

ЗАДАЧИ И ОЛИМПИАДЫ

Избранные задачи

ИЗ ЖУРНАЛА

**“AMERICAN MATHEMATICAL
MONTHLY”**

Перевод с английского

Ю. А. ДАНИЛОВА

Под редакцией и с предисловием

В. М. АЛЕКСЕЕВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР · МОСКВА · 1977

И 32 Избранные задачи. Сборник. Пер. с англ. Ю. А. Данилова. Под ред. и с предисл. В. М. Алексеева. М., «Мир», 1977.

597 с. с ил.

В книгу включены лучшие задачи, опубликованные в журнале «American Mathematical Monthly» с 1918 по 1950 г. Уникальный по диапазону и разнообразию затрагиваемых тем сборник содержит задачи из многих разделов классической и современной математики. Задачи могут быть использованы для проведения школьных и студенческих олимпиад, в работе математических кружков и при самостоятельном углубленном изучении математики.

Книга представляет интерес для школьников старших классов, студентов, преподавателей математики и широкого круга любителей нестандартных задач.

И $\frac{20202,20203-177}{041(01)-77}$ 177—77

512 513 517

Редакция научно-популярной и научно-фантастической литературы

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА РУССКОГО ИЗДАНИЯ

Очертить круг читателей, которых наша книга заинтересует и кому она принесет пользу, не легко. Поскольку это сборник задач — а задачи надо решать, — читатель, несомненно, должен быть любителем математики, при том любителем активным, которому размышление над трудной задачей доставляет удовольствие. Подобным энтузиастам эта книга даст обильную и достаточно разнообразную пищу, возможно, даже слишком разнообразную и не всегда легко усвояемую. В наш просвещенный век любителей математики гораздо больше, чем одних профессионалов, однако наверняка далеко не все из них принадлежат к числу активных. Таким образом, интересующий нас круг читателей, простираясь широко, перестает быть отчетливо очерченным и, возможно, изобилует лакунами.

По сравнению с уже вышедшими в серии «Задачи и олимпиады»¹ книгами сборник «Избранные задачи» более труден и рассчитан на весьма подготовленного читателя. Совсем элементарных задач «ни про что», не требующих никаких или почти никаких специальных познаний в математике, здесь сравнительно мало, процентов 10—15. С другой стороны, большая часть задач все же не выходит за рамки стандартных курсов высшей математики втузов и пединститутов и для студентов 1—2 курсов вполне может служить нестандартным дополнением

¹ Тригг Ч., Задачи с изюминкой, М., «Мир», 1975; Кюршак И. и др., Венгерские математические олимпиады, М., «Мир», 1976.

к традиционным задачникам, а окончившим эти вузы настоящий сборник поможет вспомнить забытое и узнать кое-что новое. Этой категории читателей может также принести пользу разбор решений и небольшой теоретический комментарий, приведенный в конце книги. Поэтому я не сомневаюсь, что среди активных читателей будут не только те, кто избрал математику своей профессией или кто дружит с ней сегодня, но и те, для кого общение с ней было приятным эпизодом в прошлом и кто хотел бы освежить в памяти свое знакомство с «царицей наук».

Успеху «Избранных задач», как мне кажется, благоприятствует еще одно обстоятельство. Уже состоялись две Всесоюзные студенческие олимпиады по математике и предстоит третья. Если школьные математические олимпиады разных уровней давно популярны и неплохо обеспечены литературой, то со студенческими олимпиадами дело обстоит далеко не так. С этой точки зрения «Избранные задачи» выходят весьма своевременно. Как сами задачи, так и в еще большей степени содержащиеся в них идеи могут дать богатый материал и для тренировки «олимпийцев», и для деятельности оргкомитетов, обычно испытывающих нужду в подобном материале.

Как создавались «Избранные задачи»

Профессор Отто Данкел (1869—1951), памяти которого посвящен сборник, в течение двадцати восьми лет, с 1919 по 1946 г., был одним из редакторов отдела задач в журнале «American Mathematical Monthly», а с 1934 г. возглавлял этот отдел. Его неутомимая энергия, добросовестность и внимание к мелочам издательской деятельности во многом определили весь стиль отдела задач, который с самого начала издания журнала и по сей день занимает там значительное место.

После смерти О. Данкела руководство Американской математической ассоциации, официальным органом которой является «American Mathematical Monthly», приняло решение издать мемориальный сборник, отобрав для него 400 лучших задач из числа нескольких тысяч, опубликованных в журнале за период 1918—1950 гг. Разумеется, понятие «лучшая задача» является очень субъективным и решить проблему выбора было нелегко. Издатели нашли следующий выход. Они предложили ряду математиков (всего их было 24) — активным сотрудникам и корреспондентам журнала, авторам многих задач и решений — представить списки задач, которые те считают лучшими. После этого окончательный отбор был произведен в соответствии с числом голосов, полученных той или иной задачей.

Сборник «The Otto Dunkel Memorial Problem Book» появился в виде дополнительного выпуска журнала (American Mathematical Monthly, 64, № 7, Part II, 1957). Он содержит краткую биографию О. Данкела, очерк истории отдела задач журнала за 1894—1954 гг., условия 400 лучших задач, предметный указатель к задачам, опубликованным в журнале с 1918 по 1952 г., и указатель дат публикаций решений.

Настоящее издание «Избранных задач» из журнала «American Mathematical Monthly» не является переводом в буквальном смысле слова, поскольку для него не существует оригинала. Указанный выше мемориальный сборник послужил лишь прототипом, на основе которого была создана новая книга, входящая в серию «Задачи и олимпиады» и имеющая ту же композицию, что и две ее предшественницы. По традиции условия задач составляют в ней первую часть. Далее переводчик книги Ю. А. Данилов собрал из различных выпусков журнала решения большинства задач, которые составили вторую часть книги. Поскольку задачи и их решения публиковались в течение нескольких десятилетий, собрать их было

делом не легким. Дополнительные трудности вызывало отсутствие единства стиля, обусловленное как пестротой содержания, так и сменой поколений математиков. Поэтому условия задач (хотя и в небольшой степени) и особенно решения являются в этой книге не столько переводом американских оригиналов, сколько достаточно свободным их переложением. В условиях задач иногда приходилось менять реалии, иногда же текст редактировался и уточнялся, если того требовало решение.

Я прочитал все собранные решения задач и попытался взглянуть на них глазами современного читателя, такого «среднего любителя» решать задачи, получившего стандартное математическое образование. Некоторые решения, оказавшиеся неудовлетворительными или мало понятными просто потому, что «хорошо известное» и «очевидное» математику 20-х годов не обязано быть таковым в 70-х, мною были переделаны или написаны заново. (В этих случаях после номера задачи стоит знак *.) При этом всюду, где можно, я старался сохранить идею и общий план оригинального рассуждения. Ряд задач оставлен без решения либо потому, что я не располагаю таковым (например, задачи 138 и 139), либо потому, что известное мне строгое решение (например, для задачи 260) не является достаточно простым для понимания и изложения. В нескольких случаях (задачи 150, 277 и все задачи на разрезание) приведено неполное решение (отсутствует доказательство минимальности), и тем самым читателю предоставляется возможность улучшить книгу. Все подобные места отмечены подстрочными примечаниями.

Встречающиеся в некоторых задачах ссылки на литературу мы, как правило, оставляли и по возможности указывали издания, более доступные советскому читателю.

Наконец, в тех случаях, когда мне казалось, что «средний любитель» математики может оказаться в за-

труднении и ему понадобится справка, относящаяся к какому-либо мало популярному ныне разделу математики, я дополнял решение сведениями из теории или небольшим комментарием. В совокупности это составило третью часть книги. Как правило, здесь изложены лишь факты, а доказательства если и приводятся, то самые краткие. Активный читатель, зная формулировки, может попытаться найти доказательства самостоятельно, и, следовательно, он получает еще некоторое число задач сверх четырехсот.

Конечно, содержание третьей части весьма субъективно, и, возможно, какие-то места книги останутся для читателя не вполне ясными, а какие-то покажутся слишком разжеванными. Не исключая подобной возможности, я все же надеюсь, что большинство читателей найдет задачи и их решения вполне удовлетворительными.

Не торопитесь решать задачи, начиная с первой!

История создания этого сборника объясняет пестроту его содержания. К тому же мы сохранили порядок задач оригинала, приблизительно хронологический, а не тематический. Поэтому прежде всего я рекомендую читателю просмотреть хотя бы бегло, но от начала до конца весь раздел «Условия задач». Предметный указатель также может помочь отобрать те задачи, которые вам по вкусу.

Среди задач сборника есть более и менее удачные, совсем легкие и довольно трудные. Некоторые задачи (например, 167, 209, 289) мне так понравились, что я усиленно рекламировал их своим друзьям и знакомым.

Значительное место в сборнике занимают задачи по математическому анализу и алгебре, которые можно отнести также к задачам по курсу высшей математики втуза (определители, вычисление интегралов, простей-

шие дифференциальные уравнения, ряды). Впрочем, иногда для решения этих задач совсем неожиданно приходится прибегать к помощи других разделов математики. Например, в задаче 256 пришлось воспользоваться теорией разложения целых чисел в сумму двух квадратов.

Не менее значительное место занимает теория чисел (делимость, диофантовы уравнения и пр.). Мне лично доставило большое удовольствие разобраться в задаче 209 о целочисленных точках на сфере.

Богато представлена в сборнике почти вышедшая ныне из моды синтетическая проективная геометрия. Например, задача 167 о прямых, касающихся одной параболы, может быть рекомендована любителям изящных задач. Наконец, и любители развлекательных задач, несомненно, найдут для себя кое-что интересное (задача 312 о служащих банка, прекрасная задача 277 про беспосадочный перелет, неизменно вызывающая улыбку задача 303 о «черной пятнице» и др.).

В оригинальном сборнике, кроме указания имени автора задачи, что мы сохранили в переводе¹, дается еще и ее номер в оригинале; более элементарные задачи нумеруются отдельно, и перед номером у них ставится буква Е (в нашем сборнике задачи 301—400 относятся к числу элементарных). Эти сведения мы опустили; заинтересованный читатель может обратиться к оригиналу. Пользуясь номером и указателем дат публикации решений, он при желании сможет разыскать оригиналы условий задач и решений. Некоторый интерес, впрочем, представляет суммарная хронология (приведенные ниже даты относятся к публикациям решений задач, номера — к настоящему изданию):

¹ Впрочем, установить подлинного автора задачи иногда бывает нелегко. Например, полное решение задачи 260 опубликовано советским математиком Л. Г. Шнирельманом еще в 1929 г. — *Прим. ред.*

1918—1920	2—5
1921—1925	7—17, 19—23, 26—27, 29—30, 32, 33
1926—1930	1, 6, 18, 24, 25, 28, 31, 34—35, 37—54, 56
1931—1935	36, 55, 57—82, 84—92, 301—307
1936—1940	93—108, 110—142, 144—146, 308—328
1941—1945	147—159, 161—184, 186—194, 329—351
1946—1950	83, 109, 143, 160, 185, 195—260, 262—265, 267, 325—391
1951—1953	261, 266, 269—300, 392—400

В решениях задач знак *, помещенный в тексте, означает рекомендацию обратиться к части III, к тому ее пункту, который снабжен указанием на номер комментируемой задачи. Ссылки на другие пункты части III даются так: см. III. 17.

Мне остается выразить благодарность всем, чьи усилия способствовали появлению этой книги и ее совершенствованию. Читателям же (надеюсь, многочисленным!) я пожелаю успеха в решении задач и удовольствия от занятия математикой.

В. М. Алексеев

I. ЗАДАЧИ

1. «Многоэтажные» дроби. Из четырех величин a_1, a_2, a_3, a_4 , не переставляя их, можно образовать следующие четырехэтажные дроби:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{a_1}{a_2}}{a_3}}{a_4}}, \quad \frac{\frac{\frac{a_1}{a_2}}{\frac{a_3}{a_4}}}, \quad \frac{\frac{\frac{a_1}{a_2}}{\frac{a_3}{a_4}}}, \quad \frac{\frac{\frac{a_1}{a_2}}{\frac{a_3}{a_4}}}, \quad \frac{\frac{\frac{a_1}{a_2}}{\frac{a_3}{a_4}}}.$$

Не все из них различны: значения первой и четвертой дробей совпадают.

Определить, сколько различных рациональных функций можно построить из величин $a_1, a_2, \dots, a_n$, образуя n -этажные дроби, какие из этих функций допускают более одного представления в виде n -этажных дробей и какие — лишь одно представление.

Frank Irwin

2. Сходимость числового ряда. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, общий член которого имеет вид

$$a_n = \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right]^2.$$

R. E. Moore

3. Два определенных интеграла. Доказать, что если r — положительное целое число, то

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2r+1)\varphi}{\sin \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2r\varphi}{\sin \varphi} d\varphi = 2 \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^{r-1}}{2r-1} \right].$$

Leonard Richardson

4. Система функциональных уравнений. Решить следующую систему функциональных уравнений:

$$\begin{cases} \varphi(x+y) = \varphi(x) + \frac{\varphi(y)\psi(x)}{1-\varphi(x)\varphi(y)}, \\ \psi(x+y) = \frac{\psi(x)\psi(y)}{[1-\varphi(x)\varphi(y)]^2}. \end{cases}$$

J. L. Riley

5. Циркулянты и арифметическая прогрессия. Вычислить циркулянты

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 & n \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n & a_1 \end{vmatrix},$$

где элементы $a_1, a_2, \dots, a_n$ матрицы второго циркулянта образуют арифметическую прогрессию.

Frank Irwin

6. Диофантово уравнение. Доказать, что все решения в целых числах уравнения

$$y^2 = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

исчерпываются следующими парами чисел:

$$x = -1, \quad 0, \quad 3;$$

$$y = \pm 1, \pm 1, \pm 11.$$

T. H. Gronwall

7. Разложение в степенной ряд. Доказать, что при $|x| < 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \dots (4n-1)}{5 \cdot 9 \dots (4n+1)} x^{4n+1},$$

$$\left(\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \right)^2 = x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \dots (4n-1)}{5 \cdot 9 \dots (4n+1)} \cdot \frac{x^{4n+2}}{2n+1}.$$

T. H. Gronwall

8. Обезьяна и груз. Через блок, прикрепленный к крыше здания, переброшен канат. На одном конце каната висит обезьяна, к другому прикреплен груз, вес которого в точности равен весу обезьяны. Предположим, что обезьяна начала взбираться вверх по канату.

Что произойдет при этом с грузом?

Lewis Carroll

9. Асимптотика решения функционального уравнения. Доказать, что если $y(x)$ — решение функционального уравнения

$$y(x) = \frac{y^2(x+1)}{x} + y(x+1),$$

положительное при положительных целых значениях x , то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) \ln x = 1.$$

E. L. Post

10. Равносторонние треугольники и парабола. Равносторонние треугольники со сторонами 1, 3, 5 ... выстроены в ряд так, что их основания расположены на одной прямой и вплотную примыкают друг к другу.

Доказать, что вершины треугольников, противолежащие основаниям, расположены на параболе и удалены на целочисленные расстояния от ее фокуса.

Norman Anning

11. Наименьшие размеры окошка для приема посылок. Оставляя в стороне ограничения на вес посылок, можно сказать, что почта США принимает посылки, у которых длина и обхват, измеренный в направлении, пер-

пендикулярном длине, в сумме не превышают 72 дюймов¹.

Каковы наименьшие размеры квадратного окошка, через которое смогут пройти все ящики допустимых размеров (ящик имеет форму прямоугольного параллелепипеда)?

L. G. Weld

12. Нулевой след. Пусть a_{st} — элементы прямоугольной матрицы A размером $m \times n$, а b_{ts} — элементы прямоугольной матрицы B размером $n \times m$.

Доказать, что если $ABA = 0$, то есть для всех s и v

$$\sum_{t, u} a_{st} b_{tu} a_{uv} = 0,$$

то

$$\text{Sp } AB = \sum_{t, s} a_{st} b_{ts} = 0.$$

Индексы s, u принимают значения $1, 2, \dots, m$, индексы t, v — значения $1, 2, \dots, n$.

E. H. Moore

13. Параболы с параллельными осями. Оси двух парабол параллельны.

Доказать, что их общая хорда пересекает их общую касательную между точками касания.

R. T. McGregor

14. Гессиан однородного многочлена. Доказать, что если f — однородный многочлен относительно n переменных и $H(f)$ — его гессиан², то

$$H(f^2) = c H(f) \cdot f^n,$$

где c — некоторая постоянная.

L. E. Dickson

15. Перевод обыкновенной дроби в десятичную. Доказать, что если при переводе обыкновенной дроби p/q (p и q — целые числа, $q > p$) в десятичную один из неполных остатков от деления p на q равен $q - p$, то исходная дробь p/q представима в виде бесконечной периодической

¹ 1 дюйм = 25,4 мм.

² По определению $H(f) = \det \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. — Прим. ред.

десятичной дроби, период которой содержит вдвое больше знаков, чем полученное к моменту появления остатка $q - p$ неполное частное, причем для получения недостающих знаков периода нет необходимости продолжать деление, а достаточно вычесть уже известное неполное частное из числа, совпадающего с ним по количеству знаков и состоящему из одних лишь девяток.

R. E. Gaines

16. Превращение равностороннего треугольника в квадрат. Пользуясь циркулем и линейкой, разбить равносторонний треугольник на части (с прямолинейными сторонами) так, чтобы из них можно было составить квадрат.

H. E. Dudeney

17. Конический бокал. Человек пьет воду из конического бокала, наклоняя его с постоянной угловой скоростью.

При каком угле наклона «расход воды» максимален? При каком угле наклона площадь свободной поверхности воды в бокале максимальна?

J. P. Ballantine

18. Определитель из экспонент. Доказать, что если $a, b, \dots, i$ — неотрицательные вещественные числа и определитель

$$D(r) = \begin{vmatrix} a^r & b^r & c^r \\ d^r & e^r & f^r \\ g^r & h^r & i^r \end{vmatrix}$$

обращается в нуль при пяти отличных от нуля вещественных значениях r , то определитель $D(1)$ содержит либо две пропорциональные строки, либо два пропорциональных столбца, либо одну строку или один столбец, заполненные нулями.

C. F. Gummer

19. Точка с экстремальным свойством. Найти точку плоскости, сумма расстояний от которой до n заданных точек минимальна.

J. Rosenbaum

20. Степенной ряд и конечные разности. Вычислить сумму степенного ряда

$$S_2(x) = 1 + \frac{3x^2}{2!} + \frac{4x^4}{4!} + \frac{6x^6}{6!} + \dots,$$

у которого коэффициенты числителей образуют набор чисел с постоянной третьей разностью¹, равной 2.

E. J. Oglesby

21. Геометрическое построение одной линейкой. Можно ли, пользуясь только линейкой, построить² прямую, пересекающую четыре заданные скрещивающиеся прямые?

R. M. Mathews

22. Пробел в доказательстве. В одной статье, опубликованной в солидном математическом журнале, содержалось следующее утверждение: «Нетрудно доказать, что если $p > 0$ — целое число и $a_1, a_2, \dots, a_p$ — целочисленные коэффициенты, то из соотношения

$$a_1 \sin \frac{\pi}{2p} + a_2 \sin \frac{2\pi}{2p} + \dots + a_{p-1} \sin \frac{(p-1)\pi}{2p} + a_p = 0$$

с необходимостью следуют равенства $a_1 = a_2 = \dots = a_{p-1} = a_p = 0$ ».

Восполните пробел в рассуждениях автора статьи: докажите (или опровергните) высказанное им утверждение.

E. T. Bell

23. Решение уравнения в целых числах. Доказать, что уравнение $x^p + y^p + z^p = 0$ допускает решение в целых

¹ Третья разность последовательности a_n определяется равенством

$$\Delta^3 a_n = a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n$$

(см. III. 14). — *Прим. ред.*

² Поскольку речь идет о построении в пространстве, да еще ограниченными средствами, следует уточнить, какие именно операции считаются допустимыми. Здесь подразумевается, что можно делать «линейные» построения с плоскостями (провести плоскость через точку и прямую или через три точки, найти точку пересечения прямой и плоскости), а в каждой плоскости производить построения при помощи обычной линейки. — *Прим. ред.*

числах x, y, z , не делящихся на нечетное простое число p , если

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} N_2(p) - \frac{1}{3} N_3(p) + \frac{1}{4} N_4(p) - \dots + \frac{1}{p-1} N_{p-1}(p) \right] + 1$$

делится на p . Здесь $N_r(n)$ — число способов, которыми n можно представить в виде упорядоченной суммы r квадратов целых чисел, отличных от нуля.

E. T. Bell

24. Корни уравнения с «почти биномиальной» левой частью. Доказать, что если вещественные или комплексные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ являются корнями уравнения

$$x^n - na_1x^{n-1} + \binom{n}{2}a_2^2x^{n-2} + \dots \\ \dots + (-1)^i \binom{n}{i} a_i^i x^{n-i} + \dots + (-1)^n a_n = 0$$

(где $\binom{n}{i}$ — биномиальные коэффициенты), то $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Otto Dunkel

25. Соотношение между корнями двух многочленов. Пусть $f(x)$ — многочлен n -й степени, а $f'(x)$ — его производная. Составим разности между каждым из корней уравнения $f(x)=0$ и каждым из корней уравнения $f'(x)=0$.

Вычислить сумму величин, обратных полученным разностям.

J. L. Riley

26. Кривая, описываемая центром катящейся сферы. Сфера радиуса R катится по двум пересекающимся прямым, наклоненным к горизонту под одинаковыми углами и образующим друг с другом угол 2α .

Доказать, что при качении центр сферы описывает дугу эллипса с полуосями $R \operatorname{cosec} \alpha$ и R .

William Hoover

27. Гармоническая функция. Пусть T — открытая область на плоскости xu , например внутренность гладкой

простой замкнутой кривой; функция U непрерывна в области T и удовлетворяет уравнению

$$\iint_T U \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) dx dy = 0$$

при любых функциях V , имеющих в T непрерывные вторые производные и обращающихся в нуль в некоторой окрестности границы этой области.

Доказать, что функция U — гармоническая в T , то есть удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

O. D. Kellog

28. Уравнение, приводящее к числам Бернулли. Пусть последовательность $c_3, c_5, c_7, \dots$ выбрана так, что уравнения

$$s! \left[\frac{1}{(s+1)!} + \frac{c_3}{4!(s-1)!} + \frac{c_5}{6!(s-3)!} + \frac{c_7}{8!(s-5)!} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{c_s}{(s+1)!2!} \right] = 0$$

удовлетворяются при всех положительных нечетных s ($s = 2n + 1$, где $n \geq 1$).

Доказать, что если s уменьшить на 1 (то есть положить $s = 2n$), то левая часть соответствующего уравнения станет равной $+B_n$ или $-B_n$ в зависимости от того, нечетно или четно n (B_n — n -е число Бернулли)¹. Доказать также, что любой из коэффициентов c_n можно найти, не вычисляя всех предыдущих коэффициентов.

S. A. Corey

29. Представление числа π в виде ряда. Дана последовательность $u_1 = 2, u_2 = 8, \dots, u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2}$ ($n = 3, 4, 5, \dots$).

¹ Числа Бернулли проще всего определить как коэффициенты разложения

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2}x + B_1 \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^{i-1} B_i \frac{x^{2i}}{(2i)!} + \dots -$$

Прим. ред.

Доказать, что

$$\frac{\pi}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arccotg} u_n^2.$$

Norman Anning

30. Предел последовательности. Пусть $a_1 = a > 0$, $a_2 = a^{a_1}$, $a_3 = a^{a_2}$, ..., $a_{n+1} = a^{a_n}$, ...

Что можно сказать о $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ как функции от a ? (Предел существует и при некоторых значениях $a > 1$.)

J. Lense

31. Геометрическое построение при помощи линейки. На прямой заданы четыре точки: O, A, B, C .

Пользуясь лишь линейкой, найти на этой прямой такую точку P , чтобы длина отрезка OP была средним гармоническим длин отрезков OA, OB и OC .

Norman Anning

32. Коэффициенты кубического уравнения и геометрия. Какими должны быть соотношения между коэффициентами кубического уравнения для того, чтобы из отрезков, длины которых равны значениям корней уравнения, можно было построить треугольник?

N. A. Court

33. Неравенство для непрерывной функции, заданной на отрезке. Пусть $f(x)$ — однозначная и непрерывная функция от x на отрезке $a \leq x \leq b$ ($b > a$), не равная тождественно нулю и удовлетворяющая неравенствам $0 \leq f(x) \leq M$.

Доказать, что

$$0 < \left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 - \left[\int_a^b f(x) \cos x dx \right]^2 - \left[\int_a^b f(x) \sin x dx \right]^2 \leq M^2 \frac{(b-a)^4}{12}.$$

Otto Dunkel

34. Определитель из корней уравнения $x^n = 1$. Пусть n — натуральное число больше 2, ε — первообразный корень уравнения $x^n = 1$, $|a_{ij}|$ — определитель $(n-1)$ -го порядка, элемент которого a_{ij} равен $\varepsilon^{ij} = (\varepsilon^i)^j$.

Доказать, что

$$|a_{ij}|^2 = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n^{n-2}.$$

Harry Langman

35. Построение касательной к окружности при помощи линейки. Пользуясь только линейкой, провести прямую, касательную к окружности или к дуге окружности в заданной точке. (При построении касательной не следует опираться на теорему Паскаля о шестиугольнике.)

Harry Langman

36. Соотношение между гессианом от алгебраической формы и произвольной аналитической функцией. Пусть f — любая алгебраическая форма степени $r > 1$ от переменных, $H(f)$ — ее гессиан, а φ — произвольная аналитическая функция.

Доказать, что

$$H[\varphi(f)] = H(f) \left[\left(\frac{d\varphi}{df} \right)^n + \frac{pf}{p-1} \cdot \frac{d^2\varphi}{df^2} \cdot \left(\frac{d\varphi}{df} \right)^{n-1} \right].$$

C. C. MacDuffee

37. Две лестницы. На горизонтальной площадке возведены две параллельные вертикальные стены. Лестница длиной a поставлена на землю у основания одной стены и прислонена к другой, лестница длиной b поставлена у основания второй стены и прислонена к первой.

Каким должно быть расстояние между стенами для того, чтобы лестницы перекрещивались на высоте h над уровнем площадки? При каких условиях задача допускает решение?

C. C. Samp

38. Две последовательности иррациональных чисел. Пусть X — положительное иррациональное число, а $Y = 1/X$.

Доказать, что между любыми двумя последовательными натуральными числами содержится один и только один член одной из последовательностей

$$(1 + X), \quad 2(1 + X), \quad 3(1 + X), \dots, \\ (1 + Y), \quad 2(1 + Y), \quad 3(1 + Y), \dots$$

Samuel Beatty

39. Пересечение кривых, заданных уравнениями в полярных координатах. Справедливо ли утверждение: «Точки пересечения двух кривых, заданных уравнениями в полярных координатах (ρ, ϑ) , можно найти, решив систему этих уравнений относительно ρ и ϑ »?

Otto Dunkel

40. Треугольник с наибольшей площадью. Пусть a, b, c — длины трех отрезков, удовлетворяющие соотношению $a^3 + b^3 + c^3 = 3m^3$.

Доказать, что наибольшая площадь треугольника, который можно построить из этих отрезков, равна $m^2 \sqrt{3}/4$.

C. N. Mills

41. Квадратный корень из среднего квадратичного. Назовем величину

$$\left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} \right)^{1/2}$$

квадратным корнем из среднего квадратичного (ККСК) n чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$.

а. При каких значениях n ККСК первых n целых чисел является целым числом?

б. При каких значениях a и n ККСК n последовательных целых чисел $a, a + 1, \dots, a + n - 1$ является целым числом?

R. B. Stone

42. Мартышка и кокосовые орехи. Пересчитав сложенные в кучу кокосовые орехи, первый прохожий обнаружил, что если 1 орех отдать мартышке, то число оставшихся орехов разделится на n без остатка. Отдав лишний орех мартышке, он взял себе $1/n$ оставшихся орехов и ушел. Так же поступили и те, кому случилось набрести на кучу орехов после него. Каждый, пересчитав орехи,

замечал, что их число при делении на n дает остаток 1; отдав мартышке лишний орех, он забирал себе $1/n$ оставшихся орехов и шествовал дальше. После того как ушел последний, n -й «посетитель», число орехов, оставшихся в куче, делилось на n без остатка.

Сколько кокосовых орехов было в куче сначала и сколько осталось в конце?

R. S. Underwood

43. Функциональный определитель. Пусть $i! f_i = \frac{d^i f}{dx^i}$,

$$D = \begin{vmatrix} f_r & f_{r+1} & \dots & f_{r+n-1} \\ f_{r+1} & f_{r+2} & \dots & f_{r+n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{r+n-1} & f_{r+n} & \dots & f_{r+2n-2} \end{vmatrix}.$$

Доказать, что $\frac{dD}{dx} = (r + 2n - 1) D'$, где D' — определитель, получающийся из определителя D при увеличении всех индексов в последней строке на 1.

Otto Dunkel

44. Система уравнений, допускающая решение в положительных числах. Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = x + y + \sum A_{i,k} x^i y^k - 1 = 0, \\ x\varphi_x - a y\varphi_y = 0, \end{cases}$$

где $A_{i,k} > 0$, $a > 0$, $2 \leq i + k \leq n$, допускает одно и только одно решение в положительных числах.

J. V. Uspensky

45. Плоская кривая. Вывести уравнение плоской кривой, лежащей в полуплоскости $y > 0$, вдоль которой точка, движущаяся со скоростью, пропорциональной ординате, совершит переход из точки (x_1, y_1) в точку (x_2, y_2) за наименьшее время.

Laenas G. Weld

46. Интеграл от биномиального коэффициента. Пусть v — целое число, удовлетворяющее неравенству $v \geq 1$. Доказать, что

$$(-1)^{v-1} \int_0^1 \binom{t}{v} dt = \int_0^\infty \frac{(1+z)^{-v} dz}{\ln^2 z + \pi^2},$$

где

$$\binom{t}{v} = \frac{t(t-1) \dots (t-v+1)}{v!}.$$

L. L. Silverman, J. Tamarkin

47. Соотношение между радиусом вписанной сферы и длинами ребер, проходящих через вершину тетраэдра с тремя прямыми углами при вершине. Известно, что радиус вписанной окружности прямоугольного треугольника равен полуразности суммы катетов и гипотенузы.

Вывести аналогичное соотношение для радиуса сферы, вписанной в тетраэдр с тремя прямыми плоскими углами при вершине.

J. Rosenbaum

48. Частный случай великой теоремы Ферма. а. Доказать, что сумма $x^2 + y^2$, где x и y — целые числа, не может быть квадратом целого числа, за исключением того случая, когда x или y делится на 3.

б. Сформулировать и доказать утверждение, аналогичное предыдущему, для случая, когда речь идет о делимости на 5.

в. Обобщить задачу на случай произвольного показателя степени n и, решив ее, доказать великую теорему Ферма для некоторого класса чисел.

Paul Wernicke

49. Тожество относительно 12 переменных. Пусть $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ — определитель 6-го порядка, i -я строка которого содержит элементы $x_i^2, x_i y_i, y_i^2, x_i, y_i, 1$ (перечисленные в том порядке, в котором они расположены в строке, если двигаться по ней слева направо), и

$$(i, j, k) = \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix}.$$

Доказать, что соотношение

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6) = (6, 1, 2)(2, 3, 4)(4, 5, 6)(1, 3, 5) - \\ - (1, 2, 3)(3, 4, 5)(5, 6, 1)(2, 4, 6)$$

представляет собой тождество относительно 12 независимых переменных x_i, y_i , где $i = 1, 2, \dots, 6$.

Otto Dunkel

50. Два ряда с интегральными членами.
Доказать, что

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{2n\pi}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \pi - \frac{\pi}{2} \ln 2\pi$$

и

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{n\pi}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \ln \pi.$$

J. V. Uspensky

51. У водяной мельницы. Колесо водяной мельницы радиусом a вращается так, что точки обода имеют линейную скорость v . С обода срываются капли воды.

Найти огибающую траекторий, описываемых каплями воды.

B. F. Finkel

52. Число π в виде ряда. Доказать, что

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arccotg} 2u_r^2,$$

где $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_r = 4u_{r-1} - u_{r-2}$ ($r \geq 3$).

A. C. Aitken

53. Два равносторонних треугольника. Дан произвольный треугольник. На его сторонах вовне построены равносторонние треугольники. Их центры служат вершинами некоторого равностороннего треугольника A . Центры равносторонних треугольников, построенных на сторонах исходного треугольника внутрь его, служат вершинами другого равностороннего треугольника B .

Доказать, что разность площадей треугольников A и B равна площади исходного треугольника.

Harry Langman

54. Соотношение между биномиальными коэффициентами. Доказать следующее соотношение:

$$\sum_{i=0}^t (-1)^i \binom{r+1}{i} \binom{2r-2i}{r} = r+1,$$

где $\binom{n}{k}$ — биномиальные коэффициенты, а t равно $r/2$ при четном r и $(r-1)/2$ — при нечетном r .

B. C. Wong

55. Предел интеграла.

Доказать, что интеграл

$$V_n = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

при неограниченном возрастании n стремится к пределу $2/3$ и произведение $n(V_n - 2/3)$ остается ограниченным.

J. V. Uspensky

56. Соотношение между факториалами. Доказать, что

$$\sum_{i=0}^t \left[\frac{(r-1)!(r-2i)}{(r-i)! i!} \right]^2 = \frac{(2r-2)!}{r!(r-1)!},$$

где $t = \begin{cases} (r-2)/2 & \text{при четном } r, \\ (r-1)/2 & \text{при нечетном } r. \end{cases}$

B. C. Wong

57. Квадрат со сторонами, проходящими через заданные точки. Построить квадрат, каждая сторона которого проходит через заданную точку.

C. O. Williamson

58. Соотношение между суммами степеней натуральных чисел. Доказать, что

$$\frac{7 \sum_{k=1}^n k^6 + 5(p+1) \sum_{k=1}^n k^4 + p \sum_{k=1}^n k^2}{7 \sum_{k=1}^n k^6 - 5(p-1) \sum_{k=1}^n k^4 - p \sum_{k=1}^n k^2} = \frac{n^2 + n + p}{n^2 + n - p}.$$

D. H. Dodge

59. Разбиения многоугольника. Выпуклый многоугольник с n сторонами можно разбить на треугольники диагоналями, которые пересекаются лишь в его вершинах.

Вывести общую формулу для числа таких разбиений.

Otto Dunkel

60. Наиболее экономичное сопротивление. Располагая достаточно большим запасом единичных сопротивлений, нетрудно создать между двумя произвольными точками A и B любое сопротивление p/q , где p и q — целые числа. Для этого достаточно соединить параллельно q групп из p последовательно включенных единичных сопротивлений, то есть взять всего pq единичных сопротивлений. Однако обычно то же сопротивление удается получить из меньшего числа единичных сопротивлений.

Найти минимальное число единичных сопротивлений, которое необходимо для создания между двумя точками A и B электрической цепи сопротивлением p/q , где p и q — целые числа.

R. M. Sutton

61. Необычное дифференциальное уравнение. Решить дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} \int_0^x \frac{\cos w \, dw}{16 + 9 \sin^2 w} = \frac{1}{12} \operatorname{arctg} x.$$

F. P. Matz

62. Три конкурентные прямые. Вокруг окружности описан треугольник. Выберем произвольно две из его сторон.

Доказать, что следующие три прямые проходят через одну точку: а) прямая, соединяющая точки касания выбранных сторон и окружности; б) прямая, соединяющая точки пересечения выбранных сторон с биссектрисами противолежащих углов; в) прямая, соединяющая основания высот, опущенных на эти стороны.

A. Pelletier

63. Сравнения по нечетному простому модулю. Доказать, что если p — нечетное простое число, то

$$1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot (p-2)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p},$$

$$2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \dots \cdot (p-1)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}.$$

Mannis Charosh

64. Сходящийся и расходящийся ряды. Доказать, что если бесконечный ряд $u_1 + u_2 + \dots$ с положительными членами сходится, то ряд

$$\frac{u_1}{r_1} + \frac{u_2}{r_2} + \dots$$

расходится (r_n — сумма членов первого ряда, начиная с n -го, то есть $r_n = u_n + u_{n+1} + \dots$).

O. D. Kellogg

65. Уравнение с биномиальными коэффициентами. Известно, что $3003 = \binom{15}{5} = \binom{14}{6}$.

Решить в положительных целых числах уравнение

$$\binom{x+1}{y} = \binom{x}{y+1}.$$

Norman Anning

66. Треугольник Паскаля и определитель. Доказать, что определитель из n элементов, стоящих в левом верхнем углу треугольника Паскаля

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \dots, \\ 1 & 2 & 3 & \dots, \\ 1 & 3 & \dots & , \\ 1 & \dots & & \end{array}$$

равен 1.

C. A. Rupp

67. Система уравнений. Решить следующую систему n уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \\ x_n & x_1 & \dots & x_{n-2} \\ . & . & . & . \\ x_3 & x_4 & \dots & x_1 \end{vmatrix} = a_1, \quad \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \\ . & . & . & . \\ x_4 & x_5 & \dots & x_2 \end{vmatrix} = a_2, \dots,$$

$$\begin{vmatrix} x_n & x_1 & \dots & x_{n-2} \\ x_{n-1} & x_n & \dots & x_{n-3} \\ . & . & . & . \\ x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{vmatrix} = a_n.$$

E. B. Escott

68. Определители из нулей и единиц. Пусть D_n — определитель n -го порядка, составленный из нулей и единиц таким образом, что в каждой его строке и в каждом столбце содержатся 2 единицы и $n - 2$ нулей.

Доказать, что: а) при любом n определитель D_n равен $\pm 2^m$ или 0, где числа m и n либо оба четные, либо нечетные; б) если $D_5 = 0$, то две строки определителя D_5 совпадают; в) если в определителе D_n совпадают две строки, то в нем совпадают также и два столбца, и наоборот; г) если $D_n \neq 0$, то $3m \leq n$.

J. P. Ballantine

69. Комплексные числа с равными модулями. Доказать, что если a, b, c — комплексные числа и

$$|a| = |b| = |c| = r \neq 0,$$

то $|(ab + bc + ca)/(a + b + c)| = r$. Обобщить доказательство на случай n комплексных чисел равного модуля.

A. A. Bennett

70. Наилучшее приближение к 1. Рассмотрим дроби вида $1/n$, где n — натуральное число больше 1: $1/2, 1/3, 1/4, \dots$. Требуется определить, какие n из этих дробей (дроби могут повторяться), взятые в сумме, дают наилучшее приближение к 1 снизу. Например, при $n = 3$ наилучшее приближение дает сумма $1/2 + 1/3 + 1/7 = 41/42$.

Доказать, что в общем случае наилучшее приближение к 1 дает сумма n первых членов ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \frac{1}{1807} + \dots$$

(знаменатель каждого члена этого ряда, начиная со второго, на 1 больше произведения знаменателей всех предыдущих членов).

Martin Rosenman

71. Стержень на круглом столе. Тонкий стержень длиной $2a$ лежит на круглом столе радиусом $r > a$.

Какова вероятность, что ни один из концов стержня не выступает за край стола? Какова вероятность, что

один из концов стержня выступает за край стола? Тот же вопрос относительно обоих концов стержня.

R. E. Gaines

72. Стягивающиеся многоугольники. Рассмотрим на плоскости n точек. Соединим их в любом порядке так, чтобы получился замкнутый многоугольник. Ту же операцию осуществим с серединами n сторон построенного многоугольника.

Доказать, что при неограниченном повторении такой операции последовательно получаемые многоугольники стягиваются в точку.

Martin Rosenman

73. Разложение определителя по последнему столбцу. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} e_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & A_1 \\ e_{21} & e_{22} & 0 & \dots & 0 & A_2 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & \dots & 0 & A_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{n1} & e_{n2} & e_{n3} & \dots & e_{n, n-1} & A_n \end{vmatrix} =$$

$$= A_n - \sum A_{n/p_i} + \sum A_{n/p_i p_j} - \dots + (-1)^s A_{n/p_1 p_2 \dots p_s},$$

где $e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \text{ делится на } j, \\ 0, & \text{если } i \text{ не делится на } j, \end{cases}$
а $p_i, p_j, \dots$ — различные простые делители числа n .

J. M. Feld

74. Описанный эллипс. Найти эллипс наименьшей площади, описанный вокруг данного треугольника.

Orrin Frink, Jr.

75. Делимость чисел вида $2^\alpha + 1$. Пусть α и β — положительные целые числа, причем $\beta > 2$.

Доказать, что $2^\alpha + 1$ никогда не делится на $2^\beta - 1$.

D. C. Duncan

76. Кривая, описываемая фокусами вращающегося эллипса. Эллипс вращается в своей плоскости так, что

все время касается фиксированной прямой в фиксированной точке.

Доказать, что его фокусы описывают при этом кривую, ограничивающую часть плоскости, площадь которой равна $2\pi a(a-b)$.

R. E. Gaines

77. Гамма-функция и n -я разность $\ln x$. Пусть $\Delta^n \ln x$ — n -я разность функции $\ln x$, отвечающая шагу ¹ 1. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} n^x \ln n \cdot \Delta^n \ln x = \Gamma(x).$$

B. F. Kimball

78. Рациональные прямоугольные треугольники. Найти набор целых чисел, порождающих последовательность рациональных прямоугольных треугольников, члены которой при возрастании их номера стремятся к прямоугольному треугольнику с наименьшим углом, равным 30° .

H. T. R. Aude

79. Асимптотические свойства биномиальных коэффициентов. Доказать, что отношение суммы h -, $(h+k)$ -, $(h+2k)$ -го и т. д. биномиальных коэффициентов к сумме всех коэффициентов в разложении $(a+b)^n$ стремится к $1/k$ при $n \rightarrow \infty$. Здесь k — положительное целое число, $h = 1, 2, \dots, k$.

H. Grossman

80. Графический метод вычисления корней квадратного уравнения. При вычислении вещественных корней квадратного уравнения иногда используют следующий графический метод. Уравнение приводят к виду $x^2 - ax + b = 0$, где a и b вещественные числа, такие, что отрезки длиной a и b допускают построение при помощи

¹ При шаге h $\Delta_h^n f(x) = \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} \binom{n}{s} f(x+sh)$ (см. III. 14). —

циркуля и линейки. На плоскости вводят прямоугольную систему координат и отмечают точки $Q(a, b)$ и $B(0, 1)$. На отрезке BQ , как на диаметре, строят окружность. Если эта окружность пересекает ось x в точках M и N , то длины отрезков OM и ON совпадают с корнями данного уравнения (рис. 1).

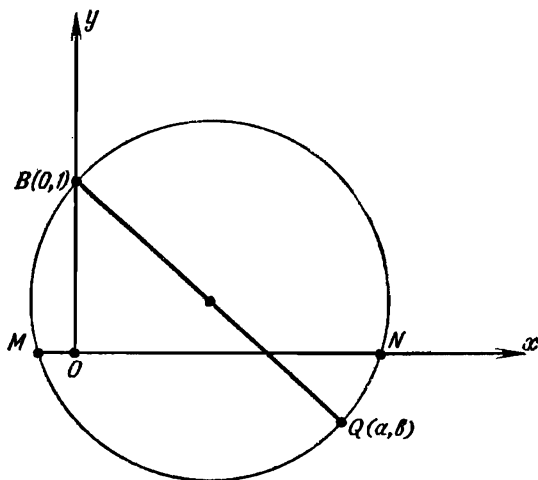


Рис. 1.

Обобщить этот графический метод решения квадратного уравнения на случай комплексных корней.

A. S. Levens

81. Соотношение между биномиальными коэффициентами. Доказать, что

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} k^n = (-1)^{n+1} n!$$

при любом натуральном n .

R. E. Moritz

82. Определитель из биномиальных коэффициентов. Доказать, что определитель матрицы, получающейся

при вычеркивании k -го столбца в матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \binom{4}{1} & \dots & \binom{n}{1} & \binom{n+1}{1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \dots & \binom{n}{2} & \binom{n+1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \binom{3}{3} & \binom{4}{3} & \dots & \binom{n}{3} & \binom{n+1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \binom{4}{4} & \dots & \binom{n}{4} & \binom{n+1}{4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{n}{n} & \binom{n+1}{n} \end{pmatrix},$$

равен $\binom{n+1}{k-1}$.

P. S. Dwyer

83. Функциональное уравнение. Решить функциональное уравнение

$$f(xy) = [f(x)]^{y^\beta} [f(y)]^{x^\beta},$$

где β — вещественная постоянная, а $f(x)$ — положительная непрерывная однозначная функция положительного переменного x .

F. T. O'Doubler

84. Премия покупателям сигарет. Как известно, некоторые фирмы, занимающиеся производством сигарет, имеют обыкновение вкладывать в пачки сигарет игральные карты. Тому из покупателей, кто сумеет собрать полную колоду карт, фирма выплачивает премию или выдает какой-нибудь приз.

Предположим, что в каждую пачку вложена одна из карт колоды в 52 листа, карты распределены по пачкам случайным образом и число пачек, поступающих в продажу, неограниченно.

Какое минимальное число пачек необходимо купить в среднем, чтобы собрать полную колоду карт?

A. F. Stevenson

85. Прямая Симсона. Рассмотрим параболу с фокусом в произвольной точке P описанной окружности треугольника ABC , касающуюся сторон треугольника.

Доказать, что прямая Симсона (*), построенная для точки P , совпадает с касательной к этой параболе в ее вершине.

J. M. Feld

86. Взаимно-однозначное соответствие между точками замкнутого и открытого интервалов. Установить взаимно-однозначное соответствие между точками открытого интервала $0 < x < 1$ и точками замкнутого интервала $0 \leq x \leq 1$.

Martin Rosenman

87. Вычисление определителя. Доказать, что определитель матрицы n -го порядка с элементами $a_{ij} = |i - j|$ равен $(-1)^{n-1} (n-1) 2^{n-2}$.

Raphael Robinson

88. Разложение на множители. Разложить многочлен $x^8 + 98x^4y^4 + y^8$ в произведение двух многочленов с целочисленными коэффициентами.

E. B. Escott

89. Рекуррентное соотношение. Доказать, что при любых натуральных k

$$\varphi_k = \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!} = \frac{1}{2k-1} \binom{2k-1}{k}$$

— целые числа удовлетворяющие рекуррентному соотношению

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i \varphi_{n-i}.$$

Garrett Birkhoff

90. Многочлен, имеющий только вещественные корни. Доказать следующую теорему.

Если многочлен n -й степени $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ с вещественными коэффициентами имеет только вещественные корни, то:

а) правило Декарта позволяет точно определить число положительных и отрицательных корней многочлена $f(x)$;

б) из $a_r = 0$ ($n > r > 0$) следует неравенство $a_{r+1}a_{r-1} < 0$.

B. W. Jones

91. Два сравнения. Пусть p — простое число вида $4k + 3$, m — число квадратичных невычетов, меньших $p/2$.

Доказать, что

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (p-2) \equiv (-1)^{m+k} \pmod{p},$$

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (p-1) \equiv (-1)^{m+k+1} \pmod{p}.$$

Mannis Charosh

92. Сумма медиан n -симплекса. Доказать, что сумма медиан n -симплекса меньше суммы ребер симплекса, умноженной на $2/n$, и больше той же суммы, умноженной на $(n+1)/n^2$, причем оба неравенства неумлучшаемы.

Raphael Robinson

93. Определитель из сумм общих делителей двух чисел. Пусть $S(i, j)$ — сумма общих делителей чисел i и j .

Доказать, что

$$\begin{vmatrix} S(1, 1) & S(1, 2) & \dots & S(1, n) \\ S(2, 1) & S(2, 2) & \dots & S(2, n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S(n, 1) & S(n, 2) & \dots & S(n, n) \end{vmatrix} = n!$$

Melvin Dresher

94. Функциональное уравнение. Решить функциональное уравнение

$$f(x)f(-x) = c^2 = [f(0)]^2,$$

где $f(x)$ — однозначная положительная вещественная функция вещественного переменного x .

W. M. Whyburn

95. Решение системы уравнений в целых числах. Доказать, что существуют четыре различных набора целых чисел, удовлетворяющих уравнениям

$$x_1 + x_2 + x_3 = 54, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1406.$$

Разработать общий метод решения в целых числах аналогичной системы уравнений, в которых вместо 54 и 1406 стоят целые числа a и b .

E. P. Starke

96. Пес и его хозяин. Пес и хозяин оказались на противоположных берегах реки один напротив другого. Пес бросился в воду и поплыл, все время «держа курс» на хозяина, со скоростью, которая в стоячей воде составила бы 2 мили в час. Скорость течения реки постоянна. Хозяин заметил, что собаку перестало сносить течением, лишь когда она преодолела $\frac{2}{3}$ ширины реки, и что, переплывая реку, собака затратила на 5 минут больше времени, чем на преодоление расстояния, равного ширине реки, в стоячей воде.

Определить ширину реки.

J. B. Reynolds

97. Идемпотентный базис матриц n -го порядка. Найти такой базис h_{pq} матриц n -го порядка, каждый элемент которого — идемпотент и $h_{pq}h_{rs} = k_{pqr}h_{ps}$, где k_{pqr} — рациональное число.

J. H. M. Wedderburn

98. Произведение восьми последовательных целых чисел и четвертая степень целого числа. Доказать, что целая часть корня четвертой степени из произведения восьми последовательных целых чисел равна $x^2 + 7x + 6$, где x — наименьшее из восьми целых чисел. Пользуясь этим результатом, можно показать, что произведение восьми последовательных целых чисел не может быть четвертой степенью целого числа.

V. Thébault

99. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов. Доказать, что если квадратичную форму

$$\sum_{i,j=0}^n |i-j| x_i x_j,$$

где $n \geq 1$, привести к сумме квадратов вещественным линейным преобразованием, то коэффициент при одном из квадратов будет положительным, а коэффициенты при n остальных квадратах — отрицательными.

Raphael Robinson

100. Простые числа вида $3n + 1$. Пусть p — простое число вида $3n + 1$.

Доказать, что его можно представить в виде $p = A^2 + 27B^2$, где A и B — положительные целые числа в том и только в том случае, если число 2 есть кубический вычет по модулю простого числа p .

Bernard Friedman

101. Разложение на множители с рациональными коэффициентами. Определить значения A , при которых трехчлен $x^{12} + Ax^6y^6 + y^{12}$ допускает разложение на два многочлена шестой степени с рациональными коэффициентами.

E. B. Escott

102. Хорда, отсекающая сегмент минимальной площади. Определить положение хорды, совпадающей с нормалью к коническому сечению и отсекающей от него сегмент наименьшей площади.

R. E. Gaines

103. Измеримые множества. Пусть $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ — бесконечная последовательность измеримых множеств на отрезке (a, b) , таких, что $\text{mes}(E_n) \geq k > 0$ при $n = 1, 2, \dots$.

Можно ли утверждать, что всегда найдется бесконечная подпоследовательность индексов $1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_i < \dots$, для которой мера $E_{r_1} \cap E_{r_2} \cap \dots \cap E_{r_i} \cap \dots$ больше нуля?

J. D. Hill, H. J. Hamilton

104. Эллипс, проходящий через три заданные точки. Доказать, что полуоси эллипса, проходящего через точ-

ки, которые соответствуют комплексным числам a , b и c , и имеющего центр в точке $(a + b + c)/3$, равны

$$\frac{|a + \varepsilon^2 b + \varepsilon c|}{3} \pm \frac{|a + \varepsilon b + \varepsilon^2 c|}{3},$$

где $\varepsilon = (-1 + i\sqrt{3})/2$.

Frank Morley

105. Тождество. Доказать, что

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \cdot \frac{1}{(x-r)(x+r+1) \dots (x+r+n)} =$$

$$= \frac{2^n}{x(x+2)(x+4) \dots (x+2n)}.$$

Morgan Ward

106. Преобразование координат. Переходя от прямоугольной системы координат $OX_1Y_1Z_1$ к прямоугольной системе координат $OX_2Y_2Z_2$ (той же ориентации), мы получаем следующую матрицу направляющих косинусов:

	X_1	Y_1	Z_1
X_2	λ_1	μ_1	ν_1
Y_2	λ_2	μ_2	ν_2
Z_2	λ_3	μ_3	ν_3

с определителем, равным 1.

Доказать, что

$$\lambda_1 + \mu_2 + \nu_3 \geq -1.$$

C. J. Сое

107. Метод бесконечного спуска. Пользуясь методом бесконечного спуска Ферма, доказать, что число -3 является квадратичным невычетом по любому нечетному простому модулю p вида $3n + 2^1$.

Albert Whiteman

108. Вписанный и описанный треугольники. Пусть вершины вписанного в данную окружность треугольника

¹ Определение квадратичного невычета см. III.7. — Прим. ред.

совпадают с точками касания этой окружности со сторонами описанного вокруг нее треугольника.

Доказать, что произведение перпендикуляров, опущенных из любой точки окружности на стороны вписанного треугольника, равно произведению перпендикуляров, опущенных из той же точки на стороны описанного треугольника.

Mannis Charosh

109. Перестановки с повторениями. Сколькими способами можно расположить в ряд a_1 единиц, a_2 двоек, ..., a_n чисел n так, чтобы любому числу $(k+1)$ предшествовало по крайней мере одно число k ?

Raphael Robinson

110. Дорожное происшествие. Когда пассажирский поезд вынырнул из тоннеля, лица n ($n > 2$) пассажиров, ехавших в одном вагоне, оказались вымазанными в саже. Все n пассажиров обладают различной быстротой психической реакции. Предположим, что каждый пассажир

а) начинает смеяться, как только увидит испачканное сажей лицо соседа по вагону, и продолжает смеяться до тех пор, пока на лице того остаются следы сажи;

б) видит лица всех своих попутчиков;

в) обладает способностью логически мыслить;

г) стирает сажу со своего лица лишь после того, как путем логических умозаключений приходит к выводу о том, что его лицо испачкано сажей;

д) знает о том, что каждому из его попутчиков присущи качества, перечисленные в пунктах «а», «б», «в», «г».

Доказать, что каждый пассажир в конце концов сотрет сажу со своего лица.

A. A. Bennett

111. Разложения для π и $\ln 2$. Вывести следующие соотношения:

$$\pi = \frac{10}{3} - 24 \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} - \dots \right), \quad (a)$$

$$\pi = 3,15 -$$

$$- 360 \left(\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} + \dots \right), \quad (6)$$

$$\ln 2 = \frac{17}{24} - 12 \left(\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \dots \right), \quad (B)$$

$$\pi = \frac{64}{21} + 96 \left(\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} + \dots \right). \quad (r)$$

J. P. Ballantine

112. Делимость чисел. Даны $n + 1$ чисел $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$, каждое из которых не больше $2n$.

Доказать, что по крайней мере одно из них, например a_i , делится на какое-то другое число из того же набора (например, на a_j).

Paul Erdős

113. Неравенство между суммами расстояний от внутренней точки треугольника до его вершин и сторон. Из точки O внутри заданного треугольника ABC на его стороны опущены перпендикуляры OP, OQ, OR .

Доказать, что

$$OA + OB + OC \geq 2(OP + OQ + OR).$$

Paul Erdős

114. Две конгруэнтные параболы. В одной плоскости расположены две конгруэнтные параболы, имеющие общую ось и обращенные вершинами в одну и ту же сторону. Из произвольной точки наружной параболы к внутренней проведены две касательные.

Доказать, что часть плоскости, ограниченная касательными и заключенной между точками касания дугой внутренней параболы, имеет площадь, не зависящую от выбора точки на наружной параболе.

Norman Anning

115. Неравенство для трансверсалей треугольника. Дан треугольник ABC со сторонами $a > b > c$ и любая точка O внутри него. Пусть прямые AO, BO, CO пересекают стороны треугольника ABC в точках P, Q, R .

Доказать, что

$$OP + OQ + OR < a.$$

Paul Erdős

116. Корни характеристического уравнения симметрической матрицы. Найти условие равенства всех корней характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

вещественной симметрической матрицы $\{a_{ij}\}$.

Frank Irwin

117. Выпуклый многоугольник, порожденный простым невыпуклым многоугольником. Пусть задан любой простой невыпуклый многоугольник P . Построим наименьший выпуклый многоугольник P' , содержащий P . Многоугольник P' , кроме P , будет содержать некоторые дополнительные многоугольные участки. Отразив один из таких участков относительно соответствующей стороны, отсутствовавшей у исходного многоугольника P , получим новый многоугольник P_1 . Если он не выпуклый, то, повторив все построение сначала, получим многоугольник P_2 .

Доказать, что многоугольник P_n , полученный после некоторого числа n таких построений, выпуклый.

Paul Erdős

118. Неравенства для гиперболических функций. Доказать, что

а) при всех вещественных положительных x и всех вещественных $n > 1$ выполняется неравенство

$$\operatorname{sh}^{n+1} nx + \operatorname{ch}^{n+1} nx < \operatorname{ch}^n (n+1)x;$$

б) при $0 < n < 1$ и $x > 0$ знак неравенства изменится на обратный; неравенство переходит в равенство при $n = 0$ или $n = 1$, либо при $x = 0$.

J. S. Frame

119. Несобственный интеграл. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \ln^2 x \, dx.$$

M. E. Levenson

120. Два сравнения по модулю 71. Доказать, что

$$61! + 1 \equiv 0 \pmod{71}, \quad 63! + 1 \equiv 0 \pmod{71}.$$

Сформулировать и доказать также общее утверждение, частными случаями которого служат эти сравнения.

Hansraj Gupta

121. Треугольники с целочисленными сторонами. Найти все треугольники, длины сторон которых выражаются взаимно простыми целыми числами и один угол вдвое больше другого.

E. P. Starke

122. Дифференциальное уравнение. Решить дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

L. J. Adams

123. Обобщение теоремы Чевы. В треугольнике $A_1A_2A_3$ трансверсаль A_iD_i делит сторону A_jA_k в отношении $A_jD_i : D_iA_k = p_i : q_i$, где ijk — циклическая перестановка тройки чисел 1, 2, 3. Трансверсали A_iD_i и A_jD_j пересекаются в точке P_k .

Найти зависимость между двойным отношением

$$\frac{P_3P_2}{P_2A_1} : \frac{P_3D_1}{D_1A_1}$$

и величинами p и q . Доказать, что теорема Чевы (III.1) является частным случаем выведенной зависимости.

J. M. Feld

124. Определитель из степеней натуральных чисел. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \dots & n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^n & 3^n & \dots & n^n \end{vmatrix} =$$

$$= 1!2!3! \dots n! \left[\binom{n}{1} - \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \frac{1}{3} \binom{n}{3} - \dots \right.$$

$$\left. \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \binom{n}{n} \right].$$

J. Barinaga

125. Определитель из величин, обратных факториалам. Доказать, что при любом положительном целом k

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \cdots & \frac{1}{(2k+1)!} & \frac{1}{(2k+2)!} \\ 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{(2k)!} & \frac{1}{(2k+1)!} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(2k-1)!} & \frac{1}{(2k)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} = 0.$$

J. M. Field

126. Прямоугольники в квадрате, расчерченном на единичные клетки. Квадрат, подобно шахматной доске, разделен горизонтальными и вертикальными прямыми на n^2 единичных квадратов. Любые две пары горизонтальных и вертикальных прямых образуют прямоугольник (в частности, квадрат). По определению ширина любого прямоугольника меньше его длины или равна ей. Лишь один прямоугольник — исходный квадрат — имеет ширину n .

Доказать, что среди прямоугольников, образованных проведенными горизонтальными и вертикальными прямыми, имеется 2^3 прямоугольников шириной $n-1$, 3^3 прямоугольников шириной $n-2$, ..., n^3 прямоугольников шириной 1. Вывести отсюда формулу суммы кубов первых натуральных чисел

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

F. Morley

127. Обратные тригонометрические функции и числа Фибоначчи. Доказать, что

$$\operatorname{arcc} \operatorname{tg} 1 = \operatorname{arcc} \operatorname{tg} 2 + \operatorname{arcc} \operatorname{tg} 5 + \operatorname{arcc} \operatorname{tg} 13 + \operatorname{arcc} \operatorname{tg} 34 + \dots,$$

где последовательность аргументов арккотангенсов в правой части совпадает с последовательностью членов

с нечетными номерами ряда Фибоначчи и может быть определена рекуррентным соотношением

$$u_1 = 1; u_2 = 2, u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}, n \geq 2.$$

D. H. Lehmer

128. Аналитическая функция, определяемая рекуррентной последовательностью. Пусть $0, u_1, u_2, \dots$ — последовательность чисел, удовлетворяющих рекуррентному соотношению $u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n x^n}{n!}.$$

Доказать, что $f(x) = -e^{ax} f(-x)$.

D. H. Lehmer

129. Сопряженные гиперболы. На гиперболе $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ найти точку P , в которой касательная и нормаль к этой гиперболе совпадают соответственно с нормалью и касательной к сопряженной гиперболе $b^2x^2 - a^2y^2 = -a^2b^2$. Таким образом, если обе сопряженные гиперболы рассматривать как одну кривую $(b^2x^2 - a^2y^2)^2 - a^4b^4 = 0$, то можно построить прямоугольник, который одновременно является и вписанным в эту кривую, и описанным вокруг нее.

R. E. Gaines

130. Необычное умножение. В множестве всех положительных вещественных чисел новое «умножение» можно задать соотношением

$$[a, b] = a^b.$$

Найти все положительные рациональные числа, для которых такое умножение:

- 1) коммутативно: $[a, b] = [b, a]$;
- 2) ассоциативно: $[a, [b, c]] = [[a, b], c]$;
- 3) дистрибутивно справа и слева:

$$[(a+b), c] = [a, c] + [b, c], [c, (a+b)] = [c, a] + [c, b].$$

Oystein Ore

131. Функциональное уравнение. Пусть $f(t)$ — однозначная комплексная функция, удовлетворяющая при

всех вещественных значениях t и s функциональному уравнению

$$e^{iks}f(t) = f(t+s) - f(s), \quad (1)$$

где k — отличная от нуля вещественная постоянная.

Доказать, что

$$f(t) = C(e^{ikt} - 1) \cdot \frac{1}{ik} \quad (2)$$

(C — постоянная).

Примечание. При $k = 0$ функциональное уравнение (1) переходит в функциональное уравнение

$$f(t+s) = f(t) + f(s), \quad (1')$$

а функция (2) вырождается в линейную функцию

$$f(t) = Ct. \quad (2')$$

Известно, что функция (2') является решением уравнения (1') лишь при некоторых дополнительных предположениях относительно $f(t)$, например при ограниченности $f(t)$ в окрестности какой-нибудь точки (III.15). При $k \neq 0$ дополнительные предположения относительно $f(t)$ не требуются.

I. J. Schoenberg

132. Два неравенства для абсолютной величины функции. Дана функция вещественного переменного x

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{x}{4^n}.$$

Доказать, что при некоторой положительной не зависящей от x постоянной c_1 и $x > e$

$$|f(x)| < c_1 \ln \ln x. \quad (1)$$

Доказать также, что существуют последовательность $x_1 < x_2 < \dots \rightarrow \infty$ и не зависящая от x положительная постоянная c_2 , для которых

$$|f(x_v)| > c_2 \ln \ln x, \quad v = 1, 2, \dots \quad (2)$$

P. Turán

133. Максимум модуля функции комплексного переменного. Дана функция комплексного переменного z

$$f(z) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i - z}{|a_i - z|},$$

где a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — произвольно выбранные комплексные числа, такие, что изображающие их точки не лежат на одной прямой.

Доказать, что в любой области комплексной плоскости, не содержащей точек a_i , $|f(z)|$ достигает максимального значения на границе области.

E. Weiszfeld

134. Конечная последовательность не кратных друг другу чисел. Пусть $a_1 < a_2 < \dots < a_n < 2n$ — положительные целые числа, такие, что ни одно из них не делится ни на какой другой член последовательности.

Доказать, что $a_1 \geq 2^k$, где k определяется неравенствами $3^k < 2n < 3^{k+1}$. Эта оценка для a_1 неулучшаема.

Paul Erdős

135. Корни характеристического уравнения. Найти корни характеристического уравнения матрицы $V = \{v_{rc}\} = \{\varepsilon^{(r-1)(c-1)}\}$, где $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$, $r, c = 1, 2, \dots, n$.

F. A. Lewis

136. Система дифференциальных уравнений. Решить следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$U \frac{\partial W}{\partial x} + 2W \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$U \frac{\partial W}{\partial x} + 2W \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

W. Massey

137. Середина хорды. Пусть C — простая замкнутая спрямляемая кривая на плоскости и P — произвольная точка внутри C .

а. Доказать, что середина одной из хорд AB (концы A и B хорды принадлежат кривой C) совпадает с точкой P .

б. Останется ли в силе утверждение а, если кривая С неспрямляемая?

J. D. Hill

138¹. Неравенство для наименьшего общего кратного. Пусть $a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq 2n$ — конечная последовательность положительных целых чисел.

Доказать, что

$$\min [a_i, a_j] < 6 \left(\left[\frac{n}{2} \right] + 1 \right),$$

где $[a_i, a_j]$ — наименьшее общее кратное чисел a_i и a_j . Эту оценку для $\min [a_i, a_j]$ нельзя улучшить.

Paul Erdős

139¹. Неравенство для наибольшего общего делителя. Пусть $a_1 < a_2 < \dots < a_n < 2n$ — конечная последовательность положительных целых чисел.

Доказать, что

$$\max (a_i, a_j) > \frac{38n}{147} - c,$$

где c не зависит от n , а (a_i, a_j) означает наибольший общий делитель чисел a_i, a_j . Эту оценку для $\max (a_i, a_j)$ нельзя улучшить.

Paul Erdős

140. Радиус описанной гипersферы. Пусть $O, P_1, P_2, \dots, P_n$ — вершины симплекса в n -мерном пространстве. $OP_i = (a_{ii})^{1/2}$ и косинус угла между ребрами OP_i и OP_j равен $a_{ij}/(a_{ii}a_{jj})^{1/2}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$).

Доказать, что

$$r_n^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_{ii}a_{jj}A_{ij}}{4 \det (a_{ij})},$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в определителе $\det (a_{ij})$, r_n — радиус описанной гипersферы.

S. B. Townes

¹ Решения этих задач мне неизвестны. Не удалось их найти и в доступной литературе. — Прим. ред.

141. Неравенство для степенной функции. Пусть $0 \leq \alpha \leq x_1 \leq x_2$ и n — положительное целое число.

Доказать, что

$$x_2^{1/n} - x_1^{1/n} \leq (x_2 - \alpha)^{1/n} - (x_1 - \alpha)^{1/n}.$$

Arnold Dresden

142. Игра до победы. Двое играют в «орел или решка». До начала игры у одного из них было m монет, а у другого n и ставка равна одной монете. Игра продолжается до тех пор, пока один из участников не выиграет все монеты.

Определить, сколько раз в среднем им придется бросать монеты, прежде чем игра закончится.

E. R. Ott

143. Сечение, делящее пополам боковую поверхность и объем тетраэдра. Доказать, что можно провести плоское сечение, ограниченное тремя гранями тетраэдра, которое делит на две равные части боковую поверхность и объем любого тетраэдра. Доказать также, что плоскость этого сечения проходит через центр описанной сферы тетраэдра.

Victor Thébault

144. Делимость произведения n последовательных натуральных чисел на их сумму. Доказать, что произведение n последовательных натуральных чисел при нечетном n делится на их сумму, за исключением случая, когда число n простое, и среднее арифметическое данных чисел делится на n . Рассмотреть также случай, когда число n четно.

Victor Thébault

145. Число различных треугольников в правильном n -угольнике. Из вершин правильного n -угольника три выбраны в качестве вершин треугольника.

Доказать, что число существенно различных треугольников, которые можно построить таким способом, совпадает с ближайшим к $n^2/12$ целым числом.

Norman Anning

146. Факториал факториала факториала... факториала. Обозначим $[(n!)!]!$ через $n(!)^3$ (и так далее), $n(!)^0 = n$.

Доказать, что при $k \geq 2$

$$\frac{n(!)^k}{(n!)^{[n-1]!} [n!-1]! [n(!)^2-1]! \dots [n(!)^{k-2}-1]!} - \text{целое число.}$$

Simon Nowshowitz

147. Алгебраическое уравнение с рациональной левой частью. Найти все корни уравнения

$$\frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(x-1)^2} = \frac{(a^2 - a + 1)^3}{a^2(a-1)^2}.$$

V. W. Graham

148. Наименьший выпуклый многогранник, содержащий $n+2$ точек в n -мерном пространстве. Пусть $P_1, P_2, \dots, P_{n+2}$ — $n+2$ точки в n -мерном пространстве ($n \geq 2$), причем никакие три точки не лежат на одной прямой. Обозначим через $[P_{i_1}P_{i_2} \dots P_{i_s}]$ наименьший выпуклый многогранник, содержащий внутри себя точки $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_s}$.

Доказать, что при $n = 2$ и $n = 3$ всегда можно найти такие индексы i, k , при которых $[P_iP_k]$ не является ребром многогранника $[P_1P_2 \dots P_{n+2}]$, а при $n > 3$ это утверждение перестает быть верным.

Béla Sz.-Nagy

149. Собака на привязи. Собака сидит на веревке длиной L , перекинутой через забор высотой h с ровным верхом и прикрепленной с другой стороны забора в точке, отстоящей на расстояние a от верха забора ($L > h + a$).

Определить форму, размеры и площадь участка, по которому может бегать собака.

W. B. Campbell

150. Ханойская башня. На массивной подставке укреплено k колышков. На один из них надето n колец попарно различных размеров так, что размеры колец уменьшаются снизу вверх.

За какое наименьшее число перекладываний можно нанизать n колец на другой колышек, если за один раз с колышка на колышек разрешается переносить не более одного кольца, причем ни одно кольцо нельзя класть поверх кольца меньшего размера?

B. M. Stewart

151. Функциональный определитель с дробно-рациональными элементами.

Доказать, что

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{1-x} & 1 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 \\ \frac{x^2}{1-x^2} & \frac{x}{1-x} & 2 & 0 & 0 \dots & 0 \\ \frac{x^3}{1-x^3} & \frac{x^2}{1-x^2} & \frac{x}{1-x} & 3 & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{x^r}{1-x^r} & \frac{x^{r-1}}{1-x^{r-1}} & \cdot & \cdot & \dots & \frac{x}{1-x} \end{vmatrix} = \frac{r(r+1)}{r! x^2} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2) \dots (1-x^r)}.$$

Richard Bellman

152. Описанная окружность треугольника, образованного тремя касательными к параболы. Известно, что описанная окружность треугольника, образованного тремя касательными к параболы, проходит через фокус параболы¹.

Доказать, что диаметр d описанной окружности определяется соотношением $d \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = a$, где α, β, γ — углы, образованные касательными (сторонами треугольника) с осью OX (уравнение параболы $y^2 = 4ax$).

R. E. Gaines

153. Модуль непрерывности функции. Функция $f(x)$ определена следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

¹ См. решение задачи 85. При решении данной задачи это свойство можно не учитывать. — Прим. ред.

Доказать, что отношение $|f(x_1) - f(x_0)|/|x_1 - x_0|^\alpha$ ограничено при $0 \leq x_0 \leq 1$, $0 \leq x_1 \leq 1$ в том и только в том случае, если $\alpha \leq 1/2$.

J. H. Curtiss

154. Линия «погони». Хозяин собаки стоит на перекрестке двух взаимно перпендикулярных дорог, а его собака — на одной из дорог на расстоянии a от перекрестка. Поразмыслив, хозяин пускается в путь по другой дороге со скоростью v , а собака устремляется к нему со скоростью $2v$, направленной в каждый момент времени по прямой, соединяющей ее мгновенное положение с мгновенным положением хозяина.

Определить кривую, описываемую собакой (линию «погони»).

H. E. Tester

155. Неассоциативное умножение. Если не предполагать, что умножение ассоциативно, то из трех элементов a, b, c , не переставляя их, можно составить два произведения $(ab)c$ и $a(bc)$. Для четырех элементов a, b, c, d число произведений возрастет до $N_4=5$: $[(ab)c]d, [a(bc)]d, a[(bc)d], a[b(cd)], (ab)(cd)$.

Вывести общее выражение для числа N_i произведений из i элементов.

Oystein Ore

156. Отрезки прямых, делящие пополам периметр и площадь треугольника. Дан треугольник ABC с углами $A < B < C$.

Доказать, что в зависимости от того, какое из неравенств (или равенство)

$$1 - \frac{\sin A}{\sin B} \cong 2 \operatorname{tg}^2\left(\frac{A}{2}\right) \operatorname{tg}^2\left(\frac{B}{2}\right)$$

выполняется, существуют одна, две или три прямые, делящие пополам периметр и площадь треугольника ABC . Если $B = C$, то одна, две или три такие прямые существуют в зависимости от того, каким из трех соотношений $A \cong A_0$ связаны углы A и A_0 , где $\sin\left(\frac{A_0}{2}\right) = \sqrt{2} - 1$.

Otto Dunkel

157. Неравенства для логарифма. Доказать, что при вещественном или комплексном z , таком, что $|z| < 1$, справедливы неравенства

$$\frac{|z|}{1+|z|} \leq |\ln(1+z)| \leq \frac{|z|(1+|z|)}{|1+z|}.$$

H. S. Wall

158. Два треугольника. По данному треугольнику ABC построен другой треугольник $A'B'C'$ так, что AA' , BB' , CC' — отрезки высот исходного треугольника ABC и $AA'/BC = BB'/CA = CC'/AB = k$.

а. Доказать, что центры тяжести треугольников ABC и $A'B'C'$ совпадают.

б. При каком значении k у треугольников ABC и $A'B'C'$ совпадают углы Брокара¹?

в. Доказать, что при $k = \pm 1$ центры квадратов, построенных на сторонах треугольника $A'B'C'$ вовне или внутрь, совпадают с вершинами треугольника ABC .

V. Thébault

159. Симметрические функции. Пусть $y_1, y_2, \dots, y_m$ — алгебраически независимые симметрические многочлены относительно переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, причем степень y_i равна i . Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — произвольно заданный симметрический многочлен степени m относительно $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Доказать, что $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно представить в виде многочлена относительно $y_1, y_2, \dots, y_m$.

Esther Szekeres

160. Два треугольника. Пусть A', B', C' — центры квадратов $BCA_1A'_2$, $CAB_1B'_2$, $ABC_1C'_2$, построенных внутри на сторонах треугольника ABC с центром тяжести G и углом Брокара¹ V таким, что $\operatorname{ctg} V = 7/4$.

Доказать следующие утверждения:

а. Центры A'', B'', C'' квадратов, построенных внутри на сторонах треугольника $A'B'C'$, лежат на прямой, проходящей через точку G .

¹ Угол Брокара ω треугольника с углами A, B, C определяется из соотношения $\operatorname{ctg} \omega = \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C$. — Прим. ред.

б. Угол Брокара V' треугольника $A'B'C'$ удовлетворяет соотношению $\operatorname{ctg} V' = 2$.

в. Прямые, проходящие через вершины A, B, C исходного треугольника и середины отрезков $A_1A'_2, B_1B'_2, C_1C'_2$, параллельны.

г. Расстояние между центром описанной окружности треугольника ABC и точкой пересечения высот (ортоцентром) треугольника, ортоцентрического относительно треугольника ABC , равно одной восьмой периметра ортоцентрического треугольника.

V. Thébault

161. Сумма ряда. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)k]!}{(nk)!},$$

где k — любое целое число больше 1.

E. H. Clarke

162. Угол наклона и кривизна. Пусть $f(x)$ — многочлен степени n с различными вещественными корнями x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), λ_i — величина, обратная тангенсу угла наклона кривой $y = f(x)$ к положительной полуоси x в точке $x = x_i$, ρ_j ($j = 1, 2, \dots, n-1$) — алгебраический радиус кривизны кривой $y = f(x)$ в экстремальной точке, расположенной между x_j и x_{j+1} .

Доказать, что

- а) если $n > 1$, то $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0$;
- б) если $n > 2$, то $\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_{n-1} = 0$.

G. B. Van Schaack

163. Теоретико-числовая функция. Какой смысл имеет функция $f(n)$, получаемая из функции Эйлера $\varphi(n)$ [III. 8(15)] при замене всех знаков минус на знаки плюс, то есть

$$f(n) = n \left(1 + \frac{1}{p_1}\right) \left(1 + \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_k}\right)?$$

(Здесь $p_1, \dots, p_k$ — различные простые делители числа n .)

F. A. Lewis

164. Якобиан коэффициентов алгебраического уравнения n -й степени, вычисленный по его корням, и определитель Вандермонда от корней того же уравнения. Вычислить якобиан коэффициентов $c_n, c_{n-1}, \dots, c_1$ уравнения $x^n - c_1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n c_n = 0$ по его корням $x_1, x_2, \dots, x_n$, рассматривая их как независимые переменные.

J. H. M. Wedderburn

165. Числа с циклической перестановкой цифр. Найти n -значное число $N_0 = a_1 a_2 \dots a_n$ ($a_1 \neq 0$), при перестановке в конец которого k первых цифр ($k = 1, 2, \dots, n-1$) получаются числа (их всего $n-1$) $N_1 = a_2 a_3 \dots a_n a_1, N_2 = a_3 a_4 \dots a_n a_1 a_2, \dots, N_{n-1} = a_n a_1 a_2 \dots a_{n-1}$, каждое из которых кратно числу N_0 .

V. Thébault

166. Квадраты в квадрате. Два квадрата S_1 и S_2 расположены в единичном квадрате так, что не имеют общих точек.

Доказать, что сумма длин их сторон меньше 1.

Весьма вероятно, что если в единичном квадрате расположены $k^2 + 1$ квадратов, не имеющих попарно общих точек, то сумма длин их сторон меньше k .

P. Erdős

167. Треугольник и парабола. Дан треугольник ABC .

Доказать, что биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине C , сторона AB и перпендикуляр, восстановленный из ее середины, а также перпендикуляры, восстановленные к стороне AC из вершины A и к стороне BC из вершины B , совпадают с касательными к одной и той же параболе. Определить, где находится фокус этой параболы.

Robin Robinson

168. Факторизация дифференциального оператора. Дифференциальный оператор $D^2 + 1$ можно факторизовать многими способами, например представить в виде $(D + \operatorname{ctg} x)(D - \operatorname{ctg} x)$, $(\sec x \cdot D)(\cos x \cdot D + \sin x)$ или $(\sin x \cdot D + 2 \cos x)(D \operatorname{cosec} x)$.

Доказать, что наиболее общее представление дифференциального оператора $(D + a)^2 + b^2$ в виде произведения двух дифференциальных операторов первого по-

рядка с вещественными коэффициентами дается соотношением

$$(D+a)^2 + b^2 = r^{-1} \left[D+a - b \operatorname{tg}(bx+c) - \frac{r'}{r} \right] \times \\ \times r [D+a + b \operatorname{tg}(bx+c)],$$

где a, b, c — вещественные числа, r — дифференцируемая функция от x .

Orrin Frink, Jr.

169. Определитель клеточной матрицы. Пусть ϑI_n — квадратная матрица n -го порядка, на главной диагонали которой расположен элемент ϑ , а все внедиагональные элементы равны 0, A_n — квадратная симметрическая матрица n -го порядка, на главной диагонали которой расположен элемент a ; элементы двух малых диагоналей, параллельных главной и примыкающих к ней сверху и снизу, равны 1, а все остальные элементы равны 0.

Выразить определитель $2n$ -го порядка

$$\begin{vmatrix} \vartheta I_n & A_n \\ A_n & \vartheta I_n \end{vmatrix}$$

через определители матриц ϑI_n и A_n .

J. A. Greenwood

170. Минимум определителя. Пусть A — постоянная положительно определенная эрмитова матрица, а X — переменная неотрицательная эрмитова матрица.

Доказать, что минимальное значение определителя $|A+X|$ равно $|A|$ и достигается в том и только в том случае, если $X=0$.

Henry Scheffé

171. Постоянная Эйлера. I. Доказать, что постоянная Эйлера

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \ln n \right)$$

удовлетворяет соотношению

$$C = \sum_{r=2}^{\infty} (-1)^r \frac{g_r}{r}, \quad g_r = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}.$$

A. M. Glicksman

172. Постоянная Эйлера. II. Доказать, что постоянная Эйлера удовлетворяет соотношению

$$C = 2 \left(1 - \ln 2 - \frac{\tau_3}{3} - \frac{\tau_5}{5} - \dots \right), \quad \tau_r = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^r}.$$

Otto Dunkel

173. Треугольники с целочисленными сторонами и площадью. Рассмотрим треугольники со сторонами $x-1$, x , $x+1$, высотой h , опущенной на основание x , и площадью S , где x , h , S — целые числа. Шесть первых треугольников такого типа представлены в таблице:

n	h	x	S
0	0	2	0
1	3	4	6
2	12	14	84
3	45	52	1 170
4	168	194	16 296
5	627	724	226 974

Можно ли утверждать, что рекуррентные соотношения

$$h_{n+2} = 4h_{n+1} - h_n, \quad x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n, \quad S_{n+2} = 14S_{n+1} - S_n$$

порождают все треугольники рассматриваемого типа?

T. R. Running

174. Тождество с котангенсами. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — n различных комплексных чисел ($n > 1$), из которых никакие два не отличаются на величину, кратную π .

Доказать, что

$$\sum_{k=1}^n \prod_{l=1, l \neq k}^n \operatorname{ctg}(a_k - a_l) = \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Arnold Dresden

175. Еще одно тождество с котангенсами. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — n различных комплексных чисел ($n > 1$),

из которых никакие два не отличаются на величину, кратную π .

Доказать, что

$$\sum_{j=1}^n \operatorname{ctg} a_j \prod_{i=1, i \neq j}^n \operatorname{ctg} (a_j - a_i) + (-1)^n \prod_{i=1}^n \operatorname{ctg} a_i = \sin \frac{(n+1)\pi}{2}.$$

Arnold Dresden

176. Эллипс и экстремальные треугольники. Доказать, что все вписанные в данный эллипс треугольники, центр тяжести которых совпадает с центром эллипса, равновелики и имеют максимальную площадь среди всех вписанных треугольников.

Доказать также, что все описанные вокруг данного эллипса треугольники, центр тяжести которых совпадает с центром эллипса, равновелики и имеют минимальную площадь среди всех описанных треугольников.

E. P. Starke

177. Точный квадрат. Найти основание системы счисления меньше 100, в которой число 2101 было бы точным квадратом.

V. Thébault

178. Точки и прямые. а. Пусть множество из n точек обладает тем свойством, что на прямой, проходящей через любые две из них, обязательно лежит какая-нибудь третья точка из того же множества.

Доказать, что все n точек лежат на одной прямой.

б. Даны n точек, не лежащих на одной прямой. Через каждые две из них проведем прямую.

Доказать, что среди проведенных прямых не меньше n различных.

P. Erdős

179. Интеграл с гамма-функцией. Доказать, что

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\Gamma(x)} = \int_0^1 \left[1 + \frac{e}{x} - \frac{e}{1!(x+1)} + \frac{e}{2!(x+2)} - \dots \right] \frac{dx}{\Gamma(x)}.$$

Richard Bellman

180. Алгебраическое тождество и разбиение числа на слагаемые. Доказать, что при $0 \leq x < 1$

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{2n-1}) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k(k+1)/2}}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^k)}},$$

и дать этому тождеству истолкование в духе заголовка.

H. S. Wall

181. Неравенство между линейными элементами треугольника. Пусть r — радиус вписанной окружности, R — радиус описанной окружности и m — наибольшая высота треугольника, внутренние углы которого не превосходят 90° .

Доказать, что $r + R \leq m$.

P. Erdős

182. Показательная функция как отношение двух бесконечных произведений. Доказать, что

$$e^x = \frac{(1-x^2)^{1/2} (1-x^3)^{1/3} (1-x^5)^{1/5} \dots}{(1-x) (1-x^6)^{1/6} (1-x^{10})^{1/10} \dots}, \quad |x| < 1,$$

где показатели степеней в числителе — натуральные числа, разлагающиеся в произведение нечетного числа неповторяющихся простых сомножителей, а показатели степеней в знаменателе — единица и натуральные числа, разлагающиеся в произведение четного числа неповторяющихся простых сомножителей.

Richard Bellman

183. Распределение простых чисел. Пусть $a_1 < a_2 < \dots < a_x \leq n$ — произвольная последовательность таких положительных целых чисел, ни одно из которых a_i не является делителем произведения других.

Доказать, что тогда $x \leq \pi(n)$, где $\pi(n)$ — число простых чисел, не превышающих n .

P. Erdős

184. Равнобочная гипербола и окружность. Дана равнобочная гипербола H и окружность P , проходящая через центр ω гиперболы H .

Доказать, что бесконечно много треугольников, вписанных в гиперболу H и одновременно описанных вокруг окружности P , существует в том и только в том случае, если центр O окружности P лежит на гиперболе H . Найти огибающую сторон этих треугольников.

V. Thébault

185. Углы, опирающиеся на стороны правильного многоугольника. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — вершины правильного многоугольника, а O — любая точка внутри него.

Доказать, что по крайней мере один из углов A_iOA_i удовлетворяет неравенствам

$$\pi \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq \angle A_iOA_i \leq \pi.$$

P. Erdős

186. Алгебраическое соотношение между тремя рядами. Даны три степенных ряда:

$$\begin{aligned} f &\equiv z - \frac{z^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{z^9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} - \frac{z^{13}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 13} + \dots, \\ g &\equiv \frac{z^3}{2 \cdot 3} - \frac{z^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{z^{11}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 11} - \\ &\quad - \frac{z^{15}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 15} + \dots, \\ h &\equiv \frac{z^2}{1 \cdot 2} - \frac{z^6}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{z^{10}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10} - \\ &\quad - \frac{z^{14}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 14} + \dots \end{aligned}$$

Доказать, что $f^2 + g^2 = 2h$.

Morgan Ward

187. Игра в 14. Каждый посетитель универсального магазина, уплатив 10 центов, может принять участие в игре и в случае выигрыша получает право выбрать любой товар на сумму 1 доллар. Игра состоит в следующем. Играющий бросает 5 раз по 10 игральных костей, назвав заранее любое число очков от 1 до 6. Выигрывает тот, у кого названное число очков выпадает на гранях костей не менее 14 раз. Правила игры дают играющему одно преимущество: какое бы число очков ни выпало на

большинством граней при первом бросании, играющий может объявить его задуманным.

Вычислить вероятность выигрыша.

B. M. Stewart

188. Определитель из степеней наибольших общих делителей пар чисел. Доказать, что

$$D(n) = \begin{vmatrix} (1, 1)^\lambda & (1, 2)^\lambda & \dots & (1, n)^\lambda \\ (2, 1)^\lambda & (2, 2)^\lambda & \dots & (2, n)^\lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n, 1)^\lambda & (n, 2)^\lambda & \dots & (n, n)^\lambda \end{vmatrix} = \\ = (n!)^\lambda \left(1 - \frac{1}{2^\lambda}\right)^{[n/2]} \left(1 - \frac{1}{3^\lambda}\right)^{[n/3]} \left(1 - \frac{1}{5^\lambda}\right)^{[n/5]} \dots,$$

где (i, j) означает наибольший общий делитель чисел i, j , $[k]$ — целая часть числа k .

R. C. Buck

189. Функция Мёбиуса и элементарные симметрические функции. Две симметрические функции $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $S(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от n неотрицательных целых чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ определены следующим образом:

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv M'(x_1) M'(x_2) \dots M'(x_n),$$

где

$$M'(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{при } x_i = 0, \\ -1 & \text{при } x_i = 1, \\ 0 & \text{при } x_i > 1, \end{cases}$$

а

$$S(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 1 + \sum_{j=1}^n j \sigma_j(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где $\sigma_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — j -я элементарная симметрическая функция от $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Доказать, что сумма $\sum M(x_1 - b_1, x_2 - b_2, \dots, x_n - b_n)$ $S(b_1, b_2, \dots, b_n)$ равна числу положительных целых чисел в наборе $x_1, x_2, \dots, x_n$ и равна 1, если $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, причем суммирование проводится по всем целым числам b_i , удовлетворяющим неравенствам $0 \leq b_i \leq x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

E. T. Bell

190. Перестановки и разбиения. Пусть P_n^r — число перестановок из n элементов, представимых в виде произведения r циклов, не имеющих общих элементов (например, $P_4^2 = 11$), а Q_n^r — число различных разбиений n отличных друг от друга элементов на r классов.

Доказать, что

$$P_n^1 x + P_n^2 x^2 + \dots + P_n^n x^n = x(1+x)(2+x) \dots (n-1+x), \quad (a)$$

$$Q_n^1 x + Q_n^2 x(x-1) + \dots + Q_n^n x(x-1) \dots (x-n+1) = x^n. \quad (б)$$

G. Pólya

191. Факториалы и неотрицательные целые числа. Доказать, что при $n \geq 0$

$$\sum_{t=0}^n (-1)^{n+t} \frac{t^{n+4}}{t!(n-t)!} = \frac{(n+4)(n+3) \dots n}{6!8} [15n^3 + 30n^2 + 5n - 2],$$

причем правая и левая части тождества — неотрицательные целые числа. Если n — отрицательное целое число, то правая часть тождества — целое число. Какой смысл можно придать тождеству в этом случае?

Otto Dunkel

192. Матрицы с максимальным и минимальным следом. Рассмотрим множество матриц $n \times n$, элементы которых — положительные целые числа или нули. Пусть r_i — сумма элементов i -й строки ($i = 1, 2, \dots, n$), c_j — сумма элементов j -го столбца ($j = 1, 2, \dots, n$).

Чему равны максимум и минимум суммы членов, стоящих на диагонали (максимальный и минимальный следы) матриц с заданными неотрицательными r_i и c_j , удовлетворяющими условию

$$\sum_{i=1}^n r_i = \sum_{j=1}^n c_j?$$

T. W. Anderson, Jr.

193. Полет в ветреную погоду. Самолет, летящий с постоянной линейной скоростью, описывает в горизонтальной плоскости заданную замкнутую траекторию.

Доказать, что в безветренную погоду самолет находится в пути меньше, чем в том случае, когда дует ветер с любой постоянной по величине и направлению скоростью.

T. H. Matthews

194. Отсутствие решений в целых числах. Пусть a, b, c — целые числа, причем $b \neq 0$, d и f — соответственно наибольшие общие делители чисел a, b и c, b .

Доказать, что если

$$a \not\equiv \pm d \pmod{b}, \quad c \not\equiv \pm f \pmod{b},$$

то существует бесконечно много целых чисел k , для которых уравнение

$$ax + bxy + cy = k$$

не имеет решений в целых числах.

A. L. Putnam

195. Рациональные решения тригонометрического уравнения. Уравнение

$$\cos \pi x + \cos \pi y + \cos \pi z = 0, \quad 0 \leq x \leq 1/2 \leq y \leq z \leq 1,$$

допускает тривиальные решения $y = 1/2, z = 1 - x$ и $y = 2/3 - x, z = 2/3 + x$. Кроме того, оно имеет нетривиальное решение $x = 1/5, y = 3/5, z = 2/3$.

Доказать, что это тригонометрическое уравнение не имеет других решений в рациональных числах.

H. S. M. Coxeter

196. Сравнение по модулю x . Дано целое число $x \leq n^2/4$, не имеющее простых делителей больше n .

Доказать, что

$$n! \equiv 0 \pmod{x}.$$

P. Erdős

197. Перестановка членов ряда и бесконечного произведения. Пусть заданы два натуральных числа p и q . Оп-

ределим ряд $S_{p,q}$ и бесконечное произведение $P_{p,q}$ соотношениями

$$S_{p,q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2p} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \dots - \frac{1}{2q+1} +$$

$$+ \frac{1}{2p+2} + \dots + \frac{1}{4p} - \frac{1}{2q+3} - \dots - \frac{1}{4q+1} + \dots,$$

$$P_{p,q} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots$$

$$\dots \left(1 + \frac{1}{2p}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \dots$$

$$\dots \left(1 - \frac{1}{2q+1}\right) \left(1 + \frac{1}{2p+2}\right) \dots$$

Ряд $S_{p,q}$, в котором группы, состоящие из p положительных членов, чередуются с группами, состоящими из q отрицательных членов, мы получим, переставив члены хорошо известного ряда

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots = S_{1,1} = 1 - \ln 2,$$

а бесконечное произведение $P_{p,q}$ — переставив сомножители бесконечного произведения

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \dots = P_{1,1}.$$

Доказать прямыми выкладками, что $P_{p,q} = (p/q)^{1/2}$, и вывести из этого известное соотношение

$$S_{p,q} - S_{1,1} = \ln(p/q)^{1/2}.$$

Г. Рóлыа

198. Числовые ряды и показатели, принадлежащие произвольно заданному классу целых чисел. Найти последовательность вещественных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$,

таких, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ расходится,

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^5$ сходится и так далее.

Более общая задача. Пусть C — произвольно заданный (конечный или бесконечный) класс положительных целых чисел,

Доказать, что всегда можно выбрать последовательность вещественных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, для которой при $l = 1, 2, \dots$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{2l-1}$ сходится или расходится в зависимости от того, принадлежит или не принадлежит число l классу C .

G. Pólya

199. Последовательные простые числа. Пусть $p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots$ — последовательные простые числа.

Доказать, что число

$$\frac{p_n!}{p_n(p_n+1) \dots (p_{n+1}-1)}$$

— всегда целое за исключением того случая, когда $p_n = 3$.

Paul Erdős

200. Разложение биномиального коэффициента по тригонометрическим функциям. Доказать, что биномиальный коэффициент можно представить в виде

$$\frac{N!}{\left(\frac{N+x}{2}\right)! \left(\frac{N-x}{2}\right)!} = \frac{2^N}{N} \sum_{m=1}^N \left(\cos \frac{m\pi}{N}\right)^N \cos \frac{m\pi x}{N},$$

— $N < x < N$

W. J. Taylor

201. Вероятность пустынной дороги. На прямолинейном участке дороги длиной a находятся n человек. Какова вероятность P того, что расстояние между любыми двумя «соседями» не меньше b ?

R. E. Gaines

202. Уточнение неравенства треугольника. Пусть x_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) — последовательность векторов в трехмерном евклидовом пространстве, такая, что $|x_n| > \delta$, где δ — любое заданное положительное число, а $|x_i|$ — длина вектора x_i .

Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (|x_n| + |x_0| - |x_n + x_0|) = 0$$

в том и только в том случае, если существует последовательность положительных скаляров a_n , для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n x_n - x_0| = 0.$$

Tibor Rado

203. Удлиняются ли графики? Пусть $a_1, a_2, a_3, \dots$ — последовательность вещественных чисел и L_n — длина той части графика функции

$$f_n(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx,$$

которая заключена в интервале $-\pi \leq x \leq \pi$. Верно ли, что $L_1 \leq L_2 \leq L_3 \leq \dots$.

R. P. Agnew

204. Теорема о среднем значении. Пусть $a < b$ — заданные числа и $f(x)$ — непрерывная, неотрицательная монотонно возрастающая функция, определенная на интервале $a \leq t \leq b$. По теореме о среднем значении при любом $p > 0$ существует только одно число x_p ($a \leq x_p \leq b$), такое, что

$$f^p(x_p) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^p(t) dt.$$

Найти $\lim_{p \rightarrow \infty} x_p$.

Herbert Robbins

205. Булевы кольца. Стоун называет кольцо «булевым», если все элементы кольца удовлетворяют соотношению $x^2 = x$.

Доказать, что кольцо, все элементы которого удовлетворяют соотношениям $x^2 = \pm x$, является либо булевым, либо прямой суммой булева кольца и поля вычетов по модулю три.

Irving Kaplansky

206. Выпуклые многогранники. Доказать следующие две теоремы аффинной трехмерной геометрии.

а. Если все грани выпуклого многогранника — параллелограммы, то число их равно произведению двух последовательных чисел.

б. Если каждая грань выпуклого многогранника обладает центром симметрии, то и весь многогранник обладает центром симметрии.

H. S. M. Coxeter

207. Заблудившийся охотник. В одном мало изученном уголке Земли, известном под названием Дикая область, заблудился охотник. Правда, у него был с собой наручный компас и вдали, на вершинах двух холмов, виднелись огни — там находились хижины A и B каких-то бродяг. Азимуты направлений на A и B из точки O , где жил сам охотник, он помнил. Дойдя до точки C , охотник измерил азимуты направлений на точки A и B , затем, перейдя в расположенную неподалеку от C точку D , он измерил азимуты направлений в точки A , B и C . Охотнику почему-то казалось, что эти семь азимутов позволяют ему определить направление, ведущее к дому, то есть азимут направления из D в O .

Доказать, что в случае общего положения точек O , A , B , C , D задача охотника допускает решение, если у него есть либо математические таблицы, либо линейка (в последнем случае охотник может использовать в качестве транспорта картушку компаса). Описать исключительные случаи и убедиться, что охотник и здесь может найти дорогу домой, хотя, возможно, и не самую короткую.

B. M. Stewart

208. Верхняя грань членов разложения бинома. Из теории вероятностей известно, что при фиксированном значении x , удовлетворяющем неравенствам $0 < x < 1$, наибольший из $n+1$ членов $\binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r}$ ($r = 0, 1, \dots, n$) при $n \rightarrow \infty$ асимптотически равен $\frac{1}{\sqrt{2enx(1-x)}}$.

Доказать, что при всех целых n и r , удовлетворяющих неравенствам $n \geq 1$, $0 \leq r \leq n$, и любых значениях $0 < x < 1$ выполняется неравенство

$$\binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} < \frac{1}{\sqrt{2enx(1-x)}}.$$

Это неравенство неулучшаемо в том смысле, что числитель его правой части нельзя заменить ни на какое число меньше 1.

Fritz Herzog

209. Ортогональные наборы целых чисел. Пусть a, b, c, R — целые числа, удовлетворяющие соотношению $a^2 + b^2 + c^2 = R^2$. Решить в целых числах систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ ax + by + cz = 0. \end{cases}$$

Norman Anning

210. Верхняя грань интеграла. Доказать, что

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_n^{\infty} w(t) e^{-t} dt < \left(\frac{2}{e}\right)^n,$$

где t — вещественная переменная, n — положительное целое число и $w(t) = (t-1)(t-2)\dots(t-n+1)$.

C. D. Olds

211. Игра на совпадение чисел. На поверхности стола последовательно выписаны целые числа от 1 до n , каждое из них — на одном из n кружков. Кружки повернуты вверх оборотной стороной так, что играющим не видны написанные на кружках числа — номера кружков. Каждый играющий, дождавшись своей очереди, накрывает наугад кружками все числа, написанные на столе. Затем кружки переворачивают и подсчитывают очки. Играющий получает число очков, равное числу кружков, номера которых совпали с накрытыми ими числами.

Найти вероятность того, что номера k из n кружков совпали с накрытыми этими кружками числами.

Vladimir Karapetoff

212. Определение фальшивой монеты при помощи взвешиваний. Чему равно наибольшее число A_n монет одинакового достоинства, из которых при помощи n взвешиваний на рычажных весах без гирь можно выделить фальшивую монету и определить, тяжелее она или легче полноценных? Известно, что фальшивая монета одна.

N. J. Fine

213. Определенный интеграл. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2} dx}{\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2}.$$

H. F. Sandham

214. Непрерывность по Чезаро. Пусть $\{x_n\} \xrightarrow{C} \alpha$ означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n = \alpha$. Функция $f(x)$ называется непрерывной по Чезаро в точке $x = \alpha$, если из соотношения $\{x_n\} \xrightarrow{C} \alpha$ следует соотношение $f(x_n) \xrightarrow{C} f(\alpha)$.

Доказать, что функция $f(x) = Ax + B$ непрерывна по Чезаро при любом значении x и что функция, непрерывная в смысле Чезаро, хотя бы при одном значении $x = \alpha$, имеет вид $f(x) = Ax + B$.

Herbert Robbins

215. Разложение положительного целого числа в произведение целых сомножителей. Пусть m — положительное целое число, простые делители которого не превосходят числа n , и $m \leq n^{(k+1)/2}$.

Доказать, что m можно представить в виде произведения k целых чисел, каждое из которых не превосходит числа n , а показатель степени $(k+1)/2$ — наилучший из возможных.

Paul Erdős

216. Объем симплекса как функция длин его ребер. Если две точки перенумерованы и $\overline{12}$ означает расстояние от точки 1 до точки 2, то

$$\begin{vmatrix} 0 & \overline{12}^2 & 1 \\ \overline{21}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2L^2,$$

где L — длина отрезка, концы которого совпадают с точками 1 и 2.

Обобщить приведенное соотношение на случай треугольника и тетраэдра, показав, что соответствующие определители равны $-16S^2$ и $288V^2$, где S — площадь треугольника, а V — объем тетраэдра.

J. H. Butchart

217. Области, в которых модули двух многочленов не превосходят единицы. Пусть $f(z) = z^n + \dots + a_n$,

$g(z) = z^m + \dots + b_m$ — два многочлена; A — область комплексной плоскости, в которой $|f(z)| \leq 1$, B — область комплексной плоскости, в которой $|g(z)| \leq 1$.

Доказать, что область B не может быть собственным подмножеством области A .

Paul Erdős

218. Определитель, делящийся на $(x-1)^{n^2}$. Доказать, что определитель

$$\begin{vmatrix} (x-1)/1 & (x^2-1)/2 & \dots & (x^n-1)/2 \\ (x^2-1)/2 & (x^3-1)/3 & \dots & (x^{n+1}-1)/(n+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x^n-1)/n & (x^{n+1}-1)/(n+1) & \dots & (x^{2n-1}-1)/(2n-1) \end{vmatrix}$$

равен $A(x-1)^{n^2}$, где A — коэффициент, не зависящий от x .

Irving Kaplansky, D. C. Lewis

219. Диатомическая последовательность Штерна. Написав подряд две единицы, вставим между ними двойку. Затем между любыми двумя числами, сумма которых равна 3, впишем тройку, между любыми двумя числами, сумма которых равна 4, — четверку и так далее.

Доказать, что число n окажется вписанным ровно $\varphi(n)$ раз ($n > 1$, $\varphi(n)$ — функция Эйлера¹).

H. D. Grossman

220. Инверсоры Поселье. Пусть $AXBZ$ — шарнирный ромб, вершины которого A и B соединены стержнями AO и BO равной длины с неподвижной точкой O , $OCZD$ — другой шарнирный ромб, YC и YD — стержни равной длины. (Вся конструкция в целом представляет собой как бы два наложенных друг на друга инверсора Поселье.)

Доказать, что, когда точка Y описывает окружность, точка X описывает некоторое коническое сечение.

H. F. Sandham

¹ По определению функция Эйлера $\varphi(n)$ равна числу членов конечной последовательности $1, \dots, n-1$, взаимно простых с n (см. III. 8). — Прим. ред.

221. Число, записываемое одними и теми же цифрами в двух различных системах счисления. Каким соотношением должны быть связаны числа N , B и B' для того, чтобы в системах счисления с основаниями B и B' число N было трехзначным и записывалось одними и теми же цифрами? Считая известным основание B одной системы счисления, найти число N и основание B' другой системы счисления. Пользуясь полученными результатами, рассмотреть случай, когда $B = 10$.

Victor Thébault

222. Мяч, прыгающий по наклонной плоскости. Из точки O наклонной плоскости, образующей угол A с горизонтальной плоскостью, брошен мяч. Начальная скорость мяча направлена в вертикальной плоскости, проходящей через прямую наибольшей крутизны наклонной плоскости, и образует угол B с направлением вдоль этой прямой, ведущим вверх по наклонной плоскости.

Считая наклонную плоскость гладкой, мяч абсолютно упругим, определить продолжительность t_n полета мяча по n -й дуге и координату x_n точки, в которой мяч ударяется о наклонную плоскость в конце n -й дуги. Вернется ли когда-нибудь мяч в точку O ? Совершит ли он хоть один полет по вертикали? Чему равно наибольшее значение x_n ?

W. B. Campbell

223. Сходимость ряда. Пусть

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) a_k$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |s_n - \sigma_n|^{\alpha} < \infty$$

при любом $\alpha > 0$.

Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Richard Bellman

224. Делимость факториалов. Хорошо известно, что число $(2n)!/n!(n+1)!$ — всегда целое.

Доказать, что при любом k существуют бесконечно много чисел n , для которых число $(2n)!/n!(n+k)!$ целое.

Paul Erdős

225. Семь точек на плоскости и равнобедренные треугольники. На плоскости даны 7 точек. Доказать, что среди них всегда найдутся три такие, которые служат вершинами неравнобедренного треугольника. Для 6 точек аналогичное утверждение выполняется не всегда. (Если точка B лежит на отрезке AC и $AB \neq BC$, то треугольник с вершинами в этих точках по определению не считается равнобедренным.)

Paul Erdős

226. Предел последовательности. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентным соотношением

$$x_n = \frac{(n-1)g}{1+(n-1)g} x_{n-1} + \frac{1}{1+(n-1)g} x_{n-2},$$

где x_0 и x_1 — известные числа, а g — заданная положительная величина.

Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

G. Pólya

227. Ортоцентр и треугольник. На плоскости даны четыре точки, не лежащие на одной прямой.

Доказать, что каждая из них совпадает с ортоцентром треугольника с вершинами в трех остальных точках в том и только в том случае, если выполняется соотношение

$$\pm 34 \cdot 42 \cdot 23 \pm 41 \cdot 13 \cdot 34 \pm 12 \cdot 24 \cdot 41 \pm 23 \cdot 31 \cdot 12 = 0,$$

где rs означает расстояние между точками s и r и знаки трех слагаемых отличаются от знака четвертого.

H. F. Sandham

228. Бесконечный ряд и бесконечное произведение. Доказать, что если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k x^{n_k}}{1+x^{n_k}} = x \prod_{k=1}^{\infty} (1+x^{n_k}), \quad |x| < 1,$$

то с точностью до порядка $n_k = 2^{k-1}$.

Richard Bellman

229. Доказательство континуум-гипотезы Г. Кантора?

Верно ли следующее доказательство гипотезы Г. Кантора о мощности континуума?

«Пусть X — множество всех бесконечных последовательностей нулей и единиц, а E — любое несчетное подмножество множества X . Каждому конечному набору $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, состоящему из нулей и единиц, сопоставим $E(a_1, a_2, \dots, a_k)$ — множество всех последовательностей $\{x_n\}$, принадлежащих множеству E , начальный отрезок которых совпадает с набором $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Поскольку $E = E(0) \cup E(1)$, по крайней мере одно из множеств $E(0)$ или $E(1)$ несчетно. Выберем $a_1 = 0$, если множество $E(0)$ несчетно, и $a_1 = 1$, если $E(0)$ счетно. Тогда независимо от того, какое из двух допустимых значений принимает a_1 , множество $E(a_1)$ несчетно. Пусть a_i уже определены при $i = 1, 2, \dots, k$ так, что множество $E(a_1, \dots, a_k)$ несчетно. Выберем $a_{k+1} = 0$, если множество $E(a_1, \dots, a_k, 0)$ несчетно, и $a_{k+1} = 1$, если множество $E(a_1, \dots, a_k, 0)$ счетно. Построенная бесконечная последовательность $\{a_1, a_2, \dots\}$ обладает тем свойством, что при любом k множество $E(a_1, \dots, a_k)$ несчетно. Обозначим E^* объединение всех $E(a_1, \dots, a_k)$ при $k = 1, 2, \dots$. Тогда E^* — подмножество (в действительности даже несчетное подмножество) множества E .

При некоторых положительных целых k справедливо утверждение о том, что множества $E(a_1, \dots, a_k, 0)$ и $E(a_1, \dots, a_k, 1)$ несчетны (более того, это утверждение должно в действительности выполняться для бесконечно многих значений k): в противном случае при достаточно большом k множество $E(a_1, \dots, a_k)$ вопреки построению не было бы несчетным. Пусть $k_1, k_2, \dots$ — целые числа, для которых множества $E(a_1, \dots, a_{k_i}, 0)$ и $E(a_1, \dots, a_{k_i}, 1)$ несчетны, и $y_n = x_{k_n} + 1$ для любой последовательности $\{x_1, x_2, \dots\}$ из E^* . Тогда $\{y_1, y_2, \dots\}$ — бесконечная последовательность нулей и единиц. Из способа получения чисел k_n следует, что любая последовательность нулей и единиц содержится среди последовательностей y , и, таким образом, последовательностям $\{x_1, x_2, \dots\}$ из E^* соответствует множество мощности континуума, а именно множество всех последовательностей y (заметим, что многим последовательностям x из E^* может соответствовать одна и та же последовательность y). Следовательно, мощность множества E^* (а значит, и

множества E) не может быть меньше мощности континуума, а поскольку E — подмножество множества X , мощность множества E^* не может быть больше мощности континуума. Таким образом, мы доказали, что каждое несчетное подмножество множества, обладающего мощностью континуума, также имеет мощность континуума.

Howard Eves, Paul Halmos

230. Оценка площади поверхности вращения. Пусть $a > 0$, $b > 0$ и $f(x)$ — нелинейная функция, принимающая значения $f(0) = 0$, $f(a) = b$ и такая, что при $0 \leq x \leq a$ справедливы неравенства $f(x) \geq 0$, $f''(x) \geq 0$.

Доказать аналитически неравенство

$$2\pi \int_0^a f(x) [1 + (f'(x))^2]^{1/2} dx < \pi b (a^2 + b^2)^{1/2}$$

(неравенство становится наглядным, если его правую и левую части интерпретировать как площади поверхностей вращения).

G. Pólya

231. Свойства частичной суммы гармонического ряда. Пусть p — простое число больше 3, а r/s — сумма первых p членов гармонического ряда:

$$\frac{r}{s} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p}.$$

Доказать, что p^3 делится на $r - s$.

C. F. Ripzka

232. Верхняя плотность числовой последовательности. Пусть $a_1 < a_2 < \dots$ — бесконечная последовательность целых чисел, верхняя плотность которой больше $1/k$. [Обозначим через $f(n)$ число членов последовательности, не превышающих n . Тогда верхней плотностью последовательности называется $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/n$.]

Доказать, что при подходящем выборе t уравнение

$$a_t = a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_r}, \quad 1 < r < k,$$

разрешимо. В действительности существует бесконечно много значений t , обладающих этим свойством.

Paul Erdős

233. Кратные иррациональных чисел. Пусть b — заданное положительное целое число, $m = 1, 2, \dots$ и q — иррациональное число, удовлетворяющее неравенствам $0 < q < 1$. Назовем интервал $(m, m+1)$ лакуной, если он не содержит числа, кратного $b+q$.

Доказать, что любой набор из b последовательных лакун содержит ровно одно число, кратное $1+b/q$.

S. H. Gould

234. Рациональные функции от $\cos^n \theta$ и $\sin^n \theta$. Доказать, что при любом положительном нечетном n функции $\cos \theta$ и $\sin \theta$ можно представить в виде рациональных функций от $\sin^n \theta$ и $\cos^n \theta$ с рациональными коэффициентами. Найти явные выражения для этих функций при $n = 3$.

I. S. Cohen

235. Расходящиеся ряды и сходящийся ряд. Построить два расходящихся ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ($a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq 0$, $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq 0$), таких, что если $c_k \leq \min(a_k, b_k)$, $c_k > 0$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ сходится.

Peter Ungar

236. Целые числа, в десятичной записи которых встречаются лишь нули и единицы. Дано произвольное целое число n . Доказать, что всегда можно найти число, делящееся на n , для записи которого в десятичной системе счисления необходимы лишь нули и единицы. Существует ли алгоритм для нахождения наименьшего из таких чисел?

M. S. Knebelman

237. Кривые, вдоль которых $\bar{z}$ совпадает с аналитической функцией от z . Функция комплексного переменного z , переводящая z в комплексно сопряженное число $\bar{z}$, нигде не аналитична. Тем не менее, если C — про-

извольная окружность или прямая, то существует функция $f(z)$, которая в каждой конечной точке линии C аналитична и равна $\bar{z}$. Доказать это утверждение. Рассмотреть также другие кривые, для которых существует функция, обладающая аналогичными свойствами.

E. P. Starke

238. Постоянная Эйлера. Доказать, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x^2 - \cos x}{x} dx = \frac{1}{2} C,$$

где C — постоянная Эйлера.

H. F. Sandham

239. Представление целых чисел в виде « k -я степень целого числа плюс простое число». Доказать, что при любом заданном целом $k > 1$ существует бесконечно много k -х степеней целых чисел, не представимых в виде суммы простого числа и k -й степени целого числа.

C. R. Phelps

240. Задача А. Эддингтона о четырех лжецах. В своей книге «Новые пути в науке»¹ Артур Эддингтон приводит следующую задачу: «Если A , B , C и D говорят правду лишь в одном случае из трех (независимо друг от друга) и A утверждает, что B отрицает, что C говорит, будто D лжец, то какова вероятность того, что D сказал правду?» Пользуясь методом исключения, Эддингтон нашел, что она равна $25/81$.

Доказать, что правильное значение вероятности события, о котором говорится в условии задачи, равно $13/81$ и что с той же вероятностью каждый из лжецов A , B и C сказал правду.

J. W. Campbell

241. Оценка снизу частичных сумм ряда Фурье. Функция $-\ln \left| \sin \frac{1}{2} x \right|$ разлагается в ряд Фурье вида

$$\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x + \dots$$

¹ A. S. Eddington, New Pathways in Science, Cambridge, 1935, p. 121.

Доказать, что частичные суммы этого ряда всегда не меньше -1 .

P. T. Bateman

242. Суммирование ряда. Вычислить

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{n^3}.$$

H. F. Sandham

243. Автоморфизмы групп. Доказать, что любая группа, содержащая более двух элементов, допускает автоморфизм, отличный от тождественного.

Irving Kaplansky

244. Непрерывные дроби и вычисление корней по методу Ньютона. Известно, что если непрерывная дробь

$$x = p - \frac{q}{p - \frac{q}{p - \frac{q}{\dots}}}$$

сходится, то ее значение совпадает с бóльшим по модулю корнем уравнения $x^2 - px + q = 0$. С другой стороны, вычисляя больший корень того же уравнения по методу Ньютона, мы получаем последовательные приближения вида

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - px_k + q}{2x_k - p} = \frac{x_k^2 - q}{2x_k - p}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Доказать, что если x_0 совпадает с первой подходящей дробью непрерывной дроби x , то $x_1, x_2, \dots$ также совпадают с подходящими дробями непрерывной дроби x и сходятся к тому же корню.

H. S. Wall

245. Разность кубов двух последовательных чисел. Доказать следующее утверждение: если разность кубов двух последовательных целых чисел представима в виде квадрата некоторого целого числа, то она представима в виде суммы квадратов двух последовательных целых чисел.

R. C. Lyness

246. Единичный элемент группы в виде произведения элементов последовательности. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — не обязательно различных элементов группы порядка n . Доказать, что существуют целые числа p и q , $1 \leq p \leq q \leq n$, для которых

$$\prod_{i=p}^q a_i = e,$$

где e — единичный элемент группы.

Leo Moser

247. Делители числа $x^{2^n} + y^{2^n}$. Доказать, что если x и y взаимно простые числа, то любой нечетный делитель числа

$$x^{2^n} + y^{2^n},$$

где n — положительное целое, имеет вид $2^{n+1}m + 1$.

Joseph Rosenbaum

248. Коэффициенты многочленов Бернулли второго рода. Пусть

$$\vartheta_n = \int_0^1 x(x-1) \dots (x-n+1) dx,$$

$$\varphi_n = \int_0^1 x(x+1) \dots (x+n-1) dx.$$

Доказать, что $(-1)^n \vartheta_n = \varphi_n - n\varphi_{n-1}$ и выразить φ_n через ϑ_n .

G. T. Williams

249. Формула для числа π . Доказать, что

$$1 + \left(\frac{1 + \frac{1}{2}}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{3} \right)^2 + \dots = \frac{17\pi^4}{360}.$$

H. F. Sandham

250. Абсолютная величина многочлена и его производной. Пусть $f(z) = z^n + \dots$ — многочлен степени n , A_f — замкнутая (не обязательно связная) область, в которой $|f(z)| \leq 1$.

Доказать, что в A_f всегда можно найти точку z_0 , в которой $|f'(z_0)| \geq n$ (равенство соответствует случаю, когда $f(z) = z^n$).

Paul Erdős

251. Суперпозиция функций Эйлера. Пусть k и x — положительные целые числа, $f_k^1(x) = k\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — функция Эйлера¹, и

$$f_k^j(x) = f_k^{j-1}[f_k^1(x)]$$

при $j = 2, 3, \dots$

Доказать, что при $k \leq 3$ последовательность $f_k^1(x)$, $f_k^2(x)$, ..., начиная с некоторого члена, содержит лишь одну и ту же повторяющуюся постоянную, а при $k \geq 4$, начиная с некоторого члена, монотонно возрастает.

V. L. Klee, Jr.

252. Лотерея. Мой приятель Моррис организовал в школе лотерею. Нескольким членам инициативной группы было поручено изготовить лотерейные билеты. Справившись со столь ответственным поручением, каждый из них сброшюровал билеты своей серии в книжечку, всего на сумму 12 шиллингов (билеты продавались по цене 1 пенс² за штуку). Школьник, вытянувший выигрышный билет, получил приз: несколько марок достоинством в 6 пенсов каждая. Когда я спросил у Морриса, сколько марок получил счастливчик, он ответил, что это я мог бы выяснить и без его помощи. Необходимо лишь иметь в виду, что, прежде чем назвать номер билета, на который пал выигрыш, все распространители лотерейных билетов собрались за круглым столом и каждый сообщил, на какую сумму он продал билеты и сколько билетов у него осталось. При этом выяснилось следующее:

а) все распространители продали различное число билетов;

б) число лотерейных билетов, оставшихся у каждого распространителя, равно произведению сумм (в шиллингах), вырученных от продажи билетов его ближайшими соседями по столу;

¹ См. примечание к условию задачи 219 и III.8. — *Прим. ред.*

² В 1 шиллинге 12 пенсов. — *Прим. перев.*

в) когда каждый из распространителей лотерейных билетов получил из собранных денег вознаграждение в размере 1 пенса, оставшаяся сумма в точности совпала со стоимостью марок, которые достались школьнику, выигравшему лотерею.

Сколько было распространителей лотерейных билетов и сколько билетов продал каждый из них?

R. C. Lyness

253. Бесконечные ряды и бесконечное произведение. Доказать следующее тождество:

$$1 + \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x^2}{(1-x)^2(1-x^2)^2} + \frac{x^3}{(1-x)^2(1-x^2)^2(1-x^3)^2} + \dots = \frac{1-x+x^3-x^6+x^{10}-\dots}{[(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots]^2}.$$

N. J. Fine

254. Уравнение Клеро. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение Клеро $y = px + f(p)$, где $p = y'$ и f — дифференцируемая функция.

Доказать, что если f' — монотонная функция, то особое решение уравнения Клеро имеет ровно одну общую точку с любым частным решением.

Albert Wilansky

255. Подмножество элементов группы. Пусть G — абелева группа и A — подмножество, содержащее n ее элементов и такое, что из $a \in A$ следует $a^{-1} \notin A$. Рассмотрим n^2 (не обязательно различных) элементов группы G вида $a_i a_j$, где a_i, a_j принадлежат подмножеству A .

Доказать, что не более $\binom{n}{2}$ этих элементов принадлежат подмножеству A .

Leo Moser

256. Бесконечные ряды и число π . Доказать, что

$$\frac{1}{(\operatorname{sh} \pi)^2} + \frac{1}{(2 \operatorname{sh} 2\pi)^2} + \frac{1}{(3 \operatorname{sh} 3\pi)^2} + \dots = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \dots \right) - \frac{11\pi^2}{180}.$$

H. F. Sandham

257. Обобщение теоремы Ферма. Пусть p — простое число больше 3 и $n = (2^{2^p} - 1)/3$.

Доказать, что $2^n - 2$ делится на n .

Paul Erdős

258. Ряд с иррациональной суммой. Пусть $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ — последовательность целых чисел, таких, что $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k/n_1 n_2 \dots n_{k-1} = \infty$.

Доказать, что сумма ряда $\sum_{i=1}^{\infty} 1/n_i$ иррациональна.

Paul Erdős

259. Биномиальные коэффициенты и целая часть числа. Доказать, что

$$\binom{n}{p} \equiv \left[\frac{n}{p} \right] \pmod{p},$$

где p — простое число, $\binom{n}{p}$ — число сочетаний из n по p , $[k]$ — целая часть числа k .

Доказать также, что если $[n/p]$ имеет делитель p^s , то $\binom{n}{p}$ делится на p^s .

Pedro A. Piza

260. Квадрат, вписанный в любую простую замкнутую кривую. Доказать, что на каждой простой замкнутой плоской кривой существуют четыре точки, которые могут служить вершинами квадрата.

Orrin Frink

261¹. Прямые Эйлера и окружность девяти точек. Дан треугольник ABC ; AA' , BB' и CC' — его высоты.

Доказать, что прямые Эйлера треугольников $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$ пересекаются в такой точке P окружности девяти точек, для которой один из отрезков PA' , PB' , PC' равен сумме двух других отрезков.

Victor Thébault

262. Естественная граница функции. Пусть θ — иррациональное число, $a = e^{i\theta\pi}$. Доказать, что естественной

¹ Удовлетворительное решение этой задачи мне неизвестно. — Прим. ред.

границей функции $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^n$ служит единичная окружность.

A. W. Goodman

263. Делимость членов бесконечной числовой последовательности. Пусть $a_1 < a_2 < \dots$ — бесконечная последовательность целых чисел. Доказать, что в ней существует либо бесконечная подпоследовательность, любые два члена которой не кратны друг другу, либо бесконечная подпоследовательность, каждый член которой кратен предыдущему.

Paul Erdős

264. Бесконечная числовая последовательность, в которой ни один член не делит другой. Пусть $a_1 < a_2 < \dots$ — бесконечная последовательность целых чисел. Доказать, что из последовательности $a_i + a_j$, $i=1, 2, \dots$, $j=1, 2, \dots$, всегда можно выбрать бесконечную последовательность, ни один элемент которой не делит другой.

Paul Erdős

265. Кривая, ограничивающая плоскую фигуру с наименьшим положением центра тяжести. Найти кривую, дуга которой длиной $l > 2a$, расположенная ниже оси x и соединяющая точки $(-a, 0)$ и $(a, 0)$, ограничивает снизу фигуру (верхней границей фигуры служит отрезок $[-a, a]$ оси x) с наименьшим расположением центра тяжести. Такую форму примет невесомая гибкая нить с концами, закрепленными в точках $(-a, 0)$, $(a, 0)$, если ее доверху (до оси x) наполнить «двумерной водой».

Orrin Frink

266. Функция, представляющая простые числа. Пусть R_{nk} — числа, определяемые соотношением¹

$$\frac{z(1-z^2)}{\sin \pi z} \prod_{k=2}^n \sin(\pi z/k) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} R_{nk} z^k.$$

¹ Запись соотношения подразумевает $n \geq 2$, но утверждение верно и при $n=1$, если при этом в левой части оставить $\frac{z(1-z^2)}{\sin \pi z}$. Это показывает, в частности, разумность соотношения $\prod_{i \in I} a_i = 1$, если множество индексов I пусто. — Прим. ред.

Доказать, что $\lim R_{nk}^{-1/k}$ совпадает с первым простым числом, которое больше n .

R. M. Redheffer

267. Числа Фибоначчи и числа Мерсенна. Последовательность $\{a\} = 3, 7, 47, 2207, 4870847, \dots$, используемую при проверке простых чисел Мерсенна, обычно задают соотношением $a_{n+1} = a_n^2 - 2, n \geq 1$.

Доказать, что ту же последовательность можно задать соотношением $a_k = F_{2k+1} / F_{2k} (k \geq 1)$, где F_s — числа Фибоначчи $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$.

D. H. Browne

268. Планета постоянной плотности. Сферическая планета, плотность которой в любой точке P зависит лишь от расстояния между точкой P и центром планеты, обладает следующим свойством. Если между двумя точками на поверхности планеты прорыть тоннель с идеально гладкими стенками, то время, за которое предмет, брошенный в тоннель, будет скользить от одного конца тоннеля до другого, не зависит от выбора точек на поверхности планеты.

Доказать, что плотность планеты постоянна.

R. J. Walker

269. Кольцо с делением. Элемент кольца x называется правым квазирегулярным, если существует элемент y того же кольца, такой, что $x + y + xy = 0$. Ясно, что в кольце с делением любой элемент, кроме -1 , является правым квазирегулярным.

Доказать обратное утверждение: если в кольце A каждый элемент, кроме одного, правый квазирегулярный, то A — кольцо с делением.

Irving Kaplansky

270. Ряд из целых частей. Доказать, что

$$n - 1 = \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{n + 2^{r-1} - 1}{2^r} \right]$$

для любого положительного целого числа n ($[k]$ означает, как обычно, целую часть числа k).

N. S. Mendelsohn

271. Задача Банаха о спичечных коробках. Эту задачу предложил проф. Гуго Штейнгауз. Известный польский математик Стефан Банах имел обыкновение носить в каждом из двух карманов пальто по коробку спичек. Всякий раз, когда ему хотелось закурить трубку, он выбирал наугад один из коробков и доставал из него спичку. Первоначально в каждом коробке было по n спичек. Но когда-то наступает момент, когда выбранный наугад коробок оказывается пустым.

Какова вероятность того, что в другом коробке осталось k спичек?

D. A. Darling

272. Бесконечное отношение. Доказать, что¹

$$\frac{2}{1} / \frac{5}{4} / \frac{8}{7} / \frac{11}{10} \dots = \sqrt{3}.$$

H. F. Sandham

273. Множество точек минимума. Функция $f(x, y)$ непрерывна на всей плоскости. На каждой окружности с центром в начале координат существуют точки, в которых $f(x, y)$ достигает минимума.

Связно ли множество всех точек минимума функции $f(x, y)$?

Albert Wilansky

274. Делители и кратные конечного набора чисел. Пусть $f(n; a_1, \dots, a_k)$ — число элементов в множестве положительных целых чисел $m \leq n$, являющихся либо делителями, либо кратными одного из чисел a_i ($1 < a_i \leq n$).

Доказать, что

$$f(n; a_1, a_2, \dots, a_k) \leq f(n; 2, 3, \dots, p_k),$$

где $2, 3, \dots, p_k$ — первые k простых чисел.

Paul Erdős

¹ Символ $a_1/a_2/a_3 \dots$ («бесконечное отношение») обозначает предел (если таковой существует) последовательности A_n , определяемой формулами

$$A_{2n} = \frac{a_1 a_3 \dots a_{2n-1}}{a_2 a_4 \dots a_{2n}}, \quad A_{2n+1} = \frac{a_1 a_3 \dots a_{2n+1}}{a_2 a_4 \dots a_{2n}}.$$

Прим. ред.

275. Постоянная Эйлера. Доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left[\frac{\ln n}{\ln 2} \right] = C,$$

где $[x]$ — целая часть числа x , а C — постоянная Эйлера (см. III. 12).

H. F. Sandham

276. Числовые множества, обладающие делительным свойством. Пусть S — множество положительных целых чисел. По определению множество S обладает *делительным свойством*, если любое его бесконечное подмножество содержит два различных числа, одно из которых является делителем другого.

Пусть $a_1 < a_2 < \dots$ — бесконечная последовательность положительных целых чисел, обладающая делительным свойством.

Доказать, что множество произведений вида

$$a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_k^{\alpha_k}, \alpha_i \geq 0$$

также обладает делительным свойством.

Paul Erdős

277. Кругосветный полет. Каждый самолет, входящий в некоторую группу, может служить заправщиком для любого другого самолета той же группы. Емкость топливных баков каждого самолета позволяет ему пролететь без дозаправки горючим одну пятую окружности Земли. Предполагается, что все самолеты летят с одинаковой постоянной скоростью относительно Земли и одинаково расходуют горючее; имеется лишь одна посадочная площадка; весь запас горючего хранится на базе и время заправки пренебрежимо мало.

Определить наименьшее число самолетов, необходимых для обеспечения кругосветного полета одного самолета и его благополучного возвращения на базу.

Free Jamison

278. Отрезки и многочлены. Дано некоторое множество прямолинейных отрезков, параллельных оси y и таких, что любые $n + 2$ из них пересекаются графиком некоторого многочлена степени n .

Доказать, что существует многоочлен степени n , график которого пересекает все отрезки.

Melvin Dresher

279. Последовательность целых чисел, ни одно из которых не делит другое. Пусть $a_1 < a_2 < \dots$ — бесконечная последовательность чисел с положительной верхней плотностью¹.

Доказать, что существует бесконечная подпоследовательность элементов этой последовательности, ни один из которых не делит другой (более того, существует бесконечная последовательность чисел $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots$, такая, что $\sum 1/a_{i_k} = \infty$ и ни одно из чисел a_{i_s} не делит другое).

Paul Erdős

280. Сумма чисел, обратных элементам конечного набора. Пусть $a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n$ — конечный набор таких положительных целых чисел, что наименьшее общее кратное любых двух из них больше n .

Доказать, что

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{a_i} < 2.$$

Paul Erdős

281. Тетраэдр с концентрическими вписанной и описанной сферами. Определить, какому условию должны удовлетворять две концентрические сферы для того, чтобы одну из них можно было вписать в тетраэдр, а другую описать вокруг того же тетраэдра. Построить тетраэдр, вписанный в одну сферу и описанный вокруг другой сферы.

Joseph Rosenbaum

282. Ступенчатая функция. Пусть $\vartheta(a, h)$ — наибольшее из чисел, удовлетворяющих условиям

$$0 < \vartheta < 1, (1), f(a+h) = f(a) + hf'(a + \vartheta h), \quad (2)$$

где $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$ и $\lambda(h) = [h\vartheta(0, h)]^{-1}$.

¹ Верхней плотностью последовательности различных целых чисел $\{a_n\}$ называется $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(n)}{n}$, где $N(n)$ — число членов последовательности, не превышающих n . — Прим. ред.

Доказать, что при $h \rightarrow 0$ величина $\lambda(h)$ стремится к бесконечности как ступенчатая функция. Иначе говоря, при любом заданном $\varepsilon > 0$ найдется такое число $H(\varepsilon)$, для которого при $|h| < H$ величина $\lambda(h)$ при некотором целом n отличается от $(n + 1/2)\pi$ меньше, чем на ε , то есть выполняется неравенство $|\lambda(h) - (n + 1/2)\pi| < \varepsilon$. При $h \rightarrow 0$ число $n \rightarrow \infty$.

Albert Wilansky

283. Последовательность синусов. При каких вещественных значениях x последовательность $f_n(x) = \sin 7^n \pi x$ сходится и к какому пределу?

Ky Fan

284. Равномерно ограниченные суммы. Пусть $((x)) = x - [x] - \frac{1}{2}$.

Доказать, что суммы

$$\sum_{n=1}^m ((2^n x + \frac{1}{2}))$$

равномерно ограничены.

N. J. Fine

285. Закон притяжения. По закону всемирного тяготения Ньютона, сила притяжения, с которой действуют друг на друга два тела, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. При этом однородная материальная сфера действует на точку, расположенную вне ее так, как если бы вся масса сферы была сосредоточена в ее центре.

Существуют ли какие-нибудь другие зависимости силы от расстояния, кроме ньютоновской $1/r^2$, обладающие тем же свойством?

R. J. Walker

286. Бесконечный ряд последовательных интегралов. Пусть $f_1(x)$ — функция, интегрируемая по Риману на интервале $0 \leq x \leq M$, и

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Доказать, что функция

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

определена и непрерывна на том же интервале, за исключением, быть может, точек разрыва исходной функции $f_1(x)$. Найти простое выражение для $\varphi(x)$.

E. P. Starke

287. Конечные последовательности нулей и единиц, содержащие все n -значные двоичные числа. Трехзначные отрезки конечной последовательности нулей и единиц 1110001011 позволяют получить все трехзначные двоичные числа, причем каждое число ровно один раз. При произвольно заданном положительном целом числе n аналогичную конечную последовательность нулей и единиц можно построить следующим образом. Выпишем сначала подряд n единиц. Затем, сдвигаясь каждый раз на один знак вправо, будем вписывать на вакантное место 0, если получающееся при этом n -значное двоичное число не встречалось нам раньше, и 1 в противном случае.

Доказать, что построенная таким способом последовательность из $2^n + n - 1$ знаков обладает таким же свойством, что и последовательность нулей и единиц, приведенная в начале задачи для случая $n = 3$.

Peter Ungar

288. Сумма r -х степеней делителей. Пусть $\sigma_r(n)$ означает сумму r -х степеней делителей положительного целого числа n .

Доказать, что

$$\sigma_r(n) \sigma_r(m) = \sum_{d|(n, m)} d^r \sigma_r(nm/d^2),$$

где d принимает значения, равные всем общим делителям чисел n и m .

Paul Bateman

289. Компоненты лемнискатного множества. Пусть

$$f(z) = \prod_{i=1}^n (z - z_i), \quad |z_i| \leq 1.$$

Рассмотрим множество точек комплексной плоскости, в которых $|f(z)| \leq 1$.

Доказать, что это множество состоит не более чем из $n-1$ компоненты.

Paul Erdős, W. H. Fuchs

290. Система линейных уравнений. Дано N чисел a_m , удовлетворяющих N линейным уравнениям

$$\sum_{m=1}^N \frac{a_m}{m+n} = \frac{4}{2n+1}, \quad n=1, 2, \dots, N.$$

Доказать, что

$$\sum_{m=1}^N \frac{a_m}{2m+1} = 1 - \frac{1}{(2N+1)^2}.$$

F. J. Dyson

291. Ограниченная сумма. Данное целое число k и комплексно-значная функция $f(n)$, определенная на множестве положительных целых чисел и такая, что $f(n_1) = f(n_2)$ при $n_1 \equiv n_2 \pmod{k}$, $|f(n)| \leq 1$ для всех n , $f(n) = 0$ при $k|n$ и $\sum_{n=1}^k f(n) = 0$.

Доказать, что

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n} \right| < \ln k.$$

Paul Bateman

292. Производная в точке максимума модуля. Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в единичном круге и на его границе ($|z| \leq 1$), z_0 — точка, в которой $|f(z)|$ достигает максимума на единичной окружности ($|z_0| = 1$).

Доказать, что $f'(z_0) \neq 0$.

Paul Erdős

293. Несобственный интеграл. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{e^x + 1} dx.$$

H. F. Sandham

294. Две последовательности целых частей. Пусть $f(n)$ и $g(n)$ — две последовательности натуральных чисел, заданные следующими тремя условиями:

- 1) $f(1) = 1$;
- 2) $g(n) = na - 1 - f(n)$, если a — целое число больше 4;
- 3) $f(n+1)$ — наименьшее натуральное число, отличное от $2n$ чисел $f(1), f(2), \dots, f(n); g(1), g(2), \dots, g(n)$.

Доказать, что существуют постоянные α и β , для которых

$$f(n) = [\alpha n], \quad g(n) = [\beta n].$$

Здесь $[x]$, как обычно, означает целую часть числа x .

К у F a n

295. Корни уравнения $\operatorname{tg} x = x$. Каждый положительный корень уравнения $\operatorname{tg} x = x$ можно представить в виде $x = (p + \frac{1}{2})\pi - \vartheta$, где p — любое неотрицательное целое число, а

$$\vartheta = C_0 \xi + C_1 \xi^3 + C_2 \xi^5 + \dots, \quad \text{где } \xi = \frac{1}{(p + \frac{1}{2})\pi}.$$

Коэффициенты $C_0, C_1, C_2, \dots$ — положительные рациональные числа.

Доказать, что при больших n коэффициент C_n можно представить в виде

$$C_n = 12^{-1/6} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \pi^{-2/3} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} (2n+1)^{-4/3} (1 + \omega_n).$$

При $n \rightarrow \infty$ величина ω_n стремится к нулю так, что записанный выше ряд для ϑ сходится даже при $p = 0$.

C. D. O l d s

296. Функции Эйлера $dl^{(n)}(x)$. Функции Эйлера $dl^{(n)}(x)$ определены соотношениями

$$dl^{(n)}(x) = \int_0^x dl^{(n-1)}(t) \frac{dt}{t}, \quad n \geq 2, \quad (1)$$

$$dl^{(1)}(x) = - \int_0^x \ln(1-t) \frac{dt}{t}. \quad (2)$$

Доказать, что при $|x| < \pi/2$

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n} [\operatorname{dl}^{(2n-1)}(1) - \operatorname{dl}^{(2n-1)}(-1)] x^{2n-1}, \quad (3)$$

$$\sec x = 1 + i \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+1} [\operatorname{dl}^{(2n)}(-i) - \operatorname{dl}^{(2n)}(i)] x^{2n}. \quad (4)$$

Carl Cohen

297. Распределение целых чисел специального вида. Пусть $a_1 = 2 \cdot 3$, $a_2 = 3 \cdot 5$, $a_3 = 5 \cdot 7$, ..., $a_k = p_k p_{k+1}$, где p_k — k -е простое число, $f(n)$ — число элементов в множестве целых чисел вида $\prod a_i^{\alpha_i}$ ($\alpha_i \geq 0$), не превосходящих n .

Доказать, что

$$f(n) = cn^{1/2} + o(n^{1/2}),$$

где $\frac{1}{2} < c < 1$.

Paul Erdős

298. Сходимость ряда. Найти все значения α и β , при которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \sin n^{\beta}$ сходится.

R. P. Voas, Jr., W. K. Hayman

299. Целые числа, имеющие общие множители с членами последовательности. Пусть a_1, a_2 — последовательность натуральных чисел, такая, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ расходится.

Доказать, что почти все натуральные числа имеют общие множители с какими-нибудь членами этой последовательности¹.

D. J. Newman

¹ Иначе говоря, дополнительное множество натуральных чисел имеет нулевую верхнюю плотность (см. примечание к условию задачи 279). — *Прим. ред.*

300. Вычисление определителя. Вычислить определитель

$$a_n = \begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & b_1 & -2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & 1-n \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 \end{vmatrix},$$

где $b_n = n^n/n!$.

A. C. Aitken

301. Как разрезать прямоугольный параллелепипед? Кусок дерева имеет форму прямоугольного параллелепипеда, размеры которого относятся между собой как 1 : 1 : 2. Как распилить его на наименьшее число частей, из которых можно было бы составить куб?

W. F. Cheney, Jr.

302. «Незаконное» сокращение. Доказать, что существуют лишь три правильные дроби со знаменателями меньше 100, которые можно привести к несократимому виду, «незаконно» зачеркнув одинаковые цифры в числителе и знаменателе. Одна из них — это дробь

$$\frac{26}{65} = \frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} = \frac{2}{5}.$$

Найти остальные две дроби и доказать, что других дробей, обладающих тем же свойством, не существует.

R. K. Morley

303. Вероятность «черной» пятницы. Доказать, что тринадцатое число месяца с большей вероятностью приходится на пятницу, чем на другие дни недели.

B. H. Brown

304. Еще одно свойство гармонического ряда. Доказать, что частная сумма

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N}$$

гармонического ряда не бывает целым числом ни при каком N .

B. H. Brown

305. Простые числа в арифметической прогрессии. Доказать, что, за единственным исключением, в любой арифметической прогрессии, члены которой — положительные целые числа, а разность меньше 2000, простыми числами могут быть не более 10 последовательных членов.

Morgan Ward

306. Общий делитель двух чисел. Пусть d — наибольший общий делитель чисел a и b ($a = a'd$, $b = b'd$), n — любое целое число, большее 1.

Доказать, что если число b' нечетно, то общий множитель чисел $n^a + 1$ и $n^b - 1$ не может быть больше 2.

Morgan Ward

307. Объем тела вращения. Доказать, что объем тела, образованного вращением куба с ребром длиной a вокруг одной из его пространственных диагоналей, равен $\pi a^3 / \sqrt{3}$.

B. W. Jones

308. Чисто мнимое произведение. Доказать, что бесконечное произведение

$$\prod = \left(1 - \frac{i}{3}\right)^4 \left(1 - \frac{i}{17}\right)^4 \left(1 - \frac{i}{99}\right)^4 \left(1 - \frac{i}{577}\right)^4 \dots,$$

в котором знаменатели образуют рекуррентную последовательность, определяемую соотношением $D_n = 6D_{n-1} - D_{n-2}$ ($n \geq 2$), $D_0 = 3$, $D_1 = 17$, — чисто мнимая величина.

D. H. Lehmer

309. Частный случай великой теоремы Ферма. Пусть a , b и n — положительные целые числа, такие, что $a > b$, $n > b$ и $a^n + b^n = c^n$.

Доказать, что число c не может быть целым.

Fred Discepoli

310. Криптарифм. При умножении «столбиком» трехзначного числа на двузначное получилась следующая запись:

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{cc} p & r & p \\ & p & r \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} p & r & p & p \\ p & r & p & p \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} p & r & p & p & p \end{array} \end{array}$$

Буквы p означают «простые» цифры, отличные от 1 (то есть однозначные простые числа).

Восстановить значения цифр, зашифрованных буквой p , и доказать, что решение задачи единственно.

J. E. Trevor

311. Соотношения между биномиальными коэффициентами. Доказать, что знакопеременная сумма биномиальных коэффициентов

$$S_n = \binom{n}{0} - \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} - \binom{n-3}{3} + \dots$$

(сумма продолжается лишь до тех пор, пока верхний индекс остается неотрицательным) принимает значение $+1$, если n — целое число вида $3m$; обращается в 0, если n — целое число вида $3m+2$, и принимает значение -1 , если n — целое число вида $3m+1$.

Meyer Karlin

312. В одном банке. Штат одного из банков состоит из 11 служащих, стоящих на различных ступенях служебной лестницы: президент, первый вице-президент, второй вице-президент, третий вице-президент, главный бухгалтер, кассир, контролер, счетовод, первый секретарь президента банка, второй секретарь (оба секретаря владеют стенографией) и швейцар. Фамилии этих одиннадцати сотрудников банка мы приводим в алфавитном порядке: мистер Адамс, миссис Браун, мистер Грант, мисс Дейл, мистер Джоунс, миссис Кейн, мистер Кемп, мистер Лонг, миссис Форд, мисс Хилл и мистер Эванс. Относительно служащих банка известно следующее.

1. Президент банка души не чает в своем внуке, исполняющем обязанности третьего вице-президента, миссис Браун и контролер банка недолюбливают последнего.

2. Контролер и второй секретарь потеряли недавно своего отца и супруга.

3. Второй вице-президент банка и контролер носят шляпы одинакового фасона.

4. Мистеру Гранту понадобилось продиктовать деловое письмо, и он потребовал, чтобы мисс Хилл срочно прислала ему секретаря.

5. Миссис Кейн, мистер Грант и мистер Лонг — соседи президента банка; все остальные сотрудники живут довольно далеко.

6. Первый вице-президент и главный бухгалтер живут в фешенебельном «Клубе холостяков».

7. Швейцар красит бороду и никого не приглашает в свою комнатку под самой крышей.

8. Банковские служащие молодого поколения, еще не успевшие обзавестись собственными семьями, регулярно собираются у одного из своих коллег, чаще всего у мистера Адамса и второго секретаря.

9. Второй вице-президент банка и счетовод некогда были помолвлены.

10. Неизменно одетый по последней моде кассир доводится зятем первому секретарю президента банка.

11. Мистер Джоунс в тайне от счетовода, который среди служащих является старшим по возрасту, регулярно отдает свои поношенные платья мистеру Эвансу.

Определить фамилию каждого из 11 должностных лиц банка.

A. A. Bennett

313. Снегопад. Снегопад в городе начался еще до полудня и продолжался, не усиливаясь и не ослабевая, до наступления темноты. Ровно в полдень бригада дорожных рабочих вышла на шоссе и приступила к уборке снега. За первые 2 часа рабочие очистили от снега 2 мили, но за следующие 2 часа им удалось убрать снег лишь с отрезка пути длиной в 1 милю. В равные промежутки времени бригада убирала равные объемы снега.

В котором часу начался снегопад?

J. A. Bennet

314. Рулон бумаги в коробке. Внутренние размеры коробки, имеющей форму прямоугольного параллелепи-

педа, составляют $3 \times 4 \times 5$ футов¹. Рулон, имеющий вид прямого кругового цилиндра диаметром 9 дюймов, помещается в коробке по диагонали, касаясь при этом всех шести ее внутренних стенок.

Определить длину рулона. Известно, что его ось, если ее продолжить в обе стороны, не проходит через вершины прямоугольного параллелепипеда — углы коробки.

W. F. Cheney, Jr

315. Описанная окружность и окружность девяти точек. Углы треугольника ABC удовлетворяют соотношению $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1$.

Доказать, что его описанная окружность пересекается с окружностью девяти точек ортогонально.

D. L. Maskey

316. Косоугольный треугольник, стороны которого отсекают на биссектрисах двух внешних углов равные отрезки. Биссектриса внешнего угла при вершине C косоугольного треугольника ABC пересекает сторону AB (или ее продолжение) в точке M , а биссектриса внешнего угла при вершине B пересекает сторону AC (или ее продолжение) в точке N . Известно, что $CM = BN$.

Доказать, что отрезок $(p - a)/a$ равен среднему геометрическому отрезков $(p - b)/b$ и $(p - c)/c$.

D. L. Maskey

317. Оптимальная схема включения лампы. Кнопочный выключатель может находиться лишь в двух состояниях: «включено», когда контакт замкнут, и «выключено», когда контакт разомкнут. Различить по внешнему виду выключателя, в каком из двух состояний он находится, невозможно. При нажатии кнопки выключатель переходит из одного состояния в другое: если до нажатия выключатель находился в состоянии «выключено», то после нажатия кнопки он перейдет в состояние «включено», и наоборот. Электрическая лампа соединена с n выключателями так, что горит лишь в том случае, когда все n выключателей находятся в состоянии «включено».

Определить, в каком порядке следует нажимать кнопки для того, чтобы наибольшее число нажатий, которое необходимо произвести, прежде чем лампа загорится,

¹ 1 фут = 12 дюймов = 0,3048 м. — Прим. перев.

было минимальным. Обобщить решение на случай, когда каждый выключатель срабатывает лишь при p -м нажатии на кнопку.

Joseph Rosenbaum

318. Нули и точки экстремума кубического многочлена. Дан кубический многочлен $y = x^3 + px^2 + qx$.

Определить все целочисленные пары коэффициентов p и q , при которых уравнение $y = 0$ имеет различные целочисленные корни и целочисленные координаты двух точек экстремума.

C. A. Murray

319. Степени натуральных чисел. Доказать, что

$$1^p + 2^p - 3^p + 4^p - 5^p - 6^p + 7^p + 8^p - \dots$$

$$\dots (-1)^n (2^n - 1)^p = 0$$

для любого натурального $p < n$. Слагаемое m^p берется со знаком плюс, если в двоичной записи числа m нечетное число единиц, и со знаком минус, если число единиц четное.

Joseph Rosenbaum

320. Неравенства для сторон треугольника и ребер тетраэдра. Пусть $S = a + b + c$, $T = ab + ac + bc$, где a, b, c — длины сторон треугольника.

Доказать, что $3T \leq S^2 < 4T$. Вывести аналогичные неравенства для ребер тетраэдра.

F. E. Wood

321. Соотношение между коэффициентами одного ряда. Пусть

$$\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

Доказать, что

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = \frac{n}{3} (n+2) (n+7) \cdot 2^{n-4}.$$

A. V. Richardson

322. Дополнение до полного квадрата. Пусть m — произвольно заданное целое число.

Сколько существует целых значений B , квадрат которых дополняет число m до полного квадрата ($B^2 + m$ — квадрат целого числа).

J. L. Brenner

323. Основные пифагоровы треугольники, в которые можно вписать окружность радиуса $r = p > 2$. Если радиус окружности выражается нечетным простым числом, то вокруг нее можно описать ровно 2 различных основных пифагоровых¹ треугольника.

Доказать, что каждая пара таких треугольников обладает следующими свойствами:

- а. длины их меньших катетов отличаются на 1;
- б. в одном треугольнике гипотенуза превосходит по длине больший катет на 1, а в другом треугольнике — на 2;
- в. сумма периметров треугольников равна квадрату целого числа, умноженному на 6;
- г. при неограниченном возрастании радиуса p вписанной окружности отношение наименьших углов треугольников стремится к 2;
- д. при неограниченном возрастании радиуса p вписанной окружности отношение площадей треугольников стремится к 2.

W. F. Cheney, Jr.

324. Почему линия сгиба прямая? В учебниках геометрии и популярных книгах по математике нередко можно встретить утверждение о том, будто линия сгиба на листе бумаги имеет форму прямой потому, что линия пересечения двух плоскостей — прямая, однако это заблуждение.

Указать истинную причину, по которой линия сгиба на листе бумаги имеет форму прямой.

E. P. Starke

325. Когда произведение n первых натуральных чисел делится на их сумму? Доказать, что произведение n первых натуральных чисел ($1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$) делится на их

¹ Основным пифагоровым треугольником называется прямоугольный треугольник, длины сторон которого выражаются взаимно простыми целыми числами. — *Прим. ред.*

сумму $(1 + 2 + \dots + n)$ в том и только в том случае, если число $n + 1$ не является простым числом $p > 2$.

Victor Thébault

326. Задача на разрезание. Как разрезать правильный шестиугольник на наименьшее число частей, из которых можно составить равносторонний треугольник той же площади? Каждый разрез производится вдоль прямой.

H. S. M. Coxeter

327. Два эквивалентных сравнения. Если n , r и a — натуральные числа, то из сравнения $n^2 \equiv n \pmod{10^a}$ очевидным образом следует сравнение $n^r \equiv n \pmod{10^a}$.

При каких значениях r из сравнения $n^r \equiv n \pmod{10^a}$ следует сравнение $n^2 \equiv n \pmod{10^a}$?

Irving Kaplansky

328. Кубическая парабола. График кубического многочлена $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ пересекает ось x в трех различных точках. Пусть A и B — две из них. Из точек A и B к «горбам» кубической параболы проведены касательные AP и BQ (P и Q — точки касания прямых и графика кубического многочлена).

Доказать, что отношение длины отрезка AB к расстоянию между точками P и Q по горизонтали не зависит от коэффициентов кубического многочлена.

H. T. R. Aude

329. Задача о бильярдном шаре. В каком направлении следует нанести удар кием по бильярдному шару, чтобы тот после заданного четного числа отражений от бортов вернулся в исходную точку? Вращением шара и возможностью попадания в лузы пренебречь. Соударения с бортами считать абсолютно упругими.

Victor Thébault

330. Сфера, проходящая в зазор между двумя соприкасающимися сферами и плоскостью. Пусть a и b — радиусы двух сфер, касающихся друг друга и плоскости.

Доказать, что радиус r наибольшей сферы, проходящей в зазор между этими двумя сферами и плоскостью, определяется из соотношения $r^{-1/2} = a^{-1/2} + b^{-1/2}$.

C. W. Trigg

331. Две лестницы, стоящие «накрест». На горизонтальной площадке возведены две параллельные стенки, отстоящие друг от друга на расстояние d футов. Лестница длиной a футов поставлена у основания одной стенки и прислонена к другой, а лестница длиной b футов поставлена у основания второй стенки и опирается на первую ($a > b$). Обе лестницы «пересекаются» на высоте c футов над площадкой.

Доказать, что допустимые целочисленные значения a , b , c и d определяются соотношениями

$$ka = (su + tv)(s - t)(u + v), \quad kb = (sv + tu)(s - t)(u + v), \quad (1)$$

$$kc = (su - tv)(sv - tu), \quad kd = 2(stuv)^{1/2}(s - t)(u + v).$$

Здесь s , t , u , v — любые натуральные числа, удовлетворяющие трем условиям: $u > v$, $sv > tu$ и $stuv$ — квадрат целого числа (k — наибольший общий делитель правых частей четырех соотношений (1)). Найти также наиболее простое частное решение, при котором все числа a , b , c и d нечетные.

A. A. Bennett

332. Условие простоты числа. Доказать, что сравнение

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$$

служит необходимым условием простоты числа $p > 2$. Является ли это условие также и достаточным?

David Segal

333. Пройдет ли шкаф в дверь? Шкаф прямоугольной формы (длиной a и шириной b) пронесли, не наклоняя, по коридору шириной c и через дверной проем шириной d в стене коридора внесли в комнату. Шкаф прошел впритык. Если пренебречь толщиной стен, то из подобия треугольников можно установить соотношение между размерами шкафа, шириной коридора и дверного проема: $d = ab/c$.

Предположим, что толщина стены, в которой находится дверной проем, равна h . При каком соотношении между величинами d и a , b , c , h шкаф пройдет в дверь?

E. H. Johnson

334. Длина периода в десятичном разложении дроби $1/p$. Пусть p — любое нечетное простое число, отличное от 5.

Доказать, что десятичное разложение дроби $1/p$ имеет период длиной в $(p-1)/2$ или q знаков, где q — некоторый делитель числа $(p-1)/2$, в том и только в том случае, если $p \equiv \pm 3^k \pmod{40}$.

J. S. Frame

335. Свойство простых чисел. Доказать, что не существует простого числа p , для которого при $n > 1$ выполнялось бы равенство $p^n + 1 = 2^m$ или при $n > 2$ — равенство $p^n - 1 = 2^m$.

Harry Goheen

336. Президентские выборы. Какое наименьшее число голосов избирателей должен набрать кандидат на пост президента США при существующей избирательной системе?¹.

Для простоты предположим, что на пост президента баллотируются лишь два кандидата и число избирателей, приходящееся на одного выборщика, одно и то же во всех штатах. Общее число избирателей N , остальные данные вы можете найти в справочнике.

Leopold Infeld

337. Матрицы с двумя одинаковыми элементами на главной диагонали. Доказать, что любая степень матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

¹ Выборы президента США не прямые, а двухстепенные. В первом туре избиратели каждого штата отдают свои голоса выборщикам, число которых равно числу членов палаты представителей и сенаторов от данного штата. Избранным считается целиком список выборщиков, получивший большинство голосов. Во втором туре выборщики отдают свои голоса за кандидата в президенты. Избранным считается кандидат, набравший абсолютное большинство голосов.

Для решения задачи нужно знать еще количество выборщиков в каждом штате. Советский читатель может попытаться решить задачу в общем виде. — *Прим. перев.*

содержит на главной диагонали два одинаковых элемента. Доказать также, что тем же свойством обладает любая матрица (a_{rs}) , у которой $a_{r1} = a_{2r}$, $a_{1r} = a_{r2}$, $a_{rs} = a_{sr}$ ($r, s > 2$) и $a_{11} = a_{22}$.

J. L. Brenner

338. Частичные суммы гармонического ряда и интегралы от элементарных функций. Пусть $s(n) \equiv 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n$ — сумма первых n членов гармонического ряда. Известно, что $s(n)$ можно представить в виде интеграла

$$\int_0^1 \frac{u^n - 1}{u - 1} du.$$

При такой записи $s(n)$ формально не содержит сумму n членов.

Найти $f(x)$, такую, что $s(n) = f^{(n)}(0)$. Выразить $f(x)$ через элементарные функции и их первообразные.
Henry Scheffé

339. Головоломка, основанная на свойствах чисел Фибоначчи. На свойствах чисел Фибоначчи, определяемых рекуррентным соотношением $F_1 = F_2 = 1$, $F_{j+1} =$

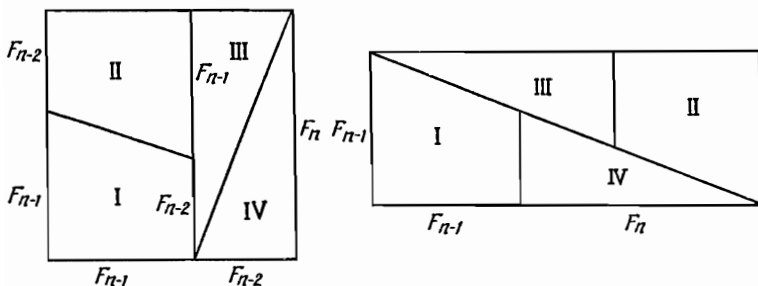


Рис. 2.

$= F_{j-1} + F_j$ ($j \geq 2$), основана следующая известная головоломка, связанная с таинственным увеличением или уменьшением площади фигуры. Квадрат со стороной F_n разрезают на 4 части, из которых «составляют» прямоугольник $F_{n-1} \times F_{n+1}$ (рис. 2).

Составить из тех же четырех частей фигуру, которая на первый взгляд кажется образованной из двух прямо-

угольников $F_{n-1} \times 2F_{n-2}$, соединенных между собой прямоугольником $F_{n-4} \times F_{n-2}$. (В действительности, как и в первом случае, площадь этой фигуры отличается от площади исходного квадрата на 1.)

W. R. Ransom

340. Два определителя. Пусть

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{pmatrix}$$

— две матрицы, x_i, y_i, z_i и X_i, Y_i, Z_i ($i = 1, 2, 3$) — отличные от нуля числа, причем каждый элемент второй матрицы совпадает с алгебраическим дополнением соответствующего элемента первой матрицы.

Доказать, что из соотношения

$$\det \begin{pmatrix} x_1^{-1} & y_1^{-1} & z_1^{-1} \\ x_2^{-1} & y_2^{-1} & z_2^{-1} \\ x_3^{-1} & y_3^{-1} & z_3^{-1} \end{pmatrix} = 0$$

следует аналогичное соотношение

$$\det \begin{pmatrix} X_1^{-1} & Y_1^{-1} & Z_1^{-1} \\ X_2^{-1} & Y_2^{-1} & Z_2^{-1} \\ X_3^{-1} & Y_3^{-1} & Z_3^{-1} \end{pmatrix} = 0.$$

J. A. Todd

341. Корень i -й степени из -1 . Доказать, что $\sqrt[i]{-1} \approx 23^{1/7}$.

E. T. Frankel

342. Тетраэдр с соизмеримыми элементами. Доказать, что можно построить тетраэдр, у которого длины всех ребер, площадь каждой грани и объем выражаются целыми числами.

E. P. Starke

343. Многочлен, принимающий целочисленные значения. Доказать, что при любом целом x многочлен $x^5/5 + x^3/3 + 7x/15$ принимает целочисленное значение.

W. E. Buker

344. Как разрезать сыр? Доказать, что n плоскими разрезами кусок сыра можно разделить на $(n+1)(n^2 - n + 6)/6$ частей.

J. L. Woodbridge

345. Род поверхности. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед размером $a \times b \times c$, сложенный из abc единичных кубиков. Предположим, что ребра единичных кубиков сделаны из проволочек (совпадающим ребрам соответствует одна проволочка).

Доказать, что наружная поверхность получившейся сети имеет род $p = 2abc + bc + ca + ab$ (то есть топологически эквивалентна сфере с p ручками).

Howard Eves

346. Задача Платона. В пятой книге «Законов»¹ знаменитый философ древности, обсуждая проблемы распределения земли в государстве, удобного «и на войне, и в мирное время для всякого рода сделок, союзов, налогов и распределений», пытается найти число, делящееся на любое целое число от 1 до 10, и останавливает свой выбор на числе $5040 = 7!$.

Доказать более общее утверждение: если m и n — натуральные числа и $n < p$, где p — наименьшее простое число, удовлетворяющее неравенству $p > m$, то $m!$ делится на n , за исключением того случая, когда $m = 3$.

S. H. Gould

347. Делимость разности степеней. Пусть a , b и n — любые натуральные числа, обладающие тем свойством, что $a^n - b^n$ делится на n .

Доказать, что число $(a^n - b^n)/(a - b)$ также делится на n .

Ivan Niven

348. Класс сходящихся последовательностей. Пусть $g_1, g_2, g_3, \dots$ — любые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$0 < g_p < 1, (1 - g_p)g_{p+1} > \frac{1}{4}, (p = 1, 2, 3, \dots).$$

¹ Платон, Сочинения в трех томах, т. 3, ч. 2, стр. 211—212, «Мысль», 1972. — Прим. перев.

Доказать, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} g_p = \frac{1}{2}.$$

H. S. Wall

349. Кривые постоянной ширины.

а. Доказать, что все кривые постоянной ширины с одним и тем же диаметром d имеют одинаковые периметры.

б. Какова наименьшая площадь, ограниченная замкнутой кривой постоянной ширины с диаметром d ?

Howard Eves

350. Свойство факториала. Доказать, что ближайшее к $n!/e$ целое число кратно $(n-1)$.

D. H. Browne

351. «Сверхсоставное» число. Найти наименьшее натуральное число, половина которого есть точный квадрат, треть — куб и одна пятая — пятая степень целого числа.

W. C. Rufus

352. Чему равна сумма? Вычислить сумму.

$$\sum_{r=1}^{2n-1} (-1)^{r-1} r / \binom{2n}{r}.$$

C. D. Olds

353. Наибольшее значение определителя. Доказать, что значение определителя 6-го порядка, элементами которого служат вещественные числа, не превосходящие по абсолютной величине 1, не может быть больше 160.

Gordon Pall

354. Диаграммы Эйлера и человеческие отношения. Как писал автор одного романа о своей героине, она представляла любые отношения между людьми в виде пересекающихся кругов. Чем больше перекрываются два круга, тем глубже, казалось бы, должны быть отношения, но подобное впечатление обманчиво. Отношения между двумя людьми развиваются по восходящей линии лишь до тех пор, пока площадь общей части кругов не составит определенной доли от площади каждого круга, после чего вступает в действие закон убывающей

отдачи. У партнеров иссякают источники, черпая из которых они могли бы взаимно обогащать друг друга в том общем, что их объединяет. Идеальным, по-видимому, следует считать тот случай, когда суммарная площадь двух непересекающихся частей кругов равна площади расположенной между ними общей части кругов, имеющей форму древесного листа. Должно быть, какая-нибудь изящная математическая формула позволит найти такое расположение кругов — увы, на бумаге, но не в жизни.

Рассмотреть возможность существования решения для кругов заданных радиусов.

W. B. Campbell

355. Шар в наполненной водой вазе. Тяжелый шар осторожно кладут в наполненную водой вазу, имеющую форму сегмента параболоида вращения. Размеры вазы заданы. Размер шара выбран так, чтобы он вытеснил как можно больше воды.

Определить радиус шара.

Victor Thébault

356. Бином Ньютона с нечетными коэффициентами. При каких значениях n все коэффициенты в разложении бинома Ньютона $(a + b)^n$ нечетны?

D. H. Browne

357. Матрица, обратная симметрической матрице. Построить матрицу, обратную симметрической матрице $A = \{a_{ij}\}$ порядка n , где $a_{ij} = i/j$ при $i \leq j$.

D. H. Lehmer

358. Гамильтонов цикл на многограннике. Предположим, что мы хотим побывать в вершинах многогранника, а достичь их можно, лишь двигаясь вдоль его ребер. Гамильтон рассмотрел задачу об обходе всех вершин многогранника по маршруту, который не проходит через одну и ту же вершину дважды. (В теории графов такой маршрут принято называть гамильтоновым циклом.) Нетрудно доказать, что задача Гамильтона для додекаэдра имеет решение.

Доказать, что для ромбододекаэдра задача Гамильтона решения не имеет.

H. S. M. Coxeter

359. Определение фальшивой монеты при помощи взвешивания. У одного человека было 12 монет, неотличимых по внешнему виду. Одна монета была фальшивая и отличалась по весу от настоящей. У человека под рукой были также очень чувствительные равноплечие весы, но без гирь.

Может ли он при помощи не более трех взвешиваний обнаружить фальшивую монету и определить, тяжелее она или легче, чем настоящая?

Donald Eves

360. «Равнобедренные n -точечники». Назовем множество, состоящее из n точек на плоскости, равнобедренным n -точечником, если любые три из них расположены в вершинах равнобедренного треугольника. Шесть точек на плоскости можно расположить так, чтобы они образовали равнобедренный 6-точечник.

Доказать, что на плоскости нельзя выбрать 7 точек, образующих равнобедренный 7-точечник. Чему равно наименьшее число k , такое, что из любых k точек в пространстве можно выбрать три, не расположенные в вершинах равнобедренного треугольника?

Paul Erdős

361. Свойство k натуральных чисел. Пусть дано k натуральных чисел $a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n$, где $k > \lceil (n+1)/2 \rceil$.

Доказать, что по крайней мере для одной пары i, r выполняется соотношение $a_i + a_1 = a_r$.

Paul Erdős

362. Расходимость ряда. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-a} \cos(b \ln n)$ расходится при всех значениях $a \leq 1$ независимо от значения b .

V. L. Klee, Jr.

363. Пять точек и выпуклый четырехугольник. На плоскости произвольно заданы 5 точек.

Доказать, что 4 из них расположены в вершинах выпуклого четырехугольника.

Esther Szekeres

364. Еще одно свойство n натуральных чисел. Рассмотрим n натуральных чисел $a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq 2n$,

таких, что наименьшее общее кратное любых двух из них больше $2n$.

Доказать, что $a_1 > [2n/3]$.

Paul Erdős

365. Точки пересечения диагоналей выпуклого n -угольника. Найти число точек пересечения диагоналей выпуклого n -угольника.

Paul Erdős

366. Криптарифм. Расшифровать следующий «пример на сложение»:

$$\begin{array}{r} \text{F O R T Y} \\ + \quad \text{T E N} \\ \text{T E N.} \\ \hline \text{S I X T Y} \end{array}$$

Каждая буква означает некоторую цифру, причем различным цифрам соответствуют различные буквы.

Alan Wayne

367. Беговая дорожка. Внутренняя бровка беговой дорожки имеет форму эллипса с разными полуосями, ширина дорожки повсюду одинакова.

Доказать, что форма наружной бровки такой дорожки отлична от эллиптической.

L. M. Kelly

368. Разложение определителя. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} a-x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{a}{2} & a-x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{a}{3} & \binom{a}{2} & a-x & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{a}{n} & \binom{a}{n-1} & \binom{a}{n-2} & \binom{a}{n-3} & \dots & a-x \end{vmatrix} = \\ = \binom{a+n-1}{n} - \binom{2a+n-2}{n-1}x + \\ + \binom{3a+n-3}{n-2}x^2 - \dots + (-1)^n x^n.$$

G. Pólya

369. Прямые, отсекающие треть площади треугольника. Рассмотрим прямые, проходящие через некоторую точку на медиане треугольника и отсекающие треть его площади (для краткости назовем их $(1/3)$ -прямые). Через центр тяжести треугольника нельзя провести ни одной $(1/3)$ -прямой. Через точку, делящую медиану в отношении 4 : 5, считая от вершины треугольника, проходят четыре $(1/3)$ -прямые.

Определить, сколько $(1/3)$ -прямых проходят через произвольную точку медианы.

Norman Anning

370. Дети в саду.

— Из сада доносятся детские голоса. Должно быть, там играют ваши дети? — спросил гость.

— Не только мои, — ответил хозяин, — там резвятся сорванцы из четырех семейств: мои дети, дети моих брата и сестры, а также двоюродного брата. Правда, моя семья самая многочисленная, у брата детей меньше, у сестры еще меньше, а самая маленькая семья у двоюродного брата. Ребята играют в салочки, — продолжал хозяин. — Им бы хотелось сыграть в бейсбол, но их слишком мало, чтобы составить две команды¹. Интересно заметить, — добавил он, — что произведение чисел детей в каждом из четырех семейств совпадает с номером моего дома, который вы, конечно, заметили на воротах.

— Я немного разбираюсь в математике, — сказал гость. — Попробую установить, сколько детей в каждом из четырех семейств.

Проделав какие-то выкладки, гость спросил:

— В семье вашего двоюродного брата один ребенок?

После того, как хозяин ответил на этот вопрос, гость заявил:

— Зная номер вашего дома и учитывая ваш ответ на мой последний вопрос, я могу точно установить, сколько детей в каждом из четырех семейств.

Сколько детей было в семьях хозяина дома, его брата, сестры и двоюродного брата?

L. R. Ford

¹ Бейсбольная команда состоит из 9 человек. — *Прим. ред.*

371. Абажур. Абажур имеет форму усеченного прямого кругового конуса. P — периметр его нижнего основания, p — периметр верхнего основания, s — высота, измеренная по образующей.

Доказать, что при $P - p \leq \pi s$ такой абажур можно вырезать в виде одного куска из листа бумаги, имеющего форму прямоугольника размерами P и $s + p(P - p)/8s$. Если $P \neq p$, бумаги даже хватит на клапан, чтобы склеить абажур. При $P = p$ бумаги на клапан не остается. Будет ли это справедливо при $P - p > \pi s$?

G. Pólya

372. Растворы соли. В каждом из $n - 1$ сосудов $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$ находится V литров воды, а в n -м сосуде $T_n - V$ литров раствора, содержащего M кг соли. Жидкость со скоростью g л/мин перетекает из T_n в T_{n-1} , из T_{n-1} в T_{n-2} , ..., из T_2 в T_1 и из T_1 в T_n .

Определить количество соли в сосуде T_n через t минут после начала процесса, предполагая, что перемешивание жидкостей в сосудах происходит мгновенно.

R. J. Walker

373. Невозможное путешествие. Рассмотрим карту на поверхности сферы. Границы стран образованы дугами n больших кругов, из которых никакие три не пересекаются в одной точке.

Доказать, что при n , кратном четырем, невозможно совершить путешествие, побывав в каждой стране один и только один раз, если запрещено проходить через те точки границ, где сходятся более двух стран.

Leo Moser

374. Придворный математик и шут. Однажды придворный математик получил сразу все свое жалованье за год серебряными талерами и, сложив из монет 9 неравных столбиков, расположил их в виде магического квадрата. Королю затея придворного математика пришлось по вкусу, но он посетовал на то, что ни в одном столбике число талеров не было простым.

— Если бы ваше величество добавило еще 9 талеров к моему жалованью, — заметил придворный математик, — я смог бы увеличить число монет в каждом столбике на 1, и тогда все 9 чисел стали бы простыми.

Проверили. Все оказалось именно так, как сказал придворный математик. Король уже собрался было увеличить жалованье математику на 9 талеров в год, как в дело вмешался шут. Он взял по одной монете из каждого столбика, и число оставшихся талеров в каждом из 9 столбиков также оказалось простым. Более того, 9 новых чисел по-прежнему составляли магический квадрат. Девять «лишних» талеров шут оставил себе.

Сколько талеров получал в год придворный математик?

G. W. Walker

375. Геометрическое построение при помощи линейки. Пользуясь только линейкой, построить шестиугольник, для которого существуют как вписанные, так и описанные конические сечения.

Joseph Rosenbaum

376. Задача Льюиса Кэррола. В «Истории с узелками» Льюис Кэррол предложил следующую задачу: «Два туриста находятся в пути с 2 часов дня до 9 часов вечера. Они идут по равнине к подножию горы, взбираются на вершину и возвращаются прежним путем в исходную точку. По равнине туристы идут со скоростью x миль в час, взбираются на гору со скоростью y миль в час и спускаются с вершины со скоростью $2y$ миль в час. Найти пройденное туристами расстояние».

В первоначальном варианте задачи, приведенном в «Истории с узелками», числа x и y были известными целыми числами.

Решить задачу Льюиса Кэррола, не зная заранее чисел x и y (но предполагая их целыми) и зная еще, что решение однозначно.

Leo Moser

377. Пифагоровы треугольники с равными периметрами. Два различных основных пифагоровых треугольника имеют равные периметры $2p$. Определить наименьшее p , для которого это возможно.

Monte Dornham

378. Магический квадрат как определитель. Пусть S — сумма элементов (каждый элемент — целое число)

магического квадрата третьего порядка, а D — значение определителя матрицы, элементы которой совпадают с элементами магического квадрата.

Доказать, что D/S — целое число.

C. W. Trigg

379. Секущая, проведенная через точки перегиба. Если график многочлена четвертой степени имеет две вещественные точки перегиба, то проведенная через них секущая и сама кривая ограничивают три конечные области («лунки»).

Доказать, что две из этих лунок равновелики, а площадь наибольшей лунки равна сумме площадей двух остальных лунок.

E. V. Hofler

380. Гармонический ряд и постоянная Эйлера. Пусть S_n — n -я частичная сумма гармонического ряда

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Доказать, что

$$C < S_p + S_q - S_{pq} \leq 1,$$

где C — постоянная Эйлера.

H. F. Sandham

381. Модифицированный гармонический ряд. Возьмем первый член гармонического ряда со знаком плюс, два следующих члена — со знаком минус, следующие за ними три члена — со знаком плюс и т. д.

Доказать, что построенный нами модифицированный гармонический ряд сходится.

E. P. Starke

382. Свойство чисел, обратных целым. Доказать, что при любом целом $n > 1$ число $1/n$ представимо в виде суммы конечного числа последовательных членов ряда $\sum_{j=1}^{\infty} 1/j(j+1)$.

Leo Moser

383. Рациональные точки на окружности. Доказать, что если по крайней мере одна координата центра ок-

ружности иррациональна, то на самой окружности найдется не более двух точек с рациональными координатами.

V. E. Dietrich

384. Числа Фибоначчи, записанные в виде определителей. Доказать, что n -й член F_n последовательности Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, ..., x , y , $x+y$, ... можно представить в виде определителя $(n-1)$ -го порядка

$$F_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ 1 & & 1 & 0 & & 1 & \dots \\ 0 & & 1 & 1 & & 0 & \dots \\ 0 & & 0 & 1 & & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Don Walter

385. Определение главной части бесконечно малой величины. В плохих учебниках по математическому анализу можно встретить следующее «определение»:

«Если бесконечная малая величина состоит из двух или более членов различного порядка, то член наименьшего порядка называется главной частью бесконечно малой величины».

Показать, что такое «определение» не позволяет однозначно выделить главную часть и правильно сформулировать определение главной части бесконечно малой величины.

H. J. Hamilton

386. Сходимость бесконечного возведения в степень. Пусть $y_1 = x$, $y_2 = x^{y_1}$, ..., $y_n = x^{y_{n-1}}$.

Каково максимальное значение x , при котором существует $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, и чему равен этот предел?

C. S. Ogilvy

387. Представление числа π в виде ряда. Доказать, что

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 2^{n+1}}{(2n+1)!}.$$

Jerome C. R. Li

388. Стереометрическая задача на разрезание. Доказать, что если все грани многогранника обладают центром симметрии, то, проведя разрезы вдоль конечного числа плоскостей, многогранник можно расечь на части и сложить из них куб.

Leo Moser

389. Свойство чевиан. Пусть S_1, S_2, S_3 — середины трех чевиан¹ треугольника ABC : A_1, B_1, C_1 ; A_2, B_2, C_2 и A_3, B_3, C_3 — точки пересечения прямых S_2S_3, S_3S_1 и S_1S_2 со сторонами BC, CA, AB

Доказать, что:

- 1) $CA_2 = A_3B, BC_1 = C_2A, AB_3 = B_1C$;
- 2) точки A_1B_2, C_3 — коллинеарны;
- 3) точки $A_2, A_3, B_3, B_1, C_1, C_2$ лежат на одном коническом сечении.

Josef Langr

390. Минимальный путь, проходящий через n точек плоскости. Рассмотрим на плоскости n точек, из которых не все лежат на одной прямой. Доказать, что кратчайший замкнутый маршрут, проходящий через все n точек, имеет форму простого многоугольника.

Peter Ungar

391. Сквозное отверстие в кубе. Как следует прорезать в кубе отверстие, через которое смог бы пройти куб таких же размеров?

H. D. Grossman

392. Выражение для наибольшего общего делителя двух чисел. Доказать, что наибольший общий делитель чисел a и b можно представить в виде двойной суммы

$$(a, b) = \sum_{m=0}^{a-1} \sum_{n=0}^{a-1} \frac{1}{a} e^{2\pi i b m n / a}.$$

Leo Moser

393. Матричное тождество. Доказать, что если S и T — любые две квадратные матрицы одинакового по-

¹ Чевианами называются любые три прямые, исходящие из вершин треугольника и пересекающиеся в одной точке. — Прим. ред.

рядка и матрицы $I + S$, $I + ST$, $I - S$, $I + TS$ не вырождены, то

$$(I + S)^{-1}(S + T)(I + ST)^{-1}(I + S) = \\ = (I - S)(I + TS)^{-1}(S + T)(I - S)^{-1}.$$

T. G. Room

394. Интересный предел. Вычислить

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!).$$

D. J. Newman

395. Произведение отражений. На плоскости даны три прямые l_1 , l_2 , l_3 , не пересекающиеся в одной точке. Пусть T_i — отражение относительно прямой l_i , а $T = T_1 T_2 T_3$.

Доказать, что T^2 — параллельный перенос.

H. S. Shapiro

396. Арктангенсы и ареатангенсы. Доказать, что если

$$\prod_{i=1}^n (x + r_i) \equiv \sum_{j=0}^n a_j x^{n-j},$$

то

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{arctg} r_i = \operatorname{arctg} \frac{a_1 - a_3 + a_5 - \dots}{a_0 - a_2 + a_4 - \dots}$$

и

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{Arth} r_i = \operatorname{Arth} \frac{a_1 + a_3 + a_5 + \dots}{a_0 + a_2 + a_4 + \dots}.$$

Gordon Raisbeck

397. Шары в урне. Десять шаров, перенумерованных от 0 до 9, помещены в урну. Пять шаров наугад извлечены из урны (после того, как шар вытаснен, его в урну не возвращают) и выстроены в ряд.

Какова вероятность, что пятизначное число, образованное номерами шаров, делится на 396?

H. D. Larsen

398. Обобщение теоремы Вильсона. Доказать, что если p — простое число и $n \geq p$, то

$$n! \sum_{p \nmid i+j=n} \frac{1}{p^{i!j!}} \equiv 0 \pmod{p}.$$

I. N. Herstein

399. Движение под действием центральных сил. По аналогии с движением планет естественно предположить, что для любого движения под действием центральных сил (по крайней мере, если частица не проходит через центр) справедливы следующие утверждения: 1) расстояние от частицы до центра максимально, лишь когда скорость частицы минимальна; 2) скорость частицы максимальна, лишь когда расстояние от нее до центра минимально.

Доказать, что утверждение 1 выполняется для любого движения под действием центральных сил и привести контрпример, опровергающий утверждение 2.

S. H. Gould

400. Трехгранные углы многогранника. Доказать, что если все грани выпуклого многогранника обладают центром симметрии, то существует по крайней мере восемь вершин многогранника, в которых сходятся по три ребра. (У куба таких вершин ровно восемь.)

Leo Moser

II. РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

1. Рассмотрим «многоэтажную» дробь, образованную из величин $a_1, a_2, \dots, a_n$. Пусть S — равная ей простая (двухэтажная) дробь, N — числитель этой дроби и D — знаменатель; тот и другой являются произведениями некоторых a_i . Не ограничивая общности, условимся считать, что величины a_i , входящие как сомножители в N и D , расположены в порядке возрастания индексов. Тогда при любом n числитель N будет начинаться с величины a_1 , а знаменатель D — с величины a_2 (в чем нетрудно убедиться, если воспользоваться методом математической индукции по n — числу величин a_i). Таким образом, любая двухэтажная дробь S , составленная из произведений величин a_i , числитель которой N не начинается с a_1 , а знаменатель D — с a_2 , заведомо не представима в виде многоэтажной дроби.

Докажем, что любую двухэтажную дробь $S = N/D$, где $N = a_1 a_{i_1} \dots a_{i_k}$, $D = a_2 a_{j_1} \dots a_{j_{n-k-2}}$, можно представить в виде многоэтажной дроби. При $n = 2$ наше утверждение очевидно. Предположим, что наше утверждение верно, если число величин a_i не превышает $n - 1 \geq 2$, и рассмотрим положение a_3 . Если $3 = i_p$, то $S = a_1/S'$, где $S' = D/a_3 \dots$ представимо в нужном виде по индукционной гипотезе, применённой к $a_2, a_3, \dots, a_n$. Если же $3 = j_p$, то $S = (a_1/a_2) a_{i_1} \dots / a_3 \dots$ и индукционную гипотезу мы применяем к $a_1/a_2, a_3, \dots, a_n$.

Доказанное утверждение позволяет определить число различных двухэтажных дробей S , составленных из произведений величин a_i и представимых в виде многоэтажных дробей. Действительно, «положение» величин a_1 и a_2 строго определено: числитель N должен начинаться

с величины a_1 , знаменатель D — с величины a_2 . Все остальные величины a_k ($k \geq 3$) могут входить как в числитель N , так и в знаменатель D дроби S . Следовательно, общее число двухэтажных дробей S , составленных из n величин $a_1, a_2, \dots, a_n$ и представимых в виде многоэтажных дробей, равно 2^{n-2} . Например, если мы условимся для краткости обозначать величину a_i ее индексом i , то при $n = 5$ полный список дробей S , представимых в виде многоэтажных дробей, будет включать лишь дроби $1/2345, 15/234, 145/23, 14/235, 1345/2, 134/25, 135/24, 13/245$.

Назовем главной черту, отделяющую числитель многоэтажной дроби от знаменателя (в общем случае и числитель, и знаменатель содержат по несколько этажей). По доказанному выше, величина a_i , стоящая непосредственно под главной чертой, входит в знаменатель D двухэтажной дроби S , равной исходной многоэтажной дроби, а величина a_{i+1} — в числитель N дроби S . Таким образом, если знаменатель D разбить на группы, состоящие из последовательных индексов, то главную черту можно провести лишь перед последним индексом в любой из групп (если группа состоит из одного индекса, то перед единственным индексом). Например, знаменатель D дроби $S = 1467/23589$ состоит из трех групп последовательных индексов: (23) (5) (89). Следовательно, главную черту можно провести лишь перед индексами 3, 5 или 9. Итак, ответ на второй вопрос задачи гласит: если знаменатель D двухэтажной дроби S содержит более одной группы последовательных индексов, то дробь S представима в виде многоэтажных дробей по крайней мере двумя способами. Например, дробь $S = 1346/25$ ($D = (2)(5)$) равна любой из следующих трех многоэтажных дробей:

$$\frac{\frac{1}{\frac{2}{\frac{3}{4}}}}{\frac{5}{6}}, \quad \frac{\frac{1}{\frac{2}{\frac{3}{4}}}}{\frac{5}{6}}, \quad \frac{1}{\frac{2}{\frac{3}{\frac{4}{5}}}}.$$

Все остальные дроби S представимы в виде многоэтажных дробей лишь одним способом.

2. Ряд расходится. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся признаком Гаусса¹, который утверждает следующее:

если для данного ряда отношение a_n/a_{n+1} можно представить в виде

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\vartheta_n}{n^2},$$

где λ и μ — постоянные, а ϑ_n — ограниченная величина ($|\vartheta_n| \leq L$), то ряд сходится при $\lambda > 1$ или при $\lambda = 1$, $\mu > 1$ и расходится при $\lambda < 1$ или при $\lambda = 1$, $\mu \leq 1^*$.

Для ряда, приведенного в условиях задачи,

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \left(\frac{2n+2}{2n+1} \right)^2 = \frac{4n^2 + 8n + 4}{4n^2 + 4n + 1} = \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2}} = \\ &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{\vartheta_n}{n^2}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\lambda = 1$, $\mu = 1$ и этот ряд расходится.

3. Для вычисления интегралов воспользуемся тригонометрическим тождеством

$$\sin n\varphi - \sin(n-2)\varphi = 2 \sin \varphi \cos(n-1)\varphi,$$

или

$$\sin n\varphi = 2 \sin \varphi \cos(n-1)\varphi + \sin(n-2)\varphi.$$

Полагая $n = 2r + 1$, преобразуем первый интеграл к виду

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2r+1)\varphi}{\sin \varphi} d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2r\varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2r-1)\varphi}{\sin \varphi} d\varphi.$$

Первое слагаемое в правой части равно 0. Полагая последовательно $n = 2r - 1, 2r - 3, \dots, 3, 1$, мы после r -кратного повторения аналогичного преобразования

¹ Г. М. Фихтенгольд, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2, М., Физматгиз, 1959, с. 281. — Прим. перев.

сведем исходный интеграл к

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{2},$$

что и требовалось доказать.

Полагая $n = 2r$, преобразуем второй интеграл, приведенный в условиях задачи, к виду

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2r\varphi}{\sin \varphi} d\varphi &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos (2r - 1) \varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin (2r - 2) \varphi}{\sin \varphi} d\varphi = \\ &= 2 \cdot \frac{(-1)^{r-1}}{2r - 1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin (2r - 2) \varphi}{\sin \varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Повторяя аналогичное преобразование r раз, получаем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2r\varphi}{\sin \varphi} d\varphi = 2 \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^{r-1}}{2r - 1} \right],$$

что и требовалось доказать.

4*¹. Исследуем сначала некоторые свойства функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, удовлетворяющих данным в условии задачи функциональным уравнениям. Это даст нам возможность попутно найти частные решения этих уравнений.

Если $\psi(x_0) = 0$ для некоторого x_0 , то из второго уравнения следует, что $\psi(x_0 + y) = 0$ при любом y , то есть $\psi(x) \equiv 0$. Тогда из первого уравнения получаем $\varphi(x) = \text{const}$, что дает нам первое тривиальное решение

$$\varphi(x) \equiv c, \quad \psi(x) \equiv 0. \quad (1)$$

В дальнейшем будем считать, что $\psi(x) \neq 0$ всюду. Полагая в первом уравнении $y = 0$, находим, что $\varphi(0) = 0$.

Если $\varphi(x_0) = 0$ для некоторого x_0 , то из первого уравнения при $y = x_0$ получаем $\varphi(x + x_0) = \varphi(x)$, (2) то есть φ имеет период x_0 . С другой стороны, полагая в первом уравнении $x = x_0$ и используя (2), получаем

¹ Здесь и далее знак *, поставленный сразу после номера решаемой задачи, означает, что решение из American Mathematical Monthly либо существенно переработано, либо заменено новым. — Прим. ред.

$\varphi(y) = \varphi(x_0 + y) = \varphi(x_0) + \frac{\varphi(y)\psi(x_0)}{1 - \varphi(x_0)\varphi(y)} = \varphi(y)\psi(x_0)$, откуда либо $\varphi(y) \equiv 0$, либо $\psi(x_0) = 1$. Первая возможность приводит ко второму тривиальному решению

$$\varphi(x) \equiv 0, \quad \psi(x) \equiv a^x \quad (3)$$

[точнее говоря, ψ должно здесь быть решением функционального уравнения $\psi(x+y) = \psi(x)\psi(y)$; известно (см. III.15), что при довольно общих дополнительных предположениях это дает (3), если только $\psi(x) \not\equiv 0$].

Итак, если отбросить тривиальные решения, то $\psi(x) = 1$ там, где $\varphi(x) = 0$. Пользуясь симметрией первого уравнения относительно x и y , получаем

$$\varphi(x) + \frac{\varphi(y)\psi(x)}{1 - \varphi(x)\varphi(y)} \equiv \varphi(y) + \frac{\varphi(x)\psi(y)}{1 - \varphi(x)\varphi(y)},$$

и если $\varphi(x) \neq 0$ и $\varphi(y) \neq 0$, то

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} - \varphi(x) - \frac{1}{\varphi(x)} \equiv \frac{\psi(y)}{\varphi(y)} - \varphi(y) - \frac{1}{\varphi(y)}. \quad (4)$$

Левая часть этого тождества зависит только от x , а правая только от y . Следовательно, та и другая равны одной и той же константе, которую мы обозначим $2c$. Тогда

$$\psi(x) \equiv 1 + 2c\varphi(x) + \varphi^2(x) = [\varphi + c]^2 + 1 - c^2. \quad (5)$$

Это тождество мы доказали сейчас при условии, что $\varphi(x) \neq 0$. Однако, как мы видели выше, оно справедливо и при $\varphi(x) = 0$, а следовательно, и при всех x . Подставляя (5) в первое из исходных функциональных уравнений, получаем

$$\varphi(x+y) = \frac{\varphi(x) + \varphi(y) + 2c\varphi(x)\varphi(y)}{1 - \varphi(x)\varphi(y)}. \quad (6)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что если φ удовлетворяет уравнению (6), а ψ находится из (5), то оба функциональных уравнения, данные в условии задачи, удовлетворяются. Таким образом, нам остается решить уравнение (6).

Прежде чем переходить к отысканию общего решения, решим (6) в классе функций, имеющих производную в нуле, то есть таких, у которых существует предел

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\varphi(y)}{y} = A$$

(выше мы уже нашли, что $\varphi(0) = 0$). Из (6) имеем

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+y) - \varphi(x)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\varphi(y)}{y} \cdot \frac{1 + 2c\varphi(x) + \varphi^2(x)}{1 - \varphi(x)\varphi(y)} = \\ = A(1 + 2c\varphi(x) + \varphi^2(x)).$$

Следовательно, функция $\varphi(x)$ дифференцируема и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\varphi}{dx} = A(1 + 2c\varphi + \varphi^2). \quad (7)$$

Решая это уравнение с учетом начального условия $\varphi(0) = 0$, находим

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sqrt{1-c^2} \operatorname{tg}(Ax\sqrt{1-c^2} + \arcsin c) - c, & \text{если } c^2 < 1; \\ c \frac{Ax}{1-Ax}, & \text{если } c = \pm 1; \\ -\sqrt{c^2-1} \operatorname{th}(Ax\sqrt{c^2-1} + \\ + \ln|c - \sqrt{c^2-1}|) - c, & \text{если } c^2 > 1 \end{cases} \quad (8)$$

(th следует заменить на cth, если модуль аргумента > 1). Из (5) находим соответствующие ψ :

$$\psi(x) = \begin{cases} (1-c^2) \sec^2(Ax\sqrt{1-c^2} + \arcsin c), & \text{если } c^2 < 1; \\ \frac{1}{(1-Ax)^2}, & \text{если } c = \pm 1; \\ (c^2-1) \left[-\frac{1}{\operatorname{ch}^2} \text{ или } \frac{1}{\operatorname{sh}^2} \right] (Ax\sqrt{c^2-1} + \\ + \ln|c - \sqrt{c^2-1}|), & \text{если } c^2 > 1. \end{cases} \quad (9)$$

Пусть $c^2 < 1$. Запишем $\varphi(x)$ в виде

$$\varphi(x) = \sqrt{1-c^2} \operatorname{tg} f(x) - c. \quad (10)$$

Из (6) получаем функциональное уравнение для f

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - \arcsin c,$$

и, значит, $F(x) = f(x) - \arcsin c$ удовлетворяет уравнению

$$F(x+y) = F(x) + F(y).$$

Оставляя в стороне „патологические“ решения этого уравнения (см. III. 15), имеем $F(x) = ax$, откуда опять приходим к первой формуле (8) ($a = A\sqrt{1-c^2}$).

Аналогично обстоит дело и при $c^2 \geq 1$. Таким образом, все «приличные» решения (например, ограниченные в некоторой окрестности точки 0) даются формулами (1), (3), (8) и (9).

5. Обозначим второй циркулянт D_n . Тогда *

$$D_n = f(\varepsilon_0) f(\varepsilon_1) f(\varepsilon_2) \dots f(\varepsilon_{n-1}),$$

где

$$f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_n x^{n-1}$$

и

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

— все значения корней n -й степени из 1. Пусть d — знаменатель арифметической прогрессии, членами которой являются элементы циркулянта D_n . Тогда $a_k = a_1 + (k-1)d$ и

$$\begin{aligned} f(\varepsilon) &= a_1 (1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^{n-1}) + \\ &\quad + d (\varepsilon + 2\varepsilon^2 + 3\varepsilon^3 + \dots + (n-1)\varepsilon^{n-1}) = \\ &= \begin{cases} 0 + \frac{dn}{\varepsilon - 1}, & \text{если } \varepsilon \neq \varepsilon_0 = 1, \\ a_1 n + \frac{d(n-1)n}{2} = n \left(a_1 + \frac{n-1}{2} d \right), & \text{если } \varepsilon = \varepsilon_0 = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{d^{n-1} n^n \left(a_1 + \frac{n-1}{2} d \right)}{(\varepsilon_1 - 1)(\varepsilon_2 - 1) \dots (\varepsilon_{n-1} - 1)} = \\ &= (-1)^{n-1} d^{n-1} n^{n-1} \left(a_1 + \frac{n-1}{2} d \right), \end{aligned}$$

поскольку

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) \dots (1 - \varepsilon_{n-1}) &= \lim_{x \rightarrow 1} (x - \varepsilon_1) \dots (x - \varepsilon_{n-1}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = n. \end{aligned}$$

Подставляя $a_1 = d = 1$, находим значение первого циркулянта

$$(-1)^{n-1} n^{n-1} \left(1 + \frac{n-1}{2}\right) = (-1)^{n-1} n^{n-1} \frac{(n+1)}{2}.$$

6. Исходное уравнение можно преобразовать к любому из двух видов: либо

$$\left[x^2 + \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right]^2 = y^2 - \frac{(5-2\sqrt{5})}{4} \left[x + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]^2, \quad (1)$$

либо

$$\left[x^2 + \frac{x}{2} + 1\right]^2 = y^2 + \frac{5x^2}{4}. \quad (2)$$

Следовательно, если x и y — вещественные числа, удовлетворяющие исходному уравнению, то должны выполняться неравенства

$$x^2 + \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{4} \leq |y| \leq x^2 + \frac{x}{2} + 1,$$

откуда

$$|y| = x^2 + \frac{x+a}{2}, \quad 0 < a \leq 2.$$

Поскольку нас интересуют лишь целые x и y , то при четном x число a должно быть равно 2. В этом случае из уравнения (2) следует, что $x=0$. При нечетном x число a должно быть равно 1. В этом случае, поскольку

$$y^2 = \left[x^2 + \frac{x+1}{2}\right]^2 - \frac{(x-3)(x+1)}{4},$$

x может принимать лишь два значения: $x=3$ и $x=-1$.

Следовательно, все решения исходного уравнения в целых числах исчерпываются следующими значениями:

$$x = -1, \quad 0, \quad 3;$$

$$y = \pm 1, \pm 1, \pm 11,$$

что и требовалось доказать.

7. Докажем, что при $|x| < 1$ и любом натуральном s

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^s}} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^s}} &= \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{s+2}{2} \cdot \frac{3s+2}{2} \cdots \frac{(2n-1)s+2}{2}}{(s+1)(2s+1) \cdots (ns+1)} x^{ns+1}, \\ \left(\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^s}} \right)^2 &= \\ &= x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{s+2}{2} \cdot \frac{3s+2}{2} \cdots \frac{(2n-1)s+2}{2}}{(s+1)(2s+1) \cdots (ns+1)} \cdot \frac{2x^{ns+2}}{ns+2}. \end{aligned}$$

В разложениях, приведенных в условии задачи, $s=4$.
Обозначим для краткости

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^s}}.$$

Тогда

$$\frac{d}{dx} \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^s}}$$

и

$$2\varphi(x) \frac{d}{dx} \varphi(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^s}} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^s}}.$$

Интегрируя, находим

$$\varphi^2(x) = 2 \int_0^x \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^s}} \int_0^t \frac{du}{\sqrt{1-u^s}} \right) dt.$$

Следовательно, умножив первый ряд на $2dx$ и проинтегрировав его от 0 до x , мы получим второй ряд.

Введем новое обозначение

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^s}} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^s}}.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x^s} + \frac{\frac{s}{2} x^{s-1}}{(1-x^s)^{3/2}} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^s}} = \frac{1}{1-x^s} + \frac{\frac{s}{2} x^{s-1} y}{1-x^s},$$

или

$$(1 - x^s) \frac{dy}{dx} - \frac{s}{2} x^{s-1} y - 1 = 0. \quad (1)$$

Функция $1/\sqrt{1-x^s}$ допускает разложение в степенной ряд с единичным кругом сходимости. Интегрируя этот ряд почленно и умножая затем на исходный, получаем разложение вида $y = x + ax^{s+1} + bx^{2s+1} + cx^{3s+1} + dx^{4s+1} + \dots$. При $|x| < 1$ этот ряд допускает почленное дифференцирование, поэтому коэффициенты $a, b, c, d, \dots$ мы найдем, подставляя степенной ряд для y в дифференциальное уравнение (1):

$$\begin{aligned} 1 + (s+1)ax^s + (2s+1)bx^{2s} + (3s+1)cx^{3s} + (4s+1)dx^{4s} + \dots \\ \dots - x^s - (s+1)ax^{2s} - (2s+1)bx^{3s} - (3s+1)cx^{4s} - \dots \\ \dots - 1 - \frac{s}{2}x^s - \frac{s}{2}ax^{2s} - \frac{s}{2}bx^{3s} - \frac{s}{2}cx^{4s} - \dots \\ \dots \equiv 0. \end{aligned}$$

Приравнявая нулю коэффициенты при различных степенях x , получаем

$$\begin{aligned} a &= \frac{\frac{s+2}{2}}{s+1}, \quad b = \frac{\frac{s+2}{2} \cdot \frac{3s+2}{2}}{(s+1)(2s+1)}, \\ c &= \frac{\frac{s+2}{2} \cdot \frac{3s+2}{2} \cdot \frac{5s+2}{2}}{(s+1)(2s+1)(3s+1)}. \end{aligned}$$

Коэффициент при x^{ns+1} равен

$$\frac{\frac{s+2}{2} \cdot \frac{3s+2}{2} \dots \frac{(2n-1)s+2}{2}}{(s+1)(2s+1) \dots (ns+1)}.$$

Тем самым мы доказали, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^s}} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^s}} = \\ = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{s+2}{2} \cdot \frac{3s+2}{2} \dots \frac{(2n-1)s+2}{2}}{(s+1)(2s+1) \dots (ns+1)} x^{ns+1}. \end{aligned}$$

Умножая полученное разложение на $2dx$ и интегрируя в пределах от 0 до x , получаем второе соотношение

$$\left(\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^s}}\right)^2 = \\ = x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{s+2}{2} \cdot \frac{3s+2}{2} \cdots \frac{(2n-1)s+2}{2}}{(s+1)(2s+1) \cdots (ns+1)} \cdot \frac{2x^{ns+2}}{ns+2}.$$

При $s=4$ мы получим разложения, которые требовалось доказать.

8. Эту задачу (ныне широко известную) Льюис Кэррол предложил в декабре 1893 г. Условия задачи не определены, и ответ на нее зависит от дополнительных предположений, принимаемых при ее решении. Именно с этим связаны разногласия и неоднократно возникавшие на страницах популярных изданий по физике споры относительно того, какое решение следует считать правильным. Начало полемике положили еще коллеги Кэррола по Оксфордскому университету профессора физики Клифтон и Прайс, профессор химии Вернон-Харкорт и лектор Сэмпсон. Каждый из них считал единственно верным лишь свой ответ. Иронизируя над своими учеными коллегами, Кэррол сделал в дневнике следующую запись: «Получил ответ профессора Клифтона на задачу «Обезьяна и груз». Весьма любопытно, сколь различных мнений придерживаются хорошие математики. Прайс утверждает, что груз с возрастающей скоростью будет двигаться вверх, Клифтон и Харкорт — что груз будет двигаться вверх с такой же скоростью, как и обезьяна, в то время как Сэмпсон считает, что груз будет опускаться».

Как показывают элементарные физические соображения, если пренебречь трением каната о блок и массами веревки и блока, то обезьяна и груз будут двигаться вверх с одинаковыми ускорениями. Их скорости в любой момент времени равны, и за равные промежутки времени они проходят равные расстояния.

К иному результату приводит учет массы блока. Пусть M — масса обезьяны (и груза), m — масса блока, r — его радиус и mk^2 — момент инерции блока относительно оси вращения, a_1 — ускорение обезьяны, a —

ускорение груза (оба направлены вверх). Тогда $a_1/a = 1 + mk^2/Mr^2$. Отношение ускорений не зависит от времени, скорости обезьяны и груза, и расстояния, проходимые ими за равные промежутки времени, соотносятся между собой как ускорения.

Учет сил трения и веса каната также вносит существенные изменения в ответ задачи. (Например, из физических соображений ясно, что если трение каната о блок достаточно велико, то обезьяна сможет взобраться по канату, не потревожив при этом груз.)

Анализ различных случаев сильно упрощается, если воспользоваться принципом д'Аламбера и применить его к системе, состоящей из обезьяны, груза, каната и блока. Если x — расстояние, отсчитываемое от начального положения ($x > 0$ при смещении вверх), F — сила трения, m' — полная масса каната, а ρ — масса единицы его длины (остальные обозначения те же, что и выше), то

$$a = \frac{2\rho g x + Ma_1 - F}{M + m' + mk^2/r^2}.$$

9. Если $x > 0$ и $y(x) > 0$, то уравнение

$$y(x) = \frac{y^2(x+1)}{x} + y(x+1) \quad (1)$$

имеет один положительный корень

$$y(x+1) = \frac{\sqrt{x^2 + 4xy(x)} - x}{2}.$$

Кроме того, из (1) следуют неравенства

$$y(x) > y(x+1) > 0. \quad (2)$$

Пользуясь тем, что $y(x+1)y(x) \neq 0$, преобразуем уравнение (1) к виду

$$\frac{1}{y(x+1)} - \frac{1}{y(x)} = \frac{y(x+1)}{xy(x)},$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{1}{y(x)} - \frac{1}{y(1)} &= \sum_{t=1}^{x-1} \frac{1}{t} \frac{y(t+1)}{y(t)} = \sum_{t=1}^{x-1} \frac{1}{t} \left[1 - \frac{y(t) - y(t+1)}{y(t)} \right] = \\ &= \sum_{t=1}^{x-1} \frac{1}{t} - \sum_{t=1}^{x-1} \frac{1}{t^2} \frac{y^2(t+1)}{y(t)}. \end{aligned}$$

Но

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{1}{t} = \ln x + r,$$

где $\lim_{x \rightarrow \infty} r = C$ (C — постоянная Эйлера; см. III. 12). Следовательно,

$$\frac{1}{y(x) \ln x} - 1 = \frac{\frac{1}{y(1)} + r - \sum_{t=1}^{x-1} \frac{1}{t^2} \frac{y^2(t+1)}{y(t)}}{\ln x}. \quad (3)$$

Из неравенства (2) получаем

$$y(x+1) < y(x) < y(1), \quad y^2(x+1) < y(1)y(x),$$

откуда

$$\sum_{t=1}^{x-1} \frac{1}{t^2} \frac{y^2(t+1)}{y(t)} < y(1) \sum_{t=1}^{x-1} \frac{1}{t^2} < \frac{\pi^2 y(1)}{6}.$$

Таким образом, числитель дроби, стоящей в правой части соотношения (3), при $x \rightarrow \infty$ остается ограниченной величиной, в то время как ее знаменатель неограниченно возрастает. Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) \ln x = 1,$$

что и требовалось доказать.

10. Введем на плоскости прямоугольную систему координат, выбрав за ось x прямую, на которой расположены основания равносторонних треугольников, а ось y направим так, чтобы она проходила через вершину первого треугольника. Вершина n -го треугольника, противолежащая основанию, расположится в точке с координатами $x = n(n-1)$, $y = \pm [(2n-1)/2] \sqrt{3}$. Исключив n , найдем соотношение между координатами вершин. Оно имеет следующий вид: $y^2 = 3(x + 1/4)$. Это уравнение параболы с фокусом в точке $(1/2, 0)$. Расстояние от вершины n -го треугольника до фокуса параболы равно $n^2 - n + 1$, то есть выражается целым числом, что и требовалось доказать.

11. Все ящики допустимых размеров пройдут сквозь окошко, имеющее форму квадрата со стороной $72/(1 + 2\sqrt{2}) \approx 18,807$ дюймов. Наименее удобную форму имеет ящик, ребра которого относятся как $1:1:(\sqrt{2} - 1)$.

12. Пусть $r \leq m$ — ранг матрицы A . Не ограничивая общности, предположим, что первые r строк матрицы A линейно независимы. (Этого всегда можно добиться перестановкой строк матрицы A . Соответствующая перестановка столбцов матрицы B позволяет сохранить неизменными соотношения, приведенные в условиях задачи.)

По крайней мере один определитель r -го порядка, составленный из элементов первых r строк матрицы A , отличен от нуля. Мы всегда можем выбрать r векторов с компонентами

$$c_{lg}, \quad l=1, 2, \dots, n; \quad g=1, 2, \dots, r$$

так, чтобы выполнялось соотношение

$$\sum_{l=1}^n a_{il}c_{lg} = \delta_{ig}, \quad i, g=1, 2, \dots, r, \quad (1)$$

где δ_{ig} — дельта-символ Кронекера.

Кроме того, поскольку ранг матрицы A равен r , то любую из m строк матрицы A можно представить в виде линейной комбинации первых r строк, то есть существуют постоянные λ_{kp} , такие, что

$$\sum_{p=1}^r \lambda_{kp} a_{pl} = a_{kl}, \quad k=1, 2, \dots, m; \quad l=1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Из условий задачи получаем, что

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{ij} b_{jk} a_{kl} c_{li} = \sum_{i=1}^r \sum_{l=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m a_{ij} b_{jk} a_{kl} c_{li} \right) = 0.$$

Но соотношение (2) позволяет преобразовать левую часть этого равенства к виду

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^r \sum_{l=1}^r \sum_{i=1}^n b_{jk} \lambda_{kp} a_{pl} c_{li} a_{ij},$$

а соотношение (1) — упростить полученное выражение до следующего:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^r \sum_{i=1}^r b_{jk} \lambda_{kp} \delta_{pi} a_{ij},$$

которое в свою очередь сводится к выражению

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^r b_{jk} \lambda_{kp} a_{pj}.$$

Повторное использование соотношения (2) приводит к окончательному результату: исходная четырехкратная сумма равна

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m b_{jk} a_{kj}.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m b_{jk} a_{kj} = 0,$$

что и требовалось доказать.

13. Введем на плоскости прямоугольную систему координат так, чтобы ось x была параллельна осям парабол. Пусть $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$ — точки касания парабол с их общей касательной, P_3 — середина отрезка P_1P_2 .

Запишем уравнения парабол:

$$y^2 + 2B_1x + 2C_1y + D_1 = 0, \quad (1)$$

$$y^2 + 2B_2x + 2C_2y + D_2 = 0. \quad (2)$$

Уравнение касательной к параболе (1), проходящей через точку P_1 , имеет вид

$$yy_1 + B_1(x + x_1) + C_1(y + y_1) + D_1 = 0.$$

Поскольку эта касательная проходит через точку P_2 , то

$$y_1y_2 + B_1(x_1 + x_2) + C_1(y_1 + y_2) + D_1 = 0. \quad (3)$$

С другой стороны, уравнение касательной ко второй параболе, проходящей через точку P_2 , имеет вид

$$yy_2 + B_2(x + x_2) + C_2(y + y_2) + D_2 = 0,$$

а поскольку эта прямая проходит через точку P_1 , то

$$y_1 y_2 + B_2(x_1 + x_2) + C_2(y_1 + y_2) + D_2 = 0. \quad (4)$$

Вычитая соотношение (4) из соотношения (3), получаем

$$2(B_1 - B_2) \frac{x_1 + x_2}{2} + 2(C_1 - C_2) \frac{y_1 + y_2}{2} + (D_1 - D_2) = 0. \quad (5)$$

Но уравнение общей хорды двух парабол имеет вид

$$2(B_1 - B_2)x + 2(C_1 - C_2)y + (D_1 - D_2) = 0. \quad (6)$$

Следовательно, соотношение (5) означает, что координаты середины P_3 отрезка $P_1 P_2$ удовлетворяют уравнению (6) и общая хорда делит пополам общую касательную двух парабол с параллельными осями.

14. Докажем более общее утверждение: если f — однородный многочлен относительно n переменных и $H(f)$ — его гессиан, то

$$H(f^m) = c H(f) f^{n(m-1)}.$$

По определению¹,

$$\begin{aligned} H(f^m) &= \left| \frac{\partial^2 f^m}{\partial x_i \partial x_j} \right| = \\ &= m^n \left| f^{m-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + (m-1) f^{m-2} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right|, \\ &\quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Определитель, стоящий в правой части последнего равенства, можно разложить в сумму 2^n определителей: один из них совпадает с гессианом $H(f)$, каждый элемент которого умножен на f^{m-1} , а каждый из остальных $2^n - 1$ определителей получается при замене элементов, стоящих в j -м столбце этого определителя, произведениями $(m-1) f^{m-2} \cdot (\partial f / \partial x_i) (\partial f / \partial x_j)$ при одном или нескольких значениях j . Определители, в которых замене подверглись два или большее число столбцов, равны нулю, поскольку если заменены j -й и k -й столбцы, то, вынеся множители $\partial f / \partial x_j$ и $\partial f / \partial x_k$, мы получим определитель с двумя одинаковыми столбцами: j -м и k -м. Сле-

¹ Здесь и далее символом $|a_{ij}|$ обозначается определитель матрицы с элементами a_{ij} . — Прим. ред.

довательно,

$$H(f^m) = m^n \left[H(f) f^{n(m-1)} + (m-1) f^{n(m-1)} \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} C_{ij} \right],$$

где C_{ij} — алгебраическое дополнение элемента $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$ в гессиане $H(f)$, а индексы суммирования пробегают значения от 1 до n .

Если p — степень однородного многочлена f относительно переменных, то по теореме Эйлера об однородных функциях

$$\sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = pf \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} = (p-1) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

ибо $\partial f / \partial x_i$ — однородный многочлен степени $(p-1)$. Таким образом,

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} C_{ij} = \frac{1}{p-1} \sum_{i,k} x_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} C_{ij} = \frac{1}{p-1} x_j H(f),$$

поскольку

$$\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} C_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq j, \\ H(f) & \text{при } k = j. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} C_{ij} = \frac{1}{p-1} H(f) \sum_j x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{p}{p-1} H(f) f$$

и

$$H(f^m) = \frac{m^n (mp-1)}{p-1} H(f) f^{n(m-1)}.$$

В частности, при $m=2$

$$H(f^2) = \frac{2^n (2p-1)}{p-1} H(f) f^n.$$

15. Пусть $p/q = 0, d_1 d_2 \dots d_n + (q-p)/q \cdot 10^{-n}$, где d_i — цифра, стоящая на i -ом месте после запятой. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{q-p}{q} &= 1 - \frac{p}{q} = 1 - 0, d_1 d_2 \dots d_n - 10^{-n} + \frac{p}{q} \cdot 10^{-n} = \\ &= 0, (9-d_1)(9-d_2) \dots (9-d_n) + \frac{p}{q} \cdot 10^{-n}, \end{aligned}$$

поскольку $1 - 10^{-n} = 0,99 \dots 9$ (n девяток после запятой). Следовательно,

$$\frac{p}{q} = 0, d_1 d_2 \dots d_n (9-d_1)(9-d_2) \dots (9-d_n) + \frac{p}{q} \cdot 10^{-2n},$$

где $(9 - d_i)$ — цифра, стоящая на $(n + i)$ -ом месте после запятой. Тем самым утверждение задачи доказано.

16. Эту задачу сформулировал и решил известный английский специалист по головоломкам Генри Эрнест Дьюдени¹. Предложенное им решение применимо не только к правильным треугольникам, но и к треугольникам более общего вида, удовлетворяющим одному дополнительному условию. Мы рассмотрим решение для более общего случая.

Пусть ABC (рис. 3) — данный треугольник, D и E — середины сторон AB и BC . Построим отрезок R , равный

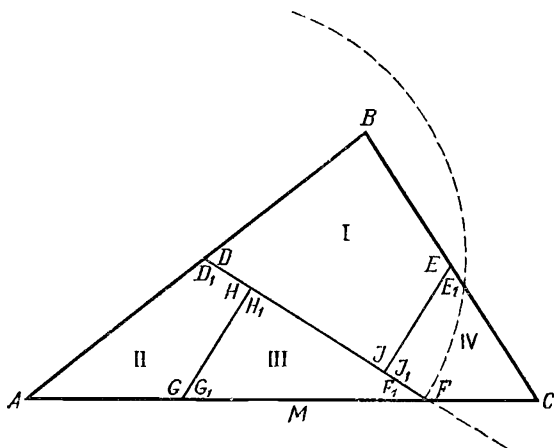


Рис. 3.

стороне квадрата, равновеликого треугольнику ABC . Отрезок R можно построить при помощи циркуля и линейки, поскольку он равен среднему геометрическому отрезка AD и перпендикуляра, опущенного из вершины C на сторону AB . С центром в точке D и радиусом R опишем окружность, пересекающую сторону AC в точке F . Проведем прямую DF и построим на отрезке FA точку G так, чтобы $FG = CA/2$. Решение задачи возможно, если $FG \leq FA$ или, иначе, если точка F принадлежит отрезку CM , где M — середина стороны CA .

¹ См. о нем: М. Гарднер, Математические головоломки и развлечения, М., изд-во «Мир», 1971, стр. 170. В той же серии издан сборник Г. Э. Дьюдени, 520 головоломок, М., изд-во «Мир», 1975.— Прим. перев.

(Проверим, что задача Дьюдени допускает решение для равностороннего треугольника. Поскольку для равностороннего треугольника ABC выполняется неравенство $CD > AD$, величина R как среднее геометрическое этих отрезков должна удовлетворять неравенствам $CD > R > AD$. Но $DM = AD$, и, таким образом, точка M лежит внутри окружности радиуса R с центром в точке D , а точка C лежит вне этой окружности. Следовательно, точка F принадлежит отрезку CM , а точка G — отрезку MA .)

Из точек E и G опустим на FG перпендикуляры EJ и GH . После этого разрежем треугольник ABC на 4 части: четырехугольники $DBEJ$, $HGAD_1$, CFJ_1E_1 и треугольник

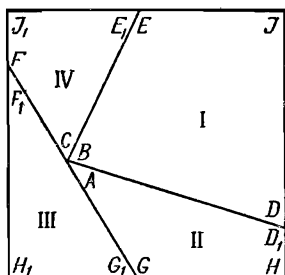


Рис. 4.

$G_1H_1F_1$, где $D_1 \equiv D$, $J_1 \equiv J$ и т. д. Сложим четырехугольники так, чтобы стороны D_1A и DB , EB и E_1C совместились (рис. 4). В результате отрезки FC и AG расположатся на одной прямой, поскольку сумма углов при вершинах A , B и C равна 180° как сумма внутренних углов треугольника ABC . Приложим к получившейся фигуре треугольник $G_1H_1F_1$ так, чтобы его сторона F_1G_1 совпала с отрезком FCG (это возможно потому, что по построению $FC + AG = FG$). Получившаяся фигура имеет форму прямоугольника, поскольку смежные углы с вершинами в точках D и D_1 , E и E_1 , F и F_1 , G и G_1 дополняют друг друга до 180° , а углы при вершинах J , J_1 , H и H_1 прямые.

Докажем, что эта фигура — квадрат. Для этого достаточно доказать, что $JD + DH = R$.

Пусть C' , A' и B' — основания перпендикуляров, опущенных из вершин C , A и B на прямую FD . Тогда $C'F + HA' = FH$ по построению точки G , $C'J = JB'$ и

$A'D = DB'$. Вычитая первое равенство из второго, получаем $FJ - HA' = JB' - FH$, или $FJ + FH = JB' + HA' = JD + DB' + HD - A'D = JD + HD$. С другой стороны, $(FJ + FH) + (JD + HD) = 2R$, а поскольку отрезки, заключенные в скобках, равны, то $FJ + FH = JD + HD = R$, что и завершает решение задачи.

17. Пусть h — высота конуса, r — радиус основания и 2α — угол при вершине в осевом сечении. Выберем

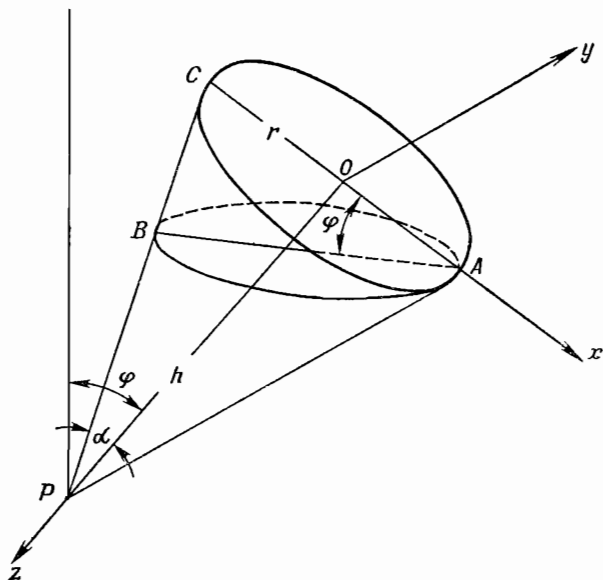


Рис. 5.

прямоугольную систему координат так, чтобы начало ее совпадало с центром основания конуса, ось x лежала в плоскости, которую описывает при вращении ось конуса, ось y располагалась перпендикулярно этой плоскости, а ось z совпадала с осью конуса (рис. 5).

Тогда уравнение боковой поверхности конуса примет вид

$$r^2(h - z)^2 = h^2(x^2 + y^2), \quad (1)$$

а уравнение свободной поверхности воды в коническом бокале в момент, когда ось конуса составляет с верти-

калью угол φ , запишется так:

$$z = (r - x) \operatorname{tg} \varphi. \quad (2)$$

Подставляя z из (2) в (1), получаем уравнение проекции эллипса, ограничивающего поверхность воды в стакане, на плоскость Oxy :

$$r^2 (h - r \operatorname{tg} \varphi + x \operatorname{tg} \varphi)^2 = h^2 (x^2 + y^2).$$

Максимальная ширина этого эллипса составляет

$$2y = 2r \sqrt{\frac{h - r \operatorname{tg} \varphi}{h + r \operatorname{tg} \varphi}} = 2r \sqrt{\frac{\cos(\varphi + \alpha)}{\cos(\varphi - \alpha)}}.$$

Если AB — длина этого эллиптического сечения, то по теореме синусов из треугольника ABC следует, что $AB \cos(\varphi - \alpha) = 2r \cos \alpha$. Площадь свободной поверхности воды в бокале

$$S = \frac{\pi}{2} \cdot AB y = \frac{\pi r^2 \cos \alpha \cos^{1/2}(\varphi + \alpha)}{\cos^{3/2}(\varphi - \alpha)}$$

достигает максимума при $\operatorname{tg}(\varphi + \alpha) = 3 \operatorname{tg}(\varphi - \alpha)$, то есть при $\varphi = (1/2) \operatorname{Arc} \sin(2 \sin 2\alpha)$, если только $|2 \sin 2\alpha| \leq 1$ (то есть при $\alpha \leq 15^\circ$ или при $\alpha \geq 75^\circ$). Если же $15^\circ < \alpha < 75^\circ$, то площадь свободной поверхности воды в бокале максимальна при $\varphi = 0$ и равна площади основания цилиндра. Далее, если уравнение $\sin 2\alpha = 2 \sin 2\alpha$ разрешимо, то угол 2φ заключен между 2α и $180^\circ - 2\alpha$. Из физических соображений ясно, что $0^\circ < \varphi < 90^\circ - \alpha$, поэтому $\alpha < \varphi < 90^\circ - \alpha$ и, следовательно, $\alpha \leq 15^\circ$.

Пусть φ_1 и φ_2 ($\varphi_2 > \varphi_1$) — два значения φ , найденные из соотношения $\sin 2\alpha = 2 \sin 2\alpha$. Тогда при $\varphi = \varphi_1$ площадь S свободной поверхности воды в бокале минимальна, а при $\varphi = \varphi_2$ — максимальна. При $\alpha = 15^\circ$ оба значения φ совпадают: $\varphi_1 = \varphi_2 = 45^\circ$. В этом предельном случае S не достигает ни максимума, ни минимума. Когда угол α убывает до 0° , значение φ_1 падает до 0° , а значение φ_2 возрастает до 90° . Остается определить, при каком значении α площадь свободной поверхности воды S достигает при $\varphi = \varphi_2$ максимума, который больше площади основания цилиндра (свободная поверхность воды при $\varphi = 0^\circ$).

В этом случае

$$\frac{\pi r^2 \cos \alpha \cos^{1/2}(\varphi_2 + \alpha)}{\cos^{3/2}(\varphi_2 - \alpha)} > \pi r^2.$$

Поскольку $\operatorname{tg}(\varphi_2 + \alpha) = 3 \operatorname{tg}(\varphi_2 - \alpha)$ и, следовательно, $\sin \alpha \cos \alpha = \sin(\varphi_2 - \alpha) \cos(\varphi_2 + \alpha)$, это неравенство можно преобразовать к виду

$$\cos^3 \alpha \sin \alpha > \cos^3(\varphi_2 - \alpha) \sin(\varphi_2 - \alpha). \quad (1)$$

Если $x = \cos 2\alpha$, то

$$\begin{aligned} \sin^2(\varphi_2 - \alpha) &= \frac{1}{2} [1 - \cos 2(\varphi_2 - \alpha)] = \\ &= \frac{1}{2} (2x^2 - 1 + x \sqrt{4x^2 - 3}), \\ \cos^2(\varphi_2 - \alpha) &= \frac{1}{2} [1 + \cos 2(\varphi_2 - \alpha)] = \\ &= \frac{1}{2} (3 - 2x^2 - x \sqrt{4x^2 - 3}). \end{aligned}$$

После элементарных, но довольно громоздких выкладок неравенство (1) можно привести к виду

$$(1 - x^2)(1 + x)^3(4x^3 + 2x - 7)[(2x + 1)^2 - 8] < 0.$$

В интервале $[0, 1]$ это неравенство выполняется при $x > (2\sqrt{2} - 1)/2 = 0,91421$, то есть при $2\alpha < 23^\circ 56'$. Лишь для таких значений углов при вершине осевого сечения конуса максимальная площадь свободной поверхности воды в бокале превышает площадь основания конуса.

Чтобы найти угол наклона φ , при котором «расход воды» (количество воды, вытекающее из стакана в единицу времени) максимален, необходимо выяснить, когда достигает максимума произведение площади свободной поверхности воды и вертикальной составляющей скорости точки A относительно вершины конуса P . Если ω — угловая скорость конуса, то линейная скорость точки A относительно точки P равна $\omega \sqrt{h^2 + r^2}$ и перпендикулярна PA . Следовательно, необходимо найти максимум выражения

$$\frac{\pi r^2 \cos \alpha \cos^{1/2}(\varphi + \alpha) \sqrt{h^2 + r^2} \sin(\varphi + \alpha) \omega}{\cos^{3/2}(\varphi - \alpha)}.$$

Множитель $\pi \omega r^2 \cos \alpha$ не зависит от φ , поэтому для того, чтобы найти максимум всего выражения, достаточно определить максимум второго множителя

$$\frac{\cos^{1/2}(\varphi + \alpha) \sin(\varphi + \alpha)}{\cos^{3/2}(\varphi - \alpha)}$$

или его квадрата. Приравнивая нулю производную, получаем $3 \cos(\varphi + \alpha) \cos 2\alpha = \cos(\varphi - \alpha)$, или

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{ctg} \alpha \frac{3 \cos 2\alpha - 1}{3 \cos 2\alpha + 1}. \quad (2)$$

Итак, при $1 > \cos 2\alpha > 1/3$ наибольший расход воды достигается при остром угле наклона φ , определяемом из соотношения (2). Во всех остальных случаях расход воды максимален лишь в начальный момент при $\varphi = 0$.

18. Если определитель $D(1)$ содержит столбец или строку, заполненные нулями, то утверждение задачи верно. Предположим, что $D(1)$ содержит строку или столбец с двумя нулями и отличным от нуля третьим элементом. Перестановкой столбцов и строк мы всегда можем добиться, чтобы этот столбец или строка стали первыми, а содержащийся в них отличный от нуля элемент оказался в левом верхнем углу, то есть чтобы элемент a был отличен от нуля. Нетрудно видеть, что и в этом случае утверждение задачи верно.

Предположим теперь, что ни одна строка и ни один столбец определителя $D(1)$ не содержат двух нулей. Если нулю равен лишь один элемент определителя $D(1)$, то, не ограничивая общности, можно считать, что $a = 0$. Если нулю равны два элемента определителя $D(1)$, то одним из них, как и в предыдущем случае, можно считать a . Тогда ни один из элементов b, c, d, g не может обращаться в нуль, и вторым элементом определителя $D(1)$, равным нулю, должен быть один из элементов e, f, h или i . Перестановкой строк и столбцов этот элемент всегда можно перевести в центр определителя $D(1)$, то есть сделать так, чтобы $e = 0$. Тогда элементы f и h будут заведомо отличны от нуля. Наконец, если определитель $D(1)$ содержит третий нуль, то опять же, не ограничивая общности рассуждения, можно считать, что $i = 0$ (а два остальных нуля занимают положение элементов a и e).

Условившись относительно расположения нулей, разложим определитель $D(r)$ по правилу Крамера:

$$D(r) = A_1' + A_2' + A_3' - A_4' - A_5' - A_6',$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= aei, & A_2 &= dhc, & A_3 &= gb f, \\ A_4 &= ah f, & A_5 &= dbi, & A_6 &= gec. \end{aligned} \quad (1)$$

Необходимо рассмотреть следующие случаи:

- 1) ни одна из величин A_i не равна нулю (все элементы $D(1)$ отличны от 0);
- 2) нулю равны только A_1 и A_4 (только $a = 0$);
- 3) нулю равны A_1 , A_4 и A_6 ($a = e = 0$);
- 4) нулю равны A_1 , A_4 , A_5 и A_6 ($a = e = i = 0$).

Последний случай можно сразу исключить из рассмотрения, поскольку отличные от нуля величины A_2 и A_3 имеют одинаковые знаки и определитель $D(r)$ не может обращаться в нуль.

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_k$ — вещественные положительные величины и $c_1, c_2, \dots, c_k$ — вещественные отличные от нуля коэффициенты. Если функция

$$f(x) = c_1 A_1^x + c_2 A_2^x + \dots + c_k A_k^x$$

обращается в нуль при k конечных значениях x , то A_i можно объединить в одну или несколько групп так, что все A_i , входящие в одну группу, равны между собой, а сумма коэффициентов c_i , отвечающих одной группе, будет равна 0.

Доказательство. Применим индукцию по числу k . При $k = 1$ утверждение очевидно. Пусть оно доказано для всех $k' < k$. Если функция $f(x)$ имеет k вещественных нулей, то по теореме Ролля производная функции

$$\frac{f(x)}{A_1^x} = c_1 + c_2 \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^x + \dots + c_k \left(\frac{A_k}{A_1} \right)^x$$

имеет $k - 1$ нулей. Следовательно, функция

$$c_2 \ln \left(\frac{A_2}{A_1} \right) + c_3 \ln \left(\frac{A_3}{A_1} \right) \cdot \left(\frac{A_3}{A_2} \right)^x + \dots + c_k \ln \left(\frac{A_k}{A_1} \right) \cdot \left(\frac{A_k}{A_2} \right)^x$$

также обращается в нуль при $k - 1$ значениях x . Как показывают аналогичные рассуждения, функция

$$c_3 \ln \left(\frac{A_3}{A_1} \right) \ln \left(\frac{A_3}{A_2} \right) + c_4 \ln \left(\frac{A_4}{A_1} \right) \ln \left(\frac{A_4}{A_2} \right) \left(\frac{A_4}{A_3} \right)^x + \dots \\ \dots + c_k \ln \left(\frac{A_k}{A_1} \right) \ln \left(\frac{A_k}{A_2} \right) \cdot \left(\frac{A_k}{A_3} \right)^x$$

имеет $k - 2$ вещественных нулей и так далее. Обращение в нуль выражения

$$c_k \ln \left(\frac{A_k}{A_1} \right) \ln \left(\frac{A_k}{A_2} \right) \dots \ln \left(\frac{A_k}{A_{k-1}} \right)$$

означает, что по крайней мере одна пара величин A_i совпадает. Объединяя те члены функции $f(x)$, которые содержат равные A_i , мы получим выражение, содержащее меньшее число слагаемых и обращающееся в нуль при k различных вещественных значениях x . По индуктивному предположению в этой ситуации утверждение леммы верно, а тогда оно верно и для $f(x)$.

Тем самым лемма доказана.

Случай 1: $D(0) = 0$, и, следовательно, определитель $D(r)$ обращается в нуль при шести различных значениях r . По лемме это означает, что тройка величин A_1, A_2, A_3 из (1) совпадает с точностью до порядка с тройками A_4, A_5, A_6 .

Если, например, $A_1 = A_4, A_2 = A_5, A_3 = A_6$, то

$$a(ei - hf) = d(hc - bi) = g(bf - ec) = 0,$$

откуда видно, что 2-й и 3-й столбцы в определителе $D(1)$ пропорциональны. Аналогично обстоит дело и в остальных пяти вариантах.

Случай 2: выражение $A_2^r + A_3^r - A_5^r - A_6^r$ обращается в нуль при четырех различных значениях r , следовательно, либо $A_2 = A_5$ и $A_3 = A_6$, либо $A_2 = A_6$ и $A_3 = A_5$. В первом случае в $D(1)$ снова пропорциональны 2-й и 3-й столбцы, во втором — 2-я и 3-я строки.

Случай 3: выражение $A_2^r + A_3^r - A_5^r$ по лемме не может обращаться в нуль при трех различных значениях r (соответствующая группировка невозможна), что противоречит условию задачи.

Тем самым утверждение задачи полностью доказано.

19*. Эту задачу (при $n = 3$) и различные ее обобщения связывают с именами многих математиков (Вивiani, Торричелли, Ферма, Штейнер).

Пусть $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ — заданные точки, а $P(x, y)$ — искомая. Фиксируем произвольную точку $Q(x_0, y_0)$ и рассмотрим функцию

$$f_Q(x, y) = |\overrightarrow{QP}|$$

— расстояние от переменной точки P до Q . Если $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$ и $P'(x', y')$, $P''(x'', y'')$ — любые точки,

а точка $P(x, y)$ имеет координаты

$$x = \alpha x' + \beta x'', \quad y = \alpha y' + \beta y'',$$

то

$$\vec{QP} = \alpha \cdot \vec{QP'} + \beta \cdot \vec{QP''} = \vec{QP_1} + \vec{P_1P},$$

где $\vec{QP_1} = \alpha \cdot \vec{QP'}$, $\vec{P_1P} = \beta \cdot \vec{QP''}$. Если $P' \neq P''$, то в силу неравенства треугольника (рис. 6)

$$\begin{aligned} f_Q(\alpha x' + \beta x'', \alpha y' + \beta y'') &= |\vec{QP}| < |\vec{QP_1}| + |\vec{P_1P}| = \\ &= \alpha |\vec{QP'}| + \beta |\vec{QP''}| = \alpha f_Q(x', y') + \beta f_Q(x'', y''). \end{aligned}$$

Следовательно, функция $f_Q(x, y)$ строго выпукла (III. 13), а значит, строго выпукла и функция

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n f_{P_i}(x, y) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}, \quad (1)$$

минимум которой нам надлежит найти.

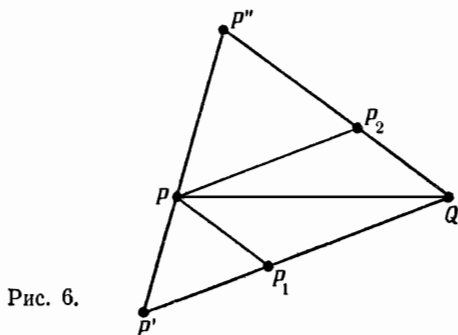


Рис. 6.

Точка минимума строго выпуклой функции, если она существует, — единственна, и для ее отыскания мы можем воспользоваться необходимым и достаточным условием (см. там же): для любого единичного вектора $e = \{\cos \alpha, \sin \alpha\}$ производная $\partial_e f$ по направлению e должна быть неотрицательной.

Вычислим сначала производную функции f_Q . Если $P \neq Q$, то

$$\begin{aligned}\partial_e f|_P &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{f_Q(x + t \cos \alpha, y + t \sin \alpha) - f_Q(x, y)}{t} = \\ &= \frac{d}{dt} \sqrt{(x - x_0 + t \cos \alpha)^2 + (y - y_0 + t \sin \alpha)^2} \Big|_{t=0} = \\ &= \frac{(x - x_0) \cos \alpha + (y - y_0) \sin \alpha}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = np_e \frac{\overrightarrow{QP}}{|\overrightarrow{QP}|}.\end{aligned}$$

Если же $P = Q$, то

$$\partial_e f|_P = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \sqrt{(t \cos \alpha)^2 + (t \sin \alpha)^2} = 1.$$

Так как производная сумма равна сумме производных, то для функции (1)

$$\begin{aligned}\partial_e f|_{P \neq P_1, P_2, \dots, P_n} &= \sum_{i=1}^n np_e \frac{\overrightarrow{P_i P}}{|\overrightarrow{P_i P}|} = np_e \sum_{i=1}^n \frac{\overrightarrow{P_i P}}{|\overrightarrow{P_i P}|}, \\ \partial_e f|_{P=P_k} &= 1 + np_e \sum_{i \neq k} \frac{\overrightarrow{P_i P}}{|\overrightarrow{P_i P}|}.\end{aligned}$$

Поскольку направление вектора e можно выбирать произвольно, то неравенство $\partial_e f \geq 0$ может выполняться только в том случае, если при $P \neq P_1, \dots, P_n$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\overrightarrow{P_i P}}{|\overrightarrow{P_i P}|} = 0 \quad (2)$$

(если бы этот вектор был отличен от нуля, то, взяв e противоположно направленным, мы получили бы $\partial_e f < 0$) и аналогично при $P = P_k$

$$\left| \sum_{i \neq k} \frac{\overrightarrow{P_i P}}{|\overrightarrow{P_i P}|} \right| \leq 1. \quad (3)$$

Таким образом, наша задача свелась к отысканию точки P , для которой выполняется одно из условий, (2) или (3). На геометрическом языке (2) означает, что сумма единичных векторов, направленных из P в P_i , равна нулю, если P не совпадает ни с одной из P_i , а (3) — что аналогичная сумма ≤ 1 , если $P = P_k$.

В простейших случаях точку P нетрудно найти из элементарных геометрических соображений. При $n = 3$ равенство (2) может выполняться только тогда, если каждый из трех углов $\angle P_i P P_j = 120^\circ$, а неравенство (3) в точке $P = P_1$ выполняется, если $\angle P_2 P_1 P_3 \geq 120^\circ$ (из двух углов имеется в виду меньший 180°). Поэтому, если три точки P_1, P_2, P_3 расположены так, что ни один из внутренних углов треугольника $P_1 P_2 P_3$ не превышает 120° , то точка P совпадает с точкой, из которой все три стороны треугольника видны под углом 120° (эта точка

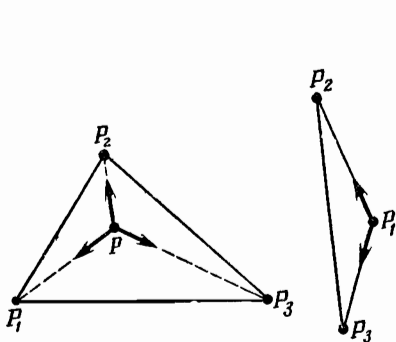


Рис. 7.

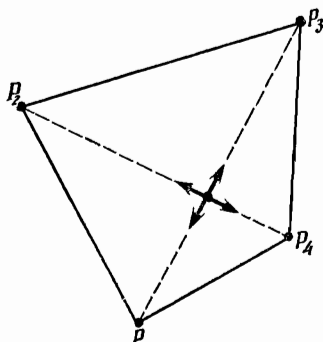


Рис. 8.

называется *точкой Торричелли*). Если же один из внутренних углов треугольника $P_1 P_2 P_3$ больше или равен 120° , то точка P совпадает с вершиной этого угла (рис. 7).

Если $n = 4$ и точки P_1, P_2, P_3, P_4 расположены в вершинах выпуклого четырехугольника, то в точке пересечения его диагоналей, очевидно, выполняется (2) (рис. 8) и эта точка является решением задачи.

Если точка P_4 лежит внутри треугольника $P_1 P_2 P_3$ или на одной из его сторон, то для нее справедливо (3), так что решением будет P_4 (рис. 9). Чтобы убедиться в этом, обратимся к рис. 10. В рассматриваемом случае углы между единичными векторами $\vec{P} \vec{A}_i$ ($i = 1, 2, 3$) не должны превышать 180° . Однако при этом условии точка C , конец вектора $\vec{P} \vec{C} = \vec{P} \vec{A}_1 + \vec{P} \vec{A}_2 + \vec{P} \vec{A}_3$, лежащая на дуге единичной окружности с центром в точке B (на конце вектора $\vec{P} \vec{B} = \vec{P} \vec{A}_1 + \vec{P} \vec{A}_2$), оказывается внутри еди-

ничной окружности с центром в точке P или, самое большее, совпадает с одной из точек A_1, A_2 . Из этого же рисунка видно, что сумма трех единичных векторов равна нулю только в том случае, если B лежит на единичной окружности ($\angle A_1PA_2 = 120^\circ$) и $\vec{PA}_3 = -\vec{PB}$, то есть $\angle A_1PA_3 = \angle A_3PA_2 = 120^\circ$.

Чтобы доказать существование точки минимума при произвольном n , воспользуемся теоремой Вейерштрасса. Пусть $O(0, 0)$ — начало координат и

$$R = \max \{ |\vec{OP}_i|, i = 1, 2, \dots, n \}.$$

Непрерывная функция $f(x, y)$ в круге радиуса $2R$ с центром в O достигает минимума в некоторой точке

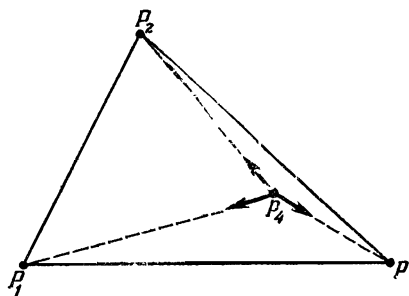


Рис. 9.

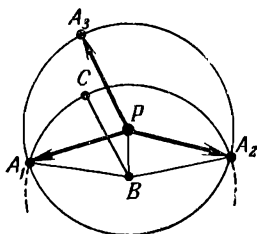


Рис. 10.

$P_0(x_0, y_0)$. Покажем, что эта точка доставляет минимум функции и во всей плоскости. Если $P(x, y)$ лежит вне указанного круга, то, согласно неравенству треугольника,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{i=1}^n |\vec{P_iP}| \geq \sum_{i=1}^n |\vec{OP}| - |\vec{OP_i}| \geq n \cdot (2R - R) = \\ &= nR \geq \sum_{i=1}^n |\vec{P_iO}| = f(0, 0) \geq f(x_0, y_0), \end{aligned}$$

ибо значение функции в точке O , принадлежащей кругу, не может быть меньше значения в точке минимума.

Чтобы найти точку минимума, мы должны сначала проверить выполнение неравенств (3) в точках $P_1, P_2, \dots, P_n$, а затем, если ни в одной точке (3) не выполняется, обратиться к уравнению (2), которое в

координатной записи представимо в виде системы двух алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^n \frac{x - x_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}} = 0, \quad \sum_{i=1}^n \frac{y - y_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}} = 0.$$

Как мы уже видели, эта система имеет единственное вещественное решение.

Полезно еще иметь в виду, что равенство (2) может выполняться только в том случае, когда P принадлежит выпуклой оболочке точек $P_1, P_2, \dots, P_n$.

20. Вычислим сумму более общего ряда

$$S_p(x) = a_0 + a_p \frac{x^p}{p!} + a_{2p} \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \dots,$$

где p — любое натуральное число. Как нетрудно видеть,

$$S_p(x) = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} f(\varepsilon_j^p x),$$

где

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r x^r}{r!} \quad \text{и} \quad \varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p}.$$

Воспользуемся стандартными преобразованиями, применяемыми в исчислении конечных разностей (III.14):

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \cdot e^{-x} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s x^s}{s!} = e^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s x^s}{s!} = \\ &= e^x \sum_{k, s=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_s}{k! s!} (k+s)! \frac{x^{k+s}}{(k+s)!} = \\ &= e^x \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} a_s \right) \frac{x^r}{r!} = e^x \sum_{r=0}^{\infty} \Delta^r a_0 \frac{x^r}{r!}. \end{aligned}$$

Если a_r — многочлен от r степени n , то $\Delta^j a_0 = 0$ при $j > n$.

В частном случае, о котором говорится в условии задачи,

$$a_r = \frac{1}{24} (r^3 - 9r^2 + 38r + 24);$$

$$a_0 = 1, \quad \Delta a_0 = \frac{5}{4}, \quad \Delta^2 a_0 = -\frac{1}{2}, \quad \Delta^3 a_0 = \frac{1}{4};$$

$$\Delta^j a_0 = 0 \quad \text{при } j > 3, \quad \varepsilon_1 = -1, \quad p = 2;$$

$$f(x) = e^x \left(1 + \frac{5}{4}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{6} \right);$$

$$\begin{aligned} S_2(x) &= \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)] = \frac{e^x}{2} \left(1 + \frac{5}{4}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{24}x^3 \right) + \\ &+ \frac{e^{-x}}{2} \left(1 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{24}x^3 \right) = \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{4} \right) \operatorname{ch} x + \left(\frac{5x}{4} + \frac{x^3}{24} \right) \operatorname{sh} x. \end{aligned}$$

21. Обозначим четыре заданные скрещивающиеся прямые α , β , γ и δ . Выбрав на прямой α любую точку P , проведем плоскость, проходящую через P и прямую β и пересекающую прямую δ в точке B . Пусть C — точка пересечения плоскости, проходящей через точку P и прямую γ , с прямой δ . Прямая PB пересекается с прямыми α , β и δ , а прямая PC — с прямыми α , γ и δ . Если нам удастся найти такое положение точки P , при котором точки B и C совпадают, то слившиеся прямые $PB = PC$ будут пересекать все четыре заданные прямые α , β , γ и δ .

Соответствие $B \rightarrow P \rightarrow C$ определяет отображение прямой δ в себя, которое является проективным, как суперпозиция проективных отображений $B \rightarrow P$ прямой δ в прямую α (определяется пучком плоскостей, проходящих через δ) и $P \rightarrow C$ прямой α в прямую δ (определяется пучком плоскостей, проходящих через γ , см. III. 2). Выбрав на δ произвольно три точки B_1, B_2, B_3 , найдем соответствующие им точки C_1, C_2, C_3 . Этим наше отображение однозначно определяется. Таким образом, исходная задача сводится к отысканию неподвижных точек проективного отображения прямой в себя, определяемого тремя парами соответствующих точек (B_1, C_1) , (B_2, C_2) , (B_3, C_3) .

Эту задачу на построение можно решить при помощи линейки, если в некоторой плоскости, проходящей через

прямую δ , задана фиксированная окружность или другое коническое сечение¹. Поскольку число неподвижных точек проективного отображения прямой может быть равно 2, 1 или 0, существуют 2, 1 или 0 прямых, пересекающих четыре заданные скрещивающиеся прямые.

22. Если коэффициенты a_i ($i = 1, 2, \dots, p$) — неотрицательные целые числа, то утверждение автора статьи очевидно, поскольку все синусы положительны.

Если коэффициентами a_i могут быть любые целые числа, как положительные, так и отрицательные, то утверждение неверно, как показывает следующий контрпример. Пусть $p \geq 3$ — нечетное натуральное число. Тогда

$$2 \sum_{k=1}^{(p-1)/2} (-1)^k \sin \left[\frac{(2k-1)\pi}{2p} \right] - (-1)^{\frac{p-1}{2}} = 0.$$

Все коэффициенты при синусах и свободный член — целые числа, но не все коэффициенты равны нулю.

23. Приведенное в условии задачи условие разрешимости уравнения $x^p + y^p + z^p = 0$ в целых числах, не делящихся на нечетное простое число p , представляет собой не что иное, как критерий Вифериха², записанный в несколько иной форме: уравнение $x^p + y^p + z^p = 0$ разрешимо в целых числах, не делящихся на нечетное простое число p , если $(2^{p-1} - 1)/p^2$ — целое число. Действительно, если m — нечетное число, то

$$m \sum_{r=1}^m \frac{(-1)^{r-1}}{r} N_r(m) = 2\zeta_1(m), \quad (1)$$

где $\zeta_1(m)$ — сумма всех делителей числа m . Подставляя $m = p$ в (1) и замечая, что $N_p(p) = 2^p$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} N_2(p) - \frac{1}{3} N_3(p) + \frac{1}{4} N_4(p) - \dots - \frac{1}{p-1} N_{p-1}(p) = \\ = 2 \left[\frac{2^{p-1} - 1}{p} - 1 \right], \end{aligned}$$

¹ См., например, О. А. Вольберг, Основные идеи проективной геометрии, М. — Л., Учпедгиз, 1949, с. 184 — Прим. ред.

² A. Wieferich, Zum letzten Fermatschen Theorem, Journal für reine und angewandte Math. (Crelle), 136 (1909), 293—302. — Прим. ред.

поскольку $N_1(p) = 0$. Следовательно, если $(2^{p-1} - 1)/p^2$ — целое число, то критерий Вифериха совпадает с условием разрешимости уравнения $x^p + y^p + z^p = 0$ в целых числах, не делящихся на нечетное простое число, которое сформулировано в задаче.

Соотношение (1) мы получим, приравняв коэффициенты при q^m в тождестве

$$q \frac{d}{dq} \ln \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \right) = \\ = q \frac{d}{dq} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - q^{2n}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - q^{2n-1}) \right], \quad (2)$$

вытекающем из тождества

$$1 + 2 \sum q^{n^2} = \prod (1 - q^{2n}) \cdot \prod (1 + q^{2n-1})^2,$$

приводимого в любом учебнике по теории эллиптических функций. Логарифм, стоящий в левой части тождества (2), разлагают в ряд, члены которого перед дифференцированием переставляют, располагая их по степеням q . Затем используют очевидное соотношение $N_r(n) = = 2^r N'_r(n)$, где $N'_r(n)$ — число представлений n в виде суммы r квадратов натуральных чисел.

24. Пусть $|a_i| = \rho_i$. Докажем (от противного), что все ρ_i равны. Предположим, что не все ρ_i равны. Тогда среди них можно выбрать наибольшую величину ρ_k и наименьшую величину ρ_j , причем $\rho_k > \rho_j$. По формуле Виета (поскольку все числа a_k удовлетворяют исходному уравнению, то есть являются его корнями)

$$a_k^k = \frac{\sum a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}}{\binom{n}{k}},$$

откуда, переходя к абсолютным величинам, получаем

$$\rho_k^k \leq \frac{\sum \rho_{i_1} \rho_{i_2} \dots \rho_{i_k}}{\binom{n}{k}} < \rho_k^k.$$

Полученное противоречие означает, что все ρ_i равны.

Обозначим их общее значение ρ . Если $\rho = 0$, то утверждение задачи доказано.

Предположим, что $\rho \neq 0$. По формуле Виета $\rho a_1 = -\sum a_i$. Если какие-нибудь две величины a_i не равны, то

$$\rho \neq |\sum a_i| < \sum |a_i| = \rho n.$$

Следовательно, $\rho = 0$, и все a_j равны, что и требовалось доказать.

25. Если многочлен $f(x)$ имеет кратные корни, то алгебраические уравнения $f(x) = 0$ и $f'(x) = 0$ имеют общие корни, и сумма величин, обратных разностям между корнями этих уравнений, обращается в бесконечность.

Предположим, что все n корней многочлена $f(x)$ различны, а коэффициент при старшем члене равен A . Пусть a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — корни многочлена $f(x)$, b_j ($j = 1, 2, \dots, n-1$) — корни его производной. Тогда по теореме Безу

$$f(x) = A \prod_{i=1}^n (x - a_i), \quad f'(x) = nA \prod_{j=1}^{n-1} (x - b_j).$$

Нетрудно видеть, что

$$f'(x) = f(x) \sum_{i=1}^n (x - a_i)^{-1}. \quad (1)$$

Поскольку по предположению многочлен $f(x)$ не имеет кратных корней, то $f(b_j) \neq 0$ при $j = 1, 2, \dots, n-1$. Подставляя $x = b_j$ в соотношение (1), получаем $\sum_{i=1}^n (b_j - a_i)^{-1} = 0$, а суммируя по всем корням производной многочлена $f(x)$, приходим к требуемому соотношению

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^n (b_j - a_i)^{-1} = 0.$$

26. Пусть O_m и O_n — пересекающиеся прямые, по которым скатывается шар. Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы ее начало совпало с точкой пересечения прямых O_m и O_n , ось x была направлена по биссектрисе угла между пересекающимися прямыми,

а плоскость xz совпала с определяемой ими плоскостью (рис. 11).

Пусть $(x, y, 0)$ — координаты центра C шара, A — точка касания шара с прямой Om и B — основание пер-

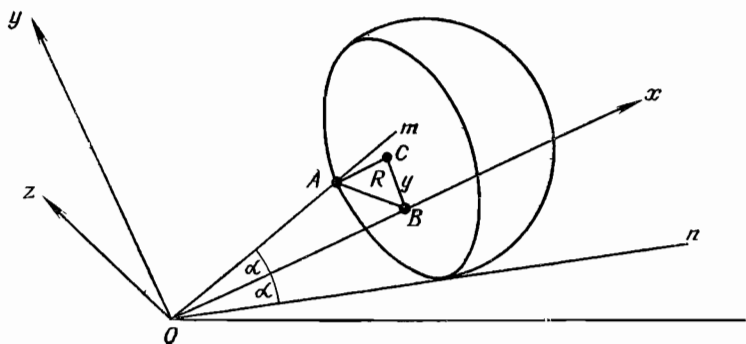


Рис. 11.

пендикуляра, опущенного из C на плоскость xz . Тогда из прямоугольного треугольника ABC получаем

$$AC^2 = CB^2 + BA^2. \quad (1)$$

Но $AC = R$, $CB = y$, $BA = x \sin \alpha = x / \operatorname{cosec} \alpha$. Подставляя эти выражения в соотношение (1), приходим к уравнению кривой, описываемой центром катящегося шара в плоскости xy :

$$\left(\frac{x^2}{R^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha} \right) + \frac{y^2}{R^2} = 1.$$

Это уравнение эллипса с полуосями $R \operatorname{cosec} \alpha$ и R , что и требовалось доказать.

27. Известная из теории гармонических функций теорема о среднем утверждает, что если функция $U(P)$ непрерывна в замкнутом круге радиуса R с центром в точке P и гармонична внутри этого круга, то

$$U(P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(P + Re^{i\theta}) d\theta.$$

Кёбе¹ доказал обратную теорему: если функция U непрерывна в некоторой области T и принимает в каждой точке P из T значение, равное среднему арифметическому значений на любой окружности с центром в точке P , целиком лежащей в T , то функция U гармонична в T .

Пусть P — внутренняя точка области T и окружность S радиуса R с центром в точке P целиком лежит внутри T . Если мы докажем, что при этих условиях

$$U(P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(P + Re^{i\vartheta}) d\vartheta, \quad (1)$$

то функция удовлетворяет условиям теоремы Кёбе и, следовательно, гармонична в T .

Введем полярные координаты с полюсом в точке P . Тогда соотношение

$$\iint_T U \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) dx dy = 0 \quad (2)$$

можно преобразовать к виду

$$\iint_T U \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) \right) dr d\varphi = 0 \quad (3)$$

(V — любая допустимая функция, свойства которой определены в условии задачи). Построим одну из таких допустимых функций V . Пусть R — радиус окружности S , целиком расположенной внутри области T , с центром в точке P , l — наименьшее расстояние между S и границей области T , $\beta = \min(R/3, l)$, α — положительный параметр, удовлетворяющий неравенству $\alpha < \beta$. Приравняем $\frac{\partial}{\partial r}(r \partial V / \partial r)$ непрерывной функции $f(r)$, положительной в интервале $\alpha/2 < r < \alpha$, отрицательной в интервале $R - \alpha < r < R + \alpha$, равной нулю всюду вне этих отрезков и такой, что $\int_0^{R+\alpha} f(r) dr = 0$. Решив полу-

¹ Sitzungsberichten Berl. Math. Gesel., Bd. 5 (1906), 39. Эту теорему можно найти теперь в большинстве учебников по уравнениям математической физики, например, С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, М. — Л., ГИТТЛ, 1950, стр. 158, теорема 2 (правда, там речь идет о гармонической функции в пространстве, но доказательство без труда модифицируется). — Прим. ред.

чившееся дифференциальное уравнение, мы найдем функцию V , непрерывную вместе со своими частными производными первого и второго порядков; $V \equiv C_1$ внутри круга радиуса $r = \alpha/2$ и $V \equiv C_2$ вне круга радиуса $r = R + \alpha$. Одну из констант можно выбирать произвольно. При $C_2 = 0$ построенная функция V принадлежит к числу допустимых.

Подставляя ее в левую часть соотношения (3) и производя интегрирование по ϑ , получаем

$$\int_0^{\alpha} \bar{U}(r) f(r) dr + \int_{R-\alpha}^{R+\alpha} \bar{U}(r) f(r) dr = 0, \quad (4)$$

где

$$\bar{U}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(r, \varphi) d\varphi.$$

Теорема о среднем позволяет заменить равенство (4) соотношением

$$\bar{U}(\vartheta'\alpha) = \bar{U}(R + \vartheta''\alpha), \quad (0 < \vartheta' < 1, -1 < \vartheta'' < 1).$$

Поскольку функция U непрерывна, а последнее соотношение выполняется при значениях α , сколь угодно близких к нулю, то

$$\bar{U}(0) = \bar{U}(R),$$

что равносильно соотношению (1).

Тем самым утверждение задачи доказано.

28. Продифференцировав m раз по x правую и левую части тождества

$$y(e^x - 1) = x,$$

где y — производящая функция для чисел Бернулли:

$$y = \frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2}x + B_1 \frac{x^2}{2!} + \dots \\ \dots + (-1)^{i-1} B_i \frac{x^{2i}}{(2i)!} + \dots, \quad (1)$$

получим соотношение

$$e^x \left[y + \binom{m}{1} y' + \dots + \binom{m}{m-1} y^{(m-1)} \right] + (e^x - 1) y^{(m)} = \\ = \begin{cases} 0 & \text{при } m \geq 2, \\ 1 & \text{при } m = 1 \end{cases} \quad (2)$$

(обозначения стандартные: $y^{(i)} = d^i y / dx^i$, $\binom{m}{i}$ — биномиальный коэффициент). При $x = 0$ производящая функция y и ее производные принимают следующие значения:

$$y_0 = 1, \quad y'_0 = -\frac{1}{2}, \quad y_0^{(2i+1)} = 0, \quad y_0^{(2i)} = (-1)^{i-1} B_i.$$

Полагая индекс m в (2) равным $2n$, $2n+1$, $2n+2$, находим три соотношения, из которых первое ($m = 2n$) имеет вид

$$1 - \frac{1}{2} \binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} B_1 + \dots + (-1)^{i-1} \binom{2n}{2i} B_i + \\ + \dots + (-1)^{n-2} \binom{2n}{2n-2} B_{n-1} = 0; \quad (3)$$

два остальных аналогичны, но содержат последний член не с B_{n-1} , а с B_n . Умножив первое соотношение на $2n+1$, второе — на $(-2n)$ и сложив, разделим сумму на $(2n+1)!$ и разложим ее последний член на два, представив число $2n$ в виде $(2n-1)+1$. В итоге мы получим соотношение

$$\frac{1}{(2n+1)!} - \frac{B_1}{(2n-1)!2!} + \frac{3B_2}{(2n-3)!4!} - \dots + \\ + (-1)^n \frac{(2n-1) B_n}{1!(2n)!} + (-1)^n \frac{B_n}{(2n)!} = 0. \quad (4)$$

Умножив второе из трех соотношений на $2n+2$, третье — на $-(2n+1)$ и сложив, разделим сумму на $(2n+2)!$. Подобный результат получается из соотношения (4), если в нем отбросить последний член и увеличить на единицу числа в первых факториалах, стоящих в знаменателях. Сравнивая второе из полученных соотношений с исходным уравнением задачи, мы видим, что $c_{2i+1} = (-1)^i (2i-1)(2i+1)(2i+2)B_i$ (заметим, что последовательность $c_3, c_5, \dots$ бесконечной системой уравнений, данной в условии задачи, определяется однозначно). Следовательно, если мы располагаем методом, позволяющим находить значения чисел Бернулли B_i , то, внося в него весьма незначительные изменения, получим метод вычисления коэффициентов c_s , и наоборот.

Первое из найденных соотношений, то есть (4), дает

$$\frac{1}{(2n+1)!} + \frac{c_3}{4!(2n-1)!} + \dots + \frac{c_{2n+1}}{(2n)!1!} + (-1)^n \frac{B_n}{(2n)!} = 0,$$

что равносильно утверждению задачи.

Для вычисления B_i (и, следовательно, c_s) мы могли бы воспользоваться следующим методом.

Записав производящую функцию в виде

$$y = \frac{\ln [1 + (e^x - 1)]}{e^x - 1}$$

и разложив правую часть по степеням $(e^x - 1)$, получим

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(e^x - 1)^m}{m+1}. \quad (5)$$

Далее можно разложить $(e^x - 1)$ по степеням x , найти m -ую степень ряда и собрать подобные члены. Коэффициент при x^{2n} окажется равным $(-1)^{n-1} B_n / (2n)!$. В конце концов мы получим для B_n следующее выражение:

$$B_n = (-1)^n \left(\frac{\Delta_{2n}^2}{2} - \frac{\Delta_{2n}^2}{3} + \dots - \frac{\Delta_{2n}^{2n}}{2n+1} \right),$$

где

$$\Delta_{2n}^m = \sum_{\gamma=1}^m (-1)^{m-\gamma} \binom{m}{\gamma} \gamma^{2n}.$$

29. Докажем прежде всего, что

$$u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = 4. \quad (1)$$

Действительно, при $n \geq 2$

$$u_n(4u_{n-1}) = u_{n-1}(4u_n),$$

$$u_n(u_n + u_{n-2}) = u_{n-1}(u_{n+1} - u_{n-1}),$$

$$\begin{aligned} u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} &= u_{n-1}^2 - u_nu_{n-2} = u_{n-2}^2 - u_{n-1}u_{n-3} = \dots = \\ &= u_2^2 - u_3u_1 = 64 - 60 = 4. \end{aligned}$$

Выражение для общего члена ряда арккотангенсов преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned}\operatorname{arccotg} u_n^2 &= \operatorname{arccotg} [u_n(4u_n)/4] = \\ &= \operatorname{arccotg} [u_n(u_{n+1} + u_{n-1})/(u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1})] = \\ &= \operatorname{arccotg} (u_{n+1}/u_n) - \operatorname{arccotg} (u_n/u_{n-1})\end{aligned}\quad (2)$$

(при замене $4u_n$ на $u_{n+1} + u_{n-1}$ мы воспользовались рекуррентным соотношением, приведенным в условиях задачи, при замене 4 на $u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1}$ — соотношением (1); кроме того, мы воспользовались неравенством $u_{n+1}/u_n < < u_n/u_{n-1}$, вытекающим из (1), поскольку соотношение

$$\operatorname{arccotg} x - \operatorname{arccotg} y = \operatorname{arccotg} [(xy + 1)/(y - x)]$$

имеет место при $x < y$).

Пусть индекс n в соотношении (2) принимает значения от 2 до r . Суммируя, получаем

$$\operatorname{arccotg} u_1^2 + \sum_{n=2}^r \operatorname{arccotg} u_n^2 = \operatorname{arccotg} (u_{r+1}/u_r). \quad (3)$$

При $r \rightarrow \infty$ отношение u_{r+1}/u_r стремится к большему корню квадратного уравнения $x^2 = 4x - 1$, то есть к $2 + \sqrt{3}$ *. Следовательно, переходя в (3) к пределу, мы получаем соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arccotg} u_n^2 = \operatorname{arccotg} (2 + \sqrt{3}) = \frac{\pi}{12}.$$

См. также задачу 52.

30. Предположим сначала, что $0 < a < 1$.

Тогда $1 > a_2 > a_1$, $a_1 < a_3 < a_2$, $a_2 > a_4 > a_3$, $a_3 < a_5 < < a_4$, ... и вообще

$$0 < a_1 < a_3 < a_5 < \dots < a_{2n-1} < \dots;$$

$$1 > a_2 > a_4 > a_6 > \dots > a_{2n} > \dots$$

и $a_{2i-1} < a_{2k}$ при $i, k = 1, 2, \dots$. Следовательно, существуют два предела: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = x$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = y$, причем $x \leq y$. Эти пределы служат решениями уравнений

$$a^x = y, \quad a^y = x, \quad (1)$$

$\lim a_n$ существует тогда и только тогда, когда $x = y$ и равен общему значению этих величин.

При любых значениях a из интервала $1/e^e \leq a \leq 1$ кривые (1) пересекаются в одной точке. В этой точке $x = y$. Таким образом, при $1/e^e \leq a \leq 1$ существует $\lim a_n = x = y$. При любых значениях a из интервала $0 < a < 1/e^e$ кривые пересекаются в трех точках (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , причем $x_1 < y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 > y_3$, $x_3 = y_1$, $x_1 = y_3$. Если $0 \leq x < x_2$, то $f(x) = a^{a^x}$ также принадлежит этому интервалу, а так как $a_1 = f(0)$, $a_3 = f(a_1)$ и вообще $a_{2k+1} = f(a_{2k-1})$, то $x = \lim a_{2n+1}$ может равняться только x_1 или x_2 . Поскольку $f'(x_2) = \ln^2 a \cdot x_2^2 > 1$, второе невозможно. Следовательно, $\lim a_n$ не существует. Нетрудно показать, что

$$\lim_{a \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0, \quad \lim_{a \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 1.$$

Перейдем теперь к случаю $a > 1$ (при $a = 1$ все a_n и $\lim a_n$ также равны 1). При любых значениях a из интервала $1 < a < \sqrt[e]{e}$ кривые (1) пересекаются в двух точках (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , причем $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_1 < x_2$. При $a = \sqrt[e]{e}$ эти точки сливаются в одну $x_1 = x_2 = e$ и при $a > \sqrt[e]{e}$ кривые (1) не пересекаются.

При всех $a > 1$ справедливы неравенства

$$1 < a < a_2 < \dots < a_n < \dots$$

Поэтому $x = \lim a_n$, конечный или бесконечный, существует. Если он конечен, то x и $y = x$ — решения уравнений (1). Если $1 < a \leq \sqrt[e]{e}$, то

$$1 < a_2 < (\sqrt[e]{e})^{\sqrt[e]{e}},$$

$$1 < a_3 < (\sqrt[e]{e})^{(\sqrt[e]{e})^{\sqrt[e]{e}}}, \dots$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ конечен, если конечен аналогичный предел при $a = \sqrt[e]{e}$. Но

$$\sqrt[e]{e} < e, \quad \sqrt[e]{e}^{\sqrt[e]{e}} < (\sqrt[e]{e})^e < e, \quad \sqrt[e]{e}^{\sqrt[e]{e}^{\sqrt[e]{e}}} < e, \dots,$$

поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e$ при $a = \sqrt[e]{e}$. Пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, конечные при $1 < a < \sqrt[e]{e}$, даются решением $x_1 = y_1$ уравнений (1), принадлежащим этому интервалу. В частности, при $a = \sqrt[e]{e}$ предел последовательности a_n равен e . Поскольку при любых $a > \sqrt[e]{e}$ кривые (1) не пересекаются, предел последовательности a_n при $a > \sqrt[e]{e}$ не существует.

Итак, конечный $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ существует только в интервале $1/e^e \leq a \leq \sqrt[e]{e}$. Если обозначить a через x , а $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ через y , то найти предел можно, решив уравнение $y = x^y$. Следовательно, необходимо рассмотреть кривую $y = x^y$ в интервале $1/e^e \leq x \leq \sqrt[e]{e}$. Нетрудно показать, что эта функция непрерывна вместе со всеми производными на всем интервале, кроме его правого конца (точки $x = \sqrt[e]{e}$), и монотонно возрастает от $x = 1/e$ до $x = \sqrt[e]{e}$. Точка перегиба кривой имеет координаты $x = 0,396$, $y = 0,582$.

Левее точки перегиба кривая вогнута, правее — выпукла (относительно оси x). Координаты некоторых точек кривой представлены в таблице:

x	$\frac{1}{e^e} = 0,0763$	0,396	1	$\sqrt[e]{e} = 1,44$
y	$\frac{1}{e} = 0,368$	0,582	1	$e = 2,72$

31. Построим треугольник UVW , стороны которого VW , WU и UV проходят через точки A , B и C . Пусть прямые UO , VO , WO пересекают стороны треугольника, противолежащие вершинам U , V , W в точках U' , V' , W' . Обозначим W'' , V'' , U'' точки пересечения соответствующих сторон треугольников UVW и $U'V'W'$. По теореме

Дезарга точки U'' , V'' , W'' лежат на одной прямой. Докажем, что точка пересечения этой прямой с заданной является искомой точкой P .

Из четырехугольника $UW'OV'$ следует, что $VU'WU''$ — гармоническая четверка точек (см. III.2). То же самое верно и относительно $UW'VW''$ и $WV'UV''$. Воспользуемся следующей теоремой (см. III.5): пусть задана кривая третьего порядка и фиксированная точка O , а переменная секущая OP пересекает кривую третьего порядка в точках A , B и C . Тогда если k — некоторая постоянная, то геометрическим местом точек P , таких, что $1/OA + 1/OB + 1/OC = k/OP$, является прямая. Если $k = 3$, то геометрическое место точек P , обладающих указанным свойством, называется полярной точки O относительно данной кривой третьего порядка. Считая объединение трех прямых VV , VW , WU (вырожденной) кривой третьего порядка, рассмотрим полярную o точки O относительно этой кривой. Пусть L — точка пересечения полярной o с VW . Проведем секущую OL , пересекающую прямую WU в точке M и прямую UV в точке N . Тогда L , M , N — тройка точек пересечения секущей с нашей кривой третьего порядка, а L — с полярной, так что $3/OL = 1/OL + 1/OM + 1/ON$, или $2/OL = 1/OM + 1/ON$. Следовательно, $OMLN$ — гармоническая четверка точек. Проектируя ее из U на VW , получаем гармоническую четверку $U'WL V$. Но поскольку четверка $U'VU''W$ также гармоническая, точки L и U'' совпадают. Аналогичным образом можно показать, что полярная o проходит через точки V'' и W'' , так что $P \in o$, и потому

$$\frac{3}{OP} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC}.$$

Тем самым доказательство того, что точка P обладает требуемыми свойствами, завершается.

32. Пусть a , b , c — вещественные положительные корни кубического уравнения

$$x^3 - px^2 + qx - f = 0. \quad (1)$$

В такой записи коэффициенты p , q и f положительны, поскольку по формулам Виета $p = a + b + c$, $q = ab + ac + bc$, $f = abc$. Кроме того, по формуле Герона

площадь S треугольника связана с длинами сторон a, b, c соотношением

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\frac{p}{2} \left(\frac{p}{2} - a \right) \left(\frac{p}{2} - b \right) \left(\frac{p}{2} - c \right)} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{p(p-2a)(p-2b)(p-2c)} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{p[p^3 - 2(a+b+c)p^2 + 4(ab+ac+bc)p - 8abc]} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{p[4pq - p^3 - 8f]} . \end{aligned}$$

Поскольку коэффициент p положителен, условие вещественности S сводится к неравенству

$$4pq > p^3 + 8f. \quad (2)$$

При положительных p, q, f уравнение (1) не может иметь отрицательных и нулевых корней. Поэтому если все его корни вещественны, то они положительны. Известное условие вещественности корней [для уравнения $x^3 + \alpha x + \beta = 0$ это неравенство $(\alpha/3)^3 + (\beta/2)^2 < 0$] в нашем случае выглядит так:

$$4(p^2 - 3q)^3 > (9pq - 2p^3 - 27f)^2. \quad (3)$$

Неравенства (2) и (3) вместе с условием положительности коэффициентов p, q и f служат условиями того, что корни кубического уравнения (1) являются длинами сторон некоторого треугольника.

33*. Пусть $Q(x_i) = x_1^2 + x_2^2$; $B(y_i, z_j) = y_1 z_1 + y_2 z_2$ — билинейная форма, переходящая в невырожденную положительно определенную квадратичную форму $Q(x_i)$ при подстановке $y_i = x_i, z_j = x_j$; $x_1 = \sin t, x_2 = \cos t$ — параметрические уравнения окружности $Q(x_i) = 1$, $u_i = x'_i(t)$. Заметим, что величина $B[x_i^{(IV)}(t), x_j(a)]$, рассматриваемая как функция от t , достигает на $Q(x_i) = 1$ абсолютного максимума при $t = a$:

$$B[x_i^{(IV)}(t), x_j(a)] = \sin t \sin a + \cos t \cos a = \cos(t - a).$$

По условиям задачи функция $f(x)$ однозначна и непрерывна на отрезке $[a, b]$, отлична от тождественного нуля и удовлетворяет неравенствам $0 \leq f(x) \leq M$.

Пусть $g(t)$ еще одна функция, обладающая такими же свойствами, как и $f(t)$, а

$$H(f, g) = \left[\int_a^b f(t) dt \right] \left[\int_a^b g(t) dt \right] - B \left[\int_a^b f(t) u_i(t) dt, \int_a^b g(t) u_i(t) dt \right].$$

Тогда

$$H(f, f) = \left[\int_a^b f(t) dt \right]^2 - Q \left[\int_a^b f(t) u_i(t) dt \right].$$

В этих обозначениях неравенства задачи можно записать следующим образом:

$$0 < H(f, f) \leq \frac{M^2 (b-a)^4}{12}. \quad (1)$$

Для доказательства неравенств (1) воспользуемся легко проверяемым тождеством

$$\begin{aligned} H(f, g) &= \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b f(t) g(s) [(\sin t - \sin s)^2 + (\cos t - \cos s)^2] dt ds = \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b f(t) g(s) Q(u_i(t) - u_i(s)) dt ds. \end{aligned}$$

Функции f и g непрерывны и не равны тождественно нулю, поэтому существует по крайней мере одна точка (t, s) , $t \neq s + 2k\pi$, где оба значения $f(t)$ и $g(s)$ положительны. В этой точке

$$f(t) g(s) Q(u_i(t) - u_i(s)) > 0.$$

Поэтому

$$H(f, g) > 0.$$

Кроме того, поскольку B — билинейная форма, а интеграл линейно зависит от подынтегральных функций, то

$$H(f + g, f + g) = H(f, f) + 2H(f, g) + H(g, g).$$

Предположим, что функция f не равна тождественно своей верхней грани M . Тогда функция $g(t) = M - f(t)$

обладает всеми необходимыми свойствами. Поскольку $H(g, g) > 0$, а по доказанному $H(f, g) > 0$, то $H(M, M) > H(f, f)$. Таким образом, функционал $H(f, f)$ достигает максимума, когда функция f совпадает со своей верхней гранью M :

$$0 < H(f, f) \leq H(M, M) = M^2 H(1, 1).$$

Оценим величину

$$\begin{aligned} H(1, 1) &= (b-a)^2 - Q[x_i(b) - x_i(a)] = \\ &= (b-a)^2 - (\cos b - \cos a)^2 - (\sin b - \sin a)^2 = \\ &= (b-a)^2 - 2 + 2 \cos(b-a) = \\ &= \left(b-a-2 \sin \frac{b-a}{2}\right) \left(b-a+2 \sin \frac{b-a}{2}\right). \end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенствами

$$z - \frac{z^3}{6} < \sin z < z,$$

справедливыми при всех $z > 0$, получаем

$$H(1, 1) < 4 \cdot \frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 \cdot (b-a)}{6} = \frac{(b-a)^4}{12},$$

что и требовалось доказать.

34. Пусть $D = |a_{ij}|$. Заметим, что окаймленный определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^{(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \dots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varepsilon^{(n-1)} & \varepsilon^{2(n-1)} & \dots & \varepsilon^{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix} \quad (1)$$

равен исходному определителю D . Умножая определитель (1) на себя, получим определитель $D^2 = |b_{ij}|$, такой, что элемент b_{ij} равен 1, если индекс i либо индекс j равен 1, а во всех остальных случаях

$$b_{ij} = 1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} + \varepsilon^{3k} + \dots + \varepsilon^{nk-k}, \quad k = i + j - 2.$$

По хорошо известному свойству первообразных корней последнее выражение равно n , если k кратно n , и равно 0 при всех остальных значениях k . Таким образом,

$$D^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & n & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & n & \dots & & \\ 1 & n & 0 & \dots & & 0 \end{vmatrix} = n^{n-2} \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 1 & \dots & & \\ 1 & 1 & 0 & \dots & & 0 \end{vmatrix} \quad (2)$$

(второй определитель получается из первого, если сначала первый столбец умножить на n , а затем все строки, начиная со второй, разделить на n).

Коэффициент при n^{n-2} является определителем n -го порядка, который мы обозначим u_n . Вычитая вторую строку определителя u_n из первой и разлагая u_n по элементам последнего столбца, получаем рекуррентное соотношение

$$u_n = (-1)^n u_{n-1},$$

которое можно продолжать

$$u_{n-1} = (-1)^{n-1} u_{n-2}, \dots$$

до тех пор, пока мы не дойдем до соотношения

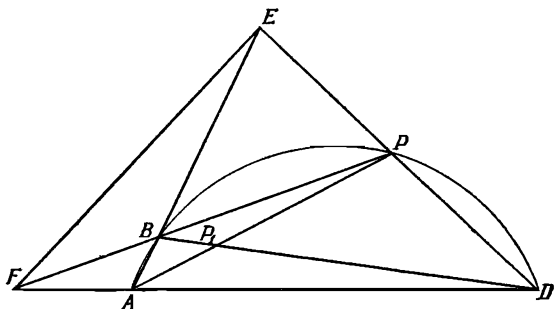
$$u_4 = (-1)^4 u_3 = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Таким образом, $u_n = (-1)^{(n-1)(n-2)/2}$ и $D^2 = n^{(n-2)} (-1)^{(n-1)(n-2)/2}$, что и требовалось доказать. Определитель D задан этим соотношением с точностью до знака. Неопределенность в выборе знака связана не только с извлечением квадратного корня: выбирая различные первообразные корни, мы можем в некоторых случаях получать значения D , равные по величине, но противоположные по знаку.

35. Через точку P , лежащую на дуге C окружности, проведем прямую, пересекающую дугу C в точке A

(рис. 12). Выбрав на хорде PA произвольную точку P_1 , проведем через нее хорду BD . Построим точку E пересечения прямых AB, DP и точку F пересечения прямых PB, DA . Прямая EF — полярная точки P_1 (см. III.5). Выбрав на хорде PA другую точку P_2 и повторив все построение, получим полярную MN точки P_2 . Пусть L — точка пересечения прямых MN и EF . Тогда L — полюс прямой PA и, значит, является точкой пересечения касательных к окружности, проведенных в A и P (см. там

Рис 12.



же). Следовательно, прямая, проходящая через точки L и P , касается дуги C в точке P .

36. Пусть $\varphi' = d\varphi/df$, $\varphi'' = d^2\varphi/df^2$, $f_i = \partial f/\partial x_i$ и $f_{ij} = \partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$. Тогда

$$H[\varphi(f)] = \left| \frac{\partial^2 \varphi(f)}{\partial x_i \partial x_j} \right| = |\varphi' f_{ij} + \varphi'' f_i f_j|. \quad (1)$$

Определитель в правой части последнего равенства можно разложить по столбцам в сумму 2^n определителей. Но поскольку все определители, содержащие более одного столбца с элементами вида $\varphi'' f_i f_j$, обращаются в нуль, то

$$H[\varphi(f)] = (\varphi')^n H(f) + (\varphi')^{n-1} \varphi'' \sum_{i=1}^n f_i \begin{vmatrix} f_{11} & \dots & f_{1i} & \dots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \dots & f_{ni} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}, \quad (2)$$

где i -й столбец содержит частные производные первого порядка функции f . По теореме Эйлера об однородных функциях

$$f_j = \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^n x_k f_{jk}.$$

Подставив это выражение в i -й столбец определителя, стоящего в правой части соотношения (2), разложим его в сумму n определителей, из которых все, кроме одного, обращаются в нуль. Единственный отличный от нуля определитель равен $x_i H(f)/(p-1)$. Таким образом,

$$H[\varphi(f)] = (\varphi')^n H(f) + (\varphi')^{n-1} \varphi'' (p-1)^{-1} H(f) \sum x_i f_i,$$

а поскольку $\sum x_i f_i = pf$, то

$$H[\varphi(f)] = H(f) [(\varphi')^n + p(p-1)^{-1} f \cdot (\varphi')^{n-1} \varphi''],$$

что и требовалось доказать. (Частным случаем этой задачи является задача 14.)

37. Пусть AC — лестница длиной a , BD — лестница длиной b , $BC = x$ — расстояние между стенами, $AB = y$,

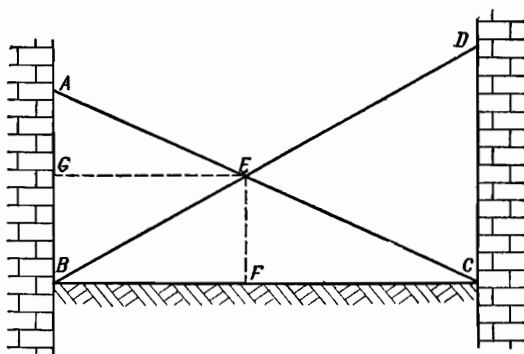


Рис. 13.

$CD = z$, $EF = h$ и $BF = t$ (рис. 13). Тогда из подобия треугольников AGE и ABC следует, что $t/x = (y-h)/y$, а из подобия треугольников EFB и DCB — что $h/z = t/x$. Таким образом, $h/z = (y-h)/y$ и

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{h}, \quad h > 0. \quad (1)$$

Поскольку $y < a$, а $z < b$, то неравенство

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{h} \quad (2)$$

можно рассматривать как необходимое условие существования решения задачи. Покажем, что неравенство

(2) является также и достаточным условием существования решения. Не ограничивая общности, можно считать, что $a \geq b$.

Прежде всего заметим, что если x — расстояние между стенами, то $x^2 = a^2 - y^2 = b^2 - z^2$, откуда

$$k^2 = a^2 - b^2 = y^2 - z^2. \quad (3)$$

Если $a = b > 2h_0$, то $y = z = 2h_0$ и $x = \sqrt{b^2 - 4h_0^2}$.

Если $a > b$ и задача допускает решение, то, как следует из соотношения (1), отрезок $2h$ совпадает со средним гармоническим отрезков y и z , в силу чего $h < z < 2h < y$. Комбинируя (1) и (3), получаем

$$f(z) = z^3(z - 2h) + k^2(z - h)^2 = 0. \quad (4)$$

Из (4) ясно, что функция $f(z)$ положительна при $z \leq 0$ или $z \geq 2h$. Кроме того, $f(h) = -h^4$. Следовательно, функция $f(z)$ по крайней мере один раз обращается в нуль между 0 и h и между h и $2h$. Но $f'(h) = -2h^3$, $f'(2h) = 8h^3 + 2k^2h$, а поскольку $f''(z) = 12z(z - h) + 2k^2$, то $f'(z)$ в интервале от h до $2h$ обращается в нуль один и только один раз. Таким образом, функция $f(z)$ в интервале от h до $2h$ убывает от некоторого отрицательного значения до минимума, а затем возрастает и обращается в нуль только один раз.

Докажем, что единственный корень функции $f(z)$, принадлежащий интервалу $[h, 2h]$, меньше b . Путем несложных преобразований $f(b)$ можно привести к виду

$$f(b) = a^2(b - h)^2 - h^2b^2; \quad (5)$$

из (2) следует неравенство $a(b - h) > hb$. Таким образом, $f(b) > 0$, а поскольку $b > h$, то b больше нуля функции $f(z)$, заключенного в интервале $[h, 2h]$. Итак, x однозначно определяется из соотношения $x = \sqrt{b^2 - z^2}$ (z — нуль функции $f(z)$, заключенный в интервале $[h, 2h]$), а y — из соотношения (1). Найденные значения y и z удовлетворяют соотношениям (1) и (4), а следовательно и (3). Подставляя найденное значение z в (3), находим

$$y^2 = (b^2 - x^2) + (a^2 - b^2) = a^2 - x^2.$$

Этим соотношением завершается доказательство того, что полученное значение x , и только оно одно, служит решением задачи.

Рассмотрим остальные нули функции $f(z)$. Если $2k^2 - 3h^2 \geq 0$, то $f''(z)$ имеет двукратный вещественный корень или комплексно сопряженные корни. В этом случае $f(z)$ имеет два комплексно сопряженных нуля. Если $2k^2 - 3h^2 < 0$, то $f''(z)$ имеет два нуля в интервале $[0, h]$ и в каждом из них выполняется неравенство $6f''(z) = (2z - h)f''(z) - 4(3h^2 - 2k^2)z - 10k^2h < 0$. Поскольку максимальное и минимальное значения $f'(z)$ отрицательны, $f'(z)$ имеет два комплексно сопряженных нуля и, следовательно, $f(z)$ также имеет два комплексно сопряженных нуля. Итак, единственный вещественный нуль функции $f(z)$, отличный от рассмотренного выше, заключен в интервале $[0, h]$. В силу соотношения (1) значение y , соответствующее этому (меньшему) нулю функции $f(z)$, отрицательно: лестница длиной a касается противоположной стены в точке, расположенной ниже уровня горизонтальной площадки, а точка пересечения продолжений лестниц лежит вне отрезка x .

Можно показать, что больший из нулей функции $f(z)$ удовлетворяет неравенствам

$$2h - \frac{k^2}{8h} < z < 2h - \frac{k^2h}{8h^2 + k^2}.$$

38. Ни один из членов обеих последовательностей не является целым числом. Левее любого целого числа N на числовой оси расположено $[N/(1+X)]$ членов первой и $[N/(1+Y)]$ членов второй последовательности. Но

$$\frac{N}{1+X} + \frac{N}{1+Y} = \frac{N}{1+X} + \frac{NX}{1+X} = N. \quad (1)$$

Поскольку число X иррационально, числа $N/(1+X)$ и $N/(1+Y)$ имеют ненулевые дробные части, сумма которых в силу соотношения (1) равна 1.

Следовательно, $[N/(1+X)] + [N/(1+Y)] = N - 1$, то есть левее числа N на числовой оси расположено всего $N - 1$ членов обеих последовательностей. Поскольку левее числа $N + 1$ расположено N членов обеих последовательностей, то между числами N и $N + 1$ заключен ровно один член какой-то из этих последовательностей, что и требовалось доказать.

39. Приведенное в условии задачи утверждение неверно. Точке плоскости с полярными координатами (ρ, φ) соответствуют также полярные координаты

$[(-1)^n \rho, \pi n + \vartheta]$. Следовательно, для того чтобы найти точку пересечения двух кривых, заданных уравнениями в полярных координатах, необходимо в одно из уравнений вместо ρ подставить $(-1)^n \rho$, а вместо ϑ — угол $\pi n + \vartheta$ и затем решить систему относительно ρ и ϑ при любых натуральных n .

40. Утверждение задачи допускает различные обобщения. Оно остается в силе и при замене в исходном соотношении кубов сторон a, b, c произвольной натуральной степенью $n > 1$ и при рассмотрении вместо трех положительных величин a, b, c любого числа таких величин. Мы приведем доказательство обобщенного утверждения для случая, когда длины отрезков a, b, c удовлетворяют соотношению

$$a^n + b^n + c^n = 3m^n.$$

Для удобства все доказательство разбито на 5 теорем*.

Теорема 1. Пусть n — натуральное число больше 1, x — любая положительная величина, а величина $d \neq 0$, такая, что сумма $x + d$ положительна. Тогда

$$(x + d)^n > x^n + n dx^{n-1}. \quad (1)$$

Доказательство. При $n = 2$ утверждение теоремы очевидно, поскольку левая часть неравенства (1) превосходит правую на d^2 . Умножив обе части неравенства (1) при $n = 2$ на положительную величину $x + d$, получим неравенство (1) при $n = 3$. Продолжая этот процесс, можно дойти до любого значения n . Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть a, b, c — положительные величины. Тогда

$$[(a + b + c)/3]^3 \geq abc, \quad (2)$$

причем равенство достигается в том и только в том случае, если $a = b = c$.

Доказательство. Предположим, что не все величины a, b и c равны и что они расположены в порядке возрастания. Пусть $a + b = 2m$, тогда $c > m$, и мы можем положить $c = m + d$, где $d > 0$. Подставляя $a + b = 2m$, $c = m + d$ в левую часть неравенства (2), получаем $[(a + b + c)/3]^3 = (m + d/3)^3$. По теореме 1

$(m + d/3)^3 > m^3 + m^2d = m^2c$. Но $m^2c \geq abc$, поскольку $m^2 = ab + (a - b)^2/4 \geq ab$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть a, b, c — положительные величины, n — любое натуральное число больше 1. Тогда

$$(a^n + b^n + c^n)/3 \geq [(a + b + c)/3]^n, \quad (3)$$

причем равенство достигается в том и только в том случае, если $a = b = c$.

Доказательство. Пусть $a + b + c = 3m$, $a = m + a'$, $b = m + b'$, $c = m + c'$, где $a' + b' + c' = 0$. По теореме 1 $a^n \geq m^n + na'm^{n-1}$, $b^n \geq m^n + nb'm^{n-1}$, $c^n \geq m^n + nc'm^{n-1}$, причем все три неравенства вырождаются в равенства в том и только в том случае, если $a' = b' = c' = 0$, то есть $a = b = c$. Следовательно, кроме этого исключительного случая, левая часть неравенства (3) больше $m^n + nm^{n-1}(a + b + c)/2 = m^n$. Именно эта величина и стоит в правой части неравенства (3). Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Из всех треугольников с данным периметром наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

Доказательство. Пусть $2p = a + b + c$ — заданный периметр, а S — площадь треугольника со сторонами a, b и c . По формуле Герона $S^2 = p(p - a)(p - b) \times \times (p - c)$. Если не все отрезки a, b и c равны, то по теореме 2

$$(p - a)(p - b)(p - c) < [(p - a) + (p - b) + (p - c)]^3/27 = p^3/27.$$

Следовательно, $S^2 < p^4/27$, или $S < p^2/3^{3/2}$, то есть площадь треугольника с неравными сторонами a, b, c меньше площади равностороннего треугольника со стороной $2p/3$, что и требовалось доказать.

Теорема 5. Среди треугольников со сторонами a, b, c , удовлетворяющими соотношению

$$a^n + b^n + c^n = 3m^n, \quad (4)$$

где n — натуральное число больше 1, наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник со стороной m .

Доказательство. (При $n = 1$ доказываемое утверждение совпадает с теоремой 4). Предположим, что не все отрезки a, b, c равны и выполняется соотношение (4).

Пусть S — площадь треугольника со сторонами a, b, c ; $a + b + c = 3s$; E_s — площадь равностороннего треугольника со стороной s . Тогда по теореме $4S < E_s$, а в силу соотношений (3) и (4) $m^n > s^n$, или $m > s$. Следовательно, если E_m — площадь равностороннего треугольника со стороной m , то $E_m > E_s > S$, что и требовалось доказать.

Утверждение задачи следует из теоремы 5 при $n = 3$.

41. а. Воспользуемся хорошо известной формулой суммы квадратов n первых натуральных чисел и обозначим через k их ККСК. Тогда

$$(n + 1)(2n + 1) = 6k^2. \quad (1)$$

Поскольку число k должно быть целым, то число n нечетно. Кроме того, правая часть соотношения (1) делится на 6, поэтому $n = 6\alpha + \beta$, где $\beta = \pm 1$. Рассмотрим сначала случай, когда $n = 6\alpha - 1$. Подставляя это значение в (1), находим $\alpha(12\alpha - 1) = k^2$, а поскольку множители α и $12\alpha - 1$ взаимно просты, то $\alpha = l^2$ и $12\alpha - 1 = m^2$. Следовательно, $12l^2 = m^2 + 1$. Но такое равенство невозможно, поскольку квадрат любого целого числа либо кратен 4, либо равен кратному 4 плюс 1.

Рассмотрим второй случай, когда $n = 6\alpha + 1$. Подставляя в (1), находим $(3\alpha + 1)(4\alpha + 1) = k^2$. Поскольку множители $3\alpha + 1$ и $4\alpha + 1$ снова взаимно просты, то $3\alpha + 1 = l^2$, $4\alpha + 1 = m^2$ и $(2l)^2 - 3m^2 = 1$. Это уравнение можно решить в целых числах хорошо известными методами и, зная решение в наименьших целых числах, получить все остальные (см. III.9). Три решения в наименьших целых числах имеют такой вид:

l	m	n	k	(2)
1	1	1	1	
13	15	337	13×15	
181	209	65 521	181×209	

б. Вычтем сумму первых $a - 1$ натуральных чисел из суммы первых $a + n - 1$ натуральных чисел, разделим

разность на n и приведем подобные члены. В результате мы получим соотношение

$$2n^2 + (6a - 3)n + 6a^2 - 6a + 1 = 6k^2, \quad (3)$$

где k — целое число. Как и в пункте «а», рассмотрим два случая: $n = 6\alpha + 1$ и $n = 6\alpha - 1$. При $n = 6\alpha + 1$ из соотношения (3) находим

$$3\alpha^2 + \alpha = k^2 - l^2, \quad l = a + 3\alpha. \quad (4)$$

Поскольку разность $k^2 - l^2$ при делении на 4 дает остаток 0, 1 или 3, то либо $\alpha \equiv 0 \pmod{4}$, либо $\alpha \equiv 1 \pmod{4}$. Число $3\alpha^2 + \alpha$ и в том и в другом случае делится на 4. Следовательно, числа k и l либо оба четные, либо оба нечетные. Пусть $k - l = 2m$. Тогда первое из соотношений принимает следующий вид:

$$\alpha(3\alpha + 1) = 4m(l + m). \quad (5)$$

Соотношение (5) порождает бесконечное множество решений в целых числах. Действительно, выбрав допустимое значение α и подставив его в левую часть соотношения (5), мы можем взять в качестве m один из делителей числа $N = \alpha(3\alpha + 1)/4$, а зная m , найти затем l , k и a . При этом, как следует из соотношения (4), должно выполняться неравенство $l > 3\alpha$, что дает для m ограничение

$$m < \sqrt{N + \left(\frac{3\alpha}{2}\right)^2} - \frac{3\alpha}{2}.$$

Любое допустимое значение $\alpha \geq 5$ приводит по крайней мере к одному решению

$$\left(m = 1, a = \frac{\alpha(3\alpha + 1)}{4} - (3\alpha + 1), n = 6\alpha + 1\right)$$

и может порождать несколько решений. Некоторые такие решения представлены в приводимой ниже таблице.

При $n = 6\alpha - 1$ вместо (4) мы получаем следующее соотношение:

$$3\alpha^2 - \alpha = k^2 - l^2, \quad l = a - 1 + 3\alpha. \quad (6)$$

В этом случае допустимые значения α удовлетворяют либо сравнению $\alpha \equiv 0 \pmod{4}$, либо сравнению $\alpha \equiv 3 \pmod{4}$. Следовательно, если снова положить $k - l = 2m$, то

$$\alpha(3\alpha - 1) = 4m(l + m). \quad (7)$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны предыдущему случаю. Приведем несколько пар значений n и a , при которых ККСК последовательных целых чисел $a, a+1, \dots, a+n-1$ также является целым числом.

При $n = 6\alpha + 1$

n	1	31	49	55	73	79	79	97	97	...
a	Любое	4	25	35	74	90	24	48	147	...

(При $n < 79$ допустимо только $m = 1$, при $n = 79$ и 97 допустимы $m = 1, 2$ и т. д.)

При $n = 6\alpha - 1$

n	41	47	65	65	71	89	89	95	95	...
a	14	22	10	55	69	8	120	45	140	...

42. Пусть x — число кокосовых орехов в куче до того, как пришел первый «посетитель», а y — число орехов, оставшихся после ухода n -го посетителя. По условиям задачи

$$x - 1 = kn, \quad y = hn, \quad (1)$$

где k, h и n — неизвестные целые числа. Пусть $(n-1)/n = p$. Тогда после ухода первого любителя кокосовых орехов в куче осталось knp орехов, а после ухода r -го любителя —

$$\begin{aligned} knp^r - (p^{r-1} + p^{r-2} + \dots + p^2 + p) = \\ = \frac{(k+1)(h-1)^r - (n-1)n^{r-1}}{n^{r-1}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Приравняв при $r = n$ правую часть соотношения (2) числу hn , находим

$$(k+1)(n-1)^n = [(h+1)n-1]n^{n-1}, \quad (3)$$

откуда ввиду взаимной простоты n и $n-1$ вытекает, что

$$k+1 = mn^{n-1}, \quad (h+1)n-1 = m(n-1)^n, \quad (4)$$

где m — некоторое целое число. Второе из соотношений (4) можно представить в виде

$$h = (n-1)n^{-1}[m(n-1)^{n-1} - 1]; \quad (5)$$

отсюда видно, что число $m(n-1)^{n-1} - 1$ кратно n . Кроме того, очевидно, что если нам удалось бы найти одно значение m , например m' , при котором число $m'(n-1)^{n-1} - 1$ кратно n , то любое значение m , обращающее h в целое число, можно было бы задать соотношением $m = m' + nc$, где c — любое натуральное число. Если m' — наименьшее натуральное значение m , то все целые значения h можно получать, придавая c последовательные натуральные значения 1, 2, 3, ... Первое из соотношений (4) определяет соответствующие значения k , а соотношения (1) — значения x и y . Заметим также, что, подставляя $k+1$ из (4) в (2), мы убеждаемся, что все промежуточные результаты (число орехов после ухода r -го прохожего) также являются целыми числами, то есть целочисленность h служит единственным ограничением на m . Таким образом, общее решение, соответствующее любому заданному значению n , имеет вид

$$\begin{aligned} x &= (m' + nc)n^n - (n-1), \\ y &= (m' + nc)(n-1)^n - (n-1), \end{aligned} \quad (6)$$

где m' — наименьшее натуральное число, при котором $m'(n-1)^{n-1} - 1$ кратно n .

Поскольку $(n-1)^{n-1} \equiv (-1)^{n-1} \pmod{n}$, мы видим, что наименьшее положительное значение m' , удовлетворяющее сравнению

$$m(n-1)^{n-1} - 1 \equiv 0 \pmod{n},$$

равно 1 при нечетном n и $n-1$ при четном n . Таким образом, общее решение задачи можно представить в виде

$$x = (1 + nc)n^n - (n-1), \quad y = (1 + nc)(n-1)^n - (n-1)$$

при нечетном n и

$$\begin{aligned} x &= (n-1 + nc)n^n - (n-1), \\ y &= (n-1 + nc)(n-1)^n - (n-1) \end{aligned}$$

при четном n . Обе эти формы можно объединить в одной:

$$x = Kn^n - (n - 1), \quad y = K(n - 1)^n - (n - 1),$$

$$2K = n(1 + 2c) + (-1)^{n+1}(2 - n),$$

где n и c — любые натуральные числа.

В таблице представлены численные значения главных (отвечающих $m = m'$) и общих решений x и y при $n = 2, 3, \dots, 10$.

n	m'	x_0	y_0	x_c	y_c
2	1	3	0	$3 + 8c$	$0 + 2c$
3	1	25	6	$25 + 81c$	$6 + 24c$
4	3	765	240	$x_0 + 4^5c$	$y_0 + 4 \cdot 3^4c$
5	1	3 121	1 020	$x_0 + 5^6c$	$y_0 + 5 \cdot 4^5c$
6	5	233 275	78 120	$x_0 + 6^7c$	$y_0 + 6 \cdot 5^6c$
7	1	823 537	279 930	$x_0 + 7^8c$	$y_0 + 7 \cdot 6^7c$
8	7	117 440 505	40 353 600	$x_0 + 8^9c$	$y_0 + 8 \cdot 7^8c$
9	1	387 420 481	134 217 720	$x_0 + 9^{10}c$	$y_0 + 9 \cdot 8^9c$
10	9	89 999 999 991	31 381 059 600	$x_0 + 10^{11}c$	$y_0 + 10 \cdot 9^{10}c$

43. Пусть $a_{ij} = f_{r+i+j-2}$ ($i = 1, 2, \dots, n+1$; $j = 1, 2, \dots, n$). Тогда $D = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), где A_{ij} обозначает алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в определителе D . Кроме того, $da_{ij}/dx = (r + i + j - 1)a_{i+1, j}$. Следовательно, по правилу дифференцирования определителя

$$\frac{dD}{dx} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{da_{ij}}{dx} A_{ij} = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n (r + i + j - 1) a_{i+1, j} A_{ij} \right].$$

Вычитая из каждого выражения, стоящего в квадратных скобках, величину

$$(r + 2i - 1) \sum_{j=1}^n a_{i+1, j} A_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } i = 1, 2, \dots, n-1; \\ (r + 2n - 1) D' & \text{при } i = n, \end{cases}$$

получаем

$$\frac{dD}{dx} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (j-i) a_{i+1,j} A_{ij} + (r+2n-1) D'.$$

Двойная сумма, входящая в правую часть последнего соотношения, равна нулю, поскольку при $i=j$ обращается в нуль член $(j-i)$, а остальные члены можно разбить на пары

$$(j-i) a_{i+1,j} A_{ij} + (i-j) a_{j+1,i} A_{ji},$$

которые взаимно уничтожаются, поскольку $a_{i+1,j} = a_{j+1,i}$, $A_{ij} = A_{ji}$ и $j-i = -(i-j)$.

Таким образом,

$$\frac{dD}{dx} = (r+2n-1) D',$$

что и требовалось доказать.

44. Сумма $\sum A_{ik} x^i y^k$ содержит члены второго и более высокого порядков. Решение задачи следует из того, что исходная система уравнений эквивалентна системе

$$\varphi(x, y) = 0, \quad d(x^a y)/dx = 0, \quad (1)$$

если под y во втором уравнении понимать функцию, неявно заданную первым уравнением.

Докажем, что система уравнений (1) допускает решение в положительных числах x и y . Для этого рассмотрим функцию $z(x) = x^a y$, где y — неявная функция от x , определяемая уравнением $\varphi(x, y) = 0$. При $y = 0$ уравнение $\varphi(x, 0) = 0$ также имеет корень, заключенный между 0 и 1, который мы обозначим через ε .

Записав уравнение $\varphi(x, y) = 0$ в виде

$$y + \sum_{\substack{2 \leq i+k < n \\ 1 \leq k}} A_{ik} x^i y^k = 1 - x - \sum_{i=2}^{n-1} A_{i0} x^i = 1 - \varphi(x, 0),$$

мы без труда убедимся, что на отрезке $[0, \varepsilon]$ оно имеет единственное неотрицательное решение $y(x)$, причем $y(\varepsilon) = 0$. Поэтому $z(x) = x^a y(x)$ определена на $[0, \varepsilon]$, положительна в $(0, \varepsilon)$ и

$$z(0) = z(\varepsilon) = 0.$$

Теорема Ролля позволяет утверждать, что в интервале $[0, \varepsilon]$ существует решение системы (1), а значит, и решения исходной системы в положительных числах $x > 0, y > 0$.

Докажем, что это решение единственно. В своих рассуждениях мы будем исходить из того, что $d^2(x^a y)/dx^2 < 0$ при $\varphi(x, y) = 0, d(x^a y)/dx = 0$. Докажем это утверждение.

Произведя подстановку $z = x^a y$ или $y = x^{-a} z$, преобразуем уравнение $\varphi(x, y) = 0$ к виду

$$\vartheta(x, z) = x + zx^{-a} + \sum A_{ik} x^{i-ka} z^k - 1 = 0.$$

Члены разложения функции $\vartheta(x, z)$ расположим по убывающим степеням x :

$$\begin{aligned} \vartheta(x, z) = & P_1 x^{\alpha_1} + P_2 x^{\alpha_2} + \dots + P_{j-1} x^{\alpha_{j-1}} + P_j + \\ & + P_{j+1} x^{\alpha_{j+1}} + \dots + P_m x^{\alpha_m}, \end{aligned}$$

где $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_{j-1} > 0; 0 > \alpha_{j+1} > \alpha_{j+2} > \dots > \alpha_m$. Коэффициенты P_s разложения при $s \neq j$ представляют собой относительно z многочлены с положительными коэффициентами. Свободный член многочлена P_j равен -1 , а коэффициенты при ненулевых степенях z , если таковые имеются, положительны. Система уравнений $dz/dx = 0, \varphi(x, y) = 0$ при положительных x и y эквивалентна системе уравнений $\vartheta(x, z) = 0, dz/dx = 0$. Но $\partial\vartheta/\partial x + (\partial\vartheta/\partial z)(dz/dx) = 0$, в силу чего $\partial\vartheta/\partial x = 0$. Вторую производную $d^2 z/dx^2$ найдем из уравнения

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \frac{d^2 z}{dx^2} = 0.$$

При положительных x и z производная $\partial\vartheta/\partial z$ положительна. Следовательно, чтобы доказать неравенство $d^2 z/dx^2 < 0$, нам необходимо доказать неравенство $\partial^2 \vartheta/\partial x^2 > 0$. По определению функции $\vartheta(x, z)$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \sum_{k=1}^{j-1} P_k \alpha_k x^{\alpha_k-1} + \sum_{k=j+1}^m P_k \alpha_k x^{\alpha_k-1} = 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^{j-1} P_k \alpha_k x^{\alpha_k} + \sum_{k=j+1}^m P_k \alpha_k x^{\alpha_k} = 0. \quad (1)$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{j-1} P_k \alpha_k (\alpha_k - 1) x^{\alpha_k - 2} + \sum_{k=j+1}^m P_k \alpha_k (\alpha_k - 1) x^{\alpha_k - 2}$$

и

$$x^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{j-1} P_k \alpha_k (\alpha_k - 1) x^{\alpha_k} + \sum_{k=j+1}^m P_k \alpha_k (\alpha_k - 1) x^{\alpha_k}.$$

Правая часть в силу соотношения (1) преобразуется к виду

$$\sum_{k=1}^{j-1} P_k \alpha_k^2 x^{\alpha_k} + \sum_{k=j+1}^m P_k \alpha_k^2 x^{\alpha_k}.$$

Поскольку при $k \neq j$ многочлен $P_k(z)$ как многочлен с положительными коэффициентами при положительных z принимает положительные значения, то

$$x^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} > 0,$$

что и требовалось доказать.

45. Решение задачи сводится к отысканию минимума функционала

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f dx,$$

где $f = \sqrt{1 + y'^2}/y$, $y \neq 0$. Поскольку f не зависит явно от x и вдоль минимизирующей кривой существует ее вторая производная, уравнение Эйлера имеет первый интеграл $f - y' f_{y'} = C$, которым можно воспользоваться при отыскании экстремали¹. Действительно, подставляя в него выражение для f и $f_{y'} = y' y^{-1} (1 + y'^2)^{-1/2}$, получаем

$$y^{-1} (1 + y'^2)^{1/2} - y'^2 y^{-1} (1 + y'^2)^{-1/2} = y' (1 + y'^2)^{-1/2} = C.$$

Решением этого дифференциального уравнения служит

¹ См., например, И. М. Гельфанд, С. В. Фомин, Вариационное исчисление, М., Физматгиз, 1961, § 4 и 30. — Прим. ред.

двупараметрическое семейство полуокружностей

$$(x+k)^2 + y^2 = C^2, \quad k > 0,$$

с центрами на оси x . При $x_1 \neq x_2$ через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) будет проходить одна и только одна полуокружность, принадлежащая этому семейству. Нетрудно убедиться в том, что именно эта полуокружность доставляет минимум функционалу I . (При $x_1 = x_2$ минимизирующая полуокружность вырождается в прямую.) Воспользуемся для этого условием Якоби. Полагая $k = k_1$, построим однопараметрическое поле экстремалей, покрывающих полуплоскость $y > 0$. Для этого поля $f_{y'y'} = y^{-1}(1+y'^2)^{-3/2} > 0$ (при $y > 0$). Таким образом, достаточное условие того, что построенная полуокружность минимизирует функционал I , выполнено.

46. Воспользуемся методом производящих функций. Пусть

$$a_0 = -1, \quad a_v = (-1)^{v-1} \int_0^1 \binom{t}{v} dt \quad (v = 1, 2, \dots)$$

и x — любое положительное число, меньшее 1 ($0 < x < 1$). Тогда

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{v=0}^{\infty} a_v x^v = - \int_0^1 dt \sum_{v=0}^{\infty} \binom{t}{v} (-x)^v = \\ &= - \int_0^1 (1-x)^t dt = \frac{x}{\ln(1-x)} \end{aligned}$$

(почленное интегрирование допустимо, поскольку биномиальный ряд, стоящий под знаком интеграла, сходится равномерно). Для вычисления $f(x)$ воспользуемся формулой Коши. Рассмотрим комплексную плоскость z с разрезом вдоль вещественной оси от 1 до ∞ . В оставшейся части плоскости функция $\ln(1-z)$ однозначна и аналитична, поэтому мы можем положить

$$\ln(1-z) = \ln|1-z| + i\omega,$$

где

$$\omega = \arg(1-z), \quad -\pi < \omega < \pi.$$

В разрезанной комплексной плоскости функция $f(z)$ однозначна и аналитична.

Пусть C — любой контур, не имеющий общих точек с разрезом и содержащий внутри себя точки $z = 0$ и $z = x$. Тогда по формуле Коши

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-x} dz = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dz}{(z-x) \ln(1-z)} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{\ln(1-z)} + \frac{x}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{(z-x) \ln(1-z)} = \\ &= -1 + \frac{x}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{(z-x) \ln(1-z)} = -1 + x\varphi(x). \end{aligned}$$

Функция $1/\ln(1-z)$ аналитична во всех точках контура C , за исключением $z = 0$, где она имеет полюс с вычетом -1 .

Пусть R , ρ и h — произвольные положительные числа, удовлетворяющие неравенствам $\rho < 1-x$, $R > 1+x$ и $h < \rho$, $z = \xi + i\eta$. Проведем на плоскости z окружности

$$C_R: |z| = R, \quad C_\rho: |1-z| = \rho$$

и полупрямые

$$D_h: \eta = \pm h, \quad \xi > 1.$$

Ясно, что в качестве контура C мы можем выбрать границу области, лежащей между окружностями C_ρ и C_R и вне полосы, заключенной между полупрямыми D_h . Обозначим C'_R , C'_ρ и D'_h круговые и прямолинейные части контура C . Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{C'_R} - \int_{C'_\rho} + \int_{D'_h} \right] \frac{dz}{(z-x) \ln(1-z)} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{C'_R} - \int_{C'_\rho} \right] \frac{dz}{(z-x) \ln(1-z)} + \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{D'_h} \frac{dz}{(z-x) \ln(1-z)}. \end{aligned}$$

Прямолинейные части D'_h контура C состоят из отрезков двух прямых, параллельных вещественной оси, расположенных симметрично относительно нее и

проходимых в противоположных направлениях. Нетрудно видеть, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{D'_h} \frac{dz}{(z-x) \ln(1-z)} = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{1+\rho}^R \left[\frac{1}{\ln^+(1-\xi)} - \frac{1}{\ln^-(1-\xi)} \right] \frac{d\xi}{\xi-x},$$

где $\ln^+(1-z)$ и $\ln^-(1-z)$ означают соответственно предельные значения $\ln(1-z)$, когда точка ξ стремится к разрезу сверху и снизу. В силу принятых нами соглашений относительно функции $\ln(1-z)$

$$\ln^+(1-\xi) = \ln(\xi-1) - \pi i, \quad \ln^-(1-\xi) = \ln(\xi-1) + \pi i, \\ \frac{1}{\ln^+(1-\xi)} - \frac{1}{\ln^-(1-\xi)} = \frac{2\pi i}{\ln^2(\xi-1) + \pi^2}$$

и

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{D'_h} = \int_{1+\rho}^R \frac{d\xi}{(\xi-x) [\ln^2(\xi-1) + \pi^2]}, \\ \Phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{C_R} - \int_{C_\rho} \right] \frac{dz}{(z-x) \ln(1-z)} + \\ + \int_{1+\rho}^R \frac{d\xi}{(\xi-x) [\ln^2(\xi-1) + \pi^2]}.$$

Устремим теперь R к бесконечности, а ρ — к нулю. Если ε — любое положительное число, то при достаточно большом R на контуре C будет выполняться неравенство

$$\left| \frac{1}{\ln(z-1)} \right| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R d\theta}{R-1} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty).$$

Поскольку при $z \rightarrow 1$

$$\frac{1}{\ln(1-z)} \rightarrow 0,$$

на контуре C_ρ при достаточно малом ρ будет выполняться неравенство

$$\left| \frac{1}{\ln(1-z)} \right| < \varepsilon,$$

и, таким образом,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\theta}{1-\rho-x} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (\rho \rightarrow 0).$$

Объединяя полученные неравенства, получаем окончательно

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{1+\rho}^R \frac{d\xi}{(\xi-x)[\ln^2(\xi-1) + \pi^2]} = \\ &= \int_1^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi-x)[\ln^2(\xi-1) + \pi^2]}, \end{aligned}$$

а производя подстановку $\xi = \zeta + 1$, приводим $\varphi(x)$ к виду

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} \frac{d\zeta}{(\zeta+1-x)(\ln^2\zeta + \pi^2)}.$$

Разлагая подынтегральное выражение в ряд по возрастающим степеням x и предполагая (справедливость такого предположения будет доказана чуть ниже), что его можно интегрировать почленно, получаем

$$f(x) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v x^v = -1 + x\varphi(x) = -1 + \sum_{v=1}^{\infty} x^v \int_0^{\infty} \frac{(\zeta+1)^{-v} d\zeta}{\ln^2\zeta + \pi^2},$$

откуда

$$a_v = (-1)^{v-1} \int_0^1 \binom{t}{v} dt = \int_0^{\infty} \frac{(\zeta+1)^{-v} d\zeta}{\ln^2\zeta + \pi^2}. \quad (1)$$

Именно это соотношение и требовалось доказать. Для обоснования законности почленного интегрирования положим

$$r_n(\zeta, x) = \frac{1}{\zeta + 1 - x} - \frac{1}{\zeta + 1} \left[1 + \frac{x}{\zeta + 1} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(\zeta + 1)^{n-1}} \right] = \frac{x^n}{(\zeta + 1)^n (\zeta + 1 - x)},$$

$$R_n(\zeta, x) = \varphi(x) - \sum_{v=0}^{n-1} x^v \int_0^{\infty} \frac{d\zeta}{(\zeta + 1)^{v+1} [\ln^2 \zeta + \pi^2]} = \int_0^{\infty} \frac{r_n(\zeta, x)}{\ln^2 \zeta + \pi^2} d\zeta.$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$0 < R_n(x) < x^n \int_0^{\infty} \frac{d\zeta}{(\zeta + 1 - x) [\ln^2 \zeta + \pi^2]} \rightarrow 0$$

и

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{n-1} x^v \int_0^{\infty} \frac{d\zeta}{(\zeta + 1)^{v+1} [\ln^2 \zeta + \pi^2]},$$

что и требовалось доказать.

Мы доказали формулу (1) для всех натуральных значений v . Однако левую и правую части этой формулы можно рассматривать как аналитические функции переменной v , принимающей не только натуральные значения. Действительно, положив

$$(-1)^{v-1} \binom{t}{v} \equiv e^{\pi i(v-1)} \frac{\Gamma(t+v)}{\Gamma(t-v+1) \Gamma(v+1)},$$

мы получим функцию

$$F(v) \equiv \int_0^1 e^{\pi i(v-1)} \frac{\Gamma(t+v)}{\Gamma(t-v+1) \Gamma(v+1)} dt,$$

аналитическую при любых значениях v . С другой стороны, функция

$$\Phi(v) \equiv \int_0^{\infty} \frac{(\zeta + 1)^{-v} d\zeta}{\ln^2 \zeta + \pi^2}$$

заведомо аналитична, если вещественная часть v больше 1. По доказанному выше функции $F(v)$ и $\Phi(v)$ совпадают при бесконечно многих значениях аргумента $v = 1, 2, \dots$. Можно было бы думать, что $\phi(v)$ и $F(v)$ представляют одну и ту же аналитическую функцию. Докажем, что такое предположение неверно.

Функция $F(v)$ аналитична при $v = 1$. Докажем, что $\Phi(v)$ не аналитична при $v = 1$. Полагая $v - 1 = s$, $\zeta + 1 = e^t$, имеем

$$\Phi(v) = \Psi(s) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-st} dt}{\ln^2(e^t - 1) + \pi^2} = \left[\int_0^a + \int_a^{\infty} \right] \frac{e^{-st} dt}{\ln^2(e^t - 1) + \pi^2},$$

где a — некоторое фиксированное число, большее 1. Первое слагаемое в правой части последнего равенства аналитично при всех значениях s (целая трансцендентная функция). Чтобы преобразовать второе слагаемое, заметим, что в полубесконечном интервале $(a, +\infty)$

$$\ln(e^t - 1) = \ln e^t + \ln(1 - e^{-t}) = t - \vartheta e^{-t},$$

где $0 < \vartheta < e^a/(e^a - 1) < 2$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln^2(e^t - 1) + \pi^2} - \frac{1}{t^2 + \pi^2} &= \\ &= \frac{2t\vartheta e^{-t} - \vartheta^2 e^{-2t}}{(t^2 + \pi^2)[(t + \vartheta e^{-t})^2 + \pi^2]} = t^3 e^{-t} P(t), \end{aligned}$$

где $P(t)$ — функция, ограниченная на полубесконечном интервале $(a, +\infty)$. Подставляя полученное выражение для $1/[\ln^2(e^t - 1) + \pi^2]$ в правую часть выражения, определяющего функции $\Phi(v)$ и $\Psi(s)$, получаем

$$\int_a^{\infty} \frac{e^{-st} dt}{\ln^2(e^t - 1) + \pi^2} = \int_a^{\infty} \frac{e^{-st} dt}{t^2 + \pi^2} + \int_a^{\infty} \frac{e^{-(s-1)t} P(t)}{t^2} dt.$$

Второе слагаемое в правой части аналитично, если вещественная часть s больше -1 . Обозначим $\psi(s)$ первое слагаемое в правой части:

$$\psi(s) = \int_a^{\infty} \frac{e^{-st} dt}{t^2 + \pi^2}. \quad (2)$$

Пусть $s = \sigma + it$, где τ — произвольная величина, а $\sigma > 0$. Дифференцируя (2) под знаком интеграла (что можно делать, поскольку получающийся интеграл равномерно сходится), находим вторую производную функции $\psi(s)$:

$$\psi''(s) = \int_a^{\infty} \frac{e^{-st} t^2 dt}{t^2 + \pi^2} = \int_a^{\infty} e^{-st} dt - \pi^2 \int_a^{\infty} \frac{e^{-st} dt}{t^2 + \pi^2}.$$

Если s стремится к нулю, оставаясь в правой полуплоскости, то интеграл

$$\int_a^{\infty} \frac{e^{-st}}{t^2 + \pi^2} dt$$

остается равномерно ограниченным по абсолютной величине

$$\left| \int_a^{\infty} \frac{e^{-st} dt}{t^2 + \pi^2} \right| \leq \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2 + \pi^2} = \frac{1}{2}.$$

Наоборот, член $\int_a^{\infty} e^{-st} dt = e^{-as}/s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow 0$. Это означает, что $\psi''(s)$ неограниченно возрастает при $s \rightarrow 0$. Следовательно, функция $\psi(s)$ не аналитична при $s = 0$. Это справедливо и относительно $\Psi(s)$ при $s = 0$ и $\Phi(v)$ при $v = 1$. Таким образом, $F(v)$ и $\Phi(v)$ — две различные аналитические функции, значения которых совпадают при $v = 1, 2, \dots$. Возникает вопрос, могут ли значения этих функций совпадать в точках, образующих другую бесконечную последовательность $\{v_n\}$, $n = 1, 2, \dots$. Нетрудно доказать, что это невозможно, если последовательность $\{v_n\}$ имеет по крайней мере одну конечную предельную точку, вещественная часть которой больше 1. Действительно, не ограничивая общности, предположим, что $v_n \rightarrow v_0$ при $n \rightarrow \infty$ и что вещественная часть v_0 больше 1. Тогда функция $\Omega(v) \equiv F(v) - \Phi(v)$ аналитична при $v = v_0$ и имеет бесконечно много нулей в окрестности $v = v_0$, из чего следует, что $\Omega(v) \equiv 0$. Разумеется, последовательность $\{v_n = n\}$ этим свойством не обладает.

В заключение заметим, что, подставив в выражение для $F(v)$ хорошо известные асимптотические формулы

для гамма-функции, можно получить оценку для коэффициентов a_v производящей функции $f(x)$: $a_v = O(1/v \ln^2 v)$.

47. Пусть a, b, c — длины ребер, сходящихся в вершине O тетраэдра $OABC$ с тремя прямыми плоскими углами при вершине; A_1, A_2, A_3, A — площади граней AOB, BOC, COA, ABC . Если $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — направляющие косинусы нормали к грани ABC относительно прямоугольной системы координат с началом в вершине O и осями, положительные направления которых совпадают с ребрами a, b и c , то $A_1 = A \cos \alpha, A_2 = A \cos \beta, A_3 = A \cos \gamma$. Поскольку $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, то $A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = A^2$.

Пусть V — объем тетраэдра $OABC$, r — радиус вписанной сферы. Тогда

$$6V = abc = 2r(A_1 + A_2 + A_3 + A),$$

откуда

$$r = \frac{abc}{2(A_1 + A_2 + A_3 + A)} = \frac{abc(A_1 + A_2 + A_3 - A)}{2[(A_1 + A_2 + A_3)^2 - A^2]} = \frac{A_1 + A_2 + A_3 - A}{a + b + c}.$$

48. Общие утверждения, о которых говорится в пункте «в» условия задачи, можно сформулировать следующим образом (пункт «а» содержится в первом утверждении как частный случай, отвечающий $n = 2, p = 3$; пункт «б» получаем из второго при $n = 2, p = 5$):

Если n — любое натуральное число ≥ 2 и уравнение $x^n + y^n = z^n$ разрешимо в целых числах, то:

1) при $n = (p-1)k$, где $p \geq 3$ — простое число, число x или y делится на p ;

2) если $n = (p-1)k/2$, где $p \geq 5$ — простое число, то x, y или z делятся на p .

Доказательство утверждения 1. Пусть $n = (p-1)k$. Предположим, что ни x , ни y не делятся на p . Тогда по малой теореме Ферма (III. 6)

$$x^n \equiv y^n \equiv 1 \pmod{p}.$$

Если z не делится на p , то по той же теореме

$$z^n \equiv 1 \pmod{p},$$

а если z делится на p , то

$$z^n \equiv 0 \pmod{p}.$$

И в том и в другом случае $x^n + y^n \equiv 2 \pmod{p} \not\equiv z^n \pmod{p} \geq 3$. Утверждение 1 доказано.

Доказательство утверждения 2. Пусть $n = (p - 1)k/2$. Предположим, что числа x , y и z взаимно просты с числом p . Тогда при $p \geq 5$ справедливы следующие сравнения: $x^n \equiv \pm 1$, $y^n \equiv \pm 1$, $z^n \equiv \pm 1 \pmod{p}$. Следовательно, либо

$$x^n + y^n \equiv \pm 2 \pmod{p} \not\equiv z^n \pmod{p},$$

либо

$$x^n + y^n \equiv 0 \pmod{p} \not\equiv z^n \pmod{p}.$$

Утверждение 2 доказано.

49. Пусть φ — многочлен $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$, а ψ — многочлен, стоящий в правой части доказываемого тождества.

Прежде всего докажем, что при $i \neq j$ многочлен ψ обращается в нуль при подстановке переменных (x_j, y_j) вместо (x_i, y_i) (обращение в нуль при такой подстановке многочлена φ очевидно). Многочлен ψ состоит из двух слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение определителей третьего порядка (i, j, k) . При замене переменных (x_1, y_1) переменными (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , (x_5, y_5) , (x_6, y_6) один из определителей в каждом слагаемом обращается в нуль, в силу чего многочлен ψ также обращается в нуль. При подстановке (x_4, y_4) вместо (x_1, y_1) слагаемые равны по величине, но противоположны по знаку, и ψ снова обращается в нуль. При циклической перестановке индексов $123456 \rightarrow 234561$ многочлен ψ лишь изменяет знак. Следовательно, при подстановке вместо (x_2, y_2) любой другой пары переменных (x_i, y_i) с $i \neq 2$ многочлен ψ обращается в нуль. То же можно сказать и относительно замены (x_i, y_i) переменными (x_j, y_j) при любых $i \neq j$. Итак, утверждение доказано.

Докажем теперь, что φ и ψ — многочлены относительно 12 переменных, не равные тождественно нулю. Для этого заметим, что многочлен φ содержит лишь один член вида $x_1^2 x_2 y_2 y_3^2 x_4 y_5$ — произведение элементов, стоящих на главной диагонали определителя $(1, 2, 3, 4,$

5, 6). Вывясним, есть ли такой член в многочлене ψ . Каждое из двух слагаемых многочлена ψ представляет собой произведение четырех определителей (i, j, k) . Поскольку выделенный член имеет относительно совокупности 12 переменных x_i, y_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) степень 8, каждый определитель третьего порядка должен давать вклад в виде монома степени 2. Отбросив переменные $x_3, x_5, x_6, y_1, y_4, y_6$, не входящие в выделенный член, мы обнаружим, что определитель $(6, 1, 2)$ порождает единственный моном, который может быть «полезен», а именно $x_1 y_2$, а определитель $(4, 5, 6)$ — моном $x_4 y_5$. Поскольку переменная y_5 в выделенный член входит в первой степени, при рассмотрении определителя $(1, 3, 5)$ необходимо отбросить y_5 , после чего его вклад сведется к моному $x_1 y_3$. Наконец, в определителе $(2, 3, 4)$ необходимо отбросить все члены, кроме $x_2 y_3$. Итак, первое слагаемое многочлена ψ единственным способом порождает член $x_1^2 x_2 y_2 x_3^2 x_4 y_5$ с коэффициентом 1. Во втором слагаемом определитель $(5, 6, 1)$ порождает моном $x_1 y_5$, определитель $(3, 4, 5)$ — моном $x_4 y_3$, поскольку переменная y_5 содержится в предыдущем мономе. В разложении определителя $(2, 4, 6)$ можно было бы использовать лишь моном $x_4 y_2$, но он привел бы к появлению в выделенном члене множителя x_4^2 . Следовательно, второе слагаемое не содержит члена требуемого вида, и многочлены ϕ и ψ содержат член $x_1^2 x_2 y_2 y_3^2 x_4 y_5$ с одинаковым коэффициентом, равным 1. Таким образом, ни ϕ , ни ψ не могут быть многочленами относительно переменных x_i, y_i , тождественно равными нулю.

Докажем далее, что $\phi = c\psi$, где c — некоторая постоянная, которую мы определим несколько позже. Выбрав все возможные тройки попарно различных индексов i, j, k , рассмотрим произведение π всех соответствующих им определителей (i, j, k) . Как многочлен относительно 12 переменных x_s, y_s , произведение π не равно тождественно нулю, поскольку ни один из его сомножителей не обращается тождественно в нуль. Следовательно, произведение многочленов $\pi\phi$ также не обращается в нуль. Поскольку $\pi\phi$ — непрерывная функция переменных x_i, y_i , в пространстве этих переменных существует область R , в которой многочлен $\pi\phi$ не принимает нулевых значений. Фиксируем значения всех

переменных, кроме x_1, y_1 , выбрав их так, чтобы полный набор всех 12 переменных принадлежал R . Тогда φ обратится в квадратичный относительно x_1, y_1 многочлен, не равный тождественно нулю. Покажем, что этот квадратичный многочлен неприводим. По доказанному выше многочлен φ обращается в нуль, если свободные переменные x_1, y_1 совпадают с любой парой фиксированных переменных $x_2, y_2, \dots, x_6, y_6$. Следовательно, если φ содержит два линейных относительно x_1, y_1 множителя, то по крайней мере один из них должен обращаться в нуль, когда значения x_1, y_1 совпадают, например, с тремя парами выбранных значений $x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4$. Но тогда определитель (2, 3, 4) должен при этих значениях обращаться в нуль, что невозможно, поскольку фиксированные значения переменных x_i, y_i ($i \geq 2$) принадлежат области R . Полученное противоречие доказывает неприводимость многочлена φ .

Оставляя фиксированными значения x_i, y_i ($i \geq 2$) из области R , рассмотрим ψ как многочлен относительно переменных x_1, y_1 . Оба многочлена φ и ψ квадратичны относительно x_1, y_1 , один из них (а именно φ) неприводим, и каждый обращается в нуль при пяти различных наборах значений, совпадающих с значениями фиксированных переменных. Следовательно, $\varphi = c_1\psi$, где c_1 не зависит от x_1 и y_1 , а φ и ψ рассматриваются как многочлены относительно x_1, y_1 .

Предположим теперь, что свободными являются переменные x_2, y_2 , а остальные переменные фиксированы, причем их значения лежат в области R . Повторяя приведенные выше рассуждения, мы заключаем, что $\varphi = c_2\psi$, где c_2 не зависит от x_2, y_2 . Если φ и ψ рассматривать при одном и том же полном наборе переменных x_i, y_i из R , то $(c_1 - c_2)\psi = 0$. Поскольку φ не обращается в нуль при любом наборе переменных из R , то ψ также не обращается в нуль в области R , в силу чего $c_1 = c_2$. Проводя аналогичные рассуждения с другими парами переменных, мы в конце концов приходим к соотношению $\varphi = c\psi$, где c — абсолютная постоянная (по крайней мере в области R), не зависящая ни от одной из 12 переменных. Поскольку по доказанному выше многочлены φ и ψ содержат один и тот же член $x_1^2 x_2 y_2 y_3^2 x_4 y_5$ с одним и тем же коэффициентом, то $c = 1$. Таким образом, в области R многочлены φ и ψ тожде-

ственно равны. Следовательно, они тождественно равны при любых значениях переменных x_i, y_i , что и требовалось доказать *.

50. Сумму первого ряда можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{\pi}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nz}{z + \pi} dz = - \int_{-\pi}^{\infty} \frac{dz}{z + \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin nz}{n} = \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{dz}{z + \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin nz}{n}. \end{aligned}$$

При z , изменяющемся от $(2k-1)\pi$ до $(2k+1)\pi$, сумма ряда, стоящая под знаком интеграла, равна $z/2 - k\pi$. Следовательно,

$$\begin{aligned} A &= - \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{dz}{z + \pi} \left(\frac{z}{2} - k\pi \right) = \\ &= - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [z - (2k+1)\pi \ln(z + \pi)] \Big|_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} = \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [(2k+1) \ln(k+1) - (2k+1) \ln k - 2] = \frac{\pi}{2} \lim_{r \rightarrow \infty} u_r, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} u_r &= \sum_{k=1}^r [(2k+1) \ln(k+1) - (2k+1) \ln k - 2] = \\ &= (2r+1) \ln(r+1) - 2 \sum_{k=1}^r \ln k - 2r. \end{aligned}$$

Пользуясь формулой Стирлинга [III.11(6)], находим

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} e^{u_r} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(r+1)^{2r+1}}{e^{2r} (r!)^2} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(r+1)^{2r+1}}{e^{2r}} \cdot \frac{e^{2r}}{2\pi r \cdot r^{2r}} = \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \left(1 + \frac{1}{r} \right)^{2r+1} = \frac{e^2}{2\pi}, \end{aligned}$$

откуда $A = \pi - \pi \ln 2\pi/2$.

Аналогичный прием позволяет также вычислить сумму второго ряда. Преобразовав B к виду

$$B = - \int_0^{\infty} \frac{dz}{z + \pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin nz}{n} = \pi - \frac{\pi}{2} \ln 2\pi - \int_0^{\pi} \frac{dz}{z + \pi} \cdot \frac{\pi}{2},$$

мы без труда получаем окончательный результат: $B = \pi/2 - \pi \ln \pi/2$.

51. Выберем прямоугольную систему координат с началом в центре мельничного колеса, ось y направим по вертикали, а ось x по горизонтали. Предположим, что мельничное колесо вращается против часовой стрелки. Пусть α — угол, составляемый радиусом колеса с положительным направлением оси x в момент отрыва капли воды. Траектория сорвавшейся капли воды будет описываться параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} x &= a \cos \alpha - vt \sin \alpha, \\ y &= a \sin \alpha + vt \cos \alpha - \frac{1}{2} gt^2, \end{aligned}$$

где t — время, прошедшее с момента отрыва капли от обода мельничного колеса, а $a \cos \alpha$, $a \sin \alpha$ — координаты точки отрыва. Исключив время t , мы получим уравнение

$$y = a \operatorname{cosec} \alpha - x \operatorname{ctg} \alpha - \frac{1}{2} gv^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha (a \cos \alpha - x)^2 \quad (1)$$

семейства парабол, описываемых сорвавшимися с мельничного колеса каплями воды.

Дифференцируя (1) по параметру α , находим

$$v^{-2} \operatorname{cosec}^2 \alpha (a \cos \alpha - x) (v^2 - ga \operatorname{cosec} \alpha + gx \operatorname{ctg} \alpha) = 0. \quad (2)$$

Обращение в нуль множителя $v^{-2} \operatorname{cosec}^2 \alpha$, не представляет для нас интереса.

Если $a \cos \alpha - x = 0$, то $y = a \sin \alpha$, и мы приходим к уравнению наружного обода мельничного колеса $x^2 + y^2 = a^2$.

И наконец, рассмотрим случай, когда в нуль обращается последний множитель

$$x = a \sec \alpha - v^2 g^{-1} \operatorname{tg} \alpha. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1) и упростив полученное уравнение, находим

$$y = \frac{1}{2} y^2 g^{-1} - \frac{1}{2} g v^{-2} [(v^4 g^{-2} + a^2) \operatorname{tg}^2 \alpha - 2 a v^2 g^{-1} \sec \alpha \operatorname{tg} \alpha], \quad (4)$$

а возводя (3) в квадрат, приходим к соотношению

$$x^2 - a^2 = (v^4 g^{-2} + a^2) \operatorname{tg}^2 \alpha - 2 a v^2 g^{-1} \sec \alpha \operatorname{tg} \alpha. \quad (5)$$

Наконец, исключая из (4) и (5) параметр α , находим уравнение огибающей парабол, описываемых отдельными каплями воды:

$$x^2 = -2 v^2 g^{-1} \left[y - \frac{1}{2} g v^{-2} (v^4 g^{-2} + a^2) \right].$$

Мы видим, что огибающая имеет форму параболы, вершина которой расположена на расстоянии $g(v^2 g^{-2} + a^2 g^{-2})/2$ над центром мельничного колеса.

52. Путем тех же рассуждений, которыми мы пользовались в задаче 29, можно получить равенство

$$\frac{\pi}{12} = \operatorname{arccctg} \frac{u_2}{u_1} + \sum_{r=1}^n \operatorname{arccctg} \left(\frac{4u_{r+1}^2}{D} \right),$$

где $\{u_r\}$ — любая последовательность, удовлетворяющая рекуррентному соотношению $u_{r+2} = 4u_{r+1} - u_r$, а $D = u_2^2 - u_1 u_3$. Этот результат позволяет получать различные представления для числа π в зависимости от того, как выбраны значения двух первых членов последовательности. При $u_1 = 2$, $u_2 = 8$ мы получаем решение задачи 29. Полагая $u_1 = u_2 = 1$, находим $u_3 = 3$, $D = -2$ и после несложных преобразований получаем разложение числа π , которое требовалось доказать.

53. Пусть x_1, x_2, x_3 — точки комплексной плоскости, совпадающие с вершинами исходного треугольника, y_1 — вершина равностороннего треугольника, построенного вовне на стороне $x_2 x_3$. Поскольку треугольник $y_1 x_2 x_3$ равносторонний, то

$$\begin{vmatrix} y_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

где ε и ε^2 — кубические корни из 1, отличные от 1. Раскрывая определитель, находим $y_1 = -\varepsilon(x_3 + \varepsilon x_2)$. Аналогично, если y_2 и y_3 — вершины равносторонних треугольников, построенных на сторонах x_3x_1 и x_1x_2 исходного треугольника вне его, то

$$y_2 = -\varepsilon(x_1 + \varepsilon x_3), \quad y_3 = -\varepsilon(x_2 + \varepsilon x_1).$$

Пусть a_1, a_2, a_3 — центры тяжести построенных треугольников. Тогда

$$a_1 = \frac{1}{3}(1 - \varepsilon)(x_3 - \varepsilon^2 x_2),$$

$$a_2 = \frac{1}{3}(1 - \varepsilon)(x_1 - \varepsilon^2 x_3),$$

$$a_3 = \frac{1}{3}(1 - \varepsilon)(x_2 - \varepsilon^2 x_1).$$

Точки a_1, a_2, a_3 служат вершинами треугольника A . Вычисляя отношения вида $(a_1 - a_2)/(a_3 - a_2)$, нетрудно убедиться, что все углы треугольника A равны. Следовательно, A — равносторонний треугольник, а его площадь находится из соотношения

$$-4iS_A = \begin{vmatrix} a_1 & a_1^* & 1 \\ a_2 & a_2^* & 1 \\ a_3 & a_3^* & 1 \end{vmatrix}, \quad (1)$$

где $*$ означает переход к комплексно сопряженной величине.

Пусть z_1, z_2, z_3 — вершины равносторонних треугольников, построенных на сторонах исходного треугольника внутри его. Тогда $z_1 = -\varepsilon(x_2 + \varepsilon x_3)$, $z_2 = -\varepsilon(x_3 + \varepsilon x_1)$, $z_3 = -\varepsilon(x_1 + \varepsilon x_2)$. Если b_1, b_2 и b_3 — центры тяжести этих треугольников, то

$$b_1 = \frac{1}{3}(1 - \varepsilon)(x_2 - \varepsilon^2 x_3),$$

$$b_2 = \frac{1}{3}(1 - \varepsilon)(x_3 - \varepsilon^2 x_1),$$

$$b_3 = \frac{1}{3}(1 - \varepsilon)(x_1 - \varepsilon^2 x_2).$$

Точки b_1, b_2, b_3 служат вершинами треугольника B . Нетрудно проверить, что треугольник B равносторонний, а его площадь находится из соотношения

$$4iS_B = \begin{vmatrix} b_1 & b_1^* & 1 \\ b_2 & b_2^* & 1 \\ b_3 & b_3^* & 1 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Вычисляя разность площадей треугольников A и B (подставляя вместо a_i и b_i их выражения через x_1, x_2, x_3), находим

$$-4i(S_A - S_B) = \begin{vmatrix} x_1 & x_1^* & 1 \\ x_2 & x_2^* & 1 \\ x_3 & x_3^* & 1 \end{vmatrix}.$$

Определитель в правой части равен $4iS$, где S — площадь исходного треугольника, откуда $S_A - S_B = S$, что и требовалось доказать*.

54. Приравняв коэффициенты при x^r в тождестве

$$(1 - x^2)^{r+1} (1 - x)^{-r-1} = (1 + x)^{r+1},$$

получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{r+1}{i} \binom{-r-1}{r-2i} (-1)^{r-2i} &= \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{r+1}{i} \binom{2r-2i}{r-2i} = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{r+1}{i} \binom{2r-2i}{r} = \binom{r+1}{r} = r+1, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

55. Пользуясь соотношением

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^{-1} = \int_0^{\infty} e^{-t(x_1 + x_2 + \dots + x_n)} dt, \quad (1)$$

преобразуем интеграл V_n к следующему виду:

$$V_n = n \int_0^{\infty} [\psi(t)]^{n-1} \varphi(t) dt, \quad (2)$$

$$\psi(t) = (1 - e^{-t}) t^{-1}, \quad \varphi(t) = \int_0^1 e^{-t\xi} \xi^2 d\xi.$$

Решение задачи сводится к исследованию асимптотического поведения интеграла V_n из (2) при $n \rightarrow \infty$.

Прежде всего заметим, что при t , изменяющемся от 0 до ∞ , функция $\psi(t)$ убывает от 1 до 0. Следовательно, при любом y , удовлетворяющем неравенствам $0 < y < 1$, уравнение

$$\psi(t) = (1 - e^{-t}) t^{-1} = 1 - y \quad (3)$$

имеет одно и только одно решение. Это решение можно представить в виде степенного ряда по y :

$$t = 2y + \frac{4}{3} y^2 + \dots, \quad (4)$$

который сходится при $0 \leq y \leq c$, где $0 < c < 1$. Предположим, что при выбранном значении c уравнение (3) имеет решение $t = a$. Выбрав для интервала $0 \leq y \leq c$ подходящую константу K , мы можем записать

$$dt = [2 + y\vartheta(y)] dy, \quad (5)$$

где $|\vartheta(y)| < K$ и $0 \leq t \leq a$. Интеграл V_n из (2) удобно разбить на два интеграла:

$$I_1 = \int_a^{\infty} [\psi(t)]^{n-1} \varphi(t) dt, \quad I_2 = \int_0^a [\psi(t)]^{n-1} \varphi(t) dt. \quad (6)$$

Рассмотрим сначала интеграл I_1 . Поскольку

$$\varphi(t) < \int_0^1 e^{-t\xi} d\xi = \psi(t) \leq \psi(a) = h < 1,$$

то

$$I_1 < \int_a^{\infty} [\psi(t)]^n dt < h^{n-2} \int_a^{\infty} t^{-2} dt = h^{n-2} a^{-1}, \quad (7)$$

откуда

$$I_1 = \beta h^{n-2} a^{-1}, \quad \text{где } 0 < \beta < 1.$$

Для получения асимптотической зависимости I_2 от n воспользуемся тем, что

$$\varphi(t) = \frac{1}{3} - \int_0^1 (1 - e^{-t\xi}) \xi^2 d\xi = \frac{1}{3} - t \int_0^1 e^{-\omega\xi} \xi^3 d\xi = \frac{1}{3} - \omega t,$$

$$0 < \omega < \frac{1}{4},$$

и преобразуем I_2 к виду

$$I_2 = \frac{1}{3} \int_0^a [\psi(t)]^{n-1} dt - \omega_1 \int_0^a [\psi(t)]^{n-1} t dt, \quad 0 < \omega_1 < \frac{1}{4}.$$

Пользуясь соотношениями (3) и (5), произведем замену переменной и обозначим для краткости

$$f(y) = \left[2 + \frac{4}{3}y + \dots\right][2 + \vartheta(y)].$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{3} \int_0^c (1-y)^{n-1} [2 + y\vartheta(y)] dy - \omega_1 \int_0^c (1-y)^{n-1} y f(y) dy = \\ &= \frac{2}{3} \int_0^c (1-y)^{n-1} dy + H \int_0^c (1-y)^{n-1} y dy = \\ &= \frac{2}{3} n^{-1} - \frac{2}{3} (1-c)^n n^{-1} + H n^{-1} (n+1)^{-1} \times \\ &\quad \times [1 - (nc+1)(1-c)^n] \end{aligned}$$

где H ограничено. Можно показать, что

$$\begin{aligned} H &\leq \frac{K}{3} + |\omega_1| \max \left[2 + \frac{4}{3}y + \dots\right] \cdot [2 + K] \leq \\ &\leq \frac{K}{3} + \frac{(4+Kc)(2+K)}{8}. \end{aligned}$$

Объединяя полученные асимптотические оценки для I_1 и I_2 , находим

$$V_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(1-c)^n + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta n^{n-2}}{a},$$

где α и β зависят от n , но ограничены. Отсюда следуют оба утверждения задачи.

56. Если воспользоваться стандартными обозначениями и выразить факториалы через биномиальные коэффициенты, то нам необходимо доказать, что

$$f(r) \equiv \sum_{i=0}^{[(r-1)/2]} \left\{ \binom{r}{i} \frac{r-2i}{r} \right\}^2 = \frac{1}{r} \binom{2r-2}{r-1}, \quad (1)$$

где $[k]$ означает целую часть числа k .

Заменив i на $r-i$ и складывая полученное соотношение с (1), преобразуем $f(r)$ к виду

$$f(r) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^r \left\{ \binom{r}{i} \frac{r-2i}{r} \right\}^2,$$

или

$$f(r) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i}^2 - 2 \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r}{i+1} \binom{r-1}{i} + 2 \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i}^2. \quad (2)$$

Для вычисления этих сумм воспользуемся тождеством

$$(1+x)^r (1+x)^q \equiv (1+x)^{r+q}.$$

Приравнивая коэффициенты при x^{r+s} в правой и левой частях тождества, получаем

$$\sum_{i=0}^q \binom{r}{s+i} \binom{q}{i} = \binom{r+q}{q+s}. \quad (3)$$

При $q=r$, $s=0$ и $q=r-1$, $s=1$ из (3) следуют соотношения

$$\sum_{i=0}^r \binom{r}{i}^2 = \binom{2r}{r} \quad \text{и} \quad \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r}{i+1} \binom{r-1}{i} = \binom{2r-1}{r}.$$

Подставляя полученные результаты в (2), получаем

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{1}{2} \binom{2r}{r} - 2 \binom{2r-1}{r} + 2 \binom{2r-2}{r-1} = \\ &= \binom{2r-2}{r-1} \left\{ \frac{2r-1}{r} - 2 \frac{2r-1}{r} + 2 \right\} = \frac{1}{r} \binom{2r-2}{r-1}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

57. Пусть A, B, C и D — заданные точки. Проведем через точку B прямую, перпендикулярную отрезку AC и отложим на ней отрезок $BL = AC$ (рис. 14). Пусть d — прямая, проходящая через точки D и L . Через точку B проведем прямую $b \parallel d$, а через точки A и C — прямые a и c , перпендикулярные прямой d . Прямые $a, b,$

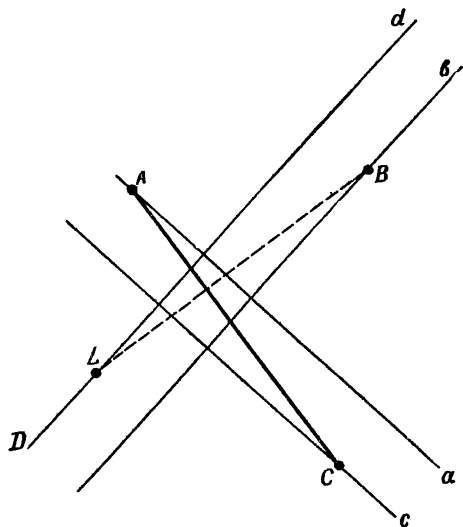


Рис. 14.

c, d , пересекаясь, образуют искомый квадрат, поскольку параллельные прямые a и c отстоят друг от друга на такое же расстояние, как прямые b и d . Это следует из того, что угол между a и AC равен углу между b и BL , а отрезки AC и BL равны по построению.

В общем случае задача допускает 6 решений.

58. Как известно¹, сумма k -х степеней n первых натуральных чисел представима в виде многочлена от n

¹ См., например, В. А. Кудрявцев, Суммирование степеней натурального ряда и числа Бернулли, Объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР, М. — Л., 1936, а также III. 14. — Прим. перев.

степени $k + 1$. Для $k = 2, 4$ и 6 эти многочлены имеют следующий вид:

$$\sum_{k=1}^n k^6 = \frac{6n^7 + 21n^6 + 21n^5 - 7n^3 + n}{42},$$

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30},$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}.$$

Полагая

$$f_1(n) = 5 \sum_{k=1}^n k^4 + \sum_{k=1}^n k^2,$$

$$f_2(n) = 7 \sum_{k=1}^n k^6 + 5 \sum_{k=1}^n k^4,$$

преобразуем доказываемое тождество к виду

$$\frac{f_2(n) + pf_1(n)}{f_2(n) - pf_1(n)} = \frac{n^2 + n + p}{n^2 + n - p}.$$

В справедливости его мы убедимся, заметив, что $f_2(n) = (n^2 + n)f_1(n)$.

59. Назовем правильным разбиение выпуклого n -угольника на треугольники диагоналями, пересекающимися только в вершинах n -угольника. Пусть $P_1, P_2, \dots, P_n$ — вершины выпуклого n -угольника, A_n — число его правильных разбиений. Рассмотрим сторону многоугольника P_1P_n . В каждом правильном разбиении P_1P_n принадлежит какому-то треугольнику $P_1P_iP_n$, где $1 < i < n$. Следовательно, полагая $i = 2, 3, \dots, n-1$, мы получаем $(n-2)$ группы правильных разбиений, включающие все возможные случаи.

При $i = 2$ одна группа правильных разбиений всегда содержит диагональ P_2P_n . Число разбиений, входящих в эту группу, совпадает с числом правильных разбиений $(n-1)$ -угольника $P_2P_3 \dots P_n$, то есть равно A_{n-1} .

При $i = 3$ одна группа правильных разбиений всегда содержит диагонали P_3P_1 и P_3P_n . Следовательно, число правильных разбиений, входящих в эту группу, совпа-

дает с числом правильных разбиений $(n-2)$ -угольника $P_3P_4 \dots P_n$, то есть равно A_{n-2} .

При $i=4$ среди треугольников разбиения непременно содержится треугольник $P_1P_4P_n$. К нему примыкают четырехугольник $P_1P_2P_3P_4$ и $(n-3)$ -угольник $P_4P_5 \dots P_n$. Число правильных разбиений четырехугольника равно A_4 , число правильных разбиений $(n-3)$ -угольника равно A_{n-3} . Следовательно, полное число правильных разбиений, содержащихся в этой группе, равно $A_{n-3} \cdot A_4$. Группы с $i=4, 5, \dots$ содержат $A_{n-4}A_5, A_{n-5}A_6, \dots$ правильных разбиений. При $i=n-2$ число правильных разбиений в группе совпадает с числом правильных разбиений в группе с $i=2$, то есть равно A_{n-1} . Итак,

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2} + A_{n-3}A_4 + A_{n-4}A_5 + \dots \\ \dots + A_3A_{n-4} + A_4A_{n-3} + A_{n-2} + A_{n-1}$$

Поскольку $A_3 = 1, A_4 = 2$, то

$$A_5 = A_4 + A_3 + A_4 = 5,$$

$$A_6 = A_5 + A_4 + A_4 + A_5 = 14,$$

$$A_7 = A_6 + A_5 + A_4A_4 + A_5 + A_6 = 42,$$

$$A_8 = A_7 + A_6 + A_5A_4 + A_4A_5 + A_6 + A_7 = 132$$

и так далее.

В заключение выведем производящую функцию для чисел A_n . Для удобства условимся считать, что $A_2 = 1$. Тогда¹

$$A_n = \sum_{i=2}^{n-1} A_i A_{n-i+1}.$$

Определим (пока чисто формально) производящую функцию $f(x)$ соотношением

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} A_n x^{n-2},$$

откуда

$$[f(x)]^2 = \sum_{n=3}^{\infty} x^{n-3} \sum_{i=2}^{\infty} A_i A_{n-i+1} = \sum_{n=3}^{\infty} A_n x^{n-3} = [f(x) - 1] x^{-1}.$$

¹ Другую комбинаторную задачу, приводящую к последовательности A_n , удовлетворяющей очень похожему рекуррентному соотношению, см. в книге. Ч. Тригг, Задачи с изюминкой, М., «Мир», 1975, задача 277. — Прим. ред.

Мы получили квадратное уравнение относительно $f(x)$. Его решение, соответствующее начальному условию $f(0) = 1$, имеет вид

$$f(x) = [1 - (1 - 4x)^{1/2}] (2x)^{-1}.$$

При $|x| \leq a < 1/4$ функция $f(x)$ допускает разложение в абсолютно сходящийся степенной ряд. Тем самым формально введенное выше разложение по степеням x оказывается обоснованным, и $f(x)$ действительно является производящей функцией для чисел A_n . Разлагая $f(x)$, находим

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n-1} \binom{2n-5}{n-2} x^{n-2},$$

откуда

$$A_n = \frac{2}{n-1} \binom{2n-5}{n-2}.$$

60. Для решения задачи необходимо сделать следующее замечание. Пусть x и y — любые натуральные числа. Тогда минимальное число единичных сопротивлений, которые необходимо взять, чтобы составить сопротивление в x единиц, равно x (при этом все x единичных проводников соединены последовательно), а минимальное число единичных сопротивлений, которые необходимо взять, чтобы составить проводимость (величину, обратную сопротивлению) в y единиц, равно y (при этом все y единичных проводников соединены параллельно).

Предположим, что требуется составить сопротивление p/q , где p и q — взаимно простые натуральные числа. Разложим величину сопротивления в конечную цепную дробь

$$\frac{p}{q} = r_1 + \frac{1}{c_1 + \frac{1}{r_2 + \frac{1}{c_2 + \dots}}}$$

Частные числители r_i соответствуют сопротивлениям, частные знаменатели c_i — проводимостям. Взятые вместе, они образуют цепь с общим сопротивлением p/q , состоящую из минимального числа $\sum r_i + \sum c_i$ единичных проводников (при этом каждое сопротивление r состоит из r единичных проводников, соединенных по-

следовательно, а каждая проводимость c — из c единичных проводников, соединенных параллельно). Например, сопротивления в 101/39 и 39/101 единиц можно составить из 11 единичных проводников, поскольку

$$\frac{101}{39} = 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2},$$

$$\frac{39}{101} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}.$$

Эти минимальные¹ схемы представлены на рис. 15, 16.

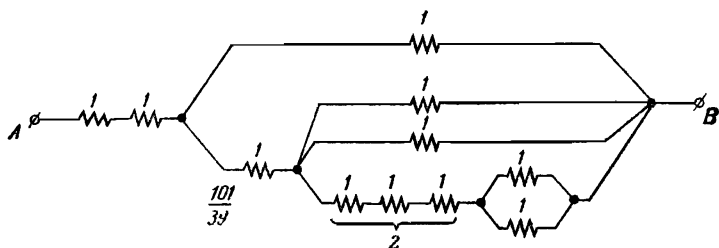


Рис. 15.

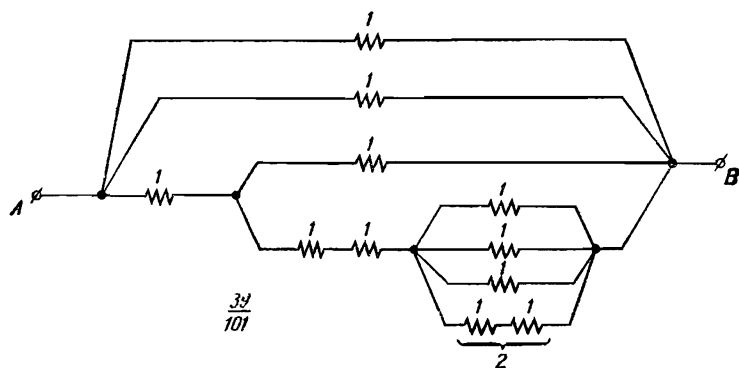


Рис. 16.

Следует иметь в виду, что если число q , стоящее в знаменателе несократимой дроби p/q , составное, то дробь p/q может допускать разложение в сумму

¹ Минимальность в этом решении остается недоказанной, особенно если учесть отмеченную далее неоднозначность разложения в сумму цепных дробей. — Прим. ред.

нескольких цепных дробей. В этом случае при неудачном выборе разложения сумма частных числителей и знаменателей может не совпадать с минимальным числом единичных сопротивлений в цепи с общим сопротивлением p/q . Например, выбрав разложение

$$\frac{34}{15} = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3},$$

мы получим цепь, состоящую из 9 единичных сопротивлений, а выбрав разложение

$$\frac{34}{15} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2},$$

— цепь, состоящую из 8 единичных сопротивлений.

Некоторые дроби допускают более 2 разложений в сумму конечных цепных дробей. Например,

$$\begin{aligned} \frac{31}{30} &= 1 + \frac{1}{30} = \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{7} \right) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right). \end{aligned}$$

61. Взяв интеграл, стоящий в левой части исходного уравнения, преобразуем ее к виду

$$\operatorname{arctg} \left[\frac{3}{4} \sin \left(\frac{dy}{dx} \right) \right] = \operatorname{arctg} x,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = \pi n + (-1)^n \arcsin \frac{4(x + \pi k)}{3}, \quad |x + \pi k| \leq \frac{3}{4},$$

где n и k — любые целые числа. Интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} y &= \pi n x + (-1)^n \left\{ (x + \pi k) \arcsin \frac{4(x + \pi k)}{3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} [9 - 16(x + \pi k)^2]^{1/2} \right\} + C, \quad |x + \pi k| \leq \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

где n — любое целое число, C — произвольная постоянная.

62. Пусть $A_1 A_2 A_3$ — данный треугольник, I — центр вписанной окружности, a_h — сторона, противолежащая вершине A_h , G_h — точка касания стороны a_h с вписанной окружностью, H_h — основание перпендикуляра, опущенного из A_h на a_h , и I_h — точка пересечения биссек-

трысы угла A_h со стороной a_h . Требуется доказать, что прямые $H_k H_j$, $I_k I_j$ и $G_k G_j$ проходят через одну точку.

Пусть вневписанная окружность с центром в точке J_h , расположенным на биссектрисе угла $A_j A_h A_i$, касается стороны a_h в точке N_k . Проведем через точки H_h , I_h , G_h и N_k прямые, перпендикулярные стороне a_h . Эти прямые пересекают биссектрису угла $A_j A_h A_i$ в точках A_k , I_k , I , J_k , образующих гармоническую четверку, поскольку двойное отношение

$$\frac{A_k I}{I I_k} : \frac{A_k J_k}{J_k I_k} = -1$$

(оно, очевидно, отрицательно и

$$\left| \frac{A_k I}{I I_k} \right| = \left| \frac{A_k J_k}{J_k I_k} \right| = \left| \frac{A_k A_j}{I_k A_j} \right|).$$

Следовательно, точки H_h , I_h , G_h , N_h также образуют гармоническую четверку, а лучи, проведенные из вершины A_h через эти точки, образуют гармонический пучок (III.2). Но в любом треугольнике высоты пересекаются в ортоцентре H , биссектрисы внутренних углов — в центре вписанной окружности I , прямые, проведенные из вершин треугольника в точки касания противоположных сторон со вписанной окружностью, — в точке Жергонна G и прямые, проведенные из вершин треугольника в точки касания противоположных сторон с вневписанными окружностями, — в точке Нагеля N (III.1). Точки H , I , G , N проектируются из каждой вершины треугольника четырьмя лучами, образующими гармонический пучок, и, следовательно, лежат на коническом сечении, проходящем через вершины треугольника A_1 , A_2 , A_3 (III.3).

Пусть P_{hj} — точка пересечения касательных к этому коническому сечению, проведенных в A_h и A_j . По теореме Паскаля (см. III.4) P_{hj} , H_j , H_h как точки пересечения противоположных сторон вырожденного вписанного шестиугольника $A_j A_j A_i A_h A_h H$ лежат на одной прямой. Аналогично через P_{hj} проходят прямые $I_h I_j$, $G_h G_j$ и $N_h N_j$.

Для всякого треугольника существуют три такие точки P_{hj} .

63. По теореме Вильсона (III.6)

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p-1) \equiv -1 \pmod{p}, \quad (1)$$

где p — любое нечетное простое число. Ясно, что для любого $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ справедливо сравнение

$$i \equiv -(p - i) \pmod{p}. \quad (2)$$

Заменим $(p - 1)/2$ четных чисел, стоящих в левой части сравнения (1), числами, сравнимыми с ними по модулю p , которые получаются из (2) при $i = 2, 4, 6, \dots, p - 1$. Группируя одинаковые множители, получаем

$$1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots (p - 2)^2 (-1)^{(p-1)/2} \equiv -1 \pmod{p},$$

или

$$1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots (p - 2)^2 \equiv (-1)^{(p+1)/2} \pmod{p}, \quad (3)$$

что и требовалось доказать.

Производя в левой части сравнения (1) аналогичную замену $(p - 1)/2$ нечетных чисел числами, сравнимыми с ними по модулю p , которые получаются из (2) при $i = 1, 3, 5, \dots, p - 2$, приходим к сравнению

$$2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (p - 1)^2 \equiv (-1)^{(p+1)/2} \pmod{p}.$$

64. По определению $r_n = u_n + r_{n+1}$. Следовательно,

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = 1 - \frac{u_n}{r_n},$$

$$\frac{r_{n+2}}{r_n} = \left(1 - \frac{u_n}{r_n}\right) \left(1 - \frac{u_{n+1}}{r_{n+1}}\right) > 1 - \frac{u_n}{r_n} - \frac{u_{n+1}}{r_{n+1}}.$$

Пользуясь методом математической индукции, нетрудно доказать, что

$$\frac{r_{n+p}}{r_n} > 1 - \frac{u_n}{r_n} - \frac{u_{n+1}}{r_{n+1}} - \dots - \frac{u_{n+p}}{r_{n+p}}.$$

Поскольку исходный ряд сходится, то $\lim_{p \rightarrow \infty} r_{n+p} = 0$. Таким образом, при любом n можно указать такое значение p , что правая часть неравенства

$$\frac{u_n}{r_n} + \frac{u_{n+1}}{r_{n+1}} + \dots + \frac{u_{n+p}}{r_{n+p}} > 1 - \frac{r_{n+p}}{r_n}$$

будет больше любого заранее заданного числа $\delta < 1$. Следовательно, ряд

$$\frac{u_1}{r_1} + \frac{u_2}{r_2} + \frac{u_3}{r_3} + \dots$$

расходится, что и требовалось доказать.

65. Преобразовав исходное уравнение к виду

$$x^2 - 3xy + y^2 - 2y - 1 = 0 \quad (1)$$

и разрешив его относительно x , получим

$$2x = 3y \pm m, \quad m^2 = 5y^2 + 8y + 4, \quad (2)$$

где m должно быть положительным целым числом. Докажем, что соотношение $2x = 3y - m$ следует отбросить. Действительно, поскольку m и y — положительные целые числа, то из соотношения между m^2 и y следует, что $m > \sqrt{5}y$. Поэтому $2(y - x) = m - y > (\sqrt{5} - 1)y > 0$, или $y > x$. Если же $2x = 3y + m$, то, очевидно, выполняется неравенство $x > y$. Итак,

$$2x = 3y + m, \quad m^2 = 5y^2 + 8y + 4. \quad (2')$$

Разрешив второе уравнение относительно y и отбросив отрицательный корень, получим

$$5y = t - 4, \quad t^2 = 5m^2 - 4, \quad (3)$$

где t — положительное целое число.

Решения второго из уравнений (3) в четных числах мы найдем, положив $m = 2r$, $t = 2s$, после чего оно примет вид

$$5r^2 - s^2 = 1. \quad (4)$$

Поскольку число y должно быть целым, число $s - 2$ должно делиться на 5.

Решение второго из уравнений (3) в нечетных числах сводится к решению уравнения

$$5r^2 - s^2 = -1 \quad (5)$$

при помощи формул

$$m = s \pm r, \quad t = 5r \pm s.$$

Если r и s — решения уравнения (5), то m и t , найденные по этим формулам, удовлетворяют второму из уравнений (3). И обратно, из (3) видно, что $m^2 - t^2 \equiv \equiv 0 \pmod{4}$, откуда либо $m - t$, либо $m + t$ делятся на 4. Соответствующее решение уравнения (5) имеет вид

$$r = \frac{t \mp m}{4}, \quad s = m + \frac{m \mp t}{4}$$

(знак берется так, чтобы r и s были целыми). Для того чтобы y было целым, $s \pm 4$ должно делиться на 5.

Как известно¹, решения уравнений (4) и (5) тесно связаны со свойствами подходящих дробей p_n/q_n непрерывной дроби

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots$$

Рассмотрим отдельно подходящие дроби с четными и нечетными номерами. Перебор всех возможных случаев значительно сократится, если мы воспользуемся следующей теоремой.

Теорема. При $i = 0, 1, 2, \dots$ выполняются следующие сравнения:

$$p_{4i+1} \equiv 2, \quad p_{4i+2} \equiv -1, \quad p_{4i+3} \equiv -2, \quad p_{4i+4} \equiv 1 \pmod{5}. \quad (6)$$

Доказательство. Поскольку числители подходящих дробей удовлетворяют рекуррентному соотношению $p_n = 4p_{n-1} + p_{n-2}$, то

$$p_{n+2} = 4p_{n-1} + p_n \equiv -p_{n-1} + p_n \pmod{5}.$$

Предположим, что справедливы первые два сравнения из (6). Тогда $p_{4i+3} \equiv -p_{4i+2} + p_{4i+1} \equiv -2$; $p_{4i+4} \equiv 2 - 1 = 1$; $p_{4i+5} \equiv -1 - 2 \equiv 2$; $p_{4i+6} \equiv -2 + 1 \equiv -1 \pmod{5}$. Но $p_1 = 2$, $p_2 = 9 \equiv -1 \pmod{5}$. Следовательно, утверждение теоремы всегда верно.

Подходящие дроби с четными номерами. При $m = s - r$, $t = 5r - s$

$$y = r - \frac{s+4}{5}, \quad x = r + \frac{s-6}{5}.$$

Следовательно, числа x и y могут быть целыми в том и только в том случае, если $s \equiv 1 \pmod{5}$. Соответствующие решения исходного уравнения имеют вид

$$y = q_{4i} - \frac{p_{4i}+4}{5}, \quad x = q_{4i} + \frac{p_{4i}-6}{5}, \quad 5q_{4i}^2 - p_{4i}^2 = 1. \quad (7)$$

При $m = s + r$, $t = 5r + s$ получаем

$$y = r + \frac{s-4}{5}, \quad x = 2r + \frac{4s-6}{5}.$$

¹ См. А. О. Гельфонд, Решение уравнений в целых числах, Гостехиздат, М., 1957, стр. 24; В. Серпинский, О решении уравнений в целых числах, Физматгиз, М., 1961, стр. 29, а также III.9. — Прим. перев.

Следовательно, числа x и y могут быть целыми в том и только в том случае, если $s \equiv -1 \pmod{5}$. Соответствующие решения исходного уравнения имеют вид

$$y = q_{4i+2} + \frac{p_{4i+2} - 4}{5}, \quad x = 2q_{4i+2} + \frac{4p_{4i+2} - 6}{5},$$

$$5q_{4i+2}^2 - p_{4i+2}^2 = 1. \quad (8)$$

Подходящие дроби с нечетными номерами. В этом случае $m = 2r$, $t = 2s$ и, следовательно,

$$y = \frac{2(s-2)}{5}, \quad x = r + \frac{3(s-2)}{5}.$$

Числа x и y могут быть целыми в том и только в том случае, если $s \equiv 2 \pmod{5}$. Это означает, что допустимы лишь подходящие дроби с номерами $4i+1$. Соответствующие решения исходного уравнения имеют вид

$$y = \frac{2(p_{4i+1} - 2)}{5}, \quad x = q_{4i+1} + \frac{3(p_{4i+1} - 2)}{5},$$

$$5q_{4i+1}^2 - p_{4i+1}^2 = 1. \quad (9)$$

Нетрудно проверить, что пары чисел (7), (8) и (9) действительно удовлетворяют исходному уравнению. Подстановка решений (7), (8) и (9) в исходное уравнение значительно облегчается, если его предварительно преобразовать к виду

$$5 \left[\frac{x+y}{2} + 1 \right]^2 - \left[5 \left(\frac{x-y}{2} + 1 \right) \right]^2 + 1 = 0$$

[для решения (7)],

$$5 \left[\frac{4y-x}{2} + 1 \right]^2 - \left[5 \left(\frac{x-2y}{2} \right) - 1 \right]^2 + 1 = 0$$

[для решения (8)] и

$$5 \left[x - \frac{3}{2} y \right]^2 - \left[\frac{5y}{2} + 2 \right]^2 - 1 = 0 \quad \text{[для решения (9)].}$$

66. Пусть D_n — определитель n -го порядка, стоящий в левом верхнем углу треугольника Паскаля. Из свойств биномиальных коэффициентов следует, что элементы определителя D_n удовлетворяют соотношениям

$$a_{ij} = a_{i,j-1} + a_{i-1,j}, \quad a_{1j} = a_{i1} = 1. \quad (1)$$

Заменив i -ю строку определителя D_n разностью между $(i+1)$ -й и i -й строкой при $i = 1, 2, \dots, n-1$, получим матрицу, в которой элемент, стоящий на пересечении

i -й строки и j -го столбца, в силу соотношений (1) совпадает с элементом $a_{i,j-1}$ исходной матрицы, при этом все элементы, стоящие в первом столбце новой матрицы, кроме элемента $a_{11} = 1$, равны нулю. Заменяя далее k -й столбец нового определителя разностью между $(k+1)$ -м и k -м столбцом при $k = 1, 2, \dots, n-1$, получим матрицу, в которой элемент, стоящий на пересечении i -й строки и j -го столбца, в силу соотношения (1) совпадает с элементом $a_{i-1,j-1}$ исходной матрицы, при этом все элементы, стоящие в первой строке, кроме $a_{11} = 1$, равны 0. Разлагая полученный определитель по элементам первой строки (или первого столбца), получаем $D_n = 1 \cdot D_{n-1}$. Продолжая спуск по порядку определителя, после $(n-1)$ шагов мы дойдем до определителя 2-го порядка:

$$D_n = D_{n-1} = \dots = D_2 = 1,$$

что и требовалось доказать.

67. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — векторы, образующие ортонормированный базис n -мерного пространства. Тогда систему линейных уравнений, приведенную в условиях задачи, можно записать в более компактном виде:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & \dots & e_n \\ x_n & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_n & x_1 & \dots & x_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_1 \end{vmatrix} = a_1 e_1 \pm a_2 e_2 + a_3 e_3 \pm a_4 e_4 + \dots$$

(из двух знаков, стоящих перед $a_{2l}e_{2l}$ плюс следует выбирать при нечетном, а минус — при четном n).

Отсюда видно, что вектор $(a_1, \pm a_2, a_3, \dots)$ ортогонален каждому из $(n-1)$ векторов-строк

$$(x_n, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), (x_{n-1}, x_n, x_1, \dots, x_{n-2}), \dots, (x_2, x_3, x_4, \dots, x_1).$$

Выписав соответствующие скалярные произведения, получим $(n-1)$ уравнений:

$$\begin{aligned} a_1 x_n \pm a_2 x_1 + a_3 x_3 \pm \dots &= 0, \\ a_1 x_{n-1} \pm a_2 x_n + a_3 x_1 \pm \dots &= 0, \\ a_1 x_{n-2} \pm a_2 x_{n-1} + a_3 x_n \pm \dots &= 0, \\ \dots & \end{aligned}$$

которые после перестановки членов преобразуются к следующему виду:

$$\begin{aligned}\pm a_2 x_1 + a_3 x_2 \pm a_4 x_3 &= \dots = 0, \\ a_3 x_1 \pm a_4 x_2 + a_5 x_3 + \dots &= 0, \\ a_4 x_1 + a_5 x_2 \pm a_6 x_3 + \dots &= 0, \\ . &\end{aligned}$$

Решение этой системы $(n-1)$ линейных однородных уравнений с n неизвестными определяет отношение неизвестных

$$x_1 : x_2 : \dots : x_n = \alpha_1 : \alpha_2 : \dots : \alpha_n,$$

где

$$\alpha_1 = \begin{vmatrix} a_3 & \pm a_4 & \dots \\ \pm a_4 & a_5 & \dots \\ . & . & . \end{vmatrix},$$

$$\alpha_2 = \begin{vmatrix} \pm a_4 & a_5 & \dots \\ a_5 & \pm a_6 & \dots \\ . & . & . \end{vmatrix}, \dots, \alpha_n = \begin{vmatrix} \pm a_2 & a_3 & \dots \\ a_3 & \pm a_4 & \dots \\ . & . & . \end{vmatrix}$$

(у элементов с двойным знаком плюс следует выбирать при нечетном, а минус — при четном n).

Подставляя $x_i = \alpha_i x_r / \alpha_r$ ($i \neq r$) в любое из исходных уравнений, например в первое уравнение, умножая обе его части для симметрии на α_r^{n-1} и вынося множитель x_r^{n-1} , получаем

$$x_r^{n-1} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_n & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-2} \\ . & . & . & . \\ \alpha_3 & \alpha_n & \dots & \alpha_1 \end{vmatrix} = \alpha_1 \alpha_r^{n-1},$$

откуда

$$x_r = \alpha_r \alpha_1^{1/(n-1)} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_n & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-2} \\ . & . & . & . \\ \alpha_3 & \alpha_n & \dots & \alpha_1 \end{vmatrix}^{1/(n-1)}.$$

Корень $(n-1)$ -й степени в правой части полученного выражения следует понимать как любое из $(n-1)$ значений корня, а определитель получается из определителя

теля, стоящего в левой части первого из исходных уравнений, при замене x_i на α_i .

68. Перестановкой строк и столбцов приведем определитель D_n к клеточно-диагональному виду

$$D_n = \pm \begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_m \end{vmatrix},$$

где A_k — квадратная матрица порядка n_k ($n_k > 1$), у которой

$$a_{11} = a_{n_k, n_k} = 1, \quad a_{i+1, i} = a_{i, i+1} = 1$$

$$(i = 1, 2, \dots, n_k - 1),$$

а все остальные элементы равны нулю.

В свою очередь любую матрицу A_k можно преобразовать к еще более простому виду — матрице B_k , у которой $b_{i, i+1} = 1$, $b_{ii} = (-1)^{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, n_k - 1$), элемент b_{n_k, n_k} равен либо 0 (если число n_k четно), либо 2 (если n_k нечетно), а все остальные элементы равны 0. Вычислив определитель матрицы B_k , мы получим следующие результаты:

$$\det A_k = \det B_k = \begin{cases} 0 & \text{при } n_k \equiv 0 \pmod{2}, \\ 2 & \text{при } n_k \equiv 1 \pmod{4}, \\ -2 & \text{при } n_k \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Отсюда мы заключаем, что определитель D_n нечетного порядка n отличен от нуля лишь в том случае, если число m и все n_k ($k = 1, 2, \dots, m$) нечетны. Определитель D_n четного порядка отличен от нуля лишь в том случае, если m четно, а все n_k ($k = 1, 2, \dots, m$) нечетны. Утверждения задачи следуют из приведенных результатов.

а. При нечетном n D_n равно либо $\pm 2^m$, где m — нечетное число, либо 0. При четном n D_n равно либо $\pm 2^m$, где m — четное число, либо 0.

б. После приведения определителя D_5 к клеточно-диагональному виду число квадратных матриц A_k может оказаться равным либо 1 (порядок единственной

матрицы A_1 равен 5), либо 2 (одна матрица A_k второго и одна — третьего порядка). В первом случае $D_5 \neq 0$, во втором $D_5 = 0$. Из свойств матрицы A_k второго порядка следует, что во втором случае определитель D_5 содержит две одинаковые строки и два одинаковых столбца. Обратное утверждение очевидно.

в. Если две строки определителя D_n совпадают, то стоящие в них две единицы должны располагаться в одних и тех же столбцах. Поскольку каждый столбец содержит лишь две единицы, а его остальные элементы равны нулю, то эти два столбца совпадают.

г. Если $\det A_k \neq 0$, то $n_k \geq 3$, поэтому

$$n = \sum_{k=1}^m n_k \geq 3m.$$

69. Задача допускает следующее обобщение.

Если $a_1, a_2, \dots, a_n$ — n комплексных чисел, таких, что $|a_1| = |a_2| = \dots = |a_n| = r \neq 0$, и $T_n^s (s < n)$ — сумма всех возможных произведений из n этих чисел по s , то

$$\left| \frac{T_n^s}{T_n^{n-s}} \right| = r^{2s-n}. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть ϕ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) — аргументы чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$. Тогда $a_j = re^{i\phi_j}$ и из T_n^s можно вынести множитель r^s , а из T_n^{n-s} — множитель r^{n-s} . После этого в числителе останется величина $e^{i\psi} \sum e^{-i\phi}$, а в знаменателе — величина $\sum e^{i\phi}$, где ψ — сумма всех аргументов ϕ_j , а ϕ — сумма $n - s$ аргументов тех чисел a_j , которые входят в соответствующее слагаемое знаменателя T_n^{n-s} . Поскольку $\sum e^{i\phi}$ и $\sum e^{-i\phi}$ — комплексно сопряженные числа, то $|\sum e^{i\phi}| = |\sum e^{-i\phi}|$. Кроме того, $|e^{i\psi}| = 1$. Тем самым соотношение (1) доказано.

Исходное утверждение задачи следует из него при $n = 3$ и $s = 2$.

70. Пусть $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, \dots$ — члены последовательности 2, 3, 7, 43, 1807, ..., образуемой знамена-

телями ряда. Тогда $v_n = v_1 v_2 \dots v_{n-1} + 1$. Заметим, что

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{v_3 - 1},$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = 1 - \frac{1}{42} = 1 - \frac{1}{v_4 - 1},$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} = 1 - \frac{1}{1806} = 1 - \frac{1}{v_5 - 1}.$$

Предположим, что при некотором значении n

$$S_n = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \dots + \frac{1}{v_n} = 1 - \frac{1}{v_{n+1} - 1}.$$

Тогда при том же значении n

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{v_{n+1}} = 1 - \frac{1}{v_{n+1}(v_{n+1} - 1)} = 1 - \frac{1}{v_{n+2} + 1}.$$

Очевидно также, что при $w > v_{n+1}$

$$S_n + \frac{1}{w} < S_{n+1},$$

а при $u \leq v_{n+1} - 1$

$$S_n + \frac{1}{u} \geq 1.$$

Следовательно, если сумма S_n n дробей указанного вида дает наилучшее приближение к 1, то наилучшее приближение с помощью суммы S_{n+1} $n+1$ дробей того же вида можно получить, прибавив к S_n дробь $1/v_{n+1}$. Утверждение о наилучшем приближении к единице с помощью суммы дробей вида $1/n$ заведомо верно при $n=2$ или $n=3$ и остается верным при произвольном n , если дополнительно потребовать, чтобы набор $n+1$ дробей непременно содержали n предыдущих дробей.

Трудная задача, решение которой предоставляется читателю, состоит в доказательстве того, что и при снятии дополнительного ограничения приведенный выше способ построения S_n дает наилучшее приближение к единице.

71. Выберем в плоскости стола прямоугольную систему координат, совместив ее начало с центром стола и направив ось x так, чтобы она была параллельна стержню, а сам стержень расположился в первых двух квадрантах. В этой системе координат уравнение края

стола $x^2 + y^2 = r^2$. Поскольку стержень покоится на столе, центр его тяжести лежит внутри окружности $x^2 + y^2 = r^2$. Если двигать стержень так, чтобы он оставался параллельным оси x , а его левый конец касался края стола, то центр тяжести стержня опишет дугу окружности радиусом r с центром в точке $(a, 0)$. Если перемещать стержень так, чтобы он оставался параллельным оси x , а его правый конец касался края стола, то центр тяжести опишет дугу окружности радиусом r с центром в точке $(-a, 0)$. Эти вспомогательные окружности пересекаются в точке $(0, \sqrt{r^2 - a^2})$ (мы выбрали систему координат так, что стержень лежит в полуплоскости $y > 0$).

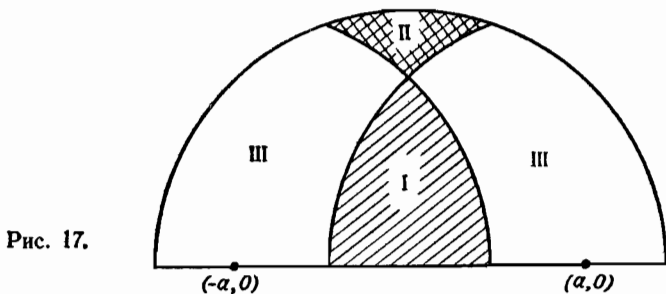


Рис. 17.

Поскольку $r > a$, то, если центр стержня лежит внутри части плоскости, ограниченной осью x и дугами вспомогательных окружностей $(x - a)^2 + y^2 = r^2$, $(x + a)^2 + y^2 = r^2$ (на рис. 17 она обозначена I), ни один из его концов не выступает за край стола.

Если центр стержня лежит левее вспомогательной окружности $(x - a)^2 + y^2 = r^2$, то левый конец стержня выступает за край стола. Аналогично, если центр стержня лежит правее вспомогательной окружности $(x + a)^2 + y^2 = r^2$, то правый конец стержня выступает за край стола. Таким образом, в части верхней полуплоскости, ограниченной дугами окружности $x^2 + y^2 = r^2$ и вспомогательных окружностей $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ и $(x + a)^2 + y^2 = r^2$, то есть там, где центр стержня лежит слева от первой и справа от второй вспомогательной окружности (на рис. 17 эта часть верхней полуплоскости обозначена II), оба конца стержня выступают за край стола.

Если же центр стержня лежит в любой из двух областей III, ограниченных дугами окружностей $x^2 + y^2 = r^2$, $(x - a)^2 + y^2 = r^2$, $(x + a)^2 + y^2 = r^2$ и осью x , то за край стола выступает лишь один конец стержня.

Ответы на вопросы задачи мы получим, разделив площади соответствующих областей на площадь половины круга $\pi r^2/2$. Вычисляя площади этих областей, получаем:

1) вероятность того, что ни один из концов стержня не выступает за край стола, равна

$$\frac{2}{\pi} \arccos \frac{a}{r} - \frac{2a}{\pi r^2} (r^2 - a^2)^{1/2},$$

2) вероятность того, что только один конец стержня выступает за край стола, равна

$$\begin{aligned} \frac{4a}{\pi r^2} (r^2 - a^2)^{1/2} - \frac{a}{\pi r^2} (4r^2 - a^2)^{1/2} - \\ - \frac{4}{\pi} \arccos \frac{a}{r} + \frac{4}{\pi} \arccos \frac{a}{2r}, \end{aligned}$$

3) вероятность того, что оба конца стержня выступают за край стола, равна

$$\begin{aligned} \frac{a}{\pi r^2} (4r^2 - a^2)^{1/2} - \frac{2a}{\pi r^2} (r^2 - a^2)^{1/2} + \\ + \frac{4}{\pi} \arcsin \frac{a}{2r} - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{a}{r}. \end{aligned}$$

72. В условиях задачи ничего не говорится о том, в каком порядке надлежит соединять вершины многоугольников при их построении, поэтому приводимое ниже доказательство позволяет изменять последовательность соединения вершин на любом этапе построения.

Пусть $P_1, P_2, \dots, P_n$ ($n > 2$) — заданные точки. Выберем систему координат так, чтобы ее начало совпало с центром тяжести системы точек P_i и сопоставим каждой точке комплексное число $z_k = x_k + iy_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Тогда

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0. \quad (1)$$

Если $\rho = \max |z_k|$, то

$$|z_k| \leq \rho, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Пусть π означает исходный многоугольник, а $\pi^1, \pi^2, \dots, \pi^{n-1}$ — многоугольники, возникающие на первом, втором, ..., $(n-1)$ -м шаге построения последовательности, $z_j, z_j^1, z_j^2, \dots, z_j^{n-1}$ ($j=1, 2, \dots, n$) — комплексные числа, соответствующие вершинам этих многоугольников. Для любой вершины многоугольника π^{n-1} справедливы соотношения $z^{n-1} = (z_{j_1}^{n-2} + z_{j_2}^{n-2})/2$, где $j_1 \neq j_2$; $z^{n-1} = (z_{j_1}^{n-3} + z_{j_2}^{n-3} + z_{j_3}^{n-3} + z_{j_4}^{n-3})/4$, где по крайней мере три числа из j_1, j_2, j_3, j_4 различны; $z^{n-1} = (z_{j_1}^{n-4} + z_{j_2}^{n-4} + \dots + z_{j_8}^{n-4})/8$, где по крайней мере четыре числа из $j_1, j_2, \dots, j_8$ различны. Наконец,

$$z^{n-1} = \frac{a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_n z_n}{2^{n-1}}, \quad (3)$$

где a_k — положительные целые числа, такие, что $\sum a_k = 2^{n-1}$. Из соотношений (1), (2) и (3) получаем неравенство

$$|z^{n-1}| = \left| \frac{(a_1 - 1)z_1 + \dots + (a_n - 1)z_n}{2^{n-1}} \right| \leq \frac{2^{n-1} - n}{2^{n-1}} \rho. \quad (4)$$

Таким образом, многоугольник π^{n-1} целиком содержится внутри окружности радиусом $K_\rho = 2^{-n+1}(2^{n-1} - n)\rho$ ($0 < K < \rho$) с центром в начале координат. Повторяя аналогичное построение m раз, получим многоугольник $\pi^{m(n-1)}$, целиком содержащийся внутри окружности

$$|z| \leq K^m \rho, \quad (5)$$

стягивающейся к центру при $m \rightarrow \infty$. Поскольку многоугольник π^p ($p > m(n-1)$) лежит внутри той же окружности (5), радиус которой сколь угодно мал при достаточно большом m , то тем самым утверждение задачи доказано.

73. Вычтем из n -й строки исходного определителя каждую из строк с номером n/p_i , прибавим все строки с номерами $n/p_i p_j$ и так далее. Определитель, получившийся из исходного после этих преобразований, обозначим D . Определитель D равен исходному определителю.

Пусть a_{nj} ($j = 1, 2, \dots, n$) — элементы n -й строки определителя D . Тогда при $e_{ij} = 0$ ($i < j$) выполняются соотношения

$$\begin{aligned} a_{nk} &= e_{nk} - \sum e_{n/p_i, k} + \sum e_{n/p_i p_j, k} - \dots \\ &\dots + (-1)^s e_{n/p_1 p_2 \dots p_s, k}, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \\ a_{nn} &= A_n - \sum A_{n/p_i} + \sum A_{n/p_i p_j} - \dots + (-1)^s A_{n/p_1 p_2 \dots p_s}. \end{aligned}$$

Если k не является делителем числа n , то, очевидно, $a_{nk} = 0$. Предположим, что k — делитель числа n . Пусть $n = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_s^{t_s}$, $k = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_s^{r_s}$ и $r_i < t_i$ ровно при m значениях i . Тогда

$$\begin{aligned} a_{nk} &= 1 - m + \binom{m}{2} - \dots + (-1)^m = (1-1)^m = 0, \\ &(k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Следовательно, a_{nn} — единственный отличный от нуля элемент в последней строке определителя D , а поскольку $e_{ii} = 1$, то $D = a_{nn}$.

74. Пусть PQR — заданный треугольник, α — плоскость, определяемая его вершинами. Треугольник PQR можно ортогонально спроектировать на другую плоскость α' так, что его проекция $P'Q'R'$ будет иметь вид равностороннего треугольника. Пусть C' — окружность, описанная вокруг треугольника $P'Q'R'$, а E — соответствующий ей эллипс, описанный вокруг треугольника PQR в плоскости α . Отношение площади круга C' к площади вписанного в него равностороннего треугольника $P'Q'R'$ равно $r = 4\pi/3\sqrt{3}$, а поскольку равносторонний треугольник обладает наибольшей площадью среди всех треугольников, вписанных в данный круг, то отношение площади любого круга к площади любого вписанного в него треугольника не меньше r . Ортогональное проектирование не изменяет отношение площадей. Кроме того, известно, что любой эллипс можно ортогонально спроектировать в окружность. Таким образом, отношение площади *любого* эллипса к площади *любого* вписанного в него треугольника не меньше r . Но отношение площади эллипса E к площади треугольни-

ка PQR равно r . Следовательно, E — эллипс наименьшей площади, описанный вокруг треугольника PQR .

Чтобы построить эллипс E в плоскости α , достаточно заметить следующее. При ортогональной проекции сохраняется параллелизм. Поэтому касательная к эллипсу E в каждой вершине треугольника PQR должна быть параллельна противолежащей стороне треугольника. Для построения эллипса E можно воспользоваться любым из известных способов.

75. Прежде всего заметим, что если $\beta > 2$, то $2^{\beta-1}(2-1) > 2$, то есть $2^{\beta-1} + 1 < 2^{\beta} - 1$. Следовательно,

$$\text{если } \alpha < \beta, \text{ то } 2^{\alpha} + 1 < 2^{\beta} - 1 \quad (1)$$

и число $2^{\alpha} + 1$, очевидно, не делится на $2^{\beta} - 1$.

Пусть, далее, $\alpha = \beta$. Тогда $(2^{\alpha} + 1)/(2^{\beta} - 1) = 1 - 2/(2^{\beta} - 1)$ и число $2^{\alpha} + 1$, как и в предыдущем случае, не делится на $2^{\beta} - 1$.

Наконец, предположим, что $\alpha > \beta$. Тогда $\alpha = m\beta + n$, где m — положительное целое число, а n — либо 0, либо положительное целое число, меньшее β , и

$$\frac{2^{\alpha} + 1}{2^{\beta} - 1} = \frac{2^{\alpha} - 2^{\alpha-m\beta}}{2^{\beta} - 1} + \frac{2^n + 1}{2^{\beta} - 1}.$$

Числитель первой дроби в правой части можно представить в виде $2^{\alpha-m\beta}(2^{m\beta} - 1)$. Это число делится на $2^{\beta} - 1$. Вторая дробь в силу неравенства (1) — правильная. Таким образом, во всех случаях, в том числе и при $\alpha > \beta$, $2^{\alpha} + 1$ не делится на $2^{\beta} - 1$, если $\beta > 2$, что и требовалось доказать.

76. Как известно, если ось x направить вдоль большой оси эллипса, а ось y — вдоль малой оси, то параметрические уравнения эллипса будут иметь вид $x = a \cos t$, $y = b \sin t$. Пусть (x', y') — координаты фокуса $(-c, 0)$ относительно другой прямоугольной системы координат, в которой ось x' совпадает с касательной к эллипсу в точке, соответствующей значению параметра t , а за начало координат выбрана эта же точка. Тогда y' означает расстояние от фокуса $(-c, 0)$ до касательной, а x' — расстояние от того же фокуса до

нормали к эллипсу. Уравнения касательной и нормали имеют вид

$$\begin{aligned}xb \cos t + ya \sin t - ab &= 0, \\ xa \sin t - yb \cos t - c^2 \sin t \cos t &= 0,\end{aligned}$$

где $c^2 = a^2 - b^2$. Следовательно,

$$\begin{aligned}y' &= b(a + c \cos t)^{1/2} (a - c \cos t)^{-1/2}, \\ x' &= c \sin t (a + c \cos t)^{1/2} (a - c \cos t)^{-1/2}.\end{aligned}$$

Поскольку кривая, описываемая фокусом $(-c, 0)$, симметрична относительно оси y' , то ограничиваемую ею площадь S можно представить в виде интеграла

$$\int_{t=-\pi}^{t=0} x' dy' = 2abc^2 \int_0^{\pi} \sin^2 t (a - c \cos t)^{-2} dt.$$

Интегрируя по частям и подставляя пределы интегрирования, получаем

$$\begin{aligned}S &= 2abc \int_0^{\pi} \cos t (a - c \cos t)^{-1} dt = \\ &= -2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + 2a^2b \int_0^{\pi} (a - c \cos t)^{-1} dt.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}S &= -2abt + 4a^2b^2(a^2 - c^2)^{-1/2} \times \\ &\times \operatorname{arctg} \left[(a + c)^{1/2} (a - c)^{-1/2} \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right] \Big|_0^{\pi} = \pi a(a - b).\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что приведенные выше соотношения не изменяются, если произвести замену $-c$ на c и t на $\pi + t$. Это означает, что оба фокуса катящегося эллипса описывают одну и ту же кривую.

77. Обозначим через R часть плоскости комплексного переменного z , ограниченную разрезом вдоль отрицательной вещественной полуоси и дугой окружности произвольно большого радиуса. Пусть аргумент z больше $-\pi$ и меньше π . Тогда в R и $\ln z$, и $\Gamma(z)$ — однозначные аналитические функции комплексного переменного z .

Докажем, что если x — любая фиксированная точка внутри R , то

$$(-1)^{n+1} n^x \ln n \Delta^n \ln x = \Gamma(x) + O\left(\frac{1}{\ln n}\right), \quad (1)$$

где постоянная, входящая в символ O , зависит от x .

Прежде всего заметим, что если $n \geq 1$, то

$$(-1)^{n+1} \Delta^n \ln x = \int_0^1 \frac{(n-1)! dt}{(x+t)(x+t+1) \dots (x+t+n-1)}. \quad (2)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \Delta^n \ln x &= \Delta^{n-1} [\ln(x+1) - \ln x] = \\ &= \Delta^{n-1} \int_0^1 \frac{dt}{x+t} = \int_0^1 \Delta^{n-1} (x+t)^{-1} dt, \end{aligned}$$

а по известной формуле из исчисления конечных разностей (III. 14)

$$\Delta^{n-1} (x+t)^{-1} = \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{(x+t)(x+t+1) \dots (x+t+n-1)}.$$

Кроме того, не менее известно, что при фиксированном z [III. 11 (1)]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z \cdot 1 \cdot 2 \dots (n-1)}{z(z+1) \dots (z+n-1)} = \Gamma(z).$$

Записав выражение, стоящее под знаком предельного перехода, в виде $n^z \Gamma(n) \Gamma(z) / \Gamma(z+n)$ и воспользовавшись асимптотическими формулами для $\Gamma(z)$ и $\Gamma(z+n)$ [III. 11(5)], получим более точное соотношение

$$\frac{(n-1)!}{z(z+1) \dots (z+n-1)} = \frac{\Gamma(z)}{n^z} + O\left(\frac{1}{n^{z+1}}\right), \quad |\arg z| < \pi.$$

Предположим, что точка x принадлежит области R . Подставляя $z = x+t$ в полученное асимптотическое выражение, а его в свою очередь — в соотношение (2), приходим к асимптотическому выражению

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1} \Delta^n \ln x &= \int_0^1 \left[\frac{\Gamma(t+x)}{n^{t+x}} + O\left(\frac{1}{n^{t+x+1}}\right) \right] dt = \\ &= \frac{1}{n^x} \int_0^1 \frac{\Gamma(t+x)}{n^t} dt + O\left(\frac{1}{n^{x+1} \ln n}\right). \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, находим

$$(-1)^{n+1} \Delta^n \ln x = \frac{\Gamma(x)}{n^x \ln n} - \frac{\Gamma(x+1)}{n^{x+1} \ln n} + \\ + \frac{1}{n^x \ln n} \int_0^1 \frac{\Gamma'(t+x)}{n^t} dt + O\left(\frac{1}{n^{x+1} \ln n}\right). \quad (3)$$

Ясно, что

$$\int_0^1 \frac{\Gamma'(t+x)}{n^t} dt = O\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

Умножая (3) на $n^x \ln n$, получаем окончательный результат:

$$(-1)^{n+1} n^x \ln n \Delta^n \ln x = \Gamma(x) + O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{\ln n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) = \\ = \Gamma(x) + O\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

78. Общий пифагоров треугольник, эквивалентный общему рациональному прямоугольному треугольнику, имеет гипотенузу $m^2 + n^2$ и катеты $m^2 - n^2$, $2mn$, где m и n — положительные целые числа, причем $m > n$. Вычисляя тангенс половины угла ϑ между сторонами $m^2 - n^2$ и $m^2 + n^2$, находим

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \frac{\cos \vartheta}{\cos \vartheta + 1} = \frac{n}{m}.$$

Числа n и m необходимо выбрать так, чтобы дробь m/n стремилась к $\sqrt{3}$. Разложив $\sqrt{3}$ в непрерывную дробь

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots,$$

можно выбрать в качестве m и n числители и знаменатели подходящих дробей m_i/n_i этой непрерывной дроби. Таким образом, мы получаем бесконечную последовательность пар m и n :

$$m_i = 1, 2, 5, 7, 19, \dots, \\ n_i = 1, 1, 3, 4, 11, \dots.$$

Зная m_i и n_i , нетрудно вычислить длины сторон соответствующего прямоугольного треугольника. Полагая

$$a_i = \frac{m_i^2 - n_i^2}{m_i^2 + n_i^2}, \quad b_i = \frac{2m_i n_i}{m_i^2 + n_i^2}, \quad c = 1,$$

имеем $a_i^2 + b_i^2 = 1$, $a_i \rightarrow 1/2$, $b_i \rightarrow \sqrt{3}/2$.

Итак, последовательность рациональных прямоугольных треугольников, стремящихся к прямоугольному треугольнику с наименьшим углом, равным 30° , построена.

79. Пусть ε — первообразный корень степени k из единицы. Если h — целое число, удовлетворяющее неравенствам $0 \leq h < k$, то

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{k-1} \varepsilon^{-xh} (1 + \varepsilon^x)^n &= \sum_{x=0}^{k-1} \varepsilon^{-xh} \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} \varepsilon^{kv} = \\ &= \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} \sum_{x=0}^{k-1} (\varepsilon^{v-h})^x = k \sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{n}{h + \lambda k}. \end{aligned}$$

Чтобы обосновать последний шаг, заметим следующее. Пусть δ — наибольший общий делитель чисел $v - h$ и k . Тогда ε^{v-h} — первообразный корень степени k/δ из единицы. Следовательно, внутренняя сумма, стоящая в левой части последнего равенства, равна сумме всех корней степени k/δ из единицы, причем каждый корень входит в нее δ раз. Сумма корней степени k/δ из единицы равна 0, если только k/δ не равно 1 (при $k/\delta = 1$ сумма равна k). Но при $k/\delta = 1$ числа δ и k равны, то есть k является делителем числа $v - h$, или $v = h + \lambda k$. В качестве верхнего предела суммирования выбрана ∞ , но в действительности ряд обрывается, как только $h + \lambda k$ становится больше n .

Итак,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\lambda} \binom{n}{h + \lambda k}}{\sum_v \binom{n}{v}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k} \sum_{x=0}^{k-1} \varepsilon^{-xh} (1 + \varepsilon^x)^n}{2^n} = \\ &= \frac{1}{k} \sum_{x=0}^{k-1} \varepsilon^{-xh} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \varepsilon^x}{2} \right)^n = \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

поскольку $|1 + \varepsilon^x|/2 < 1$, если только показатель x отличен от нуля.

Доказанное утверждение отличается от утверждения задачи лишь «сдвигом на единицу»: вместо того, чтобы рассматривать отношение суммы h -, $(h + k)$ -, $(h + 2k)$ -го и т. д. биномиальных коэффициентов к сумме всех биномиальных коэффициентов при $h = 1, 2, \dots, k$, мы рассмотрели отношение суммы $(h + 1)$ -, $(h + k + 1)$ -, $(h + 2k + 1)$ -го и т. д. биномиальных коэффициентов к сумме всех биномиальных коэффициентов при $h = 0, 1, \dots, k - 1$.

80. Если окружность не пересекает ось x , то $a^2 < 4b$ и квадратное уравнение имеет комплексные корни. Пусть H и K — основания перпендикуляров, опущенных из центра окружности на оси x и y (см. рис. 1). Опишем окружность с центром в точке K и радиусом $OK = \frac{1}{2}(b + 1)$. Пусть L — точка ее пересечения с прямой, проходящей через точку B параллельно оси x . С центром в точке H опишем другую окружность радиусом BL , пересекающую ось y в точках E и F (точка E лежит на положительной полуоси y). Мы утверждаем, что $x_1 = OH + iOE$ и $x_2 = OH + iOF$ — корни уравнения. Действительно, по построению $BL^2 = b$, а поскольку $a^2 < 4b$, то $\frac{1}{2}a < BL$. Таким образом, точки E и F вещественны. Кроме того, $x_1 + x_2 = 2 \cdot OH = a$, $x_1 x_2 = OH^2 + OE^2 = HE^2 = BL^2 = b$. Тем самым утверждение доказано.

81. Соотношение между биномиальными коэффициентами, о котором говорится в условиях задачи, можно доказать прямыми выкладками. Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} k^n &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k e^{kx} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d^n}{dx^n} (1 - e^x)^n = \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d^n}{dx^n} \left(-x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \dots \right)^n = \\ &= (-1)^{n+1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^n + \frac{nx^{n+1}}{2!} + \dots \right) = (-1)^{n+1} n!, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

82. Дополним исходную матрицу до квадратной (порядка $n+2$), приписав к ней последнюю строку, все элементы которой равны 0, кроме последнего, равного $\binom{n+1}{n+1}$. Новая матрица — невырожденная, с определителем, равным 1. Обратная ей матрица B имеет ту же главную диагональ, что и матрица A , а все ее элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю. Остальные элементы матрицы B совпадают с соответствующими элементами матрицы A с точностью до знака:

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \binom{j-1}{i-1} \quad \text{при } j > i.$$

Докажем наши утверждения. Пусть d_{ij} — элемент, стоящий на пересечении i -й строки и j -го столбца матрицы AB . Непосредственно видно, что $d_{ij} = 0$ при $i > j$, $d_{ii} = 1$ ($i, j = 1, 2, \dots, n+2$). Если $j = i + r$, где r — положительное целое число, то

$$\begin{aligned} d_{i+1, j+1} &= (-1)^{i+j} \left[\binom{i}{i} \binom{j}{i} - \binom{i+1}{i} \binom{j}{i+1} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + (-1)^r \binom{j}{i} \binom{j}{i} \right] = \\ &= (-1)^{i+j} \binom{j}{i} \left[1 - \binom{r}{1} + \binom{r}{2} - \dots + (-1)^r \binom{r}{r} \right] = \\ &= (-1)^{i+j} \binom{j}{i} (1 - 1)^r = 0. \end{aligned}$$

Если a_{ij} , b_{ij} — элементы, стоящие на пересечении i -х строк и j -х столбцов матриц A и B , то алгебраическое дополнение элемента $a_{n+2, k}$ равно $b_{k, n+2} = (-1)^{n+2+k} D_k$, где D_k — определитель матрицы, полученной из матрицы A при вычеркивании последней строки и k -го столбца. Следовательно, $D_k = \binom{n+1}{k-1}$, что и требовалось доказать.

83. Полагая $g(x) \equiv \ln f(x)$, преобразуем исходное уравнение к виду

$$g(xy) = y^{\beta} g(x) + x^{\beta} g(y). \quad (1)$$

При $y = x$ уравнение (1) вырождается в уравнение

$$g(x^2) = 2x^{\beta} g(x).$$

Методом математической индукции нетрудно доказать, что при любых натуральных n выполняется соотношение

$$g(x^n) = nx^{(n-1)\beta} g(x). \quad (2)$$

При $y = 1$ и $y = x^{-1}$ из уравнения (1) следует, что

$$g(1) = 0, \quad g(x^{-1}) = -x^{-2\beta} g(x).$$

Таким образом, соотношение (2) выполняется при $n = 0$ и $n = -1$. Пользуясь методом математической индукции, нетрудно убедиться в том, что соотношение (2) остается в силе при любом целом n .

Заменив в уравнении (1) x и y соответственно на $x^{1/n}$ и $x^{(n-1)/n}$, где n — любое (положительное или отрицательное) целое число, получим

$$g(x) = x^{(n-1)\beta/n} g(x^{1/n}) + x^{\beta/n} g(x^{(n-1)/n}). \quad (3)$$

Но из (2) следует, что

$$g(x^{(n-1)/n}) = g[(x^{1/n})^{n-1}] = (n-1)x^{(n-2)\beta/n} g(x^{1/n}).$$

Пользуясь этим соотношением, преобразуем (3) к виду

$$g(x^{1/n}) = n^{-1} x^{(1-n)\beta/n} g(x). \quad (4)$$

Таким образом, соотношение (2) выполняется не только при любых целых значениях n , но и в том случае, когда n — рациональная дробь с числителем, равным единице.

Пусть v/u — рациональная дробь. Поскольку [в силу соотношения (2)]

$$g(x^{v/u}) = g[(x^{1/u})^v] = vx^{(v-1)\beta/u} g(x^{1/u}),$$

мы при помощи соотношения (4) получаем

$$g(x^{v/u}) = vx^{(v-1)\beta/u} (1/u) \cdot x^{(1-u)\beta/u} g(x) = (v/u) x^{(v-u)\beta/u} g(x).$$

Таким образом, соотношение (2) выполняется при любых рациональных значениях n .

Иррациональное число можно рассматривать как предел бесконечной последовательности рациональных чисел. Поскольку соотношение (2) выполняется для любого члена последовательности, то оно в силу непрерыв-

ности функций $f(x)$ и $g(x)$ будет выполняться и после перехода к пределу. Таким образом, соотношение (2) выполняется для любых вещественных значений n .

Пусть $y > 0$. Полагая $n = \ln y / \ln x$, приводим (2) к виду

$$g(y) = \frac{\ln y}{\ln x} \cdot \frac{y^\beta}{x^\beta} g(x),$$

откуда

$$\frac{g(y)}{y^\beta \ln y} = \frac{g(x)}{x^\beta \ln x}.$$

Поскольку левая часть равенства не зависит от x , а правая — от y , обе они равны некоторой константе C и, следовательно,

$$g(x) = Cx^\beta \ln x.$$

Вспомнив, что $g(x) = \ln f(x)$, получаем решение исходного функционального уравнения

$$f(x) = x^{Cx^\beta}.$$

84*. Пусть после покупки очередной пачки сигарет на руках у покупателя оказалось несколько карт, среди которых ровно i различных. Обозначим через M_i среднее число (то есть математическое ожидание числа) пачек, которые этому покупателю надо еще купить, чтобы собрать целую колоду.

При покупке следующей пачки может произойти одно из двух: либо карта, лежащая в ней, совпадает с одной из уже имеющихся у покупателя, либо это будет новая карта, и тогда на руках у него окажется $i + 1$ различных карт. Вероятность первого события равна $i/52$ и среднее число пачек, которые надо еще купить в этом случае, остается равным M_i (ситуация не изменилась), вероятность второго равна $(52 - i)/52$, и тогда среднее число становится равным M_{i+1} . Отсюда

$$M_i = 1 + \frac{i}{52} M_i + \frac{52-i}{52} M_{i+1}$$

или

$$M_i = M_{i+1} + \frac{52}{52-i}. \quad (1)$$

Ясно, что $M_{52} = 0$ (на руках уже вся колода), а найти нам нужно M_0 . Используя последовательно (1), получаем

$$M_0 = M_1 + \frac{52}{52} = M_2 + \frac{52}{51} + \frac{52}{52} = \dots$$

$$\dots = M_{52} + \frac{52}{1} + \dots + \frac{52}{52} = 52 \sum_{i=1}^{52} \frac{1}{i} \approx 235,976 \dots$$

Таким образом, чтобы собрать полную колоду карт, в среднем нужно купить не менее 236 пачек сигарет.

85. Рассмотрим геометрическое место точек z , лежащих на комплексной плоскости и удовлетворяющих параметрическому уравнению

$$z = \frac{2}{(1-t)^2}, \quad (1)$$

где t — любое комплексное число, абсолютная величина которого равна 1. Это уравнение параболы с фокусом в точке $z = 0$ и касательной в вершине $z + \bar{z} = 1$. Уравнение касательной к параболе, проведенной в точке z_1 , имеет вид

$$z = \frac{2}{(1-t_1)(1-t)}.$$

Касательные к параболе, проведенные в точках z_1 и z_2 , пересекаются в точке

$$z_{12} = \frac{2}{(1-t_1)(1-t_2)}. \quad (2)$$

Следовательно, уравнение окружности, проходящей через точки z_{12} , z_{23} и z_{31} , имеет вид

$$z = \frac{2(1-t)}{(1-t_1)(1-t_2)(1-t_3)}. \quad (3)$$

При $t = 1$ эта окружность проходит через точку $z = 0$. Таким образом, фокус параболы лежит на описанной окружности треугольника, образованного любыми тремя касательными к параболе. Перпендикуляры, опущенные из фокуса $z = 0$ параболы на касательные, которые проведены в точках z_1 , z_2 и z_3 , пересекают касательные в точках $1/(1-t_1)$, $1/(1-t_2)$ и $1/(1-t_3)$. Все три основания перпендикуляров лежат на прямой $z + \bar{z} = 1$. Следовательно, в треугольнике $z_1 z_2 z_3$ прямая Симсона, построенная для фокуса параболы $z = 0$, совпадает с ка-

сательной, проведенной через вершину параболы, что и требовалось доказать.

86. Установить взаимно-однозначное соответствие между точками открытого интервала $0 < x < 1$ и замкнутого интервала $0 \leq x \leq 1$ можно многими способами. Например, пусть $A(x)$ — точка открытого интервала $0 < x < 1$, а $B(x)$ — точка замкнутого интервала $0 \leq x \leq 1$. Точке $B(1/2[1 \pm 3^{-n}])$ сопоставим точку $A(1/2[1 \pm 3^{-n-1}])$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. При всех остальных x из открытого интервала $0 < x < 1$ сопоставим точки $A(x)$ и $B(x)$, соответствующие одному и тому же значению x .

87. Матрицу, о которой говорится в условиях задачи, можно рассматривать как частный случай матрицы A с элементами $a_{ij} = a + |i - j|h$. Значение определителя матрицы A нетрудно вычислить, вычитая элементы $(j + 1)$ -го столбца из соответствующих элементов j -го столбца и оставляя неизменными элементы n -го столбца. Затем повторим то же преобразование с новым определителем, оставляя неизменными два его последних столбца. Наконец, прибавив последнюю строку к первой, получим

$$|A| = (-1)^{n-1} 2^{n-2} h^{n-1} [2a + (n-1)h].$$

Утверждение задачи соответствует $a = 0$, $h = 1$.

88. Многочлен $x^8 + 98x^4y^4 + y^8$ можно разложить в произведение двух многочленов с целочисленными коэффициентами не единственным способом. Приведем лишь одно такое разложение:

$$\begin{aligned} x^8 + 98x^4y^4 + y^8 &= (x^4 + y^4)^2 + 96x^4y^4 = (x^4 + y^4)^2 + \\ &+ 16x^2y^2(x^4 + y^4) + 64x^4y^4 - 16x^2y^2(x^4 + y^4) + 32x^4y^4 = \\ &= (x^4 + y^4 + 8x^2y^2)^2 - 16x^2y^2(x^4 - 2x^2y^2 + y^4) = \\ &= (x^4 + y^4 + 8x^2y^2)^2 - (4x^3y - 4xy^3)^2 = \\ &= (x^4 - 4x^3y + 8x^2y^2 + 4xy^3 + y^4)(x^4 + 4x^3y + 8x^2y^2 - 4xy^3 + y^4). \end{aligned}$$

89*. Заметив, что

$$\varphi_k = \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!} = \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-3)}{k!} 2^{k-1} = \binom{1/2}{k} 2^{2k-1} (-1)^{k-1},$$

вычислим производящую функцию последовательности φ_k :

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/2}{k} 2^{2k-1} (-1)^{k-1} x^k = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-4x)^k = -\frac{1}{2} (\sqrt{1-4x} - 1)\end{aligned}$$

Отсюда

$$(2\Phi - 1)^2 = 1 - 4x,$$

и, следовательно, Φ удовлетворяет квадратному уравнению

$$\Phi^2(x) = \Phi(x) - x.$$

Приравнивая слева и справа коэффициенты при x^n , получаем рекуррентное соотношение

$$\sum_{k=1}^{n-1} \varphi_k \varphi_{n-k} = \varphi_n. \quad (1)$$

Далее, $\varphi_1 = 1$, и если φ_k является целым для всех k от 1 до $n-1$, то в силу соотношения (1) будет целым и φ_n , так что по индукции все φ_n целые. (См. также решение задачи 59 и сноску к нему).

90. а. Поскольку перемене знака в последовательности отличных от нуля коэффициентов многочлена $f(x)$ соответствует сохранение знака в последовательности отличных от нуля коэффициентов многочлена $f(-x)$, то общее число перемен знака в той и другой последовательности не превышает степени n многочлена $f(x)$. Таким образом, если n_1 — число перемен знака в последовательности отличных от нуля коэффициентов многочлена $f(x)$, а n_2 — число перемен знака в последовательности отличных от нуля коэффициентов многочлена $f(-x)$, то $n_1 + n_2 \leq n$. Следовательно, если многочлен с вещественными коэффициентами степени n имеет n вещественных корней, то число положительных корней не может быть меньше n_1 , а число отрицательных корней меньше n_2 .

б. Если $a_r = 0$, а коэффициенты a_{r+1} и a_{r-1} многочлена $f(x)$ имели бы одинаковые знаки, то и при переходе

от $f(x)$ к $f(-x)$ они сохранили бы одинаковые знаки. Это означало бы, что общее число перемен знаков в последовательностях коэффициентов многочленов $f(x)$ и $f(-x)$ не превышает $n - 2$ и многочлен $f(x)$ вопреки условиям задачи не мог бы иметь n вещественных корней. Следовательно, коэффициенты a_{r+1} и a_{r-1} многочлена $f(x)$ имеют различные знаки и $a_{r+1} \cdot a_{r-1} < 0$, что и требовалось доказать.

91. В приведенном ниже решении использованы следующие три хорошо известных факта из теории чисел.

А. Теорема Вильсона (III.6): если p — простое число, то

$$(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}. \quad (1)$$

Б. Произведение любого числа квадратичных вычетов есть квадратичный вычет. Произведение нечетного числа квадратичных невычетов есть квадратичный невычет. Произведение четного числа квадратичных невычетов есть квадратичный вычет (III.7).

В. Число -1 есть квадратичный невычет простого числа $p = 4k + 3$ (III.7, след. 1).

Заменив в разложении факториала, стоящего в левой части сравнения (1), числа $p - s$ на $-s$ при всех $s \leq 2k + 1$, получим

$$(-1)^{2k+1} [1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k + 1)]^2 \equiv -1 \pmod{p},$$

или

$$(2k + 1)! \equiv \pm 1 \pmod{p}.$$

Чтобы определить знак правой части сравнения, заметим, что факториал $(2k + 1)!$ представляет собой произведение m квадратичных невычетов и $2k + 1 - m$ квадратичных вычетов. Таким образом, как следует из «Б», $(2k + 1)!$ есть квадратичный вычет при четном m и квадратичный невычет при нечетном m . Если m четно, то есть если $(2k + 1)!$ — квадратичный вычет, следует выбирать знак плюс (в силу утверждения «В»), а при нечетном m — знак минус. И в том и в другом случае справедливо сравнение

$$(2k + 1)! \equiv (-1)^m \pmod{p}.$$

Заменив в разложении факториала $(2k + 1)!$ каждое из k четных чисел $E = 2, 4, 6, \dots, 2k$ числом $-(p - E)$ и

расположив множители в порядке возрастания их абсолютной величины, получим

$$(-1)^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (p-2) \equiv (-1)^m \pmod{p}$$

или

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (p-2) \equiv (-1)^{m+k} \pmod{p}.$$

Таким образом, первое сравнение задачи доказано.

Комбинируя его с утверждением «А», приходим ко второму сравнению задачи.

92. Пусть $A_0, A_1, \dots, A_n$ — вершины n -симплекса, $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ — их радиусы-векторы относительно центра тяжести S , m_i — длина медианы, проведенной из вершины A_i , e_{ij} — длина ребра $A_i A_j$, M — сумма длин медиан и E — сумма длин ребер симплекса.

Прежде всего покажем, что длина медианы не больше среднего арифметического длин ребер, исходящих из той же вершины. Среднее арифметическое a_0 длин ребер, исходящих из вершины A_0 , равно

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_{0i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{\bar{b}_i \cdot \bar{b}_i},$$

где $\bar{b}_i = \bar{a}_i - \bar{a}_0$. Следовательно,

$$n^2 a_0^2 = \sum_{i,j=1}^n \sqrt{(\bar{b}_i \cdot \bar{b}_i)(\bar{b}_j \cdot \bar{b}_j)}.$$

Поскольку m_0 — длина вектора

$$\frac{1}{n} (\bar{a}_1 + \dots + \bar{a}_n) - \bar{a}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{b}_i, \quad (1)$$

то

$$n^2 (a_0^2 - m_0^2) = \sum_{i,j=1}^n [\sqrt{(\bar{b}_i \cdot \bar{b}_i)(\bar{b}_j \cdot \bar{b}_j)} - (\bar{b}_i \cdot \bar{b}_j)]. \quad (2)$$

В силу неравенства Лагранжа число $\sqrt{(\bar{b}_i \cdot \bar{b}_i)(\bar{b}_j \cdot \bar{b}_j)} - |\bar{b}_i \bar{b}_j|$ не может быть отрицательным, и оно равно нулю в том и только в том случае, если векторы $\bar{b}_i$ и $\bar{b}_j$ линейно зависимы, то есть если вершины A_0, A_i и A_j коллинеарны. Таким образом, соответствующее слагаемое в правой части соотношения (2) также не может

быть отрицательным и равно нулю в том и только в том случае, если вершины A_0, A_i, A_j коллинеарны и вершина A_0 не расположена строго посередине между вершинами A_i и A_j (в противном случае $\bar{b}_i \bar{b}_j < 0$). Следовательно, $m_0 \leq a_0$, причем равенство возникает лишь тогда, когда все вершины коллинеарны и A_0 является крайней вершиной в одном из направлений.

Складывая отдельно правые и левые части неравенств

$$m_i \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e_{ij},$$

получаем

$$M \leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n e_{ij} = \frac{2E}{n}. \quad (3)$$

Равенство выполняется лишь в том случае, если множество вершин симплекса содержит не более двух различных точек. Действительно, равенство $M = 2E/n$ эквивалентно условию, что вершины симплекса коллинеарны и каждая вершина является крайней в одном из направлений, то есть среди вершин симплекса нет трех различных. Таким образом, неравенство

$$\frac{2}{n} > \frac{M}{E}$$

выполняется для n -симплекса, имеющего по крайней мере три различные вершины.

Далее, поскольку векторы $\bar{a}_i$ отложены из центра тяжести C симплекса, то $\bar{a}_1 + \dots + \bar{a}_n = -\bar{a}_0$. Таким образом, вектор (1) равен $-(n+1)\bar{a}_0/n$, откуда $A_0C = nm_0/(n+1)$, то есть центр тяжести C делит медиану в отношении $n:1$ (считая от вершины симплекса). Применяв это соотношение к медианам, проведенным через вершины A_i и A_j , и заметив, что $A_iC + A_jC \geq A_iA_j$, получим

$$\frac{n}{n+1} (m_i + m_j) \geq e_{ij}. \quad (4)$$

Сложив отдельно правые и левые части неравенств (4), выписанных для каждого ребра симплекса, мы придем к сумме, в которую каждая медиана входит n раз —

по одному разу для каждого ребра, выходящего из соответствующей вершины. Следовательно,

$$n^2 M(n+1) \geq E, \quad (5)$$

причем равенство выполняется в том и только в том случае, если центр тяжести C лежит на каждом из $(n+1)n/2$ ребер (а не на их продолжении). Нетрудно видеть, что если симплекс имеет по крайней мере четыре различные вершины, то равенство выполняться не может. Если множество вершин симплекса содержит ровно три различные вершины, то равенство выполняется в том и только в том случае, если они коллинеарны, центр тяжести C совпадает с средней вершиной и ни одна из вершин, кроме, быть может, C , не является кратной. Наконец, если множество вершин симплекса содержит ровно две различные вершины, то равенство выполняется в том и только в том случае, если $n=1$.

В том случае, если n -симплекс содержит четыре различные или три коллинеарные вершины (в частности, в том случае, если n -симплекс невырожден и $n \geq 2$), выполняются строгие неравенства

$$\frac{2}{n} > \frac{M}{E} > \frac{n+1}{n^2}. \quad (6)$$

Покажем, что диапазон допустимых значений M/E в (6) (включая равенства) нельзя сузить и он достаточен для всех невырожденных n -симплексов. Пусть $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — декартовы координаты точки в n -мерном пространстве. Рассмотрим сначала n -симплекс, вершина A_0 которого совмещена с началом координат, а все остальные вершины выбраны так, что $x_1 = -1$ у вершины A_1 , $x_i = \delta \geq 0$ у вершины A_i ($2 \leq i \leq n$), а координаты x_j вершины A_s ($s = 1, 2, \dots, n$) при $j \neq s$ равны нулю. При $\delta = 0$ наш n -симплекс имеет лишь две различные вершины и $M/E = 2/n$. При $\delta > 0$, как показано выше, выполняется неравенство $M/E < 2/n$. Поскольку отношение M/E как функция от δ непрерывно при $\delta = 0$, при любом $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_0 > 0$, такое, что при $\delta \leq \delta_0$ будет выполняться неравенство $M/E > >(2/n) - \varepsilon$. Следовательно, $2/n$ — точная верхняя грань отношения M/E .

Рассмотрим теперь в том же пространстве другой невырожденный симплекс. Вершину A_0 снова совместим

с началом координат. Вершину A_1 выберем так, чтобы $x_1 = 2$, а все остальные координаты были равны нулю. При $2 \leq i \leq n$ вершины A_i выберем так, чтобы $x_1 = 1$, $x_i = \delta$ ($\delta > 0$), а все остальные координаты были равны нулю. Отношение M/E как функция от δ снова непрерывно при $\delta = 0$. При $\delta > 0$ выполняется неравенство $M/E > (n+1)/n^2$, а при $\delta = 0$ равенство $M/E = (n+1)/n^2$. Следовательно, $(n+1)/n^2$ — точная нижняя грань отношения M/E , что и требовалось доказать.

93. Начнем с доказательства следующей леммы.

Лемма. Пусть $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t}$. Тогда

$$S(r, n) - \sum_{k=1}^t S\left(r, \frac{n}{p_k}\right) + \sum_{k,l=1}^t S\left(r, \frac{n}{p_k p_l}\right) - \dots = \begin{cases} 0 & \text{при } r < n, \\ n & \text{при } r = n. \end{cases} \quad (1)$$

Доказательство. Пусть $C(r, n)$ — левая часть равенства (1). Нетрудно доказать, что $C(r, n) = n$, если r делится на n , и $C(r, n) = 0$, если r не делится на n . Действительно, при $n = 1$ это утверждение очевидно. Далее, каждый делитель любого члена, входящего в $C(r, n)$, является делителем числа n . Пусть $d < n$ — такой делитель. Тогда разложение числа d в произведение степеней простых чисел содержит по крайней мере один простой множитель в степени, меньшей, чем степень того же множителя в разложении числа n . Пусть, например, $p_1, p_2, \dots, p_k$ — простые множители числа n , входящие в разложение числа d с меньшими показателями степени, чем в разложении n (разложение делителя d может, в частности, содержать p_i в нулевой степени). В $(j+1)$ -й член (в $(j+1)$ -ю сумму) $C(r, n)$ делитель d входит ровно $\binom{k}{j}$ раз со знаком $(-1)^j$. Следовательно, делитель d можно исключить из $C(r, n)$, поскольку

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} = 0.$$

Таким образом, если r не делится на n , мы можем исключить все делители, то есть в этом случае $C(r, n) = 0$.

Если же r делится на n , то делитель n входит в $C(r, n)$ лишь один раз, причем в первый член. Тем самым лемма доказана.

Переходим к доказательству утверждения задачи. Вычтем из последнего столбца определителя каждый из столбцов с номерами n/p_k , где p_k пробегает все различные простые делители числа n , затем прибавим все столбцы с номерами $n/p_k p_l$, вычтем все столбцы с номерами $n/p_k p_l p_m$ и так далее. По лемме элементы последнего столбца обратятся в $0, 0, \dots, 0, n$. Разлагая определитель по элементам последнего столбца, получим умноженный на n определитель $(n-1)$ -го порядка того же вида, что и исходный. Пользуясь методом математической индукции, заключаем отсюда, что исходный определитель равен $n!$, что и требовалось доказать.

94. Условия задачи позволяют варьировать решение функционального уравнения в широких пределах. Приведем лишь два различных способа построения функции $f(x)$, удовлетворяющей исходному функциональному уравнению.

а. Рассмотрим при $x > 0$ любую однозначную положительную вещественную функцию $f(x)$, принимающую при $x = 0$ значение $f(0) = |c| > 0$. При $x < 0$ зададим $f(x)$ при помощи соотношения

$$f(x) = [f(0)]^2 / f(-x) = c^2 / f(-x).$$

Нетрудно видеть, что построенная функция $f(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению, приведенному в условиях задачи.

б. Поскольку функция $f(x)$ — положительна и однозначна, ее вещественный логарифм также веществен и однозначен. Следовательно,

$$F(x) = \ln f(x) - \ln f(0) = -[\ln f(-x) - \ln f(0)] = -F(-x).$$

Таким образом,

$$\ln f(x) = \ln f(0) + F(x), \quad f(x) = f(0) e^{F(x)},$$

где F — любая нечетная вещественная однозначная функция вещественного переменного. Подставляя начальное значение c , получаем окончательно

$$f(x) = |c| e^{F(x)}.$$

95. Рассмотрим сразу общий случай, то есть уравнения

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = b. \end{cases} \quad (2)$$

Исключив x_1 из уравнений (1) и (2), получим

$$2(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 - ax_2 - ax_3) = b - a^2. \quad (3)$$

Следовательно, $b - a^2$ — четное число, и коэффициенты a и b должны быть либо оба четные, либо оба нечетные.

Пусть

$$x_1 = \frac{a}{3} - x, \quad (4)$$

$$x_2 = \frac{x - y}{2} + \frac{a}{3}, \quad (5)$$

$$x_3 = \frac{x + y}{2} + \frac{a}{3}. \quad (6)$$

Вычитая из уравнения (6) уравнение (5), заключаем, что y — целое число (быть может, равное 0). Не ограничивая общности, условимся считать y неотрицательным целым числом, поскольку изменение знака y приводит лишь к перестановке x_2 и x_3 и не порождает нового набора целочисленных решений x_1, x_2, x_3 системы уравнений (1) и (2). При $y = 0$ числа x_2 и x_3 равны.

Подставляя (4), (5) и (6) в уравнение (2), получаем

$$3x^2 + y^2 = 2\left(b - \frac{a^2}{3}\right), \quad (7)$$

откуда $b \geq a^2/3$.

Случай 1. Число a кратно 3. Как показывает соотношение (4), число x в этом случае целое. Поскольку x_2 и x_3 — целые числа, x и y должны быть либо оба четные, либо оба нечетные. Любая пара чисел x, y , удовлетворяющих соотношению (7), порождает набор целых чисел x_1, x_2, x_3 , удовлетворяющих системе уравнений (1) и (2). Решение (x_1, x_2, x_3) , получаемое при положительном x , как правило, отличается от решения (x_1, x_2, x_3) , соответствующего равному по абсолютной величине, но противоположному по знаку значению x . Если $x = y$, то независимо от знака x решение (x_1, x_2, x_3) одинаково при одном и том же значении $|x|$. Различные пары чисел x и y , удовлетворяющих соотношению (7), не обязательно

приводят к различным решениям (x_1, x_2, x_3) системы уравнений (1), (2). Действительно, как следует из симметрии уравнений (1) и (2), если новое значение x приводит к значению x_1 , совпадающему с ранее полученными значениями x_2 или x_3 , то нового набора значений x_1, x_2, x_3 не возникает. Поэтому, за исключением особых случаев, следует ожидать, что каждому набору x_1, x_2, x_3 соответствуют три различные пары значений x и y .

Случай 2. Число a не кратно 3.

В этом случае число x имеет вид $n/3$, где n — такое целое число, что $(a - n)/3$ — целое. Пары значений n и y , используемые для получения набора x_1, x_2, x_3 , должны удовлетворять соотношению (7), а знак n следует выбирать так, чтобы удовлетворялось соотношение (4). Числа y и n должны быть либо оба четные, либо оба нечетные.

При заданных значениях a и b предложенный метод позволяет довести решение задачи до конца. При $a = 54$, $b = 1406$ правая часть соотношения (7) равна 868. Различные решения системы уравнений (1) и (2) для этого случая представлены в таблице:

x	y	x_1	x_2	x_3
3	29	15	5	34
-3	29	21	2	31
8	26	10	9	35
-8	26	26	1	27

Остальные пары значений (x, y)

$(\pm 9, 25)$, $(\pm 13, 19)$, $(\pm 16, 10)$, $(\pm 17, 1)$

не приводят к новым наборам x_1, x_2, x_3 .

96. Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы ее начало совпало с исходным положением собаки, ось x была направлена от собаки к хозяину, а ось y — вниз по течению реки. Пусть w — ширина реки (в милях), s — скорость реки (миль/ч) и θ — положительный острый угол между осью x и прямой, проходящей через точку, в которой собака находится в мо-

мент времени t , и точку $(\omega, 0)$. Тогда условия задачи позволяют составить уравнения

$$c - \frac{dy}{dt} = 2 \sin \vartheta, \quad \frac{dx}{dt} = 2 \cos \vartheta. \quad (1)$$

Полагая $\operatorname{tg} \vartheta = z$, получаем

$$\frac{dy}{dx} + z = \frac{c}{2} \sqrt{z^2 + 1}. \quad (2)$$

Ясно, что

$$z = \frac{y}{\omega - x}.$$

Продифференцировав это выражение по x , исключив dy/dx из уравнения (2) и приравняв величины, обратные правой и левой частям получившегося уравнения, найдем

$$\frac{d}{dz} \ln(\omega - x) = -\frac{2}{c} \frac{1}{\sqrt{z^2 + 1}},$$

откуда

$$\ln(\omega - x) = -\frac{2}{c} \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}) + \ln k. \quad (3)$$

Чтобы определить значение постоянной k , заметим, что x и z обращаются в нуль одновременно. Полагая в (3) $x = z = 0$, получаем $k = \omega$. Подставив полученное выражение в (3) и разрешив относительно z , приходим к соотношению

$$2z = \left(\frac{\omega}{\omega - x} \right)^{c/2} - \left(\frac{\omega}{\omega - x} \right)^{-c/2}. \quad (4)$$

Заменив z его значением $y/(\omega - x)$, получим уравнение траектории плывущей собаки

$$2y = (\omega - x) \left[\left(\frac{\omega}{\omega - x} \right)^{c/2} - \left(\frac{\omega}{\omega - x} \right)^{-c/2} \right]. \quad (5)$$

Дифференцируя (5), находим из уравнения $dy/dx = 0$ соотношение

$$\left(\frac{\omega}{\omega - x_0} \right)^c = \frac{2 + c}{2 - c},$$

где x_0 — абсцисса точки максимального бокового сноса. Поскольку по условиям задачи $x_0 = 2\omega/3$, то

$$3^c = \frac{2 + c}{2 - c},$$

откуда $c = 1$. (Это уравнение имеет еще два вещественных корня: $c = 0$ и $c = -1$. Первый отбрасывается по смыслу задачи, второй исключается выбором направления Oy).

Определим время t , которое потребовалось собаке, чтобы переплыть реку. Обращаясь ко второму из уравнений (1), находим

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt{z^2 + 1}}{2}. \quad (6)$$

Исключая z из уравнений (4) и (6) и интегрируя от $x = 0$ до $x = w$, получаем

$$t = \frac{2w}{4 - c^2}. \quad (7)$$

Поскольку в стоячей воде собака проплывает расстояние, равное ширине реки, за $w/2$ часов, а на преодоление реки затрачивает на $1/12$ часа больше, то

$$\frac{2w}{4 - c^2} - \frac{w}{2} = \frac{1}{12},$$

откуда

$$w = \frac{1}{6} \frac{4 - c^2}{c^2}.$$

Но $c = 1$. Следовательно, ширина w реки составляет $1/2$ мили. Собака переплывает ее за 20 мин.

97. Нетрудно видеть, что условиям задачи удовлетворяет

$$h_{pq} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \frac{e_{ij}}{m_{pq}},$$

где e_{ij} — обычные единичные матрицы, а $m_{pq} = \min(p, q)$, при этом $k_{pqrs} = m_{qr}m_{ps}/m_{pq}m_{rs}$.

98. Произведение восьми последовательных чисел (x — наименьшее из них) запишем в виде

$$\begin{aligned} P &= x(x+7)(x+1)(x+6)(x+2)(x+5)(x+3)(x+4) = \\ &= (x^2 + 7x + 6 - 6)(x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 6 + 4) \times \\ &\quad \times (x^2 + 7x + 6 + 6) = a^4 + 4a^3 - 36a^2 - 144a = \\ &= a^4 + 4a(a+3)(a-12), \end{aligned}$$

где $a = x^2 + 7x + 6$. Поскольку при $x \geq 1$ выполняется неравенство $a > 12$, то $a^4 < P$. Кроме того,

$$(a + 1)^4 - P = 42a^2 + 148a + 1 > 0.$$

Таким образом,

$$a^4 < P < (a + 1)^4,$$

что и требовалось доказать.

99. Пусть D_n — определитель $(n + 1)$ -го порядка матрицы квадратичной формы от $n + 1$ переменных, приведенной в условиях задачи ($n = 0, 1, \dots$), а Z_v — v -я строка этого определителя. Заменяя Z_0 линейной комбинацией $Z_0 + Z_2 - 2Z_1$, получим определитель, первая строка которого содержит элементы $0, 2, 0, \dots, 0$, а остальные строки совпадают со строками исходного определителя. Прделав аналогичную операцию над первым столбцом нового определителя, получим определитель, первый столбец которого содержит элементы $-4, 2, 0, \dots, 0$. Разложив последний определитель по элементам первой строки, получим рекуррентное соотношение

$$D_n = -4D_{n-1} - 4D_{n-2}, \quad n = 2, 3, 4, \dots,$$

где $D_0 = 0, D_1 = -1$. Пользуясь методом математической индукции, нетрудно доказать, что

$$D_n = (-1)^n 2^{n-1} n$$

(это равенство составляет содержание задачи 87). Поскольку $D_n \neq 0$ при $n \geq 1$, ранг матрицы равен $n + 1$. Зная это, определим сигнатуру квадратичной формы, приведенной в условиях задачи, по формуле Фробениуса:

$$\sum_{v=0}^n \text{sign}(D_{v-1} D_v) = -(n - 1), \quad D_{-1} = 1.$$

Тем самым утверждение задачи доказано.

100. Пусть $p = 6k + 1$ (число вида $6k + 5$ и 2 не может иметь вид $3n + 1$, а остальные не могут быть простыми). Разобьем классы вычетов $1, 2, \dots, p - 1$ на 3 множества: множество A кубических вычетов по

модулю p и множества $B \equiv \beta A$ и $C \equiv \beta^2 A$, где β не принадлежит A . Этими множествами исчерпывается полный набор вычетов по модулю p , и каждое из них содержит по $(p-1)/3 = 2k$ членов. Пусть α — элементы множества A , β — элементы множества B и γ — элементы множества C . Рассмотрим, как распределены α , β и γ среди элементов полного набора вычетов $1, 2, \dots, p-1$. Предположим, что существуют a элементов α , за каждым из которых следует элемент α' , то есть a решений сравнения

$$\alpha' \equiv \alpha + 1 \pmod{p}. \quad (1)$$

Рассматривая все возможные случаи, мы приходим к следующей системе сравнений по модулю p (рядом с каждым сравнением указано число допускаемых им решений):

$$\begin{aligned} \alpha' &\equiv \alpha + 1, a; & \alpha &\equiv \beta + 1, d; & \alpha &\equiv \gamma + 1, g; \\ \beta &\equiv \alpha + 1, b; & \beta' &\equiv \beta + 1, e; & \beta &\equiv \gamma + 1, h; \\ \gamma &\equiv \alpha + 1, c; & \gamma &\equiv \beta + 1, f; & \gamma' &\equiv \gamma + 1, i. \end{aligned} \quad (2)$$

Поскольку каждый вычет δ , за исключением α -вычета $p-1$, имеет «последователя» — вычет $\delta+1$, то числа $a, b, \dots, h, i$ должны удовлетворять соотношениям

$$a + b + c = 2k - 1, \quad d + e + f = 2k, \quad g + h + i = 2k. \quad (3)$$

Кроме того, -1 принадлежит множеству кубических вычетов, поэтому $-\alpha = \alpha'$, $-\beta = \beta'$, $-\gamma = \gamma'$, и b , как и d , есть число решений сравнения

$$\alpha + \beta + 1 \equiv 0.$$

Следовательно, $b = d$. Аналогичные рассуждения позволяют вывести и два других равенства: $g = c$, $h = f$.

Заметим далее, что c — число решений сравнения

$$1 + \alpha + \gamma \equiv 0, \quad \text{или} \quad \gamma^{-1} + \gamma^{-1}\alpha + 1 \equiv 0.$$

Но $\gamma^{-1} = \beta$, а $\gamma^{-1}\alpha$ совпадает с каким-то другим вычетом, например с β' . Таким образом, c — число решений сравнения

$$1 + \beta + \gamma' \equiv 0.$$

Но e — также число решений этого сравнения, в силу чего $e = c$. Как показывают аналогичные рассуждения, $i = b$. Составим таблицу

	A	B	C
A	a	b	c
B	b	c	f
C	c	f	b

показывающую число различных типов следования элементов в полной системе вычетов $1, 2, \dots, p-1$. Уравнения (3) позволяют выразить все числа, входящие в эту таблицу, через числа a и b :

$$c = 2k - 1 - a - b, \quad f = a + 1.$$

Найдем теперь число решений сравнения

$$1 + \alpha + \beta + \gamma \equiv 0. \quad (4)$$

Когда α пробегает все элементы множества A , мы получаем из сравнений (2), что

$$(1 + \alpha) + \beta + \gamma = \begin{cases} \alpha' + \beta + \gamma & a \text{ раз,} \\ \beta' + \beta + \gamma & b \text{ раз,} \\ \gamma' + \beta + \gamma & c \text{ раз.} \end{cases}$$

При фиксированном α' эти сравнения эквивалентны сравнениям

$$\alpha' + \beta + \gamma \equiv 0, \quad 1 + \beta\alpha'^{-1} + \gamma\alpha'^{-1} \equiv 0, \quad 1 + \beta' + \gamma' \equiv 0.$$

Из последнего сравнения мы видим, что оно допускает f решений. Аналогично получаем при фиксированном β' сравнение

$$\beta' + \beta + \gamma \equiv 0, \quad \text{или} \quad 1 + \alpha + \beta \equiv 0 \quad (b \text{ решений}),$$

при фиксированном γ' — сравнение

$$\gamma' + \beta + \gamma \equiv 0, \quad \text{или} \quad 1 + \gamma + \alpha \equiv 0 \quad (c \text{ решений}).$$

Таким образом, сравнение (4) допускает $af + b^2 + c^2$ решений. С другой стороны, записав сравнение (4) в виде

$$(1 + \beta) + \alpha + \gamma \equiv 0,$$

мы обнаружим, что оно допускает $bc + cf + bf$ решений. Таким образом,

$$af + b^2 + c^2 = bc + cf + bf. \quad (5)$$

Подставляя в соотношение (5) полученные выше выражения c и f через a и b и полагая $p = 6k + 1$, преобразуем его к виду

$$4p = (6k - 9a - 7)^2 + 27(2k - a - 2b - 1)^2. \quad (6)$$

Заметим, что в любом представлении простого числа $p = 6k + 1$ в виде

$$4p = u^2 + 27v^2 \quad (7)$$

числа u и v либо оба четные, либо оба нечетные, причем $u \not\equiv 0 \pmod{3}$. Если оба числа u и v четные, то

$$p = \left(\frac{u}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{3v}{2}\right)^2 \quad (8)$$

— единственное представление простого числа p в виде $x^2 + 3y^2$, где $y \equiv 0 \pmod{3}$. Если оба числа u и v нечетные, то их знаки следует выбрать так, чтобы число $(u - 3v)/4$ было целым, и тогда

$$p = \left(\frac{u + 9v}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{u - 3v}{4}\right)^2 \quad (9)$$

— единственное представление простого числа p в виде $x^2 + 3y^2$, где $y \not\equiv 0 \pmod{3}$. Следовательно, простое число p представимо в виде

$$p = A^2 + 27B^2 = A^2 + 3(3B)^2 \quad (10)$$

в том и только в том случае, если числа u и v из соотношения (7) оба четные или, что то же, если число a из соотношения (6) нечетно. В свою очередь, число a нечетно в том и только в том случае, если 2 — кубический вычет по модулю p , поскольку a — число пар «соседних» кубических вычетов в полной системе вычетов 1, 2, ..., ..., $p-1$, а если x и $(x+1)$ — кубические вычеты, то $(p-x-1)$ и $(p-x)$ — также кубические вычеты. Таким образом, кубические вычеты можно всегда считать парами, если не выполняются равенства

$$(x, x+1) = (p-x-1, p-x) = \left(\frac{p-1}{2}, \frac{p+1}{2}\right),$$

и число a нечетно в том и только в том случае, если $(p-1)/2$, $(p+1)/2$ — кубические вычеты. В свою очередь, поскольку

$$2\left(\frac{p \pm 1}{2}\right) \equiv \pm 1 \pmod{p},$$

числа $(p-1)/2$ и $(p+1)/2$ являются кубическими вычетами в том и только в том случае, если 2 — кубический вычет по модулю p , что и требовалось доказать.

101. Значения коэффициента A , при которых трехчлен $f(x) = x^{12} + Ax^6y^6 + y^{12}$ допускает разложение на два многочлена шестой степени с рациональными коэффициентами, задаются выражениями $R + R^{-1}$, $2 - R^2$ и $-2 - R^2$, где R — любое рациональное число. Разложения трехчлена $f(x)$ имеют соответственно следующий вид:

$$(x^6 + Ry^6)(x^6 + R^{-1}y^6), (x^6 + Rx^3y^3 + y^6)(x^6 - Rx^3y^3 + y^6) \\ \text{и } (x^6 + Rx^3y^3 - y^6)(x^6 - Rx^3y^3 - y^6).$$

Докажем, что другие возможности исключаются. Для этого рассмотрим несколько случаев.

Случай 1: $A < -2$. Пусть $x/y = v$, а s — вещественный корень уравнения

$$f(v) = v^{12} + Av^6 + 1 = 0.$$

Тогда $A = -s^6 - s^{-6}$. Многочлен $f(v)$ разлагается на следующие элементарные множители:

а) $v^2 + sv + s^2$; в) $v^2 + s^{-1}v + s^{-2}$; д) $v + s$; ж) $v + s^{-1}$;
б) $v^2 - sv + s^2$; г) $v^2 - s^{-1}v + s^{-2}$; е) $v - s$; з) $v - s^{-1}$.

Нам необходимо составить из этих элементарных множителей два многочлена шестой степени, произведение которых совпадает с многочленом $f(v)$. Ясно, что если один из сомножителей имеет рациональные коэффициенты, то дополнительный сомножитель также имеет рациональные коэффициенты. Рассмотрим многочлен с вещественными коэффициентами, содержащий множитель а. Его можно составить 22 способами. Перебрав все возможные способы, мы приходим к следующим результатам: соответствующие многочлены имеют рациональные коэффициенты в том и только в том случае, если рациональны числа: для многочлена (абде) — число s^6 ;

(абжз) — число s^2 ; (абез) — число $s^3 + s^{-3}$; (агеж) — число $s^3 - s^{-3}$; (авдж) — число $s + s^{-1}$; (агдз) — число $s - s^{-1}$, а все остальные многочлены — лишь если рационально число s . Но если s или s^2 рациональны, то число s^6 также рационально; если рациональна сумма $s + s^{-1}$, то рациональна и сумма кубов $s^3 + s^{-3}$; если рациональна разность $s - s^{-1}$, то рациональна и разность кубов $s^3 - s^{-3}$. Итак, возможны лишь три варианта. Переходя к коэффициенту A , получаем: либо $A = R + R^{-1}$ ($R < 0$, $R \neq -1$), либо $A = 2 - R^2$, $|R| > 2$, либо $A = -2 - R$, $R \neq 0$.

Случай 2: $A > 2$. Пусть is — чисто мнимый корень уравнения $f(v) = 0$. Тогда $A = s^6 + s^{-6}$. Элементарные вещественные множители, на которые разлагается многочлен $f(v)$, имеют следующий вид:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } v^2 + s^2; & \text{в) } v^2 - \sqrt{3} sv + s^2; & \text{д) } v^2 - \sqrt{3} s^{-1}v + s^{-2}; \\ \text{б) } v^2 + s^{-2}; & \text{г) } v^2 + \sqrt{3} sv + s^2; & \text{е) } v^2 + \sqrt{3} s^{-1}v + s^{-2}. \end{array}$$

Многочлен шестой степени, содержащий a (сомножитель, входящий в разложение многочлена $f(v)$), можно составить 10 различными способами. Их рассмотрение приводит к следующим результатам: многочлен (авг) имеет рациональные коэффициенты в том и только в том случае, если число s^6 рационально; многочлен (адж) — если рационально число s^2 , а все остальные многочлены — если рационально число $s\sqrt{3}$. Во всех этих случаях число s^6 рационально и $A = R + R^{-1}$, $R > 0$, $R \neq 1$.

Случай 3: $|A| < 2$. Пусть $A = -2 \cos 6\theta$, $0 < 6\theta < \pi$. Элементарные множители многочлена $f(v)$ имеют следующий вид:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } v^2 - 2v \cos \theta + 1; & \text{г) } v^2 + 2v \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) + 1; \\ \text{б) } v^2 + 2v \cos \theta + 1; & \text{д) } v^2 - 2v \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) + 1; \\ \text{в) } v^2 - 2v \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) + 1; & \text{е) } v^2 + 2v \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) + 1. \end{array}$$

Многочлен шестой степени, содержащий множитель a и входящий в разложение многочлена $f(v)$, можно построить 10 способами. Рассмотрение их приводит к следующим результатам: многочлены имеют рациональные коэффициенты в том и только в том случае, если рацио-

нальны следующие значения косинусов: для многочлена (ард) — $\cos 3\theta$; (аве) — $\cos \theta$; (авд) — $\cos(\theta + \pi/3)$; (аге) — $\cos(\theta + 2\pi/3)$, все остальные многочлены — если рациональны $\cos \theta$ и $\cos(\theta + \pi/3)$. Во всех случаях $\cos 3\theta$ рационален и $A = -4\cos^2 3\theta + 2 = 2 - R^2$, где $|R| < 2$.

Случай 4: $A = \pm 2$; сомножители, входящие в разложение $f(v)$, очевидны.

Итак, хотя в разложение $f(v)$ на многочлены с рациональными коэффициентами могут входить и другие сомножители, они существуют лишь в том случае, если коэффициент A имеет одно из приведенных в начале решения значений.

102. Сегмент, отсекаемый от конического сечения совпадающей с нормалью хордой, имеет минимальную площадь в том случае, если хорда пересекает ось конического сечения под углом $\pm\pi/4$.

1. Площадь сегмента, отсекаемого от параболы $y^2 = ax$ хордой PQ , равна $(q - p)^3/6a$, где p и q — ординаты точек P и Q , причем $p < q$.

Если хорда PQ совпадает с нормалью к параболе в точке Q , то $p = -q - a^2/2q$, в силу чего площадь сегмента равна

$$\frac{1}{6a} \left(2q + \frac{a^2}{2q} \right)^3, \quad q > 0, \quad p < 0.$$

Дифференцируя, находим условие минимума площади сегмента: $q = a/2$, $p = -3a/2$. Угловой коэффициент нормали равен -1 , точка Q совпадает с концом фокальной хорды¹. Другой конец этой хорды мы получаем при $p > q$. Минимальная площадь сегмента равна $4a^2/3$.

2. Пусть θ_1 и θ_2 ($0 < \theta_1 - \theta_2 < 2\pi$) — значения параметра, соответствующие двум точкам эллипса $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$. Площадь сегмента, отсекаемого проходящей через эти две точки хордой, определяется выражением

$$S = ab [(\theta_1 - \theta_2) - \sin(\theta_1 - \theta_2)]/2. \quad (1)$$

¹ Хорды, проходящей через фокус параболы параллельно директрисе. — *Прим. перев.*

Для того чтобы эта площадь была минимальной, должно выполняться соотношение $1 - d\vartheta_2/d\vartheta_1 = 0$. Хорда совпадает с нормалью, проходящей через точку ϑ_1 , если

$$\frac{a}{b} \operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{b (\sin \vartheta_2 - \sin \vartheta_1)}{a (\cos \vartheta_2 - \cos \vartheta_1)} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}, \quad (2)$$

или

$$\vartheta_2 = 2 \operatorname{arccctg} \left[\frac{-a^2 \operatorname{tg} \vartheta_1}{b^2} \right] - \vartheta_1.$$

Комбинируя эти соотношения, получаем

$$1 = \frac{d\vartheta_2}{d\vartheta_1} = \frac{2a^2b^2 \sec^2 \vartheta_1}{a^4 \operatorname{tg}^2 \vartheta_1 + b^4} - 1, \quad (3)$$

откуда $\operatorname{tg} \vartheta_1 = \pm b/a$. Таким образом, хорда совпадает с нормалью, имеющей угловой коэффициент ± 1 . Если выбрать $0 < \vartheta_1 < \pi/2$, то соотношение (2) превращается в равенство $\vartheta_2 = -3\vartheta_1$, а площадь сегмента определяется выражением

$$S = \frac{ab(4\vartheta_1 - \sin 4\vartheta_1)}{2} = 2ab \left[\operatorname{arctg} \frac{b}{a} - \frac{ab(a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)^2} \right]. \quad (4)$$

3. Пусть ϑ_1 и ϑ_2 ($0 < \vartheta_1 - \vartheta_2$) — значения параметров, соответствующие двум точкам одной и той же ветви гиперболы $x = a \operatorname{ch} \vartheta$, $y = b \operatorname{sh} \vartheta$, $b < a$. Приведенные выше рассуждения для случая эллипса практически целиком переносятся на случай гиперболы (с точностью до замены круговых функций гиперболическими). В той же последовательности, что и в пункте 2, проведем следующие вычисления:

$$S = \frac{ab [\operatorname{sh} (\vartheta_1 - \vartheta_2) - (\vartheta_1 - \vartheta_2)]}{2}, \quad (1)$$

$$-\frac{a}{b} \operatorname{th} \vartheta_1 = \frac{b (\operatorname{sh} \vartheta_2 - \operatorname{sh} \vartheta_1)}{a (\operatorname{ch} \vartheta_2 - \operatorname{ch} \vartheta_1)} = \frac{b}{a} \operatorname{cth} \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}, \quad (2)$$

или

$$\vartheta_2 = 2 \operatorname{Arth} \left[\frac{-a^2 \operatorname{th} \vartheta_1}{b^2} \right] - \vartheta_1,$$

$$1 = \frac{d\vartheta_2}{d\vartheta_1} = \frac{2a^2b^2 \operatorname{sech}^2 \vartheta_1}{a^4 \operatorname{th}^2 \vartheta_1 - b^4} - 1, \quad (3)$$

откуда

$$\operatorname{th} \vartheta_1 = \pm \frac{b}{a}.$$

Таким образом, хорда совпадает с нормалью, имеющей угловой коэффициент ± 1 .

$$S = \frac{ab (\operatorname{sh} 4\theta_1 - 4\theta_1)}{2} = 2ab \left[\frac{ab(a^2 + b^2)}{(a^2 - b^2)^2} - \operatorname{Arth} \frac{b}{a} \right].$$

103. Докажем, что ответ на вопрос задачи отрицательный. Пусть E_n ($n = 1, 2, \dots$) — множество точек, абсциссы которых в двоичной системе представимы в виде

$$0, \alpha_{n1}\alpha_{n2} \dots \alpha_{n,n-1}1\alpha_{n,n+1} \dots, \quad (1)$$

где двоичные цифры α_{nj} принимают значения 0 или 1. Каждому из 2^{n-1} способов выбора первых $n-1$ цифр соответствуют два числа — наибольшее и наименьшее. Наибольшее число (при данном выборе первых $n-1$ цифр) получается при $\alpha_{nj} = 1$ ($j \geq n+1$), наименьшее — при $\alpha_{nj} = 0$ ($j \geq n+1$). Разность между наибольшим и наименьшим числом равна

$$\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots = \frac{1}{2^n}.$$

Таким образом, варьируя цифры, начиная с $(n+1)$ -й и далее, мы получаем все точки интервала длиной $1/2^n$. Кроме того, отрезки, соответствующие двум различным выборам первых $n-1$ цифр, *не перекрываются*, поскольку абсциссы левых концов таких отрезков отличаются между собой по крайней мере на $1/2^{n-1}$. Таким образом, множество E_n состоит из суммы 2^{n-1} непересекающихся отрезков, каждый из которых имеет длину $1/2^n$, и мера множества E_n равна $1/2$. Каждое из множеств E_n лежит на отрезке $(0, 1)$.

Рассмотрим теперь любое бесконечное пересечение

$$G \equiv E_{v_1} \cap E_{v_2} \dots \cap E_{v_i} \dots$$

$$(1 \leq v_1 < v_2 < \dots < v_i < \dots),$$

образованное из членов последовательности $\{E_n\}$. Пусть

$$G_i = E_{v_1} \cap E_{v_2} \dots \cap E_{v_i}$$

— конечное пересечение первых i сомножителей, входящих в G . Абсциссы точек, принадлежащих множеству G_i , имеют вид

$$0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{v_1-1}1\alpha_{v_1+1} \dots \alpha_{v_2-1}1\alpha_{v_2+1} \dots \alpha_{v_i-1}1\alpha_{v_i+1}. \quad (2)$$

При каждом фиксированном выборе первых $v_i - 1$ цифр точки, соответствующие двоичным числам (2), заполняют отрезок длиной $1/2^{v_i}$. Следовательно, в конечное пересечение G_i всего входят $2^{(v_i-1)-(i-1)} = 2^{v_i-1}$ таких отрезков, причем, как и прежде, эти отрезки не перекрываются.

Таким образом,

$$\text{mes } G_i = 2^{v_i-1} \frac{1}{2^{v_i}} = \frac{1}{2^i}.$$

Но поскольку G — подмножество множества G_i при любом $i = 1, 2, \dots$, отсюда следует, что $\text{mes } G = 0$.

104. Рассмотрим векторы, проведенные из центра эллипса в три заданные точки. Пусть z_1, z_2, z_3 — соответствующие им комплексные числа, $g = (a + b + c)/3$. Тогда

$$a = g + z_1, \quad b = g + z_2, \quad c = g + z_3.$$

Поскольку $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$, то выражение для длин полуосей эллипса не изменится, если a, b, c заменить числами z_1, z_2, z_3 . Кроме того, поскольку центр тяжести треугольника abc совпадает с центром данного эллипса, то этот эллипс является для треугольника abc эллипсом Штейнера *, и эксцентрические углы заданных точек отличаются на $2\pi/3$. Пусть A и B — длины полуосей эллипса ($A > B$), α — угол наклона большей оси к вещественной оси. Тогда

$$2e^{-ia} z_1 = (A + B)t + (A - B)t^{-1},$$

$$2e^{-ia} z_2 = (A + B)\varepsilon t + (A - B)\varepsilon^2 t^{-1},$$

$$2e^{-ia} z_3 = (A + B)\varepsilon^2 t + (A - B)\varepsilon t^{-1},$$

где $t = e^{i\varphi}$, а φ — эксцентрический угол точки z_1 .

Умножая первое соотношение на 1, второе — на ε , третье — на ε^2 и складывая отдельно левые и правые части, получаем

$$A - B = 2 \frac{|z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3|}{3}$$

и аналогично

$$A + B = 2 \frac{|z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon z_3|}{3}.$$

Решив эту систему уравнений относительно A и B , получим для полуосей выражения, приведенные в условиях задачи.

105. Пусть u_r — общий (r -й) член суммы, стоящей в левой части доказываемого тождества, а S_n — значение этой суммы. Разлагая их на элементарные дроби, получаем

$$u_r = \sum_{s=0}^n \frac{(-1)^s \binom{n}{r}}{s! (n-s)! (x+r+s)}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n!} \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^n \frac{(-1)^s \binom{n}{r} \binom{n}{s}}{x+r+s} = \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{t=0}^{2n} \frac{1}{x+t} \sum_{s=0}^t (-1)^s \binom{n}{t-s} \binom{n}{s} \end{aligned} \quad (2)$$

(члены, не имеющие смысла, при суммировании надлежит опускать), и если $t > n$, то $t-n \leq s \leq n$. Тождество $(1-x^2)^n = (1-x)^n (1+x)^n$ приводит к следующему тождеству между биномиальными коэффициентами:

$$\sum_{s=0}^{2p} (-1)^s \binom{n}{2p-s} \binom{n}{s} = (-1)^p \binom{n}{p}, \quad 0 \leq p \leq n. \quad (3)$$

Если $2p > n$, то $2p-n \leq s \leq n$. В соотношении (2) члены, соответствующие нечетным t , обращаются в нуль. Следовательно,

$$S_n = \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p}{p! (n-p)!} \frac{1}{x+2p}. \quad (4)$$

Полученное выражение представляет собой не что иное, как разложение на элементарные дроби правой части доказываемого тождества (в справедливости формул (1) и (4) легко убедиться методом математической индукции).

106. Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - x & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 - x & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 - x \end{vmatrix} = 0$$

вещественной ортогональной матрицы, приведенной в условиях задачи. Как известно, все корни такого уравнения по абсолютной величине равны 1. Поскольку все коэффициенты характеристического уравнения вещественны, то два корня комплексно сопряженные и их можно представить в виде $\cos \theta \pm i \sin \theta$, а третий корень — вещественный и равен либо $+1$, либо -1 (в рассматриваемом случае $+1$, поскольку произведение корней равно свободному члену характеристического уравнения, то есть определителю матрицы, составленной из направляющих косинусов).

Сумма трех корней равна следу матрицы, то есть сумме членов, стоящих на главной диагонали. Следовательно,

$$\lambda_1 + \mu_2 + \nu_3 = 2 \cos \theta + 1 \geq -1.$$

Если бы определитель матрицы был равен -1 , то вещественный корень характеристического уравнения был бы равен -1 , и из рассмотрения следа матрицы мы получили бы неравенство

$$\lambda_1 + \mu_2 + \nu_3 \leq 1.$$

107. Если число -3 не является квадратичным невычетом всех простых чисел вида $3n + 2$, то пусть p — наименьшее нечетное простое число этого вида, для которого разрешимо сравнение $x^2 \equiv -3 \pmod{p}$. Пусть $x = e$ — решение этого сравнения ($e < p$). Не ограничивая общности, предположим, что число e четное, поскольку если бы e было нечетно, то число $p - e$, также удовлетворяющее сравнению $x^2 \equiv -3 \pmod{p}$, было бы четно.

Рассмотрим сначала случай $e^2 \equiv 1 \pmod{3}$. Из сравнения

$$e^2 \equiv -3 \pmod{p}$$

получаем

$$e^2 = -3 + fp, \quad f < p, \quad (1)$$

где f — нечетное число.

Следовательно,

$$pf = e^2 + 3 \equiv 4 \pmod{3},$$

а поскольку

$$p \equiv 2 \pmod{3},$$

то

$$f \equiv 2 \pmod{3}.$$

Число f нечетно и имеет вид $3n + 2$. Следовательно, f должно содержать нечетный простой делитель q вида $3n + 2$, поскольку если бы все делители числа f имели вид $3n$ или $3n + 1$, то и их произведение было бы того же вида. Из соотношения (1) получаем

$$e^2 \equiv -3 \pmod{f},$$

в силу чего выполняется и сравнение

$$e^2 \equiv -3 \pmod{q}.$$

Но последнее сравнение противоречит гипотезе о том, что p — наименьшее простое число вида $3n + 2$, для которого -3 является квадратичным невычетом.

Теперь рассмотрим случай, когда $e^2 \equiv 0 \pmod{3}$. Выделим наибольшую степень числа 3, входящую в разложение e на простые множители, то есть представим e в виде

$$e = 3^a k, \quad k \not\equiv 0 \pmod{3}.$$

Поскольку

$$e^2 \equiv -3 \pmod{p},$$

то

$$3^{2a} k^2 \equiv -3 \pmod{p},$$

откуда

$$3^{2a-1} k^2 \equiv -1 \pmod{p},$$

или

$$3^{2a-1} k^2 + 1 \equiv ph, \quad h < p, \quad (2)$$

h — нечетное число.

Таким образом,

$$ph \equiv 1 \pmod{3}.$$

Но

$$p \equiv 2 \pmod{3},$$

в силу чего

$$h \equiv 2 \pmod{3}.$$

Итак, h , нечетное число вида $3n + 2$, должно содержать нечетный простой делитель r вида $3n + 2$. Из соотношения (2) получаем

$$3^{2a-1}k^2 \equiv -1 \pmod{h},$$

поэтому

$$3^{2a-1}k^2 \equiv -1 \pmod{r}$$

и

$$3^{2a}k^2 \equiv -3 \pmod{r}.$$

Мы опять пришли к противоречию с исходным предположением; следовательно наименьшего нечетного простого числа вида $3n + 2$, для которого число -3 является квадратичным невычетом, не существует. Тем самым утверждение задачи доказано. Из приведенного доказательства следует, что квадратичный невычет простого числа p вида $3n + 2$ сравним по модулю p с числом вида $-3a^2$, $a = 1, 2, \dots, (p-1)/2$.

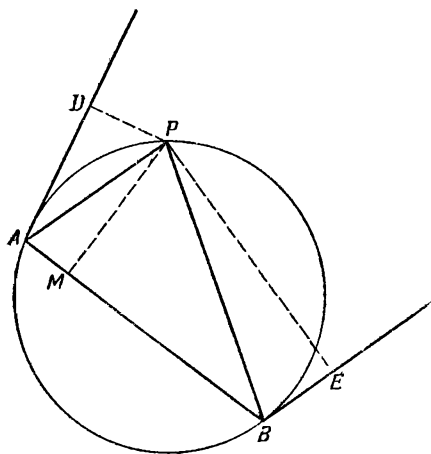


Рис 18.

108. Начнем с доказательства леммы.

Лемма. Перпендикуляр, опущенный из точки окружности на хорду, равен среднему геометрическому перпендикуляров, опущенных из той же точки окружности на касательные к окружности, проведенные через концы хорды.

Доказательство. Пусть P — произвольная точка окружности, AB — любая хорда, PM — перпендикуляр, опу-

щенный из P на AB , PD и PE — перпендикуляры, опущенные из точки P на касательные к окружности, проведенные через концы хорды AB (рис. 18). Проведем хорды PA и PB . Заметим, что $\angle PBE = \widehat{(1/2)PB} = \angle PAM$ и $\angle DAP = \widehat{(1/2)PA} = \angle PBM$. Следовательно, прямоугольные треугольники PBE и PAM подобны и

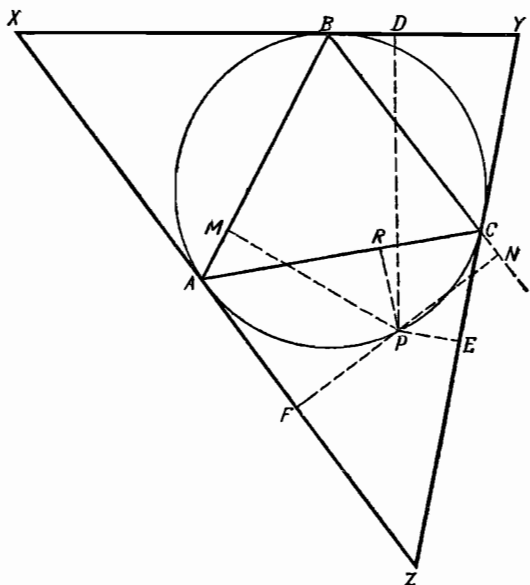


Рис. 19.

прямоугольные треугольники DAP и PMB также подобны, откуда $PE : PM = PB : PA = PM : PD$, или $PM = \sqrt{PD \cdot PE}$.

Лемма доказана.

Пусть ABC — заданный вписанный треугольник, а XYZ — заданный описанный треугольник (рис. 19), стороны которого касаются окружности в вершинах треугольника ABC . Из точки P окружности опустим перпендикуляры PM , PN , PR , PD , PE , PF на стороны AB , BC , CA , XY , YZ , ZX . По лемме $PM = \sqrt{PD \cdot PE}$, $PN = \sqrt{PE \cdot PF}$. Перемножив эти соотношения, получаем

$$PM \cdot PN \cdot PR = PD \cdot PE \cdot PF, \quad (1)$$

что и требовалось доказать.

Соотношение (1) остается в силе и в том случае, если точка P совпадает с одной из вершин треугольника ABC , поскольку при этом правая и левая части соотношения (1) обращаются в нуль.

109. Все возможные расположения в ряд n чисел, удовлетворяющие условиям задачи, можно получить, действуя следующим образом.

а. Поместим единицу на первое место, а остальные единицы расставим по любым $a_1 - 1$ из $a_1 + a_2 + \dots + a_n - 1$ мест, оставшихся свободными. Общее число способов, которыми можно расставить единицы, равно

$$\binom{a_1 + a_2 + \dots + a_n - 1}{a_1 - 1}.$$

б. Поместим двойку на первое свободное место, а остальные двойки расставим по любым $a_2 - 1$ из $a_2 + a_3 + \dots + a_n - 1$ мест, оставшихся свободными. Общее число способов, которыми можно расставить двойки, равно

$$\binom{a_2 + a_3 + \dots + a_n - 1}{a_2 - 1}.$$

в. Аналогичным образом тройки можно расставить $\binom{a_3 + a_4 + \dots + a_n - 1}{a_3 - 1}$ способами, четверки — $\binom{a_4 + a_5 + \dots + a_n - 1}{a_4 - 1}$ способами, ..., числа $n - 1$ соответственно $\binom{a_{n-1} + a_n - 1}{a_{n-1} - 1}$ способами.

г. Наконец, числа n можно расставить по оставшимся a_n местам лишь одним способом.

Таким образом, общее число способов, которыми можно расставить в соответствии с условиями задачи a_1 единиц, a_2 двоек, ..., a_n чисел n , равно

$$\prod_{k=1}^n \binom{a_k + a_{k+1} + \dots + a_n - 1}{a_k - 1} = \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)!}{\prod_{k=1}^n (a_k + a_{k+1} + \dots + a_n)(a_k - 1)!}.$$

Если вместо a_k чисел k ($k = 1, 2, \dots, n$) взять a_k различных членов, образующих k -й класс, то общее число способов расстановки следует умножить на $a_1!a_2! \dots a_n!$.

110. Решение задачи удобно свести к рассмотрению нескольких случаев.

Случай 1. Лишь один пассажир в вагоне не успел стереть с лица сажу. Он видит, что все остальные пассажиры смеются над кем-то, у кого лицо испачкано сажей, но, оглядев своих попутчиков, убеждается, что их лица чистые. Отсюда он заключает, что сажей испачкано его лицо, и приводит себя в порядок.

Случай 2. Несколько раньше в вагоне оставалось два пассажира с испачканными сажей лицами. Каждый из них думает, что остальные пассажиры смеются над его соседом, до тех пор пока не осознает, что если бы на его лице не было сажи, то другой пассажир рассуждал бы и действовал так, как в случае 1. Поскольку этого не происходит, пассажир заключает, что и его лицо испачкано сажей. Тот из двух пассажиров, кто мыслит быстрее, первым сотрет сажу со своего лица.

Случай 3. Еще раньше в вагоне в течение какого-то времени оставалось три пассажира с испачканными сажей лицами. Каждый из них, поразмыслив, понял, что если бы на его лице не было сажи, то в вагоне осталось бы лишь два пассажира с испачканными лицами и события развернулись бы так, как в случае 2. Поскольку этого не происходит, пассажир с наиболее быстрой реакцией заключает, что у него на лице сажа.

Случай k . Аналогично, если в течение некоторого времени в вагоне оставалось k пассажиров с испачканными сажей лицами, то каждый из них мог бы рассуждать следующим образом: «Если на моем лице не было бы сажи, то в вагоне осталось бы $k - 1$ пассажиров с испачканными лицами. Поскольку остальные пассажиры ведут себя не так, как следовало бы в случае $k - 1$, то, следовательно, на моем лице сажа». Придя к такому заключению, пассажир, который соображает быстрее других, достает платок и вытирает сажу с лица, после чего в вагоне остается $k - 1$ пассажиров с испачканными сажей лицами.

Таким образом, число испачканных пассажиров убывает от n до 1, а после того, как последний пассажир

сотрет сажу со своего лица (случай 1), обращается в 0, что и требовалось доказать.

111. Обозначим ряды, заключенные в скобках, соответственно через S_a , S_b , S_v , S_r . Пусть $u_n = n$ -й член ряда. Воспользуемся двумя известными разложениями:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots,$$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$a) (-1)^{n-1} 24u_n = \frac{1}{2n-1} - \frac{4}{2n} + \frac{6}{2n+1} - \frac{4}{2n+2} + \frac{1}{2n+3},$$

$$24S_a = -4\left(\frac{\pi}{4}\right) + 5 - 2 + \frac{1}{3},$$

$$\pi + 24S_a = \frac{10}{3};$$

$$б) (-1)^{n-1} 720u_n = \frac{1}{2n} - \frac{6}{2n+1} + \frac{15}{2n+2} - \frac{20}{2n+3} + \\ + \frac{15}{2n+4} - \frac{6}{2n+5} + \frac{1}{2n+6},$$

$$720S_b = -8\left(\frac{\pi}{4}\right) + 8 + \frac{1}{2} + \frac{14}{3} + \frac{14}{4} - \frac{6}{5} + \frac{1}{6},$$

$$\pi + 360S_b = \frac{63}{20} = 3,15;$$

$$в) (-1)^{n-1} 24u_n = \frac{1}{2n} - \frac{4}{2n+1} + \frac{6}{2n+2} - \frac{4}{2n+3} + \frac{1}{2n+4},$$

$$24S_v = \frac{5}{2} - \frac{4}{3} + \frac{1}{4} - 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots\right),$$

$$\ln 2 + 12S_v = \frac{17}{24};$$

$$г) (-1)^{n-1} 384u_n = \frac{1}{2n-1} - \frac{4}{2n+1} + \frac{6}{2n+3} - \\ - \frac{4}{2n+5} + \frac{1}{2n+7},$$

$$384S_r = 16\left(\frac{\pi}{4}\right) - 15 + \frac{11}{3} - 1 + \frac{1}{7},$$

$$\pi - 96S_r = \frac{64}{21}.$$

112. Пусть $2^b r$ — наибольшая степень двойки, содержащаяся в разложении числа a_r в произведение степе-

ней простых чисел. Тогда $a_r = 2^b r c$, где c — нечетное число. Поскольку среди целых чисел от 1 до $2n$ имеется n нечетных чисел, то среди $n+1$ чисел a_r найдутся по крайней мере два таких (например, a_i и a_j), у которых множители c совпадают. Очевидно, что одно из этих чисел является делителем другого.

113. Пусть α, β, γ — внутренние углы треугольника ABC , x, y, z — длины перпендикуляров OP, OQ, OR , опущенных из точки O на стороны BC, CA, AB треугольника ABC , и a, b, c — длины отрезков OA, OB, OC . Тогда

$$QR = \sqrt{y^2 + z^2 + 2yz \cos \alpha}, \quad a = \frac{QR}{\sin \alpha}$$

и

$$\begin{aligned} a + b + c &= \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \frac{\sqrt{y^2 + z^2 + 2yz \cos \alpha}}{\sin \alpha} = \\ &= \sum \frac{\sqrt{(y \sin \gamma + z \sin \beta)^2 + (y \cos \gamma - z \cos \beta)^2}}{\sin \alpha} \geq \\ &\geq \sum \frac{y \sin \gamma + z \sin \beta}{\sin \alpha} = \sum x \left(\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} + \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \right) \geq \\ &\geq 2(x + y + z), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

114. Как нетрудно проверить, унимодулярные аффинные преобразования $x' = x + ky + pk^2/2$, $y' = y + kp$ оставляют инвариантной параболу $y^2 = 2px + a$. Эти преобразования образуют однопараметрическую группу G и оставляют инвариантной любую параболу, принадлежащую однопараметрическому семейству $y^2 = 2px + a$ (a — параметр). В группе G содержится преобразование, переводящее любую точку заданной параболы из семейства $y^2 = 2px + a$ в любую другую точку той же параболы.

Пусть A и A' — две точки наружной параболы, B, C и B', C' — точки касания прямых, проведенных из точек A и A' , с внутренней параболой. Преобразование группы G , переводящее точку A в A' , переводит точку B в B' , а C — в C' . Поскольку определитель любого преобразования из группы G равен 1, то все преобразования из G сохраняют площадь.

115. Ясно, что сторона a треугольника ABC больше любого из отрезков AP , BQ , CR . Проведем $OX \parallel AB$, $OY \parallel AC$, $XK \parallel OR$, $YL \parallel OQ$ (точки X и Y лежат на стороне BC , точка K — на стороне AB и точка L — на стороне CA). Рассматривая пары подобных треугольников

$$OXY, ABC; BXK, BCR; CYL, CBQ,$$

получаем

$$XY > OP; BX > XK = OR; YC > YL = OQ.$$

Следовательно,

$$a = BX + XY + YC > OR + OP + OQ,$$

что и требовалось доказать.

116. Поскольку матрица вещественна и симметрична, то все корни $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ее характеристического уравнения $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ вещественны. Требование равенства всех корней приводит к соотношению $\sum (\alpha_i - \alpha_j)^2 = 0$, или $(n-1)a_1^2 - 2na_2 = 0$. Выражая a_1 и a_2 через элементы исходной матрицы, получаем

$$(n-1)(\sum a_{ii})^2 - 2n \sum_{i < j} (a_{ii}a_{jj} - a_{ij}^2) = 0,$$

$$(n-1) \sum a_{ii}^2 - 2 \sum_{i < j} a_{ii}a_{jj} + 2n \sum_{i < j} a_{ij}^2 = 0,$$

$$\sum (a_{ii} - a_{jj})^2 + 2n \sum_{i < j} a_{ij}^2 = 0.$$

Таким образом, все корни характеристического уравнения вещественной симметрической матрицы равны в том и только в том случае, если $a_{ij} = 0$, $i \neq j$ и $a_{ii} = a_{jj}$, то есть если матрица скалярна: $A = aE$, где E — единичная матрица.

117. Пусть $A_1^0, A_2^0, \dots, A_\sigma^0$ — вершины данного простого многоугольника P^0 . Прделав над P^0 n раз операцию, описанную в условии задачи, переведем многоугольник P^0 в многоугольник P^n . Вершины A_v^n многоугольника P^n являются образами вершин A_v^0 многоугольника P^0 ($v = 1, 2, \dots, \sigma$). Пусть C^n — наименьший выпуклый многоугольник, содержащий многоугольник P^n . Очевидно, что в последовательности $P^0, C^0, P^1, C^1, P^2, C^2, \dots$ каждый последующий многоугольник содержит предыдущий. Периметры всех многоугольников P^n

одинаковы, поэтому существует круг, содержащий все многоугольники P^n . Поэтому последовательность образов одной и той же вершины A_v^n ($n=0, 1, \dots$) многоугольника P^0 обладает по крайней мере одной точкой накопления.

Если B — любая точка, лежащая на периметре или внутри многоугольника P^m , то при $n \geq m$ по построению $\rho(B, A_v^n) \leq \rho(B, A_v^{n+1})$, где $\rho(C, D)$ — расстояние между точками C и D . В частности, $\rho(A_v^m, A_v^n) \leq \rho(A_v^m, A_v^{n+1})$ при $n \geq m$. Отсюда вытекает, что последовательность вершин A_v^n ($n=0, 1, 2, \dots$) может иметь лишь одну точку накопления и, таким образом, сходится: $A_v^n \rightarrow A_v$ при $n \rightarrow \infty$.

Многоугольник $P = (\overline{A_1 A_2}, \overline{A_2 A_3}, \dots, \overline{A_{\sigma-1} A_\sigma}, \overline{A_\sigma A_1})$ — предел последовательности многоугольников P^n — является также и пределом последовательности выпуклых многоугольников C^n . Следовательно, многоугольник P выпуклый.

Назовем вершину p некоторого многоугольника его *точкой выпуклости*, если можно провести прямую L так, что p будет лежать по одну ее сторону, а остальные вершины многоугольника — по другую. Для выпуклого многоугольника p будет точкой выпуклости в том и только в том случае, если эта и две соседние с ней вершины не лежат на одной прямой. При выполнении над многоугольником процедуры, описанной в условии задачи, точки выпуклости остаются на месте.

Пусть $c_v(r)$ — внутренность круга радиуса r с центром в вершине A_v .

Пусть A_μ — точка выпуклости многоугольника P . Ясно, что можно найти прямую L и положительное число ρ , такие, что внутренность круга $c_\mu(\rho)$ будет целиком лежать по одну сторону от прямой L , а все остальные $c_\lambda(\rho)$ ($\lambda \neq \mu$) — по другую. При $n \geq n_0(\mu)$ вершина A_v^n при $v = 1, 2, \dots, \sigma$ будет принадлежать $c_v(\rho)$. Таким образом, прямая L отделяет вершину A_μ^n от остальных вершин A_λ^n ($\lambda \neq \mu$). Следовательно, A_μ^n — точка выпуклого многоугольника P^n и в силу этого должна быть инвариантной: $A_\mu^{n+1} = A_\mu^n$. Отсюда мы заключаем, что при $n \geq n_0(\mu)$ вершины A_μ^n и A_μ^n совпадают, поэтому при $n \geq n_0(\mu)$ можно положить $A_\mu^n = A_\mu$.

Пусть $A_{\mu_1}, A_{\mu_2}, \dots, A_{\mu_s}$ — полный набор точек выпуклости многоугольника P . Тогда $A_{\mu_r}^N = A_{\mu_r}$ ($r = 1, 2, \dots, s$), где $N = \max(n_0(\mu_1), n_0(\mu_2), \dots, n_0(\mu_s))$. Отсюда следует, что $C^N = P$ и $P^n = P$ при $n \geq N$. Но это и означает, что после конечного числа шагов нам удалось построить выпуклый многоугольник.

Если бы при построении многоугольника P' мы отражали все участки, дополняющие P до его выпуклой обо-

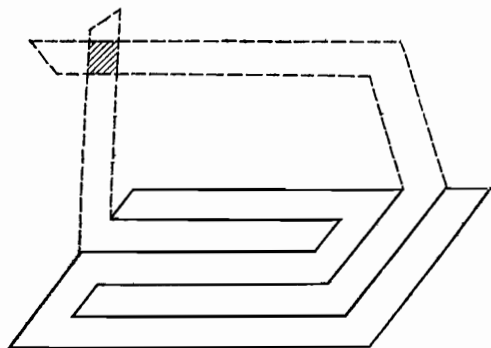


Рис. 20.

лочки, то, как видно из рис. 20, P' мог бы оказаться не простым многоугольником.

118. Доказательство удобно разбить на несколько этапов.

а. Для любого положительного целого числа k и любого $n > 1$ все биномиальные коэффициенты

$$\binom{1 + \frac{1}{n}}{2k}$$

положительны.

б. Если $a > b > 0$, $y > 0$, то

$$ae^{-by} - be^{-ay} \leq a - b,$$

причем равенство достигается в том и только в том случае, если либо $a = b = 0$, либо $y = 0$.

Доказательство. При сделанных предположениях справедливо неравенство $(1 - e^{-ay})/ay < (1 - e^{-by})/by$, поскольку $(1 - e^{-u})/u$ — убывающая функция от u . Поэтому $b - be^{-ay} < a - e^{-by}$, что и требовалось доказать.

в. Пусть

$$f(t, n) = \frac{(\operatorname{sh} t)^{1+\frac{1}{n}} + (\operatorname{ch} t)^{1+\frac{1}{n}}}{[\operatorname{ch}(n+1)t]^{\frac{1}{n}}}.$$

Тогда

$$f\left(\frac{1}{2} \ln \operatorname{cth} t, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{[f(t, n)]^n}, \quad 0 < t < \infty.$$

г. Разложим в ряд:

$$\begin{aligned} [\operatorname{ch}(n+1)t]^{\frac{1}{n}} \cdot 2^{\frac{1}{n}} e^{-(1+\frac{1}{n})t} &= (1 + e^{-2t(n+1)})^{\frac{1}{n}} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{n}}{2k-1} e^{-2t(n+1)(2k-1)} + \binom{\frac{1}{n}}{2k} e^{-2t(n+1)2k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1+\frac{1}{n}}{2k} e^{-2t(2k)} \left[\frac{2kn}{n+1} e^{-2t(2kn-n-1)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(2kn-n-1)}{n+1} e^{-2t(2kn)} \right]. \end{aligned}$$

Используя неравенство, доказанное в пункте «б», при $a = 2kn$, $b = 2kn - n - 1$, $y = 2t$, получаем, что при $k > 0$, $t > 0$, $n > 1$ выражение, стоящее в квадратных скобках, меньше единицы, а при $k = 0$ — равно единице. Следовательно,

$$\begin{aligned} [\operatorname{ch}(n+1)t]^{\frac{1}{n}} \cdot 2^{\frac{1}{n}} \cdot e^{-(1+\frac{1}{n})t} &< \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1+\frac{1}{n}}{2k} e^{-2t(2k)} = \\ &= \frac{1}{2} (1 - e^{-2t})^{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{2} (1 + e^{-2t})^{1+\frac{1}{n}}; \\ [\operatorname{ch}(n+1)t]^{\frac{1}{n}} &< (\operatorname{sh} t)^{1+\frac{1}{n}} + (\operatorname{ch} t)^{1+\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

при $t > 0$, $n > 1$. Это означает, что $f(t, n) > 1$ при $t > 0$, $n > 1$. Из последнего соотношения, приведенного в пункте «в», следует, что $f(x, 1/n) < 1$ при $x = [\ln(\operatorname{cth} t)]/2 > 0$, $n > 1$.

д. Пусть

$$\varphi(x, n) = f\left(nx, \frac{1}{n}\right) = \frac{(\operatorname{sh} nx)^{n+1} + (\operatorname{ch} nx)^{n+1}}{[\operatorname{ch}(n+1)x]^n}.$$

Тогда, используя неравенства, доказанные в пункте «г», получаем

$$\varphi(x, n) < 1 \quad \text{при} \quad n > 1, x > 0;$$

$$\varphi(x, n) > 1 \quad \text{при} \quad 0 < n < 1, x > 0;$$

$$\varphi(0, n) = \varphi(x, 0) = \varphi(x, 1) = 1.$$

Тем самым неравенство, приведенное в условиях задачи, доказано.

Интересно отметить, что подстановкой $z = e^{-2x}$ при $0 < z < 1, n > 1$ его можно преобразовать к алгебраической форме

$$(1 - z^n)^{n+1} + (1 + z^n)^{n+1} < 2(1 + z^{n+1})^n;$$

при $0 < n < 1$ возникает обратное неравенство, а при $n = 0, 1$ или $z = 0, 1$ неравенство переходит в равенство.

119. Пользуясь неравенствами

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2 e^{-t}}{n}, \quad 0 \leq t \leq n, \quad (1)$$

получаем *

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x} \ln^2 x \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln^2 x \, dx = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{\binom{n}{i}}{n^i} \int_0^n x^i \ln^2 x \, dx \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\ln^2 n \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{\binom{n}{i}}{i+1} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \ln n \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{\binom{n}{i}}{(i+1)^2} + 2 \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{\binom{n}{i}}{(i+1)^3} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \left[\ln^2 n - 2 \ln n \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} + 2 \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \frac{1}{j} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \left[\ln^2 n - 2 \ln n \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} + \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} \right)^2 + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2} \right]. \quad (2) \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \ln^2 x \, dx = C^2 + \frac{\pi^2}{6},$$

где $C = 0,577 \dots$ — постоянная Эйлера (III. 12).

120. По теореме Вильсона (III. 6), если p — простое число, то

$$(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}. \quad (1)$$

Нетрудно видеть, что

$$(p-1)(p-2) \dots (p-r) \equiv (-1)^r r! \pmod{p}. \quad (2)$$

Пусть r — любое натуральное число меньше p и такое что

$$(-1)^r r! \equiv 1 \pmod{p}. \quad (3)$$

Тогда из сравнений (1), (2), (3) мы получаем

$$(p-r-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}. \quad (4)$$

Верно и обратное: если выполняется сравнение (4), то выполняется и сравнение (3).

Обращаясь к сравнениям, приведенным в условиях задачи, нетрудно проверить, что $(-1)^7 7! \equiv 1 \pmod{71}$, а поскольку $8 \cdot 9 \equiv 1 \pmod{71}$, то $(-1)^9 9! \equiv 1 \pmod{71}$. Тем самым оба сравнения, приведенные в условиях задачи, доказаны.

Как показывают аналогичные рассуждения, справедливо также следующее сравнение:

$$\left\{ \left[\frac{p-1}{2} \right]! \right\}^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}.$$

Если p — простое число вида $4k+3$, то

$$\left[\frac{p-1}{2} \right]! \equiv (-1)^m \pmod{p},$$

где m — число квадратичных невычетов, меньших числа $p/2$ (сравни также задачи 63 и 91).

121. Докажем, что существует бесконечно много треугольников, у которых один угол вдвое больше другого, а длины сторон выражаются целыми числами с наиболь-

шим общим делителем (всех трех чисел), равным 1, но не существует треугольников, у которых один угол вдвое больше другого, а длины сторон выражаются попарно взаимно простыми числами.

Пусть A, B и C — углы, а a, b, c — стороны треугольника, и $B = 2A$. Тогда

$$a : b : c = \sin A : \sin 2A : \sin 3A = \\ = 1 : 2 \cos A : (4 \cos^2 A - 1), \quad 1 > \cos A > \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Поскольку $\cos A = \frac{b}{2a}$ рационален, положим $\cos A = \frac{p}{q}$, где p и q — взаимно простые числа, причем $2q > 2p > q$. Тогда $a : b : c = q^2 : 2pq : (4p^2 - q^2)$. Три целых числа, стоящие в правой части последнего равенства, при нечетном q не имеют других общих делителей, кроме 1, так что мы можем положить

$$a = q^2, \quad b = 2pq, \quad c = 4p^2 - q^2. \quad (2)$$

Если q — четное число, взаимно простое с p , то, положив $q = 2r$, получим

$$a = r^2, \quad b = pr, \quad c = p^2 - r^2; \quad 2r > p > r > 1, \\ \cos A = \frac{p}{2r}. \quad (3)$$

Эти соотношения выражают необходимое условие того, что $B = 2A$ и наибольший общий делитель чисел a, b, c , соответствующих длинам сторон треугольника, равен 1. Два треугольника, задаваемые при помощи (3) числами r, p и r', p' , совпадают в том и только в том случае, если $r = r', p = p'$. Таким образом, соотношения (3) позволяют получить все треугольники рассматриваемого типа без повторений. При данном r существует $\varphi(r)$ различных треугольников, где $\varphi(r)$ — функция Эйлера (III. 8). Аналогично обстоит дело и с соотношением (2).

122. Подстановкой $x = e^u$ приведем исходное уравнение к виду

$$y = \left(\frac{dy}{du} - 1 \right) = e^u. \quad (1)$$

Решения уравнения (1) будем искать в виде ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\ln x)^n. \quad (2)$$

Подставляя ряд (2) в уравнение (1), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n u^{n-1} - 1 \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях u в правой и левой частях уравнения, находим

$$(n+1) \sum_{i=0}^{n/2} a_i a_{n+1-i} - a_n = \frac{1}{n} \quad \text{при четном } n, \quad (3)$$

$$(n+1) \sum_{i=0}^{(n-1)/2} a_i a_{n+1-i} - a_n + \frac{n+1}{2} a_{(n+1)/2}^2 = \frac{1}{n!}$$

при нечетном n .

Задав a_0 , можно последовательно вычислить коэффициенты a_n . Общее выражение для a_n через a_0 получить довольно трудно, и мы ограничимся тем, что приведем выражения для первых трех коэффициентов:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + \frac{1}{a_0} = 1 + k, & a_2 &= k(1 - k - k^2)/2!, \\ a_3 &= [k - k^2(1 - k - k^2)(2 + 3k)]/3!, & a_0 &\neq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнение (1) можно записать в виде

$$\frac{dy}{du} = 1 + \frac{e^u}{y}.$$

Правая часть этого уравнения аналитична по u и y в окрестности $u=0$ и $y=a_0 \neq 0$. Следовательно, существует интеграл $y(u)$, аналитический в окрестности $u=0$ и обращающийся при $u=0$ в a_0 . Вычислить его можно приведенным выше методом.

123. Пусть прямая A_2P_2 пересекает A_1A_3 треугольника $A_1A_2A_3$ в точке B . Применив теорему Менелая* сначала к треугольнику A_1A_2D и трансверсали $D_3P_2A_3$, а затем к треугольнику $A_1D_1A_3$ и трансверсали A_2P_2B , получим соотношения $A_1D_3 \cdot A_2A_3 \cdot D_1P_2 = D_3A_2 \cdot D_1A_3 \cdot P_2A_1$ и $A_1P_2 \cdot A_2D_1 \cdot A_3B = P_2D_1 \cdot A_2A_3 \cdot BA_1$, откуда $A_1B/BA_3 = = p_1p_2/q_1q_3$. Четверки точек $A_1P_2P_3D_1$ и $A_1BD_2A_3$ находятся в перспективном соответствии с центром

в точке A_2 . Следовательно, их двойные отношения равны (III. 2):

$$\frac{A_1 P_2 \cdot P_3 D_1}{P_2 D_1 \cdot A_1 P_3} = \frac{A_1 B \cdot D_2 A_3}{B A_3 \cdot A_1 D_2} = \frac{p_1 p_2 p_3}{q_1 q_2 q_3}.$$

Нетрудно видеть, что тогда

$$\frac{P_3 P_2}{P_2 A_1} / \frac{P_3 D_1}{D_1 A_1} = 1 - \frac{q_1 q_2 q_3}{p_1 p_2 p_3}.$$

Если две точки P совпадают, то отношение $q_1 q_2 q_3 / p_1 p_2 p_3$ обращается в единицу и мы получаем соотношение, известное под названием теоремы Чевы (III. 1).

124. Докажем несколько более общее утверждение. Вместо исходного определителя, приведенного в условии задачи, рассмотрим определитель, у которого натуральные числа, стоящие в i -й строке, возводятся в степень $l + i - 2$, где l — любое натуральное число, а $i = 2, 3, \dots, n$. Разлагая его по первой строке и вынося из каждого столбца общий множитель, получаем

$$\sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \frac{(n!)^l}{r^l} V(1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, n),$$

где V — определитель Вандермонда. Как известно, $V(1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, n) =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & r-1 & r+1 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2^{n-2} & \dots & (r-1)^{n-2} & (r+1)^{n-2} & \dots & n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(n-1)! (n-2)! \dots 2! 1!}{(r-1)! (n-r)!}.$$

Таким образом, рассматриваемый нами определитель приводится к виду

$$1! 2! \dots (n-1)! (n!)^{l-1} \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \binom{n}{r} \frac{1}{r^{l-1}}.$$

При $l = 2$ получаем соотношение, которое требовалось доказать.

125. Пусть $f(n)$ — определитель, приведенный в условиях задачи, в котором число $2k + 1$ заменено числом n , $f(0) = 1$. Тогда минор, получающийся при вычеркивании s -го элемента первой строки, равен $f(n - s)$, в силу чего при $n > 0$ миноры удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$f(n) - \frac{1}{2!} f(n-1) + \frac{1}{3!} f(n-2) - \dots + \frac{(-1)^n}{(n+1)!} f(0) = 0.$$

Нетрудно видеть, что коэффициент при $f(n - s)$ в этом соотношении совпадает с коэффициентом при x^s в разложении функции $(1 - e^{-x})/x$ в степенной ряд. Поскольку разложение этой функции содержит ненулевой свободный член (равный 1), функция $x/(1 - e^{-x})$ также допускает разложение в степенной ряд (сходящийся при $x < 2\pi$) вида

$$\begin{aligned} \frac{x}{1 - e^{-x}} = F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \\ &= 1 + \frac{1}{2} x + \frac{B_1}{2!} x^2 - \frac{B_2}{4!} x^4 + \frac{B_3}{6!} x^6 - \dots, \end{aligned}$$

где B_n — числа Бернулли ($F(x)$ — так называемая производящая функция чисел Бернулли). Коэффициенты a_n находим из соотношения $F(x) (1 - e^{-x})/x = 1$. Очевидно, что $a_0 = 1$, $a_1 = 1/2$ и коэффициенты a_n удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению, что и $f(n)$. Поскольку это соотношение определяет входящие в него величины единственным образом, то $f(n) = a_n$. Кроме того, поскольку

$$F(x) - \frac{x}{2} = \frac{x}{2} \cdot \frac{(1 + e^{-x})}{(1 - e^{-x})} = \frac{x}{2} \operatorname{cth} \frac{x}{2}$$

— четная функция, то коэффициенты a_n при всех нечетных степенях x , кроме первой, равны нулю. Следовательно, $f(2k + 1) = 0$, где k — любое натуральное число. Тем самым утверждение задачи доказано. Заметим также, что $f(2k) = (-1)^{k-1} B_k / (2k)!$.

126. Для того чтобы составить прямоугольник длиной $n - k$ единичной ширины, $n - k$ единичных квадратов вдоль стороны большого квадрата можно выбрать $k + 1$ способами. Следовательно, число прямоугольников

шириной $n - k$, которая измеряется в направлении с «запада на восток», равно $(k + 1) \cdot [(k + 1) + k + (k - 1) + \dots + 2 + 1] = (k + 1)(k + 1)(k + 2)/2$, причем $(k + 1)^2$ из них — квадраты. Таким образом, общее число прямоугольников шириной $n - k$ составляет $2(k + 1)(k + 1) \times (k + 2)/2 - (k + 1)^2 = (k + 1)^3$.

Чтобы вывести формулу для суммы кубов n первых натуральных чисел, заметим следующее. Большой квадрат разделен на n^2 единичных квадратов $(n + 1)$ прямыми, проходящими с «запада на восток», и $n + 1$ прямыми, проходящими с «юга на север». В каждом направлении можно выбрать $\binom{n+1}{2}$ пар линий. Следовательно, общее число прямоугольников, образованных пересекающимися парами линий, равно $\binom{n+1}{2}^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$. По доказанному выше, это число совпадает с суммой кубов n первых натуральных чисел.

127. Как известно, числа Фибоначчи удовлетворяют рекуррентному соотношению $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$, где $v_1 = v_2 = 1$. Докажем, что

$$\operatorname{arccctg} v_2 - \operatorname{arccctg} v_3 - \operatorname{arccctg} v_5 - \dots \\ \dots - \operatorname{arccctg} v_{2n+1} = \operatorname{arccctg} v_{2n+2}. \quad (1)$$

Воспользуемся формулой для разности арккотангенсов и рекуррентным соотношением для чисел Фибоначчи:

$$\operatorname{arccctg} v_{2n} - \operatorname{arccctg} v_{2n+1} = \\ = \operatorname{arccctg} \frac{v_{2n}v_{2n+1} + 1}{v_{2n+1} - v_{2n}} = \operatorname{arccctg} \frac{v_{2n}v_{2n+1} + 1}{v_{2n-1}}.$$

Используя при $m = 2n - 1$ легко доказываемое соотношение $v_{m+1}v_{m+2} - v_mv_{m+3} = (-1)^m$, получаем

$$\operatorname{arccctg} v_{2n} - \operatorname{arccctg} v_{2n+1} = \operatorname{arccctg} v_{2n+2}. \quad (2)$$

Суммируя члены соотношения (2) при $n = 1, 2, \dots, n$, приходим к соотношению (1). Итак, соотношение (1) доказано.

Поскольку при $n \rightarrow \infty$ правая часть соотношения (1) стремится к нулю, то

$$\operatorname{arccctg} v_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arccctg} v_{2n+1}. \quad (3)$$

Полагая $v_{2n+1} = u_{n+1}$, $v_2 = v_1 = u_1 = 1$, преобразуем полученный результат к виду

$$\operatorname{arccctg} u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arccctg} u_{n+1}, \quad (4)$$

где, как нетрудно проверить, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$, $n \geq 2$, что и требовалось доказать. (См. также задачи 29 и 52.)

128. Функция $y = f(x)$ является единственным решением линейного дифференциального уравнения

$$y'' - ay' - by = 0, \quad (1)$$

удовлетворяющим начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = u_1$.

Как нетрудно проверить, функция $y = -e^{ax}f(-x)$ также является решением уравнения (1) и удовлетворяет тем же начальным условиям. В силу единственности решения

$$f(x) \equiv -e^{ax}f(-x),$$

что и требовалось доказать.

129. Уравнение нормали к гиперболе $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, проходящей через точку $P(x_1, y_1)$, имеет вид

$$y = \frac{y_1 [(a^2 + b^2)x_1 - a^2x]}{b^2x_1}. \quad (1)$$

Для того чтобы (1) было уравнением касательной к сопряженной гиперболе, квадратное уравнение, получающееся при подстановке (1) в уравнение сопряженной гиперболы, должно иметь равные корни. Условие равенства корней приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} a^6y_1^2 + (a^2 + b^2)^2 x_1^2 y_1^2 - b^6 x_1^2 &= 0, \\ b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2 - a^2 b^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Решив систему уравнений (2), найдем координаты точки P :

$$x_1 = \pm a \sqrt{\frac{\sqrt{a^4 + b^4} + b^2}{a^2 + b^2}}, \quad y_1 = \pm b \sqrt{\frac{\sqrt{a^4 + b^4} - a^2}{a^2 + b^2}}, \quad (3)$$

где внутренний квадратный корень выбран со знаком плюс для того, чтобы координаты x_1 и y_1 были

вещественными. Координаты x_2, y_2 точки Q касания прямой (1) с сопряженной гиперболой равны

$$x_2 = -\frac{a^4}{x_1(a^2 + b^2)}, \quad y^2 = \frac{b^4}{y_1(a^2 + b^2)}. \quad (4)$$

Нормаль к сопряженной гиперболе, проходящая через точку Q , имеет уравнение

$$\frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}, \quad (5)$$

совпадающее с уравнением касательной к первой гиперболе, проходящей через точку $P'(-x_1, -y_1)$.

Из соображений симметрии ясно, что нормаль к гиперболе в точке $P'(-x_1, -y_1)$ совпадает с касательной к сопряженной гиперболе, проведенной в точке $Q'(-x_2, -y_2)$, а нормаль к сопряженной гиперболе, проходящая через точку $Q'(-x_2, -y_2)$, совпадает с касательной к исходной гиперболе в точке $P(x_1, y_1)$. Существуют два четырехугольника типа $PQP'Q'$. Один соответствует одинаковым знакам перед внешними квадратными корнями в соотношениях (3), другой — разным знакам.

130. I. Если $b = a$, то решение очевидно. В противном случае условимся считать b большим из чисел ($b > a$). Тогда $b = ra$, где $r > 1$ и $a^{r-1} = r$, или, что то же, $a = r^{1/(r-1)}$. Пусть $1/(r-1) = u/v$, где u и v — взаимно простые числа. Поскольку a и r рациональны, число $r = (v+u)/u$ должно быть v -й степенью рационального числа. Но тогда числа u и $v+u$ как взаимно простые также равны v -м степеням целых чисел. Но разность двух v -х степеней с различными основаниями больше v , если только v не равно 1. Следовательно, $v = 1$ и $1/(r-1) = u$ — целое число. Таким образом, $a = [(u+1)/u]^u$ и $b = [(u+1)/u]^{u+1}$.

II. Заметим, что соотношение $a^{(b^c)} = (a^b)^c$ выполняется, если $a = 1$, b и c — произвольные числа или $c = 1$, a и b — произвольные числа. Если $a \neq 1$, $c \neq 1$, то должно выполняться соотношение $b^c = bc$, или $b^{c-1} = c$. Как показывают рассуждения, аналогичные приведенным выше, $c = (u+1)/u$, $b = [(u+1)/u]^u$, где u — любое целое число, а число a остается произвольным.

III. Не ограничивая общности, предположим, что $a \geq b$. Тогда $a = rb$, где $r \geq 1$, и соотношение $(a+b)^c = a^c + b^c$ сводится к соотношению $(1+r)^c = 1 + r^c$.

Предположим на время, что параметр r изменяется непрерывно. Пусть $f_1(r) = (1+r)^c$, $f_2(r) = 1+r^c$. Тогда при любых $r > 0$ производные $f_1'(r)$ и $f_2'(r)$ связаны одним из трех соотношений: $f_1'(r) > f_2'(r)$ при $c > 1$, $f_1'(r) = f_2'(r)$ при $c = 1$ и $f_1'(r) < f_2'(r)$ при $c < 1$. Но $f_1(0) = f_2(0)$. Следовательно, $f_1(r) > f_2(r)$ при $c > 1$, $f_1(r) = f_2(r)$ при $c = 1$ и $f_1(r) < f_2(r)$ при $c < 1$. Таким образом, полное решение соответствует $c = 1$ и произвольным a и b .

Рассмотрим теперь соотношение $c^{a+b} = c^a + c^b$. Не ограничивая общности, предположим, что $a \geq b$. Тогда $a = br$ ($r \geq 1$). Пусть $c^b = v/u$, $r = p/q$, где p, q, u, v — положительные целые числа, а каждая из дробей v/u и p/q несократима и (поскольку $r \geq 1$) $p \geq q$. Соотношение $c^{a+b} = c^a + c^b$ в принятых обозначениях приводится к виду $v^{p+q} (v-u) = u^p$. Если $v = 1$, то $(1-u)^q = u^p$. Поскольку $p \geq 1, q \geq 1$, то каждый простой делитель числа u должен быть делителем числа $1-u$ и, следовательно, делителем единицы. Отсюда мы заключаем, что $u = 1$, но $u = 1$ не удовлетворяет соотношению $(1-u)^q = u^p$. Полученное противоречие означает, что $v \neq 1$. Поскольку v не является делителем числа u^p , то $p-q = 0$. Но тогда $b = a$ и $v-u = u$, или $u = 1, v = 2$. Таким образом, в рассматриваемом случае полное решение определяется соотношениями $a = b = 1/n, c = 2^n$, где n — любое целое число.

Рассмотрим теперь, как устроены множества элементов, на которых одно из свойств нового умножения I—III удовлетворяется при любом выборе его элементов.

Рассмотрим сначала множество элементов, на котором новое умножение коммутативно (обладает свойством I). Такое множество содержит либо один элемент, который произволен, либо два указанных выше элемента.

Переходим к множеству элементов, на котором новое умножение ассоциативно (обладает свойством II). Прежде всего обратимся к случаю, когда множество содержит единичный элемент и элемент $a \neq 1$. Из соотношения $[[a, 1], a] = [a, [a, 1]]$ следует, что $a^a = a$, откуда $a = 1$. Таким образом, если множество содержит единицу, то оно не содержит других элементов. Предположим, что ни один элемент множества не равен единице. Тогда из соотношения $[a, [a, a]] = [[a, a], a]$ следует,

что $a^a = a^2$, откуда $a = 2$. Таким образом, множество элементов, на котором новое умножение ассоциативно, содержит лишь один элемент, равный либо 1, либо 2.

Наконец, рассмотрим множество элементов, на котором новое умножение дистрибутивно (обладает свойством III). В случае дистрибутивности справа $(a + a)^a = 2a^a$, или $2^a = 2$. Следовательно, $a = 1$, и единица — единственный элемент, принадлежащий множеству. В случае дистрибутивности слева $a^{(a+a)} = 2a^a$, или $a^a = 2$. Поскольку для рациональных a такое соотношение не выполняется, рассматриваемое множество пусто.

131. Умножив обе части функционального уравнения

$$e^{iks} f(t) = f(t+s) - f(s)$$

на e^{ikt} , получим

$$e^{ik(t+s)} f(t) = e^{ikt} f(t+s) - e^{ikt} f(s),$$

а переставив в исходном уравнении t и s , придем к функциональному уравнению $e^{ikt} f(s) = f(t+s) - f(t)$.

Из двух последних уравнений находим

$$e^{ik(t+s)} f(t) = e^{ikt} f(t+s) - f(t+s) + f(t),$$

или

$$[e^{ik(t+s)} - 1] f(t) = [e^{ikt} - 1] f(t+s),$$

откуда

$$\frac{f(t)}{e^{ikt} - 1} = \frac{f(t+s)}{e^{ik(t+s)} - 1}.$$

Полученное соотношение является тождеством, а поскольку его левая часть зависит только от t , а правая от $t+s$, то каждая из них равна константе. Таким образом, $f(t) = C(e^{ikt} - 1)/ik$, что и требовалось доказать.

132. Докажем сначала неравенство (1). Разобьем $f(x)$ на два слагаемых:

$$f(x) = \sum_{n \leq [\ln x]} + \sum_{n > [\ln x]} = S_1 + S_2.$$

Неравенство (1) следует из неравенств

$$S_1 < \sum_{n \leq [\ln x]} \frac{1}{n} < 2 \ln \ln x,$$

$$S_2 < \sum_{n > [\ln x]} \frac{x}{n4^n} < x \sum_{n > [\ln x]} \frac{1}{4^n} < c_3.$$

Докажем теперь неравенство (2). Пусть $x_v = (4^v - 1)2\pi/3$. Тогда $x_v/2\pi$ — целое число, и при $\mu \leq v$

$$\frac{4^v - 1}{3} = 1 + 4 + \dots + 4^{v-1} \equiv 1 + 4 + \dots + 4^{\mu-1} \equiv \frac{4^\mu - 1}{3} \pmod{4^\mu}, \quad (a)$$

$$f(x_v) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu} \sin \frac{4^\mu - 1}{3} \frac{2\pi}{4^\mu} = \sum_{\mu=1}^v + \sum_{\mu=v+1}^{\infty}.$$

Используя соотношение (a), получаем оценку для первой суммы

$$\left| \sum_{\mu=1}^v \frac{1}{\mu} \sin \frac{4^\mu - 1}{3} \frac{2\pi}{4^\mu} \right| = \left| \sum_{\mu=1}^v \frac{1}{\mu} \sin \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3 \cdot 4^\mu} \right) \right| > c_4 \ln v.$$

Вторая сумма удовлетворяет неравенству

$$\left| \sum_{\mu=v+1}^{\infty} \frac{1}{\mu} \sin \frac{4^\mu - 1}{3} \frac{2\pi}{4^\mu} \right| < \frac{4^v - 1}{3} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4^{v+1}} \cdot \frac{4}{3} < \frac{2\pi}{9}.$$

Объединяя полученные неравенства и учитывая, что $v \sim \ln x_v / \ln 4$ при $v \rightarrow \infty$, приходим к неравенству (2).

133*. Пусть G — область на комплексной плоскости, не содержащая заданных точек $a_1, \dots, a_n$ и

$$f(z) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k - z}{|a_k - z|}.$$

Функции $|f(z)|$ и $\varphi(z) = |f(z)|^2$ достигают максимума одновременно, поэтому достаточно доказать, что $\varphi(z)$ не может иметь максимума во внутренней точке области G . Пусть z_0 — внутренняя точка. Без ограничения общности мы можем считать, что $z_0 = 0$ (в противном случае можно произвести сдвиг всей плоскости на вектор $-z_0$).

Начнем с простого замечания: если $f(0) = 0$, то 0 не является точкой максимума. В самом деле, если все точки a_k и 0 лежат на одной прямой, то для любой точки z , близкой к 0 и не лежащей на этой прямой, $f(z) \neq 0$, так что $\varphi(0) = 0 < \varphi(z) = |f(z)|^2$. В альтернативном случае без ограничения общности мы можем считать, что 0 и

точки $a_1, \dots, a_l$ лежат на одной прямой, а остальные a_k находятся вне ее. Обозначим $e_k = a_k/|a_k|$. Если мы из точки 0 сместимся в точку εa_1 , где $\varepsilon > 0$ мало, то $(a_k - \varepsilon a_1)/|a_k - \varepsilon a_1| = e_k$ при $k \geq l$, а у всех остальных единичных векторов $(a_k - \varepsilon a_1)/|a_k - \varepsilon a_1|$ проекция на l_1 станет меньше. Поэтому $f(\varepsilon a_1) \neq 0$ и $|f(\varepsilon a_1)| > |f(0)|$, так что 0 не точка максимума. Если мы из точки 0 сместимся в точку εa_l , где $\varepsilon > 0$ мало, то $(a_k - \varepsilon a_l)/|a_k - \varepsilon a_l| = e_k$ при $k \leq l$, а у всех остальных единичных векторов $(a_k - \varepsilon a_l)/|a_k - \varepsilon a_l|$ проекция на l_1 станет меньше.

Для произвольных комплексных a и h

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{a - th}{|a - th|} \right) \Big|_{t=0} = \frac{-h|a| + a \frac{a\bar{h} + \bar{a}h}{2|a|}}{|a|^2} = \frac{a^2\bar{h} - a\bar{a}h}{2|a|^3}.$$

Вычислим теперь

$$\begin{aligned} \partial_h \Phi(0) &= \frac{d}{dt} \Phi(th) \Big|_{t=0} = \partial_h f(0) \cdot \bar{f}(0) + f(0) \overline{\partial_h f(0)} = \\ &= 2 \operatorname{Re} [\partial_h f(0) \cdot \bar{f}(0)] = 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \frac{a_k - th}{|a_k - th|} \Big|_{t=0} \cdot \bar{f}(0) \right] = \\ &= \sum_{k=1}^n 2 \operatorname{Re} \frac{a_k^2 \bar{h} \bar{f}(0) - a_k \bar{a}_k h \bar{f}(0)}{2|a_k|^3} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2|a_k|^3} \{ a_k^2 \bar{h} \bar{f}(0) + \\ &+ \bar{a}_k^2 h f(0) - a_k \bar{a}_k h \bar{f}(0) - \bar{a}_k a_k \bar{h} f(0) \} = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2|a_k|^3} (a_k \bar{h} - \bar{a}_k h) (a_k \bar{f}(0) - \bar{a}_k f(0)) = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{|a_k|^3} \operatorname{Im} (a_k \bar{h}) \operatorname{Im} (a_k \bar{f}(0)). \end{aligned}$$

Полагая $h = f(0)$, получаем

$$\partial_h \Phi(0) = \frac{d}{dt} \Phi(th) \Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^n \frac{2}{|a_k|^3} (\operatorname{Im} a_k \bar{f}(0))^2 \geq 0.$$

Если $\partial_h \Phi(0) > 0$, то при достаточно малых $t > 0$ точка $th \in G$ и в этой точке $\Phi(th) > \Phi(0)$. Следовательно, 0 не является точкой максимума. Если же $\partial_h \Phi(0) = 0$, то

Im $a_k f(0) = 0$ для всех k , а это означает, что все точки a_k лежат на одной и той же прямой, проходящей через 0 и $f(0)$, вопреки условию задачи.

Заметим, что если точки a_k лежат на одной прямой, то утверждение задачи перестает быть верным. Действительно, если a_1 и a_n — крайние точки, то можно выбрать область G так, чтобы она высекала на прямой отрезок, лежащий по одну сторону от отрезка $[a_1, a_n]$. В любой точке этого отрезка функция $\varphi(z)$ достигает своего максимума, равного n , так как все векторы $(a_k - z)/|a_k - z|$ смотрят в одну сторону¹.

134. Запишем члены последовательности в виде $a_v = 2^{b_v} c_v$, где c_v — нечетные числа. Все c_v различны, поскольку если бы среди членов последовательности нашлись по крайней мере два с одинаковыми множителями c_v , то один из членов последовательности был бы делителем другого, что противоречит условиям задачи. Таким образом, члены последовательности можно представить в виде

$$a_v = 2^{b_v} c_v,$$

где множители c_v с точностью до перестановки совпадают с членами последовательности 1, 3, 5, ..., $2n - 1$. Рассмотрим сначала подпоследовательность чисел a_v , для которых $c_v = 1, 3, 3^2, \dots, 3^k$. Члены этой подпоследовательности можно представить в виде

$$2^{\beta_i} 3^i,$$

где $i = 0, 1, 2, \dots, k$, причем $\beta_i > \beta_{i+1}$ (ибо в противном случае последующий член подпоследовательности делился бы на предыдущий). Это означает, что $\beta_i \geq k - i$ и, следовательно,

$$2^{\beta_i} 3^i \geq 2^{k-i} 3^i \geq 2^k.$$

¹ В оригинале утверждается также, что и для более общей функции

$$F(z) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k - z}{|a_k - z|} \alpha_k (|a_k - z|),$$

где $\alpha_k(x)$ — положительные, монотонно возрастающие функции, определенные на положительной полуоси, максимум модуля не может достигаться во внутренней точке. Я не проверял этого утверждения. — Прим. ред.

Если a_1 принадлежит рассматриваемой подпоследовательности, то утверждение задачи доказано, в противном случае $c_1 \geq 5$.

Предположим теперь, что вопреки утверждению задачи

$$a_1 = c_1 2^{b_1} < 2^k, \quad \text{где } c_1 \geq 5,$$

и, таким образом,

$$c_1 < 2^{k-b_1}, \quad \text{где } k - b_1 \geq 3.$$

По доказанному выше, множители c_λ — различные нечетные числа, не превышающие $2n$. Следовательно, числа

$$c_1 \cdot 3^{\lambda-1}, \quad \text{где } \lambda = 1, 2, 3, \dots, b_1 + 2,$$

принадлежат набору множителей c_λ , поскольку наибольшее из них удовлетворяет неравенству

$$3^{b_1+1} c_1 < 3^{b_1+1} 2^{k-b_1} < 3^{b_1+1} \cdot 3^2 \cdot 2^{k-b_1-3} < 3^k < 2n. \quad (1)$$

Эти числа определяют подмножество членов исходной последовательности

$$a_\lambda = c_1 3^{\lambda-1} 2^{b_\lambda}, \quad \text{где } \lambda = 1, 2, \dots, b_1 + 2.$$

Среди членов этой подпоследовательности непременно найдутся два таких, из которых вопреки условиям задачи один делится на другой, если только числа b_λ не различны и при любом λ не выполняется неравенство $b_\lambda < b_1$. Но такое неравенство невозможно, поскольку λ принимает $b_1 + 2$ значений и существует не более $b_1 + 1$ различных неотрицательных целых чисел, не превышающих число b_1 .

Чтобы доказать, что оценка наименьшего члена последовательности неулучшаема, приведем пример последовательности a_i , наименьший член которой при любом n равен 2^k . Члены этой последовательности можно расположить в виде элементов матрицы

$$a_{ij} = 2^{k_i-j} 3^j \omega_i,$$

где числа ω_i — всевозможные нечетные числа, удовлетворяющие неравенству $\omega_i < 2n$ и взаимно простые с 6,

$$3^{k_i} < \frac{2n}{\omega_i} < 3^{k_i+1}, \quad j = 0, 1, \dots, k_i.$$

Нетрудно проверить, что все a_{ij} различны, меньше $2n$ и их ровно n (полагая $a_{ij} \rightleftharpoons 3^j \omega_i$, мы получаем взаимно-однозначное соответствие с множеством нечетных чисел, меньших $2n$); с помощью выкладки, аналогичной (1), можно установить, что наименьшее из чисел a_{ij} равно 2^k . Например, при $n = 15$ нашу последовательность образуют числа 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 29.

135. Как показывают прямые выкладки,

$$V^2 = \left(\sum_{s=1}^n g^{(s-1)(r+c-2)} \right) = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & n & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Корни характеристического уравнения $\det |V^2 - \lambda^2 I| = 0$ матрицы V^2 равны $\pm n$. Сумма корней равна $2n$ при четном n и n — при нечетном n . Таким образом, $[n/2] + 1$ корней λ^2 характеристического уравнения равны n , а остальные корни равны $-n$. Следовательно, корни характеристического уравнения матрицы V равны $\sqrt{n}$, $i\sqrt{n}$, $-\sqrt{n}$, $-i\sqrt{n}$. Обозначим их кратности соответственно m_0, m_1, m_2, m_3 . Тогда

$$m_0 + m_1 + m_2 + m_3 = n, \quad m_0 + m_2 = \left[\frac{n}{2} \right] + 1.$$

В зависимости от того, с каким из чисел 0, 1, 2 или 3 сравнимо число n , след матрицы V равен $(1+i)\sqrt{n}$, $\sqrt{n}$, 0 или $i\sqrt{n}$ *, а поскольку след матрицы V равен сумме корней ее характеристического уравнения $(m_0 + im_1 - m_2 - im_3)\sqrt{n}$, то

$$m_0 - m_2 = \begin{cases} 1 & \text{при } n=4k & \text{или } n=4k+1, \\ 0 & \text{при } n=4k+2 & \text{или } n=4k+3, \end{cases}$$

$$m_1 - m_3 = \begin{cases} 1 & \text{при } n=4k & \text{или } n=4k+3, \\ 0 & \text{при } n=4k+1 & \text{или } n=4k+2. \end{cases}$$

Таким образом, кратности корней характеристического уравнения матрицы V во всех случаях можно вычислить по формулам

$$m_0 = \left[\frac{n}{4} \right] + 1, \quad m_1 = \left[\frac{n+1}{4} \right], \quad m_2 = \left[\frac{n+2}{4} \right], \\ m_3 = \left[\frac{n+3}{4} \right] - 1.$$

136. Из уравнений (1) и (2) следует, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad (4)$$

а из уравнений (3) и (4) — что

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2},$$

откуда

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) U = 0. \quad (5)$$

Общее решение уравнения (5) имеет вид

$$U = f(x+y) + F(x-y), \quad (6)$$

где f и F — произвольные функции. Подставляя U в уравнения (3) и (4), находим $V_x = f'(x+y) - F'(x-y)$, $V_y = f'(x+y) + F'(x-y)$. Следовательно,

$$V = f(x+y) - F(x-y) + C, \quad (7)$$

где C — произвольная постоянная. Записав уравнение (1) в виде

$$W = \varphi(y)/U^2. \quad (8)$$

Таким образом, общее решение системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (1), (2), (3) определяется выражениями (6), (7), (8), где f , F и φ — произвольные функции, а C — произвольная постоянная.

137. Приводимое доказательство справедливо для любой (спрямляемой или неспрямляемой) простой замкнутой кривой C , лежащей в плоскости S , и даже в более общем случае.

Пусть D_1 и D_2 — внутренняя и внешняя области, на которые кривая C разбивает плоскость, P — любая точка, принадлежащая области D_1 ; d — фиксированная прямая, проходящая через точку P ; C_0 и C_π — пересечения

кривой C с двумя лучами, на которые точка P разбивает прямую d ; наконец, C' , C'_0 и C'_π — образы множеств C , C_0 и C_π при повороте плоскости S на угол π вокруг точки P .

Докажем, что множества C и C' имеют по крайней мере одну общую точку (если пересечение множеств C и C' непусто, то любую из принадлежащих ему точек можно принять за точку A , а точку, переходящую в нее при повороте плоскости на угол π вокруг точки P , — за точку B , где A и B — концы той хорды, о которой говорится в условиях задачи). Существование точки, принадлежащей одновременно множествам C и C' , будет доказано, если нам удастся доказать, что либо C'_0 и C'_π имеют общую точку, либо C' содержит как точки, принадлежащие области D_1 , так и точки, принадлежащие области D_2 . В первом случае наше утверждение (о непустоте пересечения множеств C и C') будет следовать из того, что C'_0 и C'_π — подмножества множеств C' и C , поэтому любая точка, принадлежащая пересечению C'_0 и C'_π , принадлежит и пересечению множеств C' и C . Во втором случае наше утверждение следует из того, что связное множество C' содержит точки обеих областей, дополнительных к C , и следовательно, содержит по крайней мере одну точку множества C . (Здесь мы используем теорему о том, что связное множество, содержащее точки, которые принадлежат областям, внутренним и внешним относительно некоторого множества, содержит по крайней мере одну точку этого множества. Можно было бы также воспользоваться более тонкой теоремой Жордана.)

Итак, предположим, что множества C'_0 и C'_π не имеют общих точек. Тогда любая точка множества C'_0 принадлежит либо D_1 , либо D_2 . Не ограничивая общности, можно считать, что некоторые точки множества C'_0 принадлежат D_1 . Если в C'_0 существует точка, принадлежащая D_2 , то выполняются условия второй альтернативы и наше утверждение доказано. Поскольку C'_0 — замкнутое подмножество точек луча, исходящего из точки P и содержащего C'_0 и C'_π , C'_0 содержит по крайней мере одну точку R' . Если ни одна точка луча, расположенная за точкой R' , не принадлежит множеству C'_π , то R' принадлежит D_2 и наше утверждение доказано. Если за всеми точками множества C'_0 на луче найдется точ-

ка Q , принадлежащая C_π , то соответствующая точка Q' множества C'_π , лежащая на противоположном луче, расположена за всеми точками множества C_0 и является точкой множества C' , принадлежащей D_2 .

Итак, мы доказали не только утверждение задачи, но и следующее более общее утверждение.

Пусть C — любой континуум на плоскости, D — ограниченная связная компонента дополнения к C и P — произвольная точка из D . Тогда существуют две точки A и B , принадлежащие границе области D и такие, что точка P совпадает с серединой отрезка AB .

Нетрудно видеть, что, если область D не ограничена, это утверждение может не выполняться.

140. Пусть l_{ij} ($=l_{ji}$) — длина ребра P_iP_j симплекса $P_0P_1P_2\dots P_n$ (вершина P_0 совпадает с вершиной O). Тогда

$$l_{ij}^2 - l_{i0}^2 - l_{0j}^2 = -2l_{i0}l_{0j} \cos(\angle P_iOP_j) = -2a_{ij}.$$

По известной формуле, выражающей радиус описанной гипersферы через длины ребер симплекса,

$$-2r_n^2 = \begin{vmatrix} 0 & l_{01}^2 & l_{02}^2 & \dots & l_{0n}^2 \\ l_{10}^2 & 0 & l_{12}^2 & \dots & l_{1n}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n0}^2 & l_{n1}^2 & l_{n2}^2 & \dots & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & l_{01}^2 & l_{02}^2 & \dots & l_{0n}^2 \\ 1 & l_{10}^2 & 0 & l_{12}^2 & \dots & l_{1n}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & l_{n0}^2 & l_{n1}^2 & l_{n2}^2 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычитая первую строку из всех последующих строк, а первый столбец — из всех последующих столбцов, преобразуем первый определитель к виду

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{11} & a_{22} & \dots & a_{nn} \\ a_{11} & -2a_{11} & -2a_{12} & \dots & -2a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nn} & -2a_{n1} & -2a_{n2} & \dots & -2a_{nn} \end{vmatrix} = \\ = -(-2)^{n-1} \sum \sum a_{ii} a_{jj} A_{ij}.$$

Проделав аналогичные операции над вторым определителем, получим

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_{11} & a_{22} & \dots & a_{nn} \\ 0 & a_{11} & -2a_{11} & -2a_{12} & \dots & -2a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{nn} & -2a_{n1} & -2a_{n2} & \dots & -2a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-2)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Следовательно,

$$-2r_n^2 = (\sum \sum a_{ij} a_{jj} A_{ij}) / [-2 \det(a_{ij})],$$

что и требовалось доказать.

141. Рассмотрим функцию $y = x^{1/n}$. Поскольку ее производная с возрастанием x убывает, приращение функции y , соответствующее заданному интервалу на оси x , убывает по мере сдвига этого интервала вправо. Интервал (x_1, x_2) получается при сдвиге интервала $(x_1 - \alpha, x_2 - \alpha)$ вправо на α . Следовательно,

$$y(x_2) - y(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} y'(t) dt = \int_{x_1 - \alpha}^{x_2 - \alpha} y'(t + \alpha) dt \leq$$

$$\leq \int_{x_1 - \alpha}^{x_2 - \alpha} y'(t) dt = y(x_2 - \alpha) - y(x_1 - \alpha),$$

что и требовалось доказать.

Приведенное доказательство остается в силе при любом (не обязательно целом) положительном $n \geq 1$.

142. Пусть M_x — среднее число бросаний, которые необходимо произвести, чтобы закончить игру, если у одного игрока x , а у другого $m + n - x$ монет. Тогда $M_0 = 0$, $M_{m+n} = 0$. Кроме того, из соображений симметрии ясно, что $M_x = M_{m+n-x}$. Поскольку после очередного бросания у игрока, имевшего до бросания x монет, число монет с равной вероятностью может стать и $x - 1$, и

$x+1$, то величины M_x удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$M_x = (M_{x-1} + 1)/2 + (M_{x+1} + 1)/2, \quad (1)$$

или

$$-M_{x-1} + 2M_x - M_{x+1} = 2 \quad \text{при} \quad 0 < x < m+n.$$

Суммируя левую и правую части этого соотношения по x от 1 до $m+n-1$, получаем

$$M_1 + M_{m+n-1} = 2(m+n-1),$$

а поскольку $M_1 = M_{m+n-1}$, то

$$M_1 = M_{m+n-1} = m+n-1.$$

Величину M_2 определим из рекуррентного соотношения (1), полагая $x=1$:

$$M_2 = 2M_1 - M_0 - 2 = 2(m+n-1) - 0 - 2 = 2(m+n-2),$$

Докажем, что $M_x = x(m+n-x)$. Воспользуемся для этого методом математической индукции. При $x=1$ и $x=2$ соотношение выполнено. Предположим, что оно справедливо при $x=k$ и $x=k-1$:

$$M_k = k(m+n-k), \quad M_{k-1} = (k-1)(m+n-k+1).$$

Тогда

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= 2M_k - M_{k-1} - 2 = \\ &= 2k(m+n-k) - (k-1)(m+n-k+1) - 2 = \\ &= (k+1)(m+n-k-1). \end{aligned}$$

Подставляя $x=m$ в доказанное соотношение $M_x = x(m+n-x)$, находим ответ на вопрос задачи:

$$M_m = m(m+n-m) = mn.$$

143*. Примем вершину D тетраэдра и его ребра DA , DB , DC за начало и оси x , y , z косоугольной системы координат, причем отрезки DA , DB , DC будем считать масштабными. Если искомая плоскость пересекает ребра DA , DB , DC в точках $(\frac{1}{u}, 0, 0)$, $(0, \frac{1}{v}, 0)$, $(0, 0, \frac{1}{w})$, то ее уравнение имеет вид

$$ux + vy + wz = 1, \quad (1)$$

где $u, v, w \geq 1$, и она отсекает от положительного октанта тетраэдр объемом V_{ABCD}/uvw . Отсюда

$$uvw = 2. \quad (2)$$

Обозначим площади граней тетраэдра, противолежащих вершинам A, B, C и D , S_A, S_B, S_C, S_D соответственно. Площади треугольников, отсекаемых нашей плоскостью от соответствующих граней, равны $S_A/vw, S_B/uw, S_C/uv$. Поэтому

$$S_A/vw + S_B/uw + S_C/uv = \frac{1}{2}(S_A + S_B + S_C + S_D),$$

с учетом (2)

$$uS_A + vS_B + wS_C = S_A + S_B + S_C + S_D. \quad (3)$$

Для того чтобы искомая плоскость, пересекающая трехгранный угол тетраэдра с вершиной D , существовала, необходимо и достаточно, чтобы уравнения (2) и (3) имели решение, удовлетворяющее неравенствам $u, v, w \geq 1$.

Легко видеть, что если удовлетворяется (3), то

$$(uvw)_{\max} = \frac{(S_A + S_B + S_C + S_D)^3}{27S_A S_B S_C},$$

$$(uvw)_{\min} = 1 + \frac{S_D}{\max(S_A, S_B, S_C)}$$

(первое неравенство получается при $uS_A = vS_B = wS_D$, чтобы получить второе, нужно приравнять поочередно два из переменных единице; полезно иметь в виду, что функция $-\ln(uvw)$ выпукла (III.13) на выпуклом множестве — треугольнике, отсекаемом от октанта $u, v, w \geq 1$ плоскостью (3)), и поэтому необходимое условие существования решения выражается неравенствами

$$S_A S_B S_C \leq \frac{(S_A + S_B + S_C + S_D)^3}{54}, \quad \max\{S_A, S_B, S_C\} \geq S_D. \quad (4)$$

Эти же неравенства и достаточны для существования решения, поскольку область определения непрерывной функции uvw (уже упоминавшийся треугольник) связна и функция принимает на ней все промежуточные значения между минимальным и максимальным, в том числе [при соблюдении условий (4)] и значение 2.

Вообще говоря, неравенства (4) могут не выполняться. Если, например, тетраэдр имеет вид очень вытянутой правильной пирамиды с вершиной в D , так что $S_A = S_B = S_C \gg S_D$, то первое из неравенств (4) нарушается. Тем самым тройку ребер, которые пересекает искомая плоскость, нельзя задавать произвольно.

Покажем, что неравенства (4) выполняются, если $S_A \leq S_B \leq S_C \leq S_D$. Обозначая для краткости $S_A + S_B + S_C + S_D = S$, имеем

$$S_A S_B S_C \leq \frac{(S_A + S_B)^2}{4} S_C \leq \frac{1}{4} \left[\frac{2}{3} (S_A + S_B + S_D) \right]^2 S_C = \\ = \frac{1}{9} (S - S_C)^2 S_C \leq \frac{1}{9} \left(\frac{2S}{3} \right)^2 \frac{S}{3} = \frac{4}{243} S^3 < \frac{1}{54} S^3,$$

так как функция $(S - x)^2 x$ имеет максимум при $x = S/3$. Второе из неравенств (4) очевидно.

Пусть теперь (x_0, y_0, z_0) — координаты центра сферы, вписанной в тетраэдр, r — ее радиус и h_A, h_B, h_C — высоты, опущенные из вершин A, B, C на противоположные грани. В силу нашего выбора масштабов на осях вершина A имеет координаты $(1, 0, 0)$, откуда $x_0 : 1 = r : h_A$ и

$$x_0 = \frac{r}{h_A} = \frac{r \cdot S_A}{3V_{ABCD}} = \frac{S_A}{S_A + S_B + S_C + S_D}.$$

Аналогичный вид имеют y_0 и z_0 . Подставляя эти значения в (1) и учитывая (3), находим, что искомая плоскость (1) проходит через центр вписанной сферы.

В общем случае задача может иметь до трех однопараметрических семейств решений. Заметим, что аналогичная планиметрическая задача (см. задачу 156) имеет лишь конечное (одно, два или три) число решений.

144. Пусть n — нечетное число, p — простой делитель числа n , $n = 2r + 1 = sp^i$, $i > 0$, s не делится на p (1).

Если среднее арифметическое n последовательных целых чисел равно m , то сами числа равны

$$m - r, m - r + 1, \dots, m + r - 1, m + r. \quad (2)$$

Сумма Σ чисел (2) равна mn , а их произведение Π — умноженному на m произведению произведений двух наборов последовательных целых чисел

$$(m - r)(m - r + 1) \dots (m - 1) \quad \text{и} \quad (m + 1)(m + 2) \dots (m + r).$$

Пусть $r/p = a + b/p$, $0 < b < p$. Тогда из соотношения $2r + 1 = 2ap + (2b + 1) = sp^i$ следует, что $2b + 1 = p$ и $a = (sp^{i-1} - 1)/2$. Таким образом, $r/p > a = (sp^{i-1} - 1)/2 \geq (p^{i-1} - 1)/2 \geq i/2$ при всех $i \geq 2$ ($p \geq 3$). Каждый из двух наборов r последовательных целых чисел от $m - r$ до $m - 1$ и от $m + 1$ до $m + r$ содержит a полных наборов по p последовательных целых чисел. Поскольку из p последовательных целых чисел одно делится на p , произведение r целых чисел делится на p^a . Таким образом, Π/m делится на p^{2a} и, следовательно, на p^i . Если $n = sp$, то среди чисел (2) имеются s таких, которые делятся на p . В этом случае Π/m делится на p^{s-1} . Итак, Π/m делится на p , если только не выполняются равенства $s = 1$, $i = 1$, то есть $n = p$. Иначе говоря, если $n \neq p$, то Π/m делится на n , поскольку Π/m делится на любой простой делитель числа n в степени, не меньшей той, с которой этот делитель входит в разложение числа n на простые множители. Отсюда следует также, что Π делится на $\Sigma = mn$. Наконец, если $n = p$, то лишь одно из целых чисел (2) делится на p . Если это число отлично от m , то Π/m делится на n и, таким образом, Π делится на Σ . Если же это число равно m , то Π не делится на Σ .

Рассмотрим теперь случай, когда n — четное число, то есть $n = 2^c d$, где d — нечетное число и $c \geq 1$. Запишем n последовательных целых чисел в виде $a - n/2 + 1$, $a - n/2 + 2$, ..., $a + n/2$, или

$$\frac{(2a+1)-(n-1)}{2}, \frac{(2a+1)-(n-3)}{2}, \dots, \frac{(2a+1)-1}{2}, \frac{(2a+1)+1}{2}, \dots, \frac{(2a+1)+(n-1)}{2}. \quad (3)$$

Тогда $\Sigma = n(2a+1)/2 = 2^{c-1}d(2a+1)$. Объединяя пары чисел, равноотстоящих от концов конечной последовательности (3), получаем

$$\Pi = [(2a+1)^2 - (n-1)^2][(2a+1)^2 - (n-3)^2] \dots \dots [(2a+1)^2 - 1]/2^n.$$

Ясно, что Π можно представить в виде $\Pi = [m(2a+1)^2 \pm k^2]/2^n$, где m — некоторое целое число и $k = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (n-1)$. Поскольку произведение d последовательных целых чисел делится на d , а Π —

произведение $n = 2^c d$ последовательных целых чисел, то Π делится на d^{2^c} и на $(2^c)^d$, то есть заведомо делится на d^2 и 2^{c-1} . Кроме того, число d , которое нечетно и меньше n , является делителем числа k , а поскольку $\Pi = [m(2a+1)^2 \pm k^2]/2^n$, то $m(2a+1)^2$ делится на d^2 и, следовательно, $m(2a+1)^2$ делится на $d(2a+1)$. Таким образом, Π делится на $d(2a+1)$ в том и только в том случае, если k^2 делится на $d(2a+1)$. Именно к делимости k^2 на $d(2a+1)$ и сводится условие делимости Π на $\Sigma = 2^{c-1}d(2a+1)$, поскольку делимость Π на 2^{c-1} была доказана выше. Итак, Π делится на Σ в том и только в том случае, если k^2/d делится на $2a+1$. Заметим, что число $2a+1$ должно быть больше n , если все целые числа положительны, и $2a+1$ равно сумме любых двух целых чисел, равноотстоящих от концов последовательности.

Например, при $n = 2$ не существует двух последовательных натуральных чисел, для которых Π делится на Σ . При $n = 4$ число k равно 3, и $2a+1$ должно было бы быть делителем (больше 4) числа 9. Следовательно, $a = 4$, и единственный набор целых чисел имеет вид 3, 4, 5, 6. При $n = 6$ мы получаем $k^2/d = 75$. Следовательно, $2a+1 = 15$; 25 или 75, и существуют три набора, состоящие из шести последовательных целых чисел. Эти наборы начинаются с чисел 5, 10 и 35.

145. Каждый из различных равносторонних, равнобедренных или косоугольных треугольников, вершины которых совпадают с вершинами правильного n -угольника, конгруэнтен соответственно одному, трем или шести треугольникам, имеющим заданную вершину A . Обозначим число треугольников каждого из трех названных типов E , I и S . Поскольку любая пара вершин, отличных от A , определяют вместе с вершиной A некоторый треугольник, то

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} = E + 3I + 6S. \quad (1)$$

Подсчитав число различных треугольников ABC с равными углами B и C , получим

$$I + E = \frac{n-2+d}{2}, \quad E = 1 - c, \quad (2)$$

где c и d — вычеты, равные 0 или 1 и такие, что

$$n^2 \equiv c \pmod{3}, \quad n^2 \equiv d \pmod{4}. \quad (3)$$

Пользуясь соотношениями (2), найдем из (1) комбинацию $S + I + E$:

$$12(S + I + E) = (n-1)(n-2) + 3(n-2+d) + 4(1-c) = \\ = n^2 + 3d - 4c. \quad (4)$$

Следовательно, $S + I + E$ — ближайшее к $n^2/12$ целое число, что и требовалось доказать.

146. Произведение любых n последовательных чисел делится на $n!$. Число $n(!)^k$ представляет собой не что иное, как произведение $n(!)^{k-1}$ последовательных целых чисел. Разобьем эти числа на группы, каждая из которых содержит n последовательных целых чисел. Всего мы получим

$$(n-1)!(n!-1)!(n(!)^2-1)! \dots (n(!)^{k-2}-1)!, \quad k \geq 2,$$

групп, поскольку

$$n(!)^{k-1} = n(!)^{k-2} [n(!)^{k-2} - 1]! = \\ = n(!)^{k-3} [n(!)^{k-3} - 1]! [n(!)^{k-2} - 1]! = \dots = \\ = n(n-1)!(n!-1)! \dots [n(!)^{k-2} - 1]!. \quad \text{Следовательно, число } n(!)^k \text{ делится на}$$

$$n(!)^{(n-1)!(n!-1)! \dots [n(!)^{k-2}-1]!},$$

что и требовалось доказать.

147. Обозначим левую часть уравнения через $f(x)$. Тогда его правую часть можно записать в виде $f(a)$, а само уравнение — в виде $f(x) = f(a)$.

Нетрудно видеть, что рациональная функция $f(x)$ инвариантна относительно группы подстановок

$$x = \xi, \quad x = \frac{1}{\xi}, \quad x = 1 - \xi, \quad x = \frac{1}{1 - \xi}, \\ x = \frac{\xi - 1}{\xi}, \quad x = \frac{\xi}{\xi - 1}.$$

Поскольку $x = a$, очевидно, является корнем уравнения, то полный набор из шести корней имеет вид

$$a, \frac{1}{a}, 1-a, \frac{1}{1-a}, \frac{a-1}{a}, \frac{a}{a-1} \quad (a \neq 0, 1).$$

При $a = 1$ функция $f(a)$ не имеет смысла. При $a \rightarrow 1$ корни уравнения попарно стремятся к 1, 0 и ∞ . Аналогичная картина наблюдается и при $a \rightarrow 0$.

148. При $n = 2$ мы имеем на плоскости четыре точки P_1, P_2, P_3, P_4 , из которых любые три образуют треугольник. Рассматривая все возможные расположения точки P_4 относительно треугольника $P_1P_2P_3$, нетрудно убедиться в том, что $[P_1P_2P_3P_4]$ представляет собой либо треугольник, либо четырехугольник. Действительно, если барицентрические координаты точки P_4 имеют знаки $(+++)$ или $(--+)$, то мы получаем треугольник, а при распределении знаков $(-+++)$ — четырехугольник. Таким образом, из шести отрезков $[P_iP_k]$ множеству ребер выпуклого «многогранника» $[P_1P_2P_3P_4]$ принадлежат не более четырех.

При $n = 3$ мы получаем пять точек P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 . Если они лежат в одной плоскости, то, как мы уже убедились, некоторые отрезки $[P_iP_k]$ не являются ребрами многогранника $[P_1P_2P_3P_4P_5]$. Предположим, что любые четыре точки образуют тетраэдр. Рассматривая все возможные расположения точки P_5 относительно тетраэдра $P_1P_2P_3P_4$, мы заключаем, что выпуклый многогранник $[P_1P_2P_3P_4P_5]$ имеет вид либо тетраэдра, либо треугольной бипирамиды. Действительно, если барицентрические координаты точки P_5 имеют знаки $(++++)$ или $(---+)$, мы получаем тетраэдр, а при распределении знаков $(-++++)$ или $(--++)$ — бипирамиду (в первом случае с вершинами в точках P_1P_5 , во втором — с вершинами в точках P_3P_4). Следовательно, не более девяти из десяти отрезков $[P_iP_k]$ являются ребрами выпуклого многогранника $[P_1P_2P_3P_4P_5]$.

При $n = 4$ можно построить политоп, содержащий 6 вершин, 6 + 9 ребер, 18 треугольных граней и 9 (неправильных) тетраэдров. Выбрав треугольники $P_1P_2P_3$ и $P_4P_5P_6$ в двух плоскостях, единственная общая точка которых является внутренней для каждого из треугольников (например, выбрать два равносторонних треуголь-

ника в абсолютно перпендикулярных плоскостях), мы получим 15 отрезков $[P_i P_k]$, соединяющих 6 вершин политопа $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6$, то есть все 15 отрезков будут ребрами этого политопа.

При $n > 4$ выберем шесть из $n + 2$ точек за вершины политопа, построенного при рассмотрении случая $n = 4$, а остальные $n - 4$ точек в общем положении, и получим гипертело, имеющее $(n + 2)(n + 1)/2$ ребер. Такое тело можно было бы назвать гиперпирамидой.

149. Пусть RS — верхний край забора, A — точка, в которой прикреплен веревка, B и O — проекции точки A на прямую RS и основание забора. Выберем прямоугольную систему координат с началом в точке O , осью x , совпадающей с основанием забора, и осью y , положительное направление которой указывает полуплоскость, расположенную по ту же сторону от основания забора, что и собака. Когда собака находится в точке P , натянутая веревка пересекает верхний край забора в точке Q . Пусть N — проекция точки P на прямую RS и $t = NP$. Тогда если треугольник ABQ повернуть вокруг стороны BQ так, чтобы он совместился с продолжением плоскости PQN , то он займет некоторое положение $A'BQ$. Точки A' , Q , P должны быть коллинеарными и $A'P = L$. Это означает, что точка P имеет координаты $x = \pm [L^2 - (a + t)^2]^{1/2}$, $y = [t^2 - h^2]^{1/2}$. Граничная кривая участка, по которому может бегать собака, симметрична относительно оси y (при $x = 0$ ордината граничной кривой равна $[(L - a)^2 - h^2]^{1/2}$), ортогонально пересекает ось x в точках с абсциссами $\pm [L^2 - (a + h)^2]^{1/2}$ и вогнута по направлению к забору. Уравнение граничной кривой в полярных координатах имеет вид

$$\rho^2 = k + 2a^2 \sin^2 \theta - [(k + 2a^2 \sin^2 \theta)^2 + 4a^2 h^2 - k^2]^{1/2},$$

$$k = L^2 - h^2 - a^2 > 0.$$

Подстановкой $z = 2a^2 \sin^2 \theta + k$ площадь участка можно привести к виду

$$\int_0^{\pi/2} \rho^2 d\theta = \frac{\pi}{2} (a^2 + k) - \frac{1}{2i} \int_{\beta}^{\alpha} \frac{(\gamma \delta + z^2) dz}{\sqrt{(\alpha - z)(\beta - z)(\gamma \delta + z^2)}},$$

где $\alpha = 2a^2 + k$, $\beta = k$, $\gamma = (k^2 - 4a^2 h^2)^{1/2}$,
 $\delta = -\gamma$, $\alpha > \beta > \gamma > 0 > \delta$.

После громоздких и длинных преобразований интеграл сводится к интегралам пяти типов:

$$\int \frac{\sin^4 \varphi}{\cos^4 \varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad \int \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^4 \varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad \int \frac{1}{\cos^4 \varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{X}}, \quad \int \frac{dx}{x \sqrt{X}},$$

где $\Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$, X — квадратичная форма. Первые три интеграла сводятся к эллиптическим интегралам первого и второго рода, последние два интеграла берутся в элементарных функциях.

150*¹. Колышек, на который были надеты кольца до начала переключивания, назовем начальным; колышек, на который будут надеты в конце концов кольца, назовем конечным; остальные $h = k - 2$ колышков — вспомогательными. Обозначим через $m(h, n)$ минимальное число переключиваний, за которое можно решить задачу для n колец, и через

$$C(h, n) = m(h, n) - m(h, n - 1)$$

«цену» переключивания n -го кольца.

Решение задачи осуществляется способом, который мы будем называть «оптимальной стратегией». При оптимальной стратегии самое большое кольцо переключивается только один раз, с начального колышка на конечный. В самом деле, пусть это не так. Тогда в некоторый момент самое большое кольцо переключивается с начального колышка на i -й; обозначим буквой A расположение в тот же момент остальных колец на h колышках (то есть на всех, кроме начального и i -го) и $m(A)$ — число переключиваний, предшествовавших данному моменту. Аналогично в некоторый другой момент самое большое кольцо будет переложено на конечный колышек, а остальные кольца будут находиться в состоянии B , и до конца игры произойдет еще $m(B)$ переключиваний. Пусть, например, $m(A) \leq m(B)$. Тогда, перенумеровав колышки, мы можем заменить в распо-

¹ Прототип излагаемого далее решения, опубликованный в *American Mathematical Monthly*, содержал логические пробелы. Сохраняя основную идею рассуждения, я старался эти пробелы восполнить, но преуспел в этом только отчасти. Недостоящее звено выделено в виде двух постулатов. Весьма вероятно, что они верны, но доказательством этого я не располагаю. — *Прим. ред.*

ложении A i -й колышек конечным и переложить самое большое кольцо сразу с начального колышка на конечный. После этого нам достаточно сделать еще $m(A)$ перекладываний (в обратном порядке по отношению к созданию расположения A). Всего мы произведем $1 + 2m(A)$ перекладываний, тогда как в исходной процедуре их было не менее $m(A) + 1 + 1 + m(B) > 1 + 2m(A)$, что противоречит оптимальности стратегии. Аналогично рассуждаем при $m(A) > m(B)$.

Интуиция подсказывает, что верны следующие постулаты:

I. При оптимальной стратегии в расположении A на каждый из вспомогательных колышков надеты кольца последовательных размеров (без пропусков), так что n_1 самых больших колец надеты на 1-й вспомогательный колышек, n_2 следующих по величине — на 2-й, ..., n_h самых маленьких — на h -й.

II. При оптимальной стратегии переход из начального состояния в состояние A осуществляется так: используя h колышков [с 1-го по $(h-1)$ -й и конечный] в качестве вспомогательных, перемещаем за $m(h, n_h)$ перекладываний n_h самых маленьких колец на h -й вспомогательный колышек; затем, используя $h-1$ колышек в качестве вспомогательных, перемещаем n_{h-1} колец на $(h-1)$ -й вспомогательный колышек и т. д. Наконец, используя конечный колышек в качестве вспомогательного, перемещаем n_1 колец на 1-й вспомогательный колышек.

Каждая стратегия, подчиняющаяся постулату II, вполне характеризуется заданием набора чисел $(n_1, \dots, n_h)$. Для краткости будем говорить просто «стратегия $(n_1, \dots, n_h)$ ». Если стратегия оптимальна, то, очевидно,

$$m(h, n) = 1 + 2 \sum_{r=1}^h m(r, n_r). \quad (1)$$

Лемма. Оптимальные стратегии $(n_1^{(n)}, \dots, n_h^{(n)})$, отвечающие перекладыванию n колец ($n = 1, 2, \dots$), можно выбрать так, чтобы

- 1) $n_i^{(n)} \geq n_i^{(n-1)}, \quad n \geq 2, \quad i = 1, \dots, h;$
- 2) $2C(h, n-1) \geq C(h, n) \geq C(h, n-1), \quad n \geq 2,$

причем для каждого n одно из неравенств обращается в равенство

$$3) \quad C(h, n) = 2^s,$$

где s зависит от h и n .

Для доказательства применим индукцию по h и n . При $h = 1$ лемма тривиальна, так как здесь $n_1^{(n)} = n - 1$, равенство (1) принимает вид

$$m(1, n) = 1 + 2m(1, n - 1),$$

откуда

$$C(1, n) = 2C(1, n - 1) = 2^{n-1}C(1, 1) = 2^{n-1}. \quad (2)$$

Предположим теперь, что $h \geq 2$ и что утверждение леммы доказано для любого числа вспомогательных колышков $< h$. Прежде всего имеем

$$n_i^{(1)} = 0;$$

$$m(h, 0) = 0, \quad m(h, 1) = 1, \quad m(h, 2) = 3;$$

$$C(h, 1) = 1, \quad C(h, 2) = 2,$$

так что утверждение леммы верно при $n = 2$.

Предположим далее, что оно верно для h вспомогательных колышков и любого числа колец $< n$. Пусть $(n_1^{(n)}, \dots, n_h^{(n)})$ — одна из оптимальных стратегий. Ввиду равенства

$$1 + n_1^{(n)} + \dots + n_h^{(n)} = n \quad (3)$$

хотя бы одна из разностей $n_i^{(n)} - n_i^{(n-1)} > 0$, пусть это будет $n_k^{(n)} - n_k^{(n-1)}$. Рассмотрим стратегии $(v_1, \dots, v_h)$ и $(\mu_1, \dots, \mu_h)$,

где

$$v_i = n_i^{(n)}, \quad i \neq k; \quad v_k = n_k^{(n)} - 1;$$

$$\mu_i = n_i^{(n-1)}, \quad i \neq k; \quad \mu_k = n_k^{(n-1)} + 1.$$

Тогда

$$1 + v_1 + \dots + v_h = n - 1, \quad 1 + \mu_1 + \dots + \mu_h = n.$$

Поскольку стратегия $(n_1^{(n-1)}, \dots, n_h^{(n-1)})$ оптимальна,

$$\sum_{r=1}^h m(r, v_r) \geq \sum_{r=1}^h m(r, n_r^{(n-1)}),$$

а так как по предположению индукции (пункт 2) $C(k, l)$ монотонно зависит от l при $l \leq n-1$ и $n_i^{(n)} \leq n-1$, то

$$\begin{aligned} m(h, n) &= 1 + 2 \sum_{r=1}^h m(r, n_r^{(n)}) = \\ &= 1 + 2 \sum_{r=1}^h m(r, \nu_r) + C(k, n_k^{(n)}) \geq 1 + 2 \sum_{r=1}^h m(r, n_r^{(n-1)}) + \\ &\quad + C(k, n_k^{(n-1)} + 1) = 1 + 2 \sum_{r=1}^h m(r, \mu_r). \end{aligned}$$

Ввиду оптимальности стратегии $(n_1^{(n)}, \dots, n_h^{(n)})$ правая часть здесь должна равняться левой, а следовательно $(\mu_1, \dots, \mu_h)$, как и $(n_1^{(n)}, \dots, n_h^{(n)})$ — оптимальная стратегия, и для нее выполнено утверждение 1) леммы. Впредь будем считать, что уже $(n_1^{(n)}, \dots, n_k^{(n)})$ обладает этим свойством.

Далее,

$$\begin{aligned} C(h, n) &= m(h, n) - m(h, n-1) = \\ &= 2 \sum_{r=1}^h (m(r, n_r^{(n)}) - m(r, n_r^{(n-1)})) = 2C(\rho, n_\rho^{(n)}) \quad (4) \end{aligned}$$

для некоторого ρ в силу утверждения 1); здесь $n_\rho^{(n)} = n_\rho^{(n-1)} + 1$ и $n_i^{(n)} = n_i^{(n-1)}$ для остальных i . Аналогично $C(h, n-1) = 2C(\rho', n_{\rho'}^{(n-1)})$, $n_{\rho'}^{(n-1)} = n_{\rho'}^{(n-2)} + 1$ и $n_i^{(n-1)} = n_i^{(n-2)}$ для остальных индексов.

Если $\rho = \rho'$, то утверждение 2) выполняется по предположению индукции, ибо $n_{\rho'}^{(n-1)}, n_\rho^{(n)} \leq n-1$. Если же $\rho \neq \rho'$ и $C(\rho', n_{\rho'}^{(n-1)}) > C(\rho, n_\rho^{(n)})$, то стратегия $(n_1^{(n-1)}, \dots, n_h^{(n-1)})$ не оптимальна, поскольку, заменив в ней $n_\rho^{(n-1)}$ на $n_\rho^{(n)} = n_\rho^{(n-1)} + 1$ и $n_{\rho'}^{(n-1)}$ на $n_{\rho'}^{(n-1)} - 1$, мы уменьшим $m(h, n-1)$. Наконец, если $\rho \neq \rho'$ и $C(\rho, n_\rho^{(n)}) > 2C(\rho', n_{\rho'}^{(n-1)})$, то по предположению индукции $C(\rho, n_\rho^{(n-1)}) > C(\rho', n_{\rho'}^{(n-1)})$. Заменив в стратегии $(n_1^{(n-2)}, \dots, n_h^{(n-2)})$ число $n_\rho^{(n-2)} = n_\rho^{(n-1)}$ на $n_\rho^{(n-2)} - 1$ и $n_{\rho'}^{(n-2)}$ на $n_{\rho'}^{(n-1)} = n_{\rho'}^{(n-2)} + 1$, мы уменьшим $m(h, n-2)$ и теперь уже $(n_1^{(n-2)}, \dots, n_h^{(n-2)})$ не оптимальна.

Этим доказано утверждение 2). Из (4) в силу предположения индукции вытекает справедливость утверждения 3) и остающаяся часть утверждения 2).

Из доказанной леммы следует, что для некоторой последовательности

$$1 = A_h^0 < A_h^1 < \dots < A_h^s < \dots$$

имеет место равенство

$$C(h, n) = 2^s, \quad A_h^{s-1} < n \leq A_h^s. \quad (5)$$

Если n удовлетворяет (5), то

$$2^{s-1} \leq C(r, n_r^{(n-1)} + 1) \leq 2^s, \quad (6)$$

причем хотя бы для одного r левое неравенство превращается в равенство. Действительно, в силу (4)

$$2^s = C(h, n) = 2C(\rho, n_\rho^{(n)}) = 2C(\rho, n_\rho^{(n-1)} + 1),$$

откуда $C(\rho, n_\rho^{(n-1)} + 1) = 2^{s-1}$. Кроме того, для остальных r должно быть $C(r, n_r^{(n-1)} + 1) \geq 2^{s-1}$, так как в противном случае, переходя от $n-1$ к n , мы увеличили бы не $n_\rho^{(n-1)}$, а другое число.

Наконец, если $C(r, n_r^{(n-1)} + 1) > 2^s$ для некоторого r , то в силу утверждения 2) $C(r, n_r^{(n-1)}) > 2^{s-1}$ и, заменив в стратегии $(n_1^{(n-1)}, \dots, n_h^{(n-1)})$ число $n_r^{(n-1)}$ на $n_r^{(n-1)} - 1$, а $n_\rho^{(n-1)}$ на $n_\rho^{(n-1)} + 1$, мы уменьшим $m(h, n-1)$ вопреки оптимальности.

Из (5) и (6) мы заключаем, что числа, образующие стратегию $(n_1^{(n-1)}, \dots, n_h^{(n-1)})$, разбиваются на две группы. Для одной из них

$$C(r, n_r^{(n-1)} + 1) = 2^s, \quad n_r^{(n-1)} = A_r^{s-1} \quad (7)$$

и для другой

$$C(r, n_r^{(n-1)} + 1) = 2^{s-1}, \quad n_r^{(n-1)} < A_r^{s-1}. \quad (8)$$

При переходе от $n-1$ к n увеличивается $n_\rho^{(n-1)}$, принадлежащее к группе (8). Когда все числа этой группы исчерпаются, то есть когда будет $n_r^{(n-1)} = A_r^{s-1}$

для всех r , приращение при переходе от $n-1$ к n составит 2^{s+1} , то есть будем иметь $n = A_h^s + 1$. Отсюда

$$A_h^s = n - 1 = \sum_{r=1}^h n_r^{(n-1)} + 1 = 1 + A_1^{s-1} + \dots + A_h^{s-1}.$$

В сочетании с равенством $A_h^0 = 1$ это по индукции дает нам $A_h^s = C_{h+s}^s = \binom{h+s}{s}$, так что

$$C(h, n) = 2^s, \quad C_{h+s-1}^{s-1} < n \leq C_{h+s}^s.$$

Вспоминая определение $C(h, n)$ и равенство $C_{h+k}^k - C_{h+k-1}^{k-1} = C_{h+k-1}^k$, получаем окончательно

$$m(h, n) = 1 + 2 \cdot C_h^1 + 2^2 C_{h+1}^2 + \dots \\ \dots + 2^{s-1} C_{h+s-2}^{s-1} + 2^s (n - C_{h+s-1}^{s-1}),$$

где s — наибольшее целое число, при котором последний член, стоящий в правой части, положителен. В классическом случае $k=3$ получаем $h=1$, $s=n-1$ и $m(1, n) = 2^n - 1$.

151. Пусть $f_k = x^k / (1 - x^k)$. Тогда величины f_k удовлетворяют тождеству

$$f_k f_{r-k} / f_r = f_k + f_{r-k} + 1, \quad 0 < k < r. \quad (1)$$

Обозначим через D_r определитель, получающийся из определителя, который приведен в условии задачи, при делении первой строки на 1, второй — на 2, ..., r -й на r . Задача будет решена, если мы докажем, что

$$D_r = f_1 f_2 f_3 \dots f_r. \quad (2)$$

Разлагая определитель D_r по элементам последней строки и умножая на r , получаем

$$r D_r = f_1 D_{r-1} - f_2 D_{r-2} + f_3 D_{r-3} - \dots + (-1)^{r-1} f_r D_0, \quad (3)$$

где $D_0 = 1$, $D_{-1} = D_{-2} = \dots = 0$.

Докажем соотношение (2) методом математической индукции. Прежде всего заметим, что по определению $D_1 = f_1$. Предположим, что соотношение $D_k = f_k D_{k-1}$ выполняется при $k < r$.

Докажем, что оно выполняется при $k = r$. Умножая обе части тождества (1) на $f_r D_{r-k-1}$ и используя высказанное выше предположение индукции, согласно которому $D_{r-k} = f_{r-k} D_{r-k-1}$, получаем

$$f_k D_{r-k} = f_r (f_k D_{r-k-1} + D_{r-k} + D_{r-k-1}). \quad (4)$$

Подставляя соотношение (4) в (3), находим

$$\begin{aligned} r D_r &= f_r (r-1) D_{r-1} + \\ &+ f_r \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} D_{r-k} - f_r \sum_{k=1}^r (-1)^{k-2} D_{r-k-1} = \\ &= f_r (r-1) D_{r-1} + f_r D_{r-1} - f_r D_{r-1} = r f_r D_{r-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Разделив обе части соотношения (5) на r , приходим к соотношению

$$D_r = f_r D_{r-1},$$

что и требовалось доказать.

152. Запишем уравнение параболы в параметрическом виде

$$x = as^2, \quad y = 2as. \quad (1)$$

Пусть P_i — любые три точки параболы с координатами $(as_i^2, 2as_i)$. Поскольку угловые коэффициенты касательных к параболе, проходящих через точки P_i , равны $1/s_i = \operatorname{tg} \alpha_i$, то уравнения касательных имеют вид

$$t_i: x - s_i y + as_i^2 = 0. \quad (2)$$

Пусть T_1 — точка пересечения касательных t_2 и t_3 , T_2 — точка пересечения касательных t_1 и t_3 ; а T_3 — точка пересечения касательных t_1 и t_2 , ϑ_i ($i = 1, 2, 3$) — внутренние углы треугольника $T_1 T_2 T_3$ (ϑ_i — угол при вершине T_i) и C — окружность диаметром d , описанная вокруг треугольника $T_1 T_2 T_3$. Тогда

$$T_1 T_2 = d \sin \vartheta_3 = d |\sin(\alpha_2 - \alpha_1)|. \quad (3)$$

С другой стороны, координаты точек T_1 и T_2 можно найти, решив системы уравнений (2) при $i = 2, 3$ и $i = 3, 1$:

$$T_1 = [as_2 s_3, a(s_2 + s_3)], \quad T_2 = [as_3 s_1, a(s_3 + s_1)].$$

Зная координаты концов отрезка $T_1 T_2$, получим

$$T_1 T_2 = a |s_1 - s_2| \sqrt{1 + s_3^2}. \quad (4)$$

Сравнивая соотношения (3) и (4) и используя выражение для углового коэффициента касательных $\operatorname{tg} \alpha_i = 1/s_i$ (из которого следует, что $\sin \alpha_i = 1/\sqrt{1+s_i^2}$, $\cos \alpha_i = s_i/\sqrt{1+s_i^2}$), получаем

$$\frac{d|s_1 - s_2|}{\sqrt{1+s_1^2}\sqrt{1+s_2^2}} = a|s_1 - s_2|\sqrt{1+s_3^2}, \quad (5)$$

откуда

$$d \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 = a, \quad (6)$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что в приведенном выше доказательстве не использовалось известное свойство параболы, о котором упоминается в условии задачи.

153. Не ограничивая общности, предположим, что $0 \leq x_0 < x_1 \leq 1$. Пусть x_2 — наибольшее из чисел в интервале $[0, x_1]$, для которых $f(x_2) = f(x_0)$. Нетрудно видеть, что $x_2^{-1} \leq x_1^{-1} + 2\pi$, поскольку, когда x пробегает все значения из интервала $[(x_1^{-1} + 2\pi)^{-1}, x_1]$ величина $\sin(1/x_1)$ принимает все значения из интервала $[-1, +1]$. Если $\alpha \leq 1/2$, то, используя неравенство Шварца, получаем

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_0)| &= |f(x_1) - f(x_2)| \leq \int_{x_2}^{x_1} |f'(x)| dx \leq \\ &\leq |x_1 - x_2|^{1/2} \left[\int_{x_2}^{x_1} |f'(x)|^2 dx \right]^{1/2} \leq |x_1 - x_0|^{1/2} \left[\int_{x_2}^{x_1} (1+x^{-1})^2 dx \right]^{1/2} \leq \\ &\leq |x_1 - x_0|^\alpha [x_1 - x_2 + 2 \ln(x_1/x_2) + x_2^{-1} - x_1^{-1}]^{1/2} \leq \\ &\leq |x_1 - x_0|^\alpha [1 + 2 \ln(1 + 2\pi) + 2\pi]^{1/2}. \end{aligned}$$

С другой стороны, если $\alpha > 1/2$, то достаточно выбрать $x_0 = (\pi n)^{-1}$ и $x_1 = [(n + 1/2)\pi]^{-1}$, где n — любое натуральное число, чтобы убедиться, что отношение

$$\frac{|f(x_1) - f(x_0)|}{|x_1 - x_0|^\alpha} = 2^\alpha \pi^{\alpha-1} n^{2\alpha-1} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{\alpha-1}$$

не ограничено.

154. Выберем прямоугольную систему координат, совместив ее начало с центром перекрестка и направив оси x и y вдоль дорог. Пусть положительное направление оси x совпадает с направлением движения хозяина собаки. В начальный момент времени он находится на перекрестке дорог, то есть в точке $(0, 0)$, а в любой последующий момент времени — в точке $(x_1, 0)$, где $x_1 > 0$. Пусть x и y — координаты точки, в которой в момент времени t находится собака (при $t = 0$ собака находилась в точке $(0, a)$). Скорость v хозяина зависит от времени, а собака бежит к нему со скоростью $2v$.

Поскольку луч зрения собаки, неотрывно следящей за хозяином, совпадает с касательной к траектории собаки, то

$$\dot{x}_1 = v, \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x - x_1}, \quad (2)$$

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 2v. \quad (3)$$

Разрешив уравнение (2) относительно x_1 и продифференцировав полученное выражение по t , находим

$$\dot{x}_1 = v = \dot{x} - \dot{y} \frac{dx}{dy} - y \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dy} \right) = -y \dot{y} \frac{d^2x}{dy^2}$$

(мы воспользовались тем, что $dx/dy = \dot{x}/\dot{y}$ и $d/dt = d/dy(dy/dt)$).

Подставив последнее соотношение в (3) и разделив правую и левую часть на $|\dot{y}| = -\dot{y}$, получим

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2} = 2y \frac{d^2x}{dy^2}.$$

Дважды интегрируя, находим последовательно

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{sh} \left(\int_a^y \frac{dy}{2y} \right),$$

$$x = \int_a^y \operatorname{sh} \left(\int_a^y \frac{dy}{2y} \right) dy = \frac{2a}{3} + (y - 3a) \frac{\sqrt{y}}{3\sqrt{a}}.$$

Заметим, что линия «погони» не зависит от v (и даже от того, постоянна или переменна эта скорость). Собака

догонит хозяина в точке $(2a/3, 0)$ через промежуток времени

$$T = \int_0^{2a/3} \frac{dx}{v}.$$

155. Если N_i — общее число произведений, которые можно составить из i упорядоченных элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$, то общее число произведений, которые можно составить из неупорядоченного набора тех же i элементов, равно $i!N_i$. Вычеркнув из такого произведения элемент a_i вместе с парой скобок, указывавших ту операцию умножения, в которой элемент a_i участвовал в качестве сомножителя, получим одно из $(i-1)!N_i$ произведений, составленных из первых $i-1$ элементов $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}$. Следовательно, подсчитав общее число различных произведений, получающихся из последнего произведения при добавлении нового сомножителя a_i и еще одной пары скобок, мы получим выражение для $i!N_i$.

Каждое из $(i-1)!N_{i-1}$ произведений элементов $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}$ содержит $2i-6$ скобок (условимся не заключать в скобки все произведение), а все произведение состоит из $i-1 + 2i-6 = 3i-7$ символов. Следовательно, i -й элемент a_i можно ввести в такое произведение $3i-7 + 1 = 3i-6$ способами, а связанную с ним пару скобок — двумя способами и получить $2(3i-4) \times (i-1)!N_{i-1}$ произведений, не все из которых, как мы увидим, различны. Два произведения могут совпадать лишь в том случае, если: 1) они получаются из одного и того же произведения $i-1$ первых элементов; 2) элемент a_i один раз вставлен перед уже имевшейся скобкой, а другой — после той же скобки. Поскольку произведение $i-1$ первых элементов $a_1, a_2, \dots, a_i$ содержит $2i-6$ скобок, то стечение двух указанных обстоятельств может встретиться $2(i-3)(i-1)!N_{i-1}$ раз. Докажем, что из четырех произведений, могущих возникнуть при каждом совпадении двух условий, различными являются только три.

Рассмотрим отдельно два случая.

1. Скобка, о которой говорилось выше, — первая (открывающая) скобка пары, внутри которой стоят сомножители P и Q . Этот случай разбивается на два подслучая: $R(PQ)$ и $(PQ)R$ в зависимости от того, с какой

стороны производится следующее по порядку умножение. Рассмотрим подслучай $R(PQ)$. Если элемент a_i вставлен непосредственно после скобки, то получается произведение вида $R(a_iPQ)$. Расставив новую пару скобок, получим либо произведение $R(a_i(PQ))$, либо произведение $R((a_iP)Q)$. Если элемент a_i вставлен перед той же скобкой, то возникает произведение вида $Ra_i(PQ)$, которое после расстановки новой пары скобок переходит либо в $(Ra_i)(PQ)$, либо в $R(a_i(PQ))$. Из полученных произведений первое совпадает с четвертым, так что различными оказываются только три произведения. Аналогично обстоит дело с подслучаем $(PQ)R$.

2. Скобка, о которой говорилось выше, — вторая (закрывающая) скобка пары. Этот случай сводится к предыдущему, если произведения читать не слева направо, а справа налево.

Таким образом,

$$i!N_i = 2(3i-6)(i-1)!N_{i-1} - 2(i-3)(i-1)!N_{i-1} = \\ = 2(2i-3)(i-1)!N_{i-1}$$

или

$$N_i = \frac{2(2i-3)}{i} N_{i-1}.$$

Понижая последовательно значения индекса и используя соотношение $N_2 = 2(2 \cdot 2 - 3)/2 = 2 \cdot 1/2$, получаем

$$N_i = \frac{2(2i-3)2(2i-5) \dots 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{i(i-1) \dots 3 \cdot 2} = \\ = \frac{2^{i-1}(2i-3)(2i-5) \dots 3 \cdot 1}{i!} = \\ = \frac{2^{i-1}(2i-2)!}{2^{i-1}(i-1)!i!} = \frac{(2i-2)!}{(i-1)!i!} = \frac{1}{i-1} \binom{2i-2}{i-2}.$$

156. Пусть P — любой из углов треугольника ABC , p — противолежащая сторона того же треугольника, а q и r — стороны, между которыми заключен угол P . Проведем прямую, отсекающую на сторонах q и r отрезки длиной ϑq и $\vartheta' r$ (считая от вершины угла P), где ϑ и ϑ' — положительные числа, меньшие 1. Если проведенная прямая делит пополам площадь треугольника ABC , равную $qr \sin p/2$, то $\vartheta\vartheta' = 1/2$; следовательно, должны выполняться неравенства $1/2 < \vartheta < 1$. Если эта прямая, кроме того, делит пополам периметр треугольника ABC , то $\vartheta q + \vartheta' r = (p + q + r)/2$, или $2\vartheta q + r/\vartheta = p + q + r$.

Пусть

$$f(\vartheta) = 2\vartheta^2 q + r - \vartheta(p + q + r).$$

Исследуем, когда на интервале $1/2 < \vartheta < 1$ может выполняться равенство $f(\vartheta) = 0$. На концах интервала $f(\vartheta)$ принимает значения $f(1/2) = (r - p)/2$, $f(1) = q - p$. Минимальное значение квадратный трехчлен $f(\vartheta)$ принимает в точке ϑ_0 , где $f'(\vartheta_0) = 0$, то есть $\vartheta_0 = (p + q + r)/4q$ и $f(\vartheta_0) = [8qr - (p + q + r)^2]/8q$.

Таким образом, если положить $p = b$, то $f(1/2)$ и $f(1)$ будут иметь противоположные знаки, $f(\vartheta)$ один раз обращается в нуль и существует ровно одна прямая, пересекающая стороны a и c и делящая пополам одновременно периметр и площадь треугольника ABC .

Если $p = c$, то $f(1/2)$, $f(1)$ и $f(\vartheta_0)$ отрицательны, поскольку из неравенства $p > q$ следует, что $(p + q + r)^2 > (2q + r)^2 = (2q - r)^2 + 8qr \geq 8qr$. Поэтому не существует прямой, пересекающей стороны a и b и делящей пополам периметр и площадь треугольника ABC .

Наконец, если $p = a$, то $f(1/2)$ и $f(1)$ положительны, $f(\vartheta)$ имеет нуль, один или два корня в интервале $(1/2, 1)$ и существует столько же прямых, пересекающих стороны b и c и делящих пополам периметр и площадь треугольника ABC , в зависимости от того, какое из трех соотношений $f(\vartheta_0) \geq 0$, то есть $(a + b + c)^2 \geq 8bc$ ¹, выполняется. К виду, соответствующему условию задачи, эти соотношения можно привести следующими преобразованиями:

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2(-b - a) &\geq 8bc(-b - a) = \\ &= -8bc(a + b + c) + 8bc^2, \\ (a + b + c)^2(b - a) &\geq 2b(a + b + c)^2 - 8bc(a + b + c) + \\ &+ 8bc^2 = 2b(a + b + c - 2c)^2, \\ \frac{b - a}{b} &\geq \frac{2(a + b - c)^2}{(a + b + c)^2} = \\ &= 2 \left[\frac{(a - b + c)(a + b - c)}{(a + b + c)(b + c - a)} \right] \left[\frac{(b + c - a)(b - c + a)}{(a + b + c)(a - b + c)} \right], \\ 1 - \frac{\sin A}{\sin B} &\geq 2 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{A}{2} \right) \operatorname{tg}^2 \left(\frac{B}{2} \right), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

¹ Поскольку стороны b и c входят в это отношение симметрично, в последующем мы можем переставлять их, оставляя само соотношение неизменным.

Однако если $B = C$, то $\sin B = \cos(A/2)$ и условие $(a+b+c)^2 \cong 8bc$ вырождается в $(a+2b)^2 \cong 8b^2$, или $(\sin A + 2 \sin B)^2 \cong 8 \sin^2 B$, откуда

$$\sin A + 2 \cos\left(\frac{A}{2}\right) \cong 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{A}{2}\right).$$

Подставляя в левую часть этого соотношения $\sin A = 2 \sin(A/2) \cos(A/2)$, получаем

$$\sin\left(\frac{A}{2}\right) \cong \sqrt{2} - 1 = \sin\left(\frac{A_0}{2}\right),$$

откуда $A \cong A_0$.

157. Чтобы доказать правое неравенство, разложим в ряд Тейлора функцию $\ln(1+z)$, представляющую главное значение логарифма при $|z| < 1$:

$$\begin{aligned} (1+z) \ln(1+z) &= (1+z) \left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \right) = \\ &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots + z^2 - \frac{z^3}{2} + \frac{z^4}{3} - \dots = \\ &= z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{2 \cdot 3} + \frac{z^4}{3 \cdot 4} - \dots = \\ &= z \left\{ 1 + z \left[\frac{1}{2} - \frac{z}{2 \cdot 3} + \frac{z^2}{3 \cdot 4} - \dots \right] \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $|z| < 1$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} |(1+z) \ln(1+z)| &\leq \\ &\leq |z| \left\{ 1 + |z| \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots \right] \right\} = \\ &= |z| \left\{ 1 + |z| \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots \right] \right\} = \\ &= |z| (1 + |z|), \end{aligned}$$

или

$$|\ln(1+z)| \leq \frac{|z|(1+|z|)}{|1+z|}.$$

Таким образом, правое неравенство доказано.

Рассмотрим теперь левое неравенство. Функция

$$w = \ln(1+z) = \int_0^z \frac{dt}{1+t}$$

(главное значение логарифма) регулярна в области D , получающейся из плоскости z при разрезании ее вдоль отрицательной вещественной полуоси от -1 до $-\infty$. Функция w отображает область D на полосу $-\pi < \operatorname{Im}(w) < \pi$. Выберем в области D фиксированную точку z_0 и рассмотрим ее образ $w_0 = \ln(1 + z_0)$ при отображении, осуществляемом функцией w . Соединим точку w_0 с точкой $w = 0$ отрезком прямой $0w_0$. Прообразом этого отрезка на плоскости z служит некоторая кривая C , соединяющая точку z_0 с точкой $z = 0$. Заметим, что комплексное число $\int_C \frac{dt}{1+t}$ по любой части кривой C имеет (при соответствующем выборе ориентации) тот же аргумент, что и число w_0 . Поэтому длину отрезка $0w_0$, то есть $|w_0|$, можно представить в виде

$$|w_0| = \int_C \frac{|dt|}{|1+t|}.$$

Пусть C' — дуга кривой C от точки $z = 0$ до первого пересечения кривой C с окружностью $|z| = |z_0|$. Тогда

$$|w_0| \geq \int_{C'} \frac{dt}{|1+t|},$$

а поскольку на дуге C' выполняются неравенства $|1+t| \leq 1+|t| \leq 1+|z_0|$, то

$$|w_0| \geq \int_{C'} \frac{|dt|}{|1+t|} = \frac{1}{1+|z_0|} \int_{C'} |dt| \geq \frac{|z_0|}{1+|z_0|}.$$

Таким образом, левое неравенство доказано для всей области D .

158. а. Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы ее начало совпало с вершиной B , а положительное направление оси x — со стороной BC . Тогда вершины треугольников ABC и $A'B'C'$ будут иметь следующие координаты:

$$\begin{aligned} A(c \cos B, c \sin B), \quad B(0, 0), \quad C(a, 0); \\ A'(c \cos B, c \sin B - ka), \quad B'(kb \sin C, kb \cos C), \\ C'(a - kc \sin B, kc \cos B), \end{aligned}$$

так что

$$X_1 + X_2 + X_3 = c \cos B + a + k(b \sin C - c \sin B) = \\ = c \cos B + a,$$

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 = c \sin B - k(a - b \cos C - c \cos B) = c \sin B,$$

где X_1, Y_1 — координаты вершины A' , X_2, Y_2 — вершины B' и X_3, Y_3 — вершины C' . Последние два соотношения доказывают, что центры тяжести треугольников ABC и $A'B'C'$ совпадают.

б. Пусть Δ и Δ_1 — площади треугольников ABC и $A'B'C'$. Записав 2Δ в виде определителя, получим после несложных преобразований

$$2\Delta_1 = 2\Delta(1 + 3k^2) - kt, \quad t = a^2 + b^2 + c^2. \quad (2)$$

Площадь Δ_1 достигает минимального значения, равного $\Delta - t^2/48\Delta$ при $k = t/12\Delta$. При $k \rightarrow \pm \infty$ площадь Δ_1 неограниченно возрастает.

Если ω и ω_1 — углы Брокера треугольников ABC и $A'B'C'$, то

$$\operatorname{ctg} \omega = \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{Rt}{abc} = \frac{t}{4\Delta}.$$

Пусть a_1, b_1, c_1 — стороны треугольника $A'B'C'$. Тогда

$$a_1^2 = (B'C')^2 = (a - 2kb \sin C)^2 + k^2(c \cos B - b \cos C)^2 = \\ = (a - 4k\Delta/a)^2 + k^2(c^2 - b^2)^2/a^2.$$

Но $16\Delta^2 + (c^2 - b^2)^2 = a^2(2b^2 + 2c^2 - a^2)$, поэтому

$$a_1^2 = a^2 - 8k\Delta + k^2(2b^2 + 2c^2 - a^2). \quad (3)$$

Аналогичные выражения справедливы и для b_1 и c_1 . Полагая $t_1 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2$, находим

$$\operatorname{ctg} \omega_1 = \frac{t_1}{4\Delta_1} = \frac{t(1 + 3k^2) - 24k\Delta}{4\Delta(1 + 3k^2) - 2kt}. \quad (4)$$

Если $\omega = \omega_1$, то после упрощений мы приходим к соотношению $kt^2 = 48k\Delta^2$. Возможны два случая: либо $k=0$, либо $t^2 = 48\Delta$. Второй случай соответствует равенству $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 3(2\sum b^2c^2 - \sum a^4)$, то есть соотношению $\sum a^4 - \sum b^2c^2 = 0$, или

$$(b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 + (a^2 - b^2)^2 = 0.$$

Таким образом, треугольники ABC и $A'B'C'$ имеют один и тот же угол Брокера в том и только в том случае, если треугольники ABC и $A'B'C'$ конгруэнтны или треугольник ABC равносторонний.

в. При $k = \pm 1$ из соотношения (3) получаем

$$a_1^2 = \mp 8\Delta + (2b^2 + 2c^2) = 2(b^2 + c^2 \mp 2bc \sin A).$$

При $k = 1$

$$\begin{aligned} (AB')^2 &= (c \cos B - b \sin C)^2 + (c \sin B - b \cos C)^2 = \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \sin A, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (AC')^2 &= (a - c \sin B - c \cos B)^2 + (c \sin B - c \cos B)^2 = \\ &= (b \cos C - c \sin B)^2 + (b \sin C - c \cos B)^2 = \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \sin A. \end{aligned}$$

Следовательно, A совпадает с центром одного из квадратов со стороной $B'C'$. При $k = -1$ аналогичные выкладки приводят к тем же выражениям для a_1^2 , $(AB')^2$, $(AC')^2$, в которых знак минус заменен знаком плюс, поэтому и при $k = -1$ вершина A совпадает с центром одного из квадратов со стороной $B'C'$.

159. Поскольку симметрический многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно представить в виде многочлена от элементарных симметрических функций $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$, то достаточно доказать, что любая из функций σ_i представима в виде многочлена от $y_1, \dots, y_i$.

Симметрический многочлен y_k можно представить в виде

$$y_k = c_k \sigma_k + g_k(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{k-1}),$$

где g_k — многочлен от $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{k-1}$ степени не выше k , то есть степень любого его члена $\sigma_1^{t_1} \sigma_2^{t_2} \dots \sigma_{k-1}^{t_{k-1}}$ (коэффициент опущен) удовлетворяет неравенству

$$t_1 + 2t_2 + \dots + (k-1)t_{k-1} \leq k.$$

Докажем прежде всего, что ни один из коэффициентов c не равен нулю. Предположим противное. Пусть

Точки A', B', C' имеют нормальные координаты¹

$x_{A'} = a/2, x_{B'} = b(\sin C - \cos C)/2, x_{C'} = c(\sin B - \cos B)/2,$
 $y_{A'} = a(\sin C - \cos C)/2, y_{B'} = b/2, y_{C'} = c(\sin A - \cos A)/2,$
 $z_{A'} = a(\sin B - \cos B)/2, z_{B'} = b(\sin A - \cos A)/2, z_{C'} = c/2,$
 поэтому

$$x_{A'} + x_{B'} + x_{C'} = h_a, \quad y_{A'} + y_{B'} + y_{C'} = h_b, \\ z_{A'} + z_{B'} + z_{C'} = h_c,$$

где h_a, h_b, h_c — высоты треугольника ABC . Следовательно, центр тяжести треугольника $A'B'C'$ совпадает с центром тяжести G треугольника ABC . Поскольку $2(A'B'C') = S(2 - \operatorname{ctg} V)$, то при $\operatorname{ctg} V = 2$ треугольник $A'B'C'$ вырождается и вершины A', B', C' коллинеарны. Те же соотношения выполняются и для треугольника $A''B''C''$ относительно треугольника $A'B'C'$. Следовательно, при $\operatorname{ctg} V' = 2$ треугольник $A''B''C''$ вырождается и вершины A'', B'', C'' лежат на прямой, проходящей через центр тяжести треугольника $A'B'C'$, который по доказанному выше совпадает с центром тяжести G треугольника ABC .

Но

$$\operatorname{ctg} V' = \frac{\overline{A'B'}^2 + \overline{B'C'}^2 + \overline{C'A'}^2}{4(A'B'C')} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 6S}{2S(2 - \operatorname{ctg} V)},$$

а по условиям задачи

$$\operatorname{ctg} V = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)/4S}{4S} = 7/4.$$

Следовательно, $\operatorname{ctg} V' = 2$. Тем самым утверждения задачи «а» и «б» доказаны.

в. Середины отрезков A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 имеют нормальные координаты

$$\begin{array}{lll} a & a(\sin C - 2 \cos C)/2 & a(\sin B - 2 \cos B)/2 \\ b(\sin C - 2 \cos C)/2 & b & b(\sin A - 2 \cos A)/2 \\ c(\sin B - 2 \cos B)/2 & c(\sin A - 2 \cos A)/2 & c \end{array}$$

¹ Нормальными координатами точки P относительно треугольника ABC называются: x — расстояние от P до BC , y — расстояние от P до CA , z — расстояние от P до AB . — Прим. ред.

Прямые, соединяющие середины отрезков $A_1'A_2'$, $B_1'B_2'$, $C_1'C_2'$ с вершинами A , B , C треугольника ABC , пересекаются в точке с нормальными координатами, определяемыми соотношениями

$$x(\sin A - 2 \cos A) = y(\sin B - 2 \cos B) = z(\sin C - 2 \cos C).$$

Эти прямые параллельны, если

$$\sum \sin A (\sin B - 2 \cos B) (\sin C - 2 \cos C) = 0,$$

или

$$7 \sin A \sin B \sin C - 2 \sum \sin^2 A = 0,$$

что в свою очередь сводится к соотношению $a^2 + b^2 + c^2 = 7S$, откуда $\operatorname{ctg} V = 7/4$. Тем самым утверждение задачи «в» доказано.

г. Пусть H_1 , H_2 , H_3 — основания высот треугольника ABC . Стороны, углы и радиус описанного круга ортоцентрического треугольника $H_1H_2H_3$ равны соответственно $\overline{H_2H_3} = a \cos A$, $\overline{H_3H_1} = b \cos B$, $\overline{H_1H_2} = c \cos C$; $H_1 = \pi - 2A$, $H_2 = \pi - 2B$, $H_3 = \pi - 2C$;

$$r = \frac{\overline{H_2H_3}}{2 \sin H_1} = \frac{a \cos A}{2 \sin 2A} = \frac{2R \sin A \cdot \cos A}{2 \sin 2A} = \frac{R}{2}.$$

Нормальные координаты ортоцентра H' треугольника $H_1H_2H_3$ относительно этого треугольника удовлетворяют соотношениям

$$x \cos H_1 = y \cos H_2 = z \cos H_3 = 2r \cos H_1 \cos H_2 \cos H_3.$$

Расстояние от точки H' до BC равно

$$\begin{aligned} \frac{y + z}{2 \cos \frac{\pi - H_1}{2}} &= r \frac{(\cos H_2 + \cos H_3) \cos H_1}{\sin \frac{H_1}{2}} = \\ &= \frac{R}{2} \frac{(\cos 2B + \cos 2C) \cos 2A}{\cos A} = R \frac{\cos (B + C) \cos (B - C) \cos 2A}{\cos A} = \\ &= -R \cos (B - C) \cos 2A. \end{aligned}$$

Таким образом, точка H' относительно треугольника ABC имеет нормальные координаты

$$\begin{aligned} x_{H'} &= -R \cos 2A \cos (B - C), \quad y_{H'} = -R \cos 2B \cos (C - A), \\ z_{H'} &= -R \cos 2A \cos (A - B). \end{aligned}$$

Но $\cos 2A \cos (B - C)$ можно представить в виде

$$-\frac{1}{2} \left[\sin A \sum \sin 2A + \cos A \left(\sum \cos 2A - 1 \right) \right],$$

а

$$\sum \sin 2A = \frac{2S}{R^2}, \quad \sum \cos 2A - 1 = 2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R^2}.$$

Если x_K и x_O — расстояния от точки Лемуана¹ K и центра O вписанной окружности треугольника ABC до стороны BC , то

$$x_K = R \operatorname{tg} V \sin A, \quad x_O = R \cos A.$$

Следовательно,

$$x_{H'} - x_O = S \operatorname{ctg} V (x_K - x_O) / R^2,$$

и

$$\frac{x_{H'} - x_O}{x_K - x_O} = \frac{S \operatorname{ctg} V}{R^2}.$$

Аналогично ($y_{H'}$ — расстояние от H' до CA и т. д.)

$$\frac{y_{H'} - y_O}{y_K - y_O} = \frac{S \operatorname{ctg} V}{R^2},$$

откуда видно, что три точки H' , K , O лежат на одной прямой и

$$\frac{H'O}{KO} = \frac{S \operatorname{ctg} V}{R^2}.$$

По известным формулам из геометрии треугольника $OK = R \operatorname{tg} V \sqrt{\operatorname{ctg}^2 V - 3}$, откуда $OH' = S \sqrt{\operatorname{ctg}^2 V - 3} / R$. Поскольку по условиям задачи $\operatorname{ctg} V = 7/4$, то $OH' = S/4R$. Но $2S/R$ — периметр ортоцентрического треугольника. Следовательно, длина отрезка OH' составляет одну восьмую периметра ортоцентрического треугольника. Утверждение задачи «г» доказано.

161. Разлагая общий член ряда $1/(nk+1)(nk+2) \dots (nk+k)$ на простейшие дроби, нетрудно заметить, что эти дроби имеют общий множитель $1/(k-1)!$, а числители дробей совпадают с биномиальными коэф-

¹ Точкой Лемуана в треугольнике ABC называется такая точка K , для которой площади треугольников KBC , KCA , KAB пропорциональны квадратам сторон BC , CA , AB соответственно. — *Прим. ред.*

фициентами в разложении $(1 - 1)^{k-1}$. Это наводит на мысль выразить сумму исходного ряда в виде $f(1)$, где

$$f(x) = \frac{1}{(k-1)!} \left[\frac{x}{1} - \binom{k-1}{1} \frac{x^2}{2} + \binom{k-1}{2} \frac{x^3}{3} - \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^{k-1} \binom{k-1}{k-1} \frac{x^k}{k} + \frac{x^{k+1}}{k+1} - \binom{k-1}{1} \frac{x^{k+2}}{k+2} + \right. \\ \left. + \binom{k-1}{2} \frac{x^{k+3}}{k+3} - \dots + (-1)^{k-1} \binom{k-1}{k-1} \frac{x^{2k}}{2k} + \dots \right]$$

(в каждом цикле члены имеют одни и те же биномиальные коэффициенты, в то время как показатели x монотонно возрастают вместе с знаменателями). Непосредственно видно, что

$$f'(x) = \frac{1}{(k-1)!} \frac{(1-x)^{k-1}}{(1-x^k)}.$$

Таким образом, исходный ряд можно представить в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)k]!}{[nk]!} = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^1 \frac{(1-x)^{k-2}}{1+x+x^2+\dots+x^{k-1}} dx.$$

Разлагая подынтегральное выражение на простейшие дроби, запишем его в виде $\sum_{j=1}^{k-1} B_j/(x - \alpha_j)$, где α_j — один из комплексных корней k -й степени из 1, а $B_j = -\alpha_j(1 - \alpha_j)^{k-1}/k$. Итак, вычисление суммы исходного ряда сводится к вычислению конечной суммы

$$\frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k-1} (-\alpha_j)(1 - \alpha_j)^{k-1} \ln \left(\frac{1 - \alpha_j}{-\alpha_j} \right).$$

Нетрудно видеть, что мнимая часть суммы равна нулю. Обозначив вещественную часть выражения, стоящего под знаком суммы, через $\varphi(k, j)/2^k$, где

$$\varphi(k, j) = \left(\sin \frac{\pi_j}{k} \right)^{k-1} \left[\cos \frac{\pi(k-2j)(k+1)}{2k} \ln \left(2 \sin \frac{\pi_j}{k} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\pi}{2k} (k-2j) \sin \frac{\pi(k-2j)(k+1)}{2k} \right],$$

преобразуем сумму исходного ряда к виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)k]!}{(nk)!} = \begin{cases} \frac{2^k}{k!} \sum_{j=1}^{(k-1)/2} \varphi(k, j) & \text{при нечетном } k, \\ \frac{2^{k-1} \ln 2}{k!} + \frac{2^k}{k!} \sum_{j=1}^{[(k-1)/2]} \varphi(k, j) & \text{при четном } k. \end{cases}$$

В качестве примеров приведем несколько рядов, вычисленных по этой формуле:

$$k=2: \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots = \ln 2,$$

$$k=3: \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots = \frac{1}{4} \left[\frac{\pi \sqrt{3}}{3} - \ln 3 \right],$$

$$k=4: \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \dots = \frac{1}{4} \left[\ln 2 - \frac{\pi}{6} \right],$$

$$k=5: \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} + \dots$$

$$\dots = \frac{1}{48} \left[\ln 2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \ln 20 + \sqrt{5} \ln (5 - \sqrt{5}) + \right. \\ \left. + \frac{\pi \sqrt{2}}{10} (\sqrt{25 + 11\sqrt{5}} - 3\sqrt{25 - 11\sqrt{5}}) \right].$$

162. а. Не ограничивая общности, предположим, что коэффициент при старшем члене многочлена $f(x)$ равен единице. Тогда

$$f'(x_1) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n),$$

где $n > 1$ и все x_i попарно различны. Докажем, что $\sum_{i=1}^n 1/f'(x_i) = 0$. Действительно, поскольку

$$\frac{1}{f'(x_1)} = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \dots (x_1 - x_n)} = \\ = \frac{1}{x_1 - x_2} \left[\frac{1}{(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \dots (x_1 - x_n)} \right] + \\ + \frac{1}{x_1 - x_3} \left[\frac{1}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_4) \dots (x_3 - x_n)} \right] + \dots \\ \dots + \frac{1}{x_1 - x_n} \left[\frac{1}{(x_n - x_2)(x_n - x_3) \dots (x_n - x_{n-1})} \right],$$

то первое слагаемое в правой части равно $-1/f'(x_2)$, второе равно $1/f'(x_3)$, ..., а последнее равно $-1/f'(x_n)$.

Следовательно, $\sum_{i=1}^n 1/f'(x_i) = \sum_{k=2}^{n-2} (1/f'(x_k) - 1/f'(x_k)) = 0$.

Утверждение задачи «а» доказано.

б. Поскольку $\rho_j = 1/f''(\bar{x}_j)$, где $f'(\bar{x}_j) = 0$ и все $\bar{x}_j$ — вещественны и различны, то второе утверждение задачи (утверждение «б») следует из предыдущего при $n > 2$, если функцию $f(x)$ заменить ее производной $f'(x)$.

163. Пусть $p_1, p_2, \dots, p_k$ — различные простые делители числа n , а $m = n/p_1 p_2 \dots p_k$. Тогда $f(n)$ — сумма всех чисел, являющихся одновременно кратными m и делителями числа n .

Функция $f(n)$ допускает и иные интерпретации. Например, пусть S — любой делитель числа n , не делящийся на квадрат целого числа, а T — его дополнительный множитель ($ST = n$). Тогда функция $f(n)$ равна сумме всех чисел T . Разумеется, если различные простые делители p_i ($i = 1, 2, \dots, k$) входят в разложение числа n с показателями степени a_i и $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 1$, то функция $f(n)$ совпадает с суммой всех делителей числа n . Все утверждения следуют из двух очевидных соотношений:

$$f(p_i^a) = p_i^a + p_i^{a-1}, \quad (1)$$

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad (2)$$

где x и y — взаимно простые числа.

164. По-видимому, удобнее вычислить якобиан $\partial(c_1, c_2, \dots, c_n)/\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и заметить, что $\partial(c_n, c_{n-1}, \dots, c_1)/\partial(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-1)^\mu \partial(c_1, c_2, \dots, c_n)/\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $\mu = n(n-1)/2$. Как показывают прямые выкладки, при $n = 2, 3$.

$$\frac{\partial(c_1, c_2, \dots, c_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j),$$

то есть якобиан коэффициентов $c_1, c_2, \dots, c_n$ по корням $x_1, x_2, \dots, x_n$ совпадает с определителем Вандермонда $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Докажем это утверждение для произвольного n методом математической индукции. При $n = 2, 3$ утверждение верно. Предположим, что оно

выполняется при $m = n - 1$. Пусть $c_k = S_k(x_1, \dots, x_n)$ (формулы Виета), $c_0 = 1 = S_0(x_1, \dots, x_n)$. Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i} S_k(x_1, \dots, x_n) = S_{k-1}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

В якобиане $\partial(c_1, \dots, c_n)/\partial(x_1, \dots, x_n)$ вычтем первый столбец из каждого последующего и воспользуемся соотношением

$$\begin{aligned} S_{k-1}(x_2, \dots, x_n) - S_{k-1}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) = \\ = (x_j - x_1) S_{k-2}(x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \\ (j, k = 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Разлагая получившийся определитель по элементам первой строки, вынесем множитель $\prod (x_1 - x_j)$ ($j = 2, \dots, n$) и получим, что наш якобиан равен

$$\frac{\partial(d_1, \dots, d_{n-1})}{\partial(x_2, \dots, x_{n-1})} \prod_{j=2}^n (x_1 - x_j), \quad d_i = S_i(x_2, \dots, x_n),$$

откуда при помощи предположения индукции заключаем, что доказываемое утверждение верно и при $m = n$.

165. Исключив из рассмотрения тривиальный случай, когда все цифры числа N_0 одинаковы и $N_k = N_0$ при любом k , докажем, что число N_0 равно 142 857 (период десятичного разложения дроби $1/7$) или составлено из группы цифр 142 857, повторенной несколько раз.

Прежде всего заметим, что при любом j

$$a_1 \leq a_j, \quad (1)$$

поскольку в противном случае число N_{j-1} было бы меньше N_0 и не могло бы быть кратным числу N_0 . Если среди цифр числа N_0 есть равные a_1 , то пусть $(j+1)$ — наименьший индекс, при котором $a_{j+1} = a_1$. Тогда $N_j = N_0$ и $a_{j+2} = a_2$, $a_{j+3} = a_3, \dots$. Иначе говоря, число N_0 состоит из периода $N'_0 = a_1 a_2 \dots a_j$, повторенного подряд несколько раз, причем для цифр периода N'_0 остается в силе неравенство (1).

Предположим, что $a_1 = 1$. Тогда, поскольку последняя цифра числа N_1 равна единице, число N_1/N_0 не является четным и отлично от 5. Пусть $N_1/N_0 = 3$. Из равенства $a_2 a_3 \dots a_n 1 / 1 a_2 \dots a_{n-1} a_n = 3$ следует, что

$a_n = 7$. В свою очередь из равенства $a_2 a_3 \dots 71/1a_2 \dots$
 $\dots a_{n-1} 7 = 3$ следует, что $a_{n-1} = 5$. Аналогично нахо-
 дим $a_{n-2} = 8$, $a_{n-3} = 2$, $a_{n-4} = 4$. Если $n = 6$, то $a_{n-4} =$
 $= a_2 = 4$ — начальная цифра числа N_1 , и построение
 числа N_0 на этом заканчивается: $N_0 = 142857$. Если
 $n > 6$, то группа цифр 142857 повторяется: $a_{n-5} = 1$,
 $a_{n-6} = 7$, $a_{n-7} = 5$, $\dots$. В этом случае число N_0 со-
 стоит из нескольких групп 142857. При $a_1 = 1$ не суще-
 ствует значений a_2 , при которых число $a_2 \dots / a_1 a_2 \dots =$
 $= N_1/N_0$ могло бы быть равным 7 или 9.

При $a_1 = 2$ и $N_1/N_0 = 2$ из $a_2 \dots a_n 2/2a_2 \dots a_n = 2$
 следует, что $a_n = 6$ (поскольку в силу неравенства (1)
 $a_n \neq 1$), но не существует значений a_{n-1} , при которых
 выполнялось бы равенство $a_2 \dots a_{n-1} 6 2/2a_2 \dots a_{n-1} 6 =$
 $= 2$. При $a_1 = 2$ и $N_1/N_0 = 3$ из $a_2 a_n \dots 2/2a_2 \dots a_n = 3$
 следует, что $a_n = 4$ и $a_{n-1} = 1$. Последнее противоречит
 неравенству (1).

Аналогичные элементарные соображения позволяют
 исключить все остальные значения a_1 и N_1/N_0 .

Тем самым утверждение, приведенное в начале ре-
 шения, полностью доказано.

166. Поскольку квадраты S_1 и S_2 расположены в еди-
 ничном квадрате и не имеют общих точек, то можно
 провести прямую l , не имеющую общих точек с S_1 и S_2
 и разбивающую единичный квадрат на две части U_1
 и U_2 , такие, что U_1 содержит квадрат S_2 , а U_2 — квад-
 рат S_1 . Более того, прямую l можно выбрать так, чтобы
 она образовала с двумя диагоналями единичного квад-
 рата неравносторонний прямоугольный треугольник.
 Пусть P — вершина того из острых углов этого тре-
 угольника, который больше 45° . Точка P должна лежать
 внутри единичного квадрата, поскольку в противном
 случае прямая l целиком проходила бы вне открытого
 единичного квадрата. Предположим, что точка P лежит
 на диагонали $A_1 A_2$, где $A_1 \in U_1$, $A_2 \in U_2$. Поскольку
 угол при вершине P больше 45° , то квадрат с диаго-
 налью PA_1 целиком расположен внутри U_1 , а квадрат
 с диагональю PA_2 — целиком внутри U_2 . Утверждение
 задачи следует из неравенств $S_i < \frac{\sqrt{2}}{2} PA_i$, где S_i —
 сторона квадрата, $i = 1, 2$, которые в свою очередь вы-
 текают непосредственно из следующей теоремы:

Теорема. Из всех квадратов, вписанных в прямоугольный треугольник, наибольшей площадью обладает тот, у которого одна из вершин совпадает с вершиной прямого угла.

Доказательство. Пусть вершины прямоугольного треугольника ABC расположены в точках $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $C(0, 0)$, где $a > 0$, $b > 0$ (предполагается, что задана некоторая прямоугольная система координат)

Рассмотрим множество $\sum$ квадратов $RSTU$, у которых вершина R лежит на оси x , вершина S — на оси y , а вершина T — на прямой $bx + ay - ab = 0$. Ясно, что если среди квадратов, содержащихся в треугольнике ABC , имеется квадрат с наибольшей площадью, то вершины такого квадрата лежат на каждой из сторон треугольника ABC ; обозначив соответствующим образом вершины треугольника и квадрата, мы можем считать последний принадлежащим множеству $\sum$.

Из элементарных соображений ясно, что вершина S равно отстоит от прямой AB и перпендикулярной к AB прямой m , проходящей через вершину R . Следовательно, если $S = (0, s)$, то уравнение прямой m имеет вид $-ax + by - (a + b)s + ab = 0$, так что вершина R расположена в точке $(r, 0)$, координата r которой удовлетворяет соотношению

$$ar = -s(a + b) + ab. \quad (1)$$

Пусть квадрат $R_1S_1T_1U_1$ — элемент множества $\sum$, лежащий внутри треугольника ABC , вершина R_1 которого расположена в начале координат, а квадрат $R_2S_2T_2U_2$ — элемент множества $\sum$, лежащий внутри треугольника ABC и такой, что его сторона T_2U_2 расположена на стороне AB . Легко видеть, что первый квадрат имеет вершину $S[0, ab/(a + b)]$, а второй квадрат — вершины $R(ka, 0)$, $S(0, kb)$, где $k(a^2 + ab + b^2) = ab$.

Для всех остальных квадратов из множества $\sum$ ордината вершины S удовлетворяет неравенствам

$$kb \leq s \leq \frac{ab}{a + b} \quad (2)$$

(ясно, что $k = ab/(a^2 + ab + b^2) < ab/(ab + b^2) = a/(a + b)$).

Площадь квадрата $RSTU$ из множества Σ равна

$$SR^2 = s^2 + r^2 = s^2 + \left(b - s \frac{a+b}{a}\right)^2 \quad (3)$$

в силу соотношения (1). График квадратного трехчлена по s в правой части (3) обращен вогнутостью вверх, поэтому трехчлен принимает максимальное значение на концах интервала (2), то есть площадь максимальна либо у $R_1S_1T_1U_1$ либо у $R_2S_2T_2U_2$. Простое сравнение показывает, что площадь квадрата $R_1S_1T_1U_1$ больше, чем площадь квадрата $R_2S_2T_2U_2$. Теорема доказана.

167. Пусть в треугольнике ABC угол A меньше угла B . Опишем вокруг треугольника ABC окружность с центром в точке O . Пусть M — середина стороны AB ,

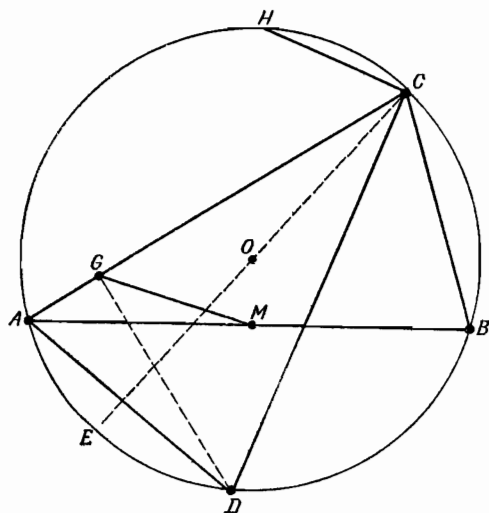


Рис. 21.

H и D — точки пересечения описанной окружности с прямой, проходящей через M перпендикулярно стороне AB (CD — биссектриса внутреннего, а CH — внешнего угла при вершине C), E — точка пересечения прямой CO с описанной окружностью и G — проекция точки D на сторону AC (рис. 21).

Докажем, что $GM \parallel HC$. Поскольку углы AGD и AMD — прямые, то точки G и M лежат на дуге окружности, описанной на отрезке AD как на диаметре. Сле-

довательно, четырехугольник $ADMG$ можно вписать в окружность, и углы AGM и ADM в сумме составляют 180° . Поскольку углы CGM и AGM в сумме также составляют 180° , то $\angle ADM = \angle CGM$. Наконец, заметив, что углы HCA и ADM равны как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности, получим $\angle HCA = \angle CGM$. Следовательно, $HC \parallel GM$. Поскольку углы CAE и CGD прямые и стороны CA и CG лежат на одной прямой, то $AE \parallel GD$.

Рассмотрим теперь шестиугольник $AMDC\infty_1\infty_2$, где пятая и шестая вершины ∞_1 и ∞_2 — бесконечно удаленные точки, принадлежащие парам параллельных прямых HC и GM , AE и GD . Диагонали этого шестиугольника CA , ∞_1M и ∞_2D пересекаются в точке G . Следовательно, по теореме Бриансона (III.4), стороны шестиугольника $AMDC\infty_1\infty_2$ совпадают с касательными к некоторой кривой второго порядка. Поскольку эта кривая касается бесконечно удаленной прямой, она — парабола (III.3). Аналогичные рассуждения показывают, что стороны шестиугольника $\infty_1CDNE\infty_2$ (где N — точка пересечения BE и DM) также касаются некоторой параболы, причем той же самой, так как пять из шести прямых, определяемых сторонами шестиугольников $AMDC\infty_1\infty_2$ и $\infty_1CDNE\infty_2$, совпадают. Поскольку пары касательных к параболе, проведенные из точек C и M , взаимно перпендикулярны, то прямая CM совпадает с директрисой параболы. Отразим прямую CM сначала относительно прямой CD , а затем относительно прямой MB . Точка пересечения образов прямой CM при этих отражениях совпадает с фокусом параболы*.

168. Задача состоит в том, чтобы найти такие функции p , q , r и s от x , для которых при любой дважды дифференцируемой функции $y(x)$ и значениях x , принадлежащих некоторому интервалу, выполняется тождество

$$[(D + a)^2 + b^2] y = (pD + q)(rD + s) y. \quad (1)$$

Раскрывая скобки и приравнявая коэффициенты при степенях оператора D в правой и левой части равенства (1), получаем

$$ps' + qs = a^2 + b^2, \quad pr' + ps + qr = 2a, \quad pr = 1. \quad (2)$$

(В существовании производных r' , s' и справедливости соотношений (2) нетрудно убедиться, подставляя в (1) функции y , равные 1, x и x^2 .)

Из третьего уравнения (2) мы заключаем, что $r \neq 0$ и $p = r^{-1}$. Функции q и s также можно выразить через r . Подставляя $p = r^{-1}$ в первые два уравнения (2) и исключая из них q , находим

$$rs' - sr' = s^2 + 2ars + (a^2 + b^2)r^2. \quad (3)$$

Поскольку $r \neq 0$, то правую и левую части уравнения (3) можно разделить на r^2 и, положив $u = s/r$, получить соотношение

$$u' = u^2 - 2au + a^2 + b^2.$$

При $b \neq 0$

$$\frac{d}{dx} \left(\operatorname{arctg} \frac{u-a}{b} \right) = \frac{bu'}{(u-a)^2 + b^2} = b. \quad (4)$$

Следовательно, $u = a + b \operatorname{tg}(bx + c)$, где c — произвольная постоянная. Таким образом,

$$s = ru = r[a + b \operatorname{tg}(bx + c)]. \quad (5)$$

Подставляя выражения для p и s во второе уравнение (2) и разрешая его относительно q , находим

$$q = r^{-1} \left[a - b \operatorname{tg}(bx + c) - \frac{r'}{r} \right]. \quad (6)$$

Справедливо и обратное утверждение: если s и q заданы выражениями (5) и (6) и $p = r^{-1}$ (где r — не обращающаяся в нуль дифференцируемая функция, а c — постоянная), то при x , принадлежащем интервалу, в котором определен $\operatorname{tg}(bx + c)$, функции p , q , r , s удовлетворяют уравнениям (2).

Итак, при $b \neq 0$ мы факторизовали дифференциальный оператор $(D + a)^2 + b^2$. Найденное разложение этого оператора справедливо в любом интервале, в котором $bk + c \neq (2k + 1)\pi/2$, где k — любое целое число.

При $b = 0$ дифференциальное уравнение для u вырождается в уравнение $u' = (u - a)^2$.

Решение этого уравнения $u = a$ приводит к следующей факторизации исходного дифференциального оператора

$$(D + a)^2 = r^{-1} [D + a - r'/r] \cdot r [D + a]. \quad (7)$$

В любом интервале, в котором функция u дифференцируема и отлична от a , из уравнения $u' = (u - a)^2$ следует, что

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{u - a} \right) = - \frac{1}{(u - a)^2} \frac{du}{dx} = -1. \quad (8)$$

Таким образом, $(u - a)^{-1} = c - x$ и $u = a + (c - x)^{-1}$, где c — произвольная постоянная. Вычислив для этого случая q и s , получим

$$(D + a)^2 = \\ = r^{-1} \left[D + a - (c - x)^{-1} - \frac{r'}{r} \right] r [D + a + (c - x)^{-1}], \quad (9)$$

где r , как и прежде, дифференцируемая функция, а c — постоянная. Эта факторизация справедлива для полубесконечных интервалов $x < c$ и $x > c$.

Факторизацию (7) можно получить из факторизации, приведенной в условиях задачи, положив в последней $b = 0$. Факторизацию (9) получить таким способом невозможно.

169. Перемножив матрицы, получим

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\vartheta^{-1}A_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta I_n & A_n \\ A_n & \vartheta I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vartheta I_n & A_n \\ 0 & \vartheta I_n - \vartheta^{-1}A_n^2 \end{pmatrix},$$

а взяв определитель от правой и левой частей этого матричного равенства, придем к соотношению

$$\Delta = \begin{vmatrix} \vartheta I_n & A_n \\ A_n & \vartheta I_n \end{vmatrix} = |\vartheta^2 I_n - A_n^2| = |\vartheta I_n + A_n| |\vartheta I_n - A_n| = \\ = (-1)^n |A_n + \vartheta I_n| |A_n - \vartheta I_n| = (-1)^n f(\vartheta) f(-\vartheta), \quad (1)$$

где $(-1)^n f(\vartheta)$ — характеристический многочлен матрицы A_n . Таким образом, определитель Δ можно считать известным, если известен характеристический многочлен $f(\vartheta)$ матрицы A_n . В частности, если A_n — матрица, о которой говорится в условии задачи и

$$P_n(a) = |A_n|, \quad (2)$$

то

$$|A_n - \vartheta I_n| = P_n(a - \vartheta). \quad (3)$$

Определитель $P_n(a)$ представляет собой так называемый континуант и его значение можно вычислить, воспользовавшись рекуррентным соотношением

$$P_n(a) = aP_{n-1}(a) - P_{n-2}(a)$$

при начальных условиях:

$$P_2(a) = a^2 - 1, \quad P_1(a) = a.$$

Методом математической индукции нетрудно доказать, что

$$P_n(a) = \sum_{i=0}^{[n/2]} (-1)^i \binom{n-i}{i} a^{n-2i}. \quad (4)$$

Таким образом, из соотношений (1) и (3) получаем

$$\Delta = (-1)^n P_n(a - \vartheta) P_n(a + \vartheta),$$

где $P_n(a)$ определяется из соотношения (4).

170. Существует квадратная матрица P , такая, что

$$P^*AP = I. \quad (1)$$

Тогда

$$P^*(A + X)P = I + P^*XP. \quad (2)$$

Поскольку P^*XP — неотрицательная эрмитова матрица, то существует унитарная матрица S_X (зависящая от X):

$$S_X^*S_X = I, \quad (3)$$

такая, что

$$S_X^*(P^*XP)S_X = (y_i\delta_{ij})$$

— диагональная матрица с вещественными неотрицательными y_i . Подействовав на равенство (2) слева матрицей S_X^* , а справа — матрицей S_X , получим

$$S_X^*P^*(A + X)PS_X = I + (y_i\delta_{ij}). \quad (4)$$

Взяв определители от правых и левых частей матричных равенств (1), (3) и (4), заменим их соотношениями

$$|S_X^*| |S_X| |P^*| |P| |A + X| = \prod_i (1 + y_i),$$

$$|P^*| |P| |A| = 1, \quad |S_X^*| |S_X| = 1,$$

откуда

$$|A + X| = |A| \cdot \prod_i (1 + y_i).$$

Определитель $|A + X|$, очевидно, достигает минимального значения в том и только в том случае, если все y_i равны 0, то есть при $X = 0$.

171. Воспользуемся известным разложением логарифма

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} - \dots \quad (k \geq 1).$$

Сумма конечного числа сходящихся рядов заведомо сходится, поэтому

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^3} - \dots$$

Но

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \dots \frac{n}{n-1} = \ln n,$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^3} + \dots &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n = \\ &= -\frac{1}{n} + \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Ряд

$$s(n) \equiv \left(\frac{1}{2} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right) - \left(\frac{1}{3} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^3} \right) + \left(\frac{1}{4} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^4} \right) - \dots$$

знакопеременный, и его члены по абсолютной величине стремятся к нулю. Значит, ряд $s(n)$ сходится и его сумма меньше первого члена. Переходя к пределу, получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} s(n) = 0$. Прибавляя $s(n)$ к правой и левой частям соотношения (1), приходим к новому соотношению

$$\frac{1}{2} g_2 - \frac{1}{3} g_3 + \frac{1}{4} g_4 - \dots = s(n) - \frac{1}{n} + \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right).$$

Наконец, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем требуемое соотношение для постоянной Эйлера (III. 12).

172. Докажем прежде всего, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(2i+1)} = 2(1 - \ln 2). \quad (1)$$

Разлагая общий член $1/i(2i+1)$ ряда на простейшие дроби и суммируя конечное число членов, находим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(2i+1)} &= 2 \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2i} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i+1} \right) = \\ &= 2 \left(1 - \sum_{i=1}^{2n+1} (-1)^{i-1} \frac{1}{i} \right), \end{aligned}$$

откуда, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем соотношение (1). Несложным преобразованием разложение

$$\begin{aligned} \ln \frac{n+1}{n} &= \ln \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} = \\ &= 2 \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^3} + \dots \right] \end{aligned}$$

можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} - \left[\frac{1}{n} - \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) - \frac{1}{n(2n+1)} \right] &= \\ &= 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)(2n+1)^{2i+1}}. \quad (2) \end{aligned}$$

Суммируя стоящее в левой части выражение по n от 1 до ∞ , получаем $-C + 2(1 - \ln 2)$. Аналогичное суммирование правой части приводит к двойному (сходящемуся) ряду.

Соотношение

$$C = 2 \left[1 - \ln 2 - \frac{\tau_2}{3} - \frac{\tau_5}{5} - \dots \right], \quad \tau_r = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^r}$$

получается при суммировании членов двойного ряда по столбцам.

173. На вопрос задачи следует дать утвердительный ответ. По формуле Герона

$$S = \frac{hx}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(3x) \cdot \frac{1}{2}(x+2) \cdot \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2}(x-2)} = \\ = \frac{1}{4}x\sqrt{3x^2 - 12}.$$

Поскольку площадь S выражается целым числом, то число x должно быть четным. Полагая $x = 2y$, находим

$$S = hy, \quad h = \sqrt{3(y^2 - 1)}.$$

Таким образом, высота h треугольника должна быть кратна 3. Полагая $h = 3z$, получаем $S = 3yz$ и

$$y^2 - 3z^2 = 1. \quad (1)$$

Итак, задача нахождения треугольников с целочисленными сторонами $x - 1$, x , $x + 1$, высотой h и площадью S сводится к решению уравнения (1) в целых числах. Рассмотрим рекуррентную последовательность (III.9(18))

$$y_{n+1} = 2y_n + 3z_n, \quad z_{n+1} = 2z_n + y_n \quad (2)$$

или, разрешив ее относительно y_n, z_n ,

$$y_n = 2y_{n+1} - 3z_{n+1}, \quad z_n = 2z_{n+1} - y_{n+1}. \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что если целые числа (y_n, z_n) удовлетворяют уравнению (1), то следующие члены последовательности (y_{n+1}, z_{n+1}) также удовлетворяют уравнению (1), и наоборот. Кроме того, из рекуррентных соотношений (2) следует, что

$$y_{n+2} = 2y_{n+1} + 3z_{n+1}, \quad z_{n+2} = 2z_{n+1} + y_{n+1}.$$

Исключив из этих соотношений и соотношений (2) соответственно z и y , получим рекуррентные соотношения

$$y_{n+2} = 4y_{n+1} - y_n, \quad z_{n+2} = 4z_{n+1} - z_n. \quad (4)$$

Если числа y_n, z_n неотрицательны, то из (2) следует, что $y_{n+1} > y_n, z_{n+1} > z_n$. Кроме того, если y_{n+1}, z_{n+1} — положительные целые числа, удовлетворяющие уравнению (1), то неравенство $9z_{n+1}^2 = 3y_{n+1}^2 - 3 < 4y_{n+1}^2$ влечет за собой неравенство $3z_{n+1} < 2y_{n+1}$, которое (в силу рекуррентных соотношений (3)) позволяет утверждать, что $y_n > 0$. Аналогично при $z_{n+1} \neq 1$ неравенство $y_{n+1}^2 =$

$= 3z_{n+1}^2 + 1 < 4z_{n+1}^2$, приводит к неравенству $y_n < 2z_{n+1}$, из которого следует, что $z_n > 0$. Таким образом, если (y_{n+1}, z_{n+1}) — любое решение уравнения (1) в целых числах и $z_{n+1} \neq 1$, то целые числа (y_n, z_n) , найденные при помощи рекуррентных соотношений (3), также удовлетворяют уравнению (1), причем $y_n < y_{n+1}$ и $z_n < z_{n+1}$. Спуск от больших значений (y_{n+1}, z_{n+1}) к меньшим (y_n, z_n) не может продолжаться бесконечно, поскольку существует лишь конечное множество натуральных чисел, которые меньше любого положительного целого числа z . Следовательно, цепочка убывающих целочисленных решений (y_n, z_n) уравнения (1) должна где-то оборваться и обрывается на том шаге, на котором z_n становится равным единице. Обращая спуск, мы видим, что любое решение уравнения (1) в целых числах можно получить из начальных значений $y_0 = 1, z_0 = 0; y_1 = 2, z_1 = 1$ при помощи рекуррентного соотношения (2).

Умножив соотношения (4) на 2 и 3, получим рекуррентные соотношения для x_n и h_n , приведенные в условиях задачи. Они справедливы для всех треугольников с целочисленными сторонами $x-1, x, x+1$, высотой h и площадью S .

Рекуррентные соотношения (2) и (3) позволяют преобразовать тождество

$$2y_{n+1}z_{n+1} = (2y_{n+1} - 3z_{n+1})(y_{n+1} + 2z_{n+1}) + \\ + (2z_{n+1} - y_{n+1})(2y_{n+1} + 3z_{n+1})$$

к симметричному виду

$$2y_{n+1}z_{n+1} = y_n z_{n+2} + y_{n+2} z_n. \quad (5)$$

Из соотношения (4) следует, что

$$(4y_{n+1})(4z_{n+1}) = (y_{n+2} + y_n)(z_{n+2} + z_n) = \\ = y_{n+2}z_{n+2} + y_n z_{n+2} + y_{n+2}z_n + y_n z_n.$$

Последнее соотношение при помощи соотношения (5) можно упростить и привести к виду

$$14y_{n+1}z_{n+1} = y_n z_n + y_{n+2}z_{n+2}.$$

Поскольку $3yz = S$, то, умножив правую и левую части последнего соотношения на 3, получим третье из рекуррентных соотношений, приведенных в условиях задачи.

Таким образом, эти соотношения порождают все треугольники, удовлетворяющие условиям задачи.

174. Воспользуемся для доказательства формулы методом математической индукции.

При $n = 2$ формула верна, поскольку $\operatorname{ctg}(a_1 - a_2) + \operatorname{ctg}(a_2 - a_1) = 0 = \sin \pi$. Предположим, что она верна при $n = 2, 3, \dots, k$, и докажем, что тогда она верна и при $n = k + 1$. Действительно,

$$\sum_{j=1}^k \operatorname{ctg}(a_1 - a_{k+1}) \prod_{i=1, i \neq j}^k \operatorname{ctg}(a_j - a_i) = \sin \frac{k\pi}{2} \operatorname{ctg}(a_1 - a_{k+1}), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \prod_{i=2}^{k+1} \operatorname{ctg}(a_1 - a_i) + \\ & + \sum_{j=2}^k \operatorname{ctg}(a_j - a_1) \operatorname{ctg}(a_1 - a_{k+1}) \prod_{i=2, i \neq j}^k \operatorname{ctg}(a_j - a_i) = \\ & = \sin \frac{k\pi}{2} \operatorname{ctg}(a_1 - a_{k+1}). \quad (2) \end{aligned}$$

Поскольку $\operatorname{ctg} P \operatorname{ctg} Q = 1 + \operatorname{ctg}(P + Q)(\operatorname{ctg} P + \operatorname{ctg} Q)$, то, полагая $P = a_j - a_1$, $Q = a_1 - a_{k+1}$, преобразуем второй член в правой части соотношения (2) к виду

$$\begin{aligned} & \sum_{j=2}^k \prod_{i=2, i \neq j}^k \operatorname{ctg}(a_j - a_i) + \sum_{j=2}^k \prod_{i=1, i \neq j}^{k+1} \operatorname{ctg}(a_j - a_i) + \\ & + \operatorname{ctg}(a_1 - a_{k+1}) \sum_{j=2}^k \prod_{i=2, i \neq j}^{k+1} \operatorname{ctg}(a_j - a_i). \quad (3) \end{aligned}$$

Первый член выражения (3) равен $\sin(k-1)\pi/2$, а третий —

$$\operatorname{ctg}(a_1 - a_{k+1}) \left[\sin \frac{k\pi}{2} - \prod_{i=2}^k \operatorname{ctg}(a_{k+1} - a_i) \right].$$

Собирая подобные члены, получаем

$$\sum_{j=1}^k \prod_{i=1, i \neq j}^{k+1} \operatorname{ctg}(a_j - a_i) + \sin \frac{(k-1)\pi}{2} +$$

$$+ \operatorname{ctg}(a_1 - a_{k+1}) \left[-\sin \frac{k\pi}{2} + \sin \frac{k\pi}{2} - \prod_{i=2}^k \operatorname{ctg}(a_{k+1} - a_i) \right] = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{k+1} \prod_{i=1, i \neq j}^{k+1} \operatorname{ctg}(a_j - a_i) = -\sin \frac{(k-1)\pi}{2} = \sin \frac{(k+1)\pi}{2},$$

что и требовалось доказать.

175. Как и в предыдущей задаче, докажем формулу методом математической индукции.

При $n = 2$ формула верна, поскольку $\operatorname{ctg}(a_1 - a_2) \times \times (\operatorname{ctg} a_2 - \operatorname{ctg} a_1) = 1 + \operatorname{ctg} a_1 \operatorname{ctg} a_2$. Предположим, что формула верна при $n = 2, 3, \dots, k$, и докажем, что тогда она верна и при $n = k + 1$. По формуле, приведенной в предыдущей задаче,

$$\sum_{j=1}^{k+1} \operatorname{ctg} a_j \prod_{i=1, i \neq j}^{k+1} \operatorname{ctg}(a_j - a_i) = \sin \frac{(k+1)\pi}{2} \operatorname{ctg} a_1, \quad (1)$$

$$\operatorname{ctg} a_1 \prod_{i=2}^{k+1} \operatorname{ctg}(a_1 - a_i) +$$

$$+ \sum_{j=2}^{k+1} \operatorname{ctg} a_j \operatorname{ctg}(a_j - a_1) \prod_{i=2, i \neq j}^{k+1} \operatorname{ctg}(a_j - a_i) =$$

$$= \sin \frac{(k+1)\pi}{2} \operatorname{ctg} a_1. \quad (2)$$

Поскольку $\operatorname{ctg}(a_j - a_1) \operatorname{ctg} a_1 = 1 + \operatorname{ctg} a_j [\operatorname{ctg}(a_j - a_1) + \operatorname{ctg} a_1]$, второй член в левой части соотношения (2) можно преобразовать к виду

$$\sum_{j=2}^{k+1} \sum_{i=2, i \neq j}^{k+1} \operatorname{ctg}(a_j - a_i) + \sum_{j=2}^{k+1} \operatorname{ctg} a_j \prod_{i=1, i \neq j}^{k+1} \operatorname{ctg}(a_j - a_i) +$$

$$+ \operatorname{ctg} a_1 \sum_{j=2}^{k+1} \operatorname{ctg} a_j \prod_{i=2, i \neq j}^{k+1} \operatorname{ctg}(a_j - a_i). \quad (3)$$

По формуле, приведенной в предыдущей задаче, первый член выражения (3) равен $\sin k\pi/2$, а третий член по предположению индукции равен

$$\operatorname{ctg} a_1 \left[\sin \frac{(k+1)\pi}{2} - (-1)^k \prod_{i=2}^{k+1} \operatorname{ctg} a_i \right].$$

После подстановки и сокращения подобных членов получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k+1} \operatorname{ctg} a_j \prod_{i=1, i \neq j}^{k+1} \operatorname{ctg} (a_j - a_i) + (-1)^{k+1} \prod_{i=1}^{k+1} \operatorname{ctg} a_i = \\ = -\sin \frac{k\pi}{2} = \sin \frac{(k+2)\pi}{2}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

176. Выбрав прямоугольную систему координат так, чтобы ее начало совпадало с центром эллипса, а оси x и y — соответственно с большой и малой осями эллипса, докажем следующую более общую (по сравнению с утверждениями задачи) теорему.

Теорема. Пусть $(a \cos \vartheta_i, b \sin \vartheta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n \geq 3$ — координаты вершин выпуклого многоугольника, вписанного в эллипс $x = a \cos \vartheta$, $y = b \sin \vartheta$, и точек касания сторон выпуклого многоугольника, описанного вокруг того же эллипса, а нумерация точек выбрана так, что $0 < \vartheta_1 < \vartheta_2 < \dots < \vartheta_n \leq 2\pi$. Тогда для того, чтобы площадь вписанного многоугольника была максимальной, а площадь описанного многоугольника — минимальной, необходимо и достаточно выполнение равенств

$$\begin{aligned} \vartheta_2 - \vartheta_1 = \vartheta_3 - \vartheta_2 = \dots = \vartheta_n - \vartheta_{n-1} = \\ = 2\pi + \vartheta_1 - \vartheta_n = 2\pi/n. \end{aligned} \quad (1)$$

Доказательство. Преобразование $x = ax'$, $y = by'$ переводит эллипс в единичную окружность, прямые — в прямые и изменяет площади всех фигур в $1/ab$ раз. Следовательно, проделав такое преобразование, мы сведем исходную задачу к задаче о нахождении многоугольника с максимальной площадью, вписанного в единичную окружность, и многоугольника с минимальной площадью, описанного вокруг той же окружности. Образ исходного вписанного многоугольника имеет вершины в

точках $\cos \vartheta_i$, $\sin \vartheta_i$, его площадь S_1 определяется выражением

$$2S_1 = \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) + \dots + \sin(\vartheta_n - \vartheta_{n-1}) + \sin(\vartheta_1 - \vartheta_n). \quad (2)$$

Одну вершину многоугольника можно выбрать произвольно. Пусть, например, $\vartheta_n = 2\pi$. Дифференцируя $2S_1$ по ϑ_i , мы убеждаемся в том, что равенства (1) служат необходимым и достаточным условием максимума S_1 . Максимальная площадь выпуклого многоугольника, вписанного в эллипс, равна

$$\frac{1}{2} nab \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Площадь S_2 выпуклого многоугольника, описанного вокруг единичной окружности, определяется выражением

$$S_2 = \operatorname{ctg} \varphi_1 + \operatorname{ctg} \varphi_2 + \dots + \operatorname{ctg} \varphi_n,$$

где φ_i — угол, равный половине внутреннего угла при i -й вершине многоугольника. Минимальная площадь S_2 достигается при $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_n$. Таким образом, описанный многоугольник с минимальной площадью правильный и условие (1) выполнено. Минимальная площадь многоугольника, описанного вокруг эллипса, равна

$$nab \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

Чтобы применить доказанную теорему к утверждениям задачи, заметим следующее. Поскольку центр тяжести любого правильного многоугольника совпадает с его геометрическим центром и преобразование $x = ax'$, $y = by'$ оставляет неподвижным начало координат, то центры тяжести экстремальных многоугольников должны совпадать с центром эллипса. Обратное утверждение верно лишь при $n = 3$. В самом деле, если центр тяжести вписанного в эллипс треугольника совпадает с началом координат, то и центр тяжести преобразованного треугольника также совпадает с началом координат. Такой треугольник должен быть равносторонним, поскольку если медиана треугольника проходит через центр описанной окружности, то треугольник равнобедренный. Треугольник, описанный вокруг окружности, также должен быть равносторонним, поскольку если медиана и биссектриса внутреннего угла, проведенные из одной и

той же вершины, совпадают, то треугольник равнобедренный. Таким образом, из доказанной теоремы следует, что при $n = 3$ совпадение центра тяжести описанного вокруг эллипса треугольника и вписанного в эллипс треугольника с центром эллипса необходимо и достаточно для того, чтобы площадь описанного треугольника была минимальной, а площадь вписанного треугольника максимальной.

177. Пусть r — основание системы счисления. В этой системе число 2101 означает $2r^3 + r + 1 = s(r + 1)$, где $s = 2r^2 - r + 1$. Наибольший общий делитель чисел s и $r + 1$ является делителем числа 4, поэтому числа s и $r + 1$ либо оба квадраты, либо оба удвоенные квадраты. Если $r = n^2 - 1$, то значения $n = 2, 3$ приводят к решению задачи, а значения $n = 4, 5, \dots, 10$ следует отбросить, в чем можно убедиться непосредственной проверкой. Если $r = 2n^2 - 1$, то $n = 2, 3, \dots, 7$. Также непосредственной проверкой убеждаемся, что и эти возможности следует отбросить.

Итак, при $r < 100$ условиям задачи удовлетворяют только $r = 3$ и $r = 8$. Нетрудно проверить, что эти значения r мы получили бы и в том случае, если бы исходили из неравенства $r < 10\,000$.

178. а. Предположим, что n точек, образующих заданное множество (обозначим его M), не лежат на одной прямой, и покажем, что такое предположение приводит к противоречию.

Поскольку n точек не лежат на одной прямой, то среди них можно найти три точки A, B и C , не лежащие на одной прямой. Проведем через точку A в плоскости ABC прямую a , не проходящую ни через одну другую точку множества M . Пусть $P_1, P_2, \dots$ — точки пересечения прямых, соединяющих попарно n точек множества M , с прямой a . Среди точек $P_1, P_2, \dots$ найдется по крайней мере одна (например, точка, лежащая на прямой BC), которая не совпадает с точкой A . Таким образом, точки $A, P_1, P_2, \dots$ разбивают прямую a не менее чем на два отрезка. Следовательно, среди точек $P_1, P_2, \dots$ найдется такая точка P , что либо внутри отрезка AP , либо вне его не содержится ни одна точка $P_1, P_2, \dots$.

По предположению точка P не принадлежит множеству M , но лежит на прямой, проходящей по крайней

мере через три точки этого множества. Обозначим их Q, R, S в таком порядке, чтобы точки Q и S отделяли точку P от точки R . Поскольку точки A и R принадлежат множеству M , то прямая AR содержит какую-то третью точку из множества M , например точку O . Пусть P_1 и P_2 — точки пересечения прямых QO и SO с прямой a . Тогда, поскольку между точками Q, P_1 , так же как и между точками S, P_2 , существует перспективное соответствие с центром в точке O , одна из точек P_1, P_2 лежит внутри отрезка AP , а другая — вне его. Полученное противоречие доказывает, что все n точек множества M лежат на одной прямой.

б. Рассмотрим теперь множество M , состоящее из n неколлинеарных точек. Пусть m — число различных прямых, определяемых парами точек из M . По доказанному в пункте «а» по крайней мере одна из этих m прямых содержит только две точки множества M , которые мы обозначим A_1 и A_2 . Рассмотрим множество M' , получающееся из множества M при выбрасывании точки A_1 . Число различных прямых, определяемых парами точек из множества M' , не превышает $m - 1$, поскольку прямая A_1A_2 проходит через точку A_1 , не принадлежащую множеству M' . Продолжая исключать одну за другой точки множества M , мы после r шагов получим множество, содержащее $n - r$ коллинеарных точек. Но перед тем, как мы сделали r -й шаг, множество содержало $n - r + 1$ точек, из которых только $n - r$ были коллинеарны. Следовательно, число различных прямых, определяемых всевозможными парами точек из этого множества, было равно $n - r + 1$. Но поскольку из первоначального множества M мы успели выбросить $r - 1$ точек, то

$$n - r + 1 \leq m - (r - 1),$$

то есть

$$n \leq m,$$

что и требовалось доказать.

179. Разобьем положительную полуось x на единичные отрезки с целочисленными концами. Тогда

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\Gamma(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^n \frac{dx}{\Gamma(x)}.$$

При $n \geq 2$ произведем в n -м интеграле замену перемен-
ной $x' = x - (n - 1)$ и, используя формулу приведения
для гамма-функции $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$, получим

$$\int_{n-1}^n \frac{dx}{\Gamma(x)} = \int_0^1 \frac{dx'}{x'(x' + 1) \dots (x' + n - 1) \Gamma(x')}.$$

Возвращаясь к исходному интегралу и заменяя x' на x
преобразуем его к виду

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\Gamma(x)} = \int_0^1 \left[1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{x(x+1)(x+2)} + \dots \right] \frac{dx}{\Gamma(x)}.$$

Наконец, разлагая дроби $1/x(x+1)(x+2) \dots (x+n)$
на простейшие и суммируя дроби вида $1/(x+k)$ при
каждом значении $k = 0, 1, \dots$ в отдельности (закон-
ность этой операции несложно обосновать), получим со-
отношение, приведенное в условии задачи.

Тождество

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x(x+1)} + \dots + \frac{1}{x(x+1)(x+2) \dots (x+n)} + \dots = \\ = 1 + \frac{e}{x} + \frac{e}{1!(x+1)} + \dots + \frac{e}{n!(x+n)} + \dots \end{aligned}$$

называется тождеством Прима.

180. Рассмотрим тождество Эйлера

$$\begin{aligned} (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4) \dots = \\ = 1 + \frac{x}{1-x} + \frac{x}{1-x} \cdot \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x}{1-x} \cdot \frac{x^2}{1-x^2} \cdot \frac{x^3}{1-x^3} + \dots, \quad (1) \end{aligned}$$

справедливое* при $0 \leq x < 1$. Кроме того,

$$\begin{aligned} (1+x)(1+x^2) \dots = \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdot \dots = \\ = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \dots \end{aligned}$$

Комбинируя это тождество с тождеством (1), находим

$$(1-x)(1-x^3)(1-x^5) \dots = \frac{1}{1 + \frac{x}{1-x} + \frac{x}{1-x} \cdot \frac{x^2}{1-x^2} + \dots},$$

что и требовалось доказать.

Записав доказанное тождество в виде

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\dots} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k(k+1)/2}}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^k)}$$

и сравнив коэффициенты при x^n ($n > 0$) в его правой и левой частях, нетрудно увидеть, что оно эквивалентно следующему утверждению: число разбиений числа n на нечетные слагаемые равно сумме по всем допустимым значениям k числа разбиений чисел $n - (k+1)k/2$ на слагаемые, каждое из которых не превосходит k .

181. Пусть $A_1A_2A_3$ — треугольник, наибольший внутренний угол которого не превосходит 90° . Не ограничивая общности, предположим, что внутренние углы треугольника удовлетворяют неравенствам $A_1 \geq A_2 \geq A_3$. Пусть O — центр описанной окружности, I — центр вписанной окружности, H_i — основание высоты, опущенной из вершины A_i на противоположащую сторону, и B_i — точка касания вписанной окружности со стороной $a_i = A_iA_k$. Если центры вписанной и описанной окружностей совпадают ($I \equiv O$), то треугольник равносторонний и $r + R = m$.

Поскольку $A_2B_1 = r \operatorname{ctg} A_2/2 \leq r \operatorname{ctg} \frac{A_3}{2} = B_1A_3$ и

$$\begin{aligned} \angle OA_3B_1 &= \frac{1}{2}(\pi - \angle A_3OA_2) = \frac{1}{2}(\pi - 2A_1) \leq \\ &\leq \frac{1}{2}(\pi - A_1 - A_2) = \frac{A_3}{2} = \angle IA_3B_1, \end{aligned}$$

то центр O описанной окружности лежит внутри или на границе треугольника B_1A_3I . Кроме того,

$$\begin{aligned} \angle H_3A_3I &= \frac{A_3}{2} - \angle A_1A_3H_3 = \frac{A_3}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - A_1\right) = \\ &= \frac{A_3}{2} - \angle OA_3B_1 = \angle OA_3I \end{aligned}$$

и, значит, A_3O и A_3H_3 симметричны относительно A_3I . Пусть O_3 — точка на A_3H_3 , симметричная точке O относительно A_3I , так что $A_3O_3 = R$, а I_3 — ортогональная проекция точки I на A_3H_3 , так что $I_3H_3 = r$. Поскольку $\angle O_3IB_3 > \pi/2$, то точка O_3 лежит на отрезке A_3I_3 и, следовательно, $r + R \leq A_3H_3 = m$.

Если наибольший угол треугольника $A_1A_2A_3$ тупой, то установить соотношение между m и $r + R$ не так просто.

Если $A_1A_2 = A_1A_3$ и $\angle A_1 \rightarrow \pi$, то $m \rightarrow 0$. Следовательно, существуют треугольники, для которых $r + R > m$. Наоборот, если $\angle A_1 > \pi/2$, $A_1A_2 < A_1A_3$ и сторона A_1A_3 фиксирована, то, устремив $A_1 \rightarrow \pi/2$ и $A_1A_2 \rightarrow 0$, мы убедимся в существовании тупоугольных треугольников, для которых $r + R < m$.

182. Рассмотрим функцию

$$f(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) \ln(1-x^n)}{n}, \quad |x| < 1,$$

где $\mu(n)$ — функция Мёбиуса (III.8). Тогда

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{x^{nv}}{v} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} x^{nv} \quad \text{при } |x| < 1.$$

Если $m \neq 1$, то коэффициент при x^m в этом разложении равен

$$\sum_{n|m} \frac{\mu(n)}{m} = \frac{1}{m} \sum_{n|m} \mu(n) = 0.$$

Следовательно, $f(x) = x$ и

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{-\mu(n)/n},$$

откуда и следует разложение, которое требовалось доказать.

183. Любое число, не превышающее n , можно представить в виде произведения степеней одного или нескольких из $\pi(n)$ простых чисел, каждое из которых не превышает числа n . Если данное число a_i не является делителем произведения других членов последовательности, то по крайней мере один из простых делителей числа a_i , например число p_j , входит в разложение этого числа в произведение степеней простых чисел с показателем степени, превышающим сумму всех показателей степени, с которыми простое число p_j входит в разложения других членов последовательности. Это означает, что в разложение a_i простое число p_j должно входить в более высокой степени, чем в разложения других членов последовательности. Назовем p_j «представителем»

числа a_i . А поскольку любое простое число может быть представителем лишь одного члена последовательности, то число членов последовательности x не может превышать $\pi(n)$, что и требовалось доказать.

184. Центр O окружности P выберем за начало прямоугольной системы координат, а оси x и y направим параллельно асимптотам гиперболы H . Предположим, что центр ω гиперболы H имеет координаты (h, k) . Тогда уравнения окружности P и гиперболы H имеют вид

$$x^2 + y^2 - (h^2 + k^2) = 0, \quad xy - kx - hy + c = 0. \quad (1)$$

Если существует один треугольник, вписанный в гиперболу H и одновременно описанный вокруг окружности P , то, как известно, мы можем построить другой треугольник ABC с теми же свойствами, выбрав за вершину A любую точку на гиперболе H , не принадлежащую окружности P , проведя из A две касательные к окружности P и приняв за вершины B и C точки пересечения этих касательных с гиперболой H (отличные от точки A). При этом прямая BC также совпадает с касательной к окружности P .

Рассмотрим теперь случай, когда точка A совпадает с точкой гиперболы H , бесконечно удаленной, например, в направлении асимптоты, параллельной оси x . Тогда уравнение стороны BC имеет вид

$$(hk - c)(y + h) - k^2(x - k) = 0.$$

Для того чтобы эта прямая была касательной к окружности P , длина перпендикуляра, опущенного на нее из точки O , должна быть равна $\sqrt{h^2 + k^2}$, откуда $k^2c^2 = 0$. Как будет доказано ниже, $k \neq 0$, поэтому $c = 0$, то есть гипербола H в этом случае должна проходить через центр O окружности P . Наоборот, если точка O лежит на гиперболе H , то приведенные выше уравнения показывают, что существует вырожденный треугольник рассмотренного нами типа и, следовательно, бесконечно много треугольников, обладающих требуемыми свойствами. Нетрудно видеть, что утверждение задачи останется в силе, если поменять ролями центры гиперболы ω и окружности O .

Доказать, что $k \neq 0$, проще синтетически (попутно мы сделаем синтетическим все доказательство). Пусть

ABC — вырожденный треугольник, T и T' — точки касания с окружностью P параллелей AB и AC . По крайней мере одна из них, например AC , пересекает гиперболу H в конечной точке C , а CB касается окружности P в конечной точке T'' . Следовательно, вершина B треугольника ABC также должна быть конечной точкой. Но если бы в приведенном выше доказательстве выполнялось равенство $k=0$, то точка T совпадала бы с центром ω гиперболы H и мы пришли бы к противоречию: вершина B совпала бы с вершиной A . Следовательно, P — вписанная (или описанная) окружность треугольника ABC и по теореме Фейербаха (III.1) касается окружности девяти точек треугольника ABC , которая в рассматриваемом случае вырождается в прямую, проходящую через середину A' стороны BC и основания $\bar{C}$, $\bar{B}$ параллельных высот, опущенных на стороны AB и AC . Следовательно, $A'\bar{C}$ касается окружности P в точке ω , и ω симметрична точке T'' относительно OA' . Нетрудно видеть, что треугольник $A'BC$ равнобедренный и, если $T\omega$ и асимптоты гиперболы пересекают OB в точках W , U , V , то треугольники WBC и $WU\omega$ также равнобедренные. Таким образом, точка W является общей серединой отрезков OB и VW и центр O окружности P должен лежать на гиперболе H .

Наоборот, предположим, что гипербола H проходит через центр O окружности P , а окружность P проходит через центр ω гиперболы H . Пусть T и T' — точки касания с окружностью касательных, проведенных из вершины A , которая совпадает с бесконечно удаленной точкой гиперболы H , B — точка пересечения прямой AT с гиперболой H , T'' — точка касания с окружностью P касательной, проведенной из точки B , а C — точка пересечения той же касательной с AT' .

Докажем, что точка C лежит на гиперболе H . Отсюда будет следовать, что существует бесконечно много треугольников ABC (где A — любая точка гиперболы H), обладающих всеми требуемыми свойствами. Если асимптоты гиперболы пересекают OB в точках U и V (точка V принадлежит отрезку ωA), то, как известно, отрезки OB и VU имеют общую середину W и прямая WT проходит через точку ω . Пусть A' — середина отрезка BC , а точки $\bar{C}$, $\bar{B}$, W симметричны точкам C , B , W относительно OA' . Вследствие этой симметрии прямые $A'\bar{C}$, WT должны

проходить через одну и ту же точку окружности P , симметричную точке T'' относительно прямой $A'C$, поскольку прямые $A'C$ и $\overline{WT'}$ проходят через одну и ту же точку T'' окружности P . Таким образом, прямая $A'C$ должна быть касательной к P в точке, симметричной точке T'' относительно прямой $A'C$. Но тогда эта точка совпадает с ω . Если ωU пересекает BC в точке S , то из симметрии следует, что $\overline{C\omega} = \overline{BS} = \overline{T''C}$. Итак, точка C должна лежать на гиперболе H , что и требовалось доказать.

Пусть R, S, T, U — точки, в которых окружность P пересекает оси координат, а V и W — точки, в которых окружность P пересекает гиперболу H . Тогда огибающая сторон треугольников, вписанных в H и одновременно описанных вокруг H , совпадает с окружностью P , из которой выколоты шесть точек R, S, T, U, V, W . В этих точках треугольники вырождаются.

185. Пусть A_1 — такая вершина многоугольника, что $OA_1 \leq OA_j$ при любом $j \neq 1$. Диагонали A_1A_j разбивают внутренность многоугольника на треугольники, поэтому любая точка O лежит внутри какого-то треугольника $A_1A_kA_{k+1}$ или на его границе. Если точка O принадлежит границе треугольника $A_1A_kA_{k+1}$, то утверждение задачи тривиально: $\angle A_1OA_k = \pi$. В противном случае точка O лежит внутри треугольника $A_1A_kA_{k+1}$ и $\angle A_1OA_k < \pi$, $\angle A_1OA_{k+1} < \pi$. Кроме того, поскольку $OA_1 \leq OA_j$, то $\angle OA_kA_1 \leq \angle OA_1A_k$ и $\angle OA_{k+1}A_1 \leq \angle OA_1A_{k+1}$. Но $\angle OA_1A_k + \angle OA_1A_{k+1} = \pi/n$. Следовательно, $\angle A_1OA_k + \angle A_1OA_{k+1} = 2\pi - (\angle OA_1A_k + \angle OA_1A_{k+1}) - (\angle OA_kA_1 + \angle OA_{k+1}A_1) \geq 2\pi - \pi/n - \pi/n = 2\pi(1 - 1/n)$.

Таким образом, либо $\angle A_1OA_k \geq \pi(1 - 1/n)$, либо $\angle A_1OA_k < \pi(1 - 1/n)$. В первом случае утверждение задачи доказано. Во втором случае $\angle A_1OA_{k+1} \geq \pi(1 - 1/n)$; следовательно, утверждение задачи также доказано.

186. Дифференцируя ряды почленно (что, очевидно, допустимо), получаем

$$f'' = -zg', \quad g'' = zf'. \quad (1)$$

Отсюда следует, что

$$f'f'' + g'g'' = 0, \quad (2)$$

в силу чего

$$f'^2 + g'^2 = C.$$

Полагая $z = 0$, находим значение постоянной: $C = 1$. Таким образом,

$$f'^2 + g'^2 = 1. \quad (3)$$

(Соотношения (2) и (3) следуют также из того, что $f' = \cos(z^2/2)$, $g' = \sin(z^2/2)$. В дальнейшем это представление рядов f' и g' нам не понадобится.)

Дифференцируя соотношения (1) и исключая при их помощи из выражения для f''' функцию g , а из выражения для g''' функцию f , находим, что обе функции f и g удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$L[w] = zw''' - w'' + z^3w' = 0,$$

то есть $L[f] = L[g] = 0$.

Проводя аналогичные рассуждения для функций h и k :

$$k \equiv 1 - \frac{z^4}{1 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{z^8}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{z^{12}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 12} + \dots,$$

получаем $h'' = 1 + zk'$, $k'' = -zh'$, $L[h] = -1$. Как показывают прямые выкладки, функция $y = f^2 + g^2$ удовлетворяет уравнению $L[y] = 2(fL[f] + gL[g] - 1)$. Следовательно, функции $2h$ и y являются аналитическими в окрестности нуля решениями уравнения $L[w] = -2$, причем $y^{(k)}(0) = 2h^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, 3$, $y''(0) = 2h''(0) = 2$. В силу единственности решения, удовлетворяющего этим начальным условиям, $y = 2h$, что и требовалось доказать.

187. Начнем с наиболее трудной части решения — учета преимущества, которым по правилам игры может воспользоваться любой ее участник: права объявить задуманным число, стоящее на грани, которая при первом бросании костей выпала наибольшее число раз.

Пусть $i = 2, 3, \dots, 10$ — наибольшее число раз, которое любая грань может выпасть при первом бросании. Вероятность того, что какая-то грань выпала i раз, равна

$$\sum_{(i)} \frac{6! 10! 6^{-10}}{\prod_{j=1}^i (j!)^{n_j} n_j!}$$

(для краткости условимся в дальнейшем обозначать ее $\sum_{(i)}$), где n_j — неотрицательные целые числа, удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{j=1}^i j n_j = 10, \quad \sum_{j=1}^i n_j = 6,$$

и при заданном i суммирование проводится по всем n_j , удовлетворяющим этим соотношениям.

Вероятность того, что какая-то грань, выпавшая i раз при первом бросании костей, выпадет не менее $14 - i$ раз при следующих четырех бросаниях десяти костей, равна

$$\beta_i = 6^{-40} \sum_{r=14-i}^{40} \binom{40}{r} 5^{40-r}.$$

Вероятность выигрыша равна

$$\sum_{i=2}^{10} \beta_i \sum_{(i)}.$$

При помощи таблиц находим:

i	β_i	$\sum_{(i)}$	$\beta_i \sum_{(i)}$
2	0,026	0,0675	0,00176
3	0,058	0,5293	0,03070
4	0,116	0,3105	0,03602
5	0,211	0,0781	0,01648
6	0,347	0,0130	0,00451
7	0,509	0,0015	0,00076
8	0,677	0,0001	0,00007
9	—	—	—
10	—	—	—

(При $i = 9$ или 10 $\sum_{(i)}$ пренебрежимо мала, а $\beta_i \leq 1$.)

Вероятность выигрыша 0,09030.

Итак, в среднем играющий может выиграть около 9 центов.

Поскольку за право принять участие в игре взимается 10 центов, то владельцы магазина наживают по центу на каждом играющем.

188. Рассмотрим более общую задачу о вычислении определителя

$$D(n) = |f((i, j))|, \quad (1)$$

где $f(x)$ — произвольная функция, определенная при всех натуральных значениях x , а (i, j) — наибольший общий делитель чисел i и j .

Чтобы вычислить $D(n)$, определим функцию $\psi(k)$ соотношением

$$f(l) = \sum_{k|l} \psi(k) \quad (2)$$

(здесь сумма берется по всем делителям k числа l ; в явном виде функция ψ записана ниже) и положим коэффициенты a_{kl} равными 1, если l делит k , и 0 в противном случае. Тогда

$$\sum_l a_{rl} a_{sl} \psi(l) = \sum_{l|(r, s)} \psi(l) = f((r, s))$$

и $D(n) = |a_{rl}| |a_{sl} \psi(l)|$ (порядок определителей, стоящих в правой части, равен n). Поскольку $a_{rl} = 0$ при $r < l$ и $a_{ll} = 1$, то $|a_{rl}| = 1$, $|a_{sl} \psi(l)| = \prod_{l=1}^n \psi(l)$ и, следовательно, $D(n) = \prod_{l=1}^n \psi(l)$.

Закон обращения теоретико-числовых функций (III. 8) позволяет представить соотношение (2) в виде

$$\psi(l) = \sum_{k|l} \mu(k) f\left(\frac{l}{k}\right),$$

в силу чего

$$D(n) = \prod_{l=1}^n \left[\sum_{k|l} \mu(k) f\left(\frac{l}{k}\right) \right]. \quad (3)$$

В случае $f(x) = x^\lambda$ (исходная задача)

$$\psi(l) = \sum_{k|l} \mu(k) \left(\frac{l}{k}\right)^\lambda = l^\lambda \sum_{k|l} \frac{\mu(k)}{k^\lambda} = l^\lambda \prod_{p|l} \left(1 - \frac{1}{p^\lambda}\right)$$

(произведение по всем простым делителям p числа l) и, таким образом,

$$D(n) = \prod_{l=1}^n l^{\lambda} \prod_{p|l} \left(1 - \frac{1}{p^{\lambda}}\right) = (n!)^{\lambda} \prod_{p \leq n} \prod_{1 \leq l \leq n, p|l} \left(1 - \frac{1}{p^{\lambda}}\right) = \\ = (n!)^{\lambda} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^{\lambda}}\right)^{[n/p]},$$

что и требовалось доказать.

Формула (3) позволяет вычислять определитель (1) и в других интересных случаях. Например, функцию $f(x) = \delta(x)$ — сумму делителей числа x — мы получаем при $\psi(k) \equiv k$, откуда

$$\sum_{k|l} \mu(k) \delta\left(\frac{l}{k}\right) = l$$

и $D(n) = n!$.

Кроме того, мы можем обратить решение и выяснить, при какой функции $f(x)$ определитель $D(n)$ имеет необходимое значение. Из (3) получаем

$$\sum_{k|l} \mu(k) f\left(\frac{l}{k}\right) = \frac{D(n)}{D(n-1)}.$$

Применяя к этому соотношению закон обращения теоретико-числовых функций, находим

$$f(n) = \sum_{k|n} \frac{D(k)}{D(k-1)}.$$

Например, если мы хотим, чтобы $D(n) = a^n$, то функцию $f(n)$ следует выбрать в виде

$$f(n) = \sum_{k|n} a = a\tau(n),$$

где $\tau(n)$ — число делителей числа n .

189. Пусть $p_1, p_2, \dots, p_n$ — любой набор простых чисел $N = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_n^{x_n}$. По определению $M(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mu(N)$, где μ — функция Мёбиуса (III.8). Определим функцию $f(m)$ для любого делителя m числа N как число различных простых делителей числа m , если $m \neq 1$, а $f(1) = 1$. Кроме того, если d — делитель числа

$N(d = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_n^{b_n})$, то функцию $g(d)$ зададим соотношением $g(d) = \sum_{m|d} f(m)$. Сгруппируем в этой сумме все числа m , имеющие ровно j простых делителей. Число таких m , очевидно, равно $S_j(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Добавляя 1, соответствующую $m = 1$, получаем

$$g(d) = 1 + \sum_{j=1}^n j S_j(b_1, b_2, \dots, b_n) = S(b_1, b_2, \dots, b_n).$$

По закону обращения теоретико-числовых функций (III.8)

$$\begin{aligned} f(N) &= \sum_{d|N} \mu(N|d) g(d) = \\ &= \sum M(x_1 - b_1, x_2 - b_2, \dots, x_n - b_n) \cdot S(b_1, b_2, \dots, b_n) \end{aligned}$$

Следовательно, искомая сумма равна числу *положительных* целых чисел в множестве $x_1, x_2, \dots, x_n$ или единице, если $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, что и требовалось доказать.

190. Перестановку $n+1$ элементов, представимую в виде произведения r циклов, можно получить из перестановки n элементов двумя способами. Во-первых, цикл единичной длины, содержащий новый элемент, можно присоединить к перестановке n элементов, представимой в виде произведения $r-1$ циклов. Во-вторых, новый элемент можно ввести в любой из r циклов, на которые разлагается перестановка n элементов. Поскольку во втором случае новый элемент можно ввести после любого из r старых элементов, то

$$P_{n+1}^r = P_n^{r-1} + n P_n^r. \quad (1)$$

(Если считать, что $P_n^0 = 0$, то это соотношение выполняется при $n = 1, 2, \dots$; $r = 1, \dots, n$). Если $p_n(x) = \sum_{r=1}^n P_n^r x^r$, то из соотношения (1) следует, что $(x + 1)p_n(x) = p_{n+1}(x)$. Последнее соотношение позволяет без труда методом математической индукции доказать тождество «а», приведенное в условии задачи.

Аналогично доказывается и второе тождество задачи. Разбиение $n+1$ отличимых друг от друга элементов на

r классов можно получить из разбиения n элементов двумя способами. Во-первых, можно присоединить класс, состоящий только из одного нового элемента, к разбиению n элементов на $r-1$ класс. Во-вторых, новый элемент можно включить в любой из r классов, на которые разбиты n старых элементов. Поскольку во втором случае новый элемент можно ввести в любой из r классов старого разбиения, то

$$Q_{n+1}^r = Q_n^{r-1} + rQ_n^r.$$

(Если считать, что $Q_n^r \neq 0$ лишь при $1 \leq r \leq n$, то это соотношение выполняется при $n, r = 1, 2, \dots$.)

Пусть $f_r(x) = x(x-1) \dots (x-r+1)$. Поскольку, как нетрудно проверить, $f_{r+1}(x) + rf_r(x) = xf_r(x)$, то тождество «б», приведенное в условиях задачи, следует из соотношений

$$\begin{aligned} q_{n+1}(x) &= \sum_{r=1}^{n+1} Q_{n+1}^r f_r(x) = \sum_{r=1}^{n+1} (Q_n^{r-1} + rQ_n^r) f_r(x) = \\ &= \sum_{r=1}^n Q_n^r (f_{r+1}(x) + rf_r(x)) = x \sum_{r=1}^n Q_n^r f_r(x) = xq_n(x). \end{aligned}$$

191. Разложив функцию $f(x) \equiv x^{-n}(1-e^{-x})^n$ в степенной ряд $\sum f_r x^r$ двумя различными способами, получим для числа $N = (n+4)(n+3)(n+2)(n+1) \cdot f_4$ два выражения, стоящие в правой и левой части доказываемого тождества.

Во-первых, при любом натуральном n

$$f(x) = x^{-n} \sum_{t=0}^n (-1)^t \binom{n}{t} e^{-tx} = x^{-n} \sum_{t=0}^n \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{t+s} \binom{n}{t} \frac{t^s x^s}{s!}.$$

Коэффициент f_4 при x^4 мы найдем, выбрав в двойной сумме коэффициенты при x^{n+4} . Полученное выражение совпадает с представлением числа N , соответствующим левой части доказываемого тождества:

$$f_4 = \sum_{t=0}^n (-1)^{t+n+4} \binom{n}{t} \frac{t^{n+4}}{(n+4)!},$$

$$N = \sum_{t=0}^n (-1)^{t+n} \frac{t^{n+4}}{t! (n-t)!}.$$

Во-вторых, разложим в степенной ряд n -ю степень функции $g(x) = (1 - e^{-x})/x = \sum g_j x^j$. Воспользуемся для этого следующей леммой.

Лемма. Если $\sum_{r=0}^{\infty} f_r x^r = \left(\sum_{j=0}^{\infty} g_j x^j \right)^n$ и $f_0 = g_0 = 1$, то

$$f_m = \sum_{k=1}^m \binom{n}{k} \sum_j g_{j_1} g_{j_2} \cdots g_{j_k},$$

где $j_1 + j_2 + \dots + j_k = m$, $j_s \geq 1$.

В рассматриваемой задаче $g_j = (-1)^j / (j+1)!$,

$$\begin{aligned} f_4 = \binom{n}{1} g_4 + \binom{n}{2} (g_1 g_3 + g_2 g_2 + g_3 g_1) + \binom{n}{3} (3 g_1 g_1 g_2) + \\ + \binom{n}{4} g_1^4 = \binom{n}{1} \frac{1}{5!} + \binom{n}{2} \left(\frac{1}{2!4!} + \frac{1}{3!3!} + \frac{1}{4!2!} \right) + \\ + \binom{n}{3} \frac{3}{2!2!3!} + \binom{n}{4} \frac{1}{16}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N = \binom{n+4}{5} + \binom{n+4}{6} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{36} \right) + \\ + \binom{n+4}{7} \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{8} + \binom{n+4}{8} \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{16} = \\ = \binom{n+4}{5} + 25 \binom{n+4}{8} + 105 \binom{n+4}{7} + 105 \binom{n+4}{8}. \end{aligned}$$

Это выражение определяет N при всех целых значениях n . Оно сводится к правой части доказываемого тождества, поскольку

$$\begin{aligned} N = \frac{(n+4)(n+3) \dots n}{6!8} [6 \cdot 8 + 200(n-1) + \\ + 120(n-1)(n-2) + 15(n-1)(n-2)(n-3)]. \end{aligned}$$

При $n = -m$, $m \geq 5$ ряд для $f(x)$ следует заменить рядом

$$f(x) = x^m \sum_t (-1)^t \binom{-m}{t} e^{-tx} = x^m \sum_{t=0}^{\infty} \binom{m-1+t}{m-1} e^{-tx},$$

сходящимся при положительных значениях x . Число $N = (m-1) \dots (m-4) f_4$ при этом становится равным

$$N = \binom{m-1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(m-1+t)!}{(m-1)! t!} \frac{d^4}{dx^4} (x^m e^{-tx}), \quad m = -n.$$

192. При произвольно заданных r_i и c_i (неотрицательных целых числах, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^m r_i = \sum_{j=1}^m c_j$) множество матриц, обладающих всеми необходимыми по условиям задачи свойствами, не пусто. В этом нетрудно убедиться, если воспользоваться математической индукцией по суммарному числу строк и столбцов. Более того, можно построить матрицу с диагональными элементами, равными $\min(r_i, c_i)$; из дальнейшего видно, что это матрица с максимальным следом.

Преобразование, состоящее в прибавлении единицы к элементам (h, i) и (j, k) и вычитании единицы из элементов (h, k) и (j, i) , очевидно, оставляет инвариантной сумму элементов каждой строки и каждого столбца. Эта операция «допустима», если не приводит к появлению отрицательных элементов. Воспользуемся этой операцией для отыскания необходимых свойств матрицы (a_{ij}) с минимальным или максимальным следами.

Докажем, что на главной диагонали матрицы с минимальным следом стоит не более чем один положительный элемент. Предположим, элементы a_{ii} и a_{jj} ($i \neq j$) отличны от нуля. В этом случае операция, состоящая в прибавлении единицы к элементам (i, j) и (j, i) и вычитании единицы из элементов (i, i) и (j, j) , допустима. Применение такой операции уменьшит след матрицы (a_{ij}) на 2, оставив без изменений сумму элементов любой строки и любого столбца. Таким образом, след матрицы (a_{ij}) вопреки предположению не был бы минимален. Полученное противоречие означает, что на главной диагонали матрицы (a_{ij}) с минимальным следом имеется не более одного положительного элемента, и операция, состоящая в прибавлении единицы к элементам (i, j) и (j, i) и вычитании единицы из элементов (i, i) и (j, j) , недопустима по отношению к такой матрице. Если все элементы, стоящие на главной диагонали, равны нулю, то минимальный след равен нулю. Предположим, что один из диагональных элементов a_{ii} положителен. Тогда элементы a_{jk} ($j, k \neq i$) равны нулю. Действительно, если бы элемент a_{jh} был положителен, то, прибавив единицу к элементам (i, k) и (j, i) и уменьшив на единицу элементы (i, i) и (j, k) , мы уменьшили бы след матрицы,

что невозможно, поскольку след минимален. Таким образом, $a_{jk} = 0$, $a_{ik} = c_k$ ($k \neq j$), $a_{ji} = r_j$ ($j \neq i$) и $a_{ii} = r_i - \sum_{j \neq i} c_j = c_i - \sum_{j \neq i} r_j$. Это означает, что минимальный след матрицы (a_{ik}) равен наибольшему из $n+1$ чисел: нуль и n чисел $c_i - \sum_{j \neq i} r_j = r_i - \sum_{j \neq i} c_j$ ($i=1, 2, \dots, r$). Ясно, что среди n чисел $c_i - \sum_{j \neq i} r_j$ ($i=1, 2, \dots, n$) имеется не более одного положительного числа, и если одно число положительно, то минимальный след матрицы равен этому числу.

Рассмотрим теперь матрицу (a_{ij}) с максимальным следом. Пусть a_{ii} — любой элемент, стоящий на ее главной диагонали. Если бы в i -й строке существовал еще один ненулевой элемент a_{ik} , а в i -м столбце еще один ненулевой элемент a_{ji} , то увеличив на единицу элементы (i, i) и (j, k) и уменьшив на единицу элементы (i, k) и (j, i) , мы увеличили бы диагональный элемент a_{ii} и след матрицы, что невозможно, поскольку след максимален. Таким образом, либо все элементы i -й строки, за исключением a_{ii} , равны нулю, либо все элементы i -го столбца равны нулю, за исключением $a_{ii} = \min(r_i, c_i)$. Итак, максимальный след матрицы равен $\sum_i \min(r_i, c_i)$.

193. Пусть V — скорость самолета в безветренную погоду, W — скорость ветра (постоянного по направлению), v — составляющая результирующей скорости самолета, направленная по касательной к замкнутой кривой C , описываемой самолетом, и τ — угол, образуемый направлением ветра с касательной к кривой C . Поскольку на замкнутой кривой есть точки, где $\pi/2 < |\tau| < \pi$, то должно выполняться неравенство $V > W$. Кроме того, во всех случаях выполняются соотношения

$$V^2 = W^2 + v^2 - 2Wv \cos \tau, \quad v = R + W \cos \tau,$$

$$R = \sqrt{V^2 - W^2 \sin^2 \tau}. \quad (1)$$

(Знак минус перед квадратным корнем в выражении для R следует отбросить, поскольку $v \geq 0$, и, если бы мы выбрали знак минус, то получили бы неравенство $W \geq V$.)

Время T , которое самолет затрачивает на то, чтобы опилать кривую C , равно

$$T = \int_C \frac{ds}{v} = \int \frac{R - W \cos \tau}{V^2 - W^2} ds = \int \frac{R ds}{V^2 - W^2}.$$

поскольку $\int \cos \tau ds = 0$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} T &= \int \frac{\sqrt{V^2 - W^2 \sin^2 \tau}}{V^2 - W^2} ds > \int \frac{\sqrt{V^2 - W^2}}{V^2 - W^2} ds = \\ &= \int \frac{ds}{\sqrt{V^2 - W^2}} > \int \frac{ds}{V}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

194. Уравнение

$$ax + bxy + cy = k$$

можно преобразовать к виду

$$(bx + c)(by + a) = bk + ac,$$

или, разделив правую и левую части последнего уравнения на df , к виду

$$\left(\frac{b}{f}x + \frac{c}{f}\right)\left(\frac{b}{d}y + \frac{a}{d}\right) = \frac{b}{df}k + \frac{a}{d} \cdot \frac{c}{f}. \quad (1)$$

Если b не кратно числу df и k — любое из бесконечно многих целых чисел, взаимно простых с df , то уравнение (1) не допускает решений в целых числах, поскольку все члены правой и левой части, за исключением члена bk/df , — целые числа. С другой стороны, если b кратно df , то b/df и ac/df — взаимно простые числа, поскольку числа b/f и c/f , так же как b/d и a/d , взаимно просты. В этом случае по теореме Дирихле* арифметическая прогрессия $ac/df + b/df, ac/df + 2b/df, \dots, ac/df + kb/df, \dots$ содержит бесконечно много простых чисел. При каждом значении k , соответствующем одному из этих простых чисел, один из множителей в левой части уравнения (1) обращается в ± 1 . Следовательно, должно выполняться одно из равенств

$$bx + c = \pm f, \quad by + a = \pm d.$$

Поскольку эти равенства противоречат предположениям задачи, то при указанных значениях k уравнение

$$ax + bxy + cy = k$$

не допускает решений в целых числах.

195. Докажем, что любое решение тригонометрического уравнения

$$\cos 2\pi r_1 + \cos 2\pi r_2 + \cos 2\pi r_3 = 0, \quad (1)$$

где r_1, r_2, r_3 — неотрицательные рациональные числа, отличные от единицы, принадлежит к одному из следующих типов

$$\cos \frac{\pi}{2} + \cos 2\pi r + \cos 2\pi \left(\pm \frac{1}{2} \pm r \right) = 0, \quad (a)$$

$$\cos 2\pi r + \cos 2\pi \left(r + \frac{1}{3} \right) + \cos 2\pi \left(r + \frac{2}{3} \right) = 0, \quad (б)$$

$$\cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} = 0 \quad (в)$$

или совпадает с эквивалентными решениями, получающимися из трех основных при помощи соотношений

$$\cos 2\pi r = \cos 2\pi (1 - r), \quad -\cos 2\pi r = \cos 2\pi \left(\pm \frac{1}{2} \pm r \right),$$

где r — неотрицательное рациональное число меньше 1. Тем самым утверждение задачи будет доказано.

Пусть $r_k = n_k/d_k$, где $0 \leq n_k < d_k$, и (при $n_k \neq 0$) n_k, d_k — взаимно простые числа, p — наибольшее простое число, являющееся делителем чисел d_1, d_2 или d_3 . Тогда можно найти числа δ_k, l_k, c_k, v_k , такие, что

$$d_k = \delta_k p^{l_k}, \quad n_k = c_k \delta_k + v_k p^{l_k},$$

где число δ_k не делится на p , $0 \leq c_k < p^{l_k}$, а $c_k = 0$, если $l_k = 0$, в противном случае число c_k не делится на p . Следовательно, если $f_k = v_k/\delta_k$, то

$$r_k = \frac{n_k}{d_k} = \frac{v_k}{\delta_k} + \frac{c_k}{p^{l_k}} = f_k + \frac{c_k}{p^{l_k}}.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $l_1 \geq l_2 \geq l_3$.

Пусть

$$g_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} (e^{2\pi i f_k x^{c_k p^{l_1 - l_k}}} + e^{-2\pi i f_k x^{p^{l_1} - c_k p^{l_1 - l_k}}}) & \text{при } c_k \neq 0, \\ \cos 2\pi r_k & \text{при } c_k = 0, \end{cases}$$

и

$$U(x) = \sum_{k=1}^3 g_k(x).$$

Тогда

$$g_k(e^{2\pi i/p^{l_1}}) = \cos 2\pi r_k$$

и, следовательно, если r_1, r_2, r_3 удовлетворяют уравнению (1), то

$$U(e^{2\pi i/p^{l_1}}) = 0.$$

Как показал Кронекер¹, многочлен

$$P(x) = 1 + x^{p^{l_1-1}} + x^{2p^{l_1-1}} + \dots + x^{(p-1)p^{l_1-1}}$$

не допускает разложения в произведение двух многочленов меньшей степени, коэффициенты которых — рациональные функции корней s -й степени из единицы (если s не кратно p). Пользуясь теоремой Кронекера, докажем следующие две леммы:

Лемма 1. Многочлен $U(x)$ делится на многочлен $P(x)$.

Доказательство. Многочлены $U(x)$ и $P(x)$ не взаимно просты, поскольку оба обращаются в нуль при $x = \exp(2\pi i/p^{l_1})$. Наибольший общий делитель этих многочленов имеет коэффициенты, которые рационально зависят от коэффициентов многочленов $U(x)$ и $P(x)$. Следовательно, по теореме Кронекера их наибольший общий делитель совпадает с многочленом $P(x)$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если многочлен $U(x)$ представить в виде $\sum_t U_t(x)$, где в $U_t(x)$ собраны члены вида bx^c , $c \equiv t \pmod{p^{l_1-1}}$, то $U(x)$ делится на $P(x)$ и, следовательно, $U_t(\exp(2\pi i/p^{l_1})) = 0$.

¹ См. L. Kronecker, Journal de Mathématique, 19 (1854), 177—192. — Прим. перев.

Доказательство. Разделив $U_t(x)$ на $P(x)$, получим $U_t(x) = P(x)Q_t(x) + R_t(x)$, где $R_t(x)$ — многочлен меньшей степени, чем $P(x)$, а показатель степени x каждого члена $R_t(x)$ сравним с t по модулю p^{l_t-1} . Следовательно,

$$U(x) = \sum_t U_t(x) = P(x) \sum_t Q_t(x) + \sum_t R_t(x),$$

а по лемме 1

$$\sum_t R_t(x) = 0.$$

Значит, $R_t(x) = 0$ при любом t (при разных t в этих многочленах нет членов с одинаковыми степенями). Лемма 2 доказана.

Рассмотрение всех возможных решений уравнения (1) сводится к рассмотрению следующих частных случаев:

1. $l_1 = 1 \geq l_2 \geq l_3$. Поскольку степень многочлена $U(x)$ меньше p , а степень многочлена $P(x)$ равна $p-1$, то по лемме 1 $U(x) = mP(x)$, где m — некоторая постоянная.

1.1. Если $l_1 = l_2 = l_3 = 1$, то $U(0) = 0$ и (поскольку $P(0) = 1$) $m = 0$. Следовательно, функция $U(x)$ равна нулю при любом x . Если любая из функций g_1, g_2, g_3 тождественно равна нулю, то она должна содержать лишь одну степень x . Если тождественно равна нулю сумма двух членов, входящих в две из трех функций g_1, g_2, g_3 , то нетрудно видеть, что сумма этих двух функций также тождественно равна нулю и, следовательно, третья функция обращается в нуль при любых x , то есть имеет место предыдущий случай. Наконец, возможно, что каждая из трех функций g_1, g_2, g_3 содержит две, но во всех трех случаях одни и те же степени x .

1.1.1. Если одна из функций g_1, g_2, g_3 содержит лишь одну степень x , то при соответствующем значении k мы получим соотношение $c_k = p - c_k$, откуда $2c_k = p$ и, следовательно, $p = 2$, $c_k = 1$. Поскольку p — наибольший простой делитель чисел d_1, d_2, d_3 , то $d_1 = d_2 = d_3 = 2$. Этот случай не представляет интереса, поскольку не позволяет получить ни одного решения уравнения (1).

1.1.2. Если каждая из трех функций g_1, g_2, g_3 содержит две степени x , причем все три функции g_1, g_2, g_3 содержат одни и те же степени x , то пусть b_1, b_2, b_3 — коэффициенты при одной из этих степеней x . Тогда коэффициенты при другой степени x равны $1/b_1, 1/b_2, 1/b_3$ и

$b_1 + b_2 + b_3 = 0$, $1/b_1 + 1/b_2 + 1/b_3 = 0$, то есть $b_2 b_3 + b_3 b_1 + b_1 b_2 = 0$. Следовательно, b_1 , b_2 и b_3 удовлетворяют уравнению

$$z^3 - e^{2\pi i(3s)} = 0, \text{ где } b_1 b_2 b_3 = e^{2\pi i(3s)}.$$

Таким образом, мы можем положить $b_1 = \exp(2\pi i s)$, $b_2 = \exp(2\pi i(s + 1/3))$, $b_3 = \exp(2\pi i(s + 2/3))$. Соответствующее решение уравнения (I)

$$(\cos 2\pi(s + c/p) + \cos 2\pi(s + 1/3 + c/p) + \cos 2\pi(s + 2/3 + c/p) = 0)$$

принадлежит к типу «б».

1.2. Если $l_1 = l_2 = 1$, $l_3 = 0$, то $m = \cos 2\pi r_3$.

1.2.1. Если, кроме того, $\cos 2\pi r_3 = 0$, то $\cos 2\pi r_1 + \cos 2\pi r_2 = 0$ и, следовательно, $r_2 = \pm 1/2 \pm r_1$. В этом случае решение уравнения (I), очевидно, принадлежит к типу «а».

1.2.2. Если $\cos 2\pi r_3 \neq 0$, то $U(x) = P(x) \cos 2\pi r_3$. Число различных степеней x в многочлене $P(x)$ равно p , а в многочлене $U(x)$ оно меньше или равно 5. Следовательно, p совпадает с одним из чисел 2, 3 или 5. Но если $p = 2$, то две функции g_1 , g_2 содержат лишь одну степень x . Этот случай рассмотрен в 1.1.1.

1.2.2.1. Если $p = 3$, то, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем либо

$$\frac{1}{2} e^{2\pi i f_1} + \frac{1}{2} e^{2\pi i f_2} = \frac{1}{2} e^{-2\pi i f_1} + \frac{1}{2} e^{-2\pi i f_2} = \cos 2\pi r_3,$$

либо

$$\frac{1}{2} e^{2\pi i f_1} + \frac{1}{2} e^{-2\pi i f_2} = \frac{1}{2} e^{-2\pi i f_1} + \frac{1}{2} e^{2\pi i f_2} = \cos 2\pi r_3.$$

В первом случае $f_1 = -f_2 = \pm r_3$, во втором случае $f_1 = f_2 = \pm r_3$. Соответствующие решения уравнения (I) в обоих случаях принадлежат к типу «б».

1.2.2.2. Если $p = 5$, то

$$\frac{1}{2} e^{2\pi i f_1} = \frac{1}{2} e^{-2\pi i f_1} = \frac{1}{2} e^{2\pi i f_2} = \frac{1}{2} e^{-2\pi i f_2} = \cos 2\pi r_3.$$

Следовательно, либо $f_1 = f_2 = 0$ и $\cos 2\pi r_3 = 1/2$, то есть $r_3 = 1/6$, либо $f_1 = f_2 = 1/2$ и $\cos 2\pi r_3 = -1/2$, то есть $r_3 = 1/3$. Если постоянные c_1 , c_2 , c_3 выбраны так, что многочлен $U(x)$ содержит пять различных степеней x , то соответствующие решения принадлежат к типу «в».

1.3. Если $l_1 = 1$, $l_2 = l_3 = 0$, то

$$U(x) = (\cos 2\pi r_2 + \cos 2\pi r_3) P(x).$$

1.3.1. Если, кроме того, $\cos 2\pi r_2 + \cos 2\pi r_3 = 0$, то $\cos 2\pi r_1 = 0$ и решение уравнения (1) принадлежит к типу «а».

1.3.2. Если $\cos 2\pi r_2 + \cos 2\pi r_3 \neq 0$, то, поскольку многочлен $U(x)$ содержит две или три различные степени x , $p = 2$ или $p = 3$. Случай $p = 2$ рассмотрен в 1.1.1, поэтому мы предположим, что $p = 3$. Тогда

$$\frac{1}{2} e^{2\pi i f_1} = \frac{1}{2} e^{-2\pi i f_1} = \cos 2\pi r_2 + \cos 2\pi r_3,$$

и каждая из этих величин должна быть равна $\pm 1/2$. Следовательно, либо $f_1 = 0$ и $\cos 2\pi r_2 + \cos 2\pi r_3 = 1/2$, либо $f_1 = 1/2$, и $\cos 2\pi r_2 + \cos 2\pi r_3 = -1/2$, где знаменатели рациональных чисел r_2 и r_3 не имеют простых делителей, которые были бы больше числа 2, что невозможно.

2. Предположим далее, что $l_1 \geq 2$, $l_1 \geq l_2 \geq l_3$. Показатели степеней x , содержащихся в g_1, g_2, g_3 , равны $c_1, p^{l_1} - c_1; c_2 p^{l_1 - l_2}, p^{l_1} - c_2 p^{l_1 - l_2}; c_3 p^{l_1 - l_3}, p^{l_1} - c_3 p^{l_1 - l_3}$.

Если два из этих показателей сравнимы между собой по модулю $p^{l_1 - 1}$, то два соответствующих члена в $U(x)$ условимся называть подобными. В этом случае наши заключения опираются на лемму 2.

2.1. Если $l_1 > l_2 \geq l_3$, то c_1 не делится на p и члены функции g_1 не подобны членам функций g_2 и g_3 и подобны друг другу лишь в том случае, если $p = l_1 = 2$ и $c_1 = 1$.

2.1.1. Если $p = l_1 = 2$, то $g_1(\exp(2\pi i/4)) = \cos 2\pi r_1 = 0$, и мы получаем решение уравнения (1), принадлежащее к типу «а».

2.1.2. Если $p \neq 2$, то каждый член функции $g_1(x)$ делится на многочлен $P(x)$, что, очевидно, невозможно.

2.2. Если $l_1 = l_2 \geq l_3$, то члены функции g_3 не подобны членам функций g_1 и g_2 и подобны друг другу лишь в том случае, если либо l_3 принимает значения 0 или 1, либо $l_3 = p = 2$.

2.2.1, 2.2.2. Если $l_3 = 0$ или $l_3 = p = 2$, то $\cos 2\pi r_3 = 0$ и мы получаем решение уравнения (1), принадлежащее к типу «а».

2.2.3. Если $l_3 = 1$, то $\cos 2\pi r_3 = 0$ и $p = 2$, $l_3 = 2$. Противоречие.

2.2.4. Если два члена функции g_3 не подобны, то оба эти члена делятся на $P(x)$, что невозможно.

2.3. Если $l_1 = l_2 = l_3$, то два члена каждой функции g_1, g_2, g_3 не подобны друг другу, за исключением того случая, когда $p = l_1 = l_2 = l_3 = 2$. Следовательно, за исключением этого особого случая, многочлен $U(x)$ содержит не более трех подобных членов.

2.3.1. Если $p = l_1 = l_2 = l_3 = 2$, то соответствующее решение уравнения (1) принадлежит к типу «а».

2.3.2. Если в многочлене $U(x)$ имеются две группы трех подобных членов, то сумма членов каждой группы должна обращаться в нуль при $x = \exp(2\pi i/p^l)$. Получающиеся соотношения в точности совпадают с соотношениями для b_1, b_2, b_3 в 1.1.2. Следовательно, соответствующее решение уравнения (1) в этом случае принадлежит к типу «б».

196. Пусть $p|x$ означает, что p — простой делитель числа x . Поскольку по условиям задачи $p \leq n$, то $p|n!$. Предположим сначала, что в разложение числа x в произведение степеней простых чисел множитель p входит в четной степени: $2s, s \geq 1$. Тогда $2p^s \leq n$, так как $x \leq n^2/4$ и, следовательно, показатель, с которым p входит в $n!$, не меньше $2p^{s-1} \geq 2s$. Значит, $p^{2s}|n!$.

Предположим теперь, что наивысшая степень простого множителя p в разложении числа x нечетна: $2s+1, s \geq 1$. Тогда $n \geq 2\sqrt{p}p^s$. Рассмотрим два случая:

Случай 1. $4p^s < n$. Нетрудно видеть, что в этом случае $p^{2s+1}|n!$.

Случай 2. $4p^s \geq n$. Продолжая неравенство, получаем $4p^s \geq n \geq 2\sqrt{p}p^s, 2 \geq \sqrt{p}, 2\sqrt{p} \geq p, n \geq p^{s+1}$. Поэтому показатель, с которым p входит в $n!$, не меньше чем

$$p^s + p^{s-1} + \dots + p + 1 \geq 2^s + 2^{s-1} + \dots, \\ \dots + 2 + 1 = 2^{s+1} - 1 \geq 2s + 1.$$

Следовательно, и в этом случае $p^{2s+1}|n!$.

Итак, мы доказали, что в условиях задачи $x|n!$.

197. Достаточно рассмотреть случай $p > q$.

Пусть

$$F_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{6}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2n}\right).$$

Тогда

$$F_n = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdots \frac{2n+1}{2n},$$

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{F_n}$$

и произведение первых $(p+q)n$ членов бесконечного произведения $P_{p,q}$ равно отношению

$$\frac{F_{np}}{F_{nq}} = \prod_{j=1}^{n(p-q)} \left[1 + \frac{1}{2(j+nq)}\right].$$

Следовательно,

$$\ln \frac{F_{np}}{F_{nq}} - \sum_{j=1}^{n(p-q)} \frac{1}{2(j+nq)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n(p-q)} \left\{ \ln \left[1 + \frac{1}{2(j+nq)}\right] - \frac{1}{2(j+nq)} \right\}.$$

Абсолютная величина каждого слагаемого, заключенного в фигурные скобки, меньше $1/8(1+nq)^2$, поэтому абсолютная величина всей суммы меньше $n(p-q)/8(1+nq)^2$ и стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$. Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{F_{np}}{F_{nq}} \right) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n(p-q)} \frac{1}{j+nq}.$$

Чтобы вычислить этот предел, разделим отрезок оси x от нуля до точки $x = (p-q)/q$ на $n(p-q)$ равных интервалов длиной $1/qn$ и выберем в конце j -го интервала ординату $1/(j+nq)$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n(p-q)} \frac{1}{j+nq} = \int_0^{(p-q)/q} \frac{dx}{1+x} = \ln \left(\frac{p}{q} \right),$$

откуда

$$P_{p,q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{np}}{F_{nq}} = \sqrt[p]{\frac{p}{q}}.$$

(такой блок соответствует отрезку ряда, содержащему $k_1 + \dots + k_r$ чисел c_i).

Здесь $r = (\omega + 1)/2$, а коэффициенты A_i и числа k_i должны удовлетворять условиям:

а) все k_i — положительные целые числа;

б) $|A_i| \leq 1$, $A_i \neq A_j$ при $i \neq j$;

в) $\sum_{i=1}^r k_i A_i^k = 0$ при $k < \omega$;

г) $\sum_{i=1}^r k_i A_i^\omega = \Delta \neq 0$.

Условиям «а», «б», «в» и «г» можно удовлетворить, выбрав в качестве коэффициентов A_i любой набор попарно различных правильных рациональных дробей, если систему уравнений «в» и «г» решить относительно неизвестных k_i , представив решение в виде $k_i = \Delta D_i / D$ (где D — определитель системы уравнений, а Δ — общее кратное знаменателей всех отношений D_i / D , записанных в виде дробей p/q), и изменить знак у отрицательных k_i , одновременно изменив знак соответствующих A_i . Все эти действия осуществимы, поскольку D_i и D — определители Вандермонда и, следовательно, равны отличным от нуля рациональным числам. Нетрудно проверить, что если условия «а», «б», «в» и «г» выполнены, то построенная последовательность c_i обладает свойствами (1) и (2).

Пусть теперь M — произвольный класс положительных нечетных чисел $\{\omega_j\}$. Построим ряд $S(k)$, который расходится, если $k \in M$, и сходится в противном случае. Пусть C_j — верхняя грань частичных сумм ряда $S_{\omega_j}(k)$ для всех $k \neq \omega_j$. Такая грань существует, поскольку числа A_i выбраны нами так, что $|A_i| < 1$, а при $k > \omega_j$ ряд $S_{\omega_j}(k)$ сходится абсолютно и равномерно. Выпишем двойной ряд, у которого члены j -й строки совпадают с членами ряда $S_{\omega_j}(k)$, умноженными на $2^{-j} C_j^{-1}$. Суммируя этот ряд по диагоналям, получаем ряд, обладающий свойствами, о которых говорится в условии задачи. Например, ряд S_3 выглядит следующим образом:

$$1^{-1/3} - \frac{1}{2} \cdot 1^{-1/3} - \frac{1}{2} \cdot 1^{-1/3} + 2^{-1/3} - \frac{1}{2} \cdot 2^{-1/3} - \frac{1}{2} \cdot 2^{-1/3} + \\ + n^{-1/3} - \frac{1}{2} n^{-1/3} - \frac{1}{2} \cdot n^{-1/3} + \dots$$

199. Решение задачи начнем с доказательства следующей леммы.

Лемма. Пусть a , b и n — натуральные числа, причем a и b удовлетворяют неравенству

$$a < b < 3a/2, \quad (1)$$

а $A(n) = 2[a/n] - [b/n]$. Тогда

$$A(n) = 0 \quad \text{при } n > b, \quad (2)$$

$$A(n) = -1 \quad \text{при } a < n \leq b, \quad (3)$$

$$A(n) \geq 0 \quad \text{при } a/3 < n \leq a, \quad (4)$$

$$A(n) \geq 1 \quad \text{при } 1 \leq n \leq a/3. \quad (5)$$

Доказательство. Пусть $[a/n] = u$, $[b/n] = v$, так что $u > (a/n) - 1$, $v \leq b/n$ и $A(n) = 2u - v$. Если $n > b$, то $u = v = 0$. Следовательно, утверждение (2) доказано. Если $a < n \leq b$, то $u = 0$, а в силу неравенства (1) $v = 1$. Тем самым доказано утверждение (3).

В общем случае $A(n) = 2u - v = u/2 + 3u/2 - v > u/2 + (3a/2 - b)/n - 3/2 > (u - 3)/2$. Таким образом, если $a/3 < n \leq a$, то $u \geq 1$, $A(n) > -1$ и, значит, $A(n) \geq 0$, так как это число целое, что доказывает утверждение (4). Если же $1 \leq n \leq a/3$, то $u \geq 3$ и $A(n) > 0$, что доказывает утверждение (5). Итак, лемма полностью доказана.

Пусть

$$P_n = \frac{p_n!}{p_n(p_n + 1) \dots (p_{n+1} - 1)}$$

— число, приведенное в условии задачи. При $p_n = 2$, 5 и 7 дробь P_n принимает значения 1,4 и 1. Будем в дальнейшем предполагать, что $p_n \geq 11$. По теореме Чебышева, при $p_n \geq 29$ справедливо неравенство $p_{n+1} < 5p_n/4^*$. Как показывают несложные выкладки, при $p_n \geq 11$ выполняется неравенство $p_{n+1} < 3p_n/2$. Если $p > p_n$, то простое число p не является делителем ни числителя, ни знаменателя числа P_n . Если $p = p_n$, то простое число p содержится в числителе и знаменателе числа P_n в первой степени, поскольку $p_{n+1} - 1 < 2p_n$. Условимся считать впредь, что $p < p_n$.

Если a и b выбрать равными p_n и $p_{n+1} - 1$, то такие a и b будут удовлетворять неравенствам (1), а

$$P_n = \frac{(p_n!)^2}{p_n(p_{n+1} - 1)!} = \frac{(a!)^2}{b! a}. \quad (6)$$

Поскольку $p < p_n$, то числитель и знаменатель числа (6) содержат p в степенях (см. III. 35)

$$2 \sum_{r=1}^{\infty} [a/p^r] \text{ и } \sum_{r=1}^{\infty} [b/p^r].$$

Таким образом, в обозначениях сформулированной выше леммы задача сводится к доказательству неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} A(p^k) \geq 0 \quad (7)$$

для всех простых чисел $p < p_n = a$. Если ни одна из степеней простого числа p не удовлетворяет неравенству $a < p^r \leq b$, то неравенство (7) следует непосредственно из соотношений (2), (4) и (5).

Итак, нам остается лишь рассмотреть случай, когда какая-то степень простого числа p , например p^m , удовлетворяет неравенствам $a < p^m \leq b$, то есть $p_n < p^m < p_{n+1}$. Из соотношения (1) ясно, что такая степень p^m может быть лишь одна. Поскольку в силу соотношения (3) $A(p^m) = -1$, то неравенство (7) будет доказано, если нам удастся показать, что при некоторой другой степени числа p , например при p^k , $A(p^k) \geq 1$. В зависимости от того, какое из трех отношений, $p \geq 5$, $p = 3$ или $p = 2$, выполняется, положим это значение k равным $m-1$, $m-2$ или $m-3$. Поскольку $p_n < p^m < p_{n+1}$ и $p_n \geq 1$, нетрудно видеть, что в любом из трех случаев $k \geq 1$ и $p^{m-k} \geq 5$. Следовательно, $p^k = p^m/p^{m-k} \leq b/5 < 3a/10 < a/3$. В силу соотношения (5) это и означает, что выполняется неравенство $A(p^k) \geq 1$.

200. Пусть $\epsilon = e^{2\pi i/N}$. Выпишем подряд N разложений бинома Ньютона $(1+x)^N$ для $x = \epsilon, \epsilon^2, \dots, \epsilon^N$:

$$(1 + \epsilon^k)^N = \binom{N}{0} + \binom{N}{1} \epsilon^k + \binom{N}{2} \epsilon^{2k} + \dots + \binom{N}{N} \epsilon^{kN},$$

где $k = 1, 2, \dots, N$. Умножив правую и левую части k -го разложения на ϵ^{-kr} , где r — целое число, удовлетворяющее неравенству $0 < r < N$, и сложив, получим

$$\sum_{k=1}^N (1 + \epsilon^k)^N \epsilon^{-kr} = N \binom{N}{r}.$$

поскольку при $l \neq r$

$$\sum_{k=0}^N \varepsilon^{k(l-r)} = 0.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N (1 + \varepsilon^k)^N \varepsilon^{-kr} &= \sum_{k=0}^N (\varepsilon^{k/2} + \varepsilon^{-k/2})^N \varepsilon^{k(N-2r)/2} = \\ &= \sum_{m=0}^N \left(2 \cos \frac{k\pi}{N}\right)^N \left[\cos \frac{k(N-2r)\pi}{N} + i \sin \frac{k(N-2r)\pi}{N}\right]. \end{aligned}$$

Приравнивая вещественные части, находим

$$\binom{N}{r} = \frac{2^N}{N} \sum_{k=1}^N \left(\cos \frac{k\pi}{N}\right)^N \cos \frac{k(N-2r)\pi}{N}.$$

Полагая $x = N - 2r$, убеждаемся, что выведенное соотношение совпадает с тем, которое требовалось доказать.

201. Примем один из концов дороги за начало отсчета. Тогда положение любого человека можно задать, указав его координату x , где $0 \leq x \leq a$. Координата x представляет собой случайную величину с распределением

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{при } 0 \leq x \leq a, \\ 0 & \text{при } x \notin [0, a]. \end{cases}$$

Если x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — набор координат, характеризующий заданную расстановку n людей вдоль дороги, то вероятность того, что $x_{i+1} \geq x_i + b$ при $i = 1, 2, \dots, n-1$, определяется повторным интегралом

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{a-(n-1)b} p(x_1) dx_1 \int_{x_1+b}^{a-(n-2)b} p(x_2) dx_2 \dots \\ &\dots \int_{x_{n-2}+b}^{a-b} p(x_{n-1}) dx_{n-1} \int_{x_{n-1}+b}^a p(x_n) dx_n, \end{aligned}$$

который вычисляется без труда и оказывается равным

$$I = \left[\frac{a - (n-1)b}{a} \right]^n \cdot \frac{1}{n!}$$

Поскольку при заданном наборе точек x_i существует $n!$ перестановок n людей вдоль дороги, то искомая вероятность равна

$$P = n! I = [1 - (n-1)b/a]^n.$$

(Ясно, что должно выполняться условие $(n-1)b \leq a$.)

202. Пусть x_n — последовательность точек нормированного линейного пространства, например 3-мерного пространства. Предположим, что $\|x_n\| > \delta$ при всех n .

Если существует последовательность положительных скаляров c_n , таких, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|c_n x_n - x_0\| = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_0\| + \|x_n\| - \|x_0 + x_n\|) = 0$. Действительно, $\|x_0\| = \|x_0 - c_n x_n + c_n x_n\| \leq c_n \|x_n\| + \|x_0 - c_n x_n\|$ и $\|x_0 + x_n\| = \|(c_n + 1)x_n + x_0 - c_n x_n\| \geq (c_n + 1)\|x_n\| - \|x_n - c_n x_n\|$, в силу чего

$$0 \leq \|x_0\| + \|x_n\| - \|x_0 + x_n\| \leq 2\|x_0 - c_n x_n\|.$$

Поскольку выражение, стоящее в правой части последнего неравенства, стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то $\|x_0\| + \|x_n\| - \|x_0 + x_n\|$ также стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Если, кроме того, пространство наделено скалярным произведением (например, является n -мерным евклидовым пространством), то

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 &= \\ &= \frac{\|x\| + \|y\| + \|x + y\|}{\|x\| \cdot \|y\|} (\|x\| + \|y\| - \|x + y\|), \end{aligned}$$

откуда при $\|x_n\| \geq \delta > 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_0\| + \|x_n\| - \|x_0 + x_n\|) = 0$ получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{x_0}{\|x_0\|} - \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\| = 0,$$

или, полагая $\|x_0\|/\|x_n\| = c_n$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_0 - c_n x_n\| = 0.$$

Полученное соотношение остается в силе и в том случае, если пространство не наделено скалярным произведением, но удовлетворяет некоторому условию выпуклости, достаточному для заключения о сходимости к нулю величины $\|x_0/\|x_0\| - x_n/\|x_n\|\|$, если известно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_0\| + \|x_n\| - \|x_0 + x_n\|) = 0$. Например, можно

потребовать, чтобы при любом $\delta > 0$ существовало число M , такое, что для всех x и y , удовлетворяющих неравенствам $\|x\| > \delta$, $\|y\| > \delta$, выполнялось соотношение

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq M(\|x\| + \|y\| - \|x + y\|).$$

203. На вопрос задачи следует дать отрицательный ответ. Действительно, пусть $f_1(x) \equiv f_2(x) \equiv \cos x$, $f_3(x) \equiv \cos x + a \cos 3x$, где a — параметр. Тогда

$$L_3(a) = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{1 + (\sin x + 3a \sin 3x)^2} dx.$$

Заметим, что $L_3(0) = L_2 = L_1$. Докажем, что $dL_3/da > 0$ при $a = 0$. Отсюда будет следовать, что при достаточно малых отрицательных значениях параметра a величина $L_3(a)$ меньше $L_3(0) = L_2 = L_1$. Дифференцируя под знаком интеграла и полагая $a = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \left. \frac{dL_3}{da} \right|_{a=0} &= 6 \int_0^{\pi} \frac{\sin x \sin 3x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} dx = 6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} dx = \\ &= 6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g(x)}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} dx, \end{aligned}$$

где $g(x) \equiv \cos 2x - \cos 4x$. Функция $g(x)$ положительна при $0 < x < \pi/3$ и отрицательна при $\pi/3 < x < \pi/2$.

Кроме того, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx = 0$. Но $1/\sqrt{1 + \sin^2 x}$ при

$0 \leq x \leq \pi/2$ — положительная убывающая функция, принимающая при $x = \pi/3$ значение $2/\sqrt{7}$. Следовательно,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g(x)}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} dx > \frac{2}{\sqrt{7}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} g(x) dx,$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{g(x)}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} dx > \frac{2}{\sqrt{7}} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx.$$

Складывая отдельно правые и левые части неравенств, получаем

$$\frac{1}{6} \frac{dL_3}{da} \Big|_{a=0} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g(x)}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} dx > \frac{2}{\sqrt{7}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx = 0,$$

из чего следует, что производная dL_0/da положительна при $a = 0$. Таким образом, при достаточно малых отрицательных значениях параметра a выполняется неравенство $L_3(a) < L_2 = L_1$, противоречащее неравенствам, приведенным в условиях задачи.

204. Пусть ε — любое заданное число, удовлетворяющее неравенству $0 < \varepsilon < (b - a)/2$. Поскольку в интервале $a \leq t \leq b$ функция $f(t)$ монотонно возрастает, то $f(b - \varepsilon)/f(b - 2\varepsilon) > 1$. Следовательно, существует положительное целое число P , такое, что при любом $p > P$

$$\left[\frac{f(b - \varepsilon)}{f(b - 2\varepsilon)} \right]^p > \frac{b - a}{\varepsilon},$$

или

$$f^p(b - \varepsilon) > \frac{b - a}{\varepsilon} f^p(b - 2\varepsilon).$$

Кроме того,

$$\int_a^b f^p(t) dt > \int_{b-2\varepsilon}^b f^p(b - \varepsilon) dt$$

и

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f^p(t) dt &> \frac{1}{b-a} \int_{b-\varepsilon}^b f^p(b-\varepsilon) dt = \\ &= \frac{1}{b-a} \varepsilon \cdot f^p(b-\varepsilon) > f^p(b-2\varepsilon). \end{aligned}$$

Таким образом, число x_p удовлетворяет соотношению

$$f^p(x_p) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^p(t) dt$$

только в том случае, если выполняется неравенство $x_p > b - 2\varepsilon$. Следовательно, существует такое P , что при любом $p > P$ справедливо неравенство $x_p > b - 2\varepsilon$, откуда, переходя к пределу при $p \rightarrow \infty$, получаем

$$\lim_{p \rightarrow \infty} x_p = b.$$

205. Пусть B — кольцо с определяющим соотношением $x^2 = \pm x$. Если $x^2 = x$, то $x^3 = x^2 = x$, в то время как если $x^2 = -x$, то $x^3 = -x^2 = x$. Следовательно, соотношение $x^3 = x$ выполняется для любого $x \in B$. Из соотношения $(2x)^3 = 2x$ получаем, что для любого $x \in B$ справедливо соотношение $6x = 0$. Пусть B_2 и B_3 — идеалы, определяемые соотношениями $2x = 0$ ($x \in B_2$) и $3x = 0$ ($x \in B_3$). Ясно, что B_2 — булево кольцо, а кольцо B представляет собой прямую сумму идеалов B_2 и B_3 . Если $B_3 \neq (0)$, то пусть $z \in B_3$, $z \neq 0$. Тогда в идеале B_3 существует элемент x , такой, что $x^2 = x$ и $x \neq 0$, поскольку мы всегда можем выбрать $x = z$, если $z^2 = z$, и $x = -z$ — в противном случае. Пусть $y \neq 0$ и $y \in B_3$. Тогда либо а) $y^2 = y$, либо б) $y^2 = -y$. Рассмотрим случай «а». Как показывают прямые выкладки, $(x+y)^2 + (x-y)^2 = -x-y$, в то время как наши основные допущения приводят к соотношениям $(x+y)^2 + (x-y)^2 = \pm(x+y) \pm (x-y)$, откуда $\pm 2x = -x-y$ или $\pm 2y = -x-y$. Поскольку оба элемента x и y отличны от нуля, то $y = x$. Случай «б». В этом случае $(x+y)^2 + (x-y)^2 = y-x$. Следовательно, поскольку оба элемента x и y отличны от нуля, то $y = -x$. Таким образом, B_3 — кольцо, содержащее три элемента: 0 , x , $-x$, и оно изоморфно полю вычетов по модулю 3, что и требовалось доказать.

206. Докажем сначала утверждение «б». Любой многоугольник, обладающий центральной симметрией, представляет собой $2m$ -угольник с попарно параллельными сторонами, поскольку отражение относительно центра симметрии переводит любую сторону такого многоугольника в равную и параллельную сторону. Разобьем каждую грань выпуклого многогранника с центрально симметричными гранями на параллелограммы. Это можно сделать, поскольку любой $2m$ -угольник с попарно параллельными сторонами допускает разбиение на $2(m-1)$ -угольник с попарно параллельными сторонами и полосу, состоящую из $m-1$ параллелограммов. Каждое ребро многогранника определяет некий набор параллельных сторон и тем самым некий набор параллелограммов, который мы назовем зоной. Каждый параллелограмм определяет две зоны, которые по топологическим соображениям должны пересекаться по некоему другому параллелограмму, называемому парным по отношению к первому.

Основной и парный параллелограммы конгруэнтны и расположены в параллельных плоскостях, поскольку их стороны попарно равны и параллельны. Кроме того, плоскость любого параллелограмма не может быть параллельна плоскости более чем одного параллелограмма, поскольку в противном случае многогранник не был бы выпуклым.

Очевидно, что два конгруэнтных параллелограмма с попарно параллельными сторонами симметричны относительно некоторого центра. Остается лишь доказать, что центр симметрии, определяемый выбранным и парным параллелограммами, совпадает с центром симметрии, определяемым любым другим параллелограммом и парным ему. Докажем это утверждение сначала для двух смежных параллелограммов и парных им. Центр симметрии любого параллелограмма и парного ему определяется произвольно выбранной точкой на одном из параллелограммов. Выберем точку, например, на стороне параллелограмма. Поскольку эта точка принадлежит также и смежному параллелограмму, то оба эти параллелограмма и парные им обладают одним и тем же центром симметрии. Но от любого параллелограмма к произвольно выбранному другому можно перейти, пройдя несколько граней и ребер. Следовательно, все

пары параллелограммов обладают одним и тем же центром симметрии. Таким образом, утверждение «б» доказано.

Утверждение «а» следует из утверждения «б». Любые две зоны должны пересекаться. Действительно, рассмотрим произвольно выбранную зону и любой не принадлежащий ей параллелограмм. Тогда параллелограмм, парный выбранному, находится по другую сторону зоны, поскольку в противном случае многогранник не был бы выпуклым. Следовательно, каждая зона пересекается с зоной, определяемой любым не принадлежащим ей параллелограммом, а значит, пересекается со всеми остальными зонами. Кроме того, как доказано выше, любые две зоны, коль скоро они пересекаются, должны пересекаться дважды. Пусть n — число зон. Тогда число граней должно быть равно числу пересечений зон, то есть $2 \binom{n}{2} = n(n-1)$, что и требовалось доказать.

207. Пусть ϑ — азимут направления из точки O на точку D ; α, β — азимуты направлений из точки O на точки A и B ; α_1, β_1 — азимуты направлений из точки C на точки A, B ; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ — азимуты направлений из точки D на точки A, B, C . Требуется определить азимут ϑ .

Прежде всего докажем, что азимут ϑ однозначно определяется имеющимися у охотника данными, то есть азимутами $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$.

Действительно, все углы треугольников ODA, DAC, DCB и ODB выражаются через измеренные азимуты и угол ϑ . Из теоремы синусов и тождества

$$\frac{OD}{DB} = \frac{OD}{DA} \cdot \frac{DA}{DC} \cdot \frac{DC}{DB}$$

получаем

$$\frac{\sin(\beta - \beta_2)}{\sin(\vartheta - \beta)} = \frac{\sin(\alpha - \alpha_2) \sin(\alpha_1 - \gamma_2) \sin(\beta_1 - \beta_2)}{\sin(\vartheta - \alpha) \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \sin(\beta_1 - \gamma_2)},$$

откуда

$$\sin(\vartheta - \alpha) = k \sin(\vartheta - \beta), \quad (1)$$

где

$$k = \frac{\sin(\alpha - \alpha_2) \sin(\beta_1 - \beta_2) \sin(\alpha_1 - \gamma_2)}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2) \sin(\beta - \beta_2) \sin(\beta_1 - \gamma_2)}.$$

Полученное соотношение (1) позволяет определить азимут ϑ :

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sin \alpha - k \sin \beta}{\cos \alpha - k \cos \beta}.$$

Не прибегая к таблицам, задачу нетрудно решить при помощи транспортира и линейки, если проделать следующее несложное построение. Отложим произвольно выбранный отрезок CD . Построив прямые CA , DA , CB и DB , определим положение точек A и B . Затем проведем прямые AO и BO , что позволит установить положение точки O и определить по чертежу азимут направления DO .

В двух случаях соотношение (1) становится неопределенным, а приведенное выше геометрическое построение невозможным: 1) если точки C и D расположены на одной прямой с точкой A (или B); 2) если точка O расположена на одной прямой с точками A и B . Если охотник не располагает другими сведениями, то путь его домой может быть довольно длинным: сначала по азимуту, до точки A (или B), а оттуда — домой в точку O .

208. Пусть

$$R(n, r; x) = \binom{n}{r}^2 n x^{2r+1} (1-x)^{2n-2r+1}. \quad (1)$$

Докажем, что точная верхняя грань величины $R(n, r; x)$, взятая по всем n , r и x , изменяющимся в пределах, которые указаны в условиях задачи, равна $1/2e$. Пусть $S(n, r)$ — максимальное значение $R(n, r; x)$ при фиксированных n и r в интервале $0 < x < 1$. Требуется доказать, что $\sup S(n, r) = 1/2e$, где верхняя грань берется по всем целым числам n и r , удовлетворяющим неравенствам $n \geq 1$ и $0 \leq r \leq n$. Дифференцируя $R(n, r; x)$, нетрудно установить, что максимум $R(n, r; x)$ как функции от x при $0 < x < 1$ достигается в точке $x = (2r+1)/(2n+2)$, в силу чего

$$S(n, r) = \binom{n}{r}^2 n \frac{(2r+1)^{2r+1} (2n-2r+1)^{2n-2r+1}}{(2n+2)^{2n+2}}. \quad (2)$$

Пусть при $r = 0, 1, \dots, n-1$

$$q(n, r) = \frac{S(n, r+1)}{S(n, r)}.$$

Из соотношения (2) следует, что

$$q(n, r) = \frac{(n-r)^2 (2r+3)^{2r+3} (2n-2r-1)^{2n-2r-1}}{(r+1)^2 (2r+1)^{2r+1} (2n-2r+1)^{2n-2r+1}}. \quad (3)$$

Временно рассматривая r как непрерывную переменную ($0 \leq r \leq n+1$), получаем из (3)

$$\begin{aligned} \frac{d \ln q(n, r)}{dr} &= -\frac{2}{r+1} + 2 \ln \left(1 + \frac{2}{2r+1} \right) - \\ &- \frac{2}{n-r} + 2 \ln \left(1 + \frac{2}{2n-2r-1} \right) = \\ &= f(2r+1) + f(2n-2r-1), \end{aligned} \quad (4)$$

где $f(t) = -4/(t+1) + 2 \ln(1 + 2/t)$, $t > 0$. (Поскольку $0 \leq r \leq n-1$, то $2r+1 \geq 1$ и $2n-2r-1 \geq 1$.) Пользуясь тем, что $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ и $f'(t) = 4/(t+1)^2 - 4/t(t+2) <$

< 0 , находим, что $f(t) > 0$ при $t > 0$. Отсюда и из соотношения (4) следует, что $d \ln q(n, r)/dr > 0$. Таким образом, с увеличением r ($r = 0, 1, \dots, n-1$) функция $q(n, r)$ возрастает. В частности, при $0 \leq r < (n-1)/2$

$$q(n, r) < q(n, n-1-r). \quad (5)$$

С другой стороны, из соотношения (1) следует, что $R(n, n-r; x) = R(n, r; 1-x)$, в силу чего $S(n, n-r) = S(n, r)$ и $q(n, n-1-r) = 1/q(n, r)$. Из последнего соотношения и неравенства (5) заключаем, что $q(n, r) < 1 < q(n, n-1-r)$ при $0 \leq r < (n-1)/2$. (Если n — нечетное число, то $q(n, r) = 1$ при $r = (n-1)/2$.) Таким образом, при фиксированном n функция $S(n, r)$ убывает в интервале $0 \leq r < (n+1)/2$ и возрастает в интервале $(n-1)/2 < r \leq n$. Следовательно, наибольшее значение функции $S(n, r)$ ($r = 0, 1, \dots, n$) равно

$$S(n, 0) = S(n, n) = n(2n+1)^{2n+1} / (2n+2)^{2n+2}. \quad (6)$$

Остается доказать, что $\sup S(n, 0) = 1/2e$, где точная верхняя грань берется по всем натуральным значениям n . Условимся временно рассматривать n в соотношении (6) как непрерывную переменную. Тогда $d \ln S(n, 0)/dn = 1/n - 2 \ln [1 + 1/(2n+1)] > 1/n - 2/(2n+1) > 0$ (поскольку $\ln(1+u) < u$ при $u > 0$). Таким образом, при $n \geq 1$ функция $S(n, 0)$ с увеличением n возрастает. С другой стороны, из соотношения (6)

следует, что $S(n, 0) = [n/(2n+2)][1 + 1/(2n+1)]^{-(2n+1)}$, откуда $\lim_{n \rightarrow \infty} S(n, 0) = 1/2$. Это и означает, что $\sup S(n, 0) = 1/2e$. Поскольку $S(n, 0)$ в действительности меньше $1/2e$ при $n = 1, 2, \dots$, то в неравенстве, приведенном в условии задачи, знак указан верно: именно $<$, а не $\leq$.

209*. В тривиальном случае $a = b = c = R = 0$ имеем единственное решение $x = y = z = 0$, поэтому в дальнейшем будем предполагать, что по крайней мере один из коэффициентов отличен от нуля, например $c \neq 0$.

Пусть (x, y, z) — целочисленное решение нашей системы. Тогда

$$z = -\frac{ax + by}{c} \quad (1)$$

и

$$c^2(x^2 + y^2) + (ax + by)^2 = c^2R^2. \quad (2)$$

Умножив (2) на $b^2 + c^2$ и преобразуя, получаем

$$c^2R^2x^2 + [abx + (b^2 + c^2)y]^2 = (b^2 + c^2)c^2R^2,$$

и если обозначить

$$X = x, Y = \frac{abx + (b^2 + c^2)y}{cR}, \quad (3)$$

то

$$X^2 + Y^2 = b^2 + c^2. \quad (4)$$

При этом Y , квадрат которого есть целое число, само должно быть целым. Кроме того, выражая из (3) x и y через X и Y , мы убеждаемся, что должно выполняться сравнение

$$abX \equiv cRY \pmod{(b^2 + c^2)}. \quad (5)$$

Обратно, если X и Y — целые числа, удовлетворяющие уравнению (4) и сравнению (5), то x, y и z , определяемые из (3) и (1), дают решение исходной системы (z будет целым в силу (2)).

Рассмотрим сначала случай, когда $a = 0$. Тогда из (5) cRY делится на $b^2 + c^2 = R^2$ и, значит, $Y = nR/\delta$, где n — целое, а $\delta = (c, R)$ и, как легко видеть, $\delta = (b, c)$. Из (4) имеем $X = mR/\delta$ и

$$m^2 + n^2 = \delta^2. \quad (6)$$

Это дает решение исходной системы

$$x = \frac{mR}{\delta}, \quad y = \frac{nc}{\delta}, \quad z = -\frac{nb}{\delta}$$

и число решений равно числу различных разложений вида (6).

Аналогично, если $b = 0$, то

$$x = \frac{mc}{\delta}, \quad y = \frac{nR}{\delta}, \quad z = -\frac{ma}{\delta},$$

где m, n и δ имеют прежний смысл (и на сей раз $\delta = (a, c)$).

Пусть теперь $abc \neq 0$. В разложениях на простые множители

$$a^2 + c^2 = p_1 \dots p_s, \quad b^2 + c^2 = p_{s+1} \dots p_r$$

все p_k (которые не обязательно различны) суть либо 2, либо имеют вид $4n + 1$ и потому в гауссовом кольце разлагаются на два простых комплексно сопряженных множителя (III. 10):

$$p_k = p_k^{(1)} p_k^{(2)} = (a_k + i\beta_k)(a_k - i\beta_k).$$

Поскольку

$$\begin{aligned} (a^2b + iRc)(ab - iRc) &= a^2b^2 + R^2c^2 = \\ &= (a^2 + c^2)(b^2 + c^2) = p_1 \dots p_s p_{s+1} \dots p_r, \end{aligned}$$

должно выполняться равенство

$$(ab + iRc) = p_1^{(t_1)} \dots p_r^{(t_r)} = (u + iv)(X_0 - iY_0), \quad (7)$$

где $i_k = 1$ или 2 , $u + iv = p_1^{(t_1)} \dots p_s^{(t_s)}$, $X_0 - iY_0 = p_{s+1}^{(t_{s+1})} \dots p_r^{(t_r)}$, так что

$$X_0^2 + Y_0^2 = p_{s+1} \dots p_r = b^2 + c^2.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} (abX_0 - RcY_0) + i(abY_0 + RcX_0) &= (ab + iRc)(X_0 + iY_0) = \\ &= (u + iv)(X_0 - iY_0)(X_0 + iY_0) = (u + iv)(b^2 + c^2) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$abX_0 \equiv RcY_0 \pmod{(b^2 + c^2)}, \quad (8)$$

$$abY_0 \equiv -RcX_0 \pmod{(b^2 + c^2)}. \quad (9)$$

Это дает нам четыре решения системы (4) — (5):

$$X = \pm X_0, Y = \pm Y_0; X = \pm Y_0, Y = \mp X_0,$$

а стало быть, и четыре решения исходной задачи.

Обратно, если $X_0^2 + Y_0^2 = b^2 + c^2$, то в силу тождества Лагранжа

$$\begin{aligned} (abX_0 - RcY_0)^2 + (abY_0 + RcX_0)^2 &= \\ &= [(ab)^2 + (Rc)^2][X_0^2 + Y_0^2] = (a^2 + c^2)(b^2 + c^2)^2, \end{aligned}$$

так что если имеет место (8), то имеет место и (9). Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{ab + iRc}{X_0 - iY_0} &= \frac{(ab + iRc)(X_0 + iY_0)}{X_0^2 + Y_0^2} = \\ &= \frac{abX_0 - RcY_0 + i(abY_0 + RcX_0)}{b^2 + c^2} = u + iv \end{aligned}$$

— целое гауссово число. Далее,

$$u^2 + v^2 = \frac{(ab)^2 + (Rc)^2}{X_0^2 + Y_0^2} = \frac{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)}{b^2 + c^2} = a^2 + c^2,$$

так что имеет место (7) и решение (X_0, Y_0) системы (4) — (5) принадлежит к числу найденных нами выше.

Таким образом, при $abc \neq 0$ задача имеет 4 решения.

210. Пусть

$$\begin{aligned} H_{n-1} &= \frac{1}{(n-1)!} \int_n^\infty w(t) e^{-t} dt, \\ I_n &= H_n e^{n+1}. \end{aligned}$$

Докажем более сильное неравенство

$$H_{n-1} < (e-1)^{-n}, \quad (1)$$

из которого будет следовать неравенство, приведенное в условии задачи. Оценка (1) неулучшаема. В действительности мы докажем, что при $n \rightarrow \infty$

$$H_{n-1} \sim (e-1)^{-n}. \quad (2)$$

Производя простую замену переменной, получаем

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} (t+1)(t+2) \dots (t+n) e^{-t} dt.$$

Тогда

$$I_{n+1} - I_n = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^{\infty} t(t+1) \dots (t+n) e^{-t} dt = \\ = K_n + e^{-1} I_{n+1},$$

где

$$K_n = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 t(t+1) \dots (t+n) e^{-t} dt. \quad (3)$$

Таким образом,

$$(1 - e^{-1}) I_{n+1} - I_n = K_n \quad (4)$$

и, в частности,

$$(1 - e^{-1}) I_{n+1} > I_n,$$

в силу чего $J_n = I_n (1 - e^{-1})^{n+1}$ — монотонно возрастающая последовательность. Из соотношения (4) получаем

$$J_{n+1} - J_n = K_n (1 - e^{-1})^{n+1},$$

откуда

$$J_m - J_1 = \sum_{n=1}^{m-1} (J_{n+1} - J_n) = \sum_{n=1}^{m-1} K_n (1 - e^{-1})^{n+1}.$$

Из соотношения (3) следует, что $K_n < 1$ ($n = 1, 2, \dots$), поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = J_1 + \sum_{n=1}^{\infty} K_n (1 - e^{-1})^{n+1}. \quad (5)$$

При $t \geq 0$

$$e^t = [1 - (1 - e^{-1})]^{-t} = 1 + t(1 - e^{-1}) + \\ + \frac{t(t+1)(1 - e^{-1})^2}{2!} + \dots,$$

или

$$1 = e^{-t} + t e^{-t} (1 - e^{-1}) + \frac{t(t+1) e^{-t} (1 - e^{-1})^2}{2!} + \dots$$

Интегрируя ряд почленно по единичному интервалу (что, очевидно, допустимо), приходим к равенству

$$1 = \int_0^1 e^{-t} dt + (1 - e^{-1}) \int_0^1 te^{-t} dt + \sum_{n=1}^{\infty} K_n (1 - e^{-1})^{n+1},$$

откуда, используя соотношение (5), получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 1 + J_1 - \int_0^1 e^{-t} dt - (1 - e^{-1}) \int_0^1 te^{-t} dt.$$

Как показывают несложные выкладки, $J_1 = 2(1 - e^{-1})^2$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 1.$$

Тем самым асимптотическая оценка (2), из которой вследствие монотонности J_n сразу же следует неравенство (1), доказана.

211. Число всех возможных перестановок n кружков равно $n!$. Пусть A_k — число тех перестановок, при которых номера k кружков совпали с накрытыми кружками числами. Нетрудно видеть, что A_k совпадает с коэффициентом при $x_1 x_2 \dots x_n t^k$ в разложении функции

$$\begin{aligned} \varphi &= (x_1 t + x_2 + \dots + x_n)(x_1 + x_2 t + \dots + x_n) \\ &\quad \dots (x_1 + x_2 + \dots + x_n t) = \\ &= [\sum x_i + (t-1)x_1][\sum x_i + (t-1)x_2] \dots [\sum x_i + (t-1)x_n] = \\ &= \sum_{g=0}^n (\sum x_i)^g (t-1)^{n-g} (x_1 x_2 \dots x_{n-g} + \dots) \end{aligned}$$

по степеням x_i , где последняя скобка содержит все наборы по $n-g$ различных переменных из $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Коэффициент при t^k в $(t-1)^{n-g}$ равен $\binom{n-g}{k} \times \times (-1)^{n-g-k}$, коэффициент при члене $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_g}$, где все x_{i_k} различны, в $(\sum x_i)^g$ равен $g!$, число способов, которыми можно выбрать g различных переменных из $x_1, x_2, \dots, x_n$, равно $\binom{n}{g}$, и при любом наборе g

переменных в последней скобке существует один и только один член, дополняющий произведение выбранных переменных до $x_1 x_2 \dots x_n$. Следовательно, искомый коэффициент равен

$$A_k = \sum_{g=0}^{n-k} \binom{n}{g} g! \binom{n-g}{k} (-1)^{n-g-k}.$$

Таким образом, вероятность того, что номера k кружков совпали с накрытыми кружками числами, составляет

$$\begin{aligned} \frac{A_k}{n!} &= \sum_{g=0}^{n-k} \frac{(-1)^{n-g-k}}{k! (n-k-g)!} = \\ &= \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^{n-k} \frac{1}{(n-k)!} \right). \end{aligned}$$

При $n \rightarrow \infty$

$$\frac{A_k}{n!} \rightarrow \frac{e^{-1}}{k!},$$

Таким образом, интересующее нас распределение вероятностей в асимптотике является распределением Пуассона.

$$212. A_n = (3^n - 3)/2^1.$$

213. Интегрируя по частям дважды, получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{-x^2} dx}{(x^2 + 1/2)^2} &= \frac{e^{-x^2}}{2x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2 + 1/2} \right) - \int \frac{e^{-x^2} dx}{x^2} = \\ &= -\frac{e^{-x^2}}{2x(x^2 + 1/2)} + \frac{e^{-x^2}}{x} + 2 \int e^{-x^2} dx = \\ &= \frac{x e^{-x^2}}{x^2 + 1/2} + 2 \int e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

Поскольку $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$, то

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x^2} dx}{(x^2 + 1/2)^2} = \sqrt{\pi}.$$

¹ Подробное решение этой задачи см. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М., Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. I, Арифметика и алгебра, М., 1954 (1959), стр. 94—99, а также Яглом А. М., Яглом И. М., Вероятность и информация, М., «Наука», 1973, стр. 157—162.

214. Первая часть утверждения задачи тривиальна. Докажем вторую часть. Пусть функция $f(x)$ непрерывна по Чезаро при единственном значении $x = \alpha$. Не ограничивая общности, предположим, что $\alpha = 0$ и $f(\alpha) = 0$ (в противном случае достаточно подвергнуть оси координат параллельному переносу). Последовательность $\{a, b, c, a, b, c, \dots\}$ сходится к нулю в смысле Чезаро, если $a + b + c = 0$. Из непрерывности по Чезаро функции $f(x)$ в нуле мы заключаем, что $f(a) + f(b) + f(c) = 0$ или $f(a) + f(b) = -f(-a - b)$. Кроме того, $f(a) = -f(-a)$. Поэтому при любых x и y

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad f(nx) = nf(x).$$

Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к нулю в обычном смысле, то она сходится к нулю и в смысле Чезаро. Следовательно, функция $f(x)$ непрерывна при $x = 0$ в обычном смысле, а в силу аддитивности функции $f(x)$ и при всех остальных значениях x . Хорошо известно, что единственное непрерывное решение функционального уравнения $f(x + y) = f(x) + f(y)$ имеет вид $f(x) = Ax$ (см. III. 15).

215. Докажем утверждение задачи от противного. Предположим, что число m , удовлетворяющее всем условиям задачи, не допускает представления в виде произведения k чисел, каждое из которых не превосходит n . Запишем m в виде произведения простых чисел

$$m = \prod_{i=1}^r p_i, \quad p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_r$$

и определим два набора чисел $A_1, A_2, \dots, A_k$ и $r_1, r_2, \dots, r_k$ соотношениями

$$A_1 = \prod_{i=1}^{r_1-1} p_i \leq n, \quad p_{r_1} A_1 > n,$$

$$A_2 = \prod_{i=r_1}^{r_2-1} p_i \leq n, \quad p_{r_2} A_2 > n,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_k = \prod_{i=r_{k-1}}^{r_k-1} p_i \leq n, \quad p_{r_k} A_k > n.$$

Принятые нами допущения гарантируют, что нам удастся довести построение набора чисел A_i по крайней мере до A_k . Ясно, что $A_{j+1} \geq p_{r_j}$ ($j = 1, 2, \dots, k-1$) и $m \geq A_1 A_2 \dots A_k p_{r_k}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} m^2 &\geq (A_1 A_2 \dots A_k p_{r_k})^2 = (A_1 A_2) (A_2 A_3) \dots \\ &\dots (A_{k-1} A_k) (A_1 p_{r_k}) (A_k p_{r_k}) \geq (A_1 p_{r_1})^2 (A_2 p_{r_2}) \dots \\ &\dots (A_{k-1} p_{r_{k-1}}) (A_k p_{r_k}) > n^{k+1}. \end{aligned}$$

Полученное противоречие свидетельствует о том, что первое утверждение задачи верно.

Теперь докажем второе утверждение. Пусть k — фиксированное натуральное число, ε — произвольное положительное число и

$$\delta = \min \left(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{k+1} \right).$$

Тогда существует такое число $n_0(\delta)$, что при всех $n > n_0(\delta)$ найдется простое число p , удовлетворяющее неравенствам

$$n^{1/2} < p < n^{1/2+\delta}.$$

Целое число $m = p^{k+1}$ не имеет простых делителей, которые превышали бы n , его нельзя представить в виде произведения k целых чисел, каждое из которых не больше n ; кроме того, оно удовлетворяет неравенству $m < n^{\frac{1}{2}(k+1)+\varepsilon}$. Таким образом, показатель $(k+1)/2$, приведенный в условиях задачи, неулучшаем.

216. Докажем следующее утверждение, частным случаем которого является утверждение задачи.

Пусть V_n — объем симплекса с вершинами $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}$ в n -мерном евклидовом пространстве, $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n+1$ — квадратная матрица $(n+1)$ -го порядка с элементами $a_{ij} = |P_i P_j|^2$, e — $(n+1)$ -мерная вектор-строка $(1, 1, \dots, 1)$, а e' — получающийся из нее при транспонировании вектор-столбец.

Тогда

$$\begin{vmatrix} A & e' \\ e & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} 2^n (n!)^2 V_n^2.$$

Доказательство. Пусть $x_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(n)})$ — вектор-строка вершины P_i относительно некоторой прямоугольной системы координат, а C — составленная из векторов x_i матрица, содержащая n столбцов и $(n+1)$ строк. Тогда обычное выражение для объема V_n симплекса в виде определителя можно представить следующим образом:

$$n! V_n = |Ce'| \quad (1)$$

(Ce' означает квадратную матрицу, которая получается, если к прямоугольной матрице C приписать справа вектор-столбец e'). Кроме того,

$$CC' = B = b_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n+1, \quad (2)$$

где

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n x_i^{(k)} x_j^{(k)}.$$

Если O — начало координат, то пусть $|OP_i|^2 = r_i^2$ и $\rho = (r_1^2, r_2^2, \dots, r_{n+1}^2)$. Тогда

$$r_i r_j \cos(\angle P_i O P_j) = \sum_{k=1}^n x_i^{(k)} x_j^{(k)} = b_{ij}, \quad (3)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n+1$$

и

$$D = (d_{ij}) = \rho' e + e' \rho, \quad (4)$$

где $d_{ij} = r_i^2 + r_j^2$. Поскольку

$$a_{ij} = |P_i P_j|^2 = r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos(\angle P_i O P_j),$$

то из соотношений (3) и (4) получаем

$$A = D - 2B. \quad (5)$$

Если E — единичная матрица $(n+1)$ -го порядка, то

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E & -\rho' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & e' \\ e & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ -\rho & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} A - \rho' e - e' \rho & e' \\ e & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2B & e' \\ e & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{vmatrix} A & e' \\ e & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2B & e' \\ e & 0 \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Наконец,

$$\begin{pmatrix} -2C & 0 & e' \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C' & 0 \\ e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2CC' & e' \\ e & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2B & e' \\ e & 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляя в (6)

$$\begin{pmatrix} -2B & e' \\ e & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2CC' & e' \\ e & 0 \end{pmatrix},$$

получаем *

$$\begin{vmatrix} A & e' \\ e & 0 \end{vmatrix} = -|2Ce'| \cdot \begin{vmatrix} C' \\ e \end{vmatrix} = \\ = (-1)^{n+1} 2^n |Ce'|^2 = (-1)^{n+1} 2^n (n!)^2 V_n^2$$

(при замене $|Ce'|$ на $n!V_n$ мы воспользовались соотношением (1)).

Любопытно заметить, что вывод окончательной формулы значительно упрощается, если заранее предположить невырожденность симплекса ($V_n \neq 0$). Тогда начало координат можно выбрать в центре описанной гиперсферы, вследствие чего $r_i^2 = r^2$ ($i = 1, 2, \dots, n+1$). Соотношение (6) получается при этом из матричного равенства

$$\begin{pmatrix} A & e' \\ e & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ -2r^2e & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2B & e' \\ e & 0 \end{pmatrix}.$$

217. Пусть $P(z) = z^k + \dots$ — многочлен степени $k \geq 1$, $D(P)$ — открытое множество, в точках которого $|P(z)| > 1$, и $D^*(P)$ — неограниченная (очевидно, единственная) компонента области $D(P)$. Заметим, что $D^*(P)$ содержит полную окрестность бесконечно удаленной точки и граница $D^*(P)$ не пуста. В этих обозначениях первоначальная задача формулируется следующим образом: доказать, что $D(f)$ не может быть собственным подмножеством множества $D(g)$.

Примем более слабое допущение: предположим, что $D(f)$ — некоторое (не обязательно собственное) подмножество множества $D(g)$, то есть $D(f) \subseteq D(g)$. Тогда $D^*(f) \subseteq D^*(g)$. При $z \in D^*(f)$ рассмотрим вспомогательную функцию $\Psi(z) = F(z)/G(z)$, где $F(z) = [f(z)]^m$ и $G(z) = [g(z)]^n$. Ясно, что $D(F) = D(f)$ и $D(G) = D(g)$. Функция $\Psi(z)$ аналитична в $D^*(f)$, а поскольку $|G(z)| \geq 1$ на границе компоненты $D^*(f)$, то $|\Psi(z)| \leq 1$ на границе компоненты $D^*(f)$. С другой стороны, $\Psi(z) \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$. Следовательно, по теореме о максимуме модуля $\Psi(z) \equiv 1$ и $F(z) = G(z)$ в $D^*(f)$, а значит, и на всей комплексной плоскости. Таким образом, $D(f) = D(g)$, что и требовалось доказать.

Если $(m, n) = d$ и $m = dm_1$, $n = dn_1$, то приведенное выше доказательство, означает, что $[f(z)]^{m_1} = [g(z)]^{n_1}$. Поскольку m_1 и n_1 — взаимно простые числа, то по теореме о единственности разложения многочленов над полем комплексных чисел существует многочлен $h(z)$, такой, что $f(z) = [h(z)]^{n_1}$, $g(z) = [h(z)]^{m_1}$. Таким образом, $D(f) \subseteq D(g)$ в том и только в том случае, если $f(z)$ и $g(z)$ — целые положительные степени одного и того же многочлена $h(z)$.

218. Докажем сначала следующую теорему.

Теорема. Пусть $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$ — $2n$ многочленов и

$$\varphi_{ij}(x) = \int_a^x f_i(u) g_j(u) du.$$

Тогда определитель $|\varphi_{ij}(x)|$ имеет при $x = a$ корень, кратность которого не меньше n^2 .

Доказательство. Пусть $F(x) = |\varphi_{ij}(x)|$. Требуется доказать, что $F^{(k)}(a) = 0$ при $0 \leq k < n^2$. Дифференцируя определитель $F(x)$ по известному правилу (производная определителя равна сумме определителей, получающихся дифференцированием поочередно каждой из строк), получаем

$$F^{(k)}(x) = \sum \frac{k!}{k_1! k_2! \dots k_n!} |\varphi_{ij}^{(k_i)}(x)|, \quad (1)$$

где суммирование проводится по всем разбиениям числа k на n неотрицательных слагаемых $k_1, k_2, \dots, k_n$. Пусть

$F^{(k)}(x) = G_k(x) + H_k(x)$, где $G_k(x)$ содержит те члены правой части (1), в которых по крайней мере одно слагаемое k_i равно нулю, а $H_k(x)$ — члены, в которых все слагаемые k_i положительны. Поскольку $\varphi_{ij}(a) = 0$, то $G_k(a) = 0$ (таким образом, при $0 \leq k < n$ теорема доказана). Докажем теперь, что $H_k(x) \equiv 0$.

Поскольку $\varphi'_{ij}(x) = f_i(x) g_j(x)$, то при $i, j = 1, 2, \dots, n$ и $k_i \geq 1$

$$\varphi_{ij}^{(k_i)} = \sum \frac{(s_i + t_i)!}{s_i! t_i!} f_i^{(s_i)}(x) g_j^{(t_i)}(x), \quad (2)$$

где суммирование проводится по всем неотрицательным значениям s_i и t_i , таким, что $s_i + t_i = k_i - 1$.

Подставляя в соотношении (1) в каждый член $H_k(x)$ вместо элементов определителя $\varphi_{ij}^{(k_i)}(x)$ их выражение из (2), получаем определитель, у которого каждый элемент i -й строки представляет собой сумму k_i членов. Такой определитель можно записать в виде суммы $k_1 k_2 \dots k_n$ определителей и после некоторых упрощений привести $H_k(x)$ к следующему виду:

$$H_k(x) = \sum \frac{k!}{(s_1 + t_1 + 1) \dots (s_n + t_n + 1)} \cdot \frac{f_1^{(s_1)} \dots f_n^{(s_n)}}{s_1! \dots s_n! t_1! \dots t_n!} |g_j^{(t_i)}|, \quad (3)$$

где сумма берется по всем наборам неотрицательных целых чисел $s_1, s_2, \dots, s_n, t_1, t_2, \dots, t_n$, удовлетворяющих условию $\sum_i (s_i + t_i) = k - n$.

Те слагаемые в разложении (3), которые содержат по крайней мере два равных t_i , обращаются в нуль. В остальных слагаемых, содержащих попарно различные t_i , по крайней мере два числа s_i равны, поскольку в противном случае $k - n = \sum_i (s_i + t_i) \geq n(n - 1)$, что противоречит условию $k < n^2$. Ненулевые слагаемые в разложении $H_k(x)$ можно разбить на пары по следующему принципу. В каждом таком слагаемом пусть m — наименьший индекс, при котором s_m совпадает с другим s_i , а $r > m$ — наименьший индекс, при котором $s_r = s_m$. Сопоставим ненулевому слагаемому в разложении $H_k(x)$ другое слагаемое с теми же значениями s_i и

t_i , но с переставленными значениями t_m и t_r . Нетрудно видеть, что такое соответствие между членами разложения $H_k(x)$ действительно позволяет разбить их на пары и в каждой паре сумма членов равна нулю. Итак, теорема полностью доказана.

Рассмотрим теперь случай, приведенный в условии задачи: $f_i(x) = g_i(x) = x^{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$; $a = 1$; $\varphi_{ij} = (x^{i+j-1} - 1)/(i + j - 1)$. По доказанной теореме $|\varphi_{ij}|$ делится на $(x - 1)^{n^2}$. Нетрудно проверить, что каждый член в разложении этого определителя представляет собой многочлен степени n^2 . Следовательно, $|x^{i+j-1}/(i + j - 1)| = A_n(x - 1)^{n^2}$, где коэффициент $A_n = |1/(i + j - 1)|$ зависит только от n . Значения A_n определяются формулами $A_1 = 1$, $A_n = \prod_{r=1}^{n-1} \binom{2r}{r} / (2r + 1)$, $n = 2, 3, \dots$.

219. Последовательность чисел, получаемая после вписывания чисел n , совпадает с набором знаменателей членов n -й последовательности Фарея F_n . Как известно, F_n состоит из всех неприводимых дробей, заключенных между 0 и 1 (включая концы интервала) и имеющих знаменатели не больше n . Отсюда следует, что при переходе от F_{n-1} к F_n добавляется $\varphi(n)$ членов. Поэтому решение задачи сводится к доказательству следующего утверждения*: если h/k , h''/k'' , h'/k' — три последовательных члена F_n и дробь h''/k'' не встречается среди членов $(n - 1)$ -й последовательности Фарея F_{n-1} , то $h + h' = h''$ и $k + k' = k''$. Таким образом, переходя от F_{n-1} к F_n , мы вписываем члены с знаменателем n лишь между теми членами F_{n-1} , у которых сумма знаменателей равна n , и утверждение задачи без труда доказывается методом математической индукции.

Последовательность чисел, о которой говорится в условии задачи, впервые рассмотрел Штерн.

220. Конструкция, о которой говорится в условии задачи, изображена на рис. 22.

По известному свойству инверсора Поселье

$$OZ \cdot OX = OA^2 - ZA^2 = m^2,$$

$$YZ \cdot YO = YC^2 - ZC^2 = n^2.$$

Следовательно, выполняются соотношения

$$OY \cdot (OY - OZ) = OY^2 - OY \cdot OZ = n^2,$$

$$OX = \frac{OY \cdot m^2}{OY^2 - n^2}.$$

Если плоскость, в которой двигаются звенья конструкции, рассматривать как плоскость комплексного

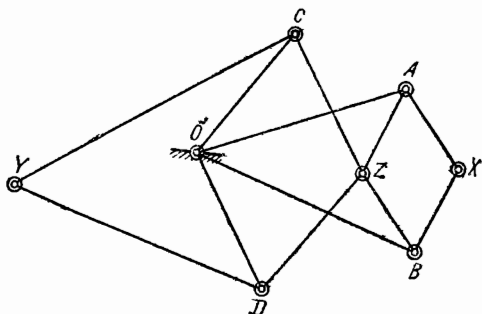


Рис. 22.

переменного с началом в точке O , то

$$X = \frac{Ym^2}{Y \cdot Y^* - n^2},$$

где X и Y — комплексные числа, соответствующие шарнирам X и Y , а Y^* — число, комплексно сопряженное с числом Y , или

$$Y = \vartheta X, \quad Y^* = \vartheta X^*, \quad \vartheta^2 X X^* - n^2 = \vartheta m^2,$$

где $\vartheta = (Y Y^* - n^2)/m^2$ — вещественное число. Следовательно, если точка Y описывает окружность

$$\alpha Y Y^* + c Y^* + c^* Y + \beta = 0,$$

то точка X описывает коническое сечение

$$(\alpha n^2 + \beta)^2 X X^* + [n^2(c X^* + c^* X) - m^2 \beta] [c X^* + c^* X + m^2 \alpha] = 0.$$

Заметим, что если точка Y описывает окружность, проходящую через точку O , то точка Z описывает циссоиду.

221. Пусть x', y', z' — некая перестановка цифр x, y, z и

$$xB^2 + yB + z = x'B'^2 + y'B' + z'. \quad (1)$$

При фиксированных B и B' соотношение (1) можно представить в виде

$$px + qy + rz = 0, \quad (2)$$

где p, q, r — целочисленные функции от B и B' . Существует бесконечно много наборов целых чисел x, y, z , удовлетворяющих уравнению (2), а именно

$$x = \frac{k_3 q}{(p, q)} - \frac{k_2 r}{(p, r)}, \quad y = \frac{k_1 r}{(q, r)} - \frac{k_3 p}{(p, q)}, \quad z = \frac{k_2 p}{(p, r)} - \frac{k_1 q}{(q, r)},$$

где (a, b) — наибольший (положительный) общий делитель чисел a и b , а k_1, k_2, k_3 — произвольные целые числа. Кроме того, по смыслу задачи

$$0 \leq x, y, z < B, B'. \quad (3)$$

Целочисленные значения x, y, z , удовлетворяющие одновременно уравнению (2) и неравенствам (3), могут не существовать, но если они существуют, то их нетрудно найти методом проб и ошибок.

Все известные решения для случая $B = 10$ представлены в таблице. Числа, у которых первая цифра (при записи в системе счисления с любым основанием) равна нулю, в таблицу не включены.

$265_{10} = 526_7$	$774_{10} = 477_{13}$	$825_{10} = 258_{19}$
$316_{10} = 631_7$	$834_{10} = 438_{14}$	$551_{10} = 155_{21}$
$158_{10} = 185_9$	$261_{10} = 126_{15}$	$912_{10} = 219_{21}$
$227_{10} = 272_9$	$371_{10} = 173_{16}$	$511_{10} = 115_{22}$
$445_{10} = 544_9$	$913_{10} = 391_{16}$	$910_{10} = 190_{26}$
$196_{10} = 169_{11}$	$782_{10} = 278_{18}$	$911_{10} = 191_{26}$
$283_{10} = 238_{11}$	$441_{10} = 144_{19}$	$\dots = \dots$
$370_{10} = 307_{11}$	$518_{10} = 185_{19}$	$919_{10} = 199_{26}$
$191_{10} = 119_{13}$	$882_{10} = 288_{19}$	$961_{10} = 169_{28}$

Многоточиями обозначены тройные равенства $912_{10} = 219_{21} = 192_{26}$, $913_{10} = 391_{16} = 193_{26}$.

Подобного рода задачи представляют интерес не столько тем, что они затрагивают те или иные свойства систем счисления с различными основаниями, сколько затрагиваемыми ими вопросами из элементарной теории чисел. Например, пусть (обозначения прежние) произведение xx' не является квадратом целого числа. Тогда существует бесконечно много пар B и B' , удовлетворяющих одновременно уравнению (2) и неравенствам (3).

Действительно, пусть p, q — такие положительные целые числа, что (III. 9)

$$p^2 - xx'q^2 = 1.$$

Тогда основания систем счисления

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= (p^2 + xx'q^2)B_n + 2x'pqB'_n = (pqy' + q^2x'y), \\ B'_{n+1} &= 2xprqB_n + (p^2 + xx'q^2)B'_n = (pqu + q^2xy') \end{aligned} \quad (4)$$

удовлетворяют равенству (1), если ему удовлетворяют основания систем счисления B_n и B'_n . Таким образом, соотношения (4) порождают последовательность B_i и B'_i , удовлетворяющую уравнению (2) при всех i и неравенствам (3), начиная с некоторого i^* . Эта последовательность, вообще говоря, не содержит всех решений задачи.

Кроме того, постулировав некоторую зависимость между основаниями B и B' старой и новой системы счисления, мы можем получить, причем многими способами, параметрические решения соотношения (1). Например, если $B' = 2B + 1$, $x' = y$, $y' = z$, $z' = x$, то

$$B^2x + By + z = (2B + 1)^2y + (2B + 1)z + x, \quad (1)$$

откуда $x + y \equiv 0 \pmod{B}$ и, следовательно, $x + y = B$. Исключив x и разделив на B , получим

$$B^2 - 1 = (5B + 3)y + 2z.$$

Числа y и z удовлетворяют сравнению $2z - 2y \equiv \equiv 0 \pmod{B + 1}$ или $2z - 2y = m(B + 1)$ при $m = 0, 1, -1$. Таким образом, $B - 1 = 5y + m$ и

($m = 0$) $B = 5y + 1$, $z = y$, $x = 4y + 1$, y — любая цифра,

($m = 1$) $B = 5y + 2$, $z = \frac{1}{2}(7y + 3)$, $x = 4y + 2$,

y — нечетная цифра.

Значение $m = -1$ приводит к $z < 0$, и его следует исключить.

Аналогичным образом можно получить и многие другие частные решения. Например,

$x = 3y + 3$, $z = 3y + 1$, $B = 4y + 3$, $B' = B + 1$,

$xyz_B = zxy_{B'}$, y — любая цифра,

$x = 4y - 1$, $B = 5y - 2z - 1$, $B' = 2B - 1$,

$xyz_{B'} = yzx_B$, $y > 2z$, z — любая цифра,

$$y = 2x + z + 1, B = 3x + z + 1, B' = B + 1,$$

$$xyz_B = yzx_{B'}, x, z — \text{любые цифры,}$$

$$x = 4y + 1, B = 7y + 2, B' = 2B,$$

$$xyz_B = yzx_{B'}, y, z (< B) — \text{любые цифры,}$$

$$x = z + 2, y = 0, B = 2z + 1, B' = B + 2,$$

$$xyz_B = zyx_{B'}, z — \text{любая цифра,}$$

$$x = u^2, y = 2uv, z = v^2, B = kv + 1, B' = ku + 1,$$

$$xyz_B = zyx_{B'},$$

где u, v, k — произвольные целые числа, удовлетворяющие неравенствам $u > v, kv > \max(u^2 - 1, 2uv - 1)$.

222. Направим ось OX вверх по плоскости, а ось OY — по нормали к плоскости. Пусть v — начальная скорость мяча. Тогда на первой дуге

$$y = vt \sin B - \frac{1}{2} gt^2 \cos A,$$

и мяч опишет ее за время

$$t = \frac{2v \sin B}{g \cos A} = T.$$

В момент, когда мяч коснется наклонной плоскости в конце первой дуги, составляющая $\dot{y}$ его скорости будет равна

$$\dot{y} = v \sin B - \frac{1}{2} g \cos A \cdot \frac{2 \cdot 2v \sin B}{g \cos A} = -v \sin B.$$

Поскольку мяч абсолютно упругий, то составляющая $\dot{y}$ скорости в начале полета по 2-й дуге равна $-v \sin B$, то есть совпадает с той же составляющей в начале полета по 1-й дуге. Следовательно, то же самое будет и на каждой дуге, и поэтому продолжительность полета по любой дуге одинакова и равна $\Delta t = T$. Если x_n — абсцисса точки удара мяча о наклонную плоскость в конце n -й дуги, то абсцисса начальной точки $(n+1)$ -й дуги также равна x_n . Аналогично, если u_n — составляющая x скорости мяча в конце n -й дуги, то та же составляющая в начале $(n+1)$ -й дуги также равна u_n . Таким образом,

$$\Delta x = x_n - x_{n-1} = u_{n-1}T - \frac{1}{2} gT^2 \sin A,$$

$$u_n = u_{n-1} - gT \sin A.$$

Поскольку $u_0 = v \cos B$, то

$$u_n = u_0 - ngT \sin A = v \cos B - 2nv \sin B \operatorname{tg} A,$$

или

$$u_n = v \sin B \operatorname{tg} A (\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B - 2n) = K (L - 2n), \quad (1)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$K \equiv v \sin B \operatorname{tg} A, \quad L \equiv \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B.$$

Следовательно,

$$\Delta x_n = K [L - 2(n - 1)] T -$$

$$- \frac{1}{2} g T^2 \sin A = KT (L - 2n + 1), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

и

$$x_n = \sum_{j=1}^n \Delta x_j = KT \sum_{j=1}^n (L + 1 - 2j) = KTn(L - n). \quad (3)$$

Если предположить, что углы A и B острые, то величины K , L , T будут положительными. Независимо от того, сколь велика L , $\Delta x < 0$ при $n > (L + 1)/2$. Следовательно, наибольшее значение x_n достигает в том случае, когда n — наименьшее из целых чисел, превышающих $(L + 1)/2$. При больших значениях n величина Δx всегда отрицательна и неограниченно убывает, так что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

Если $L = 2m + 1 > 0$, то x_m и x_{m+1} равны. В этом случае полет по $(m + 1)$ -й дуге происходит по вертикали. Кроме того, $x_{m+k+1} = x_{m-k}$ ($0 \leq k \leq m$). Если $L = 2m > 0$, то в конце m -й дуги мяч ударяется о наклонную плоскость по нормали к ней. В этом случае наибольшему значению x_n соответствует $n = m + 1$. Кроме того, $x_{m+k} = x_{m-k}$ ($0 \leq k \leq m$). Из соотношения (3) следует, что если $x_n = x_{n'}$ (n и n' — целые числа), то $n = n'$ или $n - n' = L$. Таким образом, мяч никогда не ударяется дважды в одну и ту же точку наклонной плоскости, если L — не целое положительное число.

Интересно отметить (и нетрудно доказать), что при $y > 0$ наибольшая абсцисса $x_{\max}$ определяется выражением

$$x_{\max} = \frac{1}{4} KTL^2$$

и (если только L не четное натуральное число)

$$x_{\max} > x_n$$

при любых значениях n .

223. Поскольку $s_n - \sigma_n \rightarrow 0$, то достаточно доказать, что сходится последовательность σ_n . Но

$$\sigma_n - \sigma_{n-1} = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k a_k = \frac{s_n - \sigma_n}{n}. \quad (1)$$

Суммируя правые и левые части соотношения (1) при $n = 1, 2, \dots, N$, получаем

$$\sigma_N = \sum_{n=1}^N \frac{s_n - \sigma_n}{n}. \quad (2)$$

Если $\alpha \leq 1$, то сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |s_n - \sigma_n|/n$ очевидна.

Если $\alpha > 1$, то из неравенства Гёльдера получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_n - \sigma_n|}{n} \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} |s_n - \sigma_n|^{\alpha} \right]^{1/\alpha} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta} \right]^{1/\beta},$$

где $1/\alpha + 1/\beta = 1$. Поскольку оба сомножителя в правой части сходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |s_n - \sigma_n|/n$ также сходится.

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |s_n - \sigma_n|/n$, то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (s_n - \sigma_n)/n$ и предел $\lim \sigma_N$ существует в силу соотношения (2).

224. Пусть $k > 1$ — фиксированное целое число. Функцию $F(m, q)$ при целых значениях m и $q > 1$ определим соотношением

$$F(m, q) = \left[\frac{2m}{q} \right] - \left[\frac{m}{q} \right] - \left[\frac{m+k}{q} \right], \quad (1)$$

где $[x]$ означает целую часть числа x . По хорошо известной из теории чисел * формуле $(2n!)/n!(n+k)!$ при

$n \geq 0$ принимает целые значения в том и только в том случае, если при всех простых числах p

$$\sum_{a=1}^{\infty} F(n, p^a) \geq 0. \quad (2)$$

Нам понадобятся следующие свойства функции $F(m, q)$. Во-первых, при $m \equiv m' \pmod{q}$ выполняется очевидное равенство $F(m, q) = F(m', q)$. Во-вторых, докажем, что

$$F(m, q) \geq 0 \quad (3)$$

при $q \geq 2k$ и всех m ¹. В силу первого свойства достаточно предположить, что $0 \leq m < q$ и, следовательно, $[m/q] = 0$. При $0 \leq m < q - k$ величина $[2m/q]$ принимает значения 0 или 1, а $[(m+k)/q] = 0$; при $q - k \leq m < q$ справедливы равенства $[2m/q] = 1$ и $[(m+k)/q] = 1$. Таким образом, неравенство (3) следует из определяющего соотношения (1). В-третьих, докажем, что

$$F(m, q) = 1 \quad (4)$$

при $q \geq 2k + 2$ и $m \equiv -k - 1 \pmod{q}$. Действительно, $F(m, q) = F(-k - 1, q)$ и, как нетрудно проверить, $[(-2k - 2)/q] = [(-k - 1)/q] = [(-1)/q] = -1$. Таким образом, (4) также следует из определяющего соотношения (1).

Из (3) заключаем, что неравенство (2) выполняется при всех n , если p — простое число большее $2k$. Пусть p — простое число, меньшее $2k$, A — такое число, что $p^{A+1} \geq 2k$, и $n \equiv -k - 1 \pmod{p^A}$. Тогда в силу неравенства (3) при $a > A$ выполняется неравенство $F(n, p^a) \geq 0$, а при $2k + 2 \leq p^a \leq p^A$ в силу соотношения (4) выполняется равенство $F(n, p^a) = 1$.

Следовательно, выбрав число A достаточно большим и следя за тем, чтобы выполнялось сравнение $n \equiv -k - 1 \pmod{p^A}$, мы получим достаточно много значений a , при которых $F(n, p^a) = 1$. Это позволяет «нейтрализовать» те значения a , при которых $F(n, p^a) < 0$. Таким образом, при рассматриваемом простом числе p

¹ В частности, отсюда следует, что при $k = 1$ неравенство (2) справедливо и при всех простых p , а значит, $2n!/n!(n+1)!$ — целое число, как было сказано в условии задачи. — Прим. ред.

выполняется неравенство (2). Применив теперь аналогичные рассуждения к каждому простому числу $p < 2k$, мы получим набор показателей степеней $A = A(p)$. Пусть P — произведение всех $p^{A(p)}$. Тогда неравенство (2) выполняется при $n \equiv -k - 1 \pmod{P}$ и всех простых числах p . Следовательно, $(2n!)/n!(n+k)!$ — целое число по крайней мере при любом $n \equiv -k - 1 \pmod{P}$.

225. Назовем *равнобедренным n -точечником* множество, состоящее из n точек (вершин), таких, что любые три из них расположены в вершинах равнобедренного треугольника. Вершины n -точечника условимся обозначать их номерами, а отрезок прямых, соединяющий вершины i и k , называть стороной ik .

Равнобедренные 4-точечники. а. Предположим, что из одной вершины, например 1, исходят три равные стороны 12, 13, 14. Тогда 234 — равнобедренный треугольник, и вершина 1 совпадает с центром его описанной окружности. Следовательно, вершины и центр описанной окружности любого равнобедренного треугольника образуют равнобедренный 4-точечник (I типа).

б. Предположим, что ни из одной вершины не исходят три равные стороны. Пусть $12 = 13$. Рассмотрим в отдельности два случая.

Случай 1. $42 = 43$. Поскольку $14 \neq 12$ и $41 \neq 42$, то $21 = 24$. Аналогичным образом доказывается и равенство другой пары сторон: $31 = 34$. Следовательно, в случае 1 равнобедренный 4-точечник имеет форму ромба (II тип).

Случай 2. $24 = 23$. Поскольку из каждой вершины исходят по две равные стороны, то $42 = 41$ и $34 = 31$. Следовательно, $21 = 13 = 34 = a$ и $14 = 42 = 23 = b$. Итак, мы получили трапецию с тремя равными сторонами a и основанием b , равным обоим диагоналям. Следовательно, точки 1, 2, 3, 4 расположены в четырех вершинах правильного пятиугольника и $b = a(1 + \sqrt{5})/2$ (тип III).

Равнобедренный 5-точечник. Поскольку четыре вершины равнобедренного 5-точечника образуют равнобедренный 4-точечник, то, как показывают элементарные геометрические соображения, каждый равнобедренный 5-точечник принадлежит к одному из трех типов: I тип — четыре точки расположены в вершинах квадрата,

а пятая — в его центре; II тип — правильный пятиугольник; III тип — четыре вершины и центр правильного пятиугольника.

Равнобедренный 6-точечник. Среди шести вершин четыре должны совпадать либо с вершинами некоторого квадрата, либо с четырьмя вершинами правильного пятиугольника.

В первом случае две оставшиеся вершины должны были бы совпадать с одной и той же точкой — центром квадрата, поэтому построить равнобедренный 6-точечник невозможно. Во втором случае две оставшиеся вершины могут совпадать с двумя точками, и мы получаем лишь один равнобедренный 6-точечник: его вершины располагаются в вершинах и центре правильного пятиугольника.

Равнобедренный 7-точечник. Пять из 7 вершин равнобедренного 7-точечника должны располагаться в вершинах правильного пятиугольника. Поскольку две оставшиеся точки должны были бы совпадать с одной точкой — центром правильного пятиугольника, то равнобедренный 7-точечник не существует.

226. Докажем сначала несколько более общее утверждение. Пусть p_n — заданная последовательность положительных чисел, такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n p_k = +\infty.$$

Определим последовательность $\{x_n\}$ рекуррентным соотношением

$$x_n = x_{n-1}(p_n - 1)/p_n + x_{n-2}/p_n.$$

Тогда $\{x_n\}$ сходится к $x_1 - (x_1 - x_0)K$, где K — постоянная, зависящая только от выбора последовательности $\{p_n\}$.

Доказательство. Запишем рекуррентное соотношение в виде

$$x_n - x_{n-1} = (x_{n-1} - x_{n-2})/(-p_n).$$

Тогда

$$x_n - x_{n-1} = (-1)^{n-1} (x_1 - x_0) p_2 p_3 \dots p_n.$$

откуда, суммируя, получаем

$$x_n = x_1 + (x_1 - x_0) \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} / p_2 p_3 \dots p_k.$$

В силу предположения относительно p_n

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n / p_2 p_3 \dots p_n \quad (1)$$

—сходящийся знакопеременный ряд. Если его сумму обозначить через K , то $\{x_n\}$ сходится к $x_1 - (x_1 - x_0)K$.

Сумму K ряда (1) можно записать в различной форме, например представить в виде непрерывной дроби

$$K = \frac{1}{p_2} + \frac{p_2}{p_3 - 1} + \frac{p_3}{p_4 - 1} + \frac{p_4}{p_5 - 1} + \dots$$

По условию задачи $p_n = 1 + (n-1)g$ и K можно представить в виде определенного интеграла. Пусть

$$F(x) = \frac{x}{1+g} - \frac{x^2}{(1+g)(1+2g)} + \frac{x^3}{(1+g)(1+2g)(1+3g)} - \dots$$

Тогда $(1+x)F(x) + gxF'(x) = x$. Решая это дифференциальное уравнение, находим

$$F(x) = c(xe^x)^{-c} \int_0^x (ue^u)^c du,$$

где $c = 1/g$. Следовательно,

$$K = F(1) = ce^{-c} \int_0^1 (ue^u)^c du.$$

227. Пусть a, b, c, d — четыре точки комплексной плоскости, совпадающие с четырьмя заданными точками, и пусть отрезок 23 перпендикулярен отрезку 41, отрезок 31 — отрезку 42 и отрезок 12 — отрезку 43. Тогда $(c-b) = ip(a-d)$, $(a-c) = iq(b-d)$,

$$(b-a) = ir(c-d), \quad (1)$$

где p, q, r — вещественные числа. (Нетрудно показать, что p, q, r — тангенсы внутренних углов треугольника 123, поэтому выведенное далее соотношение (4) представляет не что иное, как несколько необычную запись

тождества $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma = 0$, справедливого для $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.)

Если $\Delta = (c-d)(b-d)(a-d)$, то

$$\begin{aligned} A &\equiv (b-c)(c-d)(d-b) = ip\Delta, \\ B &\equiv (c-a)(a-d)(d-c) = iq\Delta, \\ C &\equiv (a-b)(b-d)(d-a) = ir\Delta, \\ D &\equiv (b-a)(a-c)(c-b) = -ipqr\Delta. \end{aligned} \quad (2)$$

Заметим, что $|A| = 34 \cdot 42 \cdot 23$, $|B| = 41 \cdot 13 \cdot 34$, $|C| = 12 \cdot 24 \cdot 41$, $|D| = 23 \cdot 31 \cdot 12$ и соотношение

$$A + B + C + D = 0 \quad (3)$$

выполняется тождественно, поскольку совпадает с разложением определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} = 0$$

по элементам первой строки.

Из соотношений (2) и (3) следует, что

$$p + q + r - pqr = 0. \quad (4)$$

Кроме того, из соотношения (2) нетрудно видеть, что отношения величин A , B , C и D вещественны, откуда

$$\pm |A| \pm |B| \pm |C| \pm |D| = 0 \quad (5)$$

и, независимо от знаков величин p , q , r , три знака в соотношении (5) должны отличаться от четвертого.

Наоборот, если дано соотношение (5), в котором три знака отличаются от четвертого, то, сравнивая его с соотношением (3), можно заметить, что замкнутый четырехугольник со сторонами, равными по абсолютной величине и параллельными векторам, соединяющим начало координат с точками A , B , C , D , должен вырождаться в прямую. Следовательно, отношения величин A , B , C , D вещественны. Если p , q , r определены соотношениями (1), то $-q^2 = (D/A)/(B/C)$ — вещественное число, поэтому q либо вещественное, либо чисто мнимое число. Величины $p = q \cdot (A/B)$, $q = q(C/B)$ также

либо вещественны, либо чисто мнимы (причем все три величины p, q, r вещественны или мнимы одновременно). Если p, q, r — чисто мнимые величины, то, как нетрудно видеть, точки 1, 2, 3, 4 коллинеарны. Если p, q, r вещественны, то из соотношения (1) следует, что отрезок 23 перпендикулярен отрезку 41, отрезок 31 — отрезку 42 и отрезок 12 — отрезку 43.

228. Из условия задачи следует, что $n_k \geq 0$ при всех k . Функции

$$f_k(x) \equiv x^{n_k}$$

аналитичны в единичном круге $|x| < 1$; так как бесконечное произведение

$$F(x) \equiv \prod_{k=1}^{\infty} (1 + x^{n_k})$$

всюду сходится в единичном круге, то оно само аналитично.

Используя равенство, приведенное в условии задачи, получаем (поскольку $F(x) \neq 0$ при $|x| < 1$)

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f'_k(x)}{1 + f_k(x)} = F(x). \quad (1)$$

Решая дифференциальное уравнение (1) с начальным условием $F(0) = 1$, находим

$$F(x) = (1 - x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k. \quad (2)$$

С другой стороны, бесконечное произведение $F(x)$ можно разложить в степенной ряд. Его s -е частичное (конечное) произведение разлагается в многочлен следующего вида:

$$P_s(x) \equiv \prod_{k=1}^s (1 + x^{n_k}) = 1 + x^{n_1} + x^{n_2} + x^{n_1+n_2} + x^{n_3} + \\ + x^{n_1+n_3} + x^{n_2+n_3} + x^{n_1+n_2+n_3} + \dots + x^n. \quad (3)$$

Сравнивая разложение (3) с разложением (2), получаем, что с точностью до порядка $n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 4, n_4 = 8$ и так далее. Методом математической индукции нетрудно доказать, что $n_k = 2^{k-1}$.

229. Как показывает следующий контрпример, утверждение о том, будто любая последовательность нулей и единиц содержится среди последовательностей y , неверно.

Пусть E — множество всех последовательностей из X , у которых второй и третий члены не равны 1 одновременно. Тогда

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = \dots = 0, \\ k_n &= n, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad y_n = x_{n+1}, \\ E^* &= E(0). \end{aligned}$$

Если бы теперь нашлась последовательность y вида $(1, 1, y_3, y_4, \dots)$, то ей должна была бы соответствовать последовательность x вида $(0, 1, 1, x_4, x_5, \dots)$ из E^* . Поскольку таких x в E^* нет, то не любая последовательность нулей и единиц содержится среди последовательностей y , что и требовалось доказать.

230. Пусть

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) \{x^2 + [f(x)]^2\}^{1/2}, \\ G(x) &= 2f(x) \{1 + [f'(x)]^2\}^{1/2}, \\ \Delta(x) &= \{x^2 + [f(x)]^2\} \{[F'(x)]^2 - [G(x)]^2\}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= x^2 \{xf'(x)\}^2 + 2f(x) \{2[f(x)]^2 + x^2\} \{xf'(x)\} - \\ &\quad - [f(x)]^2 \{3x^2 + 4[f(x)]^2\}. \end{aligned}$$

Из условий задачи следует, что производная $f'(x)$ в интервале $[0, a]$ неотрицательна и не убывает. Следовательно, при любом x из $[0, a]$

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt \leq x \cdot \max_{0 \leq t \leq x} f'(t) = xf'(x),$$

причем это неравенство должно быть строгим на некотором подынтервале. Следовательно, $\Delta(x) \geq 0$. Поскольку производная $F'(x)$ положительна, то это неравенство означает, что $F'(x) \geq G(x)$, причем последнее неравен-

ство также должно быть строгим на некотором подынтервале. Интегрируя его, получаем

$$F(a) > \int_0^a G(x) dx,$$

что и требовалось доказать.

231. По теореме Ферма (III. 6.)

$$\begin{aligned} x^{p-1} - 1 &\equiv (x-1)(x-2) \dots (x-p+1) = \\ &= x^{p-1} - s_1 x^{p-2} + \dots - s_{p-2} x + s_{p-1} \pmod{p}. \end{aligned} \quad (1)$$

Следовательно, по теореме Вильсона

$$\begin{aligned} s_{p-1} &= (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}, \\ s_{p-2} &\equiv \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1} \right] (p-1)! \equiv 0 \pmod{p}, \\ s_{p-3} &\equiv 0 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Подставляя в правую часть (1) $x = p$, при $p > 3$ получаем

$$(p-1)! \equiv s_{p-3} p^2 - s_{p-2} p^2 + s_{p-1} \pmod{p^3},$$

откуда

$$s_{p-2} \equiv p s_{p-3} \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

Если

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p} = \frac{r}{s}, \quad (2)$$

(где r и s несократимы), то

$$s_{p-2} = \frac{(p-1)!}{s} \cdot \frac{r-s}{p} \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

Поскольку p взаимно просто с $(p-1)!$, а $s - s(r-s)$, то $(p-1)!$ делится на s , а $(r-s)$ — на p . Число $(p-1)!/s$ взаимно просто с p , поэтому

$$r - s \equiv 0 \pmod{p^3}, \quad (3)$$

что и требовалось доказать. Если в (2) r и s не взаимно просты, то (3) выполняется тем более.

232. Рассмотрим k последовательностей $a_1 + a_j, a_1 + a_2 + a_j, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_j$ ($j = k+1, \dots, p$).

$k + 2, \dots$). Каждая из них представляет собой последовательность $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots$, все члены которой «сдвинуты» на некоторое целое число и потому имеют одну и ту же верхнюю плотность, которая равна верхней плотности самой последовательности a_k и, следовательно, больше $1/k$. Таким образом, все целые числа, входящие в эти k последовательностей, не могут быть различными и

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{l_1} + a_{l_1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{l_2} + a_{l_2}.$$

Не ограничивая общности, предположим, что $l_2 > l_1$. Тогда

$$a_{l_1} = a_{l_1+1} + a_{l_1+2} + \dots + a_{l_2} + a_{l_2},$$

что и требовалось доказать. Нетрудно видеть, что число a_j можно выбрать бесконечно многими способами.

Как показывает пример последовательности целых чисел, сравнимых с единицей по модулю k , утверждение задачи неверно, если верхняя плотность последовательности равна $1/k$.

233. Каждому целому числу r соответствует целое число x , для которого выполняется одно из двух следующих соотношений:

$$rq < x < (r+1)q \quad (1)$$

либо

$$x < rq < (r+1)q < x+1. \quad (2)$$

Если выполняются неравенства (1), то

$$r(b+q) < rb+x, \quad rb+x+b < (r+1)(b+q),$$

в силу чего интервал $I \equiv [r(b+q), (r+1)(b+q)]$ содержит b лакун, соответствующих числам $m = rb+x, rb+x+1, \dots, rb+x+b-1$. Если же выполняются неравенства (2), то

$$rb+x < r(b+q), \quad (r+1)(b+q) < rb+x+b+1,$$

в силу чего интервал I содержит $b-1$ лакун, соответствующих $m = rb+x+1, rb+x+2, \dots, rb+x+b-1$.

Таким образом, неравенства (1) выражают необходимые и достаточные условия того, что интервал I со-

держит набор из b последовательных лакун. Кроме того, из неравенств (1) следует, что

$$r(b+q) < \frac{x(b+q)}{q} < (r+1)(b+q).$$

Эти неравенства означают, что любой набор из b последовательных лакун содержит ровно одно число, кратное $(1+b/q)$. Нетрудно видеть также, что ни одно число, кратное $(1+b/q)$, не содержится в интервале I , состоящем лишь из $b-1$ лакун.

234. Пусть $c = \cos \vartheta$, $s = \sin \vartheta$, $p = c^n$, $q = s^n$. Тогда $c^2 + s^2 = 1$. В этих обозначениях исходную задачу можно сформулировать следующим образом: доказать, что c и s содержатся в поле $F(p, q)$ всех рациональных функций от p и q с коэффициентами из поля F рациональных чисел. Иначе говоря, требуется доказать, что

$$F(c, s) = F(p, q). \quad (1)$$

Прежде всего заметим, что $F(p) \subseteq F(c) \subseteq F(c, s)$. Ясно, что

$$[F(c, s) : F(c)] = 2$$

$[F(c, s) : F(c)]$ означает степень поля $F(c, s)$ относительно $F(c)$. Кроме того, $[F(c) : F(p)] = n$ и, следовательно, $[F(c, s) : F(p)] = 2n$. С другой стороны, $F(p) \subseteq F(p, q) \subseteq F(c, s)$, поэтому соотношение (1) эквивалентно новому соотношению

$$[F(p, q) : F(p)] = 2n. \quad (2)$$

Докажем соотношение (2). Пусть $f(x, y)$ — многочлен, неприводимый над полем F и такой, что $f(p, q) = 0$, а C — кривая $f(x, y) = 0$. Таким образом, кривой C принадлежат точки (p, q) и в параметрическом виде ее можно задать уравнениями $x = c^n$, $y = s^n$. Следует заметить, что вещественная часть этой кривой удовлетворяет уравнению $x^{2/n} + y^{2/n} = 1$, то есть представляет собой обобщение известной гипоциклоиды с четырьмя точками возврата.

Определим степень многочлена $f(x, y)$. Для этого определим число точек пересечения кривой C с осью $y = 0$. На бесконечности точек пересечения нет. Действительно,

если p и q обращаются в бесконечность, то c и s также обращаются в бесконечность, причем $p/q = (c/s)^n = \pm i$, в силу чего кривая C пересекается с бесконечно удаленной прямой только в циклических точках.

Таким образом, кривая C пересекается с прямой $y = 0$ только в точках $(\pm 1, 0)$. Чтобы найти кратность пересечения в точке $(1, 0)$, попытаемся ввести s как локальный параметр. Тогда

$$q = s^n, \quad p = c^n = (1 - s^2)^{n/2} = 1 - \frac{1}{2}ns^2 + \dots$$

Поскольку по условиям задачи n — нечетное положительное число, то s действительно является локальным параметром. (Если бы n было четным, то локальным параметром была бы величина s^2 .) Таким образом, q имеет в $s = 0$ нуль n -го порядка и кратность пересечения в точке $(1, 0)$ равна n . Поскольку пересечение в точке $(-1, 0)$ имеет ту же кратность, то суммарная кратность нулей кривой C (следовательно, и ее порядок) равна $2n$. Итак, степень многочлена $f(x, 0)$ равна $2n$, а поскольку бесконечно удаленная точка на оси y не принадлежит кривой C , то степень многочлена $f(x, y)$ также равна $2n$. Следовательно, q удовлетворяет над полем $F(p)$ неприводимому уравнению степени $2n$, то есть выполняется соотношение (2), что и требовалось доказать.

235. Рассмотрим любые два ряда с положительными членами (один сходящийся, другой расходящийся), общие члены которых $C(n)$ и $D(n)$ монотонно стремятся к нулю, причем $D(n) > C(n)$.

Поскольку ряд $\sum D(n)$ расходится, то для каждого n можно найти другое целое число $\varphi(n)$, определяемое соотношением

$$\sum_{j=1}^{\varphi(n)} D(j) \geq \varepsilon,$$

где ε — любое заданное положительное число. Рассмотрим теперь последовательность целых чисел $\{n_h\}$, задаваемых рекуррентным соотношением $n_1 = 1$, $D(n_{h+1}) < < C(\varphi(n_h))$. Ясно, что $n_h < \varphi(n_h) < n_{h+1}$.

Решением задачи служат последовательности

$\{a_n\}$: $C(n_1), C(n_1 + 1), \dots, C(\varphi(n_1)), D(n_2), D(n_2 + 1), \dots$
 $\dots, D(\varphi(n_2)), C(n_3), \dots, C(\varphi(n_3)), D(n_4), \dots$;
 $\{b_n\}$: $D(n_1), D(n_1 + 1), \dots, D(\varphi(n_1)), C(n_2), C(n_2 + 1), \dots$,
 $C(\varphi(n_2)), D(n_3), \dots, D(\varphi(n_3)), C(n_4), \dots$.

Ряды $\sum a_k$ и $\sum b_k$, очевидно, расходятся: каждый из них содержит бесконечно много отрезков, содержащих члены, сумма которых больше или равна ε , а ряд $\sum c_k$, где $c_k = \min(a_n, b_n)$, сходится, поскольку мажорируется сходящимся рядом $\sum C(n)$.

236. Рассмотрим вычеты (по модулю n) n чисел $(10^i - 1)/9$, $i = 1, 2, \dots, n$. Возможен один из двух случаев: либо один из n вычетов равен нулю, либо какие-то два вычета совпадают (тогда вычет разности соответствующих чисел равен нулю). И в том и в другом случае мы получаем делящееся на n целое число, десятичная запись которого содержит группы идущих подряд единиц, сменяемые группами идущих подряд нулей.

К тому же результату мы пришли бы, если бы вместо десятичной системы счисления рассмотрели систему счисления с произвольным основанием B ; в приведенных выше рассуждениях нам пришлось бы только заменить числа $(10^i - 1)/9$ на $(B^i - 1)/(B - 1)$.

Итак, мы доказали, что существует число, делящееся на n и записываемое при помощи единиц и нулей, которое имеет не более n знаков. Следовательно, проверив делимость на n чисел $1, 10, 11, 100, 101, \dots, (10^n - 1)/9$, мы заведомо найдем наименьшее число, перебрав не более 2^n чисел. Объем работы можно значительно сократить, если предварительно составить таблицу вычетов $10^i \pmod n$.

237. Если C — окружность радиуса r с центром в произвольной точке a , то пусть $f(z) = \bar{a} + r^2/(z - a)$. Тогда для $|z - a| = r$ мы получаем $f(z) = \bar{a} + z - a = \bar{z}$.

Если C — прямая с угловым коэффициентом $\operatorname{tg} \alpha$ ($0 < \alpha < \pi$), проходящая через точку x_0 вещественной оси, то пусть $f(z) = x_0 + e^{-2i\alpha}(z - z_0)$. Тогда при $z = x_0 + e^{i\alpha}t$, где t — вещественный параметр, мы получаем $f(z) = x_0 + e^{-i\alpha}t = \bar{z}$.

Если C — прямая, параллельная вещественной оси и проходящая через точку iy_0 (y_0 — вещественное число), то пусть $f(z) = z - 2iy_0$. Тогда при $z = x + iy_0$ (x — вещественное число) мы получаем $f(z) = x - iy_0 = \bar{z}$.

В общем случае пусть C — любая аналитическая дуга, то есть образ (конечный или бесконечный) интервала $[\alpha, \beta]$ вещественной оси при отображении ее аналитической функцией $\varphi(z)$ (предполагается, что в достаточно малой (комплексной) окрестности интервала $[\alpha, \beta]$ функция $\varphi(z)$ однозначна). Тогда функция $\psi(z) = \overline{\varphi(\bar{z})}$ аналитична в окрестности интервала $[\alpha, \beta]$ и отображает его на дугу $\bar{C}$, симметричную дуге C относительно вещественной оси. Пусть $\tilde{\varphi}(z)$ — функция, обратная функции $\varphi(z)$ и $f(z) = \psi(\tilde{\varphi}(z))$. Тогда $f(z) = \bar{z}$ для $z \in C$.

Например, рассмотрим параболу C с вершиной в точке $z = -1$ и фокусом в точке $z = 0$. (Любую параболу на комплексной плоскости можно отобразить на параболу C линейным преобразованием $Az + B$.) В приведенных выше обозначениях $\varphi(z) = (z + i)^2$, $f(z) = (z^{1/2} - 2i)^2$. Функция $f(z)$ однозначна и аналитична в достаточно малой окрестности параболы C , величину $z^{1/2}$ при $z = -1$ следует выбрать равной $+i$.

Если кривая C задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то нетрудно вывести дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция $f(z)$. Функция $f(z)$ должна быть такой, что

$$f(z) = x(t) - iy(t) \quad (1)$$

для любой точки $z = x + iy \in C$. Кроме того, при $z \in C$

$$f'(z) = \frac{x'(t) - iy'(t)}{x'(t) + iy'(t)}. \quad (2)$$

Дифференциальное уравнение для $f(z)$ мы получим, исключив из (1) и (2) параметр t .

238. Приняв известное соотношение для постоянной Эйлера [III. 12(20)]

$$C = \int_0^1 (1 - \cos y) \frac{dy}{y} - \int_1^\infty \cos y \frac{dy}{y}$$

за исходное, получим

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) C = \int_0^1 (1 - \cos y) \frac{dy}{ry} - \int_0^1 (1 - \cos y) \frac{dy}{sy} - \\ - \int_1^{\infty} \cos y \frac{dy}{ry} + \int_1^{\infty} \cos y \frac{dy}{sy}.$$

Пусть в первом и третьем интегралах $y = x^r$, а во втором и четвертом интегралах $y = x^s$, где $r, s > 0$. Тогда

$$\frac{r-s}{rs} C = \int_0^{\infty} \frac{\cos x^r - \cos x^s}{x} dx.$$

Полагая $r = 2$, $s = 1$, приходим к соотношению, которое требовалось доказать.

239. а. Функция $(x + a)^k - x^k$ алгебраически факторизуема и поэтому при целом x может принимать простое значение лишь в том случае, если $a = 1$.

б. Пусть $F(x) = (x + 1)^k - x^k$ и $q = F(x_0)$, где x_0 — произвольное натуральное число. Тогда q — целое число больше 1. Полагая $y_n = x_0 + nq$, $n = 1, 2, \dots$, получаем

$$F(y_n) = (y_n + 1)^k - y_n^k = [(x_0 + 1 + nq)^k - (x_0 + nq)^k] \equiv \\ \equiv (x_0 + 1)^k - x_0^k = q \pmod{q}.$$

Следовательно, $F(y_n)$ делится на q при всех n , но $F(y_n) \neq q$, поскольку $F(x)$ — возрастающая функция, а значение q она принимает при значении аргумента, меньшем чем y_n . Таким образом, при любом выборе натурального числа x_0 бесконечная числовая последовательность $(y_n + 1)^k$ обладает всеми требуемыми свойствами.

240. Из 16 возможных комбинаций истины и лжи, с высказыванием « A утверждает, что B отрицает, что C говорит, будто D лжец» совместимы лишь такие комбинации, в которые ложь входит четное число раз. Следовательно, если D изрекает истину, то A , B и C должны говорить истину, или ровно двое из них должны лгать. Поскольку каждый из четырех высказывающихся

говорит правду в одном случае из трех и делает это независимо от других, то следует рассмотреть $3^4 = 81$ возможность.

Комбинацию ИИИИ можно получить лишь одним способом, каждую из комбинаций ИЛЛИ, ЛИЛИ и ЛЛИИ — четырьмя способами: $1 + 4 + 4 + 4 = 13$. Таким образом, вероятность того, что D говорит правду, равна $13/81$.

Аналогично, если D лжет, то комбинацию ЛЛЛЛ можно получить 16 способами, а каждую из комбинаций ИИЛЛ, ЛИИЛ, ИЛИЛ — четырьмя способами. Следовательно, вероятность того, что D лжет, равна $28/81$.

A говорит правду при комбинациях ИИИИ, ИИЛЛ, ИЛИЛ, ИЛЛИ; вероятность в этом случае равна $13/81$. Такую же вероятность мы получим для комбинаций, где B говорит правду и где C говорит правду.

241. Пусть

$$S_n(x) = \sum_{l=1}^n \frac{\cos lx}{l}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Тогда

$$-S'_n(x) = \sum_{l=1}^n \sin lx = \left[\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right] \cdot \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Таким образом,

$$-S'_{n-1}(x) - S'_n(x) = \frac{1 - \cos nx}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \geq 0; \quad n \geq 2, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Отсюда следует, что при $x \rightarrow \pi$ функция $-S_{n-1}(x) - S_n(x)$ возрастает, в силу чего

$$\begin{aligned} -S_{n-1}(x) - S_n(x) &\leq -S_{n-1}(\pi) - S_n(\pi) = \\ &= 2 \sum_{l=1}^{n-1} \frac{(-1)^{l-1}}{l} + \frac{(-1)^{n-1}}{n}. \end{aligned}$$

Пусть $n = 2k$, $k \geq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} -S_{2k-1}(x) - S_{2k}(x) &= -2S_{2k}(x) + \frac{\cos 2kx}{2k} = -2S_{2k-1}(x) - \\ &- \frac{\cos 2kx}{2k} \leq 2 \sum_{l=1}^{2k-1} \frac{(-1)^{l-1}}{l} - \frac{1}{2k} = 2t_k - \frac{1}{2k}, \end{aligned}$$

откуда

$$-2S_{2k}(x) \leq 2t_k - \frac{(1 + \cos 2kx)}{2k} \leq 2t_k$$

и

$$-2S_{2k-1}(x) \leq 2t_k - \frac{(1 - \cos 2kx)}{2k} \leq 2t_k.$$

Поскольку $t_1 = 1$, а при $k > 1$ все t_k удовлетворяют неравенству $t_k < 1$, то

$$S_n(x) \geq -t_k \geq -1, \quad n \geq 1.$$

Нетрудно видеть, что равенство соответствует лишь $n = 1$, $x = \pi$. Кроме того, при $n \rightarrow \infty$ величины t_k убывают до $\ln 2$ и

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{0 \leq x \leq \pi} S_n(x) = -\ln 2.$$

242. Сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} [(3 - \sqrt{5})/2]^n / n^3$ равна

$$\frac{2}{15} \left\{ 6\zeta(3) + \pi^2 \ln \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) - 5 \left[\ln \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) \right]^3 \right\},$$

где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана.

Воспользуемся тем, что если

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}, \quad |x| \leq \frac{1}{2},$$

то

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{x}{x-1}\right) + \varphi(x) + \varphi(1-x) - \varphi(1) = \\ = \frac{\pi^2}{6} \ln(1-x) + \frac{1}{6} [\ln(1-x)]^2 [\ln(1-x) - 3 \ln x]. \end{aligned} \quad (1)$$

Это соотношение было выведено У. Спенсом (1809 г.) и повторно получено С. Рамануджаном. В справедливости его нетрудно убедиться, если, следуя Дж. Н. Ватсону¹, воспользоваться соотношением

$$\varphi(x) = \frac{x}{2} \int_a^1 \frac{\ln(1-u)^2 du}{1-x+xu}$$

¹ G. N. Watson, Journal of London Mathematical Society, 3 (1928), 217. — Прим. перев.

и, подставив $\varphi(x)$ в левую часть соотношения (1), сделать элементарные преобразования.

Полагая $x = (3 - \sqrt{5})/2$, замечаем, что $(x - 1)^2 = x$ и $x/(x - 1) = x - 1$. После подстановки $v = 1 - x$ соотношение (1) преобразуется к виду

$$\varphi(x) + \varphi(v) + \varphi(-v) = \varphi(1) + \frac{\pi^2}{6} \ln v - \frac{5}{6} (\ln v)^3.$$

Представив функцию $\varphi(x)$ в виде степенного ряда, получаем

$$\varphi(v) + \varphi(-v) = \frac{2}{2^3} \varphi(v^2) = \frac{1}{4} \varphi(x).$$

Наконец, заметив, что $v = (-1 + \sqrt{5})/2$, $\varphi(1) = \zeta(3)$, приходим к окончательному результату.

243. Если группа не абелева, то любой элемент a , не принадлежащий ее центру, порождает нетривиальный внутренний автоморфизм $x \rightarrow a^{-1}xa$. Если группа абелева и квадрат некоторого элемента отличен от единичного элемента, то автоморфизм $x \rightarrow x^{-1}$ отличен от тождественного. Если квадрат любого элемента группы равен единичному элементу и группа содержит более двух элементов, то она разложима в прямую сумму циклических групп порядка 2. Отображение, порожденное перестановкой генераторов двух таких прямых слагаемых, является автоморфизмом, отличным от тождественного.

244. Последовательность подходящих дробей P_n/Q_n непрерывной дроби

$$x = a_1 + \frac{b_1}{a_2 + \frac{b_2}{a_3 + \dots}}$$

проще всего получить, если воспользоваться матрицами. Методом математической индукции нетрудно доказать, что

$$\begin{pmatrix} P_n & b_n P_{n-1} \\ Q_n & b_n Q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad n > 0,$$

если положить $P_0 = 1$, $Q_0 = 0$ (тогда $P_1/Q_1 = a_1$).

В рассматриваемом случае $a_i = p$, $b_i = -q$, поэтому

$$\begin{pmatrix} P_n & -qP_{n-1} \\ Q_n & -qQ_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \\ = \begin{pmatrix} p & -q \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{n-1} & -qP_{n-2} \\ Q_{n-1} & -qQ_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$P_n = pP_{n-1} - qQ_{n-1}, \quad Q_n = P_{n-1} \quad (1)$$

и

$$\begin{pmatrix} P_n & -qQ_n \\ Q_n & P_n - qQ_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n.$$

Возводя в квадрат правую и левую части последнего равенства, получаем

$$\begin{pmatrix} P_{2n} & -qQ_{2n} \\ Q_{2n} & P_{2n} - qQ_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_n & -qQ_n \\ Q_n & P_n - qQ_n \end{pmatrix}^2,$$

откуда, сравнивая элементы матриц, находим

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = \frac{P_n^2 - qQ_n^2}{Q_n(2P_n - qQ_n)}. \quad (2)$$

Нетрудно видеть, что левая и правая части соотношения (2) совпадают с приведенным в условии задачи выражением для последовательных приближений большего корня квадратного уравнения, вычисляемого по методу Ньютона: если $x_k = P_n/Q_n$, то $x_{k+1} = P_{2n}/Q_{2n}$. Таким образом, переход от очередного приближения, получаемого по методу Ньютона, к следующему эквивалентен удвоению длины отрезка непрерывной дроби *.

245. Задача сводится к решению диофантова уравнения

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1 = y^2. \quad (1)$$

Умножив уравнение (1) на 4, преобразуем его к виду

$$3(2x+1)^2 = (2y-1)(2y+1).$$

Поскольку $2y-1$ и $2y+1$ — взаимно простые числа, то необходимо рассмотреть два следующих случая (m и n — взаимно простые нечетные числа):

$$\begin{array}{ll} \text{а)} & 2y-1 = 3m^2, \\ & 2y+1 = n^2, \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{б)} \\ 2y-1 = m^2, \\ 2y+1 = 3n^2. \end{array}$$

Случай «а» представиться не может, поскольку он соответствует равенству $n^2 - 3m^2 = 2$, в то время как квадрат любого целого числа при делении на 3 дает в остатке 0 или 1. В случае «б», полагая $m = 2k + 1$, получаем

$$2y = 4k^2 + 4k + 2 = 2[(k + 1)^2 + k^2],$$

что и доказывает утверждение задачи.

246. Рассмотрим набор произведений элементов группы $e, a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, \dots, a_1a_2 \dots a_n$. Поскольку этот набор содержит $n + 1$ элементов группы, то по крайней мере два произведения должны совпадать. Если $e = \prod_{i=1}^k a_i$, то утверждение задачи доказано. В противном случае

$$\prod_{i=1}^q a_i = \prod_{i=1}^v a_i, \quad q > v,$$

откуда

$$\prod_{i=v+1}^q a_i = e.$$

Полагая $p = v + 1$, приходим к утверждению задачи. Итак, утверждение задачи доказано.

247. Пусть p — нечетное простое число, такое, что

$$x^{2^n} + y^{2^n} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Поскольку $(x, y) = 1$, то $x \not\equiv 0, y \not\equiv 0 \pmod{p}$. Следовательно,

$$(xy^{-1})^{2^n} \equiv -1 \pmod{p},$$

где y^{-1} — вычет, обратный вычету y в мультипликативной группе вычетов по модулю p , и сравнение

$$n^{2^n} \equiv -1 \pmod{p} \tag{1}$$

разрешимо. Пусть $d = (p - 1, 2^n)$. Из малой теоремы Ферма (III.6) выводим

$$(-1)^{\frac{p-1}{d}} = u^{2^n \frac{p-1}{d}} = \left(u^{\frac{2n}{d}}\right)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}. \tag{2}$$

Отсюда следует, что $(p-1)/d$ — четное число. По определению d это означает, что $p-1$ делится на 2^{n+1} , откуда

$$p = 2^{n+1}m + 1. \quad (3)$$

Поскольку произведение чисел вида (3) также представимо в виде (3), то утверждение задачи доказано.

248. Начнем с правой части доказываемого соотношения:

$$\begin{aligned} \varphi_n - n\varphi_{n-1} &= \int_0^1 x(x+1) \dots (x+n-1) dx - \\ &- n \int_0^1 x(x+1) \dots (x+n-2) dx = \\ &= \int_0^1 (x-1)x(x+1) \dots (x+n-2) dx. \end{aligned}$$

Полагая $x = 1 - t$, получаем

$$\begin{aligned} \varphi_n - n\varphi_{n-1} &= - \int_1^0 (-t)(-t+1) \dots (-t+n-1) dt = \\ &= (-1)^n \int_0^1 t(t-1) \dots (t-n+1) dt = (-1)^n \vartheta_n, \quad (1) \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Заметив, что

$$\vartheta_1 = \varphi_1 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2},$$

получим из (1)

$$\frac{\varphi_i}{i!} - \frac{\varphi_{i-1}}{(i-1)!} = \frac{(-1)^i \vartheta_i}{i!}.$$

Суммируя левые и правые части по i от 1 до n , приходим к соотношению

$$\frac{\varphi_n}{n!} - \frac{\varphi_1}{1!} = \sum_{i=2}^n (-1)^i \frac{\vartheta_i}{i!},$$

откуда

$$\varphi_n = \frac{n!}{2} + n! \sum_{i=2}^n (-1)^i \frac{\vartheta_i}{i!}.$$

Таким образом, вторая половина задачи также решена.

$$\frac{1}{m} = \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+n} \right) + \left(\frac{1}{m+n} - \frac{1}{m+2n} \right) + \\ + \left(\frac{1}{m+2n} - \frac{1}{m+3n} \right) + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{n}{(m+jn)(m+jn+n)},$$

получим

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} = \sum_{m=1}^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(m+jn)(m+jn+n)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+n)},$$

поскольку если j принимает значения $0, 1, 2, \dots$, а m — значения $1, 2, \dots, n$, то $k = m + jn$ принимает значения $1, 2, 3, \dots$.

В дальнейшем в тех случаях, когда пределы суммирования не указаны в явном виде, суммирование проводится по всем натуральным числам от 1 до ∞ . Пусть S — рассматриваемая сумма. Тогда

$$S = \sum_n \left(\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} \right)^2 = \sum_n \left(\sum_k \frac{1}{k(k+n)} \right)^2 = \\ = \sum_{k, j, n} \frac{1}{jk(k+n)(j+n)} = \sum_n \left[\sum_{k < j} \frac{1}{jk(k+n)(j+n)} + \right. \\ \left. + \sum_{k=j} \frac{1}{jk(k+n)(j+n)} + \sum_{k > j} \frac{1}{jk(k+n)(j+n)} \right] = \\ = \sum_{n, k} \frac{1}{k^2(k+n)^2} + 2 \sum_n \sum_{k < j} \frac{1}{jk(k+n)(j+n)} = \\ = \sum_{k < j} \frac{1}{k^2 j^2} + 2 \sum_{k, m, n} \frac{1}{k(k+m)(k+n)(k+m+n)} = \\ = \frac{1}{2} \left(\sum_{k, j} \frac{1}{k^2 j^2} - \sum_{k=j} \frac{1}{k^2 j^2} \right) + \\ + 2 \sum_{k, m, n} \left[\frac{1}{kmn(k+m+n)} - \frac{1}{mn(k+m)(k+n)} \right] = \\ = \frac{1}{2} \left[\left(\sum \frac{1}{k^2} \right)^2 - \sum \frac{1}{k^4} \right] + 2 \sum_{k, m, n} \frac{1}{kmn(k+m+n)} - 2S.$$

Поскольку [III. 11 (8)]

$$\sum \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{и} \quad \sum \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90},$$

то

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(3S - \frac{\pi^4}{120} \right) &= \sum \frac{1}{kmn(k+m+n)} = \sum \int_0^1 \frac{x^{k+m+n-1}}{kmn} dx = \\ &= \int_0^1 \left(\sum \frac{x^k}{k} \right)^3 \frac{dx}{x} = - \int_0^1 [\ln(1-x)]^3 \frac{dx}{x} = \\ &= - \int_0^1 (\ln x)^3 \frac{dx}{1-x} = - \sum \int_0^1 x^{n-1} (\ln x)^3 dx = \sum \frac{6}{n^4} = \frac{\pi^4}{15}, \end{aligned}$$

откуда $S = 17\pi^4/360$, что и требовалось доказать.

250. Пусть C — граница области A_f . Тогда $|f(z)| = 1$, если $z \in C$. Обозначим через $\bar{A}_f$ бесконечную компоненту дополнения области A_f . Область $\bar{A}_f$ связная, и C содержит ее границу. Рассмотрим функцию

$$H(z) \equiv \frac{[f'(z)]^n}{[f(z)]^{n-1}} \equiv \frac{n^n z^{n(n-1)} + \dots}{z^{n(n-1)} + \dots}.$$

Функция $H(z)$ регулярна в $\bar{A}_f$ и $H(\infty) = n^n$.

Предположим, что $|f'(z)| < n$ всюду в области A_f . Тогда $|H(z)| < n^n$ на C и, следовательно, $|H(z)| < n^n$ всюду в области $\bar{A}_f$. Это противоречит тому, что $H(\infty) = n^n$.

Предположим, что $|f'(z)| \leq n$ всюду в области A_f . Тогда $|H(z)| \leq n^n$ на C и, следовательно, $H(z) = n^n$ на всей плоскости (поскольку $H(\infty) = n^n$). Это означает, что

$$\frac{1}{n} [f(z)]^{(1-n)/n} f'(z) \equiv 1,$$

откуда

$$[f(z)]^{1/n} \equiv z + a, \quad f(z) \equiv (z + a)^n.$$

251. Пусть $f'_k(x) = x_j$. Если x_i содержит хоть один простой делитель $p > k$, то в силу равенства (III. 15)

$$\varphi(p_1^{a_1} \dots p_n^{a_n}) = p_1^{a_1} \dots p_n^{a_n} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$$

операция $k\varphi$, произведенная над x_i , понижает показатель степени наибольшего простого делителя числа x_i на единицу. Следовательно, если число k фиксировано, то существует j , такое, что при $i > j$ все простые делители числа x_i меньше или равны k .

При $k=1$ (здесь и далее $i > j$) получаем $x_i = 1$, при $k=2$ $x_i = 2^a$ и $2\varphi(2^a) = 2^a$, при $k=3$ $x_i = 2^a 3^b$ и $3\varphi(2^a 3^b) = 2^a 3^b$, при $k=4$

$$k\varphi(x_i) = kx_i \prod_{p \leq k} \left(1 - \frac{1}{p}\right) > kx_i \prod_{r=2}^k \left(1 - \frac{1}{r}\right) = x_i,$$

откуда $x_{i+1} > x_i$. Утверждение задачи доказано.

252. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — суммы (в пенсах), вырученные от продажи лотерейных билетов n распространителями. Продолжим последовательность A_i неограниченно так, чтобы выполнялось соотношение $A_{n+k} = A_k$. По условию «а» из равенства $A_j = A_k$ следует, что $j \equiv k \pmod{n}$. Нетрудно видеть, что число n отлично от 1 и 2 и что

$$0 < A_k < 144. \quad (1)$$

Условие «б» можно представить в виде

$$144 - A_k = \frac{A_{k-1} A_{k+1}}{144}. \quad (2)$$

Вычислив с помощью соотношения (2) при заданных A_1 и A_2 суммы A_3, A_4, A_5, A_6 и A_7 , мы обнаружим, что $A_6 = A_1$ и $A_7 = A_2$. Следовательно, $A_{k+5} = A_k$, а тогда $5 \equiv 0 \pmod{n}$, откуда $n = 5$.

Ни одно из чисел A_k не является взаимно простым с числом 144, поскольку в противном случае A_{k+2} делилось бы на 144, что противоречит неравенствам (1).

Кроме того, по условию «в» $\sum_{k=1}^5 A_k \equiv 5 \pmod{6}$. Следовательно, по крайней мере одно из чисел A_k , например A_1 , нечетно и, значит, делится на 3. Пусть

$$A_2 = 2^{\alpha_2} a_2, \quad A_3 = 2^{\alpha_3} a_3, \quad A_4 = 2^{\alpha_4} a_4,$$

где a_i нечетны. Из соотношения (2) при $k=2, 3$ получаем $\alpha_2 = \alpha_3 - 4$, $\alpha_3 + \alpha_4 = 12$, и так как $0 \leq \alpha_i \leq 7$ (в противном случае $A_i \geq 256$, что противоречит (1)), то

$\alpha_3 \geq 5$, $\alpha_4 \geq 5$, $\alpha_2 \geq 1$. Аналогично из (2) при $k = 1$ находим, что A_5 четно.

Итак,

$$A_1 = 3B_1, \quad A_2 = 2B_2, \quad A_3 = 32B_3, \quad A_4 = 32B_4, \quad A_5 = 2B_5,$$

где числа B_i удовлетворяют следующим дополнительным условиям: B_1 нечетно и

$$1 \leq B_3 \leq 4, \quad 1 \leq B_4 \leq 4, \quad B_3 \neq B_4. \quad (3)$$

Из условий (3) следует, что ни A_3 , ни A_4 не делятся на 9. Из соотношения (2) при $k = 3, 4$ мы находим, что A_2 и A_5 делятся на 3, а значит, и на 6. Таким образом,

$$\sum_{k=1}^5 A_k \equiv 3B_1 + 2B_3 + 2B_4 \equiv 5 \pmod{6},$$

$$B_3 + B_4 \equiv 1 \pmod{3}. \quad (4)$$

Кроме того,

$$144 - A_3 = A_4 \left(\frac{A_2}{144} \right) < A_4,$$

$$B_3 + B_4 \geq 5. \quad (5)$$

Единственная комбинация значений B_3 и B_4 , удовлетворяющих соотношениям (3), (4) и (5), состоит из 3 и 4. Следовательно, мы можем выбрать $A_3 = 96$, $A_4 = 128$ и по этим значениям получить из соотношения (2) полное решение

$$A_1 = 135, \quad A_2 = 54, \quad A_3 = 96, \quad A_4 = 128, \quad A_5 = 24.$$

(Перестановка значений A_3 и A_4 приводит к тому же набору чисел, но взятому в обратном порядке.)

253. Пусть

$$F(z) = 1 + \frac{x}{(1-x)(1-xz)} + \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)(1-xz)(1-x^2z^2)} + \dots, \quad (1)$$

где x — фиксированное комплексное число внутри единичного круга, а z — комплексная переменная, отличная от x^n при $n = 1, 2, \dots$. Подставляя в (1) zx вместо z и вычитая соответствующие члены, находим

$$F(z) - F(zx) = \frac{zx^2}{(1-zx)(1-zx^2)} F(zx^2). \quad (2)$$

Функцию $G(z)$ определим соотношением

$$G(z) = F(z) \prod_{n \geq 1} (1 - zx^n). \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что $G(z)$ — целая функция от z и

$$G(0) = F(0) = 1 + \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)} + \dots$$

$$\dots = \prod_{n \geq 1} \frac{1}{1-x^n}. \quad (4)$$

Кроме того, из соотношений (2) и (3) следует, что

$$G(z) - (1 - zx) G(zx) = zx^2 G(zx^2). \quad (5)$$

Разлагая $G(z)$ в степенной ряд

$$G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots, \quad (6)$$

коэффициенты которого зависят только от x , и приравнявая в правой и левой частях соотношения (5) коэффициенты при z^n , получаем рекуррентное соотношение

$$a_n = -a_{n-1} x^n, \quad n > 0. \quad (7)$$

Поскольку $a_0 = G(0)$ определяется рядом (4), то в силу соотношения (7)

$$a_n = (-1)^n x^{(n^2+n)/2} a_0 = (-1)^n x^{(n^2+n)/2} \prod_{k \geq 1} \frac{1}{1-x^k}. \quad (8)$$

Следовательно,

$$G(z) = \prod_{k \geq 1} \frac{1}{1-x^k} \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{(n^2+n)/2} z^n, \quad (9)$$

а поскольку $G(z)$ и $F(z)$ связаны соотношением (3), то

$$F(z) = \prod_{k \geq 1} \frac{1}{(1-x^k)(1-x^k z)} \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{(n^2+n)/2} z^n.$$

Полагая $z = 1$, получаем тождество, которое требовалось доказать.

254. Особое решение представляет собой множество точек (x, y) , задаваемое параметрическими уравнениями

$$px - y + f(p) = 0, \quad x + f'(p) = 0,$$

где $x = x(p)$, $y = y(p)$. Частное решение имеет вид

$$cx - y + f(c) = 0,$$

где c — фиксированное число. Общую точку $x = -f'(c)$, $y = -cf'(c) + f(c)$ особого и частного решений мы получим, положив $p = c$ в трех приведенных выше уравнениях.

Докажем теперь, что найденная общая точка особого решения и частного решения, соответствующего выбранному значению c , единственна. Пусть $p = k \neq c$. Если параметрические уравнения, задающие особое решение и уравнение, определяющее частное решение, совместны, то их определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} k & -1 & f(k) \\ 1 & 0 & f'(k) \\ c & -1 & f(c) \end{vmatrix} = f(c) - f(k) + f'(k)(k - c) = 0.$$

Следовательно,

$$\int_c^k f'(p) dp = f(k) - f(c) = f'(k)(k - c) = \int_c^k f'(k) dp.$$

Поскольку производная $f'(p)$ монотонна, то это соотношение означает, что $f'(p)$ постоянна на интервале $[c, k]$, в силу чего $f'(k) = f'(c)$ и $f(k) = f(c) + f'(c)(k - c)$. Но тогда $x(k) = -f'(k) = x(c)$ и $y(k) = -kf'(k) + f(k) = -cf'(c) + f(c) = y(c)$. Таким образом, общая точка $x(c)$, $y(c)$ особого и частного решений единственна, что и требовалось доказать.

255. Для каждого элемента $a_i a_j = a_k$ из A существует элемент $a_k a_j^{-1} = a_i$, также принадлежащий подмножеству A . Следовательно, в подмножестве A число элементов вида $a_i a_j$ совпадает с числом элементов вида $a_i a_j^{-1}$. Рассмотрим n^2 элементов вида $a_i a_j^{-1}$. Из свойств подмножества A следует, что единичный элемент $I = a_i a_i^{-1}$ не принадлежит A и элемент $a_j a_i^{-1} = (a_i a_j^{-1})^{-1}$ не принадлежит A , если A содержит элемент $a_i a_j^{-1}$. Таким образом, подмножество A содержит не более $n(n-1)/2 = \binom{n}{2}$ элементов вида $a_i a_j^{-1}$. Это означает, что число элементов вида $a_i a_j$ в A также не превышает $\binom{n}{2}$.

256. Продифференцировав ряд [III. 11 (11)]

$$\frac{\pi}{x} \operatorname{cth} \pi x = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2 + 1^2} + \frac{2}{x^2 + 2^2} + \dots$$

почленно по x и разделив на $-x$, получим

$$\frac{\pi}{x^3} \operatorname{cth} \pi x + \frac{\pi^2}{x^2 \operatorname{sh}^2 \pi x} = \frac{2}{x^4} + \frac{4}{(x^2 + 1^2)^2} + \frac{4}{(x^2 + 2^2)^2} + \dots,$$

откуда [см. III. 11 (8)]

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{cth} \pi n}{n^3} + \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n \operatorname{sh} \pi n)^2} = \frac{\pi^4}{45} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + n^2)^2}. \quad (1)$$

Но *

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + n^2)^2} &= \zeta(2) \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \dots \right) - \zeta(4) = \\ &= \frac{\pi^2}{6} \left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \dots \right) - \frac{\pi^4}{90}. \end{aligned} \quad (2)$$

Таким образом, остается найти лишь сумму ряда $\pi \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{cth} \pi n / n^3$. Производя элементарные преобразования, находим

$$\begin{aligned} \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{cth} \pi n}{n^3} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (n^2 + m^2)} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2 + n^2} \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 (m^2 + n^2)} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} - \pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{cth} \pi m}{m^3}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{cth} \pi n}{n^3} = \frac{\pi^4}{90} + \frac{\pi^4}{36} = \frac{7\pi^4}{180}. \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в соотношение (1), получаем требуемое тождество.

257. В разложении

$$n - 1 = 4(2^{p-1} + 1)(2^{p-1} - 1)/3$$

множитель 4 делится на 2, множитель $2^{p-1} - 1$ делится на p (по малой теореме Ферма, поскольку p — простое число, см. III. 6) и на 3 (поскольку p — нечетное простое число). Следовательно, если $p > 3$, то $2^{p-1} - 1$ делится на $3p$, а $n - 1$ делится на $2p$.

По условию задачи число $2^{2p} - 1$ делится на n . Поскольку число $n - 1$ делится на $2p$, то $2^{n-1} - 1$ делится на $2^{2p} - 1$, а потому и на n . Следовательно, $2^n - 2$ также делится на n , что и требовалось доказать.

258. Докажем утверждение задачи от противного. Предположим, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i} = \frac{p}{q},$$

где p и q — целые числа. По условиям задачи можно выбрать целое число k так, чтобы

$$\frac{n_k}{n_1 n_2 \dots n_{k-1} q} > 3$$

и $n_{i+1} > 3n_i$ при $i \geq k$. Тогда

$$\begin{aligned} pn_1 n_2 \dots n_{k-1} &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n_1 n_2 \dots n_{k-1} q}{n_i} = \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{n_1 n_2 \dots n_{k-1} q}{n_i} + \sum_{i=k}^{\infty} \frac{n_1 n_2 \dots n_{k-1} q}{n_i}. \end{aligned}$$

Произведение $pn_1 n_2 \dots n_{k-1}$ и конечная сумма в правой части — целые числа, а каждый член ряда

$$\sum_{i=k}^{\infty} \frac{n_1 n_2 \dots n_{k-1} q}{n_i}$$

в силу сделанного нами выбора числа k меньше соответствующего члена ряда $1/3 + 1/9 + \dots + 1/3^i + \dots$, сумма

которого равна $1/2$. Полученное противоречие доказывает, что утверждение задачи верно.

259. Рассмотрим n последовательных чисел $n, n-1, \dots, n-p+1$. С точностью до перестановки они сравнимы по модулю p с числами $1, 2, \dots, p$. Кроме того, одно из них, например число N , делится на p , откуда $[n/p] = N/p$. Вычеркнув число N , мы получим набор чисел, сравнимых (с точностью до перестановки) с полной системой ненулевых вычетов $1, 2, \dots, p-1$ по модулю p .

Пусть Π — произведение чисел, оставшихся после вычеркивания числа N :

$$\Pi = \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{N}.$$

Тогда

$$\Pi \equiv (p-1)! \pmod{p}.$$

Умножив на N/p , получим

$$\frac{N\Pi}{p} \equiv \frac{(p-1)! N}{p} \pmod{p}, \quad (1)$$

а разделив на число $(p-1)!$, взаимно простое с p , преобразуем сравнение (1) к виду

$$\frac{N\Pi}{p!} \equiv \frac{N}{p} \pmod{p}, \quad (2)$$

где $N\Pi/p!$ — целое число, равное $\binom{n}{p}$. Таким образом, первое утверждение задачи доказано.

Если число $N/p = [n/p]$ делится на p^s , то сравнения (1) и (2) остаются верными и по модулю p^{s+1} . Отсюда следует, что $N\Pi/p = \binom{n}{p}$ делится на p^s . Таким образом, второе утверждение задачи также доказано.

260. Решение этой задачи приведено в статье Л. Г. Шнирельмана, помещенной в журнале «Успехи математических наук», вып. X, 1944, стр. 34—44¹.

262. Функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению

$$f(z) - 1 = azf(a^2z), \quad (1)$$

¹ Я не знаю достаточно простого решения этой задачи даже при упрощающих предположениях, например, когда кривая аналитична, и т. п. — *Прим. ред.*

На единичной окружности функция $f(z)$ имеет по крайней мере одну особую точку, например точку z_0 . Из функционального уравнения (1) следует, что тогда $a^2 z_0$ также будет особой точкой функции $f(z)$. Повторяя те же рассуждения, получаем последовательность особых точек $a^{2m} z_0$ при $m = 0, 1, \dots$. Поскольку ϕ — иррациональное число, то эти точки образуют на единичной окружности плотное множество. Следовательно, единичная окружность является естественной границей функции $f(z)$, что и требовалось доказать.

Если ϕ — рациональное число, то $f(z)$ — рациональная функция.

263. Рассмотрим те члены заданной последовательности целых чисел, которые не являются делителями других членов последовательности. Если число этих членов бесконечно, то они образуют бесконечную подпоследовательность, любые два члена которой не кратны друг другу, и утверждение задачи доказано. Если число членов конечно, то, вычеркнув их и все их делители из исходной последовательности, мы получим бесконечную последовательность целых чисел, в которой каждый член является делителем по крайней мере еще одного члена последовательности. Из этой последовательности мы можем выбрать подпоследовательность, в которой каждый последующий член будет кратен предыдущему, что и требовалось доказать.

264. Рассмотрим отдельно два случая.

Случай 1. В каждой бесконечной подпоследовательности $b_1, b_2, \dots$ данной последовательности $a_1, a_2, \dots$ существует по крайней мере одна сумма $b_i + b_j$ и соответствующая бесконечная подпоследовательность $b_{i_1}, b_{i_2}, \dots$, такие, что

$$2b_{i_k} \not\equiv 0 \pmod{(b_i + b_j)}.$$

При этом очевидно, что бесконечно много членов подпоследовательности $b_{i_1}, b_{i_2}, \dots$ принадлежат одному и тому же классу вычетов по модулю $b_i + b_j$. Иначе говоря, существует сумма $a_{i_1} + a_{j_1}$ и бесконечно много членов последовательности a_i (для удобства обозначим их $a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \dots$), таких, что

$$2a_k^{(2)} \not\equiv 0 \pmod{(a_{i_1} + a_{j_1})}, \quad a_1^{(2)} \equiv a_2^{(2)} \equiv \dots \pmod{(a_{i_1} + a_{j_1})}. \quad (1)$$

Аналогичным образом можно убедиться в том, что существует сумма $a_{i_2}^{(2)} + a_{j_2}^{(2)}$ и бесконечная подпоследовательность $a_i^{(3)}$ членов последовательности $a_i^{(2)}$, таких, что

$$2a_k^{(3)} \not\equiv 0 \pmod{(a_{i_2}^{(2)} + a_{j_2}^{(2)})}, \quad a_1^{(3)} \equiv a_2^{(3)} \equiv \dots \pmod{(a_{i_2}^{(2)} + a_{j_2}^{(2)})}.$$

Из соотношений (1) получаем

$$a_{i_2}^{(2)} + a_{j_2}^{(2)} \equiv 2a_{i_2}^{(2)} \not\equiv 0 \pmod{(a_i + a_j)}.$$

Аналогичным образом находим и другие члены последовательности сумм

$$a_{i_3}^{(3)} + a_{j_3}^{(3)}, \quad a_{i_4}^{(4)} + a_{j_4}^{(4)}, \quad \dots$$

Ясно, что ни один из членов этой последовательности не является делителем другого.

Случай 2. Существует подпоследовательность $b_1, b_2, \dots$ членов последовательности $a_1, a_2, \dots$, таких, что для любой суммы $b_i + b_j$ найдется лишь конечное число членов подпоследовательности b_k , для которого $2b_k \not\equiv 0 \pmod{(b_i + b_j)}$. Следовательно, при всех достаточно больших n

$$2b_n \equiv 0 \pmod{(b_i + b_j)}.$$

Рассмотрим последовательность сумм $b_1 + b_{n_1}, b_1 + b_{n_2}, \dots$, где номера $n_1 < n_2 < \dots$ возрастают неограниченно и достаточно быстро для того, чтобы выполнялось сравнение

$$2b_{n_k} \equiv 0 \pmod{(b_1 + b_{n_i})}, \quad i < k.$$

Поскольку $0 < 2b_1 < b_1 + b_{n_1}$, то

$$2b_1 \not\equiv 0 \pmod{(b_1 + b_{n_i})}.$$

Таким образом, при $k > i$ все члены последовательности сумм $b_1 + b_{n_k}$ удовлетворяют сравнению

$$2(b_1 + b_{n_k}) \equiv 2b_1 \pmod{(b_1 + b_{n_i})}$$

и, значит, не делятся на $b_1 + b_{n_i}$. Тем самым ни один из членов последовательности $b_1 + b_{n_k}$ не является делителем другого, что и требовалось доказать.

265. Пусть R — сила натяжения, постоянная по всей длине нити, поскольку нить невесомая, а «налитая» в нее жидкость не создает в нити касательных напряжений; ρ — радиус кривизны нити; σ — масса, приходящаяся на единицу «заполненной» жидкостью площади; g — ускорение свободного падения; положительная полуось y направлена вниз по вертикали (ось x — горизонтальная).

Гидростатическое давление на глубине y равно σgy . Если нить находится в равновесии, то давление σgy и радиус кривизны нити ρ в точке, находящейся на расстоянии y ниже оси x , определяют силу натяжения $R = -\sigma gy\rho$, или

$$\sigma gy \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = -R.$$

Полагая $R/\sigma g = a^2/4$ и интегрируя, получаем

$$y^2 = \frac{1}{2} a^2 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{-1/2} + c = h^2 - a^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2},$$

где $\vartheta = \arctg(dy/dx)$, а $h = (c + a^2/2)^{1/2}$ — максимальное значение y (стрела прогиба нити).

Решение полученного дифференциального уравнения может быть выражено через эллиптические функции

$$E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi,$$

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

В самом деле, в точках закрепления нити ордината y обращается в нуль, а потому должно выполняться неравенство $a^2 \geq 2h^2$. Положим $h^2 = k^2 a^2$, где $k^2 < 1/2$ и введем новую переменную φ с помощью равенства $k \sin \varphi = -\sin(\vartheta/2)$. Тогда $y = h \cos \varphi$, а поскольку

$$\sin \vartheta = \frac{dy}{ds} = -h \sin \varphi \frac{d\varphi}{ds}$$

(здесь s — длина дуги, отсчитываемая для удобства от точки максимального прогиба, где $\varphi = 0$, в обе стороны с соответствующим знаком), то

$$\frac{ds}{d\varphi} = -h \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} = \frac{a}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Таким образом,

$$s = \frac{a}{2} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{2} aF(k, \varphi).$$

Аналогично

$$\frac{dx}{d\varphi} = -h \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} \cos \vartheta = \frac{a}{2} \frac{1 - 2k^2 \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$\begin{aligned} x &= a \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi - \frac{a}{2} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \\ &= aE(k, \varphi) - \frac{1}{2} aF(k, \varphi). \end{aligned}$$

Итак, если k и a фиксированы, то искомую кривую можно задать параметрическими уравнениями $y = h \cos \varphi$, $x = aE(k, \varphi) - \frac{1}{2} aF(k, \varphi)$. Постоянную k находим из равенства

$$l = a \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

266. Полюсы функции $[(1 - z^2)/\sin \pi z] \prod_{k=2}^n \sin(\pi z/k)$ могут располагаться только в точках вещественной оси с целочисленными абсциссами. При $|z| \leq n$ возможные нули знаменателя оказываются подавленными нулями числителя, а при $|z| > n$ числитель впервые не обращается в нуль, когда z , возрастая, достигает ближайшего к n простого числа p (решето Эратосфена!). Таким образом, радиус сходимости степенного ряда, представляющего рассматриваемую функцию, равен расстоянию от начала координат до первого простого числа, большего n . Утверждение задачи непосредственно следует из доказанного и формулы Коши — Адамара.

267. Как известно (см. III. 14), $F_n = (r^n - s^n)/\sqrt{5}$, где r и s — корни уравнения $x^2 - x - 1 = 0$. Полагая $a = 2^n$, получим

$$\begin{aligned} \frac{F_{4a}}{F_{2a}} - \left(\frac{F_{2a}}{F_a} \right)^2 + 2 &= \frac{r^{4a} - s^{4a}}{r^{2a} - s^{2a}} - \left(\frac{r^{2a} - s^{2a}}{r^a - s^a} \right)^2 + 2 = \\ &= r^{2a} + s^{2a} - (r^a + s^a)^2 + 2 = -2(rs)^a + 2 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, отношение чисел Фибоначчи $F_{2^{k+1}}/F_{2^k}$ удовлетворяет тому же рекуррентному соотношению, что и члены последовательности a_k , а поскольку $a_1 = 3 = F_4/F_2$, то тем самым утверждение задачи доказано.

268. Пусть a — радиус сферы, $\rho(r)$ — плотность в точке P , находящейся на расстоянии r от центра сферы, $f(r)$ — ускорение силы тяжести в точке P .

Известно, что однородная сфера притягивает материальную точку, лежащую вне ее, так, как если бы вся масса сферы была сосредоточена в ее центре, а внутри той же сферы равнодействующая сил тяготения равна нулю. Поэтому

$$f(r) = \frac{k}{r^2} \int_0^r 4\pi \rho(s) s^2 ds. \quad (1)$$

Если единичная масса падает с поверхности планеты в точку P по любой траектории (без трения), то в точке P ее скорость определяется законом сохранения энергии

$$\frac{1}{2} [V(r)]^2 = \int_r^a f(s) ds. \quad (2)$$

Рассмотрим прямой туннель с идеально гладкими стенками, прорытый на расстоянии x от центра планеты. Если y — расстояние от точки P на оси туннеля до середины туннеля, то

$$\begin{aligned} y^2 &= r^2 - x^2, \\ V(r) &= \frac{dy}{dt} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \frac{dx}{dt}. \end{aligned}$$

Следовательно, половина времени T , за которую единичная масса пройдет насквозь весь туннель, равна

$$\frac{T}{2} = \int_x^a \frac{r \, dr}{V(r) \sqrt{r^2 - x^2}}. \quad (3)$$

Умножив соотношение (3) на $x/\sqrt{x^2 - y^2}$, проинтегрируем правую и левую части по x от y до a (y — произвольное число, заключенное между 0 и a):

$$\begin{aligned} \int_y^a dx \int_x^a \frac{xr \, dr}{V(r) \sqrt{x^2 - y^2} \sqrt{r^2 - x^2}} &= \\ &= \int_y^a \frac{T}{2} \cdot \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{T}{2} \cdot \sqrt{a^2 - y^2}. \end{aligned}$$

Изменив порядок интегрирования, получим

$$\frac{T}{2} \sqrt{a^2 - y^2} = \int_y^a \frac{r \, dr}{V(r)} \int_y^r \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 - y^2} \sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{\pi}{2} \int_y^a \frac{r \, dr}{V(r)}.$$

Продифференцировав по y , найдем зависимость скорости от y :

$$V(y) = \frac{\pi}{T} \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Теперь нетрудно вывести зависимость $f(r)$ (для этого соотношение (2) достаточно продифференцировать по r):

$$f(r) = \frac{\pi^2}{T^2} r.$$

Наконец, подставив это выражение в соотношение (1), получим после дифференцирования по r выражение для плотности планеты:

$$\rho(r) = \frac{3\pi}{4kT^2}.$$

Таким образом, плотность планеты постоянна, что и требовалось доказать.

269. Пусть e — единственный исключительный элемент. Ясно, что $e \neq 0$.

а. Поскольку при всех y

$$e + (-e + y - ey) + e(-e + y - ey) = -e^2 + y - e^2y \neq 0,$$

то $-e^2 = e$, или $e^2 + e = 0$.

б. Соотношение $x + ex = 0$ выполняется при всех x . Действительно, если бы выполнялось соотношение $e + x + ex \neq e$, то существовал бы элемент кольца y , такой, что $e + x + ex + y + (e + x + ex)y = 0$. Умножая последнее соотношение слева на e , получаем (по доказанному в пункте «а») $e^2 = 0$, или $e = 0$. Полученное противоречие доказывает, что соотношение $x + ex = 0$ выполняется при всех x .

Аналогичным образом только что полученный результат позволяет доказать, что $x + xe = 0$ также при всех x . Таким образом, $-e$ совпадает с единичным элементом кольца A .

в. Соотношение $x + y + xy = 0$ можно теперь представить в виде $(x - e)(y - e) = -e$ при $x \neq e$, или $XY = -e$ при $X \neq 0$, где $X = x - e$, $Y = y - e$. Таким образом, для любого отличного от 0 элемента X кольца A существует обратный элемент. Следовательно, A — кольцо с делением, что и требовалось доказать.

270. Пусть

$$n - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_k; \quad a_k = 0, 1.$$

Тогда

$$\left[\frac{n-1}{2^r} + \frac{1}{2} \right] = a_{r-1} + \sum_{m=r}^{\infty} 2^{m-r} a_m.$$

Суммируя правые и левые части, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{n-1+2^{r-1}}{2^r} \right] &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^m 2^{m-r} a_m = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} 2^m a_m = n - 1, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

271. Вероятность вынуть данный коробок спичек ровно n раз за $n + x$ ($x = 0, 1, \dots, n$) испытанный и затем

достать его снова при $(n+x+1)$ -м испытании равна $\binom{n+x}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+x+1}$. Следовательно, когда вынутый коробок оказывается пустым, вероятность того, что в другом коробке осталось $n-x$ спичек, составляет

$$2 \binom{n+x}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+x+1} = \binom{n+x}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+x}.$$

Поскольку это событие должно происходить при одном и только при одном значении x , то

$$\sum_{x=0}^n \binom{n+x}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+x} = 1. \quad (1)$$

Математическое ожидание E числа спичек, оставшихся в другом коробке, определяется выражением

$$E = \sum_{x=0}^n (n-x) \binom{n+x}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+x}.$$

Соотношение (1) позволяет упростить это выражение следующим образом:

$$\begin{aligned} E &= (2n+1) \sum_{x=0}^n \binom{n+x}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+x} - \\ &\quad - \sum_{x=0}^n (n+1+x) \binom{n+x}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+x} = \\ &= (2n+1) - 2(n+1) \sum_{x=0}^n \binom{n+1+x}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1+x} = \\ &= (2n+1) - 2(n+1) \left[1 - \binom{2n+2}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} \right] = \\ &= \frac{(2n+1)!}{n!n!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - 1. \end{aligned}$$

272. Число $\sqrt{3}$ не является исключением. Разложения в виде бесконечных отношений можно получать и для других радикалов. Докажем это утверждение.

При $a \rightarrow \infty$ дроби

$$F(a) = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2a}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2a-1)} = \frac{2^a a! a!}{(2a)!}$$

расходятся, но частные

$$\frac{F(na)}{F(a)} = \frac{2^{2a(n-1)} (na)! (na)! (2a)!}{a!a! (2na)!} \quad (1)$$

сходятся к $\sqrt{n}$, в чем нетрудно убедиться, если воспользоваться формулой Стирлинга [см. III.11(6)]. Если при нечетном n каждый множитель дроби $F(a)$ умножить на n , то отношение (1) будет эквивалентно дроби $F(na)$, в которой вычеркнуты все числа, кратные n . Эту дробь нетрудно разложить в бесконечное отношение $r_0/r_1/r_2, \dots$, где

$$r_k = \frac{(kn+2)(kn+4)\dots(kn+n-1)}{(kn+1)(kn+3)\dots(kn+n-2)}.$$

Примерами таких разложений могут служить разложение, приведенное в условии задачи, и разложения

$$\begin{aligned}\sqrt{5} &= \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} / \frac{7 \cdot 9}{6 \cdot 8} / \frac{12 \cdot 14}{11 \cdot 13} / \frac{17 \cdot 19}{16 \cdot 18} \dots, \\ \sqrt{7} &= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5} / \frac{9 \cdot 11 \cdot 13}{8 \cdot 10 \cdot 12} / \frac{16 \cdot 18 \cdot 20}{15 \cdot 17 \cdot 19} / \dots\end{aligned}$$

Если n четно, то все числа, кратные n , войдут в числитель дроби $F(na)$. Следовательно, отношение (1) в этом случае эквивалентно дроби $F(na)$, у которой все нечетные числа, кратные n , повторены дважды, а все четные числа, кратные n , вычеркнуты. Соответствующее бесконечное отношение $r_0/r_1/r_2 \dots$ содержит числа

$$\begin{aligned}r_k &= \frac{(kn+2)(kn+4)\dots(kn+n)}{(kn+1)(kn+3)\dots(kn+n-1)} && \text{при четном } k, \\ r_k &= \frac{(kn+1)(kn+3)\dots(kn+n-1)}{(kn)(kn+2)\dots(kn+n-2)} && \text{при нечетном } k.\end{aligned}$$

Например,

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= \frac{2}{1} / \frac{3}{2} / \frac{6}{5} / \frac{7}{6} / \frac{10}{9} \dots, \\ \sqrt{4} &= \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} / \frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 6} / \frac{10 \cdot 12}{9 \cdot 11} / \frac{13 \cdot 15}{12 \cdot 14} \dots, \\ \sqrt{6} &= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5} / \frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{6 \cdot 8 \cdot 10} / \frac{14 \cdot 16 \cdot 18}{13 \cdot 15 \cdot 17} \dots\end{aligned}$$

273. Пусть C_r — окружность радиусом r с центром в начале координат. Любая непрерывная вещественная

функция f достигает на C_r минимального значения. Обозначим через S_f множества точек, в которых f достигает минимума на окружностях C_r при любых $r \geq 0$. Докажем, что для любой непрерывной функции f множество S_f замкнуто и пересекает любую окружность C_r и, наоборот, любое замкнутое (не обязательно связное) множество S , пересекающее любую окружность C_r , является множеством S_f точек минимума, достигаемого на окружностях C_r некоторой непрерывной функцией f .

Для любой непрерывной функции f множество S_f по определению пересекает любую окружность C_r . Чтобы доказать, что множество S_f замкнуто, рассмотрим последовательность точек $p_n \rightarrow p$, где $p_n \in S_f$. Пусть q — любая точка, принадлежащая той же окружности, что и p . Докажем, что $f(p) \leq f(q)$. Для этого выберем последовательность точек q_n , сходящуюся к q , так, чтобы каждая точка q_n лежала на той же окружности C_r , на которой лежит точка p_n . Поскольку p_n — точка, в которой функция f достигает минимума на окружности C_r , то $f(p_n) \leq f(q_n)$. Но f — непрерывная функция, поэтому $f(p_n) \rightarrow f(p)$, $f(q_n) \rightarrow f(q)$ и $f(p) \leq f(q)$. Следовательно, $p \in S_f$ и множество S_f замкнуто.

Рассмотрим теперь замкнутое множество S , пересекающее любую окружность C_r . Определим функцию $f(p)$ как расстояние от точки p до множества S . Тогда f — непрерывная функция, обращающаяся в нуль на S и положительная всюду вне этого множества. Поскольку множество S пересекает каждую окружность C_r , то минимум функции f на C_r равен 0 и достигается только в точках пересечения окружности C_r с множеством S . Следовательно, мы доказали, что $S_f = S$.

Замкнутое множество, пересекающее любую окружность C_r , можно получить, дополнив произвольное замкнутое множество лучом, исходящим из начала координат. Хотя такое множество может быть несвязным, оно обладает по крайней мере одной связной компонентой.

Вполне несвязное замкнутое множество S , пересекающее каждую окружность C_r , можно построить следующим образом. Пусть $\alpha: \vartheta \rightarrow r$ — непрерывное отображение канторова совершенного множества D , построенного на интервале $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, на замкнутый луч $0 \leq r \leq +\infty$, такое, что точка 2π , и только она, переходит в бесконечно удаленную точку ∞ . Плоское множество

$S = \{(r, \vartheta), r = \alpha(\vartheta), \vartheta \in D, \vartheta \neq 2\pi\}$, где (r, ϑ) полярные координаты, замкнуто, вполне несвязно и пересекает каждую окружность C_r .

274. Пусть n — заданное натуральное число; $1 \leq a_i \leq n$, $i = 1, 2, \dots, k$. Обозначим через $M(n; a_1, \dots, a_k)$ множество всех целых чисел m ($1 \leq m \leq n$), для которых по крайней мере при одном a_i либо $a_i | m$, либо $m | a_i$, а через $|M|$ — количество целых чисел, принадлежащих множеству M , и

$$\lambda(a) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r, \quad \text{если} \quad a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}.$$

Пусть при заданных k и n величины a_i , $i = 1, 2, \dots, k$, образуют систему чисел, для которых величина $M(n; a_1, \dots, a_k)$ максимальна, а (если таких систем несколько) величина $\lambda(a_1, \dots, a_k)$ минимальна. Докажем, что при этих условиях каждое a_i — простое число. Не ограничивая общности, предположим, что $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$.

1. Если $a_i = p^\alpha$, p — простое число, то $\alpha = 1$.

Действительно, если $\alpha > 1$, то выберем систему a'_j , задаваемую соотношениями $a'_i = p$, $a'_j = a_j$ при $j \neq i$. Ясно, что $M(n; a'_1, a'_2, \dots, a'_k) \supseteq M(n; a_1, a_2, \dots, a_k)$ и $\lambda(a'_1, a'_2, \dots, a'_k) < \lambda(a_1, a_2, \dots, a_k)$.

2. Если $a_i = p$, p — простое число, то $(a_j, p) = 1$ при $j \neq i$.

Предположим, что $a_j = p^\alpha a'_j$, $\alpha > 0$, $(a'_j, p) = 1$ при некотором $j \neq i$. По доказанному в пункте 1 $a'_j > 1$. Положим $a'_v = a_v$ при $v \neq j$. Тогда, как и в пункте 1, $M' = M(n; a'_1, a'_2, \dots, a'_k) \supseteq M(n; a_1, a_2, \dots, a_k) = M$. (1)

Действительно, элементами множества M , не принадлежащими множеству M' , могли бы быть лишь те, которые делятся на p . Но тогда они делятся на $a_i = a'_i$ и, следовательно, должны принадлежать множеству M' .

3. Пусть $a_i = p^\alpha d$, $(p, d) = 1$, $\alpha \geq 1$, $d > 1$. Тогда a_j не делится на d при $j \neq i$.

Действительно, предположим, что $d | a_j$ при $j \neq i$. Пусть $a'_i = p$, $a'_v = a_v$ при $v \neq i$. Тогда снова будет выполняться включение (1), поскольку из всех элементов

множества M множеству M' могут не принадлежать только делители числа d , которые являются делителями числа $a_j = a'_j$ и поэтому должны принадлежать множеству M' .

4. Предположим теперь, что числа $a_1, a_2, \dots, a_r$ составные, а $a_{r+1}, \dots, a_k$ — простые. В пункте 2 мы доказали, что $(a_\mu, a_\nu) = 1$ при $1 \leq \mu \leq r, r < \nu \leq k$. Пусть $q_1, q_2, \dots, q_k$ — различные простые числа, такие, что: а) q_1 — наименьший простой делитель чисел $a_1, a_2, \dots, a_r$; б) каждое число a_i делится по крайней мере на одно из чисел q_ν . Ясно, что такой набор простых чисел существует. Не ограничивая общности, предположим, что $a_\nu = q_\nu$ при $r < \nu \leq k$. Докажем, что

$$|M'| = |M(n; q_1, q_2, \dots, q_k)| \geq \geq |M(n; a_1, a_2, \dots, a_k)| = |M|. \quad (2)$$

Пусть $m_\nu \geq 1$ ($\nu = 1, 2, \dots, k$) — наибольший делитель числа a_ν , который взаимно прост с $q_1, q_2, \dots, q_k$. Например, $m_\nu = 1$ при $\nu > r$. Ясно, что элементы множества M , не принадлежащие множеству M' , должны быть делителями некоторых m_ν , и каждый делитель $d | m_\nu, d > 1$ обладает этим свойством. Остается лишь доказать, что число элементов множества M' , не принадлежащих множеству M , не меньше числа таких делителей.

Предположим сначала, что $d | m_\nu, 1 < d < m_\nu$. Пусть α — наибольшее из целых чисел, удовлетворяющих неравенству $A(d) = q_1^\alpha d \leq n$. Ясно, что $\alpha \geq 1$ и число $A(d)$ принадлежит множеству M' . С другой стороны, $A(d)$ не принадлежит множеству M , то есть не является делителем числа a_i и не делится на a_i ни при каком i . При $i = \nu$ это утверждение очевидно, при $i \neq \nu$ оно следует из пункта 3. Действительно, если $A(d)$ — делитель числа a_i ($i \leq r$), то $A(d) = a_i$, поскольку при любом простом делителе p числа a_i выполняется неравенство $p q_1^\alpha d > n$ и $a_i | A(d)$. Но если a_i — делитель числа $A(d)$, то a_i должно иметь вид $q_1^\beta d_1$, где d_1 — делитель числа d и, следовательно, делитель числа a_ν , что противоречит доказанному в пункте 3. Очевидно, что при $d_1 \neq d_2$ числа $A(d_1)$ и $A(d_2)$ не равны.

Предположим далее, что $d = m_\nu > 1$, то есть $\nu \leq r$. Пусть число таких d равно s . Итак, требуется найти s

различных чисел, не превышающих заданного натурального числа n , не совпадающих ни с одним из чисел $A(d)$ и принадлежащих множеству M' , но не принадлежащих множеству M . Пусть β_i ($i = 1, 2, \dots, r$) — наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $q_i^{\beta_i} \leq n$, а γ_i — наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $A_i = q_i^{\beta_i} q_1^{\gamma_i} \leq n$. Числа A_i , очевидно, принадлежат множеству M' , но отличны от чисел $A(d)$. Необходимо доказать, что по крайней мере s из чисел A_i не принадлежат множеству M . Но если A_i — делитель числа a_j , то в силу приведенного выше рассуждения число A_i должно совпадать с a_j и, следовательно, делиться на a_j . Может случиться, что A_i делится на a_j (или даже несколько a_j) с $m_j = 1$. Но два различных числа A_i не могут делиться на одно и то же число a_j , поскольку это означало бы, что a_j совпадает с некоторой степенью простого числа q_1 . Следовательно, чисел A_i , не принадлежащих множеству M , существует по крайней мере столько, сколько существует чисел a_v с $m_v > 1$, то есть s . Итак, числа $A(d)$ и A_i , взятые вместе, дают по крайней мере столько элементов множества M' , не принадлежащих множеству M , сколько существует чисел $d | m_v$, $d > 1$, что и требовалось доказать.

Но $\lambda(q_1, q_2, \dots, q_k) < \lambda(a_1, a_2, \dots, a_k)$, если $r > 0$. Следовательно, $r = 0$ и каждое из чисел a_i простое. Утверждение задачи можно считать доказанным, если заметить, что

$$|M(n; q_1, q_2, \dots, q_k)| \leq |M(n; 2, 3, \dots, p_k)|.$$

275. Из определения постоянной Эйлера C (III.12) следует, что

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{s=1}^{2^n} \frac{1}{s} - \ln 2^n \right).$$

Выражение, стоящее в скобках, можно преобразовать к виду

$$A = \sum_{s=1}^{2^n} \frac{1}{s} - \ln 2 - \ln 2^{n-1} = \sum_{j=1}^{2^n} \frac{1}{j} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s} - \ln 2^{n-1}.$$

Замечая, что при сложении членов конечной суммы и бесконечного ряда члены с нечетными s взаимно уничтожаются, а при четных s соответствующий член ряда удваивается, получаем

$$A = \sum_{s=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{s} - \ln 2^{n-1} + \sum_{s=2^{n-1}+1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s}.$$

Проделав аналогичную операцию над двумя членами нового выражения, преобразуем его к виду

$$A = \sum_{s=1}^{2^{n-2}} \frac{1}{s} - \ln 2^{n-2} + \sum_{s=2^{n-2}+1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s} + \sum_{s=2^{n-1}+1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s}.$$

Продолжая этот процесс до полного «исчерпания» логарифмического члена, представим A в виде суммы рядов. Сложив члены этих рядов, имеющие общий знаменатель, получим следующее выражение:

$$A = 1 + \sum_{r=1}^{n-1} \left(r \sum_{s=2^{r-1}+1}^{2^r} \frac{(-1)^s}{s} \right) + n \sum_{s=2^{n-1}+1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s}.$$

Заметим, что при $n \rightarrow \infty$ член $n \sum_{s=2^{n-1}+1}^{\infty} (-1)^s/s \rightarrow 0$, поскольку остаток ряда «лейбницевского типа» не больше первого из его членов. Следовательно,

$$C = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s} \left\{ \frac{\ln s}{\ln 2} \right\},$$

где $\{x\}$ означает наибольшее из целых чисел, которые меньше числа x . Записав единицу в виде суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$ и сложив члены этой прогрессии и члены ряда $\sum_{s=1}^{\infty} ((-1)^s/s) \{\ln s / \ln 2\}$, имеющие одинаковые знаменатели, получим то выражение для постоянной Эйлера, которое требовалось доказать.

276. Пусть μ, ν, ρ, k, m — положительные целые числа, S — заданное множество положительных целых чи-

сел и a — элементы множества S . Обозначим через S^* множество всех чисел вида $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}$, где $\alpha_i \geq 0$. Тогда $1 \in S^*$ и A, B, C, D, E, F — элементы множества S^* . Предположим, что множество S обладает делительным свойством. Докажем, что множество S^* также обладает делительным свойством.

Начнем с доказательства следующей леммы.

Лемма. Если $a_v \in S$ при всех v , то существует подпоследовательность индексов v_p , такая, что $v_1 < v_2 < \dots$ и a_{v_1} делит a_{v_2} , a_{v_2} делит a_{v_3} и так далее.

Доказательство. Пусть M — множество всех индексов μ , таких, что если $\mu < v$, то $a_\mu > a_v$. Множество M конечно, поскольку в противном случае мы могли бы выбрать подпоследовательность $\mu_p \in M$, такую, что $\mu_1 < \mu_2 < \dots$. Тогда соответствующая бесконечная подпоследовательность элементов множества S была бы убывающей $a_{\mu_1} > a_{\mu_2} > \dots$, что невозможно. Для индекса μ_1 , большего максимального из индексов, принадлежащих множеству M , существует индекс $\mu_2 > \mu_1$, такой, что $a_{\mu_1} \leq a_{\mu_2}$. Продолжая этот процесс, получим конечный набор M_1 элементов множества M , такой, что $\mu_1 < \mu_2 \dots$ и $a_{\mu_1} \leq a_{\mu_2} \leq \dots$. Пусть M_2 — множество всех $\mu \in M_1$, таких, что a_μ не является делителем ни для одного a_v при $\mu < v$, $v \in M_1$. Тогда множество M_2 конечно, поскольку в противном случае мы могли бы найти различные $\mu, v \in M_2$, такие, что $a_\mu | a_v$ (напомним, что множество S обладает делительным свойством!). По определению множества M_2 это означало бы, что $v < \mu$. В свою очередь неравенство $v < \mu$ по определению множества M_1 означало бы, что $a_v \leq a_\mu$, откуда $a_v = a_\mu$, $a_v | a_\mu$. Но это противоречит тому, что $v \in M_2$. Следовательно, можно выбрать индекс $v_1 \in M_1$ так, чтобы число v_1 было больше любого элемента множества M_2 . Тогда существует $v_2 \in M_1$, $v_2 > v_1$, такой, что $a_{v_1} | a_{v_2}$. Продолжая этот процесс, находим элементы $v_2, v_3, \dots$ множества M_1 , такие, что $v_1 < v_2 < \dots$ и $a_{v_1} | a_{v_2}$, $a_{v_2} | a_{v_3}$. Тем самым лемма доказана.

Обратимся теперь к доказательству утверждения задачи. Пусть $A_v \in S^*$ при всех v . Требуется найти различные индексы μ, v , такие, что $A_v | A_\mu$.

Определим по индукции числа n_k, B_k, C_k , следующим образом:

а. Положим $n_0 = 1$, $B_0 = 1$, $C_0 = 1$. Заметим, что m_p , D_p , E_p можно выбрать так, чтобы $n_0 < m_1 < m_2 < \dots$,

$$A_{m_p} = D_p E_p, \quad B_0 | D_1 | D_2 | D_3 \dots$$

($a|b|c \dots$ означает, что a — делитель числа b , b — делитель c и, вообще, каждое предыдущее число — делитель последующего). Для этого достаточно взять

$$m_p = p + 1, \quad D_p = 1, \quad E_p = A_{p+1}.$$

б. Предположим, что при некотором k мы уже нашли числа n_{k-1} , B_{k-1} , C_{k-1} , позволяющие выбрать m'_p , D'_p , E'_p так, чтобы $n_{k-1} < m'_1 < m'_2 < \dots$, $A'_{m'_p} = D'_p E'_p$, $B_{k-1} | D'_1 | D'_2 \dots$. Выберем m'_p , D'_p , E'_p так, чтобы число E'_1 имело наименьшее из допустимых значений, и положим $n_k = m'_1$, $B_k = D'_1$, $C_k = E'_1$.

Итак, числа n_k , B_k , C_k определены теперь при всех k и удовлетворяют следующим условиям:

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots, \quad A_{n_p} = B_p C_p, \quad B_1 | B_2 | \dots$$

Кроме того, при любом k число C_k обладает следующим свойством минимальности: если $n_{k-1} < m''_1 < m''_2 < \dots$, $A''_{m''_p} = D''_p E''_p$ и $B_{k-1} | D''_1 | D''_2 \dots$, то $C_k \leq E''_1$.

в. Рассмотрим отдельно два случая.

Случай 1. Предположим, что существует такое значение k , при котором $C_k = 1$. Тогда $A_{n_k} = B_k | B_{k+1} | A_{n_{k+1}}$, и доказываемое утверждение выполняется при $\mu = n_k$, $\nu = n_{k+1}$.

Случай 2. Предположим, что $C_k > 1$ при любом k . Тогда существуют числа a_h , F_h , такие, что $C_h = a_h F_h$, а по лемме существует набор индексов $\nu_1 < \nu_2 < \dots$, при котором $a_{\nu_1} | a_{\nu_2} | \dots$. Следовательно,

$$A_{n_{\nu_p}} = B_{\nu_p} C_{\nu_p} = (B_{\nu_p} a_{\nu_p}) F_{\nu_p}, \quad n_{\nu_1-1} < n_{\nu_1} < n_{\nu_2} < \dots,$$

$$B_{\nu_1-1} | B_{\nu_1} a_{\nu_1} | B_{\nu_2} a_{\nu_2} | \dots, \quad F_{\nu_1} = C_{\nu_1} / a_{\nu_1} < C_{\nu_1},$$

что противоречит свойству минимальности числа C_{ν_1} .

Итак, утверждение задачи доказано.

277. Минимальное число самолетов, необходимое для того, чтобы обеспечить кругосветный полет одного самолета, не превышает 77.

Кругосветный полет будет возможен, если мы сумеем составить расписание полетов так, чтобы самолет, летящий вокруг земного шара, пролетев $\frac{2}{5}$ всего пути, оказался вновь полностью заправленным, а к исходу $\frac{3}{5}$ пути был встречен самолетом, летящим в противоположном направлении и несущим достаточный запас горючего. Разделим $\frac{2}{5}$ окружности земного шара на 12 равных участков. (Длина каждого участка составляет $\frac{1}{30}$ длины земной окружности. Полной заправки самолета хватает, чтобы пролететь шесть участков.) Приводимое ниже расписание полетов показывает, каким образом обеспечивается кругосветный полет одного самолета.

С базы одновременно взлетают 32 самолета. В конце первого участка 25 самолетов заправляются в воздухе до полной емкости топливных баков, а 7 — возвращается на базу. В конце второго участка 5 самолетов заправляют остальные 20 самолетов до полной емкости и поворачивают назад, но в то же время с базы стартуют 9 новых самолетов. Назовем порцией количество топлива, необходимое одному самолету для того, чтобы пролететь один участок. В приводимом ниже расписании полетов индексы у числа самолетов, возвращающихся на базу, показывают, сколько порций топлива останется в сумме в их баках к концу участка, а отрицательные индексы у числа самолетов, продолжающих полет, — сколько порций топлива в сумме будет недоставать в их баках до полной емкости в начале участка.

После того как первые самолеты пролетят шесть участков, с базы необходимо выслать самолеты навстречу самолету, совершающему кругосветный полет. Расписание встречных полетов мы получим, прочитав расписание полетов в обратном порядке и обратив стрелки. Таким образом, четвертым рейсом 13 самолетов вылетят с базы в ту же сторону, куда улетел самолет, совершающий кругосветное путешествие, а 18 — отправятся в обратную сторону. Разумеется, индексы у цифр в расписании встречных полетов будут другими, но легко проверить (хотя это и не очевидно с первого взгляда), что это расписание также корректно. Число самолетов,

[illegible]

находящихся в воздухе, на различных этапах обеспечения кругосветного полета подсчитывается без труда. Нетрудно убедиться в том, что в любой момент времени в воздухе должно находиться не более 77 самолетов. Это число достигается в восьмом рейсе, когда с базы стартует 15 самолетов в одну сторону и 10 — в другую. Повидимому, минимальное число самолетов, необходимых

для обеспечения кругосветного полета, меньше 77, поскольку приводимое ниже расписание полетов составлено при некоторых упрощениях: считается, что самолеты изменяют направление полета и заправляются, только пролетев целое число участков, и все самолеты, находящиеся в любой момент в воздухе на каком-либо участке, летят в одном направлении (указанном стрелкой). Расстояния (в «участках») отложены по горизонтали, время — по вертикали.

278. Пусть (x_k, p_k) и (x_k, q_k) , где $p_k < q_k$, — концы отрезка S_k . Условимся интерпретировать коэффициенты a_i многочлена

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

как координаты точки A в $(n+1)$ -мерном евклидовом пространстве. Тогда множество точек A , для которых выполняются неравенства

$$p_k \leq f(x_k) \leq q_k, \quad (1)$$

выпукло. Действительно, если $a''_i = (1 - \lambda) a_i + \lambda a'_i$, где $0 \leq \lambda \leq 1$, и координаты точек A и A' удовлетворяют неравенствам (1), то координаты точки A'' также удовлетворяют этим неравенствам, что и требовалось доказать.

Утверждение задачи представляет собой частный случай теоремы Хелли, которая формулируется так: любое число выпуклых множеств в $(n+1)$ -мерном евклидовом пространстве имеет общую точку в том и только в том случае, если любые $(n+2)$ из них имеют общую точку.

279. Докажем сначала, что существует бесконечная подпоследовательность $a_{i_1} < a_{i_2} < \dots$, ни один из членов которой не делит другой. Пусть верхняя плотность последовательности $\{a_i\}$ равна α и a_{i_1} — наименьший из членов последовательности, удовлетворяющих неравенству $a > 4\alpha$, a_{i_2} — наименьший из членов последовательности, удовлетворяющих неравенству $a > 2a_{i_1}$ и не кратных a_{i_1} , a_{i_3} — наименьший из членов последовательности, удовлетворяющих неравенству $a > 2a_{i_2}$ и не кратных a_{i_1}, a_{i_2} и так далее. Предположим, что построение подпоследо-

вательности a_{i_s} обрывается на k -м шаге. Тогда всякий член последовательности $\{a_i\}$ с достаточно большим номером кратен одному из чисел $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$. По построению $a_{i_j} > 2^{j-1} \cdot 4/\alpha$. Следовательно, плотность множества целых чисел, кратных одному из чисел $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$, не больше чем

$$\frac{1}{a_{i_1}} + \frac{1}{a_{i_2}} + \dots + \frac{1}{a_{i_k}} < \frac{\alpha}{4} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-1}} = \frac{\alpha}{2}.$$

Это означает, что верхняя плотность последовательности $\{a_i\}$ меньше $\alpha/2$. Полученное противоречие доказывает существование бесконечной подпоследовательности $a_{i_1} < a_{i_2} < \dots$, ни один член которой не делит другой член.

Чтобы доказать более сильный результат, обозначим через d_x плотность целых чисел, имеющих делитель, который заключен между x и $2x$. Как показал П. Эрдёш¹, $\lim_{x \rightarrow \infty} d_x = 0$. Определим теперь последовательность целых чисел $n_1 < n_2 < \dots$ так, чтобы выполнялись два условия:

$$1) \ d_{n_r} < \frac{\alpha}{10^r};$$

2) число элементов последовательности $\{a_i\}$ в интервале $(n_r, 2n_r)$ должно быть больше $\frac{1}{2} \alpha n_r$.

(Второму условию можно удовлетворить, поскольку верхняя плотность последовательности $\{a_i\}$ равна α .)

Подпоследовательность последовательности $\{a_i\}$ зададим следующим образом. Рассмотрим те элементы последовательности $\{a_i\}$ из интервала $(n_r, 2n_r)$, которые не кратны ни одному элементу последовательности из интервала $(n_j, 2n_j)$, где $j = 1, 2, \dots, r-1$, мы получим подпоследовательность $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots$. Ни один элемент этой подпоследовательности, очевидно, не делит другой элемент той же подпоследовательности. Кроме того, число

¹ P. Erdős, Note on sequences of integers no one of which divides the other, Journal of London Mathematical Society, 1935.—Прим. перев.

элементов подпоследовательности $\{a_{i_k}\}$, принадлежащих интервалу $(n_r, 2n_r)$, не меньше

$$\frac{a}{2} n_r - \sum \frac{a n_r}{10^j} > \frac{a}{4} n_r.$$

(Число элементов подпоследовательности $\{a_{i_k}\}$, принадлежащих интервалу $(n_r, 2n_r)$, не меньше числа элементов последовательности $\{a_i\}$, содержащихся в том же интервале, минус число целых чисел в интервале $(n_r, 2n_r)$, имеющих делитель из интервала $(n_j, 2n_j)$ при $j = 1, 2, \dots, r-1$.) Следовательно, верхняя плотность последовательности $\{a_{i_k}\}$ больше нуля и $\sum 1/a_{i_k} = +\infty$.

Нетрудно видеть, что полученные оценки неулучшаемы. Иначе говоря, если $f(x)$ сколь угодно медленно стремится к бесконечности, то существует последовательность $a_1 < a_2 < \dots$, такая, что при всех x число членов последовательности $\{a_i\}$, удовлетворяющих неравенству $a_i \leq x$, превосходит $x/f(x)$, но не существует бесконечной подпоследовательности $a_{i_1} < a_{i_2} < \dots$, ни один член которой не делил бы другой член той же подпоследовательности.

280. При $a_1 = 1$ задача тривиальна. Пусть $a_1 \geq 2$ и b_m — число элементов конечного набора $a_1, a_2, \dots, a_k$, удовлетворяющих неравенствам

$$\frac{n}{m} < a_i \leq \frac{n}{m-1}. \quad (1)$$

Каждый из этих b_m элементов a_i имеет $(m-1)$ кратных среди n первых натуральных чисел, причем никакие два из этих элементов не имеют общего кратного среди n первых натуральных чисел. Таким образом,

$$b_2 + 2b_3 + 3b_4 + \dots + nb_{n+1} = n - r_1, \quad r_1 \geq 0. \quad (2)$$

Для любого конечного набора $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ мы можем, не ограничивая общности, выбрать n равным a_k . Тогда, как следует из неравенств (1),

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \frac{1}{a_i} &< \frac{1}{n} + (b_2-1) \frac{2}{n} + b_3 \frac{3}{n} + b_4 \frac{4}{n} + \dots + b_{n+1} \frac{n+1}{n} = \\ &= \frac{1}{n} (-1 + 2b_2 + 3b_3 + 4b_4 + \dots + (n+1)b_{n+1}). \end{aligned}$$

Подставляя значение b_2 из соотношения (2), получаем

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{a_i} < 2 - \frac{1}{n} - \frac{2r_1}{n} - \frac{1}{n} (b_3 + 2b_4 + 3b_5 + \dots + (n-1)b_{n+1}), \quad (3)$$

что и доказывает неравенство

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{a_i} < 2.$$

Чтобы улучшить эту оценку, рассмотрим целые числа $1, 2, \dots, [n/2]$. Каждое из $b_3 + b_4$ чисел a_i имеет среди этих целых чисел по одному кратному, каждое из $b_5 + b_6$ чисел a_i — по два кратных и так далее. Следовательно,

$$b_3 + b_4 + 2b_5 + 2b_6 + 3b_7 + 3b_8 + \dots = \left[\frac{n}{2} \right] - r_2, \quad r_2 \geq 0. \quad (4)$$

Кроме того, если $p > [n/2]$ не делится ни на одно из чисел a_i , то число p можно включить в набор a_i , поскольку любое кратное числа p , отличное от самого p , больше n . (Такое расширение набора a_i лишь увеличивает сумму обратных величин $\sum 1/a_i$.) Но $(r_1 - r_2)$ — количество элементов в множестве целых чисел, удовлетворяющих неравенствам $[n/2] < k < n$ и не кратных числам a_i . Пополнив набор всеми такими числами, мы получим $r_1 - r_2 = 0$. Подставляя в неравенство (3) вместо b_3 его значение, определяемое из соотношения (4), и используя равенство $r_1 - r_2 = 0$, преобразуем неравенство (3) к виду

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{a_i} < 2 - \frac{1}{n} - \frac{r_1}{n} - \frac{1}{n} \left[\frac{n}{2} \right] - \frac{1}{n} (b_4 + b_5 + 2b_6 + 2b_7 + 3b_8 + \dots) < 1 \frac{1}{2}. \quad (5)$$

Рассмотрим теперь целые числа $1, 2, \dots, [n/3]$. Каждое из $b_4 + b_5 + b_6$ чисел a_i имеют среди этих целых чи-

сел по одному кратному, каждое из $b_7 + b_8 + b_9$ чисел a_i — по два кратных и так далее. Таким образом,

$$b_4 + b_5 + b_6 + 2b_7 + 2b_8 + 2b_9 + 3b_{10} + 3b_{11} + \dots \\ \dots = [n/3] - r_3, \quad r_3 \geq 0. \quad (6)$$

Подставляя соотношение (6) в неравенство (5), получаем

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{a_i} < 2 - \frac{1}{n} - \frac{r_1}{n} - \frac{1}{n} \left[\frac{n}{2} \right] - \frac{1}{n} \left[\frac{n}{3} \right] + \\ + \frac{r_3}{n} - \frac{1}{n} (b_6 + b_8 + b_9 + b_{10} + b_{11} + 2b_{12} + \dots),$$

где все b_i , стоящие в круглых скобках, положительны. Поскольку

$$\frac{1}{n} \left[\frac{n}{2} \right] \geq \frac{1}{n} \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right), \quad \frac{1}{n} \left[\frac{n}{3} \right] \geq \frac{1}{n} \left(\frac{n}{3} - \frac{2}{3} \right),$$

то предыдущее неравенство можно преобразовать к виду

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{a_i} < 2 - \frac{1}{n} - \frac{r_1}{n} + \frac{r_3}{n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{2}{3n}.$$

Поскольку r_1 — количество элементов в множестве целых чисел, не превышающих n и не кратных числам a_i , а r_3 — количество элементов в множестве целых чисел, не превышающих $[n/3]$ и также не кратных a_i , то $r_1 \geq r_3$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{a_i} < \frac{7}{6} + \frac{1}{6n}.$$

В частности,

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{a_i} < \frac{6}{5}$$

(при $n \geq 5$ это неравенство следует из предыдущего, а при $n = 4$ проверяется непосредственно).

281. Пусть S и s — концентрические сферы радиусами R и r ($R > r$) с центром в точке O . Для того чтобы сферу s можно было вписать в тетраэдр, а сферу S

описать вокруг него же, радиусы должны удовлетворять единственному условию — неравенству

$$R \geq 3r. \quad (1)$$

Доказательство этого утверждения основано на известной теореме, согласно которой если совпадают любые два из трех центров тетраэдра — центр описанной сферы, центр вписанной сферы и центр тяжести, — то третий центр также совпадает с ними, а все четыре грани тетраэдра конгруэнтны*.

Пусть $ABCD$ — тетраэдр, вписанный в сферу S и описанный вокруг сферы s . Тогда описанная окружность C_1 грани ABC совпадает с пересечением сферы S с плоскостью M , касательной к сфере s . Центр O_1 окружности C_1 находится в точке касания плоскости M и сферы s , а ее радиус определяется выражением

$$R_1 = \sqrt{R^2 - r^2}. \quad (2)$$

Поскольку точка O — центр тяжести тетраэдра $ABCD$, то прямая DO пересекает грань ABC в центре тяжести G этой грани, и

$$DO = 3 \cdot OG. \quad (3)$$

Пусть плоскость N , проходящая через вершину D параллельно плоскости M , пересекает сферу S по окружности C_2 . Центр O_2 окружности C_2 лежит на одной прямой с точками O и O_1 , и, как следует из соотношения (3), $OO_2 = 3 \cdot O_1O = 3r$. Поскольку OO_2D — прямоугольный треугольник, то радиус $O_2D = R_2$ окружности C_2 удовлетворяет соотношению

$$R_2 = \sqrt{R^2 - (3r)^2}. \quad (4)$$

Из подобия треугольников OO_1G и OO_2D получаем

$$O_1G = \frac{R_2}{3}. \quad (5)$$

Выведенные соотношения позволяют без труда построить тетраэдр, вписанный в сферу S и описанный вокруг сферы s , имеющие общий центр O и радиусы R и r , которые удовлетворяют условию (1).

Примем за вершину C тетраэдра произвольную точку окружности C_1 радиуса $R_1 = \sqrt{R^2 - r^2}$ и найдем такую

точку G , для которой выполняется соотношение (5). Это всегда можно сделать, поскольку выполнено условие (1). Продолжим отрезок CG на половину его длины до точки K . Поскольку

$$CK = \frac{3}{2} CG < \frac{3}{2} (CO_1 + O_1G) = \\ = \frac{3}{2} \left(R_1 + \frac{1}{3} \sqrt{R^2 - (3r)^2} \right) < 2R_1,$$

точка K всегда попадает внутрь окружности C_1 . Через точку K проведем хорду AB , перпендикулярную отрезку O_1K . Наконец, вершину D построим как пересечение прямой GO со сферой S .

Тетраэдр $ABCD$ искомый. По построению он вписан в сферу S , а так как

$$GO = \sqrt{OO_1^2 + GO_1^2} = \sqrt{r^2 + \frac{1}{3^2} [R^2 - (3r)^2]} = \frac{R}{3} = \frac{1}{3} OD,$$

центр O этой сферы совпадает с центром тяжести тетраэдра. Следовательно, O — центр вписанной сферы, и это есть сфера s .

Таким образом, если условие (1) выполнено, то вообще говоря, существует бесконечно много неконгруэнтных тетраэдров, вписанных в сферу S и описанных вокруг сферы s .

282. При $a = 0$, $h \neq 0$ условие задачи принимает следующий вид:

$$h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 2\vartheta h \sin\left(\frac{1}{\vartheta h}\right) - \cos\left(\frac{1}{\vartheta h}\right) = \frac{2}{\lambda} \sin \lambda - \cos \lambda. \quad (1)$$

Поскольку при $h \rightarrow 0$ каждая из функций $h \sin(1/h)$ и $2\vartheta h \sin(1/\vartheta h)$ стремится к нулю, то $\cos(1/\vartheta h) = \cos \lambda$ также стремится к нулю (при $h \rightarrow 0$). Следовательно, при любом $\delta > 0$ существует число $H(\delta) > 0$, такое, что из неравенства $|h| < H$ следует $|\cos \lambda| < \delta$, а при любом $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что из неравенства $|\cos \lambda| < \delta$ следует неравенство $|\lambda - (n + 1/2)\pi| < \varepsilon$ при некотором целом n . Таким образом, если $|h| < H[\delta(\varepsilon)]$, то

$$\left| \lambda - \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \right| < \varepsilon, \quad (2)$$

где n — некоторое целое число. Используя теорему о неявной функции, легко находим, что при достаточно малых h уравнение (1) имеет решение λ в каждом интервале (2) при $n \geq N$. Следуя условиям задачи, выберем из них наименьшее — обозначим его через $\lambda(h)$, — согласующееся с неравенством $\lambda(h) = 1/\theta h > 1/h$. Поскольку $\lambda(h) \rightarrow \infty$ при $h \rightarrow 0$, соответствующее $n \rightarrow \infty$.

283. Рассмотрим более общую последовательность

$$f_n(x) = \sin q^n \pi x,$$

где q — любое нечетное число, отличное от 1. Углы, конгруэнтные по $\text{mod } 2\pi$, условимся считать эквивалентными.

а. Если последовательность $f_n(x)$ сходится, то последовательность углов $s_n = q^n \pi x$ либо имеет единственный (по $\text{mod } 2\pi$) предел t , либо распадается на две подпоследовательности, сходящиеся к углам t и $\pi - t \not\equiv t \pmod{2\pi}$. В первом случае t удовлетворяет соотношению $qt \equiv t \pmod{2\pi}$, откуда $t = 2m\pi/(q-1)$, где m — любое целое число. Во втором случае подпоследовательность s_{2n-1} сходится к предельному углу t , а подпоследовательность s_{2n} — к предельному углу $\pi - t$. (В противном случае можно было бы выбрать подпоследовательность троек

$$s_{n_k}, \quad s_{n_k+1} \rightarrow t, \quad s_{n_k+2} \rightarrow \pi - t, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и предельный угол t удовлетворял бы соотношениям $t \equiv qt \equiv q^2 t \equiv \pi - t$ вопреки тому, что $t \not\equiv \pi - t$.) Таким образом, $qt + t \equiv \pi \pmod{2\pi}$ и $t = (2m+1)\pi/(q+1)$. Каждая из двух подпоследовательностей s_{2n-1} и s_{2n} стремится к единственному пределу $T (= t$ или $\pi - t)$, удовлетворяющему соотношению $q^2 T \equiv T \pmod{2\pi}$.

б. Если последовательность $f_n(x)$ сходится, то $s_N \equiv t \pmod{2\pi}$ при некотором N и, следовательно, при $n \geq N$

$$s_n \equiv t \quad \text{или} \quad s_n \equiv \pi - t.$$

В противном случае соотношение

$$s_{n+2} - t \equiv q^2 (s_n - t), \quad q^2 > t,$$

легко привело бы нас к противоречию.

Итак, резюмируя сказанное в пунктах «а» и «б», мы заключаем, что если последовательность $f_n(x)$ сходится, то

$$\text{либо } x = \frac{2m}{q^N(q-1)}, \text{ либо } x = \frac{2m+1}{q^N(q+1)},$$

где m и N — любые целые числа, и пределы равны соответственно

$$\sin \frac{2m\pi}{q-1}, \quad \sin \frac{(2m+1)\pi}{q+1}.$$

Наоборот, если x принимает любое из указанных значений, то последовательность $f_n(x)$ сходится к соответствующему пределу.

284. Поскольку

$$[2y] = [y] + \left[y + \frac{1}{2}\right],$$

то

$$((2y)) = ((y)) + \left(\left(y + \frac{1}{2}\right)\right).$$

Полагая $y = 2^n x$, получаем

$$\left(\left(2^n x + \frac{1}{2}\right)\right) = ((2^{n+1}x)) - ((2^n x)).$$

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^m \left(\left(2^n x + \frac{1}{2}\right)\right) = ((2^{m+1}x)) - ((2x)),$$

а поскольку $|((y))| \leq 1/2$, то рассматриваемые суммы равномерно ограничены сверху единицей.

285. Введем в пространстве прямоугольную систему координат. Пусть центр сферы радиусом a совпадает с началом координат, а пробная частица, испытывающая притяжение со стороны сферы, находится в точке $(0, 0, z)$, где $z > a \geq 0$. В этих обозначениях задача сводится к тому, чтобы найти непрерывную функцию $f(r)$ (r — расстояние от начала координат), для которой выполняется соотношение

$$a^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{a \cos \vartheta - z}{r} f(r) \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta = -4\pi a^2 f(z), \quad (1)$$

где $r^2 = a^2 + z^2 - 2az \cos \vartheta$. Соотношение (1), как нетрудно видеть, эквивалентно условию

$$I = \int_{z-a}^{z+a} (a^2 - z^2 - r^2) f(r) dr = -4az^2 f(z).$$

Вычисляя частные производные от I по a и z , получаем

$$\frac{\partial I}{\partial a} = f(z+a)(-2az - 2z^2) + f(z-a)(2az - 2z^2) + 2a \int_{z-a}^{z+a} f(r) dr = -4z^2 f(z), \quad (2)$$

$$\frac{\partial I}{\partial z} = f(z+a)(-2az - 2z^2) - f(z-a)(2az - 2z^2) - 2z \int_{z-a}^{z+a} f(r) dr = -8az f(z) - 4az^2 f'(z). \quad (3)$$

Таким образом, $f'(z)$ и (как показывают аналогичные выкладки) $f''(z)$ существуют и непрерывны. Исключая интеграл из соотношений (2) и (3), находим

$$2a'zf'(z) = f(z+a)(a+z)^2 + f(z-a)(z-a)^2 - f(z)(4a^2 + 2z^2). \quad (4)$$

Разделив (4) на a^2 и устремив a к нулю, приходим к дифференциальному уравнению для функции $f(z)$:

$$2zf'(z) = (z^2 f(z))'' - 4f(z)$$

или

$$z^2 f''(z) + 2zf'(z) - 2f(z) = 0.$$

Общее решение этого уравнения $f(z) = Az + Bz^{-2}$ удовлетворяет условию (1).

Таким образом, свойством ньютоновского закона притяжения обладает закон притяжения

$$f(r) = Ar + Br^{-2}.$$

286. Производя повторно интегрирование по частям, получаем

$$\int_0^x e^{-t} f_1(t) dt = e^{-x} [f_2(x) + \dots + f_n(x)] + \int_0^x e^{-t} f_n(t) dt. \quad (1)$$

Функция $f_2(t)$ непрерывна и, следовательно, ограничена на интервале $0 \leq t \leq M$. Если $|f_2(t)| \leq K$, то, как нетрудно доказать методом математической индукции,

$$|f_n(t)| \leq K \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}.$$

Следовательно, интеграл в правой части соотношения (1) стремится к нулю, и

$$\varphi(x) = f_1(x) + e^x \int_0^x e^{-t} f_1(t) dt.$$

К этому же результату можно прийти, заметив, что разность $\varphi(x) - f_1(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$u' = f_1(x) + u.$$

Обоснование этого подхода также не представляет трудности.

287. Пусть a_t — n -значное двоичное число, последняя цифра которого стоит на t -м месте в конечной последовательности из $2^n + n - 1$ нулей и единиц, построение которой описано в условии задачи, и $a_t^- = a_t - 1$. Если число a_t нечетно, то, как следует из рецепта построения последовательности, число a_t^- встречается в ней раньше, чем a_t .

Пусть a_i — первое из чисел, встречающихся в наборе дважды, то есть

$$a_i = a_j, \quad i < j.$$

Поскольку a_i нечетно (a_j не может быть четным по правилам построения последовательности), то существует номер k , при котором

$$a_k = a_i^-, \quad k < i,$$

если только a_i не является первым n -значным отрезком последовательности (в противном случае $a_i = a_n = 2^n - 1$). Таким образом, числа a_k , a_i , a_j отличаются лишь последней цифрой. Но тогда числа a_{k-1} , a_{i-1} , a_{j-1} имеют $n - 1$ одинаковых последних цифр, и два из них вопреки предположению совпадают.

Итак, $a_n = a_j = 2^n - 1$ — первое число, которое встречается дважды в выписанном наборе нулей и единиц; оно состоит из n единиц, откуда

$$a_{j-t} \equiv 1 \pmod{2}, \quad 0 \leq t < n.$$

Поскольку число a_{j-1} нечетно, то a_{j-1}^- встречается в последовательности раньше. Иначе говоря, числу a_{j-1} соответствуют два числа, предшествующие в последовательности числу a_j и начинающиеся с нуля, после которого идут $n-2$ единицы, а именно $a_{j-1} = 2^{n-1} - 1$ и $a_l = a_{j-1}^- = 2^{n-1} - 2$. Числа a_{j-2} и a_{l-1} , имеющие одинаковые $n-1$ последние цифры, обязаны отличаться первой цифрой в соответствии с выбором a_j . Поскольку оба эти числа нечетны (имеют одинаковые последние цифры и a_{j-2} — нечетное число), то числу a_{j-2} соответствуют 2^2 различных чисел: a_{j-2} , a_{l-1} , a_{j-2}^- , a_{l-1}^- , предшествующих в последовательности числу a_j и имеющих равную нулю вторую цифру, после которой идут $n-3$ единицы. Два из этих чисел равны $2^{n-2} - 1$ и $2^{n-2} - 2$.

Объединяя эти числа в пары, имеющие $n-1$ одинаковых первых цифр, и повторяя те же рассуждения, заключаем, что числу a_{j-k} ($k = 3, 4, \dots, n-1$) соответствуют 2^k различных чисел, предшествующих в последовательности числу a_j и имеющих равную нулю k -ю цифру, после которой идут $n-k-1$ единиц. Два из этих чисел равны $2^{n-k} - 1$ и $2^{n-k} - 2$.

Итак, перед числом a_j в последовательности нулей и единиц содержится $2 + 4 + \dots + 2^k + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 2$ чисел. Поскольку этими числами исчерпываются все числа, в которых нуль встречается на любом месте, кроме последнего, то два оставшихся числа из 2^n двоичных n -значных чисел имеют вид $2^n - 1$ и $2^n - 2$, то есть совпадают с a_n и a_{n+1} . Таким образом, в построенной последовательности нулей и единиц все 2^n чисел встречаются до того, как повторится первое число a_n , и если оборвать последовательность на числе a_{j-1} , то каждое из 2^n чисел будет входить в нее ровно один раз.

288. Если $(n, m) = 1$, то $\sigma_r(nm) = \sigma_r(n)\sigma_r(m)$, поэтому соотношение, приведенное в условии задачи, достаточно доказать для случая, когда n и m являются

степенями одного и того же простого числа p . Пусть $n = p^a$, $m = p^b$, $0 < a \leq b$. Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_r(p^a) \sigma_r(p^b) &= (1 + p^r + \dots + p^{ar})(1 + p^r + \dots + p^{br}) = \\ &= 1 + 2p^r + 3p^{2r} + \dots + (a+1)p^{ar} + (a+1)p^{(a+1)r} + \dots \\ &\quad \dots + (a+1)p^{br} + ap^{(b+1)r} + \dots \\ &\quad \dots + 3p^{(a+b-2)r} + 2p^{(a+b-1)r} + p^{(a+b)r}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \sum_{d \mid (p^a, p^b)} d^r \sigma_r\left(\frac{p^a p^b}{d^2}\right) &= \sum_{\lambda=0}^a p^{\lambda r} \sigma_r(p^{a+b-2\lambda}) = \\ &= \sum_{\lambda=0}^a p^{\lambda r} (1 + p^r + \dots + p^{(a+b-2\lambda)r}). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что оба выражения совпадают, откуда и следует соотношение, которое требовалось доказать.

289. Слияние компонент лемнискаты $|f(z)| = \text{const}$ происходит в том случае, если $f'(\xi) = 0$. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ — корни этого уравнения. Требуется доказать, что $\min |f(\xi_i)| \leq 1$. Но

$$\begin{aligned} \min |f(\xi_i)|^{n-1} &\leq |f(\xi_1)| \cdot |f(\xi_2)| \dots |f(\xi_{n-1})| = \\ &= \left| \prod_{l=1}^{n-1} \prod_{i=1}^n (\xi_l - z_i) \right| = n^{-n} |f'(z_1)| |f'(z_2)| \dots |f'(z_n)| = \\ &= n^{-n} \left| \prod_{i \neq k} (z_i - z_k) \right|. \end{aligned}$$

Как показал И. Шур¹, максимум этого произведения достигается при $f(z) = z^n - 1$, при этом

$$|f'(z_1)| = \dots = |f'(z_n)| = n.$$

Следовательно, $\min |f(\xi_i)| \leq 1$, что и требовалось доказать*.

290. Докажем следующее более общее утверждение: если N чисел a_m удовлетворяют N уравнениям

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N \frac{a_m}{A_m + B_n} &= \frac{-a_{N+1}}{A_{N+1} + B_n}, \\ (n &= 1, 2, \dots, N), \quad A_m + B_n \neq 0, \end{aligned}$$

¹ I. Schur, Mathematische Zeitschrift, 1918, S. 385. — Прим. перев.

$$\sum_{m=1}^N \frac{a_m}{A_m + x} = \frac{a_{N+1}}{A_{N+1} + x} \left[\prod_{k=1}^N \frac{(x - B_k)(A_{N+1} - A_k)}{(x + A_k)(A_{N+1} + B_k)} - 1 \right].$$

Рассмотрим многочлен степени N относительно x :

$$f(x) = \prod_{k=1}^{N+1} (x + A_k) \sum_{m=1}^{N+1} \frac{a_m}{x + A_m}. \quad (1)$$

При $x = B_n$ ($n = 1, 2, \dots, N$) многочлен $f(x)$ обращается в нуль, поэтому

$$f(x) = C \cdot \prod_{i=1}^N (x - B_i), \quad (2)$$

где C — постоянная. Полагая $x = -A_{N+1}$, получаем

$$a_{N+1} \prod_{k=1}^N (A_k - A_{N+1}) = (-1)^N \cdot C \cdot \prod_{k=1}^N (A_{N+1} + B_k),$$

откуда

$$C = a_{N+1} \prod_{k=1}^N \frac{(A_{N+1} - A_k)}{(A_{N+1} + B_k)}.$$

Из (1) и (2) находим

$$\sum_{m=1}^{N+1} \frac{a_m}{x + A_m} = \frac{a_{N+1}}{x + A_{N+1}} \prod_{k=1}^N \frac{(x - B_k)(A_{N+1} - A_k)}{(x + A_k)(A_{N+1} + B_k)},$$

что и требовалось доказать.

Подставляя $A_m = m$, $B_n = n$ ($m, n = 1, 2, \dots, N$), $A_{N+1} = x = 1/2$, $a_{N+1} = -2$, получаем исходное утверждение задачи.

291. Утверждение задачи остается верным при следующих более слабых предположениях:

$$|f(n)| \leq 1, \quad (1)$$

$$f(k) = 0, \quad (2)$$

$$\sum_{v=pk+1}^{pk+k} f(v) = 0 \text{ для любого целого числа } p \geq 0. \quad (3)$$

Действительно, при произвольном $\varepsilon > 0$ и достаточно большом $N = sk + t$

$$\sum_{n=1}^N \frac{f(n)}{n} = \sum_{p=0}^{s-1} \sum_{r=1}^k \frac{f(pk+r)}{pk+r} + \sum_{n=sk+1}^N \frac{f(n)}{n},$$

или в силу соотношений (1) и (3)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{f(n)}{n} &= \sum_{p=0}^{s-1} \sum_{r=1}^k f(pk+r) \left(\frac{1}{pk+r} - \frac{1}{pk+k} \right) + \sum_{n=sk+1}^N \frac{f(n)}{n}, \\ \left| \sum_{n=1}^N \frac{f(n)}{n} \right| &\leq \sum_{p=0}^{s-1} \left(\sum_{r=1}^k \frac{1}{pk+r} - \frac{k}{pk+k} \right) + \frac{k}{sk} = \\ &= \sum_{n=1}^{sk} \frac{1}{n} - \sum_{p=0}^{s-1} \frac{1}{p+1} + \frac{1}{s} = \sum_{n=s+1}^{sk} \frac{1}{n} + \frac{1}{s} < \ln sk - \ln s + \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, из соотношений (1) и (3) следует неравенство

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n} \right| \leq \ln k.$$

Пользуясь соотношением (2), получаем

$$\left| \sum_{r=1}^k \frac{f(r)}{r} \right| \leq \sum_{r=1}^{k-1} \frac{1}{r} - \frac{k-1}{k-1} = \sum_{r=1}^k \frac{1}{r} - \frac{k}{k} - \frac{1}{k},$$

что позволяет улучшить полученное неравенство:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n} \right| \leq \ln k - \frac{1}{k} < \ln k.$$

Итак, утверждение задачи доказано.

292. Докажем несколько более сильное утверждение.

Пусть функция $f(z)$ регулярна в точке $z = z_0$, k — наименьшее натуральное число, при котором $f^{(k)}(z_0) \neq 0$, и Δ — область, ограниченная многоугольником с вершиной в точке z_0 , внутренний угол при которой больше π/k .

Тогда любая окрестность точки z_0 содержит точку $z \in \Delta$, такую, что $|f(z)| > |f(z_0)|$.

Доказательство. Если $f(z_0) = 0$, то утверждение тривиально. Если $f(z_0) \neq 0$, то пусть

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{f(z_0)k!} = re^{i\varphi}, \quad z - z_0 = \rho e^{i\varphi}.$$

Тогда из разложения $f(z)$ в ряд Тейлора следует, что в некоторой окрестности точки z_0

$$f(z) = f(z_0) [1 + r\rho^k e^{i(\varphi + k\vartheta)} + O(\rho^{k+1})].$$

Но любая окрестность точки z_0 содержит точку $z \in \Delta$, в которой $\cos(\varphi + k\vartheta)$ больше некоторой положительной постоянной, не зависящей от выбора окрестности точки z_0 , а для всех таких точек, достаточно близких к z_0 , $|f(z)| > |f(z_0)|$, что и требовалось доказать.

293. Вычислим интеграл

$$I(a) = \lim_{\delta \rightarrow 0} I(a, \delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^{\infty} \frac{\ln x}{1 + e^{ax}} dx,$$

где a — положительная постоянная.

Интегрируя по частям, получаем

$$I(a, \delta) = \frac{1}{a} \ln \delta \ln(1 + a^{-a\delta}) + \frac{1}{a} \int_{\delta}^{\infty} \frac{dx}{x} \ln(1 + e^{-ax}).$$

Преобразуя интеграл в правой части, находим последовательно

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^{\infty} \frac{dx}{x} \ln(1 + e^{-ax}) &= \int_{\delta}^{\infty} \frac{dx}{x} \ln(1 - e^{-2ax}) - \int_{\delta}^{\infty} \frac{dx}{x} \ln(1 - e^{-ax}) = \\ &= \int_{2\delta}^{\infty} \frac{du}{u} \ln(1 - e^{-au}) - \int_{\delta}^{\infty} \frac{du}{u} \ln(1 - e^{-au}) = \\ &= - \int_{\delta}^{2\delta} \frac{du}{u} \ln(1 - e^{-au}) = - \int_1^2 \frac{dy}{y} \ln(1 - e^{-a\delta y}) = \\ &= - \int_1^2 \frac{dy}{y} \ln a\delta y - \int_1^2 \frac{dy}{y} \ln \left[1 - \frac{a\delta y}{2!} + \frac{(a\delta y)^2}{3!} - \dots \right] = \\ &= - \ln \delta \ln 2 - \frac{1}{2} \ln^2 2a + \frac{1}{2} \ln^2 a - \epsilon(\delta), \end{aligned}$$

где $\varepsilon(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Итак,

$$I(a, \delta) = \frac{1}{a} \ln \delta \ln \frac{1 + e^{-a\delta}}{2} - \frac{\ln 2 \ln 2a^2}{2a} - \frac{1}{a} \varepsilon(\delta).$$

Переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$, получаем

$$I(a) = -\frac{1}{2a} \ln 2 \ln 2a^2 \quad \text{и}$$

$$I(1) = -\frac{1}{2} \ln^2 2.$$

294. Пусть α и β — корни уравнения $x^2 - ax + a = 0$. Поскольку $a > 4$, то α и β вещественны. Обозначим через α меньший корень: $\alpha < \beta$.

Тогда $\alpha + \beta = a$, $\alpha\beta = a$, $1/\alpha + 1/\beta = 1$, $1 < \alpha \leq 2$, $2 \leq \beta$. Кроме того, корни α и β иррациональны, поскольку если бы один из корней был рациональным, то они оба были бы целыми числами и мы получили бы $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $a = 4$.

Непосредственно видно, что

$$[\alpha \cdot 1] = 1. \quad (1)$$

Кроме того, при $n \geq 1$

$$[\beta n] = [(a - \alpha)n] = na - 1 - [\alpha n]. \quad (2)$$

Если $[\alpha n] = [\beta m] = k$ (m и n — положительные целые числа), то

$$\alpha n = k + \vartheta, \quad \beta m = k + \varphi, \quad 0 < \vartheta < 1, \quad 0 < \varphi < 1$$

и, следовательно,

$$n + m = k \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) + \frac{\vartheta}{\alpha} + \frac{\varphi}{\beta} = k + \frac{\vartheta}{\alpha} + \frac{\varphi}{\beta},$$

что невозможно, поскольку $0 < \frac{\vartheta}{\alpha} + \frac{\varphi}{\beta} < 1$. Таким образом, при любых положительных целых числах m и n

$$[\alpha n] \neq [\beta m]. \quad (3.1)$$

Далее,

$$[\alpha(n+1)] \geq [\alpha n] + 1, \quad [\beta(n+1)] \geq [\beta n] + 2 > [\alpha n] + 1. \quad (3.2)$$

Наконец, пусть $k > 0$ — любое целое число и $n = [(k+1)/\alpha]$. Если $n > k/\alpha$, то $k < \alpha n < \alpha(k+1)/\alpha = k+1$ и $[\alpha n] = k$. Если $n < k/\alpha$, то

$$\beta(k-n) > \beta k - \frac{\beta}{\alpha} k = \beta k \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) = k,$$

$$\beta(k-n) < \beta k - \beta \left(\frac{k+1}{\alpha} - 1\right) = k+1,$$

откуда $[\beta(k-n)] = k$. Вместе с неравенствами (3.1) и (3.2) это соотношение показывает, что каждое число из $k = 1, 2, 3, \dots$ встречается один и только один раз в одной из последовательностей $[\alpha n]$, $[\beta n]$. (3.3)

Из утверждения (3.3) и неравенств (3.2) следует, что $[\alpha(n+1)]$ — наименьшее натуральное число, отличное от

$$[\alpha 1], [\alpha 2], \dots, [\alpha n]; [\beta 1], [\beta 2], \dots, [\beta n]. \quad (4)$$

Формулы (1), (2) и (4) представляют собой не что иное, как определения функций $f(n)$, $g(n)$, а поскольку эти функции определены однозначно, то $f(n) = [\alpha n]$, $g(n) = [\beta n]$.

Предположение о том, что a — целое число, понадобилось нам лишь при выводе соотношения (2). Вся остальная часть доказательства остается в силе при любых иррациональных α и β , удовлетворяющих равенству $1/\alpha + 1/\beta = 1$.

295. Запишем уравнение $\operatorname{tg} x = x$ в виде

$$\operatorname{ctg} \vartheta = \frac{1}{\xi} - \vartheta, \quad x = \left(p + \frac{1}{2}\right)\pi - \vartheta = \frac{1}{\xi} - \vartheta,$$

$$\xi = (\vartheta + \operatorname{ctg} \vartheta)^{-1} = \vartheta \left(1 - \frac{2}{3}\vartheta^2 + \frac{7}{15}\vartheta^4 + \dots\right).$$

Тогда $\vartheta = f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n$, где $c_{2m} = 0$, $c_{2m+1} = C_m$. Коэффициенты C_m рациональны, поскольку $f(\xi)$ — ряд, обратный степенному ряду с рациональными коэффициентами.

Степенной ряд $f(\xi)$ определяет аналитическую функцию с алгебраическими особенностями в точках $\xi = \pm 2/\pi$, не имеющую других особенностей на границе круга сходимости. Действительно,

$$\frac{d\xi}{d\vartheta} = \left(\frac{\operatorname{ctg} \vartheta}{\vartheta + \operatorname{ctg} \vartheta}\right)^2 = 0$$

в точках $\vartheta = \pm \pi/2$, где $\xi = \pm 2/\pi$, и функция $\vartheta = f(\xi)$ отображает окружность $|\xi| = 2/\pi$ в кривую J , которая проходит через точки $\vartheta = \pm \pi/2$ и расположена внутри шестиугольной области, ограниченной прямыми

$$-\frac{1}{2}\pi + (1 \pm i)t, \quad \frac{1}{2} - (1 \pm i)t, \quad 0 \leq t \leq 1, \\ i + x, \quad -i + x, \quad -\frac{1}{2}\pi + 1 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi - 1. \quad (1)$$

В этом можно убедиться, если начертить кривую J на плоскости ϑ или заметить, что на прямых (1) выполняются неравенства $|\vartheta + \operatorname{ctg} \vartheta| \leq \frac{\pi}{2}$, $|\xi| \geq 2/\pi$.

Ясно, что $\vartheta + \operatorname{ctg} \vartheta$ не обращается в нуль внутри шестиугольника, ограниченного прямыми (1) (на мнимой оси $\vartheta + \operatorname{ctg} \vartheta = 0$ при $\vartheta = \pm \beta i$, где $\beta = \operatorname{cth} \beta$, то есть при $\beta \approx 1,2$). Следовательно, на кривой J и внутри нее функция $\xi = (\vartheta + \operatorname{ctg} \vartheta)^{-1}$ регулярна.

В окрестностях точек $\vartheta = \pi/2$ и $\vartheta = -\pi/2$ функция $\xi = (\vartheta + \operatorname{ctg} \vartheta)^{-1}$ допускает разложения

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi^2} \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \right)^3 + \dots$$

и

$$-\frac{2}{\pi} + \frac{4}{3\pi^2} \left(\frac{\pi}{2} + \vartheta \right)^3 + \dots$$

Следовательно, в окрестностях точек ветвления $\pm \pi/2$ справедливы разложения

$$\vartheta - \frac{\pi}{2} = - \left(\frac{3\pi}{2} \right)^{1/3} \left(1 - \frac{\pi}{2} \xi \right)^{1/3} + \dots,$$

$$\vartheta + \frac{\pi}{2} = \left(\frac{3\pi}{2} \right)^{1/3} \left(1 + \frac{\pi}{2} \xi \right)^{1/3} + \dots$$

Поскольку вещественные значения ϑ соответствуют вещественным значениям ξ , то выражения $(1 \pm \pi\xi/2)^{1/3}$ и $(1 + \pi\xi/2)^{1/3}$ задают главные ветви функций, обращающиеся в 1 при $\xi = 0$. По известной теореме Дарбу, асимптотическое поведение коэффициентов C_n определяется главными членами приведенных выше разложений. Таким образом,

$$C_n = \left(\frac{3\pi}{2} \right)^{1/3} [1 + (-1)^{n+1}] \binom{\frac{1}{3}}{n} \left(\frac{\pi}{2} \right)^n [1 + O(n^{-1/3})].$$

Соотношение, которое требовалось доказать, следует из этой асимптотической формулы и хорошо известного асимптотического представления биномиального коэффициента

$$\binom{\frac{1}{3}}{n} \approx \frac{1}{3} \left[\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \right]^{-1} n^{-4/3} = \frac{1}{3\pi} \sin \frac{\pi}{3} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) n^{-4/3}.$$

296. Рассмотрим известное бесконечное произведение

$$\cos \frac{\pi}{2} v = \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - \frac{v^2}{(2k-1)^2} \right].$$

Взяв от него логарифмическую производную, мы без труда найдем, что

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} v &= \frac{4v}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \left[1 - \frac{v^2}{(2k-1)^2} \right]^{-1} = \\ &= \frac{4v}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v^{2n-2}}{(2k-1)^{2n}} \end{aligned}$$

(разложение справедливо при $|v| < 1$). Поскольку двойной ряд абсолютно сходится, мы можем изменить порядок суммирования. Тогда

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} v = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^{2n}} \right] v^{2n-1}. \quad (5)$$

Из соотношения (2), приведенного в условии задачи, следует, что $\operatorname{dl}^{(1)}(x)$ допускает разложение в степенной ряд вида

$$\operatorname{dl}^{(1)}(x) = \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots, \quad |x| \leq 1,$$

а из соотношения (1) находим

$$\operatorname{dl}^{(n)}(x) = \frac{x}{1^{n+1}} + \frac{x^2}{2^{n+1}} + \frac{x^3}{3^{n+1}} + \dots,$$

откуда

$$\operatorname{dl}^{(2n-1)}(1) - \operatorname{dl}^{(2n-1)}(-1) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^{2n}}.$$

Подставляя полученное соотношение в (5) и заменяя $\pi v/2$ на x , получаем соотношение (3), которое требовалось доказать.

Докажем теперь соотношение (1). Рассмотрим разложение [III. 11(10)]

$$\sec \frac{\pi}{2} v = \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{1-v^2} - \frac{3}{9-v^2} + \frac{5}{25-v^2} - \dots \right]$$

и преобразуем его следующим образом:

$$\begin{aligned} \sec \frac{\pi}{2} v &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \left[1 - \frac{v^2}{(2k-1)^2} \right]^{-1} = \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} v^{2n}}{(2k-1)^{2n+1}} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^{2n+1}} \right] v^{2n}. \end{aligned}$$

Но

$$i [\operatorname{dl}^{(2n)}(-i) - \operatorname{dl}^{(2n)}(i)] = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^{2n+1}}.$$

Используя последнее соотношение и производя подстановку $\pi v/2 = x$, получаем соотношение (4).

297. Оказывается, что

$$c = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 - p_i^{-1}}{1 - (p_i p_{i+1})^{-1/2}}. \quad (1)$$

(Нетрудно видеть, что это бесконечное произведение сходится. Более того, сходимость не нарушится, если последовательность простых чисел $p_1 < p_2 < \dots$ заменить любой возрастающей последовательностью вещественных чисел.)

Пусть k — достаточно большое целое число. Обозначим через $1 = A_1(k) < A_2(k) < \dots$ целые числа, допускающие разложение в произведения чисел $a_1, a_2, \dots, a_k$, а через $B_1(k) < B_2(k) < \dots$ целые числа, допускающие разложение в произведения чисел $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots$. Для краткости вместо $A_i(k)$, $B_i(k)$ условимся писать просто

A_i, B_i . Пусть $g_k(m)$ — число членов последовательности $\{B_i\}$, не превосходящих m . Ясно, что

$$f(n) = \sum_{i=1}^{\infty} g_k\left(\frac{n}{A_i}\right). \quad (2)$$

Пусть $h_j(n)$ — число элементов множества целых чисел, не превосходящих n и допускающих разложение в произведение квадратов простых чисел $p_{j+1}^2, p_{j+2}^2, \dots$. Иначе говоря, $h_j(n)$ — число квадратов $k^2 \leq n$, таких, что простое число p_i не делит k при $1 \leq i \leq j$.

Числа $h_{j+1}(m)$, $h_j(m)$ и $g_j(m)$ связаны между собой неравенствами

$$h_{j+1}(m) \leq g_j(m) \leq h_j(m). \quad (3)$$

Первое из неравенств (3) мы получим, сопоставив числа p_k^2 и a_k ($k = j+1, j+2, \dots$), второе — сопоставив a_k с квадратом простого числа p_{k+1}^2 . Из неравенств (3) при $j=0$ следуют неравенства $n^{1/2}/2 < f(n) < n^{1/2}$.

Из соотношения (2) и неравенств (3) получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} h_{k+1}\left(\frac{n}{A_i}\right) \leq f(n) \leq \sum_{i=1}^{\infty} h_k\left(\frac{n}{A_i}\right). \quad (4)$$

Неравенства

$$n^{1/2} \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) - 2^k < h_k(n) < n^{1/2} \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) + 2^k \quad (5)$$

получим при помощи решета Эратосфена. Кроме того, выполняется тривиальное неравенство

$$h_k(m) \leq m^{1/2}. \quad (6)$$

Пусть t — достаточно большое, но фиксированное (то есть не зависящее от n) число. Тогда из неравенств (4) и (6) следует, что

$$\sum_{i=1}^t h_{k+1}\left(\frac{n}{A_i}\right) < f(n) < \sum_{i=1}^t h_k\left(\frac{n}{A_i}\right) + n^{1/2} \sum_{i=t+1}^{\infty} \frac{1}{A_i^{1/2}}.$$

Пользуясь неравенствами (5), получаем оценки

$$n^{1/2} \prod_{i=1}^{k+1} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \sum_{i=1}^t \frac{1}{A_i^{1/2}} - 2^{k+1}t < f(n) < \\ < n^{1/2} \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \sum_{i=1}^t \frac{1}{A_i^{1/2}} + 2^k t + n^{1/2} \sum_{i=t+1}^{\infty} \frac{1}{A_i^{1/2}}.$$

Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} 1/A_i^{1/2}$, очевидно, сходится. Кроме того, существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{A_i^2}.$$

Действительно,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{A_i^{1/2}} = \prod_{i=1}^k \left[1 + \frac{1}{(p_i p_{i+1})^{1/2}} + \frac{1}{p_i p_{i+1}} + \frac{1}{(p_i p_{i+1})^{3/2}} + \dots\right] = \\ = \prod_{i=1}^k \frac{1}{1 - (p_i p_{i+1})^{1/2}}.$$

Итак, если c задано выражением (1), то, выбирая достаточно большие t и k , получаем при $n > n_0$

$$|f(n) - cn^{1/2}| < \varepsilon n^{1/2},$$

что и требовалось доказать.

298. Некоторые частные случаи сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \sin n^{\beta}$ хорошо известны. Например, если $\alpha < -1$, то при любом вещественном значении β ряд сходится абсолютно. Если $\beta < 0$, то при больших n справедлива оценка $\sin n^{\beta} = O(n^{\beta})$ и ряд сходится при $\alpha + \beta < -1$. При $\beta = 1$ ряд сходится, если $\alpha < 0$.

Предположим теперь, что $-1 \leq \alpha < 0$ и $\beta > 0$. Пусть $\nu = -\alpha$, $0 < \nu \leq 1$ и $f(x) = x^{-\nu} \sin x^{\beta}$. Пользуясь

формулой суммирования Эйлера, получаем

$$\sum_{x=1}^n f(x) = \frac{f(1) + f(n)}{2} + \int_1^n \frac{\sin x^\beta dx}{x^\nu} + \beta \int_1^n \frac{\varphi(x) \cos x^\beta dx}{x^{\nu-\beta+1}} - \\ - \nu \int_1^n \frac{\varphi(x) \sin x^\beta}{x^{\nu+1}} dx, \quad \varphi(x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi x}{k\pi}.$$

При $n \rightarrow \infty$ последний интеграл абсолютно сходится, поскольку $|\varphi(x)| < 1$. Произведя подстановку $t = x^\beta$, нетрудно убедиться в том, что первый интеграл сходится, если $\nu + \beta > 1$. Вопрос о сходимости второго интеграла требует более подробного исследования.

Пользуясь тем, что ряд $\varphi(x)$ можно интегрировать почленно, представим этот интеграл в виде

$$I = \int_1^n \frac{\varphi(x) \cos x^\beta dx}{x^{\nu-\beta+1}} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k\pi} \int_1^n \frac{\sin(x^\beta + 2k\pi x) dx}{x^{\nu-\beta+1}} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k\pi} \int_1^n \frac{\sin(x^\beta - 2k\pi x) dx}{x^{\nu-\beta+1}}.$$

Обозначим первый интеграл в правой части через G_k , а второй через G_{-k} . Интегрируя по частям, получаем

$$G_k = \frac{-\cos n^\beta}{(\beta n^{\beta-1} + 2k\pi) n^{\nu-\beta+1}} + \frac{\cos 1}{\beta + 2k\pi} - \\ - \int_1^n \frac{[\beta \nu x^{\nu-1} + (\nu - \beta + 1) 2k\pi x^{\nu-\beta}] \cos(x^\beta + 2k\pi x) dx}{(\beta x^\nu + 2k\pi x^{\nu-\beta+1})^2}.$$

При $n \rightarrow \infty$ первый член в правой части ведет себя как $O(n^{-\nu})$, а подынтегральное выражение — как $O(x^{-\nu-1})$, поэтому при $\beta > 0$ интеграл G_k сходится, причем $G_k = O(1/k)$.

Аналогичным образом можно убедиться в том, что при $\beta < 1$ интеграл G_{-k} также сходится, причем $G_{-k} = O(1/k)$. Чтобы избежать нулей в знаменателе при $\beta > 1$, запишем G_{-k} в виде

$$G_{-k} = \int_1^{x_1} + \int_{x_1}^n = G'_{-k} + G''_{-k},$$

где число x_1 удовлетворяет неравенствам $(2k\pi)^{1/(\beta-1)} < x_1 < n$. Тогда, как и при оценке интеграла G_k , получаем

$$G''_{-k} = \frac{-\cos n^\beta}{(\beta - 2k\pi n^{1-\beta}) n^\nu} + \frac{\cos x_1^\beta}{(\beta - 2k\pi x_1^{1-\beta}) x_1^\nu} - \\ - \int_{x_1}^n \frac{[\beta \nu x^{\nu-1} - (\nu - \beta + 1) 2k\pi x^{\nu-\beta}] \cos(x^\beta - 2k\pi x) dx}{(\beta x^\nu - 2k\pi x^{\nu-\beta+1})^2}.$$

Таким образом, сходимость интеграла G''_k при $n \rightarrow \infty$ доказана.

Поскольку интеграл G'_{-k} конечен, то сходимость интеграла G_{-k} при $\beta > 0$ и $n \rightarrow \infty$ очевидна.

Записав интеграл G_{-k} в виде

$$G_{-k} = \int_1^n \frac{(2k\pi - \beta x^{\beta-1}) \sin(x^\beta - 2k\pi x) dx}{2k\pi x^{\nu-\beta+1}} + \\ + \int_1^n \frac{\beta x^{\beta-1} \sin(x^\beta - 2k\pi x) dx}{2k\pi x^{\nu-\beta+1}}$$

и проинтегрировав первый член по частям, получим

$$G_{-k} = \frac{1}{2k\pi} \left[\frac{\cos n^\beta}{n^{\nu-\beta+1}} - \cos 1 - \right. \\ \left. - (\beta - \nu - 1) \int_1^n \frac{\cos(x^\beta - 2k\pi x) dx}{x^{\nu-\beta+1}} + \beta \int_1^n \frac{\sin(x^\beta - 2k\pi x) dx}{x^{\nu-2\beta+2}} \right].$$

При $n \rightarrow \infty$ первый интеграл сходится, если $\nu - \beta + 1 > 0$, а второй интеграл по известной теореме об асимптотической оценке коэффициентов Фурье ведет себя как $O(1)$. Итак, если $\nu - \beta + 1 > 0$, то $G_{-k} = O(1/k)$.

Поскольку ряд $\sum O(1/k)/k$ сходится, то тем самым доказана сходимость интеграла I при $n \rightarrow \infty$, если $\nu - \beta + 1 > 0$. При $\nu - \beta + 1 = 0$ интеграл I осциллирует.

При $\nu - \beta + 1 < 0$ интеграл I расходится. Действительно, при соответствующим образом выбранных k и

x_1 необходимое и достаточное условие

$$\left| \sum_{k=x_1}^m \frac{G''_{-k}}{k} \right| < \varepsilon \quad (1)$$

сходимости интеграла I не может быть выполнено. Предположим, что k и x_1 имеют те же значения, что и при оценке G''_{-k} . Заметив, что $2(k+p)\pi x_1^{1-\beta} < 1 + p/k$, где p — целое число, меньшее k , из приведенного выше выражения для G''_{-k} получим асимптотическую оценку $G''_{-k-p} = O(x_1^{-\nu})$ при $n \rightarrow \infty$.

Поскольку гармонический ряд расходится, то сумму $\sum_{k=x_1}^m G''_{-k}/k$ можно выбрать больше ε и неравенство (1) нарушится. Не приводя подробных оценок, заметим, что поведение исходного ряда при $\nu - \beta + 1 < 0$ связано с существованием предельной точки у последовательности нулей $x = (2k\pi)^{1/(\beta-1)}$ функции $N = x^\beta - 2k\pi x$ при $k \rightarrow \infty$.

Итак, при $-1 \leq \alpha < 0$ и $\beta > 0$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \sin n^\beta$ сходится, если одновременно выполняются неравенства

$$\beta - \alpha > 1, \quad \alpha + \beta < 1.$$

Если $\beta - \alpha \leq 1$ и $\beta < 1$ или $\alpha + \beta \geq 1$ и $\beta > 1$, то ряд расходится¹.

299. Без ограничения общности $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$. Обозначим через $\{r_i\}$ — множество всех простых делителей совокупности членов последовательности a_n ($n = 1, 2, \dots$). Тогда

$$\prod_{r_i \leq a_N} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{r_i}} \right) = \prod_{r_i \leq a_N} \left(1 + \frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_i^2} + \dots \right) \geq \sum_{(a_N)} \frac{1}{a_n},$$

¹ Случай $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ остался неисследованным. — Прим. ред.

где сумма берется по всем a_n , ни один из простых делителей которых не превышает a_N . Этому условию удовлетворяют все $a_n \leq a_N$, в силу чего

$$\prod_{r_i \leq a_N} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{r_i}} \right) \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{a_n},$$

а поскольку, если $a_N \rightarrow \infty$, N также неограниченно возрастает и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ расходится, мы заключаем, что произведение $\prod_i \left(1 - \frac{1}{r_i} \right)$ расходится. Следовательно, $\prod_i \left(1 - \frac{1}{r_i} \right)$ стремится к нулю.

Пусть $r_1, r_2, \dots, r_k$ — первые k простых чисел из множества $\{r_i\}$, расположенные в порядке возрастания. Число элементов множества целых чисел, не превосходящих n и не делящихся ни на одно простое число $r_1, r_2, \dots, r_k$, равно

$$f(n, k) = [n] - \sum_i \left[\frac{n}{r_i} \right] + \sum_{i,j} \left[\frac{n}{r_i r_j} \right] - \dots, \quad (1)$$

где индексы $i, j, \dots$ не равны и принимают значения от 1 до k , а $[x]$ означает целую часть числа x . Общее число пар квадратных скобок в (1) равно $1 + k + k(k-1)/2 + \dots = 2^k$, а поскольку $0 \leq x - [x] < 1$, то

$$\begin{aligned} f(n, k) &\leq n - \sum_i \frac{n}{r_i} + \sum_{i,j} \frac{n}{r_i r_j} - \dots + 2^k = \\ &= n \prod_{r_i \leq r_k} \left(1 - \frac{1}{r_i} \right) + 2^k. \end{aligned}$$

Пусть $f(n)$ — количество целых чисел, меньших n и не делящихся ни на одно из простых чисел r_i . Тогда

$$f(n) \leq f(n, k) \leq n \prod_{r_i \leq r_k} \left(1 - \frac{1}{r_i} \right) + 2^k.$$

Но $\prod_i \left(1 - \frac{1}{r_i} \right)$ стремится к нулю. Следовательно, при любом $\varepsilon > 0$ и достаточно большом k выполняется

неравенство $\prod_{r_i \leq r_k} (1 - 1/r_i) < \varepsilon/2$, а при достаточно большом n выполняется также неравенство $2^k/n < \varepsilon/2$, откуда $f(n) < \varepsilon n$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n} = 0.$$

Итак, утверждение задачи доказано.

В приведенном выше доказательстве мы исходили из предположения о том, что члены последовательности $\{a_n\}$ различны. Утверждение перестает быть верным, если, например, $a_n = 2$ ($n = 1, 2, \dots$).

300. В общем случае, не принимая во внимание, что $b_n = n^n/n!$, соотношение между определителями a_n и их элементами b_n можно установить, положив $a_0 = 1$, $a_1 = b_1$ и задав две функции y и z степенными рядами

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}, \quad z = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n}. \quad (1)$$

Разложив определитель a_n по элементам последней строки, получим рекуррентное соотношение

$$n \frac{a_n}{n!} = a_0 b_n + \frac{a_1}{1!} b_{n-1} + \frac{a_2}{2!} b_{n-2} + \dots + \frac{a_{n-1} b_1}{(n-1)!}, \quad (2)$$

эквивалентное дифференциальному уравнению $y' = yz'$, решение которого, удовлетворяющее начальному условию $y = 1$ при $x = z = 0$, имеет вид

$$y = e^z. \quad (3)$$

Поскольку по условию задачи $b_n = n^n/n!$, то наша задача сводится к нахождению коэффициента a_n при $x^n/n!$ в разложении e^z , когда

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(kx)^k}{k k!}. \quad (4)$$

Подставляя в (4)

$$x = te^{-t}, \quad (5)$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{z}{t} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(kt)^{k-1} e^{-kt}}{k!} = \sum_{m, k=1}^{\infty} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} \frac{(kt)^{m-1}}{m!} = \\ &= 1 + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{t^{m-1}}{m!} \left[\sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^{m-1} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Выражение в квадратных скобках обращается в нуль при $m > 1$, поскольку совпадает с коэффициентом при $t^{m-1}/(m-1)!$ в разложении $(e^t - 1)^m$. Следовательно, правая часть соотношения (6) равна 1, в силу чего $z=t$. Подставляя $z=t$ в (5), находим $x = ze^{-z}$. Из соотношений (3), (1) и $b_n = n^n/n!$ получаем

$$y = e^z = \frac{z}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{n+1} x^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{n-1} \frac{x^n}{n!}. \quad (7)$$

Сравнивая коэффициенты при $x^n/n!$ в (1) и (7), получаем выражение для определителя a_n , а именно

$$a_n = (n+1)^{n-1}.$$

301. Обозначим вершины прямоугольного параллелепипеда так, как показано на рис. 23, а, и примем длину меньших ребер за единицу. На одном из более длинных ребер, например на ребре AD , отложим отрезок $AJ = 2^{1/3}$, равный длине ребра куба, объем которого равен объему исходного прямоугольного параллелепипеда. Отрезок $CL = AJ$ отложим вдоль параллельного ребра. Из точки J в плоскости грани $ABCD$ восставим перпендикуляр к ребру AD , продолжив его до пересечения с отрезком DL в точке K . Рассечем прямоугольный параллелепипед плоскостями, перпендикулярными грани $ABCD$, сначала вдоль прямой DL , а затем вдоль JK . Прямоугольный параллелепипед распадется на куски, обозначенные на рис. 23, а римскими цифрами I, II, III. Каждый из трех кусков параллельным переносом можно перевести в положение, показанное на рис. 23, б. Произведем над гранью $FMLA$ нового прямоугольного параллелепипеда те же операции, которые мы производили над гранью $ABCD$ исходного прямоугольного параллелепипеда: отложим на ребрах FM и AL отрезки MN и AQ , равные $2^{1/3}$, проведем отрезок прямой FQ , восставим из точки N перпендикуляр NP к FM и рассечем новый

прямоугольный параллелепипед плоскостями, проходящими через отрезки FQ и NP перпендикулярно грани $FMLA$. Результат такой процедуры показан на рис. 23, в. После всех разрезов исходный блок оказывается рассеченным на семь частей (обозначенных на рис. 23, в

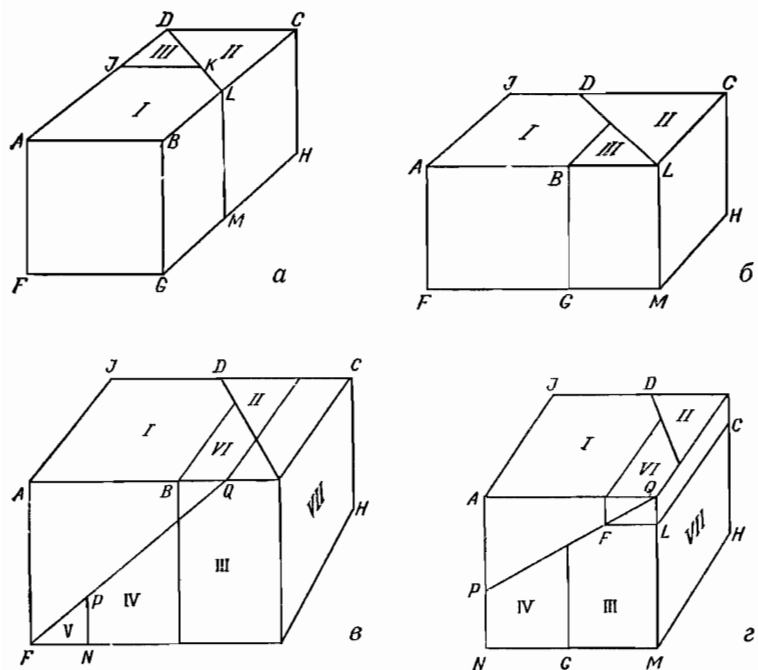


Рис. 23.

римскими цифрами); параллельным переносом эти части можно перевести в положение, изображенное на рис. 23, г, где они образуют куб.

Откладывая отрезки, равные длине ребра эквивалентного куба, от вершин D и B , мы получим куб, составленный из тех же семи частей, но расположенных симметрично относительно их положений на рис. 23, г¹.

¹ Как, несомненно, заметит внимательный читатель, здесь не доказано, что 7 действительно является минимальным числом частей, на которые следует разрезать исходный параллелепипед; пусть он постарается восполнить это упущение. — Прим. ред.

302. Пусть a/b — несократимая правильная дробь, получающаяся после вычеркивания цифры n в числителе и знаменателе исходной дроби, которая может принадлежать лишь к следующим четырем типам: 1) $(10a + n)/(10b + n)$; 2) $(10n + a)/(10n + b)$; 3) $(10n + a)/(10b + n)$ и 4) $(10a + n)/(10n + b)$. Здесь a , b и n — однозначные натуральные числа, причем $a < b$.

Нетрудно видеть, что исходные дроби первых двух типов могут удовлетворять условиям задачи лишь при $a = b$ вопреки сделанному предположению. Третий тип также исключается, поскольку в силу неравенства $9b < 10b - a$, если $a/b = (10n + a)/(10b + n)$, $n = 9ab/(10b - a) < a$. Поскольку ни n , ни $b - a$ не могут делиться на 9, оба эти числа должны делиться на 3, и простым перебором мы приходим к противоречию.

Таким образом, остается лишь исходная дробь четвертого типа. В этом случае $n = 9ab/(10a - b) > 9ab/10a - a = b$, то есть $b < n$. Кроме того, из вида дроби следует также, что $a = bn/[9(n - b) + n] \leq b/2$ (поскольку $9(n - b) \geq n$), откуда $a < 5$.

Из соотношения $b = 10a - 9ab/n$ и неравенства $0 < a < b < 9$ заключаем, что n кратно 3. Следовательно, для того чтобы число b было целым, a и n могут принимать лишь четыре пары значений: (1, 6), (1, 9), (2, 6) и (4, 9). Соответствующие дроби имеют вид $16/64$, $19/95$, $26/65$ и $49/98$. Последняя из них «незаконным» сокращением девяти не приводится к несократимому виду.

Таким образом, существуют лишь три правильные дроби с знаменателем, меньшим 100, которые «незаконным» сокращением одной цифры приводятся к несократимому виду: $16/64$, $19/95$ и $26/65$.

303. Чтобы установить, является ли данный год високосным, как известно, достаточно рассмотреть остаток от деления порядкового номера года на 400. На 400 лет, из которых 97 високосных, содержат ровно 20 871 неделю, поэтому календарь повторяется каждые 400 лет. (Если бы число недель, содержащихся в 400-летнем периоде, не было целым, то тринадцатое число месяца могло бы с равной вероятностью приходиться на любой день недели). За 400 лет тринадцатое число месяца встречается 4800 раз, распределяясь по дням недели следующим образом: воскресенье — 687 раз, понедельник — 685 раз, вторник — 685 раз, среда — 687 раз, чет-

верг — 684 раза, пятница — 688 раз и суббота — 684 раза. Таким образом, если период времени достаточно велик, то тринадцатое число месяца с большей вероятностью приходится на пятницу, что и требовалось доказать.

304. Пусть $2^k \cdot a$ — тот из знаменателей, который делится на наибольшую степень двойки (a — нечетное число). Тогда $a = 1$, поскольку если бы среди знаменателей содержалось большее кратное числа 2^k , то нечетный коэффициент a был бы больше 2, а это означало бы, что среди знаменателей содержится число 2^{k+1} (последнее невозможно, ибо по предположению 2^k — наибольшая степень двойки среди знаменателей). Следовательно, наименьший общий знаменатель всех дробей имеет вид $2^k \cdot b$, где b — некоторое нечетное число. После приведения к наименьшему общему знаменателю числитель каждой дроби, за исключением $1/2^k = b/(2^k \cdot b)$, станет четным. Таким образом, сумма всех числителей после приведения к наименьшему общему знаменателю нечетна и не делится на знаменатель, равный $2^k \cdot b$. Значит, сумма $1/2 + 1/3 + \dots + 1/N$ никогда не может быть целым числом, что и требовалось доказать.

305. Среди арифметических прогрессий с целочисленными членами и разностью $d < 2000$ одиннадцать последовательных простых членов содержит лишь арифметическая прогрессия с первым членом $a = -11$ и $d = 210$ (простыми являются первые одиннадцать членов этой прогрессии). Все прогрессии, члены которых положительные целые числа, а $d < 2000$, содержат не более 10 последовательных членов. Докажем это утверждение.

Пусть $a + nd$, $n = 0, 1, 2, \dots$ — члены рассматриваемой арифметической прогрессии. Тогда a и d взаимно просты, поскольку в противном случае среди членов прогрессии могло бы содержаться не более одного простого числа. Если p — любое простое число, не делящее разность прогрессии d , то можно найти такие целые числа r и s , что $dr - ps = 1$. Пусть $n = kp - ar$. Тогда члены прогрессии $a + nd$ делятся на p при любом k . Следовательно, если p не делит разность прогрессии d , то существует не более $p - 1$ последовательных членов нашей арифметической прогрессии, которые не делятся на p , и одиннадцать и более последовательных членов арифметической прогрессии не делятся на 2, 3, 5, 7 и 11 лишь

в том случае, если d делится на все эти простые числа, а значит, и на их произведение 2310, которое больше 2000.

Но число может делиться на простое число p и тем не менее само быть простым, если оно само равно p или $-p$. Из приведенных выше рассуждений. следует, что арифметическая прогрессия может содержать $2p-1$ последовательных простых членов, даже если разность прогрессии d не делится на p , при условии что p или $-p$ входят в число членов арифметической прогрессии. Итак, нам остается лишь рассмотреть арифметические прогрессии с $p=7$ или $p=11$ и $a=p$ или $a=-p$. Если $p=7$, то разность арифметической прогрессии d может быть любым кратным числа 330, которое меньше 2000. Если $p=11$, то d — любое кратное числа 210, которое меньше 2000. Однако, за исключением единственной арифметической прогрессии, упомянутой в начале решения, все остальные прогрессии (их немного), удовлетворяющие этим условиям, содержат не более десяти последовательных простых чисел.

306. Любой общий делитель чисел n^a+1 и n^b-1 должен быть делителем их суммы $n^a+n^b=n^b(n^{a-b}+1)$, то есть общим делителем чисел n^b-1 и $n^{a-b}+1$. (Мы предполагаем, что $a > b$. Если бы выполнялось неравенство $a \leq b$, то вместо числа $n^{a-b}+1$ следовало бы взять число $n^{b-a}+1$.)

Продолжая те же рассуждения, нетрудно показать, что общий делитель чисел n^a+1 и n^b-1 должен быть также делителем числа n^d+1 .

Пусть $x = n^d$, так что $n^b-1 = x^{b'}-1$ и b' — нечетное число. Тогда разделить n^b-1 на n^d+1 означает то же самое, что разделить $x^{b'}-1$ на $x+1$. Остаток от деления $x^{b'}-1$ на $x+1$ равен -2 . Следовательно, числа n^a+1 и n^b-1 не могут иметь общий множитель, который был бы больше 2.

307. Пусть AB — пространственная диагональ куба, совпадающая с осью вращения. Сечение куба плоскостью, проходящей через AB , имеет вид переменного параллелограмма $PARB$. Вершина P переменного треугольника ABP совпадает либо с вершиной E куба, либо находится на ребре EF на некотором расстоянии x от

вершины E . По теореме Пифагора из прямоугольных треугольников AEP и PFB получаем

$$AP = (a^2 + x^2)^{1/2}, \quad PB = [a^2 + (a - x)^2]^{1/2},$$

и $AB = a\sqrt{3}$.

Из точки P опустим на AB перпендикуляр PQ . При вращении куба x изменяется от 0 до a , а точка Q перемещается по отрезку AB . Предельные положения основания перпендикуляра Q соответствуют $x = 0$ и $x = a$. И в том и в другом случае треугольник ABP прямоугольный, а его катеты равны a и $a\sqrt{2}$. Поскольку в прямоугольном треугольнике катет равен среднему геометрическому между гипотенузой и длиной проекции катета на гипотенузу, то точка Q перемещается от точки C , делящей отрезок AB в отношении 1:2 (считая от вершины A), до точки D , делящей отрезок AB в отношении 2:1. Расстояние между точками P и Q в этих предельных положениях составляет $a\sqrt{2/3} = y = PQ$. Заметим далее, что точка Q делит отрезок DC в том же отношении, в каком точка P делит ребро EF . В этом нетрудно убедиться, если провести параллельные плоскости через точки E , P и F , пересекающие прямую AB под прямым углом в точках C , Q и D . Следовательно, $CQ = x/\sqrt{3}$ и (из прямоугольного треугольника APQ)

$$y^2 = \frac{2}{3}(x^2 - ax + a^2).$$

Объем тела, возникающего при вращении куба вокруг диагонали AB , равен сумме объемов двух конусов, получаемых при вращении прямоугольных треугольников ACE и BDF , плюс объем, образуемый вращением вокруг CD площади под кривой, описываемой точкой P (в секущей плоскости, проходящей через диагональ AB). Последний объем определяется интегралом

$$\pi \int_{v=0}^{a/\sqrt{3}} y^2 dv,$$

где $v = CQ = x/\sqrt{3}$, $y^2 = (2/3)(x^2 - ax + a^2) = (2/3)(3v^2 - av\sqrt{3} + a^2)$.

Следовательно, полный объем V тела вращения равен

$$V = \frac{2\pi}{3} \left(a \sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2 \frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{3} \int_0^{a/\sqrt{3}} (3v^2 - av\sqrt{3} + a^2) dv = \frac{\pi a^3}{\sqrt{3}}.$$

308. Зададим последовательность $\{x_n\}$ рекуррентным соотношением $x_n = (D_{n+1} - 3D_n)/4$. Тогда $x_1 = 2$, $x_2 = 12$, ... Нетрудно видеть, что D_n — целое число вида $4q + (-1)^{n+1}$, поэтому все элементы последовательности $\{x_n\}$ — целые числа. Соотношения $D_n + 2x_n = 2x_{n+1} - D_{n+1}$ и $D_n = (x_{n+1} - 3x_n)/12$ доказываются непосредственно. Заметим, что соотношение

$$D_n^2 - 2x_n^2 = 1 \quad (1)$$

выполняется при $n = 1$ и $n = 2$. Но $D_{n+1}^2 - 2x_{n+1}^2 = (4x_n + 3D_n)^2 - 2(3x_n + 2D_n)^2 = D_n^2 - 2x_n^2$. Следовательно, соотношение (1) выполняется при любом значении n . (Можно показать, что члены последовательностей $\{D_n\}$ и $\{x_n\}$ образуют полный набор целочисленных решений уравнения (1), см. III. 9.)

Прямыми выкладками нетрудно проверить, что

$$2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{D_1} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{2D_1}{D_1^2 - 1} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{D_1 + 2x_1 - 1}{D_1 + 2x_1 + 1} \right), \quad (2)$$

$$2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{D_n} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{2D_n}{D_n^2 - 1} \right) = \operatorname{arctg} \frac{D_n}{x_n^2}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} \frac{D_n + 2x_n - 1}{D_n + 2x_n + 1} - \operatorname{arctg} \frac{D_{n-1} + 2x_{n-1} - 1}{D_{n-1} + 2x_{n-1} + 1} &= \\ = \operatorname{arctg} \frac{D_n + 2x_n - 1}{D_n + 2x_n + 1} - \operatorname{arctg} \frac{2x_n - D_n - 1}{2x_n - D_n + 1} &= \\ = \operatorname{arctg} \frac{4D_n}{8x_n^2 + 2 - 2D_n^2} = \operatorname{arctg} \frac{D_n}{x_n^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Соотношения (2), (3) и (4) представляют собой не что иное, как доказательство методом математической индукции соотношения

$$2 \sum_{j=1}^n \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{D_j} \right) = \operatorname{arctg} \frac{D_n + 2x_n - 1}{D_n + 2x_n + 1}.$$

Следовательно,

$$2 \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{D_j} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{D_n + 2x_n - 1}{D_n + 2x_n + 1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

(Ср. также решения задач 29, 52.)

Итак, аргумент $-4 \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{arctg}(1/D_j)$ рассматриваемого в задаче бесконечного произведения равен $-\pi/2$, то есть Π — чисто мнимая величина.

Сходимость бесконечного произведения Π можно доказать следующим образом. Модуль n -го сомножителя $(1 - i/D_n)^4$ равен $(1 + 1/D_n^2)^2$. Но $D_n = 4x_{n-1} + 3D_{n-1}$, поэтому $3D_{n-1}^2 < D_n^2$ и, следовательно, $(1 + 1/D_n^2)^2 = 1 + 2/D_n^2 + 1/D_n^4 < 1 + 3/D_n^2 < 1 + 1/D_{n-1}^2$. Повторяя те же рассуждения, получим неравенство $1 + 1/D_n^2 < (1 + 1/D_1^2)^{2^{1-n}}$. Таким образом, модуль бесконечного произведения Π меньше чем

$$\begin{aligned} (1 + 1/D_1^2)^2 (1 + 1/D_1^2) (1 + 1/D_1^2)^{1/2} \dots = \\ = (1 + 1/D_1^2)^{2+1+1/2+\dots} = (1 + 1/D_1^2)^4 = (10/9)^4. \end{aligned}$$

309. Поскольку $a^n + b^n = c^n$, то $a < c$. Кроме того, $(a+1)^n = a^n + na^{n-1} + \dots$, $b < n$ и $b^{n-1} < a^{n-1}$. Таким образом, $a^n + b^n < (a+1)^n$ или, что то же, $c^n < (a+1)^n$, откуда $a < c < a+1$, а поскольку c лежит между двумя последовательными целыми числами, то c не может быть целым числом.

310. Каждая из цифр может принимать лишь четыре значения: 2, 3, 5 или 7. По условию задачи необходимо найти трехзначные и однозначные числа, произведение которых было бы четырехзначным числом, а запись обоих сомножителей и произведения содержала бы только цифры 2, 3, 5 или 7. Нетрудно проверить, что существуют лишь четыре пары таких чисел: $3 \times 775 = 2325$, $5 \times 555 = 2775$, $5 \times 755 = 3775$ и $7 \times 325 = 2275$.

Поскольку каждому трехзначному числу соответствует лишь одно однозначное число, то множитель должен содержать две одинаковые цифры. Поиск «кандида-

тов» среди четырех приведенных выше числовых пар приводит к единственному решению задачи:

$$\begin{array}{r} \times 775 \\ 33 \\ \hline 2325 \\ 2325 \\ \hline 25575 \end{array}$$

311. Если ε и ε^2 — комплексные кубические корни из единицы, то $1 + x + x^2 = (1 - \varepsilon x)(1 - \varepsilon^2 x)$ и

$$\frac{1}{1 + x + x^2} = \frac{1}{(1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon x)} - \frac{\varepsilon}{(1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2 x)}.$$

Левую часть этого равенства можно представить в виде $\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (x + x^2)^r$. Коэффициент при x^n в этом разложе-

нии равен $(-1)^n \cdot \left[\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \dots \right] = (-1)^n S_n$.

Таким образом, коэффициент при x^n в правой части также равен $(-1)^n S_n$. Но этот коэффициент должен быть равен $\varepsilon^n / (1 - \varepsilon) - \varepsilon^{2n+1} / (1 - \varepsilon) = \varepsilon^n (1 - \varepsilon^{n+1}) / (1 - \varepsilon)$. Поскольку ε — кубический корень из единицы, то $\varepsilon^{3r} = 1$. Следовательно,

если $n = 3m$, то $S_{3m} = \varepsilon^{3m} (1 - \varepsilon) / (1 - \varepsilon) = +1$,

если $n = 3m + 1$, то $-S_{3m+1} = \varepsilon (1 - \varepsilon^2) / (1 - \varepsilon) =$
 $= \varepsilon (1 + \varepsilon) = -1$,

если $n = 3m + 2$, то $S_{3m+2} = \varepsilon^2 (1 - \varepsilon^3) / (1 - \varepsilon) = 0$.

312. Непосредственно из условий задачи следует, что следующие пять должностей в банке занимают мужчины: должность первого вице-президента (по условию 6), третьего вице-президента (по условию 1), главного бухгалтера (по условию 6), кассира (по условию 10) и швейцара (по условию 7). По условию 3 второй вице-президент и контролер — лица одного пола, а поскольку среди служащих банка имеется только шесть мужчин, то обязанности второго вице-президента и контролера в банке исполняют женщины. Поскольку второй вице-президент банка — женщина, то по условию 9 счетовод — мужчина.

Таким образом, обязанности президента и второго вице-президента банка, контролера, а также первого и второго секретарей президента банка исполняют женщины.

Поскольку президент банка имеет внука и потому не может быть «мисс» и поскольку это не миссис Браун (по условию 1), а также не миссис Кейн (по условию 5), то пост президента банка занимает миссис Форд. Мисс Хилл не секретарь (по условию 4), и второй секретарь не состоит в браке (по условию 8), следовательно, обязанности второго секретаря исполняет мисс Дейл. По условию 2 контролер является ее матерью, следовательно, контролер — «миссис», а поскольку обязанности контролера исполняет не миссис Браун (по условию 1), то этот пост может занимать только миссис Кейн. Первый секретарь президента банка — замужняя женщина (по условию 10). Следовательно, это миссис Браун. Таким образом, обязанности второго вице-президента исполняет мисс Хилл.

По условию 4 мистер Грант может отдавать распоряжения мисс Хилл. Следовательно, он занимает более высокий пост в банке. Поскольку президент банка женщина, то мистер Грант может быть только первым вице-президентом банка. По условию 6 мистер Грант живет в «Клубе холостяков» вместе с главным бухгалтером. Следовательно (по условию 5), пост главного бухгалтера может занимать только мистер Лонг. Представитель молодого поколения служащих банка мистер Адамс (условие 8) не может исполнять обязанности счетовода, который (по условию 11) принадлежит к старшему поколению служащих. Из того же условия 11 следует, что ни мистер Джонс, ни мистер Эванс не могут быть счетоводами. Таким образом, на посту счетовода трудится мистер Кемп. Не успевший обзавестись собственной семьей (условие 8) мистер Адамс, принимающий у себя в гостях молодых служащих банка, не может быть ни женатым кассиром из условия 10, ни живущим в комнатке под самой крышей швейцаром из условия 7. Следовательно, мистер Адамс третий вице-президент банка.

Следящий за модой кассир (условие 10) не стал бы регулярно принимать поношенное платье. Поэтому обязанности кассира исполняет не мистер Эванс (условие 11), им может быть только мистер Джоунс. Наконец, мистер Эванс из условия 11 должен быть швейцаром. Со-

стояние его гардероба вполне согласуется с его скромным жилищем (условие 7).

313. Пусть b — скорость выпадения снега (увеличение толщины снежного покрова, дюйм/ч), c — скорость уборки снега (уменьшение толщины снега, дюйм/миля·ч), и пусть снегопад начался за h часов до полудня. В момент времени t перед бригадой дорожных рабочих находится участок шоссе, покрытый слоем снега толщиной $b(h+t)$ дюймов, а скорость v_t продвижения бригады по шоссе составляет $c/[b(h+t)]$ миля/ч. За время t бригада удалится от города по шоссе на расстояние

$$x_t = \int_0^t v_t dt = \frac{c}{b} [\ln(h+t) - \ln h].$$

По условиям задачи $x_2 = 2$, $x_4 = 3$, поэтому $h = \sqrt{5} - 1$ часов, что составляет 1 час 14 мин 9,8 с. Следовательно, снегопад начался в 10 ч 45 мин 50,2 с утра.

Условия задачи не позволяют однозначно определить величины b и c , но отношение $c/b = 2/[\ln(\sqrt{5} + 1) - \ln(\sqrt{5} - 1)] = 2,078$. Интересно заметить, что $\lim_{t \rightarrow \infty} v_t = 0$, но $\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = \infty$.

314. Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы ее центр совпал с центром коробки, а оси были параллельны ее ребрам. За единицу длины примем дюйм. Пусть $x = 30$, $y = 24$ и $z = 18$ — уравнения стенок коробки, сходящихся в том углу, вблизи которого находится один из концов рулона. Середина осевой линии рулона совпадает с началом координат. Пусть $P(x_0, y_0, z_0)$ — точка, в которой находится конец осевой линии рулона, а его длина равна $2a$. Тогда $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = a^2$ и

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z = a^2 \quad (1)$$

— уравнение плоскости, в которой расположен один конец рулона. Прямые, определяемые плоскостью (1) и плоскостями $x = 30$, $y = 24$, $z = 18$, должны совпадать с касательными к окружности, ограничивающей конечное сечение рулона. Следовательно, каждая из этих прямых должна проходить на расстоянии $9/2$ дюйма от

точки P . Поскольку эти расстояния равны

$$\frac{a(30 - x_0)}{\sqrt{a^2 - x_0^2}}, \quad \frac{a(24 - y_0)}{\sqrt{a^2 - y_0^2}}, \quad \frac{a(18 - z_0)}{\sqrt{a^2 - z_0^2}},$$

то, приравнивая квадрат каждого из этих трех выражений $^{81}/_4$, освобождаясь от знаменателей и складывая, получаем уравнение

$$(30 - x_0)^2 + (24 - y_0)^2 + (18 - z_0)^2 = ^{81}/_2.$$

Таким образом, расстояние от точки P до угла коробки равно $9/\sqrt{2}$, а полудлина рулона a меньше диагонали коробки, равной $30\sqrt{2} \approx 42,43$, но больше чем $30\sqrt{2} - 9\sqrt{2} \approx 36,06$. Координаты точки $P(x_0, y_0, z_0)$ зависят от a следующим образом:

$$\begin{aligned} (4a^2 + 81)x_0 &= 120a^2 - 9a\sqrt{4a^2 - 3519}, \\ (4a^2 + 81)y_0 &= 96a^2 - 9a\sqrt{4a^2 - 2223}, \\ (4a^2 + 81)z_0 &= 72a^2 - 9a\sqrt{4a^2 - 1215}. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть $f(a) \equiv (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) - a^2$, где x_0, y_0, z_0 заменены их выражениями из (2). Чтобы найти нуль уравнения $f(a) = 0$, лежащий в интервале $36,06 < a < 42,43$, можно воспользоваться, например, методом хорд (линейной интерполяцией). Полагая $a = 36$, находим $x_0 = 27,027$, $y_0 = 20,282$, $z_0 = 13,846$ и $f(36) = 37,55$. Аналогично вычисляем $f(37) = -44,14$. Следующее приближение дает $f(36,4) = 4,92$ и $f(36,5) = -3,20$. Таким образом, с точностью до второго знака после запятой $a = 36,46$ дюйма. Таким образом, рулон немного длиннее шести футов.

315*. Для того чтобы окружности радиусов R и ρ пересекались ортогонально, необходимо и достаточно, чтобы расстояние между их центрами d удовлетворяло соотношению

$$d^2 = R^2 + \rho^2.$$

Поскольку для окружности девяти точек $\rho = R/2^1$, то $d = (\sqrt{5}/2)R$, где R — радиус описанной окружности.

¹ См., например, С. И. Зетель, Новая геометрия треугольника, М., Учпедгиз, 1940, стр. 33. — Прим. ред.

С другой стороны, центр O_9 окружности девяти точек делит пополам отрезок, соединяющий центр описанной окружности O и ортоцентр H (см. III. 1), откуда $HO = R\sqrt{5}$.

Наконец,

$$HO^2 = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

(см. Зетель, стр. 40), так что для ортогональности окружности девяти точек и описанной окружности необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2.$$

По теореме синусов оно сводится к условию задачи

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1.$$

316. Пусть биссектриса внешнего угла при вершине C пересекает прямую AB в точке M . Возможны два случая: либо вершина A лежит между вершиной B и точкой M , либо вершина B лежит между вершиной A и точкой M . В первом случае угол M равен $\pi/2 - (B + C/2)$, во втором — углу $B + C/2 - \pi/2$. Следовательно, $\sin M = \pm \cos(B + C/2)$. Биссектриса CM не может быть параллельной стороне AB , поскольку в противном случае углы B и C удовлетворяли бы соотношению $C/2 + B = \pi/2$ и углы B и A были бы равны вопреки предположению о том, что треугольник ABC косугольный. В треугольнике BCM

$$\frac{CM}{BC} = \frac{\sin B}{\sin M} = \pm \frac{\sin B}{\cos\left(B + \frac{C}{2}\right)}.$$

Аналогично из треугольника BCN , где N — точка пересечения стороны AC с биссектрисой внешнего угла при вершине B , получаем

$$\frac{BN}{BC} = \pm \frac{\sin C}{\cos\left(C + \frac{B}{2}\right)}.$$

Поскольку по условиям задачи $CM = CN$, то

$$\sin C \cos\left(B + \frac{C}{2}\right) \mp \sin B \cos\left(C + \frac{B}{2}\right) = 0.$$

Выразив синусы всех углов через синусы половинных углов, преобразуем это выражение к виду

$$2 \left[\sin \frac{B}{2} \mp \sin \frac{C}{2} \right] \left[\cos^2 \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right) \pm \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right] = 0. \quad (1)$$

Верхние знаки соответствуют однотипному расположению точек пересечения биссектрис внешних углов при вершинах B и C относительно концов противоположащей стороны: для обеих биссектрис имеет место либо первый, либо второй из двух случаев, указанных в начале решения. Второй сомножитель в левой части равенства (1) представляет собой сумму двух положительных величин и поэтому не может обращаться в нуль. Следовательно,

$$\sin \frac{B}{2} = \sin \frac{C}{2}$$

и треугольник ABC равнобедренный вопреки условию.

Если же точки пересечения биссектрис внешних углов при вершинах B и C расположены по-разному относительно концов противоположащих сторон, то первый сомножитель в левой части равенства (1) не может обращаться в нуль и

$$\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \cos^2 \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right) = \sin^2 \frac{A}{2}.$$

Подставляя $[(p-b)(p-c)/bc]^{1/2}$ вместо $\sin(A/2)$ и аналогичные выражения вместо синусов остальных углов, получаем соотношение, эквивалентное тому, которое требовалось доказать.

Более того, соотношение

$$\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \sin^2 \frac{A}{2}$$

необходимо и достаточно для того, чтобы отрезок $(p-a)/a$ был средним геометрическим отрезков $(p-b)/b$ и $(p-c)/c$.

317. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — кнопочные выключатели, а P_n — последовательность $A_i, A_j, \dots, A_l$ (если такая существует), в которой нужно нажать кнопки, чтобы не позднее того, как мы нажмем последнюю кнопку A_l , лампа загоралась (индексы $i, j, \dots$ не обязательно должны быть различными). Присоединим к этому набору еще один выключатель A_{n+1} . Если A_{n+1} находится в положе-

нии «включено» (его контакт замкнут), то последовательность P_n позволит зажечь лампу.

Следовательно, если, нажав кнопки выключателей $A_1, A_2, \dots, A_n$ в последовательности P_n , мы обнаружим, что лампа не загорелась, то это будет означать лишь одно: выключатель A_{n+1} находится в положении «выключено». Нажав на кнопку выключателя A_{n+1} , мы переведем его в положение «включено», после чего, нажав кнопки в последовательности P_n , зажжем лампу. Кратко эту взаимосвязь можно выразить соотношением

$$P_{n+1} = P_n A_{n+1} P_n. \quad (1)$$

Это рекуррентное соотношение вместе с очевидным начальным условием

$$P_1 = A_1 \quad (2)$$

позволяет найти P_n при любом n . Кроме того, из него следует также, что последовательность P_n существует при любом n .

Пусть теперь g_n — наибольшее число раз, которое требуется нажать на кнопки n выключателей, чтобы лампа загорелась. Тогда из соотношения (1) следует, что

$$g_{n+1} = 2g_n + 1, \quad (3)$$

а из начального условия (2) — что

$$g_1 = 1. \quad (4)$$

Таким образом,

$$g_n = 2^n - 1. \quad (5)$$

Число возможных состояний набора из n кнопочных выключателей равно 2^n . Одно из этих состояний — когда все n выключателей находятся в положении «включено» — соответствует горящей лампе. Следовательно, число состояний, соответствующих не горящей лампе, равно $2^n - 1$, то есть совпадает с g_n . Нетрудно доказать, что не существует решения с числом g_n , которое было бы меньше $2^n - 1$. Следует также иметь в виду, что последовательностями P_n , удовлетворяющими рекуррентному соотношению (1) с начальным условием (2), не исчерпывается множество всех решений. Например, при $n = 3$ последовательность

$$P_3 = 1\ 232\ 123$$

не удовлетворяют соотношениям (1) и (2). Аналогично при $n = 4$ соотношениям (1) и (2) не удовлетворяют по крайней мере три допустимые последовательности:

$$P_4 = 123\ 412\ 324\ 321\ 432,$$

$$P_4 = 123\ 432\ 341\ 432\ 343,$$

$$P_4 = 123\ 121\ 431\ 321\ 314.$$

В случае когда выключатели срабатывают при p -м нажатии, состояния (1) и (2) следует заменить на

$$P_{n+1} = P_n A_{n+1} P_n \dots P_n A_{n+1} P_n \quad (1')$$

$$P_1 = A_1 A_1 \dots A_1 \quad (2')$$

(в обоих случаях буква A употребляется $p - 1$ раз), откуда $g_n = p^n - 1$.

318. Абсциссы точек экстремума являются корнями уравнения $3x^2 + 2px + q = 0$. Если эти корни — целые числа, то коэффициенты p и q должны быть кратны 3. Пусть $p = 3P$, $q = 3Q$. Если d — любой делитель числа P ($d > 1$) и d^2 делит Q , то, положив $x = zd$, мы получим два новых уравнения $z^2 + 3(P/d)z + 3Q/d^2 = 0$ и $z^2 + 2(P/d)z + Q/d^2 = 0$ с целочисленными корнями. Следовательно, необходимо исследовать лишь те случаи, когда q не делится на квадрат любого делителя коэффициента p . (Остальные случаи мы получим, взяв коэффициенты p и q , удовлетворяющие этим условиям, и умножив p на d , а q на d^2 .)

Поскольку оба уравнения $x^2 + 2Px + Q = 0$ и $x^2 + 3Px + 3Q = 0$ имеют целочисленные корни, то их дискриминанты должны быть точными квадратами, то есть $9P^2 - 12Q = (3a)^2$, $P^2 - Q = b^2$, откуда $P^2 = 4b^2 - 3a^2$. По сделанному предположению a и b взаимно просты. Следовательно, в разложении $3a^2 = (2b + P)(2b - P)$ можно положить $(2b + P) = 3au/v$, $(2b - P) = av/u$, где u и v — взаимно простые числа. Тогда $b/a = (3u^2 + v^2)/4uv$ и $P/a = (3u^2 - v^2)/2uv$. Поскольку a , b (как и u , v) — взаимно простые числа, то либо $a = 2uv$, $b = (3u^2 + v^2)/4$, $P = (3u^2 - v^2)/2$, $Q = 3(u^2 - v^2)(9u^2 - v^2)/16$, либо $a = 4uv$, $b = 3u^2 + v^2$, $P^2 = 6u^2 - 2v^2$, $Q = 3(u^2 - v^2)(9u^2 - v^2)$ в зависимости от того, являются ли оба числа u и v нечетными или одно из них четно. (Пользуясь тем, что p и q зависят

лишь от u^2 и v^2 , мы можем ограничить рассмотрение лишь положительными значениями u и v . Если бы a или b были равны нулю, то исходное кубическое уравнение имело бы двойной корень или мнимые корни, что противоречит условию.)

Итак, полное решение задачи можно представить в виде

$$p = 3d(3u^2 - v^2), \quad q = [9d^2(u^2 - v^2)(9u^2 - v^2)]/16,$$

где u и v — взаимно простые числа, а d — целое или кратное четырем число в зависимости от того, различна или совпадает четность чисел u и v .

Наоборот, если p и q заданы приведенными выше выражениями, то исходное кубическое уравнение принимает вид

$$y = x^3 + \frac{3}{2} d(3u^2 - v^2) x^2 + \frac{9d^2(9u^2 - v^2)(u^2 - v^2)}{16} x = 0$$

и имеет корни $x = 0, [3d(v + 3u)(v - u)]/4, [3d(v - 3u)(v + u)]/4$.

Уравнение

$$x^2 + d(3u^2 - v^2)x + \frac{3d^2(9u^2 - v^2)(u^2 - v^2)}{16} = 0,$$

которому удовлетворяют абсциссы точек экстремума, также имеет целочисленные корни

$$x = \frac{3d(v + u)(v - u)}{4}, \quad \frac{d(v - 3u)(v + 3u)}{4}.$$

319. Воспользуемся тождеством

$$1 - (1 - e^x)(1 - e^{2x})(1 - e^{2^2x}) \dots (1 - e^{2^{n-1}x}) = \\ = e^x + e^{2x} - e^{3x} - \dots - \dots + (-1)^n e^{(2^n - 1)x},$$

в котором, как легко видеть, знак перед e^{mx} определяется указанным в условии правилом.

Приравнивая коэффициенты при x^p , где $0 \leq p < n$, в правой и левой частях, получаем

$$1^p + 2^p - 3^p + \dots \pm (2^n - 1)^p = 0,$$

что и требовалось доказать.

320. Сложив неравенства $2ab \leq a^2 + b^2$, $2ac \leq a^2 + c^2$, $2bc \leq b^2 + c^2$ и прибавив $2T = 2(ab + ac + bc)$, получим после несложных преобразований $3T \leq S^2$.

Поскольку a , b и c — длины сторон треугольника, то $|a - c| < b$, $|a - b| < c$ и $|b - c| < a$. Возводя эти неравенства в квадрат, складывая и прибавляя $2T = 2(ab + ac + bc)$, получим после некоторых преобразований второе неравенство $S^2 < 4T$.

Итак, $3T \leq S^2 < 4T$, что и требовалось доказать.

Перейдем теперь к тетраэдру. Пусть S — сумма длин ребер тетраэдра, T — сумма их попарных произведений. Выписав 15 неравенств вида $2ab \leq a^2 + b^2$, сложим их, разделим на 5, и, прибавив $2T$, получим $12T/5 \geq S^2$.

Выписав для каждой грани тетраэдра по три неравенства вида $|a - b| < c$, возведем их в квадрат, сложим, перенесем все члены вида a^2 в левую часть, а все попарные произведения — в правую, разделим на 2 и прибавим $2T$. В результате мы получим неравенство $S^2 < 3T$.

Итак, для тетраэдра выполняются неравенства

$$\frac{12}{5} T \leq S^2 < 3T,$$

аналогичные неравенствам $3T \leq S^2 < 4T$, справедливым для треугольника.

321. Заметим, что сумма $a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}$ совпадает с коэффициентом при x^{n-1} в разложении

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + \dots) \times \\ & \times (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots) = \\ & = \frac{(1+x)^n}{(1-x)^3} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{(1+x)^n}{(1-x)^4} = \frac{[2 - (1-x)]^n}{(1-x)^4} = \\ & = 2^n (1-x)^{-4} - n \cdot 2^{n-1} (1-x)^{-3} + \\ & + \binom{n}{2} 2^{n-2} (1-x)^{-2} - \binom{n}{3} 2^{n-3} (1-x)^{-1} + \\ & + (\text{многочлен степени } n-4 \text{ относительно } (1-x)). \end{aligned}$$

Используя биномиальный ряд

$$\begin{aligned} (1-x)^{-n} &= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} (-1)^r x^r = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{n-1} x^r = \sum_{r=n-1}^{\infty} \binom{r}{n-1} x^{r-n+1}, \end{aligned}$$

получаем разложение правой части

$$2^n \sum_{r=3}^{\infty} \binom{r}{3} x^{r-3} - n \cdot 2^{n-1} \sum_{r=2}^{\infty} \binom{r}{2} x^{r-2} + \\ + \binom{n}{2} 2^{n-2} \sum_{r=1}^{\infty} r x^{r-1} - \binom{n}{3} 2^{n-3} \sum_{r=0}^{\infty} x^r,$$

в котором коэффициент при x^{n-1} равен

$$2^n \binom{n+2}{3} - n \cdot 2^{n-1} \binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} 2^{n-2} n - \\ - \binom{n}{3} 2^{n-3} = [8n(n+1)(n+2) - 12n^2(n+1) + \\ + 6n^2(n-1) - n(n-1)(n-2)] 2^{n-4} / 3 = \\ = n(n+2)(n+7) 2^{n-4} / 3.$$

Сравнивая оба выражения для коэффициента при x^{n-1} , получаем

$$a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} = \frac{n}{3} (n+2)(n+7) \cdot 2^{n-4},$$

что и требовалось доказать.

322. Если $B^2 + m = A^2$, то $m = rs$, где $r = A + B$ и $s = A - B$. Поскольку $B = (r - s)/2$, то числа r и s должны быть либо оба нечетные, либо оба четные. Целое число B может принимать не только положительные, но и отрицательные значения и обращаться в нуль, поэтому никаких других ограничений на числа r и s , кроме того, что их произведение должно быть равным m , не налагается. Если $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$, где p_i — различные простые числа, а α_i — положительные целые числа, то любой делитель числа m содержится один и только один раз среди членов разложения

$$(1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \dots + p_2^{\alpha_2}) \dots \\ \dots (1 + p_n + p_n^2 + \dots + p_n^{\alpha_n}).$$

Следовательно, если m нечетно, то число делителей числа m , а тем самым и число целочисленных значений B равно

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1).$$

Если m четно и $p_1 = 2$, то оба числа r и s должны быть четными. Тогда число целочисленных значений B , при которых выражение $B^2 + m$ совпадает с точным квадратом, равно числу делителей $m/4$, то есть

$$(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1).$$

323. Длины сторон основных пифагоровых треугольников определяются выражениями $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$, где $m > n$, числа m и n имеют различную четность и взаимно просты. Если r — радиус вписанной окружности, то, как во всяком прямоугольном треугольнике, $c = a + b - 2r$, откуда $r = n(m - n)$. Если $r = p$ — нечетному простому числу, то возможны лишь два случая: либо $n = 1$, $m = p + 1$ и

$$a_1 = p(p + 2), \quad b_1 = 2(p + 1), \quad c_1 = p^2 + 2p + 2,$$

либо $n = p$, $m = p + 1$ и

$$a_2 = 2p + 1, \quad b_2 = 2p(p + 1), \quad c_2 = 2p^2 + 2p + 2.$$

Теперь перейдем к доказательству утверждений задачи.

а. Поскольку $a_1 - b_1 = p_2 - 2$ и $b_2 - a_2 = 2p^2 - 1$, то длины наименьших сторон двух пифагоровых треугольников равны b_1 и a_2 , причем они отличаются на 1.

б. $c_1 - a_1 = 2$, $c_2 - b_2 = 1$.

в. $a_1 + b_1 + c_1 + a_2 + b_2 + c_2 = 6(p + 1)^2$.

г. Наименьшие углы, то есть углы, равные $\arctg 2(p + 1)/p(p + 2)$ и $\arctg (2p + 1)/2p(p + 1)$, стремятся к нулю. Следовательно, предел их отношения равен пределу отношения их тангенсов:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} 2(p + 1)^2 / [(p + 1/2)(p + 2)] = 2.$$

д. Отношение площадей равно

$$\frac{\frac{1}{2} a_2 b_2}{\frac{1}{2} a_1 b_1} = \frac{2p + 1}{p + 2} = 2 - \frac{3}{p + 2}.$$

324. Пусть P и P' — две точки листа бумаги, совпадающие при его перегибе. Тогда любая точка A линии сгиба отстоит от точек P и P' на одинаковое расстояние и отрезки прямых AP и AP' при перегибе листа бумаги совпадают. Следовательно, линия сгиба, как геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка PP' , представляет собой прямую, проходящую через середину отрезка PP' перпендикулярно ему.

325. Сумма n первых натуральных чисел делит их произведение, если число $n + 1$ делит $2(n - 1)!$. Если число $n + 1$ четно, то множитель $(n + 1)/2$ входит в $(n - 1)!$. Если $n + 1$ — нечетное составное число, то либо оно само, либо $(2n + 1)$ представимо в виде произведения двух неравных сомножителей, входящих в $(n - 1)!$. Итак, $n + 1$ не делит $2(n - 1)!$ лишь в том случае, если $n + 1$ — нечетное простое число.

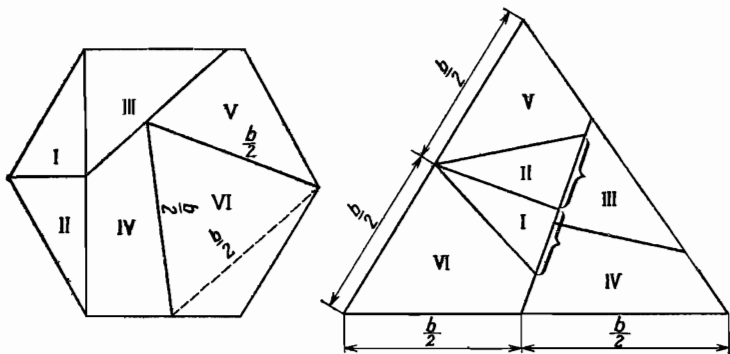


Рис. 24.

326. Способ разрезания правильного шестиугольника на семь частей, из которых можно составить равносторонний треугольник, показан на рис. 24¹.

327. Сравнение $n^2 \equiv n \pmod{10^a}$ не следует из сравнения $n^r \equiv n \pmod{10^a}$ в двух случаях: если r — нечетное число (в этом случае $4^r \equiv 4 \pmod{10}$), в то время как

¹ Конечно, отсюда еще не вытекает, что это наименьшее число частей. (Методы решения геометрических задач на разрезание и многие рекордные разрезания подробно изложены в книге Г. Линдгрена, Занимательные задачи на разрезание, М., «Мир», 1977.) — Прим. перев.

$4^2 \equiv 16$) и если $r \equiv 1 \pmod{5}$ (поскольку $21^5 \equiv 1 \pmod{100}$), то в этом случае $21^r \equiv 21 \pmod{100}$, в то время как $21^2 \equiv 441$). Пусть теперь $r - 1$ — число, взаимно простое с числом 10. Предположим, что число $(n^{r-1} - 1)/(n - 1)$ делится на 5. Тогда $n^{r-1} \equiv 1 \pmod{5}$. Но по малой теореме Ферма (III.6) $n^4 \equiv 1 \pmod{5}$, и поскольку число $r - 1 \equiv \pm 1 \pmod{4}$ (как нечетное), то $n \equiv 1 \pmod{5}$ или $n^{-1} \equiv 1 \pmod{5}$, что то же самое. Полагая $n = 5m + 1$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{n^{r-1} - 1}{n - 1} &= \frac{(5m + 1)^{r-1} - 1}{5m} = \\ &= \frac{(5m)^{r-1} + \dots + 5m(r-1) + 1 - 1}{5m} \equiv r - 1 \pmod{5}. \end{aligned}$$

Но это противоречит предположению о том, что $r - 1$ взаимно просто с 10. Далее, $(n^{r-1} - 1)/(n - 1) = n^{r-2} + \dots + n + 1$ нечетно при любом n , если $r - 1$ нечетно. Таким образом, число $(n^r - n)/(n^2 - n)$ взаимно просто с 10, и из сравнения $n^r \equiv n \pmod{10^a}$ следует сравнение $n^2 \equiv n \pmod{10^a}$.

Итак, допустимыми значениями r являются все четные числа, не оканчивающиеся цифрой 6. (В тривиальном случае, когда $a = 1$, эту оговорку можно снять.)

328. Пусть $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$, (x_1, y_1) — координаты точек A , B , P , и пусть кубическая парабола пересекает ось x еще и в точке C с координатами $(\gamma, 0)$. Тогда уравнение кубической параболы можно представить в виде

$$y = K(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma). \quad (1)$$

Любая прямая $y = m(x - \alpha)$, проходящая через точку A , пересекает кубическую параболу (1) в точках, абсциссы которых определяются из уравнения $K(x - \beta)(x - \gamma) = m$. Если эти точки совпадают с точкой P , то

$$\frac{m}{K} = -\frac{(\beta - \gamma)^2}{4}, \quad x_1 = \frac{\beta + \gamma}{2}.$$

Таким образом, проекция $(x_1, 0)$ точки P на ось x совпадает с серединой отрезка BC . Следовательно, длина отрезка AB вдвое больше расстояния между точками P и Q по горизонтали, но отрезки AB и PQ имеют противоположное направление.

$$\frac{AB}{PQ} = -2$$

не зависит от коэффициентов кубической параболы, что и требовалось доказать.

329. Оси прямоугольной системы координат направим параллельно краям бильярдного стола, выбрав их направление так, чтобы координаты шара после удара кием либо возрастали, либо не изменялись. Пусть (a, b) — начальное положение шара, а u и v — размеры бильярдного стола. Тогда «почти при всех» значениях a и b удар, нанесенный кием по бильярдному шару в направлении с угловым коэффициентом sv/ru , где r и s — любые неотрицательные целые числа, приводит к желаемому результату: шар после конечного числа отражений от бортов (равного $2(r+s)$) возвращается в исходную точку.

Докажем это утверждение. Отражая сначала бильярдный стол относительно его сторон, затем его образы относительно тех сторон, к которым не примыкают образы стола, полученные на более ранних этапах построения, замостим первый квадрант прямоугольниками, конгруэнтными бильярдному столу. Соответственными точками двух смежных прямоугольников, примыкающих друг к другу вдоль общей стороны, будем считать точки, симметричные относительно общей стороны. Тогда траекторию бильярдного шара можно развернуть в прямую, проходящую по прямоугольной сетке. Образами точки (a, b) — начального положения бильярдного шара — являются узлы сетки с координатами $(2ru \pm a, 2sv \pm b)$, где $r, s = 0, 1, 2, \dots$. Всякий раз, когда «распрямленная» траектория шара пересекает прямую $x = ru$ или $y = sv$, бильярдный шар в действительности отражается от борта. Следовательно, на пути от точки (a, b) к точке $(2ru + a, 2sv + b)$ бильярдный шар претерпевает $2r + 2s$ отражений, а угловой коэффициент распрямленной траектории (совпадающий с угловым коэффициентом участка траектории от начального положения до точки первого отражения от борта) равен sv/ru . На пути к каждой из точек $(2ru - a, 2sv + b)$ и $(2ru + a, 2sv - b)$ бильярдный шар претерпевает нечетное число отражений от бортов, а именно $2r + 2s - 1$. Точку $(2ru - a,$

2sv — b) следует исключить, поскольку в силу принятых упрощающих предположений траектория шара не должна проходить через точки (ru, sv).

330. Пусть A, B, C — центры сфер радиусами a, b и x , сфера C касается двух других сфер и плоскости, A', B', C' — проекции точек A, B, C на плоскость. По теореме Пифагора расстояние между параллельными прямыми AA' и BB' равно

$$[(a+b)^2 - (a-b)^2]^{1/2} = 2(ab)^{1/2}.$$

Аналогично расстояния между прямой CC' и прямыми AA' и BB' равны $2(ax)^{1/2}$ и $2(bx)^{1/2}$. Поскольку все три прямые расположены в одной плоскости, то

$$2(ab)^{1/2} = 2(ax)^{1/2} + 2(bx)^{1/2},$$

откуда

$$x^{-1/2} = a^{-1/2} + b^{-1/2},$$

что и требовалось доказать.

331. Длины лестниц a и b , высота точки пересечения над основанием лестниц c и расстояние между стенами d связаны между собой соотношением

$$(a^2 - d^2)^{-1/2} + (b^2 - d^2)^{-1/2} = c^{-1}. \quad (1)$$

Выражения для a, b, c и d , приведенные в условии задачи, удовлетворяют этому соотношению. Из трех условий, наложенных на числа s, t, u и v , следует, что $a > b > 0$ и d — целое число.

Читателю предлагается показать, что выражениями для a, b, c и d , приведенными в условии задачи, исчерпываются все допустимые целочисленные решения (1), а наиболее простое частное решение (a, b, c, d) в нечетных числах имеет вид (105, 87, 35, 63) и порождается числами $k = 64$ и $(s, t, u, v) = (7, 1, 9, 7)$.

332. Рассмотрим необходимость и достаточность условия отдельно.

а. Необходимость: если p — нечетное простое число, то

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}.$$

В таком виде утверждение было доказано Ч. Бэббеджем. Как показал Вольстенхольм¹, при $p > 3$ сравнение справедливо даже по модулю p^3 . Еще более точный результат можно получить следующим образом. Запишем биномиальный коэффициент, стоящий в левой части сравнения, в виде

$$\binom{2p-1}{p-1} = \frac{(p+1)(p+2)\dots(p+(p-1))}{(p-1)!} = \\ = 1 + \frac{A_{p-2}p + A_{p-3}p^2 + \dots + p^{p-1}}{(p-1)!},$$

где A_v — сумма всех возможных произведений из чисел $1, 2, \dots, p-1$ по v . Сравнение Бэббеджа следует из того известного факта, что если p — простое число, то $A_v \equiv 0 \pmod{p}$ для $0 < v < p-1$ (см. решение задачи 231).

Положив $x = p$ в тождестве

$$(x-1)(x-2)\dots(x-(p-1)) = \\ = x^{p-1} - A_1x^{p-2} + \dots - A_{p-2}x + (p-1)!,$$

получим

$$A_{p-2} = A_{p-3}p - A_{p-4}p^2 + \dots + p^{p-2}. \quad (1)$$

В дальнейшем будем предполагать, что p — простое число, большее 3. Тогда из (1) следует, что $A_{p-2} \equiv \equiv 0 \pmod{p^2}$ и сравнение Вольстенхольма.

Поскольку

$$\frac{A_{p-2}}{p^2} = \frac{A_{p-3}}{p} - A_{p-4} + \dots + p^{p-4} \equiv \frac{A_{p-3}}{p} \pmod{p},$$

то

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 + \frac{p^3}{(p-1)!} \left(\frac{A_{p-2}}{p^2} + \frac{A_{p-3}}{p} \right) \pmod{p^4} \equiv \\ \equiv 1 + \frac{2p^3}{(p-1)!} \frac{A_{p-3}}{p} \pmod{p^4}.$$

¹ См. L. Dickson, History of Theory of Numbers, 1, 271. — Прим. перев.

Теорема Вильсона (III.6) позволяет заменить $(p-1)!$ на -1 , а из общего результата Глешера¹ следует, что

$$A_{p-3}/p \equiv \frac{1}{3} B_{p-3} \pmod{p},$$

где B_{p-3} — число Бернулли. Таким образом, окончательно находим

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 - \frac{2}{3} p^3 B_{p-3} \pmod{p^4}.$$

б. Сформулированное в задаче условие, по-видимому, недостаточно. Докажем, что сравнение

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$$

выполняется, если $p = q^2$, где q — простое число, удовлетворяющее сравнению $B_{q-3} \equiv 0 \pmod{q^2}$. Такое число q следует искать среди так называемых нерегулярных простых чисел 37, 59, 67, 101, ..., то есть таких, что q делит по крайней мере одно из чисел $B_2, B_4, B_6, \dots, B_{q-3}$. И хотя при нескольких начальных значениях q не делит B_{q-3} , по-видимому, нет причины, по которой число q не должно быть делителем числа B_{q-3} .

Положим по определению

$$f(1) = 1, \quad f(m) = \prod_i \frac{m + a_i}{a_i},$$

где a_i принимает значения $\varphi(m)$ натуральных чисел, меньших числа m и взаимно простых с ним. Функция $f(m)$ принимает не только целочисленные значения, но если ее аргумент совпадает с простым числом p , то

$$f(p) = \binom{2p-1}{p-1}.$$

Как нетрудно доказать, в общем случае выполняется соотношение

$$\binom{2m-1}{m-1} = \prod_{d|m} f(d).$$

¹ L. Dickson, History of the Theory of Numbers, 1, 100. — Прим. перев.

В частности, если $m = p^2$, то

$$\binom{2m-1}{m-1} = f(p^2) f(p) = f(m) \binom{2p-1}{p-1}.$$

Поскольку $\sum_i a_i^{-1} \equiv 0 \pmod{m}$ при $m > 2$, то

$$f(m) = (m^{\varphi(m)} + m^{\varphi(m)-1} \sum_i a_i + \dots) (\prod_i a_i)^{-1} + \\ + m \sum_i a_i^{-1} + 1 \equiv 1 \pmod{m^2}.$$

Пользуясь сравнением, приведенным в конце пункта „а“, получаем

$$\binom{2p^2-1}{p^2-1} \equiv 1 - \frac{2}{3} p^3 B_{p-3} \pmod{p^4}.$$

Итак, если существует простое число p , которое делит B_{p-3} , то квадрат этого простого числа должен удовлетворять сравнению

$$\binom{2m-1}{m-1} \equiv 1 \pmod{m^2}.$$

333. Оставляя в стороне тривиальные случаи, предположим, что $b < c < a$. Если сторона RS прямоугольника $PQRS$ (вид на шкаф сверху) скользит по углу A , а угол шкафа Q — по стене DE (рис. 25), то угол шкафа P описывает некую кривую. Выберем на плоскости рисунок прямоугольную систему координат так, чтобы ось y шла по направлению стены DE , а ось x проходила через угол A . Пусть (x, y) и $(0, z)$ координаты точек P и Q , а $\alpha = \angle PQE$. Тогда

$$y - z = a \cos \alpha, \quad x = a \sin \alpha, \quad c + z \operatorname{tg} \alpha = b \sec \alpha.$$

Исключив из этих соотношений z и α , получим уравнение описываемой вершиной P кривой в виде $y = f(x)$, где

$$f(x) = \frac{ab + (x-c)^2 (a^2 - x^2)^{1/2}}{x}.$$

Вычислим производные функции $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{a^2 c - x^3 - ab (a^2 - x^2)^{1/2}}{x^2 (a^2 - x^2)^{1/2}},$$

$$f''(x) = -\frac{a^2 (x-c)}{x (a^2 - x^2)^{3/2}} - \frac{2a}{x^3} \left[\frac{ac}{(a^2 - x^2)^{1/2}} - b \right],$$

Ясно, что при $c \leq x < a$ последнее выражение отрицательно, поэтому функция $f(x)$ при $c \leq x < a$ имеет не более одного максимума, который и дает искомое значение d .

Рассмотрим в отдельности следующие три случая.

Случай 1. Если $f'(c) \leq 0$, то при возрастании x от c до a функция $f(x)$ убывает. Толщина стены не играет

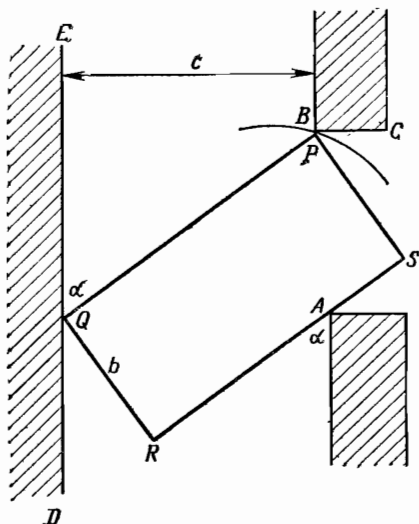


Рис. 25.

роли и $d = f(c) = ab/c$. Этот случай имеет место при $ab \geq c(a^2 - c^2)^{1/2}$.

Случай 2. Если $f'(c) > 0$, $f'(c+h) < 0$, то функция $f(x)$ достигает своего максимального значения, равного ширине дверного проема

$$d = \frac{ab + (x - c)(a^2 - x^2)^{1/2}}{x},$$

между c и $c+h$. Здесь x — положительный корень уравнения

$$ab(a^2 - x^2)^{1/2} = a^2c - x^3.$$

Этот случай имеет место, если $ab < c(a^2 - c^2)^{1/2}$ и либо $a \leq c+h$, либо $ab > [a^2c - (c+h)^3]/[a^2 - (c+h)^2]^{1/2}$.

Случай 3. Если $f'(c+h) \geq 0$, так что функция $f(x)$ возрастает на всем интервале $c \leq x \leq c+h$, то ширина дверного проема равна $f(c+h)$, то есть

$$d = \frac{ab + h[a^2 - (c+h)^2]^{1/2}}{c+h}.$$

Этот случай имеет место, если

$$ab \leq \frac{a^2c + (c+h)^3}{[a^2 - (c+h)^2]^{1/2}}.$$

Случай 2 наблюдается, например, при следующем наборе значений: $a = 6$, $b = 2,38$, $c = 4,5$, $h > 0,3$, $x = 4,8$, $d = 3,2$.

334. Десятичное разложение дроби $1/p$ имеет период длиной в $(p-1)/2$ или q знаков, где q — некоторый делитель числа $(p-1)/2$ в том и только в том случае, если $10^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$. Но по критерию Эйлера именно такому сравнению должно удовлетворять число 10, если оно является квадратичным вычетом по модулю p (III.7). Известно, что число 5 служит квадратичным вычетом по модулю простого числа вида $5n \pm 1$, а число 2 — квадратичным вычетом по модулю любого простого числа вида $8n \pm 1$ *.

Кроме того, известно, что число 10 — квадратичный вычет по модулю p , если числа 2 и 5 — оба квадратичные вычеты (или оба квадратичные невычеты) по тому же модулю (III.7(6)). Таким образом, простое число p должно быть либо представимо в двух видах $5n \pm 1$ и $8n \pm 1$, либо не представимо ни в одном из них, то есть $p = 40n \pm r$, где $r = 1, 3, 9$ или 27. Отсюда (поскольку $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{40}$) следует утверждение задачи.

335. а. Пусть $p = 2k + 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{p^n + 1}{2} &= \frac{(2k + 1)^n + 1}{2} = \\ &= 2^{n-1}k^n + n2^{n-2}k^{n-1} + \dots + nk + 1. \end{aligned}$$

Если число n четно, то $(p^n + 1)/2$ нечетно и поэтому не может быть делителем числа 2^m при $k \neq 0$. Если число n нечетно и больше 1, то

$$\frac{p^n + 1}{p + 1} = p^{n-1} - p^{n-2} + \dots + 1$$

— сумма нечетного числа нечетных слагаемых. Следовательно, при $p > 1$, $n > 1$ соотношение $p^n + 1 = 2^m$ в этом случае выполняться не может.

б. Если число n нечетно и больше 1, то число

$$\frac{p^n - 1}{p - 1} = p^{n-1} + p^{n-2} + \dots + 1$$

снова нечетно. Если же n четно, то

$$p^n - 1 = (p^{n/2} - 1)(p^{n/2} + 1).$$

Но по доказанному в пункте «а» число $p^r + 1$ не может быть степенью двойки, если $r > 1$. Следовательно, при $n > 2$ соотношение $p^n - 1 = 2^m$ выполняться не может.

336. Разберем задачу на примере президентских выборов 1940 и 1945 гг. Поскольку число выборщиков составляло тогда 531, на пост президента мог быть избран кандидат, заручившийся поддержкой не менее 266 выборщиков. Общее число выборщиков от нескольких штатов как раз оказалось равным 266 (если бы это было не так, необходимое минимальное число голосов было бы больше). Это следующие штаты:

Штат	Число выборщиков	
	выборы 1940 г.	выборы 1945 г.
Калифорния	22	25
Иллинойс	29	28
Луизиана	11	11
Мейн	5	5
Массачусеттс	17	16
Мичиган	19	20
Миссури	15	15
Нью-Джерси	16	16
Нью-Йорк	47	47
Огайо	26	25
Пенсильвания	36	35
Техас	23	23
	266	266

Поскольку число избирателей N пропорционально числу выборщиков, то $N = 531n$ (по предположению, в штате, представленном k выборщиками, в голосовании могут принять участие kn избирателей). Кандидату, победившему на выборах 1940 и 1945 гг., достаточно было получить голоса выборщиков только в перечисленных выше штатах и не собрать ни одного голоса среди выборщиков всех остальных штатов.

В каждом штате ему необходимо собрать $[kn/2 + 1]$ голосов избирателей. Суммируя это выражение по всем штатам, получаем, что для победы на президентских выборах 1940 и 1945 гг. кандидат должен был собрать

$$\frac{133}{531} N + \varepsilon$$

голосов избирателей, где $\varepsilon = 8$, если n — нечетное число, и $\varepsilon = 12$, если n — четное число, то есть за него должны были проголосовать 25,05% от общего числа избирателей.

В общем случае минимально необходимое число голосов дается формулой

$$\frac{MN}{2L} + S - \frac{\sigma}{2}.$$

Здесь L — общее число выборщиков, S — число штатов, располагающих в сумме M выборщиками; эти штаты надо выбирать так, чтобы M было наименьшим, которое $\geq [L/2] + 1$; σ равно числу выбранных штатов, в которых число выборщиков нечетно, если n нечетно, и $\sigma = 0$, если n четно.

337. По правилам матричного умножения

$$(a_{rs})(b_{rs}) = (p_{rs}), \quad (b_{rs})(a_{rs}) = (q_{rs}),$$

где

$$p_{rs} = \sum_{k=1}^n a_{rk} b_{ks}, \quad q_{rs} = \sum_{k=1}^n b_{rk} a_{ks}.$$

Предположим, что обе матрицы (a_{rs}) и (b_{rs}) удовлетворяют условиям задачи, то есть

$$a_{r1} = a_{2r}, \quad b_{r1} = b_{2r}, \quad a_{1r} = a_{r2}, \quad b_{1r} = b_{r2} \quad (r, s > 2),$$

$$a_{rs} = a_{sr}, \quad b_{rs} = b_{sr}, \quad a_{11} = a_{22}, \quad b_{11} = b_{22}.$$

Тогда

$$p_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \sum_{k=3}^n a_{2k}b_{k2} = \\ = a_{21}b_{12} + a_{11}b_{11} + \sum_{k=3}^n a_{k1}b_{1k} = q_{11}. \quad (1)$$

Аналогично можно проверить, что

$$p_{r1} = q_{2r}, \quad p_{1r} = q_{r2}, \quad p_{rs} = q_{sr} \quad (r, s > 2).$$

Пусть $(b_{rs}) = (a_{rs})^t$, тогда $(p_{rs}) = (q_{rs}) = (a_{rs})^{t+1}$. Из этого соотношения и равенства (1) следует, что $p_{22} = q_{11} = p_{11}$. Точно так же проверяется, что матрица $(a_{rs})^{t+1}$ удовлетворяет и остальным соотношениям. По индукции они удовлетворяются при всех t . Таким образом, первые два элемента, стоящие на главной диагонали матрицы $(a_{rs})^t$ равны, и тем самым утверждение задачи доказано.

338. Функцию $f(x)$ можно представить в виде бесконечного ряда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \int_0^1 \frac{u^n - 1}{u - 1} du,$$

так как $f^{(n)}(0) = s(n)$. Поскольку достаточные условия, позволяющие менять порядок интегрирования и суммирования, выполнены, то

$$f(x) = \int_0^1 \frac{1}{u-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ux)^n - x^n}{n!} du = \int_0^1 \frac{e^{ux} - e^x}{u-1} du = \\ = e^x \int_0^1 \frac{1 - e^{(u-1)x}}{1-u} du = e^x \int_0^1 \frac{1 - e^{-vx}}{v} dv = \\ = e^x \int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt.$$

339. Фигура, о которой говорится в условиях задачи, и четыре части, на которые необходимо разрезать квадрат $F_n \times F_n$, изображены на рис. 26.

Докажем соотношение

$$F_{n+1}F_{n-1} = F_n^2 + (-1)^n. \quad (1)$$

Воспользуемся для этого методом математической индукции. Поскольку $F_1 = F_2 = 1$, а $F_3 = F_2 + F_1 = 2$, то при $n = 2$ соотношение (1) верно: $2 \cdot 1 = 1 + (-1)^2 = 2$. Предположим, что оно верно при $n = k$. Тогда

$$\begin{aligned} F_{k+2}F_k &= (F_{k+1} + F_k)F_k = F_{k+1}F_k + F_k^2 = \\ &= F_{k+1}F_k + F_{k+1}F_{k-1} - (-1)^k = \\ &= F_{k+1}(F_k + F_{k-1}) - (-1)^k = F_{k+1}^2 + (-1)^{k+1}, \end{aligned}$$

то есть соотношение (1) верно при $n = k + 1$, а значит, и при любых n .

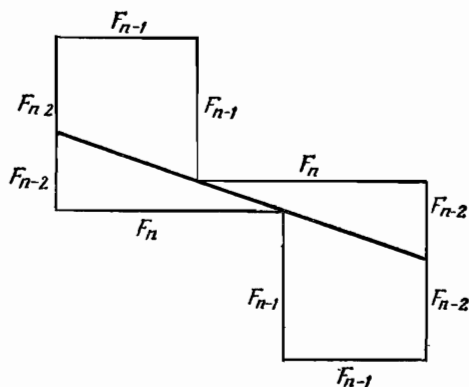


Рис. 26.

Составить из четырех частей квадрата $F_n \times F_n$ фигуру, изображенную на рис. 26, возможно¹ потому, что

$$F_n - F_{n-1} = F_{n-2}$$

и

$$\begin{aligned} 2F_{n-2} - F_{n-1} &= F_{n-2} - (F_{n-1} - F_{n-2}) = \\ &= F_{n-2} - F_{n-3} = F_{n-4}. \end{aligned}$$

¹ В действительности построенная фигура не состоит из прямоугольников; в середине ее имеется малозаметная щель, либо составляющие фигуру части квадрата перекрываются. Площадь щели и «перекрывтия» как раз и составляют недостающую или лишнюю единицу. — Прим. перев.

Покажем, что площадь фигуры на 1 отличается от площади квадрата $F_n \times F_n$:

$$\begin{aligned} 4F_{n-1}F_{n-2} + F_{n-2}F_{n-4} &= 4F_{n-1}F_{n-2} + F_{n-2}(2F_{n-2} - F_{n-1}) = \\ &= F_{n-2}(4F_{n-1} + 2F_{n-2} - F_{n-1}) = \\ &= F_{n-2}(3F_{n-1} + 2F_{n-2}) = \\ &= F_{n-2}(F_n + F_{n-2} + 2F_{n-1}) = \\ &= F_nF_{n-2} + F_{n-2}^2 + 2F_{n-1}F_{n-2} = \\ &= F_{n-1}^2 - (-1)^n + F_{n-2}^2 + 2F_{n-1}F_{n-2} = \\ &= (F_{n-1} + F_{n-2})^2 - (-1)^n = F_n^2 - (-1)^n. \end{aligned}$$

340*. Из условий задачи вытекает равенство

$$\begin{vmatrix} x_2x_3 & y_2y_3 & z_2z_3 \\ x_3x_1 & y_3y_1 & z_3z_1 \\ x_1x_2 & y_1y_2 & z_1z_2 \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^3 (x_iy_iz_i) \begin{vmatrix} x_1^{-1} & y_1^{-1} & z_1^{-1} \\ x_2^{-1} & y_2^{-1} & z_2^{-1} \\ x_3^{-1} & y_3^{-1} & z_3^{-1} \end{vmatrix} = 0,$$

а потому существуют не равные одновременно нулю числа a, b, c , такие, что

$$ax_ix_j + by_iy_j + cz_iz_j = 0 \quad (i \neq j). \quad (1)$$

Считая x, y, z однородными координатами на плоскости, рассмотрим коническое сечение

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0. \quad (2)$$

Уравнение поляры (III.5) π_i точки $P_i(x_i, y_i, z_i)$ относительно этой кривой имеет вид

$$ax_ix + by_iy + cz_iz = 0. \quad (3)$$

В силу (1) каждая из точек P_i лежит на полярах двух других.

Все точки P_i различны, поскольку совпадение, скажем, точек (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) влечет равенства $X_3 = Y_3 = Z_3 = 0$, что противоречит условию задачи.

Рассмотрим теперь три прямые π'_i , имеющие в однородных координатах уравнения

$$X_ix + Y_iy + Z_iz = 0. \quad (4)$$

Вспоминая хорошо известное свойство алгебраических элементов в определителе, заключаем, что $P_i \in \pi'_i$ при

$j \neq i$, а потому $\pi'_i = \pi_i$. Таким образом, (3) и (4) — это уравнения одной и той же прямой, а следовательно,

$$\frac{ax_i}{X_i} = \frac{by_i}{Y_i} = \frac{cz_i}{Z_i}.$$

В частности, каждое из чисел a, b, c отлично от нуля.

Подставляя найденные соотношения в (1), получаем

$$\frac{X_i X_j}{a} + \frac{Y_i Y_j}{b} + \frac{Z_i Z_j}{c} = 0,$$

и, следовательно, должен равняться нулю определитель

$$\begin{vmatrix} X_2 X_3 & Y_2 Y_3 & Z_2 Z_3 \\ X_3 X_1 & Y_3 Y_1 & Z_3 Z_1 \\ X_1 X_2 & Y_1 Y_2 & Z_1 Z_2 \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^3 (X_i Y_i Z_i) \begin{vmatrix} X_1^{-1} & Y_1^{-1} & Z_1^{-1} \\ X_2^{-1} & Y_2^{-1} & Z_2^{-1} \\ X_3^{-1} & Y_3^{-1} & Z_3^{-1} \end{vmatrix}.$$

341. Корень i -й степени из комплексного числа $z = e^{i\vartheta} = e^{(\vartheta+2k\pi)i}$ равен $e^{\vartheta+2k\pi}$, где k — произвольное целое число. При $z = -1$ получаем

$$\sqrt[i]{-1} = e^{(1+2k)\pi}.$$

Значение корня, приведенное в задаче, соответствует $k = 0$.

342. Тетраэдр с целочисленными длинами ребер, площадями граней и объемом можно построить. Таков, например, тетраэдр, у которого длина одного ребра составляет 896, длина противоположного ребра равна 990, а длина каждого из четырех остальных ребер равна 1073. Две его грани имеют площадь по 436 800 квадратных единиц каждая, а две другие — по 471 240 квадратных единиц. Объем тетраэдра равен 62 092 800 кубических единиц.

Чтобы построить такой тетраэдр, возьмем ромб $PQRS$ со стороной c и диагоналями $PR = 2a$ и $QS = 2b$. Тогда

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad (1)$$

Повернем треугольник PRS вокруг стороны PR так, чтобы расстояние между точками Q и S стало равным $2a'$. Необходимо, чтобы a', a, b и c были целыми числами и, кроме того, чтобы существовали целые числа b' и k , удовлетворяющие соотношениям

$$a'^2 + b'^2 = c^2, \quad k^2 + a'^2 = b^2. \quad (2)$$

Тогда у тетраэдра $PQRS$ длины ребер равны $2a, 2a', c, c, c, c$, площади граней — $ab, ab, a'b', a'b'$ и объем — $2aa'k/3$.

Итак, требуется решить уравнения (1) и (2) в целых числах. Заметим, что c^2 можно представить в виде суммы двух квадратов двумя различными способами. Следовательно, c^2 равно произведению двух целых чисел, каждое из которых представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел (III. 10). Это наводит на мысль искать решение уравнений (1) и (2) в целых числах в следующем виде:

$$\begin{aligned} u^2 &= r^2 + s^2, \quad u'^2 = r'^2 + s'^2, \quad c = uu', \\ a &= |rr' - ss'|, \quad b = rs' + r's, \quad a' = |r's - rs'|, \quad b' = rr' + ss', \\ k^2 &= 4rr'ss'. \end{aligned}$$

Перебирая простейшие решения пифагорова уравнения $u^2 = r^2 + s^2$ в целых числах, находим следующие два решения:

$$20^2 + 21^2 = 29^2, \quad 35^2 + 12^2 = 37^2,$$

для которых произведение $rr'ss'$ — точный квадрат.

Значения $r = 20, r' = 35, s = 21, s' = 12, u = 29, v = 37$ дают тетраэдр, размеры которого приведены в начале решения.

343. Докажем общую теорему, из которой утверждение задачи следует как частный случай.

Теорема. Если многочлен $f(x)$ степени m принимает целочисленные значения при $m+1$ последовательных целых значениях x , то он принимает целочисленные значения при любых целых x .

Доказательство. Пусть $f(x)$ принимает целочисленные значения при x , равном $a, a+1, \dots, a+m$, где a — целое число. Составим таблицу разностей значений $f(x)$ в этих точках. Поскольку все элементы этой таблицы получены вычитанием одного целого числа из другого, то они все — целые числа. Пользуясь интерполяционной формулой Ньютона [III. 14 (32)], получаем

$$\begin{aligned} f(a+n) &= \\ &= f(a) + n\Delta f(a) + \binom{n}{2}\Delta^2 f(a) + \dots + \binom{n}{m}\Delta^m f(a). \end{aligned}$$

Если n — целое число, то биномиальные коэффициенты $\binom{n}{r}$ — также целые числа. Следовательно, в правой части равенства стоит сумма произведений целых чисел, то есть целое число, что и требовалось доказать.

Если

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{15}x,$$

то

$$f(0) = 0, f(\pm 1) = \pm 1, f(\pm 2) = \pm 10, f(\pm 3) = \pm 59,$$

и доказанная теорема применима к данному многочлену.

344. Поскольку с помощью n прямых плоскость можно разбить на $(n^2 + n + 2)/2$ частей, то плоскости n первых разрезов разбивают плоскость $(n + 1)$ -го разреза на $(n^2 + n + 2)/2$ частей. Каждая из этих плоских частей разбивает образованный ранее проведенными разрезами кусок сыра на два, поэтому после $(n + 1)$ -го разреза общее число кусков сыра возрастает на $(n^2 + n + 2)/2$. Поскольку при $n = 1$ или при $n = 2$ общее число частей, на которые разрезан кусок сыра, определяется выражением $(n^3 + 5n + 6)/6$ и

$$\frac{n^3 + 5n + 6}{6} + \frac{n^2 + n + 2}{2} = \frac{(n + 1)^3 + 5(n + 1) + 6}{6},$$

то при любом n число частей равно $(n^3 + 5n + 6)/6$, что и требовалось доказать.

Интересно отметить, что n точками прямую можно разбить на $1 + n$ частей, n прямых разбивают плоскость на $(n^2 + n + 2)/2 = 1 + n + \binom{n}{2}$ частей, а n плоскостей разбивают трехмерное пространство на $1 + n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$ частей.

Как показал Л. Шлефли¹, n гиперплоскостей размерности $m - 1$ делят m -мерное пространство на число частей, равное

$$1 + n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{m}.$$

¹ L. Schläfli, Theorie der vielfachen Kontinuität, Denkschriften der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft, vol. 38, 1901.

345. Проволочки образуют граф с V вершинами и E ребрами, где

$$V = (a + 1)(b + 1)(c + 1) = abc + (bc + ca + ab) + (a + b + c) + 1,$$

$$E = a(b + 1)(c + 1) + b(c + 1)(a + 1) + c(a + 1)(b + 1) = 3abc + 2(bc + ca + ab) + (a + b + c).$$

Перерезав каждое из E ребер, мы получим граф, топологически эквивалентный V сферам. Соединив $V - 1$ из них с оставшейся сферой, получим одну-единственную сферу. Следовательно, род первоначального графа определяется выражением

$$p = E - (V - 1) = 2abc + (bc + ca + ab).$$

346. Если $n \leq m$, то задача тривиальна. Предположим, что $m < n < p$. Тогда n — составное число, например $n = n_1 n_2$ (сомножители n_1 и n_2 удовлетворяют неравенствам $2 \leq n_1 \leq n_2$).

Предположим сначала, что $n_1 < n_2$. По доказанному П. Л. Чебышевым постулату Бертрана между числами m и $2m$ заключено по крайней мере одно простое число p . Следовательно, $n < p < 2m$ и

$$n_1 < n_2 \leq \frac{n}{2} < m.$$

Таким образом, $m!$ делится на n .

Если $n_1 = n_2$ и $m > 3$, то уточнение постулата Бертрана* приводит к неравенству $m < p < 2m - 2$, откуда

$$n \leq 2m - 4 = m \left(2 - \frac{4}{m} \right) \leq m \cdot \frac{m}{4} = \left(\frac{m}{2} \right)^2.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае $n_1 = n_2 \leq m/2$. Следовательно, $m!$ делится на $n_1 \cdot 2n_1$, а значит, и на $n_1^2 = n$. Из трех значений $m = 1, 2, 3$ исключение составляет только $m = 3$.

347. Пусть $c = a - b$ и p^m — наибольшая степень простого числа p , на которую делится число n . Если p не делит число c , то исключим его из рассмотрения. Если же p делит c , то

$$\frac{a^n - b^n}{c} = \frac{(b + c)^n - b^n}{c} = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} b^{n-i} c^{i-1}.$$

Докажем, что каждое слагаемое последней суммы делится на p^m . Поскольку биномиальный коэффициент $\binom{n}{i}$ равен кратному числа n , деленному на $i!$, необходимо лишь доказать, что c^{i-1} делится на ту же степень простого числа p , на какую делится $i!$. Число p делит $i!$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{i}{p^j} \right] < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{i}{p^j} = \frac{i}{p-1} \leq i$$

раз (см. III.35). Строгое неравенство между суммами доказывает наше утверждение, поскольку в силу принятого нами предположения p^{i-1} делит c^{i-1} .

348. Для любого вещественного числа x справедливо неравенство $x(1-x) \leq 1/4$. Следовательно,

$$(1-g_p)g_{p+1} > (1-g_p)g_p,$$

то есть $\{g_p\}$ — монотонно возрастающая последовательность. Поскольку она ограничена, то существует предел последовательности z , удовлетворяющий неравенству $(1-z)z \geq 1/4$, откуда $z = 1/2$.

Рассмотрим более общую задачу. Пусть $0 < g_p < 1$ и $(1-g_p)g_{p+1} > a > 0$. Тогда $a \leq 1/4$ и

$$\liminf g_p \geq \frac{1 - \sqrt{1-4a}}{2}, \quad \limsup g_p \leq \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2}.$$

Действительно, задав последовательность $\{x_p\}$ рекуррентным соотношением

$$x_1 = 0, \quad x_{p+1} = \frac{a}{1-x_p}, \quad (p = 1, 2, \dots),$$

так что $\lim_{p \rightarrow \infty} x_p = (1 - \sqrt{1-4a})/2$, мы методом математической индукции без труда докажем неравенства

$$x_p < g_p < \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2}.$$

В предельном случае при $a = 1/4$ получаем $x_p = (p-1)/2p$, откуда $(p-1)/2p < g_p < 1/2$.

349*. Многие замечательные свойства кривых постоянной ширины изложены в § 7 книги И. М. Яглома и

В. Г. Болтянского¹. В частности, там доказано, что любая кривая постоянной ширины есть одновременно кривая постоянного диаметра (стр. 95, следствие из задачи 81). Верно и обратное утверждение: каждая кривая постоянного диаметра есть кривая постоянной ширины.

Утверждение «а» в теории кривых постоянной ширины известно под названием теоремы Барбье. Доказательство теоремы Барбье приведено в решении задачи 88 указанной книги (стр. 285 и далее).

Ответ на вопрос «б» содержится в задаче 89 той же книги: из всех кривых постоянной ширины окружность ограничивает наибольшую площадь, равную $\pi d^2/4$, а так называемый треугольник Релло — наименьшую, равную $(\pi - \sqrt{3})d/2$.

350. Если разложение e^{-1} оборвать на члене $(-1)^n/n!$, то ошибка составит менее $1/(n+1)!$ Следовательно, ближайшее к $n!/e$ целое число равно

$$P_n = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right].$$

(Заметим, что число P_n совпадает с решением известной задачи о беспорядках: числом перестановок чисел $1, 2, \dots, n$, в которых ни одно число не находится на «своем» месте.)

Следующая цепочка элементарных преобразований показывает, что P_n делится на $n-1$:

$$\begin{aligned} P_n &= nP_{n-1} + (-1)^n = (n-1)P_{n-1} + P_{n-1} + (-1)^n = \\ &= (n-1)P_{n-1} + (n-1)P_{n-2} + (-1)^{n-1} + (-1)^n = \\ &= (n-1)(P_{n-1} + P_{n-2}). \end{aligned}$$

351. Числа, обладающие указанными в условии задачи свойствами, очевидно, имеют вид $N = 2^p 3^q 5^r$.

Поскольку $N/2$ — квадрат, то

$$q \equiv r \equiv 0 \pmod{2} \text{ и } p \equiv 1 \pmod{2}.$$

Поскольку $N/3$ — куб, то

$$p \equiv r \equiv 0 \pmod{3} \text{ и } q \equiv 1 \pmod{3}.$$

¹ См. Яглом И. М., Болтянский В. Г., Выпуклые фигуры. М.—Л., ГИТТЛ, 1951.

Поскольку $N/5$ — пятая степень некоторого целого числа, то

$$p \equiv q \equiv 0 \pmod{5} \text{ и } r \equiv 1 \pmod{5}.$$

Наименьшие значения p, q, r , удовлетворяющие этим сравнениям, равны

$$p = 15, q = 10, r = 6.$$

Следовательно, наименьшее «сверхсоставное» число N равно

$$N = 2^{15} 3^{10} 5^6 = 30\,233\,088\,000\,000.$$

352. Пусть S — сумма, которую требуется вычислить. Умножив на $(-1)^{r-1}r$ тождество

$$\frac{2n+2}{2n+1} \frac{1}{\binom{2n}{r}} = \frac{1}{\binom{2n+1}{r}} + \frac{1}{\binom{2n+1}{r+1}}$$

и просуммировав от $r = 1$ до $r = 2n$, получим: в левой части

$$\frac{(S - 2n)(2n + 2)}{2n + 1},$$

в правой части (поскольку биномиальные коэффициенты, равноудаленные от концов, имеют противоположные знаки и взаимно уничтожаются)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\binom{2n+1}{1}} - \frac{1}{\binom{2n+1}{2}} + \dots + \frac{1}{\binom{2n+1}{2n-1}} - \\ - \frac{1}{\binom{2n+1}{2n}} - 2n = -2n. \end{aligned}$$

Разрешив полученное равенство относительно S , найдем

$$S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

353. Утверждение задачи достаточно доказать для определителя шестого порядка, все элементы которого равны ± 1 . Действительно, пусть a_{ij} — элементы определителя шестого порядка, удовлетворяющие условию задачи ($-1 \leq a_{ij} \leq +1$), A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} . Вписав вместо элемента a_{ij}

число $+1$, если $A_{ij} > 0$, число -1 , если $A_{ij} < 0$, и любое из чисел ± 1 , если $A_{ij} = 0$, мы получим определитель, значение которого либо больше значения исходного определителя, либо совпадает с ним.

Любой определитель шестого порядка с элементами, равными ± 1 , делится на 2^5 . Действительно, если такой определитель привести к определителю пятого порядка, то элементы последнего будут иметь вид $\pm 1 \cdot 1 \pm 1 \cdot 1$, то есть окажутся четными числами, и, вынеся из каждой строки множитель 2, мы получим перед определителем коэффициент 2^5 .

Пользуясь теоремой Лапласа, разложим исходный определитель по 20 минорам третьего порядка, стоящим в первых трех строках. Каждый такой минор либо имеет два линейно зависимых столбца (и поэтому равен нулю), либо получен при перестановке строк, столбцов или изменении знака из определителей

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

Пусть a, b, c, d — различные (линейно независимые) столбцы, состоящие из трех элементов, равных ± 1 . Тогда, если первые три строки определителя имеют, например, вид $aaaabc$, то от нуля отличны лишь четыре минора $|abc|$, и, разлагая исходный определитель по теореме Лапласа, мы получаем число, не превышающее $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. Аналогично определитель шестого порядка, три первые строки которого имеют вид $aaabbc$ и содержат шесть отличных от нуля миноров, не превышает 96, определитель с тремя первыми строками вида $aaabcd$ не превышает $(1 + 3 \cdot 3) \cdot 16 = 160$, и определитель с тремя первыми строками вида $aabbcc$ не превышает 128.

Остается лишь определитель шестого порядка с тремя первыми строками вида $aabbcd$. На первый взгляд кажется, что такой определитель может быть равен $(4 + 2 \cdot 4) \cdot 16 = 192$. Однако такое значение определитель шестого порядка может принимать лишь в том случае, если три его последние строки имеют вид $xxuuzw$ и алгебраическим дополнением отличного от нуля минора, стоящего в трех первых строках (например, минора abc), служит отличный от нуля минор, стоящий в трех послед-

них строках (например, минор xzw). Но если столбцы xx не стоят под столбцами cd , то отличные от нуля миноры abc , acd и bcd , стоящие в первых трех строках, будут умножаться на один из миноров, стоящих в трех последних строках и содержащих два одинаковых столбца xx . Если же столбцы xx стоят под столбцами cd , то столбцы yy не стоят под столбцами cd и предыдущее замечание вновь применимо. Следовательно, не существует определитель шестого порядка с элементами ± 1 , который был бы равен 192.

Примером определителя рассматриваемого типа, равного 160, может служить следующий:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

354. Пусть $a \leq b$ радиусы, а S_1 и S_2 — площади двух кругов, L — площадь их общей части, C_1 и C_2 — площади внешних луночек меньшего и большего кругов. Тогда $L + C_1 = S_1$, $L + C_2 = S_2$, откуда $2L + C_1 + C_2 = S_1 + S_2$. Поскольку, по мнению нашей героини, идеальные отношения между двумя людьми устанавливаются, когда $L = C_1 + C_2$, то при этом $3L = S_1 + S_2$ и $L = (S_1 + S_2)/3$.

Ясно, что площадь L общей части двух кругов не превосходит площади S_1 меньшего круга, поэтому $S_1 \geq (S_1 + S_2)/3$ или $S_2 \leq 2S_1$. Таким образом, если круг интересов одного из партнеров более чем вдвое (по площади) превосходит круг интересов другого, то идеальные отношения между ними невозможны. Если же круг интересов одного партнера превосходит круг интересов другого партнера ровно вдвое, то этот последний рискует быть полностью поглощенным интересами своего более сильного партнера, тогда как у того сохранятся интересы, не разделяемые его более слабым партнером.

В общем случае обозначим через r отношение радиусов кругов: $r = b/a$. Тогда идеальные отношения возможны лишь при $1 \leq r \leq \sqrt{2}$. Пусть O_1 и O_2 — центры

кругов радиусов a и b , A и B — точки пересечения граничных окружностей, $\angle AO_1B = 2\varphi$, $\angle AO_2B = 2\theta$. Тогда площадь L общей части двух кругов можно представить как сумму площадей секторов O_1AB и O_2AB , из которой вычли площадь четырехугольника AO_2BO_1 . Идеальные отношения соответствуют условию $3L = S_1 + S_2$, или

$$L = a^2\varphi + b^2\theta - b \sin \theta (a \cos \varphi + b \cos \theta) = \frac{\pi (a^2 + b^2)}{3}.$$

Исключая φ из соотношения

$$a \sin \varphi = b \sin \theta,$$

получаем

$$r^2\theta + \arcsin(r \sin \theta) - r \sin \theta (\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta} + r \cos \theta) = \frac{\pi (1 + r^2)}{3}.$$

При заданном значении r величину θ можно найти из этого трансцендентного уравнения. Решить его можно методом последовательных приближений. Таким образом, даже в математике поиск идеала наталкивается на трансцендентные трудности.

В частном случае полного соответствия двух партнеров ($r = 1$) уравнение упрощается и принимает вид

$$2\theta - \sin 2\theta = \frac{2\pi}{3}.$$

Это также трансцендентное уравнение, хотя и не очень сложное. Решая его методом последовательных приближений, находим $2\theta = 149^\circ 16,3'$ (под таким углом видна из центра каждого круга их общая часть).

Итак, установление идеальных отношений даже между подходящими друг другу партнерами — дело далеко не простое и представляет собой трансцендентную задачу, однако ее решение сопряжено с гораздо меньшими трудностями и не требует столь большого терпения, как в том случае, когда судьба сводит вместе двух людей, совершенно не подходящих друг другу.

355. Пусть a — глубина вазы, а $x^2 = 2py$ — уравнение линии пересечения внутренней поверхности вазы с плоскостью, проходящей через ось вазы. Поскольку при увеличении расстояния от вершины кривизна параболы монотонно убывает, то, чем больше размеры шара, тем

выше он застрянет в вазе. Кроме того, если шар опирается на край вазы, а его поверхность не касается внутренней поверхности вазы, то шар несколько меньшего диаметра погрузится в вазу глубже и вытеснит больше воды. Следовательно, для того чтобы объем вытесненной шаром воды был максимальным, необходимо рассматривать шары, которые касаются внутренней поверхности вазы.

Сопоставим поперечные сечения шара и вазы. Если шар касается параболы в точке (x_1, y_1) , $y_1 \leq a$, то, как нетрудно подсчитать, его центр находится в точке $(0, y_1 + p)$. Пусть r — радиус шара, а h — толщина его погруженной в воду части. Тогда

$$a = y_1 + p - r + h, \quad r^2 = x_1^2 + p^2 = 2py_1 + p^2. \quad (1)$$

Объем сферического сегмента радиусом r и высотой h равен

$$V = \frac{\pi h^2 (3r - h)}{3}. \quad (2)$$

Заметив из (1), что

$$\frac{dy_1}{dr} = \frac{r}{p}, \quad \frac{dh}{dr} = 1 - \frac{r}{p},$$

после дифференцирования (2) по r и некоторых упрощений получим

$$\frac{dV}{dr} = \frac{\pi r h (h + 2p - 2r)}{p}.$$

Необходимый признак экстремума дает нам $2r = 2p + h$. Следовательно, шар, вытесняющий наибольший объем воды, погружается в воду на глубину $2p$ (длину фокальной хорды параболы). Исключая h и y_1 , находим зависимость радиуса шара r от параметров параболоида:

$$r = (2ap + 4p^2)^{1/2} - p.$$

356. Для того чтобы все биномиальные коэффициенты были нечетными, отношения последовательных коэффициентов

$$\frac{n}{1}, \quad \frac{n-1}{2}, \quad \frac{n-2}{3}, \quad \dots, \quad \frac{n-k}{k+1}, \quad \frac{1}{n} \quad (1)$$

должны приводиться к несократимым дробям с нечетными числителем и знаменателем. Само число n также должно быть нечетным. Пусть $n = 2^s u - 1$, где u — нечетное число. Тогда отношение $(2^s + 1)$ -го биномиального коэффициента к 2^s -му равно

$$\frac{n - (2^s - 1)}{2^s} = \frac{2^s (u - 1)}{2^s} = \frac{u - 1}{1},$$

то есть приводится к несократимой дроби с четным числителем и нечетным знаменателем.

Это противоречит тем требованиям, которым должна удовлетворять последовательность отношений биномиальных коэффициентов, если только u не равно 1. При $u = 1$ получаем: $n = 2^s - 1$ и $(2^s + 1)$ -го биномиального коэффициента не существует.

Наоборот, если $n = 2^s - 1$, то общий член последовательности (1) имеет вид $[2^s - (k + 1)] / (k + 1)$, где $k < n$. Если $k + 1 = 2^t v$, где v — некоторое нечетное число, то отношение биномиальных коэффициентов равно $(2^{s-t} - v) / v$ и удовлетворяет всем необходимым требованиям.

Итак, все биномиальные коэффициенты нечетны в том и только в том случае, если показатель степени бинома Ньютона на единицу меньше некоторой степени двойки.

357. Пусть $\{r_{ij}(n)\}$ — матрица, обратная (разумеется, если таковая существует) заданной матрице $A_n = \{a_{ij}\}$. Как показывают прямые выкладки при $n = 2, 3$, разумно предполагать, что $r_{ij}(n) = 0$, если $i \geq j + 2$, и $r_{ij}(n) = r_{ij}(n - 1)$, если $i, j = 1, 2, \dots, n - 1$ и $(i, j) \neq (n - 1, n - 1)$.

Для проверки нашей гипотезы введем неопределенные коэффициенты a, b, c и положим

$$C_n = \begin{vmatrix} (A_{n-1})^{-1} + aB_{n-1} & b(T_{n-1})' \\ bT_{n-1} & c \end{vmatrix},$$

где T_{n-1} — однорядная матрица $(0, 0, \dots, 0, 1)$ порядка $(n - 1)$, а B_{n-1} — квадратная матрица $(0, \dots, 0, (T_{n-1})')$ порядка $(n - 1)$. Матрица C_n совпадает с матрицей, обратной матрице A_n , то есть удовлетворяет соотношению $A_n C_n = I$ тогда и только тогда, когда $a =$

$= (n-1)^2/(2n-1)$, $b = -n(n-1)/(2n-1)$ и $c = n^2/(2n-1)$. Отсюда мы без труда находим элементы матрицы:

$$r_{ii} = \frac{4i^3}{4i^2 - 1}, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

$$r_{nn} = \frac{n^2}{2n-1},$$

$$r_{i, i+1} = -\frac{i(i+1)}{2i+1}, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

$$r_{ij} = 0 \text{ при } i \geq j+2.$$

358. У ромбододекаэдра имеется восемь вершин T , в каждой из которых сходятся по три ребра, и шесть вершин F , в каждой из которых сходятся по четыре ребра. Ближайшими к вершине T являются вершины F , и, наоборот, по соседству с каждой вершиной F расположены вершины T . Следовательно, вдоль любого маршрута, проходящего вдоль ребер ромбододекаэдра, вершины T и F должны чередоваться. Но восемь вершин T и шесть вершин F нельзя расположить в чередующейся последовательности независимо от того, намерены ли мы вернуться в исходную точку или нет.

359. Перенумеруем монеты последовательно целыми числами от 1 до 12. Произведем три взвешивания, разложив монеты по чашам весов в следующем порядке. Первое взвешивание: на левой чаше весов — монеты 1, 2, 3, 4, на правой — 5, 6, 7, 8. Второе взвешивание: на левой чаше весов монеты 1, 2, 3, 5, на правой — 4, 9, 10, 11. Третье взвешивание: на левой чаше весов монеты 1, 6, 9, 12, на правой — 2, 5, 7, 10.

Результаты этих трех взвешиваний позволяют найти фальшивую монету и определить, легче она или тяжелее настоящей.

Сравним вес монет на левой и правой чашах весов. Пусть L означает, что монеты на левой чаше легче, T — тяжелее, чем на правой, а P — что обе чаши весов находятся в равновесии. Нетрудно проверить, что возможно $27 = 3^3$ перестановок с повторениями. Следующие исходы трех взвешиваний не могут встретиться никогда: (P, P, P) , (L, T, T) и (T, L, L) . Остальные 24 возможных исхода можно разбить на три группы (номер

фальшивой монеты указан сверху в записи результатов трех взвешиваний).

Фальшивая монета легче настоящей:

$\overset{1}{ЛЛЛ}, \overset{2}{ЛЛТ}, \overset{3}{ЛЛР}, \overset{4}{ЛТР}, \overset{5}{ТЛТ}, \overset{6}{ТРЛ}, \overset{7}{ТРТ},$
 $\overset{8}{ТРР}, \overset{9}{РТЛ}, \overset{11}{РТР}, \overset{12}{РРЛ}.$

Фальшивая монета тяжелее настоящей:

$\overset{1}{ТТТ}, \overset{2}{ТТЛ}, \overset{3}{ТТР}, \overset{4}{ТЛР}, \overset{5}{ЛТЛ}, \overset{6}{ЛРТ}, \overset{7}{ЛРЛ}, \overset{8}{ЛРР},$
 $\overset{9}{РЛТ}, \overset{10}{РЛЛ}, \overset{11}{РЛР}, \overset{12}{РРТ}.$

360. Несуществование на плоскости равнобедренного 7-точечника было доказано в задаче 225.

Докажем, что в трехмерном пространстве множество, у которого не всякие три точки расположены в вершинах равнобедренного треугольника, содержит не менее 9 точек. Рассмотрим вершины правильного пятиугольника и центр его описанной окружности. Присоединим к этому множеству точку, находящуюся над плоскостью пятиугольника на расстоянии радиуса описанной окружности, и зеркально симметричную ей точку, находящуюся под плоскостью пятиугольника. Множество, состоящее из этих 8 точек, очевидно, образует пространственный равнобедренный 8-точечник¹.

361. Рассмотрим $k - 1$ положительных, попарно различных чисел $a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_k - a_1$. Вместе с k заданными попарно различными числами они образуют множество, состоящее из $2k - 1 > n$ положительных чисел, каждое из которых не больше n . Следовательно, оба набора содержат по крайней мере одно общее число, то есть по крайней мере один раз выполняется равенство $a_r - a_1 = a_i$, или $a_i + a_1 = a_r$.

При $k = [(n + 1)/2]$, как показывает последовательность

$$\left[\frac{n}{2}\right] + 1, \left[\frac{n}{2}\right] + 2, \dots, n,$$

утверждение задачи неверно.

¹ Мне неизвестно, является ли 9 искомым числом, то есть верно ли, что в пространстве нет равнобедренных n -точечников, где $n > 9$. — Прим. ред.

362*. Очевидно, что при $b = 0$, ряд расходится. Пусть $b \neq 0$. Тогда последовательность $|b| \ln n \rightarrow \infty$, причем расстояние между соседними ее членами

$$|b| \ln(n+1) - |b| \ln n = |b| \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{|b|}{n} \quad (1)$$

и стремится к нулю монотонно. Для любого натурального p выберем q и M так, чтобы выполнялись неравенства

$$|b| \ln(q-1) \leq \left(p - \frac{1}{3}\right) \pi < |b| \ln q < \\ < |b| \ln(q+M) < \left(p + \frac{1}{3}\right) \pi. \quad (2)$$

Тогда при $q \leq n \leq q+M$ функция $\cos(b \ln n)$ имеет один и тот же знак, а $|\cos(b \ln n)| > \frac{1}{2}$. Следовательно, сумма соответствующих $M+1$ последовательных членов заданного ряда по абсолютной величине не меньше чем

$$\frac{1}{2} \sum_{n=q}^{q+M} n^{-a} > \frac{1}{2} \int_q^{q+M} x^{-a} dx = \frac{q^{1-a}}{2} \int_1^{1+\frac{M}{q}} \frac{d\xi}{\xi}. \quad (3)$$

Поскольку из (1) и (2) видно, что M можно взять равным $\frac{2\pi}{3}(q-1) - 3$, $\frac{M}{q} \rightarrow \frac{2\pi}{3}$, так что правая часть в (3) имеет отличный от нуля предел при $q \rightarrow \infty$ (бесконечный при $a < 1$). Наконец, заметим, что при $p \rightarrow \infty$ величина q также неограниченно возрастает, вследствие чего исходный ряд не удовлетворяет признаку сходимости Коши и поэтому расходится.

363. Пусть W — граница выпуклой оболочки пяти заданных точек. Если все пять заданных точек располагаются на W , то либо они коллинеарны, либо любые четыре неколлинеарные точки из пяти заданных располагаются в вершинах выпуклого четырехугольника. Если ровно четыре из пяти заданных точек лежат на W , то именно эти четыре точки служат вершинами выпуклого четырехугольника.

Если на W лежат ровно три из пяти заданных точек (обозначим их A, B, C), то эти точки служат вершинами треугольника ABC , внутри которого расположены две

остальные точки D и E . Прямая DE проходит через внутренние точки не более чем двух сторон треугольника ABC .

Рассмотрим третью сторону треугольника ABC , не имеющую внутренней точки, принадлежащей прямой DE . Тогда точки D , E и вершины, расположенные на концах третьей стороны, служат вершинами некоторого выпуклого четырехугольника.

364. Предположим, что $a_1 \leq [2n/3]$. Тогда $3a_1 \leq 2n$. Рассмотрим множество целых чисел $2a_1, 3a_1, a_2, \dots, a_n$. Оно содержит $n + 1$ целых чисел, из которых ни одно не делит другое. Поскольку это невозможно, то полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

365. Рассмотрим выпуклый многоугольник с числом сторон, равным $n \geq 4$. Любые четыре из n вершин многоугольника определяют четырехугольник с двумя пересекающимися диагоналями. Справедливо и обратное утверждение: любые две пересекающиеся диагонали многоугольника задают некоторый четырехугольник. Следовательно, число всех точек пересечения диагоналей выпуклого n -угольника равно $\binom{n}{4}$. Разумеется, не все $\binom{n}{4}$ точек пересечения могут быть различными.

366. Перенумеруем столбцы цифр справа налево, от младших разрядов к старшим. Сумма цифр, стоящих в первом столбце, равна Y , причем переноса из младшего разряда в этот столбец быть не может. Следовательно, буквой N обозначена цифра 0, поскольку при $N = 5$ сумма цифр, стоящих во втором столбце $T + 2E + 1 \not\equiv T \pmod{10}$. Аналогичные соображения показывают, что буквой E обозначен либо 0, либо 5. Но $N = 0$, поэтому $E = 5$. Из четвертого столбца в пятый должна быть перенесена какая-то цифра. Этой цифрой может быть только 1, поскольку сумма цифр, стоящих в четвертом столбце (цифра, обозначенная буквой O , плюс цифра десятков, перенесенная из третьего столбца) не может быть больше 11. Следовательно, буквой I обозначена либо цифра 0, либо цифра 1. Но $N = 0$, поэтому $I = 1$, а $O = 9$. Сумма цифр, стоящих в третьем столбце, должна быть не меньше 21, поскольку буквой X обозначена цифра, отличная от 0 и 1, а из второго столбца в третий

может быть перенесено не более единицы. Следовательно, буквой T обозначена либо цифра 7, либо цифра 9. Если $T = 7$, то $R = 8$, а $X = 3$. Но F и S обозначают цифры, отличающиеся на 1. Такой парой последовательных цифр могут быть только либо 2 и 3, либо 3 и 4. Таким образом, цифра 3 не может быть обозначена буквой X . Следовательно, $T = 8$, $R = 7$ и $X = 4$. Остается единственная пара, состоящая из двух последовательных цифр: 2 и 3. Итак, $F = 2$, $S = 3$. Наконец, $Y = 6$.

Задача допускает единственное решение:

$$\begin{array}{r} 29786 \\ + \quad 850 \\ \quad 850 \\ \hline 31486. \end{array}$$

367. Пусть

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \neq b,$$

— уравнение внутренней бровки беговой дорожки.

Если ширина дорожки одинакова и ее наружная бровка имела бы форму эллипса, то уравнение наружной бровки можно было бы записать в виде

$$\frac{x^2}{(a+t)^2} + \frac{y^2}{(b+t)^2} = 1, \quad t \neq 0.$$

Расстояние между точками этих двух эллипсов, где угловой коэффициент касательных равен m , было бы шириной дорожки и составляло бы

$$\frac{[(a+t)^2 m^2 + (b+t)^2]^{1/2} - (a^2 m^2 + b^2)^{1/2}}{(m^2 + 1)^{1/2}} = t.$$

После несложных преобразований это выражение можно привести к виду

$$t(am^2 + b) = t[(m^2 + 1)(a^2 m^2 + b^2)]^{1/2}.$$

Поскольку $t \neq 0$, обе части последнего равенства можно разделить на t и после дальнейших упрощений получить соотношение

$$2abm^2 = m^2(a^2 + b^2),$$

а так как оно должно быть тождеством относительно m , то

$$a^2 - 2ab + b^2 = 0,$$

или $a = b$, что противоречит принятому нами предположению об эллиптической форме внутренней бровки. Следовательно, форма наружной бровки отлична от эллипса.

368. а. Рассмотрим сначала общую задачу.

Даны числа, образующие конечную последовательность $a_0, a_1, \dots, a_n$. Найти другую конечную последовательность $u_0, u_1, \dots, u_n$, такую, чтобы

$$(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots)(u_0 + u_1t + u_2t^2 + \dots) = 1 \pmod{t^{n+1}}$$

Члены последовательности $u_0, u_1, \dots, u_n$ мы найдем, решив систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} a_0u_0 &= 1, \\ a_1u_0 + a_0u_1 &= 0, \\ a_2u_0 + a_1u_1 + a_0u_2 &= 0, \\ \dots &= 0, \\ a_nu_0 + a_{n-1}u_1 + a_{n-2}u_2 + \dots + a_0u_n &= 0. \end{aligned}$$

По правилу Крамера

$$(-1)^na_0^{k+1}u_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & \dots & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

б. В рассматриваемой задаче

$$a_0 = 1, a_1 = a - x, a_k = \binom{a}{k} \text{ при } k \geq 2,$$

так что $(a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n) = (1 + t)^a - xt$. Чтобы вычислить определитель, u_n необходимо выбрать равным коэффициенту при t^n в разложении

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 + t)^a - xt} &= \frac{(1 + t)^{-a}}{1 - xt(1 + t)^{-a}} = \\ &= (1 + t)^{-a} + xt(1 + t)^{-2a} + x^2t^2(1 + t)^{-3a} + \dots, \end{aligned}$$

то есть положить

$$u_n = \binom{-a}{n} + x \binom{-2a}{n-1} + x^2 \binom{-3a}{n-2} + \dots$$

Заметив, что

$$\begin{aligned} \binom{-a}{n} &= \frac{-a(-a-1)\dots(-a-n+1)}{n!} = \\ &= (-1)^n \binom{a+n-1}{n} \quad \text{и т. д.,} \end{aligned}$$

получим соотношение, которое требовалось доказать.

369. Выберем на плоскости косоугольную систему координат так, чтобы вершины A, B, C треугольника имели координаты $(0, b), (0, a), (0, 0)$. Возьмем медиану AD и рассмотрим сначала прямые, пересекающие BC и одну из двух других сторон треугольника. Если через некоторую точку медианы проходит $(1/3)$ -прямая, пересекающая AC и DB , то через ту же точку проходит $(1/3)$ -прямая, пересекающая AB и CD . Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением прямых, пересекающих AC , то есть ось y и DB , удвоив найденное число $(1/3)$ -прямых. Уравнение медианы имеет вид

$$x = \frac{ab - ay}{2b}. \quad (1)$$

Уравнение прямой, проходящей через точки $(ar, 0)$ и $(0, b/3r)$ и, следовательно, отсекающей треть площади треугольника (то есть $(1/3)$ -прямой), запишется в виде

$$x = \frac{arb - 3ar^2y}{b}, \quad (2)$$

а уравнение другой $(1/3)$ -прямой — в виде

$$x = \frac{2arb - 3ar^2y}{2b}. \quad (3)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), находим

$$\frac{y}{b} = \frac{1 - 2r}{1 - 6r^2}.$$

Эта величина достигает максимального значения, равного $(3 - \sqrt{3})/6$, при $r = (3 + \sqrt{3})/6$. Когда r изме-

няется от $1/2$ до $(3 + \sqrt{3})/6$, а затем до 1, величина y/b изменяется от 0 до $(3 - \sqrt{3})/6$, а затем убывает до $1/5$. Таким образом, если z — доля, которую составляет отрезок от вершины до точки пересечения прямых (1) и (2) по отношению ко всей медиане, то $z = 1 - y/b$ и при $z = (3 + \sqrt{3})/6$ существует одна $(1/3)$ -прямая, при $(3 + \sqrt{3})/6 < z \leq 4/5$ — две $(1/3)$ -прямых и при $4/5 < z \leq 1$ — одна $(1/3)$ -прямая, и в окончательном итоге это число удваивается.

Решив систему уравнений (2) и (3), получим

$$\frac{y}{b} = \frac{1 - 2r}{1 - 3r^2}.$$

На интервале от $r = 2/3$ до $r = 1$, который нам надлежит здесь рассматривать, функция y/b однозначна и не имеет внутренних максимумов и минимумов. При $r = 1$ функция y/b достигает минимума, равного $1/2$, а при $r = 2/3$ принимает значение $y/b = 1$. Следовательно, при $0 \leq z \leq 1/2$ существуют две $(1/3)$ -прямые.

Выберем теперь другую косоугольную систему координат так, чтобы вершины A, B, C треугольника имели координаты $(0, 0), (c, 0), (0, b)$. Уравнение медианы, проходящей через вершину A , в новой системе координат запишется в виде

$$x = cy/b, \quad (4)$$

а уравнения $(1/3)$ -прямых, аналогичных прямым (2) и (3), примут вид

$$x = (crb - 3cr^2y)/b, \quad (2')$$

$$x = (2crb - 3cr^2y)/2b. \quad (3')$$

Параметр z , имеющий прежний смысл, связан с y соотношением $z = 2y/b$.

Решая совместно уравнения (4) и (2'), находим $2y/b = 2r(1 + 3r^2)$. Эта величина достигает максимума, равного $\sqrt{3}/3$ при $r = \sqrt{3}/3$, поскольку параметр r должен быть неотрицательным. При $r = 1$ и $r = 1/3$ функция $2y/b$ принимает значение $1/2$. Следовательно, при $z = \sqrt{3}/3$ существует одна $(1/3)$ -прямая, а при $1/2 \leq z < \sqrt{3}/3$ — две $(1/3)$ -прямые. Значению $z = 1/2$ соответ-

ствуют те же прямые, которые были получены нами раньше.

Решая совместно уравнения (4) и (3'), находим $2y/b = 4r(2r + 3r^2)$. Эта величина достигает максимума, равного $\sqrt{6}/3$, при $r = \sqrt{6}/3$, а при $r = 1$ и $r = 2/3$ принимает значение $4/5$. Таким образом, при $z = \sqrt{6}/3$ существует одна $(1/3)$ -прямая, а при $4/5 \leq z < \sqrt{6}/3$ существуют две $(1/3)$ -прямые. Значению $z = 4/5$ соответствуют $(1/3)$ -прямые, которые были найдены раньше.

Итак, полученные нами результаты представлены в следующей таблице:

Значения z	Число $(1/3)$ -прямых
$0 \leq z < \frac{\sqrt{3}}{3}$	2
$z = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1
$\frac{\sqrt{3}}{3} < z < \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$	0
$z = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$	2
$\frac{3 + \sqrt{3}}{6} < z < \frac{\sqrt{6}}{3}$	4
$z = \frac{\sqrt{6}}{3}$	3
$\frac{\sqrt{6}}{3} < z \leq 1$	2

370. Перенесемся мысленно на Бейкер-стрит, 221б, где происходит следующий разговор.

— Холмс, это поразительно! Как вам удалось установить, что у хозяина дома было 5 детей, у его брата и сестры — 4 и 3 ребенка соответственно, а у его двоюродного брата двое детей?

— Мой друг, — ответил Холмс, раскуривая свою трубку, — решить эту задачу гораздо проще, чем разгадать, например, тайну пляшущих человечков. Как вам известно, детей, игравших в саду, было недостаточно для того,

чтобы составить две бейсбольные команды, то есть меньше восемнадцати. Поэтому с самого начала было ясно, что число детей в самой маленькой семье не могло быть больше двух. После несложных подсчетов я пришел к заключению, что если у двоюродного брата хозяина дома двое детей, то произведение числа детей в каждой из четырех семей может принимать только семь значений, только одно из которых, а именно 120, было бы возможно и в том случае, если бы у двоюродного брата хозяина дома был лишь один ребенок.

— Таким образом, — продолжал объяснять ход своих рассуждений Шерлок Холмс, — если бы номер дома был бы отличен от 120, то гость, который, по его признанию, «немного разбирался в математике», смог бы без каких-либо дополнительных сведений установить, сколько детей у двоюродного брата хозяина дома: один или два. Не менее ясно, что если бы на вопрос гостя хозяин ответил утвердительно, то гостю пришлось бы выбирать между наборами чисел (8, 5, 3, 1) и (6, 5, 4, 1). Но поскольку он смог точно установить число детей в каждой из четырех семей, то очевидно, что на его вопрос хозяин ответил отрицательно. «Нет» соответствует лишь одной-единственной комбинации чисел: 5, 4, 3, 2. Как видите, все очень просто, мой дорогой Ватсон!

371. Вырезать абажур в виде одного куска бумаги из заданного прямоугольника возможно не всегда. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть предельный случай, когда $p = 0$ и $P = 2\pi s$, а абажур имеет форму круглого диска радиусом s (такой диск, очевидно, нельзя вырезать из прямоугольника, один из размеров которого также равен s).

Рассмотрим теперь два случая, отличных от предельного и соответствующих неравенствам $P - p \leq \pi s$ и $P - p > \pi s$. Докажем, что при $P - p \leq \pi s$ абажур, состоящий из одного куска бумаги, всегда можно выкроить из прямоугольника, а при $P - p > \pi s$ это возможно в том случае, если

$$\frac{P}{p} \geq \frac{2 \cos \left(\pi - \frac{P-p}{2s} \right)}{\left(\frac{P-p}{2s} \right)^2 - 2}. \quad (1)$$

Предположим, что выкройка абажура имеет форму сектора кругового кольца, наружный радиус которого равен R , внутренний равен r , а центральный угол составляет 2α . Нетрудно доказать, что при $P - p \leq \pi s$ угол α не тупой. При $0 < \alpha < \pi/2$ выкройку абажура можно вырезать из прямоугольника $ABCD$ так, как показано на рис. 27 (сектор кругового кольца $EFGHIJE$).

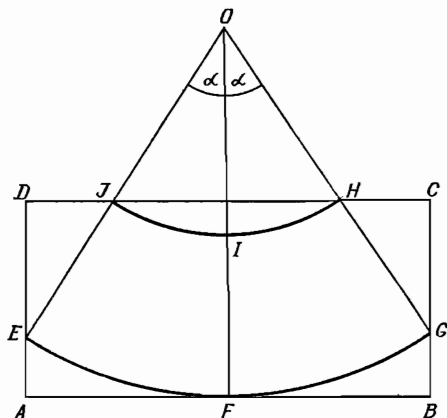


Рис. 27.

Периметр нижнего основания абажура P равен длине дуги EFG и, очевидно, больше стороны AB прямоугольника. Кроме того, из разложения $\cos x$ в ряд Маклорена следует неравенство

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} - 1 + \cos \alpha \geq 0.$$

Подставляя $R = s + r$, $P = 2\alpha R$, $p = 2\alpha r$, получаем

$$s + p \frac{P-p}{8s} - R + r \cos \alpha = r f(\alpha) \geq 0,$$

или

$$s + p \frac{P-p}{8s} \geq R - r \cos \alpha = BC.$$

Таким образом, при $0 < \alpha < \pi/2$ размеры заданного четырехугольника не меньше размеров четырехугольника $ABCD$ и выкройку абажура можно вырезать одним куском в форме сектора кругового кольца. Нетрудно доказать, что данного четырехугольника оказывается достаточно и в предельных случаях при $\alpha = 0$ (то есть при

$p = P)$ и $\alpha = \pi/2$. Итак, первая часть нашего утверждения доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда $P - p > \pi s$. Выкройку по-прежнему возьмем в виде сектора кругового кольца. При $P - p > \pi s$ угол α тупой и выкройку можно вырезать одним куском из прямоугольника $ABCD$ так, как показано на рис. 28, если $ABCD$ имеет размеры не

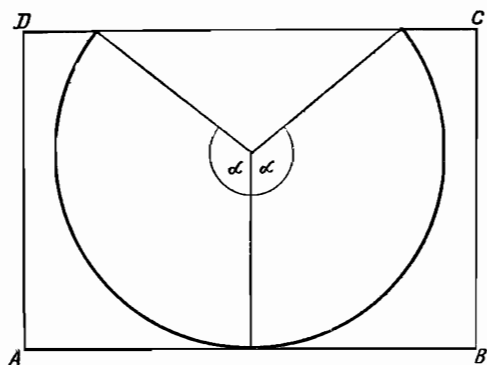


Рис. 28.

меньше $2R \times [R + R \cos(\pi - \alpha)]$. Следовательно, для того, чтобы из заданного прямоугольника выкройку абажура можно было вырезать одним куском, достаточно выполнение неравенства

$$s + p \frac{P - p}{8s} \geq R + R \cos(\pi - \alpha).$$

Оставляя неизменным член $R \cos(\pi - \alpha)$ и производя в остальных членах подстановки, аналогичные сделанным выше, получаем

$$r \frac{\alpha^2}{2} \geq r + R \cos(\pi - \alpha),$$

или

$$\frac{r}{R} \geq \frac{2 \cos(\pi - \alpha)}{\alpha^2 - 2}.$$

Выразив входящие в последнее неравенство величины через заданные размеры абажура, мы придем к представленному выше неравенству (1).

Покажем, что размеры прямоугольника $ABCD$, описанного вокруг выкройки абажура, не уменьшаются, если

выкройка имеет любую форму, отличную от сектора кругового кольца.

Прежде всего заметим, что форму выкройки можно определить следующим образом. Пусть M и N — любые две точки, выбранные на верхнем и нижнем краях абажура, а L — некая кривая, проходящая по боковой поверхности усеченного конуса и соединяющая точки M и N . Если L не имеет с верхним и нижним краями абажура других общих точек, кроме M и N , и не содержит точек самопересечения, то, разрезав абажур вдоль кривой L и разложив выкройку на плоскости, мы получим связную плоскую фигуру без перекрывающихся участков. Ясно, что такую выкройку можно вырезать одним куском из прямоугольника. (Если бы, разрезав абажур вдоль L , мы получили бы фигуру с перекрывающимися участками, то выкройку абажура нельзя было бы вырезать одним куском не только из прямоугольника, но и из любой плоской фигуры.)

Вместе с тем, разрезая абажур вдоль различных кривых L , можно получить все допустимые выкройки абажура (то есть выкройки, которые можно вырезать одним куском из прямоугольника).

Часть периметра любой такой выкройки будет совпадать с наружной дугой сектора кругового кольца. Следовательно, размеры прямоугольника, из которого делают выкройку, не могут быть меньше размеров прямоугольника, из которого вырезан сектор кругового кольца. Тем самым вторая часть нашего утверждения также доказана.

372. Предположим, что сосуд T_i содержит x_i кг соли через t минут после начала операции. Спустя еще Δt минут в сосуд T_i из сосуда T_{i+1} перейдет $gx_{i+1}\Delta t/V$ кг соли, а из сосуда T_i в сосуд T_{i-1} перейдет $gx_i\Delta t/V$ кг (с точностью до бесконечно малых более высокого порядка). Из закона сохранения массы получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{g(x_{i+1} - x_i)}{V},$$

или

$$(D + k)x_i = kx_{i+1}, \quad \text{где} \quad k = \frac{g}{V}.$$

Полная система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}(D+k)x_1 &= kx_2, \\ (D+k)x_2 &= kx_3, \\ &\dots \dots \dots \\ (D+k)x_n &= kx_1.\end{aligned}\tag{1}$$

Эту систему необходимо решить при начальных условиях: $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$, $x_n = M$ при $t = 0$.

Из (1), дифференцируя и подставляя одно уравнение в другое, получаем систему уравнений, каждое из которых содержит лишь одну независимую переменную:

$$(D+k)^n x_i = k^n x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.\tag{2}$$

Характеристическое уравнение каждого из дифференциальных уравнений, образующих систему (2), имеет корни $0, k(\varepsilon - 1), \dots, k(\varepsilon^{n-1} - 1)$, где $1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{n-1}$ — корни n -й степени из единицы. Следовательно,

$$x_1 = \sum_{i=1}^n c_i e^{k(\varepsilon^{i-1} - 1)t}.$$

Подставляя это значение в первое уравнение системы (1), получаем

$$x_2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon^{i-1} c_i e^{k(\varepsilon^{i-1} - 1)t}.$$

Подставляя x_2 в следующее уравнение, найдем x_3 и т. д. до тех пор, пока не получим

$$x_n = \sum_{i=1}^n \varepsilon^{(i-1)(n-1)} c_i e^{k(\varepsilon^{i-1} - 1)t}.$$

Коэффициенты c_i определяем из начальных условий при $t = 0$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n c_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n \varepsilon^{i-1} c_i &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^n \varepsilon^{(i-1)(n-1)} c_i &= M.\end{aligned}\tag{3}$$

Пользуясь тем, что $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^{n-1} = 0$, $\varepsilon^n = 1$, при сложении получаем из (3): $c_1 = M/n$. Умножая уравнения (3) по порядку на $1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{n-1}$ и складывая, находим $c_n = \varepsilon^{n-1}M/n$. Умножая уравнения (3) по порядку на $1, \varepsilon^2, \varepsilon^4, \dots, \varepsilon^{2(n-1)}$, получаем $c_{n-1} = \varepsilon^{n-2}M/n$ и т. д. Последним мы определим коэффициент $c_2 = \varepsilon M/n$. Следовательно,

$$x_n = \frac{M}{n} \sum_{i=1}^n e^{k(\varepsilon^{i-1} - 1)t} = \frac{M}{n} \left(1 + e^{-kt} \sum_{i=1}^{n-1} e^{k\varepsilon^i t} \right).$$

Слагаемые, равноудаленные от концов, либо оба вещественны, либо комплексно сопряжены и, следовательно, сумма вещественна. Так, при $n = 2, 3, 4$ значениях x_n можно представить в виде

$$x_2 = \frac{M}{2} \left(1 + e^{-\frac{2gt}{V}} \right),$$

$$x_3 = \frac{M}{3} \left(1 + 2e^{-\frac{3gt}{V}} \cos \frac{\sqrt{3}gt}{2V} \right),$$

$$x_4 = \frac{M}{2} e^{-\frac{gt}{V}} \left(\cos \frac{gt}{V} + \operatorname{ch} \frac{gt}{V} \right).$$

Можно показать, что

$$x_n = \begin{cases} \frac{M}{n} (1 + 2Q), & \text{если } n = 2m + 1, \\ \frac{M}{n} \left(1 + e^{-\frac{2gt}{V}} + 2Q \right), & \text{если } n = 2m + 2, \end{cases}$$

где

$$Q = \sum_{j=1}^m e^{(-1 + \cos 2\pi j/n) gtV} \cos \left[\left(\sin \frac{2\pi j}{n} \right) \frac{gt}{V} \right].$$

При $t \rightarrow \infty$ все x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) стремятся к M/n .

373. Назовем правильной такую раскраску карты, при которой любые две страны, имеющие общий участок границы, окрашены в различные цвета.

Пользуясь методом математической индукции, докажем, что наша карта на поверхности сферы допускает правильную раскраску в два цвета. При $n = 1$ это

утверждение верно. Предположим, что оно верно при $n = k - 1$. После добавления еще одного большого круга необходимо лишь изменить на противоположную окраску всех стран, лежащих по одну сторону от него (в одном полушарии), и мы получим правильную раскраску карты для $n = k$. Ясно, что если n — четное число, то при такой раскраске диаметрально противоположные страны оказываются окрашенными в один цвет. Следовательно, число стран, окрашенных в один цвет при выбранной нами раскраске, четно.

Докажем, что число стран, окрашенных в каждый цвет, не может быть равно n . Действительно, если бы два этих четных числа были равны, то общее число стран на карте F было бы кратно четырем, в то время как $F = 4k + 2$. Докажем последнее утверждение.

Поскольку любая окружность большого круга пересекает окружность любого другого большого круга дважды, то число вершин графа, образованного границами стран, $V = n(n - 1)$. Каждая вершина принадлежит четырем ребрам, а каждое ребро соединяет две вершины. Следовательно, число ребер E вдвое больше числа вершин: $E = 2V$. Из формулы Эйлера $V - E + F = 2$ получаем, что $F = n(n - 1) + 2$. Поскольку n кратно 4, то $F = 4k + 2$.

Наконец, заметим, что при следовании по любому разрешенному маршруту по карте, раскрашенной избранным нами способом, окраска страны изменяется всякий раз, когда мы пересекаем границу. Поскольку число стран, окрашенных в один цвет, отличается от числа стран, окрашенных в другой цвет, не менее чем на 2, то невозможно совершить кругосветное путешествие, побывав при этом в каждой стране один и только один раз.

374. Требуется построить магический квадрат третьего порядка из набора простых чисел p_i , таких, что числа $p_i + 2$ также простые. Среди простых чисел, которые меньше 2000, таким свойством обладает 61 число.

Поиск простых чисел, образующих магический квадрат, можно значительно сузить, если воспользоваться следующими соображениями:

а. Должны существовать четыре пары простых чисел, имеющих одну и ту же сумму.

б. Элемент E , стоящий в центре магического квадрата, равен полусумме каждой такой пары, то есть одной трети постоянной магического квадрата.

в. Если среди элементов квадрата нет 3 и 5, то простые числа p_i должны заканчиваться цифрами 1, 7 или 9.

г. Суммы цифр, стоящих в разрядах единиц элементов каждой строки, каждого столбца и диагоналей, должны иметь одинаковые последние цифры.

д. Из свойств «в» и «г» следует, что последние цифры элементов, стоящих в каждой строке, каждом столбце или на диагоналях, должны быть либо одними и теми же, либо образовывать (с точностью до поворотов и отражений) конфигурацию

1	7	9
7	9	1
9	1	7

Среди рассматриваемого набора из 61 простого числа существует десять значений $2E$ (суммы четырех пар простых чисел, отличающихся на 2), удовлетворяющих этим требованиям, а именно: 298, 838, 1318, 1618, 1762, 2038, 2098, 2122, 2182, 2638. Лишь первое из них обладает тем свойством, что сумма элементов, стоящих в верхней или нижней строке, а также в левом или правом столбце, равна $3E$. Соответствующие магические квадраты имеют вид

простые числа		простые числа
191 17 239	192 18 240	193 19 241
197 149 101	198 150 102	199 151 103
59 281 107	60 282 108	61 283 109

Таким образом, жалование придворного математика за год составляло $9E + 9 = 9(149 + 1) = 1350$ талеров.

Утверждают, что ближайший к найденным набор чисел, образующих средний магический квадрат, имеет вид

6198	5502	3030
2142	5010	7878
6690	4518	3822

При этом придворный математик получал бы в год 45090 талеров¹.

375. Покажем, каким образом, располагая пятью заданными прямыми, следует проводить шестую прямую, чтобы определяемый прямыми шестиугольник обладал как вписанным, так и описанным коническими сечениями.

Проведем любые четыре прямые a, b, c, d , образующие четырехугольник с вершинами 1, 2, 3, 4 (вершина 1 образована пересечением сторон a и b , вершина 2 — пересечением b и c , вершина 3 — пересечением c и d , вершина 4 — пересечением d и a). Пусть P — точка пересечения сторон a и c , Q — точка пересечения сторон d и b . Проведем любую пятую прямую e , пересекающую сторону c в точке 5 и сторону d в точке 6. Таким образом, задача сводится к тому, чтобы провести шестую прямую, которая пересекала бы прямые a, b, c, d и e .

Проведем диагонали 13 и 24 четырехугольника, пусть 7 — точка их пересечения. Затем проведем прямую 57 (пересекающую прямую a в точке 8) и прямую 67 (пересекающую прямую b в точке 9). Пусть f — прямая 89, а R — точка ее пересечения с прямой e . Фигура 489256 (или $afbcde$) и есть тот шестиугольник, который требовалось построить.

Действительно, по построению, диагонали 24, 58, 69 шестиугольника конкурентны (проходят через точку 7). Следовательно, по теореме, обратной теореме Бриансона, существует коническое сечение, касательные к которому совпадают со сторонами построенного шестиугольника. Кроме того, прямые 13, 85 и 96 также конкурентны в точке 7 и соединяют соответственные вершины двух треугольников 189 и 356. Следовательно, по теореме Дезарга соответственные стороны этих двух треугольников пересекаются в трех коллинеарных точках: прямые a и c пересекаются в точке P , прямые b и d — в точке Q , прямые e и f — в точке R , и точки P, Q, R коллинеарны.

¹ Это утверждение неверно. Существует решение

2088	1302	4800
5442	2730	18
660	4158	3372

соответствующее жалованию 24570 талеров. См. Ч. Тригг, Задачи с изюминкой, М., «Мир», 1975, решение задачи 250. — Прим. ред.

Но прямые a и c , b и d , e и f не что иное, как пары противоположных сторон шестиугольника. Следовательно, по теореме, обратной теореме Паскаля, существует коническое сечение, которому принадлежат все вершины построенного шестиугольника (см. III. 4).

Итак, построенный шестиугольник можно вписать в коническое сечение и описать вокруг конического сечения.

376. Если туристы прошли r миль по равнине и h миль вверх по склону горы, то

$$\frac{2r}{x} + \frac{h}{y} + \frac{h}{2y} = 7,$$

откуда

$$4yr + 3xh = 14xy,$$

где x и y — неизвестные целые числа, а r и h — параметры задачи, которые могут принимать любые (не обязательно целочисленные) значения. Каждый из параметров r и h не определен, а их сумма $r + h$ определена лишь в том случае, если $4y = 3x$. Для пешеходов единственно разумный ответ соответствует $x = 4$, $y = 3^1$, откуда $r + h = 14$. Следовательно, если предположить, что Льюис Кэррол предложил читателям «Истории с узелками» задачу, допускающую вполне определенное решение, то каждый из путников прошел за день 28 миль.

Интересно отметить, что предположение о существовании у задачи Льюиса Кэррола определенного решения эквивалентно предположению о равенстве средних скоростей движения по склону горы (во время подъема и спуска) и по равнине, поскольку в противном случае расстояние, пройденное туристами, зависело бы от отношения длины равнинной части маршрута к длине той его части, которая проходит по склону горы. Следовательно, среднее гармоническое чисел y и $2y$ равно x , то есть $4y/3 = x$.

377. Между основными пифагоровыми треугольниками и парами целых чисел s , t , удовлетворяющими условиям $s > t > 0$, $(s, t) = 1$ и $s \not\equiv t \pmod{2}$, существует взаимно-однозначное соответствие, устанавливаемое соотношениями $a = s^2 - t^2$, $b = 2st$, $c = s^2 + t^2$. Периметр

¹ Английская сухопутная миля равна 1609 м. — *Прим. ред.*

основного пифагорова треугольника равен $2su$, где $u = s + t$. Условия, наложенные выше на s и t , означают, что

$$s < u < 2s, \quad (s, u) = 1, \quad u \equiv 1 \pmod{2}. \quad (1)$$

Таким образом, исходная задача сводится к отысканию наименьшего натурального числа p , представимого в виде $p = su$ двумя различными способами, где s и u — положительные целые числа, удовлетворяющие соотношениям (1). Пусть $p = su = s'u'$ — два представления числа p , $u < u'$ (тогда $s > s'$), c/d — несократимая дробь, к которой приводится отношение $u/u' = s'/s$ и $u = bc$, $u' = bd$, $s = ad$, $s' = ac$. Нетрудно видеть, что условия (1), которым удовлетворяют s, u, s', u' , вместе с неравенством $u < u'$ эквивалентны следующим условиям, которые накладываются на четыре положительных целых числа a, b, c, d :

$$\frac{d}{2c} < \frac{a}{b} < \frac{c}{d} < 1, \quad (2)$$

$$a, b, c, d \text{ — взаимно простые числа,} \quad (3)$$

$$b \equiv c \equiv d \equiv 1 \pmod{2}. \quad (4)$$

Поскольку $p = abcd$, задача сводится к решению неравенства (2) при условиях (3) и (4), причем числа a, b, c, d должны обеспечивать минимум произведению $p = abcd$.

Прежде всего заметим, что, как следует из неравенств (2), $1/2 < a/b < 1$. Следовательно, значения a и b , при которых произведение ab достигает наименьшего из возможных значений, равны: $a = 2, b = 3$. Выберем эти значения a и b . Далее из неравенств (2) получаем неравенства $3/4 < c/d < 1$. Учитывая дополнительные условия (3) и (4), заключаем, что значения c и d , при которых произведение cd достигает наименьшего из возможных (при $a = 2, b = 3$) значений, равны $c = 11, d = 13$. Итак, мы пришли к решению $a = 2, b = 3, c = 11, d = 13$, которому соответствует $p = 858$.

Докажем, что не существует решения неравенств (2) при дополнительных условиях (3) и (4), которое приводило бы к меньшему значению p . Прежде всего заметим, что в силу неравенств (2) $1/2 < c^2/d^2 < 1$. Существуют лишь три пары значений c и d , удовлетворяющих этому

неравенству, условиям (3) и (4) и приводящих к произведению $cd < 11 \cdot 13$, а именно $c = 9, d = 11$; $c = 7, d = 9$ и $c = 5, d = 7$. Однако, как показано выше, в этих случаях $b \neq 3$, в силу чего $b \geq 5$ при $(c, d) = (9, 11)$ и $(c, d) = (7, 9)$ и $b \geq 9$ при $(c, d) = (5, 7)$. Следовательно, во всех трех случаях в силу неравенства (2)

$$p = abcd > \frac{bd}{2c} bcd = \frac{(bd)^2}{2} \geq \frac{(9 \cdot 5)^2}{2} > 858.$$

Итак, наименьшее число, удовлетворяющее всем условиям задачи, равно $2 \cdot 858 = 1716$. Таков общий периметр двух основных пифагоровых треугольников со сторонами (364, 627, 725) и (748, 195, 773).

Если отказаться от требования, чтобы пифагоровы треугольники были основными, то наименьшие периметры $2p$, общие для x пифагоровых треугольников, приведены ниже:

$$x = 2, 2p = 60: (15, 20, 25), (10, 24, 26);$$

$$x = 3, 2p = 120: (30, 40, 50), (20, 48, 52), (45, 24, 51);$$

$$x = 4, 2p = 360: (90, 120, 150), (60, 144, 156),$$

$$(135, 72, 153),$$

$$(36, 160, 164);$$

$$x = 5, 2p = 660: (165, 220, 275), (110, 264, 286),$$

$$(55, 300, 305), (297, 60, 303),$$

$$(210, 176, 274);$$

$$x = 6, 2p = 720: (180, 240, 300), (270, 144, 306),$$

$$(315, 80, 325), (45, 336, 339),$$

$$(72, 320, 328), (180, 288, 312).$$

Некоторые наборы пифагоровых треугольников, один из которых основной, также имеют общий периметр, который меньше, чем у перечисленных выше «основных» наборов, например:

$$x = 4, 2p = 240: (60, 80, 100), (40, 96, 104),$$

$$(90, 48, 102), (15, 112, 113);$$

$$x = 5, 2p = 420: (105, 140, 175), (70, 168, 182),$$

$$(175, 60, 185), (126, 120, 174),$$

$$(195, 28, 197);$$

$x = 7, 2p = 1320$: (330, 440, 550), (220, 528, 572),
 (495, 264, 561), (110, 600, 610),
 (594, 120, 606), (430, 352, 548),
 (231, 520, 569);

$x = 8, 2p = 840$: (210, 280, 350), (140, 336, 364),
 (315, 168, 357), (105, 360, 375),
 (252, 240, 348), (350, 120, 370),
 (390, 56, 395), (399, 40, 401);

$x = 10, 2p = 1680$: (420, 560, 700), (280, 672, 728),
 (630, 336, 714), (210, 720, 750),
 (504, 480, 696), (700, 240, 740),
 (105, 784, 791), (780, 112, 788),
 (798, 80, 802), (455, 528, 687).

В заключение приведем пифагоровы треугольники, имеющие наименьший общий периметр $2p = 84$ и общую сторону: (21, 28, 35) и (35, 12, 37).

378. Пусть

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array}$$

— магический квадрат с постоянной $N = S/3$. Тогда

$$N = (a + e + i) + (d + e + f) + \\ + (g + e + c) - (a + d + g) - (c + f + i) = 3e$$

и $S = 9e$. Складывая сначала строки, а затем столбцы, определитель матрицы магического квадрата можно представить в виде

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 3e & 3e & 3e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 3e \\ d & e & 3e \\ 3e & 3e & 9e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & e \\ d & e & e \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} S,$$

откуда и следует утверждение задачи.

379. Преобразование плоскости вида

$$\begin{aligned} y_1 &= y + Ax + B \\ x_1 &= x + C \end{aligned}$$

не меняет площадей и преобразует график многочлена четвертой степени в график многочлена той же степени, причем мы можем выбрать его так, чтобы точки перегиба многочлена четвертой степени расположились на вещественной оси симметрично относительно начала координат, то есть совпали с точками $(-a, 0)$, $(a, 0)$, где $a > 0$. Тогда

$$y'' = 12k(x^2 - a^2), \quad k \neq 0$$

и

$$y = k(x^4 - 6a^2x^2 + 5a^4) = k(x^2 - a^2)(x^2 - 5a^2).$$

Но

$$\begin{aligned} \int_{-a\sqrt{5}}^{-a} y dx &= \int_a^{a\sqrt{5}} y dx = -\frac{16ka^5}{5}, \\ \int_{-a}^a y dx &= \frac{32ka^5}{5}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\left| \frac{32ka^5}{5} \right| = 2 \left| -16 \frac{ka^5}{5} \right|,$$

то утверждения задачи доказаны.

380. Нетрудно видеть, что частичные суммы гармонического ряда удовлетворяют неравенству

$$\begin{aligned} S_p + S_q - S_{pq} &= (S_p + S_q - S_p) - (S_{2p} - S_p) - \\ &\quad - (S_{3p} - S_{2p}) - \dots - (S_{qp} - S_{(q-1)p}) \leq \\ &\leq S_q - p \cdot \frac{1}{2p} - p \cdot \frac{1}{3p} - \dots - p \cdot \frac{1}{qp} = 1. \end{aligned}$$

Кроме того (см. III.12),

$$C < S_{pq} - \ln(pq) \leq S_p - \ln p.$$

Следовательно,

$$0 \leq S_p - S_{pq} - \ln p + \ln pq. \quad (1)$$

Сложив левые и правые части неравенств (1) и

$$C \leq S_q - \ln q,$$

получим

$$C < S_p + S_q - S_{pq}.$$

Таким образом,

$$C < S_p + S_q - S_{pq} \leq 1,$$

что и требовалось доказать.

381. Разобьем модифицированный гармонический ряд на отрезки, содержащие члены одного знака. Пусть u_i — сумма членов i -го отрезка. Рассмотрим ряд

$$u_1 - u_2 + u_3 - \dots \quad (1)$$

Нетрудно видеть, что

$$u_n = \frac{2}{n^2 - n + 2} + \dots + \frac{2}{n(n+1)},$$

$$u_{n+1} = \frac{2}{n^2 + n + 2} + \dots + \frac{2}{n(n+3)} + \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

Следовательно,

$$0 < u_n < \frac{2n}{n^2 - n + 2},$$

откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} u_n - u_{n+1} &> n \left[\frac{2}{n(n+1)} - \frac{2}{n(n+3)} \right] - \frac{2}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{2}{(n+2)(n+3)} > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, ряд (1) сходится по признаку Лейбница.

Докажем, что из сходимости ряда (1) следует сходимость модифицированного гармонического ряда. Пусть S_p — любая частичная сумма этого ряда. Тогда при соответствующем значении n ее можно представить в виде $S_p = U_n + r_n$, где U_n — n -я частичная сумма ряда (1), а $|r_n| < u_{n+1}$. Если $p \rightarrow \infty$, то $n \rightarrow \infty$, и U_n стремится к сумме ряда (1), а $u_{n+1} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, S_p стремится к некоторому пределу и модифицированный гармонический ряд сходится.

382. Поскольку

$$\frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}, \quad (1)$$

то

$$\sum_{j=a}^{b-1} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}. \quad (2)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению положительных целых чисел a и b , удовлетворяющих при фиксированном целом числе $m > 1$ соотношению

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{m}. \quad (3)$$

Из соотношения (1) нетрудно заметить, что решением служат числа

$$a = m - 1, \quad b = m(m - 1).$$

Следовательно, если $m > 1$, то

$$\frac{1}{m} = \sum_{j=m-1}^{m(m-1)-1} \frac{1}{j(j+1)}, \quad (4)$$

и утверждение задачи доказано.

Нетрудно определить число различных представлений дроби $1/m$ в виде (3). Докажем следующее утверждение.

Если $m > 1$ и $H(m)$ означает число различных решений уравнения (3) в натуральных числах, то

$$H(m) = \frac{1}{2} [d(m^2) - 1],$$

где $d(n)$ — число делителей числа n .

Доказательство. Поскольку $1/a > 1/m$, то $a < m$. Пусть $a = m - c$. Подставляя это выражение в (3), получаем

$$b = \frac{m^2}{c} - m.$$

При каждом значении c , удовлетворяющем соотношениям

$$c | m^2, \quad 1 \leq c < m,$$

существует одна и только одна пара значений a и b , удовлетворяющих уравнению (3). Кроме того, поскольку $a < b$, то ни одна из этих пар не содержит равных чисел. Рассмотрим все делители числа m^2 , отличные от m (их $d(m^2) - 1$). Если c — один из этих делителей, то

одно и только одно число из пары $c, m^2/c$ меньше m . Следовательно,

$$H(m) = \frac{1}{2} [d(m^2) - 1],$$

что и требовалось доказать.

Приведенные выше рассуждения позволяют не только подсчитывать число различных представлений дроби $1/m$ в виде (3), но и находить все возможные представления при любом заданном m . Алгоритм отыскания всех решений уравнения (3) в натуральных числах a, b сводится к следующему: а) составить список всех делителей числа m^2 , которые меньше m ; пусть c — один из таких делителей, б) положить $a = m - c, b = m^2/c - m$; в) тогда $1/a - 1/b = m$.

В частности, если m — простое число, то $H(m) = 1$. В этом случае соотношение (4) дает единственное решение задачи.

В качестве другого примера рассмотрим $m = pq$, где p и q — простые числа, причем $p < q$. Тогда $d(m^2) = 9$ и $H(m) = 4$. Все решения уравнения (3) представлены ниже:

c	a	b
1	$pq - 1$	$pq(pq - 1)$
p	$p(q - 1)$	$pq(q - 1)$
q	$q(p - 1)$	$pq(p - 1)$
p^2	$p(q - p)$	$q(q - p)$

383. Предположим, что на окружности найдутся три точки с рациональными координатами (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$. Подставив по очереди координаты этих точек в уравнение окружности

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0,$$

получим систему трех линейных (относительно A, B и C) уравнений с рациональными коэффициентами. Следовательно, A, B и C также рациональны. Но тогда обе координаты центра окружности $(-A/2, -B/2)$ также рациональны, что противоречит предположению об иррациональности по крайней мере одной из них.

Например, окружность $(x - \sqrt{2})^2 + y^2 = 3$ содержит две рациональные точки $(0, 1)$ и $(0, -1)$, окружность $(x - \sqrt{2})^2 + y^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ содержит одну рациональную точку $(1, 0)$ и окружность $(x - \sqrt{2})^2 + y^2 = \sqrt{3}$ не содержит ни одной рациональной точки (иррациональна одна координата центра окружности).

Другое семейство окружностей, в котором иррациональны обе координаты центра окружности: окружность $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 6$ содержит две рациональные точки $(1, -1)$ и $(-1, 1)$, окружность $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 4$ содержит одну рациональную точку $(0, 0)$ и окружность $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 5$ не содержит ни одной рациональной точки.

Утверждение задачи остается в силе, если слово «иррациональная» заменить словом «трансцендентная», а слово «рациональная» — словом «алгебраическая».

384. Обозначим заданный определитель $(n-1)$ -го порядка через D_n . Нетрудно видеть, что $D_2 = 1$, $D_3 = 2$. Для того чтобы последовательность определителей D_n совпадала с последовательностью чисел Фибоначчи, необходимо доказать, что D_n удовлетворяют рекуррентному соотношению $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$ ($n \geq 4$). В определителе D_n вычтем $(n-3)$ -й столбец из $(n-1)$ -го, $(n-4)$ -й столбец из $(n-2)$ -го, ..., первый столбец из третьего. Тогда D_n преобразуется к виду

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Разлагая D_n по элементам первой строки, получаем требуемое рекуррентное соотношение.

385. Пусть α — бесконечно малая величина, а

$$\beta = \alpha + (\alpha^2 + \alpha^3) = (\alpha + \alpha^2) + \alpha^3.$$

Согласно «определению», приведенному в условии задачи, главной частью бесконечно малой величины β можно считать и α , и $(\alpha + \alpha^2)$.

Несколько более тонким примером, иллюстрирующим ошибочность «определения» главной части бесконечно малой величины, может служить

$$\beta = \alpha + \alpha^2 - 2\alpha \sin^2 \alpha = \alpha \cos 2\alpha + \alpha^2$$

(здесь «определению» удовлетворяют и α , и $\alpha \cos 2\alpha$).

Правильное определение главной части можно было бы сформулировать следующим образом. Если α и β — бесконечно малые величины и при некотором положительном целом n существует конечный, отличный от нуля предел $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (\beta/\alpha^n) = c$, то $c\alpha^n$ называется главной частью бесконечно малой величины β по сравнению с α . Заметим также, что $(\beta - c\alpha^n)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем β .

386. Поскольку при $x = 1$ все $y_n = 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1$ существует, можно считать $x \geq 1$ и $y_n \geq 1$. Нетрудно видеть, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ существует и равен Y , то $x = Y^{1/Y}$, а в области $Y > 0$ функция $x = Y^{1/Y}$ достигает абсолютного максимума при $Y = e$. Но при $x = e^{1/e}$ мы получаем возрастающую ограниченную последовательность $1 < y_1 < y_2 < \dots$, причем $y_n < e$ при любом n . Следовательно, $Y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ существует, и из равенства $Y = e^{Y/e}$ заключаем, что $Y = e$ (см. также задачу 30).

387. Разложение числа π , приведенное в условии задачи, можно доказать различными способами, используя бета-функцию Эйлера, многочлены Лежандра, преобразование Эйлера из теории рядов и так далее. Приведем одно из простейших доказательств, основанное на использовании формулы Валлиса при нечетном показателе степени.

Поскольку

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x \, dx = \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n+1)!},$$

то

$$\frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n+1)!} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^{-n} \cos^{2n+1} x \, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \left(\frac{1}{2} \cos^2 x \right)^n dx$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 2^{n+1}}{(2n+1)!} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cos^2 x \right)^n \right] dx =$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 x \right)^{-1} dx = \pi,$$

что и требовалось доказать.

388. Разбив грани многогранника на параллелограммы, проведем из вершин, лежащих по одну «сторону» произвольно выбранной зоны, внутрь многогранника отрезки прямых, равные и параллельные ребрам, принадлежащим выделенной нами зоне (см. решение задачи 206, доказательство утверждения «б»). Эти отрезки определяют слой параллелепипедов. Удалив его, мы получим многогранник с меньшим числом граней, все грани которого имеют форму параллелограммов. Продолжая срезать параллелепипедные слои, разобьем исходный многогранник на конечное число параллелепипедов.

Каждый параллелепипед разрежем на части, из которых составим прямоугольный параллелепипед. Для этого воспользуемся следующим приемом. Проведем через какое-нибудь ребро параллелепипеда плоскость, перпендикулярную противоположной грани. Всегда можно найти по крайней мере одну такую плоскость, разбивающую параллелепипед на две части. Составим из этих двух частей параллелепипед, имеющий по крайней мере один прямой плоский угол. Продолжая аналогичные построения, получим прямоугольный параллелепипед.

Предположим, что исходный многогранник имел единичный объем. Возьмем один из прямоугольных параллелепипедов с линейными размерами $a \times b \times c$. Проведя разрезы перпендикулярно плоскости прямоугольной грани $a \times b$, разобьем эту грань на части, из которых составим прямоугольник $1 \times (ab)$. Затем, проведя плоские разрезы перпендикулярно прямоугольной грани $(ab) \times c$, разобьем ее на части, из которых составим прямоугольник $1 \times (abc)$. Прямоугольный параллелепипед $a \times b \times c$ при этом перейдет в равновеликий по объему прямоугольный параллелепипед $1 \times 1 \times (abc)$. Прделав

аналогичные операции над всеми параллелепипедами, мы, очевидно, сможем сложить куб из прямоугольных параллелепипедов единичного сечения.

389*. Поскольку прямые AS_1 , BS_2 и CS_3 пересекаются в одной точке (это чевианы), точки A_1 , B_2 и C_3 коллинеарны по теореме Дезарга (см. III.4). Но именно в этих точках пересекаются противоположные стороны шестиугольника $B_1C_1C_2A_2A_3B_3$, и по теореме Паскаля (см. там же) его вершины лежат на одном коническом сечении.

Соединив середины A' , B' , C' сторон треугольника, мы получим треугольник, описанный около треугольника $S_1S_2S_3$. Пусть S'_1 , S'_2 , S'_3 — точки пересечения данных чевиан со сторонами BC , CA и AB . По теореме Чевы (III.1) и свойству параллельных секущих

$$1 = \frac{AS'_2}{S'_2C} \cdot \frac{CS'_1}{S'_1B} \cdot \frac{BS'_3}{S'_3A} = \frac{A'S_2}{S_2C'} \cdot \frac{C'S_1}{S_1B'} \cdot \frac{B'S_3}{S_3A'},$$

откуда, применяя снова теорему Чевы, находим, что прямые $A'S_1$, $B'S_2$, $C'S_3$ пересекаются в одной точке M . Обозначим через L точку пересечения $B'C'$ и S_2S_3 , а через N — точку пересечения S_1A' с S_2S_3 . Из свойства полного четырехсторонника, примененного к $MS_2A'S_3$, заключаем, что $(B', C'; S_1, L)$ — гармоническая четверка (III.2). Проектируя ее из M на S_2S_3 , находим, что четверка $(S_2, S_3; N, L)$ — гармоническая, а следовательно, пучок прямых $S_1(S_2, S_3; A', B')$ — гармонический и A' — середина отрезка A_2A_3 , откуда $CA_2 = A_3B$. Аналогично доказываются равенства $BC_1 = C_2A$, $AB_3 = B_1C$.

390. Соединим n заданных точек любой замкнутой кривой. Ясно, что более короткий путь, связывающий все n точек, мы получим, заменив кривую ломаной, не имеющей других вершин, кроме n заданных точек. Предположим, что звенья P_iP_{i+1} и P_kP_{k+1} ломаной пересекаются в точке P . Рассмотрим ломаную $P_iPP_k \dots P_{i+1}PP_{k+1} \dots P_i$. Если точка P не принадлежит к заданным точкам, то путь по маршруту $P_iP_k \dots P_{i+1}P_{k+1} \dots P_i$ короче и не содержит точки пересечения P . Если же точка P принадлежит к заданным точкам, то путь $P_iPP_k \dots P_{i+1}P_{k+1} \dots P_i$ короче и вер-

шина P в нем не является более точкой пересечения звеньев ломаной. Тем самым утверждение задачи доказано.

391. Проекция единичного куба на плоскость, перпендикулярную пространственной диагонали, имеет форму правильного шестиугольника, вписанная окружность которого имеет диаметр $\sqrt{2}$. Любое отверстие с поперечным сечением в форме единичного квадрата (призма) и осью, совпадающей с пространственной диагональю куба, вписано в прямой круговой цилиндр диаметром $\sqrt{2}$, имеющий ту же ось. Сквозное отверстие такого сечения окружено сплошными стенками из «остатков» куба, если только диагональ поперечного сечения не совпадает с отрезком, соединяющим центры противоположных граней куба.

392. Пусть $d = (a, b)$. Тогда $a = rd$, $b = sd$, где $(r, s) = 1$. Кроме того, произведение $(b/a)m = (s/r)m$ принимает целые значения ровно при d значениях $m \leq a - 1$, а именно при $m = 0, r, 2r, \dots, (d-1)r$. Если $(b/a)m$ не целое число, то

$$\sum_{n=0}^{a-1} e^{2\pi i b m n / a}$$

— конечная геометрическая прогрессия, сумма которой равна нулю. Если же $(b/a)m$ — целое число, то сумма той же геометрической прогрессии равна a , поскольку она содержит a членов, каждый из которых равен 1. Следовательно,

$$\sum_{m=0}^{a-1} \sum_{n=0}^{a-1} \frac{1}{a} e^{2\pi i b m n / a} = \frac{1}{a} (da) = d,$$

что и требовалось доказать.

393. Пусть

$$A = (S + T)(I + ST)^{-1}(I - S^2),$$

$$B = (I - S^2)(I + TS)^{-1}(S + T).$$

Требуется доказать, что $A = B$. Воспользуемся легко проверяемыми матричными тождествами

$$T(I + ST)^{-1} = (I + TS)^{-1} T, \quad (1)$$

$$T(I + ST)^{-1} S = I - (I + TS)^{-1}, \quad (2)$$

$$(I + ST)^{-1} S = S(I + TS)^{-1}, \quad (3)$$

$$(I + ST)^{-1} = I - S(I + TS)^{-1} T. \quad (4)$$

[Тождества (1) и (2) легко доказываются прямыми выкладками, тождества (3) и (4) следуют из (1) и (2) при перестановке T и S .]

Используя тождества (1)–(4), получаем

$$\begin{aligned} A &= S(I + ST)^{-1} + T(I + ST)^{-1} - S(I + ST)^{-1} S^2 - \\ &\quad - T(I + ST)^{-1} S^2 = S - S^2(I + TS)^{-1} T + (I + TS)^{-1} T - \\ &\quad - S^2(I + TS)^{-1} S - S + (I + TS)^{-1} S = B, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

394. Используя известные ряды для e и $\sin x$, а также периодичность синуса, получаем

$$\begin{aligned} n \sin(2\pi en!) &= n \sin\left(2\pi n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\right) = \\ &= n \sin\left[2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}\right] = \frac{2\pi n}{n+1} + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!) = 2\pi.$$

395. Двукратное отражение $T_1 T_2$ плоскости относительно прямых l_1 и l_2 (пересекающихся или непересекающихся) представляет собой движение плоскости, при котором каждый вектор поворачивается на угол, вдвое больший угла между прямыми l_1 и l_2 . Отображение T^2 равно произведению трех таких двукратных отражений, а сумма углов между прямыми кратна π . Следовательно, при отображении T^2 векторы поворачиваются на угол, кратный 2π . Это означает, что отображение T^2 эквива-

лентно параллельному переносу. Нетрудно показать, что T^2 вырождается в тождественное отображение в том и только в том случае, если прямые l_1, l_2, l_3 либо пересекаются в одной точке, либо параллельны.

Нетрудно доказать также, что величина параллельного переноса T^2 равна удвоенному периметру треугольника, ортоцентрического относительно треугольника, образованного прямыми l_1, l_2, l_3 (если последний треугольник содержит тупой угол, то сторону ортоцентрического треугольника, соответствующую вершине тупого угла, следует считать отрицательной). Таким образом, величина параллельного переноса не зависит от того, в каком порядке производятся отражения относительно прямых l_1, l_2, l_3 .

396. Пусть σ_k означает k -ю элементарную симметрическую функцию от n переменных $r_1, r_2, \dots, r_n$. Тогда формулу тангенса суммы

$$\operatorname{tg}(x_1 + x_2) = \frac{\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2}{1 - \operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2}$$

можно рассматривать как частный случай ($n = 2$) более общей формулы

$$\operatorname{tg} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) = \frac{\sigma_1 - \sigma_3 + \sigma_5 - \dots}{1 - \sigma_2 + \sigma_4 - \sigma_6 + \dots}, \quad (1)$$

где $x_i = \operatorname{arctg} r_i$. Соотношение (1) можно доказать методом математической индукции.

Соотношения, приведенные в условии задачи, мы получим, выразив коэффициенты многочлена

$$\prod_{i=1}^n (x + r_i) = \sum_{j=0}^n a_j x^{n-j}$$

через элементарные симметрические функции σ_k и подставив соответствующие выражения в (1).

В случае гиперболических тангенсов все минусы в правой части соотношения (1) следует заменить плюсами.

397. Если пятизначное число $N = \overline{abcde}$ делится на $396 = 4 \cdot 9 \cdot 11$, то $S = a + b + c + d + e \equiv 0 \pmod{9}$, в силу чего либо $S = 18$, либо $S = 27$. Кроме того, $(a + c + e) - (b + d) \equiv 0 \pmod{11}$. Но если $S = 18$, то

$a + c + e = b + d = 9$, поэтому с точностью до перестановки пары цифр b и d может принимать лишь следующие значения: $(0, 9)$, $(1, 8)$, $(2, 7)$, $(3, 6)$, $(4, 5)$. Отсюда легко находим, что существует шестнадцать пятизначных чисел с попарно различными цифрами и $S = 18$, содержащими по одной допустимой паре (b, d) и по крайней мере еще одну четную цифру. Переставляя цифры в каждом из этих шестнадцати чисел, можно добиться, чтобы две последние цифры образовывали двузначное число, делящееся на 4, причем 64 перестановки будут соответствовать числам, делящимся на 396.

Если $S = 27$, то $a + c + e = 19$, $b + d = 8$, и допустимые пары цифр (b, d) с точностью до перестановки совпадают с одной из пар $(0, 8)$, $(1, 7)$, $(2, 6)$ или $(3, 5)$. Из девяти видов пятизначных чисел с попарно различными цифрами, содержащими, кроме допустимой пары (b, d) , по крайней мере еще одну четную цифру, мы получим 36 значений N , делящихся на 396.

Следовательно, вероятность того, что цифры в шарах, вытянутых из урны, образуют число N , делящееся на 396, равна $100 \cdot 5! / 10! = 5 / 1512$.

К тому же результату можно прийти, перечислив все кратные числа 396, заключенные между 01188 и 99792 (что нетрудно, поскольку $396 = 400 - 4$), и вычеркнув затем те из них, которые содержат хотя бы одну цифру дважды.

Если из урны наугад вытягивают $k \leq 10$ шаров, то вероятность p того, что стоящие на них порядковые номера образуют число, делящееся на 396, можно подсчитать тем же методом, каким мы подсчитали ее при $k = 5$. Соответствующие значения p равны:

k	p
3	$2 \cdot 7! / 10! = 1/480$
4	$20 \cdot 6! / 10! = 1/252$
6	$360 \cdot 4! / 10! = 1/420$
7	$1\,488 \cdot 3! / 10! = 31/12\,600$
8	$10\,656 / 10! = 37/12\,600$
9	$15\,984 / 10! = 37/8\,400$
10	$78\,336 / 10! = 34/1\,575$

398. Прежде всего заметим, что

$$n! \sum_{pi+j=n} 1/p^i i! j! = \sum_{i=0}^{[n/p]} n! / p^i i! (n - ip)!$$

Рассмотрим общий член суммы, стоящей в правой части этого тождества:

$$n! / p^i i! (n - ip)! = (n - ip + 1)(n - ip + 2) \dots (n - 1) n / p^i i!$$

В числитель правой части последнего равенства входят: а) ip сомножителей i , следовательно, i полных систем вычетов по модулю p ; б) i кратных числа p , а именно числа $p[n/p]$, $p([n/p] - 1)$, $\dots$, $p([n/p] - i + 1)$. Пусть ρ_j ($j = 0, 1, \dots, p - 1$) — числа, образующие полную систему вычетов по модулю p ($\rho_0 = 0$). Тогда по теореме Вильсона (III.6)

$$\prod_{j=1}^{p-1} \rho_j = (p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{n!}{p^i i! j!} &\equiv \left[\frac{n}{p} \right] \left(\left[\frac{n}{p} \right] - 1 \right) \dots \left(\left[\frac{n}{p} \right] - i + 1 \right) (-1)^i / i! \equiv \\ &\equiv \binom{\left[\frac{n}{p} \right]}{i} (-1)^i \pmod{p}, \end{aligned}$$

откуда

$$n! \sum_{pi+j=n} \frac{1}{p^i i! j!} \equiv \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{p} \right]} (-1)^i \binom{\left[\frac{n}{p} \right]}{i} = (1 - 1)^{\left[\frac{n}{p} \right]} \equiv 0 \pmod{p},$$

что и требовалось доказать.

399. Мы не только докажем утверждение задачи, но и выведем условия, при которых выполняются «естественные предположения», приведенные в условиях задачи, а также условия, при которых возможно аномальное поведение частицы (утверждение «б»). При этом мы не будем вводить предположение о том, что сила потенциальна или не зависит от времени.

Введем на плоскости полярную систему координат. Пусть $f(r, \vartheta, t)$ — сила, приложенная к точке (r, ϑ) и

направленная к центру так, что $f > 0$ соответствует притяжению, а $f < 0$ — отталкиванию. Запишем закон Ньютона для радиальной и тангенциальной составляющих силы f :

$$-f(r, \vartheta, t) = m(\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2), \quad (1)$$

$$m(r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta}) = \frac{m}{r} \frac{d(r^2\dot{\vartheta})}{dt} = 0. \quad (2)$$

Из уравнения (2) следует, что $r^2\dot{\vartheta} = c$, где c — постоянная, не зависящая от t . Подставляя это соотношение в (1), получаем

$$-f(r, \vartheta, t) = m\left(\ddot{r} - \frac{c^2}{r^3}\right), \quad (3)$$

но $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 = \dot{r}^2 + c^2/r^2$, поэтому

$$\frac{d(v^2)}{dt} = 2\dot{r}\ddot{r} - \frac{2c^2\dot{r}}{r^3} = 2\dot{r}\left(\ddot{r} - \frac{c^2}{r^3}\right). \quad (4)$$

Сравнивая соотношения (3) и (4), находим

$$\frac{d(v^2)}{dt} = -2 \frac{\dot{r}}{m} f(r, \vartheta, t) = -\frac{2}{m} f(r, \vartheta, t) \frac{dr}{dt}. \quad (5)$$

Последнее соотношение можно было бы вывести непосредственно из теоремы о том, что изменение кинетической энергии частицы равно совершенной ею работе.

Предположим, что временной параметр всегда можно продолжить вдоль траекторий как в будущее, так и в прошлое и что движение достаточно гладко (условия максимума и минимума определяются по изменению знака производной соответствующей величины по времени).

Тогда из соотношения (5) нетрудно вывести следующую теорему.

Теорема 1. а. Пусть $f(r_1, \vartheta_1, t_1) > 0$. Тогда в точке (r_1, ϑ_1) в момент времени t_1 : 1) скорость v минимальна в том и только в том случае, если расстояние от точки до центра максимально, 2) скорость v максимальна в том и только в том случае, если расстояние от точки до центра минимально.

б. Пусть $f(r_1, \vartheta_1, t_1) < 0$. Тогда в точке (r_1, ϑ_1) в момент времени t_1 : 3) скорость v минимальна в том и только в том случае, если расстояние от точки до центра

минимально, 4) скорость v максимальна в том и только в том случае, если расстояние от точки до центра максимально.

В действительности пункт 4, как видно из теоремы 2, не может иметь места.

Теорема 2. Если $f(r_1, \vartheta_1, t_1) \leq 0$, то радиус r не достигает максимального значения в точке (r_1, ϑ_1) в момент времени t_1 .

Доказательство. Запишем соотношение (3) в виде $\ddot{r} = h^2/r^3 - f(r, \vartheta, t)/m$. Поскольку в рассматриваемом случае $f \leq 0$, то $\ddot{r} > 0$. Следовательно, при $\dot{r} = 0$ удаление точки от центра минимально.

Утверждение 1 задачи мы докажем, заметив, что если расстояние от частицы до центра максимально, то по теореме 2 $f > 0$ и по теореме 1а скорость v минимальна.

Контрпример, опровергающий утверждение 2 задачи, мы получим, рассмотрев нулевую силу. Частица в поле нулевой силы движется прямолинейно и равномерно, и относительно любого центра, не лежащего на траектории частицы, скорость v всегда максимальна или минимальна, в то время как расстояние от центра не максимально и не минимально.

Приведем еще один, менее тривиальный контрпример. Рассмотрим тело, подвешенное на пружине. Предположим, что телу сообщили начальную скорость вдоль оси пружины, а центр притяжения находится в некоторой точке на продолжении этой оси. В этом случае тело достигает максимальной скорости v при некотором промежуточном значении r .

Анализируя оба контрпримера, нетрудно заметить, что в точке с «аномальным» поведением тела $f = 0$. Покажем, что обращение в нуль силы f следует из полученных нами результатов. Действительно, если скорость v максимальна в точке (r_1, ϑ_1) в момент времени t_1 , то $f(r_1, \vartheta_1, t_1) \geq 0$. Но если $f(r_1, \vartheta_1, t_1) > 0$, то по теореме 1а (утверждение 2) расстояние до центра минимально. Следовательно, максимальная скорость v при не максимальном удалении от центра r может достигаться лишь в том случае, если $f = 0$.

400. Рассмотрим любой многогранник, для которого выполняется формула Эйлера $F + V = E + 2$, где F —

число граней, V — число вершин и E — число ребер многогранника. Докажем, что утверждение задачи справедливо при более слабом предположении относительно многогранника, а именно в предположении о том, что ни одна грань многогранника не имеет формы треугольника (в приводимом ниже доказательстве выпуклость многогранника и центральная симметрия его граней не используются). Пусть F_i ($i \geq 3$) — число граней, имеющих i сторон (ребер), а V_j ($j \geq 3$) — число вершин, в которых сходятся ровно j ребер. Тогда

$$F = \sum F_i, \quad V = \sum V_j.$$

Поскольку каждое ребро принадлежит двум граням и заканчивается двумя вершинами, то $2E = \sum iF_i = \sum jV_j$. Умножив формулу Эйлера на 4 и подставив в нее эти соотношения, получим

$$V_3 + F_3 = 8 + (F_5 + V_5) + 2(F_6 + V_6) + \dots$$

Утверждение задачи соответствует $F_3 = 0$, откуда $V_3 \geq 8$.

Заметим также, что между вершинами и гранями существует двойственность, поскольку $F_3 \geq 8$, если $V_3 = 0$.

III. ДОПОЛНЕНИЕ РЕДАКТОРА РУССКОГО ИЗДАНИЯ

Как уже говорилось в предисловии, я счел целесообразным дополнить настоящий сборник разделом, содержащим некоторые теоретические сведения и небольшой комментарий. Структура этой части такова. Сначала излагаются более общие положения, используемые в нескольких задачах. Они сгруппированы по темам: геометрия, теория чисел, алгебра и анализ. Затем идут более специальные вопросы, затрагиваемые в той или иной задаче, номер которой указывается. Весь материал разбит на пункты, ссылка типа III.17 указывает на 17 й пункт этой части.

А. Геометрия

1. *Замечательные точки и линии в треугольнике.* Эта весьма популярная некогда тема нашла свое отражение во многих учебниках и пособиях. Наиболее полной, по видимому, является книга С. И. Зетеля «Новая геометрия треугольника» (М., Учпедгиз, 1940). Много можно найти в книгах серии «Библиотека школьного математического кружка», особенно в вып. 2, Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 2 (М., ГИТТЛ, 1952) и вып. 12, те же авторы, Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум (М., «Наука», 1970). Наконец, можно рекомендовать еще книгу И. Кюршака и др. «Венгерские математические олимпиады» (М., «Мир», 1976), где много фактов из геометрии треугольника приведено в решениях задач и комментариях.

Теорема Чевы (рис. 29, Зетель, стр. 5). Для того чтобы прямые AA' , BB' , CC' , соединяющие вершины треугольника с точками, лежащими на противоположных сторонах, пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1.$$

Прямые, обладающие свойствами, указанными в теореме, называются *чевианами*. Из теоремы Чевы вытекают следующие следствия:

а Медианы треугольника пересекаются в одной точке, называемой *барицентром*, или *центром тяжести*.

б. Биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке — центре вписанной окружности.

в Высоты треугольника пересекаются в одной точке, называемой *ортоцентром*.

г. Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с вписанной окружностью, пересекаются в одной точке, называемой точкой *Жергона*.

Здесь $AB' = AC'$, $BA' = BC'$, $CA' = CB'$.

д. Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с соответственными внеписанными окружностями, пересекаются в одной точке, называемой точкой *Нагеля* (Зетель, стр. 11).

Здесь $AB' = A'B = p - c$, $BC' = B'C = p - a$, $CA' = C'A = p - b$.

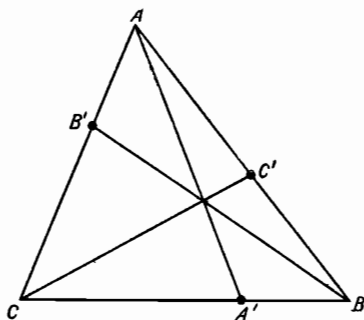


Рис. 29.

Средины отрезков высот от ортоцентра до вершин треугольника называются *точками Эйлера*.

Теорема Эйлера (рис. 30, Зетель, стр. 32 и 33). Основания медиан, высот и точки Эйлера лежат на одной окружности, называемой *окружностью девяти точек* или *окружностью Эйлера*, радиус которой равен половине радиуса описанной окружности.

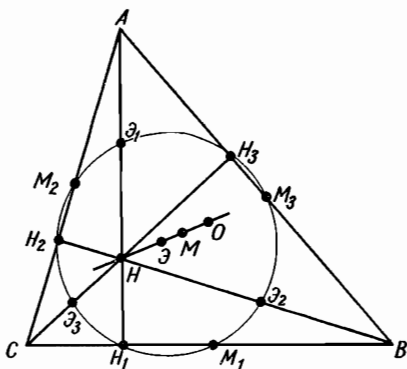


Рис. 30.

Эйлер доказал также, что ортоцентр H , центр окружности 9 точек $\mathcal{E}$, барицентр M и центр описанной окружности O лежат на одной прямой, называемой *прямой Эйлера*. При этом $\mathcal{E}$ является серединой OH , а $HM : MO = 2 : 1$.

Теорема Фейербаха (Зетель, стр. 35). Окружность девяти точек касается вписанной и трех внеписанных окружностей.

Эти четыре точки касания называются *точками Фейербаха*.

2. **Проективные преобразования.** Значительная часть задач данного сборника так или иначе связана с проективной геометрией. Необходимые сведения по этому вопросу читатель может найти в книгах: Н. А. Глаголев, *Проективная геометрия* (М. — Л., ОНТИ, 1936); Дж. В. Юнг, *Проективная геометрия* (М., ИЛ, 1949), Н. В. Ефимов, *Высшая геометрия* (М., Физматгиз, 1961 (гл. 5)). Кроме того, следует упомянуть небольшую великолепно написанную книгу О. А. Вольберга, *Основные идеи проективной геометрии* (М. — Л., Учпедгиз, 1949), в которой материал изложен весьма наглядно и занимательно.

В этом и в ряде следующих пунктов, говоря о плоскостях и прямых, мы будем иметь в виду проективные плоскости и прямые. Наглядно проективную плоскость можно представлять себе как обычную плоскость, пополненную бесконечно удаленными точками, образующими в совокупности бесконечно удаленную прямую. На языке аналитической геометрии точки проективной плоскости задаются тройками чисел (однородными координатами), определенными с точностью до пропорциональности, так что (x_1, x_2, x_3) и $(\rho x_1, \rho x_2, \rho x_3)$ при $\rho \neq 0$ отвечают одной и той же точке. Тройка $(0, 0, 0)$ исключается. Бесконечно удаленным точкам соответствуют тройки вида $(x_1, x_2, 0)$, для остальных $x_3 \neq 0$, и $x = x_1/x_3$; $y = x_2/x_3$ можно рассматривать как обычные декартовы координаты на обычной плоскости.

Проективным преобразованием называется взаимно однозначное отображение, при котором точки, лежащие на одной прямой, переходят в точки, также лежащие на одной прямой. В однородных координатах проективное преобразование плоскости задается линейными функциями

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Для любой пары четверок неколлинеарных точек A_1, A_2, A_3, A_4 в плоскости π и A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 в плоскости π' существует одно и только одно проективное преобразование $f: \pi \rightarrow \pi'$, такое, что $A'_i = f(A_i)$. Важный пример проективного преобразования — центральное проектирование (рис. 31). Можно показать, что каждое проективное преобразование плоскости в себя или в другую плоскость может быть представлено в виде композиции нескольких центральных проектирований.

Пусть $q = f(p)$ — взаимно-однозначное соответствие между точками p прямой l и точками q другой (или той же самой) прямой l' . Если f может быть продолжено до проективного отображения некоторой плоскости, содержащей l , на плоскость, содержащую l' , то f называется проективным отображением l на l' или *проективным соответствием* между точками этих прямых, заданием двух троек соответствующих друг другу точек f определяется однозначно. Важным примером проективного соответствия служит перспективное соответствие между точками двух прямых (рис. 32), ясно, что, выйдя из плоскости чертежа, мы легко можем дополнить отображение l в l' до центрального проектирования плоскости на плоскость.

Если представлять себе проективную плоскость как обычную евклидову, пополненную бесконечно удаленными элементами, то можно установить некоторые связи между метрическими и проективными

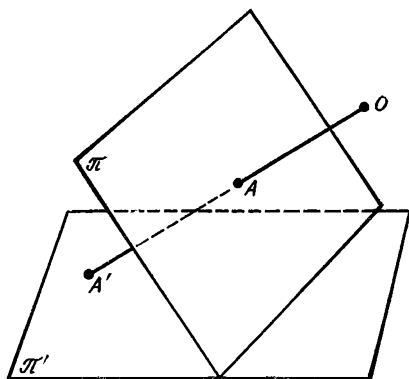


Рис. 31.

свойствами. Без ограничения общности мы можем считать, что l и l' суть оси OX и OX' некоторых декартовых систем координат, в соответствующих однородных координатах l определяется уравнением $x_2 = 0$, а l' — уравнением $x'_2 = 0$. Из формул (1) находим

$$x' = \frac{x'_1}{x'_3} = \frac{a_{11}x_1 + a_{13}x_3}{a_{31}x_1 + a_{33}x_3} = \frac{a_{11}x + a_{13}}{a_{31}x + a_{33}}, \quad (2)$$

так что при проективном преобразовании соответствие между декартовыми координатами на прямых оказывается дробно-линейным.

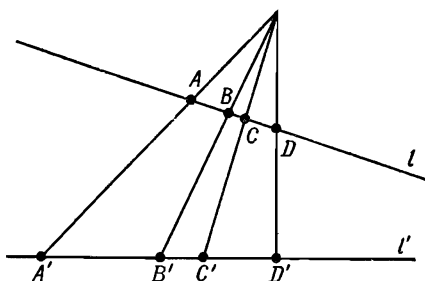


Рис. 32

Пусть при данном проективном соответствии четверка точек A, B, C, D переходит в четверку A', B', C', D' (рис 32). Обозначая координаты точек на соответствующих прямых теми же малыми буквами, рассмотрим величины

$$[A, B, C, D] = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{c-a}{b-c} : \frac{d-a}{b-d} \quad (3)$$

и

$$[A', B', C', D'] = \frac{A'C'}{C'B'} : \frac{A'D'}{D'B'} = \frac{c' - a'}{b' - c'} : \frac{d' - a'}{b' - d'}, \quad (4)$$

называемые *двойными отношениями* четверок точек. Непосредственным вычислением легко проверяется, что при отображении (2) имеет место равенство

$$\frac{c' - a'}{b' - c'} : \frac{d' - a'}{b' - d'} = \frac{c - a}{b - c} : \frac{d - a}{b - d},$$

так что двойное отношение при проективном отображении остается инвариантным:

$$[A, B, C, D] = [A', B', C', D'].$$

Это свойство иногда берется за основу определения проективного соответствия.

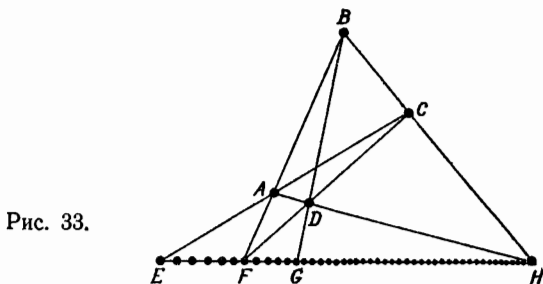


Рис. 33.

Четверка точек на прямой, для которой

$$[A, B, C, D] = -1,$$

называется *гармонической*. Из доказанного следует, что при проективном соответствии гармоническая четверка переходит в гармоническую. Если (A, B, C, D) — гармоническая четверка, то гармоническими будут также четверки (B, A, C, D) , (A, B, D, C) и (B, A, D, C) , ибо

$$[B, A, C, D] = [A, B, C, D]^{-1} = [A, B, D, C] = [B, A, D, C]^{-1},$$

а также четверка (C, D, A, B) и ее производные, ибо

$$[C, D, A, B] = [A, B, C, D].$$

Фигура, состоящая из четырех точек A, B, C и D и шести прямых, соединяющих их попарно (рис. 33), называется *полным четырехугольником*. Аналогично *полным четырехсторонником* называется фигура, состоящая из четырех прямых и шести точек их попарных пересечений.

Обозначим, как на рис. 33, буквами F и H точки пересечения противоположных сторон; AB с CD и AD с BC , а затем рассмотрим точки пересечения E и G прямой FH с диагоналями AC и BD .

Теорема о полном четырехугольнике. Четверка (F, H, G, E) — гармоническая.

Для доказательства сделаем проективное преобразование плоскости, при котором точки A, C, H и F перейдут в вершины квадрата (рис. 34); образы соответствующих точек обозначены теми же буквами со штрихами. Точки B' и E' становятся при этом бесконечно удаленными, а прямая $D'E'$, проходящая через бесконечно

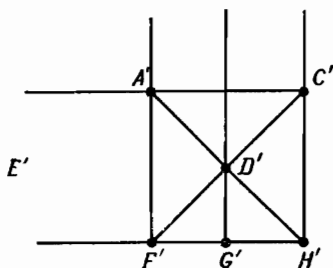


Рис. 34.

удаленную точку пересечения $A'F'$ и $C'H'$, параллельна им обоим. Поэтому $F'G' = G'H'$ и, следовательно,

$$[F, H, G, E] = [F', H', G', \infty] = \frac{F'G'}{G'H'} : (-1) = -1$$

(см также Зетель, стр. 29).

3. Проективное соответствие между прямыми в двух пучках.
Конические сечения Пучком прямых в плоскости π называется множество всех прямых, принадлежащих π и проходящих через данную точку S , называемую вершиной пучка, для краткости можно обозначать пучок той же буквой, что и его вершину. Взаимно-однозначное соответствие F между прямыми двух пучков, лежащих в плоскостях π и π' соответственно, называется *проективным*, если существует проективное отображение $f: \pi \rightarrow \pi'$, которое каждую прямую λ пучка S отображает на соответствующую ей прямую $F(\lambda)$ пучка S' . Если представлять себе π и π' как евклидовы, пополненные бесконечно удаленными элементами, и $f: \pi \rightarrow \pi'$ — как движение, или преобразование подобия, переводящее S в S' , то пучки S и S' называются *конгруэнтными*. В таких пучках углы между соответствующими прямыми равны: $(\lambda_1, \lambda_2) = (F(\lambda_1), F(\lambda_2))$.

Пусть кроме пучков S и S' в плоскостях π и π' заданы прямые l и l' , не принадлежащие этим пучкам. Сопоставляя точке $A \in l$ прямую AS , мы получаем взаимно-однозначное соответствие между точками прямой l и прямыми пучка S . То же самое можно сделать для l' и S' . Отображение F индуцирует отображение $\varphi: l \rightarrow l'$ следующим образом:

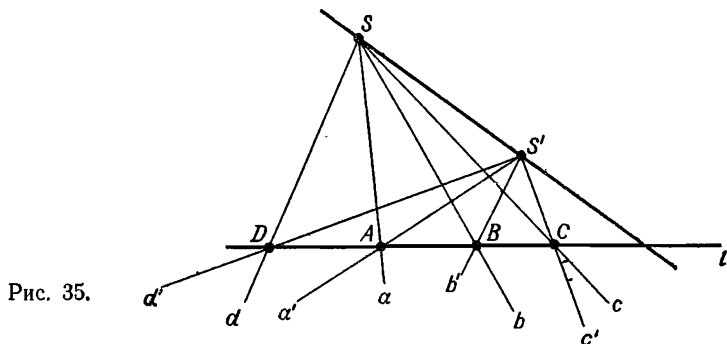
$$A \in l \rightarrow \lambda = SA \rightarrow F(\lambda) = \lambda' = S'A' \rightarrow A' = \varphi(A) \in l'.$$

Легко доказывается, что F проективно тогда и только тогда, когда φ проективно. В частности, когда $\pi = \pi'$, $l = l'$, но $S \neq S'$, мы получаем проективное соответствие пучков, сопоставляя прямой $a = AS$, $A \in l$, прямую $a' = AS'$ (рис. 35).

Сопоставляя четверке прямых a, b, c, d пучка S точки пересечения A, B, C, D этих прямых с прямой l , мы можем определить двойное отношение четверки прямых в пучке равенством

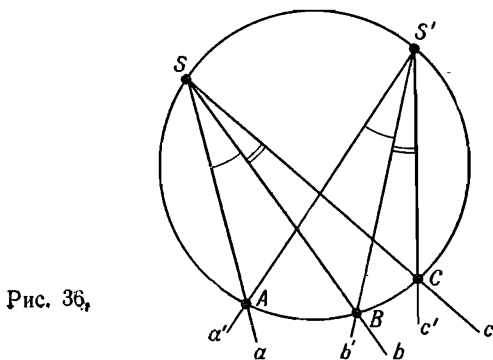
$$[a, b, c, d] = [A, B, C, D].$$

Из сказанного выше ясно, что это двойное отношение не зависит от выбора l и является инвариантом проективного соответствия; так



что, на рис. 35 $[a, b, c, d] = [a', b', c', d']$. Четверка прямых a, b, c, d называется *гармонической*, если $[a, b, c, d] = -1$.

Пусть проективное соответствие F установлено между двумя пучками S и S' , лежащими в одной плоскости. Множество M точек



пересечения пар прямых, соответствующих друг другу в этих пучках, называется *коническим сечением*. Легко видеть, что если пучки S и S' конгруэнтны и соответствующие прямые в них не параллельны (достаточно проверить это хотя бы для одной пары), то M — окружность (рис. 36).

Другой пример мы получаем, беря пучки, соответствие между которыми установлено, как на рис. 35. Здесь M является объединением прямых l и SS' (*вырожденное коническое сечение*). Если здесь

l — бесконечно удаленная прямая, то пучки S и S' конгруэнтны, а соответствующие прямые в них параллельны.

Если вершины пучков совпадают: $S = S'$, то M является объединением прямых λ , для которых $F(\lambda) = \lambda$, и сводится к точке S , если таких прямых нет. На прямой l , не проходящей через S , соответствие F индуцирует проективное отображение вида (2), а равенству $F(\lambda) = \lambda$ отвечают неподвижные точки этого отображения. Решая уравнение $x = (a_{11}x + a_{13}) / (a_{31}x + a_{33})$, мы обнаруживаем, что возможны следующие варианты: неподвижных точек вообще нет ($M = \{S\}$), неподвижных точек две (M — пара прямых), неподвижная точка одна (M — пара слившихся друг с другом прямых) либо $F(\lambda) \equiv \lambda$ (M — плоскость).

Из определения видно, что при проективном отображении коническое сечение переходит также в коническое сечение. В частности, коническими сечениями являются все кривые, которые можно получить центральным проектированием из окружности, то есть все эллипсы, гиперболы и параболы (см., например, Вольберг, стр. 107 и далее). Их называют *невырожденными* коническими сечениями. Можно показать, что с проективной точки зрения все конические сечения исчерпываются приведенным выше списком, то есть любое из них — это либо вся плоскость, либо проективным преобразованием может быть переведено в окружность, в пару прямых, различных или слившихся, или в точку.

Обычная (аффинная) классификация конических сечений соответствует их расположению относительно бесконечно удаленной прямой. Эллипсы с ней не пересекаются, гиперболы пересекаются в двух точках, а параболы касаются. В однородных координатах каждое коническое сечение является кривой второго порядка, то есть задается уравнением

$$\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_i x_j = 0, \quad a_{ij} = a_{ji}. \quad (5)$$

И наоборот, всякая кривая второго порядка (5), у которой не все $a_{ij} = 0$, приводится проективным преобразованием к одному из следующих видов:

- 1) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ (пустое множество);
- 2) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ (невырожденное коническое сечение, окружность);
- 3) $x_1^2 + x_2^2 = 0$ (точка);
- 4) $x_1^2 - x_2^2 = 0$ (пара различных прямых);
- 5) $x_1^2 = 0$ (пара слившихся прямых).

Если все $a_{ij} = 0$, то (5) определяет всю плоскость.

Таким образом, к приведенному выше списку конических сечений добавляется еще пустое множество.

4. *Теоремы Дезарга, Паскаля и Брианшона.* Эти три теоремы весьма популярны и неоднократно используются в нашем сборнике при решении задач. Их доказательства можно найти в любой из указанных в пункте 2 книг, а также во многих других учебниках. Мы

формулируем их в терминах «необходимо и достаточно», но следует иметь в виду, что часто каждая из теорем разделяется на «прямую» (необходимо) и «обратную» (достаточно).

Теорема Дезарга (рис. 37). Для того чтобы три прямые AA' , BB' и CC' пересекались в одной точке, необходимо и достаточно,

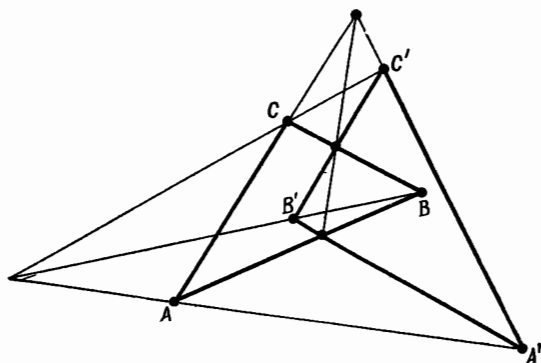


Рис. 37.

чтобы три точки пересечения пар прямых: AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, CA и $C'A'$ лежали на одной прямой.

Не следует забывать, что дело происходит на проективной плоскости, так что некоторые из точек или одна из прямых могут быть бесконечно удаленными.

Теорема Паскаля (рис. 38). Для того чтобы шесть точек A, B, C, D, E, F лежали на одном коническом сечении, необходимо и достаточно, чтобы точки пересечения противоположных сторон шестиугольника с вершинами в этих точках — AB и DE , BC и EF , CD и FA — лежали на одной прямой.

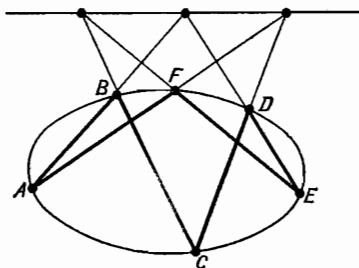


Рис. 38.

Теорема Брианшона (рис. 39). Для того чтобы шесть прямых a, b, c, d, e, f касались одного и того же конического сечения, необходимо и достаточно, чтобы прямые, соединяющие противоположные вершины шестисторонника, образованного этими прямыми, пересекались в одной точке.

Из рис. 39 видно, что понимается здесь под «противоположными вершинами». Это пары точек пересечения a с b , d с e и т. д.

Вершина, в которой сходятся a и f , является на этом рисунке бесконечно удаленной. Прямая, соединяющая ее с точкой пересечения c и d , параллельна как a , так и f .

5. *Полюсы и поляры.* К проективной геометрии относится также и понятие полярного соответствия. Этим термином обозначается взаимно-однозначное соответствие между точками проективной плоскости, и прямыми той же плоскости, определяемое при помощи некоторой кривой 2-го порядка. Мы опишем сейчас частный случай

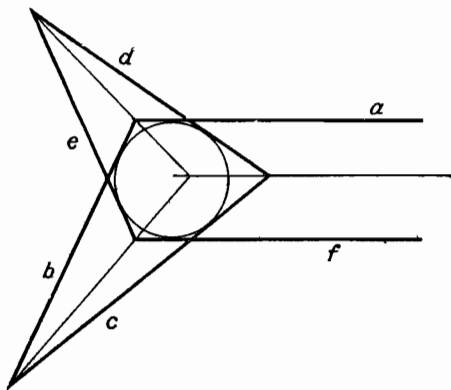


Рис. 39.

полярного соответствия, представляя себе проективную плоскость как обычную евклидову с фиксированной декартовой системой координат на ней и дополненную бесконечно удаленными элементами; в качестве заданной кривой второго порядка мы возьмем единичную окружность с центром в начале координат.

*Поляр*ой точки $P(x_0, y_0) \neq 0$ относительно окружности $x^2 + y^2 = 1$ называется прямая

$$x_0x + y_0y = 1, \quad (6)$$

проходящая на расстоянии $d = 1/\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ от центра окружности перпендикулярно лучу OP . Поляр*ой* точки O по определению является бесконечно удаленная прямая. Наконец, поляр*ой* бесконечно удаленной точки, отвечающей направлению луча OP , называется прямая, проходящая через O перпендикулярно OP . Точка, поляр*ой* которой является некоторая прямая l , называется *полюсом* этой прямой. Легко видеть, что это определение действительно устанавливает взаимно-однозначное соответствие между точками и прямыми проективной плоскости.

Если точка Q лежит на поляре точки P , то, и наоборот, поляр*а* точки Q проходит через P . Для конечных точек $P(x_0, y_0)$ и $Q(x_1, y_1)$, отличных от O , оба свойства выражаются соотношением $x_0x_1 + y_0y_1 = 1$, для остальных они легко проверяются прямо из определения.

Отсюда сразу выводится основное свойство полярного соответствия: для того чтобы несколько точек лежало на одной прямой l ,

необходимо и достаточно, чтобы полярные этих точек пересекались в одной точке, а именно в полюсе прямой l .

Заметим еще, что из определения вытекает следующее утверждение: точка P лежит на своей полярной тогда и только тогда, когда она принадлежит окружности, относительно которой определялось полярное соответствие, а ее полярная касается этой же окружности в точке P .

В решении задачи 35 описан способ построения полярной точки относительно заданной окружности при помощи одной линейки. Обратимся к рис. 40. Утверждается, что если четырехугольник $ABCD$

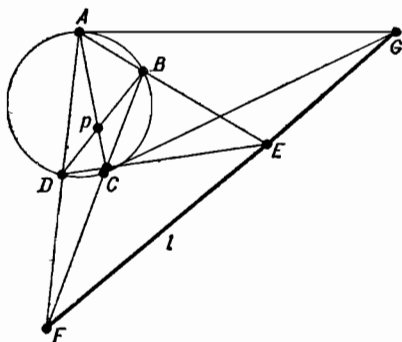


Рис. 40.

вписан в окружность, то полярной точки P пересечения его диагоналей AC и BD является прямая l , проходящая через точки пересечения E и F противоположных сторон. В самом деле, проведем касательные к окружности в точках A и C и рассмотрим вырожденный шестиугольник $AABCCD$. По теореме Паскаля (III. 4) точка G пересечения касательных лежит также на прямой l (когда две вершины вписанного шестиугольника сливаются, то соответствующая им сторона переходит в касательную к коническому сечению). Так как G лежит на полярных точек A и C , то ее полярная проходит через эти точки и, следовательно, совпадает с AC . Значит, полюс прямой l лежит на AC . Аналогично доказывается, что он должен лежать на BD и потому совпадает с P .

Поскольку любое невырожденное коническое сечение получается проективным преобразованием из окружности, то построение рис. 40 дает возможность определить полярное соответствие относительно любой невырожденной кривой второго порядка.

Пусть теперь дана произвольная алгебраическая кривая, уравнение которой запишем в виде

$$P_n(x, y) + P_{n-1}(x, y) + \dots + P_1(x, y) + P_0 = 0, \quad (7)$$

где $P_k(x, y)$ — однородные полиномы степени k ; $P_1(x, y) = Ax + By$. Проведем через точку O произвольную прямую с параметрическими уравнениями

$$x = \xi \cdot t, \quad y = \eta \cdot t, \quad (8)$$

получив для определенности $\xi^2 + \eta^2 = 1$, так что $|t|$ равно постоянно до O . Точки пересечения прямой (8) и кривой (7) находим из уравнения

$$t^n P_n(\xi, \eta) + \dots + t \cdot P_1(\xi, \eta) + P_0 = 0.$$

С учетом кратности этих точек, равной n , имеем:

$$A_1 = (\xi, \eta) t_1, \dots, A_n = (\xi, \eta) t_n.$$

Возьмем теперь на той же прямой (8) точку Q , удовлетворяющую соотношению

$$\frac{1}{OA_1} + \dots + \frac{1}{OA_n} = \frac{n}{OQ}, \quad (9)$$

в котором все отрезки направлены; $OA_k = t_k$. В силу формул Виета левая часть (9) равна $-P_1(\xi, \eta)/P_0$. Отсюда

$$t_Q = OQ = -\frac{P_0 \cdot n}{P_1(\xi, \eta)} \quad \text{и} \quad Q = \left(-\frac{n P_0 \xi}{P_1(\xi, \eta)}, -\frac{n P_0 \eta}{P_1(\xi, \eta)} \right).$$

Ясно, что точка Q лежит на прямой

$$0 = \frac{P_1(x, y)}{n} + P_0 = \frac{A}{n}x + \frac{B}{n}y + P_0 \quad (10)$$

при любом выборе прямой (8). Прямая (10) называется *полярой* точки O относительно кривой (7). При $n = 3$ это понятие используется в решении задачи 31.

Чтобы найти полярю любой другой точки $P(x_0, y_0)$, можно прибегнуть к преобразованию координат. Например, для окружности $x^2 + y^2 = 1$ положим $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$, откуда

$$(x' + x_0)^2 + (y' + y_0)^2 - 1 = (x')^2 + (y')^2 + 2x_0x' + 2y_0y' - 1 = 0.$$

Следовательно, $A = 2x_0$, $B = 2y_0$, $P_0 = -1$ и уравнение (10) приводится к (6), так что в этом частном случае общее определение поляры приводится к данному выше.

Б. Теория чисел

6. *Сравнения с одним неизвестным.* В сборнике довольно много задач, проблематика которых связана с теорией чисел (делимость, простые числа, диофантовы уравнения и пр.). Пособием по этой теме может служить любой учебник; в большинстве случаев мне удавалось найти необходимую справку в книге И. М. Виноградова «Основы теории чисел» (изд. 8-е, М., «Наука», 1972).

Свойства сравнений вида

$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \equiv 0 \pmod{p}, \quad (1)$$

где p — простое число, a_k — целые числа (или вычеты по модулю p), довольно похожие на свойства обычных алгебраических уравнений.

Теорема (Виноградов, стр. 56). Если сравнение (1) имеет средн вычетов по модулю p более n различных решений, то все $a_k \equiv 0 \pmod{p}$.

Впрочем, в отличие от обычных алгебраических уравнений с целыми коэффициентами неэквивалентных сравнений вида (1) лишь конечное число.

Малая теорема Ферма (Виноградов, стр. 44). Для любого простого p и целого x , не делящегося на p ,

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}. \quad (2)$$

Следствие 1. $x^p \equiv x$ при всех x .

Следствие 2. Каждое сравнение (1) эквивалентно сравнению степени $\leq p-1$.

Следствие 3 (теорема Вильсона).

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}. \quad (3)$$

Действительно, сравнение

$$x^{p-1} - 1 \equiv (x-1)(x-2) \dots (x-p+1),$$

степень которого $\leq p-2$, имеет по теореме Ферма $p-1$ решение $1, 2, \dots, p-1$, поэтому все его коэффициенты делятся на p . Свободный член дает (3) (это рассуждение применялось при решении задач 231 и 332).

7. *Квадратичные вычеты и невычеты. Символ Лежандра.* Число a называется *квадратичным вычетом* (соответственно *невычетом*) по модулю p , если сравнение

$$x^2 \equiv a \pmod{p} \quad (4)$$

имеет решение (соответственно не имеет решения). Для a , не делящихся на p , символ Лежандра $\left(\frac{a}{p}\right)$ по определению равен $+1$ в первом случае и -1 во втором. Если p простое нечетное, то, как легко видеть, среди чисел $1, 2, \dots, p-1$ квадратичных вычетов ровно половина ($p-1$ значений $x \not\equiv 0$ разбиваются на пары, дающие в (4) одно и то же a).

Критерий Эйлера. При a , не делящемся на простое нечетное p ,

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}. \quad (5)$$

Доказательство. По теореме Ферма (III.6)

$$\left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right) \left(a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) = a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

откуда либо $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$, либо $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$ (то и другое не может быть одновременно, ибо 2 не делится на p).

Если $a \equiv x^2$ — квадратичный вычет, то $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv x^{p-1} \equiv 1$. Этим все решения сравнения $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$ исчерпывается, ибо их число $\frac{p-1}{2}$ равно степени (см. III.6). Поэтому для квадратичных невычетов $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$.

Следствие 1.

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = \begin{cases} +1, & \text{если } p = 4k + 1, \\ -1, & \text{если } p = 4k + 3, \end{cases}$$

то есть -1 является квадратичным невычетом для простых p вида $4k + 3$ и вычетом — для простых p вида $4k + 1$.

Следствие 2.

$$\left(\frac{a_1 a_2 \dots a_k}{p}\right) = \left(\frac{a_1}{p}\right) \left(\frac{a_2}{p}\right) \dots \left(\frac{a_k}{p}\right). \quad (6)$$

Поэтому произведение $a_1 a_2 \dots a_k$ является квадратичным вычетом (невычетом), если среди $a_1, \dots, a_k$ четное (нечетное) число квадратичных невычетов (ср. решение задачи 91).

Еще два полезных свойства символа Лежандра (Виноградов, стр. 70).

1.

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}. \quad (7)$$

2. Закон взаимности. Если p и q — простые нечетные числа, то

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right). \quad (8)$$

8. Функции Мебиуса и Эйлера. Закон обращения. Функция Мебиуса $\mu(n)$ для любого натурального аргумента n определяется так:

$$\mu(1) = 1;$$

$\mu(n) = (-1)^s$, если $n = p_1 p_2 \dots p_s$, где $p_1, \dots, p_s$ — различные простые числа;

$\mu(n) = 0$, если n делится на какой-либо квадрат, отличный от 1.

Теорема. Если функция $\theta(n)$ натурального n мультипликативна, то есть

$$\theta(n_1 n_2) = \theta(n_1) \theta(n_2) \quad (9)$$

и $\theta(1) = 1$, то при $n > 1$

$$\sum_{n|m} \mu(n) \theta(n) = (1 - \theta(p_1)) \dots (1 - \theta(p_k)), \quad (10)$$

где $m = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ — каноническое разложение числа m в произведение простых чисел и сумма в левой части (10) распространена на все делители числа m .

Доказательство. По определению функции Мебиуса сумма в левой части (10) сводится к

$$\theta(1) + \sum_s (-1)^s \sum' \theta(p_{i_1} \dots p_{i_s}),$$

где $\sum'$ распространена на все сочетания $(i_1, \dots, i_s)$ из k элементов по s . Отсюда в силу соотношения (9) следует (10).

Следствие.

$$\sum_{n \mid m} \mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 1, \\ 0 & \text{при } m > 1. \end{cases} \quad (11)$$

Действительно, положив в (10) $\theta(n) \equiv 1$, получим (11) (ср. решение задачи 182).

Закон обращения теоретико-числовых функций. Пусть $\psi(n)$ — произвольная функция натурального аргумента и

$$f(n) = \sum_{d \mid n} \psi(d). \quad (12)$$

Тогда

$$\psi(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{m \mid n} \mu\left(\frac{n}{m}\right) f(m). \quad (13)$$

И наоборот, если $f(n)$ произвольна, а $\psi(n)$ определена равенством (13), то имеет место (12).

В самом деле,

$$\begin{aligned} \sum_{d \mid n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) &= \sum_{d \mid n} \sum_{k \mid \frac{n}{d}} \mu(d) \psi(k) = \sum_{\substack{d, k \\ kd \mid n}} \mu(d) \psi(k) = \\ &= \sum_{k \mid n} \psi(k) \sum_{d \mid \frac{n}{k}} \mu(d) = \psi(n) \end{aligned}$$

в силу (11). Аналогично доказывается и обратное утверждение.

Для произвольного натурального $n > 1$ функция Эйлера $\varphi(n)$ определяется как число взаимно простых с n чисел среди $1, 2, \dots, \dots, n-1$; $\varphi(1) = 1$.

Теорема.

$$\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n. \quad (14)$$

Доказательство. Для произвольного делителя δ числа n обозначим через A_δ множество чисел вида $\delta \cdot i$, где i взаимно просто с n/δ . Ясно, что $k \in A_{(k, n)}$ и при этом k не может принадлежать никакому другому A_δ (если $k = \delta \cdot i$, где $\delta \mid n$, то $(k, n) = \delta \cdot l$, $i = kl/(k, n)$ и оба числа, i и $\frac{n}{\delta} = \frac{nl}{(k, n)}$, делятся на l). Таким образом, каждое из n чисел $1, 2, \dots, n$ попадает ровно в одно из A_δ , причем в A_δ попадает ровно $\varphi(n/\delta)$ этих чисел. Полагая $d = n/\delta$, получаем отсюда (14).

Следствие. Если $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение, то

$$\varphi(m) = m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right). \quad (15)$$

Действительно, в силу закона обращения и формулы (10) для $\theta(n) = 1/n$

$$\varphi(m) = \sum_{d|m} \mu(d) \frac{m}{d} = m \sum_{d|m} \frac{\mu(d)}{d} = m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

9. *Уравнение Пелля.* Пусть D — натуральное число, не являющееся точным квадратом. Уравнение

$$x^2 - Dy^2 = 1 \quad (16)$$

называется *уравнением Пелля*. Пару положительных целых чисел (x, y) , удовлетворяющих этому уравнению, мы будем для краткости называть его положительным решением. Ввиду симметрии все нетривиальные (отличные от $(\pm 1, 0)$) решения выражаются через положительные.

Теорема. 1) Уравнение (16) имеет положительные решения. 2) Если (x_1, y_1) такое положительное решение, у которого x_1 (равносильно $x_1 + y_1 \sqrt{D}$) минимально, то любое положительное решение (x, y) содержится в последовательности решений (x_n, y_n) , определяемой равенством

$$x_n + y_n \sqrt{D} = (x_1 + y_1 \sqrt{D})^n \quad (17)$$

или рекуррентными соотношениями

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \cdot D \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Доказательство. Во множестве целочисленных пар (x, y) определим операцию $\odot$, полагая $(x, y) = (x', y') \odot (x'', y'')$ тогда и только тогда, когда

$$(x + y \sqrt{D}) = (x' + y' \sqrt{D})(x'' + y'' \sqrt{D}). \quad (19)$$

Ввиду иррациональности $\sqrt{D}$ (19) эквивалентно паре соотношений

$$\begin{aligned} x &= x'x'' + Dy'y'', \\ y &= x'y'' + x''y', \end{aligned} \quad (20)$$

при помощи которых операция $\odot$ может быть определена для любых пар (x, y) (и даже при любом D ; если $D = -1$, получаем обычное умножение комплексных чисел).

Полагая далее

$$N(x, y) = x^2 - Dy^2, \quad (21)$$

легко находим из (19) или (20), что

$$N[(x', y') \odot (x'', y'')] = N(x', y') N(x'', y''). \quad (22)$$

Известно, что для любого иррационального числа, в том числе и для $\sqrt{D}$, существует бесконечно много целых пар (p_n, q_n) , таких, что

$$\left| \sqrt{D} - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2} \quad (23)$$

(в качестве p_n/q_n можно брать подходящие дроби разложения $\sqrt{D}$ в бесконечную цепную дробь, см. А. Я. Хинчин, Цепные дроби, М—Л, ГИТТЛ, 1949, стр. 17, теорема 9). Из неравенств (23) находим

$$|p_n^2 - Dq_n^2| = q_n^2 \left| \sqrt{D} - \frac{p_n}{q_n} \right| \left| \sqrt{D} + \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \left| \sqrt{D} + \frac{p_n}{q_n} \right| \leq 2\sqrt{D} + 1.$$

Следовательно, $N(p_n, q_n) = p_n^2 - Dq_n^2$ может принимать лишь конечное число значений, а потому для бесконечно многих пар (p_n, q_n) оно имеет одно и то же значение k . Беря вычеты по модулю $|k|$, мы обнаруживаем, что среди этих пар найдутся такие (и даже бесконечно много), скажем; (p', q') и (p'', q'') , что $p' \equiv p'' \pmod{|k|}$ и $q' \equiv q'' \pmod{|k|}$. Для $(p, q) = (p', q') \odot (p'', -q'')$ имеем

$$p^2 - Dq^2 = N(p, q) = N(p', q') N(p'', -q'') = k^2,$$

причем в силу (20) $p \equiv (p')^2 - D(q')^2 \equiv 0 \pmod{|k|}$ и $q \equiv p'q' - p'q' \equiv 0 \pmod{|k|}$. Следовательно, $p = kx$, $q = ky$ и

$$x^2 - Dy^2 = \frac{p^2 - Dq^2}{k^2} = 1.$$

Тем самым доказано первое утверждение теоремы.

Каждое решение уравнения (16), у которого $x > 0$, может быть описано параметрическими уравнениями

$$x = \operatorname{ch} \xi, \quad y = \frac{\operatorname{sh} \xi}{\sqrt{D}}. \quad (24)$$

Обозначим через Ξ множество тех ξ , для которых формулы (24) определяют целочисленное решение уравнения (16), и через Ξ_+ подмножество ξ , для которых это решение положительно. Из равенства

$$x + y\sqrt{D} = \operatorname{ch} \xi + \operatorname{sh} \xi = e^\xi \quad (25)$$

видно, что ξ упорядочено одинаково с $x + y\sqrt{D}$, а при $y > 0$, когда $\xi > 0$, одинаково и с x . Так как среди положительных решений уравнения (16) существует такое, у которого x минимально (пусть это будет решение (x_1, y_1)), то в Ξ_+ есть наименьший элемент ξ_1 .

Докажем, что Ξ состоит из чисел $k\xi_1$, где k — любое целое. Действительно, из (21) и (22) видно, что множество решений уравнения (16) замкнуто относительно операции $\odot$, а из (19) и (25) следует, что для переменной ξ эта операция превращается в сложение. Следовательно, если $\xi', \xi'' \in \Xi$, то $\xi' \pm \xi'' \in \Xi$. (После подстановки (24) формулы (20) превращаются в формулы сложения для гиперболических функций.) Предположив, что Ξ содержит какое-то $\xi \neq k\xi_1$, мы имеем

$$\xi_1 > \xi' = \xi - \left[\frac{\xi}{\xi_1} \right] \cdot \xi_1 > 0,$$

и ясно, что $\xi' \in \Xi_+$ вопреки определению ξ_1 .

Из найденного описания множества Ξ , из (25) и установленной выше связи между сложением для ξ и операцией $\odot$ сразу следует (17). Из (17) и (21) легко выводим (18).

10. **Гауссово кольцо.** Представление натуральных чисел в виде суммы двух квадратов. Кольцом гауссовых чисел или просто гауссовым кольцом называется множество комплексных чисел $z = x + iy$ (где x и y целые) с определенными на нем обычными операциями сложения и умножения. Неотрицательное целое число

$$N(z) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

будем называть *нормой* гауссова числа z ; очевидно, что

$$N(z_1 z_2) = N(z_1) N(z_2) \quad (26)$$

(ср. в предыдущем пункте соотношение (22) и сказанное там по поводу $D = -1$). Нулевую норму имеет только 0, $N(z) = 1$ только при $z = \pm 1$ или $z = \pm i$. Последние четыре гауссовых целых числа называются *делителями единицы*, и только у них в гауссовом кольце есть обратные элементы. Гауссово целое число z , отличное от 0 и делителей единицы, называется *простым*, если из равенства $z = z_1 z_2$, где z_1, z_2 также гауссовы целые числа, вытекает, что либо z_1 , либо z_2 — делитель единицы.

Теорема. Каждое гауссово целое число z , у которого $N(z) \geq 2$, представимо в виде произведения простых гауссовых чисел. Если

$$z = p_1 p_2 \dots p_r = q_1 q_2 \dots q_s$$

— два таких разложения, то $r = s$ и существует перестановка индексов $(j_1, j_2, \dots, j_r)$, и делители единицы ε_i такие, что $p_i = \varepsilon_i q_{j_i}$ (см. Б. Л. ван дер Варден, Алгебра, М., «Наука», 1976, стр. 78—80).

Ясно, что составные натуральные числа будут составными и в гауссовом кольце, простые натуральные числа могут перестать быть таковыми:

$$2 = (1 + i)(1 - i), \quad 5 = (1 + 2i)(1 - 2i) = (2 + i)(2 - i).$$

Однако справедлива следующая теорема.

Теорема. Простые натуральные числа вида $4k + 3$ остаются простыми и в гауссовом кольце, а простые натуральные числа вида $4k + 1$ раскладываются в этом кольце на два комплексно сопряженных простых множителя. С точностью до умножения на делители единицы этим все простые гауссовы числа исчерпываются.

Доказательство. Пусть p — простое натуральное число, не являющееся простым в гауссовом кольце, так что $p = z_1 z_2$. Тогда $p^2 = N(p) = N(z_1) N(z_2)$, и если ни z_1 , ни z_2 не являются делителями единицы, то $N(z_1) = N(z_2) = p$. Следовательно, $|z_1| = |z_2|$, а так как произведение $z_1 z_2$ положительно, то $z_2 = \bar{z}_1$. Если $z_1 = a + bi$, то $p = a^2 + b^2$. Перебирая всевозможные остатки от деления a и b на 4, убеждаемся, что p либо равно 2, либо имеет вид $4k + 1$. Следовательно, все нечетные простые числа вида $4k + 3$ остаются таковыми и в гауссовом кольце.

Если же p — простое число вида $4k + 1$, то (см. следствие 1 в III. 7) (-1) — квадратичный вычет n , значит, существует такое целое x , что $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$ делится на p . Если бы p было простым гауссовым, то оно делило бы либо $x + i$, либо $x - i$. Но ни одно из комплексных чисел $(x + i)/p$, $(x - i)/p$ не является целым гауссовым. Следовательно, p — составное гауссово число и, как мы уже видели выше, $p = a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$

Заметим теперь, что если $N(z) = p$ — простое натуральное число, то z обязано быть простым гауссовым. В самом деле, если $z = z_1 z_2$, то $p = N(z_1 z_2) = N(z_1) N(z_2)$, откуда либо $N(z_1) = 1$ и z_1 — делитель единицы, либо $N(z_2) = 1$. Поэтому в разложении $p = (a + bi)(a - bi)$ оба множителя простые, ибо $N(a + bi) = N(a - bi) = p$.

Остается убедиться, что найденными простыми числами исчерпываются все простые гауссовы числа. Из сделанного только что замечания видно, что мы должны рассмотреть только те числа $z = a + bi$, норма которых составная: $N(z) = N_1 N_2$. Но если $ab \neq 0$ то в разложении

$$N(z) = (a + bi)(a - bi) = N_1 N_2$$

множители в средней и правой частях не могут быть получены друг из друга перестановкой и умножением на делители единицы. Следовательно, эти множители, в том числе и $z = a + bi$, не простые. Если же $ab = 0$, то z получается из натурального числа умножением на делитель единицы, а натуральные числа мы уже рассмотрели.

Теперь мы можем выяснить, какие натуральные числа представимы в виде суммы двух квадратов. Из равенств

$$N = a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$$

видно, что этим свойством обладают те и только те натуральные числа, которые в гауссовом кольце раскладываются в произведение двух комплексно сопряженных сомножителей. Пусть

$$N = 2^{\alpha} p_1^{\beta_1} \dots p_r^{\beta_r} q_1^{\gamma_1} \dots q_s^{\gamma_s} \quad (27)$$

— каноническое разложение N на простые натуральные числа, причем p_k имеет вид $4n + 1$, а q_k — вид $4n + 3$. Чтобы получить из (27) разложение N на простые гауссовы числа, разложим каждое p_k таким образом: $p_k = \pi_k \bar{\pi}_k$. Тогда

$$N = (1 + i)^{\alpha} \pi_1^{\beta_1} \dots \pi_r^{\beta_r} q_1^{\gamma_1} \dots q_s^{\gamma_s} \bar{\pi}_1^{\beta_1} \dots \bar{\pi}_r^{\beta_r} (1 - i)^{\alpha}. \quad (28)$$

Чтобы получить нужное нам разложение, мы должны отобрать часть множителей из (28) в $a + bi$. Пусть, например,

$$a + bi = (1 + i)^{\delta} \pi_1^{e_1} \dots \pi_r^{e_r} q_1^{\eta_1} \dots q_s^{\eta_s} \bar{\pi}_1^{\theta_1} \dots \bar{\pi}_r^{\theta_r} (1 - i)^{\kappa}. \quad (29)$$

Сравнивая равенство

$$\begin{aligned} N = N(a + bi) &= N(1 + i)^{\delta} \cdot N(\pi_1)^{e_1} \dots N(\pi_r)^{e_r} N(q_1)^{\eta_1} \dots \\ &\dots N(q_s)^{\eta_s} N(\bar{\pi}_1)^{\theta_1} \dots N(\bar{\pi}_r)^{\theta_r} N(1 - i)^{\kappa} = \\ &= 2^{\delta + \kappa} p_1^{e_1 + \theta_1} \dots p_r^{e_r + \theta_r} q_1^{2\eta_1} \dots q_s^{2\eta_s} \end{aligned}$$

с (27), получаем

$$\delta + \kappa = \alpha, \quad e_k + \theta_k = \beta_k, \quad 2\eta_k = \gamma_k.$$

Тем самым все γ_k должны быть четными и η_k определены однозначно; δ можно выбирать $(\alpha + 1)$ способом: $\delta = 0, 1, \dots, \alpha$, после чего ε_k определяются однозначно; ε_k можно определить $\beta_k + 1$ способом. Каждый выбор показателей приводит к разложению (29), определяющему в свою очередь разложение N в сумму квадратов. Кроме того, следует еще учесть, что каждый множитель в (29) определен с точностью до умножения на делитель единицы, то есть на некоторую степень i .

Теорема. Для того чтобы натуральное N было представимо в виде суммы двух ненулевых квадратов, необходимо, чтобы в его каноническом разложении (27) простые числа вида $4n + 3$ входили только в четных степенях. Если это условие выполнено, то число различных разложений в упорядоченную сумму двух квадратов равно

$$(\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1) \dots (\beta_r + 1), \quad (30)$$

если N не является точным квадратом, и меньше (30) на единицу, если N — точный квадрат. (Здесь β_k те же, что и в (27), а все p_k предполагаются различными.)

Доказательство. Нам осталось провести подсчет числа различных разложений. Все комплексные числа (29) имеют один и тот же модуль $\sqrt{N}$, а их аргументы (с учетом делителей единицы) определяются формулой

$$\varphi = \frac{\pi}{4} (2\delta - \alpha) + \varphi_1 (2\varepsilon_1 - \beta_1) + \dots + \varphi_r (2\varepsilon_r - \beta_r) + \frac{\pi}{2} l, \quad (31)$$

где φ_k — аргумент π_k , $\delta = 0, 1, \dots, \alpha$, $\varepsilon_k = 0, 1, \dots, \beta_k$, l любое.

Одинаковые разложения в упорядоченную сумму квадратов получаются для четверки аргументов $\pm\varphi$, $\pi \pm \varphi$ (то есть при $\pm a \pm bi$). Такую четверку мы получаем, меняя в (31) l на 2 или заменяя δ на $\alpha - \delta$, ε_k на $\beta_k - \varepsilon_k$ и l на $-l$. Произвол в выборе β_k дает нам число, указанное в (30); за счет l мы это число учетверим, и тогда δ не вносит нового произвола. Однако затем, беря по одному представителю из четверки, мы снова возвращаемся к (30).

Число четверок может уменьшиться, если, меняя в (31) l , мы получим число, отвечающее другому набору ε_k . Для того чтобы это случилось, должно быть $\varphi_1 n_1 + \varphi_2 n_2 + \dots + \varphi_r n_r = \frac{\pi}{2} n$ при некоторых $n_1, \dots, n_r, n$. Но тогда

$$\pi_1^{4n_1} \pi_2^{4n_2} \dots \pi_r^{4n_r} = p_1^{2n_1} p_2^{2n_2} \dots p_r^{2n_r} = \pi_1^{2n_1} \pi_2^{2n_2} \dots \pi_r^{2n_r} \bar{\pi}_1^{2n_1} \bar{\pi}_2^{2n_2} \dots \bar{\pi}_r^{2n_r}$$

или

$$\pi_1^{2n_1} \pi_2^{2n_2} \dots \pi_r^{2n_r} = \bar{\pi}_1^{2n_1} \dots \bar{\pi}_r^{2n_r}.$$

Поскольку π_k и $\bar{\pi}_k$ — простые гауссовы числа, то множители, стоящие слева, должны равняться множителям, стоящим справа, с точностью до делителей единицы. Но π_k и $\bar{\pi}_j$ имеют различные модули при $i \neq j$, так как $\sqrt{p_k} \neq \sqrt{p_j}$. Поэтому π_k и $\bar{\pi}_k$ отли-

чаются делителем единицы, что возможно лишь при $\pi_k = 1 \pm i$ и $p_k = 2$, вопреки обозначению p_k .

Наконец, число представлений в виде суммы нулевых квадратов уменьшится на единицу, если среди аргументов (31) есть кратные $\pi/2$ (то есть либо a , либо b равно 0). Предыдущее рассуждение показывает, что это возможно лишь при $2\delta = \alpha$, $2\varepsilon_k = \beta_k$. Но тогда и только тогда N является точным квадратом.

В. Анализ и алгебра

11. *Некоторые полезные формулы.* В стандартных курсах высшей математики, равно как и в большинстве курсов математического анализа, читаемых теперь в университетах, специальным функциям и различным соотношениям, их включающим, уделяется очень мало времени. Поэтому многие факты, популярные в прежние годы, стали мало известными, вследствие чего читатель может испытывать затруднения при решении задач, опирающихся на эти факты. Повидимому, одним из лучших пособий в данном вопросе может служить книга Э. Т. Уиттекера и Дж. Н. Ватсона «Курс современного анализа» (части 1 и 2, М., Физматгиз, 1963, далее цитируется как «У—В»).

Гамма функция Эйлера обычно определяется в курсах анализа при $x > 0$ равенством

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Сам Эйлер определил ее как предел (У—В, ч. II, стр. 16)

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z (n-1)!}{z(z+1) \dots (z+n-1)}, \quad (1)$$

существующий при всех комплексных z , кроме $z = 0, -1, -2, \dots$

Из (1) легко выводится, что

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad (2)$$

$$\Gamma(m) = (m-1)! \text{ при } m \text{ натуральном.} \quad (3)$$

Кроме того, справедлива формула дополнения (У—В, ч. II, стр. 19)

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad (4)$$

и при $\operatorname{Re} z > 0$

$$\left| \ln \Gamma(z) + \left(z - \frac{1}{2} \right) - z \ln z - \frac{1}{2} \ln 2\pi \right| < \frac{K}{\operatorname{Re} z} \quad (5)$$

(У—В, ч. II, стр. 34). Из (3) и (5) легко получается формула Стирлинга

$$m! = \sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{e} \right)^m e^{\theta_m}, \quad (6)$$

где $|\theta_m| < K/(m+1)$. Более точные подсчеты дают $0 < \theta_m < 1/12m$.

Эти формулы полезны для разных асимптотических вычислений. Например, в решении задачи 295

$$\begin{aligned} \binom{1/3}{n} &= \frac{1/3 (1/3 - 1) \dots (1/3 - n + 1)}{n!} = \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{3n} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} + 1\right) \dots \left(\frac{2}{3} + n - 2\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma(n)} = \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{3n \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(n - \frac{1}{3}\right)}{\Gamma(n)} \sim \frac{(-1)^{n-1}}{3\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) n^{4/3}}, \end{aligned}$$

так как в силу (5)

$$\ln \frac{\Gamma\left(n - \frac{1}{3}\right)}{\Gamma(n)} = -\frac{1}{3} \ln n + o(1).$$

Аналогичная асимптотика используется в решении задачи 77.

Дзета-функция Римана определяется в области $\operatorname{Re} z > 1$ как сумма ряда

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}. \quad (7)$$

При четных значениях аргумента значения этой функции могут быть найдены из формулы (У—В, ч. II, стр. 64)

$$\zeta(2m) = 2^{2m-1} \pi^{2m} B_m / (2m)!,$$

где B_m — числа Бернулли, то есть коэффициенты разложения (У—В, ч. I, стр. 177)

$$\frac{z}{2} \operatorname{ctg} \frac{z}{2} = 1 - \frac{B_1 z^2}{2!} - B_2 \frac{z^4}{4!} - \dots$$

В частности, $B_1 = 1/6$, $B_2 = 1/30$, $B_3 = 1/42$, так что

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}. \quad (8)$$

Для решения некоторых задач полезно знать, что

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right)$$

(У—В, ч. I, стр. 51);

$$(\sin z)^{-1} = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} (-1)^n \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) \quad (9)$$

(У—В, ч. I, стр. 189);

$$(\cos z)^{-1} = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{[(2n+1)\pi]^2 - 4z^2} \quad (10)$$

(У—В, ч. I, стр. 190);

$$\frac{\operatorname{cth} z}{z} = \frac{1}{z^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2 + z^2} \quad (11)$$

(У—В, ч. I, стр. 191).

12. *Постоянная Эйлера*. Эта константа, хотя и менее популярная, чем e и π , но все же довольно часто встречающаяся, обычно определяется как предел

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right). \quad (12)$$

Чтобы убедиться в его существовании и получить некоторые оценки, рассмотрим две последовательности:

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1), \quad C_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Ясно, что $c_n < C_n$ и $c_n - C_n \rightarrow 0$. Кроме того,

$$\begin{aligned} c_n - c_{n-1} &= \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n} - \int_{n-1}^n \frac{dx}{1+x} = \\ &= \int_{n-1}^n \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{1+x} \right] dx > 0 \end{aligned}$$

и аналогично $C_n - C_{n-1} < 0$. Поэтому обе последовательности монотонно стремятся к одному и тому же пределу C с разных сторон.

Для оценки C заметим, что величина $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x}$ за-

ключена между площадями двух трапеций: большей, образованной ординатами 1 и $1/(1+x)$, и меньшей, отсеченной от большей касательной к кривой $y = 1/(1+x)$ в точке $x/2$. После несложных преобразований получаем неравенства

$$x - \frac{x^2}{2 \left(1 + \frac{x}{2} \right)} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}, \quad (13)$$

откуда

$$\frac{1}{2n(n+1)} < c_n - c_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{n(2n+1)}$$

и

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} < c_n < \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(2i+1)}.$$

Используя равенства $1/[i(i+1)] = 1/i - 1/(i+1)$ и $1/[i(2i+1)] = 2/2i - 2/(2i+1)$, мы получаем в левой части $1/2[1 - 1/(n+1)]$ и в пределе $1/2$, а в правой — частичную сумму ряда

$$\frac{2}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{4} - \dots = 2 - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} = 2 - 2 \ln 2.$$

Поэтому

$$0,5 < C < 2(1 - \ln 2) = 0,614 \dots$$

Более точные подсчеты дают $C = 0,5772 \dots$. Незвестно, рациональна или иррациональна постоянная Эйлера.

Кроме (12) существуют и другие выражения для постоянной Эйлера. Прделаем, например, следующие преобразования:

$$\begin{aligned} C_n &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n = \\ &= \int_0^1 [1 + (1 - \xi) + \dots + (1 - \xi)^{n-1}] d\xi - \int_{1/n}^1 \frac{d\xi}{\xi} = \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (1 - \xi)^n}{\xi} d\xi - \int_{1/n}^1 \frac{d\xi}{\xi} = \int_0^{1/n} \frac{1 - (1 - \xi)^n}{\xi} d\xi - \int_{1/n}^1 \frac{(1 - \xi)^n}{\xi} d\xi = \\ &= \int_0^1 \left[1 - \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \right] \frac{dt}{t} - \int_1^n \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Используя неравенство

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n} \right) \leq \frac{t^2 e^{-t}}{n}, \quad (14)$$

справедливое при $0 \leq t \leq n$, мы получаем, что при $n \rightarrow \infty$ C_n отличается на бесконечно малую величину от выражения

$$\int_0^1 (1 - e^{-t}) \frac{dt}{t} - \int_1^n e^{-t} \frac{dt}{t},$$

и, переходя к пределу, находим, что

$$C = \int_0^1 (1 - e^{-t}) \frac{dt}{t} - \int_1^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{t}. \quad (15)$$

С другой стороны, используя интегральное представление для Γ -функции (III.11), имеем

$$\begin{aligned}\Gamma'(1) &= \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \Big|_{x=1} = \int_0^{\infty} \ln t \cdot e^{-t} dt = \\ &= - \int_0^{\infty} \ln t \, de^{-t} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\ln t e^{-t} \Big|_{\varepsilon}^{\infty} - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right].\end{aligned}$$

К сожалению, мы не можем здесь прямо перейти к пределу (интеграл $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ расходится!). Однако, разбивая интеграл на два (от 0 до 1 и от 1 до ∞) и используя равенство

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dt}{t} = -\ln \varepsilon, \quad \text{мы в силу (15) получаем простую формулу}$$

$$\Gamma'(1) = -C. \quad (16)$$

Чтобы доказать неравенство (14), заметим, что его левая часть эквивалентна неравенству

$$\ln \left(1 - \frac{t}{n} \right) \leqslant -\frac{t}{n},$$

справедливому в силу (13). Правая же часть эквивалентна неравенству

$$\left(1 - \frac{t}{n} \right)^n e^t \geqslant 1 - \frac{t^2}{n}. \quad (17)$$

Поскольку (17) верно при $t=0$, при $0 < t < n$ достаточно проверить выполнение неравенства для производных обеих частей

$$-\frac{t}{n} \left(1 - \frac{t}{n} \right)^{n-1} e^t \geqslant -\frac{2t}{n} \quad (18)$$

или

$$\left(1 - \frac{t}{n} \right)^{n-1} e^t \leqslant 2. \quad (19)$$

Производная левой части (19) больше 0 при $0 < t < 1$ и меньше 0 при $1 < t < n$. Следовательно, при $t=1$ левая часть имеет максимум

$$\left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n-1} e \leqslant \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{-1} \leqslant 2$$

при $n \geqslant 2$ (еще раз использовано (13) при $x = -1/n$). Следовательно, при $n \geqslant 2$ верно (19) и одновременно (18) и (17). При $n=1$ (17) превращается в $e^t \geqslant (1+t)$, что очевидно.

В свою очередь (15) может быть использовано для доказательства равенства

$$C = \int_0^1 \frac{1 - \cos t}{t} dt - \int_1^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (20)$$

(см. решение задачи 238).

Проинтегрируем функцию e^{-z}/z в комплексной плоскости по замкнутому контуру γ , состоящему из четверти окружности $z = re^{i\varphi}$ $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, отрезка мнимой оси $z = it$, $r \leq t \leq R$, четверти окружности $z = Re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ (в обратном направлении) и отрезка действительной оси $z = t$ от R до r . Тогда, поскольку внутри контура нет особых точек функции,

$$0 = \oint_{\gamma} \frac{e^{-z}}{z} dz = i \int_0^{\pi/2} e^{-re^{i\varphi}} d\varphi + \int_r^R \frac{e^{-it}}{t} dt - \\ - i \int_0^{\pi/2} e^{-Re^{i\varphi}} d\varphi - \int_R^r \frac{e^{-t}}{t} dt. \quad (21)$$

При $r \rightarrow 0$ и $R \rightarrow \infty$

$$\int_0^{\pi/2} e^{-re^{i\varphi}} d\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \int_0^{\pi/2} e^{-Re^{i\varphi}} d\varphi \rightarrow 0$$

(последнее по лемме Жордана). Далее,

$$\int_r^R \frac{e^{-it}}{t} dt = \int_r^1 \frac{\cos t}{t} dt + \int_1^R \frac{\cos t}{t} dt - i \int_r^R \frac{\sin t}{t} dt = \\ = \int_r^1 \frac{\cos t - 1}{t} dt + \ln r + \int_1^R \frac{\cos t}{t} dt - i \int_r^R \frac{\sin t}{t} dt = \\ = \ln r + \int_0^1 \frac{\cos t - 1}{t} dt + \int_1^\infty \frac{\cos t}{t} dt - i \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt + o(1), \\ \int_r^R \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_1^R \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_r^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt + \ln r = \\ = \ln r + \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_0^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt + o(1) = \ln r - C + o(1)$$

(последний переход сделан в соответствии с (15)). Обратите внимание на проделанную здесь процедуру регуляризации расходящегося

стей обоих интегралов в нуле (выделение членов $\ln r$). Такая же процедура (она восходит к Адамару) была выше применена при выводе (16).

Подставляя найденное в (21) и сокращая логарифмы, имеем равенство

$$0 = i \frac{\pi}{2} + \int_0^1 \frac{\cos t - 1}{t} dt + \int_1^\infty \frac{\cos t}{t} dt - i \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt + C,$$

вещественная часть которого дает (20), а мнимая — значение известного интеграла Дирихле

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Определение (12) можно записать еще в виде

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \gamma_n, \quad (22)$$

где $0 < \gamma_n < C_n - c_n = \ln(1 + 1/n) < 1/n$.

13 *Выпуклые и строго выпуклые функции.* Функция $f(x)$, определенная на некотором выпуклом множестве $U \subseteq \mathbb{R}^n$, называется *выпуклой*, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in U$ и любого α , $0 \leq \alpha \leq 1$, выполняется неравенство

$$f[(1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2] \leq (1 - \alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2), \quad (23)$$

и называется *строго выпуклой*, если при $x_1 \neq x_2$ и $\alpha \neq 0$ и 1 неравенство (23) строгое. О некоторых свойствах выпуклых функций см.: И. Кюршак и др., Венгерские математические олимпиады (М, «Мир», 1976, ч. III, пункты 43, 44, 65).

Непосредственно из определения следует, что сумма любого числа выпуклых функций выпукла и строго выпукла, если хотя бы одно из слагаемых является таковым.

Лемма. Для любой точки $x \in U$ и любого вектора $l \in \mathbb{R}^n$, такого, что $x + l \cdot T \in U$ при некотором $T > 0$, существует предел

$$d_l f(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x + tl) - f(x)}{t}, \quad (24)$$

который называется *производной функции f по вектору l в точке x* .

Доказательство. В силу выпуклости U функция $f(x + tl)$ определена при $0 \leq t \leq T$. Если $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, то, положив в (23) $x_1 = x$, $x_2 = x + t_2 l$, $\alpha = t_1/t_2$, получим

$$f(x + t_1 l) \leq \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right) f(x) + \frac{t_1}{t_2} f(x + t_2 l),$$

откуда

$$\frac{f(x + t_1 l) - f(x)}{t_1} \leq \frac{f(x + t_2 l) - f(x)}{t_2}.$$

Следовательно, дробь, стоящая в (24) под знаком предела, монотонна и предел существует (проверьте, что он конечен во всех внутренних точках U).

Теорема. Для того чтобы выпуклая функция имела минимум в точке $x_0 \in U$, необходимо и достаточно, чтобы неравенство

$$\partial_l f(x_0) \geq 0 \quad (25)$$

выполнялось при всех $l \in \mathbb{R}^n$, таких, что $x_0 + l \cdot T \in U$ при некотором $T > 0$.

Доказательство. Необходимость условия (25) вытекает из (24), так как при $df(x_0) < 0$ и достаточно малых положительных t должно быть $f(x_0 + tl) < f(x_0)$.

Достаточность докажем от противного. Предположим, что (25) верно, но $f(x_1) < f(x_0)$ при некотором $x_1 \in U$. Возьмем $\varepsilon > 0$ так, чтобы было $f(x_1) \leq f(x_0) - \varepsilon$ и $l = x_1 - x_0$ (тогда условия теоремы выполняются при $T = 1$). Пусть $0 \leq t \leq 1$. По доказанному в выше приведенной лемме

$$\partial_l f(x_0) \leq \frac{f(x_0 + tl) - f(x_0)}{t} \leq \frac{f(x_0 + 1 \cdot l) - f(x_0)}{1} \leq -\varepsilon$$

вопреки (25). Таким образом, $f(x_1) \geq f(x_0)$ при всех $x_1 \in U$ и x_0 — точка минимума.

Заметим, что в этой теореме минимум не обязан быть строгим (равенство $f(x_1) = f(x_0)$ допускается), но он будет строгим, если $f(x)$ — строго выпуклая функция (докажите!).

14 Конечные разности. Предположим, что функция $f(x)$ определена при всех $x \geq a$. Функция

$$\Delta_h f(x) = f(x + h) - f(x) \quad (26)$$

называется *первой разностью* для $f(x)$ при шаге h . Разности высших порядков определяются рекуррентно:

$$\Delta_h^n f(x) = \Delta_h (\Delta_h^{n-1} f)(x). \quad (27)$$

По индукции доказывается, что

$$\Delta_h^n f(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} C_n^j f(x + jh). \quad (28)$$

Теорема. Для того чтобы функция $f(x)$, имеющая при $x \geq a$ производную $(n+1)$ -го порядка, была полиномом степени $\leq n$, необходимо и достаточно, чтобы при всех x и h

$$\Delta_h^{n+1} f(x) \equiv 0. \quad (29)$$

Доказательство необходимости основано на том, что при взятии первой разности степень многочлена уменьшается на единицу, поскольку

$$\Delta_h x^k = (x + h)^k - x^k$$

есть многочлен степени $k-1$.

Достаточность проще всего получить, основываясь на равенстве

$$f^{(k)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^k f(x)}{h^k}, \quad (30)$$

которое в условиях теоремы справедливо при $1 \leq k \leq n+1$.

Замечание. Для любой непрерывной и ограниченной при $x \geq a$ функции $f(x)$ имеет место следующий замечательный аналог формулы Тейлора:

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta_h^k f(a)}{h^k} \cdot \frac{(x-a)^k}{k!}; \quad (31)$$

сходимость ряда в предель здесь равномерна на любом конечном отрезке изменения x . Если $f(x)$ — аналитическая функция в круге $|x-a| < \rho$, то при $a \leq x < a + \rho$ в (31) можно переставить знаки предела и суммы и, воспользовавшись формулой (30), прийти к обычной формуле Тейлора (см. Э. Хилле и Р. Филлипс, Функциональный анализ в полугруппы, М., «Мир», 1962, с. 548).

Теорема (интерполяционный многочлен Ньютона). Полином $P(x)$ степени n восстанавливается по своим значениям в $n+1$ равноотстоящих точках $a, a+h, \dots, a+nh$ по формуле

$$\begin{aligned} P(x) = & P(a) + \frac{\Delta_h P(a)}{h} (x-a) + \frac{\Delta_h^2 P(a)}{h^2} \cdot \frac{(x-a)(x-a-h)}{2!} + \dots \\ & \dots + \frac{\Delta_h^n P(a)}{h^n} \cdot \frac{(x-a)(x-a-h) \dots (x-a-(n-1)h)}{n!}. \end{aligned} \quad (32)$$

Для доказательства заметим, что обе части равенства суть многочлены степени n , совпадающие в $n+1$ точке, поскольку при $x = a + kh$ правая часть (32) равна

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^k \Delta_h^l P(a) \cdot C_k^l &= \sum_{l=0}^k \sum_{j=0}^l (-1)^{l-j} C_k^l C_l^j P(a+jh) = \\ &= \sum_{j=0}^l P(a+jh) \sum_{l=j}^k (-1)^{l-j} \frac{k!}{(k-l)!(l-j)!} = \\ &= \sum_{j=0}^l P(a+jh) C_k^l (1-1)^{k-l} = P(a+kh). \end{aligned}$$

Из формулы (32) видно, что произведения вида $x(x-h) \dots (x-nh)$ являются в исчислении конечных разностей аналогами степеней. Это наблюдение подтверждается формулой

$$\begin{aligned} \Delta_h^n \left(\frac{1}{x} \right) &= \frac{(-1)^n n! h^n}{x(x+h) \dots (x+nh)} = \\ &= \frac{-n! h^n}{(-x)(-x-h) \dots (-x-nh)}, \end{aligned} \quad (33)$$

использованной в решении задачи 77 (сравните при $h = 1$ с формулой для n -й производной от $1/x$). Формула (33) легко доказывается по индукции. При $n = 0$ она очевидна ($0! = 1$), а далее

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n n! h^n}{(x+h) \dots (x+h+nh)} - \frac{(-1)^n n! h^n}{x(x+h) \dots (x+nh)} &= \\ = \frac{(-1)^n n! h^n}{(x+h) \dots (x+nh)} \left[\frac{1}{x+(n+1)h} - \frac{1}{x} \right] &= \\ = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)! h^{n+1}}{x(x+h) \dots (x+(n+1)h)}. \end{aligned}$$

При фиксированном h понятие разности произвольного порядка имеет смысл для функций, определенных лишь в точках арифметической прогрессии $a + kh$, то есть для последовательностей. Полагая $a_k = f(a + kh)$, мы получаем, например, из (28) формулу, используемую в решении задачи 20:

$$\Delta^n a_k = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} C_n^j a_{k+j}.$$

Если последовательность a_k удовлетворяет условию, аналогичному (29)

$$\Delta^{n+1} a_k \equiv 0, \quad (34)$$

то

$$a_k = P(k) \quad (35)$$

для некоторого многочлена степени $\leq n$. Действительно, из (34) мы заключаем, что $b_k = \Delta^n a_k$ не зависит от k и равно некоторой постоянной C . Но тогда для разности $a'_k = a_k - C/n! k^n$ имеем

$$\Delta^n a'_k = \Delta^n a_k - C = 0,$$

и можно воспользоваться индукцией. [Заметим, что если (29) имеет место при одном h , то $f(x)$ не обязана быть многочленом: например, $f = \sin x$, $n = 0$, $h = 2\pi$.]

Пусть, например, $a_k = \sum_{i=1}^k i^n$ (ср. решение задачи 58). Тогда $\Delta a_k = k^n$ и потому $\Delta^{n+2} a_k \equiv 0$. Следовательно, $a_k = P(k)$, где P — многочлен степени $n+1$.

Уравнения (29) и (34) являются простейшими примерами *уравнений в конечных разностях*. Еще один пример доставляют нам *рекуррентные (возвратные) последовательности*. В задачах этого сборника встречаются, например, последовательности, определяемые соотношениями вида

$$a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n. \quad (36)$$

Легко видеть, что (36) эквивалентно уравнению

$$\Delta^2 a_n + \alpha \Delta a_n + \beta a_n = 0 \quad (37)$$

($\alpha = 2 - A$, $\beta = 1 - A - B$), аналогичному линейному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами. Как и для этого последнего, общее решение уравнения (37) или (36) является линейной комбинацией двух частных решений. Прямой подстановкой убеждаемся, что последовательность $a_n = \lambda^n$ является решением уравнения (37), если λ удовлетворяет характеристическому уравнению

$$\lambda^2 = A\lambda + B. \quad (38)$$

Если корни λ_1 , λ_2 уравнения (38) различны, то общее решение уравнения (36) имеет вид

$$a_k = C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k.$$

Если корни (38) совпадают: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то общим решением будет

$$a_k = C_1 \lambda^n + C_2 n \lambda^n.$$

Постоянные C_1 и C_2 находим по двум начальным членам последовательности. Например, для последовательности Фибоначчи

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad a_1 = a_2 = 1,$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

15 Функциональное уравнение Коши

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (39)$$

и родственные ему уравнения

$$g(x + y) = g(x) g(y) \quad (40)$$

и т. п. были в начале века довольно популярными, с одной стороны, в связи с аксиоматикой механики, а с другой — в связи с третьей проблемой Гильберта (равносоставлены ли равновеликие многогранники?). Хорошо известно, что непрерывные решения уравнения (39) суть только линейные функции Ax , а для уравнения (40) это только $g \equiv 0$ и $g(x) = a^x$ (см. Г. М. Фихтенгольц, М., ГИТТЛ, 1949, т. 1, с 187—192).

Поскольку переход от уравнения (40) к (39) осуществляется простым преобразованием $f(x) = \log g(x)$, ограничимся уравнением (39). Тот же результат, что и выше, мы получим, потребовав вместо непрерывности выполнения любого из следующих условий:

- $f(x)$ непрерывна хотя бы в одной точке;
- $f(x)$ имеет производную в нуле;
- $f(x)$ ограничена в окрестности нуля;
- $f(x)$ монотонна;
- $f(x)$ измерима по Лебегу;
- существует точка (x_0, y_0) , в некоторой окрестности которой нет ни одной точки графика функции $y = f(x)$.

Случай «а», «б» и «г» довольно просты, и читатель может разоб-
брать их самостоятельно в качестве упражнения; случай «в», из ко-
торого три вышеназванных получаются как следствия, несколько
сложнее, но все же доказательство для него элементарно; случаи
«д» и «е» связаны с глубокими исследованиями, о которых будет
сказано ниже.

В 1905 г. Г. Гамель построил множество, называемое теперь *ба-
зисом Гамеля*. Это множество G действительных чисел обладает тем
свойством, что каждое действительное число единственным образом
представимо в виде конечной линейной комбинации

$$x = n_1 g_1 + n_2 g_2 + \dots + n_k g_k \quad (41)$$

чисел $g_1, g_2, \dots, g_k \in G$ с целыми коэффициентами $n_1, n_2, \dots, n_k$
[см. G. Hamel, Math. Annalen, 60 (1905), 459—462, а также
А. Н. Колмогоров и С. В. Фомин, Элементы теории функций и
функционального анализа, М, Наука, 1976, с. 123].

Произвольно задав значения функции $f(x)$ в точках множества
 G , мы можем однозначно продолжить ее на всю числовую ось при
помощи равенства

$$f(x) = n_1 f(g_1) + \dots + n_k f(g_k), \quad (42)$$

где n_i — те же, что и в (41). Уравнение (39) удовлетворяется, по-
скольку G — базис Гамеля. Этим, как легко сообразить, исчерпы-
ваются все решения уравнения (39).

К сожалению, базис Гамеля G и построенные с его помощью
решения уравнения (39) обладают весьма скверными свойствами.
Прежде всего само построение базиса Гамеля неконструктивно, оно
осуществляется при помощи леммы Цорна или трансфинитной ин-
дукции (то есть, в сущности, при помощи аксиомы Цермело). Уси-
лиями целого ряда выдающихся математиков, в том числе Фреше и
Банаха, было установлено, что все решения уравнения (39), отлич-
ные от Ax , неизмеримы, график любого из них заполняет плоскость
всюду плотно (см. выше, пункты «д» и «е») и т. д.

Г. Смесь

К задаче 2.

16. *Признак Гаусса.* Полезно иметь в виду, что если последова-
тельность положительных чисел a_n такова, что

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

то $a_n \sim C\lambda^{-n} n^{-\frac{\mu}{\lambda}}$, откуда, в частности, можно вывести признаки
сходимости Д'Аламбера и Гаусса. Действительно, положив

$$b_n = a_n \lambda^n n^{\frac{\mu}{\lambda}},$$

мы получаем

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\lambda \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{\mu}{\lambda}}}{\lambda + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\lambda \left(1 + \frac{\mu}{\lambda n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{\lambda + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

и потому

$$b_N = b_1 \prod_{n=1}^{N-1} \frac{b_{n+1}}{b_n} \rightarrow C \neq \infty.$$

так как бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]$ сходится.

К задаче 5.

17. *Вычисление циркулянта.* Пусть $f(x) = a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1}$. Умножив циркулянт D_n на определитель Вандермонда, построенный по ε_k , и воспользовавшись тождеством $\varepsilon_k^n = 1$, получим

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \dots & \varepsilon_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & \dots & f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2 f(\varepsilon_2) & \dots & \varepsilon_n f(\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1} f(\varepsilon_1) & \dots & \dots & \varepsilon_n^{n-1} f(\varepsilon_n) \end{vmatrix} =$$

$$= f(\varepsilon_1) f(\varepsilon_2) \dots f(\varepsilon_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \dots & \varepsilon_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

откуда

$$D_n = f(\varepsilon_1) f(\varepsilon_2) \dots f(\varepsilon_n),$$

поскольку определитель Вандермонда здесь отличен от 0.

К задаче 29.

18. Общий член последовательности u_n , определяемой рекуррентным соотношением $u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2}$, имеет вид (III.14)

$$u_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n,$$

где $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$ корни уравнения $\lambda^2 = 4\lambda - 1$. Если $C_1 \neq 0$, то

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n}{C_1 \lambda_1^{n-1} + C_2 \lambda_2^{n-1}} = \lambda_1 \frac{C_1 + C_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n}{C_1 + C_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{n-1}} \rightarrow \lambda_1$$

при $n \rightarrow \infty$, поскольку $\lambda_2/\lambda_1 = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} < 1$. Остается заметить,

что в нашем случае $C_1 \neq 0$, так как иначе $u_2/u_1 = 2 - \sqrt{3}$. Заметим еще, что

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2 + \sqrt{3} = \lambda_1.$$

К задаче 40.

19. Можно заметить, что утверждение задачи остается верным, если стороны треугольника удовлетворяют соотношению

$$f(a) + f(b) + f(c) = 3f(m),$$

где $f(x)$ выпуклая (III. 13) неубывающая функция.

В самом деле, пусть, как и в доказательстве теоремы 5, S — площадь треугольника со сторонами a, b, c ; $s = \frac{1}{3}(a + b + c)$;

$E_x = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}$ — площадь равностороннего треугольника со стороной x . Если не все отрезки a, b, c равны между собой, то по теореме 4 $S < E_s$. Но в силу неравенства Йенсена (частным случаем которого при $f(x) = x^3$ является утверждение теоремы 3)

$$f(m) = \frac{f(a) + f(b) + f(c)}{3} \geq f\left(\frac{a + b + c}{3}\right) = f(s),$$

и, значит, $m \geq s$, так как f не убывает. Поэтому $E_s \leq E_m$ и $S < E_m$, что и требовалось доказать.

Обобщение утверждения задачи на случай многоугольника с любым числом сторон мы получим, заменив теорему 4 известным утверждением: среди всех многоугольников с заданным числом сторон и заданным периметром наибольшую площадь имеет правильный.

К задаче 49.

20. *Аналитический критерий вписанности шестиугольника.* Пусть $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, 6$, — шесть точек на плоскости. Обозначим через S_{ijk} площадь треугольника $P_i P_j P_k$. Из утверждения задачи 49 непосредственно выводится следующий критерий, являющийся аналитическим аналогом теоремы Паскаля (III. 4):

Для того чтобы точки $P_1, \dots, P_6$ лежали на одной кривой второго порядка, необходимо и достаточно, чтобы

$$S_{612}S_{234}S_{456}S_{135} = S_{123}S_{345}S_{561}S_{246}.$$

В самом деле, для того чтобы существовало нетривиальное уравнение

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

которому удовлетворяют данные шесть точек (x_i, y_i) , необходимо и достаточно, чтобы (в обозначениях задачи 49) определитель $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ был равен 0. Остается заметить, что $S_{ijk} = \frac{1}{2}(i, j, k)$, и воспользоваться утверждением задачи 49.

К задаче 53.

21. *Площадь треугольника на комплексной плоскости.* Пусть x_k — точки на комплексной плоскости. В решении задачи 53 использована следующая формула для площади ориентированного треугольника $\Delta x_1 x_2 x_3$:

$$-4iS = \begin{vmatrix} x_1 & x_1^* & 1 \\ x_2 & x_2^* & 1 \\ x_3 & x_3^* & 1 \end{vmatrix}.$$

В самом деле, подставляя $x_k = u_k + iv_k$ в правую часть, находим

$$\begin{vmatrix} u_1 + iv_1 & u_1 - iv_1 & 1 \\ u_2 + iv_2 & u_2 - iv_2 & 1 \\ u_3 + iv_3 & u_3 - iv_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & -iv_1 & 1 \\ u_2 & -iv_2 & 1 \\ u_3 & -iv_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} iv_1 & u_1 & 1 \\ iv_2 & u_2 & 1 \\ iv_3 & u_3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2i \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix},$$

после чего остается сослаться на известную формулу из аналитической геометрии.

Кроме того, из формул для a_k и b_k видно, что

$$a_3 - a_2 = e(a_2 - a_1), \quad b_3 - b_2 = e^2(b_2 - b_1),$$

откуда мы заключаем, что треугольники A и B имеют противоположную ориентацию. Из геометрических соображений ясно, что треугольник A ориентирован так же, как исходный треугольник. Поэтому в формуле (1) из решения задачи 53 стоит тот же знак, что и в приведенной выше формуле, а в формуле (2) — противоположный.

К задаче 85.

22. *Прямая Симсона.* Если точка P принадлежит окружности, описанной около треугольника ABC , и A', B', C' — основания перпендикуляров, опущенных из P на прямые BC, CA, AB соответственно, то A', B', C' лежат на одной прямой, называемой *прямой Симсона* точки P . (См. Зетель, соч. цит. в III. 1, с. 31.)

К задаче 104.

23. *Эллипс Штейнера.* Пусть

$$\xi = A \cos \varphi, \quad \eta = B \sin \varphi \quad (1)$$

— стандартные параметрические уравнения эллипса; $A > B$. Угол φ называется *эксцентрическим углом* точки (ξ, η) . Справедлива

следующая простая лемма, доказательство которой предоставляется читателю.

Лемма. Пусть A, B, C — точки на эллипсе, отвечающие эксцентрисическим углам α, β, γ . Если касательная к эллипсу в точке A параллельна BC , то

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos(\gamma - \alpha).$$

Предположим теперь, что треугольник ABC вписан в эллипс так, что касательные к эллипсу в каждой из вершин A, B, C параллельны противоположной стороне. Такой эллипс называется *эллипсом Штейнера* данного треугольника. Его существование при заданных A, B, C следует из теоремы Паскаля (III 4), примененной к вырожденному шестиугольнику $AABVCC$ (каждая вершина треугольника считается за две слившиеся вершины шестиугольника, а соответствующая сторона шестиугольника превращается в касательную; прямая, на которой лежат точки пересечения противоположных сторон, здесь является бесконечно удаленной прямой).

Следствие. Эксцентрисические углы вершин A, B, C в эллипсе Штейнера треугольника ABC отличаются друг от друга на $\frac{2\pi}{3}$.

В самом деле, по лемме $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \gamma) = \cos(\gamma - \alpha)$, откуда это утверждение сразу следует.

Если центр тяжести треугольника ABC , вписанного в эллипс, совпадает с центром эллипса, то медиана AE , проходящая через середину хорды BC и центр эллипса, является сопряженным диаметром для хорды BC , а потому касательная, проведенная в конце диаметра, параллельна этой хорде. То же верно и относительно двух других медиан, и потому в рассматриваемой ситуации эллипс будет эллипсом Штейнера, как это и утверждается в решении задачи 104.

Наконец, если центр эллипса находится в точке g комплексной плоскости, а его большая полуось наклонена под углом α к вещественной оси, то из (1) получается параметрическое уравнение эллипса в комплексной форме

$$z = g + e^{i\alpha} (\xi + i\eta) = g + \frac{e^{i\alpha}}{2} [(A + B) e^{i\varphi} + (A - B) e^{-i\varphi}],$$

из которого можно найти выражения для точек z_k , использованные в решении.

К задаче 119.

24. В решении этой задачи используются следующие соотношения:

а)

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{\binom{n}{i}}{i+1} &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n+1}{i+1} = \\ &= - \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \binom{n+1}{i} = \frac{1}{n+1} [1 - (1-1)^{n+1}] = \frac{1}{n+1}; \end{aligned}$$

6)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{\binom{n}{i}}{(i+1)^2} &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{\binom{n+1}{i+1}}{i+1} = \\
&= \frac{-1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} \int_0^1 x^{i-1} dx = \\
&= \frac{-1}{n+1} \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1} - 1}{1 - (1-x)} dx = \frac{1}{n+1} \int_0^1 \sum_{i=0}^n (1-x)^i dx = \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i};
\end{aligned}$$

в)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{\binom{n}{i}}{(i+1)^3} &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{\binom{n+1}{i+1}}{(i+1)^2} = \\
&= \frac{-1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} \int_0^1 \frac{dx}{x} \int_0^x t^{i-1} dt = \\
&= \frac{-1}{n+1} \int_0^1 \frac{dx}{x} \int_0^x \frac{(1-t)^{n+1} - 1}{t} dt = \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{dx}{x} \int_0^x \sum_{i=0}^n (1-t)^i dt = \\
&= \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{dx}{x} \sum_{i=0}^n \left[\frac{1}{i+1} - \frac{(1-x)^{i+1}}{i+1} \right] = \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} \int_0^1 \frac{1 - (1-x)^{i+1}}{x} dx = \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} \sum_{j=0}^i \frac{1}{j+1};
\end{aligned}$$

г)

$$2 \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \frac{1}{j} = 2 \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2} + 2 \sum_{i>j} \frac{1}{ij} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2} + \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} \right)^2;$$

д) формулы (22) из III. 12 и (8) из III. 11.

К задаче 123.

25. *Теорема Менелая.* Если стороны треугольника AB , BC , CA или их продолжения пересекаются некоторой прямой (трансверсалью) в точках C' , A' , B' соответственно, то

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = -1.$$

(Зетель, соч. цит. в III 1, стр. 23)

К задаче 135.

26. *Формула Гаусса.* Тригонометрическая сумма, равная следу матрицы V , носит название *суммы Гаусса*. Для ее вычисления можно воспользоваться теоремой 2 из гл. V книги К. Чандрасекхарана, Введение в аналитическую теорию чисел (М., «Мир», 1974, с. 51). В той же главе содержатся доказательства формул (7) и (8) из III. 7. Ис-

комая сумма $\sum_{k=1}^n e^{\frac{2\pi}{n} ik^2}$ в обозначениях книги Чандрасекхарана равна $g(2, n)$, ее значения приведены в тексте решения.

К задаче 147.

27. Так как приведенное в условии задачи уравнение может быть сведено к виду $P(x) = 0$, где P — многочлен 6-й степени, то в данном наборе действительно содержатся все корни, если они все различны (например, при $a = 1/2$ получаем набор $1/2, 2, 1/2, 2, -1, -1$, содержащий лишь три различных числа). Исключительными являются $a = -1, 1/2, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, 2$. Предельным переходом $a \rightarrow a'$, где a' одно из исключительных значений, убеждаемся, что приведенный перечень по-прежнему доставляет все корни (либо три корня кратности два каждый, либо два корня кратности три).

К задаче 148.

28. *Барицентрические координаты.* Пусть $P_k(x_k, y_k)$, $k = 1, 2, 3$, три произвольные неколлинеарные точки на плоскости. Поместив в них массы m_k , найдем центр тяжести по формулам

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad y_c = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}. \quad (1)$$

При надлежащем выборе неотрицательных масс m_k точку (x_c, y_c) можно совместить с любой точкой треугольника $P_1 P_2 P_3$.

Если же разрешить числам m_k принимать и отрицательные значения (читатель сам постарается придать этому физический смысл), то (x_c, y_c) может быть любой точкой плоскости. Числа (m_1, m_2, m_3) называются *барицентрическими координатами* этой точки относительно $P_1 P_2 P_3$. Из (1) легко установить, что заданием точки ее барицентрические координаты определены однозначно с точностью до пропорциональности, так что наборы (m_1, m_2, m_3) и $(\rho m_1, \rho m_2, \rho m_3)$ при $\rho \neq 0$ соответствуют одной и той же точке плоскости; набор $(0, 0, 0)$ ничему не соответствует, так как формулы (1) теряют смысл. Далее, формулы (1) теряют смысл при $m_1 + m_2 + m_3 = 0$,

но если не все m_k равны нулю, то отношение $x_c : y_c$ сохраняет смысл. Можно интерпретировать при этом (x_c, y_c) как бесконечно удаленную точку проективной плоскости.

С этой точки зрения (m_1, m_2, m_3) просто однородные координаты. Мы получим полное соответствие со сказанным в III.2, взяв в качестве P_3 начало декартовой системы координат, а в качестве P_1 и P_2 бесконечно удаленные точки на соответствующих осях.

Барнцентрические координаты относительно четверки точек в пространстве определяются аналогично.

В решении задачи 148 используется то обстоятельство, что знаки барицентрических координат на плоскости или в пространстве соответствуют разбиению плоскости прямыми $P_i P_j$ в первом случае, и плоскостями $P_i P_j P_k$ — во втором. Читатель легко восстановит это соответствие зная определение.

К задаче 167.

29. *Свойство касательных к параболе.* Для того чтобы касательные, проведенные к параболе из точки P , были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы точка P лежала на директрисе параболы. В этом случае касательные являются биссектрисами углов, образованных директрисой и прямой PF , где F — фокус параболы.

Я надеюсь, что читатель без труда докажет это утверждение. Для параболы $y = x^2/2p$ директриса имеет уравнение $y = -p/2$, а фокусом параболы является точка $(0, p/2)$.

К задаче 180.

30. *Тождество Эйлера.* Обозначим через A_n^s число способов, которыми натуральное n можно представить в виде суммы s различных слагаемых:

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_s, \quad (1)$$

где

$$1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_s. \quad (2)$$

Полагая $m_s = n_1$, $m_{s-1} = n_2 - n_1$, ..., $m_1 = n_s - n_{s-1}$,

преобразуем (1) к виду

$$n = sm_s + (s-1)m_{s-1} + \dots + 1 \cdot m_1. \quad (3)$$

Отсюда видно, что каждому представлению (1) при условии (2) взаимно-однозначно соответствует представление (3) с натуральными m_i . Поэтому A_n^s равно коэффициенту при x^n в произведении рядов

$$\prod_{k=1}^s \frac{x^k}{1-x^k} = \prod_{k=1}^s \sum_{m_k=1}^{\infty} (x^k)^{m_k} = \sum_{m_1, \dots, m_s} x^{m_1+2m_2+\dots+sm_s} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^s x^n. \quad (4)$$

Проведенные преобразования законны там, где перемножаемые ряды абсолютно сходятся, то есть при $|x| < 1$. Там же будет сходиться абсолютно и ряд в правой части (4).

Просуммируем теперь по s полученные выражения:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \prod_{k=1}^s \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^s x^n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n, \quad (5)$$

где $A_n = \sum_{s=1}^{\infty} A_n^s$ — число всевозможных представлений (1) — (2) с любым числом слагаемых s (на самом деле в этой сумме лишь конечное число членов, так как из (3) видно, что $A_n^s = 0$ при $n < [s(s+1)/2]$). Проведенная в (5) перестановка порядка суммирования в двойном ряде законна (если члены ряда неотрицательны) даже в том случае, когда ряды расходятся. Поэтому мы будем считать, что $0 \leq x < 1$.

Чтобы получить интересующее нас тождество Эйлера

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+x^n) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \prod_{k=1}^s \frac{x^k}{1-x^k}, \quad (6)$$

остается проверить, что при $0 \leq x < 1$

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+x^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n. \quad (7)$$

Раскрывая скобки в «частном произведении» бесконечного произведения в левой части (7), имеем

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^N (1+x^n) &= 1 + \sum_{1 \leq n_1 < \dots < n_s \leq N} x^{n_1+n_2+\dots+n_s} = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\frac{N(N+1)}{2}} \tilde{A}_n x^n, \end{aligned}$$

где $\tilde{A}_n$ — число способов, которыми натуральное n можно представить в виде (1) с любым s , но с ограничением

$$1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_s \leq N.$$

Очевидно, что, с одной стороны, $\tilde{A}_n \leq A_n$, а с другой — $\tilde{A}_n = A_n$ при $n \leq N-1$, так как в представлении (1) все $n_i < n$. Следовательно,

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^N A_n x^n &\leq \prod_{n=1}^N (1+x^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\frac{N(N+1)}{2}} \tilde{A}_n x^n \leq \\ &\leq 1 + \sum_{n=1}^{\frac{N(N+1)}{2}} A_n x^n. \end{aligned}$$

Переходя здесь к пределу при $N \rightarrow \infty$, получаем равенство (7), а следовательно и (6). Наконец, из сходимости при $0 \leq x < 1$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ вытекает в силу известного признака, что бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n)$ сходится, то есть обе части равенства (6) конечны.

К задаче 194.

31. *Теорема Дирихле.* Если m — положительное целое число и целое a взаимно просто с m , то в арифметической прогрессии

$$a, a + m, \dots, a + km, \dots$$

содержится бесконечно много простых чисел (см., например, Чандра-секхаран, соч. цит. в III 26, с. 163, теорема 8).

К задаче 199.

32. *Теорема Чебышева.* Обозначим, как обычно, через $\pi(x)$ число простых чисел, не превосходящих x . Согласно Чебышеву (П. Л. Чебышев, Поли. собр. соч., Изд. АН СССР, 1946, т. 1. Теория чисел, с. 191—207. См. также А. Е. Ингам, Распределение простых чисел, М. — Л., ГОНТИ, 1936, с. 24), имеет место следующее неравенство, справедливое при всех x , больших некоторого x_0 ,

$$0,921 = h < \frac{\pi(x) \ln x}{x} < \frac{6}{5} h.$$

Отсюда

$$\frac{\pi\left(\frac{5}{4}x\right)}{\pi(x)} > \frac{h \frac{5/4 x}{\ln 5/4 x}}{6/5 h \frac{x}{\ln x}} = \frac{25}{24} \frac{\ln x}{\ln x + \ln 5/4}.$$

Если правая часть больше 1, то $\pi(5/4x) > \pi(x)$, и, значит, между x и $5/4x$ имеется хотя бы одно простое число. Полагая $x = p_n$, где p_n — n -е по порядку простое число, убеждаемся, что $p_{n+1} < 5/4 p_n$, как это и утверждалось в решении задачи 199. Указанное неравенство выполняется при всех достаточно больших x , поскольку при $x \rightarrow +\infty$ правая часть стремится к $25/24 > 1$. (См. также III. 41.)

К задаче 216.

33. *Определитель произведения прямоугольных матриц* A и B порядков $n \times m$ и $m \times n$ соответственно можно при $n \leq m$ найти по формуле

$$\det |AB| = \sum_{(i_1, \dots, i_n)} \det A_{i_1 \dots i_n} \cdot \det B_{i_1 \dots i_n},$$

где суммирование производится по всем сочетаниям по n из индексов $1, 2, \dots, m$; $A_{i_1 \dots i_n}$ — минор матрицы A , образованный

столбцами с номерами $i_1, \dots, i_n$, $B_{i_1 \dots i_n}$ — минор матрицы B , образованный строками с теми же номерами.

К задаче 219.

34. О дробях Фарея (включая доказательство упоминаемого в решении утверждения) см., например, И. Кюршак и др., пункт 72, разд. III (соч. цит. в III. 1), а также И. М. Виноградов (соч. цит. в III 6, стр. 21).

К задаче 224.

35. Показатель α , с которым простое p входит в разложение числа $n!$ на простые сомножители, равен

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k} \right]$$

(И. М. Виноградов, соч. цит. в III. 6, с. 21).

К задаче 244.

36. Последовательность подходящих дробей непрерывной дроби, данной в условии задачи:

$$x_1 = p, \quad x_2 = p - \frac{q}{p}, \quad x_3 = p - \frac{q}{p - \frac{q}{p}}, \quad \dots,$$

совпадает с последовательностью итераций, которую мы получаем, решая уравнение

$$x = f(x) = p - \frac{q}{x}$$

простейшим методом последовательных приближений:

$$x_1 = p, \quad x_{n+1} = f(x_n). \quad (1)$$

Эта последовательность определена корректно, если ни на каком шагу мы не попадаем в нуль, в частности если $p \neq 0$ (при $p = 0$ исходная непрерывная дробь теряет смысл). Общие условия, обеспечивающие сходимость последовательности (1), хорошо известны, но в данном конкретном случае проще разобраться непосредственно.

Пусть ξ — один из корней уравнения $x^2 - px + q = 0$, а $\eta = q/\xi$ — второй, причем $|\xi| > |\eta|$. Тогда

$$x_{n+1} - \xi = -\frac{q}{x_n} + \frac{q}{\xi} = \frac{q}{\xi x_n} (x_n - \xi) = \frac{\eta}{x_n} (x_n - \xi). \quad (2)$$

Случай $q = 0$ интереса не представляет, так как здесь $x_n = p = \xi$.

Если $p > 0$ и $q > 0$, то $0 < \eta < \xi < p = x_1$. По индукции доказываем, что $x_n > \xi$, и из (2) получаем

$$|x_n - \xi| < \left(\frac{\eta}{\xi} \right)^{n-1} |p - \xi|. \quad (3)$$

Аналогично при $p < 0$, $q > 0$ имеем $x_n < \xi < \eta < 0$ и из (2) снова получаем (3). Таким образом, $x_n \rightarrow \xi$.

Если же $q < 0$, то (2) удобно проитерировать:

$$\begin{aligned} x_{n+2} - \xi &= \frac{\eta}{x_{n+1}} (x_{n+1} - \xi) = \frac{\eta}{p - q/x_n} \cdot \frac{\eta}{x_n} (x_n - \xi) = \\ &= \frac{\eta^2}{px_n - q} \cdot (x_n - \xi). \end{aligned} \quad (4)$$

Если теперь $p > 0$, то, как легко проверить, $x_2 = p - q/p > \xi = p/2 + \sqrt{p^2/4 - q}$. По индукции мы убеждаемся, что $x_{2k} > \xi$, $px_{2k} - q > p\xi - q\xi^2$ и

$$|x_{2k} - \xi| < \frac{\eta^{2(k-1)}}{\xi^{2(k-1)}} |x_2 - \xi|. \quad (5)$$

Такая же оценка справедлива и при $p < 0$ (здесь $x_{2k} < \xi < 0$ и $px_{2k} - q > p\xi - q = \xi^2$). Из (5) вытекает, что $x_{2k} \rightarrow \xi$, а тогда из (2) $x_{2k+1} \rightarrow \xi$, то есть снова $x_n \rightarrow \xi$.

Заметим, что в рассмотренном нами случае ($|\eta| < |\xi|$) справедлива оценка

$$x_n - \xi = O\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^n. \quad (6)$$

Случай $|\eta| = |\xi|$ может представиться, если $p = 0$ (эту возможность мы условились не рассматривать) или $p^2 = 4q$. Если имеет место последнее, то

$$x_{n+1} = p - \frac{p^2}{4x_n}.$$

Делая подстановку $\alpha_n = x_n/p - 1/2$, получаем

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{1 + 2\alpha_n}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2},$$

и по индукции $\alpha_n = 1/2^n$, то есть

$$x_n - \xi = p\alpha_n = O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (7)$$

Различие в асимптотиках (6) и (7) связано с тем, что в первом случае $|f'(\xi)| = |q/\xi^2| = |\eta/\xi| < 1$, а во втором $f'(\xi) = 1$ (здесь $f(x)$ — та же, что и в (1)). Наконец, заметим, что последовательность x_n не может сходиться к η , так как $|f'(\eta)| > 1$.

Применяя метод Ньютона, мы получаем последовательность x'_k , сходящуюся к ξ гораздо быстрее. А именно: если $x'_1 = x_1 = p$, то из решения задачи 244 видно, что $x'_k = x_{2k-1}$. Отсюда

$$|x'_{k+1} - \xi| = O\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^{2^k} \quad \text{при } |\eta| < |\xi|,$$

$$|x'_{k+1} - \xi| = O\left(\frac{1}{2^k}\right) \quad \text{при } \eta = \xi.$$

37. Об одном свойстве дзета-функции. В решении задачи 256 используется интересная формула (при $s = 2$):

$$\zeta(s) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s} - \zeta(2s) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + n^2)^s}.$$

Правая часть здесь равна $\sum_{N=1}^{\infty} \frac{f(N)}{N^s}$, где $f(N)$ — число способов, которым N можно представить в виде упорядоченной суммы двух ненулевых квадратов. Если

$$N = 2^{\alpha} p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k} q_1^{\gamma_1} \dots q_l^{\gamma_l},$$

где p_i — простые вида $4n+1$, а q_j — простые вида $4n+3$, то, согласно III. 10,

$$f(N) = (\beta_1 + 1) \dots (\beta_k + 1) \left(\frac{1 + (-1)^{\gamma_1}}{2} \right) \dots \left(\frac{1 + (-1)^{\gamma_l}}{2} \right),$$

если N не является квадратом; то же выражение надо уменьшить на 1, если $N = N_1^2$.

С другой стороны,

$$\zeta(s) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{[n(2k+1)]^s} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{g(N)}{N^s},$$

где

$$g(N) = \sum_{(2k+1) \mid N} (-1)^k$$

(сумма распространена на все нечетные делители числа N). Если N имеет тот же вид, что и выше, то

$$2k+1 = p_1^{\delta_1} \dots p_k^{\delta_k} q_1^{\varepsilon_1} \dots q_l^{\varepsilon_l}, \quad \delta_i \leq \beta_i, \quad \varepsilon_j \leq \gamma_j$$

и потому

$$(2k+1) \equiv (-1)^{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_l} \pmod{4}; \quad (-1)^k \equiv (-1)^{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_l} \pmod{2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} g(N) &= \sum_{\substack{0 \leq \delta_i \leq \beta_i, \\ 0 \leq \varepsilon_j \leq \gamma_j}} (-1)^{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_l} = \prod_i (1 + \beta_i) \prod_j \left(\frac{1 + (-1)^{\gamma_j}}{2} \right) = \\ &= \begin{cases} f(N), & N \neq N_1^2; \\ f(N) + 1, & N = N_1^2. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\xi(s) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s} &= \sum_{N=1}^{\infty} \frac{g(N)}{N^s} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{f(N)}{N^s} + \sum_{N_1=1}^{\infty} \frac{1}{N_1^{2s}} = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + n^2)^s} + \xi(2s),\end{aligned}$$

что и утверждалось.

К задаче 281.

38. *Полуправильные тетраэдры.* Доказательство этой теоремы можно получить из решений задач 29 и 39 в книге Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова, И. М. Яглома «Избранные задачи и теоремы элементарной математики» (ч. 3, М., 1954, ГИТТЛ). Интересно, что существуют и другие свойства, характеризующие тетраэдры с четырьмя конгруэнтными гранями. Например, достаточно, чтобы площади граней были равны и т. п. В некоторых руководствах насчитывается до 14 эквивалентных характеристик таких тетраэдров. Их называют *полуправильными*.

К задаче 289.

39. *Неравенство Шура.* Нужную оценку можно получить также, применив известное неравенство Адамара (Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, М., «Наука», 1967, стр. 230) к определителю Вандермонда:

$$\prod_{i \neq k} (z_i - z_k) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & & z_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \dots & z_n^{n-1} \end{vmatrix}^2 = \Delta^2$$

и

$$|\Delta| \leq \prod_{i=1}^n (1 + |z_i|^2 + \dots + |z_i^{n-1}|^2)^{1/2} \leq n^{n/2},$$

так как $|z_i| \leq 1$. Отсюда

$$\left| \prod_{i \neq k} (z_i - z_k) \right| \leq n^n.$$

Поскольку при $f(z) = z^n - 1$ левая часть равна n^n , эта величина действительно обеспечивает искомый максимум.

Замечательно, что попутно мы получили решение следующей геометрической задачи:

В круге выбрать n точек так, чтобы произведение C_n^2 попарных расстояний между ними было максимальным.

Ответ — вершины правильного вписанного многоугольника.

К задаче 334.

40. *Еще о квадратичных вычетах и невычетах.* Если p и q — простые нечетные числа и хотя бы одно из них имеет вид $4m+1$, то одновременно либо каждое из них является квадратичным вычетом по модулю другого, либо это для обоих не так (закон взаимности, см. III.7 (8)). Поскольку ± 1 является квадратичным вычетом по модулю 5 ($2^2 \equiv -1 \pmod{5}$, $4^2 \equiv 1 \pmod{5}$), то и $p = 5m \pm 1$ будет таковым, а потому и 5 будет квадратичным вычетом по модулю p .

Утверждение относительно числа 2 вытекает из формулы III.7 (7) и закона взаимности.

К задаче 346.

41. *Уточнение постулата Бертрана.* В III 32 было доказано, что при $m > m_0$ ближайшее простое число, большее m , не превосходит $5/4m < 2m - 2$. (Этот результат получил еще П. Л. Чебышев, см. его соч. цит. в III. 32.)

Можно воспользоваться также оценками:

$$\pi(x) > x/\ln x \quad \text{для } x \geq 17,$$

$$\pi(x) < 1,26x/\ln x \quad \text{для } x \geq 2$$

(см. J. B. Rosser, L. Schoenfeld, Approximate formulas for some functions of prime numbers, *Illinois Mathematical Journal*, 1962, № 6, 64—69; следствие из теоремы 2).

Из этих оценок при $m \geq 10$

$$\begin{aligned} \frac{\pi(2m-2)}{\pi(m)} &> \frac{2m-2}{\ln(2m-2)} \cdot \frac{\ln m}{1,26m} = \frac{2}{1,26} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{\ln m}{\ln(2m-2)} > \\ &> \frac{2}{1,26} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{4} > 1, \end{aligned}$$

так как $\ln(2m-2) < \ln 2m < \frac{4}{3} \ln m$. Отсюда $\pi(2m-2) > \pi(m)$, то есть между m и $2m-2$ найдется простое число. Для $3 < m \leq 9$ нужное утверждение получается непосредственной проверкой.

Те же оценки позволяют доказать неравенство $p_{n+1} < \frac{3}{2} p_n$, использованные в решении задачи 199. А именно, при $x \geq 12$

$$\frac{\pi(3/2x)}{\pi(x)} > \frac{3/2x}{\ln 3/2x} \cdot \frac{\ln x}{1,26x} = \frac{1}{0,87} \cdot \frac{\ln x}{\ln x + \ln 3/2} > 1,$$

так как $\ln x > 5 \ln 3/2$. Отсюда между $x \geq 12$ и $3/2x$ есть простое число. Случай $p_n = 11$ проверяется непосредственно.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ ¹

- Автоморфизмы групп 243
 Алгебраические уравнения 147
 — —, корни 24, 25, 34, 90, 164
 — —, система 67
 Аналитическая функция 36, 128, 237, 262
 Аналитический критерий вписанности многоугольника III. 20
 Арифметическая прогрессия 5, 305
 Ареатангенс 396
 Арккотангенс 29, 127
 Арктангенс 52, 396

 Базис Гамеля III. 15
 — матриц идемпотентный 97
 Барицентр треугольника III. 1
 Барицентрические координаты III. 28
 Бернулли многочлены второго рода 248
 — числа 28
 Бертрана постулат III. 41
 Бесконечное возведение в степень 386
 — отношение 272
 — произведение 182, 197, 228, 253, 308
 Бесконечный спуск, метод 107
 Бином 208
 Биномиальные коэффициенты 24, 46, 54, 65, 66, 79, 81, 82, 105, 124, 259, 311, 332, 352, 356, 368
 Бриансона теорема III. 4
 Брокера угол 160
 Булево кольцо 205

 Вариационное исчисление 45
 Великая теорема Ферма 48, 309
 Вероятность 71, 84, 142, 187, 201, 240, 271, 303, 397
 Верхняя плотность числовой последовательности 232
 Взаимно простые числа 134
 Взаимно-однозначное соответствие между точками открытого и замкнутого отрезков 86
 Взаимности закон III. 7
 Вильсона теорема III. 6, 398
 Вписанная сфера тетраэдра 47, 281
 Выпуклая функция III. 13
 Выпуклый многогранник 148
 — многоугольник 59, 117, 365
 — четырехугольник 363
 Вычеты квадратичные III. 7, III. 40
 Вычисление корней квадратного уравнения, графический метод 80
 — — многочлена по методу Ньютона 244
 — циркулянта III. 17

 Гамеля базис III. 15
 Гамильтонов цикл 358
 Гамма-функция Эйлера III. 11, 77, 179
 Гармоническая функция 27
 Гармоническая четверка прямых III. 3
 — — точек III. 2

¹ Числа в указателе означают номера задач, числа после римской цифры III — номера пунктов в дополнении. — *Прим. перев.*

Гармонический ряд 304, 338, 380, 381
 Гаусса признак сходимости ряда III. 16
 — сумма III. 26
 — формула III. 26
 Гауссово кольцо III. 10
 — число III. 10
 — —, норма III. 10
 Геометрические задачи на максимум и минимум 11, 19, 74, 102, 176, 265, 390
 Геометрические построения без линейки 21
 — — при помощи линейки 31, 35, 375
 Гесснан 14, 36
 Гипербола 129, 184
 Гиперболические функции 118
 Главная часть бесконечно малой 385
 Группа 243, 246, 255
 Движение под действием центральных сил 399
 Двойное отношение III. 2
 Дезарга теорема III. 4
 Декарта правило 90
 Делимость чисел 42, 75, 93, 112, 139, 144, 224, 231, 236, 247, 263, 264, 274, 279, 288, 291, 299, 306, 325, 347, 351, 391
 Делительное свойство 276
 Дзета-функция Римана III. 11, III. 37
 Диаграммы Эйлера 354
 Диатомическая последовательность Штерна 219
 Диофантовы уравнения 6, 23, 65, 95
 Дирихле теорема III. 31
 Дифференциальный оператор, факторизация 168
 Дифференциальные уравнения обыкновенные 61, 122, 254, 372
 — — в частных производных первого порядка 136
 Дроби 1, 15, 302, 334
 — непрерывные 244
 — Фарея III. 34
 Естественная граница функции 262

Жергона точка III. 1

Задача Банаха 271
 — о бильярдном шаре 329
 — Льюиса Кэррола 8, 376
 — на определение фальшивой монеты при помощи взвешивания 212, 359
 — Платона 346
 — на разрезание (планиметрическая) 16, 326
 — — — (стереометрическая) 301, 344, 388
 — Эддингтона о четырех лжецах 240
 Замечательные точки и линии в треугольнике III. 1
 Закон взаимности III. 7
 Закон всемирного тяготения Ньютона 285
 Закон обращения теоретико-числовых функций III. 8
 Игра 142, 150, 187
 — в 14 187
 — на совпадение чисел 211
 Идемпотеитный базис матриц 97
 Измеримые множества 103
 Иверсор Поселье 220
 Интеграл несобственный 119, 210, 213, 293
 — определенный 3, 230
 Интерполяционный многочлен Ньютона III. 14
 Иррациональные числа 233
 Касательные к окружности 35
 — к параболе III. 29
 Квадрат 16, 57, 126, 166, 260
 — магический 374, 378
 Квадратичная форма, приведение к сумме квадратов 99
 Квадратичный вычет III. 7, III. 40
 — невычет III. 7, 107
 Комплексные числа 69, 291, 341
 Конгруэнтные пучки прямых III. 3
 Конечные разности III. 14, 20, 77
 Коническое сечение III. 3
 — — вырожденное III. 3
 — — невырожденное III. 3
 Конкурентные прямые 62

- Контактная схема 317
 Континуум-гипотеза Кантора 229
 Коиус 17, 371
 Кольцо булево 205
 — гауссова III. 10
 — с делением 269
 Корни алгебраического уравнения 24, 25, 34, 90, 164
 — характеристического уравнения 116
 Кривизна 162
 Кривые постоянной ширины 349
 Криптарифм 310, 366
 Критерий Эйлера III. 7
 Куб 391
 Кубический многочлен 32, 318, 328
 Лемнискатное множество 289
 Линия «погони» 154
 — сгиба 324
 Логарифм, натуральный 157
 Логические задачи 110, 252, 312, 370
 Магический квадрат 374, 378
 Малая теорема Ферма III. 6, 257
 Мартышка и кокосовые орехи 42
 Матрицы 12, 192, 337, 357, 393
 Мёбиуса функция III. 8, 189
 Медианы симплекса 92
 Менелая теорема III. 25
 Мера 103
 Мерсенна числа 267
 Метод бесконечного спуска 107
 Многогранники 358, 400
 — выпуклые 148
 Многоугольники 72, 145, 185, 390
 — выпуклые 59, 117, 365
 Многочлен 24, 278, 343
 — Бернулли второго рода 248
 — Ньютона интерполяционный III. 14
 — однородный 14, 36
 —, разложение на множители 88, 101
 — симметрический 159
 — четвертой степени 379
 Множество точек минимума функции двух переменных 273
 Модуль непрерывности 153
 — функции вещественного переменного 132
 — комплексного переменного 133, 217, 250, 292
 Нагеля точка III. 1
 Наиболее экономичное сопротивление 60
 Наибольший общий делитель 188, 392
 Наименьшее общее кратное 138
 Направляющие косинусы 106
 Натуральные числа 361, 364
 Неассоциативное умножение 155
 Невычет квадратичный III. 40
 Недесятичная система счисления 177, 221, 287
 «Незаконное» сокращение 302
 Необычное умножение 130
 Непрерывная дробь 244
 — функция 33
 Непрерывность по Чезаро 214
 Неравенства 33, 118, 132, 138, 139, 156, 157, 166, 181, 185
 Неравенство для концов отрезков на числовой оси 141
 — треугольника 202
 — Шура III. 39
 Непрямляемая кривая 137
 Норма гауссова числа III. 10
 Обезьяна и груз 8
 Объем симплекса 216
 — тела вращения 307
 Огибающая семейства кривых 51
 Окружность девяти точек 261, 315
 Описанная гиперсфера симплекса 140
 — окружность 315
 — сфера тетраэдра 281
 Ортоцентр треугольника III. 1, 227
 Определитель 5, 18, 34, 49, 66, 67, 68, 73, 82, 87, 93, 124, 125, 151, 169, 170, 188, 300, 353, 368, 378, 384
 — произведения прямоугольных матриц III. 33
 — функциональный 43, 151, 218
 Парабола 10, 13, 85, 114, 152, 167
 Параболоид вращения 355
 Паскаля теорема III. 4
 — треугольник 66
 Пелля уравнение III. 9
 Перестановка 190
 — с повторениями 109

- циклическая 165
- членов ряда 197
- Пифагоровы треугольники 78, 323, 377
- Плоская кривая с экстремальным свойством 45
- Площадь треугольника на комплексной плоскости III. 21
- Показательная функция 182
- Полный четырехсторонник III. 2
- четырехугольник III. 2
- Полуправильные тетраэдры III. 38
- Полюс III. 5
- Полярное соответствие III. 5
- Последовательность числовая 30, 38, 294, 348
- Постоянная Эйлера III. 12, 171, 172, 238, 275, 380
- Постулат Бертрана III. 41
- Правило Декарта 90
- Предел 55, 72, 77, 394
- последовательности 30, 226, 268, 348
- Представление натуральных чисел в виде суммы двух квадратов III. 10
- — — — — k й степени целого числа и простого числа 239
- Проверка правильности утверждения 22, 39, 229, 385
- Проективное преобразование III. 2
- соответствие III. 2
- — между прямыми в двух пучках III. 3
- Произведение бесконечное 182, 197, 228, 253, 308
- отражений 395
- последовательных целых чисел 98, 144
- Простота числа, условие 332
- Простые числа 100, 107, 199, 266, 335
- — в арифметической прогрессии 305
- —, распределение 183
- Прямая Симсона III. 22, 85
- Эйлера III. 1, 261
- Прямоугольные треугольники рациональные 78
- Прямые и точки 178
- Равнобедренные n -точечники 360
- Равномерно ограниченные суммы 284
- Равносторонний треугольник 10, 16, 53
- Разбиение на классы 190
- числа на слагаемые 180
- Разложение в степенной ряд 7
- целого числа в произведение целых чисел 215
- числа $\ln 2$ в ряд 111
- — π в ряд 29, 52, 111, 249, 256, 387
- Распределение простых чисел 183
- — — специального вида 297
- Рациональные точки на окружности 383
- числа 70, 78, 383
- Решение уравнений в целых числах 6, 23, 44, 65, 95, 194, 209, 331
- Римана дзета-функция III. 11, III. 37
- Род графа 345
- Ряд гармонический 304, 338, 380, 381
- , признак сходимости Гаусса III 16
- расходящийся 235
- степенной 20, 186, 228, 253, 321
- функциональный 286
- Фурье 241
- числовой 2, 50, 64, 161, 197, 198, 223, 242, 258, 298, 362
- Символ Лежандра III. 7
- Симметрические функции 159, 189
- Система линейных уравнений 290
- Спрямоугольная кривая 137
- Сравнение III. 6, 63, 91, 120, 196, 327, 332, 398
- Среднее квадратичное 41
- Степени натуральных чисел 124, 245, 319, 322
- Строго выпуклая функция III. 13
- Ступенчатая функция 282
- Сумма Гаусса III. 26
- последовательных целых чисел 144

- степеней натуральных чисел 58
- чисел, обратных целым 70
- Сфера 26, 330
- Теорема Брианшона III. 4
- Вильсона III. 6, 398
- Дезарга III. 4
- Дирихле III. 31
- Паскаля III. 4
- о среднем значении 204, 282
- Фейербаха III. 1
- Ферма великая 48, 309
- — малая III. 6, 257
- Хелли 278
- Чебышёва III. 32
- Чевы III. 1, 123
- Эйлера III. 1
- Теоретико-числовая функция 163
- Тетраэдр 47, 143, 281, 320, 342
- Тетраэдр полуправильный III. 38
- Тождество 49, 105
- Эйлера III. 30
- Точка Жергона III. 1
- Точки Фейербаха III. 1
- Эйлера III. 1
- Трансверсали 115, 123
- Трансцендентное уравнение 295
- Треугольник 32, 40, 53, 62, 85, 108, 113, 115, 121, 123, 152, 156, 158, 160, 167, 173, 176, 181, 202, 225, 227, 315, 316, 320, 369, 389
- Паскаля 66
- с целочисленными сторонами 121
- — — и площадью 173
- Тригонометрические многочлены 203
- уравнения 174, 175, 195
- функции 234, 283
- Угол Брокера 160
- наклона касательной 162
- Умножение неассоциативное 155
- необычное 130
- Уравнение Клеро 254
- Пелля III. 9
- алгебраическое 24, 25, 34, 67, 90, 147, 164
- дифференциальное в частных производных первого порядка 136
- обыкновенное дифференциальное 61, 122, 254, 372
- функциональное 4, 9, 83, 94, 131
- Факториал 56, 90, 146, 191, 224, 350
- Факторизация дифференциального оператора 168
- Фарея дроби III. 34
- Фейербаха теорема III. 1
- точки III. 1
- Ферма великая теорема 48, 309
- малая теорема III. 6, 257
- Фибоначчи числа 127, 267, 339, 384
- Формула Гаусса III. 26
- Эйлера 373
- Функция аналитическая 36, 128, 237, 262
- выпуклая III. 13
- гармоническая 27
- , естественная граница 262
- Мёбиуса III. 8, 189
- непрерывная 33
- симметрическая 159, 189
- строго выпуклая III. 13
- ступенчатая 282
- Эйлера III. 8, 251
- — $d|^{(n)}(x)$ 296
- Функциональное уравнение Коши III. 15
- Функциональные уравнения 4, 9, 83, 94, 131
- Ханойская башня 150
- Хелли теорема 278
- Целая часть числа 270, 294
- Цилиндр 314
- Циркулянт III. 17, 5
- Чебышёва теорема III. 32
- Чевы теорема III. 1, 123
- Чевяны III. 1, 389
- Четырехсторонник полный III. 2
- Четырехугольник выпуклый 363
- полный III. 2
- Числа Бернулли 28
- взаимно простые 134
- Гаусса III. 10
- иррациональные 233
- , обратные целым 125, 258, 280, 382

- простые 100, 107, 183, 199, 266, 305, 335
- рациональные 383
- Фибоначчи 127, 267, 339, 384
- Числовая последовательность 30, 38, 294, 348
- Эллипс 74, 76, 104, 176, 367
- Эйлера гамма-функция III. 11, 77, 179
- критерий III. 7
- постоянная III. 12, 171, 172, 238, 275, 380
- теорема III. 1
- тождество III. 30
- точки III. 1
- Штейнера эллипс III. 23

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора русского издания	5
I. Задачи	13
II. Решения и ответы	117
III. Дополнение редактора русского издания	545
Предметный указатель	591