следствия 1)—3) очевидны. Пусть $d\tau > 0$.

Если терм τ прост, то $Rt^* = R(St \cdot \tau) = R(RSt \cdot \tau) = = R(Rt \cdot \tau) = R(t \cdot \tau)$.

Если $\tau = \tau_1 \cdot \tau_2$ и $0 < d\tau_1 < d\tau$ и $O_{\tau_1}(t/E) = t^0/E$, то $Rt^* = R(t^0 \cdot \tau_2) = R(Rt^0 \cdot \tau_2) = R(R(t \cdot \tau_1) \cdot \tau_2) = R(t \cdot \cdot \tau_1 \cdot \tau_2)$.

Следствие 1) доказано.

Далее, если $ht^* \leqslant 2m$, то $t^* = Rt^* = R(t \cdot \tau) =$ (в силу леммы 8) $t \cdot \tau$.

Тем самым следствие 3) доказано.

Пусть снова τ простой терм. Если $ht \leqslant m$, то $St = t$ и $ht^* \equiv h(St \cdot \tau) \equiv h(t \cdot \tau) \pmod m$. Если $ht^* > 2m$, то $ht^* \equiv \equiv h(St \cdot \tau) \equiv hSt + d\tau \equiv ht + d\tau \equiv h(t \cdot \tau) \pmod m$. Пусть $\tau = = \tau_1 \cdot \tau_2$ и $0 < d\tau_1 < d\tau_2$ и $O_{\tau_1}(t/E) = t^0/E$. Если $ht^0 \leqslant \leqslant 2m$, то $t^0 = t \cdot \tau_1$ и $ht^* \equiv h(t^0 \cdot \tau_2) \equiv h(t \cdot \tau_1 \cdot \tau_2) \pmod m$.

Если же $ht^0 > 2m$, то $ht^* \equiv h(St^0 \cdot \tau_2) \equiv hSt^0 + d\tau_2 \equiv ht^0 + d\tau_2 \equiv h(t \cdot \tau_1) + d\tau_2 \equiv h(t \cdot \tau_1 \cdot \tau_2) (\mathrm{mod}\ m)$.
Следствие 2) тоже доказано.

Лемма 14. *Пусть*
1) $0 < d\tau_0 < d\tau$;
2) τ *простой терм*;
3) $h\tau_0 < h\tau$;
4) $O_{\tau_0}(t^1/E) = O_{\tau_0}(t^2/E)$.
Тогда $O_\tau(t^1,/E) = O_\tau(t^2/E)$.

Доказательство. В силу следствий 1) и 2) из определения 10

$$R(t^1 \cdot \tau_0) = R(t^2 \cdot \tau_0) \tag{6}$$

и

$$h(t^1 \cdot \tau_0) \equiv h(t^2 \cdot \tau_0) \ (\mathrm{mod}\ m).$$

Применяя леммы 12′ и 13′, получаем:

$$R(St^1 \cdot \tau_0) = R(St^2 \cdot \tau_0) \tag{7}$$

и

$$h(St^1 \cdot \tau_0) \equiv h(St^2 \cdot \tau_0) \ (\mathrm{mod}\ m).$$

В силу определения 10 $O_\tau(t^\delta/E) = (St^\delta \cdot \tau)/E$.
Согласно определению 9 нам осталось доказать лишь, что $L(St^1 \cdot \tau)$ и $L(St^2 \cdot \tau)$ сравнимы по модулю $m(2 + m - h\tau)$. Пусть $\tau_0 = \tau_1, \ldots, \tau_k$, где термы $\tau_1, \ldots, \tau_k$ просты.

Положим:

$$t_0^\delta = t^\delta, \ t_{i+1}^\delta = St_i^\delta \cdot \tau_{i+1},$$

$$\tau'_{i+1} = \tau_{i+1} \ldots \tau_k, \ h_{i+1} = h\tau'_{i+1}.$$

Лемма 15. $L(St_i^1 \cdot \tau'_{i+1}) \equiv L(St_i^2 \cdot \tau'_{i+1}) \ (\mathrm{mod}\ m(2 + m - h_{i+1}))$.

Доказательство леммы 15 проведем индукцией по i от $k-1$ до 0. База индукции: $i = k - 1$. Очевидно, $O_{\tau_1 \ldots \tau_{i+1}}(t^\delta/E) = t_{i+1}^\delta/E$ и, в частности, $O_{\tau_0}(t^\delta/E) = t_k^\delta/E$.
Поэтому из условия 4) леммы 14 вытекает $E(t_k^1, t_k^2)$, откуда $L(St_{k-1}^1 \cdot \tau'_k) \equiv Lt_k^1 \equiv Lt_k^2 \equiv L(St_{k-1}^2 \cdot \tau'_k) \ (\mathrm{mod}\ m(2 + m - h_k))$.
Предположение индукции: $0 \leqslant i < k - 1$ и $L(St_{i+1}^1 \cdot \tau'_{i+2}) \equiv L(St_{i+1}^2 \cdot \tau'_{i+2}) \ (\mathrm{mod}\ m(2 + m - h_{i+2}))$.

Шаг индукции. Так как $t_{i+1}^\delta = St_i^\delta \cdot \tau_{i+1}$, то $LSt_{i+1}^\delta \equiv Lt_{i+1}^\delta \equiv L(St_i^\delta \cdot \tau_{i+1}) \ (\mathrm{mod}\ m(2 + m - h\tau_{i+1}))$. Домножим

последнее сравнение на τ'_{i+2}. Получим, что $L\left(St^{\delta}_{i+1}\cdot\tau'_{i+2}\right)$ и $L\left(St^{\delta}_{i}\cdot\tau'_{i+1}\right)$ сравнимы по модулю $m(2+m-h\tau_{i+1})-h_{i+2}$ и тем более по модулю $m(2+m-h_{i+1})$.

В силу же предположения индукции $L(St^{1}_{i+1}\cdot\tau'_{i+2})$ и $L(St^{2}_{i+1}\cdot\tau'_{i+2})$ сравнимы по модулю $m(2+m-h_{i+2})$ и тем более по модулю $m(2+m-h_{i+1})$. Таким образом, $L\left(St^{1}_{i}\cdot\right.$ $\left.\cdot\tau'_{i+1}\right)$ и $L(St^{2}_{i}\cdot\tau'_{i+1})$ сравнимы по модулю $m(2+m-h_{i+1})$.

Лемма 15 доказана. Продолжим доказательство леммы 14.

Если $h(St^{1}\cdot\tau_0)\leqslant 2m$, то $St^{1}\cdot\tau_0=R(St^{1}\cdot\tau_0)=$ (в силу (6)) $R(St^{2}\cdot\tau_0)=$ (в силу леммы 8) $St^{2}\cdot\tau_0$. Поэтому согласно утверждению 3) леммы 3 $St^{1}=St^{2}$, и лемма 14 доказана. Аналогично рассуждаем в случае $h(St^{2}\cdot\tau_0)\leqslant 2m$. В дальнейшем считаем, что $h(St^{\delta}\cdot\tau_0)>2m$ при $\delta=1,2$. При этом и $h(St^{\delta}\times$ $\times\tau)>2m$.

В силу леммы 10

$$R(St^{\delta}\cdot\tau_0)=\tau^{*}\cdot\tau_0 \tag{8}$$

и $R(St^{\delta}\cdot\tau)=\tau_{*}\cdot\tau_0$ для некоторых τ^{*} и τ_{*}, не зависящих в силу (6) и (7) от δ. Так как $h\tau_0<h\tau\leqslant h(\tau_{*}\cdot\tau_0)$ и $h\tau_{*}+d\tau_0<$ $<h\tau_{*}+d\tau\leqslant h(\tau_{*}\cdot\tau)$, то $h(\tau_{*}\cdot\tau_0)<h(\tau_{*}\cdot\tau)\leqslant m$. Кроме того, $\tau_{*}\cdot\tau_0$ делит справа $St^{\delta}\cdot\tau_0$. Поэтому $\tau_{*}\cdot\tau_0$ делит справа $R(St^{\delta}\cdot\tau_0)=\tau^{*}\cdot\tau_0$ и $\tau^{*}=\tau'\cdot\tau_{*}$ для некоторого τ'.

В силу (8) $St^{\delta}\cdot\tau_0=L(St^{\delta}\cdot\tau_0)\cdot\tau^{*}\cdot\tau_0$, откуда $St^{\delta}\cdot\tau=$ $=L(St^{\delta}\cdot\tau_0)\cdot\tau^{*}\cdot\tau=L(St^{\delta}\cdot\tau_0)\cdot\tau'\cdot\tau_{*}\cdot\tau$
и

$$L(St^{\delta}\cdot\tau)=L(St^{\delta}\cdot\tau_0)\cdot\tau'. \tag{9}$$

При $i=0$ лемма 15 утверждает, что $L(St^{1}\cdot\tau_0)\equiv L(St^{2}\cdot$ $\cdot\tau_0)\,(\mathrm{mod}\ m(2+m-h\tau_0))$. Из этого сравнения и из (9) вытекает, что $L(St^{1}\cdot\tau)$ и $L(St^{2}\cdot\tau)$ сравнимы по модулю $m(2+m-h\tau_0)-$ $-h\tau'$ (см. следствие из определения 7), и тем более по модулю $m(2+m-h\tau)$.

Лемма 14 доказана.

Лемма 16. *Пусть* $\tau=F(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ *и при каждом* $i=1,\ldots,n$ $O_{\tau_i}(t_1/E)=O_{\tau_i}(t_2/E)$. *Тогда* $O_{\tau}(t_1/E)=O_{\tau}(t_2/E)$.

Доказательство. Если $d\tau<0$, лемма 16 очевидна. *Случай* $d\tau=0$ невозможен. Пусть $d\tau>0$. Если $\tau=$ $=\tau^{0}\cdot\tau'$ для некоторого $\tau^{0}\neq x$, то для некоторых τ'_i имеем: $\tau_i=\tau^{0}\cdot\tau'_i$, $\tau'=F(\tau'_1,\ldots,\tau'_n)$, $O_{\tau'_i}(O_{\tau^{0}}(t_1/E))=O_{\tau'_i}(O_{\tau^{0}}(t_2/E))$.

Отсюда по предположению индукции получаем $O_\tau(t_1/E) = O_{\tau'}(O_{\tau^0}(t_1/E)) = O_{\tau'}(O_{\tau^0}(t_2/E)) = O_\tau(t_2/E)$. Пусть, наконец, терм τ прост. В этом случае лемма 16 есть непосредственное следствие леммы 14.

Лемма 16 доказана.

О п р е д е л е н и е 11. *Определение операций на* T_0/E:

1) *пусть* F *есть символ нульместной операции из* Ω. *На* T_0/E *значением операции* F *объявляем элемент* F/E;

2) *если* F *есть символ одноместной операции из* Ω, *то положим* $F(t/E) = O_{F(x)}(t/E) = F(St)/E$;

3) *пусть* $n > 1$ *и* F *есть символ* n*-местной операции из* Ω. *Если* $t_i/E = O_{\tau_i}(t/E)$ *и терм* $\tau = F(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ *прост или не содержит вхождений* x, *то положим* $F(t_1/E, \ldots, t_n/E) = O_\tau(t/E)$. *В противном случае, когда не существует подходящих* t *и* τ, *положим* $F(t_1/E, \ldots, t_n/E) = t_1/E$.

Конечно, пункт 2) из определения 11 есть частный случай пункта 3).

Л е м м а 17. *Определение* 11 *корректно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $n > 1$, в силу определения 11 $F(t_1/E, \ldots, t_n/E) = O_{\tau_1}(t^1/E)$ и в силу того же определения $F(t_1/E, \ldots, t_n/E) = O_{\tau_2}(t^2/E)$. Пусть $\tau_\delta = F(\tau_{\delta_1}, \ldots, \tau_{\delta n})$ и для определенности $d\tau_2 \leqslant d\tau_1$.

В силу наших предположений

$$t_i/E = O_{\tau_{1i}}(t^1/E) = O_{\tau_{2i}}(t^2/E),$$

откуда согласно следствиям 1) и 2) из определения 10

$$Rt_i = R(t^1 \cdot \tau_{1i}) = R(t^2 \cdot \tau_{2i}) \tag{10}$$

и

$$ht_i \equiv h(t^1 \cdot \tau_{1i}) \equiv h(t^2 \cdot \tau_{2i}) \pmod m. \tag{11}$$

Если $h(t^\delta \cdot \tau_\delta) \leqslant 2m$, то $t^1 \cdot \tau_{1i} = R(t^1 \cdot \tau_{1i}) = R(t^2 \cdot \tau_{2i})$ (в силу леммы 8) $= t^2 \cdot \tau_{2i}$.

Отсюда $t^1 \cdot \tau_1 = t^2 \cdot \tau_2$ и $O_{\tau_1}(t^1/E) = (t^1 \cdot \tau_1)/E = (t^2 \cdot \tau_2)/E = O_{\tau_2} \cdot (t^2/E)$. Пусть поэтому

$$h(t^\delta \cdot \tau_\delta) > 2m. \tag{12}$$

Тогда согласно (11) $ht^1 + d\tau_{1i} \equiv ht^2 + d\tau_{2i} \pmod m$ и потому разность $d = d\tau_{1i} - d\tau_{2i}$ не зависит от i и равна $d\tau_1 - d\tau_2$.

Если $dR(t^\delta \cdot \tau_{\delta i}) \geqslant 0$, то из (10) следует, что для некоторого τ^i

$$\tau_{1i} = \tau^i \cdot \tau_{2i} \tag{13}$$

я при этом для некоторого t^{2i}

$$t^2 = t^{2i} \cdot \tau^i. \tag{14}$$

Если же $dR(t^\delta \cdot \tau_{\delta i}) < 0$, то в силу (10) и леммы 8 $t^1 \cdot \tau_{1i} = t^2 \cdot \tau_{2i}$. Ввиду (12) и утверждения 6) леммы 9 при этом для подходящего τ^i имеет место (13) и $t^2 = t^1 \cdot \tau^i$, т. е. t^1 играет роль t^{2i} из (14). Таким образом, в любом случае имеет место (13) и (14). При этом $d\tau^i = d\tau_{1i} - d\tau_{2i} = d$.

Мы хотим доказать, что τ^i не зависит от i. Из соображений симметрии достаточно доказать, что $\tau^1 = \tau^2$. На основании (14)

$$t^2 = t^{21} \cdot \tau^1 = t^{22} \cdot \tau^2. \tag{15}$$

В силу (12) $ht^2 + d\tau_2 > 2m > 2d\tau_1$, отсюда

$$ht^2 + 2d\tau_2 > 2d\tau_1,$$

т. е.

$$ht^2 > 2d\tau_1 - 2d\tau_2 = 2d.$$

Поэтому $ht^{2i} = ht^2 - d > d$ и по лемме 6 τ^1 делит τ^2 или τ^2 делит τ^1. В любом случае получаем $\tau^1 = \tau^2$. Таким образом, τ^i не зависит от i и поэтому из (13) следует $\tau_1 = \tau^1 \cdot \tau_2$. Так как терм τ_1 прост, то $\tau^1 = x$ и $\tau_1 = \tau_2$. При этом лемма 17 становится непосредственным следствием леммы 16.

Лемма 17 доказана.

В силу определения 11 множество T_0/E становится Ω-алгеброй. Каждому $u \in T$ соответствует в T_0/E (как и в любой другой Ω-алгебре) операция, которую мы будем обозначать звездочкой. Очевидны следующие утверждения:

1) $t/E*x = t/E$;
2) если $du = -\infty$, то $t/E*u = u/E$;
3) $t/E*F(u_1, \ldots, u_n) = F(t/E*u_1, \ldots, t/E*u_n)$;
4) $t/E*(u_1 \cdot u_2) = (t/E*u_1)*u_2$.

Лемма 18. $t/E*\tau = O_\tau(t/E)$.

Доказательство индукцией по $d\tau$. Если $d\tau \leqslant 0$, то лемма 18 очевидна. Пусть $d\tau > 0$. Первый случай: $\tau = \tau_1 \cdot \tau_2$ и $0 < d\tau_1 < d\tau$. Тогда $t/E*\tau = (t/E*\tau_1)*\tau_2 = O_{\tau_2}(O_{\tau_1}(t/E)) = O_\tau(t/E)$. Второй случай: τ — простой терм. Тогда $t/E*\tau = F(t/E*\tau_1, \ldots, t/E*\tau_n) = F(O_{\tau_1}(t/E), \ldots, O_{\tau_n}(t/E)) = O_\tau(t/E)$ в силу определения 11.

Лемма 18 доказана.

Лемма 19. $St \equiv t \pmod m$.

Доказательство очевидным образом вытекает из определения 9.

Определение 12. *Определение предиката* p в T_0/E: $p(t/E)$ *равносильно* $p(t)$.

Лемма 20. $p(t \cdot \tau) \sim p(t/E * \tau)$.

Доказательство очевидно в случае $d\tau \leqslant 0$. Пусть $d\tau > 0$ и $\tau = \tau_1 \ldots \tau_k$, где каждый из термов τ_i прост. Положим $t_0 = t$, $t_{i+1} = St_i \cdot \tau_{i+1}$, $\tau'_{i+1} = \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_{i+1}$, $h_{i+1} = h\tau'_{i+1}$.

Лемма 21. *При* $1 \leqslant i \leqslant k$ $t_i \equiv t \cdot \tau'_i \pmod{m - h_i}$.

Доказательство индукцией по i. База индукции: $i = 1$. Так как $St \equiv t \pmod m$, то $t_1 \equiv t \cdot \tau_1 \pmod{m - h_1}$. Предположение индукции: $1 \leqslant i \leqslant k$ и $t_i \equiv t \cdot \tau'_i \pmod{m - h_i}$. Шаг индукции. В силу предположения индукции $St_i \equiv t \cdot \tau'_i \pmod{m - h_i}$. Отсюда $t_{i+1} \equiv t \cdot \tau'_{i+1} \pmod{m - h_{i+1}}$.

Лемма 21 доказана.

При $i = k$ лемма 21 дает $t_k \equiv t \cdot \tau \pmod{m - h\tau}$, откуда $p(t_k) \sim p(t \cdot \tau)$. Имеем $t_i/E * \tau_{i+1} =$ (в силу леммы 18) $O_{\tau_{i+1}}(t_i/E) =$ (в силу определения 10) t_{i+1}/E. Отсюда $t/E * \tau = t_k/E$ и $p(t/E * \tau) \sim p(t_k) \sim p(t \cdot \tau)$.

Лемма 20 доказана.

Будем считать множество Ω конечным. Тогда имеет место

Лемма 22. *Множество* T_0/E *конечно, и мощность его есть примитивно рекурсивная функция от* Ω *и* m.

Доказательство очевидно.

§ 4. Завершение доказательства теоремы 1

Лемма 23. *Пусть* $\alpha = \forall\, x\ \mathfrak{A}$ *есть выполнимая формула из* $\Phi_p(\forall)$, Ω *есть совокупность символов операций из* α, m *есть максимум высоты термов из* α, *и все содержание* §2 *относится именно к этим* Ω *и* m. *Тогда в множестве* T_0 *можно так определить предикат* p, *что система* $\mathfrak{T} = \langle T_0, \Omega, p \rangle$ *окажется моделью для* α (*т. е.* α *будет принимать значение истины в* $\mathfrak{T}$).

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} = \langle M, \Omega, p \rangle$ есть *модель для* α и χ — естественный гомоморфизм $\langle T_0, \Omega \rangle$ в $\langle M, \Omega \rangle$. Для каждого $t \in T_0$ положим, что $p(t)$ равносильно $p(\chi(t))$. Легко видеть, что указанное определение p искомое.

Лемма 23 доказана.

Лемма 24. *Пусть система* $\mathfrak{T} = \langle T_0, \Omega, p \rangle$ *есть модель для* α. *Тогда и система* $\mathfrak{T}/E = \langle T_0/E, \Omega, p \rangle$ (*см. определения* 9, 11 *и* 12) *есть модель для* α.

Доказательство. $\mathfrak{A}(x)$ есть пропозициональная функция формул вида $p(\tau)$. Поэтому лемма 24 вытекает из леммы 20.

Лемма 24 доказана.

Лемма 25. *Класс* $\Phi_p(\forall)$ *примитивно рекурсивен по Левенгейму.*

Лемма 25 вытекает из лемм 23, 24 и 22.

Наконец, из лемм 1, 2 и 25 вытекает теорема 1.

Литература

1. Ю. Ш. Гуревич. Проблема разрешения для логики предикатов и операций. — Алгебра и логика, 1969, 8, № 3, 284—308.
2. В. П. Оревков. II симпозиум по кибернетике (тезисы). Тбилиси, 1965, стр. 176.
3. Черч А. Введение в математическую логику. ИЛ, 1960.

Поступило 22 ноября 1968 г.

СССР
Институт математики Сибирского отделения АН СССР

Ю. Л. ЕРШОВ

КОНСТРУКТИВНЫЕ МОДЕЛИ*

Дорогому учителю
Анатолию Ивановичу Мальцеву посвящается

Теория нумерованных алгебр и моделей имеет не очень большую историю. Первой обзорной статьей по этой теории была статья А. И. Мальцева [4], в которой разработана система понятий, систематизированы основные результаты, относящиеся к общим нумерованным алгебрам. Из более ранних работ следует отметить работы по нумерованным полям [11, 14], в которых получено довольно много интересных результатов, относящихся к полям. Настоящая статья посвящена исследованию вопросов, связанных с расширениями нумерованных алгебр. Впрочем, теорема 1 дает достаточные условия существования конструктивных (даже сильно конструктивных) моделей. Остальные же результаты во многом подчинены задаче отыскания аналога теоремы о расширении в теории моделей для нумерованных моделей. Формулируется гипотеза о достаточных условиях справедливости теоремы о расширении. Предлагаются некоторые технические средства для решения этой гипотезы. Оказалось, что известное в теории моделей понятие относительной модельной полноты [7] весьма полезно для решения задач расширения. С другой стороны, понятие теории трасцендентных элементов, естественно возникающее при исследовании, имеет и чисто теоретико-модельный интерес. Предложенных средств достаточно для обоснования гипотезы для многих известных разрешимых теорий. Справедливость же гипотезы в общем виде остается неизвестной.**

* Настоящая статья является расширенным вариантом части доклада автора, прочитанного на Варшавской конференции по теории моделей (осень 1968 г.).

** М. Г. Перетятькин построил примеры, опровергающие эту гипотезу.

I. Начнем с некоторых соглашений и определений.

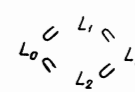
Все общие рассмотрения будут вестись с некоторой фиксированной сигнатурой $\sigma_0 = \langle P_0^{n_0}, P_1^{n_1}, \ldots, P_k^{n_k} \ldots \rangle_{k<\omega}$, содержащей только предикатные символы*, — такой, что функция $f{:}f(k) = n_k$ общерекурсивна. Нам будут нужны еще следующие сигнатуры:

$$\sigma_1 = \sigma_0 \cup \langle a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots \rangle_{k<\omega};$$
$$\sigma_2 = \sigma_0 \cup \langle c \rangle;$$
$$\sigma_3 = \sigma_1 \cup \langle c \rangle,$$

которые получаются присоединением к сигнатуре σ_0 символов для констант. Всегда будем предполагать, что $n_0 = 2$ и предикат P_0^2 на любой модели определен как равенство (вместо $P_0^2(x, y)$ будем писать $x = y$).

Пусть L_i, $i = 0, 1, 2, 3$ — совокупность всех формул языка узкого исчисления предикатов с равенством (P_0^2) сигнатуры σ_i, $i = 0, 1, 2, 3$.

Имеют место следующие очевидные соотношения:



$$L_1 \cap L_2 = L_0$$

Предположим еще, что задана какая-нибудь фиксированная гёделевская нумерация** g множества $L_3 (g{:}N \to L_3)$. С каждым подмножеством $S \subseteq L_3$ связывается множество $g^{-1}(S)$ всех номеров формул S. Назовем S разрешимым множеством, если $g^{-1}(S)$ рекурсивно. Так, множества L_0, L_1 и L_2 разрешимы.

Введем несколько определений, относящихся к нумерованным множествам и моделям.

Пусть S — произвольное множество. *Нумерацией* ν множества S назовем отображение $\nu{:}N \to S$ множества всех натуральных чисел N на множество S. Пара $(S, \nu,)$, где S — множество, а ν — его нумерация, называется *нумерованным множеством*; *морфизмом* одного нумерованного множества (S_0, ν_0) в другое (S_1, ν_1) назовем всякое отображение $\mu : S_0 \to S_1$, для которого существует общерекурсивная функция (о. р. ф.) g такая, что $\mu\nu_0 = \nu_1 g$.

Нумерованные множества и их морфизмы образуют категорию $\mathfrak{N}$. Нетрудно показать, что в этой категории существуют конечные суммы и конечные произведения.

---

* Это ограничение несущественно и не будет соблюдаться в примерах и следствиях.

** Например, как в [8]. Некоторыми очевидными свойствами такой нумерации будем пользоваться в дальнейшем без специальных оговорок.

Нумерованной моделью (сигнатуры σ_0) назовем пару $(\mathfrak{M}, \nu)$, где $\mathfrak{M} = \langle M; P_0, P_1, \ldots, P_k, \ldots \rangle_{k<\omega}$ — модель (сигнатуры σ_0), а ν — нумерация основного множества M модели $\mathfrak{M}$. *Гомоморфизмом нумерованной модели* $(\mathfrak{M}_0, \nu_0)$ *в нумерованную модель* $(\mathfrak{M}_1, \nu_1)$ назовем всякое отображение $\mu : M_0 \to M_1$ основного множества M_0 модели $\mathfrak{M}_0$ в основное множество M_1 модели $\mathfrak{M}_1$, которое является как гомоморфизмом модели $\mathfrak{M}_0$ в модель $\mathfrak{M}_1$, так и морфизмом из (M_0, ν_0) в (M_1, ν_1).

По каждой нумерованной модели $(\mathfrak{M}, \nu)$ можно каноническим образом построить некоторое σ_1-обогащение $\mathfrak{M}_\nu$ модели $\mathfrak{M}$, т. е. модель сигнатуры σ_1, основное множество которой есть основное множество модели $\mathfrak{M}$, а предикаты из σ_0 в $\mathfrak{M}_\nu$ совпадают с соответствующими предикатами $\mathfrak{M}$ следующим образом: в качестве значения константы a_k, $k < \omega$ полагаем элемент $\nu(k) \in M$.

Введем следующие обозначения: $\mathrm{Th}_0(\mathfrak{M}, \nu)$ — элементарная теория модели $\mathfrak{M}$, т. е. множество всех замкнутых формул сигнатуры σ_0, истинных на модели $\mathfrak{M}$; $\mathrm{Th}_1(\mathfrak{M}, \nu)$ — элементарная теория модели $\mathfrak{M}_\nu$, т. е. множество всех замкнутых формул сигнатуры σ_1, истинных на модели $\mathfrak{M}_\nu$; $\mathrm{Th}_3(\mathfrak{M}, \nu)$ — теория сигнатуры σ_3, системой аксиом для которой является множество формул $\mathrm{Th}_1(\mathfrak{M}, \nu) \cup \{c \neq a_0, c \neq a_1, \ldots, c \neq a_k, \ldots\}_{k<\omega}$; $\mathrm{Th}_2(\mathfrak{M}, \nu) \rightleftharpoons \mathrm{Th}_3(\mathfrak{M}, \nu) \cap L_2$.

Основные определения. Нумерованная модель $(\mathfrak{M}, \nu)$ называется *конструктивной моделью*, если множество $\overline{D}(\mathfrak{M}, \nu) \rightleftharpoons \{\langle k, x_1, \ldots, x_{n_k}\rangle \mid \mathfrak{M} \vDash P_k(\nu(x_1), \ldots, \nu(x_{n_k}))\}$ рекурсивно.

Нумерованная модель $(\mathfrak{M}, \nu)$ называется *сильно конструктивной*, если $\mathrm{Th}_1(\mathfrak{M}, \nu)$ — разрешимая теория.

Замечание. *Конструктивность нумерованной модели* $(\mathfrak{M}, \nu)$, *очевидно, равносильна разрешимости множества бескванторных формул из* $\mathrm{Th}_1(\mathfrak{M}, \nu)$, *так что всякая сильно конструктивная модель является конструктивной.*

II. Докажем ряд полезных утверждений о (сильно) конструктивных моделях.

Предложение 1. *Пусть* $(\mathfrak{M}, \nu)$ — *конструктивная модель,* $M_0 \subseteq M$, $\mathfrak{M}_0$ — *подмодель модели* $\mathfrak{M}$ *с основным множеством* M_0. *Если* $\nu^{-1}(M_0)$ — *рекурсивно перечислимое множество, то существует такая нумерация* $\nu_0 : N \to M_0$ *множества* M_0, *что* $(\mathfrak{M}_0, \nu_0)$ — *конструктивная модель и вложение* $i : M_0 \to M$ *является гомоморфизмом конструктивной модели* $(\mathfrak{M}_0, \nu_0)$ *в конструктивную модель* $(\mathfrak{M}, \nu)$. *Если, кроме того,* $(\mathfrak{M}, \nu)$ — *сильно конструктивная модель и* $\mathfrak{M}_0$ — *арифметическая подмодель* $\mathfrak{M}$, *то* $(\mathfrak{M}_0, \nu_0)$ — *сильно конструктивная модель.*

Доказательство. Пусть f — о. р. ф. такая, что $f(N) = \nu^{-1}(M_0)$. Положим $\nu_0(n) = \nu f(n)$, этим, очевидно, задана нумерация $\nu_0 : N \to M_0$ множества M_0. Покажем, что $(\mathfrak{M}_0, \nu_0)$ —конструктивная модель. Имеем следующие эквивалентности:

$$\mathfrak{M}_0 \vDash P_k(\nu_0(x_1), \ldots, \nu_0(x_{n_k})) \Leftrightarrow \mathfrak{M}_0 \vDash P_k(\nu f(x_1), \ldots,$$
$$\ldots, \nu f(x_{n_k})) \Leftrightarrow \mathfrak{M} \vDash P_k(\nu f(x_1), \ldots, \nu f(x_{n_k})) >$$
$$< k, x_1, \ldots, x_{n_k} > \in \overline{D}(\mathfrak{M}_0, \nu_0) \Leftrightarrow < k, f(x_1), \ldots,$$
$$\ldots, f(x_{n_k}) > \in \overline{D}(\mathfrak{M}, \nu).$$

Из последней эквивалентности и рекурсивности $\overline{D}(\mathfrak{M}, \nu)$ следует рекурсивность $\overline{D}(\mathfrak{M}_0, \nu_0)$ и конструктивность $(\mathfrak{M}_0, \nu_0)$.

Для функции f и вложения i из определения ν_0 вытекает равенство $i\nu_0 = \nu f$. Следовательно, i — гомоморфизм конструктивных моделей.

Последнее утверждение предложения вытекает из следующей цепочки эквивалентностей и рекурсивности $\mathrm{Th}_1(\mathfrak{M}, \nu)$:

$$\Phi(a_{t_1}, \ldots, a_{t_s}) \in \mathrm{Th}_1(\mathfrak{M}_0, \nu_0) \Leftrightarrow \mathfrak{M}_{0\nu_0} \vDash \Phi(a_{t_1}, \ldots, a_{t_s}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathfrak{M}_0 \vDash \Phi(\nu_0(t_1), \ldots, \nu_0(t_s)) \Leftrightarrow \mathfrak{M} \vDash \Phi(\nu_0(t_1), \ldots, \nu_0(t_s)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathfrak{M} \vDash \Phi(\nu f(t_1), \ldots, \nu f(t_s)) \Leftrightarrow \mathfrak{M}_\nu \vDash \Phi(a_{f(t_1)}, \ldots, a_{f(t_s)}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \Phi(a_{f(t_1)}, \ldots, a_{f(t_s)}) \in \mathrm{Th}_1(\mathfrak{M}, \nu).$$

Предложение доказано.

Следствие 1. *Если $(\mathfrak{M}, \nu)$ — конструктивная алгебра, то для любого множества $M_0 \subseteq M$, такого, что $\nu^{-1}(M_0)$ рекурсивно перечислимо*, существует такая нумерация подалгебры, порожденной в $\mathfrak{M}$ множеством M_0, что соответствующая нумерованная алгебра будет конструктивна и вложение будет гомоморфизмом конструктивных алгебр.*

Следствие 2. *Если $(\mathfrak{M}, \nu)$ — конструктивное поле и $M_0 \subseteq M$ рекурсивно перечислимо, то существует такая нумерация алгебраического замыкания в $\mathfrak{M}$ поля, порожденного множеством M_0, что соответствующее нумерованное поле будет конструктивным и вложение — гомоморфизмом конструктивных алгебр.*

Эти следствия справедливы потому, что а) подалгебра, порожденная рекурсивно перечислимым множеством элементов конструктивной алгебры, рекурсивно перечислима и б) ал-

---

* Такие подмножества нумерованного множества будем в дальнейшем называть *рекурсивно перечислимыми*.

гебраическое замыкание рекурсивно перечислимого подполя в конструктивном поле также рекурсивно перечислимо.

Пусть $(\mathfrak{M}_0, \nu_0)$, $(\mathfrak{M}_1, \nu_1)$—две нумерованные модели. Определим их прямое произведение $(\mathfrak{M}_0, \nu_0) \times (\mathfrak{M}_1 \nu_1)$ как нумерованную модель $(\mathfrak{M}, \nu)$, где $\mathfrak{M} \leftrightharpoons \mathfrak{M}_0 \times \mathfrak{M}_1$, а нумерация $\nu : N \to M$ $(\leftrightharpoons M_1 \times M_2)$ определена так: $\nu(x) = (\nu_0 l(x), \nu_1 r(x))$. Здесь l и r такие одноместные примитивно рекурсивные функции, что вместе с некоторой двухместной примитивно рекурсивной функцией c удовлетворяют тождествам:

$$c(l(x), r(x)) = x,\ l(c(x, y)) = x,\ r(c(x, y)) = y,$$

т. е. осуществляют взаимооднозначное отображение пар натуральных чисел на N.

Предложение 2. *Прямое произведение (сильно) конструктивных моделей также (сильно) конструктивно.*

Доказательство. Для произведения конструктивных моделей утверждение почти очевидно. В случае сильно конструктивных моделей хорошо известен метод [8], эффективно сводящий вопрос об истинности формулы на прямом произведении к вопросу об истинности некоторых эффективно строящихся формул на сомножителях, который и дает заключение предложения.

III. Докажем теперь основную теорему о существовании сильно конструктивных моделей. Эта теорема в другой (эквивалентной) формулировке для случая нумерованных полей без доказательства была приведена автором в докладе на III конгрессе по логике, методологии и философии науки в Амстердаме (1967 г.) [10].

Теорема 1. *Пусть $T \subseteq L_0$ — разрешимая теория, тогда существует такая последовательность сильно конструктивных моделей*

$$(\mathfrak{M}_0, \nu_0),\ (\mathfrak{M}_1, \nu_1), \ldots,\ (\mathfrak{M}_k, \nu_k), \ldots,\ k < \omega,$$

что

1) $T = \mathrm{Th}(\{\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_k, \ldots\}_{k<\omega})$;

2) *множество* $\{\langle x, y\rangle \mid g(y) \in \mathrm{Th}_1(\mathfrak{M}_x, \nu_x)$ *является рекурсивным.*

Доказательство*. Пусть T^1— теория, порожденная множеством T в языке L_1. Замечаем, что T^1— разрешимая теория. Действительно, если Φ — произвольная замкнутая фор-

---

* Настоящее доказательство тесно следует известному доказательству Л. Хенкина теоремы полноты и доказательству теоремы 1 статьи [1]. Поэтому некоторые детали рассуждения опускаются.

мула в L_1 и все константы из Φ содержатся во множестве $\{a_0, \ldots, a_k\}$, то очевидно, что $\Phi \in T^1 \Leftrightarrow \forall x_0, \ldots, x_k \Phi(x_0, \ldots, x_k) \in T$ (в предположении, что $x_0, \ldots, x_k$ не встречаются в Φ и $\Phi(x_0, \ldots, x_k)$ — это результат подстановки в Φ вместо всех вхождений букв a_i букв x_i, $i \leqslant k$ соответственно). Эта эквивалентность вместе с разрешимостью T и дает разрешимость T^1.

Пусть S — множество всех замкнутых формул языка L_1, совместных с T^1, и пусть $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\}$ — эффективный пересчет всех формул из S в порядке возрастания номеров ($g^{-1}(\varphi_i) < g^{-1}(\varphi_j)$, если $i<j$). Отметим, что S — разрешимое множество формул. Пусть $\{\psi_0, \psi_1, \ldots\}$ — эффективный пересчет всех замкнутых формул языка L_1.

Будем индуктивно строить некоторые последовательности конечных множеств $S_{n,x}$ формул и теорий $T_{n,x}$ (в языке L_1).

Для любого $n \in N$ пусть

0) $S_{n,0} \rightleftharpoons \{\varphi_n\}$, $T_{n,0}$ — теория, порожденная множеством $S_{n,0} \cup T^1$.

$k+1$) Рассмотрим формулу ψ_k. Если ψ_k совместна с теорией $T_{n,k}$ и имеет вид $\exists x \psi_k'(x)$, то находим наименьшее $s \in N$, такое, что константа a_s не входит в ψ_k и не входит ни в одну из формул из $S_{n,k}$. Полагаем в этом случае $S_{n,k+1} \rightleftharpoons S_{n,k} \cup \{\psi_k, \psi_k'(a_s)\}$. Если ψ_k совместна с $T_{n,k}$ и не имеет указанного выше вида, то полагаем $S_{n,k+1} \rightleftharpoons S_{n,k} \cup \{\psi_k\}$. Если ψ_k не совместна с $T_{n,k}$, то полагаем $S_{n,k+1} \rightleftharpoons S_{n,k} \cup \{\neg \psi_k\}$.

В любом случае полагаем, что $T_{n,k+1}$—теория, порожденная множеством $S_{n,k+1} \cup T^1$. Отметим, что либо $\psi_k \in T_{n,k+1}$, либо $\neg \psi_k \in T_{n,k+1}$.

Таким образом, для любых n и k построена некоторая теория $T_{n,k}$. Полагаем $T_n \rightleftharpoons \bigcup\limits_{k<\omega} T_{n,k}$.

Стандартные рассуждения показывают, что

1) для любых n, k теория $T_{n,k}$ непротиворечива;

2) $T_{n,k} \subseteq T_{n,k+1}$, следовательно, T_n непротиворечива;

3) для любого n T_n — полная теория.

Для фиксированного n определяем отношение эквивалентности $\sim_n$ на множестве натуральных чисел так:

$$x \sim_n y \Leftrightarrow P_0(a_x, a_y) \in T_n.$$

На множестве $N/\sim_n$ классов эквивалентных элементов для любого $k < \omega$ определяем n_k— местный предикат ${}^nP_k$ так:

$${}^nP_k(t_1/\sim_n, \ldots, t_{n_k}/\sim_n) \Leftrightarrow P_k(a_{t_1}, \ldots, a_{t_{n_k}}) \in T_n.$$

Нетрудно проверить корректность этого определения и справедливость следующего утверждения.

Пусть $\mathfrak{M}_n \rightleftharpoons < N/\sim_n, {}^nP_0, {}^nP_1, \ldots, {}^nP_k, \ldots >_{k<\omega}$ — модель сигнатуры σ_0, $\nu_n : N \to N/\sim_n$ — нумерация множества $N/\sim_n$, определенная естественным образом ($\nu_n(k) = k/\sim_n$), тогда на модели $\mathfrak{M}_n, \nu_n$ истинны все формулы из T_n, или, что то же, $T_n = \mathrm{Th}_1(\mathfrak{M}_n, \nu_n)$.

Для доказательства теоремы остается только заметить, что:
а) теории $T_{n,k}$ равномерно разрешимы, т. е. множество $\{<n, k, x>|g(x) \in T_{n,k}\}$ рекурсивно. Это видно из построения;
б) теории T_n равномерно разрешимы, т. е. множество
$$\{<n, x>|g(x) \in T_n\} = \{<n, x>|g(x) \in \mathrm{Th}_1(\mathfrak{M}_n, \nu_n)\}$$
рекурсивно. Это легко следует из а) и полноты T_n;
в) $\mathrm{Th}(\{\mathfrak{M}_{0\nu_0}, \ldots, \mathfrak{M}_{k\nu_k}, \ldots\}_{k<\omega}) = T^1$. Это следует из построения.

Утверждение б) есть заключение 2) теоремы, а утверждение в) более сильно, чем заключение 1). Теорема доказана.

Следствие. *Поля: 1) всех алгебраических чисел, 2) всех алгебраических вещественных чисел, 3) всех алгебраических p-адических чисел (для каждого p) имеют нумерации, при которых они становятся сильно конструктивными полями.*

Доказательство. Действительно, теория каждого из этих полей разрешима [2, 3, 7, 9]. Поэтому по теореме существуют сильно конструктивные модели для этих теорий. Кроме того, каждое из указанных полей является арифметической подмоделью в любом поле, ему элементарно эквивалентном. Применяя предложение 1, получаем желаемое.

Замечание. Как легко следует из результатов работы [11], для каждого из указанных в следствии полей справедливо следующее: любые две нумерации (если такие существуют), которые делают поле конструктивным, эквивалентны (т. е. тождественное отображение является морфизмом в обе стороны). Вместе с указанным следствием это дает утверждение: для каждого из указанных полей существуют нумерации, делающие их конструктивными, любая такая нумерация делает поле сильно конструктивным.

IV. В этом разделе исследуются вопросы, касающиеся расширений сильно конструктивных моделей.

В 1957 г. А. Мостовский [13] и, независимо, Г. Крайзель [12] указали пример бесконечной конструктивной модели (обычная арифметика натуральных чисел и шесть дополнительных примитивно рекурсивных функций), такой, что всякая конструктивная модель (точнее, всякая модель, для которой существует нумерация, делающая ее конструктивной) изоморфна данной.

Следующее предложение есть переформулировка (точнее, следствие) этого результата.

Предложение 3. *Существует бесконечная конструктивная модель* $(\mathfrak{M}_0, \nu_0)$, *такая, что у этой конструктивной модели нет собственных конструктивных арифметических расширений, т. е. нет такой нумерованной модели* $(\mathfrak{M}, \nu)$, *что* $\mathfrak{M}_0$ — *собственная арифметическая подмодель* $\mathfrak{M}$ *и вложение является гомоморфизмом нумерованных моделей.*

Это предложение показывает, что для класса конструктивных моделей несправедлив аналог теоремы о расширении.

Существенной особенностью примера, о котором говорилось выше, является то, что для этой конструктивной модели можно указать такие формульные предикаты, что рассматриваемая модель с добавленными формульными предикатами уже не будет конструктивной ни при заданной нумерации, ни при какой другой.

Понятие сильно конструктивной модели инвариантно относительно таких формульных преобразований сигнатуры.

Рассмотрение конкретных примеров и указанное свойство инвариантности позволяют надеяться на истинность следующей гипотезы.

Гипотеза. *Для всякой бесконечной сильно конструктивной модели* $(\mathfrak{M}_0, \nu_0)$ *существует такая сильно конструктивная модель* $(\mathfrak{M}_1, \nu_1)$, *что* $\mathfrak{M}_0$ — *собственная арифметическая подмодель модели* $\mathfrak{M}_1$ *и вложение* $\mathfrak{M}_0$ *в* $\mathfrak{M}_1$ *является гомоморфизмом конструктивных моделей* . (Такую нумерованную модель* $(\mathfrak{M}_1, \nu_1)$ *будем в дальнейшем называть конструктивным арифметическим расширением для* $(\mathfrak{M}_0, \nu_0)$.)

Рассмотрим один пример.

Абелевы группы. Из результатов В. Шмелевой [15] легко вытекают следующие свойства абелевых групп.

Если $\mathfrak{A}$ — бесконечная абелева группа, все порядки элементов из $\mathfrak{A}$ ограничены в совокупности и $\mathfrak{A}$ содержит для фиксированного простого p и натурального $k>0$ сервантные подгруппы, изоморфные $Z_p^{n_k}$ для всех n, то $\mathfrak{A}$ является собственной арифметической подгруппой группы $\mathfrak{A} + Z_p{}^k$. Такие p и k всегда существуют.

Если $\mathfrak{A}$ — бесконечная абелева группа с неограниченными в совокупности элементами, то $\mathfrak{A}$ — собственная арифметическая подгруппа группы $\mathfrak{A} + Q$, где Q — группа рациональных чисел по сложению.

---

* В дальнейшем вместо слов «подмодель $\mathfrak{M}_0$ модели $\mathfrak{M}_1$ такая, что вложение является конструктивным гомоморфизмом», будем говорить: «$\mathfrak{M}_0$ конструктивно вкладывается в $\mathfrak{M}_1$».

Предложение 4. *Всякая бесконечная сильно конструктивная абелева группа содержится в некотором собственном конструктивном арифметическом расширении.*

Доказательство. Существование нумерации ν_{p^k} для конечной абелевой группы Z_{p^k}, которая делает эту группу сильно конструктивной, очевидно. Естественная нумерация ν_0 группы Q делает эту группу сильно конструктивной, как это нетрудно проверить непосредственно. Предложение 2 показывает, что нумерованные группы $(\mathfrak{A}, \nu) \times (Z_{p^k}, \nu_{p^k})$ и $(\mathfrak{A}, \nu) \times (Q, \nu_0)$ сильно конструктивны. Приведенные выше утверждения показывают, что по крайней мере одна из них является собственным арифметическим расширением $\mathfrak{A}$. То, что соответствующее вложение является гомоморфизмом конструктивных алгебр, очевидно. Предложение доказано.

V. Укажем здесь ряд средств для положительного решения сформулированной выше гипотезы в различных частных случаях.

Нижеследующая теорема показывает полезность теоретико-модельного понятия относительной модельной полноты [7] для исследования вопросов расширения конструктивных алгебр.

Теорема 2. *Пусть теория T_1 (сигнатуры σ_0) модельно полна относительно теории T (сигнатуры σ_0). Предположим еще, что T_1 — рекурсивно аксиоматизируема. Тогда всякая конструктивная модель $(\mathfrak{M}_0, \nu_0)$ теории T изоморфна рекурсивно перечислимой подмодели некоторой сильно конструктивной модели $(\mathfrak{M}_1, \nu_1)$ теории T_1.*

Доказательство. Рассмотрим $T_2 \rightleftharpoons [T_1 \cup D_1(\mathfrak{M}_0, \nu_0)]$, где $D_1(\mathfrak{M}_0, \nu_0)$ — диаграмма модели $(\mathfrak{M}_0, \nu_0)$ (в сигнатуре σ_1). Из условия конструктивности $(\mathfrak{M}_0, \nu_0)$ следует, что $D_1(\mathfrak{M}_0, \nu_0)$ — разрешимое множество. Следовательно, теория T_2 рекурсивно аксиоматизируема. Так как теория T_1 модельно полна относительно T, то теория T_2 полна. Следовательно, T_2 — разрешимая теория. По теореме 1 теория T_2 имеет сильно конструктивную модель $(\mathfrak{M}_1^*, \nu_1)$ (здесь $\mathfrak{M}_1^*$ — модель сигнатуры σ_1). Нетрудно проверить, что отображение $\varphi : M_0 \to M_1$ (определенное так: если $\nu_0(n) = a \in M_0$, то $\varphi(a)$—значение константы a_n в $\mathfrak{M}_1$) есть гомоморфизм (на самом деле изоморфизм в) модели $\mathfrak{M}_0$ в модель $\mathfrak{M}_1$— обеднение модели $\mathfrak{M}_1^*$ до сигнатуры σ_0. Кроме того, нетрудно видеть, что φ есть морфизм из (M_0, ν_0) в (M_1, ν_1). Теорема доказана.

Следствие 1. *Всякое конструктивное поле имеет конструктивное вложение в сильно конструктивное алгебраически замкнутое поле.*

Следствие 2. *Всякое конструктивное упорядоченное поле имеет конструктивное вложение в сильно конструктивное вещественно замкнутое поле.*

Следствие 3. *Всякое нормированное формально р-адическое* [9] *конструктивное поле имеет конструктивное вложение в сильно конструктивное поле, арифметически эквивалентное полю р-адических чисел.*

Указанные утверждения являются следствиями теоремы 2 и известных [7] фактов об относительной модельной полноте алгебраически замкнутых полей (для всех полей), вещественно замкнутых полей (для упорядоченных полей). Из результатов работы [3] можно извлечь и утверждение об относительной модельной полноте теории p-адических полей для нормированных формально p-адических полей.

Еще одно следствие теоремы 2 сформулируем также в виде предложения. Оно дает положительный ответ на гипотезу для алгебраически замкнутых, вещественно замкнутых полей и полей, арифметически эквивалентных полю p-адических чисел.

Предложение 5. *Всякое сильно конструктивное алгебраически замкнутое (вещественно замкнутое, арифметически эквивалентное полю р-адических чисел) поле содержится в некотором собственном сильно конструктивном арифметическом расширении.*

Набросок доказательства. Рассуждения для простоты будем проводить только для случая алгебраически замкнутых полей. Пусть (F_0, ν_0) — сильно конструктивное алгебраически замкнутое поле. Рассмотрим поле $F_0(x)$-рациональных функций от одной переменной x над F_0. Нетрудно указать [11, 14] нумерацию ν: $N \to F_0(x)$ поля $F_0(x)$, такую, что $(F_0(x), \nu)$ — конструктивное поле и что вложение $i : F_0 \to F_0(x)$ есть морфизм. По следствию 1 существует сильно конструктивное алгебраически замкнутое поле (F_1, ν_1), такое, что $(F_0(x), \nu)$ конструктивно вкладывается в (F_1, ν_1), но тогда и (F_0, ν_0) конструктивно вкладывается в (F_1, ν_1). Остается только заметить, что F_1 будет собственным арифметическим расширением F_0.

Доказательство закончено.

Замечание. Для рассматриваемых классов полей справедливо, например, такое утверждение. *Если F — алгебраически замкнуто и $\nu : N \to F$ — нумерация такая, что (F, ν) — конструктивное поле, то (F, ν) — сильно конструктивное поле.*

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия справедливости гипотезы о расширении для произвольных

сильно конструктивных моделей. Выполнимость этих условий иногда довольно легко проверить.

Теорема 3. *Пусть* $(\mathfrak{M}, \nu)$ — *бесконечная, сильно конструктивная модель. У модели* $(\mathfrak{M}, \nu)$ *существует собственное сильно конструктивное арифметическое расширение тогда и только тогда, когда теория* $\mathrm{Th}_3(\mathfrak{M}, \nu)$ *не является существенно неразрешимой* [8], *т. е. если у теории* $\mathrm{Th}_3(\mathfrak{M}, \nu)$ *имеется разрешимое расширение.*

Доказательство. Пусть $(\mathfrak{M}_1, \nu_1)$ — собственное конструктивное арифметическое расширение для $(\mathfrak{M}, \nu)$. Пусть $i : M \to M_1$ — вложение и f — о. р. ф. такая, что $i\nu = \nu_1 f$. Пусть $a \in M_1 \setminus i(M)$. Рассмотрим множество T формул сигнатуры σ_3, определенное так:

$$T \rightleftharpoons \{\Phi(a_{k_0}, \ldots, a_{k_n}, c) \mid \mathfrak{M}_{1\nu_1} \models \Phi(\nu_1 f(k_1), \ldots, \nu_1 f(k_n), a)\}.$$

Нетрудно проверить, что T является разрешимой теорией и что $T \supseteq \mathrm{Th}_3(\mathfrak{M}, \nu)$.

Обратно, пусть $T \supseteq \mathrm{Th}_3(\mathfrak{M}, \nu)$ — разрешимая теория. По теореме 1 у теории T существует сильно конструктивная модель $(\mathfrak{M}_1^*, \nu_1)$. Пусть $\mathfrak{M}_1$ — обеднение модели $\mathfrak{M}_1^*$ до сигнатуры σ_0, $j : M \to M_1$ — отображение, определенное по правилу: «Если $\nu(k) = b \in M$, то $j(b)$ — значение константы a_k в $\mathfrak{M}_1^*$». Тогда очевидно, что j есть вложение $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}_1$, причем j является морфизмом нумерованных множеств (M, ν) в (M_1, ν_1). Более того, из условия $T \supseteq \mathrm{Th}_3(\mathfrak{M}, \nu) \supseteq \mathrm{Th}_1(\mathfrak{M}, \nu)$ вытекает, что $\mathfrak{M}_1$ — арифметическое расширение $\mathfrak{M}$. Так как для любого $k \in N$ $c \neq a_k \in \mathrm{Th}_3(\mathfrak{M}, \nu) \subseteq T$, то элемент α, являющийся значением константы c в $\mathfrak{M}_1^*$, лежит в M_1, но не в $j(M)$. Следовательно, $(\mathfrak{M}_1, \nu_1)$ — собственное конструктивное арифметическое расширение $(\mathfrak{M}, \nu)$.

Теорема доказана.

Выясним более подробно строение теорий $\mathrm{Th}_3(\mathfrak{M}, \nu)$ и $\mathrm{Th}_2(\mathfrak{M}, \nu) = \mathrm{Th}_3(\mathfrak{M}, \nu) \cap L_2$.

Предложение 6. *Пусть* $(\mathfrak{M}, \nu)$ — *бесконечная нумерованная модель. Формула* $\Phi(a_{n_1}, \ldots, a_{n_k}, c)$ *языка* L_3 *принадлежит* $\mathrm{Th}_3(\mathfrak{M}, \nu)$ *тогда и только тогда, когда множество элементов* $\{x \mid x \in M$ *и* $\mathfrak{M}\nu \models \neg\Phi(a_{n_1}, \ldots, a_{n_k}, x)\}$ *конечно. Формула* $\Phi(c)$ *языка* L_2 *принадлежит* $\mathrm{Th}_2(\mathfrak{M}, \nu)$ *тогда и только тогда, когда существует натуральное число* k *такое, что* $\exists x_1, \ldots, x_k \forall y (\neg\Phi^{(k)}(y) \Rightarrow \bigvee_{i=1}^{k} y = x_i) \in \mathrm{Th}_0(\mathfrak{M}, \nu)$.

Доказательство. Заметим, что второе утверждение предложения вытекает из первого. Для доказательства

первого утверждения достаточно доказать, что формула $\Phi(a_{n_1}, \ldots, a_{n_k}, c)$ совместна с $\mathrm{Th}_3(\mathfrak{M}, \nu)$ тогда и только тогда, когда множество $\{x | x \in M$ и $\mathfrak{M}_\nu \vDash \Phi(a_{n_1}, \ldots, a_{n_k}, x)\}$ бесконечно. Действительно, если это доказано, то $\Phi \in \mathrm{Th}_3(\mathfrak{M}, \nu)$ тогда и только тогда, когда Φ не совместна с $\mathrm{Th}_3(\mathfrak{M}, \nu)$, что и дает наше утверждение. Итак, пусть $\Phi(a_{n_1}, \ldots, a_{n_k}, c)$ совместна с $\mathrm{Th}_3(\mathfrak{M}, \nu)$, тогда для любого s система формул $\{\Phi(a_{n_1}, \ldots, a_{n_k}, c), c \neq a_0, c \neq a_1, \ldots, c \neq a_s\}$ совместна с $\mathrm{Th}_1(\mathfrak{M}, \nu)$, тогда и формула $\Phi' \rightleftharpoons \exists x (\Phi(a_{n_1}, \ldots, a_{n_k}, x) \,\&\, x \neq a_0 \,\&\, x \neq a_1 \,\&\, \ldots \,\&\, x \neq a_s)$ совместна с $\mathrm{Th}_1(\mathfrak{M}, \nu)$, а следовательно, и принадлежит $\mathrm{Th}_1(\mathfrak{M}, \nu)$, так как $\Phi' \in L_1$, а $\mathrm{Th}_1(\mathfrak{M}, \nu)$ — полная теория. Отсюда и следует, что $\{x | x \in M$ и $\mathfrak{M}_\nu \vDash \Phi(a_{n_1}, \ldots, a_{n_k}, x)\}$ бесконечно. Наоборот, пусть $\{x | x \in M$ и $\mathfrak{M}_\nu \vDash \Phi(a_{n_1}, \ldots, a_{n_k}, x)\}$ бесконечно. Тогда система формул $\mathrm{Th}_1(\mathfrak{M}, \nu) \cup \{\Phi(a_{n_1}, \ldots, a_{n_k}, c), c \neq a_0, c \neq a_1, \ldots, c \neq a_s, \ldots\}$ совместна по локальной теореме, так как, очевидно, совместна любая конечная подсистема формул этой системы.

Предложение доказано. Оно показывает, что $\mathrm{Th}_2(\mathfrak{M}, \nu)$ не зависит на самом деле от нумерации ν.

Формулировка предложения 6 подсказывает введение следующего определения.

Пусть L_σ — язык узкого исчисления предикатов сигнатуры σ, пусть T — произвольная (непротиворечивая) теория. *Теорией трансцендентных элементов теории* T назовем теорию T_c сигнатуры $\sigma \cup \langle c \rangle$, которая определяется так:
$T_c \rightleftharpoons \{\Phi(c) |$ существует $k \in N$ такое, что

$$T \vDash \exists x_1 \ldots, x_k \forall y \left(\neg \Phi(y) \Rightarrow \bigvee_{i=1}^{k} y = x_i\right)\}.$$

Теорема 3 дает нам следующее достаточное условие существования собственных расширений.

Предложение 7. *Пусть* $(\mathfrak{M}, \nu)$ — *сильно конструктивная бесконечная модель. Если теория трансцендентных элементов модели* $\mathfrak{M}_\nu$ *разрешима, то у* $(\mathfrak{M}, \nu)$ *существует собственное сильно конструктивное арифметическое расширение.*

Нетрудно проверить, что если $\mathfrak{M}$ — алгебраически замкнутое поле и $\nu : N \to M$ — некоторая нумерация, то теория трансцендентных элементов $\mathrm{Th}_3(\mathfrak{M}, \nu)$ модели $\mathfrak{M}_\nu$ полна. Так что, если $(\mathfrak{M}, \nu)$ сильно конструктивна, $\mathrm{Th}_3(\mathfrak{M}, \nu)$ разрешима. Из этого замечания и предложения 7 вытекает еще одно доказательство предложения 5 для случая алгебраически замкнутых полей.

Однако достаточное условие, сформулированное в предложении 7, не является необходимым, как показывает пример, построенный далее в п. VI.

VI. В этом параграфе будет дано положительное решение гипотезы для случая булевых алгебр и построены два примера.

Предложение 8. *Пусть* $(\mathfrak{B}, \nu)$ — *сильно конструктивная бесконечная булева алгебра. Тогда для* $(\mathfrak{B}, \nu)$ *существует собственное сильно конструктивное арифметическое расширение.*

Набросок доказательства. Рассмотрим два случая.

1. *Булева алгебра* $\mathfrak{B}$ *содержит безатомный элемент,* т. е. *элемент* a, *отличный от нуля и не содержащий ни одного атома.*

Тогда $\mathfrak{B}$ изоморфна прямому произведению булевых алгебр $\mathfrak{B}_a \times \mathfrak{B}^a$, где $\mathfrak{B}_a \rightleftharpoons \{c \mid c \in \mathfrak{B}, c \subseteq a\}$, $\mathfrak{B}^a \rightleftharpoons \{c \mid c \in \mathfrak{B}, a \subseteq c\}$. Причем, используя сильную конструктивность $(\mathfrak{B}, \nu)$, можно считать, что существуют нумерации $\nu_a : N \to \mathfrak{B}_a$ и $\nu^a : N \to \mathfrak{B}^a$, такие, что $(\mathfrak{B}_a, \nu_a)$ и $(\mathfrak{B}^a, \nu^a)$ — сильно конструктивные булевы алгебры и $(\mathfrak{B}, \nu)$ есть прямое произведение $(\mathfrak{B}_a, \nu_a)$ и $(\mathfrak{B}^a, \nu^a)$ как нумерованных алгебр. Заметим также, что если $\mathfrak{B}_1$ — арифметическое расширение $\mathfrak{B}_0$, то $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$ — арифметическое расширение $\mathfrak{B}_0 \times \mathfrak{B}_2$ (Это справедливо для любых моделей, а не только для булевых алгебр.) Заметим еще, что в нашем случае $\mathfrak{B}_a$ — безатомная булева алгебра. Поэтому сделанные рассмотрения показывают, что для доказательства предложения в первом случае достаточно ограничиться рассмотрением безатомной булевой алгебры $\mathfrak{B}$.

Итак, пусть $(\mathfrak{B}, \nu)$ — сильно конструктивная безатомная булева алгебра. Строим две последовательности элементов:

$$c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots; \; d_0, d_1, \ldots, d_n, \ldots$$

булевой алгебры $\mathfrak{B}$ следующим образом.

Пусть $a_0 = \nu(0)$, $a_1 = \nu(1)$, ... — все элементы $\mathfrak{B}$. Полагаем $c_0 = 0 \in \mathfrak{B}$. Полагаем $d_0 = 1 \in \mathfrak{B}$. Пусть c_k, d_k, $k \in N$ определены, причем $c_k \subset d_k$. Ищем наименьшее число n_{k+1}, такое, что $c_k \subset a_{n_{k+1}} \subset d_k$. Полагаем $c_{k+1} = a_{n_{k+1}}$. Ищем наименьшее число n'_{k+1}, такое, что $c_{k+1} \subset a_{n'_{k+1}} \subset d_k$. Полагаем $d_{k+1} = a_{n'_{k+1}}$. Заметим, что такие n_k, n'_k всегда найдутся, так как $\mathfrak{B}$ безатомна. Итак, построены последовательности $c_0, c_1, \ldots$ и $d_0, d_1, \ldots$. Заметим, что справедливы следующие включения:

$$c_0 \subset c_1 \subset \ldots \subset c_k \subset c_{k+1} \subset \ldots \subset d_{k+1} \subset d_k \subset \ldots \subset d_1 \subset d_0.$$

Докажем еще, что в $\mathfrak{B}$ не существует элемента a такого, чтобы для всех $k \in N$ $c_k \subseteq a \subseteq d_k$. Предположим противное. Пусть для всех $k \in N$ $c_k \subseteq a \subseteq d_k$. Пусть $m \in N$ таково, что $a = a_m$. Так как последовательности c_0, c_1, . . . ; d_0, d_1, . . . бесконечны, то числа n_k и n'_k могут быть сколь угодно большими. Пусть $k > 0$ — наименьшее число, такое, что $n_k > m$. Тогда на шаге k построения имеем $c_{k-1} \subset a_m \subset d_{k-1}$. Поэтому должны иметь $n_k \leqslant m$. Противоречие.

Пусть f такая функция, что $c_k = a_{f(k)}$ для всех $k \in N$, пусть g такая функция, что $d_k = a_{g(k)}$ для всех $k \in N$. Из условия сильной конструктивности $(\mathfrak{B}, \nu)$ и определения последовательностей c_0, c_1, . . . ; d_0, d_1, . . . легко вытекает, что f и g можно выбрать общекурсивными. Рассмотрим теорию T сигнатуры σ_3, которая определяется аксиомами:

$$\mathrm{Th}_1(\mathfrak{B}, \nu) \cup \{a_{f(k)} \subset c \subset a_{g(k)} \mid k \in N\}.$$

Нетрудно проверить, что эта теория T полна. Кроме того, T рекурсивно аксиоматизируема и $T \supseteq \mathrm{Th}_3(\mathfrak{B}, \nu)$. По теореме 3 $(\mathfrak{B}, \nu)$ имеет собственное сильно конструктивное арифметическое расширение.

2. Бесконечная булева алгебра $\mathfrak{B}$ атомарна.

Множество всех номеров атомов алгебры $\mathfrak{B}$ является рекурсивным, так как множество атомов — это формульное множество. Пусть $R \rightleftharpoons \{x \mid a_x$ —атом $\mathfrak{B}\}$, f — о. р. ф., перечисляющая R без повторений. Каждому элементу a из $\mathfrak{B}$ поставим в соответствие рекурсивное множество $R_a \rightleftharpoons \{x \mid a_{f(x)} \subseteq a\}$. Все такие множества занумеруем так. Числу $x \in N$ поставим в соответствие множество $\nu_0(x) \rightleftharpoons R_{a_x}$. Легко проверить, что построенная нумерация $\nu_0 : M \to \{R_a \mid a \in \mathfrak{B}\}$ обладает следующим свойством:

множество $\{\langle x, y\rangle \mid x \in \nu_0(y)\}$— рекурсивно.

Докажем теперь две леммы.

Лемма 1. *Если $\nu_0 : N \to \{R\}$— нумерация семейства рекурсивных множеств, такая, что множество $\{\langle x, y\rangle \mid x \in \nu_0(y)\}$ рекурсивно, то существует рекурсивное множество $\overline{R}$, такое, что для любого бесконечного множества $\nu_0(x)$ пересечения $\overline{R} \cap \nu_0(x)$ и $(N \setminus \overline{R}) \cap \nu_0(x)$ не пусты.*

Доказательство. Будем обозначать через $\nu_0(x)^z$ множество $\{u \mid u \in \nu_0(x), u \leqslant z\}$. Множество $\overline{R}$ будем строить по шагам. На шаге номера z будем помещать число z во множество $\overline{R}$

или в его дополнение в зависимости от выполнения некоторых условий. Часть множества $\overline{R}$, построенная к концу шага z, будет обозначаться $\overline{R}^z$, множество $\{u|u \leqslant z,\ u \notin \overline{R}^z\}$ — $\overline{R}_0^z$. Итак, укажем построение:

Шаг $z \geqslant 0$. Рассмотрим множества $\nu_0(0)^z$, $\nu_0(1)^z$, . . ., $\nu_0(z)^z$. Если существует такое $x \leqslant z$, что $z \in \nu_0(x)^z$, $\nu_0(x)^z \cap \overline{R}^{z-1} = \varnothing$ или $\nu_0(x)^z \cap \overline{R}_0^{z-1} = \varnothing$, то для наименьшего такого x_0 полагаем $\overline{R}^z \rightleftharpoons \overline{R}^{z-1} \cup \{z\}$, если $\nu_0(x_0)^z \cap \overline{R}^{z-1} = \varnothing$, и $\overline{R}^z \rightleftharpoons \overline{R}^{z-1}$, если $\nu_0(x_0)^z \cap \overline{R}^{z-1} \neq \varnothing$ и $\nu_0(x_0)^z \cap \overline{R}_0^{z-1} = \varnothing$.

Если числа x с указанными выше свойствами не существуют, то полагаем $\overline{R}^z \rightleftharpoons \overline{R}^{z-1} \cup \{z\}$.

Полагаем $\overline{R} \rightleftharpoons \bigcup\limits_{z \geqslant 0} \overline{R}^z$. Отметим, что $\bigcup\limits_{z \geqslant 0} \overline{R}_0^z = N \setminus \overline{R}$. Построение закончено.

Из условий леммы и построения видно, что $\overline{R}$ — рекурсивное множество.

Докажем теперь, что $\overline{R}$ удовлетворяет заключению леммы. Предположим, что это неверно и пусть x_0 — наименьшее число такое, что $\nu_0(x_0)$ бесконечно, но либо $\overline{R} \cap \nu_0(x_0) = \varnothing$, либо $(N \setminus \overline{R}) \cap \nu_0(x_0) = \varnothing$. Ввиду минимальности x_0 существует такое $y_0 > 0$, что для любого $x < x_0$ либо $\nu_0(x)$ конечно и тогда все элементы из $\nu_0(x)$ меньше, чем y_0, либо $\nu_0(x)$ бесконечно и тогда $\nu_0(x)^{y_0-1} \cap \overline{R}^{y_0-1} \neq \varnothing$ и $\nu_0(x)^{y_0-1} \cap \overline{R}_0^{y_0-1} \neq \varnothing$. Так как множество $\nu_0(x_0)$ бесконечно, оно содержит элемент $x_1 > \max(x_0, y_0)$. Рассмотрим шаг x_1. На шаге x_1 число x_0 удовлетворяет условиям шага, причем из выбора y_0 следует, что x_0 является наименьшим таким числом. Поэтому если было $\overline{R}^{x_1-1} \cap \nu_0(x_0)^{x_1} = \varnothing$, то $\overline{R}^{x_1} \rightleftharpoons \overline{R}^{x_1-1} \cup \{x_1\}$ и $\overline{R}^{x_1} \cap \nu_0(x_0)^{x_1} \neq \varnothing$ и тем более $\overline{R} \cap \nu_0(x_0) \neq \varnothing$. Если же $\overline{R}^{x_1-1} \cap \nu_0(x_0)^{x_1} \neq \varnothing$, то $\overline{R}_0^{x_1-1} \cap \nu_0(x_0)^{x_1} = \varnothing$ и $\overline{R}^{x_1} \rightleftharpoons R^{x_1-1}$, поэтому $\overline{R}_0^{x_1} \cap \nu_0(x_0)^{x_1} \neq \varnothing$ и $(N \setminus \overline{R}) \cap \nu_0(x_0) \neq \varnothing$. В последнем случае имеем $\overline{R} \cap \nu_0(x_0) \neq \varnothing$, $(N \setminus \overline{R}) \cap \cap \nu_0(x_0) \neq \varnothing$, что невозможно по предположению. Следовательно, имеем $\overline{R}^{x_1-1} \cap \nu_0(x_0)^{x_1} = \varnothing$ и $\overline{R}^{x_1} \cap \nu_0(x_0)^{x_1} \neq \varnothing$. Находя теперь наименьшее $x_2 > x_1$, такое, что $x_2 \in \nu_0(x_0)$ на шаге x_2, будем иметь, как выше, $\overline{R}_0^{x_2-1} \cap \nu_0(x_0)^{x_2} \neq \varnothing$ и, следовательно, $\overline{R} \cap \nu_0(x_0) \neq \varnothing$ и $(N \setminus \overline{R}) \cap \nu_0(x_0) \neq \varnothing$. Противоречие.

Лемма доказана.

Л е м м а 2. *Если применить построение леммы* 1 *к ука-*

занной выше нумерации $\nu_0 : N \to \{R_a \mid a \in \mathfrak{B}\}$, *то для множества* $\overline{R}$ *будет разрешима проблема вхождения во множества* $\{R_a \mid a \in \mathfrak{B}\}$, *другими словами, множество* $\mathbf{C} \rightleftharpoons \{x \mid \overline{R} \subseteq \overline{R}_{a_x} = \nu_0(x)\}$ *рекурсивно.*

Доказательство. Из построения $\overline{R}$ легко заметить, что множества $\overline{R}$ и $N \setminus \overline{R}$ оба являются бесконечными. Отсюда также следует, что $\overline{R}$ отлично от всех R_a, $a \in \mathfrak{B}$.

Из сильной конструктивности модели $\mathfrak{B}$ легко следует, что:

1) множество номеров элементов, которые являются объединением конечного числа атомов, рекурсивно перечислимо, т. е. множество $A \rightleftharpoons \{x \mid R_{a_x} = \nu_0(x)$ конечно$\}$ рекурсивно перечислимо, более того, по $x \in A$ можно эффективно найти число элементов в R_{a_x};

2) существует общерекурсивная функция g, такая, что $a_{g(x)}$ есть дополнение элемента a_x для любого $x \in N$.

Используя эти факты, докажем теперь лемму. Пусть $x_0 \in N$ произвольно. Будем одновременно развертывать два алгоритмических процесса.

I. Перечисляем множество A и смотрим, не попадет ли $g(x_0)$ в A. Если $g(x_0) \in A$, то находим эффективно все элементы множества $R_{a_{g(x_0)}} = \nu_0 g(x_0)$; пусть $b_0, b_1, \ldots, b_n$ — все элементы этого множества. Проверим далее для любого $i \leqslant n$, будет ли $b_i \in \overline{R}$. Если для всех $i \leqslant n$, $b_i \notin \overline{R}$, то $R_{a_{g(x_0)}} = \{b_0, \ldots, b_n\} \subseteq N \setminus \overline{R}$, а $\overline{R} \subseteq R_{a_{x_0}} = N \setminus R_{a_{g(x_0)}}$. Следовательно, $x_0 \in \mathbf{C}$; если же для некоторого $i \leqslant n$, $b_i \in \overline{R}$, то $\overline{R} \cap \bigcap R_{a_{g(x_0)}} = \overline{R} \cap (N \setminus R_{a_{x_0}}) \neq \varnothing$ и, следовательно, $\neg(\overline{R} \subseteq R_{a_{x_0}})$ и $x_0 \notin \mathbf{C}$.

II. Перечисляем множества $\overline{R}$ и $R_{a_{g(x_0)}}$ и смотрим, будет ли пересечение $\overline{R} \cap R_{a_{g(x_0)}}$ не пусто; если окажется, что пересечение не пусто, то $R \cap R_{a_{g(x_0)}} = \overline{R} \cap (N \setminus R_{a_{x_0}}) \neq \varnothing$, $\neg(\overline{R} \subseteq R^{a_{x_0}})$ и $x_0 \notin \mathbf{C}$.

Покажем, что по крайней мере один процесс даст результат. Действительно, если дополнение $N \setminus R_{a_{x_0}}$ множества $R_{a_{x_0}}$ конечно, то обязательно ответ будет получен с помощью первого процесса. Если же $R_{a_{g(x_0)}} = N \setminus R_{a_{x_0}}$ бесконечно, то по условию на $\overline{R}$, $\overline{R} \cap R_{a_{g(x_0)}} \neq \varnothing$, и поэтому ответ будет получен по второму процессу.

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь теорию T сигнатуры σ_3, система аксиом которой определяется так:

$$\mathrm{Th}_3(\mathfrak{B}, \nu) \cup \{c \subseteq a_x \mid x \in \mathbf{C}\} \cup \{\neg (c \subseteq a_x) \mid x \notin \mathbf{C}\}.$$

Теория T непротиворечива, так как нетрудно проверить, что булева алгебра подмножеств N, порожденная множествами $\{\overline{R}\} \cup \{R_a \mid a \in \mathfrak{B}\}$ вместе с определением значений констант a_x, $x \in N$, так: $3(a_x) = R_{a_x}$, а $3(c) = \overline{R}$, есть модель T. Далее, T—рекурсивно аксиоматизируема,так как $\mathrm{Th}_3(\mathfrak{B}, \nu)$— рекурсивно аксиоматизируема, а $\mathbf{C}$ — рекурсивное множество чисел. Остается только заметить, что T — полна. Это следует из того, что построенная выше модель теории T является, очевидно, наименьшей моделью теории T. Итак, T — разрешимое (полное рекурсивно аксиоматизируемое) расширение теории $\mathrm{Th}_3(\mathfrak{B}, \nu)$, поэтому по теореме 3 $(\mathfrak{B}, \nu)$ имеет собственное сильно конструктивное арифметическое расширение.

Предложение доказано.

Замечание. Аналогично можно доказать, что гипотеза справедлива и для сильно конструктивных дистрибутивных решеток с относительными дополнениями [1].

Построим теперь пример, показывающий, что условие предложения 7 не является необходимым.

Пример 1. *Существует сильно конструктивная бесконечная абелева группа* $(\mathfrak{A}, \nu)$, *для которой не разрешима теория* $\mathrm{Th}_3(\mathfrak{A}, \nu)$ *(даже не разрешима теория* $\mathrm{Th}_2(\mathfrak{A}, \nu)$*)*. Тем не менее, по предложению 4 для $(\mathfrak{A}, \nu)$ существует собственное сильно конструктивное арифметическое расширение.

Доказательство. Пусть A — рекурсивное множество пар натуральных чисел, такое, что:

а) $\langle x, y\rangle \in A \& x' < x \Rightarrow \langle x', y\rangle \in A$,

б) $B \rightleftharpoons \{y \mid \forall x(\langle x, y\rangle \in A)\}$ нерекурсивно.

Пусть φ — функция, определенная так:

$$\varphi(y) = \begin{cases} \max\limits_x [\langle x, y\rangle \in A], \text{ если max существует,} \\ \omega, \text{ если } (\forall x)[\langle x, y\rangle \in A]. \end{cases}$$

Абелеву группу G_A определим следующим образом:

$$G_A \rightleftharpoons Z_{p_0}^{\varphi(0)} + Z_{p_1}^{\varphi(1)} + \ldots + Z_{p_n}^{\varphi(n)} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} Z_{p_n}^{\varphi(n)}.$$

Здесь p_i обозначает i-е простое число, Z_p—циклическую группу порядка p, $+$ — прямую сумму групп, Z_p^n—прямую сумму n экземпляров группы Z_p, Z_p^ω — прямую сумму счетного числа экземпляров Z_p.

Из рекурсивности A, условия а) и результатов В. Шмелевой [15] легко следует, что элементарная теория $T \rightleftharpoons \mathrm{Th}(G_A)$ группы G_A разрешима. Следовательно, по теореме 1 у T существует сильно конструктивная модель $(\mathfrak{A}, \nu)$, где $\mathfrak{A}$ — абелева группа, элементарно эквивалентная группе G_A. Рассмотрим теперь теорию трансцендентных элементов T_c теории T; заметим, что $T_c = \mathrm{Th}_2(\mathfrak{A}, \nu)$.

Пусть формулы $\mathfrak{A}_k(c)$, $k \in N$, определены так:

$$\mathfrak{A}_k(c) \rightleftharpoons (c \neq 0 \,\&\, \underbrace{c + c + \ldots + c}_{p_k \text{ раз}} = 0).$$

По предложению 7 (точнее, по доказательству этого предложения) $\mathfrak{A}_k(c)$ совместна с T_c тогда и только тогда, когда $k \in B$. Если бы теория T_c была разрешима, то и проблема совместности с T_c была бы также разрешима, а, следовательно, множество B было бы разрешимо, что противоречит условию б) на множество A.

Остается только показать, что существует множество A с нужными свойствами а) и б). Пусть $D \subset N$ — произвольное рекурсивно перечислимое, но не рекурсивное множество. Пусть χ^*— его частичная характеристическая функция, т. е.

$$\chi^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in D, \\ \text{не определена} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — машина Тьюринга, вычисляющая функцию χ^*. Положим $A \rightleftharpoons \{\langle x, y\rangle \mid$ машина $\mathfrak{M}$ за x шагов еще не вычислила значение функции χ^* в точке $y\}$.

Очевидно, что A — рекурсивное множество и $B = \{y \mid \forall x(\langle x, y\rangle \in A)\} = N \setminus D$ — не рекурсивное множество.

Утверждение доказано.

Следующий пример показывает, что важное свойство сильно конструктивных моделей иметь только рекурсивные формульные предикаты не является для них характеристическим.

Пример 2. *Существует конструктивная модель* $(\mathfrak{M}, \nu)$, *такая, что любой формульный предикат на* $\mathfrak{M}$ *рекурсивен, т. е. для любой формулы* $\Phi(x_0, \ldots, x_k)$ *сигнатуры модели* $\mathfrak{M}$, *мно-*

жество $\{\langle n_0, \ldots, n_k\rangle \mid \mathfrak{M} \vDash \Phi(\nu(n_0), \ldots, \nu(n_k))\}$ *рекурсивно, и для которой неразрешима элементарная теория* Th $(\mathfrak{M})$.

Доказательство. Сигнатура будет состоять из одного символа для одноместной функции f.

Пусть A — рекурсивно перечислимое, но не рекурсивное множество, не содержащее 0, и пусть h — о. р. ф., перечисляющая без повторений множество A, т. е. $A = \{h(0), h(1), \ldots\}$ и $h(n) \neq h(m)$ для $n \neq m$.

Полагаем $F(x) = \sum_{i=0}^{x} h(i)$, $G_0 \rightleftharpoons \{x \mid x < F(0)\}$, $G_k \rightleftharpoons \{x \mid F \times \times (k-1) \leqslant x < F(k)\}$, $k > 0$. Заметим, что G_k содержит $h(k)$-элементов. Функцию f на N определяем так:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \notin \{F(0)-1,\ F(1)-1, \ldots\}, \\ 0, & \text{если } x = F(0)-1, \\ F(k), & \text{если } x = F(k+1)-1. \end{cases}$$

Так как F — монотонная функция, то f — о. р. ф. Модель $\mathfrak{M} \rightleftharpoons \langle N, f\rangle$, нумерация $\nu : N \to N$ тождественная.

Проверка того, что всякий формульный предикат рекурсивен в $(\mathfrak{M}, \nu)$, не сложна, но утомительна и поэтому здесь опускается.

Покажем, что Th $(\mathfrak{M})$ — теория модели $\mathfrak{M}$ неразрешима. Пусть $\mathfrak{A}_k$ — формула, определенная следующим образом:

$$\mathfrak{A}_k \rightleftharpoons \exists x \left(\&_{i=1}^{k-1} x \neq f^i(x) \ \& \ x = f^k(x) \right), \quad k > 0.$$

Тогда, как нетрудно видеть, имеет место соотношение для $k > 0$:

$$\mathfrak{A}_k \in \text{Th}(\mathfrak{M}) \Leftrightarrow k \in A.$$

Отсюда следует неразрешимость Th $(\mathfrak{M})$.

Литература

1. Ершов Ю. Л. Разрешимость элементарной теории дистрибутивных структур с относительными дополнениями и теории фильтров. — Алгебра и логика, 1964, 3, № 3, 17—38.
2. Ершов Ю. Л. Об элементарных теориях локальных полей. — Алгебра и логика, 1965, 4, № 2, 5—30.
3. Ершов Ю. Л. Об элементарной теории максимальных нормированных полей. II. — Алгебра и логика, 1966, 5, № 1, 5—40.
4. Мальцев А. И. Конструктивные алгебры. I. — Усп. матем. наук, 1961, 16, № 3 (99), 3—60.

5. Мальцев А. И. Строго родственные модели и рекурсивно совершенные алгебры. — Докл. АН СССР, 1962, 145, № 2, 276—279.
6. Мальцев А. И. О рекурсивных абелевых группах. — Докл. АН СССР, 1962, 146, № 5, 1009—1012.
7. Робинсон А. Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. «Наука», 1967.
8. Ершов Ю. Л., Лавров И. А., Тайманов А. Д., Тайцлин М. А. Элементарные теории. — Усп. матем. наук, 1965, 20, № 4, 37—108.
9. Ax J., Kochen S. Diophantine problems over local fields II. — Amer. J. Math., 1965, 87, 631—648.
10. Ershov Yu. L. Numbered fields. Logic, Method. and Phil. Science III (Proceed). Amsterdam, 1968, 31—34.
11. Fröhlich A., Shepherdson J. C. Effective procedures in field theory. Phil. Tr. Royal Soc. London, A248, 1956, 407—432.
12. Kreisel G. Mathematical significance of consistency proofs. — J. Symb. Log., 1958, 23, № 2, 155—182.
13. Mostowski A. On recursive models of formalised arithmetic. — Bull. de l' Akad. Polon. Sci. III, 1957, 5, 705—710.
14. Rabin M. O. Computable algebra general theory of computable fields. Trans. Amer. Math. Soc., 1960, 95, №2, 341—360.
15. Szmielew W. Elementary properties of Abelian groups.— Fund. Math., 1955, 41, 203—271.

Поступило 3 декабря 1969 г.

ENGLAND
University of London
P. M. COHN

BOUND MODULES OVER HEREDITARY RINGS

To the memory of A. I. Mal'cev
on the occasion of his 60th birthday

1. Introduction. The notion of a finitely generated torsion module over a principal ideal domain was generalized in [4] to firs (defined in [4] and in § 2 below). To be precise, there is for any right fir R, a full subcategory T_R of the category M_R of all right R-modules, which reduces to the category of finitely generated torsion modules over R in the commutative case. Moreover, for a two-sided fir R, T_R is an abelian category whose objects all have finite composition length, and the corresponding category ${}_RT$ of left modules turns out to be dual to T_R, the duality being effected by the functor Ext $(-, R)$.

Our purpose here is to treat a natural extension of the class of torsion modules, which arises from the fact that over a noncommutative ring there may be rectangular matrices that are non-singular. This suggests the problem of studying the factorization of general non-singular matrices over firs; we shall find that every such matrix can be factorized into a finite product of 'unfactorable' ones (Th. 5. 1), but the examples given in § 5 show that the relation between different factorizations of a given matrix is not usually very close: not even the number of factors need be the same. Thus not much can be said about the factorization of rectangular matrices, but in any case the language of matrices is not the most appropriate one, since e. g. the relationship between two matrices defining isomorphic modules is far from simple (§ 5).

Let us call a module *bound* when the matrix presenting it can be taken to be non-singular; this notion of bound module can be extended to quite general rings (§ 2), giving rise to a *torsion class* in the sense of S. E. Dickson [5]. On restricting the ring

to be hereditary we can show that the finitely related bound modules satisfy both chain conditions for bound submodules, and that there is again a duality between left and right bound modules (§ 2—3). Of course this includes some of the results obtained in [4] for firs (a special case of hereditary rings). It also underlines the difference between firs and principal ideal domains: over the latter every submodule of a bound module is bound, but this does not extend to firs (in fact it can be shown to characterize principal ideal domains among firs). We therefore consider briefly in § 4 the class of modules all of whose submodules are bound. On extending such a module by a projective module we can obtain all finitely related modules in this way (Th. 4. 2). This is reminiscent of Lewin's result on free algebras [8]; it would be of interest to find a derivation of Lewin's theorem from the results given here.

2. Bound modules. Throughout, all rings are associative, with 1, all homomorphisms preserve the 1 and all modules are unital. We recall that a ring is said to be *right (semi-) hereditary* if every (finitely generated) right ideal is projective. By a *right fir* (=free right ideal ring) we understand a ring in which all right ideals are free, of unique rank. Clearly a right fir is right hereditary. The left-hand notions are defined similarly. Most of our results will be stated for two-sided (i. e. right and left) hereditary rings, but to begin with no restrictions are placed on the ring.

Let R be a ring, then an R-module M is said to be *bound* if

$$\mathrm{Hom}_R\ (M,\ R)=0.$$

For firs this is clearly equivalent to the definition given in § 1. As an example, if R is right hereditary, any homomorphism $M \to R$ has a projective R-module as image, which leads to a splitting of M, whence in this case M is bound if and only if it has no non-zero projective module as direct summand. In the particular case of a right fir, M is bound if and only if it does not have R as a direct summand.

Let us return to the general case. By the results of S. E. Dickson [5], the class B_R of bound right R-modules is a *torsion class*, as defined in [5]. We deduce the following result, which is also of course easy to verify directly.

P r o p o s i t i o n 2.1. *Let R be any ring, M a right R-module and M' a submodule. Then (i) if M is bound, so are all its homomorphic images, (ii) if M', M/M' are bound, so is M, (iii) the direct limit of a system of bound modules is bound, in particular, (iv) any sum of bound modules is bound.*

By Prop. 2. 1, any module M has a unique maximal bound submodule M_b and M/M_b contains no bound submodules other than 0. More precisely, let us call a module N *unbound* if Hom $(M, N)=0$ for all bound M. In Dickson's terminology, the unbound modules form the *torsionfree class* corresponding to the torsion class B_R of bound modules. The maximal bound submodule M_b is then characterized by

Proposition 2. 2. *Given any R-module M (where R is any ring), there exists a unique submodule M_b such that M_b is bound and M/M_b is unbound. In particular, the only module which is both bound and unbound is the zero module.*

The proof is immediate (cf. also [5], Prop. 2. 4). We remark that in a hereditary ring M_b may also be defined by

$$M_b = \bigcap \{\ker h \mid h \in \mathrm{Hom}(M, R)\}.$$

For unbound modules we have, dually to Prop. 2. 1.

Proposition 2. 3. *Let R be any ring, M an R-module and M′ a submodule. Then (i) if M is unbound, so are all its submodules, (ii) if M′ and M/M' are unbound, so is M, (iii) the inverse limit of any system of unbound modules is unbound and (iv) any product of unbound modules is unbound.*

Thus e. g. a projective module is always unbound. For it is a submodule of a direct sum of copies of R, hence a submodule of a direct power of R, and R is clearly unbound. By Prop. 2. 2 we also see that a module is unbound if and only if it has no non-zero bound submodules.

Our first objective is to obtain chain conditions on bound modules, and here we have to restrict the rings. Our main tool is the following theorem of F. Albrecht [1]:

A projective right R-module over a right semihereditary ring R is a direct sum of finitely generated modules.

Theorem 2. 4. *Let R be a right hereditary ring and let M be any finitely related right R-module. Then every submodule of M is the direct sum of a finitely presented module and a projective module.*

Proof. By hypothesis, $M=F/N$, where F is free and N is finitely generated. Every submodule of M has the form P/N, where $N \subseteq P \subseteq F$ and here P is projective, because R is right hereditary. By the result of Albrecht quoted above, P is a direct sum of finitely generated modules and so it contains a finitely generated direct summand P', containing N (because N was finitely generated). Write $P = P' \oplus P''$, then we have the exact sequence

$$0 \to P'/N \to P/N \to P/P' \cong P'' \to 0.$$

Since P'' is projective, the sequence splits and P'/N is finitely presented. This completes the proof.

Let R and M be as in Th. 2. 4 and consider a chain (P_α) of projective submodules of M. Their union can be written as $P \oplus K$, where P is projective and K finitely presented. Hence $K \subseteq P_\alpha$ for some α, and so K is projective. Thus the union is itself projective and we obtain.

Corollary 1. *If R and M are as in Th. 2. 4, then the projective submodules of M form an inductive system.*

Another consequence of Th. 2. 4 is that every bound submodule of M is finitely generated. Hence (by Prop. 2. 1 (iii)) we find.

Corollary 2. *A finitely related module over a right hereditary ring satisfies ACC*) for bound submodules.*

Taking M itself to be bound, we find.

Corollary 3. *Let M be a finitely related bound module over a right hereditary ring, then every bound submodule of M (in particular M itself) is finitely presented.*

As a matter of fact it is easy to show that over any ring, a finitely related bound module is finitely presented.

We can form the category of bound modules, as a full subcategory of M_R, the category of all right R-modules and homomorphisms, but in general this will not be abelian, because every submodule occurs as kernel but not every submodule of a bound module need be bound. E. g., when R is a right fir, this is so if and only if R is a principal right ideal domain. A possible modification might be to take the class of all bound modules together with all mappings f such that $\ker f$ is bound. But this need not even be a category; however, if the intersection of two bound modules is always bound, we get an abelian category in this way. We shall see later that in general firs even this condition need not hold.

3. Duality. We shall now show that DCC holds as well as ACC, under some further mild restriction on the class of modules. This will in fact follow from the duality described for firs in [4], which is generalized here; for a similar development obtained independently, cf. Bergman [2].

For brevity let us call a module M *special* if it is finitely presented and of projective dimension at most 1. Thus a special module M is a module with a presentation

$$0 \to P' \to P \to M \to 0,$$

*) Ascending chain condition.

where P, P' are finitely generated projectives. E. g. over a right hereditary Noetherian ring, every finitely generated right module is special. In what follows we write Ext for Ext^1_R.

Theorem 3. 1. *Over any ring R, the functor* Ext $(-, R)$ *provides a duality between special bound right R-modules and special bound left R-modules.*

This was proved in [4] in the special case where P, P' are free, but the same proof applies in the present case (cf. also [2]). The duality of Th. 3. 1 in the case $R=\mathbf{Z}$ is just the familiar Pontryagin duality $A \mapsto \mathrm{Hom}\,(A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. We shall briefly indicate the conditions under which this simplification can be made.

A module M is said to be *strongly bound* if M and all its submodules are bound. Such modules were briefly considered by Gentile [6], who showed that over any ring with zero singular ideal (e. g. an integral domain) a module is singular if and only if it is strongly bound.

Denote by I the injective hull of R, as right R-module, and put $K=\mathrm{coker}\,(R \to I)$, so that we have the exact sequence

$$0 \to R \to I \to K \to 0. \tag{1}$$

Clearly M is strongly bound if and only if $\mathrm{Hom}\,(M, I)=0$.

Proposition 3. 2. *Let R be any ring, and define I, K as above so that* (1) *holds. Then for any strongly bound module M,*

$$\mathrm{Ext}\,(M, R) \cong \mathrm{Hom}\,(M, K). \tag{2}$$

Proof. By (1) we have, since I is injective,

$$0 \to \mathrm{Hom}\,(M, R) \to \mathrm{Hom}\,(M, I) \to \mathrm{Hom}\,(M, K) \to \to \mathrm{Ext}\,(M, R) \to 0. \tag{3}$$

But $\mathrm{Hom}\,(M, I) = 0$, because M is strongly bound, and the result follows.

Over a principal ideal domain (commutative or not) every bound module is strongly bound and we can therefore use Prop. 3. 2 to express the duality in terms of Hom. Moreover, in this case I is just the skew field of fractions of R (by Prop. 3, p. 95 of [7]). This is an R-bimodule, hence K is also an R-bimodule and it follows that (for a right R-module M) (2) is actually a left R-module isomorphism. When R is a fir but not a principal ideal domain, there will generally be modules that are bound but not strongly bound. Even then we can use the exact sequence (3) to describe Ext (M, R) as the cokernel of the mapping $\mathrm{Hom}\,(M, I) \to \mathrm{Hom}\,(M, K)$. However, a closer analysis of I is necessary to reveal its R-bimodule structure. This is always possible but it is not clear that this would throw further light on Ext (M, R).

Returning to Th. 3. 1, let us apply the result to hereditary rings. In the first place, every finitely presented module is now

special. Moreover, by Th. 2. 4, Cor. 2, every finitely presented bound module satisfies ACC on bound submodules (necessarily finitely presented, by Cor. 3), and applying the above duality, we find that the module satisfies DCC for bound submodules. Thus

Theorem 3. 3. *A finitely presented bound module over a (left and right) hereditary ring satisfies both chain conditions for bound submodules.*

4. Strongly bound modules over hereditary rings. Let R be a (left and right) hereditary ring. We saw that an R-module is bound if and only if it has no projective summand $\neq 0$. Hence an R-module is strongly bound precisely if it has no non-zero projective submodule. This makes it clear that over a hereditary ring the class of strongly bound modules is closed under homomorphic images as well as under submodules. By Th. 3. 3 we get

Proposition 4. 1. *A finitely presented strongly bound module over a hereditary ring satisfies both chain conditions on submodules.*

We can use Th. 2. 4 to show that every finitely related module over a hereditary ring is an extension of a projective by a strongly bound module:

Theorem 4. 2. *Let M be a finitely related module over a right hereditary ring. Then there is an exact sequence*

$$0 \to P \to M \to Q \to 0, \tag{1}$$

where P is projective and Q is finitely generated and strongly bound.

Proof. By hypothesis M has a presentation of the form

$$0 \to G \to F \to M \to 0, \tag{2}$$

where F is free and G is finitely generated; for simplicity we shall identify G with a submodule of F. Since G is finitely generated, we can write F in the form

$$F = F_0 \oplus F_1,$$

where F_0, F_1 are both free, F_0 is finitely generated, and contains G. Thus $M \cong F/G \cong (F_0/G) + F_1$, so that F_1 may be identified with a submodule (again written F_1) of M. Applying Zorn's lemma (and remembering Th. 2. 4, Cor. 1), we find a maximal projective submodule P of M containing F_1. Writing $Q = M/P$, we obtain the exact sequence (1). Since $P \supseteq F_1$, we have, on writing $G_0 = F_0/G$,

$$P = P \cap (G_0 + F_1) = (P \cap G_0) + E_1, \text{ whence } Q = M/P = (G_0 + F_1)/[(P \cap G_0) + F_1] \cong G_0/(P \cap G_0) \cong (G_0 + P)/P.$$

Thus Q as homomorphic image of F_0 is finitely generated. It is also strongly bound, for any non-zero projective submodule would correspond to a submodule P_1 of M such that $P_1 \supset P$ and P_1/P is projective. But this means that P_1 splits over P, hence P_1 is itself projective, and this contradicts the maximality of P. Hence Q is finitely generated and strongly bound, as asserted.

Let R be a two-sided fir, and I its injective hull, as right R-module. If M is any finitely related right R-module, we have an exact sequence (1), where P is now free, say $P = {}^X R$ (a direct sum of copies of R indexed by X), and Q is strongly bound. Hence $\mathrm{Hom}\,(Q, I) = 0$, and applying $\mathrm{Hom}\,(-, R)$ to (1) we obtain

$$0 \to \mathrm{Hom}\,(P, I) \to \mathrm{Hom}\,(M, I) \to 0.$$

But $\mathrm{Hom}\,(P, I) \cong I^X$ (a direct product of copies of I indexed by X), and so we have proved the

C o r o l l a r y. Let R be a two-sided fir and I its injective hull. Then for any finitely related R-module M, there exists a set X such that

$$\mathrm{Hom}\,(M, I) \cong I^X.$$

We note that in general X may be infinite, even if M is finitely generated. E. g. let R be the free k-algebra (k a field) on $x_1, x_2, \ldots$, and put $M = R/x_1 R$, then M contains as maximal projective $P = \Sigma\, x_i R/x_1 R$ which is free of infinite rank, while $M/P \cong k$. Hence $\mathrm{Hom}\,(M, I) \cong I^N$ (where N is countable) even though M is cyclic.

Th. 4. 2 may be compared with the following result proved by Lewin [8]:

Let M be a finitely related module over a free associative k-algebra (k a field). Then there is an exact sequence

$$0 \to F \to M \to Q \to 0,$$

where F is free and Q is finite-dimensional over k.

It is not clear whether this can be deduced directly from Th. 4. 2. In fact the module Q need not even be finitely presented, as the example just given (for the corollary) shows. On the other hand, the existence of infinite-dimensional finitely generated simple algebras shows that not every strongly bound module over a free algebra is finite-dimensional. For if R is such a simple algebra (e. g. take R to be generated over a field of characteristic 0 by x and y satisfying $xy - yx = 1$), and if $\mathfrak{m}$ is a maximal right ideal of R, then $R/\mathfrak{m}$ is simple and so is certainly strongly bound, but it cannot be finite-dimensional, because

by simplicity it is a faithful R-module and R is infinite-dimensional.

To obtain a description of strongly bound modules in the general case, consider a cyclic module Q, with a presentation

$$0 \to \mathfrak{a} \to R \to Q \to 0, \tag{3}$$

where $\mathfrak{a}$ is a right ideal of R. If we again write I for the injective hull of R, as right R-module, we have the exact sequence

$$0 \to \mathrm{Hom}(Q,I) \to \mathrm{Hom}(R,I) \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{a},I) \to 0, \tag{4}$$

and Q is strongly bound if and only if $\mathrm{Hom}(Q, I) = 0$. Consider the mapping

$$\lambda : I \cong \mathrm{Hom}(R, I) \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}, I)$$

occurring in (4). For any $u \in I$ we have $\lambda_u : x \mapsto ux$, and by (4) Q is strongly bound if and only if λ is injective, i. e.

$$u\mathfrak{a} = 0 \text{ implies } u = 0, \text{ for all } u \in I. \tag{5}$$

Let us call a right ideal $\mathfrak{a}$ of R *dense* if it satisfies (5). This agrees with the definition on p. 96 of Lambek [7]. Now Lemma 2, p. 97 of [7] shows that of $\mathfrak{a}$ is dense, then for any $b \in R$, $b^{-1}\mathfrak{a} = \{x \in R / bx \in \mathfrak{a}\}$ is dense; moreover, Lambek shows that $\mathfrak{a}$ is dense if and only if for any a, $b \in R$ such that $a \neq 0$, we have $ab^{-1}\mathfrak{a} \neq 0$. Thus we obtain

Proposition 4. 3. *Let R be any ring and $\mathfrak{a}$ a right ideal. Then $R/\mathfrak{a}$ is strongly bound if and only if $ab^{-1}\mathfrak{a} \neq 0$ for any $a, b \in R$ with $a \neq 0$.*

For integral domains we obtain the

Corollary. Let R be an integral domain and $\mathfrak{a}$ a right ideal. Then $R/\mathfrak{a}$ is strongly bound if and only if R is an essential extension of $\mathfrak{a}$.

For example, any maximal right ideal in an integral domain satisfies the condition of this corollary, but not necessarily conversely.

5. **Factorization of general matrices over firs.** Over a fir R every finitely presented module is completely specified by a matrix. Thus if M is a right R-module, with the presentation

$$0 \to R^n \xrightarrow{\lambda} R^m \xrightarrow{\mu} M \to 0, \tag{1}$$

then λ corresponds to left multiplication by an $m \times n$ matrix a say, over R, which determines M completely: $M \cong R^m/aR^n$, where aR^n stands for the submodule of R^m spanned by the columns of a. The fact that λ is injective means that a is *right non-singular*,

i. e. $ax=0$ implies $x=0$ for all $x \in R^n$. It is easily seen that M is bound if and only if a is also *left non-singular*. Thus bound submodules correspond to non-singular matrices. Of course, a given module may be defined by more than one matrix; in fact an $m \times n$ matrix a and an $r \times t$ matrix a' define isomorphic modules if and only if there exists an $m \times r$ matrix b such that

$$aR^n + bR^r = R^m,$$
$$a'R^s = \{x \in R^r \mid bx \in aR^n\}.$$

This is proved in the same way as Prop. 6. 1 of [4].

An $m \times n$ matrix a is said to be a *unit*, if there is an $n \times$ m matrix b such that $ab = I_m$, $ba = I_n$. Of course, when a is non-singular, either of these conditions implies the other. Over a ring with invariant basis number (cf. e. g. [3]) all units are square, (i. e. if a is a unit, then $m=n$), in fact this condition is sufficient as well as necessary, for the ring to have invariant basis number.

By a *proper factorization* of a matrix c we mean a representation of c as a matrix product

$$c = ab, \tag{2}$$

where a is $m \times p$, b is $p \times n$ say, and (i) a is right non-singular, (ii) b is left non-singular and (iii) neither a nor b is a unit. If the matrices a, b, c define modules M'', M', M respectively, the equation (2) corresponds to a short exact sequence

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0.$$

A matrix is said to be *unfactorable*, if it is non-singular, a non-unit and has no proper factorizations. In particular, an element of R which is unfactorable in this sense is an atom (i. e. it cannot be expressed as a product of non-units), but the converse need not hold, e. g. over the free associative algebra on $x_1, x_2, \ldots$ we have the element

$$c = x_1x_{r+1} + x_2x_{r+2} + \cdots + x_r x_{2r}, \tag{3}$$

which is an atom if $r > 1$, but not unfactorable, because it can be written as a proper product of a row and a column. This also provides an example of rectangular matrices that are non-singular. By contrast, over a commutative ring all non-singular matrices must be square. E. g. if we allow the x' s to commute and consider the element (3) over the commutative polynomial ring in the x' s, we find that it is unfactorable, because now there is no proper factorization: the row and column used before are singular.

We can use the chain condition of Th. 3. 3 to obtain a factorization of matrices:

T h e o r e m 5. 1. *Every non-singular matrix over a two-sided fir is either a unit or a proper product of a finite number of unfactorable matrices.*

For any pròper factorization $c = a_1 a_2 \ldots a_t$, where a_ν is an $r_{\nu-1} \times r_\nu$ matrix ($r_0 = m$, $r_t = n$) corresponds to a series of submodules

$$R^m \supset a_1 R^{r_1} \supset a_1 a_2 R^{r_2} \supset \cdots \supset cR^n,$$

The inclusions are proper, since no a_ν is a unit, and the quotients are bound modules. Thus the factorization corresponds to a chain of bound submodules of R^m/cR^n, and by Th. 3. 3 any such chain has a maximal refinement, which is still finite.

We note that this result still holds for «pseudofirs», i. e. rings in which all left and all right ideals are free, but not necessarily of unique rank. On the other hand, the result does not extend to semifirs (rings in which every finitely generated right ideal is free of unique rank); this is shown very simply already in the commutative case by taking a Bezout ring which is not a principal ideal domain.

Th. 5. 1 naturally leads one to ask how the various factorizations of a given matrix are related. We shall see that apart from the rather special case of strongly bound modules, there is no very close relationship between different factorizations.

The strongly bound modules (over any ring) form an abelian category, and over a hereditary ring the finitely presented bound modules have finite composition length, so the Jordan-Hölder theorem holds in this case. The examples which follow illustrate the failure of the Jordan-Hölder theorem for bound modules over the free associative k-algebra $R = k\langle x, y, z, u, v \ldots \rangle$, where k is a field.

(i) Let M be generated by e, f with defining relations $ex = fy = 0$, $ez = fz$. This module is bound, as well as its submodules eR, fR, but their intersection $eR \cap fR = ezR$ is free. Thus the class indicated at the end of § 2 is not a category in this case. M has the following maximal chains of bound submodules: $0 \subset eR \subset M$, $0 \subset fR \subset M$, $0 \subset (e-f)R \subset M$, whose quotients are defined by the following matrices: x, $(y\ z)$; y, $(x\ z)$; z, $(x\ y)$.

(ii) Let M be generated by e, f with defining relations $ex = fy = 0$, $ez = fu$. Here we have two maximal chains: $0 \subset eR \subset M$, $0 \subset fR \subset M$, whose quotients have the matrices x, $(y\ u)$ and y, $(x\ z)$.

(iii) Let M be generated by e, f with the defining relations $ex = fy = 0$, $ez = fuv$. Here we have the following maximal chains: $0 \subset eR \subset eR + fuR \subset M$ and $0 \subset fR \subset M$. The quotients have matrices: x, v, $(u\ y)$, and y, $(x\ z)$. This shows that not even the number of terms in a chain need be constant.

References

1. Albrecht F. On projective modules over semihereditary rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1961, **12**, 638—639.
2. Bergman G. M. Commuting elements in free algebras and related topics in ring theory (Thesis, Harvard University 1967)*).
3. Cohn P. M. Some remarks on the invariant basis property. — Topology, 1966, 5, 215—228.
4. Cohn P. M. Torsion modules over free ideal rings. — Proc. London Math. Soc., 1967, **17**, 577—599.
5. Dickson S. E. A torsion theory for abelian categories. — Trans. Amer. Math. Soc., 1966, **121**, 223—235.
6. Gentile E. R. Singular submodule and injective hull. — Indag. Math., 1962, **24**, 426—433.
7. Lambek J. Lectures on rings and modules. — Waltham, Mass. Toronto and London, 1966.
8. Lewin J. Free modules over free algebras and free group algebras: the Schreier technique. — Trans. Amer. Math. Soc., 1969, **145**, 455—465.

Поступило 24 апреля 1969 г.

*) An earlier draft of the present note is quoted as item [35] in this thesis, under the title: Factorization of matrices over free ideal rings and a generalization of torsion modules.

СССР
Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР
А. И. КОСТРИКИН

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ АЛГЕБР ЛИ

Памяти Анатолия Ивановича Мальцева

Имеются в виду преимущественно задачи, специфические для алгебр Ли, определенных над полем k характеристики $p > 0$, которое почти всюду предполагается алгебраически замкнутым. Таким образом, в стороне от нашего рассмотрения остаются многие интересные темы, относящиеся к нулевой характеристике, равно как и темы, на развитие которых оказывают большее влияние не значения характеристики, а совсем иные факторы.

Например, структурная теория разрешимых или нильпотентных алгебр находится в зачаточном состоянии над любым полем. Сравнительно невелика их роль и в приложениях, исключая некоторые изолированные, хотя и не лишенные интереса вопросы из теории конечных p-групп, динамических систем и т. д.

Если, однако, обратиться к конечномерным полупростым алгебрам Ли, то нужно отметить два обстоятельства. Эти алгебры в случае характеристики 0 тесно связаны с самыми различными областями математики; соответственно техника их классификации и описания различных свойств доведена до состояния идеально отлаженного механизма. С другой стороны, полупростые алгебры Ли конечной характеристики (т. е. алгебры, определенные над полями характеристики $p > 0$) занимают пока скромное место в общем развитии, а о прогнозах их более или менее полного описания вплоть до недавнего времени не было оснований говорить серьезно ввиду отсутствия надлежащего языка. По сути дела, в категорию «экзотических» попадали (совершенно незаслуженно!) все простые

алгебры, не являющиеся классическими, т. е. не получающиеся редукцией по mod p из комплексных простых алгебр Ли.

Три года назад было замечено [1], что положение, по-видимому, можно поправить, если за исходную модель в характеристике 0 брать не только конечномерные простые алгебры Ли, но и так называемые бесконечные алгебры Картана [2], играющие видную роль в дифференциальной геометрии. После работы [3] это стало еще более очевидным, хотя в общей цепи рассуждений не достает пока ряда звеньев. К настоящему времени прояснилась также картина взаимоотношений (далеко не тривиальных) между простыми и полупростыми алгебрами (см. [4]).

Таким образом, есть основания для подведения итогов в исследовании полупростых алгебр Ли конечной характеристики, и именно этой цели посвящена, в основном, настоящая статья. Следует обратить внимание на недавно вышедшую обзорную монографию [5], где детально исследуются классические полупростые алгебры Ли, их формы над различными полями, группы автоморфизмов, а также воспроизводятся примеры всех «экзотических» простых алгебр в их первоначальной форме. Мы почти не касаемся этих вопросов или рассматриваем их с несколько другой точки зрения.

§ 1. Классы простых алгебр Ли

Далее предполагается, что $p > 5$. Ограничение $p \neq 2, 3$ связано с существом дела, тогда как значение $p = 5$ исключается, скорее, из соображений простоты формулировок.

Обозначим через Π множество всех (классов изоморфизма) конечномерных над k простых алгебр Ли и запишем его двумя способами в виде теоретико-множественной суммы:

$$\Pi_{cl} \cup \Pi_d = \Pi = \Pi_{sd} \cup \Pi_{\overline{sd}}.$$

Здесь $\Pi_{cl} = \{A_n, B_n, G_n, D_n, G_2, F_4, E_6, E_7, E_8\}$ — множество всех простых алгебр классического типа; Π_d — дополнение Π_{cl} до Π, называемое также классом вырожденных алгебр Ли (см. [6] и [7]); $\Pi_{\overline{sd}}$ — дополнение до Π множества Π_{sd} алгебр с сильным вырождением. По определению, $\mathfrak{L} \in \Pi_{sd}$ тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{L}$ найдется элемент $c \neq 0$, для которого $(\mathrm{ad}\, c)^2 = 0$. Кажется весьма привлекательной следующая

Гипотеза 1. Имеет место равенство $\Pi_d = \Pi_{sd}$ (соответственно $\Pi_{cl} = \Pi_{\overline{sd}}$).

Доказательство этой гипотезы дало бы один из инструментов исследования неклассических (вырожденных) простых алгебр. Действительно, в статье [7] было установлено, что алгебра $\mathfrak{L}$ принадлежит классу Π_{sd} тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{L}$ найдется фильтрация длины $r > 1$, т. е.

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{-1} \supset \mathfrak{L}_0 \supset \mathfrak{L}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{L}_r \supset 0, [\mathfrak{L}_i, \mathfrak{L}_j] \subseteq \mathfrak{L}_{i+j}, \quad (*)$$

где $\mathfrak{L}_0$ — какая-то максимальная подалгебра в $\mathfrak{L}$, а члены фильтрации $\mathfrak{L}_i$ определяются рекуррентно:

$$\mathfrak{L}_{i+1} = \{x \in \mathfrak{L}_i \mid [x, \mathfrak{L}] \subseteq \mathfrak{L}_i\}.$$

Длина r фильтрации $\{\mathfrak{L}_i\}$ зависит от $\mathfrak{L}_0$, но если, например, $\mathfrak{L}_0$ содержит нормализатор $N\mathfrak{L}(\mathfrak{C})$ подалгебры

$$\mathfrak{C} = \langle c \in \mathfrak{L} \mid (\mathrm{ad}c)^2 = 0 \rangle,$$

то обязательно будет $r > 1$. Это очень сильное свойство, которым можно эффективно воспользоваться. В техническом плане не лишена интереса

Гипотеза 2. Нормализатор $N\mathfrak{L}(\mathfrak{C})$ является максимальной подалгеброй в любой алгебре $\mathfrak{L} \in \Pi_{sd}$.

По своему определению, $\mathfrak{L}_0 = N\mathfrak{L}(\mathfrak{C})$ — подалгебра, инвариантная относительно всех автоморфизмов алгебры $\mathfrak{L}$, поэтому ее максимальность в $\mathfrak{L}$ придавала бы соответствующей фильтрации $\{\mathfrak{L}_i\}$ и всем связанным с нею конструкциям абсолютно инвариантный смысл. В пользу этой гипотезы говорят пока лишь экспериментальные данные (см. § 2).

Что касается основной гипотезы 1, то ее обоснование опирается сейчас на легко проверяемое включение $\Pi_{sd} \subseteq \Pi_d$ (соответственно $\Pi_{cl} \subseteq \Pi_{\overline{sd}}$) и на следующую менее тривиальную теорему (см. [7] и примечание в конце статьи [3]). Пусть

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{H} + \sum_{\gamma \neq 0} \mathfrak{L}_\gamma$$

— картановское разложение алгебры $\mathfrak{L} \in \Pi_{\overline{sd}}$. Если найдется ненулевой элемент $a \in \mathfrak{H}$ или $\mathfrak{L}_\gamma$ при некотором $\gamma \neq 0$ с $(\mathrm{ad}\ a)^{p-1} = 0$, то $\mathfrak{L} \in \Pi_{cl}$. В связи с этим утверждением возникает вопрос, почти эквивалентный гипотезе 1: существует ли над алгебраически замкнутым полем k простая алгебра Ли $\mathfrak{L}$, в которой $(\mathrm{ad}\ x)^{p-1} \neq 0$ для всех $x \neq 0$? Если даже предположить, что $\mathfrak{L}$ — p-алгебра Ли, то можно гарантировать лишь существование элемента $y \neq 0$ с $(\mathrm{ad}\ y)^p = 0$ (см. [8]), однако не совсем ясно, как осуществить переход от y к a.

Может показаться странным, что мы делаем акцент на фильтрации (*), тогда как проверенный временем метод кар-

тановских разложений, систем корней и т. д. остался в стороне. Это не совсем так. Метод Киллинга—Картана успешно действует при изучении классических алгебр и при их характеризации внутри всего класса Π, т. е. в вопросах, связанных с гипотезой 1. Пусть, далее, $\mathfrak{L}$ — алгебра с фильтрацией (*) и

$$\operatorname{gr}\mathfrak{L}=L=\bigoplus_{i=-1}^{r} L_i\,,L_i=\mathfrak{L}_i/\mathfrak{L}_{i+1}$$

— ассоциированная с ней градуированная алгебра, умножение в которой (обозначаемое снова скобкой [,]) индуцируется соотношением:

$$[x+\mathfrak{L}_{i+1},\ y+\mathfrak{L}_{j+1}]=[x,y]+\mathfrak{L}_{i+j+1},\ x\in\mathfrak{L}_i\,,\ y\in\mathfrak{L}_j\,.$$

Очевидно, что $[L_i\,,L_j\,]\subseteq L_{i+j}$ и $0\neq x\in L_j\,,\ j\geqslant 0,=\rangle[L_{-1},x]\neq 0$. В частности, $[L_{-1},L_{-1}]=0$, $[L_0,L_0]\subseteq L_0$, а $\Gamma: L_0\to\operatorname{Hom}(L_{-1},L_{-1})$ — представление подалгебры L_0, определяемое включением $[L_0,L_{-1}]\subseteq L_{-1}$. В большинстве рассматриваемых ниже случаев $L_0=L_0'\oplus\mathfrak{z}$, где $\dim\mathfrak{z}\leqslant 1$, а $L_0'\in\Pi_{cl}$. Здесь также роль классических методов остается значительной, если учесть еще, что при $r>1$ градуированная алгебра несет значительную долю информации о фильтрованной.

С другой стороны, попытки глобального перенесения техники Киллинга—Картана наталкиваются на трудности, вызванные тождественным обращением в нуль билинейной формы следа и неинвариантностью картановских разложений.

§ 2. Алгебры картановского типа

Остановимся вкратце на конструкции четырех серий простых алгебр: $W_n(F)$, $S_n(F)$, $H_n(F)$ и $K_n(F)$ (коротко $L(F)$), являющихся аналогами бесконечномерных алгебр Картана в характеристике 0. Эта конструкция имеет весьма естественное происхождение и обладает необходимой общностью.

Несколько упрощая определение (см. [3]), будем понимать под алгеброй разделенных степеней $O_n(F)$, соответствующей флагу F векторного пространства $E=\langle x_1,\ \ldots\ ,x_n\rangle$ размерности n над k, коммутативную алгебру с базисными элементами (или одночленами)

$$x^{\alpha}=x_1^{\alpha_1}\cdot\ \ldots\ \ x_n^{\alpha_n},\ 0\leqslant\alpha_i<p^{m_i}\,,\ 1\leqslant m_1\leqslant\cdots\leqslant m_n\,,$$

и правилом умножения

$$x^{\alpha}x^{\beta}=(\alpha,\beta)\,x^{\alpha+\beta},\ \text{где}\ (\alpha,\beta)=\prod_{i=1}^{n}\binom{\alpha_i+\beta_i}{\alpha_i}.$$

Собственно говоря, от флага $F: E = E_0 \supseteq E_1 \supseteq \cdots \supseteq E_k \supset \supset E_{k+1} = 0$ здесь остался лишь упорядоченный набор целых положительных чисел $\{m_1, \ldots, m_n\}$. Если $m = m_1 + \ldots + m_n$, то, очевидно, $\dim O_n(F) = p^m$. Алгебра $O_n(F)$ градуирована: $O_n(F) = \bigoplus_{i=0}^{r+1} O_n(F)_i$, $O_n(F)_i = \langle x^\alpha \mid |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = i \rangle$, $r+1 = \sum_{i=1}^{n} (p^{m_i} - 1)$. Для дальнейшего полезно ввести обозначения: $e = x^\delta$, $|\delta| = r+1$; $e_i = x^{\delta^i}$, $\delta^i_j = (1 - \delta_{ij})(p^{m_j} - 1)$; $O'_n(F) = \bigoplus_{i=0}^{r} O_n(F)_i$; $\varepsilon_i = (0, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, 0)$. Легко проверить, что линейное отображение $\partial_i : x^\alpha \to x^{\alpha - \varepsilon_i}$ является дифференцированием алгебры $O_n(F)$.

Общая алгебра $W_n(F)$ состоит из всех ее (специальных) дифференцирований вида $D = \sum f_i \partial_i$, $f_i \in O_n(F)$, с обычной операцией коммутирования операторов.

Специальная алгебра $S_n(F)$, $n \geqslant 2$, натянута на дифференцирования $D_{ij}\{u\} = (\partial_j u)\partial_i - (\partial_i u)\,\partial_j$, $u \in O_{n+1}(F)$. Добавив к ней $\sum_{j=1}^{n+1} x_j \partial_j$, $e_i \partial_i$, $i = 1, \ldots, n+1$, получим алгебру $S^*_n(F)$, в которой $S_n(F)$ является идеалом: фактор-алгебра $S^*_n(F)/S_n(F)$ абелева.

Гамильтонова алгебра $H_n(F)$ состоит из операторов

$$D_u = \sum_{i=1}^{2n} \alpha_{i,\,\pi i} \cdot \partial_i\, u \cdot \partial_{\pi i},\ u \in O'_{2n}(F),\ n \geqslant 1,$$

где π — инволютивная перестановка без неподвижных точек множества $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, $\alpha_{i,\,\pi i} = \pm 1$, $\alpha_{i,\,\pi i} + \alpha_{\pi i,\,i} = 0$. Умножение задается формулой $[D_u, D_v] = D_w$, $w = \Sigma\, \alpha_{i,\,\pi i} \cdot \partial_i\, u \cdot \partial_{\pi i} v$. Вводится также алгебра $H^*_n(F)$, натянутая на $H_n(F)$ и на дифференцирования D_e, $\sum_{j=1}^{2n} x_i\, \partial_i$, $x_i^{p^{m_i}-1}\, \partial_{\pi i}$, $i = 1, \ldots, 2n$. При $n > 1$ фактор-алгебра $H^*_n(F)/H_n(F)$ абелева.

Наконец, контактная алгебра $K_n(F)$ получается следующим образом. Ее базисное пространство отождествляется с $O_{2n-1}(F)$ при $n+1 \not\equiv 0 \pmod p$ и с $O'_{2n-1}(F)$ при $n+1 \equiv 0 \pmod p$. Впрочем, необходима одна оговорка. Под F здесь следует понимать объединение двух флагов — одномерного пространства $E_0 = \langle x_0 \rangle$ и $(2n-2)$-мерного $E_1 = \langle x_1, \ldots, x_{2n-2} \rangle$.

Следовательно, $m_1 \leqslant \cdots \leqslant m_{2n-2}$, но m_0 — высота переменной x_0 — с числами m_i никак не связана. Пусть π — инволютивная перестановка без неподвижных точек множества $\{1, \ldots, 2n-2\}$, $\alpha_{i,\pi i} = \pm 1$, $\alpha_{i,\pi i} + \alpha_{\pi i, i} = 0$; $\beta = \{\beta_1, \ldots, \beta_{2n-2}\}$, $\beta_i = \pm 1, 0$, $\beta_i \beta_{\pi i} = 0$; $\Delta u = 2u - \sum_{j=1}^{2n-2} (x_j + \alpha_{j,\pi j}\, \beta_{\pi j})\, \partial_j u$.

Формула $[u, v] = \Delta u \cdot \partial_0 v - \Delta v \cdot \partial_0 u + \sum_{i=1}^{2n-2} \alpha_{i,\pi i} \partial_i u \cdot \partial_{\pi i} v$ задает умножение в $K_n(F)$. В обозначении $L_n(F)$ роль дискретных параметров $\alpha_{i,j}$, π, β не отражена. Известно (см. гл. 1 работы [3], что алгебр $L(F)$ данной размерности — конечное число.

Из определений непосредственно вытекает, что $\dim W_n(F) = np^m$, $\dim S_n(F) = n(p^m - 1)$; $\dim H_n(F) = p^m - 2$, $\dim K_n(F) = p^m - \lambda$, где $\lambda = 0$ при $n + 1 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$ и $\lambda = 1$ в противном случае. Все построенные до сих пор вырожденные простые алгебры, обзор которых дан в книге [5], имеют указанные выше размерности, но это не значит, что каждая из них изоморфна одной из алгебр $L(F)$. Положение здесь несколько сложнее (см. § 6). С другой стороны, все известные пока простые p-алгебры Ли при $p > 3$ исчерпываются алгебрами картановского типа с тривиальными флагами F (когда $m_i = 1$) и размерностей np^n, $n(p^{n+1} - 1)$, $p^{2n} - 2$, p^{2n-1} (или $p^{2n-1} - 1$).

Пространства $L_k : \sum_{i=1}^{n} O_n(F)_{k+1} \partial_i = W_n(F)_k$, $S_n(F)_k = S_n(F) \cap W_{n+1}(F)_k$, $H_n(F) \cap W_{2n}(F)_k = H_n(F)_k$, $-1 \leqslant k \leqslant r$, определяют в соответствующих алгебрах градуировки, т. е. $[L_i, L_j] \subseteq L_{i+j}$. Обобщенную градуировку с $L_{-2} \neq 0$ можно ввести и в части алгебр $K_n(F)$ (неизвестно, во всех ли). Подалгебра L_0, изоморфная соответственно $A_{n-1} \oplus k$, A_n, C_n и $C_{n-1} \oplus k$, имеет L_{-1} в качестве стандартного неприводимого модуля. Если $L = \bigoplus_{-2 \leqslant i \leqslant r} L_i$ и r достаточно велико, то $L \in \Pi_{sd}$, поскольку $L_r \subseteq \mathfrak{C} = \langle c \mid (\mathrm{ad}\, c)^2 = 0 \rangle$. Таковы все алгебры картановского типа. Подалгебра $\mathfrak{L}_0 = \sum_{i \geqslant 0} L_i$ в них является максимальной, причем, как доказал В. А. Крекнин, она инвариантна относительно автоморфизмов алгебры $L(F)$ и содержит все другие инвариантные подалгебры. Это частично подтверждает гипотезу 2, которая целиком выполняется в p-алгебрах картановского типа (см. гл. I работы [3]). Для произвольной алгебры $L(F)$ равенство $N_{L(F)}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{L}_0$ установить, по-видимому, нелегко, так как однородные компоненты $\mathfrak{C}_i$ разбросаны по $L(F)_k$ весьма причудливым образом. Пусть,

например, $L = W_1(F)$, $\dim L = p^2$, $p = 5$. Прямые вычисления показывают, что $\mathfrak{C} = L_3 + L_8 + \sum_{i \geqslant 12} L_i$.В общем случае ситуация остается неясной.

Заметим, однако, что одного лишь факта инвариантности $\mathfrak{L}_0 = \sum_{i \geqslant 0} L_i$ достаточно для решения вопроса об изоморфизмах между алгебрами картановского типа. Две такие алгебры не изоморфны, если они принадлежат разным сериям. Это видно прямо из сравнения их размерностей, которые могут совпасть только для $L = W_n(F)$, $n = p^s$, и $L' = K_{n'}(F')$, $n' = (p^s + 1)/2$, при надлежащих числах $m = m_1 + \ldots + m_n$ и $m' = m_0' + m_1' + \ldots + m_{2n'-2}' = s + m$. Изоморфность L и L' означала бы изоморфность их максимальных инвариантных подалгебр $\mathfrak{L}_0$ и $\mathfrak{L}_0'$, а также совпадение определяемых ими фильтраций, что влекло бы изоморфизмы $L_i \cong L_i'$, $i = 0, 1, \ldots$. Но $L_0 = A_{n-1} \oplus k$ и $L_0' = C_{n'-1} \oplus k$ не изоморфны.

Еще более интересен вопрос об изоморфизме алгебр внутри серий. Положим

$$\bar{L}(F)_l = \sum_{i=1}^{l-1} [L(F)_i, L(F)_{l-i}], \quad l > 1, \quad L_{-1} = V.$$

Вместе с $L(F)_k$ инвариантный смысл приобретают и подпространства $L(F)_l$. Известно (см. гл. III работы [3]), что если $l = p^t - 1$, то $L(F)_l / \bar{L}(F)_l \cong E_t \otimes V$, где E_t — подпространство, входящее в определение флага F. Последовательность $\{\dim E_0, \ldots, \dim E_k\}$ полностью задает упорядоченное множество $\{m_1, \ldots, m_n\}$. Таким образом, изоморфизм $L(F) \cong L(F')$ возможен только при эквивалентных флагах F, F'. Например, число неизоморфных общих алгебр данной размерности np^m равно числу разбиений $m = m_1 + \ldots + m_n$, $1 \leqslant m_1 \leqslant \ldots \leqslant m_n$. Уже при $n = 2$ это число растет неограниченно вместе с m. Аналогичное заключение верно и в отношении других алгебр картановского типа.

В связи с недоказанной пока «гипотезой Шрейера» о дифференцированиях простых алгебр Ли характеристики $p \geqslant 5$ упомянем следствие теоремы М. Ю. Целоусова (дипломная работа, 1969 г.); алгебра внешних дифференцирований любой градуированной алгебры картановского типа является разрешимой алгеброй с абелевым коммутантом (на самом деле она абелева, за исключением случаев, соответствующих алгебрам $S_n(F)$ и $H_1(F)$).

§ 3. Картановские разложения

Как и у классических алгебр A_n, B_n, . . . , E_8, нижний индекс в обозначениях алгебр картановского типа $W_n(F)$, ... , $K_n(F)$ имеет внутренний смысл. Он указывает на размерность полупростой компоненты подалгебры Картана. В качестве примера рассмотрим общую алгебру $W_n(F)$ и ее картановское разложение

где
$$W_n(F) = \mathfrak{H} + \sum_{\gamma \neq 0} \mathfrak{L}_\gamma ,$$

$$\mathfrak{H} = \langle x^\alpha \partial_i \mid \alpha_j \equiv \delta_{ij} (\mathrm{mod} p),\ 0 \leqslant \alpha_j < p^{m_j} \rangle,$$
$$\mathfrak{L}_\gamma = \langle x^\alpha \partial_i \mid \alpha_j + \gamma_j \equiv \delta_{ij} (\mathrm{mod} p) \rangle .$$

Корни $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, $0 \leqslant \gamma_j \leqslant p-1$, образуют элементарную абелеву группу порядка p^n; $\dim \mathfrak{H} = \dim \mathfrak{L}_\gamma = p^{m-n}$. Подалгебра Картана $\mathfrak{H}$ представляется в виде прямой суммы полупростой компоненты $\mathfrak{H}_1 = \langle x_1 \partial_1, \ldots, x_n \partial_n \rangle$ и ниль-компоненты $\mathfrak{H}_0 = \langle x^\alpha \partial_i \mid |\alpha| > 1 \rangle$; $\gamma(h_0) = 0$ для всех $h_0 \in \mathfrak{H}_0$ и $[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}] = 0$, так что $\gamma(h_1 + h_0) = \gamma(h_1)$, $h_i \in \mathfrak{H}_i$. Аналогичные разложения можно указать и для других алгебр $L(F)$.

Напомним (см. [5]), что в классических алгебрах Ли все подалгебры Картана сопряжены относительно групп автоморфизмов, — факт, который перестает быть верным в самых простых примерах вырожденных алгебр. Так, в алгебре W_1 размерности p имеются две несопряженные одномерные подалгебры Картана $\langle x\partial_x \rangle$ и $\langle (1 + x)\partial_x \rangle$. Обратим внимание на то обстоятельство, что одна из них содержится в максимальной инвариантной подалгебре $\mathfrak{L}_0$, а другая — нет. Весьма похожая ситуация имеет место в любых p-алгебрах картановского типа. С. П. Демушкин доказал (устное сообщение), что каждая из алгебр W_n, S_n, . . . содержит по $n + 1$ классу сопряженности подалгебр Картана. Все они абелевы и имеют одинаковые размерности.

В алгебрах $L(F)$ с произвольным флагом распределение подалгебр Картана по орбитам относительно групп автоморфизмов неизвестно. Кажется правдоподобным, что размерность полупростой компоненты $\mathfrak{H}_1$ остается инвариантом алгебры. На большее нельзя рассчитывать, как показывает уже пример алгебры $W_1(F)$. Можно доказать, что если $\dim W_1(F) = p^m$, то $W_1(F)$ изоморфна алгебре Цассенхауза с базисом $\langle e_\alpha \mid \alpha \in GF(p^m) \rangle$ и таблицей умножения $e_\alpha \circ e_\beta = (\alpha - \beta)\, e_{\alpha+\beta}$. Здесь $\mathfrak{H} = \langle e_0 \rangle$ — подалгебра Картана, $\mathfrak{L}_\gamma = \langle e_\gamma \rangle$ — инвариантные подпространства. Сравнив это с указанным выше

разложением, видим, что $W_1(F)$ обладает подалгебрами Картана размерностей 1 и p^m-1. Имеются и другие примеры подобного рода [9].

Теперь становится понятным, почему техника корневых систем, столь совершенная в применении к классическим алгебрам, теряет свой универсальный характер над полями конечной характеристики.

Проблема классификации остается содержательной, даже если исходить из существования одномерной подалгебры Картана. Опираясь на работу Капланского [10], Блок доказал [11] следующую теорему. Пусть L — алгебра Ли размерности > 3 над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p>3$. Если L обладает одномерной подалгеброй Картана и в соответствующем разложении $\operatorname{ad} x_\alpha|_{\mathfrak{L}_{-\alpha}} \neq 0$ при любом $x_\alpha \in \mathfrak{L}_\alpha$, $\alpha \neq 0$, то $L = \langle e_\alpha \mid \alpha \in G;\ e_\alpha \circ e_\beta = \{\alpha - \beta + \alpha h(\beta) - \beta h(\alpha)\}\, e_{\alpha+\beta} \rangle$, где G — конечная аддитивная подгруппа в k, а h — произвольное аддитивное отображение G в k. Некоторое ослабление условия $\operatorname{ad} x_\alpha|_{\mathfrak{L}_{-\alpha}} \neq 0$ получено А. Х. Долотказиным [12]. В статье [13] анонсирован результат, согласно которому A_1, W_1, H_1 исчерпывают множество простых p-алгебр Ли, обладающих подалгебрами Картана $\mathfrak{H}$ с одномерной полупростой компонентой и таких, что $\alpha([\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]) = 0$. Там же, а также в работах **[14—16]** можно найти другие свойства картановских разложений. Между прочим, в [13] доказано, что неразрешимая алгебра Ли конечной размерности над $k (p > 3)$ обязательно содержит трехмерную простую подалгебру.

§ 4. Представления

В характеристике 0 резко различаются как методами, так и результатами теории конечномерных и бесконечномерных представлений простых алгебр (групп) Ли. Замечательно то, что в характеристике $p > 0$ некоторые черты обеих теорий можно проследить уже на примере конечномерных представлений. Именно аналогами неприводимых представлений ρ с $\dim \rho < \infty$ служат p-представления (или ограниченные представления), которых всего лишь конечное число, а случаю $\dim \rho = \infty$ соответствуют все остальные представления, зависящие от параметров (непрерывные серии в ненулевой характеристике!). На их основе возможно моделирование различных бесконечномерных эффектов.

Согласно Кэртису [18], имеется взаимнооднозначное соответствие между классами эквивалентности неприводимых p-представлений полупростой классической алгебры Ли $\mathfrak{L}$ с

картановским разложением $\mathfrak{L} = \mathfrak{H} + \sum_{\gamma \neq 0} \mathfrak{L}_\gamma$ и линейными функциями (старшими весами) λ на $\mathfrak{H}$ со значениями $\lambda(h_i) \in \mathrm{F_p} = \mathrm{Z}/p\mathrm{Z}$, где $\langle h_1, \ldots, h_l \rangle$ — канонический базис $\mathfrak{H}$. Существует, следовательно, в точности p^l различных неприводимых p-представлений алгебры $\mathfrak{L}$. Об их фактической реализации или хотя бы об их размерностях известно очень мало. Даже для алгебр A_2 и B_2 вопрос решен лишь частично (см. [19]). Между прочим, на примере B_2 показано, что условие $\rho(e_\alpha)^{p-1} = 0$ (α пробегает систему Ω всех ненулевых корней) не обеспечивает полной приводимости p-представления ρ. В то же время для A_1 условие $\rho(e_\alpha)^{p-1} = 0$ является достаточным [20], но не необходимым. Вопрос о полной приводимости p-представления ρ классической алгебры $\mathfrak{L}$ эквивалентен вопросу об описании радикала $\mathfrak{N}$ u-алгебры $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$. По Селигману ([5, стр. 99]), в случае $\mathfrak{L} = A_1 = \langle e_\alpha, h, e_{-\alpha} \rangle$ радикал $\mathfrak{N}$ порождается элементами $e_\alpha^{p-1}(h+1)$, $(h+1)e_{-\alpha}^{p-1}$.

Алгебра A_1 — единственная классическая простая алгебра, для которой получено исчерпывающее описание множества всех неприводимых представлений, не обязательно ограниченных. Это не так трудно сделать в теоретико-множественном смысле, но в статье А. Н. Рудакова и И. Р. Шафаревича [21] существенно уточняется, как множество представлений параметризуется алгебраическим многообразием (трехмерным в случае A_1). Необходимость введения методов алгебраической геометрии в описание неприводимых представлений алгебр Ли конечной характеристики была установлена ранее Цассенхаузом [22].

Пусть, далее, $S(\mathfrak{L})$ — множество всех (классов эквивалентности) точных неприводимых представлений алгебры $\mathfrak{L}$ над полем k характеристики $p > 0$.
Положим

$$d(\mathfrak{L}) = \min_{\rho \in S(\mathfrak{L})} \dim \rho, \quad D(\mathfrak{L}) = \max_{\rho \in S(\mathfrak{L})} \dim \rho.$$

Представления ρ с $\dim \rho = D(\mathfrak{L})$, как правило, находятся в общем положении, а представления размерности $d(\mathfrak{L})$ часто встречаются в различных приложениях. Для любой алгебры $\mathfrak{L} \in \Pi_{el}$ А. Н. Рудаков доказал равенство $D(\mathfrak{L}) = p^s$, где $s = (\dim_k \mathfrak{L} - \operatorname{rang} \mathfrak{L})/2$.

Переходя к представлениям неклассических простых алгебр, скажем, p-алгебр W_n, S_n, H_n, K_n, оказываемся в области почти полного незнания. Лишь для W_1 найдены все неприводимые представления. В частности, $D(W_1) = p^s$,

$s=(p-1)/2$ и $d(W_1)=p-1$. Алгебры картановского типа $L(F)$ обладают естественными модулями $O(F)$, которые «близки» к стандартным модулям классических алгебр. В $O(F)$ содержится одномерный $W(F)$-подмодуль k, фактор по которому неприводим. Определив действие $W(F)$ на $O(F)$ по формуле

$$D=\sum f_i\,\partial_i\ :u\to D(u)+\alpha(\operatorname{div}D)\,u,\quad \alpha\in k,\ \operatorname{div}D=\sum\partial_i f_i,$$

получим параметрическое семейство модулей $\{V_\alpha\}$. При $\alpha\neq 0,1$ $W(F)$-модуль V_α неприводим, но V_1 содержит подмодуль V_1' коразмерности 1, изоморфный пространству $O'(F)$ (см. § 2). Так как $H_n(F)\subset S_{2n-1}(F)\subset W_{2n}(F)$ и $\operatorname{div}D=0$ для $D\in S(F)$, то V_1', рассматриваемый как модуль над $H(F)$ или $S(F)$, будет снова содержать одномерный подмодуль $\cong k$. Фактор по нему неприводим и совпадает в случае $H(F)$ с регулярным модулем. По-видимому, нет модулей меньшей размерности, и естественно предположить, что

$$d(W_n(F))=p^m-1,\ m=\sum_{i=1}^{n}m_i;\quad d(S_n(F))=p^m-2,\ m=\sum_{i=1}^{n+1}m_i;$$

$$d(H_n(F))=p^m-2,\ m=\sum_{i=1}^{2n}m_i.$$

Обозначим через ρ_1 неприводимое представление алгебры $W_1(F)=\langle f\partial\,|\,f\in O_1(F),\ \deg f<p^m=l\rangle$, соответствующее модулю $V_1'\cong O_1'(F)$:

$$\rho_1(f\partial)\,u=\partial(fu),\ u\in O_1'(F).$$

Примечательно, что ρ_1 является вложением $W_1(F)$ в симплектическую алгебру $C_{(l-1)/2}$. В этом легко убедиться, рассмотрев билинейную кососимметрическую форму Φ на $O_1'(F)$:

$$\Phi(x^i,\,x^j)=(-1)^{i+1}\delta_{i+j,\,l-2},$$

или, что более инвариантно:

$$\Phi(u,v)\,x^{l-1}+\ldots=\left\{\sum_{i=0}^{(l-3)/2}(-1)^{i+1}(\alpha_i\,\beta_{l-2-i}-\beta_i\,\alpha_{l-2-i})\right\}\times$$

$$\times\,x^{l-1}+\ldots=v\int u\,dx=\frac{1}{2}\,(v\int u\,dx-u\int v\,dx),$$

$$u=\sum_{i=0}^{l-2}\alpha_i\,x^i,\quad v=\sum_{i=0}^{l-2}\beta_i\,x^i.$$

Очевидно,

$$\Phi(\rho_1(f\partial)\,u,v)+\Phi(u,\rho_1(f\partial)\,v)=0,$$

откуда и следует, что $\rho_1(W_1(F))\subset C_{(l-1)/2}$.

§ 5. Градуированные алгебры Ли

Нас интересуют градуированные алгебры, ассоциированные с фильтрованными конечномерными простыми алгебрами Ли (сами они могут и не быть простыми), но удобнее рассматривать их независимо, постулировав небольшое число свойств. Будем называть ν-градуированной (ν—целое положительное число) алгебру Ли

$$L = \bigoplus_{i \geqslant -\nu} L_i$$

(не обязательно конечной размерности над k), где

1) $\dim L_i < \infty$;
2) $[L_i, L_j] \subseteq L_{i+j}$;
3) $[L_{-1}, x] \neq 0$ для всех $0 \neq x \in L_i$, $i \geqslant 0$;
4) $[x, L_1] \neq 0$ для всех $0 \neq x \in L_i$, $i \leqslant 0$.

Алгебра L называется неприводимой, если неприводимо представление $\Gamma : L_0 \to \mathrm{End} L_{-1}$. В случае $\nu = 1$ говорим просто о градуированной алгебре Ли. Заметим, что неприводимость градуированной алгебры делает ненужным условие 4) и сводит 1) к единственному условию $\dim L_{-1} < \infty$.

Любую классическую простую алгебру Ли можно задать в виде 2-градуированной, не обязательно неприводимой, алгебры Ли. Полное описание их 1-градуировок дано в [23] и [24]. Бесконечномерные ν-градуированные алгебры Ли возникают естественным образом в дифференциальной геометрии в связи с изучением псевдогрупп, G-структур и т. д. С техникой их классификации можно познакомиться по работам [25—28]. В последней из них делается также интересная попытка подойти к описанию простых p-алгебр Ли с компонентой $L_0 \cong \cong \bigoplus_i M_i \oplus \mathfrak{z}$, $M_i \in \Pi_{cl}$, $\dim \mathfrak{z} \leqslant 1$. В этой связи приведем также следующее утверждение (см. [3]). Градуированная простая p-алгебра Ли ($p > 7$) с $\dim L_{-1} < p-1$ является или классической, или алгеброй картановского типа, отличной от контактной.

Сформулируем теперь основной результат статьи [3], в котором нет стеснительных условий простоты и ограниченности. Он гласит, что алгебрами L вида 1) $L = W(F)$; 2) $S(F) \subseteq L \subseteq S^*(F)$; 3) $H(F) \subseteq L \subseteq H^*(F)$ исчерпываются, с точностью до изоморфизма, все конечномерные неприводимые градуированные алгебры Ли, в которых $\dim L_{-1} < p-1$ и $L_2 \neq 0$ (см. §. 2, где даны необходимые определения).

Условие $L_2 \neq 0$ необходимо вводить, чтобы избавиться от классических алгебр. Условие $\dim L_{-1} < p-1$ не устра-

нимо, как показывают многочисленные примеры. Простейший из них получается при изменении градуировки в $H_n(F)$, когда компонентой L_0 становится $W_n(F')$ (см. [3] и [29]). Все неприводимые градуированные алгебры Ли с компонентой $L_0 \cong W_1$ изучены в работе [29]. При этом существенно используется информация о простых W_1-модулях (см. § 4).

Опишем сейчас одну общую конструкцию градуированных алгебр, отличных от всех рассматривавшихся ранее. Пусть M — простая алгебра с градуировкой $M = M_{-1} \oplus M_0 \oplus M_1$, например, одна из классических алгебр. Тензорное произведение $M \otimes O(F)$ надсляется структурой алгебры Ли:

$$[m_1 \otimes f_1, m_2 \otimes f_2] = [m_1, m_2] \otimes f_1 f_2.$$

Алгебра картановского типа $L(F)$ индуцирует соответствующую алгебру дифференцирований алгебры $M \otimes O(F)$. Мы полагаем $[D, m \otimes f] = D(m \otimes f) = m \otimes D(f)$. Полупрямое произведение

$$L(F) + M \otimes O(F)$$

является вариантом классического примера Джекобсона [30] полупростой алгебры с присущими для характеристики $p > 0$ свойствами. Теперь воспользуемся градуированностью алгебры M и введем начальные компоненты строящейся алгебры L:

$$L_{-1} = M_{-1} \otimes O(F),\ L_0 = M_0 \otimes O(F) + L(F),\ L_1 = L_0^{(1)}.$$

Здесь $L_0^{(1)}$ — полное продолжение, т. е. подпространство в $\mathrm{Hom}(L_{-1}, L_0)$ всех элементов φ, таких, что $[\varphi(u), v] = [\varphi(v), u]$ для любых $u, v \in L_{-1}$. Для удобства положим $[\varphi, u] = \varphi(u)$. Отметим, что $L_0^{(1)}$ — непустое множество, поскольку $L_0^{(1)} \supset L_1' = M_1 \otimes O(F)$. Но $[L_{-1}, L_1'] = M_0 \oplus O(F)$, а нам хотелось бы иметь равенство $[L_{-1}, L_1] = L_0$. В этом случае (бесконечномерная) градуированная неприводимая алгебра Ли

$$L = L_{-1} + L_0 + L_1 + \ldots,\ L_k = L_0^{(k)} = L_{k-1}^{(1)}$$

будет простой, так же как и ее конечномерная подалгебра, порожденная пространствами L_{-1} и L_1. Равенство $L_0 = [L_{-1}, L_1]$ выполняется, например, в случае $M = A_1 = \langle e_{-1} \rangle + \langle e_0 \rangle + \langle e_1 \rangle$ и $L(F) = W_n(F)$, когда

$$\dim L_0^{(1)} = \binom{n+2}{2} p^m.$$

Впрочем, нетрудно показать, что получающаяся алгебра изоморфна контактной алгебре $K_{n+1}(F)$.

Приведенный выше метод построения неприводимых простых градуированных алгебр допускает, очевидно, различные модификации и достаточно убедительно показывает, что класс градуированных алгебр в характеристике $p>0$ гораздо шире соответствующего класса в характеристике 0. При классификации простых конечномерных алгебр Ли — а эта задача нас интересует в первую очередь — обнадеживающий фактор, возможно, заключается в том, что правильный выбор фильтраций в них, скажем, на основе гипотезы 2 (см. § 1), обеспечит значительное сужение класса ассоциированных градуированных алгебр. Если это так, то классификационная теорема из [3], прежде всего вводящая в обиход язык, на котором нужно вести описание градуированных алгебр, приобретает более общее звучание.

§ 6. Деформации

Пусть $L = L_{-1} + L_0 + L_1 + \ldots$ — градуированная алгебра Ли и $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{-1} \supseteq \mathfrak{L}_0 \supseteq \mathfrak{L}_1 \supseteq \ldots$ — алгебра с фильтрацией, относительно которой $\operatorname{gr}\mathfrak{L} \cong L$. Тогда говорят, что $\mathfrak{L}$ получается деформацией градуированной структуры L или, проще, что $\mathfrak{L}$ — деформация алгебры Ли L. В иной постановке задачу деформации алгебр исследовали Герстенхабер (см. [31] с последующими продолжениями), Рим [32] и другие авторы. Ее прообразом служит теория деформаций аналитических структур.

Алгебру L, у которой нет нетривиальных деформаций, принято называть жесткой. Жесткими являются все бесконечномерные (полные) градуированные алгебры Картана ([27], [33]). Алгебры картановского типа $L(F)$, точнее, алгебры L, $L(F) \subseteq \subseteq L \subseteq L^*(F)$, уже могут обладать нетривиальными деформациями, как показывают примеры, приведенные в работе [29]. Их полное обозрение еще не закончено, поэтому ограничимся отдельными замечаниями.

Спенсеровские группы когомологий $H^{i,1}(L)$, $H^{i,2}(L)$, в терминах которых обычно описываются деформации, вообще говоря, не адекватны объекту изучения. Равенства $H^{i,1}(L) = 0 = H^{i,2}(L)$ обеспечивают жесткость, но имеются жесткие алгебры Ли конечной характеристики с $H^{i,j}(L) \neq 0$ при некоторых i ($j = 1, 2$). Это обстоятельство выражается в существовании нетривиальных деформированных алгебр $\mathfrak{L}$, изоморфных исходной алгебре L. Более того, можно построить параметрические семейства деформаций, которые, однако, распадаются на конечное число орбит относительно автоморфизмов. От параметров

зависят также многие алгебры, построенные ранее, например, рассмотренные в § 3 алгебры Альберта — Цассенхауза. В их определение входят произвольная линейная над F_p функция h и набор в k базисных элементов конечномерного векторного пространства. В отдельных случаях доказана конечность числа таких алгебр данной размерности. Не исключено, что любая конечномерная простая p-алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем k представляется в виде $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 \otimes F_p k$, где $\mathfrak{L}_0$ — алгебра Ли над простым подполем $F_p \subset k$. Классические алгебры и алгебры картановского типа являются таковыми по определению.

Конструкцию алгебр картановского типа, изложенную в § 2, можно модифицировать таким образом, чтобы она охватывала все известные к настоящему времени неклассические простые алгебры Ли. Это сделано в диссертации Р. Уилсона [37]. Градуированность, естественно, теряется, но единая конструкция позволит, очевидно, ответить на ряд вопросов о простых алгебрах Ли, в том числе и на вопрос о существенности параметров. Необходимую для этого технику дает теория деформации.

§ 7. Группы $G_q(L,\rho)$

Многие разрозненные факты о конечных простых группах были упорядочены после того, как Шевалле [34] предложил некую единую конструкцию, которая впоследствии была развита, аксиоматизирована ((B, N) — пары Титса, см. [35]) и применена в нескольких других ситуациях. Все это настолько общеизвестно, что мы лишь констатируем непосредственное отношение конструкции Шевалле к классическим простым алгебрам и их группам автоморфизмов. Можно, следуя Шевалле, строить автоморфизмы комплексных полупростых алгебр Ли и при надлежащем выборе базиса переходить к матрицам автоморфизмов над произвольным полем. Можно, напротив, строить автоморфизмы непосредственно в классических алгебрах Ли, используя экспоненциальные функции присоединенных эндоморфизмов, соответствующих корневым элементам. Диаграмма этих действий при $p > 3$, по существу, коммутативна (см. [5], гл. III) и канонична ввиду сопряженности картановских разложений.

Группы автоморфизмов неклассических простых алгебр в каком-то смысле маломощны. Действительно, в алгебрах картановского типа $L(F)$ они оставляют инвариантными большие подалгебры (см. § 2) и их композиционные ряды имеют по мень-

шей мере такую же длину, что и естественные фильтрации в алгебрах. Как легко видеть, группа автоморфизмов алгебры $W_1(F)$ является даже разрешимой.

Кажется желательным сопоставить алгебрам $L(F)$ (и вообще — неклассическим простым алгебрам) группы, ближе стоящие к конструкции Шевалле, чем группы автоморфизмов. Вряд ли это возможно сделать каким-либо внутренним способом, но следующий путь заслуживает того, чтобы быть отмеченным. В простой p-алгебре Ли $L = W_n$, S_n, H_n или K_n над F_p, рассматриваемой вместе со своей стандартной градуировкой $L = \oplus L_i$ и некоторым неприводимым p-представлением ρ, выделим все однородные элементы $x \in L_i$, $-2 \leqslant i \leqslant r$, для которых $\rho(x)^p = 0$. Размерность натянутого на них пространства равна $\dim L - n$. Группу, порожденную эндоморфизмами вида $\exp t\rho(x)$, $t \in F_q$, $q = p^v$, обозначим символом $G_q(L, \rho)$. Хотя $G_q(L, \mathrm{ad}) \cap \cap \mathrm{Aut}\, L \otimes F_q \neq 1$, группа $G_q(L, \mathrm{ad})$ не содержится в $\mathrm{Aut}\, L \otimes \otimes F_q$, поскольку $\exp t \,\mathrm{ad}\, x$ будет автоморфизмом, вообще говоря, лишь при $(\mathrm{ad}\, x)^s = 0$, $s \leqslant (p+1)/2$. Несимметричность градуировки L, выражающаяся в преобладании членов L_i с $i > 0$, затрудняет исследование групп $G_q(L, \rho)$, о строении которых известно крайне мало. Несомненно, что они существенно зависят от ρ, причем более доступными кажутся группы $G_q(L, \rho_1)$, где ρ_1 — «стандартное» представление размерности $\dim \rho_1 = d(L)$ (см. § 4). В случае алгебры $L = W_1$ вложение $\rho_1(W_1) \subset C_{(p-1)/2}$ сопровождается вложением $G_q(W_1, \rho_1) \subseteq C_{(p-1)/2}(q)$ (обозначение симплектической группы), но совсем не очевидно, что $G_q(W_1, \rho_1) = C_{(p-1)/2}(q)$. Это проверено пока лишь для $p = 5, 7$. Группа $G_q(W_1, \mathrm{ad})$, по-видимому, совпадает с $SL(p, q)$. Скудость экспериментального материала не дает оснований для каких-либо определенных высказываний.

§ 8. Полупростые алгебры Ли

Как и в характеристике 0, полупростой называется алгебра Ли $\mathfrak{L}$ с нулевым (разрешимым) радикалом. Если $\mathfrak{L}$ допускает точное представление размерности $< p-1$, то $\mathfrak{L} = \bigoplus_i \mathfrak{L}_i$, где $\mathfrak{L}_i$ — классические простые алгебры с невырожденной формой Киллинга (см. [36] и примечание в конце статьи [3]). Искушение записать произвольную полупростую алгебру Ли в виде прямой суммы простых идеалов, не обязательно классических, оказывается неоправданным даже при дополнительном условии $[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] = \mathfrak{L}$, как показывает пример алгебры $\mathfrak{L} = L(F) +$

$+ M \otimes O(F)$ (см. § 5). Лишь наложив условие, чтобы все минимальные идеалы в $\mathfrak{L} = [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]$ были простыми, с разрешимыми алгебрами внешних дифференцирований (гипотеза Шрейера; см. § 2), мы можем гарантировать указанное разложение.

Вопрос о строении произвольных полупростых алгебр Ли тесно связан с задачей описания дифференциально простых (или: характеристически простых) алгебр, т. е. алгебр, в которых нет идеалов, инвариантных относительно всех дифференцирований. Исчерпывающее решение этой задачи было получено недавно Блоком (см. [4]; там же имеются ссылки на дополнительную литературу). Им доказано, что всякая конечномерная дифференциально простая алгебра A (с произвольным законом умножения; $A^2 \neq 0$) над полем k характеристики $p > 0$ представляется в виде $S \otimes O_n(F)$, где S — простая алгебра (флаг F можно считать тривиальным). Отсюда вытекает следующее. Пусть $M_1, \ldots, M_k$ — простые алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем k; $n_1, \ldots, n_k$ — не обязательно различные целые неотрицательные числа; $M = \bigoplus_{i=1}^{k} M_i \otimes O_{n_i}$; $\operatorname{der} M$ — алгебра дифференцирований; $\operatorname{In} M$ — алгебра внутренних дифференцирований, отождествляемая с M:

$$M = \operatorname{In} M = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{In} M_i \otimes O_{n_i} \subseteq \operatorname{der} M = \bigoplus_{i=1}^{k} \{(\operatorname{der} M_i) \otimes O_{n_i} + 1_{M_i} \otimes W_{n_i}\}.$$

Пусть, далее, $\mathfrak{L}$ — любая подалгебра в $\operatorname{der} M$, содержащая M. Тогда для полупростоты $\mathfrak{L}$ необходимо и достаточно, чтобы в O_{n_i} не было подалгебр, инвариантных относительно множества компонент в W_{n_i} элементов из $\mathfrak{L}$.

Обратно каждая полупростая алгебра над k имеет этот вид, определяя однозначно, с точностью до изоморфизма и упорядочения, пары (M_i, n_i). Таким образом, указанный выше пример является довольно типичным. Изучение полупростых алгебр Ли окончательно сведено к изучению простых — результат, доказательство которого в течение долгого времени представлялось весьма желательным.

Литература

1. Кострикин А. И., Шафаревич И. Р. Псевдогруппы Картана и p-алгебры Ли. — Докл. АН СССР, 1966, 168, № 4, 740—742.

2. Cartan E. Les groupes de transformations continués, infinis, simples. — Ann. Sei. Ecole Norm. Sup., 1909, **26**, 93—161.
3. Кострикин А. И., Шафаревич И. Р. Градуированные алгебры Ли конечной характеристики. — Изв. АН СССР, серия матем., 1969, **33**, № 2.
4. Block R. Differentiably simple algebras. — Bull. Amer. Math. Soc., 1968, **74**, № 6, 1086—1090.
5. Seligman G. B. Modular Lie algebras. — Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete. 1967, Bd. 40.
6. Кострикин А. И. Алгебры Ли и конечные группы. — Proc. International Congress Math. Stockholm, 1962.
7. Кострикин А. И. Квадраты присоединенных эндоморфизмов в простых p-алгебрах Ли. — Изв. АН СССР, серия матем., 1967, **31**, 445—487.
8. Chwe B. S. On the commutativity of restricted Lie algebra. — Proc. Amer. Math. Soc., 1965, **16**, 547.
9. Block R. New simple Lie algebras of prime characteristic. — Trans. Amer. Math. Soc., 1958, **89**, 421—449.
10. Kaplansky I. Lie algebras of characteristic p. — Trans. Amer. Math. Soc., 1958, **89**, 149—183.
11. Block R. On Lie algebras of rank one. — Trans. Amer. Soc., 1964, **112**, 19—31.
12. Долотказин А. Х. Алгебры Ли ранга один с ненулевым внутренним произведением, II. — Изв. вузов. Математика, 1966, № 5, 70—77.
13. Sehue J. R. Cartan decompositions for Lie algebras of prime characteristic. — J. Algebra, 1969, **11**, № 1, 25—52.
14. Seligman G. B. Some results on Lie p-algebras. — Bull. Amer. Math. Soc., 1967, № **73**, 528—531.
15. Barnes D. W. On Cartan subalgebras of Lie algebras. — Math. Z., 1967, **101**, 350—355.
16. Kuo Y. L. Simple Lie algebras of rank three, A dissertation. Chicago, Illinois, 1965.
17. Winter D. Solvable and nilpotent subalgebras of Lie algebras. — Bull. Amer. Math. Soc., 1968, **74**, № 4, 754—758.
18. Curtis C. W. Representations of Lie algebras of classical type with applications to linear groups. — J. Math. Mech., 1960, **9**, 307—326.
19. Braden B. Restricted representations of classical Lie algebras of types A_2 and B_2. — Bull. Amer. Math. Soc., 1967, **73**, № 3, 482—486.
20. Jacobson N. A note on three dimensional simple Lie algebras. — J. Math. Mech., 1958, **7**, 823—831.
21. Рудаков А. Н., Шафаревич И. Р. Неприводимые представления простой трехмерной алгебры Ли над полем конечной характеристики. — Матем. заметки, 1967, **2**, № 5, 439—454.
22. Zassenhaus H. The representations of Lie algebras of prime characteristic. — Proc. Glasgow Math. Assoc, 1954, **2**, 1—36.
23. Ochiai T. Classification of the finite nonlinear primitive Lie algebras. — Trans. Amer. Math. Soc., 1966, **124**, № 2, 313—322.
24. Demazure M. Séminaire Bourbaki, 1966—1967, exposé 326.
25. Kobayashi Sh., Nagano T. On filtered Lie algebras and geometric structures, III. — J. Math. Mech., 1965, **14**, 679—706.
26. Гийемин В., Квиллен Д., Штернберг Ш. Классификация неприводимых комплексных алгебр бесконечного типа. — Математика. Сб. переводов, 1968, **12**:6, 63—66.

27. Гийемин В., Штернберг Ш. Алгебраическая модель транзитивной дифференциальной геометрии. — Математика. Сб. переводов, 1966, **10** : 4, 3—31.
28. Кац В. Г. Простые неприводимые градуированные алгебры Ли конечного роста. — Изв. АН СССР, серия матем., 1968, **32**, № 6, 1323—1367.
29. Кострикин А. И. Неприводимые градуированные алгебры Ли с компонентой $L_0 \cong W_1$ — Матем. записки. Уральский гос. ун-т им. А. М. Горького, 1969 (в печати).
30. Джекобсон Н. Алгебры Ли. Изд-во «Мир», 1964.
31. Gerstenhaber M. On the deformation of rings and algebras. — Ann. Math., 1964, **79**, № 1, 59—103.
32. Rim D. S. Deformation of transitive Lie algebras. — Ann. Math., 1966, **83**, 1—19.
33. Singer I. M., Sternberg Sh. The infinite groups of Lie and Cartan, I. — J. d'analyse Math., 1965, **15**, № 1, 4—114.
34. Шевалле К. О некоторых простых группах. — Математика. Сб. переводов, 1958, **2**, № 1, 3—53.
35. Bourbaki N. Groupes et algebres de Lie, ch. IV. — Hermann, Paris, 1968.
36. Кострикин А. И. Теорема о полупростых p-алгебрах Ли. — Матем. заметки, 1967, **2**, № 5, 465—474.
37. Wilson R. L. Nonclassical simple Lie algebras, preprint. Gale Univ. 1969.
38. Кац В. Г. О классификации простых алгебр Ли над полем с ненулевой характеристикой. — Изв. АН СССР, серия матем., 1970, **34**, 385—408.
39. Кострикин А. И. Параметрическое семейство простых алгебр Ли. — Изв. АН СССР, серия матем., 1970, **34**, 744—756.
40. Крекнин В. А. Существование максимальной инвариантной подалгебры в простых алгебрах Ли картановского типа. — Матем. заметки, 1971, **9**, № 2, 211—222.
41. Рудаков А. Н. О представлениях классических полупростых алгебр Ли в характеристике p. — Изв. АН СССР, серия матем., 1970, **34**, 735—743.
42* Strade H. Nodale nichtcommutative Jordanalgebren und Lie-algebren bei charakteristik $p>2$.— J. Algebra, 1972, **21**, № 3, 353—377.
43* Jacobs J. B. On classification of simple Lie algebras of prime characteristic by nilpotent elements.— J. Algebra, 1971, **19**, № 1, 31—50.
44*. Humphreys J. S. Modular representations of classical Lie algebras and semisimple groups.— J. Algebra, 1971, **19**, № 1, 51—79.

Поступило 21 мая 1969 г.

---

* Литература, добавленная при корректуре

HUNGARIA
Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézete

M. MAKKAI

PRESERVATION THEOREMS FOR PSEUDO-ELEMENTARY CLASSES

Dedicated to the memory of Professor A. I. Mal'cev

§ 1. Introduction

Professor A. I. Mal'cev considered in [10] the relatively projective or PC'_Δ-classes of structures (see also [12]), and asked whether $PC'_\Delta = PC_\Delta$ was true. A positive answer to this question was given by the author of the present paper in [7]. As it was mentioned by Mal'cev in [10], this result implies that the family PC_Δ of classes is closed under a number of algebraic operations on classes of structures, e. g. $K \in PC_\Delta$ implies $\mathrm{Hom}(K) \in PC_\Delta$. In this paper we want to refine a number of corollaries to $PC'_\Delta = PC_\Delta$ of the latter type in such a way that we obtain «PC_Δ-analogues» of known preservation theorems.

In more detail, let us consider a relation R between structures of a given similarity type τ. In the following, let K always denote a class of structures of τ. Put $\overline{K} =_{\mathrm{df}} \{\mathfrak{B} : \mathfrak{B}$ is elementarily equivalent to some structure in $K\}$. Also, define $C_R(K) =$ $=_{\mathrm{df}} \{\mathfrak{B} : \mathfrak{A} R \mathfrak{B}$ for some $\mathfrak{A} \in K\}$. For the case: $\mathfrak{A} R \mathfrak{B}$ iff $\mathfrak{B}$ is a homomorphic image of $\mathfrak{A}$ we have, according to Lyndon [6], the following two facts (a) (R, Δ) and (b) (R, Δ) where Δ is the set of positive sentences of τ. (a) (R, Δ). For any $\sum \subseteq \Delta$, $C_R(\mathrm{Mod}_\tau(\sum)) = \mathrm{Mod}_\tau(\sum)$. (b) (R, Δ). For any class $K \in EC_\Delta$ of structures of τ, $\overline{C_R(K)} = \mathrm{Mod}_\tau(\sum)$ for some $\sum \subseteq \Delta$.

As a consequence, we have (c) (R, Δ). For any K, $K = \mathrm{Mod}_\tau(\Sigma)$ for some $\sum \subseteq \Delta$ iff $K \in EC_\Delta$ and $C_R(K) = K$.

It is interesting to note that the mere existence of Δ such that (a) (R, Δ) and (b) (R, Δ) hold for the given R is already non-trivial; in fact, no proof is known of this fact without constructing Δ explicity as the set of positive sentences. On the

other hand, it turned out (see e. g. [5], [11], [6], [3], [4], [1]) that for a number of relations R one can explicitly construct sets Δ such that (a), (b) (and thus (c) too) hold. Presently we do not know of any natural and sufficiently comprehensive class of relations R which provably admit a set Δ with (a) (R, Δ) and (b) (R, Δ).

[Note added in proof, May 3, 1971. It was only after the submission of this paper that the author became aware of Per Lindström's important work: «On relations between structures», Theoria (Lund) 32 (1966), 172—185, where such a class is exhibited and called the class of regular relations. As regularity imposes essential restrictions only on countable structures, regularity does not seem to be the right notion for unifying the work of the present paper.]

For the case: $\mathfrak{A} R \mathfrak{B}$ iff $\mathfrak{B}$ is a homomorphic image of $\mathfrak{A}$, we constructed in [7] a proper class F of sentences such that the following analogues of (a) and (b) hold.

(A) (R, F). For any $\Sigma \subseteq F$, $C_R(\mathrm{Mod}_{\tau''}(\Sigma) \restriction \tau) = \mathrm{Mod}_{\tau''}(\Sigma) \restriction \tau$ (where the similarity type τ'' is such that it contains the elements of τ and every non-logical symbol in formulas in Σ).

(B) (R, F). For any $K \in PC_\Delta$ we have $C_R(K) = \mathrm{Mod}_{\tau''}(\Sigma) \restriction \tau$ for some *subset* Σ of F (and for a suitable $\tau'' \supseteq \tau$).

As a consequence, we have

(C) (R, F). For any K, $K = \mathrm{Mod}_{\tau''}(\Sigma) \restriction \tau$ for some set $\Sigma \subseteq F$ iff $K \in PC_\Delta$ and $C_R(K) = K$.

Also note that (B) has the following consequence.

(D)(R). $K \in PC_\Delta$ implies $C_R(K) \in PC_\Delta$.

In this paper we show that for each of a number of relations R there exists an explicitly definable class F such that (A) (R, F) and (B) (R, F). Again, the mere existence of F with this property seems already to be non-trivial. It is interesting that the relations for which such F exists seem to be exactly those for which some Δ exists with (a) (R, Δ) and (b) (R, Δ), although we do not see how to deduce either of the two kinds of results from the other. Sometimes, but not always, the syntactic forms of formulas in Δ and of those in F (for the same R) are closely related. To indicate another puzzling circumstance, we note that, under some natural conditions for R, $(a)(R, \Delta) \wedge$ $\wedge (b)(R, \Delta)$ implies $(a)(R^{-1}, \Delta') \wedge (b)(R^{-1}, \Delta')$ where $\Delta' = \{\neg \varphi : \varphi \in \Delta\}$ but on the other hand, there does not seem to be a direct deduction of $\exists F[(A)(R^{-1}, F) \wedge (B)(R^{-1}, F)]$ from $\exists F[(A)(R, F) \wedge (B)(R, F)]$. In fact, although $(A)(R, F) \wedge$ $\wedge (B)(R, F)$ and $(A)(R^{-1}, F') \wedge (B)(R^{-1}, F')$ both hold for the rela-

tions R considered with some F and F', there is in general no immediate connection between the syntactical forms of formulas in F and of those in F' (see e. g. § 3 and 6).

We will actually carry out the construction of F and the proof of $(A)(R, F) \wedge (B)(R, F)$ for three relations, defined respectively by the following conditions (i) — (iii): (i) $\mathfrak{A} R \mathfrak{B}$ iff $\mathfrak{B}$ is a homomorphic image of $\mathfrak{A}$, (ii) $\mathfrak{A} R \mathfrak{B}$ iff $\mathfrak{B}$ is a direct factor of $\mathfrak{A}$, i. e. there is $\mathfrak{C}$ such that $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$, (iii) $\mathfrak{P}$ is an E — extension of $\mathfrak{A}$, i. e. $\mathfrak{A}$ is a substructure of $\mathfrak{B}$ and whenever $b \in B$, $a \in A$ and $(b, a) \in E^{\mathfrak{B}}$ we have $b \in A$ (§ 3—5). As we mentioned above, the first result was already proved (in fact, in a more general form) in [7]. Here we present a simplified proof.

In § 6 we give a list of additional relations R_i, each accompanied with a class of formulas F_i. For these pairs R_i, F_i we always have $(A)(R_i, F_i)$ and $(B)(R_i, F_i)$, however, we do not give the proofs of these statements. The proofs of all results of the paper are somewhat similar, and the most complicated proof of all the results of the paper is the one given in § 4.

Note that, since we do not use the equality $PC'_\Delta = PC_\Delta$, we obtain essentially new proofs of a number of results of type $(D)(R)$ above as corollaries to $(B)(R, F)$.

Finally, we wish to mention that it seems that the reflexivity and transitivity of R are important for the validity of $\exists \Delta [(a)(R, \Delta) \wedge (b)(R, \Delta)]$ and $\exists F [(A)(R, F) \wedge (B)(R, F)]$. In fact, we conjecture that a certain «pseudo-elementary definability» of R, the reflexivity of R and a «definable version of transitivity» of R are jointly sufficient for both statements to be true. The exact formulation of the conjecture is somewhat involved, hence we do not give it here, the more since we cannot prove it.

The results of this paper were announced in [8].

§2. Preliminaries

We will have to deal with proper classes as well as with sets; accordingly we work in an informal version of the Godel—Bernays set theory. Classes which are not supposed to be sets will be denoted by capital letters; however, some capital letters will always denote sets. In short, the following kinds of proper classes will appear: (i) classes of symbols (of first order logic), (ii) classes of formulas, (iii) classes of structures, (iv) relations between structures, i. e. classes of ordered pairs of structures.

Concerning the set-theoretic notation used in the paper we mention the following. If R is a relation (i. e. a class of orde-

red pairs (x, y) dom (R) and rn (R) denote the classes $\{x : (x, y) \in R$ for some $y\}$, $\{y : (x, y) \in R$ for some $x\}$, respectively. For relations R and S, $RoS =_{df} \{(x, z) : (x, y) \in S$ and $(y, z) \in R$ for some $y\}$ and $R^{-1} =_{df} \{(y, x) : (x, y) \in R\}$. Functions are identified with relations in the usual way. The notation $h : A \to B$ indicates that h is a function, dom $(h) = A$ and rn $(h) \subseteq B$.

A similarity type τ is a set of finitary relation and operation symbols. If σ is an n-ary relation or operation symbol, n is denoted by $\rho(\sigma)$. A structure $\mathfrak{A}$ of type τ (or simply: a structure $\mathfrak{A}$ of τ) consists of a non-empty set $|\mathfrak{A}|$ (called the domain of $\mathfrak{A}$) and proper interpretations $\sigma^{\mathfrak{A}}$ of symbols σ in τ.

If $\tau \subseteq \tau'$ and $\mathfrak{A}'$ is a structure of τ', then the reduct $\mathfrak{A}' \restriction \tau$ of $\mathfrak{A}'$ to τ is the structure $\mathfrak{A}$ resulting by deleting from $\mathfrak{A}'$ the interpretations of elements of $\tau' - \tau$. Conversely, if $\tau' \supseteq \tau$, $\mathfrak{A}$ is a structure of τ and G is a function on $\tau' - \tau$ assigning proper interpretations $G(\sigma)$ on $[\mathfrak{A}]$ to every $\sigma \in \tau' - \tau$, , then $(\mathfrak{A}, G)$ denotes the structure $\mathfrak{A}'$ of τ' such that $\mathfrak{A}' \restriction \tau = A$ and $\sigma^{\mathfrak{A}'} = G(\sigma)$ for $\sigma \in \tau' - \tau$.

We will adhere to the following conventions throughout the paper: τ, τ' denote similarity types such that $\tau \subseteq \tau'$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ are structures of τ, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ are structures of τ'. A, B, C denote the domains of $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ respectively. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ will be reducts of $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ respectively, whenever they appear in the same context. K denotes a class of structures of τ.

With any similarity type τ we associate a first order language $L(\tau)$ with equality; the elements of τ are the non-logical symbols in $L(\tau)$. We will say «term of τ», «formula of τ» etc for «term of $L(\tau)$», «formula of $L(\tau)$», respectively.

It is convenient to assume that the set Var of variables coincides with the set of natural numbers 0, 1, . . . To avoid confusion, v_n will often be written for n when n plays the part of a variable. Suppose α is a function, dom $(\alpha) \subseteq$ Var and rn $(\alpha) \subseteq A$ and let φ be a formula of τ, t a term of τ, all free variables of which belong to dom (τ). Then $A \models \varphi[\alpha]$ means as usual that φ is satisfied in $\mathfrak{A}$ by the assignment of $\alpha(x)$ to x for all $x \in$ dom (α) and $t^{\mathfrak{A}}[\alpha]$ is the denotation of t in $\mathfrak{A}$ by the same assignment. We will write $t^G[\alpha]$ for $t^{(\mathfrak{A}, G)}[\alpha]$ if all non-logical symbols occuring in t are in dom (G). Also, f^G will be written for $f^{(\mathfrak{A}, G)} = G(f)$ if $f \in$ dom (G). We write $\mathfrak{A} \models \varphi$ if $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha]$ for every α: Var $\to A$. Hence $\mathfrak{A} \models \varphi$ is equivalent to saying that $\mathfrak{A} \models \varphi'$ where φ' is the universal closure of φ.

We use (as before) usual model-theoretical terminology. In particular, K is a pseudo-elementary class (in notation:

$K \in PC_\Delta$) if $K = \mathrm{Mod}_{\tau'}(\Sigma) \restriction \tau$*) for some set Σ of formulas and some similarity type $\tau' \supseteq \tau$ such that every formula in Σ is a formula of τ'. «Introducing Skolem-functions», we obtain.

2. 1. L e m m a. *$K \in PC_\Delta$ iff for some $\tau' \supseteq \tau$ and for some set Σ of quantifier-free formulas of τ', we have $K = \mathrm{Mod}_{\tau'}(\Sigma) \restriction \tau$.*

Partly owing to 2. 1, we will have to deal only with quantifier-free formulas, therefore in the sequel «formula» will always mean a quantifier-free one.

We will need large supplies of operation symbols. In particular, for any set a, $< a, n>$ denotes an n-ary operation symbol such that $<a, n> \neq <b, m>$ for $a \neq b$; we call operation symbols of the form $<a, n>$ to be *of the first kind*. The class of all operation symbols of the first kind is denoted by S_1. Moreover, for any set a, $[a]$ denotes an individual constant *of the second kind* such that $[a] \neq [b]$ if $a \neq b$, and, writing S_2 for the class of individual constants of the second kind, we have $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. τ, τ' will always be similarity types disjoint from $S_1 \cup S_2$.

If r is a function such that $\mathrm{dom}(r) \subseteq \mathrm{Var}$ or $\mathrm{dom}(r)$ consists of induvidual constants, and $r(x)$ is a term for each $x \in \mathrm{dom}(r)$ (in which case r is called a substitution), $\varphi(r)$ ($t(r)$) denotes the formula (the term) resulting by the substitution of $r(x)$ for x in φ (in t) for all $x \in \mathrm{dom}(r)$.

Let u be a term. In order to define when we call u a term form, let ϑ be the set of all occurences in u of variables and let $\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}$ be an enumeration of the elements of ϑ in their natural order in u from the left to the right. u is a term form if for every $k < n$, ϑ_k is an occurence of ϑ_k. In this case n is denoted by $\rho(u)$.

2. 2. L e m m a. *For every term t (of some similarity type) there is a unique termform u (of the same similarity type) and a unique substitution r such that* $\mathrm{dom}(r) = \{\vartheta_i : i < \rho(u)\}$, *for every $i < \rho(u)$ $r(i)$ is a variable, and $t = u(r)$.*

We will use tacitly this obvious lemma several times.

Finally, we call a term simple if it is either a variable or of the form $fx_0, \ldots, x_{n-1}$, for some $f \in S_1$, $n < \omega$ such that $x_0, \ldots, x_{n-1}$ are variables.

§ 3. Homomorphic images

We say that h is an homomorphism on $\mathfrak{A}$ onto $\mathfrak{B}$ if $h : A \to B$, $\mathrm{rn}(h) = B$ and for any atomic formula φ of τ and for any α:

*) $\mathrm{Mod}_{\tau'}(\Sigma) = \{\mathfrak{A}' : \mathfrak{A}' \models \varphi \text{ for all } \varphi \in \Sigma\}$.

$\mathrm{Var} \to A$, $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha]$ implies $\mathfrak{B} \models \varphi[h \circ \alpha]$. $\mathfrak{B}$ is called an *homomorphic image of* $\mathfrak{A}$ if there is an homomorphism on $\mathfrak{A}$ onto $\mathfrak{B}$.

Define the relation R between structures of τ such that $\mathfrak{A} R \mathfrak{B}$ (i. e. $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \in R$) iff $\mathfrak{B}$ is an homomorphic image of $\mathfrak{A}$.

Define F as the class of all finite disjunctions whose disjuncts are of the form $\varphi(r)$ where φ is an atomic formula of τ, r is an ω-sequence*) of simple terms.

3. 1. Theorem. *(A) (R, F) and (B) (R, F) hold.*

Proof of (A) (R, F). Suppose $\Sigma \subseteq F$, $(\mathfrak{A}, G) \in \mathrm{Mod}_{\tau'}(\Sigma)$ and suppose that h is an homomorphism on $\mathfrak{A}$ onto $\mathfrak{B}$. Let (by the axiom of choice) h' be a function such that h': $B \to A$ and $h \circ h' = \mathrm{Id}_B$ (= the identity mapping on B onto B). Define the structure $(\mathfrak{B}, H)$ such that

$$f^H(\beta) = h(f^G(h' \circ \beta))$$

for any $f \in \mathrm{dom}(G) = \mathrm{dom}(H)$, and for any $\beta : \{0, \ldots, \rho(f) - 1\} \to B$; here $f^H(\beta)$ stands naturally for $f^H(\beta(0), \ldots, \beta(\rho(f) - 1))$ and similarly for $f^G(h' \circ \beta)$.

As a consequence, we clearly have

$$t^H[\beta] = h(t^G[h' \circ \beta])$$

for any simple term t of τ' and for any $\beta : \mathrm{Var} \to B$. Hence, using also that h is an homomorphism, we obtain that $(\mathfrak{A}, G) \models \varphi(r)[h' \circ \beta]$ implies $(\mathfrak{B}, H) \models \varphi(r)[\beta]$ for any atomic formula φ of τ, for any ω-sequence r of simple terms and for any β: $\mathrm{Var} \to B$. It follows that $(\mathfrak{A}, G) \models \psi$ implies $(\mathfrak{B}, H) \models \psi$ for any $\psi \in F$, consequently $(\mathfrak{B}, H) \in \mathrm{Mod}_{\tau'}(\Sigma)$, q. e. d.

Proof of (B) (R, F). Suppose $K \in PC_\Delta$. By 2. 1 we have $K = \mathrm{Mod}_{\tau'}(\Theta) \restriction \tau$ for some $\tau' \supseteq \tau$ and for some set Θ of quantifier-free formulas of τ'.

For every termform $u \neq v_0$ of τ' let $f^u =_{\mathrm{df}} < u, \rho(u) >$ and for any term $t = u(z)$ of τ' (where u is a termform and z is a substitution of variables such that $\mathrm{dom}(z) = \{v_i : i < \rho(u)\}$) define $\overline{t} =_{\mathrm{df}} f^u z$ if $u \neq v_0$ and $\overline{t} =_{\mathrm{df}} t$ if $u = v_0$ (i. e., if t is a variable). Define Σ to be the set of formulas $\varphi(\overline{r})$ such that φ is a disjunction of atomic formulas of τ, r is an ω-sequence of terms of τ', $\overline{r} = <\overline{r(i)} : i < \omega>$ and $\varphi(r)$ is a logical consequence of Θ. Clearly, $\Sigma \subseteq F$.

Suppose $\mathfrak{A}' \in \mathrm{Mod}_{\tau'}(\Theta)$. We want to show $\mathfrak{A} =_{\mathrm{df}} \mathfrak{A}' \restriction \tau \in \mathrm{Mod}_{\tau''}(\Sigma) \restriction \tau$ where $\tau'' = \tau \cup \{f^u : u$ is a termform of τ', $u \neq v_0\}$. To this end define the structure $(\mathfrak{A}, G)$ of type τ'' by

$$(f^u)^G(\alpha) = u^{\mathfrak{A}'}[\alpha]$$

*) An ω-sequence is a function with domain $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

for any termform $u \neq v_0$ of τ' and for any $\alpha : \rho(u) \to A$. It follows that

$$\bar{t}^G[\alpha] = t^{\mathfrak{A}'}[\alpha]$$

for any term t of τ' and $\alpha : \omega \to A$. By the definition of Σ this clearly implies that $(\mathfrak{A}, G) \in \mathrm{Mod}_{\tau''}(\Sigma)$.

We have shown $K \subseteq \mathrm{Mod}_{\tau''}(\Sigma) \restriction \tau$. This, combined with $(A)(R, F)$, yields that

$$C_R(K) \subseteq \mathrm{Mod}_{\tau''}(\Sigma) \restriction \tau.$$

To show the opposite inclusion, suppose that $(\mathfrak{B}, H) \in \mathrm{Mod}_{\tau''}(\Sigma)$. Put $D =_{\mathrm{df}} \{[b] : b \in B\}$. If t is a closed term (i. e., a term without variables) of $\tau' \cup D$ and $t = u(\gamma)$ where u is a termform of τ' and γ is substitution with $\mathrm{dom}(\gamma) = \rho(u) = \{0, \ldots, \rho(u)-1\}$, put $\bar{t} =_{\mathrm{df}} f^u\gamma$ for $u \neq v_0$ and $\bar{t} = t$ for $u = v_0$ (i. e. $t \in D$). $f^u\gamma$ means of course $f^u\gamma(0) \ldots \gamma(\rho(u)-1)$. With this definition we obviously have $\overline{t(\gamma)} = \bar{t}(\gamma)$ for any term t of τ' and for any $\gamma : \mathrm{Var} \to \mathrm{D}$.

Now let us define Δ as the set of formulas $\neg\varphi(r)$ such that φ is an atomic formula of τ, r is an ω-sequence of closed terms of $\tau' \cup D$, and $(\mathfrak{B}, H, \eta) \models \neg\varphi(\bar{r})$ where $\eta = \{([b], b) : b \in B\}$ and $\bar{r} = \langle \overline{r(i)} : i < \omega \rangle$. (The role of η is to ensure that $[b]$ is interpreted as b).

We claim that $\Theta \cup \Delta$ is satisfiable. Using the compactness theorem, it is sufficient to prove the satisfiability of $\Theta \cup \Delta'$ for any finite subset Δ' of Δ. If $\Theta \cup \Delta'$ is unsatisfiable, we have $\Theta \models \bigvee\{\psi : \neg\psi \in \Delta'\}$. $\bigvee\{\psi : \neg\psi \in \Delta'\}$ may be written as $\varphi(r)$ where φ is a disjunction of atomic formulas of τ and r is an ω-sequence of closed terms of $\tau' \cup D$. Because of the definition of Δ, we have

$$(1)\ (\mathfrak{B}, H, \eta) \models \neg\varphi(\bar{r}).$$

Let γ be any one-to-one mapping on the finite set of elements of D occuring in $\varphi(r)$ into Var. Since $\Theta \models \varphi(r)$ we have $\Theta \models \models \varphi(r(\gamma))$ (where $r(\gamma) = \langle (r(i))(\gamma) : i < \omega \rangle$) and thus $\varphi(\overline{r(\gamma)}) \in \Sigma$. By $(\mathfrak{B}, H) \in \mathrm{Mod}_{\tau''}(\Sigma)$, we have $(\mathfrak{B}, H) \models \varphi(\overline{r(\gamma)})$ contradicting $(\mathfrak{B}, H) \models \neg\varphi(\overline{r(\gamma)})[\gamma^{-1} \circ \eta]$, which follows from (1). Thus we have verified that $\Theta \cup \Delta$ is satisfiable.

Let $(\mathfrak{A}', \xi)$ be a model of $\Theta \cup \Delta$ of type $\tau' \cup D$. Since every formula in $\Theta \cup \Delta$ is quantifier-free, we may and do assume that $(\mathfrak{A}', \xi)$ is generated by $\tau' \cup D$, i. e. every element of $|\mathfrak{A}'|$ is of the form $t^{(\mathfrak{A}', \xi)}$ where t is a closed term of $\tau' \cup D$. Define: $h =_{\mathrm{df}} \{(t^{(\mathfrak{A}', \xi)}, \bar{t}^{(H, \eta)}) : t$ is a closed term of $\tau' \cup D\}$. We claim that h is an homomorphism on $\mathfrak{A} =_{\mathrm{df}} \mathfrak{A}' \restriction \tau$ onto $\mathfrak{B}$.

Since $(\mathfrak{A}', \xi)$ is generated by $\tau' \cup D$, dom $(h) = A$. Since $(\bar{[b]})^{(H,\eta)} = [b]^{(H,\eta)} = b$ for any $b \in B$, we also have $\mathbf{rn}(h) = B$. Consider now an arbitrary atomic formula φ of τ and let r be an ω-sequence of closed terms of $\tau' \cup D$. Using the definition of Δ and the fact that $(\mathfrak{A}', \xi) \in \mathrm{Mod}_{\tau' \cup D}(\Delta)$ we see that $(\mathfrak{A}', \xi) \models \varphi(r)$ implies $(\mathfrak{B}, H, \eta) \models \varphi(\bar{r})$. Equivalently,

$$\mathfrak{A} \models \varphi\,[r^{(\mathfrak{A}', \xi)}]^{*)} \qquad \text{implies} \qquad \mathfrak{B} \models \varphi\,\big[\bar{r}^{(H,\eta)}\big]^{**}$$

which, applied for $\varphi = v_0 \approx v_0$, shows that h is a function, and applied for a general atomic φ of τ, verifies that h is a homomorphism on $\mathfrak{A}$ onto $\mathfrak{B}$.

As a conclusion, $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_{\tau'}(\Theta) \restriction \tau = K$ and $\mathfrak{B}$ is a homomorphic image of $\mathfrak{A}$. Since $\mathfrak{B}$ was an arbitrary element of $\mathrm{Mod}_{\tau''}(\Sigma) = \tau$, we have obtained the inclusion $\mathrm{Mod}_{\tau''}(\Sigma) \restriction \tau \subseteq \subseteq C_R(K)$. The opposite inclusion shown earlier completes the proof of the equality $\mathrm{Mod}_{\tau''}(\Sigma) \restriction \tau = C_R(K)$, q. e. d.

§ 4. Direct factors

Let R be the relation between structures of type τ such that $\mathfrak{A} R \mathfrak{B}$ iff $\mathfrak{B}$ is a direct factor of $\mathfrak{A}$, i. e. there is a $\mathfrak{C}$ such that $\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$ is isomorphic to $\mathfrak{A}$.

In this case even the definition of the class F requires some preparations; these will follow after stating two simple lemmas.

4. 1. Lemma. *Suppose* $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$, $\alpha_i : \omega \to A$, $\beta_i : \omega \to B$ *for* $i = 1$, $i = 2$, $\gamma : \omega \to C$. *Suppose moreover that* $\alpha_i(n) = (\beta_i(n), \gamma(n))$ *for* $n < \omega$, $i = 1,2$ *and* φ *is an atomic formula of* τ. *Then* $\mathfrak{A} \models \varphi\,[\alpha_1]$ *and* $\mathfrak{A} \models \neg \varphi\,[\alpha_2]$ *jointly imply* $\mathfrak{B} \models \varphi\,[\beta_1]$ *and* $\mathfrak{B} \models \neg \varphi\,[\beta_2]$. *Also,* $\mathfrak{A} = \varphi\,[\alpha_1]$ *implies* $\mathfrak{B} \models \models \varphi\,[\beta_1]$.

The proof is an easy computation.

4. 2. Lemma. *Let the structures* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *be given. Suppose that there is a set* C' *and a subset* h *of* $A \times (B \times C')$ *with the following properties:*

(i) dom $(h) = A$,

(ii) rn $(h) = B \times C'$,

(iii) *whenever* φ *is an atomic formula of* τ, *and* $\alpha_i : \omega \to A$, $\beta_i : \omega \to B$ *(for* $i = 1,2$*) and* $\gamma : \omega \to C'$ *are such that* $(\alpha_i(n), (\beta_i(n), \gamma(n))) \in h$ *for all* $n < \omega$, *then* $\mathfrak{A} \models \varphi\,[\alpha_1]$ *implies* $\mathfrak{B} \models$

---

*) $r^{(\mathfrak{A}', \xi)} = \langle (r(i))^{(\mathfrak{A}', \xi)} : i \in \mathrm{dom}(r) \rangle$.

**) $(\bar{r})^{(H,\eta)} = \langle (\overline{r(i)})^{(H,\eta)} : i \in \mathrm{dom}(r) \rangle$.

$\vdash \varphi[\beta_1]$ *and* $\mathfrak{A} \vdash \varphi[\alpha_1], \mathfrak{A} \vdash \neg \varphi[\alpha_2]$ *jointly imply* $\mathfrak{B} \vdash \varphi[\beta_1]$ *and* $\mathfrak{B} \vdash \neg \varphi[\beta_2]$.

Then $\mathfrak{B}$ *is a direct factor of* $\mathfrak{A}$.

Proof. A straightforward computation shows that there is a unique equivalence relation $\sim$ on C' and there is a unique structure $\mathfrak{C}$ with domain $C = \{c/\sim : c \in C'\}$ (where $c/\sim = \{c' : c' \sim c\}$) such that for any $\gamma : \omega \to C'$ and for any atomic formula φ of τ we have $\mathfrak{C} \vdash \varphi[\gamma/\sim]$ iff there are $\alpha : \omega \to A$, $\beta : \omega \to B$ such that for all $n < \omega$, $(\alpha(n), (\beta(n), \gamma(n))) \in h$ and $\mathfrak{A} \vdash \varphi[\alpha]$ (here $\gamma/\sim = \langle \gamma(i)/\sim : i < \omega \rangle$). Having the structure $\mathfrak{C}$, we may verify by further computation that $h' =_{\mathrm{df}} \{(a, (b, c/\sim)) : (a, (b, c)) \in h\}$ is an isomorphism on $\mathfrak{A}$ onto $\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$.

For the construction of F we need some auxiliary terminology. For finite sequences s_1, s_2 we write $s_1 \lhd s_2$ if s_1 is a (not necessarily proper) initial segment of s_2. In the sequel s, s_1, s_2, ... range over the set S_0 of finite sequences of natural numbers. $s_1{}^\frown s_2$ denotes the concatenation of s_1 and s_2.

We call a non-empty finite subset X of S_0 a *bare tree* if (i) $s \in X$, $s' \lhd s$ imply $s' \in X$, and (ii) $s^\frown \langle n \rangle \in X$, $m < n$ imply $s^\frown \langle m \rangle \in X$. Note that for every bare tree X the empty sequence, 0, belongs to X. $\{0\}$ is a bare tree itself.

For a bare tree X, let $\rho(X)$ be the number of elements in $X - \{0\}$, and let $\langle s_i^X : i < \rho(X) \rangle$ be a fixed enumeration of $X - \{0\}$. For any $i < \rho(X)$, let X/i denote the bare tree such that $s' \in X/i$ iff $s_i^X{}^\frown s' \in X$. s is called an *endpoint* of X if there is no $s' \in X$ such that $s' \neq s$ and $s \lhd s'$.

A *tree* is a pair $Y = (X, I)$ such that I is a function, X is a bare tree $\mathrm{dom}(I) \subseteq X$ and every element of X which is not an endpoint of X belongs to $\mathrm{dom}(I)$. *A labeled tree* is a triple $Z = (X, I, \xi)$ such that (X, I) is a tree and ξ is a function with $\mathrm{dom}(\xi) = \rho(X) = \{i : i < \rho(X)\}$.

The one-element tree $(\{0\}, 0)$ is denoted by $Y^{(0)}$ and the one-element labeled tree $(\{0\}, 0, 0)$ by $Z^{(0)}$. Note that $(\{0\}, (0, a))$ is also a one-element tree for any a.

With $Y = (X, I)$ and $Z = (X, I, \xi)$ as above put for $i < \rho(X)$ $Y/i =_{\mathrm{df}} (X/i, I')$, $Z/i = (X/i, I', \xi')$ where the function I', ξ' are defined such that

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(I') &= \{s' \in X/i : s_i^X{}^\frown s' \in \mathrm{dom}(I)\}; \\ \mathrm{dom}(\xi') &= X/i - \{0\}; \\ I'(s') &= I(s_i^X{}^\frown s'); \\ \xi'(j) &= \xi(k) \end{aligned} \tag{1}$$

where k is the unique number such that

$$s_i^X \frown s_j^{X/i} = s_k^X. \tag{2}$$

Obviously, Y/i (Z/i) is a tree (a labeled tree) for any $i < \rho(X)$. We also have

$$(X/i)/j = X/k, \tag{3}$$

$$(Y/i)/j = Y/k, \tag{4}$$

$$(Z/i)/j = Z/k, \tag{5}$$

whenever (2) holds.

We will also write X/s (Y/s, Z/s) for X/i (Y/i, Z/i) if $s = s_i^X$.

For a tree $Y = (X, I)$ different from $Y^{(0)}$, let f^Y be the operation symbol $< Y, \rho(X) >$ of the first kind. Denote by D_0 the class of the induvidual constants $[e, Z] = [(e, Z)]$ of the second kind where Z is a labeled tree. For $d = [e, Z]$, Z is denoted by $\pi(d)$.

A term is called *admissible* if either it is an element of D_0 or it is of form ${}_f{}^Y \delta$ for some tree $Y = (X, I) \neq Y^{(0)}$ and for some δ which is a $\rho(X)$-sequence of elements of D_0 such that for some labeled tree $Z = (X, I, \xi)$ we have for every $i < \rho(X)$

$$\delta(i) = [\xi(i), Z/i]. \tag{6}$$

The admissible term $t = {}_f{}^Y \delta$ determines the lebeled tree Z uniquely; denote Z by $\pi(t)$.

Conversely, for every labeled tree $Z \neq Z^{(0)}$ there is a unique *proper* (i. e., not an element of D_0) admissible term such that $\pi(t) = Z$.

Define Φ to be the class of all formulas $\varphi(r_1)$ and $\varphi(r_1)/\wedge\neg\varphi(r_2)$ where φ is an atomic formula of τ and r_1, r_2 are ω-sequences of admissible terms such that for any $n < \omega$ we have $\pi(r_1(n)) = \pi(r_2(n))$. (In the latter case we call the ω-sequences r_1, r_2 related.)

Specify in some arbitrary way a one-to-one substitution δ to every formula φ such that dom (δ) is the set of individual constants of the second kind occuring in φ and such that $\delta(d)$ is a variable for every $d \in \mathrm{dom}(\delta)$. Let us denote $\varphi(\delta)$ by φ^*.

Let ψ be the class of finite disjunctions of formulas in Φ and finally, let F be the class of formulas ψ^* where $\psi \in \Psi$.

4. 3. Theorem. *(A) (R, F) and (B) (R, F).*

Proof of *(A) (R, F)*. Suppose $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$, $\Sigma \subseteq F$, $(\mathfrak{A}, G) \in \mathrm{Mod}_{\tau''}(\Sigma)$. We may suppose that for some set W, dom (G) consists of all operation symbols f^Y such that Y is a tree, $Y \neq Y^{(0)}$, and if $Y = (X, I)$, $\mathrm{rn}(I) \subseteq W$.

We define the interpretation $H(f^Y)$ on B of f^Y and the operation $g^Y : B^{\rho(X)} \to C$ for all tree $Y = (X, I) \neq Y^{(0)}$ with $\mathrm{rn}(I) \subseteq W$ by induction on $\rho(X)$ simultaneously. Let c_0 be a fixed element of $C = |\mathfrak{C}|$. Let $N = \rho(X)$ and $\beta : N \to B$. For any $i < N$, let

$$N_i = \rho(X/i) \tag{7}$$

and define

$$\beta_i : N_i \to B \tag{8}$$

such that for any $j < N_i$

$$\beta_i(j) = {}_{\mathrm{df}}\ \beta(k) \tag{9}$$

for the unique $k < N$ with the property

$$s_i^X \frown s_j^{X/i} = s_k^X. \tag{10}$$

Define

$$\gamma : N \to C$$

such that for every $i < N$

$$\gamma(i) = {}_{\mathrm{df}}\ c_0 \tag{11}$$

if

$$Y/i = Y^{(0)},$$

and

$$\gamma(i) = {}_{\mathrm{df}}\ g^{Y/i}(\beta_i) \tag{12}$$

otherwise (note that by the induction hypothesis $g^{Y/i}$ is already known since $\rho(X/i < N)$. Define

$$\alpha : N \to A$$

such that

$$\alpha(i) = {}_{\mathrm{df}}(\beta(i), \gamma(i)) \tag{13}$$

for $i < N$, and finally, define $H(f^Y)(\beta)$ and $g^Y(\beta)$ so that we have

$$G(f^Y)(\alpha) = (H(f^Y)(\beta), g^Y(\beta)). \tag{14}$$

Note that for $\rho(X) = N = 0$ our definition gives $H(f^Y) \in B$ and $g^Y \in C$ so that

$$G(f^Y) = (H(f^Y), g^Y).$$

4. 4. L e m m a. *Suppose U is a set of admissible terms, D is a subset of D_0 including every induvidual constant of the second kind which occurs in some term in U, and let $\beta' : D \to B$.*

Then there are functions

$$\alpha' : D \to A$$

$$\gamma' : U \to C$$

such that

$$t^{(G,\alpha')} = (t^{(H,\beta')}, \gamma'(t)) \tag{15}$$

and

$$\pi(t_1) = \pi(t_2) \text{ implies } \gamma'(t_1) = \gamma'(t_2) \tag{16}$$

for any $t, t_1, t_2 \in U$.

Proof. For any $d \in D_0$ write $Z^d = (X^d, I^d, \xi^d)$ for $\pi(d)$ and Y^d for (X^d, I^d). Denote by δ^d the function with domain $\rho(X^\alpha)$ such that

$$\delta^d(j) = [\xi^d(j), Z^d/j] \tag{17}$$

for $j < \rho(X^d)$. Enlarge D so that we have $\delta^d(j) \in D$ for every $d \in D$, $j < \rho(X^d)$.

Define the function $\gamma'' : D \to C$ such that for any $d \in D$

$$\gamma''(d) = {}_{\mathrm{df}}\, g^{Y^d}(\beta' \circ \delta^d) \tag{18}$$

if $Y^d \neq Y^{(0)}$, and

$$\gamma''(d) = c_0 \tag{19}$$

if $Y^d = Y^{(0)}$. Finally, put

$$\alpha'(d) = {}_{\mathrm{df}}(\beta'(d), \gamma''(d)) \tag{20}$$

and

$$\gamma'(t) = {}_{\mathrm{df}}\, \gamma''(d) \tag{21}$$

for $t = d \in U$, and

$$\gamma'(t) = {}_{\mathrm{df}}\, g^Y(\beta' \circ \delta) \tag{22}$$

for $t = f^Y \delta \in U$. With these choices of α' and γ' we seek to prove (15) and (16).

First, consider (16). If the admissible terms t_1, t_2 are not elements of D, then $\pi(t_1) = \pi(t_2)$ implies $t_1 = t_2$ since $\pi(t)$ uniquely determines $t = f^Y\delta$. Looking at (17)—(19) and (21) we see that $\gamma'(d)$ for $d \in D$ depends only on $Z^d = \pi(d)$ hence for $t_1, t_2 \in D$ we again have that $\pi(t_1) = \pi(t_2)$ implies $\gamma'(t_1) = \gamma'(t_2)$. Finally, let (e. g.) $t_1 = f^Y\delta$, $t_2 = d \in D$ and $\pi(t_1) = \pi(t_2)$. Then by the admissibility of $f^Y\delta$ (i. e. (6) for $Z = \pi(f^Y\delta)$) and by (17) it follows that $\delta = \delta^d$. This, together wiht $Y = Y^d$, implies by (18), (21) and (22) that $\gamma'(f^Y\delta) = \gamma'(d)$ indeed. Thus we have shown (16).

Second, consider (15). For $t = d \in D$ the assertion follows from (20) and (21). Suppose $t = f^Y \delta \in U, Y = (X, I)$, $Z = \pi(t)$. Pick an arbitrary $i < \rho(X)$, put $d = {}_{df}\delta(i)$. Let $\beta = {}_{df}\beta' \circ \delta$ and consider α, γ, N_i and β_i as defined in (7) — (13). Since t is admissible, by (6) we have

$$Z^d = Z/i \tag{23}$$

and a fortiori $Y^d = Y/i$ (24)
and

$$X^d = X/i. \tag{25}$$

Using (8) and (7) we obtain

$$\mathrm{dom}(\beta' \circ \delta^d) = \mathrm{dom}\ (\delta^d) = \rho(X^d) = \rho(X/i) = N_i = \mathrm{dom}\ (\beta_i). \tag{26}$$

Now choose $j < N_i$ to be arbitrary, and let k be the number defined by (10). We have by (5) that $(Z/i)/j = Z/k$, hence by (23)

$$Z^d/j = Z/k. \tag{26'}$$

Denote for a moment Z/i by $(X', I', \xi',)$. By the definition of Z/i, in particular by (1), we have

$$\xi'(j) = \xi(k).$$

Since by (23) $\xi' = \xi^d$, we obtain

$$\xi^d(j) = \xi(k). \tag{27}$$

We have $(\beta' \circ \delta^d)(j) = \beta'([\xi^d(j), Z^d/j])$ by (17), and $\beta_i(j) = \beta(k) = \beta'(\delta(k)) = \beta'([\xi(k), Z/k])$ by (9) and (6). The last two equalities, (26') and (27) imply that $(\beta' \circ \delta^d)(j) = \beta_i(j)$. Since this holds for arbitrary $j < N_i$, using also (26) we have that

$$\beta' \circ \delta^d = \beta_i\ . \tag{28}$$

Assuming for a moment that $Y^d \neq Y^{(0)}$, it follows by (12), (18), (28) and (24) that

$$\gamma''(d) = \gamma(i). \tag{29}$$

This is true in case $Y^d = Y^{(0)}$ too, which is seen by (24), (11) and (19). By the definition of β, $\beta(i) = \beta'(d)$, hence by (13) and (29) $\alpha(i) = (\beta'(d), \gamma''(d))$. This, together with (20), implies that

$$\alpha(i) = \alpha'(d) = \alpha'(\delta(i)).$$

Since this holds for any $i < N$, it follows that

$$\alpha = \alpha' \circ \delta.$$

Substituting in (14) $\alpha' \circ \delta$ for α and $\beta' \circ \delta$ for β we obtain that

$$G\,(f^Y)\;(\alpha' \circ \delta) = (H\,(f^Y)\;(\beta' \circ \delta),\; g^Y\;(\beta' \circ \delta)).$$

Taking into account (22), we conclude

$$(f^Y\,\delta)^{(G,\alpha')} = ((f^Y\,\delta)^{(H,\beta')},\; \gamma'\,(t))$$

as required in (15).

The proof of 4. 4. is complete.

Now we proceed with the proof of $(A)(R, F)$ as follows. By hypothesis, we have $(\mathfrak{A}, G) \in \mathrm{Mod}_{\tau''}(\Sigma)$. Pick an arbitrary element $\psi^* \in \sum$, $\psi \in \Psi$. We want to show $(\mathfrak{B}, H) \models \psi^*$, or equivalently, $(\mathfrak{B}, H, \beta') \models \psi$ for every $\beta' : D \to B$, where D is the set of elements of D_0 which occur in ψ. Choose $\beta' : D \to B$ arbitrarily. Let U be the set of admissible terms occuring in ψ. By 4.4 there are functions $\alpha' : D \to A$ and $\gamma' : U \to C$ such that α', β', γ' satisfy (15) and (16) for all $t, t_1, t_2 \in U$.

We have $(\mathfrak{A}, G, \alpha') \models \psi$. By the definition of Ψ, ψ is a disjunction of elements of Φ, hence $(\mathfrak{A}, G, \alpha') \models \psi'$ where $\psi' \in \Phi$ is a disjunct of ψ. According to the definition of Φ, ψ' may have two forms; suppose first that $\psi' = \varphi(r_1) \wedge \neg\, \varphi(r_2)$ where φ is an atomic formula of τ and r_1, r_2 are related ω-sequences of admissible terms. Define $\alpha_i : \omega \to A$, $\beta_i : \omega \to B$ (for $i = 1$, $i = 2$) and $\gamma : \omega \to C$ such that $\alpha_i\,(n) = {}_{\mathrm{df}}(r_i\,(n))^{(G,\alpha')}$, $\beta_i\,(n) = {}_{\mathrm{df}}(r_i\,(n))^{(H,\beta')}$ and $\gamma(n) = {}_{\mathrm{df}}\,\gamma'(r_1(n)) = \gamma'(r_2(n))$ (the last equality follows from the relatedness of r_1 and r_2 and (16)). By (15) we have $\alpha_i(n) = (\beta_i(n), \gamma(n))$ for $i = 1,2$ and $n < \omega$; also, by $(\mathfrak{A}, G, \alpha') \models \psi'$, $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha_1]$ and $\mathfrak{A} \models \neg\, \varphi[\alpha_2]$. Hence by 4. 1 Lemma $\mathfrak{B} \models \varphi[\beta_1]$ and $\mathfrak{B} \models \neg\, \varphi[\beta_2]$, i. e. $(\mathfrak{B}, H, \beta') \models \psi'$. If $\psi' = \varphi(r)$, we obtain similarly that $(\mathfrak{B}, H, \beta') \models \psi'$. We conclude that $(\mathfrak{B}, H, \beta') \models \psi$. Since this holds for arbitrary $\beta' : D \to B$, and $\psi \in \Psi$ (i. e., $\psi^* \in \Sigma$), we obtain that $(\mathfrak{B}, H) \in \mathrm{Mod}_{\tau''}(\Sigma)$, q. e. d.

P r o o f of $(B)(R, F)$. Suppose Θ is a set of quantifier-free formulas of τ', $\tau \subseteq \tau'$. By a *tree* (a *labeled tree*) we mean in the following a tree $Y = (X, I)$ (a labeled tree $Z = (X, I, \xi)$) such that for each $s \in \mathrm{dom}\,(I)$, $I\,(s)$ is a proper termform of τ' and the number of immediate predecessors of s in X. (i. e. the sequences $s^\frown\!<m>$ in X) is $\rho(I(s))$.

Observe that the trees in the restricted sense form a *set* of power at most $\max(|\tau'|, \aleph_0)$.

Let D_1 be the (proper) class of all individual constants $d = [e, Z]$ such that Z is a labeled tree (in the restricted sense), and let E be the set of operation symbols $f^Y = <Y, \rho(X)>$ for trees $Y \neq Y^{(0)}$. Denote the class of closed terms of $E \cup D_1$ by T_0.

For an arbitraty $t \in T_0$ define $\pi(t)$ as follows. For $t = d = [e, Z]$, let $\pi(t) = Z$ as before. For an individual constant $t \in E$, $t = f^Y$, let $\pi(t) = (\{0\}, (0,c), 0)$ where $Y = (\{0\}, (0, c))$. For a proper termform u such that $\rho(u) > 0$ and a sequence $\delta = <[e_i, Z_i] : i < \rho(u)>$ let $\pi(u(\delta))$ be the unique labeled tree $Z = (X, I, \xi)$ such that the number of predecessors of 0 in X is $\rho(u)$, $I(0) = u$, $Z/<i> = Z_i$ *) and $\xi(\langle i\rangle) = e_i$ for $i < \rho(u)$.

Now define $\bar{t}$ for any $t \in T_0$ as follows. Put $\bar{t} = t$ if $t \in D_1$ If t is a proper term, i. e. not an individual constant, let $\bar{t}$ be the unique proper admissible term such that $\pi(\bar{t}) = \pi(t)$, i. e. if. $Z = \pi(t) = (X, I, \xi) \neq Z^{(0)}$, then $\bar{t} = f^Y\delta$ where $Y = (X, I)$ and δ is determined by (6). Observe that every element of D_1 occuring in t occurs in $\bar{t}$, but not conversely in general. But if t is an individual constant, then so is $\bar{t}$. Also, we always have $\pi(\bar{t}) = \pi(t)$.

For a sequence r of terms in T_0, write r for $\langle r(n) : n \in \mathrm{dom}(r)\rangle$.

Let Σ' be the class of all finite disjunctions

$$\bigvee_{k<N_1} (\varphi_k(\bar{r}_k) \wedge \neg \varphi_k(\bar{s}_k)) \vee \bigvee_{N_1 \leqslant k < N_2} \varphi_k(\bar{r}_k) \tag{30}$$

such that $N_1 \leqslant N_2 < \omega$, φ_k is an atomic formula of τ, r_k, s_k are ω-sequences of elements of T_0, $\pi(r_k(n)) = \pi(s_k(n))$ $n < \omega$, $k < N_1$ and

$$\bigvee_{k<N_1} (\varphi_k(r_k) \wedge \neg \varphi_k(s_k)) \vee \bigvee_{N_1 \leqslant k < N_2} \varphi_k(r_k) \tag{31}$$

is a logical consequence of Θ. Let Σ be the *set* $\{\psi^* : \psi \in \Sigma'\}$ (of power at most $\max(|\tau'|, \aleph_0)$). Clearly $\Sigma \subset F$.

Proof of $\mathrm{Mod}_{\tau'}(\Theta) \restriction \tau \subseteq \mathrm{Mod}_{\tau''}(\Sigma) \restriction \tau$. Suppose $\mathfrak{A}' \in \mathrm{Mod}_{\tau'}(\Theta)$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \restriction \tau$. Define the function G with domain E as follows. For an arbitrary tree $Y = (X, I) \neq Y^{(0)}$ let $u =_{\mathrm{df}} I(0)$. Given α: $\rho(X) \to A$, determine α': $\rho(u) \to A$ such that $\alpha'(i) = \alpha(k)$ for the unique k with $\langle i\rangle = s_k^X$ and put

$$G(f^Y)(\alpha) =_{\mathrm{df}} u^{\mathfrak{A}'}[\alpha'].$$

It is not difficult to verify that with this definition of G we have

$$\bar{t}^{(G,\alpha)} = t^{(\mathfrak{A}', \alpha)}$$

for any set D including all $d \in D_1$ occuring in $\bar{t}$ and any $\alpha : D \to A$. This has the consequece that $(\mathfrak{A}', \alpha) \models \psi'$ implies $(\mathfrak{A}, G, \alpha) \models \psi$ where ψ', ψ are the formulas in (30) and (31), respectively. Hence,

---

*) $\langle i\rangle$ is the one-element sequence with member i, $Z/\langle i\rangle = Z/i$ where $\langle i\rangle = s_i^x$.

if $\Theta \vDash \psi'$, then $\mathfrak{A}' \in \mathrm{Mod}_{\tau'}(\Theta)$ yields $(\mathfrak{A}, G) \vDash \psi^*$. This proves that $(\mathfrak{A}, G) \in \mathrm{Mod}_{\tau''}(\Sigma)$, q. e. d.

Taking into account that $\Sigma \subseteq F$ and $(A)(R, F)$ holds, we obtain

$$C_R(\mathrm{Mod}_{\tau'}(\Theta) \restriction \tau) \subseteq \mathrm{Mod}_{\tau''}(\Sigma) \restriction \tau.$$

Proof of $\mathrm{Mod}_{\tau''}(\Sigma) \restriction \tau \subseteq C_R(\mathrm{Mod}_{\tau'}(\Theta) \restriction \tau)$. Suppose $(\mathfrak{B}, H) \in \mathrm{Mod}_{\tau''}(\Sigma)$, $\mathrm{dom}(H) = E$. Let the subset D of D_1 consist of the elements $[b, Z]$ such that $b \in B$ and if $Z = (X, I, \xi)$, we have $\xi(i) \in B$ for each $i < \rho(X)$.

Let $\beta : D \to B$ be such that $\beta([b, z]) = b$. Let Δ be the set of all formulas $\neg\psi$ such that for some atomic formula φ of τ and for some ω-sequences r_1 and r_2 of terms in T_0 such that $(\pi(r_1(n)) = \pi(r_2(n))$ $(n < \omega)$ we have either $\psi = \varphi(r_1)$ and $(\mathfrak{B}, H, \beta) \vDash \varphi(\bar{r}_1)$ or $\psi = \varphi(r_1) \wedge \neg\varphi(r_2)$ and $(\mathfrak{B}, H, \beta) \vDash \vDash \varphi(\bar{r}_1) \wedge \neg\varphi(\bar{r}_2)$. Using $(\mathfrak{B}, H) \in \mathrm{Mod}_{\tau''}(\Sigma)$ and the definition of Σ, we infer immediately that $\Theta \cup \Delta$ is consistent. Hence the sompactness theorem yields that $\Theta \cup \Delta$ is satisfiable Let $(\mathfrak{A}', \alpha)$ be a model of $\Theta \cup \Delta$, $\mathrm{dom}(\alpha) = D$, such that $(\mathfrak{A}', \alpha)$ is generated by $\tau' \cup D$. By the definition of Δ we have that $(\mathfrak{A}', \alpha) \vDash \varphi(r_1)$ implies $(\mathfrak{B}, H, \beta) \vDash \varphi(\bar{r}_1)$ and $(\mathfrak{A}', \alpha) \vDash \vDash \varphi(r_1) \wedge \neg\varphi(r_2)$ implies $(\mathfrak{B}, H, \beta) \vDash \varphi(\bar{r}_1) \wedge \neg\varphi(\bar{r}_2)$ for any φ, r_1, r_2, as before. Let $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \restriction \tau$, $C' = \{\pi(t) : t \in T_0\}$, and $h = \{(t^{(\mathfrak{A}', \alpha)}, (\bar{t}^{(H, \beta)}, \pi(t))) : t \in T_0\}$. Now we easily verify the hypothesis (i)—(iii) of 4. 2. Lemma. The lemma leads to the desired conclusion that $\mathfrak{B}$ is a direct factor of $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_{\tau'}(\Theta) \restriction \tau$, q. e. d.

§ 5. *E*-extensions

Let E be a particular binary relation symbol belonging to τ. We write $t_1 E t_2$ and $a_1 E^{\mathfrak{A}} a_2$ for $E t_1 t_2$ and $(a_1, a_2) \in E^{\mathfrak{A}}$, respectively. We call (see [1] $\mathfrak{B}$ an *E-extension* of $\mathfrak{A}$ if $\mathfrak{A}$ is a substructure of $\mathfrak{B}$ and for any $b \in B$, and $a \in A$, $b E^{\mathfrak{B}} a$ implies $b \in A$.

Define the relation R between structures of type τ such that $\mathfrak{A} R \mathfrak{B}$ iff $\mathfrak{B}$ is an E-extension of $\mathfrak{A}$.

Let X_n be an infinite set of variables for every $n < \omega$ and suppose that $X_n \cap X_{n'} = 0$ for $n \neq n'$ and $\bigcup_{n<\omega} X_n = \mathrm{Var}$. Define $i(x)$ for $x \in \mathrm{Var}$ such that $x \in X_{i(x)}$.

Let F be the class of all formulas ψ of form

$$\left(\bigwedge_{k<n_1} x_k E t_k\right) \to \bigvee_{n_1 \leqslant k < n_2} \varphi_k(r_k)$$

such that the following are satisfied:

(i) φ_k is an atomic or negated atomic formula of τ, r_k is an ω-sequence of terms $(n_1 \leqslant k < n_2)$,

(ii) every variable occuring in ψ is among $x_0, \ldots, x_{n_1-1}$,

(iii) if a variable x occurs in t_k, then $i(x) < i(x_k)$ $(k < n_1)$.

5. 1. Theorem $(A)(R, F)$ *and* $(B)(R, F)$.

We omit the proof of $(A)(R, F)$ except that we mention that if $\Sigma \subset F$, the elements of Σ are formulas of $\tau'' \supseteq \tau$, $(\mathfrak{A}, G) \in \in \mathrm{Mod}_{\tau''}(\Sigma)$ and $\mathfrak{A} R \mathfrak{B}$, then any structure $(\mathfrak{B}, H)$ such that $(\mathfrak{A}' G)$ is a substructure of $(\mathfrak{B}, H)$ will be a model of Σ.

Proof of $(B)(R, F)$.

Suppose $K = \mathrm{Mod}_{\tau'}(\Theta) \restriction \tau$ where Θ is a set of quantifier-free formulas of τ'. Let c be a new individual constant, e. g. $c = \langle 0, 0 \rangle \in S_1$, and let τ'' be the similarity type consisting of the elements of τ, the operation symbols in $\tau' - \tau$ and c. Define Σ as the set of all formulas of τ'' in F which are logical consequences of Θ.

Since obviously $K \subseteq \mathrm{Mod}_{\tau''} \restriction (\Sigma)\, \tau$ we infer by $(A)(R, F)$ that $C_R(K) \subseteq \mathrm{Mod}_{\tau''}(\Sigma) \restriction \tau$. Our task is to prove the opposite inclusion.

Suppose $(\mathfrak{B}, H) \in \mathrm{Mod}_{\tau''}(\Sigma)$. By induction on the natural number n we define the set A_n by the following equality:

$$A_n = \{a \in B : aE^{\mathfrak{B}} t^{(\mathfrak{B}, H)}[\alpha] \text{ for some term } t \text{ of } \tau'' \text{ and}$$

$$\text{for some } \alpha : \mathrm{Var}(t) \to \bigcup_{i<n} A_i \}\ ^{*)}$$

Of course, $\bigcup_{i<0} A_i$ is to be interpreted as the empty set; accordingly $A_0 = \{a \in B : aE^{\mathfrak{B}} t^{(\mathfrak{B}, H)}$ for some closed ferm t of $\tau''\}$. Observe that since τ'' involves at least one individual constant, the set of closed terms of τ'' is non-empty.

Let A be the subset of B generated by $\bigcup_{n<\omega} A_n$, i. e. the set of elements $t^{(\mathfrak{B}, H)}[\alpha]$ such that t is a term of τ'' and α: $\mathrm{Var}(t) \to \to \bigcup_{n<\omega} A_n$. By the above observation, $A \neq 0$. Clearly, there is a unique substructure $(\mathfrak{A}, G)$ of $(\mathfrak{B}, H)$ such that $|\mathfrak{A}| = A$. We claim first that $\mathfrak{B}$ is an E-extension of $\mathfrak{A}$.

Suppose indeed that $bE^{\mathfrak{B}} a$, $a \in A$. By definition of A, $a = t^{(\mathfrak{B}, H)}[\alpha]$ for some t and α as above. Let $n < \omega$ be such that $\mathrm{rn}(\alpha) \subseteq \bigcup_{i<n} A_i$. Then by the definition of A_n we have $b \in A_n \subseteq A$, q. e. d.

---

*) $\mathrm{Var}(t)$ denotes the set of variables occuring in t.

It remains to show that $\mathfrak{A}$ is the reduct of a model of Θ. Define for every $n < \omega$ and for every $a \in A_n$ the individual constant $a^{(n)}$ to be $[(a, n)] \in S_2$. Let τ_1 be the similarity type τ'' plus all individual constants $a^{(n)}$ $(n < \omega, a \in A_n)$, and let $\xi = \{(a^{(n)}, a) : n < \omega, a \in A_n\}$. Then $(\mathfrak{B}, H, \xi)$ is a structure in which the interpretation of each appropriate $a^{(n)}$ is a. Now, let Δ be the set of all atomic and negated atomic sentences *) of τ_1 which are true in $(\mathfrak{B}, H, \xi)$. Since Θ is a set of quantifier-free formulas, the satisfiability of the set $\Theta \cup \Delta$ clearly implies the existence of $\mathfrak{A}' \in \mathrm{Mod}_{\tau'}(\Theta)$ such that $\mathfrak{A}' \restriction \tau = \mathfrak{A}$. Therefore, all we have to verify is the satisfiability of $\Theta \cup \Delta$, which we are going to do by using the Compactness Theorem.

Accordingly, let Δ' be any finite subset of Δ, and let σ be a (finite) disjunction of atomic and negated atomic formulas which is logically equivalent to $\neg \bigwedge \Delta'$. Assume $\Theta \models \sigma$. Using the definition of A_n, we can construct a sequence $\langle a_i^{(n_i)} : i < l \rangle$ of distinct individual constants in τ_1 and a sequence $\langle t_i : i < l \rangle$ of closed terms of τ_1 such that the following three conditions hold:

(i) every individual constant of form $a^{(n)}$ occuring in σ or in some t_i is among the $a_i^{(n_i)}$, $i < l$,

(ii) if $a_j^{(n_j)}$ occurs in t_i, then $n_j < n_i$,

(iii) $a_i^{(n_i)} E t_i$ is true in $(\mathfrak{B}, H, \xi)$

for every $i < l$.

Let r be a one-to-one substitution such that

$$\mathrm{dom}(r) = \{a_i^{(n_i)} : i < l\}, \ \mathrm{rn}(r) \subseteq \mathrm{Var}$$

and

(iv) if $x_i = r(a_i^{(n_i)})$, then $i(x_i) = n_i$.

By $\Theta \models \sigma$ we have a fortiori $\Theta \models (\bigwedge_{i<l} a_i^{(n_i)} E t_i) \to \sigma$, hence

$$\Theta \models (\bigwedge_{i<l} x_i \, E \, (t_i(r))) \to \sigma(r).$$

Denoting the right-hand-side formula by ψ, by (i), (ii) and (iv) we obtain that $\psi \in F$, hence by $\Theta \models \psi$ we have $\psi \in \Sigma$.

Using that every formula in Δ' is true in $(\mathfrak{B}, H, \xi)$ we see that $\neg \sigma$ is true in $(\mathfrak{B}, H, \xi)$. This, combined with (iii) above, shows that ψ is *not* (universally) true in $(\mathfrak{B}, H)$, contradicting the assumption that $(\mathfrak{B}, H)$ is a model of Σ. Thus we have refuted

*) A sentence is a formula without free variables.

$\Theta \vdash \sigma$, i. e. we have shown the consistensy of $\Theta \cup \Delta'$ for each finite subset Δ' of Δ, which completes our proof.

We note that with a more comprehensive class F' we could still prove $(A)(R, F')$ and $(B)(R, F')$ without using the Compactness Theorem. F' is obtained if in the definition of F, φ_k (see above) is allowed to be any atomic or negated atomic formula, not only those of τ. In §§ 3 and 4, however, the Compactness Theorem seems to be an essential tool in the proof of $(\exists F)[(A)(R, F) \wedge (B)(R, F)]$.

§ 6. Further results

In this § we state further results analogous to the above ones which could be proved somewhat similarly; however, we do not give proofs. In more detail, we give a list of relations $R_i (i = 1, \ldots, 10)$ between structures of type τ and a corresponding list of classes F_i of formulas such that:

T h e o r e m. *For every* $i = 1, \ldots, 10$, $(A)(R_i, F_i)$ *and* $(B)(R_i, F_i)$ *where* R_i *and* F_i *are defined below.*

We note that in this paper we consider exactly those relations R for which preservation theorems in $L_{\omega_1\omega}$ were proved in [9]; all these relations have been considered somewhere else too (see the corresponding references).

We start by mentioning two known facts. If R is defined such that $\mathfrak{A} R \mathfrak{B}$ iff $\mathfrak{B}$ is a substructure of $\mathfrak{A}$, then the well-known theorem of Los [5] and Tarski [11] says that $(A)(R, \Delta)$ and $(B)(R, \Delta)$ hold for the *set* Δ of universal (i. e., quantifier-free) formulas of τ. If we turn to the inverse relation, i. e. to R such that $\mathfrak{A} R \mathfrak{B}$ iff $\mathfrak{A}$ is a substructure of $\mathfrak{B}$, then it is a consequence of a theorem in [2] that $(A)(R, F)$ and $(B)(R, F)$ hold where F is the class of all quantifier-free sentences in which every non-logical symbol outside τ is an individual constant.

Now we turn to our list of relations R_i and classes F_i to which the Theorem refers.

6.1. **Homomorphic preimages.** Define R_1 as the relation (between structures of τ) such that $\mathfrak{A} R_1 \mathfrak{B}$ iff $\mathfrak{A}$ is a homomorphic image of $\mathfrak{B}$.

Define F_1 to be the class of all finite disjunctions $\bigvee_{i<n} \neg \varphi_i (r_i)$ such that for every $i < n$ φ_i is an atomic formula of τ and r_i is an ω-sequence of simple terms.

6.2. **Direct multiples.** Define R_2 such that $\mathfrak{A} R_2 \mathfrak{B}$ iff $\mathfrak{A}$ is a direct factor of $\mathfrak{B}$, i. e. there is a $\mathfrak{C}$ such that $\mathfrak{A} \times \mathfrak{C} \simeq \mathfrak{B}$.

Let us call a simple term *special* if it is not an individual constant. Define $\pi(x)=x$ for any $x \in \mathrm{Var}$, $\pi(fx_0, \ldots, x_{n-1}) = x_{n-1}$ if $fx_0, \ldots, x_{n-1}$ is a special term which is not a variable.

Define F_2 as the class of all finite disjunctions

$$\bigvee_{k<n_1} \neg(\varphi_k(r_k) \wedge \neg \varphi_k(s_k)) \bigvee_{n_1 \leqq k < n_2} \neg \varphi_k(r_k)$$

such that for every $k < n_2$ φ_k is an atomic formula of τ, r_k is an ω-sequence of special terms and for every $k < n_1$ s_k is an ω-sequence of special terms such that $\pi(s_k(n))=\pi(r_k(n))$ for $n<\omega$.

6.3. **E-substructures.** Suppose that the binary relation symbol E belongs to τ. Define R_3 such that $\mathfrak{A} R_3 \mathfrak{B}$ iff $\mathfrak{A}$ is an E-extension of $\mathfrak{B}$ (see § 5).

Define F_3 as the class of all finite disjunctions whose disjuncts are either atomic or negated atomic formulas of τ, or of the form $t\, E\, x \wedge t \neq y$ where t is a simple term and x, y are variables.

6.4. **Endomorphic images.** $\mathfrak{B}$ is called *an endomorphic image* of $\mathfrak{A}$ (see [7]) if $\mathfrak{B}$ is an homomorphic image of $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ is a substructure of $\mathfrak{A}$. Let R_4 be defined by: $\mathfrak{A} R_4 \mathfrak{P}$ iff $\mathfrak{P}$ is an endomorphic image of $\mathfrak{A}$.

Let S be the class of operation symbols $\langle(a, \sigma), n\rangle$ of the first kind such that $\sigma \subseteq n = \{0, \ldots, n-1\}$. Let X and Y be two infinite disjoint sets of variables such that $X \cup Y = \mathrm{Var}$. Call a simple term t *special* if either $t \in Y$ or $t = fx_0, \ldots, x_{n-1}$ for some $f = \langle(a, \sigma), n\rangle \in S$ such that $x_i \in X$ if $i \in \sigma$ and $x_i \in Y$ if $i \in n - \sigma$. Define F_4 to be the class of all finite disjunctions whose disjuncts are of either of the following two types:

(i) atomic or negated atomic formulas of τ whose variables are all in X,

(ii) formulas $\varphi(r)$ where φ is an atomic formula of τ and r is an ω-sequence of special terms.

6.5. **Endomorphic preimages.** Define R_5 such that $\mathfrak{A} R_5 \mathfrak{B}$ iff $\mathfrak{A}$ is an endomorphic image of $\mathfrak{B}$.

Let $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ be the classes of operation symbols of the first kind of the forms $\langle(a, 0), n\rangle$, $\langle(a, 1), n\rangle$, respectively.

Define F_5 as the class of all finite disjunctions whose disjuncts are of either of the following two kinds:

(i) $\varphi(r)$, where φ is an atomic or negated atomic formula of τ and r is an ω-sequence of simple terms such that for every $i < \omega$, $r(i)$ is not a variable, and the operation symbol in $r(i)$ belongs to $S^{(1)}$.

(ii) $\neg\varphi(r)$, where φ is an atomic formula of τ and r is an ω-sequence of simple terms such that for every $i < \omega$

either $r(i)$ is a variable or the operation symbol in $r(i)$ belongs to $S^{(2)}$

6.6. **Retracts.** We call $\mathfrak{B}$ a *retract* of $\mathfrak{A}$ (see [4]) if $\mathfrak{B}$ is a substructure of $\mathfrak{A}$ and there is a homomorphism h on $\mathfrak{A}$ onto $\mathfrak{B}$ such that $h(b) = b$, for every $b \in B$.

Define R_6 by: $\mathfrak{A} R_6 \mathfrak{B}$ iff $\mathfrak{B}$ is a retract of $\mathfrak{A}$.

Define F_6 as the class of all finite disjunctions whose disjuncts are of either of the following two kinds:

(i) atomic or negated atomic formulas of τ

(ii) $\varphi(r)$, where φ is an atomic formula of τ and r is an ω-sequence of simple terms.

6.7. **Preretracts.** Define R_7 by: $\mathfrak{A} R_7 \mathfrak{P}$ iff $\mathfrak{A}$ is a retract of $\mathfrak{B}$.

Define F_7 as F_5 was defined except that at the end of (ii) replace $S^{(2)}$ by $S^{(1)} \cup S^{(2)}$.

6.8. **Strong homomorphic images.** $\mathfrak{B}$ is called *a strong homomorphic image* of $\mathfrak{A}$ (see [4]) if there is an homomorphism h on $\mathfrak{A}$ onto $\mathfrak{B}$ such that whenever $P \in \tau$ is a relation symbol, $n = \rho(P)$, and $(b_0, \ldots, b_{n-1}) \in P^{\mathfrak{B}}$, then there are elements $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ such that $h(a_i) = b_i$ for $i < n$ and $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in P^{\mathfrak{A}}$.

Define R_8 such that $\mathfrak{A} R_8 \mathfrak{B}$ iff $\mathfrak{B}$ is a strong homomorphic image of $\mathfrak{A}$.

Let S be the class of all operation symbols $\langle (a, \sigma), n \rangle$ of the first kind such that σ is a function with $\operatorname{dom}(\sigma) = n = \{0, \ldots, n-1\}$ and for every $i < n$ either $\sigma(i) = 0$ or $\sigma(i) = (P, j)$ for some relation symbol P in τ and for some natural numbers k, j with $j < \rho(P)$, moreover, whenever $i < n$ and $\sigma(i) = (P, k, j)$ then for every $j' < \rho(P)$ there is exactly one $i' < n$ such that $\sigma(i') = (P, k, j')$.

Let X and Y be two infinite disjoint sets of variables such that $X \cup Y = \mathrm{Var}$. Let ν be a one-to-one function on Y onto the set of all pairs of natural numbers. If $\nu(y) = (m, j)$, we denote m and j by $\nu_0(y)$ and $\nu_1(y)$, respectively. Let us call a simple term *special*, if it is either a variable or of the form $f x_0, \ldots, x_{n-1}$ where $f = \langle (a, \sigma), n \rangle \in S$, and the following two conditions are satisfied:

(i) for every $i < n$, if $\sigma(i) = (P, k, j)$, then $x_i \in Y$ and $\nu_1(x_i) = j$,

(ii) for every $i_1, i_2 < n$, if $\sigma(i_1) = (P, k, j_1)$ and $\sigma(i_2) = (P, k, j_2)$, then $\nu_0(x_{i_1}) = \nu_0(x_{i_2})$.

Define F_8 as the class of all disjunctions ψ such that the following four conditions are satisfied:

(i) each disjunct of ψ has either the form $\neg P x_0, \ldots, x_{n-1}$ such that $P \in \tau$, $\rho(P) = n$ and $x_0, \ldots, x_{n-1} \in \mathrm{Var}$ or the form $\varphi(r)$ where φ is an atomic formula of τ and r is an ω-sequence of special terms,

(ii) if $\neg P x_0, \ldots, x_{n-1}$ is a disjunct of ψ, then $x_i \in Y$ $\nu_1(x_i) = i$, and $\nu_0(x_i) = \nu_1(x_j)$ for every $i, j < n$,

(iii) if $\neg P x_0, \ldots, x_{n-1}$ and $\neg Q y_0, \ldots, y_{m-1}$ are two different disjuncts of ψ, $n \geqslant 1$ and $m \geqslant 1$, then $\nu_0(x_0) \neq \nu_0(y_0)$,

(iv) if φ is an atomic formula of τ, ν_l is a variable occurring in φ, $\varphi(r)$ is a disjunct of ψ, $r(l) = f x_0, \ldots, x_{n-1}$, $f = \langle (a, \sigma), n \rangle$, $i < n$, $\sigma(i) = (P, k, j)$ and x_i occurs in a disjunct of ψ of form $\neg Q y_0, \ldots, y_{m-1}$, then $Q = P$.

6.9. Strong homomorphic preimages. Define R_9 such that $\mathfrak{A}\ R_9 \mathfrak{B}$ iff $\mathfrak{A}$ is a strong homomorphic image of $\mathfrak{B}$.

Define F_9 as the class of all finite disjunctions whose disjuncts are of either of the following two forms:

(i) $P t_0, \ldots, t_{n-1}$, where $P \in \tau$ is a relation symbol, and there are a set a and a natural number k such that for every $i < n = \rho(P)$ we have $t_i = f_i\, x_0, \ldots, x_{k-1}$ for some variables $x_0, \ldots, x_{k-1}$ and for $f_i = \langle (P, a, i), k \rangle \in S_1$.

(ii) $\neg \varphi(r)$, where φ is an atomic formula of τ and r is an ω-sequence of simple terms.

6.10. Direct roots of direct squares. Define R_{10} by: $\mathfrak{A} R_{10} \mathfrak{B}$ iff $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$

Let $\langle x_n : n < \omega \rangle$, $\langle y_n : n < \omega \rangle$ be repetition-free sequences of variables such that $x_n \neq y_m$ for $n, m < \omega$. Let us say that a term t_1 *is related to* t_2 if either of the following two conditions hold:

(i) $t_1 = x_n$ and $t_2 = y_n$ for some n,

(ii) $t_1 = f_1 z_0, \ldots, z_{2n-1}$ and $t_2 = f_2 z_0, \ldots, z_{2n-1}$ such that there is a set a with the property $f_j = \langle (a, j), 2n \rangle$ for $j = 1$, $j = 2$, and for every $i < n$ there is $k < \omega$ such that $z_{2i} = x_k$ and $z_{2i+1} = y_k$.

Define F_{10} to be the class of all finite disjunctions whose disjuncts have either of the forms $\varphi(r_1) \wedge \varphi(r_2)$, $\neg(\varphi(r_1) \wedge \varphi(r_2))$ where r_1, r_2 are ω-sequences of terms such that for every $n < \omega$, $r_1(n)$ is related to $r_2(n)$ and φ is atomic of τ.

References

1. Feferman S., Kreisel G. Persistent and invariant formulas relative to theories of higher order. — Bull. Amer. Math. Soc., 1966, 72 480—485.

2. Frayne T. E., Morel A. C., Scott D. S. Reduced direct products. — Fund Math., 1962, 51, 195—228.
3. Keisler H. J. Theory of models with generalized atomic formulas. — J. Symbolic Logic, 1960, 25, 1—26.
4. Keisler H. J. Some applications of infinitely long formulas. — J. Symbolic Logic, 1965, 30, 339—349.
5. Los J. On the extending of models (I). — Fund. Math., 1955, 42, 38—54.
6. Lyndon R. C. Properties preserved under homomorphism. — Pacific J. Math., 1959, 9, 143—154.
7. Makkai M. On PC_{Δ}— classes in the theory of models. — Publications Math. Inst. Hung. Acad. Sci., 1964, 9/A, 159—195.
8. Makkai M. Preservation theorems for pseudo-elementary classes. Notices Amer. Math. Soc., 1969, 16, p. 425.
9. Makkai M. On the model theory of denumerably long formulas with finite strings of quantifiers. — J. Symbolic Logic, 1963, 34, 437—459.
10. Мальцев А. И. Некоторые вопросы теории классов моделей.— Тр. IV Всесоюз. матем. съезда, т. I. Л., 1963, 169—198.
11. Tarski A. Contribution to the theory of models. I. II. — Nederl. Akad. Wetensch, Proc. Ser. A., (Indag. Math., 16), 1954, 57, 572—588.
12. Vaught R. L. The elementary character of two notions from general algebra. — Essays on the Foundations of Mathematics. Jerusalem, 1961, 226—233.

Поступило 22 марта 1969 г.

POLAND
University of Warszawa

A. MOSTOWSKI

A CONTRIBUTION TO TERATOLOGY

Dedicated to the memory of A. I. Mal'cev

Introduction. Let $M = \langle U_M, N_M, Z_M, \in_M, +_M, \times_M \rangle$ be a model of the second order arithmetic*); here U_M is the universe of M, N_M and Z_M are disjoint subsets of U_M called resprectively the set of integers of M and the family of sets of M, $\in_M$ is the binary relation called the epsilon relation of M and $+_M$ and $\times_M$ are ternary relations called the arithmetical relations of M.

An example of a model is the «principal model» $M_0 = \langle N \cup P(N), N, P(N), \in, +, \times \rangle$ whose integers are the ordinary integers, whose sets are arbitrary subsets of N and in which $\in$, $+$ and $\times$ have the usual set theoretical or arithmetical meanings. It will be convenient to assume that elements of N are not sets.

We assume that the usual axioms of the second order arithmetic are valid in all models which we shall consider. It follows that for each M there is an initial segment of N_M which is isomorphic with N. We shall always identify this segment with N. For x in Z_M we put $x^* = \{n \in N : n \in_M x\}$ and denote by Z_M^* the family of all sets x^* where x ranges over Z_M. The relational structure $M^* = \langle N \cup Z_M^*, N, Z_M^*, \in, +, \times \rangle$ may be called the standard part of M. Our aim is to prove the following.

T h e o r e m. *There is a model M_3 elementarily equivalent with M_0 such that M_3^* is not a model of the second order arithmetic.*

*) Axioms for the second order arithmetic are given e. g. in [4]; in the present paper we exclude the axiom scheme of choice. Also we denote the predicate «x is a set» by $Z(x)$ and not by $S(x)$ as in [4].

R e m a r k. It is very easy to show that if M is a model of the second order arithmetic such that $U_M = N$ and in which the sets and relations N_M, Z_M, $\in_M$, $+_M$, $\times_M$ are arithmetically definable, then M^* is not a model of the second order arithmetic. This is so because for each model M with $N = N_M$ and each n, the set Z_M contains an x such that x^* does not belong to Σ_n^0. This example works also for extensions of the second order arithmetic in which the set of Gödel numbers of the axioms is arithmetically definable.

Notation and terminology. We shall identify integers with finite ordinals; thus N is a segment of $\omega.2$. Our model-theoretic notation is the standard one but we shall use the words «model», «structure» and «relational system» interchangably. The language of a relational system is the language of the applied first order logic with identity whose predicates correspond to the relations of the system and whose variables are arranged in a fixed sequence v_0, v_1, ... Whenever possible we shall use Roman letters as predicates of the language; the predicate which corresponds to the relation $\in$ will be denoted by E. Whenever F is a formula, $\mathrm{Fr}(F)$ denotes the set of all those integers i for which v_i is free in F. Dealing with models of the second order arithmetic we shall adjoin to their language symbols for all arithmetically definable functions and shall use for them the same letters as in the intuitive arithmetic but printed in Roman characters. Thus if m and n are terms of the language, then so is $\mathrm{J}(m, n)$ but if m and n are integers, then $J(m,n)$ is an integer. This notational convention cannot be used in the cases where the usual symbol for the function is not a letter but a special sign (e. g., $+$ or $-$). In these cases the same symbols will be used in the formal language and in the intuitive arithmetic. We denote the pairing function $m+(m+n)\times \times(m+n+1)/2$ by J and by K and L its inverses.

The ternary relation of satisfaction is denoted by $\models$. The arguments of the relation are: a model M, a formula F of the language of M and a sequence p with domain $\mathrm{Fr}(F)$ and with range contained in U_M. Notice that a sequence is a set of ordered pairs; thus if $p = \{\langle i, x\rangle\}$, then p is a sequence with domain $\mathrm{Dom}(p) = \{i\}$ and with the unique term x: $\mathrm{Rg}(p) = \{x\}$.

Let M be a model and f a binary relation with the field U_M; in particular f may be a function from U_M into U_M. We shall say that f is definable in M if there is a formula F of the language of M and a sequence p such that $\{0,1\} \subseteq \mathrm{Fr}(F)$, $\mathrm{Dom}(p) = \mathrm{Fr}(F) - \{0,1\}$, $\mathrm{Rg}(p) \subseteq U_M$ and $\langle x, y\rangle \in f \equiv M \models F[\{\langle 0, x\rangle, \langle 1, y\rangle\} \cup p]$ for arbitraty x, y in U_M. This notion of definability of relations

is closely related to although not identical with the notion of definability of subsets of N and of infinite sequences with terms in U_M which will be introduced in section 2 below.

1. S-structures. A relational structure $M = \langle U, R_i \rangle_{i \in I}$ is said to be an S-structure if for every formula F of the language of M and every i in $\mathrm{Fr}(F)$ there is a function f definable in M such that $\mathrm{Dom}(f) = U^{\mathrm{Fr}(F)-\{i\}}$, $\mathrm{Rg}(f) \subseteq U$ and for every p in $\mathrm{Dom}(f)$

$$M \models F[\{\langle i, x\rangle\} \cup p] \to M \models F[\{\langle i, f(p)\rangle\} \cup p].$$

1.1. *For every relational structure $M = \langle U, R_i \rangle_{i \in I}$ there is an S-structure of which M is a reduct.*

P r o o f. Let U be well ordered by $\leqslant$. Then the required structure is $\langle U, R_i, \leqslant \rangle_{i \in I}$.

1.2. *If M is an elementary substructure of M' and M' is an S-structure, then so is M.*

P r o o f is obtained directly from definitions.

We denote by M^+ a fixed S-structure of which the principal model M_0 is a reduct. We can assume M^+ to be of the form

$$M^+ = \langle N \cup P(N), N, P(N), \in, +, \times, \leqslant \rangle$$

where $\leqslant$ is a well ordering of $N \cup P(N)$. As is well known there exists an elementary substructure of M^+ with a denumerable universe $N \cup Z$ where $Z \subseteq P(N)$. We can map $N \cup Z$ onto ordinals $< \omega.2$ in such a way that N be mapped onto itself and Z onto $\omega.2 - N$. In this way we obtain the following lemma:

1.3. *There exists a relational structure*

$$M_1 = \langle \omega.2, N, \omega.2 - N, \varepsilon_1, +, \times, \leqslant_1 \rangle$$

which is isomorphic to an elementary sub-structure of M^+. The reduct of M_1 obtained from M_1 by omitting $\leqslant_1$ is elementarily equivalent with the principal model M_0.

2. Definable sets and sequences. All relational structures to be discussed in the sequel have the property that N is contained in their universes. The universe of M will always be denoted by U_M.

D e f i n i t i o n 1. A set $b \subseteq N$ is definable in M (in symbols $b \in B(M)$) if there exists a formula F of the language of M with $0 \in \mathrm{Fr}(F)$ and a sequence p in $U_M^{\mathrm{Fr}(F)-\{0\}}$ such that for each n in N

$$n \in b \equiv M \models F[\{\langle 0, n\rangle\} \cup p]. \tag{1}$$

D e f i n i t i o n 2. A sequence $s \in U_M^N$ is definable in M if there exists a formula G of the language of M with $0, 1 \in \mathrm{Fr}(F)$

and a sequence p in $U_M^{\mathrm{Fr}\,(G)-\{0,1\}}$ such that for each x in U_M and each n in N

(2) $$x = s(n) \equiv M \vDash G[\{\langle 0, n\rangle, \langle 1, x\rangle\} \cup p].$$

The following lemma needs no proof:

2.1. *The family $B(M)$ is a Boolean algebra.*

2.2. *If b is definable in M_1, then there is an ordinal β such that $\omega \leqslant \beta < \omega.2$ and for each n*

$$n\ \varepsilon_1\beta \equiv n \in b.$$

P r o o f. Let (1) hold with M replaced by M_1. Since M_1 is isomorphic (via an isomorphism i) with an elementary submodel M of M^+ we obtain (1) for this model M but with p replaced by the sequence $p^+ = i^{-1} \circ p$ of elements of M^+. Now we notice that the formula

$$(Ev_1)(Z(v_1)\ \&\ (v_0)\{N(v_0) \to [E(v_0, v_1) \equiv F]\})$$

is valid in M^+ since the family of sets of M^+ is equal to $P(N)$ and hence contains all sets. Hence the same formula is valid in M and there is an element b' of Z_M such that the formula (1) holds with b replaced by b' and p by p^+. It follows that $b = b'$ and hence $i(b) = \beta$ is defined. This element satisfies the equivalence given in the lemma.

R e m a r k. We shall give an example of a model M of the second order arithmetic without the axiom of choice for which a lemma similar to 2.2 is false.

2.3. *There is a denumerable model $M = \langle N \cup Z, N, Z, \in, +, \times\rangle$ of the second order arithmetic without the axiom of choice such that for every S-structure M' of which M is a reduct the following is true: if M'' is an elementary substructure (in the language of M') and M''' is an isomorphic image of M'' of the form $\langle\ \omega.2, N, \omega.2 - N, \varepsilon, +, \times \ldots\rangle$, then there is a set b definable in M''' such that for no β in $\omega.2 - N$ does the formula*

(3) $$(n)[n\varepsilon\beta \equiv n \in b]$$

hold.

P r o o f. From a well known construction of Levy [3] we obtain a model M for second order arithmetic withont the axiom of choice and a formula A with two free variables such that (4) *for every integer n there is an x in Z for which*

$$M \vDash A[\{\langle 0, n\rangle, \langle 1, x\rangle\}],$$

(5) *there is no y in Z such that for every integer n*

$$M \vDash A[\langle 0, n\rangle, \langle 1, \{p : J(n, p) \in y\}\rangle].$$

In view of (4) the sentence $(v_0)\{N(v_0) \to (Ev_1)[Z(v_1)\ \&\ A]\}$ is valid in M. Hence this sentence is valid in the elementary substructure M'' of M' since M is a reduct of M' and the sentence in question is written in the language of M. Since M''' and M'' are isomorphic we infer that the sentence is also valid in M'''. Now M' is an S-structure and hence so is M''; thus there exists a function f definable in M''' such that for each n in N

$$f(n) \in \omega.\ 2 - N,\ M''' \models A[\{\langle 0, n\rangle, \langle 1, f(n)\rangle\}].$$

From the definability of f it easily follows that the set

$$b = \{m : L(m) \in f(K(m))\}$$

is definable in M''', i. e. belongs to $B(M''')$. Let us assume (3).

Since M''' is a model of the second order arithmetic we easily infer that for each n in N there is an ordinal $\gamma(n)$ in $\omega.\ 2 - N$ such that

(6) $$p \varepsilon \gamma(n) \equiv J(n, p) \varepsilon \beta.$$

In follows from this formula that $p \varepsilon f(n) \equiv p \varepsilon \gamma(n)$ whence $f(n) = \gamma(n)$ because the axiom of extensionality is valid in M'''. The function γ has thus the property

$$M''' \models A[\{\langle 0, n\rangle, \langle 1, \gamma(n)\rangle\}]$$

from which we obtain

$$M'' \models A[\{\langle 0, n\rangle, \langle 1, i^{-1}\gamma(n)\rangle\}]$$

where i is an isomorphic mapping of M'' onto M'''. Since $i^{-1}\gamma(n)$ belongs to $Z_{M''}$ and M'' is an elementary substructure of M' we may replace M'' by M'; but since A is written in the language of M we may even replace it by M.

The set $i^{-1}\gamma(n)$ can be calculated from (6). If we put $y = i^{-1}(\beta)$ and apply i^{-1} to both sides of (6) we obtain

$$p \in i^{-1}\gamma(n) \equiv J(n, p) \in y$$

whence $i^{-1}\gamma(n) = \{p : J(n, p) \in y\}$. Thus we obtain finally

$$M \models A[\langle 0, n\rangle, \langle 1, \{p : J(n, p) \in y\}\rangle]$$

which contradicts (5) because $i^{-1}(\beta) \in Z$.

3. **Definable reduced powers.**(*) Let $M = \langle U, R_i\rangle_{i \in I}$ be a structure such that $N \subseteq U$ and let $\mathfrak{F}$ be an ultrafilter of $B(M)$. We say that two sequences s, s' of U^N are equivelent mod $\mathfrak{F}$ if $\{n : s(n) = s'(n)\} \in \mathfrak{F}$. We write then $s \sim s'$. It is easily

(*) These powers were first investigated by Scott [5].

seen that $\sim$ is an equivalence relation. We define s as the set of all sequences which are definable in M and equivalent to s and denote by $\widetilde{U}$ the family of all non-void sets $\widetilde{s}$.

Let R be a relation definable in M, i. e., such that there is a formula F with the free variables $v_0, \ldots, v_{k-1}, \ldots, v_m$ where k is the number of arguments of R and a sequence y in $U^{\{k, \ldots, m\}}$ such that

$$R = \{x \in U^{\{0, \ldots, k-1\}} : M \models F[x \cup y]\}.$$

If $s : j \to s_j$ is mapping of the set $\{0, \ldots, k-1\}$ into the family of sequences definable in M, then we denote by $\widetilde{s}_n$ the sequence $\{\langle j, s_j(n)\rangle : j < k\}$. We also put

$$\widetilde{s} = \{\langle j, \widetilde{s}_j\rangle : j < k\}.$$

3.1. *If R is a definable relation and s a mapping of the set $\{0, \ldots, k-1\}$ into the family of sequences definable in M, then the set $\{n : R(\widetilde{s}_n)\}$ is definable in M.*

3.2. *If R and s are as in 3. 1. and s' is another mapping of the set $0, \ldots, k-1$ into the family of sequences definable in M such that $s_j \sim s'_j$ for $j < k$, then $\{n : R(\widetilde{s}_n) \equiv R(\widetilde{s}'_n)\} \in \mathfrak{F}$.*

Lemmas 3.1 and 3.2 are evident and need no proofs.

For R definable in M we put $\widetilde{R} = \{\widetilde{s} \in \widetilde{U}^k : \{n : R(\widetilde{s}_n)\} \in \mathfrak{F}\}$. In view of the previous theorems this definition is correct, i. e., the truth value of $\widetilde{R}(\widetilde{s})$ depends on the equivalence classes $\widetilde{s}_j$ and not on the particular s_j selected from $\widetilde{s}_j$.

We call the relational structure $\widetilde{M} = \langle \widetilde{U}, \widetilde{R}_i\rangle_{i \in I}$ the definable reduced power of M; obviously $\widetilde{M}$ depends on $\mathfrak{F}$.

3.3 *If M is an S-structure, then M is isomorphic to an elementary substructure of $\widetilde{M}$; the imbedding function is $x \to c_x$ where $c_x(n) = n$ for each integer n.*

The proof of 3.3 follows immediately from the

L e m m a o f *Loš'* (*). *If F is a formula of the language of M and $s : j \to s_j$ a mapping of the set* Fr(F) *into the family of sequences definable in M, then*

$$\widetilde{M} \models F[\widetilde{s}] \equiv \{n : M \models F[s_n]\} \in \mathfrak{F}.$$

The proof is routine and will not be given here; notice that the assumption that M is an S-structure is needed in the proof of the lemma of *Loš'* in the case of an existential formula.

(*) See e. g. Scott [5] or Frayne, Morel, Scott [2].

As a corollary to 3.3 we obtain.

3.4. *$\widetilde{M}_1$ is elementarily equivalent to M^+.*

We shall denote the structure $\widetilde{M}_1$ by M_2 or more precisely by $M_2(\mathfrak{F})$. This last notation will be used in cases when the dependence of M_2 from $\mathfrak{F}$ needs to be stressed. The standard part of M_2 will be denoted by M_3 or $M_3(\mathfrak{F})$. We shall prove that for a suitable $\mathfrak{F}$ the reduct of $M_3(\mathfrak{F})$ to the language of M_0 is not a model for the second order arithmetic. This will prove our theorem because, in view of 3.4, $M_2(\mathfrak{F})$ is elementarily equivalent to M^+.

4. **Determination of the standard part of M_2.** For b in $B(M_1)$ we put $(b) = R_{\mathfrak{F}}(b) = \{j:\{i:J(i, j) \in b\} \in \mathfrak{F}\}$.

4.1. *For every x in Z_{M_2} there is a b in $B(M_1)$ such that $x^* = R(b)$.*

P r o o f. The set Z_{M_2} consists of elements $\widetilde{s}$ where s is a sequence definable in M_1 which satisfies the condition $s(n) \in \omega.\ 2^n - N$ for almost all n. The set $\widetilde{s}^*$ consists of all the integers m for which $\{n:m\ \varepsilon_1\ s(n)\} \in \mathfrak{F}$. To see this we merely notice that the initial segment of N_{M_1} which can be identified with N consists of classes $\widetilde{c}_m$ where m is an integer; since the condition $\langle \widetilde{c}_m, \widetilde{s} \rangle \in \widetilde{\varepsilon}_1$ is on the one hand equivalent to the statement $m \in \widetilde{s}^*$ and on the other to the statement: for almost all n, $\langle c_m(n),\ s(n) \rangle \in \varepsilon_1$, we obtain the equivalence $m \in \widetilde{s}^* \equiv \equiv \{n:m\ \varepsilon_1 s(n)\} \in \mathfrak{F}$.

Let G and p satisfy (2) with M replaced by M_1 and consider the formula $F:(Ev_1)\,G(Kv_0, v_1, \ldots) \,\&\, E(Lv_0, v_1)$. Hence

$$M_1 \vDash F[\{\langle 0, J(n, m)\rangle\} \cup p] \equiv (E\beta)_{\omega \cdot 2}[(M_1 \vDash G[\{\langle 0, n\rangle, \langle 1, \beta\rangle\} \cup p]) \,\&\, (m \varepsilon_1 \beta)] \equiv m \varepsilon_1 s(n).$$

It follows that the set $b = \{q:M_1 \vDash F[\{\langle 0, q\rangle\} \cup p]$ belongs to $B(M_1)$ and that $J(n, m) \in b \equiv m\,\varepsilon_1 s(n)$ for each m whence $m \in R(b) \equiv \{n:J(n, m) \in b\} \in \mathfrak{F} \equiv \{n:m \varepsilon_1 s\ (m)\} \in \mathfrak{F} \equiv m \in \widetilde{s}^*$, i. e., $\widetilde{s}^* = R\ (b)$.

4.2. *If $b \in B(M_1)$, then $R(b) \in Z^*_{M_2}$.*

P r o o f. Let F be such that (1) hold with M replaced by M_1. By 2.2. there is a β in $\omega.\ 2^n - N$ such that $J(n, m) \in b \equiv \equiv J(n, m)\,\varepsilon_1 \beta$. Since all the axioms of the second order arithmetic are valid in M_1 we infer thaf the sentence

$$(v_0)(v_1)(Z(v_1) \,\&\, [N(v_0) \rightarrow (Ev_2)\{Z(v_2) \,\&\, (v_3)[E(v_3, v_2) \equiv E(J(v_0, v_3), v_1)]\}$$

is valid in M_1. It follows that for every integer n there is exactly one $\gamma(n)$ in $\omega . 2 - N$ such that $m\varepsilon_1\ \gamma(n) \equiv J(n,m)\varepsilon_1\beta$ and that $x = \gamma(n)$ if and only if n, β and x satisfy in M_1 the formula in brackets $\{,\}$ in the above sentence. Hence the sequence γ is definable in M_1. Moreover $m\varepsilon_1\gamma(n) \equiv J(n, m) \in b$ i. e., $c_m(n)\,\varepsilon_1\gamma(n) \equiv \equiv J(n, m) \in b$.

This proves that $m \in \tilde{\gamma}^* \equiv m \in R(b)$ and hence $R(b) = \tilde{\gamma}^*$.

From 4.1 and 4.2 we obtain

4.3. *The family $Z_{(M_2,\mathfrak{F})}$ consists of sets $R_{\mathfrak{F}}(b)$ where b ranges over $B(M_1)$.*

5. **The set Stsf.** We shall associate with each set b in $B(M_1)$ an integer m of which we shall say that it codes b. Informally speaking $K(m)$ is the Gödel number of the formula F which appears in (1) (with M replaced by M_1) and $L(m)$ is a sequence number which codes the sequence p of parameters which appears in (1). The choice of the particular Gödel numbering is not very relevant although an entirely arbitrary numbering of formulae would not do. In order to be specific we select as our Gödel numbering the original numbering defined in [1].

We describe in more detail the component $L(m)$ of our code m. A sequence p in (1) is a set of ordered pairs (j, pj) where $j \neq 0$ and j is in $\mathrm{Fr}(F)$ and p_j is an ordinal $< \omega . 2$. We put $[x] = =2x + 2$ if $x \in N$ and $[x] = 2x' + 1$ if $x = \omega + x'$. The sequence p can now be coded by $\Pi_{j \in \mathrm{Fr}(F) - \{0\}} \pi_j^{|p_j|}$. Thus the set C of integers which are codes of definable sets is characterised by the equivalence

$$n \in C \equiv (K(n) \text{ is the Gödel number of a formula } F) \&$$
$$(j)_{K(n)}\{(L(n)_j \neq 0) \equiv (j \in \mathrm{Fr}(F)) \ \&\ (j \neq 0)]\}.$$

(In this formula $L(n)_j$ denotes the exponent of the j-th prime π_j in $L(n)$. The bound $K(n)$ in the quantifier (j) is justified by the remark that in the particular Gödel numbering which we use the Gödel number of any formula is larger than the Gödel numbers of its free variables).

From the formula given above it follows

5.1. *C is a primitive recursive set.*

We shall still introduce a notation for the fomula and the sequence coded by an integer n in C: The formula whose Gödel number is $K(n)$ is denoted by F_n and the sequence

$\{\langle i, (m-2)/2\rangle : (\pi_i^m | L(n)) \ \&\ (\pi_i^{m+1} \nmid L(n)) \&\ (m \text{ is} > 0 \text{ and even})\} \cup$

$\cup \{\langle i, \omega + (m-1)/2\rangle : (\pi_i^m | L(n)) \ \&\ \pi_i^{m+1} \nmid L(n)) \&\ (m \text{ is odd})\}$ is denoted by $p^{(n)}$.

Definition 3. Stsf *is the set of integers* $J(m, n)$ *such that* $n \in C$ *and* $M_1 \vDash F_n[\{\langle 0, m\rangle\} \cup p^{(n)}]$.

Remark. In view of the way we selected the Gödel numbering, the set Stsf does not contain 0.

Definition 4. We say that n is a code of a set b in $B(M_1)$ if $n \in C$ and $(m)\,[m \in b \equiv J(m, n) \in \mathrm{Stsf}]$; a smallest integer which is a code of b is called the distinguished code of b.

5.2. *Each set in* $B(M_1)$ *has a unique distinguished code.*

Proof. If b is defined as in (1), but with M replaced by M_1, then we determine n in such a way that $K(n)$ be the Gödel number of F and $p^{(n)} = p$. Hence n is a code of b and hence the smallest code of b exists and is unique.

5.3. *The set* C^* *of distinguished codes is arithmetical in* Stsf.

Proof results from the equivalence $n \in C^* \equiv (n \in C \,\&\, (n')$

$\{(n' < n) \to (Em)[J(m, n) \in \mathrm{Stsf} \equiv J(m, n') \notin \mathrm{Stsf}]\}$.

We can use distinguished codes to define families of definable sets and in particular filters of such sets.

Let B_0 be a basis of a filter in $B(M_1)$ and δ a function which enumerates the distinguished codes of the members of B_0 and which is arithmetical in Stsf.

5.4. *There exists an ultrafilter* $\mathfrak{F} \supseteq B_0$ *such that the set of its distinguished codes is arithmetical in* Stsf.

Proof. Let γ be an increasing function which is arithmetical in Stsf and enumerates C^*. We denote by $b_{n'}$ the set whose distinguished code is $\gamma(n)$ and by d_n the set whose distinguished code is $\delta(n)$. Let φ be defined by induction in such a way that $\varphi(n+1)$ is the least integer m such that $b_m \cap \bigcap_{j \leqslant n} b_{\varphi(j)} \cap \bigcap_{j \leqslant k} d_j \neq 0$ for every k. We easily prove that the set of all $b_{\varphi(m)}$ is an ultrafilter which contains B_0. We can now define a function χ such that $\chi(n)$ is a distinguished code of $b_{\varphi(n)}$: $\chi(n+1)$ is the least integer t in C^* such that

$$(k)(Em)[J(m, t) \in \mathrm{Stsf} \,\&\, (j)_{n+1}(J(m, \chi(j)) \in \mathrm{Stsf}) \,\&\, \&\,(j)_{k+1}(J(m, \delta(j)) \in \mathrm{Stsf})].$$

Since δ is arithmetical in Stsf, the same is true of χ and hence of $\mathrm{Rg}(\chi)$ which proves the assertion 5.4.

5.5. *If* $\mathfrak{F}$ *is as in* 5.4, *then each set* $R_{\mathfrak{F}}(b)$, *where* b *is in* $B(M_1)$, *is arithmetical in* Stsf.

P r o o f. From the definitions we obtain the equivalences

$$j \in R(b) \equiv \{i : J(i, j) \in b\} \in \mathfrak{F} \equiv (Ec)(c \in \mathfrak{F}) \,\&\, (i)(i \in c \equiv \equiv J(i, j) \in b).$$

Let χ be a function which enumerates the distinguished codes of the members of $\mathfrak{F}$ and let e be the distinguished code of b. Then the condition $j \in R(b)$ is equivalent to

$$(Em)(i)[J(i, \chi(m)) \in \mathrm{Stsf} \equiv J(J(i, j), e) \in \mathrm{Stsf}]$$

which proves the assertion 5.5.

In the next lemma we reduce our problem to a determination of a suitable B_0 and b_0:

5.6. *If there exists a basis B_0 of a filter in $B(M_1)$ and a b_0 in $B(M_1)$ such that*

(7) *there is a function arithmetical in* Stsf *which enumerates the distinguished codes of the members of B_0;*

(8) *for every ultrafilter $\mathfrak{F} \supseteq B_0$ the set* Stsf *is arithmetical in $R_{\mathfrak{F}}(b_0)$, then there is an ultrafilter $\mathfrak{F}$ such that all members of $Z_{M_2(\mathfrak{F})}$ are arithmetical in $R_{\mathfrak{F}}(b_0)$.*

P r o o f. Select $\mathfrak{F}$ according to 5.4. Then all members of $Z_{M_2(\mathfrak{F})}$ are arithmetical in Stsf (see 4.3 and 5.5). By (8) all these members are arithmetical in $R_{\mathfrak{F}}(b_0)$.

Since the family of sets of a model of the second order arithmetic cannot contain a member in which all the other members of this family would be arithmetical, we infer from 5.6 that if there are B_0 and b_0 satisfying (7) and (8), then there is an ultrafilter $\mathfrak{F}$ sucht that the reduct of $M_2(\mathfrak{F})$ obtained by ommitting the relation $\leqslant_2$ is elementarily equivalent to M_0 (cf. 3.4) but its standard part is not a model of the second order arithmetic.

6. Dyadic sets. In this section we shall prove the existence of B_0 and b_0 satisfying (7) and (8).

For each integer $n \geqslant 1$ we denote by $\bar{n}$ and n' the uniquely determined integers which satisfy the conditions: $n,\ n' \geqslant 0$, $n' < 2^{\bar{n}}$ and $n = 2^{\bar{n}} + n'$.

Let D_n be the set $\{m : (m \geqslant 1) \,\&\, (m \equiv n' \pmod{\bar{2}^n})\}$. The sets D_n form a full binary tree under inclusion (with the maximal element $D_1 = N - \{0\}$) in which the immediate successors of D_n are D_l and D_r where $l = 2^{\bar{n}+1} + n' = 2^{\bar{n}} + n$ and $r = 2^{\bar{n}+1} + 2^{\bar{n}} + n' = 2^{\bar{n}+1} + n$.

Let us define by induction a function $f: f(0) = 1$,

$$f(n+1) = \begin{cases} 2^n + f(n) \text{ if } n \notin \text{Stsf}, \\ 2^{n+1} + f(n) \text{ if } n \in \text{Stsf}. \end{cases}$$

By induction on n we show easily that

$$2^n \leqslant f(n) < 2^{n+1}. \tag{9}$$

Put $B_0 = \{D_{f(n)} : n \in N\}$. Since $D_{f(n+1)}$ is an immediate successor of $D_{f(n)}$ we obtain $D_{f(n+1)} \supset D_{f(n)} \neq 0$ whence.

6.1. *B_0 is a basis of a filter.*

We shall now prove

6.2. *B_0 satisfies condition* (7).

Proof. Since the relation $m \in D_n$ is primitive recursive, there exists a formula F with exactly two free variables v_0, v_1 such that

$$m \in D_n \equiv M_1 \models F[\{\langle 0, m\rangle, \langle 1, n\rangle\}].$$

Let A_n be an arithmetical formula with the free variable v_1 such that n is the unique element of the universe of M_1 which satisfies A_n in M_1. We can select A_n so that its Gödel number be a recursive function of n. The formula $G_n = (Ev_1)(A_n \,\&\, F)$ defines D_n in M_1 in the sense that $m \in D_n \equiv M_1 \models G_n[\{\langle 0, m\rangle\}]$ for each m and it follows that if g_n is the Gödel number of G_n, then $J(g_n, 1)$ is a code of D_n. The distinguished code of D_n is thus

$$\delta(n) = \min\{k : (k \in C^*) \,\&\, (m)[J(m, k) \in \text{Stsf} \equiv J(m, J(g_n, 1)) \in \text{Stsf}]\}.$$

Since g_n is recursive in n we infer that δ is arithmetical in Stsf.

6.3. *The set $b_0 = \{J(m, n) : (n > 0) \,\&\, (m \in D_n)\}$ belongs to $B(M_1)$ and satisfies condition* (8).

Proof. The definability of b_0 in M_1 is obvious. Let us now assume that $\mathfrak{F}$ is an ultrafilter containing B_0.

For $n > 0$ we obtain from the definition of b_0 the equivalences:

$$n \in R_{\mathfrak{F}}(b_0) \equiv \{m : J(m, n) \in b_0\} \in \mathfrak{F} \,\&\, \{m : m \in D_n\} \in \mathfrak{F} \equiv D_n \in \mathfrak{F}.$$

Thus if $n \in \text{Rg}(f)$, then $n \in R_{\mathfrak{F}}(b_0)$ because the elements n of $\text{Rg}(f)$ are $\neq 0$ and have the property $D_n \in B_0 \subseteq \mathfrak{F}$. Conversely, let us assume that $n \in R_{\mathfrak{F}}(b_0)$. Since the set $\{m : J(m, n) \in b_0\}$ is non void (as a member of $\mathfrak{F}$) it results that $n \neq 0$ in view of the definition of b_0. Thus we can use the equivalence given above and obtain $D_n \in \mathfrak{F}$. Now we repre-

sent n in the form $2^x + y$ where $y < 2^x$. Hence $2^x \leqslant n < 2^{x+1}$ whence $n \neq f(s)$ for each $s \neq x$. We shall show that $n = f(x)$. To prove this we notice that $D_n \cap D_{f(x)} \in \mathfrak{F}$ and hence there exists an integer u in $D_n \cap D_{f(x)}$. Hence $u \equiv y \pmod{2^x}$ and $u \equiv (f(x))' \pmod{2^{\overline{f(x)}}}$. Since $\overline{f(x)} = x$ we obtain $(f(x))' \equiv y \pmod{2^x}$ whence $y = (f(x))'$ because both y and $(f(x))'$ are non negative and smaller than 2^x. Thus we obtain $n = 2^x + y = 2^{\overline{f(x)}} + (f(x))' = f(x)$ which proves that $n \in \mathrm{Rg}(f)$.

We have thus established the equation $\mathrm{Rg}(f) = R_{\mathfrak{F}}(b_0)$. In order to establish 6.3 it is now sufficient to show that Stsf is arithmetical in Rg (f). To prove this we notice that in view of (9) $f(n)$ can be characterised as the unique element e of $\mathrm{Rg}(f)$ for which $2^n \leqslant e < 2^{n+1}$. Since $n \in \mathrm{Stsf} \equiv f(n+1) - f(n) = 2^{n+1}$ we obtain the equivalence

$$n \in \mathrm{Stsf} \equiv (Ee_1)(Ee_2)[(e_1 \in \mathrm{Rg}(f)) \,\&\, (e_2 \in \mathrm{Rg}(f)) \,\&\, (2^n \leqslant e_1 < 2^{n+1} \leqslant e_2 < 2^{n+2}) \,\&\, (e_2 - e_1 = 2^{n+1})]$$

which proves that Stsf is arithmetical in $\mathrm{Rg}(f)$.

7. **A generalisation.** The proof given above uses only the following properties of the principal model:

(A). M_0 is an ω-model of the second order arithmetic.

(B). There is an S-structure M_1 of which M_0 is a reduct and which is such that the axiom scheme of comprehension

$$(Ev_0)(Z(v_0) \,\&\, (v_1)\{N(v_1) \to [E(v_1, v_0) \equiv F]\})$$

is valid in M_1 for every formula F of the language of M_1 provided that $0 \notin \mathrm{Fr}(F)$.

Thus we can repeat the proof given above and obtain the following theorem:

7.1. *If M_0 satisfies the assumptions* (A) *and* (B), *then there is a model M elementarily equivalent with M_0 and such that M^* is not a model of the second order arithmetic.*

In particular the assumptions of 7.1 are satisfied if M_0 is itself an S-structure satisfying assumption (A), e. g., if the axiom of constructibility is valid in M_0.

P r o b l e m: Is there an ω-model for the second order arithmetic, M_0, such that for each M which is elementarily equivalent with M_0 the model M^* is a model for the second order arithmetic?

(Added in proof: In a paper forthcoming in Fundamenta Mathematicae the author has shown that if M is an ω-model in which the axiom scheme of dependent choices is valid, then the above problem admits a negative solution),

Bibliography

1. Gödel K. Ueber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I.— Monatshefte für Mathematik und Physik, 1931, 38, 173—198.
2. Frayne T., Morel A. C., Scott D. Reduced direct products. —Fundamenta Mathematicae, 1962, 51, 195—228.
3. Levy A. Unpublished notes. — Berkeley, 1965.
4. Mostowski A., Suzuki Y. On ω-models which are not β-models. —Fundamenta Mathematicae, 1969, 65, 83—93.
5. Scott D. On constructing models of arithmeic. Infinitistic methods. — Proceedings of the symposium on Foundations of Mathematics. Warsaw, 1961, 235—255.

Поступило 8 апреля 1969 г.

AUSTRALIA
The Australian National University

B. H. NEUMANN

GROUP PROPERTIES OF COUNTABLE CHARACTER

In memoriam Anatolii Ivanovich Mal'cev

1. Preliminaries and notation. We use capital German letters for properties or, indifferently, classes of groups: thus «$G \in \mathfrak{X}$» can be read «the group G has the property $\mathfrak{X}$». The properties we are interested in are group-theoretical, in the sense that if $G \in \mathfrak{X}$ and $G' \cong G$, then $G' \in \mathfrak{X}$.

We denote by $\mathrm{C}\mathfrak{X}$ the class of groups all of whose countable subgroups belong to $\mathfrak{X}$; «countable» always includes «finite». Properties $\mathfrak{X}$ for which

$$\mathrm{C}\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X} \tag{1}$$

were called *abzählbar erkennbare Eigenschaften* by Baer [1]. If $\mathfrak{X}$ is inherited by subgroups, or «subgroup closed», that is to say if with $G \in \mathfrak{X}$ also all subgroups of G are in $\mathfrak{X}$, then clearly

$$\mathfrak{X} \subseteq \mathrm{C}\mathfrak{X}, \tag{2}$$

so that in this case (1) implies

$$\mathrm{C}\mathfrak{X} = \mathfrak{X}. \tag{3}$$

A group-theoretical property $\mathfrak{X}$ that satisfies (3) will be said to have *countable character*. This definition is analogous to that of *local character*: a property or class $\mathfrak{X}$ of groups is said to have local character if a group has $\mathfrak{X}$ if, and only if, it has $\mathfrak{X}$ locally, that is to say if, and only if, all its finitely generated subgroups have $\mathfrak{X}$. Thus, if $\mathrm{L}\mathfrak{X}$ stands for the class of locally-$\mathfrak{X}$ groups, then $\mathfrak{X}$ is of local character if $\mathrm{L}\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$. Clearly $\mathrm{LL}\mathfrak{X} = \mathrm{L}\mathfrak{X}$ and $\mathrm{CC}\mathfrak{X} = \mathrm{C}\mathfrak{X}$, so that every class of the form $\mathrm{L}\mathfrak{X}$ has local character and every class of the form $\mathrm{C}\mathfrak{X}$ has

countable character. The properties of having finite general rank or finite special rank defined by Mal'cev [4] have local character; other examples can be found in [5].

Obviously

$$\mathrm{C}\mathfrak{X} \subseteq \mathrm{L}\mathfrak{X}\,; \tag{4}$$

and both $\mathrm{L}\mathfrak{X}$ and $\mathrm{C}\mathfrak{X}$ are always subgroup closed. It follows at once that *a group property has countable character if it has local character.* The converse of this is, however, not true: we shall see presently that finiteness is a property of countable character, while there are well known examples of groups that are locally finite but not finite.

Baer [1] is mainly concerned with a general theory of properties $\mathfrak{X}$ that satisfy (1), and with methods of making new such properties from given ones; though specific examples of such properties are by no means lacking in his paper. Our present aim is less ambitious: we shall exhibit some properties of countable character, among them residual finiteness. In fact this paper was written in order to answer positively a question posed by Dr A. Shafaat in a letter to Dr L. G. Kovács: if every countable subgroup of the group G is residually finite, must G itself be residually finite?

If again $\mathfrak{X}$ is a class of groups, then $\mathrm{R}\mathfrak{X}$ denotes the class of *residually-*$\mathfrak{X}$ groups, that is to say, the class of those groups that are isomorphic to subcartesian products of groups in $\mathfrak{X}$. Equivalently, $G \in \mathrm{R}\mathfrak{X}$ if, and only if, there exists, to every element $g \in G$ other than the unit element 1, an epimorphism

$$\eta\colon G \twoheadrightarrow X \in \mathfrak{X} \qquad \text{with} \quad g\eta \neq 1.$$

We claim, then, that Shafaat's question is answered by

$$\mathrm{CR}\mathfrak{F} = \mathrm{R}\mathfrak{F}\,, \tag{5}$$

where $\mathfrak{F}$ stands for the class of all finite groups. The proof of (5), which will occupy § 3, requires some techniques related to well-order or the Axiom of Choice. Instead of postulating the Axiom of Choice for our whole universe, we shall tacitly assume that all our groups are *small*, where we call the group G small if the carrier (or set of elements) of G and all finitely iterated power sets of the carrier can be well-ordered. [It would, in fact, suffice to assume well-order for only two or three times iterated power sets of the carrier.]

It is not difficult to extend the definitions, methods, and results of this paper to universal algebra; but we refrain from carrying out this extension.

I am indebted to Dr L. G. Kovács for drawing my attention to the problem and also to some of the literature.

2. **A simple lemma and some consequences.** An ordered set is *directed* if every pair in it, and consequently also every finite subset, has an upper bound. We shall say that an ordered set is σ-*directed* (in analogy to σ-completeness of lattices, and so on) if every countable subset has an upper bound; or, equivalently, if it is directed and every countable chain has an upper bound. We then note that the set of countable subgroups of a group, ordered by inclusion, is a σ-directed set; and so is the set of countable subgroups that contain a preassigned element. The following simple lemma will be found useful.

L e m m a 1. *Let the set S be σ-directed by an order relation $\leqslant$, and let $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ denote the (naturally ordered) set of non-negative integers or, indifferently, the set of finite ordinal numbers. If $f : S \to \omega$ is a monotone function, that is to say, if $s, t \in S$ and $s \leqslant t$ imply also $f(s) \leqslant f(t)$, then f is bounded.*

For if not, there would be a subset $T = \{s_0, s_1, s_2, \ldots\}$ of S such that $i \leqslant f(s_i)$ for all $i \in \omega$. Let t be an upper bound in S of the manifestly countable subset T, and put $f(t) = j$. Then

$$j < j + 1 \leqslant f(s_{j+1}) \leqslant f(t) = j,$$

which is absurd.

This lemma immediately leads to some obvious applications.

T h e o r e m 1. *The class $\mathfrak{F}$ of finite groups has countable character.*

As $\mathfrak{F}$ is subgroup closed, it suffices to show that $C\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$. Let $G \in C\mathfrak{F}$, and if H is a countable subgroup of G, put $f(H) = |H|$, the order of H. Then f is monotone. By the lemma then f is bounded, say by n, and it follows that G can not contain more than n distinct elements.

T h e o r e m 2. *Let*

$$\mathfrak{V}_0 \subseteq \mathfrak{V}_1 \subseteq \mathfrak{V}_2 \subseteq \ldots$$

be an ascending sequence of varieties of groups, and denote their union by $\mathfrak{U}$. Then $\mathfrak{U}$ has countable character.

Again it suffices to prove $C\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{U}$, as $\mathfrak{U}$ is subgroup closed. If then $G \in C\mathfrak{U}$ and if H is a countable subgroup of G, let $f(H)$ be the least suffix i such that $H \in \mathfrak{V}_i$. Then f is monotone. By the lemma there is an upper bound j, say, of the values of f. Thus every countable subgroup of G is in $\mathfrak{V}_j$. If $\mathfrak{V}$ is the variety

generated by G, then $\mathfrak{V}$ is also generated by some countable subgroup of G (Hanna Neumann [6], 15. 63). Thus $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{V}_j$, and it follows that $G \in \mathfrak{U}$, as claimed.

Note that $\mathfrak{U}$ need not be itself a variety: the class of all nilpotent groups, the class of all polynilpotent groups, and the class of all soluble groups are obvious examples: see also Baer [1], 5.3, where a generalization of solubility occurs as an example.

T h e o r e m 3. *With the same notation as in Theorem* 2, *the class* $\mathrm{R}\mathfrak{U}$ *has countable character.*

As $\mathfrak{U}$ is subgroup closed, so is $R\mathfrak{U}$, and it suffices to show that $\mathrm{CR}\mathfrak{U} \subseteq \mathrm{R}\,\mathfrak{U}$. Let then $G \in \mathrm{CR}\mathfrak{U}$, and let $g \in G$ be an arbitrary element other than 1. If H is a countable subgroup of G co ntaining g, then $H \in \mathrm{R}\mathfrak{U}$, and there is an epimorphism

$$\eta : H \twoheadrightarrow U \in \mathfrak{U} \text{ with } g\eta \neq 1. \tag{6}$$

Denote by $f(H)$ the least suffix i such that η and U in (6) can be chosen with $U \in \mathfrak{V}_i$. Then f is monotone. By the lemma there is an upper bound j, say, of the values of f. As usual, we denote by $V_j(H)$ the verbal subgroup of H corresponding to the variety $\mathfrak{V}_j$. Then we have, for every countable subgroup H of G, that

$$g \notin V_j(H).$$

It follows from this that also

$$g \notin V_j(G); \tag{7}$$

for every element of $V_j(G)$ is contained in some $V_j(H)$, with H a finitely generated, and thus countable, subgroup of G. Equation (7) in turn implies that there is an epimorphism, namely the canonic epimorphism,

$$\eta^* : G \twoheadrightarrow G/V_j(G) \in \mathfrak{V}_j$$

with

$$g\eta^* \neq 1.$$

As this is true for every $g \neq 1$ (with j depending on g), we see that $G \in \mathrm{R}\mathfrak{U}$, and the theorem follows.

Thus, for example, residual nilpotency, residual polynilpotency, and residual solubility are properties of countable character.

3. **The main theorem.** We turn to the proof of equation (5), which we restate as our main theorem:

Theorem 4. *Residual finiteness is a property of countable character.*

The class $R\mathfrak{F}$ of residually finite groups is subgroup closed, so that we need only prove $CR\mathfrak{F} \subseteq R\mathfrak{F}$. Let then G be a goupr all of whose countable subgroups are residually finite, and let $g \in G$ be different from 1 but otherwise arbitrary. If H is a countable subgroup of G containing g, there is an epimorphism

$$\eta : H \twoheadrightarrow F \in \mathfrak{F} \text{ with } g\eta \neq 1. \tag{8}$$

Denote by $f(H)$ the least integer that occurs as order of F in (8) as η is allowed to vary. Then f is easily seen to be a monotone function. By the lemma there is an upper bound n, say, of the values of f.

Let S_n denote a finite group in which all finite groups of order less than or equal to n can be embedded: for example, the symmetric group of degree n. Let $\mathfrak{K}$ denote the set of finitely generated subgroups $K \leqslant G$ with $g \in K$, and for each $K \in \mathfrak{K}$, let Γ_K denote the set of all homomorphisms

$$\gamma : K \to S_n \text{ with } g\gamma \neq 1.$$

From what we have seen it is clear that Γ_K is never empty. Also $\Gamma_K \subseteq \mathrm{Hom}(K, S_n)$, and this is finite, as a finitely generated group has only finitely many homomorphisms into a finite group.

If $L, K \in \mathfrak{K}$ and $L \leqslant K$, and if $\gamma \in \Gamma_K$, then the restriction δ, say, of γ to L is an element of Γ_L. We can, therefore, define a mapping φ_{KL} of Γ_K into Γ_L by putting $\gamma\varphi_{KL} = \delta$. Clearly φ_{KK} is the identity mapping of Γ_K, and if $M \leqslant L \leqslant K$ with $M, L, K \in \mathfrak{K}$, then

$$\varphi_{KM} = \varphi_{KL}\varphi_{LM}.$$

Thus the set $\mathfrak{K}$, directed by inclusion, the sets Γ_K, and the mappings φ_{KL} define an inverse mapping system, and we can form the inverse limit Γ_*, together with its (natural) projections φ_{*K} of Γ_* into Γ_K; these have the property that if $L \leqslant K$ then

$$\varphi_{*L} = \varphi_{*K}\varphi_{KL}.$$

As we have seen, the sets Γ_K are finite. We give them the discrete topology, thus turning them into compact Hausdorff spaces. The mappings φ_{KL} then become (trivially) continuous. We have also seen that all the spaces Γ_K are non-empty. As we have assumed that G is a small group, all relevant sets can be well-ordered, and we can apply Steenrod's Theorem ([7], Theorem 2.1) to conclude that Γ_* is not empty.

Let γ_* be a point of Γ_*, and put, for $K \in \mathfrak{K}$,

$$\gamma_K = \gamma_* \varphi_{*K}.$$

If also $L \in \mathfrak{K}$ and $L \leqslant K$, then

$$\gamma_L = \gamma_K \varphi_{KL},$$

which means that γ_L is the restriction of γ_K to L. We define then a homomorphism

$$\gamma : G \to S_n$$

simply by putting all the γ_K together: if $k \in K \in \mathfrak{K}$, we put

$$k\gamma = k\gamma_K.$$

A routine verification, which we omit, then shows, firstly, that this does not depend on which particular $K \in \mathfrak{K}$, we choose to define $k\gamma$ — we could, for example, always choose the subgroup of G generated by g and k —, and secondly, that γ is indeed a homomorphism of G into S_n. Finally we note that $g\gamma \neq 1$. As g was an arbitrary element, other than 1, of G, we see that G is residually finite, and the theorem follows.

4. **Some further results.** Let $\mathfrak{G}$ denote the class of all finitely generated groups. What is $C\mathfrak{G}$? It can not be $\mathfrak{G}$ itself, as $C\mathfrak{G}$ is subgroup closed and $\mathfrak{G}$ is not. It would be tempting to define, for a countable subgroup H of a group $G \in C\mathfrak{G}$, the function value $f(H)$ as the rank, that is the minimum number of generators of H; but f is then not a monotone function, and our lemma remains inapplicable. However, the answer to our question is almost obvious:

T h e o r e m 5. *The class* $C\mathfrak{G}$ *of groups whose countable subgroups are finitely generated is the class of noetherian groups, that is the class of groups with maximum condition for subgroups.*

Noetherian groups are precisely those all of whose subgroups are finitely generated: thus they all belong to $C\mathfrak{G}$. Conversely, if a group G is not noetherian, it contains a properly ascending sequence of type ω,

$$H_0 < H_1 < H_2 < \ldots,$$

of subgroups. In each H_{i+1} we choose an element h_i that does not lie in H_i. If K_i is the group generated by $\{h_0, h_1, \ldots, h_i\}$, then

$$K_0 < K_1 < K_2 < \ldots$$

also form a properly ascending sequence of subgroups of G, and the group K they generate is countable and can not be finitely generated. Thus $G \notin \mathfrak{C}\mathfrak{G}$, and the theorem follows.

Finally we consider simplicity, or rather non-simplicity; and we show that *if none of the countable subgroups of a group G is simple, then G itself is not simple.* This does not mean that non-simplicity is, in our terminology, a property of countable character, as it is not inherited by subgroups: it only means that it is in Baer's sense [1] *abzählbar erkennbar.* More precisely we prove the following proposition.

T h e o r e m 6. *Every countable subgroup of a simple group G is contained in a countable simple subgroup of G.*

Our argument will in fact show a little more: every subgroup H of a simple group G is contained in a simple subgroup K of G such that $|K| = |H|$ if H is infinite, and otherwise K is at most countably infinite.

Let then G be a simple group and H a subgroup of G. Every element of G is in the normal closure of every other element $\neq 1$. Thus to every ordered pair $\langle h, k \rangle$ of elements of H with $h \neq 1$ we can find elements $g_1, g_2, \ldots, g_r$ in G, with r depending on the pair $\langle h, k \rangle$, such that

$$k = \Pi h^{\pm g_i} . \tag{9}$$

Denote by H^* the subgroup of G obtained from H by adjoining elements g_i for each pair $\langle h, k \rangle$ so as to make (9) valid. As this needs only finitely many such elements for every pair of elements of H, the order of H^* will equal that of H if H is infinite, or be countable if H is finite. Now H^* has the property that every element of H lies in the normal closure in H^* of every other element $\neq 1$ of H. Next define the sequence of subgroups

$$H = H_0 \leqslant H_1 \leqslant H_2 \leqslant \ldots \tag{10}$$

of G by $H_{i+1} = H_i^*$ as just described, and put K equal to the union of the sequence (10). If $\langle h, k \rangle$ is a pair of elements of K with $h \neq 1$, then there is an H_i in (10) that contains both h and k, and H_{i+1} then contains elements $g_1, \ldots, g_r$ that make (9) valid: thus k is in the normal closure of h in K, and K is simple. Also the order of K is at most $\aleph_0$ times that of H; that is to say,

$$|K| \leqslant \max(|H|, \aleph_0).$$

This completes the proof of the theorem.

By contrast with this result, a simple group can well have all its finitely generated subgroups non-simple: there are simple groups that can be fully ordered (Chehata [2]), but a non-trivial finitely generated fully ordered group is non-simple, becauise its derived group has infinite index (Levi [3]).

References

1. Baer, Reinhold. Abzählbar erkennbare gruppentheoretische. Eigenschaften. — Math. Z., 1962, **79**, 344—363.
2. Chehata C. G. An algebraically simple ordered group. — Proc. London Math. Soc. (3), 1952, **2**, 183—197.
3. Levi F. W. Contributions to the theory of ordered groups. — Proc. Indian Acad. Sci., 1943, **17**, 199—201.
4. Мальцев А. И. О группах конечного ранга. — Матем. сб. 1948, **22**(64), 351—352.
5. Neumann B. H. Groups with finite classes of conjugate elements. Proc. London Math. Soc. (3), 1951, **1**, 178—187.
6. Neumann, Hanna. Varieties of groups. — Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. 37. Springer—Verlag, Berlin,— Heidelberg—New-York, 1967.
7. Steenrod, Norman E. Universal homology groups. — Amer. J. Math., 1936, 58, 661—701.

Поступило 19 февраля 1969 г.

СССР
Латвийский университет

Б. И. ПЛОТКИН

РАДИКАЛЫ В ГРУППАХ, ОПЕРАЦИИ НА КЛАССАХ ГРУПП И РАДИКАЛЬНЫЕ КЛАССЫ

Светлой памяти
Анатолия Ивановича Мальцева

Введение

Идея радикала является одной из ведущих организующих идей в теории групп. Можно отметить два основных аспекта в теории радикала. С одной стороны, радикалы в группах — важные характеристические подгруппы, играющие значительную роль в теории строения индивидуальных групп. В частности, доказательства многих теоретико-групповых теорем существенно упрощаются за счет применения в них радикалов. В этом прикладная роль радикалов. Вместе с тем известно, что изучение индивидуальных групп тесно переплетается с рассмотрением классов групп, а в последнее время намечаются контуры нового большого раздела теории групп — общей теории классов групп. Определяются различные операции над классами, позволяющие на этом языке говорить о строении классов групп, рассматриваются различные системы классов, хорошо организованные некоторыми операциями над классами*. Важное место в теории классов групп занимают радикальные классы, — и в этом вторая сторона теории радикалов.

В настоящей работе будут сделаны некоторые новые акценты в понятиях радикала и радикального класса. Радикалы везде рассматриваем как теоретико-групповую функцию с некоторыми специальными свойствами. Радикал в индивидуальной группе — это значение в ней такой функции. Между радикалами-функциями и радикальными классами групп

---

* Как известно, крупный вклад в общую теорию классов алгебраических систем внес А. И. Мальцев.

имеется четко определенное взаимнооднозначное соответствие. В теории радикальных классов систематически применяется язык операторов на классах групп, рассматриваются операторы радикального замыкания классов. Изучаются некоторые алгебраические действия в системе всех радикальных классов, и здесь рассмотрения близки, например, к аналогичным рассмотрениям теории многообразий групп. Известно, что система всех многообразий групп есть множество, и это множество — свободная полугруппа относительно умножения классов. Система всех радикальных классов не является множеством, однако она также замкнута по умножению, и умножение здесь ассоциативно. Можно также рассматривать и бесконечные произведения радикальных классов. Одновременно с радикалами мы рассматриваем и корадикалы, и в дальнейшем будут отмечены некоторые новые проявления двойственности между радикалами и корадикалами. Имеются и некоторые другие особенности.

Операции на классах приводят к существенному обогащению запаса радикалов и корадикалов, полезных в приложениях. В конкретных ситуациях можно выбирать тот или иной радикал или корадикал по вкусу и с учетом заданных условий.

Первыми работами по общей теории радикалов были, как известно, работы А. Г. Куроша [1] и С. Амицура [2], опубликованные в начале 50-х годов. При этом в работе А. Г. Куроша центр тяжести был смещен в сторону радикального класса. Хотя обе эти работы находились под большим влиянием теоретико-кольцевой ситуации, значение их было значительно шире; радикалы начали активно проникать в другие классы алгебраических систем. В особенности много внимания уделялось радикалам в группах. В последующих публикациях А. Г. Куроша, а также других авторов выяснилось, что роль радикалов в группах во многом отлична от их роли, скажем, в кольцах. Кроме того, в теории групп идея радикала начала конкурировать с различными другими организующими идеями. Все это сказывается на аксиоматике радикалов в группах, и к настоящему времени устойчивой аксиоматики здесь, по-видимому, нет. Нам кажется, что в этой работе выбран некоторый оптимальный вариант. В частности, мы увидим, что целесообразно разделить понятие радикала на предрадикал, радикал и строгий радикал. Отметим, далее, что имеет место и обратный процесс: развитие теории радикалов в группах влияет на общую теорию радикалов в алгебраических системах. Соответствующие перенесения возможны и для некоторых построений данной работы.

Иногда это делается тривиальным образом, а в ряде случаев картина существенно меняется.

Предлагаемая работа в основном посвящена выяснению ситуации; и ее также можно рассматривать как обзор некоторых разделов теории радикалов в группах — обзор с учетом новых позиций. Здесь не содержится сведений по всей теории радикалов в группах, однако достаточно полную картину можно получить, рассматривая данную работу вместе с обзором по радикалам из добавлений в книге А. Г. Куроша [17], а также с соответствующими разделами (§ 5.2, 5.3 и 5.4) из книги автора [4]. Доказательства известных результатов или легко получаемых из известных здесь, как правило, не приводятся. Без доказательств сообщаются также некоторые результаты из статей автора [5] и [6], подготовленных к печати одновременно с настоящей работой. В этой статье формулируются некоторые проблемы.

§ 1. Операции на классах групп, операторы замыкания

1. Операторы. В теории групп к настоящему времени накоплено много важных операций на классах групп, и в ряде случаев между этими операциями имеются интересные соотношения, приводящие к некоторому исчислению таких операций. Мы имеем здесь в первую очередь в виду операторы, сопоставляющие одним классам групп некоторые другие классы. Изучение соотношений между такими операторами в чистом виде — это, по существу, значительная часть теории групп, и здесь также можно видеть один из организующих принципов. В явном виде это обстоятельство было недавно подчеркнуто Ф. Холлом [7] и широко сейчас пропагандируется. Язык операций на классах групп оказывается также удобным и в теории радикала.

Изложим некоторые исходные понятия. Основным источником является упомянутая работа Ф. Холла, имеются также некоторые понятия, не отмечавшиеся раньше явно.

Через $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1, \ldots$ и некоторые другие подобные буквы будем обозначать переменные, пробегающие классы групп. Для различных конкретных классов, занимающих сейчас особое положение в теории групп, принята некоторая стандартная система специальных обозначений. Например, $\mathfrak{A}$ — класс всех абелевых групп. Все рассматриваемые классы являются абстрактными классами, т. е. вместе с каждой своей группой такой класс содержит и все изоморфные ей группы. Кроме

того, будем предполагать, что все классы содержат единичную группу.

Естественно говорить о пересечении и объединении классов. Наряду с этими структурными операциями можно рассматривать и различные специальные операции, обусловленные теоретико-групповой спецификой. Это могут быть операции — функции многих переменных и унарные операции-операторы. Для некоторых из этих операций, играющих особо выдающуюся роль, можно употреблять подходящие специальные обозначения. Переменные операторы мы будем обозначать через $U, V, U_1, \ldots$, а результат их применения к классу $\mathfrak{X}$ — через $U\mathfrak{X}$ или, иногда, $U[\mathfrak{X}]$. Обычным путем определяются композиции (суперпозиции) операций. При этом наряду с конечными композициями операций можно рассматривать и бесконечные композиции, в которых участвуют объединения или пересечения классов.

Пусть, например, U — оператор, и допустим, что этот оператор является оператором *расширения классов*. Последнее означает выполнение следующих двух условий: $\mathfrak{X} \subset U\mathfrak{X}$ при любом $\mathfrak{X}$ и если $\mathfrak{X}_1 \subset \mathfrak{X}_2$, то $U\mathfrak{X}_1 \subset U\mathfrak{X}_2$. Степени такого U для порядковых чисел α определяются следующим образом: $U^0\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$, $U^1 = U$, $U^{\alpha+1}\mathfrak{X} = U(U^\alpha\mathfrak{X})$, и если α — предельное, $U^\alpha\mathfrak{X}$ есть объединение классов $U^\beta\mathfrak{X}$ с $\beta < \alpha$. Определим еще оператор $\overline{U}$, полагая, что $\overline{U}\mathfrak{X}$ есть объединение всех $U^\alpha\mathfrak{X}$ по классу всех трансфинитных чисел. Понятно, что все степени оператора U и оператор $\overline{U}$ являются операторами расширения. Мы будем писать $U < V$, если при любом $\mathfrak{X}$ выполняется $U\mathfrak{X} \subset V\mathfrak{X}$. Ясно, что если U — оператор расширения, то $\alpha < \beta$ влечет $U^\alpha < U^\beta$.

Некоторый класс $\mathfrak{X}$ называется *замкнутым* относительно оператора расширения U, если $U\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$. С другой стороны, оператор расширения U есть *оператор замыкания*, если каждый класс $U\mathfrak{X}$ есть U-замкнутый класс. Это равносильно соотношению $U^2 = U = \overline{U}$. Отметим еще, что оператор U называется *ограниченным*, если при некотором α выполняется $U^{\alpha+1} = U^\alpha = \overline{U}$. Минимальное α с таким свойством назовем *порядком* (*границей*) оператора U.

Как правило, все рассматриваемые нами операторы расширения удовлетворяют следующему *условию локализации*:

Если $\mathfrak{X}$ — некоторый класс групп и $G \in U\mathfrak{X}$, то в $\mathfrak{X}$ найдется такой подкласс $\mathfrak{X}'$, что $\mathfrak{X}'$ есть абстрактное замыкание некоторого множества групп и $G \in U\mathfrak{X}'$.

Мы предполагаем, что имеется способ различать множества и классы, в частности, каждое множество обладает мощностью. Абстрактное замыкание множества групп, т. е. класс всех групп, изоморфных группам данного множества, также коротко будем называть множеством групп. В дальнейшем придется, вопреки имеющимся запрещениям, объединять еще и классы в некоторые системы более высокого порядка — надклассы. Все такие «незаконные» действия в конкретных ситуациях легко объяснимы. С другой стороны, по-видимому, здесь возможно и оправдание через подходящую аксиоматику.

Отметим сейчас следующее предложение.

Предложение 1. *Если оператор* U *удовлетворяет условию локализации, то при любом* $\mathfrak{X}$ *класс группы* $\overline{\mathrm{U}}\,\mathfrak{X}$ *есть минимальный* U*-замкнутый класс, содержащий класс* $\mathfrak{X}$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что для любого оператора расширения U пересечение замкнутых относительно этого оператора классов есть замкнутый класс, и поэтому можно говорить о минимальном U-замкнутом классе, содержащем заданный класс $\mathfrak{X}$. Если U — оператор замыкания, то этот минимальный класс совпадает с $\mathrm{U}\,\mathfrak{X}$. В общем случае ясно, что если $\mathfrak{X}_1$ — некоторый U-замкнутый класс, содержащий класс $\mathfrak{X}$, то, ввиду монотонности оператора, этот класс содержит и все $\mathrm{U}^\alpha\,\mathfrak{X}$, а потому и $\overline{\mathrm{U}}\,\mathfrak{X}$.

Для доказательства предложения нам остается проверить, что при нашем условии класс $\overline{\mathrm{U}}\,\mathfrak{X}$ является U-замкнутым классом. Пусть группа G принадлежит классу $\mathrm{U}(\overline{\mathrm{U}}\,\mathfrak{X})$ и пусть $\mathfrak{X}'$ — некоторое множество групп, принадлежащее $\overline{\mathrm{U}}\,\mathfrak{X}$, и такое, что $G \in \mathrm{U}\,\mathfrak{X}'$. Понятно, что при некотором α все группы из $\mathfrak{X}'$ принадлежат $\mathrm{U}^\alpha\,\mathfrak{X}$. При этом класс $\mathrm{U}\,\mathfrak{X}'$ содержится в $\mathrm{U}^{\alpha+1}\mathfrak{X}$. Следовательно, $G \in \overline{\mathrm{U}}\,\mathfrak{X}$, что и требовалось.

Мы видим, что оператор $\overline{\mathrm{U}}$ есть оператор замыкания и что это минимальный оператор замыкания, содержащий U. По этой причине $\overline{\mathrm{U}}$ назовем *замыканием* оператора U. Нетрудно заметить, что условие локализации существенно — без него $\overline{\mathrm{U}}$ может не быть оператором замыкания.

Наряду с операторами расширения классов иногда полезно рассматривать и другой тип монотонных операторов — *операторы сужения*, т. е. такие операторы U, что $\mathrm{U}\,\mathfrak{X} \subset \mathfrak{X}$ (и $\mathfrak{X}_1 \subset \mathfrak{X}_2$ влечет $\mathrm{U}\,\mathfrak{X}_1 \subset \mathrm{U}\,\mathfrak{X}_2$). При определении степеней таких операторов сужения естественно исходить из пересечения классов.

Нас в основном будут интересовать операторы расширения.

По аналогии с замыканием одного оператора расширения можно говорить и о замыкании некоторой системы таких операторов. Если, например, U и V — два оператора расширения, то их совместное замыкание есть оператор $\{U, V\}$, сопоставляющий классу $\mathfrak{X}$ класс $\{U, V\}\mathfrak{X}$, являющийся минимальным U- и V-замкнутым классом среди содержащих исходный класс $\mathfrak{X}$. Оператор $\{U, V\}$ есть оператор замыкания. Аналогично можно говорить и об операторе $\{U_1, U_2, \ldots\}$, причем число порождающих здесь может быть и бесконечным. При одном порождающем имеем $\{U\} = \overline{U}$, если для U выполняется условие локализации.

Один из важных здесь вопросов — строение оператора $\{U_1, U_2, \ldots\}$ в зависимости от составляющих $U_1, U_2, \ldots$. Приведем сейчас одно грубое правило на этот счет. Пусть U_α, $\alpha \in I$, — некоторый набор операторов расширения и пусть все они удовлетворяют условию локализации. Обозначим через U композит всех этих операторов: $U\mathfrak{X}$ есть объединение классов $U_\alpha \mathfrak{X}$. Нетрудно понять, что имеет место соотношение $\{\ldots, U_\alpha, \ldots\} = \overline{U}$. Если исходных операторов конечное число, то вместо композита их можно взять за U произведение всех этих операторов в некотором произвольном порядке, и получится аналогичное правило.

Различные упрощения получаются, естественно, при наличии дополнительных соотношений между операторами. Отметим в связи с этим следующие простые и полезные факты [7]. Пусть U и V — операторы замыкания. Тогда равенство $\{U, V\} = UV$ равносильно соотношению $VU \leqslant UV$. Кроме того, следующие три условия эквивалентны: 1) $V \leqslant U$, 2) $U = \{U, V\}$ и 3) каждый U-замкнутый класс является также и V-замкнутым классом.

Эти правила будут применяться нами неоднократно.

Многие интересные типы классов групп определяются свойством быть замкнутыми относительно некоторых конкретных наборов операторов над классами. Сюда относятся, например, многообразия групп, радикальные и корадикальные классы. Определим сейчас относящиеся сюда операторы.

Через $H\mathfrak{X}$ (Hom $\mathfrak{X}$)* будем обозначать класс всех групп, являющихся гомоморфными образами групп из класса $\mathfrak{X}$. $S\mathfrak{X}$ (Sub $\mathfrak{X}$) обозначает класс всех групп, вложимых в качестве подгруппы в некоторую группу из $\mathfrak{X}$, $C\mathfrak{X}$ (Cart $\mathfrak{X}$) — класс всех

* Сейчас привычнее стало писать $Q\mathfrak{X}$.

декартовых (полных прямых) произведений групп из класса $\mathfrak{X}$, $R\mathfrak{X}$ — класс групп, которые порождаются своими инвариантными $\mathfrak{X}$-подгруппами. Двойственным образом работает оператор CoR : $\mathrm{CoR}\,\mathfrak{X}$ есть класс групп, аппроксимируемых $\mathfrak{X}$-группами. Другими словами, $G \in \mathrm{CoR}\,\mathfrak{X}$, если в G имеется система нормальных делителей A_α, таких, что всегда $G/A_\alpha \in \mathfrak{X}$ и пересечение всех A_α совпадает с единицей. Обозначим еще через $I\mathfrak{X}$ класс всех групп, вложимых в качестве нормальных делителей в группы класса $\mathfrak{X}$.

Очевидно, что операторы H, S, C и CoR являются операторами замыкания, а R и I такими не являются. Легко понять, что $\bar{I} = I^\omega$ и $\bar{I}\mathfrak{X}$ есть класс групп, вложимых в качестве достижимых подгрупп в группы класса $\mathfrak{X}$. В дальнейшем увидим, что имеет место $\bar{R} = R^{\omega+1}$ и $\bar{R}\,\mathfrak{X}$ есть класс групп, порождаемых своими достижимыми $\mathfrak{X}$-подгруппами.

Известно, что класс групп тогда и только тогда является многообразием, когда он замкнут относительно операторов H, S и C. Обозначим $V = \{H, S, C\}$, и тогда при любом $\mathfrak{X}$ класс $V\mathfrak{X}$ есть многообразие, порожденное классом $\mathfrak{X}$. В связи с этим желательно вычислить явный вид оператора V. Легко видеть, что имеют место соотношения $SH < HS$, $CS < SC$ и $CH < HC$. С помощью отмеченного выше правила отсюда непосредственно выводим $\{H, S, C\} = HSC$. Другое выражение для V можно получить с помощью одного недавнего результата С. Р. Когаловского [8]. Согласно этому результату $\{H, S, C\} = \{H, CoR\}$. Легко также видеть, что $CoRH < HCoR$, и поэтому $V = HCoR$. Итак, приходим к любопытному соотношению между операторами: $HSC = HCoR$*.

Класс групп $\mathfrak{X}$ мы называем *радикальным классом*, если он R- и H-замкнут. Обозначим $\mathrm{Rad} = \{R, H\}$. Достаточно очевидно, что $H\bar{R} < \bar{R}H$, и отсюда $\mathrm{Rad} = \bar{R}H$. Таким образом, если $\mathfrak{X}$ — некоторый класс, то радикальный класс $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{X}$ есть класс $\bar{R}H\mathfrak{X}$. Радикальный класс $\mathfrak{X}$ называется *наследственным* радикальным классом, если $I\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$. Поэтому было бы желательно вычислить оператор $\{R, H, I\}$. Это, однако, уже не простое дело.

Корадикальный класс — это класс групп, замкнутый относительно операторов CoR и I(= CoH). Из неравенства $\bar{I}\,\mathrm{CoR} < \mathrm{CoR}\,\bar{I}$ получаем $\{CoR, I\} = Co\bar{R}I$. Очевидно, что если $\mathfrak{X}$ — корадикальный класс, то $H\mathfrak{X}$ — многообразие.

---

* Это соотношение хорошо известно и в общей ситуации универсальных алгебр. Ср., например, [25].

Возвращаясь к определению многообразий, напомним, что для оператора V имеется следующая удобная характеристика: $V\mathfrak{X}$ есть класс всех групп, на которых выполняются все тождества класса $\mathfrak{X}$. Рассматривая вместо тождеств некоторые другие типы формул, скажем в языке узкого исчисления предикатов (УИП), можно аналогичным образом задавать и некоторые другие операторы (ср., например, [32]). Напомним далее следующую важную особенность многообразий: каждое многообразие может быть порождено уже одной группой — подходящей свободной группой.

Операторный подход приводит к некоторым новым постановкам задач. Пусть, например, U—некоторый оператор. Будем говорить, что два класса групп $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ U-*эквивалентны*, если $U\mathfrak{X}_1 = U\mathfrak{X}_2$. Можно также говорить и об U-эквивалентности отдельных групп. Ряд интересных задач связан, в частности, с исследованием радикальной эквивалентности групп.

Если U — оператор и $\mathfrak{X}$ — некоторый класс групп, то естественно отметить следующую характеристику $\mathfrak{X}$ относительно U: минимальное α (если такое есть) с тем свойством, что $U^\alpha \mathfrak{X} = U^{\alpha+1}\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X}$ U-замкнут, то соответствующее α совпадает с нулем, а в общем случае α оценивает отклонение от U-замкнутости.

Пусть, далее, G—некоторая группа, и пусть эта группа принадлежит классу $\overline{U}\,\mathfrak{X}$. Мы можем сопоставить G наименьшее порядковое число α с условием $G \in U^\alpha \mathfrak{X}$. Это α назовем U-*ступенью* группы G над классом $\mathfrak{X}$. Понятно, что эта ступень не может быть предельным числом. Изучение таких ступеней в конкретных ситуациях часто оказывается интересным делом.

2. **Умножение классов**. Важным примером бинарной операции на классах групп является умножение классов: если $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ — два класса, то их произведение есть класс $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$, состоящий из групп, являющихся расширениями групп класса $\mathfrak{X}_1$ с помощью групп из $\mathfrak{X}_2$. Обобщением этой операции является n-местная операция, сопоставляющая упорядоченному набору классов $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_n$ класс $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2 \ldots \mathfrak{X}_n$, состоящий из групп, обладающих нормальным рядом длины n, в котором i-й фактор, $1 \leqslant i \leqslant n$, есть группа из класса $\mathfrak{X}_i$. Аналогично можно задавать n-местную операцию на основе инвариантных рядов. Если при этом все классы $\mathfrak{X}_i$ брать совпадающими, то приходим к некоторым специальным одноместным операциям.

Целесообразно рассматривать и бесконечно-местные произведения, основанные на возрастающих и убывающих нор-

мальных рядах. Приведем относящиеся сюда определения.

Пусть γ — порядковое число и M_γ — множество (отрезок) всех порядковых чисел α с условием $\alpha \leqslant \gamma$. Допустим, далее, что каждому непредельному $\alpha \in M_\gamma$ сопоставлен некоторый класс групп $\mathfrak{X}_\alpha$. Назовем *верхним произведением* классов $\mathfrak{X}_\alpha$ класс групп $\mathfrak{X}$, состоящий из всех групп G, обладающих возрастающим нормальным рядом $[A_\alpha]$, в котором вообще допускаются повторения, длины γ, и таким, что при любом $\alpha < \gamma$ выполняется $A_{\alpha+1}/A_\alpha \in \mathfrak{X}_{\alpha+1}$. Аналогично на основе убывающих рядов определяется *нижнее произведение* классов $\mathfrak{X}_\alpha$. Можно также говорить и об *инвариантных* или *характеристических* верхних и нижних произведениях, если исходить соответственно из инвариантных или характеристических рядов. Вообще это разные произведения.

Имеет место следующая теорема [5].

Т е о р е м а 1. *Инвариантное верхнее произведение любого множества радикальных классов снова является радикальным классом, и это произведение автоматически оказывается характеристическим. Нижнее нормальное произведение корадикальных классов также есть корадикальный класс, и здесь также имеет место характеристичность произведения.*

Верхнее нормальное произведение радикальных классов также оказывается радикальным классом, если число сомножителей конечно. В общем случае это не так, и соответствующее свойство выполняется лишь для специальных радикальных классов (см. § 5).

Понятно, что можно также говорить и о верхних и нижних степенях одного класса.

§ 2. Теоретико-групповые функции

1. Функториалы. В каждой группе выделяются центр, коммутант и многие другие характерные подгруппы. Такие подгруппы естественно рассматривать как значения некоторых специальных функций, определенных на классе всех групп или на некотором его подклассе. Это функции $\mathfrak{F}$, сопоставляющие каждой группе G (или каждой группе из некоторого заданного класса групп K) некоторую ее подгруппу $\mathfrak{F}(G)$. При этом должно выполняться следующее условие абстрактности: $\mathfrak{F}(G^\varphi) = \mathfrak{F}(G)^\varphi$ для каждого изоморфизма φ между группами G и G^φ. Такие абстрактные теоретико-групповые функции будем здесь называть *функториалами*. Из определения сразу следует, что если $\mathfrak{F}$ — функториал, то в каждой группе G

его значение $\mathfrak{F}(G)$ является характеристической подгруппой. Наряду с функториалами иногда полезно рассматривать и *кофункториалы*, сопоставляющие группе ее фактор-группу.

Понятно, что абстрактные теоретико-групповые функции в неявном виде рассматриваются уже давно, однако лишь в недавней работе Р. Бера [9] они были четко названы и рассматривались как самостоятельный объект. Теоретико-групповым функциям и их применению в теории радикала посвящена также работа автора [5].

2. Действия с функториалами. В системе всех функториалов имеются некоторые естественные отношения и операции. Прежде всего это отношение порядка: если $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — два функториала, то $\mathfrak{F}_1 < \mathfrak{F}_2$, когда для любой группы G имеет место включение $\mathfrak{F}_1(G) \subset \mathfrak{F}_2(G)$. Пусть, далее, $\mathfrak{F}_\alpha$, $\alpha \in I$,—некоторый набор функториалов, I не обязательно множество. *Композит и пересечение* $\bigcup\limits_\alpha \mathfrak{F}_\alpha$ и $\bigcap\limits_\alpha \mathfrak{F}_\alpha$ определяются правилами: для любой группы G подгруппа $(\bigcup\limits_\alpha \mathfrak{F}_\alpha)(G)$ есть композит подгрупп $\mathfrak{F}_\alpha(G)$ и $(\bigcap\limits_\alpha \mathfrak{F}_\alpha)(G)$ — пересечение всех $\mathfrak{F}_\alpha(G)$.

Имеется два умножения — *верхнее и нижнее*. Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — два функториала. Через $\mathfrak{F}_1 \overset{\circ}{\delta} \mathfrak{F}_2$ обозначим функцию, сопоставляющую группе G ее подгруппу $\mathfrak{F}_1 \overset{\circ}{\delta} \mathfrak{F}_2(G)$, являющуюся полным прообразом в G подгруппы $\mathfrak{F}_2(G/\mathfrak{F}_1(G))$ из факторгруппы $G/\mathfrak{F}_1(G)$. Это верхнее произведение. Нижнее произведение $\mathfrak{F}_1 \overset{\circ}{\varphi} \mathfrak{F}_2$ определяется правилом: $\mathfrak{F}_1 \overset{\circ}{\varphi} \mathfrak{F}_2(G) = \mathfrak{F}_2(\mathfrak{F}_1(G))$. Оба эти умножения — ассоциативные операции.

Можно также говорить и о бесконечных верхних и нижних произведениях. Пусть M_γ — отрезок порядковых чисел, меньших заданного γ, и допустим, что каждому непредельному $\alpha \in M_\gamma$ сопоставлен функториал $\mathfrak{F}_\alpha$. Произведение $\Pi^{\delta}(\gamma)\mathfrak{F}_\alpha$ определим по индукции, определяя $\Pi^{\delta}(\beta)\mathfrak{F}_\alpha$ для всех $\beta \leqslant \gamma$. Полагаем $\Pi^{\delta}(1)\mathfrak{F}_\alpha = \mathfrak{F}_1$. Допустим, что для всех $\eta < \beta$ произведения $\Pi^{\delta}(\eta)\mathfrak{F}_\alpha$ уже определены. Если β не предельное, то определим: $\Pi^{\delta}(\beta)\mathfrak{F}_\alpha = (\Pi^{\delta}(\beta-1)\mathfrak{F}_\alpha) \overset{\circ}{\delta} \mathfrak{F}_\beta$. Если же β — предельное, то $\Pi^{\delta}(\beta)\mathfrak{F}_\alpha$ определяется как композит всех $\Pi^{\delta}(\eta)\mathfrak{F}_\alpha$ с $\eta < \beta$. Аналогично, на основе пересечений, определяется нижнее произведение $\Pi^{\varphi}(\gamma)\mathfrak{F}_\alpha$.

При этом для одного функториала $\mathfrak{F}$ можно рассматривать его верхние и нижние степени. Их будем обозначать соответственно через $\mathfrak{F}^{\delta\gamma}$ и $\mathfrak{F}^{\varphi\gamma}$, где γ — порядковое число. Обозначим, далее,

$$\overline{\mathfrak{F}} = \bigcup_\gamma \mathfrak{F}^{\delta\gamma}; \quad \check{\mathfrak{F}} = \bigcap_\gamma \mathfrak{F}^{\delta\gamma},$$

где γ пробегает класс всех трансфинитных чисел. При этом имеем $\overline{\mathfrak{F}} \circ \mathfrak{F} = \overline{\mathfrak{F}}$, $\overline{\mathfrak{F}} \circ \overline{\mathfrak{F}} = \overline{\mathfrak{F}}$ и соответственно $\check{\mathfrak{F}} \circ \mathfrak{F} = \check{\mathfrak{F}}$ и $\check{\mathfrak{F}} \circ \check{\mathfrak{F}} = \check{\mathfrak{F}}$. Функториал $\mathfrak{F}$, для которого $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{F} = \mathfrak{F}$, назовем *верхним идемпотентом*, а если $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{F} = \mathfrak{F}$, — *нижним идемпотентом*.

Можно указать ряд других, уже более специфических операций. Отметим, например, *коммутирование*: если $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — два функториала, то их коммутатор $[\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2]$ действует по правилу:

$$[\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2](G) = [\mathfrak{F}_1(G), \mathfrak{F}_2(G)].$$

Систему всех функториалов можно рассматривать как некоторую алгебраическую систему, хотя она и не является множеством. В частности, можно говорить о *верхней и нижней полугруппах функториалов*, и в этих полугруппах можно выделять различные интересные подполугруппы. Отметим еще, что в [5] приводятся некоторые простейшие соотношения для названных выше операций.

3. Некоторые ограничения, налагаемые на функториалы. Различные ограничения на функториалы возникают из рассмотрения поведения их относительно определенных выше операций. Так, мы уже выделили верхние и нижние идемпотенты. Можно также характеризовать функториалы по их поведению в различных теоретико-групповых конструкциях. Например, можно выделить функториалы, перестановочные с прямыми произведениями. Ниже будут названы ограничения, применяемые в теории радикала и корадикала.

Функториал $\mathfrak{F}$ назовем H-замкнутым, если $\mathfrak{F}(G)^{\varphi} = \mathfrak{F}(G^{\varphi})$ при любом эпиморфизме $\varphi : G \to G^{\varphi}$. Если здесь имеет место лишь включение $\mathfrak{F}(G)^{\varphi} \subset \mathfrak{F}(G^{\varphi})$, то $\mathfrak{F}$ называется H-*замкнутым слева*, а если выполняется включение $\mathfrak{F}(G)^{\varphi} \supset \mathfrak{F}(G^{\varphi})$, то $\mathfrak{F}$ —H-*замкнут справа*. H-замкнутость справа у нас встречаться не будет, и поэтому H-замкнутые слева функториалы назовем по-другому — *сильными функториалами*. H-замкнутые функториалы называются еще *вербалами*, так как они всегда выделяют вербальные подгруппы по некоторым многообразиям (см. следующий параграф).

Пусть теперь ρ — некоторое абстрактное отношение между группой и ее подгруппой. Если A — подгруппа в G, то $A \rho G$ означает, что для A и G имеет место ρ. Функториал $\mathfrak{F}$ назовем ρ-*согласованным*, если $A \rho G$ влечет $\mathfrak{F}(A) \subset \mathfrak{F}(G)$. Для некоторых специальных отношений ρ это влечет дальше и $\mathfrak{F}(A) \rho \mathfrak{F}(G)$. $\mathfrak{F}$ назовем ρ-*наследственным*, если из $A \rho G$

следует $\mathfrak{F}(G) \cap A \subset \mathfrak{F}(A)$. Если $\mathfrak{F}$ одновременно ρ-согласован и ρ-наследственен, то $A\rho G$ влечет $\mathfrak{F}(A) = \mathfrak{F}(G) \cap A$.

В теории радикала чаще всего применяются отношения: «быть нормальным делителем», «быть достижимой подгруппой», «быть субинвариантной подгруппой». Полезно также рассматривать следующий тип отношений. Пусть μ — некоторая бесконечная мощность. Введем отношение $\rho = \rho(\mu)$, определяемое правилом: $A\rho G$, если A — член возрастающего нормального ряда группы G, мощность которого меньше заданного μ. Понятно, что на каждой конкретной группе отношение субинвариантности совпадает с некоторым $\rho(\mu)$. Если μ — счетная мощность, то $\rho(\mu)$ — достижимость.

Естественно выделить функториалы, сопоставляющие каждой группе ее вполне характеристическую подгруппу. В связи с этим отметим следующее простое предложение.

Если $\mathfrak{F}$ — сильный функториал и согласован с подгруппами, то всегда $\mathfrak{F}(G)$ — вполне характеристическая подгруппа в G.

Действительно, если φ — эндоморфизм группы G, то при заданных условиях имеем

$$\mathfrak{F}(G)^{\varphi} \subset \mathfrak{F}(G^{\varphi}) \subset \mathfrak{F}(G).$$

Указанным условиям удовлетворяет каждый вербал.

§ 3. Радикалы и корадикалы

1. Два специальных соответствия между функториалами и классами групп. Каждый функториал $\mathfrak{F}$ естественно выделяет два класса групп: $\mathfrak{F}'$ и $\mathfrak{F}^*$. Класс $\mathfrak{F}'$ состоит из всех групп G, для которых $\mathfrak{F}(G) = G$. Такие группы назовем *$\mathfrak{F}$-совершенными группами*. $\mathfrak{F}^*$ есть класс всех G, для которых $\mathfrak{F}(G) = E$. Группы этого класса назовем *$\mathfrak{F}$-простыми*.

С другой стороны, каждому абстрактному классу групп $\mathfrak{X}$ сопоставляется два функториала: $\mathfrak{X}'$ и $\mathfrak{X}^*$. Первый из них выделяет в каждой группе G подгруппу $\mathfrak{X}'(G)$ (которую будем также обозначать через $\mathfrak{X}(G)$, порожденную всеми инвариантными $\mathfrak{X}$-подгруппами из G. Второй функториал выделяет в группе G подгруппу $\mathfrak{X}^*(G)$, являющуюся пересечением всех инвариантных ко-$\mathfrak{X}$-подгрупп из G, т. е. таких A, что $G/A \in \mathfrak{X}$.

Понятен также смысл обозначений $\mathfrak{F}'', \mathfrak{F}^{**}, \mathfrak{X}'', \mathfrak{X}^{**}$, а равенства $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}''$, $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}''$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^{**}$, $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^{**}$ говорят здесь о взаимной однозначности соответствующих отображений.

Класс групп $\mathfrak{X}$ назовем *предрадикальным классом*, если в любой группе G ее подгруппа $\mathfrak{X}(G)$ есть $\mathfrak{X}$-подгруппа. $\mathfrak{X}$ назовем *копредрадикальным*, если всегда $\mathfrak{X}^*(G)$ есть ко-$\mathfrak{X}$-под-

группа. Легко видеть, что предрадикальность класса $\mathfrak{X}$ равносильна его замкнутости относительно оператора R, а копредрадикальность — CoR-замкнутости этого класса. С другой стороны, нетрудно понять, что имеют место равенства $\mathfrak{X}'' = R\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}^{**} = Co\,R\,\mathfrak{X}$. Таким образом, равенство $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}''$ равносильно предрадикальности класса $\mathfrak{X}$, а равенство $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^{**}$ означает, что $\mathfrak{X}$ — копредрадикальный класс.

Приведем теперь параллельные определения для функториалов. Функториал $\mathfrak{F}$ назовем *предрадикалом*, если: 1) $\mathfrak{F}$ является нижним идемпотентом и 2) $\mathfrak{F}$ согласован с нормальными делителями. $\mathfrak{F}$ называется *копредрадикалом*, если 1) $\mathfrak{F}$ является верхним идемпотентом и 2) $\mathfrak{F}$ — сильный функториал. Нетрудно заметить, что как первые, так и вторые условия здесь — двойственные условия.

Им еет место следующее предложение [9], [5].

Предложение 2. *Равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}''$ имеет место тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ предрадикал. Равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^{**}$ равносильно тому, что $\mathfrak{F}$ — копредрадикал. Если $\mathfrak{F}$ — предрадикал, то $\mathfrak{F}'$ — предрадикальный класс, и если $\mathfrak{X}$ — предрадикальный класс, то $\mathfrak{X}'$ — предрадикал. Если $\mathfrak{F}$ — копредрадикал, то $\mathfrak{F}^*$ — копредрадикальный класс, и если $\mathfrak{X}$ — произвольный класс, то $\mathfrak{X}^*$ — копредрадикал.*

Таким образом, $'$ устанавливает взаимнооднозначное соответствие между предрадикалами и предрадикальными классами, а $*$ дает аналогичное соответствие между копредрадикалами и копредрадикальными классами.

Введем теперь обозначения: $r\mathfrak{F} = \mathfrak{F}''$ и $Cor\,\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^{**}$, и перечислим некоторые свойства этих операторов на функториалах [5].

Всегда имеют место неравенства $r\mathfrak{F} > \check{\mathfrak{F}}$ и $Cor\,\mathfrak{F} < \bar{\mathfrak{F}}$. Следовательно, если $\mathfrak{F}$ — нижний идемпотент, то $r\mathfrak{F} > \mathfrak{F}$, и если $\mathfrak{F}$ — верхний идемпотент, то $Cor\,\mathfrak{F} < \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}$ — сильный функториал, то $Cor\,\mathfrak{F} = \bar{\mathfrak{F}}$, и если $\mathfrak{F}$ согласован с нормальными делителями, то $r\mathfrak{F} = \check{\mathfrak{F}}$. Кроме того, если $\mathfrak{F}$ — сильный функториал, то таков же и $r\mathfrak{F}$, а если $\mathfrak{F}$ согласован с нормальными делителями, то этим же свойством обладает и $Cor\,\mathfrak{F}$.

Оператор Cor совпадает со своим квадратом, и поэтому для произвольного $\mathfrak{F}$ функториал $Cor\,\mathfrak{F}$ является уже копредрадикалом. Этот копредрадикал, однако, может не покрываться $\mathfrak{F}$. Если же $\mathfrak{F}$ — верхний идемпотент, то $Cor\,\mathfrak{F}$ есть максимальный копредрадикал в $\mathfrak{F}$ — он содержит каждый копредрадикал, меньший $\mathfrak{F}$.

Оператор $\mathfrak{r}$ не совпадает со своим квадратом, и здесь понятным образом определяются его степени, в том числе и бесконечные. Эти степени стабилизируются уже на первом предельном месте. Обозначим $\bar{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}^{\omega}$. Оператор $\bar{\mathfrak{r}}$ сопоставляет каждому функториалу $\mathfrak{F}$ предрадикал $\bar{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}$ — нижний идемпотент, то $\bar{\mathfrak{r}}\mathfrak{F}$ есть минимальный предрадикал, покрывающий $\mathfrak{F}$.

Отметим еще следующие непосредственно проверяемые соотношения:

$$(\mathfrak{r}\,\mathfrak{F})' = \mathrm{R}\,\mathfrak{F}'; \ (\mathrm{R}\,\mathfrak{X})' = \mathfrak{r}\,\mathfrak{X}';$$

$$(\mathrm{Cor}\,\mathfrak{F})^* = \mathrm{Co}\,\mathrm{R}\,\mathfrak{F}^*; \ (\mathrm{Co}\,\mathrm{R}\,\mathfrak{X})^* = \mathrm{Cor}\,\mathfrak{X}^*.$$

2. Определения радикалов и корадикалов. Простейшие соотношения. В соответствии с уже отмечавшимся радикальный класс — это предрадикальный класс с дополнительным условием замкнутости по гомоморфизмам. Соответственно корадикальный класс — это копредрадикальный класс, наследственный по нормальным делителям. Переходя на язык функториалов, мы определим радикал как такой функториал $\mathfrak{F}$, который удовлетворяет двум условиям предрадикала и еще условию: $\mathfrak{F}$ — сильный функториал. Соответственно в определении корадикала $\mathfrak{F}$ к двум условиям копредрадикала добавляется условие: $\mathfrak{F}$ согласован с нормальными делителями.

Заметим здесь, что третье условие определения радикала входило вторым условием в определение копредрадикала, и, наоборот, условие третье определения корадикала есть также условие второе определения предрадикала. Легко видеть, что при этом соответствие $'$ есть также взаимнооднозначное соответствие между радикальными классами и радикалами, а $*$ — такое же соответствие между корадикальными классами и корадикалами.

Напомним далее, что радикал $\mathfrak{F}$ наследственен (по нормальным делителям), если из того, что A — нормальный делитель в G, следует, что $\mathfrak{F}(A) = \mathfrak{F}(G) \cap A$. Это условие, как легко заметить, влечет уже первое условие определения предрадикала. $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда наследственен, когда наследственен соответствующий радикальный класс. Двойственное условие для корадикальных классов означает замкнутость этих классов относительно гомоморфизмов, а это равносильно H-замкнутости соответствующего корадикала. Оказывается, что H-замкнутость произвольного функториала уже означает, что такой функториал является корадикалом.

Функториал $\mathfrak{F}$ назовем *вербалом*, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}^*$, где $\mathfrak{X}$ — многообразие. Ясно, что каждый вербал является корадикалом,

H-замкнут и согласован с подгруппами. Имеет место также следующее предложение (см., например, [5]).

Предложение 3. *Функториал* $\mathfrak{F}$ *тогда и только тогда является вербалом, когда он* H*-замкнут. Класс* $\mathfrak{X}$ *тогда и только тогда является многообразием, когда* $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^{**}$ и $\mathfrak{X}^*$ — H*-замкнут.*

Таким образом, устанавливаем также двойственность между наследственными радикалами и вербалами. Двойственность между наследственными радикальными классами и многообразиями просматривается из определений этих классов на операторном языке (по поводу двойственности см. еще п. 5 в этом параграфе).

Отметим далее, что наряду с многообразиями и вербалами иногда полезно рассматривать предмногообразия и предвербалы, определяемые следующим образом.

Класс $\mathfrak{X}$ назовем предмногообразием, если он замкнут относительно оператора $\{S, C\}$, или, что равносильно, относительно оператора $\{S, CoR\}$. Таким образом, если $\mathfrak{X}$ — произвольный класс групп, то $\mathfrak{X}_1 = CoR\,\mathfrak{X}$ есть копредрадикальный класс, $\mathfrak{X}_2 = S\mathfrak{X}_1$ — предмногообразие (и одновременно корадикальный класс) и $\mathfrak{X}_3 = H\mathfrak{X}_2$ — многообразие. Нетрудно заметить также, что каждое квазимногообразие групп [10] является всегда предмногообразием, но не наоборот. См. также [32], где для предмногообразий используется другое название.

Функториал $\mathfrak{F}$ назовем *предвербалом*, если это копредрадикал и он согласован с подгруппами (а не только с нормальными делителями, как это требуется в определении корадикала). $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда предвербал, когда соответствующий $\mathfrak{F}^*$ есть предмногообразие. Из приводившихся раньше замечаний следует, что в каждой группе предвербал выделяет вполне характеристическую подгруппу.

Радикал $\mathfrak{F}$ называется *строгим радикалом*, если является также верхним идемпотентом. Заметим здесь, что термин «строгий радикал» не очень удачен, так как он применялся уже в другой ситуации в [3]. Корадикал $\mathfrak{F}$ называется *строгим корадикалом*, если он нижний идемпотент. Условие строгого радикала равносильно тому, что соответствующий класс замкнут по расширениям, т. е. является радикальным классом в аксиоматике А. Г. Куроша [3]. $\mathfrak{F}$ — строгий корадикал тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}^*$ является замкнутым по расширениям корадикальным классом, что равносильно полупростоте этого класса в смысле А. Г. Куроша. Из определений непосредственно вытекает следующее утверждение: если $\mathfrak{F}$ — строгий радикал, то он одновременно и строгий корадикал; если $\mathfrak{F}$ —

строгий корадикал, то он также и строгий радикал. При этом $\mathfrak{F}'$ — строгий радикальный класс и $\mathfrak{F}^*$ — полупростой класс.

Следующее предложение связано с введенными ранее операторами r и Cor [5].

Предложение 4. *Если* $\mathfrak{F}$ *— сильный функториал, то* $\overline{\mathrm{r}}\mathfrak{F}$ *— радикал. Если* $\mathfrak{F}$ *согласован с нормальными делителями, то* $\mathrm{Cor}\mathfrak{F}$ *— корадикал.*

3. Согласованность и наследственность. Согласованность и наследственность являются носителями определенной двойственности: если $\mathfrak{F}$ — функториал и ρ — отношение между группой и ее подгруппой, то ρ-наследственность $\mathfrak{F}$ влечет наследственность по ρ-подгруппам класса $\mathfrak{F}'$, а ρ-согласованность $\mathfrak{F}$ влечет наследственность по ρ-подгруппам класса $\mathfrak{F}^*$. Приведем теперь один признак ρ-согласованности радикала.

Определим оператор R_ρ на классах групп: группа G тогда и только тогда принадлежит классу $\mathrm{R}_\rho\,\mathfrak{X}$, когда она порождается своими ρ-подгруппами из класса $\mathfrak{X}$. Параллельно определим оператор r_ρ на функториалах: $\mathrm{r}_\rho\,\mathfrak{F}(G)$ есть подгруппа в G, порожденная всеми $\mathfrak{F}$-совершенными ρ-подгруппами из G. Очевидно следующее соотношение: $(\mathrm{r}_\rho\,\mathfrak{F})' = \mathrm{R}_\rho\mathfrak{F}'$.

Перечислим теперь некоторые ограничения, накладываемые на отношение ρ: 1) каждый нормальный делитель в группе является ее ρ-подгруппой; 2) если $A\rho G$ и B — нормальный делитель в G, содержащий A, то $A\rho B$; 3) если $B\rho G$ и A — характеристическая подгруппа в B, то $A\rho G$. Каждое отношение ρ, удовлетворяющее трем отмеченным условиям, назовем *нормальным отношением*. Отношение ρ назовем *строго нормальным*, если еще выполнено условие: 4) если $A\rho G$ и $\varphi : G \to G\varphi$ — эпиморфизм, то $A^\varphi \rho G^\varphi$. Кроме того, часто оказывается необходимым условие транзитивности ρ.

Легко заметить, что если ρ удовлетворяет условиям 1), 2) и транзитивно, то $(\mathrm{R}_\rho\,\mathfrak{X})'(G)$ есть подгруппа в G, порожденная всеми ее $\mathfrak{X}$ — ρ-подгруппами, причем имеем $(\mathrm{R}_\rho\,\mathfrak{X})' = \mathrm{r}_\rho\,\mathfrak{X}'$. Для такого ρ очевидно также, что R_ρ есть оператор замыкания и $\mathrm{r}_\rho^2 = \mathrm{r}_\rho$.

Предложение 5 [5]. *Пусть* ρ *нормально. Класс групп* $\mathfrak{X}$ *тогда и только тогда является предрадикальным классом с* ρ*-согласованным* $\mathfrak{X}'$*, когда* $\mathrm{R}_\rho\,\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$. *Предрадикал* $\mathfrak{F}$ *тогда и только тогда* ρ*-согласован, когда* $\mathrm{r}_\rho\,\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. *Если* ρ *транзитивно, то для произвольного* $\mathfrak{F}$ *функториал* $\mathrm{r}_\rho\,\mathfrak{F}$ *является* ρ*-согласованным предрадикалом. Если еще* ρ *строго нормально и* $\mathfrak{F}$ *— сильный функториал, то* $\mathrm{r}_\rho\,\mathfrak{F}$ *—* ρ*-согласованный радикал.*

Для строго нормального ρ верно еще следующее: если $\mathfrak{F}$ — ρ-согласованный функториал, то $\mathrm{Cor}\,\mathfrak{F}$ также ρ-согласован, а $(\mathrm{Cor}\,\mathfrak{F})^*$ есть наследственный по ρ-подгруппам корадикальный класс.

Для нормального ρ нетрудно проверить, что пересечение любого набора ρ-наследственных радикалов есть ρ-наследственный радикал. Отсюда следует, что для каждого радикала $\mathfrak{F}$ можно указать минимальный ρ-наследственный радикал, содержащий $\mathfrak{F}$.

4. Умножение радикалов и корадикалов. Раньше были определены верхние и нижние произведения функториалов. Отметим теперь следующую теорему [5], параллельную теореме 1.

Теорема 2. *Верхнее произведение любого множества радикалов также является радикалом. Нижнее произведение любого множества корадикалов — снова корадикал. Если* $\mathfrak{F}$ — *радикал, то и* $\bar{\mathfrak{F}}$ — *радикал, если* $\mathfrak{F}$ — *корадикал, то и* $\bar{\mathfrak{F}}$ — *корадикал.*

Эта теорема доказывается проверкой соответствующих свойств функториалов, и нет необходимости переходить к классам групп. Кроме того, можно проверить, что при минимальных ограничениях на отношение ρ верхнее произведение ρ-согласованных радикалов также ρ-согласовано, и если все сомножители ρ-наследственны, то таково же и их произведение.

Из характеристики вербалов, содержащейся в предложении 3, сразу следует известный факт, что нижнее произведение конечного числа вербалов также вербал. Аналогично имеем, что коммутатор вербалов есть вербал, и легко видеть, что коммутатор двух корадикалов — корадикал.

Умножения классов и функториалов естественно связаны. Обозначим через $\Pi^{\delta}(\gamma)\,\mathfrak{X}_{\alpha}$ верхнее инвариантное произведение радикальных классов, и пусть $\Pi^{\varrho}(\gamma)\,\mathfrak{X}_{\alpha}$ — нижнее нормальное произведение корадикальных классов. При этом имеют место формулы:

$$(\Pi^{\delta}(\gamma)\,\mathfrak{X}_{\alpha})' = \Pi^{\delta}(\gamma)\,\mathfrak{X}'_{\alpha} \text{ и } (\Pi^{\varrho}(\gamma)\,\mathfrak{X}_{\alpha})^* = \Pi^{\varrho}(\gamma)\,\mathfrak{X}^*_{\alpha}.$$

Первая из них верна также для конечных нормальных произведений и, если все сомножители являются специальными радикалами, для бесконечных нормальных произведений. При этом радикал $\mathfrak{X}$ называем *специальным*, если $\mathfrak{X}'$ согласован с субинвариантными подгруппами.

Учитывая, что верхнее и нижнее умножения функториалов всегда ассоциативны, и применяя отмеченные сейчас формулы,

видим, что можно говорить о полугруппах радикальных и корадикальных классов. Эти полугруппы оказываются изоморфными соответственно полугруппе радикалов (относительно верхнего умножения) и полугруппе корадикалов (по нижнему умножению). Во второй из этих полугрупп содержится подполугруппа вербалов, изоморфная полугруппе многообразий.

5. Радикалы и корадикалы как функторы. До сих пор радикалы и корадикалы выступали здесь в двух качествах: как некоторые классы групп и как некоторые теоретико-групповые функции. Теперь рассмотрим их как функторы в подходящих категориях, и при этом двойственность между ними станет особенно отчетливой — она будет сводиться к повороту стрелок.

Пусть K — некоторая категория и Φ — одноместный ковариантный функтор из этой категории в себя. Функтор Φ назовем *радикалом* на K, если выполнены следующие условия:

1. Вместе с Φ определена также функция f, которая каждому объекту A сопоставляет мономорфизм $f(A) : \Phi(A) \to A$.

2. Если задан морфизм $\mu : A \to B$, $\alpha = f(A)$ и $\beta = f(B)$, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Phi(A) & \xrightarrow{\Phi(\mu)} & \Phi(B) \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ A & \xrightarrow[\mu]{} & B \end{array}$$

3. $\Phi^2 = \Phi$.

Первые два условия означают, что Φ есть подфунктор единичного функтора. Если их заменить на двойственные, то придем к понятию корадикала. Таким образом, Φ — *корадикал, если:*

1. Вместе с Φ определена также функция f, которая каждому объекту A сопоставляет эпиморфизм $f(A) : A \to \Phi(A)$.

2. Если задан морфизм $\mu : A \to B$, $\alpha = f(A)$ и $\beta = f(B)$, то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{\mu}{\to} & B \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ \Phi(A) & \underset{\Phi(\mu)}{\to} & \Phi(B) \end{array}$$

3. $\Phi^2 = \Phi$.

Условимся дальше гомоморфизм групп $\mu : A \to B$ называть *достижимым*, если его образ является достижимой подгруппой в B. Легко видеть, что класс всех групп, рассматриваемый вместе с достижимыми гомоморфизмами, есть категория. Пусть K — эта категория.

Пусть Φ — радикал в K. Для каждой группы A через $\mathfrak{F}(A)$ обозначим образ мономорфизма $f(A)$. При этом $\mathfrak{F}$ оказывается радикалом в классе всех групп. С другой стороны, каждому радикалу $\mathfrak{F}$ однозначно, с точностью до эквивалентности функторов, отвечает радикал Φ в категории K.

Пусть теперь Φ — корадикал в категории всех групп K. Для каждой группы A через $\mathfrak{F}(A)$ обозначим ядро эпиморфизма $f(A)$. Тогда $\mathfrak{F}$ есть корадикал в классе всех групп, и здесь также имеем взаимнооднозначное соответствие.

Допустим дальше, что K есть некоторая категория, в которой имеется понятие точной последовательности. Тогда радикал Φ на K назовем *наследственным радикалом*, если функтор Φ является точным слева. Если Φ—корадикал и точен справа, назовем его *наследственным*.

Пусть теперь K — отмеченная раньше категория групп с естественным понятием точной последовательности. Тогда имеет место следующее предложение [5].

Предложение 6. 1. *Радикал Φ в категории K тогда и только тогда является наследственным радикалом, когда соответствующий $\mathfrak{F}$ есть наследственный радикал в классе всех групп.* 2. *Корадикал Φ в категории K тогда и только тогда наследственен, когда соответствующий $\mathfrak{F}$ есть вербал.*

Отсюда также следует, что если Φ — наследственный радикал в категории K, то его образы пробегают наследственный радикальный класс групп, а если Φ — наследственный корадикал, то его образы составляют многообразие групп.

6. Дополнительные замечания. Во всех наших рассмотрениях радикалы и корадикалы определены на классе всех групп — это *абсолютные радикалы и корадикалы*. Понятно, однако, что можно было бы исходить из некоторого подкласса K класса всех групп, замкнутого, скажем, относительно гомоморфизмов и взятия инвариантных подгрупп. Всю теорию можно было бы относить к такому классу K. При этом все функториалы должны быть определены на классе K, а действие операторов на классах должно быть сужено на классе K (по этому поводу см. еще [5]).

Приведем, с другой стороны, несколько замечаний по поводу обобщений. Многие из отмечавшихся выше построений, связанных с радикалами, могут быть обобщены на Ω-группы, а для теории корадикала можно идти еще дальше и переносить ее на универсальные алгебры. При этом сохраняется почти все, связанное с соответствием*, если только иметь в виду, что функториал фиксирует в универсальной алгебре некоторую ее конгруэнцию. Не пройдут здесь, по крайней мере непосредст-

венно, факты, связанные с умножением корадикалов. Они не проходят сразу даже в Ω-группах, так как здесь вообще отсутствует характеристичность выделяемых функториалами идеалов.

Та же причина приводит к трудностям и в теории радикалов в Ω-группах. Отметим еще, что в случае Ω-групп в определении радикала $\mathfrak{F}$ условие 2) этого определения нужно заменить следующим условием: если A — $\mathfrak{F}$-совершенный идеал Ω-группы G, то $A \subset \mathfrak{F}(G)$. При таком изменении определения, как нетрудно проверить, для Ω-групп проходят простейшие факты, связанные с соответствием $'$.

Различные обобщения теории радикалов имеются в результате перенесения ее в теорию категорий. Хотя здесь имеется довольно много уже работ, необходимая ясность в теоретико-категорной трактовке радикала еще далеко не достигнута.

§ 4. Радикальное замыкание классов групп

1. Оператор $\overline{\mathrm{R}}$ и близкие к нему операторы. Напомним, что оператор R сопоставляет классу групп $\mathfrak{X}$ класс $\mathrm{R}\mathfrak{X}$, состоящий из групп, порождаемых своими инвариантными $\mathfrak{X}$-подгруппами. Следующая теорема характеризует замыкание этого оператора.

Теорема 3. *Оператор* R *является ограниченным оператором.* $\overline{\mathrm{R}} = \mathrm{R}^{\omega+1}$, *и эта оценка является точной. Кроме того, замыкание* $\overline{R}$ *может быть определено как оператор, сопоставляющий классу* $\mathfrak{X}$ *класс всех групп, порождаемых своими достижимыми* $\mathfrak{X}$*-подгруппами.*

Рассмотрим более общую ситуацию. Пусть ρ — некоторое нормальное отношение между группой и ее подгруппой и $\bar{\rho}$ — его замыкание по транзитивности. Мы покажем, что $\overline{\mathrm{R}}_\rho = \mathrm{R}_{\bar{\rho}} = \mathrm{R}_\rho^{\omega+1}$. Вначале проверим, что выполняется $\overline{\mathrm{R}}_\rho = \overline{\mathrm{R}}_{\bar{\rho}}$. В самом деле, пусть $G \in \mathrm{R}_{\bar{\rho}}\,\mathfrak{X}$, $A \bar{\rho} G$ и $A \in \mathfrak{X}$. Понятно, что класс $\overline{\mathrm{R}}_\rho\,\mathfrak{X}$ является предрадикальным, удовлетворяющим условию ρ-согласованности. Имеет место также и $\bar{\rho}$-согласованность, и поэтому $A = (\mathrm{R}_\rho\,\mathfrak{X})(A) \subset (\overline{\mathrm{R}}_\rho\,\mathfrak{X})(G)$. Так как G порождается такими A, то $G = (\overline{\mathrm{R}}_\rho\,\mathfrak{X})(G)$, и это означает, что $G \in \overline{\mathrm{R}}_\rho(\mathfrak{X})$. Таким образом, $\mathrm{R}_{\bar{\rho}} \leqslant \overline{\mathrm{R}}_\rho$. С другой стороны, очевидно, что $\mathrm{R}_\rho \leqslant \mathrm{R}_{\bar{\rho}}$, и так как справа стоит оператор замыкания, то $\overline{\mathrm{R}}_\rho \leqslant \overline{\mathrm{R}}_{\bar{\rho}}$.

Дальше будем показывать, что $\mathrm{R}_{\bar{\rho}} = \mathrm{R}_\rho^{\omega+1}$. Если $\mathrm{R}_\rho = \mathrm{R}$, то здесь можно воспользоваться хорошо известными соображе-

ниями (ср., например, К. К. Щукин [11]), а в общем случае нам понадобятся еще некоторые вспомогательные факты.

Пусть ρ — некоторое отношение и $\mathfrak{X}$ — класс групп. Через $\mathfrak{X}^\rho$ будем обозначать функториал, выделяющий в каждой группе G ее подгруппу, порожденную всеми $\mathfrak{X}$-ρ-подгруппами из G. Для нормального ρ очевидно, что $\mathfrak{X}^\rho(G) \in \mathrm{R}_\rho\,\mathfrak{X}$, $(\mathfrak{X}^\rho)' = \mathrm{R}_\rho\,\mathfrak{X}$, и если $\mathrm{R}_\rho\,\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$, то $\mathfrak{X}^\rho = \mathfrak{X}'$. Мы будем писать $A\rho^n G$, если в G имеется возрастающий ряд

$$A\rho\,A_1\rho\cdots\rho A_{n-1}\rho G. \qquad (*)$$

Понятно, что если $A\rho G$, то $\mathfrak{X}^{\rho^{n-1}}(A) \subseteq \mathfrak{X}^{\rho^n}(G)$.

Докажем дальше соотношение

$$\mathfrak{X}^{\rho^n}(G) = (\mathrm{R}_\rho^{n-1}\,\mathfrak{X})^\rho(G).$$

Это соотношение очевидно для $n = 1$, и допустим, что оно доказано для всех $m < n$. Пусть $A \in \mathfrak{X}$ и $A\rho^n G$. Возьмем для этой A ряд (*), и пусть $B_{n-1} = \mathfrak{X}^{\rho^{n-1}}(A_{n-1})$. Имеем $A \subset B_{n-1}\rho G$. Из предположения индукции имеем $B_{n-1} = (\mathrm{R}_\rho^{n-2}\mathfrak{X})^\rho(A_{n-1}) \in \mathrm{R}_\rho^{n-1}\mathfrak{X}$. Следовательно, $B_{n-1} \subset (\mathrm{R}_\rho^{n-1}\,\mathfrak{X})^\rho(G)$. Так как все такие B_{n-1} порождают $\mathfrak{X}^{\rho^n}(G)$, то $\mathfrak{X}^{\rho^n}(G) \subset (\mathrm{R}_\rho^{n-1}\,\mathfrak{X})^\rho(G)$. Заметив дальше, что $\mathrm{R}_\rho^{n-1}\,\mathfrak{X} \subset \mathrm{R}_{\rho^{n-1}}\mathfrak{X}$ *, получаем обратное включение $(\mathrm{R}_\rho^{n-1}\mathfrak{X})^\rho(G) \subset \mathfrak{X}^{\rho^n}(G)$.

Пусть теперь $G \in \mathrm{R}_{\bar{\rho}}\,\mathfrak{X}$. В такой G имеется возрастающий ряд характеристических подгрупп $\mathfrak{X}^{\rho^n}(G)$, объединение которого дает всю группу. Из доказанного выше соотношения следует, что $\mathfrak{X}^{\rho^n}(G) \in \mathrm{R}_\rho^n\,\mathfrak{X}$. Итак, $G \in \mathrm{R}\cdot\mathrm{R}_\rho^\omega\,\mathfrak{X}$, и отсюда уже следует $\mathrm{R}_{\bar{\rho}} \leqslant \mathrm{R}\cdot\mathrm{R}_\rho^\omega$. Так как $\mathrm{R}_{\bar{\rho}} = \overline{\mathrm{R}}_\rho$, то имеем $\mathrm{R}_\rho^{\omega+1} \leqslant \mathrm{R}_{\bar{\rho}}$. Таким образом, доказано, что $\mathrm{R}_{\bar{\rho}} = \mathrm{R}\cdot\mathrm{R}_\rho^\omega = \mathrm{R}_\rho^{\omega+1}$.

Точность приведенной в теореме оценки доказана недавно И. А. Рипсом [12]. При этом было установлено, что эта оценка достигается уже на классе нильпотентных групп: если $\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп, то мы имеем строго возрастающую последовательность классов

$$\mathfrak{N} \subset \mathrm{R}\,\mathfrak{N} \subset \mathrm{R}^2\,\mathfrak{N} \subset \ldots \subset \mathrm{R}^n\,\mathfrak{N} \subset \ldots,$$

и отсюда следует нужное свойство.

Заметим, что группы класса $\mathrm{R}\,\mathfrak{N}$ — это фиттинговы группы,

---

* В действительности, как это следует из доказываемой формулы, имеет место равенство $\mathrm{R}_\rho^n = \mathrm{R}_{\rho_n}$.

а $\overline{\mathrm{R}}\,\mathfrak{N}$ есть класс всех *беровских групп*. Тот факт, что $\mathrm{R}\,\mathfrak{N} \neq \overline{\mathrm{R}}\,\mathfrak{N}$, был установлен несколько раньше Р. Дарком [13]. В действительности Р. Дарк, решая известную проблему, показал, что существуют беровские группы без абелевых нормальных делителей.

Пусть теперь $\mathfrak{X}$ — некоторый класс групп и $\mathrm{H}\,\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$. Для такого $\mathfrak{X}$ класс $\overline{\mathrm{R}}\,\mathfrak{X} = \mathrm{R}^{\omega+1}\,\mathfrak{X}$ является радикальным классом. Может, однако, случиться, что $\overline{\mathrm{R}}\,\mathfrak{X} = \mathrm{R}^{\alpha}\,\mathfrak{X}$ для некоторого $\alpha < \omega + 1$. Пусть $\tau = \tau(\mathfrak{X})$ есть первое среди чисел α, для которых $\mathrm{R}^{\alpha}\,\mathfrak{X}$ — радикальный класс. Это τ удовлетворяет неравенству $0 \leqslant \tau \leqslant \omega + 1$, и, как нетрудно понять, оно не может равняться ω. Если $\tau = 0$, то это означает, что уже $\mathfrak{X}$ есть радикальный класс, а вообще мы имеем здесь некоторую характеристику отклонения от радикальности. Мы видели, что если $\mathfrak{X}$ — класс всех нильпотентных групп, то здесь τ принимает значение $\omega + 1$. Известно также (см., например, [14]), что если $\mathfrak{X}$ — некоторый класс простых некоммутативных групп, то для такого $\mathfrak{X}$ всегда $\tau(\mathfrak{X}) = 1$. В различных конкретных случаях вычисление характеристики τ может оказаться интересной задачей. Естественно поставить также следующий вопрос.

П р о б л е м а 1. *Существует ли для каждого натурального n замкнутый относительно оператора* H *класс групп* $\mathfrak{X}$, *для которого* $\tau(\mathfrak{X}) = n$?

Одновременно заметим, что нам неизвестно ни одного случая, когда τ оказывается отличным от 0, 1 и $\omega + 1$.

Подобная задача для другого оператора, связанного со строгими радикальными замыканиями, отмечалась раньше А. Г. Курошем (см. здесь проблему 8).

Рассмотрим теперь некоторые операторы, близкие к операторам R и $\overline{\mathrm{R}}$. Через $\mathrm{K}\,\mathfrak{X}$ будем обозначать класс групп, покрываемых своими инвариантными $\mathfrak{X}$-подгруппами. Ясно, что $\mathrm{K} < \mathrm{R}$ и поэтому $\overline{\mathrm{K}} < \overline{\mathrm{R}}$. Оператор $\overline{\mathrm{K}}$ рассматривался П. Г. Конторовичем в его важной работе [15]. Этот оператор назовем *оператором Конторовича*. В том случае, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{A}$ — класс всех абелевых групп, соответствующий класс $\overline{\mathrm{K}}\,\mathfrak{A}$ есть класс групп с категорией. Легко понять, что класс $\overline{\mathrm{R}}\,\mathfrak{A}$ есть класс всех беровских групп, и так как $\overline{\mathrm{K}} < \overline{\mathrm{R}}$, мы видим, что каждая группа с категорией является беровской группой. На самом деле имеет место следующая теорема (И. А. Рипс [31]).

Т е о р е м а 4. *Класс групп с категорией совпадает с классом беровских групп.*

Таким образом, важный в теории радикала класс беровских групп естественно называть также классом групп Бера — Конторовича. Мы видим, что на классе всех абелевых групп операторы $\overline{\mathrm{K}}$ и $\overline{\mathrm{R}}$ работают одинаково. В работе И. А. Рипса [31] выделены некоторые другие классы групп, на которых операторы $\overline{\mathrm{K}}$ и $\overline{\mathrm{R}}$ совпадают. Так будет для класса всех конечных групп, для класса всех нетеровых групп и т. д. В этой же работе рассматривается оператор F, определяемый следующим образом: $\mathrm{F}\mathfrak{X}$ есть класс групп, в которых каждое конечное множество элементов принадлежит некоторой инвариантной $\mathfrak{X}$-подгруппе. Понятно, что $\mathrm{F} < \mathrm{K}$. Рассмотрены некоторые классы групп, на которых действие операторов $\overline{\mathrm{F}}$ и $\overline{\mathrm{R}}$ совпадает, приводятся некоторые оценки, связанные с оператором F. Установлено, например, что на классе всех нетеровых групп этот оператор ограничен, но его граница существенно больше, чем граница оператора R.

Отметим еще, что действие операторов $\overline{\mathrm{K}}$ и $\overline{\mathrm{F}}$ на классе конечных групп рассматривалось в работе Л. А. Калужнина [16], посвященной обобщенным локально нормальным группам.

Определим далее следующий оператор $\mathrm{V}: G \in \mathrm{V}\mathfrak{X}$, если каждое конечное множество элементов группы G содержится в некоторой достижимой $\mathfrak{X}$-подгруппе. Понятно, что $\mathrm{F} < \mathrm{V} < \overline{\mathrm{R}}$, а так как V, очевидно, является оператором замыкания, то $\overline{\mathrm{F}} < \mathrm{V} < \overline{\mathrm{R}}$. По-видимому, операторы $\overline{\mathrm{F}}$ и V различны, однако соответствующим доказательством мы не располагаем. В недавней работе Дж. Роузблейда и С. Стонехевера [19] была доказана следующая очень полезная теорема.

Т е о р е м а 5. *Если класс $\mathfrak{X}$ наследственен по нормальным делителям и в произвольной группе произведение двух ее инвариантных $\mathfrak{X}$-подгрупп снова является $\mathfrak{X}$-подгруппой, то для такого $\mathfrak{X}$*

$$\overline{\mathrm{R}}\,\mathfrak{X} = \mathrm{V}\mathfrak{X}.$$

Эта теорема была известна раньше [20] при дополнительном предположении нетеровости групп из класса $\mathfrak{X}$.

Обозначим через R_0 оператор, сопоставляющий классу $\mathfrak{X}$ класс групп, порождаемых двумя своими инвариантными $\mathfrak{X}$-подгруппами. Понятно, что $\overline{\mathrm{R}_0} = \mathrm{R}_0^{\omega}$. Пусть еще $\mathrm{R}_1\mathfrak{X}$ — класс групп, являющихся объединением возрастающей последовательности своих инвариантных $\mathfrak{X}$-подгрупп. Легко видеть,

что имеет место соотношение $\overline{\mathrm{R}}=\{\mathrm{R}_0, \mathrm{R}_1\}$. Кроме того, понятно соотношение $\overline{\mathrm{R}} = \mathrm{R}_1\mathrm{R}^\omega = \mathrm{FR}^\omega$.

2. Радикальное и наследственное радикальное замыкание классов. Как уже отмечалось, оператор Rad, сопоставляющий классу $\mathfrak{X}$ минимальный радикальный класс, содержащий $\mathfrak{X}$, имеет следующее простое строение: $\mathrm{Rad}=\overline{\mathrm{R}}\mathrm{H}$. Легко также видеть, что если $\mathfrak{X}$ — некоторый предрадикальный класс, то подкласс $\mathfrak{X}_0$ в $\mathfrak{X}$, состоящий из всех групп класса $\mathfrak{X}$, лежащих в $\mathfrak{X}$ вместе со своими гомоморфными образами, является уже радикальным классом. Здесь переход от $\mathfrak{X}$ к $\mathfrak{X}_0$ осуществляется оператором сужения классов.

Минимальный наследственный радикальный класс, содержащий заданный $\mathfrak{X}$, есть класс $\{\mathrm{R}, \mathrm{H}, \mathrm{I}\}\mathfrak{X}$. Мы не знаем, можно ли свести оператор $\{\mathrm{R}, \mathrm{H}, \mathrm{I}\}$ к некоторому конечному произведению операторов $\overline{\mathrm{R}}$, H и $\overline{\mathrm{I}}$. По-видимому, это сделать нельзя, так как операторы R и I взаимодействуют плохо. Можно отметить лишь следующее упрощение, которое часто помогает.

Предложение 7. *Имеет место формула*

$$\{\mathrm{R}, \mathrm{H}, \mathrm{I}\} = \overline{\mathrm{R}}\{\mathrm{R}_0, \mathrm{H}, \mathrm{I}\}.$$

Чтобы убедиться в справедливости этой формулы, достаточно проверить, что при любом $\mathfrak{X}$ класс $\mathrm{R}\{\mathrm{R}_0, \mathrm{H}, \mathrm{I}\}\mathfrak{X}$ замкнут относительно операторов R, H и I. Замкнутость относительно R и H очевидна, а замкнутость относительно I получаем с помощью теоремы 5. Обозначим $\mathfrak{X}_1 = \{\mathrm{R}_0, \mathrm{H}, \mathrm{I}\}\mathfrak{X}$. Из теоремы 5 следует: $\overline{\mathrm{R}}\,\mathfrak{X}_1 = \mathrm{V}\mathfrak{X}_1$, а оператор V уже хорошо взаимодействует с I : IV$\leqslant$VI. Поэтому класс $\mathrm{V}\mathfrak{X}_1$ замкнут относительно I.

Пусть далее ρ — отношение между группой и ее подгруппой. Через S_ρ обозначим оператор, сопоставляющий классу $\mathfrak{X}$ класс всех ρ-подгрупп групп класса $\mathfrak{X}$. Можно говорить о радикальных классах, наследственных по ρ-подгруппам, и поэтому желательно также знать строение оператора $\{\mathrm{R}, \mathrm{H}, \mathrm{S}_\rho\}$. Легко заметить, что если ρ — такое отношение, что $A\rho G$ влечет $(A \cap B)\rho B$ для любой достижимой подгруппы B группы G, то для такого ρ имеем $\mathrm{S}_\rho\mathrm{V} < \mathrm{VS}_\rho$. Если еще каждый нормальный делитель является ρ-подгруппой, то, как и выше, получаем соотношение: $\{\mathrm{R}, \mathrm{H}, \mathrm{S}_\rho\} = \overline{\mathrm{R}}\{\mathrm{R}_0, \mathrm{H}, \mathrm{S}_\rho\}$.

Рассмотрим применения к некоторым конкретным $\mathfrak{X}$. Пусть $\mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп. Ясно, что $\{\mathrm{R}_0, \mathrm{H}, \mathrm{S}\}\mathfrak{S} = \mathfrak{S}$. Поэтому наследственный по подгруппам радикальный класс, порожденный классом $\mathfrak{S}$, есть класс $\overline{\mathrm{R}}\mathfrak{S} = \mathrm{V}\mathfrak{S}$.

Все его группы локально разрешимы. Так как класс $\mathfrak{S}$ есть объединение классов $\mathfrak{A}^n$ по разным n ($\mathfrak{A}$ — класс всех абелевых групп), то, применяя соответствующую формулу из п. 6. 1, мы получаем еще включение $\overline{\mathrm{R}}\mathfrak{C} \subset (\overline{\mathrm{R}}\mathfrak{A})^\omega$. Здесь $\overline{\mathrm{R}}\mathfrak{A}$ есть класс беровских групп, а степень класса понимается как верхняя инвариантная степень.

Пусть теперь $\mathfrak{K}_\mu$ — класс всех групп, мощность которых меньше заданной бесконечной мощности μ. Понятно, что $\{\mathrm{R}_0, \mathrm{H}, \mathrm{S}\}\mathfrak{K}_\mu = \mathfrak{K}_\mu$, и отсюда следует, что $\{\mathrm{R}, \mathrm{H}, \mathrm{S}\}\mathfrak{K}_\mu = \overline{\mathrm{R}}\mathfrak{K}_\mu = \mathscr{V}\mathfrak{K}_\mu$. Также понятно, что если $\mathfrak{M}$ — класс нетеровых групп, то порожденный этим классом наследственный по подгруппам радикальный класс совпадает с $\overline{\mathrm{R}}\mathfrak{M}$. Кроме того, согласно [20] каждая группа из $\overline{\mathrm{R}}\mathfrak{M}$ обладает локальной системой из достижимых нетеровых подгрупп. Отметим здесь же, что из результатов работы [19] следует, что если $\mathfrak{F}$ — класс всех конечно-порожденных групп, то каждая группа из радикального класса $\overline{\mathrm{R}}\mathfrak{F}$ обладает локальной системой из достижимых конечно-порожденных подгрупп.

Пусть теперь $\mathfrak{X}$ — класс всех артиновых групп, т. е. групп с условием минимальности. Ясно, что $\{\mathrm{R}_0, \mathrm{H}, \mathrm{S}\}\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$, и поэтому соответствующий наследственный радикал есть $\overline{\mathrm{R}}\mathfrak{X} = \mathscr{V}\mathfrak{X}$.

Условимся дальше применять следующее обозначение: если A — некоторая группа, то $[A]$ обозначает класс всех групп, изоморфных A.

Предложение 8. *Пусть A — беровская группа и $\mathfrak{X} = \{\mathrm{R}, \mathrm{H}, \mathrm{I}\}[A]$. Тогда, если A — непериодическая группа, то $\mathfrak{X}$ есть класс всех беровских групп. Если A — периодическая группа и π — множество простых делителей порядков ее элементов, то $\mathfrak{X}$ есть класс всех беровских π-групп. В обоих случаях класс $\mathfrak{X}$ оказывается также наследственным по подгруппам.*

Доказательство. Пусть вначале A — непериодическая группа. Тогда в A имеется бесконечная циклическая подгруппа, скажем A_0. Так как A — беровская группа, то A_0 достижима в A, а из условия наследственности по нормальным делителям в $\mathfrak{X}$ следует, что $A_0 \in \mathfrak{X}$. В $\mathfrak{X}$ содержатся и все гомоморфные образы группы A_0, и поэтому класс $\mathfrak{X}$ содержит всевозможные циклические группы. Применяя к классу всех циклических групп оператор $\overline{\mathrm{R}}$, мы получаем класс всех беровских групп. Отсюда $\mathfrak{X}$ есть класс всех беровских групп.

Пусть теперь A — периодическая группа и π — соответствующее множество простых чисел. Как и выше, устанавливаем, что в классе $\mathfrak{X}$ содержатся циклические группы простых

порядков p_i по всем $p_i \in \pi$. Пусть A_0— одна из таких групп, и пусть ее порядок есть p. Обозначим: $A_0^{(2)} = A_0 \operatorname{wr} A_0, \ldots,$ $A_0^{(n)} = A_0^{(n-1)} \operatorname{wr} A_0, \ldots$ Группа $A_0^{(n)}$ нильпотентна и порождается своими (достижимыми) подгруппами порядка p. Следовательно, $A_0^{(n)} \in \mathfrak{X}$. В группе $A_0^{(n)}$ содержится в качестве достижимой подгруппы циклическая группа порядка p^n. Таким образом, установлено, что в классе $\mathfrak{X}$ содержатся циклические группы порядков p^n по всем n, а p здесь пробегает все множество π. Так как каждая беровская π-группа порождается своими циклическими достижимыми p-подгруппами с $p \in \pi$, то теперь ясно, что $\mathfrak{X}$ есть класс всех беровских π-групп.

Назовем здесь две группы A и B эквивалентными, если $\{\mathrm{R}, \mathrm{H}, \mathrm{I}\}[A] = \{\mathrm{R}, \mathrm{H}, \mathrm{I}\}[B]$. Мы видели сейчас, что если A и B — непериодические беровские группы, то они эквивалентны. Если A и B — периодические беровские группы, то эквивалентность их равносильна совпадению соответствующих π. Рассмотрение признаков радикальной эквивалентности групп приводит к различным интересным задачам. В частности, В. Г. Виляцер и А. С. Хахутаишвили (работа готовится к печати) рассматривали некоторые признаки радикальной эквивалентности сплетений.

Многие интересные задачи связаны с рассмотрением условий подобной радикальной эквивалентности классов групп.

3. Оператор специального радикального замыкания. В приложениях к индивидуальным группам, особенно в задачах, связанных с рассмотрением бесконечно возрастающих нормальных рядов, важную роль играют специальные радикалы, т. е. радикалы, согласованные с субинвариантными подгруппами. Если ρ — свойство подгруппы быть субинвариантной, то соответствующий R_ρ обозначим $\widetilde{\mathrm{R}}$. Если $\mathfrak{X}$ — произвольный класс групп, то его специальное радикальное замыкание есть класс $\widetilde{\mathrm{R}}\mathrm{H}\mathfrak{X}$.

Обозначим еще через $\widetilde{\mathrm{R}}_1\mathfrak{X}$ класс групп, являющихся бъединением возрастающей нормальной последовательности из $\mathfrak{X}$-подгрупп.

Теорема 6 [21]. *Имеет место следующая формула:* $\widetilde{\mathrm{R}} = \{\widetilde{\mathrm{R}}_1, \mathrm{R}_0\}$. *В частности, радикальный класс* $\mathfrak{X}$ *тогда и только тогда является специальным радикальным классом, когда он* $\widetilde{\mathrm{R}}_1$*-замкнут.*

В этой теореме также содержится следующее утверждение. Если $\mathrm{L}\mathfrak{X}$ — класс всех групп, обладающих локальной системой из $\mathfrak{X}$-подгрупп, то каждый L-замкнутый радикальный класс является специальным радикальным классом. Для таких

сильных специальных радикальных классов $\mathfrak{X}$ (при дополнительном условии наследственности) справедливо также следующее утверждение [4]: если A — локально субинвариантная подгруппа в G, то $\mathfrak{X}(A) \subset \mathfrak{X}(G)$. При этом A локально субинвариантна в G, если в G имеется локальная система из содержащих A подгрупп, в каждой из которых A субинвариантна.

В п. 2. 3 мы определили отношения $\rho(\mu)$ для бесконечных мощностей μ. Соответствующий оператор $\mathrm{R}_{\rho(\mu)}$ мы обозначим через R_μ. Ясно, что при любом $\mathfrak{X}$ класс $\widetilde{\mathrm{R}}\mathfrak{X}$ есть объединение классов $\mathrm{R}_\mu\mathfrak{X}$ по всем μ, а если μ_0 — первая бесконечная мощность, то $\mathrm{R}_{\mu_0}\mathfrak{X} = \overline{\mathrm{R}}\mathfrak{X}$. Легко также видеть, что всегда имеет место соотношение

$$\{\mathrm{R}_\mu, \mathrm{H}\} = \mathrm{R}_\mu \mathrm{H}.$$

Следующая теорема посвящена строению операторов $\widetilde{\mathrm{R}}$ и R_μ в применении к некоторым специальным классам $\mathfrak{X}$.

Т е о р е м а 7. *Пусть все группы класса $\mathfrak{X}$ нетеровы, $\mathrm{R}_0\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$ и $\mathrm{I}\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$. Тогда $\widetilde{\mathrm{R}}\mathfrak{X}$ есть класс групп, обладающих локальной системой из субинвариантных $\mathfrak{X}$-подгрупп. $\mathrm{R}_\mu\mathfrak{X}$ есть класс групп, обладающих локальной системой из $\mathfrak{X}$ подгрупп, достижимых в число шагов, меньшее μ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы непосредственно следует из основного результата работы [20]. Кроме того, из этого же результата легко вывести, что в произвольной группе композит двух ее субинвариантных нетеровых подгрупп снова является субинвариантной нетеровой подгруппой.

Подобно тому, как применялась теорема 5, теорема 7 применяется при построении наследственных специальных радикальных замыканий классов групп. Однако действие этой теоремы ограничено дополнительным условием нетеровости. Было бы интересно исследовать, в какой мере это условие можно ослаблять. Отметим по этому поводу некоторые задачи.

П р о б л е м а 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп, являющихся расширениями артиновых групп с помощью нетеровых. Верно ли, что специальный радикальный класс $\widetilde{\mathrm{R}}\mathfrak{X}$ наследственен по подгруппам?*

Заметим здесь, что, как известно из [22], композит двух субинвариантных артиновых подгрупп в произвольной группе есть снова субинвариантная артинова подгруппа.

П р о б л е м а 3. *Пусть $\mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп и $G \in \widetilde{\mathrm{R}}\mathfrak{S}$. Верно ли, что каждое конечное множество элементов из G содержится в некоторой субинвариантной разрешимой подгруппе? Верно ли, хотя бы, что G локально разрешима?*

Легко понять, что $\widetilde{\mathrm{R}}\mathfrak{S} \subset (\widetilde{\mathrm{R}}\mathfrak{A})^{\omega}$.

Проблема 4. *Пусть* μ *— бесконечная мощность и* $\mathfrak{N}_\mu$ *— класс всех групп, мощности которых меньше* μ. *Будет ли радикальный класс* $\widetilde{\mathrm{R}}\mathfrak{N}_\mu$ *наследственным по подгруппам?*

Следующие задачи относятся к операторам R_μ.

Проблема 5. *Существуют ли такие классы групп* $\mathfrak{X}$, *для которых все* $\mathrm{R}_\mu\,\mathfrak{X}$ *различны?*

Большего требуется в следующей задаче.

Проблема 6. *Существует ли такой класс групп* $\mathfrak{X}$, *что для любых двух различных мощностей* μ_α и μ_β, $\mu_\alpha < \mu_\beta$, *можно указать группу* G, *что* $G \in \mathrm{R}_{\mu_\beta}\,\mathfrak{X}$ и $\mathrm{R}_{\mu_\alpha}\,\mathfrak{X}\,(G) = E$?

Возможно, что две последние проблемы решатся положительно уже на классе абелевых групп или на классе всех конечных групп. Если $\mathfrak{A}$ — класс всех абелевых групп, то $\widetilde{R}\mathfrak{A}$ есть класс всех *наднильпотентных* групп, т. е. групп, в которых каждая циклическая подгруппа субинвариантна. Этот факт известен, и он также легко следует из теоремы 7. Из этой же теоремы почти непосредственно выводится, что $\mathrm{R}_\mu\,\mathfrak{A}$ есть класс групп, в которых циклические подгруппы достижимы в число шагов $< \mu$ (по мощности) — μ-достижимы. Группы класса $\mathrm{R}_\mu\,\mathfrak{A}$ назовем μ-*наднильпотентными* группами. Если G — произвольная группа, то $\widetilde{\mathrm{R}}\,\mathfrak{A}\,(G)$ есть множество всех субинвариантных элементов, а $\mathrm{R}_\mu\,\mathfrak{A}\,(G)$ — множество всех μ-достижимых элементов из G. При этом элемент μ-достижим (субинвариантен), если такова порожденная им циклическая подгруппа.

Отмечавшуюся выше проблему 6 в применении к классу абелевых групп можно теперь сформулировать следующим образом.

Проблема 7. *Пусть* μ_α *и* μ_β *— две различные бесконечные мощности и* $\mu_\alpha < \mu_\beta$. *Существует ли такая группа* G, *что все ее элементы* μ_β*-достижимы и в* G *нет* μ_α*-достижимых элементов.*

4. Строгие радикалы. Как уже отмечалось, это радикалы, являющиеся идемпотентами в полугруппе всех радикалов, или, что то же, — это радикальные классы, замкнутые по расширениям. Пусть $\mathrm{E}\,\mathfrak{X}$ ($\mathrm{Ext}\,\mathfrak{X}$) есть класс $\mathfrak{X}\mathfrak{X}$ — класс всех групп, являющихся расширениями $\mathfrak{X}$-групп с помощью $\mathfrak{X}$-групп. Замыкание этого оператора E — оператор $\overline{\mathrm{E}}$ сопоставляет классу $\mathfrak{X}$ класс всех групп, обладающих конечными нормальными рядами с $\mathfrak{X}$-факторами. Понятно, что $\overline{\mathrm{E}} = \mathrm{E}^{\omega}$. Легко также видеть, что $\mathrm{H}\overline{\mathrm{E}} < \overline{\mathrm{E}}\mathrm{H}$ и $\mathrm{S}\overline{\mathrm{E}} < \overline{\mathrm{E}}\mathrm{S}$, и поэтому $\{\mathrm{H}, \mathrm{E}\} = \overline{\mathrm{E}}\mathrm{H}$ и $\{\mathrm{S}, \mathrm{E}\} = \overline{\mathrm{E}}\mathrm{S}$.

Строгое радикальное замыкание осуществляется оператором $\{R, H, E\}$. Для представления этого оператора и некоторых подобных ему в явном виде введем некоторые другие операторы.

$J{:}J\mathfrak{X}$ есть класс групп, обладающих возрастающим инвариантным рядом, все факторы которого принадлежат классу $\mathfrak{X}$.

$N{:}N\mathfrak{X}$ класс групп, обладающих возрастающим нормальным рядом с $\mathfrak{X}$- факторами.

$N_0 : N_0\mathfrak{X}$ —класс групп, обладающих возрастающим нормальным рядом, все члены которого достижимы по этому ряду в группе и все факторы которого принадлежат классу $\mathfrak{X}$.

N_μ: класс $N_\mu\,\mathfrak{X}$ определяется так же, как и класс $N_0\mathfrak{X}$, но только условие достижимости заменяется условием μ-достижимости.

Очевидно, что операторы N, N_0 и все N_μ являются операторами замыкания, а оператор J таковым не является.

С помощью этих операторов несколько известных теорем теории радикала могут быть записаны следующими формулами.

Теорема 8.

1. $\{R, H, E\} = J^{\omega+1}H = N_0H = J\overline{R}H.$
2. $\{R, H, E\} = \overline{NH} = JR\overline{H}.$
3. $\{R_\mu, H, E\} = N_\mu H = JR_\mu H.$

Доказательства формул 1) и 2) можно найти в работах А. Г. Куроша [3], К. К. Щукина [11] и Б. И. Плоткина [18]. Теми же методами доказываются и формулы 3). Понятно, что формулы 2) описывают специальное строгое радикальное замыкание, а формулы 3) играют аналогичную роль для оператора R_μ. Из формул, относящихся к специльным радикалам, в частности, вытекает следующее важное замечание: *если $\mathfrak{X}$ — специальный радикальный класс, то* $N\mathfrak{X} = J\mathfrak{X}$.

Заметим еще, что в формулах 1) оценка $\omega+1$ является точной. Это вытекает из одного результата Л. Ковача и Б. Неймана [23]. Ими показано, что если $\mathfrak{A}$ — класс всех абелевых групп, то следующая последовательность классов

$$\mathfrak{A} \subset J\mathfrak{A} \subset \ldots \subset J^n\mathfrak{A} \subset J^{n+1}\mathfrak{A} \subset \ldots$$

является строго возрастающей. Отсюда сразу следует упомянутое нами утверждение о точности оценки. С другой стороны, кажется, еще не решена следующая задача А. Г. Куроша.

Проблема 8. *Существует ли для каждого n такой класс групп $\mathfrak{X}$, что $J^nH\mathfrak{X}$ — уже строгий радикальный класс, но $J^{n-1}H\mathfrak{X}$ таким не является?*

В отличие от оператора Rad оператор строго радикального замыкания уже хорошо взаимодействует с операторами, связанными с условиями наследственности. Здесь, как правило, если исходный класс $\mathfrak{X}$ наследственен, то таково же и его замыкание. Мы не будем на этом останавливаться подробно и отметим еще следующее предложение, также связанное с условиями наследственности.

Пусть ρ — отношение между группой и ее подгруппой, пусть оно транзитивно, сохраняется при эпиморфизмах и при взятии полных прообразов эпиморфизмов, и пусть еще $A\rho G$ влечет $(A \cap B)\rho B$ для любой подгруппы B из G. Для каждого такого ρ имеем:

Предложение 9. *Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый строгий радикальный класс. Обозначим через $\mathfrak{X}_\rho$ класс всех групп из $\mathfrak{X}$, лежащих в $\mathfrak{X}$ вместе со всеми своими ρ-подгруппами. Тогда $\mathfrak{X}_\rho$ — ρ-наследственный строгий радикальный класс. Если $\mathfrak{X}$ специальный, то таков же и $\mathfrak{X}_\rho$.*

Доказательство здесь сводится к простой проверке условий, и мы его опускаем.

§ 5. Корадикальное замыкание классов

1. Еще несколько операторов. Условимся в следующих обозначениях. Если $\mathfrak{X}$ — некоторый класс групп, то через $\urcorner\mathfrak{X}$ будем обозначать класс всех групп, в которых нет неединичных достижимых $\mathfrak{X}$-подгрупп. Через $\llcorner\mathfrak{X}$ обозначим класс всех групп, никакой нетривиальный гомоморфный образ которых не является $\mathfrak{X}$-группой. Другими словами, $G \in \llcorner\mathfrak{X}$, если $\mathfrak{X}^*(G) = G$. Здесь мы также имеем дело с операторами на классах групп, однако эти операторы уже не являются монотонными.

Согласно определению, группа G тогда и только тогда принадлежит классу $\llcorner\urcorner\mathfrak{X}$, когда каждый нетривиальный гомоморфный образ этой группы обладает нетривиальной достижимой $\mathfrak{X}$-подгруппой. Если класс $\mathfrak{X}$ замкнут относительно гомоморфизмов, то мы приходим к равенству $\llcorner\urcorner\mathfrak{X} = \mathrm{N}_0\mathfrak{X}$. Таким образом, можно заметить, что равенство $\llcorner\urcorner\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$ вместе с $\mathrm{H}\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$ означает строгую радикальность класса $\mathfrak{X}$.

Рассмотрим аналогичным образом класс $\urcorner\llcorner\mathfrak{X}$. Включение $G \in \urcorner\llcorner\mathfrak{X}$ означает, что каждая нетривиальная достижимая подгруппа из G обладает нетривиальным гомоморфным образом, принадлежащим классу $\mathfrak{X}$. Легко видеть, что при этом условии в группе G имеется убывающий инвариантный ряд, все факторы которого аппроксимируются $\mathfrak{X}$-группами.

Введем еще два оператора.

$\mathrm{Co\,J} : \mathrm{Co\,J}\mathfrak{X}$ — класс групп, обладающих убывающим инвариантным рядом с $\mathfrak{X}$-факторами.

$\mathrm{Co\,N} : \mathrm{Co\,N}\mathfrak{X}$ — класс групп, обладающих убывающим нормальным рядом с $\mathfrak{X}$-факторами.

Легко проверяется следующее соотношение.

Предложение 10. *Если класс $\mathfrak{X}$ наследственен по нормальным делителям* ($\mathrm{I}\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$), *то имеет место равенство*

$$\urcorner\llcorner\,\mathfrak{X} = \mathrm{Co\,J\,Co\,R}\,\mathfrak{X}$$

Класс $\mathfrak{X}$, удовлетворяющий условиям $\mathrm{I}\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$ и $\mathrm{Co\,J\,Co\,R}\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$ является полупростым классом — строгим корадикальным классом. Таким образом, мы видим, что полупростые классы — это также такие классы $\mathfrak{X}$, что $\mathrm{I}\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$ и $\urcorner\llcorner\,\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$.

2. Корадикальное и строгое корадикальное замыкание классов. Корадикальное замыкание классов осуществляет оператор $\{\mathrm{Co\,R}, \mathrm{I}\}$. Мы уже видели, что имеет место соотношение $\{\mathrm{Co\,R}, \mathrm{I}\} = \mathrm{Co\,R\,\bar{I}}$. Этот оператор двойственен оператору радикального замыкания. Оператор, двойственный оператору наследственного радикального замыкания, есть оператор $\{\mathrm{CoR}, \mathrm{I}, \mathrm{H}\}$. Последний оператор, как уже отмечалось, совпадает с оператором $\mathrm{H\,Co\,R}$, сопоставляющим каждому классу групп многообразие, порожденное этим классом.

Перейдем теперь к строгим корадикальным замыканиям. Следующая теорема может быть выведена из результатов А. Г. Куроша [3] и Чан-Ван-Хао [24].

Теорема 9. *Имеют место следующие равенства*:

$$\{\mathrm{Co\,R}, \mathrm{I}, \mathrm{E}\} = \mathrm{Co\,N\,\bar{I}} = \mathrm{Co\,J\,Co\,R\,\bar{I}} = (\mathrm{Co\,J})^2\bar{\mathrm{I}}.$$

Из этой теоремы следует, в частности, что если класс $\mathfrak{X}$ является корадикальным классом, то $\mathrm{Co\,N}\,\mathfrak{X} = \mathrm{Co\,J}\,\mathfrak{X}$.

Теорема 10 (Ср. А. Г. Курош [3]). *Если* $\mathrm{H}\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$, *то* $\urcorner\,\mathfrak{X}$ *— строгий корадикальный класс. Если* $\mathrm{I}\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$, *то* $\urcorner\,\mathfrak{X}$ *— строгий радикальный класс.*

Кроме того, мы уже видели, что если $\mathfrak{X}$ — строгий радикальный класс, то $\llcorner\urcorner\,\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$, и если $\mathfrak{X}$ — строгий корадикальный класс, то $\urcorner\llcorner\,\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$.

Дополним эту теорему следующим легко проверяемым предложением.

Предложение 11. *Если $\mathfrak{X}$ — специальный радикальный класс, то класс $\urcorner\,\mathfrak{X}$ наследственен по субинвариантным подгруппам. Если класс $\mathfrak{X}$ наследственен по субинвариант-*

ным подгруппам, то $\sqsupset \mathfrak{X}$ *— специальный строгий радикальный класс.*

В этом предложении можно также исходить из некоторого общего отношения ρ между группой и ее подгруппой и связать аналогичным образом ρ-согласованность радикального класса и ρ-наследственность полупростого класса.

Теорема 10 устанавливает взаимнооднозначное соответствие между полупростыми и строгими радикальными классами, причем специальные строгие радикальные классы находятся во взаимнооднозначном соответствии с полупростыми классами, наследственными по субинвариантным подгруппам.

3. Радикальные и одновременно корадикальные классы. Докажем следующее предложение.

Предложение 12. *Если класс групп* $\mathfrak{X}$ *является одновременно радикальным и корадикальным классом, то* $\mathfrak{X}$ *есть класс всех групп.*

Доказательство. Из условий следует, что $\mathfrak{X}$ есть многообразие (этот $\mathfrak{X}$ замкнут относительно операторов H и CoR) и в $\mathfrak{X}$ содержится некоторая циклическая группа простого порядка p. Как и в предложении 8 с помощью сплетений теперь устанавливаем, что в $\mathfrak{X}$ лежат все циклические p-группы. Бесконечная циклическая группа аппроксимируется такими p-группами, и поэтому в $\mathfrak{X}$ имеется бесконечная циклическая группа. Но тогда в $\mathfrak{X}$ содержится весь класс беровских групп, в частности все нильпотентные группы. С помощью оператора CoR мы включаем в $\mathfrak{X}$ все свободные группы. Применяя дальше H-замкнутость, получаем нужное свойство.

Заметим еще, что указанное предложение перестает быть верным, если во всех рассмотрениях в качестве исходного класса брать не класс всех групп, а некоторый его подкласс. Например, оно не верно в классе всех абелевых групп.

К приведенным только что рассмотрениям примыкает также интересный вопрос о задании радикальных классов формулами некоторых логических языков. Из предложения 12 следует, что если радикальный класс является одновременно многообразием, то такой класс совпадает с классом всех групп. Аналогичная ситуация сохраняется, если многообразия заменить здесь квазимногообразиями. Вообще можно утверждать, что *если радикальный класс групп определяется универсальными формулами УИП, то такой класс есть класс всех групп.* Для доказательства последнего утверждения нужно вспомнить следующие факты теории моделей [25] . Класс групп, определяемый универсальными формулами УИП, — это класс, опреде-

ляемый вообще некоторыми формулами УИП и наследственный по подгруппам. Известно также, что если класс групп аксиоматизируем формулами УИП, то из замкнутости этого класса относительно прямых произведений следует замкнутость относительно декартовых произведений. Дальше остается применить предложение 12.

Естественно поставить теперь следующий вопрос.

Проблема 9. *Существуют ли нетривиальные радикальные классы групп, определяемые формулами УИП?*

Корадикальные классы с этим свойством, конечно, существуют.

§ 6. Действия с радикальными и корадикальными классами

1. Полугруппа радикальных классов. Уже отмечалось, что система всех радикальных классов является замкнутой по умножению ассоциативной системой. Мы называем эту систему полугруппой, хотя она и не является множеством. Элементы этой полугруппы будем называть также радикалами, имея в виду существование изоморфизма. Приведем еще попутно три формулы, имеющие отношение к полугрупповому свойству радикалов:

$$H[\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2] \subset (H\mathfrak{X}_1)(H\mathfrak{X}_2);\ I[\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2] \subset (I\mathfrak{X}_1)(I\mathfrak{X}_2),$$

и, если

$$H\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_1,\ H\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}_2,$$

$$\bar{R}[\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2] \subset (\bar{R}\mathfrak{X}_1)(\bar{R}\mathfrak{X}_2).$$

Эти формулы очевидны, и нетрудно заметить, что все включения здесь строгие.

Один из возможных способов классификации радикалов — это рассмотрение их с точки зрения поведения в полугруппе всех радикалов. Да и сама полугруппа кажется заслуживающим внимания объектом. В отличие от полугруппы многообразий она не свободна. Здесь имеются идемпотенты — строгие радикалы, не каждый радикал представим как произведение неразложимых, ряд соотношений возникает за счет наличия бесконечных произведений. Все эти отклонения от свободы остаются и в полугруппе всех наследственных радикалов. Полугруппе наследственных радикалов посвящена работа [6]. В ней выделены некоторые свободные системы радикалов, рас-

смотрены некоторые критерии неразложимости радикалов. Так, например, *каждый наследственный радикал, порожденный произвольным классом разрешимых групп, является неразложимым элементом в полугруппе всех наследственных радикалов.* Аналогичным свойством обладают и *малые радикалы*, т. е. радикалы, порождаемые множеством групп. С. М. Вовси [26] показал, что *каждый наследственный радикал, не являющийся идемпотентом, является свободным, и даже абсолютно свободным, радикалом* — все его степени, в том числе и бесконечные, различны. Другими словами, если $\mathfrak{X}$ — нестрогий наследственный радикал, то ни при каком порядковом числе α радикал $\mathfrak{X}^{\alpha}$ не является строгим. Двойственное утверждение имеет место для предмногообразий. Независимо от С. М. Вовси его доказал Л. М. Мартынов. С. М. Вовси заметил также, что строгий наследственный радикал не может нетривиально раскладываться в произведение наследственных радикалов. Следовательно, если из полугруппы всех наследственных радикалов удалить идемпотенты, то оставшаяся часть также будет полугруппой, и все ее элементы свободны.

В этой полугруппе свободных радикалов имеются соотношения, и мы не знаем, реальна ли задача описания всех этих соотношений. С другой стороны, отметим следующую проблему.

Проблема 10. *Имеются ли нетривиальные соотношения в полугруппе, порожденной неразложимыми наследственными радикалами?*

Задача описания всех неразложимых радикалов кажется в общем нереальной. Однако можно ставить такую задачу в некоторых специальных случаях. Отметим следующую проблему.

Проблема 11. *Исследовать неразложимые наследственные радикалы в классе локально конечных p-групп.*

Полное описание здесь также, по-видимому, нереально. Однако можно надеяться выделить интересные серии.

Как уже отмечалось, двойственный объект к наследственному радикалу есть многообразие. Так что в известной степени полугруппа наследственных радикалов двойственна полугруппе многообразий. Полугруппа многообразий, в свою очередь, содержится в полугруппе всех корадикалов. Об этой последней полугруппе пока ничего интересного неизвестно.

2. Объединения и пересечения радикалов. Пусть $[\mathfrak{X}_\alpha]$ — некоторый набор классов групп. Легко проверяется следующая формула:

$$\overline{\mathrm{R}}\left[\bigcup_{\alpha} \mathfrak{X}_\alpha\right] = \mathrm{R}\left[\bigcup_{\alpha} \overline{\mathrm{R}}\, \mathfrak{X}_\alpha\right].$$

Если при этом все $\mathfrak{X}_\alpha$ — предрадикальные классы, то

$$\bigcup_\alpha \mathfrak{X}'_\alpha = (\mathrm{R}[\bigcup_\alpha \mathfrak{X}_\alpha])' = (\bigcup_\alpha \mathfrak{X}_\alpha)'.$$

Легко также видеть, что если все $\mathfrak{X}_\alpha$ —радикальные классы, то и композит $\mathrm{R}[\bigcup_\alpha \mathfrak{X}_\alpha]$ также является радикальным классом. Пересечение радикальных классов также является радикальным классом, и пересечение наследственных радикальных классов есть наследственный радикальный класс. Если все $\mathfrak{X}_\alpha$ — наследственные радикалы,то имеем $(\bigcap_\alpha \mathfrak{X}_\alpha)' = \bigcap_\alpha \mathfrak{X}'_\alpha$.

К сожалению, наследственность теряется при взятии композита радикальных классов.

Перечислим сейчас несколько легко проверяемых фактов о связи композита и пересечения с умножением. Имеет место следующая левая дистрибутивность: $\mathfrak{X}(\mathrm{R}[\bigcup_\alpha \mathfrak{X}_\alpha]) = \mathrm{R}[\bigcup_\alpha \mathfrak{X}\mathfrak{X}_\alpha]$. Соответствующая правая дистрибутивность не выполняется и имеет место лишь включение $\mathrm{R}[\bigcup_\alpha \mathfrak{X}_\alpha \mathfrak{X}] \subset \mathrm{R}[\bigcup_\alpha \mathfrak{X}_\alpha]\mathfrak{X}$. Для пересечений имеем $\mathfrak{X}(\bigcap_\alpha \mathfrak{X}_\alpha) = \bigcap_\alpha \mathfrak{X}\mathfrak{X}_\alpha$. Правая дистрибутивность здесь не выполняется. Однако, если α пробегает конечное множество и все рассматриваемые радикалы наследственны по подгруппам, соответствующая правая дистрибутивность имеет место.

Дальше о корадикалах. Если все $\mathfrak{X}_\alpha$ — корадикалы, то таков же и класс $\bigcap_\alpha \mathfrak{X}_\alpha$. Объединение корадикальных классов не является корадикальным — к этому объединению нужно применить еще оператор CoR. Отметим теперь формулу: $(\mathrm{Co\,R}[\bigcup_\alpha \mathfrak{X}_\alpha])^* = \bigcap_\alpha \mathfrak{X}^*_\alpha = (\bigcup_\alpha \mathfrak{X}_\alpha)^*$. Имея в виду связь с умножением, отметим, что имеет место правая дистрибутивность $\mathrm{Co\,R}[\bigcup_\alpha \mathfrak{X}_\alpha]\mathfrak{X} = \mathrm{Co\,R}[\bigcup_\alpha \mathfrak{X}_\alpha \mathfrak{X}]$. Для радикальных классов мы имели в аналогичной ситуации левую дистрибутивность, а правая там не выполнялась. Здесь (для корадикалов) нет левой дистрибутивности. Для пересечений имеем $(\bigcap_\alpha \mathfrak{X}_\alpha)\mathfrak{X} = \bigcap_\alpha (\mathfrak{X}_\alpha \mathfrak{X})$.

В заключение отметим, что многие результаты о действиях с радикалами доказываются с помощью сплетений. В связи с этим в работах [6] и [26] приводятся некоторые правила вычисления радикалов в сплетениях групп.

§ 7. Радикалы в индивидуальных группах

1. Вычисление радикала в группе. В ряде случаев радикал в конкретной группе может быть охарактеризован как множество элементов группы с определенными свойствами. Подобную характеристику имеют, например, радикал Бера, наднильпотентный и локально нильпотентный радикалы. Аналогичную характеристику можно дать и всем μ-наднильпотентным радикалам.

В работе [20] содержится один общий прием получения таких элементных характеристик радикалов. Заметим еще, что некоторые известные факты о том, что множество всех элементов группы с некоторым заданным свойством есть подгруппа, могут быть также получены через радикалы. Ряд теорем посвящен элементной характеристике радикалов в группах с определенными свойствами. Так, например, если группа обладает возрастающим нормальным рядом с локально нетеровыми факторами, то в такой группе ее локально нильпотентный радикал совпадает с множеством всех нильэлементов.

Для каждой конкретной группы можно ставить вопрос об описании всех ее радикалов — значений в ней всех радикальных функториалов. В связи с этим заметим, что нетрудно привести необходимые и достаточные условия, накладываемые на подгруппу в группе, при которых эта подгруппа оказывается радикалом по некоторому радикальному классу. Подобные условия можно привести и для корадикалов.

2. Радикалы и структурные схемы. В теории групп известны различные структурные схемы, помогающие в исследовании конкретных групп. Часто в таких схемах участвуют радикалы и корадикалы. При этом, как правило, радикалы работают в тех случаях, когда речь идет о возрастающих нормальных рядах, а корадикалы применяются в задачах, связанных с убывающими нормальными рядами.

Многие применения связаны с рассмотрением условий конечности. При этом часто используют не только абсолютные радикалы, но и радикалы заданных классов — при наличии условий конечности некоторые, вообще не радикальные, классы оказываются радикальными.

В применениях большую роль играет тот факт, что радикал часто ограничивает группу — содержит свой централизатор. По поводу условий, когда это свойство имеет место, существует несколько теорем. В списке литературы можно найти ряд работ по затронутым здесь вопросам.

В дополнение к уже приводившимся проблемам назовем некоторые другие.

Проблема 12. *Существует ли радикальный класс групп, более широкий, чем класс локально нильпотентных групп, и состоящий из групп, обладающих центральной системой?*

Проблема 13. *Верно ли, что для каждого радикала* $\mathfrak{X}$ *имеет место следующее свойство: если* G *— локально нильпотентная группа без кручения, то* $\mathfrak{X}(G)$ *— изолированная подгруппа в* G*?*

Проблема 14. *Порождается ли локально нильпотентный радикал своими группами без кручения?*

Проблема 15. *Может ли группа обладать более чем одним, но конечным числом максимальных локально разрешимых нормальных делителей?*

Бесконечное число таких нормальных делителей может быть [28].

Следующие проблемы посвящены радикалам в некоторых конкретных классах групп. Нетрудно описать все наследственные радикалы в классах n-ступенно нильпотентных групп (при любом n) и в классе всех нильпотентных групп [29]. Подобную задачу можно ставить для случая, когда нильпотентность заменяется разрешимостью. Мы ограничимся здесь следующей задачей.

Проблема 16. *Описать все наследственные радикалы в классе двуступенно разрешимых групп. То же в классе полициклических групп.*

В работе А. Г. Куроша [3] показано, как находятся все наследственные строгие радикалы в классе конечных групп. Отметим теперь следующую задачу.

Проблема 17. *Найти все наследственные радикалы в классе конечных групп.*

Проблема 18. *Исследовать полугруппу наследственных радикалов в классе конечных групп.*

Обозначим сейчас указанную полугруппу через Σ. Нетрудно понять, что Σ имеет мощность континуум. Естественно поставить также вопрос об описании неразложимых элементов в Σ. Отметим сейчас несколько частных вопросов по этому поводу. Пусть S_n есть элемент в Σ, порожденный классом всех n-ступенно разрешимых (конечных) групп и $\mathfrak{N}$ — класс всех конечных нильпотентных групп. Так как $\mathfrak{N}$ — радикальный класс (радикал Фиттинга), то $S_n \subset \mathfrak{N}^n$. По-видимому, здесь включение строгое. Если это так, то возникает вопрос о неразложимости всех S_n. Этот вопрос навеян положительным ответом на подобный вопрос для радикалов в классе всех групп. Назо-

вем, далее, радикал из Σ малым, если он порождается одной группой. Малыми радикалами являются, в частности, радикалы, состоящие из всех конечных p-групп для каждого фиксированного p. Каждый такой радикал является идемпотентом. С другой стороны, кажется правдоподобным, что если малый радикал отличен от названных, то он неразложим. Радикал назовем простым, если он порождается некоторым набором простых некоммутативных групп. Простой нильрадикал — это радикал, порожденный набором простых коммутативных групп. Можно доказать (А. С. Хахутаишвили), что произведение простых радикалов не может быть малым радикалом. Неизвестно, однако, верно ли подобное утверждение для произведения простых нильрадикалов, не являющегося идемпотентом. Отметим еще следующий вопрос: верно или нет, что подрадикал малого радикала также мал?

Исследований по радикалам в конечных группах почти нет, и нам кажется, что здесь может возникнуть интересная проблематика.

Перед тем, как сформулировать следующую задачу, принадлежащую Ф. Холлу, сделаем несколько замечаний о радикалах, возникающих из классов простых групп.

Пусть $\mathfrak{P}$ — некоторый абстрактный класс простых групп и пусть $\mathfrak{X}$ — класс всех групп, не входящих в класс $\mathfrak{P}$. Класс $\mathfrak{X}$ является предрадикальным, но не радикальным классом. Нетрудно также понять, что $\mathfrak{X}$ тогда и только тогда является специальным предрадикальным классом, когда все группы из $\mathfrak{P}$ строго простые, т. е. не содержат собственных субинвариантных подгрупп. Пусть далее $\mathfrak{X}_1$ — класс всех групп, лежащих в $\mathfrak{X}$ вместе со всеми своими гомоморфными образами. Ясно, что $\mathfrak{X}_1 = \sqsupset \mathfrak{P}$ и этот класс является строгим радикальным классом. Если все группы из $\mathfrak{P}$ строго простые, то $\mathfrak{X}_1$ — специальный радикал.

Введем еще класс $\mathfrak{X}_2$, состоящий из всех групп, лежащих в $\mathfrak{X}_1$ вместе со всеми своими подгруппами. Этот класс является наследственным по подгруппам строгим радикальным классом.

Допустим теперь, что исходный класс $\mathfrak{P}$ состоит из всех абсолютно простых групп (некоммутативных групп без нетривиальных нормальных систем). Соответствующий $\mathfrak{X}_2$ обозначим сейчас через $\mathfrak{H}$. Легко понять, что класс $\mathfrak{H}$ состоит из всех групп G, таких, что если $B \subset G$ и $A \lhd B$, то группа B/A обладает разрешимой нормальной системой (является RN-группой). В классе $\mathfrak{H}$ вообще имеются простые некоммутативные группы. Чтобы их исключить, возьмем за исходный

$\mathfrak{P}$ класс всех некоммутативных простых групп и соответствующий $\mathfrak{X}_2$ обозначим через $\mathfrak{H}_0$. Ясно, что $\mathfrak{H}_0 < \mathfrak{H}$. Класс $\mathfrak{H}_0$ может быть определен еще следующим образом: возьмем класс всех RN-групп, затем в этом классе возьмем все группы, никакой гомоморфный образ которых не является простой некоммутативной группой, а затем в последнем классе возьмем все группы, лежащие там вместе со всеми своими подгруппами. Так придем к классу $\mathfrak{H}_0$.

Легко видеть, что класс $\mathfrak{H}$ замкнут относительно оператора L, и поэтому является специальным радикальным классом. Сформулируем теперь следующую проблему из [7].

Проблема 19. *Является ли специальным радикальный класс* $\mathfrak{H}_0$?

Отмеченные Ф. Холлом радикальные классы $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_0$ являются наиболее широкими радикалами разрешимого типа. В классе $\mathfrak{H}$ содержатся, например, все группы, обладающие возрастающим нормальным рядом с локально радикальными факторами. Неизвестно, однако, лежат ли все такие группы в $\mathfrak{H}_0$. В связи с этим заметим, что, отвечая на один вопрос Ф. Холла, Б. Хартли и С. Стонехевер недавно показали [30], что все локально радикальные группы лежат в классе $\mathfrak{H}_0$.

При этом, как и в [21], радикальные группы — это группы, обладающие возрастающим нормальным рядом с локально нильпотентными факторами. Такие группы составляют специальный радикальный класс, хотя этот класс и не замкнут относительно оператора L.

Литература

1. Курош А. Г. Радикалы колец и алгебр. — Матем. сб., 1953, **33**, 13—26.
2. Amitsur S. A general theory of radicals. — Amer. J. Math. 1952, **74**, 774—786; 1954, **76**, 100—136.
3. Курош А. Г. Радикалы в теории групп. — Сиб. матем. ж., 1962, **3**, № 6, 912—932.
4. Плоткин Б. И. Группы автоморфизмов алгебраических систем. М., 1966.
5. Плоткин Б. И. О функториалах, радикалах и корадикалах в группах. — Матем. зап. Свердловского ун-та, 1970, **7**, № 3, 150—183.
6. Плоткин Б. И. О полугруппе радикальных классов. — Сиб. матем. ж., 1969, **10**, № 5, 1091—1108.
7. Hall Ph. On non-strictly simple groups. — Proc. Camb. Phil. Soc., 1963, **59**, № 3, 531—553.
8. Когаловский С. Р. К теореме Биркгофа. — Усп. матем. наук, 1965, **20**, вып. 4.

9. Baer R. Group theoretical properties and unctions. — Colloq. math., 1966, **14**, 295—328.
10. Мальцев А. И. Подпрямые произведения моделей. — Докл. АН СССР, 1956, **109**, 264—266.
11. Щукин К. К. К теории радикалов в группах. — Сиб. матем. ж., 1962, **3**, № 6, 932—942.
12. Рипс И. А. О некоторых операторах на классах групп. — Докл. АН СССР, 1969, **186**, № 2, 264—267.
13. Dark R. S. A prime Baer group. — Math. Z., 1968, **105**, № 4, 294—298.
14. Плоткин Б. И. Радикальные и полупростые группы. — Тр. Моск. матем. об-ва, 1957, **6**, 299—337.
15. Конторович П. Г. Инвариантно покрываемые группы. — Матем. сб., 1951, **28** (70), № 1, 79—90.
16. Калужнин Л. А. Обобщенные локально нормальные группы. — Сб. «Алгебра и математическая логика». Киев, 1966.
17. Курош А. Г. Теория групп. М., 1967.
18. Плоткин Б. И. Обобщенные разрешимые и обобщенные нильпотентные группы. — Усп. матем. наук, 1958, **13**, 4, 89—172,
19. Roseblade I. E., Stonehewer S. E. Subjunctive and locally coalescent classes of groups. — J. Algebra, 1968, **6**, № 4, 423—435.
20. Плоткин Б. И., Кемхадзе Ш. С. Об одной схеме построения радикалов в группах. — Сиб. матем. ж., 1965, **6**, № 5, 1197—1201.
21. Плоткин Б. И. Радикальные группы. — Матем. сб., 1955, **37** (79), № 3, 507—526.
22. Robinson D. S. On the theory of subnormal subgroups. — Math. Z., 1965, **89**, 30—51.
23. Kovacs L., Neumann B. Baer soluble groups of arbitrary height. — Acta Sci., Math., 1965, **26**, 1—2.
24. Чан-Ван-Хао. О полупростых классах групп. — Сиб. матем. ж., 1962, **3**, № 6, 943—949.
25. Кон П. Универсальная алгебра. М., 1968.
26. Вовси С. М. Абсолютная свобода наследственных радикалов. Матем. заметки (в печати).
27. Плоткин Б. И. О полупростых группах. — Сиб. матем. ж., 1968, **9**, № 3, 623—631.
28. Baumslag G., Kovacs L., Neumann B. On product of normal subgroups. — Acta Sci. Math., 1965, **1—2**, 145—147.
29. Хахутаншвили А. С. Наследственные радикалы в классах нильпотентных групп. — Латв. матем. ежегодник, 1970, **7**, 277—282.
30. Hartley B., Stonehewer S. On some questions of Ph. Hall concerning simple, generalized soluble groups. — J. London Math. Soc., 1968, **43**, 739—744.
31. Рипс И. А. О группах с категорией. — Матем. зап. Свердловского ун-та, 1970, **7**, № 3, 183—195.
32. Мальцев А. И. Алгебраические системы. «Наука», 1970.

Поступило 15 апреля 1969 г.

USA
Yale University
A. ROBINSON

ON BOUNDS IN THE THEORY OF POLYNOMIAL IDEALS*

Dedicated to the memory of Anatolii Ivanovich Mal'cev

1. It is well known that if, in a first order theory T, an infinite disjunction of sentences $X_1, X_2, X_3, \ldots$ is a consequence of T then already a finite disjunction of X_j must follow from T. An argument which is by now familiar shows that this fact can be applied in order to prove the existence of certain bounds in the theory of ideals and elsewhere. For example (ref. 3), let K be (a set of axioms for) the theory of algebraically closed fields. For given positive integers n, d, and k, let Y be a sentence which states that the zeros of a set of general polynomials $g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n)$ of degree d are also zeros of another general polynomial $f(x_1, \ldots, x_n)$ of degree d. In this connection, the polynomials $g_1, \ldots, g_k, f$, are meant to be general in the sense that their coefficients are distinct and otherwise arbitrary individual constants which do not occur in K. Also, for $\rho = 1, 2, \ldots, m = 1, 2, \ldots$, let $X_{\rho m}$ be a sentence which asserts that there exist polynomials $h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_k(x_1, \ldots, x_n)$ of degree (not exceeding) m such that

$$1.1. \quad (f(x_1, \ldots, x_n))^\rho = \sum_{j=1}^{k} h_j(x_1, \ldots, x_n)\, g_j(x_1, \ldots, x_n).$$

Then Hilbert's *Nullstellensatz* asserts that at least one of the $X_{\rho m}$ is a consequence of $K \cup \{Y\}$ or, which is the same, that the disjunction of the $X_{\rho m}$ is a consequence of $K \cup \{Y\}$. It follows that a finite disjunction of $X_{\rho m}$, and hence a single $X_{\rho m}$, already

* Research supported in part by the National Science Foundation, Grant № CP 8625.

is a consequence of $K \cup \{Y\}$. This shows that if, for a given bound d on the degrees of $g_1, \ldots, g_k$, and f, the polynomial f vanishes at all zeros of $g_1, \ldots, g_k$, then the identity 1.1 is satisfied for an exponent ρ and degrees of $h_1, \ldots, h_k$, which are bounded by numbers depending only on d, n, and k.

However, there are in ideal theory and algebraic geometry many cases where similar bounds are known to exist, or are believed to exist, and where the existence of such bounds again corresponds to the extraction of a finite from an infinite disjunction although no single sentence corresponding to the above Y appears in the case. Thus, for given $g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n)$, and $f(x_1, \ldots, x_n)$, as before, consider the assertion that f belongs to the ideal generated by $g_1, \ldots, g_k$, $f \in (g_1, \ldots g_k)$. In terms of the first order predicate calculus this assertion is equivalent to the disjunction of sentences X_m, $m = 1, 2, \ldots$ which assert that there exist polynomials $h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_k(x_1, \ldots, x_n)$ of degree not exceeding m such that

$$1.2.\quad f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{k} h_j(x_1, \ldots, x_n)\, g_j(x_1, \ldots, x_n).$$

Although the argument sketched above is not applicable in the present case it is true nevertheless that if 1.2 is satisfied at all then it is satisfied also with a bound m on the degrees of $h_1, \ldots, h_k$, which depends only on n, k, and d. We observe immediately that if such a bound exists then we may take it to depend on n and d only since the number of polynomials g_j which are linearly independent over the field of coefficients is bounded in terms of n and d. We also notice that the linearity of the conditions on the coefficients of the h_j implies that if such a bound exists for all algebraically closed fields then this is, more generally, a bound for all fields (see ref. 5) Accordingly, we may confine ourselves to the consideration of algebraically closed fields. Similar remarks apply to the case considered previously.

The existence of the bound in question was established in principle by J. König (ref. 2) and the proof was completed by G. Herrmann (ref. 1) who also developed a primitive recursive formula for m in terms of n and d. This implies the existence of a uniform procedure which decides, for any given g_j and f whether $f \in (g_1, \ldots, g_k)$. Conversely, the availability of such a bound which depends only on n and d, but which is independent of the particular field under consideration, and even of its characteristic, establishes the existence of procedures which decide for any given n and d whether or not $f \in (g_1, \ldots, g_k)$ for arbitrary polynomials of n variables and of degrees not exceeding d. We observe

however, that this does not establish the existence of a uniform procedure to test this question for arbitrary g_j and f.

In the present paper, we shall establish the existence of such bounds by a method which relies only on the elements of ideal theory, coupled with an argument from non-standard analysis. This may be contrasted with some lengthy computations involved in the methods of König and Herrmann.

Another topic in which the question of a bound arises is related to the so-called *Nullstellensatz* of Hentzelt. We shall prove

1.3. For any given positive integers n, k, and d there exists a positive integer $\rho = \rho(n, k, d)$ with the following property. If F is any algebraically closed field then a necessary and sufficient condition for a polynomial $f(x_1, \ldots, x_n) \in F[x_1, \ldots, x_n]$ to belong to an ideal $(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n)) = J \subset F[x_1, \ldots, x_n]$ where the degrees of f and of the g_j do not exceed d is that for every algebraic zero ξ of J, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in F^n$, the polynomial f is contained in (J, P^ρ), where P is the prime ideal $(x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n)$.

Here again, we shall establish the existence of an integer ρ of this kind by a combination of ideal theory and non-standard analysis. However, it should be mentioned that the method of Hentzelt—Herrmann, though very much more complicated, establishes a stronger result by showing that ρ may actually be chosen so as to be independent of the degree of f. Nevertheless it is hoped that the arguments given here will be of some interest to the reader by pointing out the existence of abstract-metamathematical proofs in an area in which the previous, more concrete, methods have left a number of related questions untouched.

2. Let F be an algebraically closed field, let $R = F[x_1, \ldots, x_n]$, $n \geqslant 1$, and let J be any ideal in R. Then R is Noetherian and so J is the intersection of a finite number of primary ideals, $J = Q_1 \cap \ldots \cap Q_l$. Suppose $J \neq R$ then all Q_j may be taken to be different from R. We take any one of them and, for simplicity, drop its subscript, $Q_j = Q$.

Since $Q \neq R$ it possesses a zero $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ with coefficients in F. Let P be the ideal $(x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n)$ so that $P \supset Q$. Then it is a consequence of Krull's intersection theorem (ref. 6) that

$$2.1. \qquad \bigcap_{\nu=1}^{\infty} (Q, P^\nu) = Q.$$

We insert a proof of 2.1 in order to illustrate the character of the ideal theoretic arguments involved.

Let S be the image of P in the quotient ring $R' = R/Q$. Then S is prime. Put $U = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} S^\nu$, $T = SU$, then we propose to show that $T = U$. Evidently, $T \subset U$ so we only have to verify that $U \subset T$, i. e. that if $T = T_1 \cap \ldots \cap T_m$ is a representation of T as an intersection of primary ideals then $U \subset T_j$, $j = 1, \ldots, m$. But T_j is primary and so $T = SU \subset T_j$ implies that either $U \subset T_j$ or $S^\nu \subset T_j$ for sufficiently high ν and so, again, $U \subset T_j$. Hence $U \subset T$, $U = T$.

Now let $u_1, \ldots, u_k \in U$ be a base for U in R'. Since $SU = U$ there exist $a_{ij} \in S$ such that

$$u_i = a_{i1}u_1 + \ldots + a_{ik}u_k, \quad i = 1, \ldots, k.$$

If $A = (a_{ij})$ and I is the identity matrix we then have $|I - A|u_j = 0$ for $j = 1, \ldots, k$. Now $|I - A| = 1 - s$ for some $s \in S$, so that $(1 - s)u = 0$ for all $u \in U$. Let s be the image of a polynomial $p(x_1, \ldots, x_n) \in P$ under the canonical homomorphism $R \to R' = R/Q$ and let u be the image of any $r(x_1, \ldots, x_n) \in \bigcap_{\nu=1}^{\infty} (Q, P^\nu)$ under the same homomorphism. Then $u \in U$ and so

$$(1 - p(x_1, \ldots, x_n))r(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \bmod Q.$$

But $(1 - p)^\nu \not\equiv 0 \bmod Q$ for all ν since

$$(1 - p(x_1, \ldots, x_n))^\nu = h(x_1, \ldots, x_n)\, q(x_1, \ldots, x_n)$$

with $q(x_1, \ldots, x_n) \in Q$ yields $1 = 0$ after substituting $\xi_1, \ldots, \xi_n$ for $x_1, \ldots, x_n$. Also, Q is primary and so $r(x_1, \ldots, x_n) \in Q$. This proves 2.1.

3. Let n and d be positive integers.

3.1. Theorem. *There exists a positive integer $m = m(n, d)$ such that for any field F and for any set of polynomials $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n)$ of degree $\leqslant d$ with coefficients in F, f belongs to the ideal generated by $g_1, \ldots, g_k$ in $F[x_1, \ldots, x_n]$ if and only if there exist polynomials $h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_k(x_1, \ldots, x_n)$ with coefficients in F and of degrees not exceeding m such that*

$$3.2. \quad f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{k} h_j(x_1, \ldots, x_n)\, g_j(x_1, \ldots, x_n).$$

Proof. As explained in section 1 above, we may assume that F is algebraically closed and we may also assume that the number of polynomials g_j, k, is bounded in terms of n and d. For given n, k and d, and for any integer μ, consider the following statement, to be denoted by X_μ.

«There exist polynomials $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots,$ $g_h(x_1, \ldots\ldots, x_n)$ with coefficients in an algebraically closed field F_μ and of degrees not exceeding d such that f belongs to the ideal generated by $g_1, \ldots, g_h$ in $F_\mu[x_1, \ldots, x_n]$ but such that in any representation of f as a linear combination of $g_1, \ldots, g_h$ of the form 3.2 at least one of the polynomials $h_j(x_1, \ldots, x_n)$ is of degree greater than μ».

Either the theorem 3.1 is correct or there exist algebraically closed fields F_μ such that X_μ is satisfied for $\mu = 1, 2, 3, \ldots$ Supposing the latter to be true, let M be a mathematical structure which includes $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_\mu, \ldots$ Passing to an enlargement $^*M$ of M (ref. 4) we choose $\mu = \omega$ where ω is an infinite natural number, and we consider a field F_ω which contains polynomials $f, g_1, \ldots, g_h$ satisfying X_μ for $\mu = \omega$. Then $f, g_1, \ldots$ $\ldots, g_h$ are polynomials in the ordinary sense, since their degrees are bounded by the finite natural number d. However, when we say that $f \in (g_1, \ldots, g_h) = J$, $J \subset F_\omega[x_1, \ldots, x_n]$ we now refer to the non-standard polynomial ring $F_\omega[x_1, \ldots, x_n]$ which contains polynomials of infinite as well as of finite degrees. More particularly, although an identity of the form 3.2 must exist, since $f \in J$, at least one of the polynomials $h_j(x_1, \ldots, x_n)$ which occur in it must be of degree greater than ω and, hence, of infinite degree.

Consider now the subset of $F_\omega[x_1, \ldots, x_n]$ which consists of all polynomials of finite degree in that ring. These constitute a subring of $F_\omega[x_1, \ldots, x_n]$ which will be denoted by $F_\omega^0[x_1, \ldots, x_n]$. Then $F_\omega^0[x_1, \ldots, x_n]$ is Noetherian and contains $g_1, \ldots, g_h$ and f. Let J' be the ideal which is generated by $g_1, \ldots, g_h$ in $F_\omega^0[x_1, \ldots, x_n]$. Then J' is a subset of J. We propose to show that f belongs to J'. This is trivial if $J' = F_\omega^0[x_1, \ldots, x_n]$. We may therefore rule out this case and may write $J' = Q_1 \cap \cdots \cap Q_l$ where the Q_j are primary ideals, all different from $F_\omega^0[x_1, \ldots, x_n]$. Consider any one among them, $Q_j = Q$. We have to show that $f \in Q$. Since F_ω is algebraically closed, Q possesses a zero $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ with coordinates in F_ω. Let $P = (x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n)$ be the prime ideal *generated by* $x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n$ *in* $F_\omega^0[x_1, \ldots, x_n]$. We shall show that, for every finite positive integer ν, $f \in (Q, P^\nu)$. This will prove our assertion since $\bigcap_{\nu=1}^{\infty}(Q, P^\nu) = Q$, by 2.1.

By assumption, there is a representation 3.2, where the g_j belong to Q and where the h_j may be of infinite degree. Put

$x_j = y_j + \xi_j$, $j = 1, \ldots, n$. This transforms the polynomials which appear in 3.2 into polynomials of $y_1, \ldots, y_n$ with coefficients in F_ω, to be denoted by

$$\bar{f}(y_1, \ldots, y_n),\ \bar{h_j}(y_1, \ldots, y_n),\ \bar{g_j}(y_1, \ldots, y_n),\ j = 1, \ldots, k$$

respectively. Then

$$3.3. \quad \bar{f}(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{j=1}^{k} \bar{h}_j(y_1, \ldots, y_n)\, \bar{g}_j(y_1, \ldots, y_n).$$

For any finite positive integer ν, put

$$\bar{h}_j(y_1, \ldots, y_n) = p_{j\nu}(y_1, \ldots, y_n) + q_{j\nu}(y_1, \ldots, y_n),\ j = 1, \ldots, k,$$

where the $q_{j\nu}$ include all monomials of $\bar{h}_j$ that are of degree equal to, or greater than, ν. By 3.3

$$3.4. \quad \bar{f}(y_1, \ldots, y_n) - \sum_{j=1}^{k} p_{j\nu}(y_1, \ldots, y_n)\, \bar{g}_j(y_1, \ldots, y_n)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} q_{j\nu}(y_1, \ldots, y_n)\, \bar{g}_j(y_1, \ldots, y_n).$$

Since the left hand side of 3.4 contains only polynomials of finite degree the right hand side must be of finite degree also. At the same time, all monomials that appear on the right hand side are of degree greater than or equal to ν. It follows that the right hand side of 3.4 belongs to the ideal $\bar{P}^\nu$ where $\bar{P} = (y_1, \ldots, y_n)$ is generated by $y_1, \ldots, y_n$ in the ring of finite polynomials $F_\omega^0[y_1, \ldots, y_n]$. Thus,

$$3.5. \quad \bar{f} - \sum_{j=1}^{k} p_{j\nu}\bar{g}_j \in \bar{P}^\nu \quad \text{for } \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

Transferring back to the variables x_j, we obtain

$$3.6. \quad f(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{j=1}^{k} p_{j\nu}(x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n)$$

$$\times g_i(x_1, \ldots, x_n) \in P^\nu$$

and hence, $f \in (Q, P^\nu)$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ As pointed out above, this shows that $f \in Q$. In other words, there is an identity

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{k} r_j(x_1, \ldots, x_n)\, g_j(x_1, \ldots, x_n)$$

where the polynomials r_j have coefficients in F_ω and their degrees are all finite. This contradicts the conditions imposed on F_ω, f and the g_j, and proves the theorem.

4. Let F be an algebraically closed field and let $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ be any point with coordinates in F, $\xi \in F^n$. Let P_ξ be the prime ideal $(x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n)$, let $f(x_1, \ldots, x_n) \in F[x_1, \ldots, x_n]$ and let J be an arbitrary ideal in $F[x_1, \ldots, x_n]$. If ξ is not a zero of J then J and P_ξ^ν have no zero in common and so (J, P_ξ^ν) is the unit ideal and, in particular $f \in (J, P_\xi^\nu)$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

Suppose now that ξ is a zero of J and let $J = Q_1 \cap \cdots \cap Q_l$ be a representation of J as an intersection of primary ideals all different from the unit ideal. Then ξ is a zero of some of the Q_j, $Q_1, \ldots, Q_m$, say, $m \geqslant 1$, and not of others, $Q_{m+1}, \ldots, Q_l$, say, where the second set may be empty. It then follows from the previous remark that, for $m + 1 \leqslant j \leqslant l$, $f \in (Q_j, P_\xi^\nu)$, for $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ whether or not f belongs to Q_j. On the other hand, for $j = 1, \ldots, m$, f belongs to Q_j only if $f \in (Q_j, P_\xi^\nu)$ for $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ For in that case, $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} (Q_j, P_\xi^\nu) = Q_j$ by 2.1 and so, if $f \notin Q_j$ there must exist a positive integer ρ_ξ such that $f \notin (Q_j, P_\xi^{\rho_\xi})$. We conclude that if f does not belong to J then we can always find a $\xi \in F^n$ and a positive integer ρ_ξ such that $f \notin (J, P_\xi^{\rho_\xi})$. The converse is trivial.

Suppose now that, contrary to the assertion of 1.3, there exist, for given n, k, and d, and for an arbitrary positive integer ρ, polynomials $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n) \in F_\rho[x_1, \ldots, x_n]$, all of degrees not exceeding d, F_ρ algebraically closed, such that $f \notin J = (g_1, \ldots g_k)$, $J \subset F_\rho[x_1, \ldots, x_n]$ although for all $\xi \in F_\rho^n$, $f \in (J, P_\xi^\rho)$. Passing to an enlargement as in section **3**, above, we find that for any infinite integer ω, there exists an algebraically closed field F_ω and polynomials $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n) \in F_\omega[x_1, \ldots x_n]$ of degrees not exceeding k such that $f \notin J = (g_1, \ldots, g_k)$, $J \subset F_\omega[x_1, \ldots, x_n]$ although $f \in (J, P_\xi^\omega)$. But $f \in (J, P_\xi^\omega)$ signifies that there exist polynomials $h_j(x_1, \ldots, x_n) \in F_\omega[x_1, \ldots, x_n]$ whose degrees may be finite or infinite such that

$$4.1. \qquad f - \sum_{j=1}^{k} h_j g_j \in P_\xi^\omega .$$

Since $f \notin J$, the polynomials $g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n)$ must have a joint zero in F_ω. We introduce the subring $F_\omega^0[x_1, \ldots, x_n]$ of $F_\omega[x_1, \ldots, x_n]$ as in section **3** and we again denote

the ideal $(g_1, \ldots, g_k) \subset F_\omega^0 [x_1, \ldots, x_n]$ by J'. Then $J' \neq F_\omega^0 [x_1, \ldots, x_n]$ and we may write $J' = Q_1 \cap \cdots \cap Q_l$ where the Q_j are primary and are all different from the unit ideal.

We propose to show that $f \in J'$ or, which is the same, that $f \in Q_j$, $j = 1, \ldots, l$. Choosing j and putting $Q_j = Q$, for simplicity of notation, select $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in F_\omega^n$ as a zero of Q. Then 4.1 implies that

$$4.2. \qquad f - \sum_{j=1}^{k} h_j g_j \in P_\xi^\nu \text{ for all finite } \nu$$

We introduce new variables y_j by $x_j = y_j + \xi_j$, $j = 1, \ldots, n$ as in section 3 and obtain, with the notation of that section

$$4.3. \quad \bar{f}(y_1, \ldots, y_n) - \sum_{j=1}^{k} p_{j\nu}(y_1, \ldots, y_n) \bar{g}_j (y_1, \ldots, y_n) \in \bar{P}_\xi^\nu$$

where the ideal $\bar{P}_\xi$ is obtained by substituting $y_j + \xi_j$ for x_j in the polynomials of P_ξ.

But $\bar{f} - \sum_{j=1}^{k} p_{j\nu} \bar{g}_j$ is a polynomial of finite degree and 4.3 tells us that all monomials in it are of degree ν at least. Hence, transforming back to the variables x_j and denoting by P_ξ' the ideal *generated by* $x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n$ *in* $F_\omega^0 [x_1, \ldots, x_n]$, we have

$$f(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{j=1}^{k} p_{j\nu}(x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n) g_j (x_1, \ldots, x_n) \in P_\xi'^\nu$$

and hence, $f(x_1, \ldots, x_n) \in (Q, P_\xi'^\nu)$. Since this relation holds for all finite positive integers ν, 2. 1 shows that $f(x_1, \ldots, x_n) \in Q = Q_j$, $j = 1, \ldots, l$, and, further, $f(x_1, \ldots, x_n) \in J'$ and hence, $f \in J$. But this contradicts one of our original assumptions on f and proves 4.3.

References

1. Herrmann G. Die Frage der endlich vielen Schritte in der Theorie der Polynomideale.— Mathematische Annalen, 1926, **95**, 736—788.
2. König J. Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Grössen.
3. Robinson A. Théorie métamathématique des idéaux, Collection de Logique Mathèmatique, ser. A, Paris—Louvain, 1955.
4. Robinson A. Non-standard Analysis, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Amsterdam, 1966.
5. Waerden B. L. van der. Algebra, Berlin—Heidelberg — New-York. 1967, v. 2, section 132.
6. Zariski O., Samuel P. Commutative Algebra, **1**. Princeton—Toronto—London—New-York, 1958.

Поступило 7 мая 1969 г.

USA
University of California, Berkeley
Julia ROBINSON

AXIOMS FOR NUMBER THEORETIC FUNCTIONS

To the memory
of a friend and a leader in mathematics

We shall give a finite set of axioms in terms of one binary operation (composition) and three designated elements O, S and I for number theoretic functions of one variable. The theory $\mathcal{T}$ based on these axioms is sufficiently strong so that the first-order Peano axioms of arithmetic can be derived for the set of ,,constant'' functions.

Ryll-Nardzewski [1] showed that Peano arithmetic is not finitely axiomatizable. Rabin [2] showed that it is not a subtheory of any finitely axiomatizable theory of arithmetic. On the other hand, it is well-known that the Peano axioms can be derived from a finite number of axioms of set theory.

We shall use the following logical symbols: $=$ (equals), $\neg$(not), $\bigwedge$ (and), $\bigvee$ (or), $\rightarrow$ (if, then), $\longleftrightarrow$ (if and only if), $\bigvee$(there exists), $\bigvee_1$ (there exists exactly one), and $\bigwedge$ (for every). We will usually drop the initial universal quantifiers.

The axioms

1. $F(GH) = (FG)H$ (Associative axiom)
2. $IF = FI = F$ (Identity axiom)
3. $OF = O$ (Axiom of constants)
4. $(\bigwedge X)[F(XO) = G(XO)] \rightarrow F = G$ (Axiom of extension)
5. $SF \neq O$ (Zero axiom)
6. $FO = O \bigvee (\bigvee X\,[SX = FO]$ (Predecessor axiom)
7. $FO = O \bigwedge FS = SF \rightarrow F = I$ (Induction axiom)
8. $(\bigvee K, L)(\bigwedge F, G)(\bigvee_1 X)[KX = F \bigwedge LX = G]$ (Axiom of pairing)

9. $(\bigvee X, Y)[UX = VY] \bigvee (\bigvee F)[FU = AU \bigwedge FV = BV]$
(Axiom of piecing)

10. $(\bigvee F)[FO = AO \bigwedge FS = BF]$ (Axiom of iteration)

11. $(\bigwedge X)(\bigvee Y)[FY = XO] \rightarrow (\bigvee G)[FG = I]$
(Axiom of choice)

12. $(\bigvee G)(\bigwedge X)[G(XO) = O \longleftrightarrow (\bigvee Y)\ [FY = XO]]$
(Axiom of the characteristic)

The first four axioms hold for any class of functions from and to an arbitrary domain provided it is closed under composition and contains all constant functions as well as the identity function.

A *standard model* is a class of number theoretic functions of one variable closed under composition (indicated by juxtaposition) and containing O, S, I representing the zero, successor, and identity functions. Notice that the first seven axioms are true in all standard models.

Every axiom is true in the model of all number theoretic functions. The last five axioms insure that the class of functions satisfies certain closure properties. We shall show that *the least standard model which satisfies all the axioms is the class of arithmetical functions.*

We have not investigated the independence of the axioms. However the pairing axiom cannot be dropped since the class of number theoretic functions which assume at most a finite number of values infinitely often satisfies all the other axioms. Another version of the axiom of piecing is

$$9'. \quad (\bigwedge X)[(\bigvee T)[UT = XO] \longleftrightarrow \neg(\bigvee T)[VT = XO]] \rightarrow$$
$$\rightarrow (\bigvee F)[FU = AU \bigvee FV = BV].$$

This can be substituted for 9 without changing $\mathscr{T}$ (see the corrollary to Theorem 2). The class of recursive functions satisfies 8, 9′, 10 and 11 but not 12.

Informally, we shall identify the „constant" functions with numbers, i. e. X is a number if and only if $X = XO$. We shall use small letters only for numbers. Thus, $(\bigwedge x)\ [\varphi(x)]$ stands for $(\bigwedge X)\ [X = XO \rightarrow \varphi(X)]$, etc. Also x is in the range of F if $(\bigvee t)\ [Ft = x]$.

Pairing functions

We shall select one pair of functions K and L which satisfy the axiom of pairing and keep them fixed throughout the paper.

D e f i n i t i o n. *$J(A, B)$ denotes the unique function X such that $KX = A$ and $LX = B$.*

Of course J is not a function of the theory $\mathscr{T}$ but just a suggestive abbreviation.

Lemma 1. $J(A, B)C = J(AC, BC)$.

Proof. Let $X = J(A, B)$. Then $K(XC) = (KX)C = AC$ and $L(XC) = (LX)C = BC$.

Lemma 2. $J(K, L) = I$.

Proof. Since $KI = K$ and $LI = L$, it follows from the uniqueness of $J(K, L)$ that $J(K, L) = I$.

Definition. $J_1(X_1) = X_1$ *and* $J_{n+1}(X_1, \ldots, X_{n+1}) = J(X_1, J_n(X_2, \ldots, X_{n+1}))$ for $n > 0$. (*Here n is an index and not an individual of* $\mathscr{T}$).

Lemma 3. *For every* $X_1, \ldots, X_n$, *there is exactly one function* F *such that* $F = J_n(X_1, \ldots, X_n)$.

Proof by induction on n.

Lemma 4. *For every* F *and index* $n > 0$, *there are* $X_1, \ldots, X_n$ *such that* $F = J_n(X_1, \ldots, X_n)$. *Indeed,* $X_1, \ldots, X_n$ *are determined by*

(a) $X_n = L^{n-1}F$, (b) *if* $1 \leqq i < n$, *then* $X_i = KL^{i-1}F$.

Proof by induction. It is clear for $n = 1, 2$. Suppose $n > 1$. Then $F = J(X_1, G)$ where $X_1 = KF$ and $G = LF$. By the inductive hypothesis, $G = J_n(X_2, \ldots, X_{n+1})$ where

$$X_{i+1} = KL^{i-1}G = KL^i F \text{ and } X_{n+1} = L^{n-1}G = L^n F.$$

Lemma 5. $(\wedge x)[(\vee t)[J(K, O)t = x] \longleftrightarrow \neg(\vee t)[J(K, SL)t = x]]$.

Proof. $LJ(K, O)t = Ot \neq SLt' = LJ(K, SL)t'$. Hence no x is in the range of both $J(K, O)$ and $J(K, SL)$.

On the other hand, every x is either in the range of $J(K, O)$ or in the range of $J(K, SL)$. Indeed,

(a). $Lx = O$. Then $J(K, O)x = J(Kx, O) = x$,

(b). $Lx \neq O$, say $Lx = Sy$. Then $J(K, SL)J(Kx, y) = J(Kx, Sy) = x$.

Remark. These lemmas depend only on the axiom of pairing and the basic theory of axioms 1—7.

Development of the theory

Theorem 1. $(\vee x)[Gx = O] \rightarrow (\vee F)(\wedge x)[Gx = O \longleftrightarrow \longleftrightarrow (\vee t)[Ft = x]]$.

Proof. Suppose $Gx = O$. Let M satisfy the piecing $MJ(K, O) = KJ(K, O) = K$, $MJ(K, SL) = xJ(K, SL) = x$. M exists by Lemma 5 and the weak piecing axiom 9′. Then

$F = MJ(I, G)$ will satisfy the theorem. Indeed, if $Gy = O$, then $Fy = MJ(y, O) = MJ(K, O)J(y, O) = y$; if $Gy \neq O$, say $Gy = Sz$, then $Fy = MJ(K, SL)J(y, z) = x$.

Theorem 2. $(\bigvee x)(\bigwedge y)[Gy \neq x] \rightarrow$

$$\rightarrow (\bigvee F)(\bigwedge t)[(\bigvee u)[Fu = t] \longleftrightarrow \neg (\bigvee u)[Gu = t]].$$

Proof. Let H be a characteristic function of F and Z be defined by the weak piecing axiom, $ZO = SO$, $ZS = O$. Then ZH is a characteristic function of the complement of the range of G. If x satisfies the hypothesis of the theorem, then $ZHx = O$. Hence by Theorem 1, there is a function F for which ZH is a characteristic function.

Corollary. *Axioms* 1—8, 9′, 10 *and* 12 *imply Axiom* 9.

Proof. Suppose $UX \neq VY$. Let U' be a function whose range is the complement of the range of U by Theorem 2. Then by 9′ there is a function F such that $FU = AU$ and $FU' = BU'$. Since Vx is not in the range of U by hypothesis, there is a z such that $U'z = Vx$. Hence $FVx = FU'z = BU'z = BVx$ and by extension $FV = BV$. Thus Axiom 9 is satisfied by F.

Theorem 3. $(\bigvee X)[GX = O \rightarrow$

$$\rightarrow (\bigvee F)(\bigwedge X)[GX = O \longleftrightarrow (\bigvee T)[FT = X]].$$

Proof. Suppose O is in the range of G. Then by Theorem 1, there is an H such that $Gx = O \longleftrightarrow (\bigvee t)[Ht = x]$. If H assumes all values, the theorem is satisfied. Indeed, by the axiom of choice, there is a function M such that $HM = I$ so $HMX = X$. Thus F can be put equal to HM. Otherwise, suppose there is a number not in the range of H. By Theorem 2, there is a function H' whose range is the complement of the range of H. Define M by the piecing

$$MJ(K, O) = HKJ(K, O),$$
$$MJ(K, SL) = H'KJ(K, SL).$$

M assumes all values, so by the axiom of choice, let T satisfy $MT = I$. Suppose $GX = O$. For all z, $GXz = O$. Hence Xz is in the range of H, i. e. $MTXz$ is in the range of H. Hence TXz is in the range of $J(K, O)$. So $MTXz = HKTXz$ and by extension $(MT)X = HKTX = X$. Hence F equal to HKT satisfies the theorem.

Theorem 4. $(\bigvee X)[FX = GX] \rightarrow$

$$\rightarrow (\bigvee H)(\bigwedge X)[FX = GX \longleftrightarrow (\bigvee T)[HT = X]].$$

Proof. Since $J(I, I)X \neq J(O, SO)$, there is a function M whose range is the complement of the range of $J(I, I)$. Let C

be defined by the piecing

$$CJ(I,\ I) = OJ(I,\ I) = O,$$
$$CM = SOM = SO.$$

If $FX = GX$ then $CJ(F, G)X = CJ(FX, FX) = CJ(I, I)FX = O$. If $FX \neq GX$ then for some t, $FXt \neq GXt$ by the axiom of extension. Then $CJ(F, G)Xt = CJ(FXt, GXt) = CMy = SO \neq O$ for some y. Hence $FX = GX$ if and only if $CJ(F, G)X = O$. Now by Theorem 3, there is a function H such that

$$CJ(F, G)X = O \longleftrightarrow (\bigvee T)[HT = X]$$

so H will satisfy Theorem 4.

Theorem 5. $(\bigvee F)(\bigwedge x)[(\bigvee t)[Gt = x \vee Ht = x] \longleftrightarrow$

$$\longleftrightarrow (\bigvee t)[Ft = x]].$$

Proof. F can be defined by the piecing

$$FJ(K, O) = GKJ(K, O),$$
$$FJ(K, SL) = HKJ(K, SL).$$

Since $FJ(t, O) = Gt$ and $FJ(t, SO) = Ht$, the range of F includes the ranges of G and H. On the other hand, if $Lt = O$, then $Ft = FJ(Kt, O) = GKt$; if $Lt = Sy$, then $Ft = HKJ(K, SL) \cdot J(Kt, y) = HKt$. Hence the range of F is the union of the range of G and the range of H.

Remark. Notice that up to now, we have not used iteration nor will we use it in proving the following metatheorem.

Metatheorem. *Let* $\varphi(A_1, \ldots, A_m, x_1, \ldots x_n)$ *be a formula with at most the indicated free varlables and any number of bound numerical vaviables but no other bound variables. Then*

$$(\bigwedge A_1, \ldots, A_m)[(\bigvee x_1, \ldots, x_n)[\varphi] \rightarrow$$
$$\rightarrow (\bigvee F)(\bigwedge x_1, \ldots, x_n)[\varphi \longleftrightarrow (\bigvee t)[Ft = J_n(x_1, \ldots, x_n)]]]$$

is a theorem of $\mathcal{T}$.

Proof. We can take formulas of the sort $Ax = y$ as the atomic formulas of $\mathcal{T}$. Of course x and y may be the same variable and A may be O, S, or I. Indeed,

$$AB = C \longleftrightarrow (\bigwedge x)(\bigvee y, z)[Ay = z \wedge Bx = y \wedge Cx = z]$$

by the associative and extension axioms.

It is sufficient to prove the theorem for atomic formulas and for $\theta \vee \psi$, $\neg \theta$ and $(\bigvee x)[\theta]$ assuming the theorem holds for θ and ψ.

I. Suppose φ is $Av_r = v_s$ with $r \neq s$. Then take F equal to $J_n(K_1, \ldots, K_{s-1}, AK_r, K_{s+1}, \ldots, K_n)$ where $I = J_n(K_1, \ldots, K_n)$. If $x = J_n(x_1, \ldots, x_{s-1}, Ax_r, x_{s+1}, \ldots, x_n)$ then $Fx = x$. Also if $Fy = J_n(y_1, \ldots, y_n)$ then $y_s = K_s Fy = AK_r y = Ay_r$.

II. Suppose φ is $Av_r = v_r$. If there is no u with $Au = u$ then we have nothing to prove. Otherwise, there is a function B such that

$$(\wedge u)[Au = u \longleftrightarrow (\vee t)[Bt = u]]$$

by Theorem 4. Take F equal to $J_n(K_1, \ldots, K_{r-1}, BK_r, K_{r+1}, \ldots, K_n)$. Then $K_r Fx = BK_r x = ABK_r x = AK_r Fx$. Also if $x = J_n(x_1, \ldots, x_n)$ with $x_r = Ax_r$, then $(\vee t)[Bt = x_r]$. Hence $FJ_n(x_1, \ldots, x_{r-1}, t, x_{r+1}, \ldots, x_n) = x$.

In the following two cases, there is no difficulty if either θ or ψ cannot be satisfied. Hence we can assume that there are functions G and H such that

$$\theta(x_1, \ldots, x_n) \longleftrightarrow (\vee t)[Gt = J_n(x_1, \ldots, x_n)],$$

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) \longleftrightarrow (\vee t)[Ht = J_n(x_1, \ldots, x_n)].$$

III. Suppose φ is $\theta \vee \psi$. Then F satisfying the theorem exists by Theorem 5.

IV. Suppose φ is $\neg\, \theta$. If every number is in the range of G then φ cannot be satisfied; if θ cannot be satisfied then take F equal to I. Otherwise by Theorem 2, there is a function F whose range is the complement of the range of G and this F satisfies the theorem for φ.

V. Suppose φ is $(\vee x)[\theta]$. If θ can be satisfied so can φ. By hypothesis there is a function G such that $\theta(x, x_1, \ldots, x_n) \longleftrightarrow (\vee t)[Gt = J_{n+1}(x, x_1, \ldots, x_n)]$. Take F equal to LG since

$$J_{n+1}(x, x_1, \ldots, x_n) = J(x, J_n(x_1, \ldots, x_n)).$$

Theorem 6. $FX = O \wedge FY = SF \rightarrow (\vee G)[FG = I]$.

Proof. By iteration, there is a function G such that $GO = XO$ and $GS = YG$. Then $(FG)O = FXO = O$ and $(FG)S = FYG = S(FG)$. Hence by the axiom of induction, $FG = I$.

Corollary. $(\vee x)[Fx = O] \wedge (\wedge t)(\vee y)[Fy = SFt] \rightarrow (\wedge x)(\vee t)[Ft = x]$.

Proof. By the metatheorem, there is a function H whose range is $\{J(y, t) : Fy = SFt\}$. By the axiom of choice, choose T so that $LHT = I$. Then Y equal to KHT satisfies the hypothesis of Theorem 6.

Principle of Induction. *Let* φ *be a formula with at least one free numerical variable* x *and no bound function variables. Then*

$$\varphi(O) \wedge (\wedge x)[\varphi(x) \to \varphi(Sx)] \to (\wedge x)[\varphi(x)].$$

Proof. Any free numerical variables can be considered as free function variables in the metatheorem putting in the usual condition that $V = VO$. Hence there is a function F such that $\varphi(x) \leftrightarrow (\vee t)[Ft = x]$. Hence by the corollary to Theorem 6, the Principle of Induction follows.

Remark. While the corollary and the Principle of Induction are true in all standard models, Theorem 6 is not. In the least standard model containing H the function given by $Hx = [x/2]$, we have $HO = O$ and $HSS = SH$ but there is no G with $HG = I$.

Theorem 7. $(\vee P)[PS = I]$.

Proof. Define H by the piecing

$$HO = J(O, O)O,$$
$$HS = J(SK, K)S.$$

Then KH assumes all values. Namely, $KHO = O$ and if $J(y, z) = St$ then $KHSt = KJ(SK, K)St = Sy$. Hence there is a function T such that $KHT = I$. Then by extension, we can take P equal to LHT since $LHTSx = x$.

Theorem 8. $SA = SB \to A = B$.

Proof. Let P satisfy Theorem 7. Then $A = PSA = PSB = B$.

Theorem 9. $(\wedge x)(\vee y)[Fx = Gy] \to (\vee H)[F = GH]$.

Proof. By Theorem 4, there is a function M such that $FKX = GLX \leftrightarrow (\vee T)\ [MT = X]$. If $Fx = Gy$ then there is a z such that $Mz = J(x, y)$. Hence KM assumes all values and by the axiom of choice, there is a function N such that $KMN = I$. Then $FKMN = F = GLMN$ and H equal to LMN satisfies the theorem.

Theorem 10. $FO = O \wedge FS = F \to F = O$.

Proof. The set $\{x: Fx = O\}$ contains O and $Fx = O \to FSx = O$. Hence by the Principle of Induction $Fx = O$ for all x and by extension $F = O$.

Recursion

Next we will show that we can also define functions by simultaneously carrying out infinitely many iterations.

Recursion theorem. *There is a unique function* F *such that* $FU = AU$ *and* $FV = BF$ *where* $U = J(K, O)$ *and* $V = J(K, SL)$.

Note that $J(r, s) = J(K, SL)^s J(r, O)$. Hence $FJ(r, s) = B^s AJ(r, O)$. Thus the values of F are given by A along the x-axis and are obtained elsewhere by iteration along vertical lines.

Proof. The idea is to define a function H such that $Ht = J_3(x_1, x_2, x_3)$ implies that $x_2 = Fx_1$ and x_3 is an index which insures that KH assumes all values. As t runs through consecutive values, x_1 will traverse the xy-plane by repeatedly starting up vertical lines and then returning to the x-axis. Let $K_1 = K$, $K_2 = KL$ and $K_3 = LL$.

By the metatheorem there are functions W and W' such that

$$(\bigvee t)[Wt = J_3(x_1, x_2, x_3)] \longleftrightarrow Lx_1 = Lx_3,$$

$$(\bigvee t)[W't = J_3(x_1, x_2, x_3)] \longleftrightarrow Lx_1 \neq Lx_3.$$

Clearly, the range of W and the range of W' are complementary sets. Hence M can be defined by the piecing

$$MW = J_3(USK_3, AUSK_3, SK_3)W,$$

$$MW' = J_3(VK_1, BK_2, K_3)W'.$$

Let H be defined by the iteration

$$HO = J_3(UO, AUO, O),$$
$$HS = MH.$$

Now we shall establish some properties of H.

$$\text{(A)}\ (\bigvee y)[K_3Hy = x \bigwedge K_1Hy = Ux] \rightarrow (\bigvee z)[K_3Hz = x \bigwedge LK_1Hz = Lx].$$

Proof. Given x and y such that $K_3Hy = x$ and $K_1Hy = Ux$. Suppose there is no z satisfying the conclusion of (A). If $Lx = O$, then z equal to y satisfies the conclusion of (A). Hence under the assumption, $Lx \neq O$. Suppose $K_3Hw = x$ and $LK_1Hw = u$. Since w is in the range of W', $HSw = J_3(VK_1, BK_2, K_3)Hw$. So $K_3HSw = x$ and $LK_1HSw = Su$. Hence by the induction principle, LK_1Hw assumes all values with $K_3Hw = x$. This contradicts the assumption that the conclusion of (A) is false, proving (A).

$$\text{(B)}\ (\bigvee y)[K_3Hy = x \bigwedge K_1Hy = Ux].$$

Proof. For $x = O$, we can take $y = O$. Suppose now that (B) holds for x. Thus for some t, $K_3Ht = x$ and $K_1Ht = Ux$. Then by (A), there is a z with $K_3Hz = x$ and $LK_1Hz = Lx$. Hence z is in the range of W so $K_3HSz = Sx$ and $K_1HSz = USx$. Hence by the induction principle, (B) holds for all x.

$$\text{(C)}\ KK_1H = KK_3H.$$

Proof by induction.

(a) $KK_1HO = KJ(KO, O) = KO = KK_3HO.$

(b) $y = Wt \wedge KK_1Hy = KK_3Hy \rightarrow$

$$\rightarrow KK_1HSy = KUSK_3Hy = KK_3HSy.$$

(c) $y = W't \wedge KK_1Hy = KK_3Hy \rightarrow KK_1HSy =$

$$= KVK_1Hy = KK_1Hy = KK_3Hy = KK_3HSy.$$

(D) $(\vee t)[K_1Ht = x]$.

Proof. Choose z by (A) and (B) so that $K_3Hz = x$ and $LK_1Hz = Lx$. By (C), $KK_1Hz = KK_3Hz = Kx$. Hence $K_1Hz = x$

(E) $K_1Ht = Uz \rightarrow K_2Ht = AUz$.

Proof. For $t = O$, $K_1HO = UO$ and $K_2HO = AUO$ by definition of H. Suppose $t \neq O$, then $HPt = Wz$ for some z where P satisfies Theorem 7. Hence $K_1Ht = USK_3HPt$ and $K_2Ht = AUSK_3HPt = AUK_1Ht$ since $U^2 = U$.

(F) $K_1Ht = K_1Ht' \rightarrow K_2Ht = K_2Ht'$.

Proof. The proof is by induction on LK_1Ht. If $LK_1Ht = O$, then (E) implies (F). Suppose (F) holds whenever $LK_1Ht = y$. Now $K_1Hu = K_1Hu'$ and $LK_1Hu = Sy$ implies that u and u' are not O. Hence

$$K_1Hu = VK_1HPu \wedge LK_1HPu = y,$$

$$K_1Hu' = VK_1HPu' \wedge LK_1HPu' = y.$$

So $K_1HPu = K_1HPu'$ and $K_2HPu = K_2HPu'$. But $K_2Hu = BK_2HPu = BK_2HPu' = K_2Hu'$. Hence (F) follows by induction.

(G) $K_1Ht = VK_1Ht' \rightarrow K_2Ht = BK_2Ht'$.

Proof. For the hypothesis to hold $t \neq O$. Hence $K_1Ht = VK_1HPt = VK_1Ht'$. Also $K_2Ht = BK_2HPt = BK_1Ht'$ by (F) since $K_1HPt = K_1Ht'$.

We now return to the proof of the theorem. Since K_1H assumes all values, there is a function T with $K_1HT = I$. Put F equal to K_2HT. Then $FU = K_2HTU = AU$ by (E). Also $K_1HTV = VK_1HT$ so $K_2HTV = BK_2HT$ by (G). Hence $FV = FVK_1HT = FK_1HTV = BK_2HT = BF$.

Suppose F' also satisfies the recursion equations. Then $FJ(x, O) = AJ(x, O) = F'J(x, O)$. Suppose $FJ(x, y) = F'J(x, y)$. Then $FJ(x, Sy) = BFJ(x, y) = F'J(x, Sy)$. Hence by induction on y, $FJ(x, y) = F'J(x, y)$ for all x and y. But $u = J(Ku, Lu)$ so by extension $F = F'$.

The Peano Axioms

In this section, we shall show that the first order Peano axioms hold for the numbers of $\mathcal{T}$. Let $\mathcal{P} = \langle N, S, +, \cdot, 0 \rangle$ be Peano arithmetic, i. e. the theory of the axioms

P1. $Sx = Sy \rightarrow x = y$.

P2. $0 \neq Sx$.

P3. $\varphi(0) \wedge (\wedge x)[\varphi(x) \rightarrow \varphi(Sx)] \rightarrow (\wedge x)[\varphi(x)]$.

P4. $x + 0 = x$.

P5. $x + Sy = S(x + y)$.

P6. $x \cdot 0 = 0$.

P7. $x \cdot Sy = (x \cdot y) + x$.

In the axiom scheme P3, φ is any formula of $\mathscr{P}$ with at least one free variable.

We shall now define a subtheory of $\mathscr{P}$ which satisfies P1—P7. Let $\mathscr{N} = \{X : X = XO\}$, $0 = O$, and S be the unary operation defined by $Sx = y \longleftrightarrow SX0 = Y0$. By the Recursion Theorem, there is a function A such that

$$AJ(K, O) = KJ(K, O);$$
$$AJ(K, SL) = SA.$$

Definition. $x + y = z \longleftrightarrow (\vee t)[Kt = x \wedge Lt = y \wedge At = z]$, i. e. $x + y = AJ(x, y)$.

For a particular choice of K and L satisfying the pairing axiom, there is a unique t such that $Kt = x$ and $Lt = y$. Hence $x + y$ is uniquely determined for each x and y. We will show that in fact $+$ is uniquely determined independent of the choice of K and L. We prove by induction on y that $+$ satisfies P4 and P5.

$$x + 0 = AJ(x, 0) = AJ(K, 0)\,J(x, 0) = KJ(x, 0) = x,$$
$$x + Sy = AJ(K, SL)J(x, y) = SAJ(x, y) = S(x + y).$$

Now by induction, we see that

$$FO = x \wedge (\wedge z)[FSz = SFz] \wedge GO = x \wedge (\wedge z)[GSz = SGz] \rightarrow F = G.$$

Hence $x + y$ is uniquely determined for all x and y without regard to the choice of pairing functions.

Let W be defined by the recursion

$$WJ(K, O) = J(O, K)J(K, O)$$
$$WJ(K, SL) = J(A, L)W$$

where A is the addition function defined above. Notice that $(LW)J(K, O) = KJ(K, O)$ and $(LW)J(K, SL) = LW$. Hence LW satisfies the same recursion equations as K so $LW = K$.

Definition. $x \cdot y = KWJ(x, y)$.

We now check that $x \cdot y$ satisfies P6 and P7.

$$x \cdot 0 = KWJ(x, 0) = KJ(O, K)J(x, 0) = 0.$$

$$x \cdot Sy = KWJ(K, SL)J(x, y) = KJ(A, L)WJ(x, y) =$$
$$= KJ(A, L)J(KWJ(x, y), LWJ(x, y)) = KJ(A, L)J(x \cdot y, x) =$$
$$= (x \cdot y) + x.$$

As before W is uniquely determined in terms of K and L. Furthermore, we can show by induction that

$$FO = O \wedge (\wedge z)[FSz = Fz + x] \wedge GO = O \wedge (\wedge z)[GSz = Gz + x] \rightarrow$$
$$\rightarrow F = G.$$

Hence $x \cdot y$ does not depend on the choice of K and L and does satisfy P6 and P7.

Finally, P1 and P2 are special cases of T8 and the zero axiom. P3 is simply the Principle of induction applied to arithmetical formulas, i. e. formulas which can be expressed in the language of $\mathscr{P}$.

T h e o r e m. *The class of arithmetical functions is a model of $\mathscr{T}$ and is contained in every standard model of $\mathscr{T}$.*

P r o o f. Any arithmetical function F can be defined in the form $Fx = y \longleftrightarrow \varphi(x, y)$ where φ is a formula with two free variables in the language of $\mathscr{P}$. By the metatheorem, there is a function G whose range is $\{J(x, y) : \varphi(x, y)\}$. Since KG assumes all values, there is a function T with $KGT = I$. Then $F = LGT$. Hence every arithmetical function is contained in any standard model of $\mathscr{T}$.

The class $\mathscr{A}$ of arithmetical functions does indeed satisfy the axioms of $\mathscr{T}$. We can take K and L corresponding to $J(x, y) = ((x + y)^2 + 3x + y)/2$. There is no difficulty in showing that $\mathscr{A}$ is closed under piecing. Gödel's classical argument shows that it is also closed under iteration. It is easy to give an arithmetical definition of the function G satisfying the axiom of choice such that $Gx = \mu z\{Fz = x\}$. Finally, the characteristic function which is 0 on the range of F and 1 elsewhere is easily defined arithmetically.

References

1. R y l l - N a r d z e w s k i C. The role of the axiom of induction in elementary arithmetic. Fund. Math., 1952, **39**, 239—263.
2. R a b i n, M i c h a e l O. Non-standard models and the independence of the induction axiom. Essays on the foundations of mathematics. Jerusalem, 1961; Amsterdam, 1962, 287—299.

Поступило 11 июня 1969 г.

USA
University of California, Berkeley

Raphael M. ROBINSON

SOME DEFINITE POLYNOMIALS WHICH ARE NOT SUMS OF SQUARES OF REAL POLYNOMIALS *

To the memory of A. I. Mal'cev

§ 1. Introduction

A real polynomial is called (positive) definite if it does not assume any negative values. In particular, we may apply the term definite to forms (homogeneous polynomials). We shall call a form strictly definite if it is definite, and vanishes only when all of the variables are zero.

In 1888, Hilbert [6] raised the question whether all definite forms are sums of squares of real forms. This is easily seen to be true for quadratic forms and for binary forms. Hilbert showed that there is just one additional case where this conclusion can be drawn, namely for ternary quartics. The basic cases in which counterexamples were required are for ternary sextics and for quaternary quartics. He showed that there are definite (and indeed strictly definite) forms of these types which are not sums of squares of real forms.

Hilbert did not give explicit counterexamples**. I have seen an unpublished example of a ternary sextic worked out recently by W. J. Ellison using Hilbert's method. It is, as would be expected, very complicated. After seeing this, I discovered that an astonishing simplification would be possible simply by dropping some unnecessary assumptions made by Hilbert.

* This work was supported by the Miller Institute for Basic Research in Science.

** When I submitted this paper for publication, I did not think that any such example had ever appeared in print. However, shortly thereafter, T. S. Motzkin called my attention to the fact that he had published a counterexample for the case of ternary sextics in 1967. I have added an Appendix which discusses Motzkin's results.

For example, where Hilbert used (as the points of intersection of two cubic curves) nine points with no three on a line and no six on a conic, I use in § 4 nine lattice points in a three-by-three square array. Thus, with only minor modifications of Hilbert's method, it turns out to be possible to produce quite simple counterexamples, and that is the main goal of this paper. Futhermore, the arguments used in this paper are completely elementary, whereas Hilbert assumed various facts from algebraic geometry. No knowledge of any other paper is assumed, except in connection with certain peripheral remarks.

Instead of forms, we may also consider nonhomogeneous polynomials in one less variable. Thus the basic counterexamples will be a sextic polynomial $S(x, y)$, constructed in § 4, and a quartic polynomial $Q(x, y, z)$, constructed in § 6, which are positive definite but are not sums of squares of real polynomials. Some elaboration of these examples is given in § 5 and § 7, including the construction of strictly definite forms, as was done by Hilbert. In addition, a few general results about the representation of a polynomial as a sum of squares of real polynomials are given in § 2 and § 3. However, the construction of the basic counterexamples in § 4 and § 6 is independent of the earlier material.

We conclude this introduction with a brief history of the problem of representing definite polynomials as sums of squares, which will serve to place our results in perspective.

After Hilbert found that a definite form is not in general a sum of squares of real forms, he raised the question whether it might not be the quotient of two such sums, and showed in [7] that this is indeed the case for ternary forms. Equivalently, we may ask whether a definite polynomial is the quotient of two sums of squares of real polynomials, or whether it is a sum of squares of rational functions with real coefficients. If the coefficients of the given polynomial are rational, we may also make the stronger demand that the coefficients in the representation are rational. In 1900, Hilbert [8] formulated these questions as his 17th problem.

A contribution to the case of definite polynomials in one variable with rational coefficients was made by Landau [9], who showed that such a polynomial may be expressed as a sum of 8 squares of polynomials with rational coefficients. The general problem was solved by Artin [1], who showed that a definite polynomial in any number of variables is a sum of squares of rational functions with real coefficients, and that if the given polynomial has rational coefficients, then rational coefficients may be used in the representation. However, he did not give any

estimate for the number of squares needed. He also showed that one variable may be avoided in the denominators, thus including Landau's result, except for the number of squares which may be used. Habicht [4] gave an alternative partial solution to Hilbert's 17th problem. His proof has a more constructive character than Artin's, but is valid only for strictly definite forms. It is based on a theorem of Pólya [11]. The book [5] discusses this theorem on pages 57—60 and the second edition also has an appendix which covers Habicht's proof.

More recently, Cassels [2] has shown that if a definite polynomial in any number of variables is represented as a sum of squares of rational functions, then one variable can be eliminated from the denominators without increasing the number of squares. The coefficients may be either real or rational throughout. Pfister [10] has shown that for definite polynomials in n variables, 2^n squares of rational functions are sufficient if real coefficients are allowed. No estimate is known for $n > 1$ if rational coefficients are required. In a paper to be published soon, Ellison [3] considers some problems concerning the representation of a given form as a sum of powers of other forms, thus returning to the questions raised by Hilbert in 1888.

§ 2. Some general conclusions

In this section and the next section, we shall prove a few general results concerning the representation of a polynomial as a sum of squares of real polynomials. These results will not be used in the construction of the basic counterexamples, and these are independent of each other, so the reader may proceed directly to § 4 or to § 6, if he wishes.

Suppose that we have real polynomials satisfying the equation

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{m} f_j(x_1, \ldots, x_n)^2.$$

The highest degree terms on the right cannot cancel out. Hence F has an even degree $2d$. Each f_j has degree at most d, and at least one of them has degree exactly d. If F is a form of degree $2d$, then each f_j is a form of degree d.

If a representation of the above sort is possible for a given polynomial F of degree $2d$, then such a representation is also possible with $m = m(2d, n)$, where

$$m(k, n) = \binom{k+n}{n}$$

is the number of terms in the general polynomial of degree k in n variables. Indeed, if $m > m(2d, n)$, then the squares on the right side are linearly dependent. Thus one of the squares can be expressed as a linear combination of the others with coefficients in $[-1, 1]$. Substituting this value reduces the number of terms, but introduces coefficients in front of the remaining terms. Since these coefficients are not negative, they can be absorbed into the squares. The process is continued until m is reduced to $m(2d, n)$. This argument was used by Hilbert [6].

If we know a polynomial which is positive definite but is not a sum of squares of real polynomials, we can construct from it other similar polynomials of higher degree. For example, if we know that $F(x_1, \ldots, x_n)$ is positive definite but not a sum of squares of real polynomials, then $x_1^2 F(x_1, \ldots, x_n)$ will also have this property. Indeed, if

$$x_1^2 F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{m} f_j(x_1, \ldots, x_n)^2,$$

then each f_j must vanish when $x_1 = 0$. Hence f_j has x_1 as a factor, so that we can divide out x_1^2 from each term, obtaining a representation of F as a sum of squares.

In § 4, we construct a definite sextic polynomial $S(x, y)$ which is not a sum of squares of real polynomials. Repeated application of the preceding paragraph yields similar polynomials $F(x, y)$ of degrees 8, 10, 12, etc. Also, in § 6, we construct a definite quartic polynomial $Q(x, y, z)$ with the same property. Each of these polynomials may also be regarded as a definite polynomial in a larger number of variables which is still not a sum of squares of real polynomials. In this way, from the two basic counterexamples $S(x, y)$ and $Q(x, y, z)$, we find definite polynomials which are not sums of squares of real polynomials for each degree $2d$ and number of variables n where they can exist, that is, for $n = 2$ and $d \geqslant 3$, and for $n \geqslant 3$ and $d \geqslant 2$. For homogeneous polynomials, n must be one unit larger.

If we know a bound for the absolute value of a polynomial $F(x_1, \ldots, x_n)$ of a given degree on some set having an inner point, or more generally on a suitable finite set of points, we can compute bounds for the coefficients of F by repeated use of the Lagrange interpolation formula. If the bound is small, then the coefficients will be small.

Suppose that we have a convergent sequence of polynomials of degree at most $2d$:

$$F_k(x_1, \ldots, x_n) \to F(x_1, \ldots, x_n) \text{ as } k \to \infty.$$

This may be interpreted as pointwise convergence, uniform convergence on bounded sets, or convergence of the coefficients, since all are equivalent. Suppose that each F_k is expressible as a sum of squares of real polynomials:

$$F_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{m} f_{kj}(x_1, \ldots, x_n)^2.$$

As pointed out above, we may assume that $m = m(2d, n)$, and hence is independent of k. All of the polynomials f_{kj} are of degree at most d. They are uniformly bounded on any bounded set, and hence their coefficients are uniformly bounded. We can therefore choose a sequence of values of k for which all of the coefficients of the polynomials $f_{kj} (j = 1, \ldots, m)$ will approach limits. The limiting polynomials will give a representation of $F(x_1, \ldots, x_n)$ as a sum of squares of real polynomials.

If the real polynomials of degree $2d$ in n variables are thought of as points in the $m(2d, n)$-dimensional coefficient space, then the definite polynomials are seen to form a closed convex cone in this space. The polynomials which are sums of squares of real polynomials will also form a closed convex cone, which in general is a proper subset of the first cone. We can also make further restrictions. Sums of squares of real binomials (including monomials) and sums of squares of real monomials will give successively smaller closed convex cones. The last cone clearly has no inner points, since it lies in a $m(d, n)$-dimensional subspace. In § 3 we shall show that the other cones do have inner points.

The polynomials which are not sums of squares of real polynomials will form an open set in the coefficient space. That is, if $F(x_1, \ldots, x_n)$ is not a sum of squares of real polynomials, then the same will be true if we modify the coefficients slightly.

Similar results may be stated for forms, except that the coefficient space for forms of degree $2d$ in n variables is $m(2d, n-1)$-dimensional. In particular, if $F(x_1, \ldots, x_n)$ is a form of degree $2d$ which is positive definite but not a sum of squares of real forms, then, for small positive β, the strictly definite form

$$F(x_1, \ldots, x_n) + \beta(x_1^{2d} + \cdots + x_n^{2d})$$

will still not be a sum of squares of real forms. Thus strictly definite forms exist which are not sums of squares of real forms for all values of d and n for which definite forms with this property exist.

§ 3. A contrasting result

Although the main purpose of this paper is to present examples of definite polynomials which are not sums of squares of real polynomials, we shall stop long enough to prove the following theorem, which is in striking contrast to the last result in § 2: *If* $F(x_1, \ldots, x_n)$ *is any real form of degree* $2d$, *then*

$$F(x_1, \ldots, x_n) + \beta (x_1^{2d} + \cdots + x_n^{2d})$$

is a sum of squares of real forms of degree d *when* β *is sufficiently large. Furthermore, these forms of degree* d *may be chosen to be monomials or binomials.*

It will be clear from the proof that a suitable value of β may be estimated in terms of the maximum absolute value of the coefficients appearing in $F(x_1, \ldots, x_n)$. This means that the polynomial $x_1^{2d} + \ldots + x_n^{2d}$ is represented by a point in the coefficient space which is an inner point not only of the closed convex cone representing sums of squares of real forms, but also of the smaller cone representing sums of squares of real binomials.

It will also be clear from the proof that if $F(x_1, \ldots, x_n)$ has rational coefficients, then the binomial forms of degree d can be chosen to have rational coefficients. We need only use the fact that a positive rational is a sum of squares of rationals.

To prove the theorem, it will be sufficient to show that we can successively subtract squares of real binomial forms of degree d from $F(x_1, \ldots, x_n)$ until the only terms remaining are those which involve a single variable.

We can first eliminate all terms in which any variable occurs to an odd power. There will be an even number of such variables in any term. If the term has the form $cx_1x_2X^2$, where X is a product of powers of the variables, then we may subtract $(x_1 + cx_2/2)^2X^2$. For the term $cx_1x_2x_3x_4X^2$, we subtract $(x_1x_2 + cx_3x_4/2)^2X^2$, and similarly in other cases.

We are left with a form in which only even powers of the variables occur. For such forms, we shall prove by induction on n that all terms involving more than one variable can be removed by successively subtracting squares of real binomials. The case $n = 1$ is trivial. The basic case to consider is $n = 2$. Here we use the identities

$$(x_1^2 - x_2^2)^2 = x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 + x_2^4,$$

$$(x_1^2 - x_2^2)(x_1^4 - x_2^4) = x_1^6 - x_1^4x_2^2 - x_1^2x_2^4 + x_2^6,$$

$$(x_1^2 - x_2^2)(x_1^6 - x_2^6) = x_1^8 - x_1^6x_2^2 - x_1^2x_2^6 + x_2^8$$

and so forth. Each left hand side is $(x_1^2 - x_2^2)^2$ times a sum of squares of real monomials. It follows that the polynomials on the right are sums of squares of real binomials. Multiplying these polynomials by large positive multiples of powers of $x_1^2 x_2^2$ and subtracting from the given form will tend to move any negative coefficients towards the ends. If d is even, we use the first, third, fifth, . . . identities in turn, and if d is odd, the second, fourth, sixth, . . . identities. Eventually, all coefficients will be made positive, except for the coefficients of x_1^{2d} and x_2^{2d}. The positive terms may be removed by subtracting squares of real monomials, so that the only terms which remain are multiples of x_1^{2d} and x_2^{2d}.

Now suppose that $n > 2$, and that the possibility of removing all terms involving more than one variable by subtracting squares of real binomials is known for any smaller number of variables. Consider the terms of $F(x_1, \ldots, x_n)$ involving a fixed power of x_n, say x_n^{2k}. Applying the inductive hypothesis for $n - 1$ variables, we see that all of these terms can be eliminated except for $x_1^{2d-2k} x_n^{2k}, \ldots, x_{n-1}^{2d-2k} x_n^{2k}$. Do this for $k = 0, 1, \ldots, d$. Then apply the inductive hypothesis for two variables repeatedly to eliminate terms involving both x_l and x_n for $l = 1, 2, \ldots, n-1$. Only the terms which are multiples of $x_1^{2d}, \ldots, x_n^{2d}$ will remain, and the proof is complete.

§ 4. A sextic polynomial in two variables

Our construction of a positive definite sextic polynomial $S(x, y)$ which is not a sum of squares of real polynomials depends on the following lemma:

A polynomial $f(x, y)$ of at most the third degree which vanishes at eight of the nine points (x, y) with $x, y = -1, 0, 1$ must also vanish at the ninth point.

To see this, consider the general cubic $f(x, y)$. This has 10 coefficients, which will be forced to satisfy 8 linear equations. These 8 equations are independent, since we can find a cubic curve passing through any 7 of the 9 points, but not through the other 2; indeed, it is sufficient to look at cubics consisting of three straight lines. Thus any cubic vanishing at the 8 points is a linear combination of any two linearly independent ones, say $x^3 - x$ and $y^3 - y$, and hence has the form

$$f(x, y) = \lambda(x^3 - x) + \mu(y^3 - y).$$

This vanishes at the ninth point as well.

The lemma can also be proved in a quite different way. Assign weights to the 9 points as follows: weight 1 to each of the 4 points (± 1, ± 1), weight -2 to the points (± 1, 0) and (0, ± 1), and weight 4 to the point (0, 0). Then the weighted sum of $x^k y^l$ over the 9 points is 0 unless k and l are both even and positive. Indeed, if either k or l is 0, we have a multiple of $1 - 2 + 1$, whereas if $k > 0$ and $l > 0$, only the 4 points (± 1, ± 1) remain, and the sum is 0 unless k and l are both even. It follows that the weighted sum is 0 for any cubic $f(x, y)$, that is,

$$4f(0,0) - 2f(1,0) - 2f(-1,0) - 2f(0,1) - 2f(0,-1) + f(1,1) + f(1,-1) + f(-1,1) + f(-1,-1) = 0.$$

In particular, if $f(x, y)$ vanishes at 8 of the 9 points, it also vanishes at the ninth.

The polynomial $x^2(x^2-1)^2 + y^2(y^2-1)^2$, obtained by adding the squares of the two basic cubics $x^3 - x$ and $y^3 - y$, vanishes exactly to the second order in all directions from each of the 9 points. On the other hand, we can find a sextic curve which does not pass through the origin but which has a double point at each of the other 8 points, for example

$$(x^2-1)(y^2-1)(x^2+y^2-1) = 0.$$

It follows that the quotient

$$\frac{(x^2-1)(y^2-1)(x^2+y^2-1)}{x^2(x^2-1)^2 + y^2(y^2-1)^2}$$

is bounded near these 8 points. It is also seen to be bounded at infinity, but approaches $-\infty$ at the origin. Hence it is bounded from above in the whole plane. It follows that

$$S_\alpha(x, y) = x^2(x^2-1)^2 + y^2(y^2-1)^2 - \alpha(x^2-1)(y^2-1)(x^2+y^2-1)$$

is positive definite if α is a small positive number. Notice that $S_\alpha(x, y)$ does not vanish at the origin, although it does vanish at the other 8 points. It follows that we cannot have

$$S_\alpha(x, y) = \sum_{j=1}^{m} f_j(x, y)^2$$

for real polynomials $f_j(x, y)$. Indeed, these polynomials would have to be cubics, and would vanish at the origin since they vanish at the other 8 points.

We can in fact take $\alpha = 1$. (Actually, this is the largest possible value.) We shall put $S(x, y) = S_1(x, y)$, so that

$$S(x, y) = x^2(x^2-1)^2 + y^2(y^2-1)^2 - (x^2-1)(y^2-1)(x^2+y^2-1).$$

This may also be written in the form

$$S(x, y) = (x^2+y^2-1)(x^2-y^2)^2 + (x^2-1)(y^2-1).$$

From these two representations, we can check that $S(x, y)$ is definite, since there is no point at which both expressions contain a negative term. The conclusion can be made more apparent as follows. Multiplying the two equations by 1 and x^2+y^2-1, and adding, we obtain

$$(x^2+y^2)S(x, y) = x^2(x^2-1)^2 + y^2(y^2-1)^2 + (x^2+y^2-1)^2(x^2-y^2)^2.$$

Thus $S(x, y)$ is represented as a sum of three squares of polynomials with rational coefficients divided by a sum of two squares.

If we multiply this equation by x^2+y^2, and use the identity

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2,$$

we obtain

$$(x^2+y^2)^2 S(x, y) = (x^4-x^2+y^4-y^2)^2 + x^2y^2(x^2-y^2)^2 + (x^2+y^2)(x^2+y^2-1)^2(x^2-y^2)^2.$$

This yields a representation of $S(x, y)$ as a sum of squares of four rational functions, all having the denominator x^2+y^2.

Cassels [2] has given an effective procedure for eliminating one of the variables from the denominators, without increasing the number of squares. Carrying out this process leads to the formula

$$(x^2+1)^2 S(x, y) = (x^2+y^2+1)(x^2-1)^2(x^2-y^2+1)^2 + x^2y^2(x^2-2y^2+1)^2.$$

So now we have a representation of $S(x, y)$ as a sum of squares of four rational functions, all having the denominator x^2+1.

However, the same result, and an even stronger one, can be obtained in an easier way. If we introduce the corresponding form $S(x, y, z) = z^6 S(x/z, y/z)$, then $S(x, y, z) = x^2(x^2-z^2)^2 + y^2(y^2-z^2)^2 - (x^2-z^2)(y^2-z^2)(x^2+y^2-z^2)$. Multiplying out, we find that

$$S(x, y, z) = x^6 + y^6 + z^6 + 3x^2y^2z^2 - x^4y^2 - x^2y^4 - x^4z^2 - x^2z^4 - y^4z^2 - y^2z^4,$$

so that $S(x, y, z)$ is symmetric. Thus in the formula

$$(x^2 + y^2)\, S(x,\ y,\ z) = x^2z^2(x^2 - z^2)^2 + y^2z^2(y^2 - z^2)^2 + (x^2 + y^2 - z^2)^2(x^2 - y^2)^2,$$

we may interchange y and z to obtain

$$(x^2 + z^2)\ S(x,\ y,\ z) = x^2y^2(x^2 - y^2)^2 + y^2z^2(y^2 - z^2)^2 + (x^2 - y^2 + z^2)^2(x^2 - z^2)^2.$$

Putting $z = 1$, we have

$$(x^2 + 1)\, S(x, y) = x^2y^2(x^2 - y^2)^2 + y^2(y^2 - 1)^2 + (x^2 - y^2 + 1)^2(x^2 - 1)^2.$$

If we multiply by $x^2 + 1$ and use the two-square identity, we recover the formula found by Cassels's method. But the last identity is actually more informative.

If we add the above expressions for $(x^2 + y^2)\, S(x, y, z)$ and $(x^2 + z^2)\, S(x, y, z)$, and a similar expression for $(y^2 + z^2)\, S(x, y, z)$, we express $2(x^2 + y^2 + z^2)\, S(x, y, z)$ as a sum of squares. Hence $x^2 + y^2$, $x^2 + z^2$, $y^2 + z^2$, and $x^2 + y^2 + z^2$ are all possible denominators which we may use in expressing $S(x, y, z)$ as a sum of squares of rational functions. More generally, by multiplying the three equations by positive constants before adding, we see that $ax^2 + by^2 + cz^2$ can be used as a denominator, at least if $0 \leqslant a \leqslant b + c$, $0 \leqslant b \leqslant a + c$, $0 \leqslant c \leqslant a + b$, but not $a = b = c = 0$. If a, b, c are rational, we may use rational coefficients throughout. I do not know whether there are any other values of a, b, c which are also permissible, but some impossible cases are mentioned n ; .

From the expression for $(x^2 + y^2)\, S(x, y, z)$, we can easily find all zeros of $S(x, y, z)$. Those lying on the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ are the following:

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\left(0,\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right),$$

where all combinations of signs are to be used. If we divide the sphere into 8 triangles by the coordinate planes, then the first 8 points are the centers of these triangles, and the other 12 are the midpoints of the sides. These 20 points correspond to just 10 points in the projective plane. For $S(x, y)$, two of these points are lost at infinity, and we are left with zeros at just the eight points $(\pm1,\ \pm1)$, $(0,\ \pm1)$, $(\pm1,\ 0)$, which we used in the proof that $S(x, y)$ is not a sum of squares of real polynomials.

§ 5. Modifications of the sextic polynomial

Since $S(x, y)$ is not a sum of squares of real polynomials, it follows from § 2 that the same is true for $S(x, y) + \beta$ and for $S(x, y) + \beta(x^6 + y^6 + 1)$, if β is small. However, to get explicit estimates for β, it is best to proceed in an entirely different way.

If a sextic polynomial $F(x, y)$ is expressed as a sum of squares of real polynomials, say

$$F(x, y) = \sum_{j=1}^{m} f_j(x, y)^2,$$

then each $f_j(x, y)$ is of degree at most 3, so that by § 4 we have

$$f_j(0,0) = \tfrac{1}{2} f_j(1, 0) + \tfrac{1}{2} f_j(-1, 0) + \tfrac{1}{2} f_j(0,1) + \tfrac{1}{2} f_j(0, -1)$$
$$- \tfrac{1}{4} f_j(1, 1) - \tfrac{1}{4} f_j(1, -1) - \tfrac{1}{4} f_j(-1, 1) - \tfrac{1}{4} f_j(-1, -1).$$

It follows from the Cauchy-Schwarz inequality that

$$f_j(0, 0)^2 \leqslant \tfrac{5}{4} [f_j(1, 0)^2 + f_j(-1, 0)^2 + f_j(0, 1)^2 + f_j(0, -1)^2$$
$$+ f_j(1, 1)^2 + f_j(1, -1)^2 + f_j(-1, 1)^2 + f_j(-1, -1)^2].$$

Summing from $j = 1$ to $j = m$, we find that

$$F(0, 0) \leqslant \tfrac{5}{4} [F(1, 0) + F(-1, 0) + F(0, 1) + F(0, -1)$$
$$+ F(1, 1) + F(1, -1) + F(-1, 1) + F(-1, -1)].$$

Applied to $F(x, y) = S(x, y) + \beta$, this yields $1 + \beta \leqslant 10\ \beta$, or $\beta \geqslant 1/9$. Applied to $F(x, y) = S(x, y) + \beta(x^6 + y^6 + 1)$, we find that $1 + \beta \leqslant 25\beta$, or $\beta \geqslant 1/24$. Thus $S(x, y) + \beta$ is not a sum of squares of real polynomials for $\beta < 1/9$, and $S(x, y) + \beta(x^6 + y^6 + 1)$ is not a sum of squares of real polynomials for $\beta < 1/24$.

In both cases, we can improve the estimates by a more careful use of the Cauchy-Schwarz inequality. If we split the coefficient $1/4$ in the last four terms of the expression for $f_j(0, 0)$ as $(p/4) \cdot (1/p)$, we obtain, after applying the Cauchy-Schwarz inequality and summing, the inequality

$$F(0,0) \leqslant \left(1 + \frac{p^2}{4}\right) \Big\{ [F(1, 0) + F(-1, 0) + F(0, 1) + F(0, -1)]$$
$$+ \frac{1}{p^2} [F(1, 1) + F(1, -1) + F(-1, 1) + F(-1, -1)] \Big\}.$$

For $F(x, y) = S(x, y) + \beta$, this yields

$$1 + \beta \leqslant \left(1 + \frac{p^2}{4}\right)\left(4\beta + \frac{4\beta}{p^2}\right) = \left(5 + p^2 + \frac{4}{p^2}\right)\beta.$$

The last term is minimized when $p^2 = 2$, so we obtain $1 + \beta \leqslant 9\beta$, or $\beta \geqslant 1/8$. Thus $S(x, y) + \beta$ is not a sum of squares of real polynomials if $\beta < 1/8$. For $F(x, y) = S(x, y) + \beta(x^6 + y^6 + 1)$, we find that

$$1 + \beta \leqslant \left(1 + \frac{p^2}{4}\right)\left(8\beta + \frac{12\beta}{p^2}\right) = \left[11 + 2\left(p^2 + \frac{6}{p^2}\right)\right]\beta.$$

The last term is minimized when $p^2 = \sqrt{6}$, so we obtain $1 + \beta \leqslant (11 + 4\sqrt{6})\beta$, or

$$\beta \geqslant \frac{1}{10 + 4\sqrt{6}} = \frac{5}{2} - \sqrt{6} = 0{,}05051\ldots$$

Hence $S(x, y) + \beta(x^6 + y^6 + 1)$ is not a sum of squares of real polynomials if $\beta < 5/2 - \sqrt{6}$.

If we go over to the corresponding forms, we see that for $0 < \beta < 5/2 - \sqrt{6}$, the form

$$S(x, y, z) + \beta(x^6 + y^6 + z^6)$$

is strictly definite, but not a sum of squares of real forms. On the other hand, it was shown in § 3 that such a form is a sum of squares of real cubic forms for β sufficiently large, and indeed a sum of squares of binomials. It is easily seen directly that this holds for $\beta = 1$ and hence for all $\beta \geqslant 1$. Indeed,

$$S(x,y,z) + x^6 + y^6 + z^6 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)^2 + (x^2 + z^2)(x^2 - z^2)^2 + (y^2 + z^2)(y^2 - z^2)^2 + 3x^2y^2z^2.$$

There will therefore exist a number β_0 with $5/2 - \sqrt{6} \leqslant \beta_0 \leqslant 1$ such that $S(x, y, z) + \beta(x^6 + y^6 + z^6)$ will be a sum of squares of real cubic forms for $\beta \geqslant \beta_0$ but not for $\beta < \beta_0$. Notice that a result from § 2 guarantees that the answer is positive at the division point β_0. I do not know the value of β_0. The division point may be different if we insist on using squares of binomials, but it will still lie in the same interval.

For $0 \leqslant \beta < \beta_0$, the form

$$(x^2 + \varepsilon y^2 + \varepsilon z^2)^k [S(x, y, z) + \beta(x^6 + y^6 + z^6)]$$

is not a sum of squares of real forms when $\varepsilon = 0$ and hence is also not a sum of squares of real forms when ε is a small positive number, the size allowed depending on k. We make use here of two results from § 2. On the other hand, if $\beta > 0$ and $\varepsilon > 0$ are

fixed, we can choose k so large that every coefficient in the above product is positive when it is multiplied out, so that the form is a sum of squares of real monomials. Indeed, since only even powers of x, y, z occur, this follows from a theorem of Pólya [11]; or see [5], pages 57—60. If we hold $\beta > 0$ fixed, and let $\varepsilon \to 0$, then in order for the above form to be a sum of squares of real forms, we must make $k \to \infty$, since, for a fixed k, no such representation is possible for small ε.

For $\beta = 0$, I do not know whether a value of k can be found for every $\varepsilon > 0$ which will make the form considered be a sum of squares of real forms. However, it follows from § 4 that if $\varepsilon \geqslant 1/2$, then we can take $k = 1$.

§ 6. A quartic polynomial in three variables

Our construction of a positive definite quartic polynomial $Q(x, y, z)$ which is not a sum of squares of real polynomials depends on the following lemma:

A polynomial $f(x, y, z)$ of at most the second degree which vanishes at seven of the eight points (x, y, z) with $x, y, z = 0,1$ must also vanish at the eighth point.

To see this, consider the general quadratic $f(x, y, z)$. This has 10 coefficients, which will be forced to satisfy 7 linear equations. These 7 equations are independent, since we can find a quadric surface passing through any 6 of the 8 points, but not through the other 2; indeed, it is sufficient to look at quadric surfaces consisting of two planes. Thus any quadratic vanishing at the seven points is a linear combination of any three linearly independent ones, say $x^2 - x$, $y^2 - y$, $z^2 - z$, and hence has the form

$$f(x, y, z) = \lambda(x^2 - x) + \mu(y^2 - y) + \nu(z^2 - z).$$

This vanishes at the eighth point as well.

The lemma can also be proved in a quite different way. Assign the 8 points weights which are alternately 1 and -1. Then the weighted sum of $x^k y^l z^m$ over the 8 points will be 0 unless $k > 0$, $l > 0$, and $m > 0$. It follows that the weighted sum is 0 for any quadratic $f(x, y, z)$, that is,

$$f(0,0,0) - f(1,0,0) - f(0,1,0) - f(0,0,1) + f(0,1,1) + f(1,0,1) + f(1,1,0) - f(1,1,1) = 0.$$

In particular, if $f(x, y, z)$ vanishes at 7 of the 8 points, it also vanishes at the eighth.

The polynomial $x^2(x-1)^2 + y^2(y-1)^2 + z^2(z-1)^2$, obtained by adding the squares of the three basic quadratics $x^2 - x$,

$y^2 - y$, and $z^2 - z$, vanishes exactly to the second order in all directions from each of the 8 points. On the other hand, we can find a quartic surface which does not pass through (1, 1, 1), but has at least a double point at each of the other 7 points, for example

$$xyz(x + y + z - 2) = 0.$$

It follows that the quotient

$$\frac{xyz(x + y + z - 2)}{x^2(x-1)^2 + y^2(y-1)^2 + z^2(z-1)^2}$$

is bounded near these 7 points. It is also seen to be bounded at infinity, but approaches $+\infty$ at (1, 1, 1). Hence it is bounded from below in the whole plane. It follows that

$$Q_\alpha(x, y, z) = x^2(x-1)^2 + y^2(y-1)^2 + z^2(z-1)^2 + \alpha xyz\,(x + y + z - 2)$$

is positive definite if α is a small positive number. Notice that $Q_\alpha(x, y, z)$ does not vanish at (1, 1, 1), although it does vanish at the other 7 points. It follows that we cannot have

$$Q_\alpha(x, y, z) = \sum_{j=1}^{m} f_j(x, y, z)^2$$

for real polynomials $f_j(x, y, z)$. Indeed, these polynomials would have to be quadratics, and would vanish at (1, 1, 1) since they vanish at the other 7 points.

We can in fact take $\alpha = 2$. (Actually, this is the largest possible value.) We shall put $Q(x, y, z) = Q_2(x, y, z)$, so that

$$Q(x, y, z) = x^2(x-1)^2 + y^2(y-1)^2 + z^2(z-1)^2 + 2xyz(x + y + z - 2).$$

This polynomial may also be expressed in the following three ways

$$Q(x, y, z) = x^2(x-1)^2 + [y(y-1) - z(z-1)]^2 + 2yz\,(x + y - 1)(x + z - 1),$$

$$Q(x, y, z) = y^2(y-1)^2 + [z(z-1) - x(x-1)]^2 + 2xz\,(x + y - 1)(y + z - 1),$$

$$Q(x, y, z) = z^2(z-1)^2 + [x(x-1) - y(y-1)]^2 + 2xy\,(x + z - 1)(y + z - 1).$$

In each case, $Q(x, y, z)$ is represented as a sum of two squares, plus a third term which may not be positive. But the product

of the three third terms is a square of a real polynomial. Hence not all three of the third terms can be negative at any point, so $Q(x, y, z)$ is definite.

We shall now show that the above representations may be used to express $Q(x, y, z)$ as a quotient of sums of squares of polynomials. Let

$$A = x(x-1), \quad B = y(y-1), \quad C = z(z-1),$$
$$A' = B - C, \quad B' = C - A, \quad C' = A - B,$$
$$D = 2xyz(x+y-1)(x+z-1)(y+z-1).$$

Then

$$(Q - A^2 - A'^2)(Q - B^2 - B'^2)(Q - C^2 - C'^2) = 2D^2$$

and hence

$$Q^3 - FQ^2 + GQ - H = 2D^2,$$

where

$$F = A^2 + A'^2 + B^2 + B'^2 + C^2 + C'^2,$$
$$G = (A^2 + A'^2)(B^2 + B'^2) + (A^2 + A'^2)(C^2 + C'^2) + (B^2 + B'^2)(C^2 + C'^2),$$
$$H = (A^2 + A'^2)(B^2 + B'^2)(C^2 + C'^2).$$

Thus we obtain the following representation for $Q(x, y, z)$:

$$Q = \frac{FQ^2 + H + 2D^2}{Q^2 + G}.$$

Over the field of rationals, the numerator is a sum of 10 squares and the denominator is a sum of 7 squares of polynomials. Using the known 8-square identity (which is written out, for example, in Landau [9], page 276), we can find a representation of $Q(x, y, z)$ as a sum of 16 squares of rational functions with rational coefficients.

It follows from a theorem of Pfister [10] that 8 squares are sufficient over the field of real numbers. We can find such a representation as follows. Notice that

$$F = A^2 + B^2 + C^2 + (B-C)^2 + (C-A)^2 + (A-B)^2$$
$$= 3A^2 + 3B^2 + 3C^2 - 2BC - 2CA - 2AB$$
$$= \left(\lambda B - \frac{C}{\lambda}\right)^2 + \left(\lambda C - \frac{A}{\lambda}\right)^2 + \left(\lambda A - \frac{B}{\lambda}\right)^2,$$

provided that $\lambda^2 + 1/\lambda^2 = 3$, and hence if $\lambda = (1 + \sqrt{5})/2$. Thus F is a sum of three real squares. Since $2D^2$ is a real square, the number of squares in the numerator of the expression for Q is reduced to 6. Using the 8-square identity, we can find a representation of $Q(x, y, z)$ as a sum of 8 squares of rational functions with real coefficients.

The corresponding form $Q(x, y, z, t) = t^4 Q(x/t, y/t, z/t)$ can be expressed in various ways, including

$$Q(x, y, z, t) = x^2 (x - t)^2 + [y (y - t) - z (z - t)]^2 + 2yz (x + y - t)(x + z - t).$$

There are similar equations obtained by permuting x, y, z. At any given point, the third term on the right will be nonnegative in at least one of the three equations. If $Q(x, y, z, t) = 0$ at this point, then all three terms on the right of this equation will vanish. We can use this to locate all the zeros of $Q(x, y, z, t)$. It is found that there are just seven such zeros in the projective 3-space, none of them lying on the plane $t = 0$. These correspond to the seven known zeros of $Q(x, y, z)$, and hence this polynomial has no additional zeros.

§ 7. Modifications of the quartic polynomial

Since $Q(x, y, z)$ is not a sum of squares of real polynomials, it follows from § 2 that the same is true of $Q(x, y, z) + \beta$, if β is small. However, to get explicit estimates for β, it is best to proceed in an entirely different way.

If a quartic polynomial $F(x, y, z)$ is expressed as a sum of squares of real polynomials, say

$$F(x, y, z) = \sum_{j=1}^{m} f_j (x, y, z)^2,$$

then each $f_j (x, y, z)$ is of degree at most 2, so that by § 6 we have

$$f_j (1, 1, 1) = f_j (0, 0, 0) - f_j (1, 0, 0) - f_j (0, 1, 0) - f_j (0, 0, 1) + f_j (0, 1, 1) + f_j (1, 0, 1) + f_j (1, 1, 0).$$

It follows from the Cauchy-Schwarz inequality that

$$f_j (1, 1, 1)^2 \leqslant 7 [f_j (0, 0, 0)^2 + f_j (1, 0, 0)^2 + f_j (0, 1, 0)^2 + f_j (0, 0, 1)^2 + f_j (0, 1, 1)^2 + f_j (1, 0, 1)^2 + f_j (1, 1, 0)^2 .$$

Summing from $j = 1$ to $j = m$, we find that

$$F (1, 1, 1) \leqslant 7 [F (0, 0, 0) + F (1, 0, 0) + F (0, 1, 0) + F (0, 0, 1) + F (0, 1, 1) + F (1, 0, 1) + F (1, 1, 0)].$$

Applied to $F(x, y, z) = Q(x, y, z) + \beta$, this yields $2 + \beta \leqslant 49\beta$, or $\beta \geqslant 1/24$. Thus for $\beta < 1/24$, the po ynomial $Q(x, y, z) + \beta$ is not a sum of squares of real polynomials.

The corresponding form $Q(x, y, z, t) + \beta t^4$ is strictly definite if $\beta > 0$, since $Q(x, y, z, t)$ does not have any nontrivial zero for $t = 0$ by § 6. For $\beta < 1/24$, it is not a sum of squares of real forms. However, it can be proved to be a sum of squares of real forms when β is sufficiently large.

Appendix. Motzkin's counterexample

A remarkably simple example of a definite sextic polynomial $F(x, y)$ which is not a sum of squares of real polynomials, namely

$$F(x, y) = x^2y^2(x^2 + y^2 - 3) + 1,$$

and similar examples of polynomials in more variables, were given by Motzkin on page 217 of his recent parer*.

I did not learn about Motzkin's example until after this paper was submitted for publication. Unlike my examples, which used Hilbert's ideas in a simplified form, Motzkin's example was constructed in a quite different way. We shall show here how Motzkin's example can be derived from the following more general theorem:

Let $P(x_1, \ldots, x_n)$ be a real polynomial of degree less than $2n$. If

$$F(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 \ldots x_n^2 P(x_1, \ldots, x_n) + 1$$

is a sum of squares of m real polynomials, then $P(x_1, \ldots, x_n)$ is also a sum of squares of m real polynomials.

The result remains valid for polynomials with rational coefficients. On the other hand, it is no longer true when P has degree $2n$, as shown by the example $P(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 \ldots x_n^2 - 2$. Here F is a square, but P is not definite.

To prove the theorem, suppose that

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{m} f_j(x_1, \ldots, x_n)^2,$$

where the f_j are real polynomials. When we put $x_1 = 0$, the left side reduces to 1, hence each f_j must reduce to a constant. Thus each term of f_j, except the constant term, must have the factor x_1, and equally the factors $x_2, \ldots, x_n$. Hence

$$f_j(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \ldots x_n h_j(x_1, \ldots, x_n) + c_j,$$

* Motzkin T. S. The arithmetic-geometric inequality, pages 205—224 of Inequalities, Academic Press, 1967.

where h_j is a real polynomial and c_j is a real constant. Notice the following restrictions on the degrees of various polynomials:

$$\deg P < 2n, \quad \deg F < 4n, \quad \deg f_j < 2n, \quad \deg h_j < n.$$

Squaring the above equation, and adding for $j = 1, 2, \ldots, m$, we find that

$$F(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 \ldots x_n^2 \sum_{j=1}^{m} h_j(x_1, \ldots, x_n)^2$$

$$+ 2x_1 \ldots x_n \sum_{j=1}^{m} c_j h_j(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{n} c_j^2.$$

Since the second sum on the right has degree less than n, it must vanish identically, as it can contribute only terms which are absent in F. Hence we must have

$$\sum_{j=1}^{m} h_j(x_1, \ldots, x_n)^2 = P(x_1, \ldots, x_n),$$

$$\sum_{j=1}^{m} c_j h_j(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \sum_{j=1}^{m} c_j^2 = 1.$$

Thus $P(x_1, \ldots, x_n)$ is a sum of squares of m real polynomials, as was to be shown.

The interesting thing about the theorem is that F may be definite even though P is indefinite. In this case, F will be a definite polynomial which is not a sum of squares of real polynomials. We cannot find such an example when $n = 1$, but for any $n \geqslant 2$ we may take

$$P(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 - \alpha,$$

where α is a small positive constant. Indeed, Motzkin showed that

$$F(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 \ldots x_n^2 (x_1^2 + \cdots + x_n^2 - \alpha) + 1$$

is definite for $\alpha = n + 1$, and hence for all $\alpha \leqslant n + 1$. To prove this, apply the inequality relating the arithmetic and geometric means to the $n + 1$ quantities $x_1^2, \ldots, x_n^2, 1/x_1^2 \ldots x_n^2$. This yields the inequality

$$\frac{1}{n+1}\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2 + \frac{1}{x_1^2 \ldots x_n^2}\right) \geqslant 1,$$

which expresses that F is definite for $\alpha = n + 1$. This polynomial F is Motzkin's example of a definite polynomial which is not a sum of squares of real polynomials.

References

1. Artin E. Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1926, 5, 100—115.
2. Cassels J. W. S. On the representation of rational functions as sums of squares, Acta Arith., 1964, 9, 79—82.
3. Ellison W. J. A'Waring's problem' for homogeneous forms, Proc. Cambridge Philos. Soc., 1969, 65, 663—672.
4. Habicht W. Über die Zerlegung strikte definiter Formen in Quadrate, Comment. Math. Helv., 1940, 12, 317—322.
5. Hardy G. H., Littlewood J. E. and Pólya G. Inequalities, Cambridge University Press, 1934; second edition, 1952.
6. Hilbert D. Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten, Math. Ann., 1888, 32, 342—350.
7. Hilbert D. Über ternäre definite Formen, Acta Math., 1893, 17 169—197.
8. Hilbert D. Mathematische Probleme, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1900, 253—297.
9. Landau E. Über die Darstellung definiter Funktionen durch Quadrate, Math. Ann., 1906, 62, 272—285.
10. Pfister A. Zur Darstellung definiter Funktionen als Summe von Quadraten, Invent. Math., 1967, 4, 229—237.
11. Pólya G. Über positive Darstellung von Polynomen, Vierteljschr Naturforsch. Ges. Zürich, 1928, 73, 141—145.
12. Robinson R. M. Some definite polynomials which are not sums of squares of real polynomials (abstract), Notices Amer. Math. Soc., 1969, 16, 554.

Поступило 5 мая 1969 г.

СССР
Московский университет

Л. А. СКОРНЯКОВ

О РАДИКАЛАХ Ω-КОЛЕЦ

Светлой памяти
Анатолия Ивановича Мальцева

Цель настоящей работы — перенесение результатов Андрунакиевича и Рябухина [1—3] о представлении радикалов ассоциативных колец при помощи классов модулей над ними на Ω-кольца, и в частности на полугруппы. Соответствующие теоремы содержатся в § 2. Некоторые примеры рассмотрены в § 3. Подготовительный материал сосредоточен в § 1. Излагаемые здесь результаты о радикалах универсальных алгебр принадлежат, по существу, Хёнке [21, 22]. Им только придана более удобная форма.

§ 1

Необходимые сведения из теории универсальных алгебр можно найти в книгах Куроша [6] или Кона [4]. Совокупность всех нульарных операций алгебры (A, Ω) условимся обозначать через Ω^0. Если $\nu \in \Omega^0$, то через 0_ν обозначим элемент алгебры A, отмечаемый операцией ν. Наименьшую конгруэнцию будем обозначать через $\mathbf{0}$, а наибольшую — через $\mathbf{1}$. Символ $A \mid\!\!\rightarrowtail \Pi A_\alpha$ означает, что алгебра A представлена как подпрямое произведение (согласно [6] — сумма) алгебр A_α. Известные свойства подпрямых произведений ([6], стр. 214—219 или [4], стр. 114—115) будут использоваться без ссылок.

Класс $\mathfrak{K}$ универсальных алгебр называется *размеченным*, если для каждой алгебры S из $\mathfrak{K}$ отмечено множество $\Theta(S)$ конгруэнций на S, причем: $(\Theta 1)$. Если $S \in \mathfrak{K}$, φ — гомоморфизм S на $\bar{S}$ и $\Theta = \ker\varphi \in \Theta(S)$, то $\bar{S} \in \mathfrak{K}$, а $\theta^1/\theta \in \Theta(\bar{S})$ тогда и только тогда, когда $\theta^1 \in \Theta(S)$; $(\Theta 2)$. Если $\{\theta_\alpha\} \subseteq \Theta(S)$, то $\bigcap_\alpha \theta_\alpha \in \Theta(S)$; $(\Theta 3)$ $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in \Theta(S)$.

Подпрямое произведение $S \mid\!\!\rightarrow \Pi S_\alpha$ называется Θ-*подпрямым*, если ядра естественных проекций S на S_α принадлежат $\Theta(S)$. При этом ввиду $\Theta 1$ $S_\alpha \in \mathfrak{K}$.

Если класс $\mathfrak{K}$ замкнут относительно гомоморфизмов, то в качестве $\Theta(S)$ можно взять множество всех конгруэнций. Если каждая алгебра S из $\mathfrak{K}$ содержит одноэлементную подалгебру 0, то можно положить

$$\Theta(S) = \{\theta \mid x\,\theta\,0 \Rightarrow x = 0\}.$$

Пусть теперь $\mathfrak{K}$ — размеченный класс однотипных универсальных алгебр, содержащий одноэлементную алгебру и замкнутый относительно Θ-подпрямых произведений. Функция ρ, ставящая в соответствие каждой алгебре S из класса $\mathfrak{K}$ ее конгруэнцию $\rho(S) \in \Theta(S)$, называется Θ-*радикалом*, если выполнены следующие свойства:

(P1). Если $S \cong T$ и $\rho(S) = 0$, то $\rho(T) = 0$;

(P2). Если $\theta \in \Theta(S)$ и $\rho(S/\theta) = 0$, то $\rho(S) \leqslant \theta$;

(P3). $\rho(S/\rho(S)) = 0$.

Предложение 1. *При выполнении свойств* P1 и P3 *свойство* P2 *эквивалентно свойству*

(P2′). Если $\theta \in \Theta(S)$, то $(\sup\{\rho(S), \theta\})/\theta \leqslant \rho(S/\theta)$.

Доказательство. Если выполнено P2′ и $\rho(S/\theta) = 0$, то $\sup\{\rho(S), \theta\}/\theta = 0$, откуда $\theta = \sup\{\rho(S), \theta\}$, т. е. $\rho(S) \leqslant \theta$. Если же справедливо P2, то ввиду [4, стр. 76, следствие 3. 12] имеем $\rho(S/\theta) = \theta^1/\theta$, где θ^1 — конгруэнция на S. При этом

$$S/\theta^1 \cong (S/\theta)/\rho(S/\theta)$$

и, в силу P1 и P3, $\rho(S/\theta^1) = 0$. Учитывая P2, получим $\sup\{\rho(S), \theta\} \leqslant \theta^1$, откуда и вытекает доказываемое неравенство.

Алгебра S называется ρ-*полупростой*, если $\rho(S) = 0$. Ясно, что одноэлементная алгебра ρ-полупроста для всякого радикала ρ.

Предложение 2. *Класс ρ-полупростых алгебр замкнут относительно Θ-подпрямых произведений.*

Доказательство. Пусть $S \mid\!\!\rightarrow \Pi S_\alpha$ и $\rho(S_\alpha) = 0$ для всех α. Тогда $S_\alpha \cong S/\theta_\alpha$ и ввиду P1 и P2 $\rho(S) \leqslant \theta_\alpha$. Отсюда

$$\rho(S) \leqslant \bigcap_\alpha \theta_\alpha = 0.$$

Предложение 3. *Пусть $\mathfrak{L}$ — подкласс размеченного класса $\mathfrak{K}$, содержащий одноэлементную алгебру и замкнутый относительно изоморфных образов и Θ-подпрямых произведений. Положим*

$$\Xi(S) = \{\varkappa \mid \varkappa \in \Theta(S),\ S/\varkappa \in \mathfrak{L}\}.$$

Тогда функция

$$\rho_{\mathfrak{A}}^{r}(S) = \bigcap_{\varkappa \in \Xi(S)} \varkappa$$

является Θ-радикалом на классе $\mathfrak{R}$ и класс $\mathfrak{L}$ совпадает с классом ρ-полупростых алгебр.

Доказательство. В силу $\Theta 2$ имеем $\rho(S) \in \Theta(S)$. Справедливость свойства P1 вытекает из $\Theta 1$ и $\Theta 3$. Пусть теперь $\theta \in \Theta(S)$. Если $\varkappa/\theta \in \Xi(S/\theta)$, то $\varkappa \in \Theta(S)$, согласно $\Theta 1$. Кроме того,

$$S/\varkappa \cong (S/\theta)/(\varkappa/\theta) \in \mathfrak{L}.$$

Так что $\varkappa \in \Xi(S)$. Далее легко видеть, что естественное взаимнооднозначное соответствие между конгруэнциями на S и на S/θ ([4, стр. 76, следствие 3.12]) сохраняет порядок. Поэтому

$$\Big(\bigcap_{\varkappa/\theta \in \Xi(S/\theta)} \varkappa\Big)/\theta = \bigcap(\varkappa/\theta) = \rho(S/\theta).$$

Если $\rho(S/\theta) = 0$, то

$$\rho(S) \leqslant \bigcap_{\varkappa/\theta \in \Xi(S/\theta)} \varkappa = \theta,$$

т. е. ρ обладает свойством P2. Если наконец $\overline{S} = S/\rho(S)$ и $\overline{\varkappa} \in \Xi(\overline{S})$, то, согласно $\Theta 1$, $\overline{\varkappa} = \varkappa/\rho(S)$, где $\varkappa \in \Theta(S)$, и

$$S/\varkappa \cong \overline{S}/\overline{\varkappa} \in \mathfrak{L},$$

т. е. $\varkappa \in \Xi(S)$. Наоборот, если $\varkappa \in \Xi(S)$, то из тех же соображений легко вывести, что $\overline{\varkappa} \in \Xi(\overline{S})$. Поэтому, учитывая приведенные выше соображения, получим

$$\bigcap_{\overline{\varkappa} \in \Xi(\overline{S})} \overline{\varkappa} = \bigcap_{\varkappa \in \Xi(S)} (\varkappa/\rho(S)) = \Big(\bigcap_{\varkappa \in \Xi(S)} \varkappa\Big)/\rho(S) = 0,$$

чем и доказывается справедливость свойства P3. Таким образом, ρ — Θ-радикал. Ясно, что все алгебры из $\mathfrak{L}$ полупросты. Если $\rho(S) = 0$, то $S \mid\!\!\rightarrowtail \prod_{\varkappa \in \Xi(S)} (S/\varkappa)$ и $S \in \mathfrak{L}$ в силу замкнутости класса $\mathfrak{L}$ относительно Θ-подпрямых произведений.

Предложение 3 показывает, что определенный выше радикал не совпадает с радикалом, обычно рассматриваемым в кольцах [5, 17], группах [7, 10] и модулях [8], так как в этих случаях полупростые классы должны быть замкнуты относительно идеалов, нормальных делителей и подмодулей соответственно.

Следуя Хиону [12], назовем Ω-*кольцом* Ω-алгебру S, обладающую, кроме операций из Ω (допускается, что Ω пусто), бинарным ассоциативным умножением, причем:

(К1) $\alpha \cdot (\beta_1 \ldots \beta_n \omega) = (\alpha\beta_1) \ldots (\alpha\beta_n)\omega$;

(К2) $\alpha_1 \ldots \alpha_n \omega \cdot \beta = (\alpha_1\beta) \ldots (\alpha_n \beta)\omega$;

(К3) $\alpha 0_\nu = 0_\nu = 0_\nu \alpha$

$(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n; \beta, \beta_1, \ldots, \beta_n \in S,\ \omega \in \Omega,\ \nu \in \Omega^0)$.

Из К3 вытекает, что все нульарные операции из Ω отмечают в Ω-кольце один и тот же элемент, который будем обозначать через 0.

Простейшими частными случаями Ω-колец являются полугруппы (Ω — пусто) и кольца ((S, Ω) — абелева группа).

Пусть S — Ω-кольцо. Назовем Ω-алгебру A *левым полигоном* Ω-кольца S или *левым S-полигоном*, если для любых $\lambda \in S$ и $a \in A$ определено произведение $\lambda a \in A$, причем:

(П1). $\lambda(a_1 \ldots a_n \omega) = (\lambda a_1) \ldots (\lambda a_n)\omega$;

(П2). $\lambda_1 \ldots \lambda_n \omega \cdot a = (\lambda_1 a) \ldots (\lambda_n a)\omega$;

(П3). $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$;

(П4) $\lambda 0_\nu = 0_\nu$

$(\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu \in S, a, a_1, \ldots, a_n \in A,\ \omega \in \Omega,\ \nu \in \Omega^0)$.

Ясно, что всякое Ω-кольцо является своим собственным полигоном. Если S — ассоциативное кольцо, то S-полигоны — это в точности S-модули. Если S — полугруппа, то S-полигоны оказываются S-полигонами (S — set, operand), рассматривавшимися ранее (см., например, [14, v. II, ch. 11, или 11, а также 18 и 23]).

Пусть A — левый полигон Ω-кольца S. Элемент $0 \in A$ называется *нулем*, если $\lambda 0 = 0$ для всех $\lambda \in S$. Если Ω^0 не пусто, то нулями являются элементы вида $0_\nu a$ и только они. Если нулями являются все элементы полигона, то он называется *нулевым*.

Конгруэнцию θ на S назовем *A-аннулирующей*, если $\lambda\theta\mu$ влечет $\lambda a = \mu a$ для всех $a \in A$. Точную верхнюю грань всех A-аннулирующих конгруэнций назовем *аннулятором* полигона A и будем обозначать через $(\mathrm{Ann}\ A)_S$. Если A — нулевой полигон, то $(\mathrm{Ann}\ A)_S = \mathbf{1}$.

Предложение 4. $(\mathrm{Ann}\ A)_S$ — *A-аннулирующая конгруэнция*.

Доказательство. Если $\lambda(\mathrm{Ann}\ A)_S \mu$, то найдутся элементы $\xi_1, \ldots, \xi_{m-1} \in S$ и A-аннулирующие конгруэнции $\theta_1, \ldots, \theta_m$, такие, что

$$\lambda\theta_1\xi_1\theta_2\xi_2 \cdot \ldots \cdot \xi_{m-1}\theta_m\mu$$

[4, стр. 104]. Поэтому для любого $a \in A$ имеем

$$\lambda a = \xi_1 a = \xi_2 a = \cdots = \xi_{m-1} a = \mu a.$$

Пусть φ — гомоморфизм Ω-кольца S на Ω-кольцо $\bar{S}$ и A — левый $\bar{S}$-полигон. Легко проверить, что определение $\lambda a = \varphi(\lambda)\, a\, (\lambda \in S, a \in A)$ превращает A в левый S-полигон. Таким образом, на всякий $\bar{S}$-полигон можно смотреть как на S-полигон.

Предложение 5. *Левый полигон A Ω-кольца S является левым (S/θ)-полигоном тогда и только тогда, когда* $\theta \leqslant (\mathrm{Ann}\ A)_S$.

Доказательство. Если π — естественный гомоморфизм S на S/θ, то корректность определения $\pi(\lambda)a = \lambda a$ $(\lambda \in S, a \in A)$ равносильна импликации

«$\lambda \theta \mu \Rightarrow \lambda a = \mu a$ для всех $a \in A$»,

которая означает, что $\theta \leqslant (\mathrm{Ann}\ A)_S$.

Предложение 6. *Если левый полигон A Ω-кольца S является левым (S/θ)-полигоном, то*

$$(\mathrm{Ann}\ A)_{S/\theta} = (\mathrm{Ann}\ A)_S/\theta.$$

Доказательство. Если $\lambda \in S$, то обозначим через $\bar{\lambda}$ соответствующий смежный класс из S/θ. Ввиду предложения 5 $\theta \leqslant (\mathrm{Ann}\ A)_S$. Если $\bar{\lambda}[(\mathrm{Ann}\ A)_S/\theta]\bar{\mu}$, то $\lambda (\mathrm{Ann}\ A)_S \mu$. Следовательно,

$$\bar{\lambda} a = \lambda a = \mu a = \bar{\mu} a$$

для всех $a \in A$, т. е.

$$(\mathrm{Ann}\ A)_S/\theta \leqslant (\mathrm{Ann}\ A)_{S/\theta}.$$

Далее заметим, что $(\mathrm{Ann}\ A)_{S/\theta} = \theta^1/\theta$, где θ^1 — конгруэнция на S. Если $\lambda \theta^1 \mu$, то $\bar{\lambda}\, (\mathrm{Ann}\ A)_{S/\theta} \bar{\mu}$.
Отсюда

$$\lambda a = \bar{\lambda} a = \bar{\mu} a = \mu a,$$

для всех $a \in A$. Таким образом, $\theta^1 \leqslant (\mathrm{Ann}\ A)_S$, откуда

$$(\mathrm{Ann}\ A)_{S/\theta} \leqslant (\mathrm{Ann}\ A)_S/\theta.$$

Предложение 7. *Если $A = \prod A_\alpha$ — прямое произведение левых полигонов Ω-кольца S, то* $(\mathrm{Ann}\ A)_S = \bigcap (\mathrm{Ann}\ A_\alpha)_S$.

Доказательство. Если $\lambda (\mathrm{Ann} A)_S \mu$, то $\lambda (a_\alpha) = \mu (a_\alpha)$ для всякой строки $(a_\alpha) \in A$. Отсюда $\lambda a_\alpha = \mu a_\alpha$ для всех α и, следовательно, $(\mathrm{Ann}\ A)_S \leqslant \bigcap (\mathrm{Ann}\ A_\alpha)_S$. Если $\lambda [\bigcap (\mathrm{Ann}\ A_\alpha)_S] \mu$ и $(a_\alpha) \in A$, то $\lambda a_\alpha = \mu a_\alpha$ для всех α, откуда $\bigcap (\mathrm{Ann}\ A_\alpha)_S \leqslant (\mathrm{Ann}\ A)_S$.

§ 2

Для дальнейших рассмотрений зафиксируем размеченный класс $\mathfrak{R}$ Ω-колец, содержащий одноэлементное Ω-кольцо и замкнутый относительно изоморфных образов и Θ-п подпрямых произведений. Левый S-полигон A назовем Θ-*отмеченным*, если $(\operatorname{Ann} A)_S \in \Theta(S)$. Функцию Σ, ставящую в соответствие каждому Ω-кольцу S из $\mathfrak{R}$ класс $\Sigma(S)$ Θ-отмеченных левых S-полигонов, назовем Θ-*общим классом*, если для каждого Ω-кольца S из $\mathfrak{R}$, каждой конгруэнции $\theta \in \Theta(S)$ и каждого Θ-отмеченного левого (S/θ)-полигона A включения $A \in \Sigma(S/\theta)$ и $A \in \Sigma(S)$ равносильны (ср. [3, стр. 991]).

Предложение 8. *Если* $\mathfrak{R}$ *— размеченный класс* Ω*-колец, то*

$$\Sigma(S) = \{A \mid (\operatorname{Ann} A)_S \in \Theta(S)\}$$

является Θ*-общим классом.*

Доказательство. Пусть A — левый S/θ-полигон, где $\theta \in \Theta(S)$. Тогда, согласно предложению 6, имеем

$$(\operatorname{Ann} A)_{S/\theta} = (\operatorname{Ann} A)_S/\theta,$$

и равносильность включений $(\operatorname{Ann} A)_S \in \Theta(S)$ и $(\operatorname{Ann} A)_{S/\theta} \in \Theta(S/\theta)$ является следствием свойства $\Theta 1$.

Теорема 1. *Пусть* ρ *—* Θ*-радикал в классе* $\mathfrak{R}$. *Если* $S \in \mathfrak{R}$, *то класс* $\sum_\rho(S)$ *всех таких* Θ*-отмеченных левых* S*-полигонов* A, *что* $\rho(S/(\operatorname{Ann} A)_S) = 0$, *является* Θ*-общим классом.*

Доказательство. Если $\theta \in \Theta(S)$ и A — Θ-отмеченный (S/θ)-полигон, то из предложения 6 и свойства $\Theta 1$ вытекает, что A — Θ-отмеченный S-полигон. С помощью того же предложения 6 получаем

$$S/(\operatorname{Ann} A)_S \cong (S/\theta)/[(\operatorname{Ann} A)_S/\theta] = (S/\theta)/(\operatorname{Ann} A)_{S/\theta},$$

и равносильность нужных включений сразу следует из P1.

Теорема 2. *Пусть* Σ *—* Θ*-общий класс и*

$$\rho_\Sigma(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Sigma(S) \text{ пусто,} \\ \bigcap\limits_{A \in \Sigma(S)} (\operatorname{Ann} A)_S & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда ρ_Σ *—* Θ*-радикал.*

Доказательство. В силу $\Theta 2$ и $\Theta 3$ $\rho_\Sigma(S) \in \Theta(S)$. Проверим справедливость свойств P1—P3.

(P1). Пусть $S \cong T$ и $\rho_\Sigma(S) = 0$. Если $\lambda \in T$, то обозначим через $\bar{\lambda}$ его образ в S. Ввиду $\Theta 3$ $\sum(T) \subseteq \sum(S)$. Поэтому, если $\lambda \rho_\Sigma(T) \mu$, то для всякого полигона $A \in \Sigma(T)$ и любого $a \in A$ имеем

$$\bar{\lambda} a = \lambda a = \mu a = \bar{\mu} a.$$

Следовательно, $\bar{\lambda}\rho_\Sigma(S)\bar{\mu}$, т. е. $\bar{\lambda} = \bar{\mu}$. Отсюда $\lambda = \mu$, что означает $\rho_\Sigma(T) = \mathbf{0}$.

(P2). Пусть $\theta \in \Theta(S)$ и $\rho_\Sigma(S/\theta) = \mathbf{0}$. Обозначим через $\bar{\lambda}$ смежный класс из S/θ, определяемый элементом λ. Если $\lambda\rho_\Sigma(S)\mu$, то для всякого $A \in \Sigma(S/\theta) \subseteq \Sigma(S)$ и любого $a \in A$ имеем

$$\bar{\lambda}a = \lambda a = \mu a = \bar{\mu}a.$$

Следовательно, $\bar{\lambda}\rho_\Sigma(S/\theta)\bar{\mu}$. Отсюда $\bar{\lambda} = \bar{\mu}$, а значит, $\lambda\theta\mu$. Таким образом, $\rho_\Sigma(S) \leqslant \theta$.

(P3). Положим $\bar{S} = S/\rho_\Sigma(S)$. Если $A \in \Sigma(S)$, то в силу определения радикала ρ_Σ имеем $\rho_\Sigma(S) \leqslant (\mathrm{Ann}\, A)_S$. Ввиду предложения 5 A является левым $\bar{S}$-полигоном и, следовательно, $A \in \Sigma(\bar{S})$. Таким образом, $\Sigma(S) \supseteq \Sigma(\bar{S})$, а из определения общего класса вытекает обратное включение. Поэтому, учитывая предложение 6 и сохранение порядка при соответствии, указанном в [4, стр. 76, следствие 3.12], получим

$$\rho_\Sigma(\bar{S}) = \bigcap_{A \in \Sigma(\bar{S})} (\mathrm{Ann}\, A)_{\bar{S}} = \bigcap_{A \in \Sigma(S)} [(\mathrm{Ann}\, A)_S/\rho_\Sigma(S)] =$$
$$= [\bigcap_{A \in \Sigma(S)} (\mathrm{Ann}\, A)_S]/\rho_\Sigma(S) = \mathbf{0}.$$

Если ρ и ρ' — Θ-радикалы, то условимся писать $\rho \leqslant \rho'$, если $\rho(S) \leqslant \rho'(S)$ для всех $S \in \mathfrak{K}$. Аналогично определяется соотношение $\Sigma \subseteq \Sigma'$ для Θ-общих классов Σ и Σ'.

Т е о р е м а 3. *Пусть* ρ *и* ρ' — Θ-*радикалы, а* Σ *и* Σ' — Θ-*общие классы. Тогда:*

(а) $\rho \leqslant \rho_{\Sigma_\rho}$;

(б) $\Sigma \subseteq \Sigma_{\rho_\Sigma}$;

(в) *если* $\rho \leqslant \rho'$, *то* $\Sigma_{\rho'} \subseteq \Sigma_\rho$;

(г) *если* $\Sigma \subseteq \Sigma'$, *то* $\rho_{\Sigma'} \leqslant \rho_\Sigma$;

(д) $\rho_\Sigma = \rho_{\Sigma_{\rho_\Sigma}}$;

(е) $\Sigma_\rho = \Sigma_{\rho_{\Sigma_\rho}}$;

(ж) *если* $\rho(S) = \mathbf{0}$ *влечет* $\rho'(S) = \mathbf{0}$, *то* $\rho' \leqslant \rho$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

(а) Если $\Sigma_\rho(S) \neq \varnothing$, то $\rho_{\Sigma_\rho}(S) = \bigcap (\mathrm{Ann}\, A_\alpha)_S$,

где

$$A_\alpha \in \Sigma_\rho(S),$$

т. е.

$$\rho(S/(\mathrm{Ann}\, A_\alpha)_S) = 0.$$

Поскольку $S/\rho_{\Sigma_\rho}(S)H \mid\!\!\to \Pi\, S/(\mathrm{Ann}\, A_\alpha)_S$, из предложения 2 и свойств $\Theta 2$ и P2 вытекает, что $\rho(S) \leqslant \rho_{\Sigma_\rho}(S)$. Если же $\Sigma_\rho(S) = \varnothing$, то $\rho(S) \leqslant 1 = \rho_{\Sigma_\rho}(S)$.

(б) Пусть $A \in \Sigma(S)$ и $\overline{S} = S/(\mathrm{Ann}\, A)_S$. Учитывая предложение 5, получим $A \in \Sigma(\overline{S})$, откуда, используя предложение 6, выводим

$$\rho_\Sigma(\overline{S}) \leqslant (\mathrm{Ann}\, A)_{\overline{S}} = (\mathrm{Ann}\, A)_S/(\mathrm{Ann}\, A)_S = 0.$$

Следовательно, $A \in \Sigma_{\rho_\Sigma}(S)$.

(в) и (г) очевидны.

(д) Неравенство $\rho_{\Sigma_{\rho_\Sigma}} \leqslant \rho_\Sigma$ вытекает из (б) и (г), а противоположное — из (а).

(е) Аналогично.

(ж) Ввиду P3 $\rho'(S/\rho(S)) = 0$, откуда $\rho'(S) \leqslant \rho(S)$ в силу P2.

Левый полигон A Ω-кольца S называется *конгломератом* левых S-полигонов A_α, где $\alpha \in I$, если $(\mathrm{Ann}\, A)_S = \bigcap\limits_{\alpha \in I} (\mathrm{Ann}\, A_\alpha)_S$. Ввиду предложения 7 прямое произведение левых полигонов является конгломератом своих сомножителей. Если $(\mathrm{Ann}\, A)_S = 0$, то полигон A называется *точным*.

Т е о р е м а 4. *Если Σ — Θ-общий класс, то эквивалентны следующие свойства неодноэлементного Ω-кольца S из $\mathfrak{K}$:*

(а) $\rho_\Sigma(S) = 0$;

(б) *S представляется как Θ-подпрямое произведение таких Ω-колец S_α из $\mathfrak{K}$, что каждый из классов $\sum(S_\alpha)$ содержит точный левый S_α-полигон;*

(в) *существует точный левый S-полигон, являющийся прямым произведением левых S-полигонов из класса $\Sigma(S)$;*

(г) *существует точный левый S-полигон, являющийся конгломератом левых S-полигонов из класса $\Sigma(S)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (а) $\Rightarrow$ (б). Ввиду (а) $\bigcap\limits_{A \in \Sigma(S)} (\mathrm{Ann}\, A)_S = 0$ и, следовательно, $S \mid\!\!\to \Pi\limits_{A \in \Sigma(S)} S/(\mathrm{Ann}\, A)_S$. В силу предложения 5 $A \in \sum(S/(\mathrm{Ann}\, A)_S)$. Поэтому из предложения 6 вытекает

$$(\mathrm{Ann}\, A)_{S/(\mathrm{Ann}\, A)_S} = (\mathrm{Ann}\, A)_S/(\mathrm{Ann}\, A)_S = 0,$$

т. е. A оказывается точным левым $(S/(\mathrm{Ann}\,A)_S)$-полигоном.

(б) $\Rightarrow$ (в). Пусть $S \mid\!\!\rightarrow \prod\limits_{\alpha\in I} S_\alpha$, θ_α—ядро проекции S на S_α, $\theta_\alpha \in \Theta(S)$ и A_α — точный левый S_α-полигон из $\sum(S_\alpha)$. Тогда $A_\alpha \in \sum(S)$. Положив $A = \prod\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$ и используя предложение 6, получим

$$(\mathrm{Ann}\,A_\alpha)_S/\theta_\alpha = (\mathrm{Ann}\,A_\alpha)_{S_\alpha} = 0,$$

откуда, в силу предложения 7:

$$(\mathrm{Ann}\,A)_S = \bigcap_{\alpha\in I} (\mathrm{Ann}\,A_\alpha)_S = \bigcap_{\alpha\in I} \theta_\alpha = 0.$$

(в) $\Rightarrow$ (г). Сразу следует из предложения 7.

(г) $\Rightarrow$ (а). Пусть A — точный левый S-полигон, являющийся конгломератом S-полигонов A_α, $\alpha \in I$ из класса $\Sigma(S)$. Тогда

$$\bigcap_{\alpha\in I} (\mathrm{Ann}\,A_\alpha)_S = (\mathrm{Ann}\,A)_S = 0$$

и, следовательно, $S \mid\!\!\rightarrow \prod\limits_{\alpha\in I} S_\alpha$, где $S_\alpha = S/(\mathrm{Ann}\,A_\alpha)_S$. Ввиду предложения 5 A_α — левые S_α - полигоны. Поэтому из предложения 6 вытекает

$$(\mathrm{Ann}\,A_\alpha)_{S_\alpha} = (\mathrm{Ann}\,A_\alpha)_S/(\mathrm{Ann}\,A_\alpha)_S = 0,$$

откуда

$$\rho_\Sigma(S_\alpha) \leqslant (\mathrm{Ann}\,A_\alpha)_{S_\alpha} = 0,$$

ибо $A_\alpha \in \sum(S_\alpha)$. Теперь равенство $\rho_\Sigma(S) = 0$ следует из теоремы 2 и предложения 2.

Θ-радикал ρ называется *замкнутым*, если $\rho = \rho_{\Sigma\rho}$. Из теоремы 3д вытекает, что замкнутость Θ-радикала равносильна возможности определения его с помощью Θ-общего класса.

Т е о р е м а 5. *Θ-радикал ρ замкнут тогда и только тогда, когда всякое ρ-полупростое Ω-кольцо S из $\mathfrak{R}$ обладает точным левым S-полигоном A.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если ρ замкнут, то существование нужного полигона A вытекает из теоремы 4. Если же такой полигон существует, то

$$\rho(S/(\mathrm{Ann}\,A)_S) = \rho(S) = 0.$$

Следовательно, $A \in \sum_\rho(S)$ и $\rho_{\Sigma_\rho}(S) = 0$ в силу теоремы 4. Таким образом, $\rho(S) = 0$ влечет $\rho_{\Sigma_\rho}(S) = 0$ и $\rho_{\Sigma_\rho} \leqslant \rho$ в силу теоремы 3ж. Обратное неравенство вытекает из теоремы 3а.

С л е д с т в и е 1. *Если каждое ρ-полупростое Ω-кольцо можно вложить в Ω-кольцо с единицей, то ρ — замкнутый Θ-радикал.*

Из результатов Хиона ([12, стр. 35, теорема 10]) и следствия 1 вытекает:

Следствие 2. *Если каждое* ρ*-полупростое* Ω*-кольцо слабо абелево* ([12, стр. 31]), *то* ρ — *замкнутый* Θ*-радикал.*

Назовем S-полигон A *центрированным*, если совокупность A^0 его нулей содержит не более одного элемента. Пересечение $\mathfrak{z}(A)$ всех таких конгруэнций левого S-полигона A, что по каждой из них любые два нуля сравнимы, называется его *центрирующей конгруэнцией.*

Предложение 9. *Если* S — Ω*-кольцо,* Ω^0 *не пусто и* $\mathfrak{z}(A)$ — *центрирующая конгруэнция левого* S*-полигона* A, *то* $A/\mathfrak{z}(A)$ — *центрированный* S*-полигон.*

Доказательство. Пусть $\upsilon \in \Omega^0$. Если $a \in A$ и $\bar{a}$ нуль полигона $A/\mathfrak{z}(A)$, то $\overline{0_\upsilon a} = 0_\upsilon \bar{a} = \bar{a}$, т. е. $a\,\mathfrak{z}(A)\,0_\upsilon a \in A^0$.

Требование непустоты множества Ω^0 существенно. Действительно, пусть $S = \{1, \lambda\}$ — двуэлементное $+$-кольцо, где $1 + \lambda = \lambda + \lambda = 1$, $\lambda + 1 = 1 + 1 = \lambda$, $1\lambda = \lambda 1 = \lambda$ и $1 \cdot 1 = \lambda\lambda = 1$. Рассмотрим четырехэлементный левый S-полигон A, определяемый таблицей сложения:

$$\begin{array}{cccc} 0 & u & a & b \\ u & u & b & a \\ a & b & b & a \\ b & a & b & a \end{array}$$

и правилами умножения: $\lambda 0 = 0 = 1 \cdot 0$, $\lambda u = u = 1u$, $\lambda a = b = 1b$, $\lambda b = a = 1a$. Ясно, что $A^0 = \{0, u\}$. Нетрудно проверить, что конгруэнция со смежными классами $\{0, u\}$ и $\{a, b\}$ является центрирующей конгруэнцией полигона A. Однако соответствующий двуэлементный фактор-полигон оказывается нулевым и, следовательно, нецентрированным.

Замечание. Наличие нульарных операций не является необходимым условием для центрированности полигона $A/\mathfrak{z}(A)$. Например, если S — полугруппа, то различные элементы из A сравнимы по $\mathfrak{z}(A)$ тогда и только тогда, когда оба они лежат в A^0 и, следовательно, центрированность факторполигона $A/\mathfrak{z}(A)$ очевидна.

Пусть Σ — Θ-общий класс. С ним естественным образом связаны два класса

$$\Phi\sum(S) = \{A/\mathfrak{z}(A) \mid A \in \sum(S)\}$$

и $\Gamma\Sigma(S)$ — класс всех центрированных левых S-полигонов, принадлежащих $\Sigma(S)$.

Предложение 10. *Пусть* Σ — Θ*-общий класс. Тогда* (а) $\Gamma\Sigma$ — Θ*-общий класс и* $\rho_\Sigma \leqslant \rho_{\Gamma\Sigma}$; (б) *если* $(\mathrm{Ann}\,[A/\mathfrak{z}(A)]_S \in \theta(S)$

для всех $A \in \Sigma(S)$, *то* $\Phi\Sigma$ — Θ-*общий класс и* $\rho_\Sigma \leqslant \rho_{\Phi\Sigma} \leqslant \rho_{\Gamma\Sigma}$; (в) *если выполнены условия пункта* (б), *а* $A \in \Sigma(S)$ *и* $(\operatorname{Ann} A)_S = 0$ *влечет* $(\operatorname{Ann}[A/\mathfrak{k}, (A)])_S = 0$, *то* $\rho_\Sigma = \rho_{\Phi\Sigma}$.

Доказательство. Пусть A — левый (S/θ)-полигон, причем $\theta \in \Theta(S)$. Как уже отмечалось, A можно рассматривать как S-полигон. Легко видеть, что как множества нулей, так и множества конгруэнций при том и другом рассмотрениях совпадают. Отсюда сразу следует, что $\Gamma\Sigma$ — Θ-общий класс, а учитывая условия пункта (б), нетрудно вывести, что Θ-общим классом является $\Phi\Sigma$. Неравенство $\rho_\Sigma \leqslant \rho_{\Gamma\Sigma}$ вытекает из очевидного включения $\Gamma\Sigma \subseteq \Sigma$ и теоремы 3г. Если далее $\rho_{\Phi\Sigma}(S) = 0$, то, согласно теореме 4, S представляется как Θ-подпрямое произведение $S \mapsto \Pi S_\alpha$, причем каждый из классов $\Phi\Sigma(S_\alpha)$ содержит точный S_α-полигон $\overline{A}_\alpha$. Тогда $\overline{A}_\alpha = A_\alpha/\mathfrak{z}(A_\alpha)$, где $A_\alpha \in \Sigma(S_\alpha)$, и

$$(\operatorname{Ann} A_\alpha)_{S_\alpha} \leqslant (\operatorname{Ann} \overline{A}_\alpha)_{S_\alpha} = 0.$$

Снова, применяя теорему 4, получим $\rho_\Sigma(S) = 0$ и неравенство $\rho_\Sigma \leqslant \rho_{\Phi\Sigma}$ вытекает из теоремы 3ж. Так как $\Gamma\Sigma \subseteq \Phi\Sigma$, то $\rho_{\Phi\Sigma} \leqslant \rho_{\Gamma\Sigma}$ согласно теореме 3г. Если выполнены условия пункта (в), то, полагая $\rho_\Sigma(S) = 0$ и повторяя только что проведенные рассуждения, получим $\rho_{\Phi\Sigma}(S) = 0$, откуда $\rho_{\Phi\Sigma} \leqslant \rho_\Sigma$.

Неравенство $\rho_\Sigma \leqslant \rho_{\Phi\Sigma}$ может оказаться строгим даже в случае полигонов над полугруппами. Действительно, пусть $\mathfrak{K}$ — класс всех полугрупп с нулем и ρ — такой замкнутый радикал, что $\rho(S) \neq 1$ для какой-нибудь полугруппы S. Тогда класс Σ, состоящий из объединений двух непересекающихся полигонов, принадлежащих Σ_ρ, оказывается общим классом. Из теоремы 4 легко вывести, что $\rho_\Sigma = \rho$. Между тем $\Gamma\Sigma = \varnothing$ и, следовательно, $\rho_\Sigma = \rho < 1 = \rho_{\Gamma\Sigma}$. Более того, существуют радикалы, которые не могут быть определены общим классом, состоящим из центрированных полигонов. Рассмотрим, например, многообразие полугрупп $\mathfrak{L}$, определяемое тождеством $xy = y$. В силу предложения 3 класс $\mathfrak{L}$ определяет радикал ρ на классе всех полугрупп, которому по теореме 1 соответствует общий класс Σ_ρ.

Если $A \in \Sigma_\rho(S)$, то $S/(\operatorname{Ann} A)_S \in \mathfrak{L}$, откуда $\lambda\mu a = \mu a$ для любых $a \in A$, λ, $\mu \in S$. Следовательно, всякий левый полигон A из $\Sigma_\rho(S)$ содержит нули и, если A содержит только один нуль, то $\lambda a = 0$ для всех $a \in A$ и всех $\lambda \in S$, т. е. $(\operatorname{Ann} A)_S = 1$. Допустим, что $\rho = \rho_{\Sigma'}$, где Σ' состоит из центрированных левых полигонов. Учитывая теорему 3б, получим $\Sigma' \subseteq \Sigma_\rho$.

В силу доказанного выше для каждого $A \in \Sigma'(S)$ имеем $(\mathrm{Ann}\, A)_S = \mathbf{1}$, откуда $\rho(S) = \rho_{\Sigma'}(S) = \mathbf{1}$ для всех S, что, разумеется, неверно.

§ 3

Рассмотрим несколько примеров общих классов, предполагая, что класс $\mathfrak{K}$ замкнут относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений, а $\Theta(S)$ — множество всех конгруэнций Ω-кольца S.

Левый S-полигон A назовем *нетривиальным*, если $\lambda a \notin A^0$ для некоторых $\lambda \in S$ и $a \in A$. Нетривиальный центрированный левый S-полигон A называется:

простым, если всякая его конгруэнция индуцирует на A/A^0 нулевое или единичное отношение эквивалентности;

неприводимым, если всякий нетривиальный подполигон полигона A совпадает с A;

транзитивным, если для любого $a \in A$ имеет место $A = Sa \cap \cap a$ или $Sa \subseteq A^0$;

симметричным, если $a \in A$ и $b \in Sa$ влечет или $a \in Sb$, или $Sb \subseteq A^0$;

слабо первичным, если для всякой конгруэнции θ на S такой, что соотношения $a \in A$ и $\lambda\theta\mu$ влекут $\lambda a = \mu a$, имеет место или $\theta \leqslant (\mathrm{Ann}\, A)_S$, или $Sa \subseteq A^0$;

первичным, если для всякой конгруэнции θ на S такой, что соотношения $a \in A$ и $\lambda\theta\mu$ влекут $\lambda a = \mu a$, имеет место или $\theta \leqslant (\mathrm{Ann}\, A)_S$, или $a \in A^0$.

Перечисленные классы полигонов обозначим через Σ^i, где $i = $ п, н, т, с, s, р соответственно. Класс центрированных полигонов обозначим через Г. Легко видеть, что Г и Σ^i ($i =$ = п, н, т, с) — общие классы. Общими являются и классы Σ^s и Σ^p. Действительно, пусть $\overline{S} = S/\varkappa$ и A — $\overline{S}$-полигон. Если $A \in \sum^s(S)$, $\bar{\lambda}\,\bar{\theta}\,\bar{\mu}$ влечет $\bar{\lambda}a = \bar{\mu}a$ и $\bar{\theta} = \theta/\varkappa$, то $\lambda\theta\mu$ влечет $\lambda a = \mu a$. Отсюда или $\theta \leqslant (\mathrm{Ann}\, A)_S$, что, в силу предложения 6, влечет

$$\bar{\theta} \leqslant (\mathrm{Ann}\, A)_S/\varkappa = (\mathrm{Ann}\, A)_{S/\varkappa},$$

или $\xi a = \xi a \in A^0$ для всех $\xi \in S$. Таким образом, $A \in \sum^s(\overline{S})$. Если же $A \in \sum^s(\overline{S})$ и $\lambda\bar{\theta}\mu$ влечет $\lambda a = \mu a$, то рассмотрим конгруэнцию $\bar{\theta} = \sup\{\theta, \varkappa\}/\varkappa$. Если $\bar{\lambda}\,\bar{\theta}\,\bar{\mu}$, то

$$\lambda \varkappa_1 \xi_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_{n-1} \xi_{n-1} \varkappa_n \mu,$$

где $\varkappa_i = \theta$ или $\varkappa$. Ввиду предложения 5 $\varkappa \leqslant (\mathrm{Ann}\, A)_S$. Поэтому

$$\overline{\lambda a} = \lambda a = \xi_1 a = \ldots = \xi_{n-1} a = \mu a = \bar{\mu} a,$$

и, учитывая предложение 6, получаем

$$\theta \leqslant \overline{(\mathrm{Ann}\, A)_S} = (\mathrm{Ann}\, A)_S / \varkappa$$

или $\xi a = \overline{\xi a} \in A^0$ для всех $\xi \in S$. Однако первое предположение влечет

$$\theta \leqslant \sup\{\theta, \varkappa\} \leqslant (\mathrm{Ann}\, A)_S.$$

Так что $A \in \sum^s(S)$. Для класса Σ^p доказательство вполне аналогично. Для краткости положим

$$\rho^i = \rho_{\Sigma^i} \ (i = \mathrm{n}, \mathrm{н}, \mathrm{т}, \mathrm{с}, \mathrm{s}, \mathrm{p}).$$

Предложение 11. $\rho^{\mathrm{н}} = \rho^{\mathrm{т}} = \rho^{\mathrm{c}}$.

Доказательство. Если $A \in \sum^{\mathrm{т}}(S)$ и B — нетривиальный подполигон полигона A, то существует $b \in B$, такой, что $Sb \subseteq A^0$. Из транзитивности полигона A вытекает, что $A = Sb \subseteq B$, т. е. $\sum^{\mathrm{т}} \subseteq \sum^{\mathrm{н}}$. Если $A \in \Sigma^{\mathrm{н}}(S)$, $a \in A$ и $Sa \subseteq A^0$, то, согласно П2,

$$(\lambda_1 a) \cdot \cdots \cdot (\lambda_n a)\, \omega = (\lambda_1 \cdot \cdots \cdot \lambda_n \omega)\, a.$$

Если $\nu \in \Omega^0$, то $0_\nu a \in A^0$ ввиду К3. При этом A^0 содержит лишь один элемент, совпадающий с 0_ν для всех $\nu \in \Omega^0$. Этим доказано, что Sa — нетривиальный подполигон в A. Поэтому $Sa = A$, откуда $\sum^{\mathrm{н}} \subseteq \sum^{\mathrm{т}}$. Таким образом, $\rho^{\mathrm{н}} = \rho^{\mathrm{т}}$. Далее ясно, что $\sum^{\mathrm{т}} \subseteq \sum^{\mathrm{c}}$, откуда $\rho^{\mathrm{c}} \leqslant \rho^{\mathrm{т}}$ согласно теореме 3г. Если $B \in \sum^{\mathrm{c}}(S)$, то положим

$$B^{00} = \{b \mid Sb \subseteq B^0\}.$$

Учитывая симметричность полигона B, нетрудно проверить, что $b \cup Sb \in \Sigma^{\mathrm{т}}(S)$ для всех $b \notin B^{00}$. Следовательно,

$$B = B^{00} \cup \Big(\bigcup_{b \notin B^{00}} (b \cup Sb). \Big)$$

Если $\theta = \bigcap_{b \notin B^{00}} (\mathrm{Ann}\,(b \cup Sb))_S$ и $\lambda \theta \mu$, то $\lambda b = \mu b$ для всех $b \notin B^{00}$. Если же $b \in B^{00}$, то $\lambda b = \mu b$ ввиду центрированности полигона B. Таким образом, B оказывается конгломератом полигонов из $\Sigma^{\mathrm{т}}(S)$. Если теперь $\rho^{\mathrm{c}}(S) = \mathbf{0}$, то, согласно теореме 4, существует точный левый S-полигон A, являющийся конгломератом левых полигонов из $\Sigma^{\mathrm{c}}(S)$, которые, в свою очередь, как показано выше, являются конгломератами полигонов из $\Sigma^{\mathrm{т}}(S)$. Следовательно, A — конгломерат полигонов из $\Sigma^{\mathrm{т}}(S)$ и в силу теоремы 4 $\rho^{\mathrm{т}}(S) = \mathbf{0}$. Отсюда по теореме 3ж вытекает, что $\rho^{\mathrm{т}} \leqslant \rho^{\mathrm{c}}$.

В случае полугрупп очевидно включение $\Sigma^{\mathrm{п}} \subseteq \Sigma^{\mathrm{н}}$, из которого по теореме 3а следует неравенство $\rho^{\mathrm{п}} > \rho^{\mathrm{п}}$. Если $\mathfrak{R}$ — класс всех ассоциативных колец, то $\rho^{\mathrm{п}} = \rho^{\mathrm{н}}$ и соответствующий радикал совпадает с общеизвестным радикалом Джекобсона.

Детальное исследование радикала $\rho^{\text{н}}$ для случая, когда $\mathfrak{k}$ — класс полугрупп, предпринял Хенке ([21—23]). Этот радикал изучался и другими авторами (см. [13, 27, 29, 34, а также 14, v. II, ch. 11]). В случае полугрупп имеем $\rho^{\text{н}} < \rho^{\text{п}}$. Действительно, всякая группа является своим точным транзитивным левым полигоном и согласно теореме 4 и предложению 11 $\rho^{\text{н}}$-полупроста. В то же время $\rho^{\text{п}}$-полупростота группы означает, что равно нулю пересечение ее максимальных подгрупп, ибо, как легко проверить, каждая конгруэнция группы, рассматриваемой как свой собственный левый полигон, является разбиением на левые смежные классы по некоторой подгруппе.

Заметим еще, что, если $\mathfrak{k}$ — класс дистрибутивных структур, то $\rho^{\text{п}} = \rho^{\text{н}} = \mathbf{0}$. Действительно, каждая дистрибутивная структура представима как подпрямое произведение двухэлементных цепей. Двухэлементная же цепь точна как свой левый полигон и лежит в $\sum^{\text{п}} \bigcap \sum^{\text{н}}$. Остается применить теорему 4 и предложение 2.

Подмножество I из Ω-кольца S называется идеалом, если $a_1, \ldots, a_n \in I$ влечет $a_1, \ldots, a_n \omega \in I$, а из $a \in I$ вытекает $sa \in I$ и $as \in I$ для всех $s \in S$. Заметим, что в отличие от полугрупп и колец не всякий идеал является смежным классом некоторой конгруэнции.

Предложение 12. *Ω-кольцо S является точным первичным левым S-полигоном тогда и только тогда, когда $S^2 \not\subset S^0$ и $(\operatorname{Ann} I)_S = \mathbf{0}$ для всякого идеала $I \not\subset S^0$.*

Доказательство. Если полигон S точен и первичен, θ — конгруэнция Ω-кольца S и $\lambda \theta \mu$ влечет $\lambda\alpha = \mu\alpha$ для всех α из некоторого идеала I, то ввиду первичности S имеем или $I \leqslant S^0$, или $\theta \leqslant (\operatorname{Ann} S)_S = \mathbf{0}$. Допустим теперь, что S обладает указанными свойствами. Поскольку $S \not\subset S^0$, то $(\operatorname{Ann} S)_S = \mathbf{0}$, т. е. S — точный левый S-полигон. Если θ — конгруэнция Ω-кольца S, $\alpha \notin S^0$ и $\lambda \theta \mu$ влечет $\lambda\alpha = \mu\alpha$, то $\lambda\beta = \mu\beta$ для всех $\beta \in I$, где I — идеал Ω-кольца S, порожденный элементом α. Тогда

$$\theta \leqslant (\operatorname{Ann} I)_S = \mathbf{0} = (\operatorname{Ann} S)_S,$$

т. е. S — первичный левый S-полигон.

Замечание. Ω-кольцо, обладающее свойствами, указанными в предложении 12, естественно назвать *первичным слева*. В случае колец это понятие совпадает с обычной первичностью. Однако для полугрупп левая первичность не влечет правую. Действительно, рассмотрим полугруппу с образующими $\{a, x, y\}$ и определяющими соотношениями $ax = ay$ и $xy = yx$. Эта полугруппа, будучи сократимой слева, оказывается первичной слева. Между тем, полагая $u \theta v$, если u совпа-

дает с v после замены всех y на x, получим конгруэнцию, являющуюся правым аннулятором идеала, порожденного элементом a. Последнее показывает, что рассматриваемая полугруппа не первична справа.

В теории полугрупп наряду с радикалами, рассматриваемыми как некоторая конгруэнция, вводились радикалы, рассматриваемые как некоторые идеалы (см. [15, 16, 18, 19, 26—33]). Убедимся, что некоторые из этих идеалов вкладываются в предложенную в настоящей работе схему. С этой целью назовем конгруэнцию θ на полугруппе S *идеальной*, если в S найдется такой идеал, H (возможно $H=\varnothing$), что $x\,\theta\,y$ равносильно $x=y$ или $x,\ y\in H$.

Предложение 13. *Точная нижняя грань любого множества идеальных конгруэнций является идеальной.*

Доказательство. Пусть θ_α — идеальные конгруэнции и H_α — соответствующие идеалы. Рассмотрим идеал $H=\bigcap H_\alpha$. Если H пуст, то $\inf\theta_\alpha=\mathbf{0}$. В противном случае положим $x\,\theta\,y$, если $x=y$ или $x,y\in H$. Ясно, что $x\theta_\alpha y$ для всех α. Если $x\theta_\alpha y$ для всех α и $x\neq y$, то $x,\ y\in H_\alpha$ для всех α, т. е. $x,\ y\in H$.

Предложение 14. *Класс полугрупп, замкнутый относительно подпрямых произведений и перехода к факторполугруппам по идеальным конгруэнциям, можно разметить, отметив идеальные конгруэнции.*

Доказательство. Справедливость свойств $\Theta1$ и $\Theta3$ очевидна, а $\Theta2$ вытекает из предложения 13.

Положим

$$\Sigma^u(S)=\{A\,|\,(\mathrm{Ann}\,A)_S\text{— идеальная конгруэнция}\}.$$

Учитывая предложение 8, нетрудно убедиться, что $\Sigma^{ui}=\Sigma^u\bigcap\Sigma^i$ $(i=$ п, н, т, с, s, р$)$ — общие классы. Согласно теоремам 2 и 3г эти классы определяют радикалы $\rho^{ui}\geqslant\rho^i$. Из результатов Зейделя [28] вытекает, что $\rho^{u\mathrm{H}}=\rho^{u\mathrm{П}}$ и совпадает с радикалом Хенке $\mathrm{rad}^0\,S$ (см. [18]). Как и в случае колец [3], нетрудно подобрать общие классы, определяющие простой и вполне простой радикалы [26].

В предложенную схему, по-видимому, не укладываются нильпотентный и ниль-радикалы [15, 16, 26, 30—32].

Литература

1. Андрунакиевич В. А. Первичные модули и радикал Бэра. — Сиб. матем. ж., 1961, **2**, № 6, 801—806.
2. Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М. Модули и радикалы. — Докл. АН СССР, 1964, **156**, № 5, 991—994.

3. Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М. Специальные модули и специальные радикалы. Сб. «Памяти Н. Г. Чеботарева». Казань, 1964, 7—17.
4. Кон. П. Универсальная алгебра. «Мир», 1968.
5. Курош А. Г. Радикалы колец и алгебр. — Матем. сб., 1953, **33**, 13—26.
6. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. Физматгиз, 1962.
7. Курош А. Г. Радикалы в теории групп. — Сиб. матем. ж., 1962, **3**, № 6, 912—931, поправка: cit. ibid., 1965, **6**, № 3, 715.
8. Мишина А. П., Скорняков Л. А. Абелевы группы и модули. «Наука», 1969.
9. Плоткин Б. И. Ω-полугруппы, Ω-кольца и общие представления. — Докл. АН СССР, 1963, **149**, № 5, 1037—1040.
10. Плоткин Б. И. Группы автоморфизмов алгебраических систем. «Наука», 1966.
11. Скорняков Л. А. О гомологической классификации моноидов. — Сиб. матем. ж., 1969, **10**, № 5, 1139—1143.
12. Хион Я. В. Ω-кольцоиды, Ω-кольца и их представления. — Тр. Москов. матем. об-ва, 1965, **14**, 3—47.
13. Шайн Б. М. О транзитивных представлениях полугрупп. — Усп. матем. наук, 1963, **18**, № 3, 215—222.
14. Clifford A. H., Preston G. B. The algebraic theory of semigroups. — Amer. Math. Soc., 1961, **1**, 1967, II.
15. Bosák Ju. О радикалах полугрупп. — Math. — fyz. časop., 1962, **12**, № 3, 230—234.
16. Bosák Ju. On radikal of semigroups. — Matemat. časop., 1968, **18**, № 3, 204—212.
17. Divinsky N. Rings and radicals. — George Allen. London, 1965.
18. Hoehnke H.-J. Zur Strukturtheorie der Halbgruppen. — Math. Nachr., 1963, **26**, № 1—4, 1—13.
19. Hoehnke H.-J. Über das O-Radikal einer Halbgruppe. — Monatsber. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, 1963, **5**, 667—670.
20. Hoehnke H.-J. Über das untere und obere Radikal einer Halbgruppe. — Math. Z., 1965, **89**, 300—311.
21. Hoehnke H.-J. Radikale in allgemeinen Algebren. — Math. Nachr., 1966, **32**, № 6, 347—383.
22. Hoehnke H.-J. Einige neue Resultate über abstrakte Halbgruppen. — Coll. Math., 1966, **14**, 329—348.
23 Hoehnke H.-J. Structure od semigroups. — Canad. J. Math., 1966, **18**, № 3, 449—491.
24. Hoehnke H.-J. — Das Brown — McCoysche O-Radikal für Algebren und seine Anwendung in der Theorie der Halbgruppen. — Fund. Math, 1970, **66**, № 2, 155—175.
25. Hoehnke H.-J., Seidel H. Über das O-Radikal einer Halbgruppe. — Monatsber. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, 1963, **5**, № 11—12, 667—670.
26. Luh J. On the concepts of radical of semigroup having kernel. — Portug. math., 1960, **19**, № 3—4, 189—198.
27. Seidel H. Über das Radikal einer Halbgruppe. — Math. Nachr., 1965, **29**, № 3—4, 255—263.
28. Seidel H. Eine Charakterisiserung des O-Radikales einer Halbgruppe. — Math. Nachr., 1967, **34**, № 3—4, 163—166.
29. Slover R. Representation of a semigroup. — Trans. Amer. Math. Soc., 1965, **120**, № 3, 417—427.

30. Šulka R. О нильпотентных элементах, идеалах и радикалах полугруппы. — Math. — fyz. časop., 1963, 13, № 3, 209—222.
31. Šulka R. Note on the Ševrin radical in semigroups. — Matemat. časop., 1968, 18, № 1, 57—58.
32. Šulka R. On the nilpotency in semigroups. — Matemat. časop., 1968, 18, № 2, 148—157.
33. Szasz F. Radikalbegriffe für Halbgruppen mit Nullelement, die dem Jacobsonschen ringtheoretischen Radikal ähnlich sind. — Math. Nachr., 1967, 34, № 3—4, 157—161.
34. Tully E. Representation of a semigroup by transformations actingtransitively on a set.—Amer. J. Math., 1961, 83, № 3, 533—541

Поступило 20 декабря 1969 г.

ИЗ ВЫСТУПЛЕНИЙ НА ОТКРЫТИИ ДЕСЯТОГО ВСЕСОЮЗНОГО АЛГЕБРАИЧЕСКОГО КОЛЛОКВИУМА, ПОСВЯЩЕННОГО ПАМЯТИ АКАДЕМИКА А. И. МАЛЬЦЕВА

(Новосибирск, 20—26 сентября 1969 года)

Академик Г. И. Марчук (Новосибирск). Сегодня ведущие математики страны собрались в Академгородке для того, чтобы провести свой очередной, уже традиционный, Всесоюзный коллоквиум по алгебре. Этот коллоквиум посвящается памяти выдающегося математика А. И. Мальцева, заложившего основы многих научных направлений в алгебре, математической логике, теории моделей и других областях математики. Математики нашей страны и мира глубоко чтят память этого замечательного ученого, внесшего исключительно большой вклад в науку. Последние годы жизни Анатолия Ивановича, 7—8 лет, неразрывно связаны с Сибирским отделением Академии наук. Анатолий Иванович был членом Президиума Сибирского отделения и являлся по существу одним из руководителей большой математической школы Сибирского отделения Академии наук. Он всегда страстно, с душой, с сознанием высокой ответственности брался за решение больших и малых задач, которые ему поручал Президиум Сибирского отделения. Благодаря своей энергии, исключительной широте научных интересов А. И. Мальцев создал блестящую школу математиков.

Анатолий Иванович был не только выдающимся ученым, имя которого всегда будет помнить математическая общественность мира, но и замечательным человеком, умевшим найти подход к людям разных интеллектов и разных взглядов на жизнь. Мы должны учиться у Анатолия Ивановича большой науке, трудному, но принципиально важному делу организации научных школ.

Профессор Л. Я. Куликов (Москва). Вы, вероятно, помните, что первой опубликованной работой Анатолия Ивановича по теории групп была работа по теории абелевых групп, в которой дана классификация абелевых групп без кручения конечного ранга. Как я себе представляю, причиной интереса к описанию этого класса абелевых групп послужила созданная Л. С. Понтрягиным теория характеров топологических групп. В частности, вопрос о полном описании бикомпактных связных топологических групп целиком сводился к описанию дискретных абелевых групп без кручения. Именно этим было вызвано появление в 1937 году сначала работы А. Г. Куроша, а несколько позже (с разрывом примерно в один год) — работ Анатолия Ивановича Мальцева и английского математика Дэррн. В работе Анатолия Ивановича была дана полная классификация абелевых групп без кручения конечного ранга.

Одной из первых работ, с которой я познакомился, которая на меня оказала и оказывает до сих пор влияние, была именно эта работа Анатолия Ивановича. Там есть такая особенность. Для того, чтобы дать классификацию, нужно было обобщить понятие p-адического числа. p-Адические числа были введены очень давно в науку. А вот их обобщение, так называемые n-адические или z-адические числа, насколько я помню, были впервые введены в работе Анатолия Ивановича и успешно применены им к классификации названного класса групп. В дальнейшем эта идея не p-адического, а n-адического пополнения кольца целых чисел сыграла существенную роль. Она оказалась полезной при изучении не только абелевых групп без кручения, но и смешанных абелевых групп.

С Анатолием Ивановичем я познакомился, насколько помню, в 1939 или 1940 году на заседании семинара О. Ю. Шмидта по теории групп, которое проводилось в старом здании МГУ. Он был официальным оппонентом по моей кандидатской диссертации. В основном же наши встречи происходили на алгебраических коллоквиумах и симпозиумах.

Хочу остановиться на преподавании алгебры в пединститутах. Поскольку Анатолий Иванович имел огромный, тридцатилетний опыт преподавания, особенно в Ивановском пединституте, то всякая беседа с ним об этом, естественно, была для меня событием. Анатолий Иванович говорил о необходимости объединения в одном курсе логики и высшей алгебры. Как на удачный пример такого объединения он указывал на книгу Фефермана «Числовые системы». Он считал, что эта интересная книга может послужить основой для создания пединститутских учебников в новом направлении. Видимо, многие

из присутствующих здесь знакомились с проектом программы по объединенному курсу алгебры и теории чисел для пединститутов. В частности, одно из пожеланий Анатолия Ивановича учтено, и элементы математической логики уже появились в новой программе. Однако вопрос о большем слиянии алгебры и логики не только в научной работе, но и в преподавании, как того добивался Анатолий Иванович, еще не решен полностью. Необходимы в первую очередь новые учебники, более радикальная перестройка программ и многое другое.

Я всегда поражался не только широтой и глубиной интересов Анатолия Ивановича. Анатолий Иванович получил фундаментальные результаты по всем разделам общей алгебры. Его роль как творца новых идей, новых научных результатов и как создателя новых направлений в общей алгебре является совершенно исключительной. Я не знаю алгебраиста более крупного в отечественной математике, чем Анатолий Иванович. В связи с этим мне кажется целесообразным, чтобы наш коллоквиум обратился с ходатайством в Президиум Академии наук об учреждении премии имени А. И. Мальцева, которая присуждалась бы за выдающиеся работы в области общей алгебры.

Член-корреспондент АН СССР М. И. Каргаполов (Новосибирск). Я знал, конечно, что Анатолий Иванович учился в аспирантуре академика А. Н. Колмогорова, но все же однажды спросил его, кого он считает своим учителем. Подумав, он ответил: «Гильберта». И действительно, можно проследить влияние Гильберта на развитие личности Анатолия Ивановича. Анатолий Иванович оказался достойным учеником и последователем Гильберта как в математической логике, так и в алгебре. Но сейчас я хотел бы сказать об Анатолии Ивановиче не только как об ученом.

Мне хочется рассказать о наших воскресных прогулках. Это я так только говорю — прогулки. На самом деле это были походы, изнурительные даже для нас, молодых. Случалось, мы уходили за двадцать-тридцать километров. Иногда садились на попутную грузовую машину, уезжали за Искитим, а потом обратно шли по бердским каньонам. По пути обсуждались всевозможные вопросы. В частности, Анатолий Иванович очень интересовался проблемой подготовки математических кадров, преподаванием математики в школе и в высших учебных заведениях и вообще развитием математики в нашей стране. По этим вопросам в свое время (в январе 1967 г.) была опубликована его статья в «Правде». Не буду пересказывать ее содержание, отмечу только некоторые его мысли, не вошед-

А. И. Мальцев. 1964 г. *Кадр из фильма «Путь в науку».*

шие в эту статью. В частности, его волновало то, что из Сибири, с Урала уезжают хорошие математики, профессора, доценты. Уезжают в европейскую часть Союза. Как закрепить кадры? Анатолий Иванович предлагал материальные стимулы. Однако наряду с этим он считал, что интересно было бы ввести, кроме двух существующих ученых степеней — кандидата и доктора, — еще несколько, но уже без материального поощрения. Присуждение высших степеней — пусть даже без материального поощрения — приносило бы удовлетворение ученому и свидетельствовало бы о том, что его деятельность оценивается высоко. Имея такое моральное удовлетворение, ученый, конечно, работал бы с большей отдачей сил и удовольствием.

Далее, у Анатолия Ивановича была интересная мысль организовать именные кафедры в некоторых периферийных университетах, и в частности в Сибири и на Дальнем Востоке. Речь идет о том, чтобы на некоторых кафедрах повысить в 2—3 раза зарплату заведующего, а подбор заведующего проводить путем всесоюзного конкурса, причем голосование по кандидатуре не

обязательно должен проводить ученый совет соответствующего вуза, потому что он может оказаться некомпетентным в вопросах математики.

Вообще Анатолий Иванович всегда был полон разных идей. К сожалению, не все из них ему удалось осуществить. Так, он мечтал о создании института высших исследований на международной основе при участии Советского Союза. В последние годы жизни он очень интересовался созданием проблемных лабораторий.

Лет пять назад можно было часто слышать, по крайней мере, у нас, в Академгородке, рассуждения об организаторах науки. Говорилось даже о желательности подготовки, воспитания кадров такого типа. Анатолий Иванович скептически относился к этим разговорам и в шутку предлагал открыть школу по подготовке организаторов науки. Его ироническое отношение к понятию организатора науки объяснялось тем, что при этом подразумевался только ученый-администратор: ученый-президент, ученый-директор, ученый-декан и т. д. Анатолий Иванович высоко ценил тех ученых, которые, занимая административные должности, решают практические вопросы по созданию научных учреждений, развитию науки. Однако он считал, что надо с неменьшим уважением относиться и к тем, кто, не занимая административного поста, все же заслуживает звания организатора науки. В качестве примера он называл академика А. Н. Колмогорова. Так, однажды мы заговорили о развитии математики в Казахстане, и Анатолий Иванович, улыбаясь, сказал А. Д. Тайманову: «Вы пригласите в Алма-Ату А. Н. Колмогорова, и он вам через два года создаст институт, который будет соперничать с Принстонским».

Заслуги А. И. Мальцева в развитии науки в Сибири огромны. Как известно, в Академгородке создан и успешно развивается Новосибирский университет. Университет своеобразен, в частности, студенты-математики учатся по учебному плану, существенно отличающемуся от учебных планов других университетов. По инициативе Анатолия Ивановича в учебный план для студентов-математиков НГУ впервые в Союзе были включены и им же подробно разработаны годовой курс математической логики и семестровый курс теории алгоритмов и рекурсивных функций. Роль А. И. Мальцева в становлении нашего университета настолько велика, что, на мой взгляд, его можно по праву назвать одним из его создателей.

Как известно, А. И. Мальцев, работая в Сибирском отделении, создал довольно большой коллектив алгебраистов и логиков, имеющий хорошую перспективу для дальнейшего разви-

тия. Ему удалось настолько удачно подобрать ученых, что практически не оказалось ни одной пары психологически несовместимых личностей. После кончины А. И. Мальцева некоторые уехали. В будущем, возможно, уедут и другие, но жизнеспособность созданного им коллектива так велика, что, несмотря на эти и другие возможные потери, алгебра и логика, как я думаю, будут в Новосибирске успешно развиваться.

Еще мне хочется сказать несколько слов об Анатолии Ивановиче как руководителе и человеке. Ни в институте, ни в университете у него не было служебного кабинета. Всевозможные вопросы обсуждались и решались на семинарах, во время прогулок и памятных всем нам шествий алгебраистов от университета до Морского проспекта после заседания семинара «Алгебра и логика». Анатолий Иванович по существу никогда не приказывал и почти никогда не «поручал». Несмотря на мягкий стиль руководства, вокруг него царила атмосфера напряженного труда. Анатолий Иванович внимательно выслушивал мнение своих коллег, учитывал его, старался решить вопрос коллегиально и демократично. Многие помнят, как во время Кишиневского коллоквиума Анатолий Иванович провел тайное голосование кандидатур советских алгебраистов для выступлений с получасовыми докладами на Московском международном конгрессе математиков, хотя, будучи председателем алгебраической секции конгресса, он мог бы предложить эти кандидатуры по своему усмотрению. Помню, как на Рижском коллоквиуме решался вопрос о месте проведения следующего коллоквиума. Мне хорошо известно, что Анатолий Иванович считал, что девятый коллоквиум следует провести в Красноярске или Алма-Ате. Не сомневаюсь, что, используя свой огромный авторитет, он сумел бы убедить в этом большинство алгебраистов, но, узнав предварительно другие мнения, он не стал настаивать на своем предложении. Было принято иное решение.

Мне кажется, стоит поддержать предложение об учреждении премии имени А. И. Мальцева, тем более, что в свое время Президиум Сибирского отделения АН СССР принимал такое решение.

Академик АН Казахской ССР А. Д. Тайманов (Алма-Ата). Когда Анатолий Иванович переехал в июле 1960 года в Новосибирск, он заинтересовался организацией математических исследований в Казахстане. Уже в сентябре он был в Алма-Ате. В течение недели знакомился с работой алмаатинских математиков, физиков и, когда мы возвращались в Новосибирск, поделился своим мнением об организации работ в Казахстане.

К этому вопросу он возвращался часто, несколько раз бывал в Алма-Ате, последний раз в 1966 году в составе делегации Академии наук, возглавляемой М. В. Келдышем. После знакомства с работами алмаатинских математиков он составил подробную докладную записку, где указаны недостатки и намечен опорный план работы на ближайшие несколько лет. Теперь этот набросок стал у нас основным документом, мы стремимся реализовать пожелания Анатолия Ивановича.

К вопросам организации математических исследований и математического образования Анатолий Иванович возвращался очень часто. Я сейчас хотел бы познакомить вас с одной проблемой, которой он занимался в последние дни. В 1967 году у него возникла идея создания института дискретной математики и математической логики. Перед Рижским коллоквиумом он составил вчерне докладную записку. К топологической конференции, которая работала здесь с 3 по 10 июля 1967 года, Анатолий Иванович дал мне окончательный вариант. Во время конференции он обсуждал со многими участниками разные аспекты организации математического института, я присутствовал на его беседе с профессором Курепой. Это была наша последняя встреча. Пятого июля мы пригласили профессора Курепу, и на берегу реки обсуждали вопросы о работе институтов, об организации научных исследований в Югославии и странах Западной Европы. С этими вопросами Курепа был хорошо знаком, потому что он специально исследовал их, будучи членом одной из комиссий ООН.

У меня осталась записка Анатолия Ивановича о создании нового института — дискретной математики и математической логики, что он считал вполне назревшим делом. В ней перечисляются проблемы, которые должны изучаться в этом институте. Первая — развитие всех областей математической логики: теории алгоритмов, оснований математики и смежных дисциплин. Характерна для Анатолия Ивановича мысль о развитии именно всех областей математической логики. Вторая проблема — развитие исследований в смежных областях математики: общей алгебре, дискретном анализе, теории информации, геометрии и математическом анализе. Третья — исследование математических вопросов теории языка и мышления.

Затем Анатолий Иванович составляет структуру института, каким он представлял его через семь лет после организации. Я хочу прочесть эту записку, потому что из нее видно, какие направления в математике он считал перспективными. Институт должен был состоять из семи отделов.

Первый отдел — логики. Здесь три лаборатории: первая — общей логики и теории доказательств, вторая — теории множеств и оснований математики, третья — конструктивной математики, конструктивного анализа и конструктивной алгебры.

Второй отдел — отдел теории алгоритмов — включает три лаборатории: общей теории алгоритмов, теории конечных автоматов и непрерывных сетей и дискретного анализа.

Третий отдел — общей алгебры. Здесь предполагалось создать также три лаборатории: теории моделей и алгебраических систем, теории групп, теории колец и специальных алгебр.

Четвертый отдел — теории языков и сообщения. Четыре лаборатории: семиотики, лингвистики, теории информации и теории игр.

Пятый отдел — классической математики, с пятью лабораториями: топологии и геометрии, математического анализа, теории вероятностей и математической статистики, математического образования и истории математики и логики.

Математическому образованию Анатолий Иванович уделял очень много внимания. Сам писал учебники и собирался составить коллектив, который бы создавал учебники как для средних школ, так и для университетов. Он считал, что учебники должны обновляться через каждые 10 лет. Как-то я его спросил: «Кого вы думаете пригласить на заведование отделом математического образования?» Он сказал: «Я бы пригласил Сергея Васильевича Смирнова, но он из Иванова не поедет».

И последний отдел — это отдел биологической математики. Здесь должно быть четыре лаборатории: теории образов, теории самообучения и обучения, теории простейших реальных языков животных, математической психологии.

Анатолий Иванович считал, что в институте должно быть 100 человек: примерно 20—25 докторов, 40 кандидатов и остальные — стажеры, аспиранты. Седьмого июля оборвалась жизнь и работа Анатолия Ивановича. Через неделю, когда мы опомнились, я отнес этот документ М. А. Лаврентьеву. Через некоторое время Михаил Алексеевич пригласил меня и сказал: «Я прочитал, документ хороший, но кто же будет возглавлять этот институт?» Конечно, я не мог дать ответа. Может быть, сегодняшнее собрание в состоянии ответить на этот вопрос?

Профессор Б. И. Плоткин (Рига). А. И. Мальцев был великим алгебраистом. Ему принадлежат выдающиеся открытия в разнообразнейших разделах алгебры, но, пожалуй, самое замечательное его открытие — это открытие новых связей

между алгеброй и математической логикой, между разными частями самой алгебры. Он принадлежал к тем редким ученым, кто соединяет разные отделы науки в одну науку. Анатолий Иванович выдвинул ряд общих идей, которые затем применялись во многих конкретных ситуациях. В результате он стал выдающимся творцом и в теории групп, и в теории колец, и в общей теории алгебраических систем, и в топологической и линейной алгебре, и в теории алгоритмов, и в разных других разделах алгебры. Почти каждая часть алгебры, каждый наш алгебраист испытали влияние Анатолия Ивановича. Возьмем, к примеру, теорию групп. Здесь, если не считать абелевых групп, деятельность Анатолия Ивановича началась, вероятно, с применения локальных теорем к некоторым теоретико-групповым задачам. Сейчас этот метод стал обычным и классическим. Возможно, что математическая логика привела Анатолия Ивановича также к серии теорем о вложениях колец в тела, полугрупп в группы. По-видимому, теоремы вложения играли какую-то роль и в работах по топологической алгебре, где в дальнейшем он получил ряд глубоких результатов. В свою очередь его исследования по топологическим группам и тесно связанные с ними исследования по линейным группам повлекли за собой замечательные работы, относящиеся уже к абстрактной теории групп. Я имею в виду локально нильпотентные группы без кручения, их связи с рациональными алгебрами Ли и выдающуюся работу Анатолия Ивановича 1949 года «О бесконечных разрешимых группах», которая дала толчок многим исследованиям в дальнейшем. Детищем Анатолия Ивановича была общая теория алгебраических систем, которая очень сильно влияла на сложившиеся направления в алгебре. Его исследования после пятидесятых годов были непосредственно связаны с этой общей теорией. Будучи выдающимся специалистом в алгебре в целом, он мог компетентно судить обо всем, что в ней делается. Однако если и был какой-нибудь раздел, которым Анатолий Иванович непосредственно не занимался, он умел внимательно и доброжелательно относиться к труду соседей по науке. Поэтому его мнение для всех было особенно ценным. Анатолий Иванович имел исключительный и вполне заслуженный авторитет.

Анатолий Иванович при всей его кипучей деятельности, при всей его занятости всегда оставался очень чутким человеком. Со многими он переписывался, причем умел писать такие письма, что казалось — к тебе он относится особенно внимательно. Если кто заболевал, он очень переживал, старался поддержать этого человека и просил других писать ему. Для всех, кто знал Анатолия Ивановича, общение с ним было большим счастьем.

Профессор Ш. С. Кемхадзе (Батуми). Здесь уже говорили, что работы Анатолия Ивановича относятся к самым различным направлениям алгебры и вообще математики. Я должен сказать, что одной из лучших его работ считаю работу 1951 года «О некоторых классах бесконечных разрешимых групп». По моему мнению, именно она дала толчок развитию в Советском Союзе теории радикалов в группах, сыграла большую роль в развитии этого направления.

Я познакомился с Анатолием Ивановичем в 1949 году и после этого все время поддерживал с ним научную и дружескую связь. А. И. Мальцев очень большое внимание уделял математикам, работающим на периферии. Он дважды приезжал в Батуми. Первый раз — в 1964 году вместе с профессором С. М. Никольским. Тогда он выступил с докладом в нашем педагогическом институте на совещании преподавателей школ и работников вузов. Второй раз Анатолий Иванович приехал в Батуми в 1966 году на Второй симпозиум по теории групп. Этот симпозиум, нужно сказать, был организован при большом его содействии. Он сам принял активное участие в симпозиуме, выступил с докладом.

Батумская газета писала, что для математиков всей Грузии приезд А. И. Мальцева — большое событие. Анатолий Иванович был приглашен Тбилисским университетом для чтения спецкурсов. Письмо с приглашением направил ректор университета академик И. Н. Векуа. Анатолий Иванович дал согласие, но его приезд уже не состоялся.

Академик АН Молдавской ССР В. А. Андрунакиевич (Кишинев). В лице А. И. Мальцева от нас ушел не только выдающийся ученый-математик нашего времени, но и человек возвышенной и страстной мысли, интересовавшийся всеми человеческими проблемами. Он был крупным общественным деятелем, организатором науки, человеком действия, энергичным проводником научных идей. Это был великий труженик. Такая совокупность положительных качеств ума и воли вместе с высокими моральными качествами делали его очень яркой личностью.

Мы, советские алгебраисты (да и не только советские), в той или иной мере являемся учениками Анатолия Ивановича, так как нельзя в наше время считать себя образованным алгебраистом, не изучив или, во всяком случае, не познакомившись с трудами Анатолия Ивановича. Уже отмечалось, что еще до поступления в аспирантуру, совсем молодым человеком, в 1936 году Анатолий Иванович написал первую работу в области математической логики, где разработал сильный и общий метод для доказательства локальных теорем. Вторая его работа уже чисто

алгебраическая: о вложении ассоциативных колец без делителей нуля в тела. Поразительная работа! Сейчас нет логика, нет алгебраиста, который не обращался бы к этим первым двум его работам. А затем последовала серия превосходных работ, выдвинувших его в число первых математиков того времени.

Уже отмечалось, что Анатолием Ивановичем получены фундаментальные результаты и в теории групп, и в теории колец, в топологической алгебре, в теории групп Ли, в теории алгоритмов, в теории универсальных алгебр, в теории моделей. Он является одним из создателей теории общих алгебраических систем. Очень многие его результаты включены в наши и зарубежные монографии, обзорные статьи. Они получили мировую известность. Чем объяснить, что за недолгую жизнь Анатолий Иванович достиг столь замечательных результатов? Конечно, Анатолий Иванович был очень одаренным человеком. Он действительно был талантлив, обладал могучим, ясным, я бы сказал, богатырским умом. Кто-то метко выразился, что это Шаляпин в алгебре. Но не только одаренностью объясняются его чудесные результаты. В наше время беспокойная жизнь постоянно отвлекает ученого от его размышлений. В самом деле, не так легко серьезно думать за письменным столом, глубоко размышлять над проблемой, если постоянно звонит телефон, если то и дело нужно прерывать начатую работу для того, чтобы ехать на совещание, если все время нужно откладывать решение какой-либо задачи для того, чтобы подготовить выступление или написать статью, часто серьезную и срочную. А вот Анатолий Иванович обладал удивительной способностью все время думать, где бы он ни находился и несмотря ни на что. Это был крупный мыслитель.

Научное наследство, оставленное Анатолием Ивановичем, исключительно богато и разносторонне. Его глубокие идеи еще многие годы будут питать алгебру и смежные с ней ветви математики. Анатолий Иванович ушел из жизни в полном расцвете огромных творческих сил, которые он бескорыстно и щедро направлял на развитие советской математики. Его творческая деятельность развивалась без перерывов и за последние годы достигла небывалой интенсивности, хотя вместе с этим росла и научно-организаторская деятельность. Анатолий Иванович вырастил много талантливых учеников, которым посчастливилось извлечь для себя огромную пользу из его научного опыта. На основе прочитанных лекций Анатолий Иванович написал книгу «Основы линейной алгебры». Это образец, как нужно писать учебники — четко, ясно, на высоком уровне и в то же время очень легко.

Анатолий Иванович был крупным общественным деятелем. Всюду его деятельность была плодотворной. Везде он пользовался авторитетом, на который ему давали право ум и воля, его труд. Трудно представить, какую огромную работу он вел, будучи депутатом Ивановского областного Совета депутатов трудящихся, депутатом Верховного Совета РСФСР и депутатом Верховного Совета СССР. Достаточно сказать, что им написано более пяти тысяч писем трудящимся, причем собственноручно. Это не пять тысяч, это все десять тысяч писем, потому что он отвечал сам и потом, приняв решение, писал в соответствующие организации. Колоссальная работа. В то же время Анатолий Иванович был поразительно скромным человеком.

Какой бы пост он ни занимал, он сохранял в своем сердце любовь к науке и желание служить ей. Уже говорилось, что талант Анатолия Ивановича как организатора советской науки особенно широко проявился в период его работы в Новосибирском научном центре, где он создал известную логико-алгебраическую школу и всемирно известный семинар и журнал «Алгебра и логика». Каждый математик, наш и зарубежный, считает для себя честью бывать на этом семинаре, печататься в журнале «Алгебра и логика». Очень правильно, хорошо сделали новосибирцы, решив посвятить Десятый всесоюзный алгебраический коллоквиум шестидесятилетию со дня рождения А. И. Мальцева, выдающегося ученого и мыслителя, одаренного и сильного человека, который делает честь русской и советской науке, ее академии. Я думаю, что лучшим памятником Анатолию Ивановичу было бы создание института дискретной математики и математической логики, о котором он мечтал, и присвоение ему имени А. И. Мальцева.

Профессор Ю. Л. Ершов (Новосибирск). Хочу отметить несколько черт Анатолия Ивановича, о которых еще не было сказано. Прежде всего меня поразило в нем и показалось необычным следующее. Здесь уже говорили, что Анатолий Иванович был широко образованным, эрудированным человеком, следил за развитием не только алгебры, но и всей математики, внимательно прислушивался к мнению различных людей и всегда понимал, какое направление в алгебре и вообще в математике в данное время является главным, важным. Но одно дело следить за новейшими результатами, быть эрудитом, а другое — относиться к этому действенно. Удивительно, что Анатолий Иванович в 37 лет впервые сел за рояль и сумел научиться играть. Но какое мужество требуется от человека, когда он в 50 лет садится за учебники и изучает новую для себя науку, причем так, чтобы потом работать в ней! Я имею в виду теорию

алгоритмов. Математическая логика — это был первый интерес Анатолия Ивановича, поэтому возврат к ней можно объяснить возвращением к старой любви, теорией же алгоритмов он до 50 лет не занимался. И вот на реферативном семинаре он изучает новые работы, занимается тем, что делают обычно аспиранты. Человек с мировым именем, крупный ученый, он изучает не только музыку, чтобы играть в домашнем кругу, а и новую науку, чтобы работать в ней — потому что осознал, что теория алгоритмов в наше время является очень важным разделом математики. По крайней мере, четыре или пять работ по теории алгоритмов и теории нумераций написаны им. Анатолий Иванович много также сделал по пропаганде этого предмета. Он добивается того, что курс теории алгоритмов становится обязательным в Новосибирском университете, пишет книгу по этому курсу. А ведь это был период расцвета его творческих сил. Все понимают,— чтобы написать хороший учебник, требуется много времени. И он, очень занятой человек, его находит. Учебник «Алгоритмы и рекурсивные функции»— один из лучших в этой области.

Еще одна специфическая черта. Есть разные способы обучения или руководства, скажем, аспирантами или студентами, учениками. У Анатолия Ивановича манера была весьма своеобразной, руководство было ненавязчивым, практически незаметным и в то же время очень действенным и глубоким. Даже трудно объяснить, как он умел воздействовать. Влияние Анатолия Ивановича на людей, которых он близко знал, чрезвычайно велико.

Секретарь Советского райкома КПСС Новосибирска кандидат философских наук Р. Г. Яновский. Мне довелось впервые услышать Анатолия Ивановича в 1947 году. Я не математик, но меня, тогда совсем молодого человека, поразила в Анатолии Ивановиче страсть к науке. В 1950 году я поступил в Ивановский пединститут, и мне вновь посчастливилось несколько раз встречаться с Анатолием Ивановичем. Он был депутатом четвертого и пятого созывов Верховного Совета СССР, и нам приходилось участвовать в сессиях областного Совета. Вы хорошо знаете, что он не был блестящим оратором, но всегда то, что он говорил, было богато по содержанию. Мы, гуманитарии, испытывали хорошую человеческую зависть, видя вокруг Анатолия Ивановича, стоящего у доски с мелом в руке, всегда так много молодежи. Вся его жизнь была связана с молодежью и с выдвижением ее. Я помню его деятельность уже здесь, в Новосибирске, его страстную речь на одном из последних Президиумов, когда он говорил о воспроизводстве научных кадров, о том,

А. И. Мальцев на первомайской демонстрации 1952 г. в Иванове.
Фото С. В. Смирнова.

что необходимо выращивать молодежь в науке. Радостно сейчас видеть мальцевские черты золотой россыпью в его учениках. Нам всем в меру сил, в меру интеллектуальных возможностей надо брать то богатство, которое оставил этот великий ученый. Надо научиться беречь при жизни эти черты. Та гражданственность и та добротность, которые в нем были, навсегда останутся у нас в памяти.

Член-корреспондент АН СССР А. И. Ширшов (Новосибирск). Очень многогранной была его личность: и ученый, и профессор университета, можно говорить о нем и как об администраторе (хотя он всячески от этого открещивался), ведь он все же руководил и кафедрой, и отделом. Именно руководил. Можно говорить о нем и как о знатоке искусства, живописи и как о путешественнике — мне не на одну гору пришлось с ним подняться, пройти не один километр. Можно сказать о нем как о гостеприимном хозяине, удивительно простом человеке, который мог одинаково просто разговаривать и с академиком, и со студентом первого курса, и с человеком, случайно

встретившимся. При всей своей значимости он всегда оставался простым.

Я уверен, что те идеи, те семена, которые посеял Анатолий Иванович, с каждым годом будут давать все больше и больше всходов. Я уверен, что недалеко время, когда теоремы А. И. Мальцева войдут в учебники для высшей школы, а постепенно и в учебники средней школы. Память об Анатолии Ивановиче Мальцеве будет жить в наших сердцах, а имя его навсегда останется в науке.

В. В. МОРОЗОВ

ВЗГЛЯД НАЗАД

(Несколько страниц воспоминаний)

Высокий, широкий в кости, слегка сутулится, голос негромкий, приглушенный и не соответствует крупной фигуре, голова обрита наголо, улыбается редко, выражение лица спокойное, серьезное и как будто слегка недоумевающее — таким остался в моей памяти Анатолий Иванович со времени нашей первой встречи в 1939 году в Стекловском институте. У меня сохранился снимок — Анатолий Иванович докладывает, председательствует Л. С. Понтрягин. Возможно, это было первое публичное выступление Анатолия Ивановича на совещании широкого значения.

Не помню, кто познакомил нас: Н. Г. Чеботарев или Л. С. Понтрягин,— но эта встреча была мимолетной. Вторая — октябрь 1940 года — оказалась более продолжительной.

Это был период, когда слабые ростки исследований по теории непрерывных групп распустились вдруг у нас пышным цветом. Развитие этой теории шло в двух направлениях — изучались локальные группы и алгебры Ли и собственно топологические группы, в частности, группы Ли. Хроника событий была примерно такова.

1930 год. Н. Г. Чеботарев встречается с задачей одевания конечных групп непрерывными в работе «Об одной алгебраической задаче Гильберта» (проблема резольвент) и глубоко заинтересовывается вопросами теории непрерывных групп.

1934 год. Л. С. Понтрягин публикует в Парижских докладах заметки «О коммутативных топологических группах и 5-й проблеме Гильберта» и «О коммутативных непрерывных

группах» и в Ann. Math. большую статью «Теория топологических коммутативных групп». Вряд ли я ошибусь, сказав, что его результаты представляли одно из крупнейших достижений нашей послереволюционной математики. В Казани ученик Н. Г. Чеботарева И. Д. Адо получает результат также фундаментального значения — теорему о представимости линейными преобразованиями комплексных алгебр Ли (теперь так называемая теорема Адо). Незамедлительными откликами на этот результат явились работы Э. Картана, предложившего иное доказательство той же теоремы, и Г. Биркгофа, давшего простой алгебраический метод доказательства теоремы Адо для случая нильпотентных алгебр и любого поля нулевой характеристики и одновременно указавшего на существенную разницу в теории представлений групп и алгебр Ли.

1938 год. Выходит книга Л. С. Понтрягина «Непрерывные группы» — первое систематическое изложение теории топологических групп в советской и мировой литературе; вскоре она была переведена и выпущена в Принстонской серии. В этом же году защищает докторскую диссертацию Ф. Р. Гантмахер.

1939 год. Опубликованы в Математическом сборнике работы Ф. Р. Гантмахера об автоморфизмах полупростых групп и о классификации полупростых вещественных групп Ли, статья В. В. Морозова о примитивных группах, а в Compositio Math.— статья Н. Г. Чеботарева об иррегулярных представлениях полупростых групп Ли.

1940 год. Вышла книга Н. Г. Чеботарева «Теория групп Ли», в которой впервые были подробно изложены структурная теория Киллинга — Картана —Вейля и теория представлений полупростых групп Ли.

Л. С. Понтрягин и Ф. Р. Гантмахер работали в институте им. Стеклова и вели там семинар по группам и алгебрам Ли. Именно этот семинар заинтересовал меня, однако я был только гастролером, основное же ядро его составляли москвичи — тихий и сверхкорректный М. Ф. Бокштейн, порывистый Н. Н. Мейман (который всерьез группами никогда не занимался и появлением своим на семинаре отдавал, видимо, дань «казанским традициям»), шумный, улыбающийся, жестикулирующий А. И. Узков и — москвич и не москвич — спокойный, серьезный и как будто погруженный в себя Анатолий Иванович Мальцев. Недавно, вспоминая об этом семинаре, Н. Н. Мейман написал мне: «Позднее, в казанские времена, Мальцев говорил мне, что при появлении на этих семинарах его всегда потрясало, какие все кругом умные, а вот он. . .»

Я предполагал на следующий год снова приехать в Стекловский институт, но ситуация сложилась иначе: Стекловский институт эвакуировался в Казань. В жаркий день 23 августа 1941 года, явившись к ректору университета, я увидел перед дверями его кабинета блистающую в белом костюме фигуру О. Ю. Шмидта, который явно чувствовал себя хозяином, а в приемной ректора — несколько хорошо знакомых лиц и между ними Б. Н. Делоне.

Большая часть университета оказалась занятой институтами Академии наук; резиденция университетских математиков — геометрический кабинет — сделалась квартирами Капицы, Орбели и помещением Стекловского института, к которому позже присоединилось и Ленинградское его отделение. По субботам довольно регулярно созывались совместные заседания института и Казанского физико-математического общества — на одном из них я слушал доклад М. В. Келдыша об ударе движущегося тела о вертикальную нить, а 29 декабря состоялась защита Анатолием Ивановичем диссертации «Структура изоморфно представимых бесконечных алгебр и групп». Оппонентами были А. Н. Колмогоров, Л. С. Понтрягин и Н. Г. Чеботарев.

Эта защита знаменовала собой конец определенного периода в работе Анатолия Ивановича, посвященного математической логике и абстрактным группам, и начало нового, возможно, индуцированного описанным выше развитием теории групп и алгебр Ли и создавшимся в Казани окружением, периода в шесть лет, который можно было бы назвать «казанским».

Жизнь была трудной, но она шла. Декан физмата П. А. Широков сумел, пользуясь присутствием приезжих, организовать интересные курсы — так, Л. С. Понтрягин и П. С. Александров читали топологию, а Анатолий Иванович — теорию непрерывных групп. Несколько позже и, видимо, gratis, И. Р. Шафаревич прочел курс теории алгебраических полей; он читал его до февраля 1943 года в комнате во Дворце труда, где жил Д. К. Фаддеев, при небольшом числе слушателей. Что касается Анатолия Ивановича, то он читал по четвергам в главном здании университета. Помню, как в один апрельский день после лекции он подошел ко мне и спросил, известно ли мне что-либо о сопряженности максимальных полупростых алгебр в различных разложениях Леви алгебры Ли; я смог лишь ответить, что, как мне всегда представлялось, они должны быть сопряжены, но что доказательство этого факта мне неизвестно. Примерно через месяц после этого разговора Анатолий Иванович сдал в редакцию Докладов Академии наук заметку, в которой, между

прочим, решался и этот вопрос. Несколько позже, на одном из заседаний Общества Анатолий Иванович сообщил следующее из этого результата доказательство полной приводимости представлений полупростых алгебр Ли — редко встречались мне доказательства, которые производили бы столь глубокое впечатление внутренней прозрачностью и красотой. После заседания я заявил Анатолию Ивановичу, что это доказательство непременно нужно опубликовать в Докладах АН; он несколько колебался и переспросил, действительно ли таково мое мнение. Доказательство было опубликовано, но в 1944 году в большой статье о подгруппах полупростых групп. Вообще мне казалось, что в Казани результаты Анатолия Ивановича по алгебрам Ли наиболее близко воспринимал лишь я, и, наоборот, к моим результатам — а они относились только к алгебрам Ли — действительный интерес проявлял лишь Анатолий Иванович. Так, в начале мая 1942 года я дебютировал с докладом на заседании Общества, и интерес по существу его выказал только он; в конце года появилась моя заметка в ДАН о нильпотентном элементе; и в один декабрьский день, когда я и Анатолий Иванович ожидали начала сеанса в кино, он заговорил об этой заметке и упрекнул меня в том, что доказательство в ней слишком сложно. Действительно, выкладки были сложны, но идея доказательства ясна. Как-то случайно я вернулся к этому вопросу через много лет и смог представить Анатолию Ивановичу упрощенное доказательство.

Он в то время занимался большой и близкой мне задачей определения всех полупростых подгрупп простых групп. Об этом я узнал лишь в начале января 1943 года от Л. С. Понтрягина. 9 января мы с Анатолием Ивановичем отправились в цирк. В перерыве он рассказал мне об основных идеях этой работы, которая, как мне кажется, значительно стимулировала его интерес к линейной алгебре и появление в 1948 году «Основ линейной алгебры». Я был восхищен этой работой. Высоко ценил ее и Н. Г. Чеботарев. Кстати, по поводу нее он говорил, что вот-де А. Н. Колмогоров утверждал, что из Мальцева никогда не получится математика классического стиля, но смотрите — он занимается классическими группами. Для меня она представляла особый интерес потому, что я занимался вообще максимальными подалгебрами простых алгебр Ли, вопрос о неполупростых максимальных подалгебрах уже был мной решен, результаты же Анатолия Ивановича представляли очень важный шаг к определению максимальных полупростых подалгебр. Когда Анатолий Иванович узнал о том, какие вопросы меня интересовали, он несколько встревожился, почему я

раньше не сказал ему, что занимаюсь аналогичными вопросами: «Тогда я не стал бы заниматься этой темой».

Последняя моя деловая встреча с Анатолием Ивановичем в Казани произошла на моей защите 13 августа 1943 года — он был одним из оппонентов. В это время положение уже достаточно стабилизировалось, многие покинули Казань (если 40-й том ДАН издавался в Казани, то 41-й — уже в Москве). В 1944 году здесь остались только ленинградцы.

После «казанского пленения» москвичей мои встречи с Анатолием Ивановичем стали очень редкими. Виделись мы всегда с большим удовольствием, как старые друзья. Переписка, довольно скупая, оживилась после 1962 года и вот почему: к этому времени были, наконец, нарушены старые традиции созывать научные совещания и конференции только в Москве, прочие города Союза также получили в этом отношении некоторые права; подумывали и мы о созыве одного из коллоквиумов по общей алгебре в Казани, причем естественно наметилась дата — 1964 год: 70-летие со дня рождения Н. Г. Чеботарева. К этому времени мы намеревались выпустить сборник работ памяти Чеботарева (привлечь к участию в нем алгебраистов старшего поколения) и небольшой томик его работ «О математике и математиках». Я обратился к Анатолию Ивановичу с просьбой дать статью для сборника, а также высказать мнение о предполагаемом томике. Статью он пообещал, но не прислал — впрочем, я предоставляю слово самому Анатолию Ивановичу (даты писем указаны в конце цитат).

Извинением для меня, быть может, послужит лишь то, что я за это время вообще не написал ни одной статьи. У меня есть ряд работ, подробное изложение которых нигде не появлялось, но доделать их у меня не было времени (т. е. самое меньшее вполне свободных двух-трех месяцев). Я еще в 1961 г. должен был представить по договору рукопись книги «Алгоритмы и рекурсивные функции». В апреле т. г. мне дали, наконец, понять, что рукопись либо надо представить, либо считать договор утратившим силу. И вот я, малодушно попросив (в 3-й раз!) отсрочку до конца декабря т. г., отбросил все в сторону и с 1. VIII, истратив на это дело свой отпуск, сижу и пишу, сижу и переписываю всем известные теоремы. Сейчас я имею уже написанных и 2 или 3 раза переписанных 300 стр., остается написать еще 60 страниц, и 1-й том увезу в Москву. После этого я снова свободный человек и займусь всеми другими долгами.

Я не знаю, в каком состоянии сегодня ваш сборник. Зная, как долго собирались сборники в честь 60-летий ныне живущих и правящих, я буду удивлен, если сборник уже готов и набирается (20. XI. 1963).

Сборник все же вышел почти в срок, опоздав к коллоквиуму на 1 или 2 месяца, но имел значительно меньший объем, чем предполагалось.

Большое спасибо за сборник памяти Н. Г. Чеботарева. Мне очень грустно, что в нем нет моей заметки. Еще раз позволю себе сказать, что с февраля 1963 г. и по сентябрь т. г. ничего не отдавал в печать — ничего не было: я писал и переписывал книжку «Алгоритмы и рекурсивные функции». Теперь, после ее сдачи в печать, я вижу ясно, что преподавать надо совсем не так, как я написал, а лучше начинать с машин Тьюринга. Так получается и короче и веселее. Это мне наказанье (7. X. 1964).

Что касается томика работ Н. Г. Чеботарева, то мнение Анатолия Ивановича было таково:

Ваши наметки относительно издания тома рукописей Н. Г. Чеботарева о математике и математиках кажутся мне совершенно правильными. Включать обзорные статьи в него нецелесообразно. Я предвижу, что в самом недалеком будущем предстоит большой расцвет мемуарно-математически-философской литературы, и Н. Г. Чеботарев — пионер на этом поле. Наши математически-административные вожди, правда, начинают говорить о насыщении страны математическими журналами и т. п., но в то же время считается, что 10 000 кандидатов физ.-мат. наук и 2000 докторов математики было бы не так плохо. А это значит: иметь около 15 000 страстных читателей математических мемуаров.

Во всяком случае, уже существуют мемуары Л. А. Люстерника, которые он не издает,—вероятно, по причине едкости эпиграмм и замечаний, на которые он великий мастер (19. V. 1963).

Предположения Анатолия Ивановича не оправдались: расцвета мемуарно-математической литературы не произошло, а воспоминания Люстерника мы читали в УМН, однако наша книжка так и не увидела света. Предложение созвать коллок-

виум в Казани было решительно отклонено, но Анатолий Иванович высказал такую мысль.

У нас начинает складываться обычай помимо широкого коллоквиума созывать еще узкий симпозиум по двум-трем достаточно узким направлениям науки. В Минске коллоквиум, вероятно, созовут в сентябре. Не созвать ли в мае 1964 г. в Казани под Вашим председательством симпозиум памяти Н. Г. Чеботарева? Пригласить на него можно 10—20 видных алгебраистов и человек 20 доцентов и аспирантов, работающих в тех областях, которые будут Вами выбраны. Совсем не делать на симпозиуме кратких сообщений, а дать время лишь для одночасовых или двухчасовых обзоров. Это будет интересно и поучительно. С другой стороны, Вы будете избавлены от огромного количества мелочей при сохранении высокой научности мероприятия. Наконец, может быть, форма симпозиумов окажется более целесообразной, чем конференции с их сотнями сообщений?

Я пишу под свежим впечатлением от только что закончившегося коллоквиума. Мне кажется порой, что положение в алгебре стало похоже на положение в нашем футболе: огромная армия старательных и любящих дело хористов и почти нет настоящих солистов. По-видимому, как-то надо добывать этих солистов, и симпозиумы могут помочь в этом деле. Надо больше обращать внимания на всевозможных солистов. В Москве как-то находят их для других специальностей. Алгебре последние годы везет меньше (1. VI. 1963).

В начале 1967 года мне довелось выполнить одну просьбу Анатолия Ивановича, связанную с юбилейной датой.

Мне выпало на долю писать краткую статью по истории алгебры в СССР к 50-летию. Возможно, что это будет просто 5-й выпуск «Алгебры и логики» за 1967 г. В связи с этим я хотел бы обратиться к Вам с просьбами:

1. Сообщить, как звали Н. А. Васильева полностью. Может быть, сообщите несколько ярких фактов из его преподавания? Как была встречена его «Воображаемая логика»? Может быть, можно получить ее фотокопию и фотопортрет самого Васильева?

2. Не сможете ли Вы написать страницы 2—3 о Н. Г. Чеботареве? Каким способом (и где) он привлек

Вас и Адо к работе? Почему не оставил в Казани учеников по алгебраическим числам?

Опишите, как проходили семинары Н. Г. Чеботарева. Не надо писать о значении работ его и т. д. Это все известно, а надо страничку воспоминаний. Я просто ее включу в текст статьи со ссылкой на Вас...

... Простите за просьбу. Мне хотелось бы сделать статью чуть-чуть интереснее, чем обычные перечисления результатов (16. I. 1967).

Все требуемое я выполнил, тем более, что мне очень импонировала идея сделать статью чуть-чуть интересней. Юстин Николаевич, сын Н. А. Васильева, сообщил мне о статье в одной из казанских газет, комментировавшей выступление Николая Александровича на заседании Казанского физико-математического общества 13 января 1913 года. Мне удалось разыскать эту статью, а также собрать ряд биографических материалов. Анатолий Иванович писал позже:

... благодарю также за копии газетных статей, которые я прочитал с очень большим удивлением. Провинциальная газета, а сочла возможным уделить так много места таким абстрактным вопросам! Несмотря на экзотичность и, прямо скажу, недоработанность, доклад Васильева, несомненно, — одно из замечательных событий того времени. Жаль, что проф. Васильев был страшно оторван от большой математической жизни того времени, но и то, что он сделал, замечательно (26. III. 1967).

Н. А. Васильев закончил медицинский, а потом историко-филологический факультет, и к своей логике подходил не как математик, а как философ, вследствие чего в его работах очень много общих рассуждений и мало результатов.

Еще одно письмо: оно перекликается с письмом от 1/VI 1963 г. и показывает, в какие формы вылилась сквозящая в нем забота о подготовке математических кадров. Оно датировано 12 ноября 1967 года; в нем Анатолий Иванович прислал мне вырезку из «Правды» от 29 января 1967 года, содержащую его статью «Математика нужна всем» (насколько серьезной считал он эту статью, показывает то, что, посылая, он снабдил ее авторской надписью). В письме он добавил:

Посылаю Вам оттиск своей статьи. В 1966 г. у меня обнаружился «зуд» и недержание речи: я уже завел папку с наименованием «прожекты». Один из них — Институт высших математических исследований. . . . Другой «про-

жект»: журнал «Системы и теории» по логике, алгоритмам, общей алгебре, семиотике и теории интеллекта, а также институт этого же профиля.

Телеграмма о кончине Анатолия Ивановича не застала меня в Казани и была доставлена мне со значительным опозданием. Не мне говорить о том, как тяжела эта потеря, и не мне оценивать значение Анатолия Ивановича для мировой алгебры. Эту оценку произведет история, и я уверен, что она будет высокой.

С. В. СМИРНОВ

ИЗ ВОСПОМИНАНИЙ ОБ А. И. МАЛЬЦЕВЕ

I

В течение многих лет мне довелось работать вместе с Анатолием Ивановичем. Впервые я встретил его где-то в 1927 или 1928 году, будучи еще студентом, в последний раз — на алгебраическом коллоквиуме в Риге весной 1967 года. С 1937 по 1962 год был сотрудником кафедры Мальцева в Ивановском педагогическом институте.

Мы часто вели с ним одни и те же курсы, передавая их через год друг другу. Содержание детально обсуждалось во время длительных блужданий в окрестностях Иванова. По-видимому, Анатолий Иванович перечитал все математические курсы, когда-либо существовавшие в учебных планах 1937—1962 годов, не уклоняясь и от практических занятий. Он продолжал вести их, будучи уже прославленным ученым и обладая высокими академическими званиями.

На моих глазах сложилось то объединение математиков, которое стали называть алгебраической школой Мальцева, первоначально связывая ее с Ивановом.

В коротком очерке невозможно описать этот громадный промежуток времени. Невозможно рассказать и об отношениях большого числа людей, входивших в орбиту деятельности Анатолия Ивановича. Расскажу только о периоде с 1937 по 1940 годы. Это было время молодости и исканий. Но хотя Анатолий Иванович и не был тогда столь известен, как впоследствии, он уже сложился как математик и представлял собой могучую интеллектуальную силу, невольно покорявшую каж-

Президент Академии наук СССР М. В. Келдыш вручает А. И. Мальцеву Ленинскую премию. Новосибирск, 1964 г. *Кадр из фильма «Лесная сказка».*

дого из встречавшихся с ним. Нельзя было не считаться с его выдающейся умственной мощью.

Анатолий Иванович говорил, что считает математику отражением внутренних, присущих человеческому мозгу законов мышления. Он выделял ее из других естественных наук и, говоря о математиках, которые связывают возникновение и судьбы своей науки только с приложениями, полупренебрежительно называл их «физиками».

Впрочем, много раз мне приходилось слышать от Анатолия Ивановича о важности развития математики именно как при-

кладной науки. Но основным он считал первое: внутренние законы мышления.

К этой теме в разных аспектах мы возвращались много раз, и всегда он высказывался более или менее одинаково.

Анатолий Иванович ревностно заботился о математическом образовании своих сотрудников, о выборе областей приложения их научных возможностей. Он быстро стал руководителем молодой математической школы.

Разносторонний математик, он любил говорить, что является алгебраистом, а об остальных областях математики судить не берется. По-видимому, более всего это была защитная реакция на случай, когда кто-либо с пристрастием вынуждал высказаться по тому или другому вопросу. На самом деле, когда он этого хотел, то внимательнейшим образом входил в любую математическую проблематику. Добрая же воля проявлялась всякий раз, когда дело касалось, например, научных интересов его сотрудников по кафедре. Очень часто это вмешательство поворачивало очередную проблему, независимо от ее важности, так, что вдруг начинали сверкать ее грани, скрытые до того времени.

Те, кто знавал Анатолия Ивановича последних лет, привыкли представлять его себе довольно грузным человеком, иногда замкнутым и не всегда доступным. На его портрете, находящемся в Новосибирском университете, есть что-то от сановитости Гете. За этой внешностью скрывался, как и в молодости, глубокий интерес к людям, сердечность и особое обаяние большого, широкого и разностороннего ума. Но в те годы, о которых идет речь, он обладал стройной атлетической фигурой и был физически очень силен. Часто смущался и краснел. Мне не приходилось видеть хороших фотографических или живописных портретов его тех времен. По моему мнению, самым удачным был портрет, представлявший Анатолия Ивановича таким, каким он был в 1946—1952 годах. К сожалению, портрет был уничтожен художником: поверх написан вариант, соответствующий более позднему времени.

II

Направленный после окончания мехмата МГУ на работу в Ивановский энергетический институт, Анатолий Иванович в 1932 году перешел в пединститут на кафедру В. С. Федорова и стал одним из ведущих работников.

В эти годы он занимался математической логикой, специальностью для тех лет чрезвычайно редкой.

Открытая в 1932—1934 годах локальная теорема — по терминологии А. Тарского, принцип компактности Мальцева — тогда не была по-настоящему понята и оценена.

Мне пришлось видеть тетрадь в клетку, исписанную школьными лиловыми чернилами, содержащую первую редакцию статьи «Untersuchungen aus der mathematischen Logik» (1936).

Оттисками этой работы Анатолий Иванович раза два, а может быть и больше, пользовался в качестве мишени, когда несколько лет спустя учился стрелять из охотничьего ружья. Впрочем, там, по-видимому, были оттиски и других работ.

Между прочим, применение этой теоремы в теории групп было опубликовано только в 1941 году в тоненькой тетради «Ученых записок Ивановского пединститута». Теперь эта тетрадь стала библиографической редкостью. Пробить дорогу для применений теоремы компактности, которую можно отнести к числу великих теорем математики, оказалось не так просто, и вряд ли кто другой мог указать ее, эту дорогу. Теперь, как хорошо известно, она породила не только локальные теоремы теории групп, но является и одной из важных теорем математического анализа.

Много позже Анатолий Иванович распространил принцип компактности на исчисления высших ступеней, и сделал это он впервые в статье «Модельные соответствия». Иногда в этом случае называют других, но все же аналогичные работы появились после опубликования им упомянутой статьи.

Именно первая работа Анатолия Ивановича по логике произвела серьезное впечатление на А. Н. Колмогорова, который сделал все возможное для зачисления его в аспирантуру при мехмате МГУ. Впрочем, тогда это именовалось иначе: при Московском университете был научно-исследовательский институт математики, директором которого и был А. Н. Колмогоров.

Мне очень живо вспоминаются всевозможные перипетии приемных экзаменов в аспирантуру. Абитуриентов много, экзамены достаточно серьезны. Помимо экзаменов по математике, были экзамены и по философии и языку. Каждый поступающий детально обсуждался. Мне случайно пришлось слышать речь А. Н. Колмогорова при обсуждении кандидатуры Анатолия Ивановича: по какому-то делу я был вызван ученым секретарем института и попал на заседание приемной комиссии, решавшей и мою участь. А. Н. Колмогоров, видимо, отводя какие-то возражения, говорил об очень серьезном значении работы Анатолия Ивановича.

В 1934—1937 годах Анатолий Иванович совмещал аспирантуру с преподавательской работой в Иванове, выезжая туда за месяц по нескольку раз. После окончания аспирантуры в 1937 году он возвратился в Иваново.

III

Осенью 1937 года радикально изменилась кафедра математики Ивановского пединститута.

Изменение состава кафедры совпало с быстрым ростом физико-математического факультета: в предшествующие годы приемы были небольшие — в педагогический институт зачислялось 50 человек, т. е. две группы. С третьего курса происходило деление по специальностям, получалась одна группа математиков и одна — физиков. Кроме того, были приемы в учительский институт, обычно две группы — 50 человек.

Характер преподавания серьезно изменился. Вся организационная часть была делом Анатолия Ивановича, который с осени стал заведовать кафедрой математики. С 1938 года эта кафедра разделилась на две — высшей алгебры и геометрии и математического анализа (последней заведовал А. В. Лотоцкий).

В результате всех этих изменений преподавание математики в институте поднялось на значительно более высокий уровень. Необходимо сказать, что, стремясь к улучшению преподавания математических дисциплин, Анатолий Иванович никогда не забывал, что институт готовит школьных учителей. Тогда же им был заведен порядок, что практика студентов в школе должна в значительной степени привлекать не только специалистов по методике или опытных школьных учителей, но также и сотрудников математических кафедр, читающих основные математические дисциплины. Анатолий Иванович сам посещал студенческие уроки и требовал этого от других. Очень быстро были налажены контакты между кафедрами института и лучшими учителями математики.

Надо сказать, что раньше в нашем педагогическом институте курс математического анализа более всего напоминал втузовский курс высшей математики, в особый курс были выделены некоторые элементарные сведения о несобственных интегралах, применениях кратного интегрирования к вычислению объемов и площади поверхности, исследование простейших типов обыкновенных дифференциальных уравнений и самые начальные сведения из теории функций комплексного переменного. Затем появились особые курсы теории функций дейст-

вительного переменного и теории функций комплексного переменного, был усилен курс высшей алгебры и совершенно изменилась интерпретация курса математического анализа.

В 1937/38 учебном году Анатолия Ивановича особенно занимал курс оснований геометрии. А надо сказать, что чтение этого курса фактически было совсем прекращено к этому времени.

Совершенно новое, свежее направление в этой области содержалось в лекциях А. Н. Колмогорова, которые он читал в Московском университете в 1934/35 учебном году для научных работников и аспирантов. Слушателей было мало — в редких случаях 10—12 человек. Анатолий Иванович же, как мне кажется, не пропустил ни одной лекции. Были две-три лекции, на которых мы с ним присутствовали только вдвоем.

Анатолий Иванович строил свой курс оснований геометрии на серьезном изучении обширной литературы. Мне помнятся долгие наши разговоры о конечных геометриях, о геометрии Лобачевского и наиболее естественном и экономном ее изложении и т. д.

Много лет спустя Анатолий Иванович, вспоминая эти времена, связывал свои занятия курсом оснований геометрии с теорией моделей. Однажды, уже в конце 50-х годов, он делал обзор по теории моделей для широкого круга слушателей, обзор, естественно, достаточно популярный. Материал, которым он пользовался для иллюстраций, был почерпнут как раз из курса оснований геометрии, к тому времени довольно устоявшегося в институте и известного почти всем присутствовавшим.

У меня сохранилось оглавление монографии по основаниям геометрии, которую Анатолий Иванович задумал написать в 1938 году. Сохранился также набросок первых параграфов. Предполагалось, что в какой-то мере я буду участвовать в написании этой книги. Просматривая рукопись, удивляешься свежести замысла даже и для настоящего времени. В разговорах перед умственным взором эта книга уже вставала как живая. Помешала перегруженность, а потом — военные годы.

IV

У меня в то время совсем не было навыка передавать тонкие и сложные идеи начал анализа в расчете на минимальную подготовку. Начав рассказывать, как требовалось программой, теорию вещественных чисел, я почувствовал, что все мои усилия напрасны. Вот тут и пришел на помощь Анатолий Ивано-

вич. С величайшей осторожностью, чтобы как-нибудь не обидеть, он стал обсуждать со мной каждую очередную лекцию, выясняя и ее содержание, и характер изложения. Как многие самоучки, я склонен был считать само собой разумеющимися начальные положения, не слишком их отрабатывая. От Анатолия Ивановича я научился самому внимательному отношению к началам любой математической дисциплины. Он требовал также по возможности более полной экономности и законченности каждого куска изложения, каждого доказательства.

Анатолий Иванович занимался со мной очень своеобразно. Собственно говоря, эти занятия совсем и не походили на занятия. Случалось, я приходил к нему домой, и он перемежал короткие реплики производственного характера игрой на скрипке, которую тогда еще не оставил. Мне очень хорошо запомнился один вечер с формулой Тейлора и ее окружением, скрипичной игрой и театральными воспоминаниями. Говорилось о пении В. Барсовой. Анатолий Иванович сравнивал впечатление от ее пения с тем, которое производят широкие просторы открывающейся анфилады парадных зал. Вероятно, очень многие помнят его стеснительность и намеренную простоту речи, но он умел говорить и торжественно. Через несколько лет после этого разговора Анатолий Иванович специально водил меня в Большой театр слушать Барсову, которая пела Царевну-Лебедь в «Сказке о царе Салтане».

В эти годы Анатолий Иванович начал интересоваться топологическими группами. Думаю, что можно было, не читая литературы в этой области, достаточно хорошо проникнуть в нее после нескольких прогулок в его обществе.

V

В середине 1937/38 учебного года был организован исследовательский математический семинар — начало того семинара Мальцева, который продолжался до переезда Анатолия Ивановича в Новосибирск. Впрочем, я склонен рассматривать его и как начало Ивановского математического общества. Мне хотелось бы напомнить, что семинар Анатолия Ивановича за 25 лет своей работы никогда не ограничивался только алгебраической тематикой; из работ, не относящихся к алгебре и систематически докладывавшихся на семинаре Мальцева, достаточно в качестве примера привести обширные циклы работ В. А. Ефремовича по инфинитезимальной геометрии и В. С. Федорова по моногенным функциям. Когда в 50-х годах наметилось желание

специализировать математические исследовательские семинары, которых было уже несколько, Анатолий Иванович приложил много усилий, чтобы создать математическое общество, объединяющее семинары и лиц, интересующихся математикой и живущих в Иванове.

Но в 1937/38 учебном году все еще только начиналось. Анатолий Иванович проявил большую настойчивость в пропаганде идеи научно-исследовательского семинара среди преподавателей и студентов нашего факультета и среди научных работников других вузов города.

Самые первые заседания были почти учебными занятиями. Д. М. Смирнов, тогда еще студент первого курса, детально разобрал задачу Аполлония о касании окружностей. Сделал хорошие чертежи и очень отчетливо выявил алгебраическую трактовку этой задачи. Это послужило поводом для Анатолия Ивановича заговорить о группе Галуа и разрешимых группах. Далее семинар на длительное время перешел на проблематику из теории групп. Математической логикой или ее приложениями, насколько я помню и как можно судить по сохранившимся протоколам заседаний, занимались мало. Но уже в 1939 году Анатолий Иванович несколько раз возвращался к локальным теоремам теории групп, разбирая различные варианты проблематики, которой посвящена его работа «Об одном общем методе получения локальных теорем в теории групп» (1941). Преобладание математической логики в занятиях семинара относится к значительно более позднему времени.

Впрочем, алгебраическая тематика соседствовала с тематикой аналитической и геометрической. В 1938—1939 годах несколько раз проф. А. С. Кованько рассказывал о своих работах по теории функций, проф. В. С. Федоров сделал ряд докладов о начинавшейся в то время моногенности по Федорову, Д. М. Смирнов реферировал несколько работ по теории аппроксимаций — Анатолий Иванович серьезно думал тогда о занятиях этой теорией в духе С. М. Никольского.

На заседаниях семинара почти постоянно присутствовали все сотрудники математических кафедр нашего института, неизменным участником был проф. А. С. Кованько, часто бывал В. С. Федоров. Гостями семинара, а иногда и докладчиками были проф. И. Н. Годнев, доцент Е. Ф. Титов — физики, работавшие в других институтах и имевшие небольшую нагрузку и у нас. К этому времени относится, например, возникновение ряда замыслов И. Н. Годнева о применении теории представлений в молекулярной физике. Накануне войны и уже в 1941—1942 годах он старательно изучал теорию групп.

Своеобразным продолжением семинара Мальцева зимой 1941/42 года были наши занятия по теории представлений, на которые мы собирались в Химико-технологическом институте. В промороженной аудитории с затемненными окнами, после утомительных дежурств, озябшие и голодные, люди находили силы, забывая все тяготы минувшего дня, до поздней ночи засиживаться над вопросами теории алгебр.

Интересно, что разнородная тематика семинара в очень значительной степени объединялась алгебраическими интересами Анатолия Ивановича. Нужно прибавить, что в это время он был еще молодым кандидатом, только что из аспирантуры. Однако очень скоро Анатолий Иванович стал безусловным авторитетом для всех, хотя менее всего он напоминал строгого и диктующего свою волю руководителя.

Заседания проходили весело и несколько торжественно, и в то же время были очень демократичными. Иногда кричали все, перебивая друг друга.

Трудно было с литературой, и довольно часто до поздней ночи мы с Анатолием Ивановичем печатали для участников семинара фотокопии статей, а иногда целых глав из той или иной книги. Анатолий Иванович не избегал при этом самой черновой работы, выполняя роль лаборанта.

VI

Многие из нас были буквально влюблены в него, ловили себя на том, что невольно подражали его манере говорить, несколько неровной и угловатой. Мысль же его была всегда глубокой и содержательной.

Тайна необычайного влияния Анатолия Ивановича Мальцева на людей, как мне кажется, шла от артистичности его натуры. Она проявлялась и в большом, и в мелочах.

Артистичность эта исходила от семьи, в которой он рос. Отец Анатолия Ивановича, Иван Александрович Мальцев, стеклодув по профессии, был неплохим художником. Он нигде не учился живописи, но мог сделать, правда, в старой и несколько своеобразной манере, похожий портрет. Его работы мне приходилось видеть. Да и сама профессия мастера-стеклодува требует известного артистизма.

Мне приходилось бывать с Анатолием Ивановичем на художественных выставках, слышать его суждения о работах крупных художников. Эти суждения всегда были глубокими и часто неожиданными настолько, что далеко не сразу можно было их понять. Впоследствии они удивляли своей глубиной.

Артистичность сказывалась и на занятиях математикой. Тонкая отделка целого, отсутствие лишних деталей, умение находить главное — все эти особенности отличали Мальцева-ученого и лектора. Он не умел красиво и, главное, гладко говорить, но сказанное им производило впечатление художественного произведения.

Жизнелюбие, яркость восприятия жизни во всех ее проявлениях, страстный интерес к людям — все это придавало необычайное обаяние личности Анатолия Ивановича, памятное всем, знавшим его.

СПИСОК ПЕЧАТНЫХ РАБОТ А. И. МАЛЬЦЕВА

1936

1. Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik. Матем. сб. 1 (43), 323—336.

1937

2. On the immersion of an algebraic ring into a field. Math. Ann., 1,13, 686—691.

1938

3. Абелевы группы конечного ранга без кручения. Матем. сб., 4 (46), 45—68.

1939

4. О включении ассоциативных систем в группы, I. Матем. сб., 6 (48), 331—336.

1940

5. О включении ассоциативных систем в группы, II. Матем. сб., 8 (50) 251—264.

6. Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами. Матем. сб., 8 (50), 405—422 (пер. на англ. яз., 1965).

1941

7. Об одном общем методе получения локальных теорем теории групп Иваново. Уч. зап. пед. ин-та, физ.-мат. фак-т, 1, 1, 3—9.

8. О локальных и полных топологических группах. Докл. АН СССР, 32, № 9, 606—608.

9. Рец. на кн. Л. С. Понтрягина «Непрерывные группы». Изв. АН СССР, серия матем., 6, 445—447.

1942

10. Об односвязности нормальных делителей групп Ли. Докл. АН СССР, 34, № 1, 12—15.

11. Подгруппы групп Ли в целом. Докл. АН СССР, 36, № 1, 5—8.

12. О разложении алгебры в прямую сумму радикала и полупростой подалгебры. Докл. АН СССР, 36, № 2, 46—50.
13. О структуре групп Ли в целом. Докл. АН СССР, 37, № 1, 3—6.

1943

14. О представлениях бесконечных алгебр. Матем. сб., 13 (55), 263—286.
15. О линейно связных локально замкнутых группах. Докл. АН СССР, 40, № 3, 108—110.
16. Ортогональные и симплектические представления полупростых групп Ли. Докл. АН СССР, 41, № 8, 332—335.

1944

17. О полупростых подгруппах групп Ли. Изв. АН СССР., серия матем. 8, 143—174 (пер. на англ. яз., 1950).

1945

18. On the theory of the Lie groups in the large. Матем. сб., 16 (58), 163—190; исправления — там же, 19 (61) (1946), 523—524.
19. Коммутативные подалгебры полупростых алгебр Ли. Изв. АН СССР, серия матем., 9, 291—300 (пер. на англ. яз., 1951).
20. О разрешимых алгебрах Ли. Изв. АН СССР, серия матем., 9, 329—356 (пер. на англ. яз., 1950).

1946

21. Топологические разрешимые группы. Матем. сб., 19 (61), 165—174 (пер. на англ. яз., 1951).

1947

22. Замечание к работе А. Н. Колмогорова, А. А. Петрова и Ю. М. Смирнова «Одна формула Гаусса из теории наименьших квадратов». Изв. АН СССР, серия матем., 11, 567—568.

1948

23. Основы линейной алгебры. М.—Л., Гостехиздат, 1 —424.
24. О группах конечного ранга. Матем. сб., 22 (64), 351—352.
25. О включении групповых алгебр в алгебры с делением. Докл. АН СССР, 60, № 9, 1499—1501.
26. О нормированных алгебрах Ли над полем рациональных чисел. Докл. АН СССР, 62, № 6, 745—748.
27. Топологическая алгебра и группы Ли. «Математика в СССР за тридцать лет. 1917—1947», 134—158.

1949

28. Об одном классе однородных пространств. Изв. АН СССР, серия матем., 13. 9—32 (пер. на англ. яз., 1951).

29. Нильпотентные группы без кручения. Изв. АН СССР, серия матем., **13**, 201—212.

30. Об упорядоченных группах. Изв. АН СССР, серия матем., **13**, 173—482.

31. О бесконечных разрешимых группах. Докл. АН СССР, **67**, № 1, 23—25.

32. Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы. Матем. сб., **25** (67), 347—366.

1950

33. Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями. Матем. сб., **26** (68), 19—33.

34. Рец. на кн. А. Г. Куроша «Курс высшей алгебры», изд. 2-е. М.—Л, Гостехиздат, 1950, Сов. кн., № 12, 21—22.

1951

35. О некоторых классах бесконечных разрешимых групп. Матем. сб., 28 (70), 567—568 (пер. на англ. яз., 1961).

36. О доупорядочивании групп. Труды Матем. ин-та им. Стеклова, 38, 173—175.

1952

37. Об одном представлении неассоциативных колец. УМН, 7, № 1 (47), 181—185.

38. Симметрические группоиды. Матем. сб., **31**, 136—151.

39. Группы. БСЭ, изд. 2-е, **13**, 138—143.

40. Инварианты. БСЭ, изд. 2-е, 613—614.

1953

41. Об одном классе алгебраических систем. УМН, 8, № 1 (53), 165—171.

42. Нильпотентные полугруппы. Уч. зап. Ивановского пед. ин-та, 4, 107—111.

43. Мультипликативные сравнения матриц. Докл. АН СССР, **90**, № 3, 333—335.

1954

44. К общей теории алгебраических систем. Матем. сб., **35** (71), 3—20 (пер. на англ. яз., 1963).

1955

45. Два замечания о нильпотентных группах. Матем. сб., **37** (79), 567—572.

46. Аналитические лупы. Матем. сб., **36** (78), 569—576.

1956

47. Основы линейной алгебры, изд. 2-е, перераб. М., Гостехиздат, 340 стр. (пер. на китайск. и японск. яз.)

48. Группы и другие алгебраические системы. «Математика, ее содержание, методы и значение», т. 3. М., Изд-во АН СССР, 248—331 (пер. на англ. яз., 1963).
49. Алгебраические системы. Труды III Всесоюз. матем. съезда, 2, 8.
50. О представлениях моделей. Докл. АН СССР, **108**, № 1, 27—29.
51. Квазипримитивные классы абстрактных алгебр. Докл. АН СССР, **108**, № 2, 187—189.
52. Подпрямые произведения моделей. Докл. АН СССР, **109**, № 2, 264—266.
53. Замечание о частично упорядоченных группах. Уч. зап. Ивановского пед. ин-та, **10**, 3—5.

1957

54. Свободные топологические алгебры. Изв. АН СССР, серия матем., **21**, 171—198 (пер. на англ. яз., 1961).
55. О производных операциях и предикатах. Докл. АН СССР, **116**. №1, 24—27.
56. О классах моделей с операцией порождения. Докл. АН СССР, **116**, № 5, 738—741.

1958

57. О гомоморфизмах на конечные группы. УМН, **13**, № 3 (18), 237 — 238.
58. О гомоморфизмах на конечные группы. Уч. зап. Ивановского пед. ин-та, 28, 49—60.
59. Определяющие соотношения в категориях. Докл. АН СССР, **119**, № 6, 1095—1098.
60. Структурная характеристика некоторых классов алгебр. Докл. АН СССР, **120**, № 2, 29—32.
61. О некоторых классах моделей. Докл. АН СССР, **120**, № 2, 245— 248.

1959

62. Модельные соответствия. Изв. АН СССР, серия матем., **23**, 313— 336.
63. Регулярные произведения моделей. Изв. АН СССР, серия матем., **23f** 489—502 (пер. на англ. яз., 1965).
64. О малых моделях. Докл. АН СССР, **127**, 258—261.
65. Об одном соответствии между кольцами и группами. УМН, **14**, № 5 (89), 298—209.

1960

66. О свободных разрешимых группах. Докл. АН СССР, **130**, № 3, 495—498.
67. Об одном соответствии между кольцами и группами. Матем. сб., **50** (92), 257—266 (пер. на англ. яз., 1965).
68. О неразрешимости элементарных теорий некоторых полей. Сиб. матем. ж., **1**, 71—77.

1961

69. Конструктивные алгебры. 1. УМН, **16**, № 3 (99), 3—60.
70. Современное состояние теории классов моделей. I V Всесоюз. матем. съезд, 1961. Л., 19—21.

71. Неразрешимость элементарной теории конечных групп. Докл. АН СССР, **138**, № 4, 771—774.

72. О некоторых элементарных свойствах линейных групп. Некоторые проблемы математики и механики. Новосибирск, 110—132.

73. Об элементарных теориях локально свободных универсальных алгебр. Докл. АН СССР, **138**, № 5, 1009—1012.

74. Замечание к статье «О неразрешимости элементарных теорий некоторых полей». Сиб. матем. ж., 2, 639.

75. Эффективная неотделимость множества тождественно истинных и множества конечно опровержимых формул некоторых элементарных теорий. Докл. АН СССР, **139**, № 4, 802—805.

1962

76. Строго родственные модели и рекурсивно совершенные алгебры. Докл. АН СССР, **145**, № 2, 276—279.

77. О частично упорядоченных нильпотентных группах. Алгебра и логика, **1**, № 2, 5—9.

78. Аксиоматизируемые классы локально свободных алгебр некоторых типов. Сиб. матем. ж, 3, 729—743.

79. О рекурсивных абелевых группах. Докл. АН СССР, **146**, № 5, 1009—1012.

80. Сергей Николаевич Черников. УМН, **17**, № 5, 177—181 (совм. с В. С. Чариным).

81. Об уравнении $zxyx^{-1}y^{-1}z = aba^{-1}b^{-1}$ в свободной группе. Алгебра и логика, **1**, № 5, 45—50.

1963

82. Полно нумерованные множества. Алгебра и логика, **2**, № 2, 4—29.

83. Некоторые вопросы теории классов моделей. Труды IV Всесоюз. матем. съезда, т. 1, 169—198.

1964

84. К теории вычислимых семейств объектов. Алгебра и логика, **3**, № 4, 5—31.

1965

85. Позитивные и негативные нумерации. Докл. АН СССР, **160**, № 2, 278—280.

86. Петр Григорьевич Конторович. УМН, 20, № 4 (124), 208—212 (совместно с Б. И. Плоткиным).

87. Предисловие к русск. изд. кн. «Математическая логика и ее применения». М., 1965.

88. Алгоритмы и рекурсивные функции. «Наука», 1—391.

1966

89. Тождественные соотношения на многообразиях квазигрупп. Матем. сб., **69**, 3—12.

90. О стандартных обозначениях и терминологии в теории алгебраических систем. Алгебра и логика, 5, № 1, 71—77.

91. Итеративные алгебры и многообразия Поста. Алгебра и логика, 5, № 2, 5—24.

92. Несколько замечаний о квазимногообразиях алгебраических систем. Алгебра и логика, 5, № 3, 3—9.

93. О некоторых пограничных вопросах алгебры и математической логики. Тез. докл. по приглашению, Международный конгресс математиков, Москва, 26.

1967

94. Об умножении классов алгебраических систем. Сиб. матем. ж., 8, 346—368.

95. Об одном усилении теорем Слупецкого и Яблонского. Алгебра и логика, 6, № 3, 61—75.

1968

96. О некоторых пограничных вопросах алгебры и логики. Тр. Междунар. конгр. математиков (Москва, 1966), «Мир», 217—231.

1970

97. Алгебраические системы, «Наука», 1—392.

98. Основы линейной алгебры, изд. 3-е, перераб., «Наука», 1—400.

1971

99. К истории алгебры в СССР за первые 25 лет. Алгебра и логика, 10, № 1, 103—118.

100. The metamathematics of algebraic systems. Collected papers: 1936—1967. Amsterdam — London, 1—494,

Содержание

Contents